

В.А. КУДИНОВ, Э.М. КАРТАШОВ,
Е.В. СТЕФАНЮК

ТЕПЛОТЕХНИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Рекомендовано Научно-методическим советом по теплотехнике
Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки бакалавров и магистров
в области технических наук и по направлениям подготовки
дипломированных специалистов в области техники и технологии*

Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

Соответствует
Федеральному государственному
образовательному стандарту
3-го поколения

МОСКВА
КУРС
ИНФРА-М
2019

УДК 536.2(075) 46(075.8)
ББК 31.31
К 88

ФЗ
№ 436-ФЗ

Издание не подлежит маркировке
в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11

Рецензенты:

П.Г. Алексеев — д-р техн. наук, проф. (кафедра «Процессы и аппараты химической технологии» МИТХТ им. М.В. Ломоносова)
А.А. Валишин — д-р физ.-мат. наук, проф. (кафедра «Прикладная математика» МВТУ им. Н.Э. Баумана)

Кудинов В.А., Карташов Э.М., Стефанюк Е.В.

К 88 Теплотехника: Учеб. пособие / В.А. Кудинов, Э.М. Карташов, Е.В. Стефанюк — М.: КУРС: ИНФРА-М, 2019. — 424 с., ил. (Высшее образование).

ISBN 978-5-905554-80-3 (КУРС)

ISBN 978-5-16-010393-8 (ИНФРА-М, print)

В первой части книги рассмотрены основные законы термодинамики, процессы сжатия в компрессорах, циклы двигателей внутреннего сгорания, газотурбинных и паротурбинных установок, циклы холодильных машин. Рассмотрен эксергетический метод анализа теплоэнергетических установок.

Во второй части книги изложены инженерные методы построения решений задач стационарной и нестационарной теплопроводности, позволяющие получать достаточно эффективные аналитические решения для однослойных и составных конструкций.

С помощью интегрального метода теплового баланса на основе введения фронта температурного возмущения и при использовании дополнительных граничных условий получены аналитические решения задач теплопроводности с переменными начальными условиями, переменными во времени граничными условиями и внутренними источниками теплоты, нелинейных задач теплопроводности, задач теплопроводности для многослойных конструкций, а также задач теплообмена в жидкостях, включая динамический и тепловой пограничные слои.

Для студентов вузов, научно-технических работников, специализирующихся в области математики, теплофизики, теплотехники, а также для специалистов в области расчетов и проектирования композиционных материалов.

УДК 536.2(075)46(075.8)
ББК 31.31

ISBN 978-5-905554-80-3 (КУРС)
ISBN 978-5-16-010393-8 (ИНФРА-М, print)

© Коллектив авторов, 2015
© КУРС, 2015

ВВЕДЕНИЕ

До 50-х гг. XIX в. теплота рассматривалась в науке как особое не-весомое, неуничтожимое и несоздаваемое вещество, которое имело название «теплород». М.В. Ломоносов был одним из первых, кто опроверг эту теорию. В своей работе «Размышление о причинах теплоты и холода», изданной в 1774 г., он утверждал, что теплота является формой движения мельчайших частиц тела, заложив тем самым основы механической теории теплоты. М.В. Ломоносов одним из первых высказал идею закона сохранения энергии. Его формулировка этого закона еще не содержала количественных соотношений, но, несмотря на это, отчетливо и полно определяла сущность сохранения и превращения энергии.

Лишь столетие спустя этот закон благодаря работам Ю. Майера, Г. Гельмгольца, Дж. Джоуля получил всеобщее признание. В 1842 г. появилась работа естествоиспытателя Ю. Майера «Размышления о силах неживой природы». Его формулировка первого закона термодинамики в основном была философски умозрительной. В 1847 г. была издана монография немецкого врача Г. Гельмгольца «О сохранении силы», где подчеркивается общее значение первого начала термодинамики как закона сохранения энергии, дается его математическая формулировка и приложение к технике. В 1856 г. Дж. Джоуль экспериментально доказал существование этого закона.

В 1824 г. появился труд французского инженера С. Карно «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», в котором были заложены основы термодинамики. В этой работе он указал причины несовершенства тепловых машин, пути повышения их коэффициента полезного действия (КПД), сформулировал второй закон термодинамики, идеальный цикл тепловых машин (цикл Карно) и другие важные положения термодинамики.

В 1906 г. В. Нернст сформулировал третье начало термодинамики, согласно которому с приближением абсолютной температуры к нулю интенсивность теплового движения и энтропия стремятся к нулю. Принцип недостижимости абсолютного нуля температур — одно из следствий известной тепловой теоремы Нернста.

Существует еще понятие так называемого нулевого начала термодинамики. Изучая явления в рамках классической термодинамики, как правило, не учитывают молекулярное и атомное строение вещества. При исследовании явлений обращают внимание исключительно на макроскопические свойства системы, которые оценивают по опытным данным измерения макроскопическими приборами: термометрами, калориметрами, манометрами и т. д., поэтому классическая термодинамика является феноменологической наукой. Таким образом, в ней рассматривают лишь результат движения микрочастиц тела, который есть не что иное, как температура тела. Это и есть нулевое начало термодинамики. Его формулируют в виде следующей аксиомы: все тела при тепловом равновесии обладают температурой. Нулевое начало является исходным положением термодинамики, так как тепловое движение происходит во всех телах. Оно неуничтожимо, как неуничтожимо всякое движение в природе.

В конце XIX в. Л. Больцманом и У. Гиббсом были заложены основы статистической термодинамики. В отличие от классической она позволяет вычислять макроскопические характеристики по данным о состоянии микрочастиц тела — их расположению, скоростям, энергии. У. Гиббс внес существенный вклад и в классическую термодинамику, разработав метод потенциалов, установив правило фаз и др.

После создания фундамента термодинамического метода началась разработка его приложений и, прежде всего, к теории тепловых машин. Большое значение имело введенное Ж. Гюи и А. Стодолой понятие работоспособности теплоты, или максимальной технической работы, которую можно получить от имеющегося количества теплоты в заданном интервале температур. В 1956 г. Р. Рант дал этой величине название «эксергия». В отличие от энтропии, всегда возрастающей в реальных процессах и энергии, количество которой строго сохраняется (согласно первому закону термодинамики), эксергия — запас работоспособности или то количество полезной работы, которое можно получить от имеющейся теплоты в заданном интервале температур.

При подготовке первой части книги были использованы работы В.М. Бродянского, В.В. Нащокина, Г.Н. Алексеева, К.А. Путилова, А.В. Болгарского, Г.А. Мухачева, В.К. Щукина, А.С. Ястржембского, М.П. Вукаловича, Л.В. Радушкевича, Д.П. Гохштейна, Е.В. Дрыжакова.

При подготовке второй части книги были использованы работы А.В. Лыкова, П.В. Цоя, Н.М. Беляева, А.А. Рядно, Л.В. Канторовича, Б.С. Петухова, М.А. Михеева, Л.Р. Лойцянского, А.И. Леонтьева, Я.С. Подстригача, Ю.М. Коляно.

ЧАСТЬ I

ГЛАВА 1

ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1.1. Термодинамическая система и окружающая среда

Термодинамической системой называется совокупность материальных тел, являющихся объектом изучения и находящихся во взаимодействии с окружающей средой. Простейшим примером может служить газ, находящийся в цилиндре с поршнем. Окружающей средой здесь являются цилиндр и поршень, воздух, который их окружает, и т.д.

Термодинамическая система называется *изолированной*, если не допускает обмена с окружающей средой как теплотой, так и работой. Она является *полуизолированной*, если возможен обмен либо теплотой, либо работой. Система называется *неизолированной*, если она обменивается со средой и теплотой, и работой.

Система, имеющая во всех своих частях одинаковый состав и физические свойства, называется *физически однородной*. Однородная термодинамическая система, внутри которой нет поверхности раздела, называется *гомогенной* (лед, вода, пар), в противном случае — *гетерогенной* (лед и вода, вода и пар и др.).

Рабочее тело — тело, посредством которого взаимно превращаются теплота и работа. Например, в паровых турбинах рабочим телом является водяной пар, в газовых — газ, в холодильных установках — фреоны, аммиак, углекислота и др.

§ 1.2. Основные термодинамические параметры состояния

Каждое равновесное состояние (см. § 1.3) термодинамической системы характеризуется определенными физическими величинами — равновесными параметрами состояния. **Внутренние параметры** — давление, температура, объем и др. — характеризуют внутреннее состояние системы, **внешние** — ее положение (координаты) во внешних силовых полях и скорость.

Внутренние параметры, в свою очередь, подразделяются на интенсивные и экстенсивные. Значение *интенсивных* не зависит от размеров (массы) тела — это давление, температура, удельный объем (но не объем), удельная теплоемкость. *Экстенсивные* параметры зависят от количества вещества в системе — это объем, масса и др.

В термодинамике существует также деление параметров на *термические* (давление, температура, объем) и *калорические* (удельная энергия, удельная теплоемкость, удельные скрытые теплоты фазовых переходов).

Для характеристики конкретных условий, в которых находится данная система, или процесса, идущего в системе, необходимо прежде всего знать такие внутренние параметры состояния, как удельный объем, абсолютное давление, абсолютная температура.

Удельный объем (v , м³/кг) — это объем единицы массы, или величина, определяемая отношением объема к его массе:

$$v = \frac{V}{m}, \quad (1.1)$$

где V — объем произвольного количества вещества, м³; m — масса этого вещества, кг.

Величина, обратная удельному объему, называется *плотностью* (ρ , кг/м³); или это есть масса вещества, содержащегося в единице объема:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1}{v}. \quad (1.2)$$

Давление (p , Па) — величина, определяемая отношением силы (нормальной составляющей), действующей на поверхность, к площади этой поверхности:

$$p = \frac{F_n}{S}, \quad (1.3)$$

где F_n — нормальная составляющая силы, Н; S — площадь поверхности, нормальной к действующей силе, м^2 .

Согласно Международной системе единиц (СИ) давление измеряют в ньютонах на квадратный метр ($\text{Н}/\text{м}^2$). Эта единица измерения давления называется паскалем (Па).

До настоящего времени в технике используют также «старую» единицу измерения давления — техническую атмосферу (ат), представляющую собой силу в 1 кгс, действующую на 1 см^2 площади:

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс}/\text{см}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па} = 0,981 \text{ бар}.$$

Различают давления атмосферное, избыточное и разрежение (вакуум). Атмосферным называется давление атмосферного воздуха на уровне моря. За его единицу принято давление столба ртути высотой 760 мм (физическая атмосфера, атм). Таким образом, $1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.}$ Давление, которое больше атмосферного, называют избыточным, а меньше — разрежением. Для его измерения применяют манометры, барометры, вакуумметры.

Термодинамическим параметром состояния является только абсолютное давление, которое отсчитывается от абсолютного нуля давления или абсолютного вакуума.

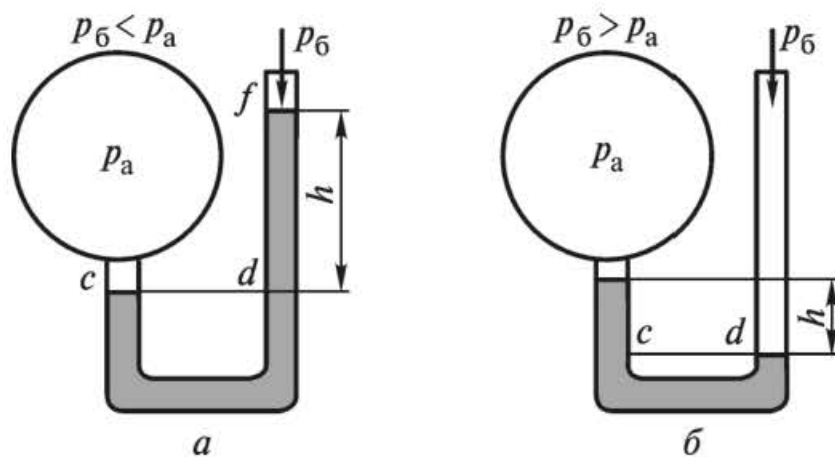
В технике применяют приборы, измеряющие не абсолютное (полное) давление, а разность между абсолютным и атмосферным (барометрическим) давлением. Приборы, применяемые для измерения давлений, больших атмосферного, называются манометрами. Они показывают избыток давления измеряемой среды над атмосферным (манометрическое давление). Для измерения давлений, меньших атмосферного, применяют вакуумметры, которые показывают, насколько абсолютное давление окружающей среды меньше атмосферного. Эту недостатку давления до атмосферного называют вакуумом.

Если давление в емкости больше атмосферного (рис. 1.1, *a*), то в точках *c* и *d* левого и правого колена трубки давления будут одинаковыми, так как жидкость находится в равновесии, а точки *c* и *d* лежат на одном уровне. Условие равновесия сил относительно уровня *cd* записывается в виде

$$F = F_1 + F_2,$$

где F — сила давления газа на жидкость в трубке в точке *c*, $F = p_a S$; F_1 — сила давления атмосферного воздуха на жидкость в трубке в точке *f*, $F_1 = p_6 S$; F_2 — сила давления столба жидкости высотой h в точке *d* (вес столба жидкости высотой h), $F_2 = \rho gh S$.

Подставляя формулы для сил давления в условие равновесия, получаем



Р и с. 1.1. Схема измерения давления V-образным манометром

$$p_a S = p_б S + \rho g h S,$$

где p_a — абсолютное (полное) давление газа в емкости; S — площадь сечения трубки манометра; $p_б$ — атмосферное (барометрическое) давление по барометру; ρ — плотность жидкости в манометре; g — ускорение свободного падения, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

После сокращения на S получаем

$$p_a = p_б + \gamma h, \quad (1.4)$$

где γ — удельный вес манометрической жидкости, $\gamma = \rho g$; $\gamma h = p_m$ — манометрическое давление столба жидкости высотой h , выраженное в тех же единицах, в каких даны давления p_a и $p_б$.

Из формулы (1.4) следует, что $p_m = p_a - p_б$. Таким образом, манометром определяется избыток давления измеряемой среды над атмосферным.

Если давление в емкости меньше атмосферного, то условие равновесия сил, действующих на жидкость в манометре, относительно уровня cd будет иметь вид (рис. 1.1, б)

$$p_б S = p_a S + \rho g h S.$$

Отсюда $p_a = p_б - p_v$, где p_v — давление, создаваемое столбом жидкости высотой h , $p_v = \rho g h$. Оно определяет вакуум в резервуаре, т.е. вакуумом называют недостачу давления p_a в емкости до атмосферного.

Избыточное давление и вакуум не являются параметрами состояния, так как они при одном и том же абсолютном давлении могут принимать различные значения в зависимости от атмосферного давления.

В технике применяется достаточно много единиц измерения давления. Соотношения между ними приведены в табл. 1.1.

Т а б л и ц а 1.1

Единицы измерения давления	Бар	Паскаль Па (Н/м ²)	Физическая атмосфера, атм	Техническая атмосфера, ат (кгс/см ²)	Миллиметры ртутного столба, мм рт. ст.	Миллиметры водного столба, мм вод. ст.
1 бар	1	10 ⁵	0,987	1,02	750	10 200
1 Н/м ²	10 ⁻⁵	1	—	—	—	—
1 атм	1,013	101300	1	1,033	760	10 330
1 ат	0,981	98100	0,968	1	735,6	10 000
1 мм рт. ст.	0,00133	133	0,001316	0,00136	1	13,6
1 мм вод. ст.	9,81 · 10 ⁻⁵	9,81	9,68 · 10 ⁻⁵	10 ⁻⁴	0,0736	1

При замере давлений жидкостными приборами вследствие расширения жидкости при нагревании ее объем увеличивается и, следовательно, увеличивается столб жидкости, что приводит к неправильным показаниям приборов. При таких замерах необходимо высоту столба приводить к 0 °С. Это приведение проводится по формуле

$$h_0 = h(1 - \alpha t),$$

где h_0 — показания барометра (манометра), приведенные к 0 °С; h — высота столба жидкости, наблюдаемая при t °С; α — объемный коэффициент расширения жидкости (для ртути $\alpha = 0,000172$).

Температура (T , К) — величина, характеризующая степень нагретости тел. Она представляет собой меру средней кинетической энергии поступательного движения молекул. Чем больше средняя скорость движения молекул, тем выше температура тела.

Взаимосвязь между средней кинетической энергией поступательного движения молекул $mw^2/2$ и абсолютной температурой идеального газа T описывается соотношением

$$T = \frac{2}{3k_B} \frac{mw^2}{2},$$

где m — масса молекулы; w — средняя квадратичная скорость поступательного движения молекул; k_B — постоянная Больцмана, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

В настоящее время используют две температурные шкалы.

1. Международная практическая температурная шкала, в которой за основные реперные точки приняты точка таяния льда ($t_0 = 0$ °С) при нормальном атмосферном давлении ($p_0 = 760$ мм рт. ст.) и кипение

ния воды при том же давлении ($t_k = 100\text{ }^\circ\text{C}$). Разность показаний термометра в двух этих точках, деленная на 100, представляет собой $1\text{ }^\circ\text{C}$.

2. Термодинамическая шкала температур, основанная на втором законе термодинамики. Началом отсчета здесь является температура $T = 0\text{ K} = -273,15\text{ }^\circ\text{C}$. Измерение температур в каждой из этих двух шкал может проводиться как в кельвинах (К), так и в градусах Цельсия ($^\circ\text{C}$) в зависимости от принятого начала отсчета.

Между температурами, выраженными в кельвинах и градусах Цельсия, имеется следующее соотношение

$$T\text{ K} = 273,15 + t\text{ }^\circ\text{C}. \quad (1.5)$$

В так называемой тройной точке, где жидкая, твердая и газообразная фазы находятся в устойчивом равновесии, температура в кельвинах равна $T = 273,16\text{ K}$, а в градусах Цельсия — $t = 0,01\text{ }^\circ\text{C}$.

Параметром состояния является абсолютная температура, выраженная в кельвинах, но градус абсолютной шкалы численно равен градусу Цельсия, так что $dT = dt$.

Абсолютная температура — величина всегда положительная. При температуре абсолютного нуля ($T = 0\text{ K} = -273,15\text{ }^\circ\text{C}$) прекращается тепловое движение молекул. Абсолютный нуль температуры недостижим, так как тепловое движение молекул — неотъемлемый атрибут материи, и его прекращение приводит к нарушению закона ее сохранения.

§ 1.3. Термодинамический процесс

Под термодинамическим процессом понимается совокупность последовательных состояний, через которые проходит термодинамическая система при ее взаимодействии с окружающей средой.

Состояние термодинамической системы может быть равновесным и неравновесным. **Равновесным** называют такое состояние системы, при котором во всех точках ее объема все параметры состояния и физические свойства одинаковы (давление, температура, удельный объем и др.). В термодинамике постулируется, что изолированная система с течением времени всегда приходит в состояние термодинамического равновесия и никогда не может самопроизвольно выйти из него.

Все процессы, происходящие в термодинамической системе, подразделяются на равновесные и неравновесные. **Равновесными** называются такие процессы, когда система проходит ряд последовательных равновесных состояний. Если процесс протекает настолько мед-

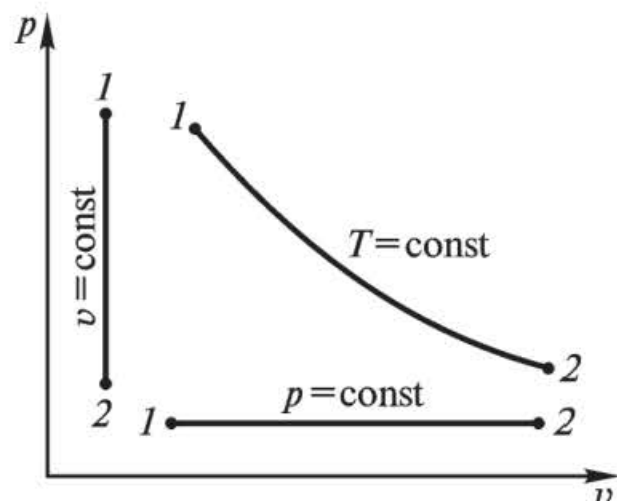
ленно, что в каждый момент времени устанавливается равновесие, то его называют **квазистатическим**. Он обладает свойством обратимости.

Неравновесными называются такие процессы, при протекании которых система не находится в состоянии равновесия. Процесс перехода из неравновесного состояния в равновесное называется **релаксацией**, а время перехода в состояние равновесия — временем релаксации.

Все реальные процессы, протекающие в природе, являются неравновесными. Это определяется тем, что при их протекании с конечной скоростью в рабочем теле не успевает установиться равновесное состояние. Например, при быстром расширении газа в цилиндре с поршнем температура и давление в различных точках объема рабочего тела не будут одинаковыми, т.е. будет иметь место неравновесное состояние, а сам процесс будет неравновесным. Следовательно, реальные процессы, будучи неравновесными, могут лишь в той или иной степени приближаться к равновесным, никогда с ними в точности не совпадая.

Однако термодинамика в первую очередь рассматривает равновесные процессы и состояния, так как только они могут быть описаны количественно с помощью уравнений состояния. Лишь равновесные процессы изменения состояния термодинамической системы можно изображать графически. Всякое произвольно взятое равновесное состояние в трехосной системе координат pVT изображается точкой, а совокупность этих точек при непрерывном изменении состояния — некоторой кривой, представляющей собой графическое изображение равновесного процесса. Однако использовать трехосную систему координат затруднительно, поэтому на практике пользуются проекциями кривых трехосной системы на плоскости в прямоугольной системе координат. В технической термодинамике для исследования равновесных термодинамических процессов наиболее часто применяют двухосную систему координат pv . В ней вертикаль изображает изохорный процесс, горизонталь — изобарный, кривая вида гиперболы — изотермический (рис. 1.2). Кроме того, в термодинамике рассматривают адиабатный процесс, совершающийся при отсутствии теплообмена ($dq = 0$), и политропный — обобщающий процесс, частными случаями которого являются первые четыре.

Любой параметр состояния является также функцией состояния, так как его изменение в любом термодинамическом процессе не зависит от вида процесса, а определяется лишь начальным и конечным состояниями.



Р и с. 1.2. Газовые процессы

К термодинамическим процессам относится также круговой процесс, или цикл. **Циклом** называется совокупность процессов, возвращающих систему в первоначальное состояние. На диаграммах он изображается замкнутым контуром, вид которого полностью определяется числом и формой составляющих его процессов. Графическое изображение и изучение циклов в пространственной системе координат было бы еще более трудным, чем отдельных процессов, поэтому их точно так же проецируют на одну из координатных плоскостей.

§ 1.4. Уравнение состояния

Уравнение, устанавливающее связь между давлением, температурой и удельным объемом среды постоянного состава, называется термическим уравнением состояния. Общий вид этого уравнения

$$f(p, v, T) = 0. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) в пространстве отображает поверхность, которая характеризует все возможные равновесные состояния однородной термодинамической системы, и называется *термодинамической поверхностью*, или *поверхностью состояния*. На термодинамической поверхности каждому состоянию системы соответствует определенная точка.

В уравнении (1.6) число независимых параметров будет равно двум из трех (p, v, T), так как любой из них является однозначной функцией двух заданных. Например, если принять за независимые переменные v и T , то p можно выразить как функцию v и T , т.е. $p = f(v, T)$; если за независимые переменные принять p и T , то удельный объем $v = f(p, T)$.

Если один из параметров системы будет постоянной величиной, то переменных величин будет две, и точки, изображающие состояние системы, будут лежать на одной плоскости, которая пересекает термодинамическую поверхность перпендикулярно к оси координат, на которой берется постоянная величина. Такие системы координат на плоскости называются диаграммами состояния вещества. Наиболее часто применяются диаграммы с координатами pv , pT , vT , Ts , is (s — энтропия; i — энтальпия).

Относительно функциональной формы уравнения состояния можно отметить, что для каждого вещества характер функциональной связи индивидуален, и термодинамические свойства описываются конкретным для него уравнением состояния. Вопрос построения уравнения состояния окончательно не решен даже для газов, не говоря уже о жидких и твердых телах.

Теория уравнения состояния пока разработана лишь для идеального газа, для газов, имеющих небольшую плотность, и в меньшей степени для плотных газов.

Уравнение состояния идеального газа впервые было получено Б. Клапейроном в 1834 г. путем объединения уравнений законов Бойля—Мариотта и Гей-Люссака — $pv/T = \text{const}$. Обозначая константу через R , получаем

$$pv = RT, \quad (1.7)$$

где R — удельная газовая постоянная, отнесенная к массе газа, равной 1 кг; Дж/(кг · К).

Уравнение (1.7) записано для 1 кг газа. Для произвольной массы уравнение состояния будет иметь вид

$$pV = mRT, \quad (1.8)$$

где V — объем газа, м³.

Газ, состояние которого точно описывается уравнением (1.7), называется идеальным. Многие реальные газы при малых плотностях и достаточно высоких температурах по своим свойствам приближаются к идеальным, поэтому для их расчетов может быть применено уравнение (1.7).

Умножая обе части уравнения (1.7) на молярную массу μ , получаем

$$pV_\mu = R_\mu T, \quad (1.9)$$

где V_μ — объем, занимаемый одним молем газа, $V_\mu = v\mu$; R_μ — универсальная газовая постоянная, одинаковая для всех газов, $R_\mu = \mu R$.

В СИ за единицу количества вещества принят моль, равный количеству вещества системы, в которой содержится столько же структурных элементов (атомов, ионов, электронов, молекул и других частиц), сколько атомов находится в 0,012 кг изотопа углерода ^{12}C . Таким образом, молем называется количество вещества в граммах, численно равное его молярной массе.

Молярной массой химически однородного вещества называется величина, равная отношению массы вещества к числу его молей:

$$\mu = m/N,$$

где μ — молярная масса; m — масса; N — число молей вещества. Единица измерения молярной массы в СИ — кг/моль.

Молярным объемом вещества называется величина, определяемая отношением объема, занимаемого N молями вещества, к числу этих молей:

$$V_\mu = V/N,$$

где V_μ — молярный объем; V — объем вещества, м^3 . Единица измерения молярного объема в СИ — $\text{м}^3/\text{моль}$.

Итальянский ученый Авогадро в 1811 г. доказал, что в равных объемах различных идеальных газов при одинаковых температурах и давлениях содержится одинаковое число молекул. Из закона Авогадро следует, что при одинаковых температурах и давлениях плотности газов изменяются пропорционально их молярным массам, т.е.

$$\rho_1/\rho_2 = \mu_1/\mu_2.$$

Заменяя плотности на удельные объемы, находим

$$v_1\mu_1 = v_2\mu_2.$$

Отсюда следует, что при одинаковых физических условиях произведение удельного объема газа на его молярную массу есть величина постоянная, независимо от природы газа

$$v\mu = \text{const.}$$

Следовательно, при одинаковых температурах и давлениях один моль различных идеальных газов занимает одинаковый объем. Например, при нормальных физических условиях (p_0 , T_0) объем одного моля любого идеального газа равен $V_\mu = 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль} = 22,41 \text{ м}^3/\text{кмоль} = 22,41 \text{ л}$.

Число одинаковых структурных элементов (молекул) в объеме одного моля для любого идеального газа неизменно и составляет величину $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹, называемую числом Авогадро.

Подставляя значение $V_\mu = \mu v = 22,41 \cdot 10^{-3}$ м³/моль в соотношение (1.9), при нормальных физических условиях (p_0, T_0) находим

$$R_\mu = \frac{p_0 V_\mu}{T_0} = 8,3143 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}). \quad (1.10)$$

Универсальная газовая постоянная R_μ есть работа одного моля идеального газа в изобарном процессе при изменении температуры на один градус. Она одинакова для всех газов и равна μR .

Отсюда универсальное уравнение состояния для одного моля газа будет

$$pV_\mu = 8,3143 T. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) было выведено Д.И. Менделеевым в 1874 г. и называется уравнением состояния Клапейрона — Менделеева. Оно является наиболее общим для идеальных газов, так как связывает три идеальных закона (Гей-Люссака, Бойля—Мариотта и Авогадро), а также включает универсальную газовую постоянную, не зависящую от природы газа.

§ 1.5. Уравнения состояния реальных газов

Реальные газы отличаются от идеальных тем, что их молекулы имеют конечные собственные объемы и связаны между собой силами взаимодействия, имеющими электромагнитную и квантовую природу. С увеличением расстояния между молекулами силы взаимодействия уменьшаются, с уменьшением — переходят в силы отталкивания, достигающие очень больших значений.

Таким образом, свойства реальных газов как в количественном, так и качественном отношении значительно отличаются от свойств идеальных газов. Поэтому все результаты, полученные на основании законов для идеальных газов, будут приближенными и справедливыми лишь при очень больших разрежениях. В связи с этим возникла необходимость в разработке уравнения состояния, которое точно описывало бы состояние реального газа. Одно из таких уравнений было получено Боголюбовым и Майером:

$$pv = RT \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i+1} \frac{B_i}{v^i} \right],$$

где B_i — вириальные коэффициенты, выражающиеся через потенциальную энергию взаимодействия данного газа и его температуру.

Однако полученное уравнение в общем виде не может быть использовано для непосредственных расчетов реальных газов ввиду сложностей определения коэффициентов B_i . В отдельных частных случаях, когда известен закон изменения потенциальной энергии взаимодействия между двумя молекулами в зависимости от расстояния между ними и при наличии определенного количества экспериментальных данных, может быть получено расчетное уравнение какого-либо реального газа в достаточно широком диапазоне изменения параметров. Из-за сложности определения вириальных коэффициентов обычно ограничиваются расчетом первых двух из них. В этом случае расчетное уравнение имеет вид

$$pv = RT \left(1 - \frac{A}{v} - \frac{B}{v^2} \right),$$

где A и B — первый и второй вириальные коэффициенты, являющиеся функцией только температуры.

В настоящее время уравнения подобного вида получили широкое распространение при расчете свойств многих реальных газов. Наиболее простым и качественно верно отображающим изменение состояния реального газа является уравнение Ван-дер-Ваальса, которое является частным случаем общего уравнения состояния Майера—Боголюбова, если пренебречь в правой части всеми членами, содержащими $1/v$ во второй степени и выше. Уравнение Ван-дер-Ваальса было получено в 1873 г. и имеет вид

$$RT = \left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b),$$

где a — коэффициент пропорциональности, имеющий определенное числовое значение для каждого отдельного газа, не зависящее от параметров состояния; b — наименьший объем, до которого можно сжать реальный газ. Для каждого газа величина b имеет определенное числовое значение.

Уравнение Ван-дер-Ваальса качественно верно отражает состояние реальных веществ в жидком и газообразном состояниях. Для двухфазных состояний оно неприменимо. Для одного моля газа уравнение Ван-дер-Ваальса записывается в виде

$$8,314T = \left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b).$$

Если в уравнении Ван-дер-Ваальса раскрыть скобки и расположить полученные величины по убывающим степеням v , то получим уравнение третьей степени относительно удельного объема газа

$$pv^3 - (bp + RT)v^2 + av - ab = 0.$$

Из математики известно, что такое уравнение при заданных значениях p и T должно иметь три корня. При этом возможны следующие три случая:

- все три корня различны и действительны;
- все три корня действительны и равны между собой;
- один корень действительный и два мнимых (комплексных).

В последнем случае реальное значение имеет лишь один действительный корень, так как мнимые корни не имеют физического смысла.

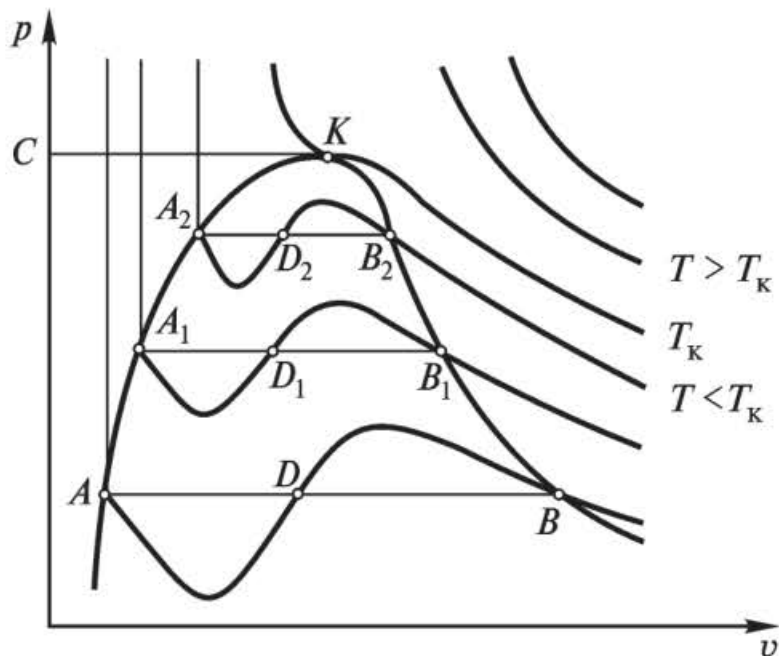
Если на pv -диаграмме построить изотермы, соответствующие уравнению Ван-дер-Ваальса, то они будут иметь вид кривых, изображенных на рис. 1.3. Анализ позволяет заключить, что при сравнительно низких температурах они имеют в средней части волнообразный характер с максимумом и минимумом. При этом, чем выше температура, тем короче волнообразная часть изотермы. Изобара AB , пересекающая изотерму, дает три действительных значения объема в точках A , D и B (три различных действительных корня).

Наибольший корень, равный удельному объему в точке B , относится к парообразному (газообразному) состоянию вещества, а наименьший (в точке A) — к жидкому состоянию. Участок кривой между точками A и B существовать не может, так как уравнение Ван-дер-Ваальса неверно описывает состояние двухфазных систем.

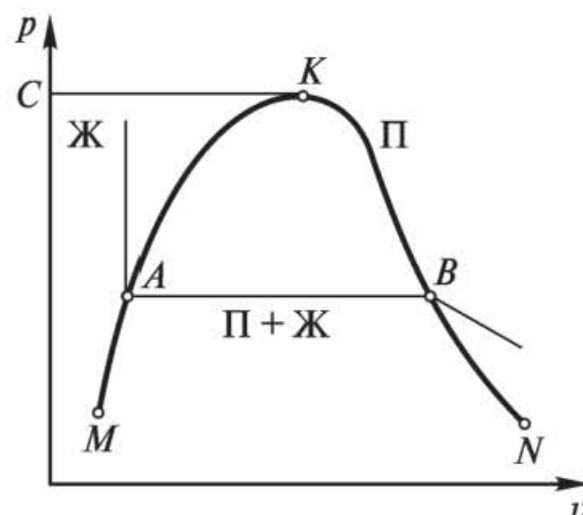
Действительный процесс перехода из жидкого в газообразное состояние изображается прямой линией (изобарой) AB . При этом точка A соответствует состоянию кипящей жидкости, а точка B — сухого насыщенного пара.

При некоторой температуре, называемой критической, изотерма не будет иметь волнообразного участка, есть лишь точка перегиба, касательная к которой должна быть горизонтальной. Это соответствует второму случаю решения уравнения Ван-дер-Ваальса, когда все три корня действительные и равны между собой (точка K на рис. 1.3, 1.4).

При температурах, выше критической, изотермы будут иметь монотонно спадающий характер, следовательно, у уравнения один действительный корень. Если соединить точки A , A_1 , A_2 и т.д., то получим



Р и с. 1.3. Изотермы, найденные по уравнению Ван-дер-Ваальса



Р и с. 1.4. Диаграмма фазовых процессов:

МК — кривая кипящей жидкости; *НК* — кривая сухого пара

кривую, на которой жидкость находится в состоянии кипения (пограничная кривая жидкости — кривая *АК*). Кривая *ВК* называется пограничной кривой пара. Таким образом, для реального вещества *p**v*-диаграмму можно разбить на три характерные области:

- жидкого состояния, расположенную левее кривой *АК*;
- двухфазного состояния (влажного пара), расположенную между кривыми *АК* и *ВК*;
- перегретого пара, расположенную правее кривой *ВК* и выше точки *К*.

Условно область жидкости ограничивают сверху линией *СК*, представляющей собой критическую изобару.

Критическое состояние вещества впервые было открыто Д.И. Менделеевым в 1861 г. Критическую температуру он назвал абсолютной температурой кипения, при которой поверхностное натяжение в жидкости становится равным нулю и исчезает различие между жидким и парообразным состоянием вещества. До этого открытия многие газы безуспешно пытались превращать в жидкость одним только увеличением давления. Однако, как это следует из рис. 1.4, при температурах, выше критических, жидкое состояние вещества отсутствует, поэтому необходимо газ охладить до температуры, ниже критической. Только после этого сжатием по изотерме любой газ можно превратить в жидкость.

При больших плотностях уравнение Ван-дер-Ваальса дает значительные ошибки, связанные с тем, что при его выводе не учитывались

явления силовой ассоциации и диссоциации молекул под влиянием межмолекулярных сил взаимодействия. Кроме того, опытами было доказано, что коэффициенты a и b , входящие в него, описываются достаточно сложными зависимостями от температуры и давления.

Русские ученые М.П. Вукалович и И.И. Новиков в 1939 г. предложили новое универсальное уравнение состояния реального газа, учитывающее явление силовой ассоциации молекул, которое имеет вид

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \left[1 - \frac{C}{vT^{(3+2m)/2}}\right],$$

где a и b — постоянные уравнения Ван-дер-Ваальса; C , m — постоянные, определяемые на основе опытов.

§ 1.6. Энергия. Внутренняя энергия

Энергия является мерой различных форм движения материи. Увеличение или уменьшение энергии системы означает изменение в ней движения в количественном и качественном отношении.

Закон эквивалентных превращений энергии устанавливает, что если различные виды энергии взяты в таких количествах, что вызовут одно и то же состояние данной закрытой системы, то они эквивалентны. Количественные соотношения между различными видами энергии называются эквивалентами.

Всеобщий закон сохранения и превращения энергии в термодинамике трансформируется в «первое начало», или «первый закон термодинамики». Его основные положения будут рассмотрены далее (см. § 1.8).

Закон взаимосвязи между массой и энергией был предложен А. Эйнштейном в виде соотношения

$$E = mc^2,$$

где E — полная энергия тела, имеющего массу m ; c — скорость света, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Масса тела, движущегося со скоростью w , определяется по формуле

$$m = m_0 / \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}},$$

где m_0 — масса покоя тела.

Таким образом, масса и энергия растут или уменьшаются пропорционально c^2 .

В термодинамике полная энергия макросистемы равна

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} + U,$$

где $E_{\text{кин}}$ — кинетическая энергия системы; $E_{\text{пот}}$ — потенциальная энергия системы во внешних силовых полях; U — внутренняя энергия.

Кинетическая энергия системы, имеющей массу m и скорость w , определяется по формуле

$$E_{\text{кин}} = mw^2/2.$$

Изменение *потенциальной* энергии системы равно работе, совершаемой над системой при перемещении ее из одного места силового поля в другое.

Внутренняя энергия — это энергия, заключенная в системе. Она состоит из кинетической энергии поступательного, вращательного и колебательного движения молекул, потенциальной энергии их взаимодействия, энергии внутриатомных и внутриядерных движений частиц и др.

Внутренняя энергия является однозначной функцией внутренних параметров состояния (температуры, давления) и состава системы. Ввиду того, что она является функцией состояния, ее изменение ΔU не зависит от формы пути процесса, а определяется лишь ее значениями в конечном и начальном состояниях, т.е.

$$\Delta U = U_2 - U_1.$$

Внутренняя энергия — величина аддитивная. Это означает, что для сложной системы она определяется как сумма внутренних энергий составляющих частей этой системы, т.е.

$$U = \Sigma U_i.$$

§ 1.7. Теплота и работа

Опыты показывают, что при протекании термодинамического процесса тела, участвующие в нем, обмениваются между собой энергией. В итоге энергия одних тел возрастает, а других — уменьшается. Передача энергии от одних тел к другим может происходить двумя способами.

Первый способ представляет передачу энергии в форме теплоты. Такая передача энергии происходит между телами, имеющими раз-

личную температуру и приведенными в соприкосновение, либо между телами, находящимися на расстоянии, посредством электромагнитных волн (тепловое излучение). При этом энергия передается от более нагретых тел к менее нагретым. Количество энергии, переданное таким способом, называют количеством теплоты.

Теплота, как и любая энергия, измеряется в джоулях. Произвольное количество принято обозначать буквой Q , а удельное (отнесенное к 1 кг) — q . Подведенная теплота считается положительной, а отведенная — отрицательной.

Второй способ — передача энергии в форме работы, а количество переданной энергии называется работой. Передача энергии в этом случае происходит при перемещении всего тела или его части в пространстве. Для этого тело должно либо двигаться в силовом поле, либо изменять свой объем под действием внешнего давления.

Если тело получает энергию в форме работы, то считается, что над ним совершается работа. При отдаче энергии в форме работы тело затрачивает работу. Затраченная работа считается положительной, а совершенная над телом — отрицательной. Работа, как и теплота, измеряется в джоулях. Произвольное количество энергии, переданное в форме работы, обозначается буквой L , а удельное — l .

Таким образом, теплота и работа являются двумя качественно и количественно различными формами передачи энергии от одних тел к другим.

Работа представляет собой макрофизическую форму передачи энергии, а теплота является совокупностью микрофизических процессов. Передача энергии в виде теплоты происходит на молекулярном уровне без видимого движения тел.

§ 1.8. Первый закон термодинамики

Первый закон (первое начало) термодинамики в общем виде представляет собой закон сохранения и превращения энергии. Он налагает строгое ограничение на все процессы природы, которые при всем их разнообразии подчиняются условию сохранения энергии. Дадим несколько формулировок первого закона.

Все виды энергии могут взаимно превращаться в строго равных друг другу количествах, т.е. энергия не возникает из ничего и не исчезает, а переходит из одного вида в другой. При переходе механической энергии в теплоту ее отношение к соответствующему количеству теплоты называется *термическим эквивалентом работы*, который равен $J = L/Q = 4,1868$ Дж/кал, если работа измеряется в

джоулях, а теплота в калориях. Если теплота и работа измеряются в одних единицах, то $J = 1$. Величина, обратная термическому эквиваленту работы, называется *механическим эквивалентом теплоты* $A = 1/J = Q/L$.

Невозможно построить такую периодически действующую машину, с помощью которой можно было бы совершить полезную работу без затраты энергии извне, т.е. получая энергию из ничего. Подобное устройство называется вечным двигателем первого рода, построение и работа которого в соответствии с законом сохранения энергии невозможны.

Внутренняя энергия полностью изолированной системы есть величина постоянная. Доказательство этой формулировки будет дано далее.

Запишем уравнение первого закона термодинамики. Для этого допустим, что к телу подведено некоторое количество теплоты Q . Эта теплота будет затрачена на изменение внутренней энергии ΔU и на совершение работы L . Тогда для тела массой m уравнение эквивалентности будет

$$Q = \Delta U + L, \quad (1.12)$$

где $Q = mq$; $\Delta U = m\Delta u$; $L = ml$.

При $m = 1$ кг соотношение (1.12) примет вид

$$q = \Delta u + l,$$

где q , Δu , l — удельные количество теплоты, изменения внутренней энергии и работы.

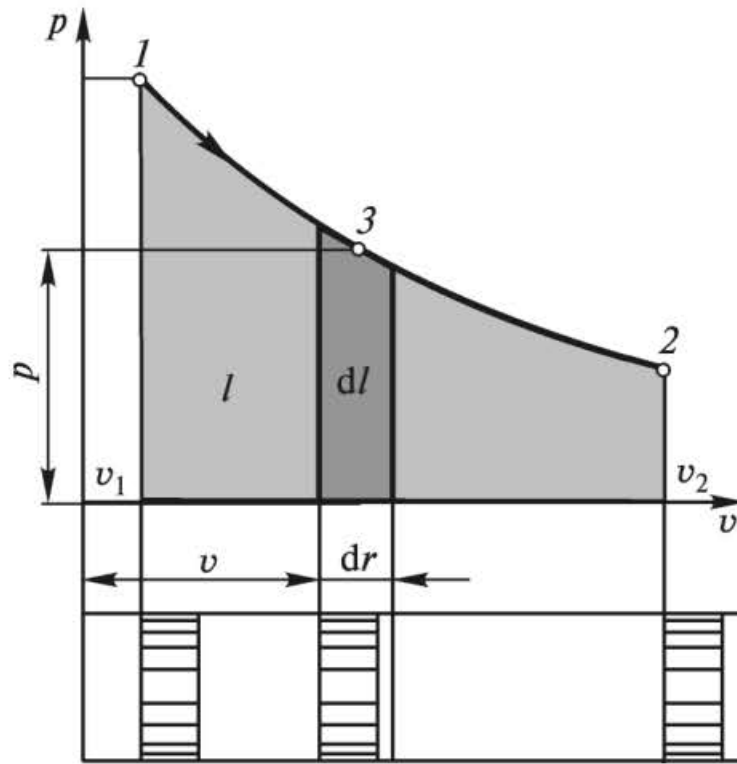
Для бесконечно малого процесса

$$dq = du + dl. \quad (1.13)$$

Соотношение (1.13) представляет математическую запись уравнения первого закона термодинамики. Из него следует, что теплота, подведенная к рабочему телу, затрачивается на изменение внутренней энергии и совершение работы.

Применим к уравнению (1.13) условия полной изоляции, т.е. $dq = 0$ и $dl = 0$ (система не обменивается с окружающей средой ни теплотой, ни работой). Тогда получим $du = 0$, или $u = \text{const}$, так как дифференциал постоянной равен нулю. Таким образом, доказали, что какие бы процессы не происходили в изолированной системе, ее внутренняя энергия есть величина постоянная.

Определим правило знаков для количества теплоты q . Если она подводится к телу, то $q > 0$. Работа $l > 0$, если она совершается расши-



Р и с. 1.5. Определение работы расширения

ряющимся газом, и $l < 0$, если затрачивается на сжатие. Изменение внутренней энергии $\Delta u > 0$, если внутренняя энергия тела увеличивается, и наоборот.

Найдем выражение работы через основные параметры состояния (рис. 1.5).

При бесконечно малом перемещении поршня вправо работа 1 кг газа будет

$$dl = pSdr,$$

где p — давление в точке 3; S — площадь поперечного сечения поршня; dr — перемещение поршня. Так как $Sdr = dv$, то

$$dl = pdv. \quad (1.14)$$

Из формулы (1.14) следует, что работа есть площадь под элементарным участком процесса $1 - 2$. Работа всего процесса $1 - 2$ будет равна площади под кривой этого процесса, т. е. площади $v_1 - 1 - 3 - 2 - v_2 - v_1$.

Для того чтобы найти явное выражение для работы, следует проинтегрировать уравнение (1.14):

$$l = \int_{v_1}^{v_2} dl = \int_{v_1}^{v_2} pdv. \quad (1.15)$$

Ввиду того что работа является функцией процесса, а не состояния, то дифференциал dl от работы не является полным дифферен-

циалом. В связи с чем некоторые авторы вводят специальное обозначение для бесконечно малого приращения количества работы δl и количества теплоты δq , дифференциал которой также не является полным дифференциалом. В настоящей книге будем придерживаться обозначений, принятых в большинстве учебников по термодинамике.

С целью упрощения расчетов многих термодинамических процессов У. Гиббсом введена функция I и i (для 1 кг), называемая энтальпией:

$$i = u + pv. \quad (1.16)$$

Так как u , p и v — функции состояния, то энтальпия i также будет функцией состояния.

Продифференцируем соотношение (1.16)

$$di = du + pdv + vdp. \quad (1.17)$$

Выражая из (1.17) du и подставляя в (1.13), с учетом (1.14) получаем

$$dq = di - vdp, \quad (1.18)$$

где $-vdp$ — располагаемая работа, $-vdp = dl_0$.

Интегрируя (1.18), находим

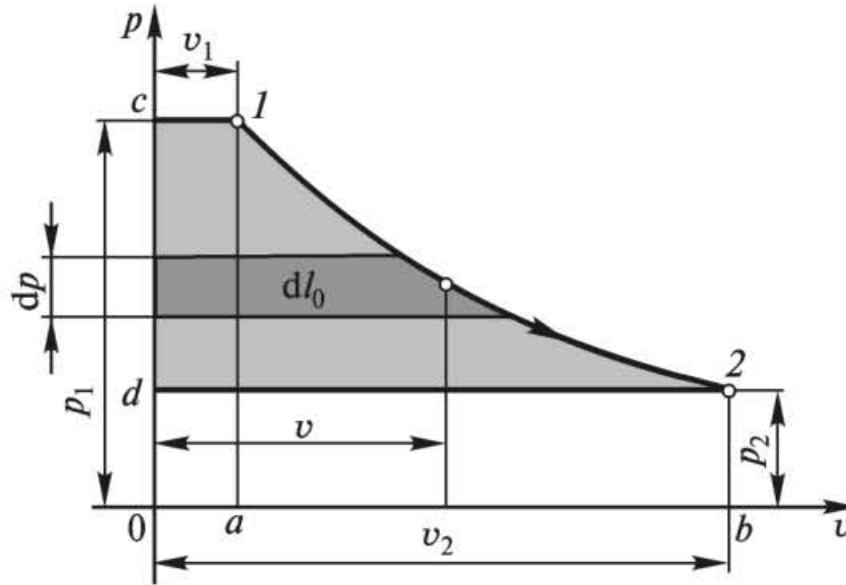
$$q_{1-2} = i_2 - i_1 - \int_{p_1}^{p_2} vdp.$$

Для вывода формулы располагаемой работы рассмотрим процесс, изображенный на рис. 1.6. Здесь линия $c-1$ соответствует процессу наполнения цилиндра двигателя рабочим телом. Работа, совершаемая внешней средой над рабочим телом, будет равна $l_1 = p_1 v_1$, т.е. площади $0 - c - 1 - a$. Она положительна. Линия $1-2$ является процессом расширения рабочего тела. Здесь совершается работа расширения

$$l = \int_{v_1}^{v_2} p dv.$$

Линия $2-d$ соответствует выталкиванию рабочего тела из цилиндра двигателя. Эта работа затрачивается — она отрицательна и равна $l_2 = p_2 v_2$.

Алгебраическая сумма всех перечисленных работ графически равна заштрихованной площади $c - 1 - 2 - d$, которая и представляет



Р и с. 1.6. Определение располагаемой работы

располагаемую работу l_0 с учетом работы поступления и удаления рабочего тела из машины, т.е.

$$l_0 = p_1 v_1 + \int_{v_1}^{v_2} p dv - p_2 v_2 = l - (p_2 v_2 - p_1 v_1).$$

Отсюда

$$l = l_0 - p_1 v_1 + p_2 v_2. \quad (1.19)$$

Подставляя (1.19) в уравнение первого закона термодинамики, записываемого для конечного процесса $q = \Delta u + l$, получаем

$$q = u_2 - u_1 + l_0 - p_1 v_1 + p_2 v_2 = (u_2 + p_2 v_2) - (u_1 + p_1 v_1) + l_0 = i_2 - i_1 + l_0.$$

Отсюда

$$dq = di + dl_0. \quad (1.20)$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением (1.18). Оно представляет вторую математическую форму записи уравнения первого закона термодинамики.

Если в термодинамическом процессе давление остается постоянным, то уравнение (1.18) примет вид

$$dq = di.$$

Или для конечного процесса

$$q_{1-2} = i_2 - i_1.$$

Таким образом, физический смысл энтальпии состоит в том, что в изобарных процессах ее изменение равно количеству теплоты, принятой или отданной системой.

В случае отсутствия теплообмена с окружающей средой (адиабатные процессы, $dq = 0$) уравнение (1.18) будет иметь вид

$$dl_0 = -di,$$

или

$$l_0 = i_1 - i_2.$$

Следовательно, при $dq = 0$ располагаемая работа равна разности энтальпий в начале и конце процесса.

Ввиду того что энтальпия является функцией независимых параметров состояния, то для ее полного дифференциала справедливы соотношения соответственно при независимых переменных v, p ; v, T и p, T :

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_v dp + \left(\frac{\partial i}{\partial v} \right)_p dv;$$

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial i}{\partial v} \right)_T dv;$$

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp.$$

Энтальпия идеального газа, так же как и внутренняя энергия, является функцией только температуры и не зависит от объема и давления, так как отсутствуют силы взаимодействия между молекулами:

$$i = u(T) + pv = u(T) + RT.$$

ГЛАВА 2

ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 2.1. Энергия и энтропия

Тезис о неуничтожимости материи и ее движения в естествознании получил подтверждение в результате установления закона сохранения и превращения энергии. Однако этот закон лишь констатирует наличие процессов превращения видов энергии и ее сохранение. Но он не позволяет решать вопросы о возможности осуществления того или иного процесса, не указывает направление происходящих превращений энергии. Ответ на эти вопросы был найден в результате от-

крытия второго закона термодинамики. Этот закон устанавливает, что самопроизвольные процессы возможны лишь в том случае, когда в системе нет равновесия, и что они всегда протекают в направлении, при котором система приближается к равновесному состоянию.

Таким образом, второй закон термодинамики позволяет указать направление теплового потока и устанавливает максимально возможный предел превращения теплоты в работу в тепловых машинах. Наиболее общая формулировка второго закона термодинамики дана Клаузиусом в виде следующего постулата:

|| Теплота не может самопроизвольно (без компенсации) переходить от менее нагретого тела к более нагретому.

Что такое компенсация, а также другие формулировки второго закона термодинамики будут рассмотрены далее (см. § 2.4).

С открытием первого закона термодинамики было осознано значение энергии в материальном мире. Замечено, что все виды энергии в конечном счете превращаются в теплоту, которая затем рассеивается в окружающей среде. Мера этого рассеивания была названа **энтропией**. Чем больше рассеивается (обесценивается) энергия, тем больше увеличивается энтропия.

Энергия и энтропия являются неотъемлемыми свойствами материи, причем энергия есть мера движения материи, а энтропия — мера рассеивания (деградации) энергии.

Под энергией понимается физическая мера движения материи. Существование видов энергии обусловлено различными способами ее движения. Так, например, электрической форме соответствует электрическая энергия, химической — химическая и т.д. Энергия служит количественной мерой движения материи. Превращение видов энергии происходит при переходе движения материи из одних форм в другие.

Кроме видов энергии различают формы ее передачи. В термодинамике приняты две формы обмена: работа и теплота процесса.

Необходимо иметь в виду, что теплота и работа должны связываться не с каким-то запасом энергии, а с некоторым процессом, в результате которого происходит передача энергии. В связи с этим ошибочно считать теплоту и работу ее видами. Любой вид энергии является однозначной функцией состояния, не зависящей от пути процесса, тогда как зависимость теплоты и работы от пути процесса есть их неотъемлемое свойство.

Следует заметить, что теплота и работа не являются равноценными формами передачи энергии. Работа непосредственно может быть преобразована в любой вид энергии. Теплота без промежуточного

превращения в работу может быть направлена на увеличение запаса лишь внутренней энергии тела. Работа без каких бы то ни было ограничений может быть превращена в теплоту, а переход теплоты в работу, согласно второму закону термодинамики, без компенсации (без некоторого дополнительного процесса) невозможен.

§ 2.2. Равновесность и обратимость процессов

Термодинамическая система будет находиться в равновесном состоянии, если во всех ее точках будут одинаковые температура и давление.

Всякая изолированная система с течением времени приходит в равновесное состояние, которое остается неизменным до тех пор, пока она не будет выведена из него внешним воздействием.

Изменение состояния термодинамической системы при взаимодействии ее с окружающей средой происходит в результате термодинамического процесса.

Процесс, в ходе которого в системе в каждый момент времени устанавливается равновесное состояние, является равновесным. Отсюда следует, что он может быть только бесконечно медленным, однако его нельзя не только осуществить, но и дать ему непротиворечивое объяснение.

Действительно, равновесный процесс должен состоять из ряда чередующихся во времени состояний равновесия, однако переход из одного состояния в другое возможен лишь в результате нарушения этого равновесия. Таким образом, трудность усвоения понятия равновесности связана с высокой степенью его абстракции. Тем не менее техническая термодинамика изучает только равновесные состояния и процессы, так как отсутствие равновесия внутри термодинамической системы приводит к зависимости параметров состояния от времени. Поэтому анализ неравновесных состояний и процессов значительно усложняется.

Итак, равновесный процесс можно представить как непрерывный ряд бесконечно близких состояний и изобразить линиями на термодинамических диаграммах, например p v и T s .

Бесконечно медленное протекание процесса в случае взаимодействия термодинамической системы с окружающей средой возможно, если температура и давление в системе отличаются на бесконечно малые величины от температуры и давления окружающей среды. В связи с этим равновесным можно назвать такой процесс, который проте-

кает при бесконечно малой разности температур и давлений между рабочим телом и окружающей средой.

Все реальные термодинамические процессы протекают при конечной разности давлений и температур рабочего тела и окружающей среды. Следовательно, они всегда неравновесны.

С понятием равновесности процессов связано понятие их обратимости.

Допустим, что в некоторой изолированной системе протекает процесс $1 - 2$ (из состояния 1 система переходит в состояние 2). Тогда для обратного перехода системы из состояния 2 в состояние 1 имеем два случая:

- обратный процесс возможен и протекает без каких бы то ни было изменений в окружающей среде. В этом случае процесс $1 - 2$ принято считать обратимым;

- обратный процесс, протекающий без изменений в окружающей среде, невозможен. В данном случае процесс $1 - 2$ будет необратимым.

§ 2.3. Условия работы тепловых машин

Для того чтобы от тепловой машины можно было получить полезную работу, необходимо выполнить следующие условия:

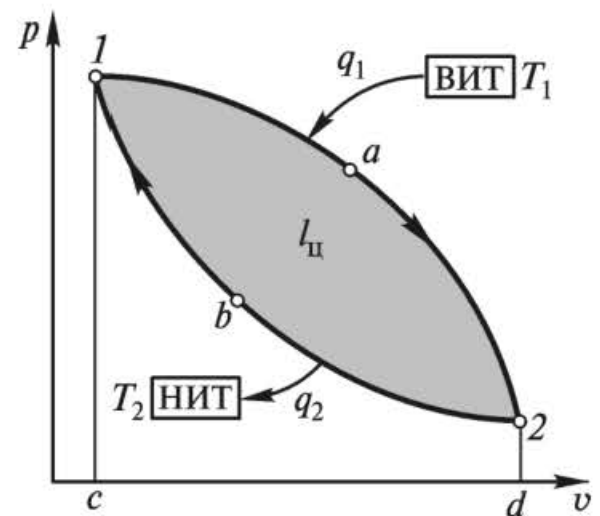
- иметь рабочее тело, посредством которого взаимно превращаются теплота и работа;

- наличие, по меньшей мере, двух источников теплоты с разными температурами — верхний (высший) источник теплоты (ВИТ), или нагреватель, и нижний (низший) источник теплоты (НИТ), или холодильник;

- работа тепловой машины должна быть циклической, т.е. рабочее тело, совершая ряд процессов, должно возвращаться в исходное состояние.

Рассмотрим круговой цикл тепловой машины (рис. 2.1).

В процессе расширения $1 - a - 2$ от ВИТ с температурой T_1 к рабочему телу подводится теплота в количестве q_1 . При этом получается положительная работа l_1 , численно равная площади $c - 1 - a - 2 - d$.



Р и с. 2.1. Произвольный круговой цикл тепловой машины

В процессе сжатия $2 - b - 1$ от рабочего тела отводится теплота q_2 к НИТ с температурой T_2 . В этом процессе затрачивается работа l_2 (работа отрицательная), равная площади $c - 1 - b - 2 - d$.

Уравнение первого закона термодинамики для процессов $1 - a - 2$ и $2 - b - 1$ соответственно будет иметь вид

$$q_1 = \pm \Delta u + l_1; \quad (2.1)$$

$$-q_2 = \mp \Delta u - l_2. \quad (2.2)$$

Различные знаки изменения внутренней энергии Δu взяты потому, что внутренняя энергия за цикл не должна изменяться.

Сложив уравнения (2.1) и (2.2), получаем

$$q_1 - q_2 = l_1 - l_2 = l_{ц},$$

где $l_{ц}$ — работа цикла $1 - a - 2 - b - 1$.

Чтобы получить полезную работу, работа, затраченная на сжатие в процессе $2 - b - 1$, должна быть меньше работы расширения в процессе $1 - a - 2$ ($l_2 < l_1$). Для этого необходимо одновременно со сжатием охлаждать рабочее тело, отнимая у него теплоту q_2 . В противном случае процесс пойдет по пути $2 - a - 1$, и на сжатие будет потрачена та же самая работа l_1 , которая была получена в процессе расширения. В результате полезная работа цикла будет равна нулю.

Таким образом, повторяя последовательно цикл $1 - a - 2 - b - 1$ с подводом и отводом теплоты, можно получить непрерывно действующую тепловую машину.

КПД цикла тепловой машины определяется по формуле

$$\eta_t = \frac{l_{ц}}{q_1} = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = 1 - \frac{q_2}{q_1}. \quad (2.3)$$

Таким образом, КПД тепловой машины называется отношение полезной работы, полученной в цикле, ко всей затраченной теплоте. Он всегда меньше единицы (или 100 %), так как не вся теплота q_1 , подведенная к рабочему телу, превращается в работу. Часть ее в количестве q_2 отводится в окружающую среду.

Отсюда вытекает следующая формулировка второго закона термодинамики.

|| Стопроцентное превращение теплоты в работу посредством тепловой машины невозможно.

Тепловой двигатель, который всю подведенную теплоту превращает в работу, называется вечным двигателем второго рода. Тепловая машина с КПД, равным единице, не противоречит первому закону

термодинамики, который констатирует лишь взаимопревращаемость энергий. Однако она противоречит второму закону, который обуславливает получение полезной работы некоторым компенсирующим процессом — передачей части теплоты (q_2) к НИТ. Далее (см. § 2.4) будет дана еще одна формулировка вечного двигателя второго рода, а также более подробно будут рассмотрены компенсирующие процессы.

§ 2.4. Цикл Карно

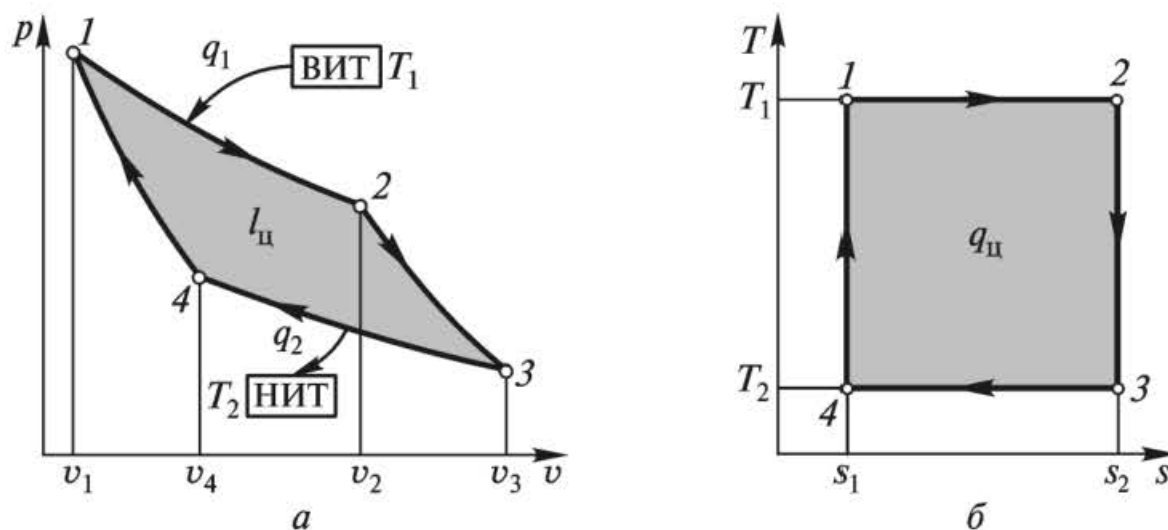
Анализируя формулу (2.3), можно заметить, что η_t возрастает при уменьшении q_2 или увеличении q_1 . Отсюда можно заключить, что, выбирая соответствующим образом процессы расширения и сжатия, протекающие с подводом и отводом теплоты q_1 и q_2 , можно изменять КПД. В связи с этим возникает вопрос — можно ли найти такой цикл, который обладал бы наибольшим КПД?

Такой цикл был предложен Сади Карно. Он состоит из двух обратимых изотермических и двух обратимых адиабатных процессов (рис. 2.2).

Изотермический и адиабатный процессы являются самыми выгодными в смысле получения работы, так как в первом вся теплота, подводимая к рабочему телу, превращается в работу, а второй протекает без теплообмена с окружающей средой.

Рассмотрим процессы цикла Карно. Процесс $1-2$ представляет изотермическое расширение рабочего тела с подводом теплоты q_1 от верхнего источника теплоты с температурой T_1 . Количество теплоты q_1 , равное работе l_1 , полученной в процессе $1-2$, определяется по формуле

$$l_1 = q_1 = \int_{v_1}^{v_2} p dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{RT_1}{v} dv = RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1}.$$



Р и с. 2.2. Цикл Карно в p - v - (а) и T - s -координатах (б)

Работа l_1 определяется также площадью фигуры $v_1 - 1 - 2 - v_2$ (см. рис. 2.2).

Процесс $2 - 3$ — адиабатическое расширение. Газ совершает работу, численно равную площади фигуры $v_2 - 2 - 3 - v_3$ и определяемую по формуле

$$l_2 = \frac{R(T_1 - T_2)}{k-1},$$

где k — показатель адиабаты.

В процессе $3 - 4$ происходит изотермическое сжатие рабочего тела с отводом теплоты q_2 к низшему источнику теплоты с температурой T_2 . На сжатие затрачивается работа l_3 (численно равная площади фигуры $v_4 - 4 - 3 - v_3$), равная количеству отведенной теплоты q_2 и определяемая по формуле

$$l_3 = q_2 = -RT_2 \ln \frac{v_3}{v_4}.$$

В процессе адиабатного сжатия $4 - 1$ газ нагревается до температуры T_1 . Работа, затрачиваемая на сжатие, численно равна площади фигуры $v_1 - 1 - 4 - v_4$ и определяется по формуле

$$l_4 = -\frac{R(T_1 - T_2)}{k-1}.$$

Если в процессе $3 - 4$ сжимать газ, не охлаждая его (без отвода теплоты q_2), то этот процесс будет адиабатным. Ввиду того что адиабаты являются эквидистантными кривыми (не пересекаются между собой), через одну точку (точка 3) можно провести лишь одну адиабату. Тогда в результате сжатия процесс будет проходить не по изотерме $3 - 4$, а по адиабате $3 - 2$. В исходное состояние рабочее тело должно быть возвращено лишь по изотерме, так как в изотермическом процессе на сжатие затрачивается наименьшее количество работы. В итоге на сжатие в процессах $3 - 2$ и $2 - 1$ будет затрачено то же самое количество работы, которое было получено в процессах расширения $1 - 2$ и $2 - 3$. Полезная работа цикла $l_{ц}$ и КПД η_t будут равны нулю. Отсюда можно сделать вывод: для того, чтобы получить полезную работу, необходимо какую-то часть подведенной теплоты безвозмездно отдать в окружающую среду, т.е. потерять.

Полезная работа $l_{ц}$ цикла $1 - 2 - 3 - 4$ определяется алгебраической суммой работ, полученных или затраченных в его отдельных процессах. Суммируя площади, с учетом знаков работы получаем

$$l_{\text{ц}} = RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1} + \frac{R(T_1 - T_2)}{k-1} - RT_2 \ln \frac{v_3}{v_4} - \frac{R(T_1 - T_2)}{k-1}. \quad (2.4)$$

Из полученной формулы видно, что работы в адиабатных процессах $2-3$ и $4-1$ оказываются одинаковыми, но с разными знаками. Тогда формула (2.4) примет вид

$$l_{\text{ц}} = R \left(T_1 \ln \frac{v_2}{v_1} - T_2 \ln \frac{v_3}{v_4} \right).$$

КПД любого цикла тепловой машины (в том числе и цикла Карно) определяется по формуле

$$\eta_t = \frac{l_{\text{ц}}}{q_1}.$$

Отсюда

$$\eta_t = \frac{T_1 \ln \frac{v_2}{v_1} - T_2 \ln \frac{v_3}{v_4}}{T_1 \ln \frac{v_2}{v_1}}. \quad (2.5)$$

Для адиабат $2-3$ и $4-1$ справедливы следующие зависимости:

$$T_1 v_2^{k-1} = T_2 v_3^{k-1};$$

$$T_1 v_1^{k-1} = T_2 v_4^{k-1}.$$

После деления первого уравнения на второе получим

$$\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} = \left(\frac{v_3}{v_4} \right)^{k-1}.$$

Логарифмируя последнее соотношение, будем иметь

$$\ln \frac{v_2}{v_1} = \ln \frac{v_3}{v_4}. \quad (2.6)$$

Формула (2.5), учитывая (2.6), примет вид

$$\eta_t = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.7)$$

Анализируя формулу (2.7), приходим к выводу о том, что η_t может быть равен единице лишь в случаях, когда $T_1 \rightarrow \infty$ либо $T_2 = 0$ К. Эти условия невозможно осуществить даже в идеальном цикле, так как температура ВИТ T_1 , равная бесконечности, практически недостижима. Недостижима также и температура НИТ T_2 , равная абсолютно нулю температур $T_2 = 0$ К = $-273,15$ °С.

Из формулы (2.7) также следует, что при $T_2 = T_1$ $\eta_t = 0$. Это означает невозможность превращения теплоты в работу в случае равенства температур верхнего и нижнего источников теплоты. Отсюда можно дать еще одно определение вечного двигателя второго рода, являющееся также одной из формулировок второго закона термодинамики (формулировка Оствальда):

Вечным двигателем второго рода называется тепловой двигатель, с помощью которого можно было бы получать полезную работу в случаях, когда нет разности температур.

Согласно второму закону термодинамики такой тепловой двигатель невозможен.

Анализ цикла Карно позволяет сделать также следующий важный вывод — невозможно превращение теплоты в работу без компенсации. Трудность усвоения формулировок второго закона термодинамики, содержащих понятие компенсации, связана со сложностью самого этого понятия.

Необходимо учитывать, что различают компенсацию двух родов. *Компенсация первого рода* имеет место в случае, когда процесс превращения теплоты в работу сопровождается изменением термодинамического состояния рабочего тела. Например, при изотермическом расширении идеального газа внутренняя энергия его, как известно, остается постоянной, и вся теплота, сообщаемая газу, превращается в работу. Увеличение объема газа, представляющее компенсацию первого рода, является здесь необходимым условием превращения.

В случае, когда превращение теплоты в работу влечет за собой изменение состояния не только рабочего тела, но и других тел, имеем *компенсацию второго рода*. В тепловых машинах такими телами обычно являются НИТ.

Что такое компенсация второго рода, наиболее просто понять из следующей формулировки второго закона термодинамики (формулировка Планка).

Невозможно построить периодически действующую тепловую машину, которая не производила бы ничего другого, кроме поднятия груза и охлаждения источника тепла.

Из этой формулировки следует, что для превращения теплоты в работу недостаточно одного только процесса передачи теплоты от ВИТ к рабочему телу. По второму закону термодинамики здесь предполагается наличие некоторого дополнительного процесса. Для теплового двигателя таким дополнительным процессом является передача теплоты к НИТ. Он и представляет компенсацию второго рода.

В природе существуют процессы, которые могут протекать самостоятельно, без сопровождения их другими процессами (без компенсации). Они являются самопроизвольными, естественными или некомпенсированными.

Примером самопроизвольного процесса может служить превращение работы в теплоту при трении, которое может протекать без сопровождения какими-либо другими процессами — без компенсации. Работа здесь полностью превращается в теплоту, тогда как процесс превращения теплоты в работу, являющийся обратным по отношению к прямому, нельзя провести без компенсации. Такие процессы, которые не могут протекать без того, чтобы вместе с ними не протекал какой-либо дополнительный процесс, считаются несамопроизвольными.

Таким образом, процесс превращения механической работы в теплоту — самопроизвольный, а теплоты в работу — несамопроизвольный.

В природе существует много процессов, протекающих в одном направлении легко, самопроизвольно, не требуя каких-либо дополнительных процессов. Однако в обратном направлении они не могут осуществляться самостоятельно. Например, переход теплоты от горячего тела к холодному есть процесс самопроизвольный, но обратный процесс перехода теплоты от холодного тела к горячему без каких-либо дополнительных процессов невозможен. Это связано с тем, что передача теплоты от более холодного тела к более горячему может быть выполнена лишь путем затраты работы теплового двигателя. Работа теплового двигателя возможна лишь в случае, когда есть компенсирующий процесс передачи теплоты НИТ.

Отсюда следует, что количества теплоты, которая переходит от более нагретого тела к менее нагретому в естественном процессе, будет недостаточно для возвращения системы в исходное состояние, так как часть теплоты (в количестве q_2) будет безвозвратно передана НИТ (компенсирующий процесс). Следовательно, для этого должно быть затрачено больше теплоты, чем было передано в прямом процессе. Отсюда следует вывод, что прямой теплообмен при конечной разности температур необратим.

Анализируя формулу (2.7), можно сделать еще один важный вывод — КПД цикла Карно зависит лишь от температур верхнего и нижнего источников теплоты и, следовательно, не зависит от рода рабочего тела. Это утверждение является содержанием теоремы Карно.

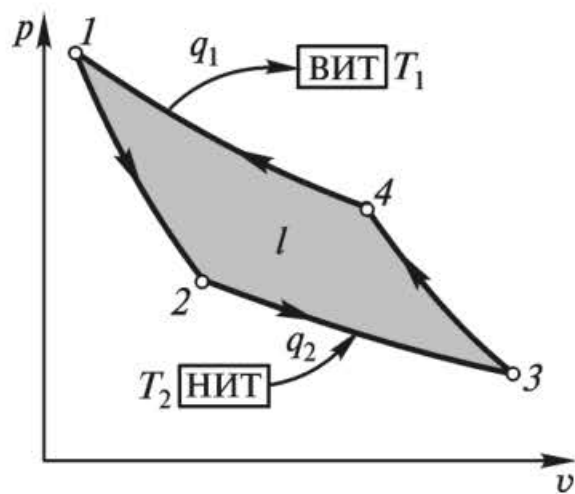
В реальных циклах тепловых двигателей (например, в двигателях внутреннего сгорания) цикл Карно неприменим. Из-за небольшого различия в наклонах изотерм и адиабат получаются большие размеры цикла по оси v . Это означает, что в реальном двигателе нужно применять очень длинный цилиндр. В результате будут велики потери на трение и теплообмен из-за необратимости процесса, а также большие габариты и масса двигателя.

§ 2.5. Обратный обратимый цикл Карно

Цикл Карно может протекать не только в прямом, но и в обратном направлении (рис. 2.3).

Машины, работающие по обратному циклу, называются **холодильными машинами**. Они создают и поддерживают разность температур путем отнятия теплоты у более холодного тела и передачи ее более горячему (см. гл. 7). А такой процесс, как следует из формулировки второго закона термодинамики Клаузиуса, требует затраты энергии (не может совершаться без компенсации).

Рассмотрим обратимый обратный цикл Карно, изображенный на рис. 2.3. В процессе $1 - 2$ рабочее тело (холодильный агент) расширяется по адиабате с уменьшением температуры от T_1 в точке 1 до T_2 в точке 2. Затем газ расширяется по изотерме $2 - 3$ с подводом теплоты q_2 от источника с температурой T_2 . В адиабатном процессе сжатия $3 - 4$ температура рабочего тела растет от T_2 до T_1 . В изотермическом процессе сжатия от рабочего тела отводится теплота q_1 к ВИТ.



Р и с. 2.3. Обратный обратимый цикл Карно

На осуществление обратного цикла в холодильной машине затрачивается удельная работа l . При этом от НИТ к ВИТ переносится количество теплоты, равное q_2 . Кроме того, к ВИТ передается теплота, равная затраченной работе l . Отсюда вся теплота, получаемая ВИТ, будет $q_1 = q_2 + l$. Работа, затраченная на сжатие в процессах $3 - 4$ и $4 - 1$, больше работы расширения в процессах $1 - 2$ и $2 - 3$ на величину площади фигуры $1 - 2 - 3 - 4$. Работа расширения со-

вершается сжатым газом, и она будет положительной. Работа сжатия производится над газом, и она будет отрицательной. Отсюда суммарная работа, затраченная на передачу теплоты от НИТ к ВИТ, отрицательна и равна $l = q_1 - q_2$. Эффективность работы холодильных машин характеризуется холодильным коэффициентом, определяемым в виде отношения теплоты, взятой от НИТ и переданной ВИТ, к затраченной работе:

$$\varepsilon = \frac{q_2}{q_1 - q_2} = \frac{q_2}{l}.$$

Холодильный коэффициент характеризует эффективность передачи теплоты от НИТ к ВИТ. Он будет тем больше, чем большее количество теплоты q_2 будет взято от НИТ и передано ВИТ и чем меньше будет на это затрачено работы l .

Холодильный коэффициент обратимого обратного цикла Карно определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Он зависит лишь от абсолютных температур T_1 и T_2 и имеет наибольшее значение по сравнению с холодильными коэффициентами любых других циклов, протекающих в тех же температурных пределах.

Холодильные машины, предназначенные для отопления помещений путем передачи теплоты от источника с более низкой температурой к источнику с более высокой температурой, называются **тепловыми насосами**. Их эффективность оценивается отопительным коэффициентом φ , определяемым по формуле

$$\varphi = q_1/l.$$

§ 2.6. Метод циклов. Открытие энтропии как функции состояния

В термодинамике большое распространение получил так называемый метод циклов, разработанный Клапейроном на основе идей Карно. До введения Гиббсом в 1870 г. метода потенциалов только он позволял устанавливать связи между термодинамическими характеристиками процессов, связанных с преобразованиями, в которых участвуют теплота и работа.

Сравнивая формулы для КПД обратимого цикла Карно $\eta_t = (T_1 - T_2)/T_1$ и $\eta_t = (Q_1 - Q_2)/Q_1$ (см. формулу (2.3)), получаем

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

По формуле (2.3) может быть найден КПД любого цикла, в том числе и цикла Карно.

Отсюда

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (2.8)$$

Величина Q/T , отнесенная к тому или иному телу, называется *приведенной теплотой*. Из формулы (2.8) следует равенство приведенных теплот нагревателя и холодильника в цикле Карно.

Можно показать, что цикл Карно всегда можно разбить на два или более циклов промежуточными адиабатами. Такое деление является обоснованным потому, что промежуточные адиабаты проводятся в противоположных направлениях, и оба процесса по такой адиабате взаимно компенсируются. Разобьем цикл Карно на два цикла с помощью адиабаты ab (рис. 2.4). Тогда теплоты Q_1 и Q_2 разделяются на части:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1' + Q_1''; \\ Q_2 &= Q_2' + Q_2''. \end{aligned}$$

Рассмотрев каждый из образованных циклов, получим равенство приведенных теплот согласно (2.8):

$$\frac{Q_1'}{T_1} = \frac{Q_2'}{T_2}, \quad \frac{Q_1''}{T_1} = \frac{Q_2''}{T_2}.$$

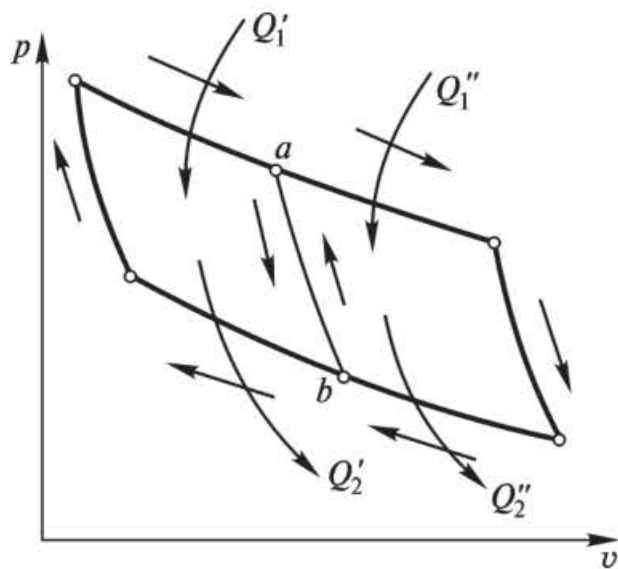
Сложив эти равенства, находим

$$\frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_1''}{T_1} = \frac{Q_2'}{T_2} + \frac{Q_2''}{T_2}.$$

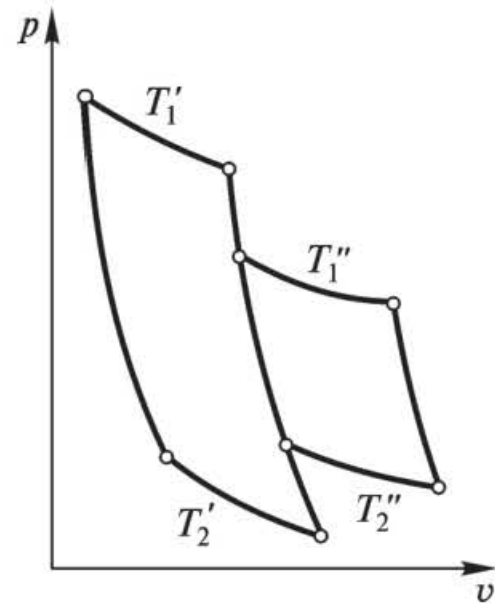
При разделении на несколько циклов будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_1^{(i)}}{T_1} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_2^{(i)}}{T_2}. \quad (2.9)$$

Допустимо также составление циклов Карно, где участвуют нагреватели и холодильники с различными температурами в разных



Р и с. 2.4. Схема разбиения цикла Карно промежуточной адиабатой



Р и с. 2.5. Схема составления циклов Карно с различными температурными пределами

циклах. И в этом случае составление ведется по адиабатам (рис. 2.5). Обобщая выражение (2.9) на n циклов, получаем

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_1^{(i)}}{T_1^{(i)}} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_2^{(i)}}{T_2^{(i)}}. \quad (2.10)$$

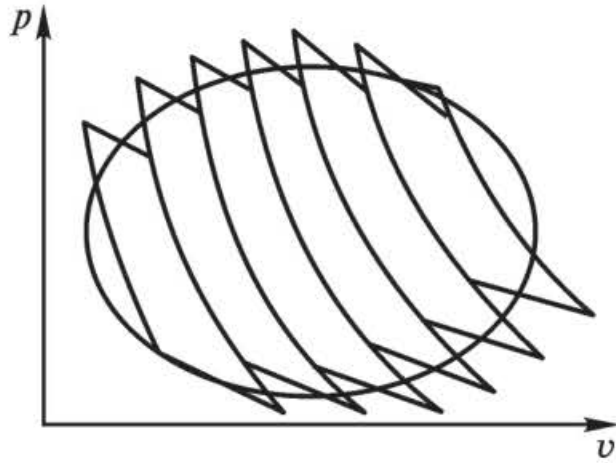
Наряду с циклами, где происходит передача конечных количеств теплоты Q_1 и Q_2 , можно представить элементарные циклы, в которых передаются бесконечно малые количества dQ_1 и dQ_2 при конечной разности температур T_1 и T_2 . Для такого цикла

$$\frac{dQ_1}{T_1} = \frac{dQ_2}{T_2}.$$

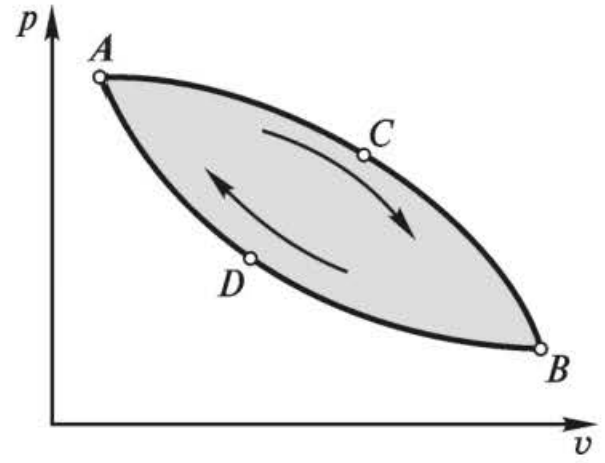
Пользуясь возможностью разбиения циклов на части, любой обратимый цикл можно разбить на большое число узких элементарных циклов Карно, соприкасающихся по адиабатам (рис. 2.6).

При этом отрезки адиабат, лежащие внутри контура, взаимно компенсируются. Некоторая ошибка получается вследствие замены непрерывного контура ступенчатыми изотермами сверху и снизу, а также некомпенсированными отрезками адиабат, прилегающих к контуру. Однако при переходе к пределу, когда $dQ_1^{(i)}$ и $dQ_2^{(i)}$ стремятся к нулю, эта ошибка может быть сделана сколь угодно малой. Выражение (2.10) для конечного числа элементарных циклов в пределе будет иметь вид

$$\int \frac{dQ_1}{T_1} = \int \frac{dQ_2}{T_2}. \quad (2.11)$$



Р и с. 2.6. Схема представления произвольного цикла элементарными циклами Карно



Р и с. 2.7. Произвольный цикл

Выражение (2.11) можно переписать в виде

$$\int \frac{dQ_1}{T_1} - \int \frac{dQ_2}{T_2} = 0. \quad (2.12)$$

Соотношение (2.12) можно рассматривать как алгебраическую сумму $\frac{dQ}{T}$ при переменных dQ и T . Так как она относится ко всему контуру, то из (2.12) следует

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (2.13)$$

Выражение (2.13) является интегралом Клаузиуса для любого обратимого цикла. Отсюда следует, что интеграл приведенных теплот для любого обратимого цикла для всех веществ равен нулю.

Из соотношения (2.13) следует, что $\oint \frac{dQ}{T}$ не зависит от формы пути. Например, при изменении состояния от точки A до точки B (рис. 2.7) по пути ACB получим

$$\int_{ACB} \frac{dQ}{T},$$

а при движении от A к B по пути ADB будем иметь

$$\int_{ADB} \frac{dQ}{T} = - \int_{BDA} \frac{dQ}{T}.$$

Отсюда, следуя (2.13), можно записать

$$\int_{ACB} \frac{dQ}{T} + \int_{BDA} \frac{dQ}{T} = 0 \text{ или } \int_{ACB} \frac{dQ}{T} = \int_{ADB} \frac{dQ}{T}.$$

Так как интеграл по замкнутому контуру от $\frac{dQ}{T}$ равен нулю, а также учитывая, что изменение этой величины не зависит от формы пути, приходим к выводу о том, что бесконечно малая величина $\frac{dQ}{T}$ есть полный дифференциал некоторой функции S параметров состояния

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (2.14)$$

Эта функция состояния называется **энтропией**. Интегрируя (2.14), получаем общее выражение для энтропии

$$S = \int \frac{dQ}{T} + \text{const}, \quad (2.15)$$

где константа является неопределенной постоянной интегрирования. Отсюда следует еще одна формулировка второго начала.

|| Величина $dS = \frac{dQ}{T}$ есть полный дифференциал.

Таким образом установлено существование энтропии как функции состояния. Согласно выражению (2.14) энтропия имеет следующую единицу измерения: для 1 кг массы — s , Дж/(кг · К); для любого количества вещества — S , Дж/К. Абсолютное значение энтропии может быть найдено лишь в случае, если будет известна неопределенная постоянная интегрирования.

§ 2.7. Общая математическая формулировка второго закона термодинамики

Сравнивая КПД любого обратимого или необратимого цикла $\eta'_i = (Q_1 - Q_2)/Q_1$ и КПД обратимого цикла Карно $\eta_t = (T_1 - T_2)/T_1$, можно отметить, что во всех случаях $\eta'_i < \eta_t$.

Отсюда следует

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

или

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Проведя дальнейшие преобразования, получаем

$$\frac{Q_2}{Q_1} > \frac{T_2}{T_1}$$

или

$$\frac{Q_1}{T_1} < \frac{Q_2}{T_2}.$$

Из последнего неравенства следует, что приведенная теплота нагревателя меньше (а не равна, как ранее) приведенной теплоты холодильника. Далее находим

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} < 0.$$

Переходя к сложению нескольких циклов Карно, можно записать

$$\sum \frac{Q_1^{(i)}}{T_1^{(i)}} - \sum \frac{Q_2^{(i)}}{T_2^{(i)}} < 0,$$

или в пределе для любого необратимого цикла:

$$\int \frac{dQ_1}{T_1} - \int \frac{dQ_2}{T_2} < 0.$$

Отсюда для всего контура получим

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0,$$

взамен прежнего выражения (2.13) для обратимых циклов. Объединяя (2.13) и последнее неравенство, находим

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0,$$

т.е. интеграл Клаузиуса для замкнутого контура меньше или равен нулю, но не может быть больше нуля. Это утверждение представляет собой общую математическую формулировку второго начала термодинамики.

В последнем соотношении знак равенства применяется для обратимых, а знак «меньше» — для необратимых циклов.

На основе полученных результатов можно сформулировать следующую теорему.

В изолированной системе при всех обратимых процессах энтропия остается постоянной, а при всех необратимых процессах только возрастает, т.е. $\Delta S_{\text{сист}} \geq 0$.

В связи с этим второй закон термодинамики по Клаузиусу можно сформулировать следующим образом: «Энтропия изолированной системы стремится к максимуму».

§ 2.8. Физический смысл и свойства энтропии

Физический смысл энтропии достаточно сложен, и его трудно объяснить с помощью наглядных представлений. Однако понятие энтропии можно раскрыть в следующих двух аспектах.

1. Энтропия является мерой потери работоспособности системы вследствие необратимости реальных процессов.

Потеря работы от необратимости процесса прямо пропорциональна возрастанию энтропии. Влияние необратимости на потерю работы можно оценить количественно. Для этого рассмотрим следующий пример. Пусть имеем изолированную термодинамическую систему, состоящую из ВИТ с температурой T_1 , рабочего тела (РТ) и НИТ с температурой T_2 . Максимальная доля теплоты, переданной от ВИТ к РТ, которая может быть превращена в работу, в идеальном случае определяется КПД обратимого цикла Карно. Если передать от ВИТ теплоту dQ_1 , то за цикл получим следующую работу:

$$dL = \eta_i^k dQ_1 = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) dQ_1.$$

Теплота, отданная НИТ, будет

$$dQ_2 = dQ_1 - dL = (1 - \eta_i^k) dQ_1 = \frac{T_2}{T_1} dQ_1.$$

Найдем суммарное изменение энтропии системы

$$\Delta S = dS_1 + dS_2 = -\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = -\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_1}{T_2} \frac{T_2}{T_1} = 0,$$

где dS_1 — уменьшение энтропии ВИТ вследствие отвода теплоты, $dS_1 = -\frac{dQ_1}{T_1}$; dS_2 — возрастание энтропии НИТ вследствие подвода

теплоты, $dS_2 = \frac{dQ_2}{T_2}$.

Как и следовало ожидать, изменение энтропии в обратимом процессе, протекающем в изолированной системе, равно нулю. Найдём изменение энтропии для необратимого процесса.

Допустим, что теплота от ВИТ передается сначала промежуточному теплоносителю с температурой $T_1^1 < T_1$. В результате энтропия ВИТ уменьшится на величину $dS_1 = -\frac{dQ_1}{T_1}$. Энтропия промежуточного теплоносителя увеличится на $dS_1^1 = \frac{dQ_1}{T_1^1}$. Так как из-за необратимости теплообмена $dS_1 < dS_1^1$, то энтропия всей системы возрастает

$$\Delta S_{\text{необр}} = dS_1 + dS_1^1 = -\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_1}{T_1^1} = \left(\frac{1}{T_1^1} - \frac{1}{T_1} \right) dQ_1.$$

Полезную работу можно получить, осуществляя цикл Карно между промежуточным теплоносителем и НИТ:

$$dL^1 = \eta_t^k dQ_1 = \left(1 - \frac{T_2}{T_1^1} \right) dQ_1.$$

Тогда уменьшение работы в результате необратимого теплообмена будет

$$\Delta L_{\text{необр}} = dL - dL^1 = \left(1 - \frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_2}{T_1^1} \right) dQ_1.$$

Отсюда получаем

$$\Delta L_{\text{необр}} = T_2 \Delta S_{\text{необр}},$$

т.е. уменьшение работы пропорционально возрастанию энтропии при постоянной температуре НИТ. Это уравнение называют уравнением Гюи—Стодолы.

2. Энтропия есть мера беспорядка, деградации и дезорганизованности системы. Если теплота отводится от системы, то энтропия ее уменьшается. Вместе с тем увеличивается упорядоченность системы вследствие уменьшения хаотичности теплового движения молекул и атомов.

В результате всех возможных необратимых изменений система перерождается или деградирует и приходит к следующему состоянию:

- все тела системы приняли одинаковую температуру;
- все количество полезной работы превращено в теплоту;
- концентрации и давления в системе выровнялись;
- произошло предельное измельчение и равномерное перемешивание вещества в системе.

В этом случае повод к дальнейшему изменению системы оказывается устраненным. Энтропия достигает своего максимального значения.

Одно из важнейших свойств энтропии состоит в том, что она есть функция некоторых параметров состояния. Аналитически это свойство может быть выражено соотношениями

$$s = f_1(v, T); \quad s = f_2(p, T); \quad s = f_3(p, v),$$

где p , v и T — независимые параметры, определяющие состояние тела.

Тогда для полного дифференциала энтропии, например для случая $s = f_1(v, T)$, можно записать следующее уравнение

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT.$$

Если параметры состояния даны, то принципиально энтропию можно вычислить с точностью до некоторой постоянной.

Знание точного абсолютного значения энтропии необходимо для процессов, протекающих с изменением массы исходных веществ и образованием из них новых (например, при химических реакциях). Эта задача может быть решена с помощью третьего закона термодинамики. Его содержание раскрывает так называемая тепловая теорема Нернста, одним из следствий которой является вывод об отсутствии изменения энтропии при абсолютном нуле температуры:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = 0 \quad \text{при} \quad T = 0.$$

Этот вывод позволил Планку высказать мысль о том, что константа энтропии для всех систем при абсолютном нуле температуры равна нулю

$$S_0 = 0 \quad \text{при} \quad T = 0.$$

Данное положение является постулатом Планка. Доказательство этого результата может быть получено, если воспользоваться законом Больцмана о связи энтропии с вероятностью состояния.

Важное практическое применение постулата Планка состоит в возможности вычисления абсолютного значения энтропии.

В отдельных задачах энтропию можно рассматривать не как функцию состояния, а как независимый его параметр, подобно тому, как давление, температура и удельный объем могут быть и функциями, и независимыми параметрами состояния. Это свойство дает возможность строить диаграммы, где одним из параметров является энтропия. В технике наибольшее распространение получили так называемые Ts - и is -диаграммы.

§ 2.9. Обобщенный термодинамический цикл Карно. Регенерация теплоты

В заданном интервале температур нельзя получить более высокий КПД, чем у обратимого цикла Карно. Однако есть циклы, по своей конфигурации отличные от него, но при некоторых дополнительных условиях имеющие термический КПД, равный КПД цикла Карно.

На рис. 2.8 изображен цикл $1-2-3-4$, состоящий из двух изотерм $1-2$ и $3-4$ и двух любых произвольных обратимых процессов $2-3$ и $4-1$, эквидистантных в горизонтальном направлении. Эквидистантными в термодинамике называют семейство линий, имеющих при одинаковых температурах равный угловой коэффициент.

В процессе $1-2$ от нагревателя с температурой T_1 к рабочему телу подводится удельное количество теплоты $q_1 = T_1(s_2 - s_1)$. В процессе $2-3$ оно отдает количество теплоты q_{2-3} , численно равное площади $s_3 - 3-2 - s_2$. Для осуществления обратимого перехода рабочего тела от состояния в точке 2 с температурой T_1 к состоянию в

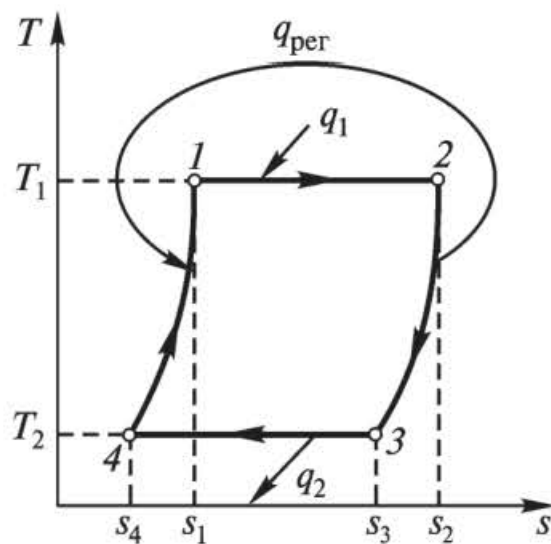


Рис. 2.8. Обобщенный термодинамический цикл Карно

точке 3 с температурой T_2 необходимо иметь бесконечно большое число промежуточных источников теплоты (телоприемников), температура которых отличается друг от друга на бесконечно малую величину. В процессе $3-4$ рабочее тело изотермически сжимается, отдавая в холодильник при температуре T_2 количество теплоты $q_2 = T_2(s_3 - s_4)$. В процессе $4-1$ оно поглощает количество теплоты q_{4-1} , измеряемое площадью фигуры $s_4 - 4 - 1 - s_1$. В качестве промежуточных теплоотдатчиков при осуществлении

процесса $4 - 1$ используются те же самые источники теплоты, которые применялись в процессе $2 - 3$ в качестве теплоприемников.

Ввиду эквидистантности процессов $2 - 3$ и $4 - 1$ площади $s_3 - 3 - 2 - s_2$ и $s_4 - 4 - 1 - s_1$ равны между собой и, следовательно, удельные теплоты q_{2-3} и q_{4-1} одинаковы по абсолютному значению, т.е. сколько теплоты рабочее тело отдает в процессе $2 - 3$, столько же оно принимает в процессе $4 - 1$. В данном случае теплота переносится с одних участков цикла на другие. Такой процесс называется **регенерацией теплоты**.

Работа цикла $1 - 2 - 3 - 4$ будет равна $l = q_1 - q_{2-3} - q_2 + q_{4-1}$, или $l = q_1 - q_2$. Термический КПД находим по формуле

$$\eta_t = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = \frac{T_1(s_2 - s_1) - T_2(s_3 - s_4)}{T_1(s_2 - s_1)}.$$

Так как кривые $2 - 3$ и $4 - 1$ эквидистантны, то $s_1 - s_4 = s_2 - s_3$ и $s_2 - s_1 = s_3 - s_4$.

Отсюда

$$\eta_t = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Таким образом, рассмотренный обратимый цикл, состоящий из двух изотерм и двух эквидистантных кривых, имеет КПД, равный КПД обратимого цикла Карно. Цикл, в котором применяется регенерация теплоты, называется **регенеративным**. Регенеративный обратимый цикл, состоящий из двух изотерм и двух любых произвольных эквидистантных кривых, называется **обобщенным (регенеративным) циклом Карно**. Ввиду высокого КПД такие циклы получили широкое распространение в теплоэнергетических установках.

§ 2.10. Эксергетический метод исследования

В настоящее время в термодинамике применяют два подхода к исследованию энергетических превращений в технических системах.

Первый подход основан на методах анализа прямых и обратных циклов, которые на основе первого и второго законов термодинамики позволяют найти связи между количествами теплоты и работы и параметрами системы. Путем составления энергетического баланса системы можно найти коэффициенты, характеризующие исследуемый цикл (термодинамический КПД, холодильный коэффициент и

др.), и сравнить их с коэффициентами соответствующих идеальных циклов.

В этом случае имеется возможность определить в данной системе суммарную потерю работы вследствие необратимости процессов. Эти потери могут быть разделены на две части. Первая, связанная с несовершенством процессов цикла, относится к внутренним потерям, вторая связана с условиями взаимодействия системы с внешними источниками и приемниками энергии и относится к внешним потерям.

Анализ циклов при необходимости может быть дополнен определением возрастания энтропии в отдельных частях процесса, а затем по формуле Гюи—Стодолы потерь работы от необратимости процесса (энтропийный метод).

Второй подход основан на применении термодинамических потенциалов с целью анализа процессов превращения энергии в различных системах. Термодинамические потенциалы позволяют непосредственно найти величину любого вида работы в тех или иных условиях. С их помощью можно оценить работоспособность потоков энергии или вещества в любой точке рассматриваемой системы, независимо от ее структуры и сложности.

Важнейшим преимуществом методов анализа, основанных на использовании термодинамических потенциалов, является их максимальная универсальность. Она связана с тем, что методы решения задачи не зависят от характера процессов в анализируемой системе (круговые или разомкнутые) и форм энергии. По мере усложнения объектов преимущества методов, использующих термодинамические потенциалы, возрастают.

Однако для использования потенциалов применительно к анализу технических систем необходимо иметь термодинамические функции, однозначно характеризующие работоспособность потоков вещества и энергии при определенных внешних условиях. Они должны отличаться от характеристических функций, используемых в химической термодинамике, которые не учитывают взаимодействия потоков энергии и рабочего тела с окружающей средой (взаимодействия вне границ системы).

Таким образом, для оценки работоспособности потока вещества или энергии важны не только параметры процессов внутри системы, но и их связь с окружающей средой. В связи с чем определение потенциалов должно проводиться по отношению к равновесной части окружающей среды, в которой отсутствуют какие-либо потенциалы, и любое воздействие системы не может изменить ее параметров.

Отсюда следует, что термодинамические функции, используемые для проведения анализа в указанных условиях, только тогда смогут выполнять роль потенциалов, с помощью которых можно определить работоспособность вещества или энергии в данных условиях окружающей среды, когда они наряду с параметрами системы будут включать еще и параметры окружающей среды.

Мера энергетических ресурсов системы, определяющая работоспособность вещества или энергии, была названа **эксергией**. Функции, определяющие эксергию, называются эксергетическими.

Эксергия, в отличие от энергии, связанной с фундаментальными свойствами материи, является частным понятием, характеризующим пригодность энергии при заданных условиях окружающей среды.

Эксергетическим методом называется метод исследований, основанный на анализе потерь работоспособности в термодинамических процессах. Он получил широкое распространение благодаря своей универсальности, позволяет сравнивать между собой любые виды энергии и на этой основе определять эффективность различных процессов ее превращения. Эксергетические показатели непосредственно связаны с технико-экономическими характеристиками оборудования, что позволяет находить экономически наиболее выгодные параметры и размеры проектируемого теплоэнергетического оборудования.

§ 2.11. Эксергия теплоты

При термодинамическом анализе теплоэнергетических установок во многих случаях приходится оценивать работоспособность той теплоты, которая преобразуется в работу в циклах. Максимальное количество полезной работы, которую можно получить в цикле при заданных температурах источников теплоты, называется **работоспособностью (эксергией) теплоты**.

Максимальную работу, как известно, можно получить в тепловом двигателе, работающем по циклу Карно. Его термический КПД записывается в виде

$$\eta_t = \frac{l_{\max}}{q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

где l_{\max} — максимальное количество работы, которое можно получить в обратимом цикле, $l_{\max} = q_1 - q_2$; q_1 — количество теплоты, подведенной к рабочему телу; T_1 и T_2 — температуры высшего и низшего источников теплоты соответственно.

Выражая l_{\max} из последней формулы, получаем

$$l_{\max} = e = q_1(1 - T_2/T_1),$$

где $(1 - T_2/T_1)$ — коэффициент качества теплоты (эксергетической ценности теплоты). Последнюю формулу можно записать в виде

$$e = q_1 - T_2 \frac{q_1}{T_1}. \quad (2.16)$$

Величина e представляет максимальную работу, которую можно получить в некотором идеальном обратимом цикле. Из формулы (2.16) следует, что для получения полезной работы используется лишь часть некоторого количества теплоты q_1 . Другая ее часть, равная величине $q = T_2(q_1/T_1)$, отдается НИТ (рассеивается в окружающей среде).

Таким образом, работа, получаемая при использовании теплоты q_1 , не может превысить величину e даже в идеальном обратимом цикле. В реальном же процессе добавляются еще потери, возникающие вследствие его необратимости, равные $T_2\Delta s_{\text{необр}}$. В результате действительная работа в реальном процессе всегда меньше e , т.е.

$$e_{\text{необр}} = [q_1 - T_2(q_1/T_1) - T_2\Delta s_{\text{необр}}] < e. \quad (2.17)$$

Часть теплоты q_1 , не превращающаяся в работу и равная величине $-T_2(q_1/T_1) - T_2\Delta s_{\text{необр}}$, была названа **анергией**. **Анергия** — это потеря эксергии, равная произведению температуры НИТ на сумму приращений энтропии всех тел, участвующих в процессе.

Из первого закона термодинамики следует, что сумма эксергии и анергии в любом процессе остается постоянной. Согласно второму закону термодинамики эксергия остается постоянной лишь в обратимых процессах, в необратимых она уменьшается, превращаясь в анергию. Если энергия бесполезно рассеивается в окружающей среде, то вся эксергия превращается в анергию.

Как следует из формул (2.16) и (2.17), эксергия зависит от температур ВИТ (энергонасосителя) и НИТ (окружающей среды).

Эксергия будет тем больше, чем менее необратим процесс. Тем больше в этом случае будет получено полезной работы. Все это позволяет ввести понятие так называемой *эксергетической эффективности процесса*, или эксергетического КПД. Он определяется отношением использованной эксергии к подведенной. Например, для теплообменников это будет отношение эксергии теплоносителя на выходе e'' к его эксергии на входе e' :

$$\eta_e = e'' / e'.$$

Эксергетический КПД позволяет учесть потери только из-за необратимости процессов, так как лишь в них происходит потеря эксергии. Поэтому для анализа всех обратимых циклов (теоретически обратимые циклы, цикл Карно) он неприменим — во всех этих случаях $\eta_e = 1$. Тем не менее эксергетический метод анализа необратимых тепловых процессов получил в последнее время широкое распространение. Особое значение он приобрел при оценке эффективности технологических процессов.

Обычно тепловые потери выявляют путем составления теплового баланса установок, т. е. исследуют статьи расхода теплоты. Однако такой баланс дает лишь количественную картину распределения потерь. Более того, он искажает действительную картину потерь теплоты и особенно в тех случаях, когда, например, пар поступает не на технологические нужды, а для совершения работы. В таких случаях наиболее целесообразно составлять эксергетический баланс.

Г Л А В А 3

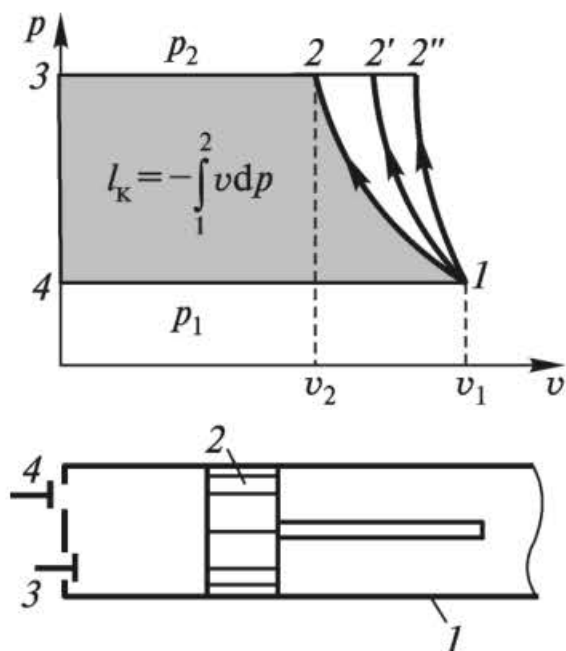
КОМПРЕССОРНЫЕ МАШИНЫ

§ 3.1. Процессы сжатия в компрессорных машинах

Компрессоры предназначены для сжатия и перемещения газов. Они нашли широкое применение в технике, являясь одним из основных агрегатов в газотурбинных, а также в некоторых поршневых двигателях.

По способу сжатия газа их подразделяют на две группы. К первой относятся объемные компрессоры (поршневые, ротационные и др.), а ко второй — центробежные (турбинные). Несмотря на конструктивные различия, термодинамика процессов, происходящих в них, одинакова, поэтому для анализа далее будет рассмотрена работа поршневого компрессора как наиболее простого по конструкции.

Компрессор состоит (рис. 3.1) из цилиндра 1, поршня 2, всасывающего 3 и нагнетательного 4 клапанов. Рабочий процесс совершается за два хода поршня или один оборот коленчатого вала. При движении поршня вправо через открытый всасывающий клапан газ поступает в цилиндр. При обратном движении (влево) всасывающий клапан закрывается и газ сжимается до определенного давления, при котором открывается клапан 4 и газ нагнетается в резервуар.



Р и с. 3.1. Схема компрессора и p - v -диаграмма процессов сжатия

Компрессор называется идеальным, если: сжатый в цилиндре газ полностью без остатка выталкивается поршнем, отсутствуют потери энергии в клапанах, утечки и перетечки газа через неплотности, силы трения поршня о цилиндр.

Теоретическая индикаторная диаграмма идеального поршневого компрессора показана на рис. 3.1. Линия 4 — 1 называется линией всасывания; 1 — 2 — сжатие по изотерме; 1 — 2'' — сжатие по адиабате; 1 — 2' — политропное сжатие; 2 — 3 — линия нагнетания. Следует отметить, что линии всасывания 4 — 1 и нагнетания 2 — 3 не изображают термодинамические процессы, так как состояние рабочего тела здесь не меняется, а меняется лишь его количество.

Термодинамический расчет компрессора выполняется с целью определения работы, затрачиваемой на сжатие, что, в свою очередь, дает возможность определить мощность приводного двигателя.

Удельная работа, затрачиваемая на получение сжатого газа при условии обратимости всех процессов и отсутствии приращения кинетической энергии газа, определяется по формуле

$$l_k = p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_1^2 p dv,$$

где $p_1 v_1$ — работа всасывания (затрачивается внешней средой при заполнении цилиндра); $p_2 v_2$ — работа нагнетания (затрачивается на вытеснение газа из цилиндра); $\int_1^2 p dv$ — работа, затраченная на сжатие газа.

Так как

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 = \int_2^1 d(pv) = \int_1^2 (-p dv - v dp),$$

то

$$l_k = \int_1^2 (-p dv - v dp + p dv) = - \int_1^2 v dp.$$

Ввиду того что работа l_k на получение сжатого газа затрачивается, она имеет отрицательный знак и называется *технической работой компрессора*. Работа компрессора l_k на диаграмме в pv -координатах изображается площадью $1 - 2 - 3 - 4 - 1$ (работа изотермического сжатия).

Работа, затраченная на привод идеального компрессора при изотермическом сжатии, определяется по формуле

$$l_{\text{из}} = -RT_1 \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (3.1)$$

При адиабатном сжатии работа на привод компрессора будет

$$l_{\text{ад}} = -\frac{k}{k-1} RT_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \quad (3.2)$$

Она численно равна площади $1 - 2'' - 3 - 4 - 1$. Работа на привод компрессора при адиабатном сжатии может быть также записана в виде формулы

$$l_{\text{ад}} = -(p_2 v_2 - p_1 v_1) - (u_2 - u_1) = -(u_2 + p_2 v_2) + (u_1 + p_1 v_1) = i_1 - i_2,$$

где $u_2 - u_1 = l_{\text{ад}}$ — работа адиабатного сжатия.

В случае сжатия по политропе формула для определения работы на привод идеального компрессора будет

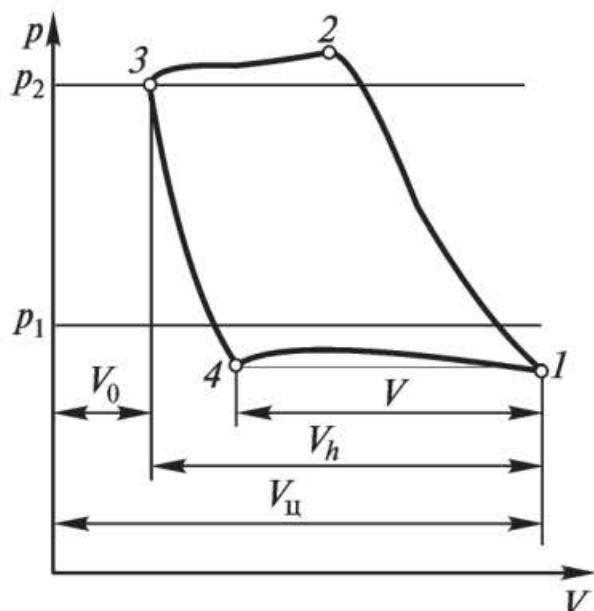
$$l_{\text{п}} = -\frac{n}{n-1} RT_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]. \quad (3.3)$$

Работа на привод компрессора при политропном сжатии численно равна площади $1 - 2' - 3 - 4 - 1$.

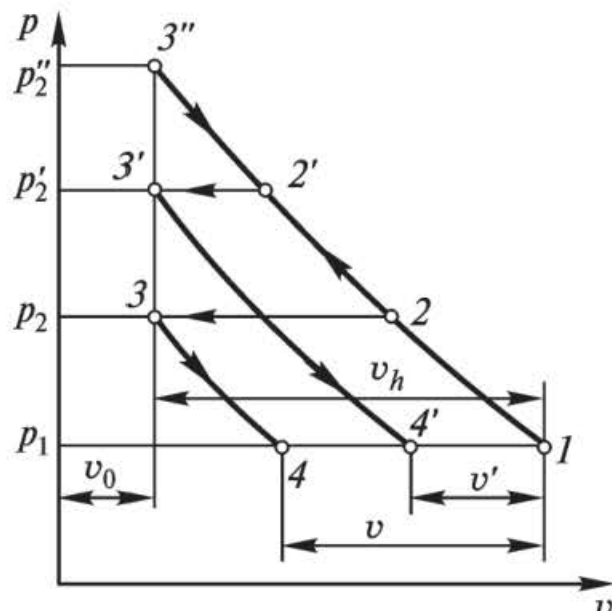
Таким образом, сжатие по изотерме дает наименьшую площадь и, следовательно, наименьшую затрату работы. Наибольшая затрата работы получается при адиабатном сжатии.

Для того чтобы процесс сжатия газа приблизить к изотермическому, необходимо от него отводить теплоту. С этой целью в стенках цилиндра компрессора делают полости, через которые прокачивается охлаждающая жидкость.

Действительная индикаторная диаграмма одноступенчатого компрессора представлена на рис. 3.2. На ней процесс всасывания изображен линией $4 - 1$, сжатие — $1 - 2$, нагнетание — $2 - 3$. Линия



Р и с. 3.2. Индикаторная диаграмма одноступенчатого компрессора



Р и с. 3.3. Диаграмма сжатия в одноступенчатом компрессоре

3 — 4 характеризует расширение газа, оставшегося во вредном пространстве. *Вредным пространством* называется некоторый свободный объем V_0 между поршнем и крышкой цилиндра в момент нахождения поршня в крайнем верхнем положении. Его объем составляет 4...10 % от полного объема $V_{ц}$ цилиндра. После нагнетания газ, оставшийся во вредном пространстве, имеет давление нагнетания p_2 . При обратном движении поршня он расширяется. Всасывание новой порции газа начинается лишь тогда, когда давление расширяющегося в цилиндре газа станет меньше давления всасывания p_1 (окружающей среды). При этом оно начинается только в точке 4 и в цилиндр поступит новая порция газа V , объем которой меньше рабочего объема V_h на величину $v_h - V$.

Таким образом, отличие действительной индикаторной диаграммы одноступенчатого компрессора от теоретической (см. рис. 3.1) заключается в наличии вредного пространства в реальном компрессоре, а также потерь на дросселирование во всасывающем и нагнетательном клапанах. Вследствие этого всасывание новой порции газа в цилиндр происходит при давлении, меньшем p_1 , а нагнетание — при давлении, большем p_2 в нагнетательном трубопроводе.

Вредное пространство уменьшает количество всасываемого газа и, следовательно, уменьшает производительность компрессора. Степень использования рабочего объема цилиндра оценивается объемным КПД компрессора

$$\lambda_v = V / V_h.$$

Он уменьшается с увеличением объема вредного пространства, так как в этом случае уменьшается объем всасываемого в цилиндр газа, и при некотором V может стать равным нулю.

Объемный КПД уменьшается также и с повышением давления сжатия. На рис. 3.3 дана диаграмма сжатия газа в одноступенчатом компрессоре для трех разных давлений p_2 , p'_2 , p''_2 . Процесс $1-2$ — адиабатное сжатие до давления p_2 ; $2-3$ — линия нагнетания газа в резервуар при давлении p_2 ; $3-4$ — адиабатное расширение газа, оставшегося во вредном пространстве; $4-1$ — линия всасывания газа. Объем газа, поступающего в цилиндр, в этом случае будет равен V .

Если давление сжатия повысить до давления p'_2 , то будем иметь следующие процессы: $1-2'$ — сжатие; $2'-3'$ — нагнетание газа в резервуар; $3'-4'$ — расширение газа, оставшегося во вредном пространстве; $4'-1$ — всасывание новой порции газа в цилиндр компрессора. Можно заметить, что с увеличением давления сжатия объем газа, поступающего в цилиндр, уменьшается ($v' < v$). Это связано с тем, что газ, оставшийся в цилиндре при большем давлении, при расширении занимает больший объем. В результате рабочий объем цилиндра уменьшается.

И в пределе, когда линия сжатия $1-3''$ пересекает линию вредного пространства ($3-3''$), компрессор будет сжимать и расширять одну и ту же порцию газа, так как будет отсутствовать процесс всасывания. Это связано с тем, что газ, оставшийся во вредном пространстве при давлении p''_2 , в результате расширения (процесс $3''-1$) занимает весь объем цилиндра и всасывания новой порции не происходит. Объемный КПД в этом случае равен нулю, производительность компрессора также равна нулю.

С увеличением давления растет температура сжатого газа, в том числе и оставшегося во вредном пространстве. Повышается также и температура стенок цилиндра. При всасывании новой порции газа происходит его нагрев от стенок цилиндра и перемешивания с нагретым газом, оставшимся во вредном пространстве. Он сопровождается увеличением удельного объема газа, всасываемого в цилиндр, и, следовательно, уменьшением его массы. Это уменьшение массы оценивается отношением T'_1/T_1 , где T'_1 — температура всасываемого газа; T_1 — температура газа, нагретого в цилиндре в результате всасывания.

Суммарное уменьшение производительности компрессора из-за нагрева газа и влияния вредного пространства оценивается коэффициентом наполнения

$$\eta_{\text{нап}} = \lambda_V (T_1' / T_1).$$

Теоретическая работа, затраченная на привод компрессора с учетом влияния вредного пространства, численно равна площади $1 - 2 - 3 - 4 - 1$ (при сжатии до давления p_2 , см. рис. 3.3).

Уменьшение объемного КПД λ_V с ростом p_2/p_1 и ухудшение при этом условий смазки из-за роста температуры газа делают одноступенчатый (одноцилиндровый) компрессор непригодным для получения газа высокого давления. Обычно его применяют при степенях повышения давления не выше 10...12. Для получения газа высокого давления используют многоступенчатое сжатие в трех, четырех и т. д. цилиндрах, последовательно соединенных между собой. При переходе из одного цилиндра в следующий газ промежуточно охлаждают, что позволяет улучшить условия смазки компрессора и получить экономию электроэнергии за счет приближения процесса сжатия к изотермическому, при котором работа компрессора l_k оказывается наименьшей (см. § 3.3).

§ 3.2. Мощность привода и коэффициенты полезного действия компрессора

В энергетике под КПД обычно понимают отношение полезно используемой энергии ко всей затраченной. И чем выше процент полезно используемой энергии из всего ее затраченного количества, тем выше КПД. В случае компрессорных машин такое определение КПД оказывается неприемлемым, поэтому для оценки степени совершенства их сравнивают с идеальными. При этом для охлаждаемых компрессоров вводят изотермический КПД

$$\eta_{\text{из}} = \frac{l_{\text{из}}}{l_{\text{д}}} = \frac{N_{\text{из}}}{N_{\text{д}}},$$

где $l_{\text{из}}$ — работа на привод идеального компрессора при изотермическом сжатии; $l_{\text{д}}$ — действительная работа на привод реального охлаждаемого компрессора; $N_{\text{из}}$, $N_{\text{д}}$ — соответствующие мощности приводных двигателей, $N_{\text{из}} = ml_{\text{из}}$, m — массовая производительность компрессора.

При расходе газа G (кг/с) затраченная работа определяется по формуле

$$L_{\text{из}} = Gl_{\text{из}} = GRT_1 \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Отсюда мощность приводного двигателя (Вт):

$$N_{\text{из}} = L_{\text{из}} = GRT_1 \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Для неохлаждаемых машин вводится адиабатический КПД:

$$\eta_{\text{ад}} = \frac{l_{\text{ад}}}{l_{\text{д}}} = \frac{N_{\text{ад}}}{N_{\text{д}}},$$

где $l_{\text{ад}}$ — работа на привод идеального компрессора при адиабатическом сжатии.

Значения $\eta_{\text{из}}$ и $\eta_{\text{ад}}$ для различных типов компрессоров определяют из заводских испытаний и указывают в справочниках.

Мощность двигателя для привода компрессора при изотермическом сжатии будет определяться по формуле

$$N_{\text{д}} = \frac{N_{\text{из}}}{\eta_{\text{из}}} = \frac{ml_{\text{из}}}{\eta_{\text{из}}}.$$

Адиабатный и изотермический процессы сжатия могут рассматриваться лишь как теоретические. В реальном компрессоре сжатие происходит по политропе. Формула для определения эффективной мощности в политропном процессе сжатия с учетом потерь на трение, влияния вредного пространства, а также уменьшения подачи из-за нагрева газа имеет вид

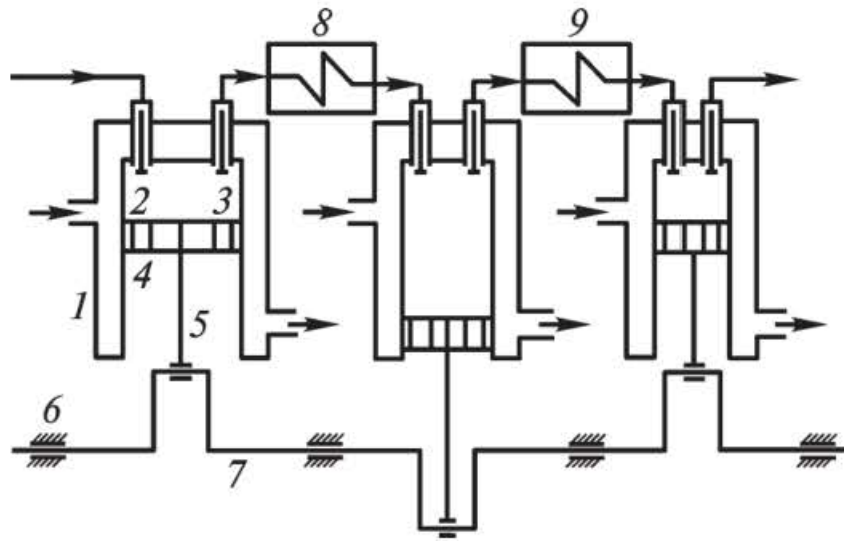
$$N_e = \frac{m l_{\text{п}}}{\eta_{\text{п}} \eta_{\text{м}} \eta_{\text{нап}}},$$

где $l_{\text{п}}$ — работа на привод компрессора при политропном сжатии; $\eta_{\text{п}}$ — КПД компрессора при политропном сжатии; $\eta_{\text{м}}$ — механический КПД, учитывающий потери на трение; $\eta_{\text{нап}}$ — КПД наполнения.

Работа $l_{\text{п}}$ определяется по формуле (3.3), где показатель политропы n находится, как правило, по параметрам газа в начале и конце процесса сжатия.

§ 3.3. Многоступенчатый компрессор

Для получения газов высокого давления применяют многоступенчатые компрессоры. В них сжатие осуществляется политропно в нескольких последовательно соединенных цилиндрах с промежуточ-



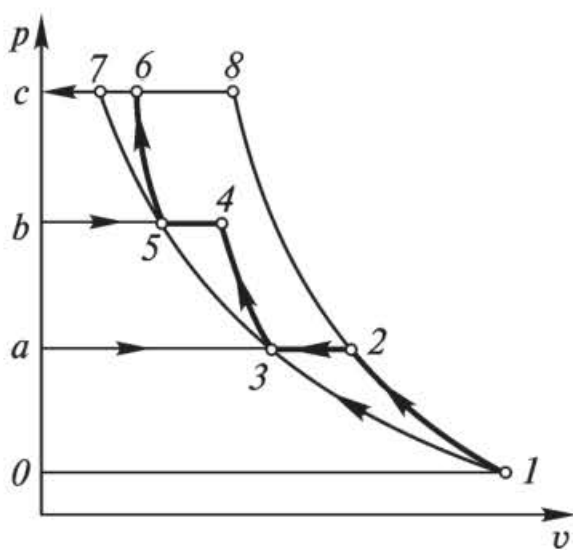
Р и с. 3.4. Принципиальная схема многоступенчатого компрессора:

1 — цилиндр; 2 — всасывающий клапан; 3 — нагнетательный клапан; 4 — поршень; 5 — шатун; 6 — подшипник; 7 — коленчатый вал; 8, 9 — промежуточные охладители

ным охлаждением газа после сжатия в каждом из них. Принципиальная схема многоступенчатого компрессора, состоящего из трех ступеней, представлена на рис. 3.4.

Принцип работы состоит в следующем. Через клапан 2 первой ступени происходит всасывание газа. После сжатия он через охладитель 8 направляется во вторую ступень компрессора, причем всасывание во второй ступени происходит при давлении сжатия в первой ступени. Всасывание газа в третьей ступени выполняется через промежуточный охладитель 9 при давлении сжатия во второй ступени. Через нагнетательный клапан третьей ступени газ нагнетается в резервуар.

Диаграмма процессов сжатия в трехступенчатом компрессоре представлена на рис. 3.5. Рассмотрим процессы: 0 — 1 — линия всасывания газа в первой ступени компрессора (не является термодинамическим процессом, так как происходит лишь перемещение газа без



Р и с. 3.5. Диаграмма сжатия в многоступенчатом компрессоре

изменения его термодинамических параметров); 1 — 2 — политропное сжатие в первой ступени; 2 — 3 — линия нагнетания газа в промежуточный охладитель 8; 3 — 4 — политропное сжатие во второй ступени; 4 — 5 — линия нагнетания в промежуточный охладитель 9; 5 — 6 — линия всасывания в третьей ступени компрессора; 6 — 7 — политропное сжатие в третьей ступени; 7 — 8 — линия нагнетания газа в резервуар.

Отрезки 2 — 3 и 4 — 5 изображают уменьшение объема газа при постоянном давлении от охлаждения в охладителях 8 и 9. Охлаждение проводится до одной температуры, равной температуре всасывания газа в первой ступени T_1 . Поэтому температуры в точках 1, 3, 5 будут одинаковыми, и через них можно провести изотерму 1 — 7.

Отношение давлений для каждой ступени обычно принимают одинаковым и равным некоторой величине x :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_4}{p_3} = \frac{p_6}{p_5} = x.$$

В случае равенства начальных температур и показателей политропы конечные температуры также будут равны, т.е. $T_2 = T_4 = T_6$. Отсюда следует, что

$$\frac{p_2}{p_1} \frac{p_4}{p_3} \frac{p_6}{p_5} = x^3.$$

Так как $p_2 = p_3$ и $p_4 = p_5$, то

$$x = \sqrt[3]{\frac{p_6}{p_1}}.$$

При z ступенях компрессора для величины x получим следующую формулу:

$$x = \sqrt[z]{\frac{p_{2z}}{p_1}}.$$

Ступенчатое сжатие с промежуточным охлаждением приближает рабочий процесс компрессора к наиболее экономичному изотермическому сжатию, и чем больше число ступеней сжатия, тем больше процесс сжатия будет приближаться к изотермическому. При равенстве температур газа на входе в каждую ступень и отношений давлений затраты работы на сжатие во всех ступенях будут одинаковыми

$$l_1 = l_2 = l_3,$$

где

$$l_1 = -\frac{n}{n-1} RT_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right];$$

$$l_2 = -\frac{n}{n-1} RT_3 \left[\left(\frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right];$$

$$l_3 = -\frac{n}{n-1} RT_5 \left[\left(\frac{p_6}{p_5} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right].$$

Отсюда $l_k = 3l_1$ или при z ступенях $l_k = zl_1$.

Работа на привод трехступенчатого компрессора при политропном сжатии во всех ступенях в pv -координатах может быть определена площадью фигуры $0-1-2-3-4-5-6-c-0$.

Если процесс политропного сжатия до давления p_6 проводить в одноступенчатом компрессоре, то затраченная на это работа будет равна площади фигуры $0-1-8-c-0$. Отсюда экономия работы будет численно равна площади $2-3-4-5-6-8-2$.

Г Л А В А 4

ЦИКЛЫ ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

§ 4.1. Краткие исторические сведения

Одним из первых, кто указал на возможность создания двигателей внутреннего сгорания, был Сади Карно. Идеи, высказанные им в работе «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», в дальнейшем были полностью реализованы.

В 1860 г. француз Лемуар построил двигатель внутреннего сгорания (ДВС), работавший на газе. Однако он не получил широкого распространения ввиду того, что имел низкий КПД (не выше, чем КПД паровых машин). В 1862 г. французский инженер Бо-де-Роша предложил (запатентовал) двигатель, принципы создания которого совпадали с идеями Карно. Эти принципы были осуществлены немецким инженером Отто в созданном им в 1877 г. бензиновом двигателе.

В 1897 г. немецким инженером Дизелем был разработан двигатель высокого сжатия, который работал на керосине. Керосин распылялся воздухом высокого давления, получаемым от компрессора.

В 1904 г. русский инженер Г.В. Тринклер построил бескомпрессорный двигатель со смешанным сгоранием топлива — сначала при постоянном объеме, а затем при постоянном давлении. Он получил в настоящее время широкое распространение.

Все современные двигатели внутреннего сгорания подразделяются на три основные группы в зависимости от используемого цикла:

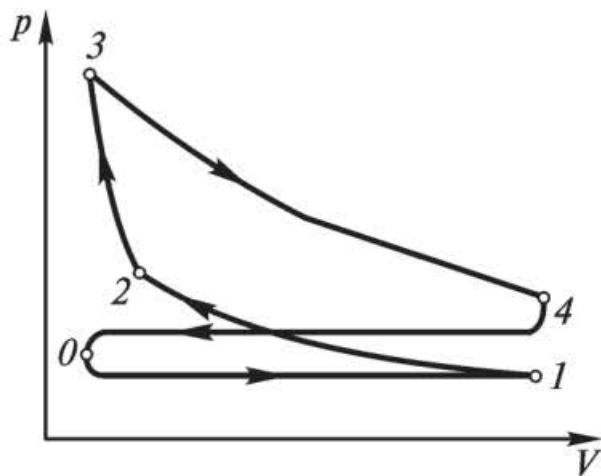
- с подводом теплоты при постоянном объеме $v = \text{const}$ (цикл Отто);
- с подводом теплоты при постоянном давлении $p = \text{const}$ (цикл Дизеля);
- смешанный цикл с подводом теплоты как при $v = \text{const}$, так и при $p = \text{const}$ (цикл Тринклера).

При исследовании идеальных термодинамических циклов поршневых ДВС к числу определяемых величин относятся: количество подведенной и отведенной теплоты, основные параметры состояния в характерных точках цикла, термический КПД цикла.

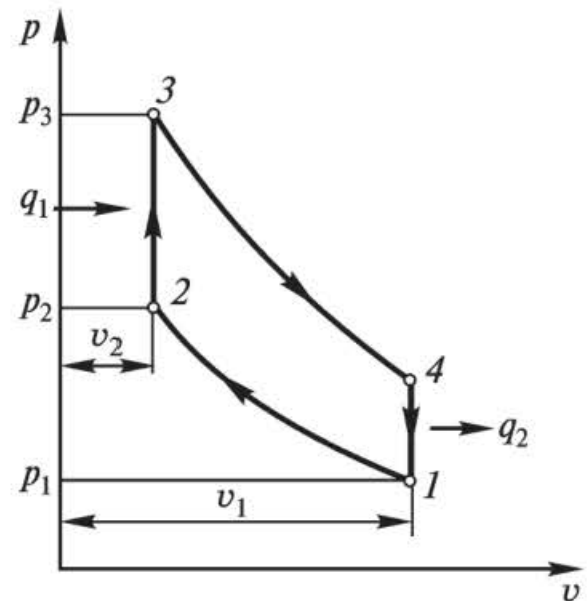
§ 4.2. Циклы ДВС с подводом теплоты при постоянном объеме

Исследование работы реального поршневого двигателя целесообразно проводить по так называемой индикаторной диаграмме (снятой с помощью специального прибора — индикатора). Индикаторная диаграмма двигателя, работающего со сгоранием топлива при постоянном объеме, представлена на рис. 4.1.

При движении поршня от верхней мертвой точки к нижней всасывается горючая смесь (линия $0 — 1$). Эта линия не является термодинамическим процессом, так как основные параметры при всасывании не изменяются, а изменяются только масса и объем смеси в цилиндре. Кривой $1 — 2$ (линия сжатия) изображается процесс сжатия (поршень движется от нижней мертвой точки к верхней). В точке 2 от электрической искры мгновенно воспламеняется горючая смесь (при постоянном объеме) — кривая $2 — 3$. В ходе этого процесса температура и давление резко возрастают. Процесс расширения продуктов сгорания на индикаторной диаграмме изображается кривой $3 — 4$, называемой линией расширения. В точке 4 открывается выхлопной клапан, и давление в цилиндре уменьшается до наружного. При дальнейшем движении поршня (от нижней мертвой точки к верхней) через выхлопной клапан удаляются продукты сгорания из цилиндра при давлении, несколько большем давления окружающей среды.



Р и с. 4.1. Индикаторная диаграмма ДВС



Р и с. 4.2. Цикл Отто

Этот процесс на диаграмме изображается кривой $4 — 0$ и называется линией выхлопа.

В данном случае рабочий процесс совершается за четыре хода поршня (такта). Коленчатый вал делает за это время два оборота. В связи с чем рассмотренные двигатели называются четырехтактными.

Из анализа работы реального двигателя следует, что рабочий процесс не является замкнутым и в нем присутствуют все признаки необратимых процессов: трение, теплообмен при конечной разности температур, конечные скорости поршня и др.

Так как в термодинамике исследуют лишь идеальные обратимые циклы, то для исследования цикла ДВС примем следующие допущения: рабочее тело — идеальный газ с постоянной теплоемкостью; количество рабочего тела постоянно; между рабочим телом и источниками теплоты имеет место бесконечно малая разность температур; теплота к рабочему телу подводится не за счет сжигания топлива, а от внешних источников. То же самое справедливо и для отвода теплоты.

Принятые допущения приводят к изучению идеальных термодинамических циклов ДВС, что позволяет сравнивать различные двигатели и определять факторы, влияющие на их КПД. Диаграмма, построенная с учетом указанных допущений, будет уже не индикаторной диаграммой двигателя, а pv -диаграммой его цикла.

Рассмотрим идеальный термодинамический цикл ДВС с изохорным подводом теплоты. Цикл в pv -координатах представлен на рис. 4.2.

Идеальный газ с начальными параметрами p_1, v_1, T_1 сжимается по адиабате $1 — 2$. В изохорном процессе $2 — 3$ рабочему телу от ВИТ передается количество теплоты q_1 . В адиабатном процессе $3—4$ оно рас-

ширятся до первоначального объема $v_4 = v_1$. В изохорном процессе $4 - 1$ рабочее тело возвращается в исходное состояние с отводом от него теплоты q_2 в теплоприемник.

Характеристиками цикла являются: ε — степень сжатия, $\varepsilon = v_1/v_2$; λ — степень повышения давления, $\lambda = p_3/p_2$.

Количества подведенной и отведенной теплоты определяются по формулам

$$q_1 = c_v(T_3 - T_2); \quad q_2 = c_v(T_4 - T_1),$$

где c_v — теплоемкость при постоянном объеме.

Подставляя эти значения теплоты в формулу для термического КПД, получаем

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{c_v(T_4 - T_1)}{c_v(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

Найдем параметры рабочего тела во всех характерных точках цикла.

Точка 2:

$$v_2 = v_1 / \varepsilon; \quad p_2 = p_1 \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^k = p_1 \varepsilon^k; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} = \varepsilon^{k-1}.$$

Отсюда

$$T_2 = T_1 \varepsilon^{k-1}.$$

Точка 3:

$$v_3 = v_2; \quad p_3 = p_2 \lambda = p_1 \varepsilon^k \lambda; \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_2} = \lambda.$$

Отсюда

$$T_3 = T_2 \lambda = T_1 \varepsilon^{k-1} \lambda.$$

Точка 4:

$$v_4 = v_1; \quad p_4 = p_3 \left(\frac{v_3}{v_4} \right)^k = p_3 \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^k = \frac{p_3}{\varepsilon^k} = p_1 \lambda;$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{v_3}{v_4} \right)^{k-1} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}.$$

Отсюда

$$T_4 = T_1 \varepsilon^{k-1} \lambda \left(\frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \right) = T_1 \lambda.$$

С учетом найденных значений температур формула для КПД примет вид

$$\eta_{iv} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}. \quad (4.1)$$

Из последнего соотношения следует, что термический КПД увеличивается с возрастанием степени сжатия ε и показателя адиабаты k .

Однако повышение степени сжатия в двигателях данного типа ограничивается возможностью преждевременного самовоспламенения горючей смеси. В связи с чем рассматриваемые типы двигателей имеют относительно низкие КПД. В зависимости от рода топлива степень сжатия в таких двигателях изменяется в пределах 4...9.

Работа цикла определяется по формуле

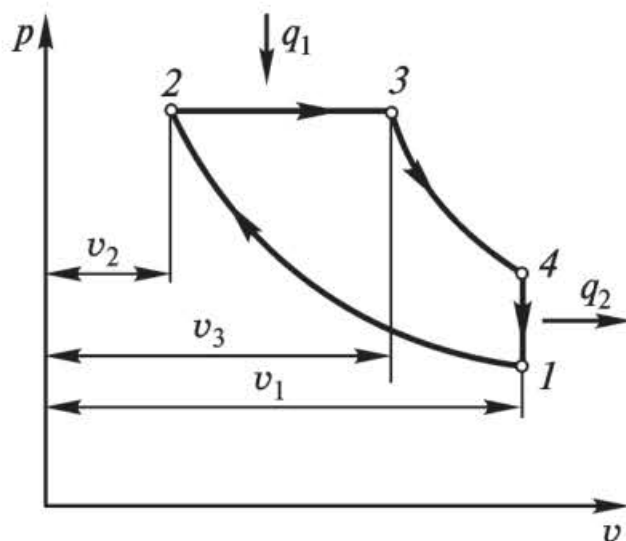
$$l_{ц} = q_1 \eta_{iv} = c_v (T_3 - T_2) \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \right).$$

Циклы с подводом теплоты при постоянном объеме применяют в карбюраторных типах двигателей с использованием принудительного воспламенения от электрической искры.

§ 4.3. Циклы ДВС с подводом теплоты при постоянном давлении

Двигатели, в основу работы которых положен цикл с подводом теплоты при постоянном давлении (с постепенным сгоранием), имеют ряд преимуществ по сравнению с работающими по циклу с подводом теплоты при постоянном объеме. Они связаны с тем, что отдельно сжимаются топливо и воздух, поэтому можно достичь значительно более высоких степеней сжатия. Воздух при высоких давлениях имеет настолько высокую температуру, что подаваемое в цилиндр топливо самовоспламеняется без всяких специальных запальных приспособлений. Кроме того, отдельное сжатие воздуха и топлива позволяет использовать любое дешевое жидкое топливо — нефть, мазут, смолы и др.

В двигателях с постепенным сгоранием топлива воздух сжимается в цилиндре, а жидкое топливо распыляется сжатым воздухом от ком-



Р и с. 4.3. Цикл Дизеля

прессора. Раздельное сжатие позволяет применять высокие степени сжатия (до $\varepsilon = 20$), исключая преждевременное самовоспламенение топлива. Постоянство давления при горении обеспечивается соответствующей регулировкой топливной форсунки. Конструкция такого двигателя впервые была разработана немецким инженером Дизелем.

Рассмотрим идеальный цикл двигателя с подводом теплоты при постоянном давлении (рис. 4.3). Газообразное рабочее тело с начальными параметрами p_1, v_1, T_1 сжимается по адиабате $1 - 2$. В изобарном процессе $2 - 3$ ему сообщается некоторое количество теплоты q_1 . В адиабатном процессе $3 - 4$ оно расширяется до первоначального объема. В изохорном процессе $4 - 1$ рабочее тело возвращается в первоначальное состояние с отводом в теплоприемник теплоты q_2 . Характеристиками цикла являются: степень сжатия ε и ρ — степень предварительного расширения, $\rho = v_3/v_2$.

Количество подведенной и отведенной теплоты определяется по формулам

$$q_1 = c_p (T_3 - T_2); \quad q_2 = c_v (T_4 - T_1).$$

Термический КПД цикла в предположении постоянства теплоемкостей c_p и c_v и их отношения $k = c_p/c_v$:

$$\eta_{тв} = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{k(T_3 - T_2)}.$$

Найдем параметры рабочего тела в характерных точках цикла.

Точка 2:

$$v_2 = \frac{v_1}{\varepsilon}; \quad p_2 = p_1 \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^k = p_1 \varepsilon^k; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} = \varepsilon^{k-1}.$$

Отсюда

$$T_2 = T_1 \varepsilon^{k-1}.$$

Точка 3:

$$v_3 = v_2 \rho = \frac{v_1 \rho}{\varepsilon}; \quad p_3 = p_2 = p_1 \varepsilon^k; \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{v_3}{v_2} = \rho.$$

Отсюда

$$T_3 = T_2 \rho = T_1 \rho \varepsilon^{k-1}.$$

Точка 4:

$$v_4 = v_1; \quad p_4 = p_3 \left(\frac{v_3}{v_4} \right)^k = p_1 \varepsilon^k \left(\frac{v_2 \rho}{v_1} \right)^k = p_1 \rho^k; \quad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{v_3}{v_4} \right)^{k-1} = \left(\frac{v_3}{v_1} \right)^{k-1}.$$

Так как

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

то

$$T_4 = T_3 \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right)^{k-1} = T_1 \rho \varepsilon^{k-1} \left(\frac{\rho^{k-1}}{\varepsilon^{k-1}} \right) = T_1 \rho^k.$$

Подставляя полученные значения температур в формулу для КПД, получаем

$$\eta_{tp} = 1 - \frac{\rho^k - 1}{k \varepsilon^{k-1} (\rho - 1)}. \quad (4.2)$$

Отсюда следует, что с увеличением ε и k КПД увеличивается, а с увеличением ρ — уменьшается.

Работа цикла определяется по формуле

$$l_{ц} = q_1 \eta_{tp} = c_p (T_3 - T_2) \left[1 - \frac{\rho^k - 1}{k \varepsilon^{k-1} (\rho - 1)} \right].$$

Сравнения КПД циклов ДВС с подводом теплоты при $p = \text{const}$ и $v = \text{const}$ при одинаковых давлениях и температурах, но при различных ε показывают, что

$$\eta_{tp} > \eta_{tv}.$$

При этом степень сжатия ε при $p = \text{const}$ больше, чем при $v = \text{const}$.

Значение ε в цикле с подводом теплоты при постоянном давлении выбирается таким образом, чтобы обеспечивались условия самовоспламенения топлива. Таким условиям в компрессорных дизелях соответствует $\varepsilon = 14 \dots 18$.

§ 4.4. Циклы ДВС со смешанным подводом теплоты

Одним из недостатков двигателей, в которых применяется цикл с подводом теплоты при постоянном давлении, является необходимость использования компрессора, применяемого для подачи топлива. Его наличие усложняет конструкцию и уменьшает экономичность двигателя, так как на его работу затрачивается 6...10 % от общей мощности двигателя.

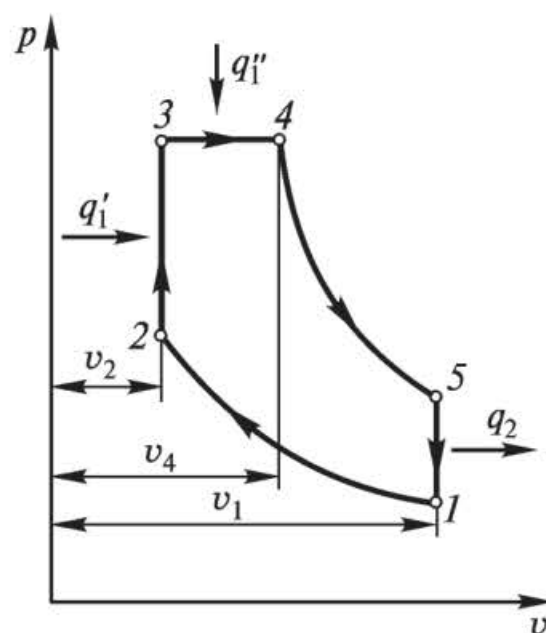
С целью упрощения конструкции и увеличения экономичности русский инженер Г.В. Тринклер разработал проект бескомпрессорного двигателя высокого сжатия. Этот двигатель лишен недостатков рассмотренных ранее двух типов двигателей. Основное его отличие в том, что жидкое топливо с помощью топливного насоса подается через форсунку в головку цилиндра, где воспламеняется и горит вначале при постоянном объеме, а потом при постоянном давлении. На рис. 4.4 представлен идеальный цикл двигателя со смешанным подводом теплоты.

В адиабатном процессе $1 - 2$ рабочее тело сжимается до параметров в точке 2. В изохорном процессе $2 - 3$ к нему подводится первая доля теплоты q'_1 , а в изобарном процессе $3 - 4$ — вторая q''_1 . В процессе $4 - 5$ оно адиабатно расширяется и по изохоре $5 - 1$ возвращается в исходное состояние с отводом теплоты q_2 в теплоприемник.

Характеристиками цикла являются: степень сжатия $\varepsilon = v_1/v_2$; степень повышения давления $\lambda = p_3/p_2$; степень предварительного расширения $\rho = v_4/v_3$.

Количество подведенной $q_1 = q'_1 + q''_1$ и отведенной q_2 теплоты определяется по формулам

$$q'_1 = c_v (T_3 - T_2); \quad q''_1 = c_p (T_4 - T_3); \\ q_2 = c_v (T_5 - T_1).$$



Р и с. 4.4. Цикл Тринклера

Термический КПД цикла:

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1' + q_1''} = 1 - \frac{T_5 - T_1}{(T_3 - T_2) + k(T_4 - T_3)}.$$

Найдем параметры рабочего тела в характерных точках цикла.

Точка 2:

$$v_2 = \frac{v_1}{\varepsilon}; \quad p_2 = p_1 \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^k = p_1 \varepsilon^k; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} = \varepsilon^{k-1}.$$

Отсюда

$$T_2 = T_1 \varepsilon^{k-1}.$$

Точка 3:

$$v_3 = v_2 = \frac{v_1}{\varepsilon}; \quad p_3 = p_2 \lambda = p_1 \lambda \varepsilon^k; \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_2} = \lambda;$$

$$T_3 = T_2 \lambda = T_1 \lambda \varepsilon^{k-1}.$$

Точка 4:

$$v_4 = v_3 \rho = v_1 \frac{\rho}{\varepsilon}; \quad p_4 = p_3 = p_1 \varepsilon^k \lambda; \quad \frac{T_4}{T_3} = \frac{v_4}{v_3} = \rho;$$

$$T_4 = T_3 \rho = T_1 \rho \lambda \varepsilon^{k-1}.$$

Точка 5:

$$v_5 = v_1; \quad p_5 = p_4 \left(\frac{v_4}{v_5} \right)^k = p_1 \lambda \varepsilon^k \left(\frac{v_1 \rho}{v_1 \varepsilon} \right)^k = p_1 \lambda \rho^k;$$

$$\frac{T_5}{T_4} = \left(\frac{v_4}{v_5} \right)^{k-1} = \left(\frac{v_4}{v_1} \right)^{k-1}; \quad \frac{\rho}{\varepsilon} = \left(\frac{v_4}{v_3} \right) : \left(\frac{v_1}{v_2} \right) = \frac{v_4}{v_1};$$

$$\frac{T_5}{T_4} = \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right)^{k-1}; \quad T_5 = T_1 \varepsilon^{k-1} \rho \lambda \frac{\rho^{k-1}}{\varepsilon^{k-1}} = T_1 \lambda \rho^k.$$

Подставив найденные значения температур в формулу для КПД, имеем

$$\eta_t = 1 - \frac{\lambda \rho^k - 1}{\varepsilon^{k-1} [(\lambda - 1) + k \lambda (\rho - 1)]}. \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что с увеличением k , ε и λ КПД цикла возрастает, а с увеличением ρ — уменьшается.

Данный цикл обобщает циклы с изобарным и изохорным подводом теплоты. Если положить $\lambda = 1$ (что означает отсутствие подвода теплоты при постоянном объеме ($p_2 = p_3$)), то формула (4.3) приводится к формуле (4.2), т. е. к формуле для КПД цикла ДВС с изобарным подводом теплоты. Если принять $\rho = 1$ (что означает отсутствие подвода теплоты при постоянном давлении ($v_3 = v_4$)), то формула (4.3) приводится к формуле (4.1) для КПД цикла с изохорным подводом теплоты.

Цикл со смешанным подводом теплоты лежит в основе работы большинства современных дизелей.

ГЛАВА 5

ЦИКЛЫ ГАЗОТУРБИННЫХ УСТАНОВОК

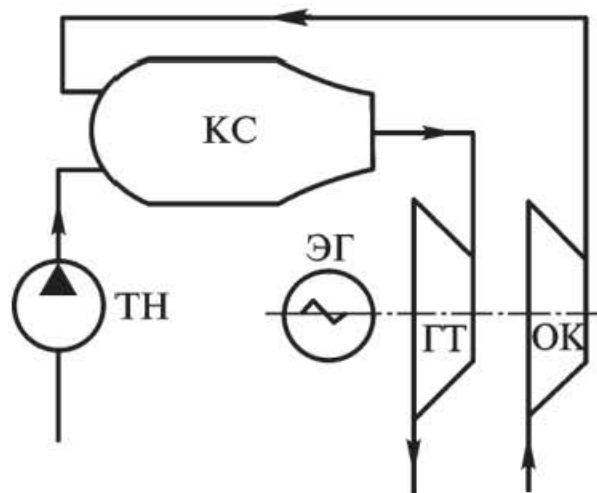
§ 5.1. Циклы ГТУ с подводом теплоты при постоянном давлении

Газотурбинные установки (ГТУ) имеют много важных преимуществ по сравнению с поршневыми двигателями: относительно небольшие габариты и малую массу, в них нет деталей с возвратно-поступательным движением, возможны достаточно большие единичные мощности. Отсутствует основной недостаток поршневых двигателей — невозможность расширения рабочего тела в цилиндре до атмосферного давления.

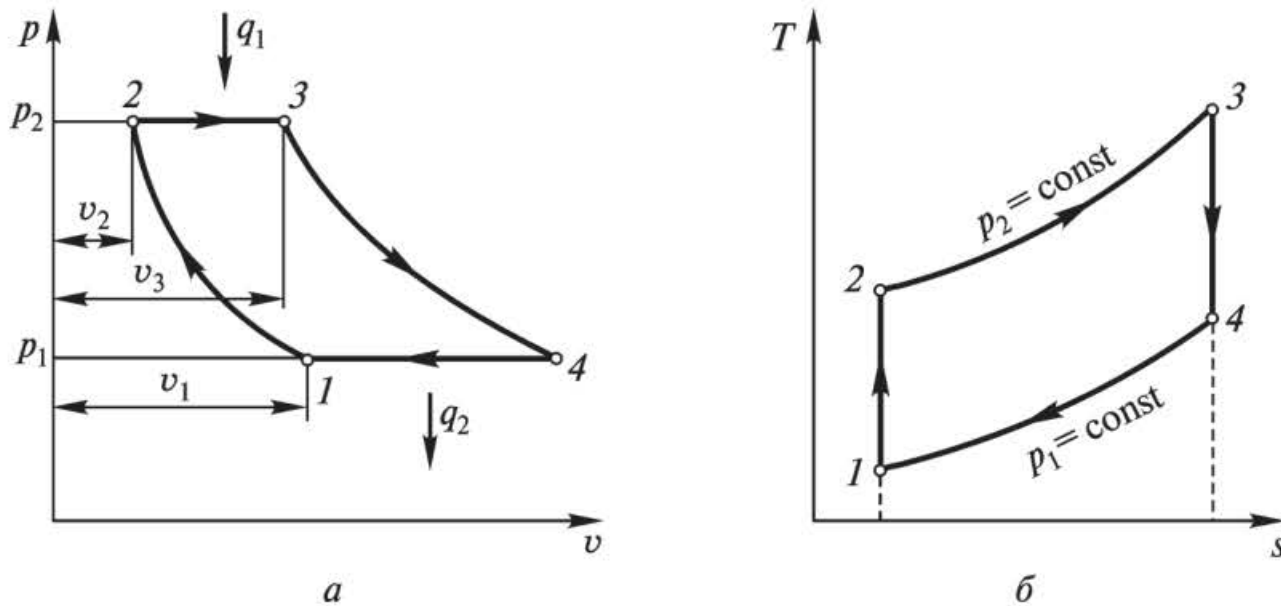
Практическое применение нашли ГТУ со сгоранием топлива при постоянных давлении и объеме. Им соответствуют идеальные циклы с подводом теплоты в процессе при постоянном давлении и объеме.

Принципиальная схема ГТУ с подводом теплоты при постоянном давлении приведена на рис. 5.1. Рассмотрим принцип действия установки.

В камеру сгорания КС через форсунки поступают воздух из осевого ком-



Р и с. 5.1. Принципиальная схема ГТУ с подводом теплоты при $p = \text{const}$



Р и с. 5.2. Цикл ГТУ с подводом теплоты при $p = \text{const}$ в p - v - (а) и T - s -координатах (б)

прессора ОК и топливо из топливного насоса ТН. Из камеры сгорания горячие газы через комбинированные сопла направляются на лопатки газовой турбины ГТ, а затем выбрасываются в атмосферу. ЭГ — электрогенератор.

Идеальный цикл ГТУ с подводом теплоты при постоянном давлении в p - v - и T - s -координатах представлен на рис. 5.2.

В адиабатном процессе $1 - 2$ рабочее тело сжимается от параметров точки 1 до параметров точки 2 . В изобарном процессе $2 - 3$ к нему подводится некоторое количество теплоты q_1 от ВИТ. По адиабате $3 - 4$ оно расширяется до первоначального давления $p_4 = p_1$ и по изобаре $4 - 1$ приводится к параметрам точки 1 с отводом теплоты q_2 к НИТ.

Характеристики цикла: степень повышения давления в компрессоре, $\beta = p_2/p_1$; степень изобарного расширения, $\rho = v_3/v_2$.

Количество подводимой и отводимой теплоты определяется по формулам

$$q_1 = c_p (T_3 - T_2); \quad q_2 = c_p (T_4 - T_1).$$

С учетом последних соотношений формула для термического КПД:

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

Найдем выражения температур T_2 , T_3 , T_4 через начальную температуру T_1 рабочего тела. Для адиабатного процесса $1 - 2$ справедливо соотношение

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \beta^{\frac{k-1}{k}}.$$

Отсюда

$$T_2 = T_1 \beta^{\frac{k-1}{k}}.$$

В изобарном процессе 2 — 3

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{v_3}{v_2} = \rho.$$

Отсюда

$$T_3 = T_2 \rho = T_1 \rho \beta^{\frac{k-1}{k}}.$$

В адиабатном процессе 3 — 4

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p_1}{p_1 \beta} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Отсюда

$$T_4 = T_1 \beta^{\frac{k-1}{k}} \rho \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}} = T_1 \rho.$$

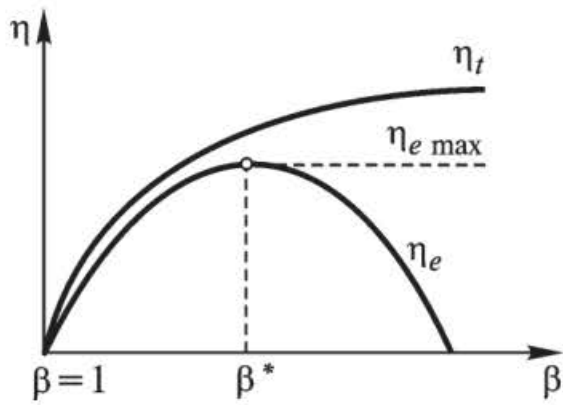
Подставляя найденные значения температур в формулу для КПД, получаем

$$\eta_t = 1 - \frac{T_1 \rho - T_1}{T_1 \rho \beta^{\frac{k-1}{k}} - T_1 \beta^{\frac{k-1}{k}}} = 1 - \frac{\rho - 1}{(\rho - 1) \beta^{\frac{k-1}{k}}} = 1 - \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Отсюда следует, что с увеличением степени повышения давления β и показателя адиабаты k КПД ГТУ с подводом теплоты в процессе при постоянном давлении возрастает.

Однако термический КПД еще не может служить мерой экономичности установки. Эту роль выполняет эффективный КПД ГТУ

$$\eta_e = \frac{l_e}{q_1},$$



Р и с. 5.3. Кривые зависимости КПД от параметра β

где l_e — эффективная работа (полезная работа на валу двигателя с учетом внутренних и механических потерь в установке). Она определяется как разность действительных работ расширения и сжатия

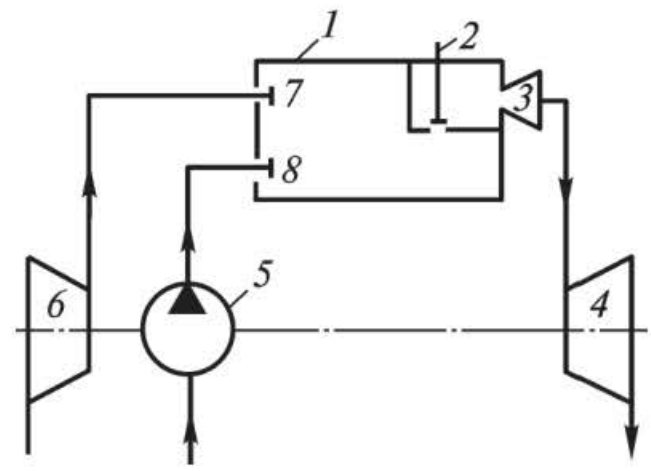
$$l_e = (i_3 - i_4)\eta_T\eta_M - (i_2 - i_1)\eta_{ад}^K,$$

где η_T — внутренний относительный КПД газовой турбины, $\eta_T = 0,8...0,9$; η_M — механический КПД; $\eta_{ад}^K$ — адиабатный КПД турбокомпрессора, $\eta_{ад}^K = 0,8...0,85$.

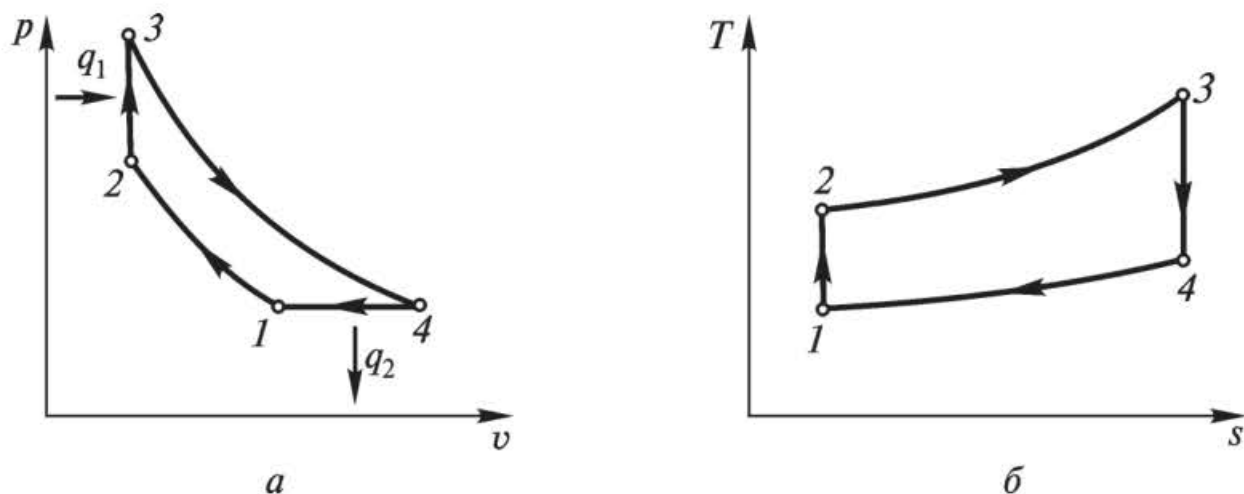
Кривые зависимости η_t и η_e от $\beta = p_2/p_1$ имеют следующий вид (рис. 5.3). Как видно, по мере увеличения β η_e сначала растет, а потом уменьшается вплоть до нуля. Поэтому необходимо так выбирать β , чтобы $\beta \leq \beta^*$.

§ 5.2. Циклы ГТУ с подводом теплоты при постоянном объеме

В отличие от предыдущих ГТУ, где горение осуществляется непрерывно, в ГТУ со сгоранием топлива при постоянном объеме горение является периодическим (пульсирующим). Через воздушный клапан 7 в камеру сгорания 1 поступает воздух, сжатый в компрессоре 6 (рис. 5.4). Сюда же топливным насосом 5 через топливный клапан 8 подается жидкое топливо. Процесс горения идет при закрытых воздушном 7 и сопловом клапанах 2. Воспламенение происходит от



Р и с. 5.4. Принципиальная схема ГТУ с подводом теплоты при $v = \text{const}$



Р и с. 5.5. Цикл ГТУ с подводом теплоты при $v = \text{const}$ в p v - (а) и T s -координатах (б)

электрической искры. После сгорания топлива в результате повышения давления в камере 1 открывается сопловой клапан 2. Продукты сгорания, проходя через сопловые аппараты 3, поступают на лопатки газовой турбины 4.

Идеальный цикл газотурбинной установки с подводом теплоты при постоянном объеме представлен на рис. 5.5. В адиабатном процессе 1 — 2 рабочее тело с параметрами p_1, v_1, T_1 в точке 1 сжимается до параметров p_2, v_2, T_2 в точке 2. В изохорном процессе 2 — 3 к нему подводится некоторое количество теплоты q_1 . Затем оно расширяется в адиабатном процессе 3 — 4 до начального давления $p_4 = p_1$ и по изобаре 4 — 1 возвращается в первоначальное состояние, характеризующееся параметрами точки 1. Характеристики цикла: степень повышения давления в компрессоре, $\beta = p_2/p_1$; степень добавочного повышения давления, $\lambda = p_3/p_2$.

Удельное количество подводимой и отводимой теплоты определяется по формулам

$$q_1 = c_v(T_3 - T_2); \quad q_2 = c_p(T_4 - T_1).$$

Подставляя эти выражения в формулу для термического КПД, получаем

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{k(T_4 - T_1)}{T_3 - T_2}.$$

Найдем выражения для температур T_2, T_3, T_4 через начальную температуру T_1 . В адиабатном процессе 1 — 2 имеем

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \beta^{\frac{k-1}{k}}.$$

Отсюда

$$T_2 = T_1 \beta^{\frac{k-1}{k}}.$$

В изохорном процессе 2 — 3

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_2} = \lambda.$$

Отсюда

$$T_3 = T_2 \lambda = T_1 \lambda \beta^{\frac{k-1}{k}}.$$

В адиабатном процессе 3 — 4

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p_1}{p_1 \beta \lambda}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{1}{(\beta \lambda)^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Отсюда

$$T_4 = T_3 \frac{1}{(\beta \lambda)^{\frac{k-1}{k}}} = T_1 \beta^{\frac{k-1}{k}} \lambda \left(\frac{1}{\beta \lambda}\right)^{\frac{k-1}{k}} = T_1 \lambda^{\frac{1}{k}}.$$

Подставляя найденные выражения в формулу для термического КПД, получаем

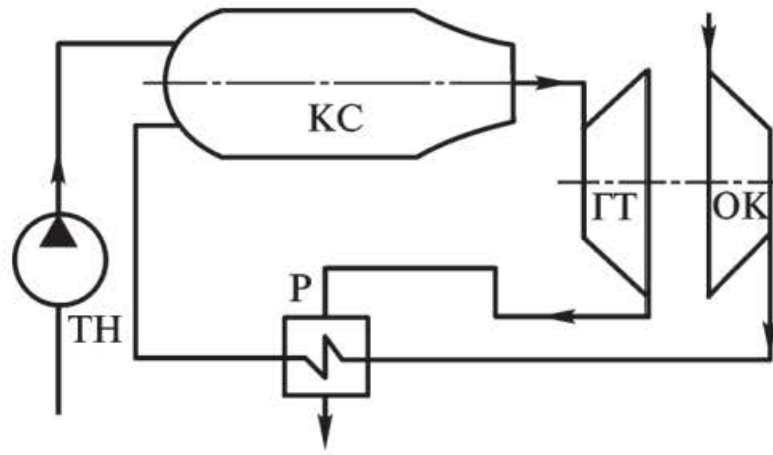
$$\eta_t = 1 - \frac{k(\lambda^{\frac{1}{k}} - 1)}{(\lambda - 1)\beta^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Отсюда следует, что термический КПД возрастает с ростом λ , β , k .

§ 5.3. Методы повышения термического КПД ГТУ

Для повышения КПД ГТУ применяют следующие методы:

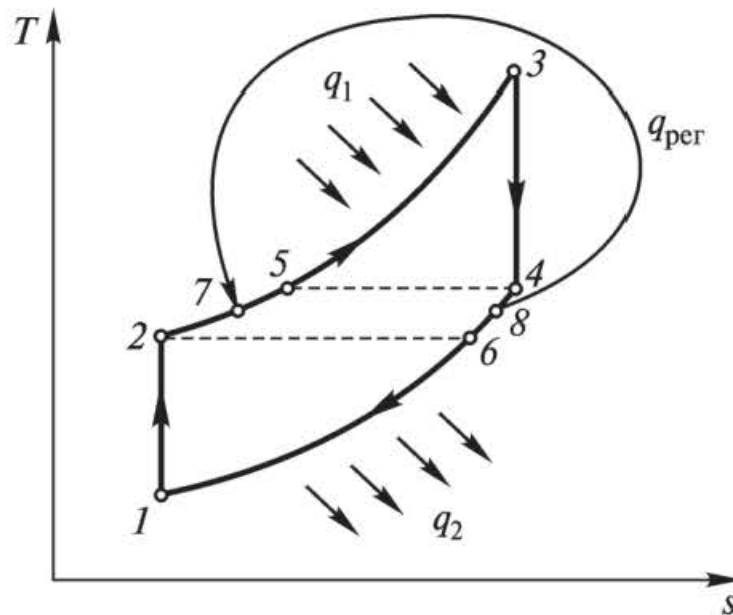
- регенерацию теплоты;
- многоступенчатое сжатие воздуха с промежуточным охлаждением;
- многоступенчатое сгорание топлива.



Р и с. 5.6. Принципиальная схема ГТУ с регенерацией теплоты

Все эти мероприятия приближают цикл ГТУ к обобщенному термодинамическому циклу Карно, состоящему из двух изотерм и двух эквидистант, имеющему наивысший КПД в заданном интервале температур, равный КПД обычного цикла Карно (см. § 2.9). В частности, применение многоступенчатого сжатия и сгорания позволяет приблизить эти процессы к изотермическим (вместо адиабатных). Причем степень приближения будет тем выше, чем большее число ступеней будет применено (см. рис. 5.11).

Принципиальная схема ГТУ с подводом теплоты при постоянном давлении и цикл с регенерацией приведены на рис. 5.6, 5.7. Рассмотрим процессы цикла: $1 - 2$ — адиабатное сжатие воздуха в осевом компрессоре ОК; $2 - 5$ — изобарный подогрев воздуха в регенераторе Р; $5 - 3$ — изобарный подвод теплоты в камере сгорания КС; $3 - 4$ — адиабатное расширение газа в сопловых аппаратах и на лопатках газовой турбины ГТ; $4 - 6$ — изобарный отвод теплоты от газов к воздуху в регенераторе Р; $6 - 1$ — изобарное охлаждение газов в атмосфере.



Р и с. 5.7. Цикл ГТУ с регенерацией теплоты

Для характеристики регенерации вводится величина σ , называемая степенью регенерации. Она определяется отношением фактически регенерированной теплоты $q_{\text{рег}} = c_p(T_7 - T_2)$ к предельно возможной (полной) $q'_{\text{рег}} = c_p(T_5 - T_2)$:

$$\sigma = \frac{q_{\text{рег}}}{q'_{\text{рег}}} = \frac{T_7 - T_2}{T_5 - T_2} = \frac{T_8 - T_6}{T_4 - T_6}. \quad (5.1)$$

Если $T_7 = T_5$ ($T_8 = T_4$), то регенерация полная и $\sigma = 1$. Это означает, что поступающий в камеру сгорания сжатый воздух нагревается до температуры уходящих газов, т.е. $T_5 = T_4$. Полная регенерация может быть достигнута лишь теоретически. Во всех практических случаях $T_7 < T_5$ и $T_8 < T_4$.

Степень регенерации увеличивается с ростом поверхности нагрева регенератора P . Однако это приводит к увеличению габаритов, массы и стоимости установки. Оптимальное значение σ определяется технико-экономическими расчетами.

Таким образом, при полной регенерации теплота с участка 4 — 6 обратимым путем передается на участок 2 — 5 (см. рис. 5.7). В результате теплота q_1 от внешнего теплоисточника подводится к рабочему телу при более высокой средней температуре подвода, а q_2 отводится к внешнему теплоприемнику при более низкой средней температуре отвода. Известно, что всякое повышение средней температуры подвода и понижение температуры отвода приводят к повышению термического КПД (см. (2.7)).

Термический КПД цикла ГТУ при полной регенерации будет

$$\eta_t^{\text{рег}} = 1 - \frac{q_2}{q_1}. \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= c_p(T_3 - T_5) = c_p(T_3 - T_4); \\ q_2 &= c_p(T_6 - T_1) = c_p(T_2 - T_1). \end{aligned}$$

Подставляя q_1 и q_2 в (5.2), получаем

$$\eta_t^{\text{рег}} = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4}. \quad (5.3)$$

Выразим температуры в основных точках цикла через температуру T_1 (см. § 5.1)

$$T_2 = T_1 \beta^{\frac{k-1}{k}}; \quad T_3 = T_1 \rho \beta^{\frac{k-1}{k}}; \quad T_4 = T_1 \rho. \quad (5.4)$$

Подставляя T_2 , T_3 , T_4 в (5.3), находим

$$\eta_t^{\text{per}} = 1 - \frac{1}{\rho} = 1 - \frac{T_1}{T_4}.$$

Следовательно, термический КПД цикла ГТУ с подводом теплоты при постоянном давлении в случае полной регенерации зависит от начальной температуры воздуха T_1 и температуры в конце адиабатного расширения T_4 .

Найдем термический КПД цикла с подводом теплоты при постоянном давлении при неполной регенерации.

Подводимое q_1 и отводимое q_2 количество теплоты в данном случае:

$$\begin{aligned} q_1 &= c_p(T_3 - T_7) = c_p(T_3 - T_2) - c_p(T_7 - T_2); \\ q_2 &= c_p(T_4 - T_1) - c_p(T_8 - T_6). \end{aligned}$$

Учитывая формулу (5.1), находим

$$\begin{aligned} q_1 &= c_p(T_3 - T_2) - c_p\sigma(T_5 - T_2); \\ q_2 &= c_p(T_4 - T_1) - c_p\sigma(T_5 - T_2). \end{aligned}$$

Подставляя формулы для q_1 и q_2 в (5.2), получаем

$$\eta_t^{\text{per}} = 1 - \frac{T_4 - T_1 - \sigma(T_5 - T_2)}{T_3 - T_2 - \sigma(T_5 - T_2)}. \quad (5.5)$$

Подставляя (5.4) в (5.5) и учитывая, что $T_5 = T_4$, имеем

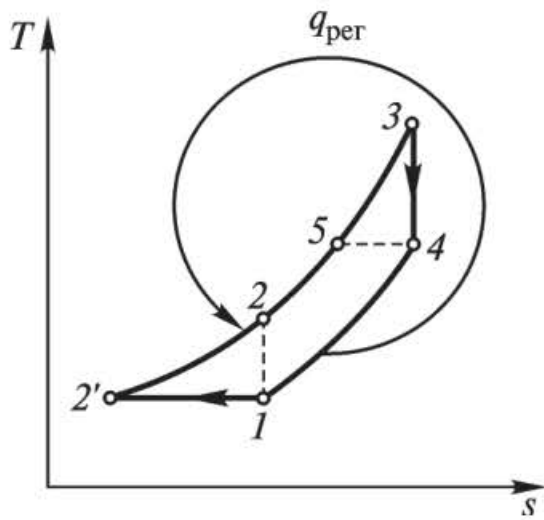
$$\eta_t^{\text{per}} = 1 - \frac{\rho - 1 - \sigma(\rho - \beta^{\frac{k-1}{k}})}{(\rho - 1)\beta^{\frac{k-1}{k}} - \sigma(\rho - \beta^{\frac{k-1}{k}})}. \quad (5.6)$$

При $\sigma = 0$ формула (5.6) приводится к виду

$$\eta_t = 1 - 1/\beta^{\frac{k-1}{k}},$$

т.е. приходим к формуле для КПД цикла ГТУ с подводом теплоты при постоянном давлении при отсутствии регенерации (см. § 5.1).

Рассмотрим применение многоступенчатого сжатия и сгорания с целью увеличения КПД ГТУ. Максимальный КПД может быть получен, если совместно с регенерацией теплоты сжатие воздуха прово-

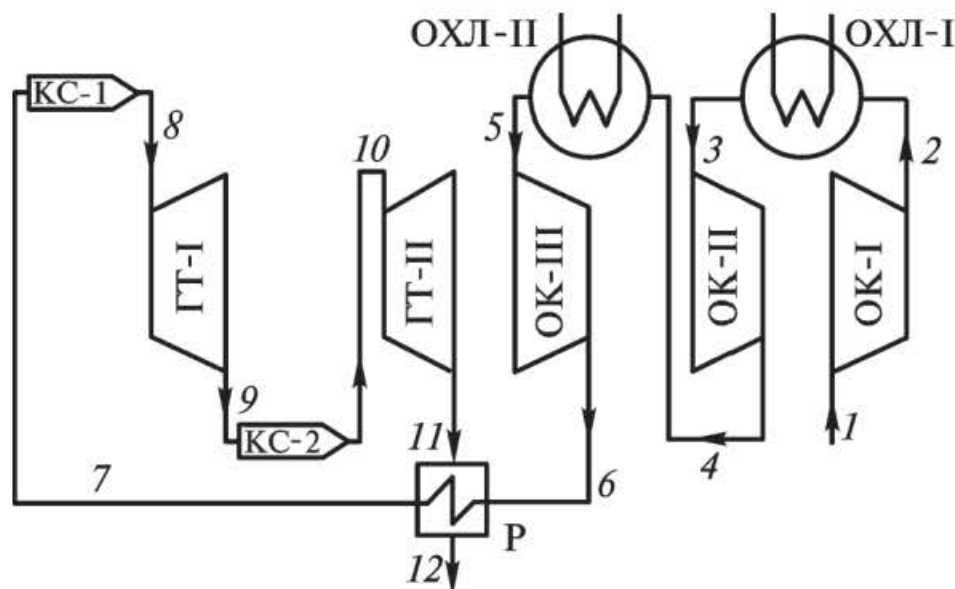


Р и с. 5.8. Цикл ГТУ с регенерацией теплоты при многоступенчатом сжатии

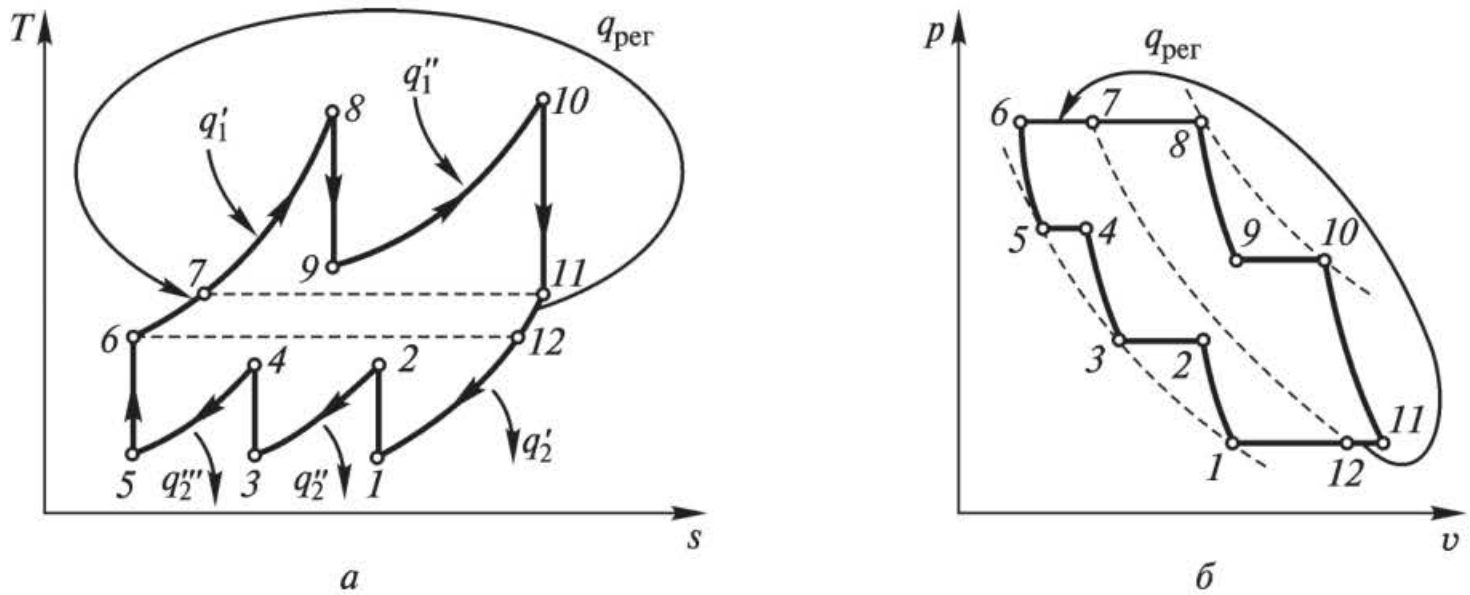
дуть не по адиабате $1 - 2$, а по изотерме $1 - 2'$. Аналогично следует выполнять расширение по изотерме $5 - 4$ взамен адиабаты $3 - 4$ (рис. 5.8). В этом случае цикл будет состоять из двух изотерм $1 - 2'$ и $5 - 4$ и двух эквидистант (изобар) $2' - 5$ и $4 - 1$, т.е. имеем обобщенный термодинамический цикл Карно. Однако он является идеальным и практически невыполним, но к нему можно приблизиться, если применить многоступенчатое сжатие с отводом теплоты к промежуточным охладителям и многоступенчатое сгорание. Увеличивая число

ступеней сжатия и сгорания, можно в пределе как угодно близко подойти к обобщенному циклу Карно. Однако в этом случае значительно усложняется конструкция ГТУ, ее габариты и стоимость. Как показывают технико-экономические расчеты, одной из наиболее целесообразных является схема с трехступенчатым сжатием и двухступенчатым сгоранием с регенерацией (рис. 5.9, 5.10).

Рассмотрим работу такой ГТУ. В осевом трехступенчатом компрессоре (ОК-I, ОК-II, ОК-III) с двумя промежуточными охладителями (ОХЛ-I, ОХЛ-II) воздух сжимается, затем направляется в регенератор Р, где с помощью газов, выходящих из второй ступени газовой турбины (ГТ-II), подогревается до определенной температуры. Нагретый воздух поступает в камеру сгорания первой ступени (КС-1). Сюда же поступает и топливо, которое сгорает после перемешивания с воздухом. Горячий газ направляется на лопатки первой



Р и с. 5.9. Принципиальная схема ГТУ с трехступенчатым сжатием и двухступенчатым расширением рабочего тела

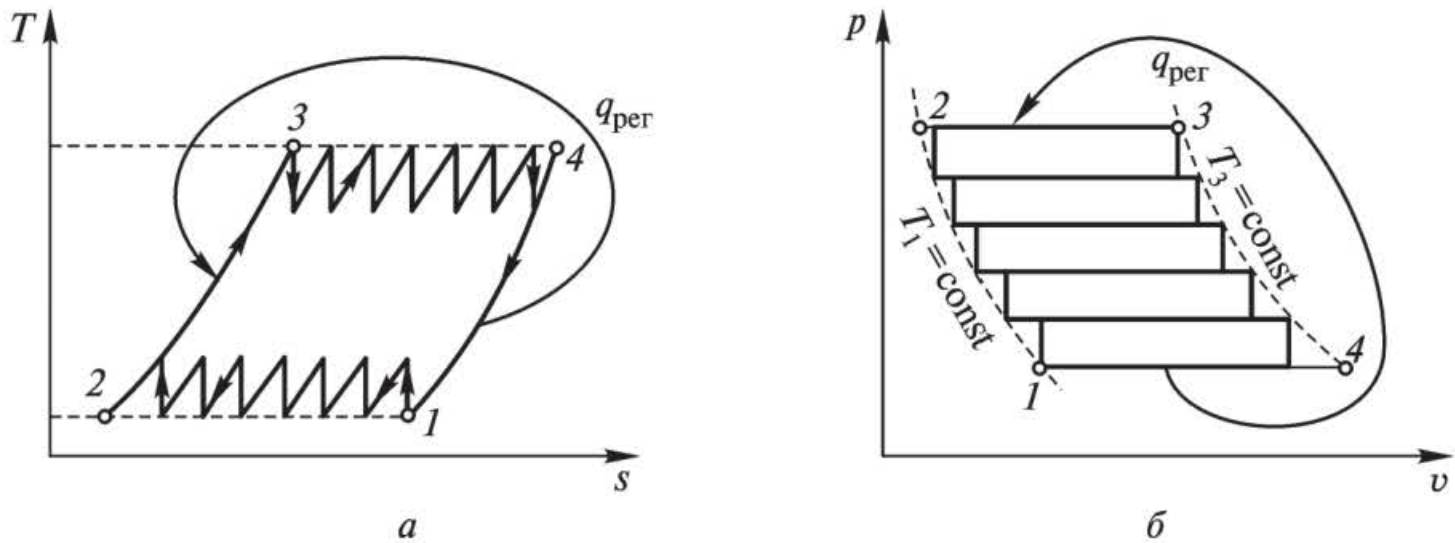


Р и с. 5.10. Цикл ГТУ с трехступенчатым сжатием и двухступенчатым расширением рабочего тела в Ts - (а) и $p-v$ -координатах (б)

ступени турбины (ГТ-I). Затем он поступает во вторую ступень камеры сгорания (КС-2), в которой за счет сжигания дополнительной порции топлива его температура повышается. Полученный горячий газ после совершения работы на лопатках второй ступени турбины (ГТ-II) направляется в регенератор Р. Цифры на принципиальной схеме проставлены в соответствии с нумерацией процессов цикла ГТУ на Ts - и $p-v$ -диаграммах (см. рис. 5.10).

Рассмотрим процессы цикла: $1 - 2$ — адиабатное сжатие воздуха в первой ступени компрессора (ОК-I); $2 - 3$ — изобарный отвод теплоты ($p = \text{const}$) в первом промежуточном охладителе (ОХЛ-I); $3 - 4$ — адиабатное сжатие воздуха во второй ступени компрессора (ОК-II); $4 - 5$ — изобарный отвод теплоты во втором промежуточном охладителе (ОХЛ-II); $5 - 6$ — адиабатное сжатие воздуха в третьей ступени компрессора (ОК-III); $6 - 7$ — подогрев воздуха в регенераторе Р; $7 - 8$ — изобарный подвод теплоты в первой ступени камеры сгорания (КС-1); $8 - 9$ — адиабатное расширение газа в первой ступени турбины (ГТ-I); $9 - 10$ — изобарный подвод теплоты во второй ступени камеры сгорания (КС-2); $10 - 11$ — адиабатное расширение газа во второй ступени турбины (ГТ-II); $11 - 12$ — изобарный отвод теплоты от газа в регенераторе Р; $12 - 1$ — охлаждение газа в атмосфере.

Отвод теплоты в промежуточных охладителях проводится таким образом, чтобы температуры в конце процесса охлаждения (точки 1, 3, 5) были одинаковы, т.е. лежали на одной изотерме. Аналогично температуры в КС-1 и КС-2 в конце процесса сгорания (точки 8, 10) также одинаковы и, следовательно, лежат на одной изотерме.



Р и с. 5.11. Цикл ГТУ с многоступенчатым сжатием и многоступенчатым расширением рабочего тела в Ts - (а) и pv -координатах (б)

Чем больше число ступеней сжатия и охлаждения, тем выше термический КПД цикла. Действительно, если предположить, что в процессе $2 - 3$ (рис. 5.11) к рабочему телу теплота $q_{\text{пер}}$ подводится только за счет охлаждения его в процессе $4 - 1$, то вследствие их эквидистантности она не должна учитываться при определении термического КПД цикла.

Для определения КПД цикла ГТУ с большим числом ступеней сжатия и сгорания представим приближенно теплоту q_1 (теплоту, подведенную к рабочему телу в процессе $3 - 4$) и q_2 (теплоту, отведенную от рабочего тела в процессе $1 - 2$) в виде

$$q_1 = T_3 \Delta s_{3-4}; \quad q_2 = T_1 \Delta s_{1-2},$$

где Δs_{3-4} и Δs_{1-2} — изменение энтропии в соответствующих процессах.

Термический КПД цикла:

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{T_1 \Delta s_{1-2}}{T_3 \Delta s_{3-4}}.$$

Ввиду эквидистантности кривых $2 - 3$ и $4 - 1$ $\Delta s_{1-2} = \Delta s_{3-4}$. Отсюда

$$\eta_t = 1 - \frac{T_1}{T_3}.$$

Таким образом, термический КПД цикла, изображенного на рис. 5.11, при бесконечно большом числе ступеней сжатия и сгорания равен КПД цикла Карно.

ЦИКЛЫ ПАРОСИЛОВЫХ УСТАНОВОК

§ 6.1. Цикл Карно во влажном паре и его недостатки

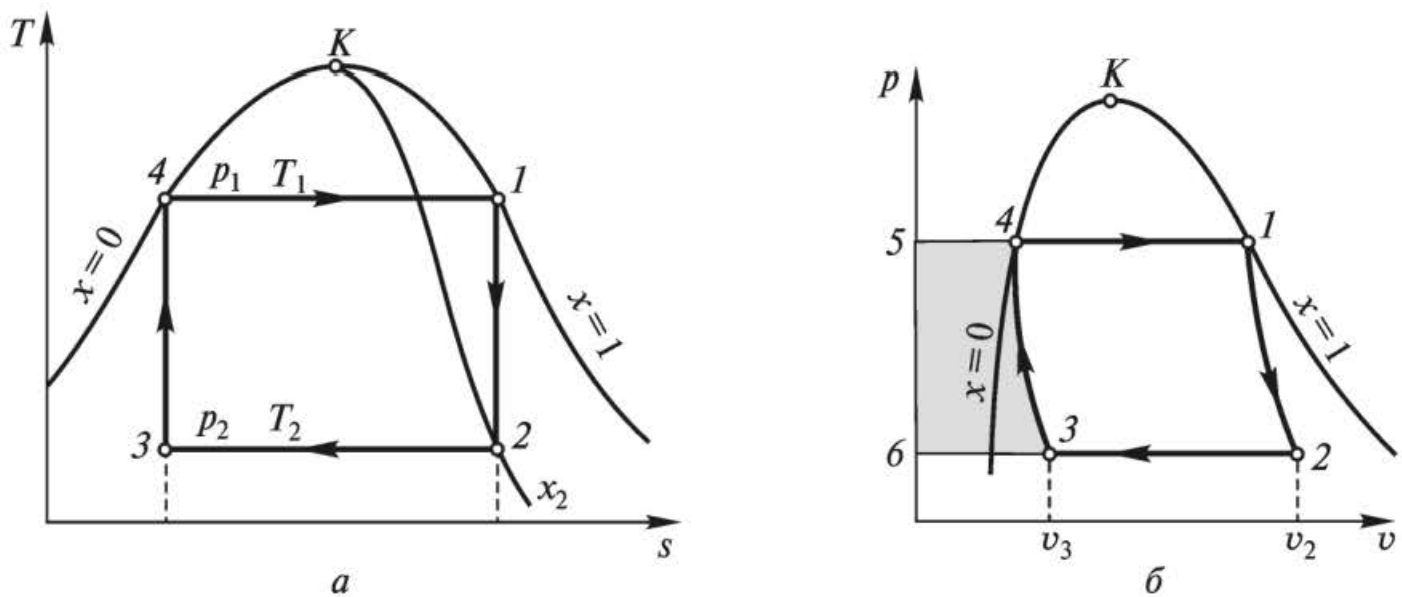
Паросиловые установки (ПСУ) отличаются от газотурбинных двигателей и двигателей внутреннего сгорания тем, что рабочим телом служит пар какой-либо жидкости (обычно водяной пар), а продукты сгорания топлива являются лишь промежуточным теплоносителем.

Наиболее совершенным идеальным циклом, как известно, является цикл Карно. Паротурбинная установка, работающая по циклу Карно, должна состоять из парового котла, парового двигателя, конденсатора и компрессора. Цикл Карно, где в качестве рабочего тела используется влажный насыщенный пар, в Ts - и pv -координатах представлен на рис. 6.1. Рассмотрим процессы цикла: $1 - 2$ — адиабатное расширение пара в цилиндре двигателя; $2 - 3$ — конденсация пара в конденсаторе; $3 - 4$ — сжатие пара в компрессоре; $4 - 1$ — парообразование (кипение) в котле.

Термический КПД цикла Карно с насыщенным паром в качестве рабочего тела определяется по формуле

$$\eta_t = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = \frac{(i_1 - i_4) - (i_2 - i_3)}{i_1 - i_4}.$$

Паросиловые установки, работающие по циклу Карно, имеют столь существенные недостатки, что их применение нецелесообраз-



Р и с. 6.1. Цикл Карно во влажном паре в Ts - (а) и pv -координатах (б)

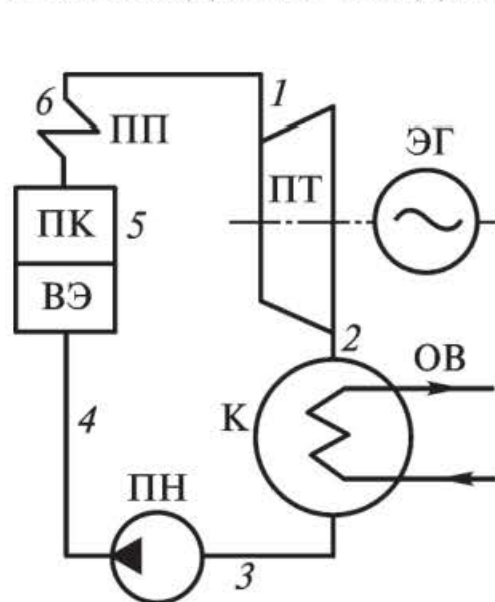
но. Главный из них следующий. Процесс конденсации пара $2 - 3$ осуществляется не полностью, в связи с чем в компрессоре сжимается влажный пар, имеющий большой объем v_3 . Это приводит к необходимости использования цилиндра компрессора больших размеров. Размеры цилиндра возрастают также с увеличением давления пара в котле и уменьшением в конденсаторе, т.е. при переходе к режимам с большими разностями температур $T_1 - T_2$, которые приводят к наиболее высокому КПД. Кроме того, влажность пара x_2 в конце процесса адиабатного расширения $1 - 2$ оказывается достаточно высокой, что не позволяет применять паровые турбины вследствие эрозии турбинных лопаток.

Таким образом, главный недостаток цикла Карно во влажном паре заключается в необходимости использования громоздкого компрессора и больших затратах работы на сжатие пара в процессе $3 - 4$, которые равны площади $5 - 4 - 3 - 6 - 5$.

§ 6.2. Основной цикл ПСУ — цикл Ренкина

Ввиду перечисленных ранее недостатков парового цикла Карно за идеальный принят другой специальный цикл, называемый циклом Ренкина. Он может быть осуществлен в паросиловой установке, приведенной на рис. 6.2.

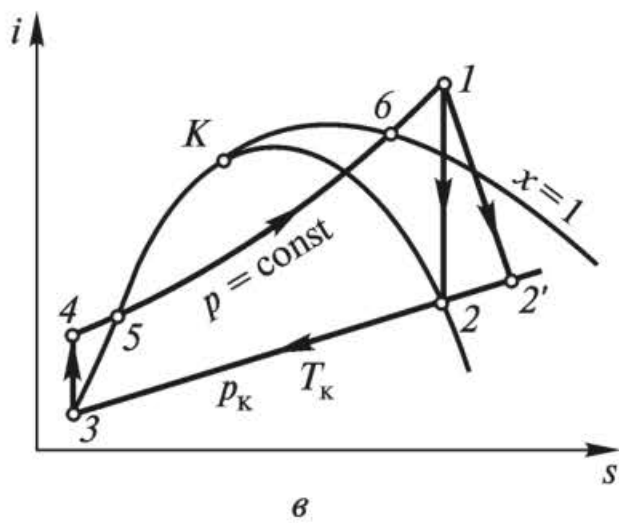
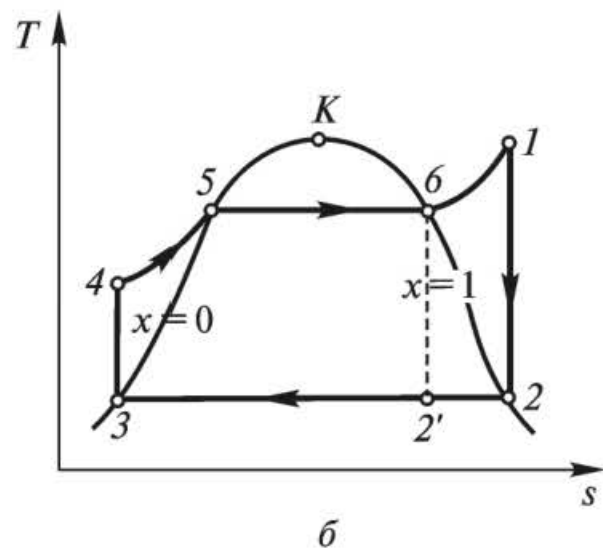
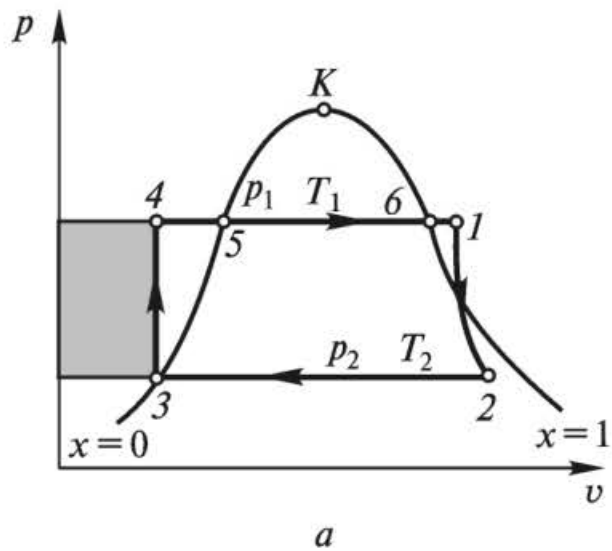
В паровом котле ПК за счет теплоты сжигаемого топлива вода превращается в пар. В пароперегревателе ПП он доводится до необходимых начальных параметров p_1, T_1 . На лопатках паровой турбины ПТ теплота преобразуется в работу и затем в электрическую энергию в электрогенераторе ЭГ. Отработавший пар в конденсаторе К конденсируется с передачей теплоты охлаждающей воде ОВ. Полученный конденсат конденсатным (питательным) насосом ПН подается в



Р и с. 6.2. Принципиальная схема цикла Ренкина

водяной экономайзер ВЭ, служащий для подогрева воды, а затем в котел. Цифрами обозначены характерные точки процессов цикла Ренкина, представленного на диаграммах в pv -, Ts - и is -координатах (рис. 6.3).

Рассмотрим процессы цикла: $1 - 2$ — адиабатное расширение пара на лопатках паровой турбины; $2 - 3$ — конденсация пара в конденсаторе; $3 - 4$ — сжатие воды в конденсатном насосе; $4 - 5$ — подогрев воды до температуры кипения в водяном экономайзере и котле; $5 - 6$ — парообразование в котле; $6 - 1$ — перегрев пара в пароперегревателе.



Р и с. 6.3. Цикл Ренкина в pv - (а), Ts - (б) и is -координатах (в)

§ 6.3. Полезная работа цикла Ренкина. Работа питательного насоса

Из уравнения энергии газового потока

$$dq = di + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + gdz + dl_T,$$

где l_T — техническая (полезная) работа, для адиабатного процесса ($dq = 0$), пренебрегая изменением внешней энергии ($d(w^2/2) = 0$ и $gdz = 0$), получим $0 = di + dl_T$. Тогда для работы питательного насоса $l_H = -l_T$ найдем $dl_H = di$ и

$$l_H = i_4 - i_3 = (p_1 - p_2)v_3.$$

Аналогично для работы турбины $l_{\text{турб}} = l_T$ найдем

$$l_{\text{турб}} = i_1 - i_2.$$

Теоретическая работа цикла при этом:

$$l_{\text{ц}} = l_{\text{турб}} - l_{\text{н}} = i_1 - i_2 - (p_1 - p_2)v_3.$$

Полезная работа $l_{\text{ц}}$ цикла Ренкина в pv -диаграмме (см. рис. 6.3, *a*) численно равна площади внутри цикла, т.е. площади $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 1$. Это будет полезная работа, совершаемая 1 кг пара.

§ 6.4. Термический КПД цикла Ренкина

Термический КПД цикла Ренкина определяется в виде отношения полезной работы цикла $l_{\text{ц}}$ ко всей затраченной в цикле теплоте q_1 :

$$\eta_t = \frac{l_{\text{ц}}}{q_1}.$$

Подведенная в цикле теплота определяется по формуле

$$q_1 = i_1 - i_4 = i_1 - i_3 - (i_4 - i_3) = i_1 - i_3 - l_{\text{н}} = i_1 - i_3 - (p_1 - p_2)v_3.$$

С учетом выражений для $l_{\text{ц}}$ и q_1 формула для термического КПД примет вид

$$\eta_t = \frac{i_1 - i_2 - (p_1 - p_2)v_3}{i_1 - i_3 - (p_1 - p_2)v_3}.$$

При невысоких давлениях работой питательного насоса $l_{\text{н}} = (p_1 - p_2)v_3$ можно пренебречь, тогда

$$\eta_t = \frac{i_1 - i_2}{i_1 - i_3}.$$

Кроме работы цикла $l_{\text{ц}}$ и термического КПД η_t , к показателям, характеризующим экономичность цикла Ренкина, относят также удельные расходы пара d_0 и теплоты q_0 . Удельный расход определяется отношением часового расхода пара D_0 к выработанной электроэнергии N . Так как электроэнергия — это стопроцентная эксергия (полностью превращается в полезную работу), то 1 кг пара в теоретическом цикле совершает полезную работу (кДж/кг)

$$N = l_{\text{ц}} = i_1 - i_2.$$

Учитывая, что $1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 3600 \text{ кДж}$, запишем уравнение теплового баланса установки

$$D_0 (i_1 - i_2) = 3600 N$$

или

$$D_0 = \frac{3600N}{i_1 - i_2}.$$

Отсюда теоретический удельный расход пара будет (кг/(кВт · ч))

$$d_0 = \frac{D_0}{N} = \frac{3600}{i_1 - i_2}.$$

Теоретический удельный расход пара на 1 МДж работы составляет (кг/МДж)

$$d_0 = \frac{1000}{i_1 - i_2}. \quad (6.1)$$

Удельный расход теплоты (кДж/МДж) находится по формуле

$$q_0 = d_0 (i_1 - i_3).$$

Учитывая формулы для d_0 и η_t , получаем

$$q_0 = \frac{1000}{\eta_t}.$$

Так как удельная массовая теплоемкость воды 4,1868 кДж/(кг · К), а $t_2 = t_3 = t_k$, t_k — температура конденсата, то

$$i_3 = 4,1868t_k.$$

Тогда формулы для η_t и q_0 примут вид

$$\eta_t = \frac{i_1 - i_2}{i_1 - 4,1868t_k}; \quad d_0 = \frac{1000}{i_1 - 4,1868t_k}; \quad q_0 = d_0 (i_1 - 4,1868t_k).$$

Отсюда следует, что для нахождения четырех основных параметров цикла Ренкина $l_{ц}$, η_t , d_0 , q_0 достаточно провести на is -диаграмме лишь один процесс расширения пара в турбине (процесс 1 — 2, см. рис. 6.3, в).

Для учета потерь от необратимости процесса расширения пара в турбине вводят относительный внутренний КПД турбины

$$\eta_{oi} = \frac{i_1 - i'_2}{i_1 - i_2},$$

где i'_2 — энтальпия в конце действительного процесса расширения пара в турбине (точка 2' на рис. 6.3), $i'_2 > i_2$.

Потери от необратимости уменьшают полезную работу $(i_1 - i'_2) < (i_1 - i_2)$ и увеличивают удельный расход пара

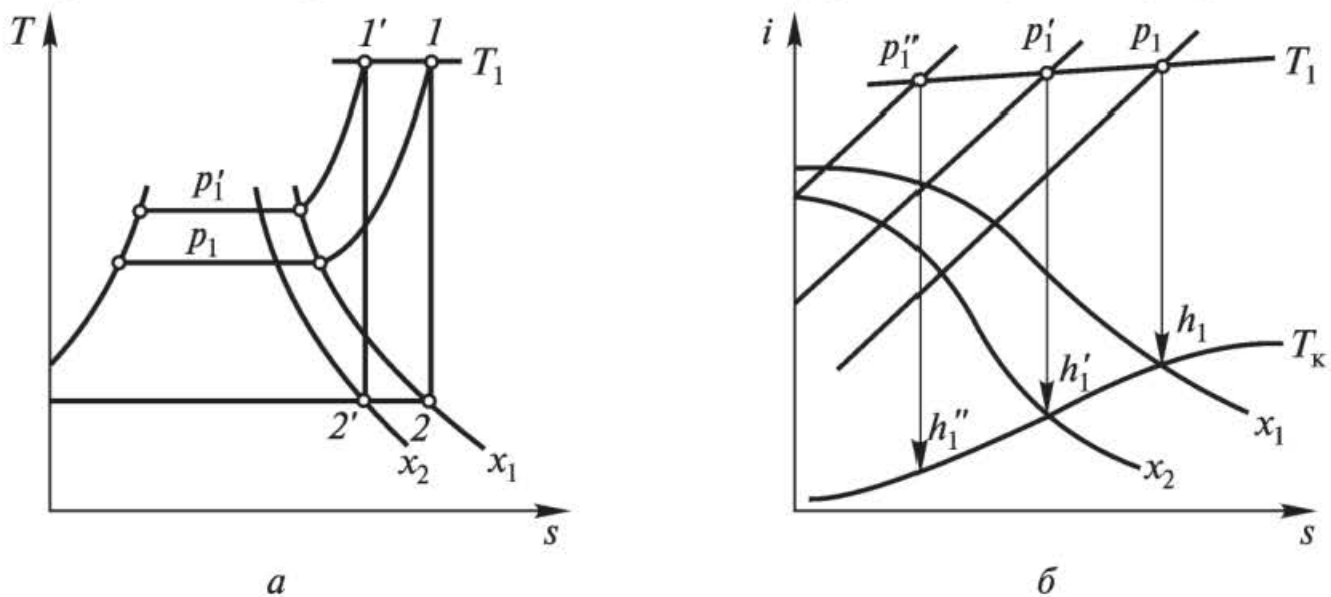
$$d'_0 = \frac{1000}{i_1 - i'_2}.$$

§ 6.5. Влияние параметров пара на термический КПД цикла Ренкина

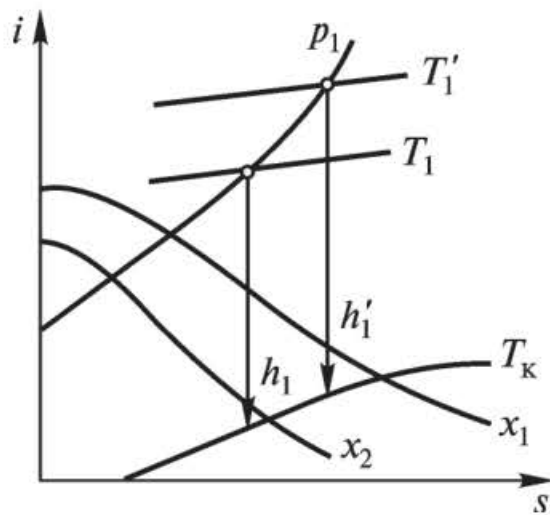
Увеличение начального давления пара p_1 при неизменной начальной температуре позволяет значительно увеличить КПД цикла Ренкина. Это связано с тем, что при повышении начального давления с p_1 до p'_1 возрастает средняя температура подвода теплоты в котле, так как увеличивается температура кипения воды и, следовательно, уменьшаются потери теплоты от необратимого теплообмена при конечной разности температур (рис. 6.4, а).

Однако повышение начального давления приводит к уменьшению степени сухости пара на выходе из турбины ($x_2 < x_1$), что неблагоприятно сказывается на работе последних ступеней лопаток турбины, вызывая их эрозию от работы во влажном паре. Из is -диаграммы (рис. 6.4, б) можно установить, что увеличение начального давления ($p_1 < p'_1 < p''_1$) приводит также к росту адиабатного теплоперепада $h(h_1 < h'_1 < h''_1)$.

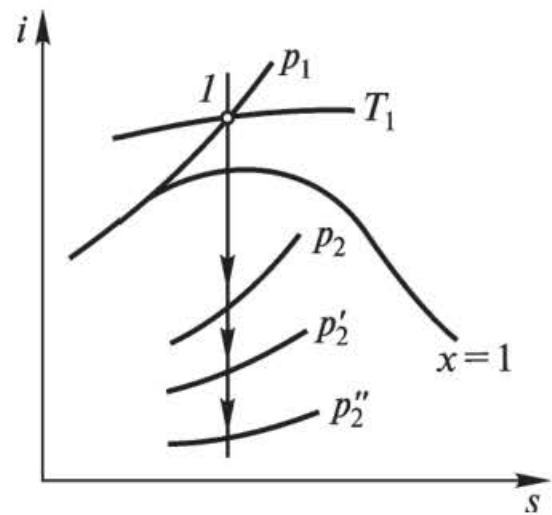
При повышении начальной температуры пара при неизменном давлении также происходит увеличение КПД. Это связано с ростом среднеинтегральной температуры подвода теплоты и адиабатного теплоперепада в процессе на лопатках турбины ($h_1 < h'_1$) (рис. 6.5).



Р и с. 6.4. Оценка влияния начального давления пара на КПД цикла Ренкина в Ts - (а) и is -координатах (б)



Р и с. 6.5. Оценка влияния начальной температуры пара на КПД цикла Ренкина



Р и с. 6.6. Оценка влияния конечного давления пара на КПД цикла Ренкина

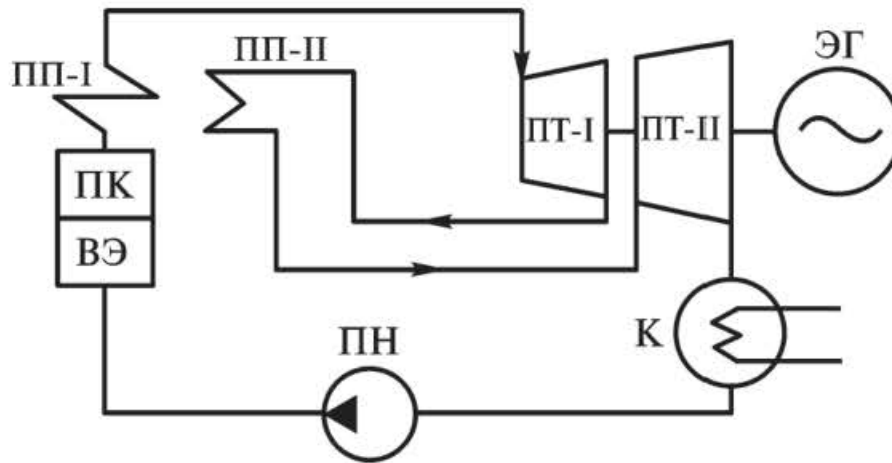
Кроме того, это приводит к возрастанию степени сухости пара на выходе из турбины. В связи с чем повышение начального давления, приводящее к уменьшению степени сухости, целесообразно проводить совместно с повышением начальной температуры.

Большое влияние на термический КПД цикла Ренкина оказывает конечное давление p_2 в конденсаторе. Из is -диаграммы (рис. 6.6) видно, что с понижением конечного давления значительно увеличивается адиабатный теплоперепад и уменьшается среднеинтегральная температура отвода теплоты, что приводит к уменьшению потери работоспособности от необратимого теплообмена в конденсаторе.

§ 6.6. Промежуточный перегрев пара

Промежуточный перегрев пара является одним из способов повышения степени его сухости. Принципиальная схема цикла Ренкина с промежуточным перегревом пара дана на рис. 6.7. В ней предусмотрены две ступени турбины ПТ-I, ПТ-II и две ступени пароперегревателя ПП-I, ПП-II. Пар после первой ступени пароперегревателя ПП-I направляется в первую ступень турбины ПТ-I. Отработав на лопатках первой ступени турбины, он направляется во вторую ступень пароперегревателя ПП-II, где его температура повышается до начальной температуры T_1 . Затем пар поступает на лопатки второй ступени турбины ПТ-II.

Цикл Ренкина с промежуточным перегревом пара в Ts -координатах представлен на рис. 6.8. Рассмотрим процессы цикла: $1 - a$ — адиабатное расширение пара на лопатках первой ступени турбины; $a - b$ — промежуточный перегрев пара во второй ступени пароперегревателя; $b - 2$ — адиабатное расширение пара на лопатках второй



Р и с. 6.7. Принципиальная схема цикла Ренкина с промежуточным перегревом пара

ступени турбины; $2 - 3$ — конденсация пара в конденсаторе; $3 - 4$ — сжатие воды в питательном насосе ПН; $4 - 5$ — подогрев воды до температуры кипения; $5 - 6$ — превращение воды в пар; $6 - 1$ — перегрев пара в пароперегревателе первой ступени.

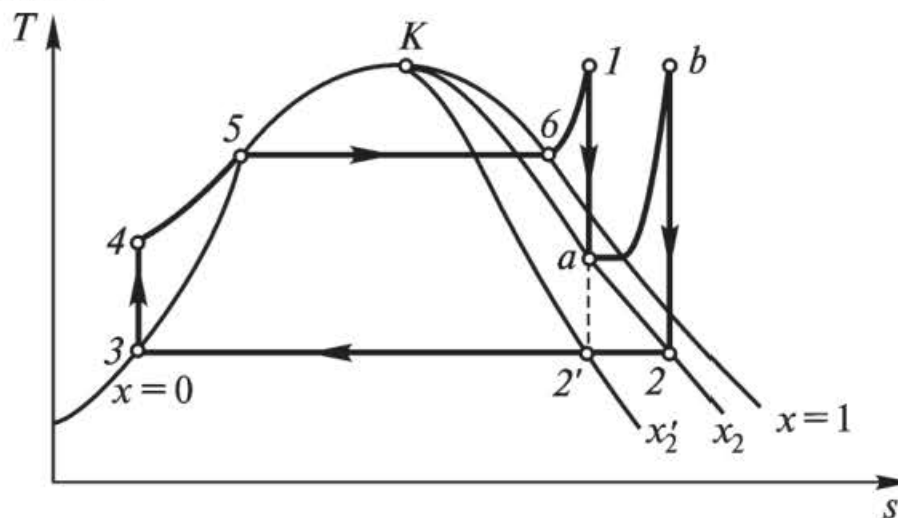
Если бы не было промежуточного перегрева пара, то процесс адиабатного расширения заканчивался бы в точке $2'$. Из диаграммы видно, что промежуточный перегрев позволяет значительно увеличить сухость пара на выходе из турбины ($x'_2 < x_2$).

Термический КПД цикла определяется по формуле

$$\eta_t = \frac{(i_1 - i_a) + (i_b - i_2)}{(i_1 - i_3) + (i_b - i_a)},$$

где $(i_1 - i_a)$ и $(i_b - i_2)$ — адиабатные теплопадения в первой и второй ступенях турбины; $(i_1 - i_3)$ — количество теплоты, подведенной в котле и в первой ступени пароперегревателя; $(i_b - i_a)$ — количество теплоты, подведенной во второй ступени пароперегревателя.

Кроме того, применение промежуточного перегрева может повысить КПД, если средняя температура подвода теплоты в дополнительном цикле $b - 2 - 2' - a - b$ будет выше, чем в цикле с однократным перегревом.



Р и с. 6.8. Цикл Ренкина с промежуточным перегревом

§ 6.7. Регенеративный цикл паросиловой установки

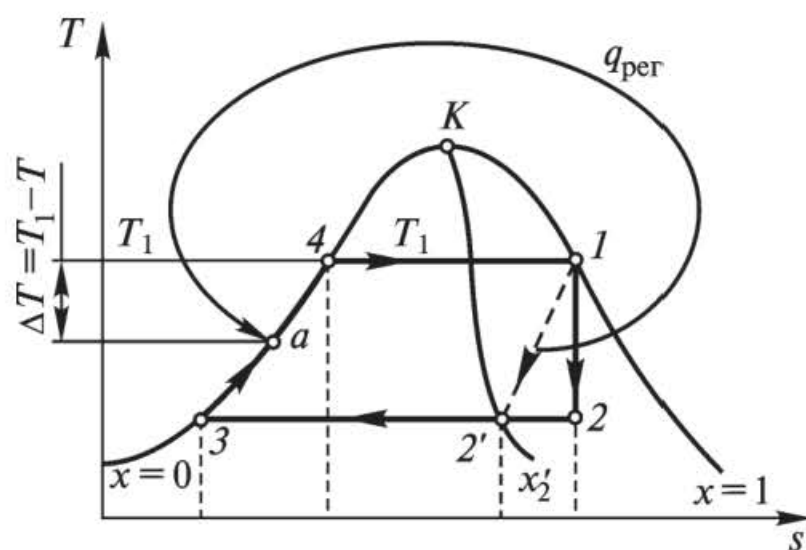
Регенерация теплоты в ПСУ позволяет уменьшить необратимость процессов теплообмена в цикле на участке подогрева питательной воды.

При наличии двух источников теплоты с температурами T_1 и T_2 в цикле Ренкина, осуществляемом во влажном паре, на участке подогрева питательной воды $3 - 4$ (рис. 6.9) будет иметь место необратимый переход теплоты при конечной разности температур $\Delta T = T_1 - T$ от верхнего источника с температурой T_1 к рабочему телу с температурой T .

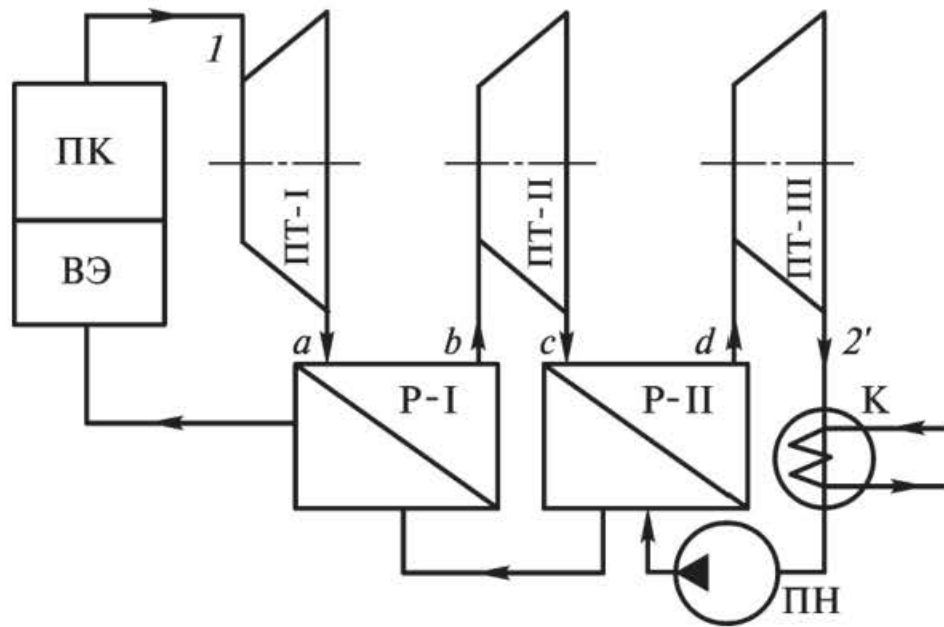
Если процесс расширения пара вести не по адиабате $1 - 2$, а по политропе $1 - 2'$, эквидистантной кривой $3 - 4$ с отводом теплоты, то, осуществляя при этом регенерацию теплоты (т.е. обратимый переход теплоты с участка $1 - 2'$ на участок $3 - 4$), получим обратимый обобщенный цикл Карно, КПД которого равен КПД наивыгоднейшего обратимого цикла Карно.

Подобный регенеративный цикл можно было бы приближенно осуществить по схеме, представленной на рис. 6.10, которая включает три ступени турбины ПТ-I, ПТ-II, ПТ-III и две ступени регенератора Р-I и Р-II. Пар после первой ступени ПТ-I турбины поступает на первую ступень регенератора Р-I, отдавая часть теплоты питательной воде, направляемой в водяной экономайзер. Затем он поступает во вторую ступень турбины ПТ-II. Отработав на лопатках второй ступени турбины, пар направляется во вторую ступень регенератора Р-II, где отдает питательной воде еще одну часть теплоты. Затем поступает в третью ступень турбины и после нее — в конденсатор К.

Соответствующий этой схеме регенеративный цикл изображен на рис. 6.11. Рассмотрим процессы цикла: $1 - a$ — адиабатное расширение



Р и с. 6.9. Цикл Ренкина с регенерацией теплоты



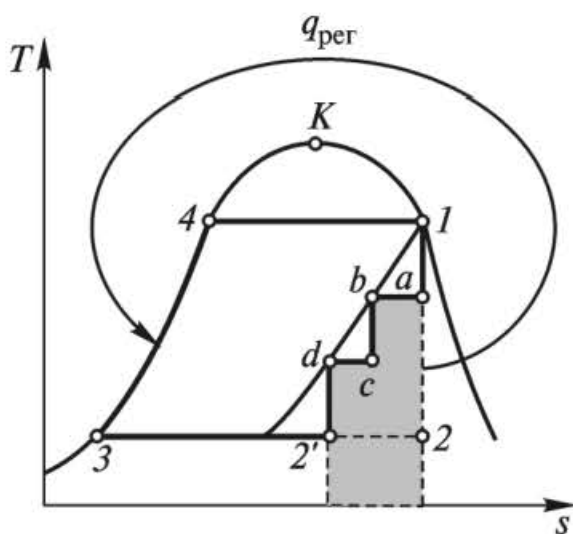
Р и с. 6.10. Принципиальная схема регенеративного цикла Ренкина с каскадными подогревателями

ние пара на лопатках первой ступени турбины; $a - b$ — изотермический отвод теплоты от пара к питательной воде в регенераторе первой ступени; $b - c$ — адиабатное расширение пара на лопатках второй ступени турбины; $c - d$ — изотермический отвод теплоты от пара во второй ступени регенератора; $d - 2'$ — адиабатное расширение пара на лопатках третьей ступени турбины; $2' - 3$ — конденсация пара в конденсаторе; $3 - 4$ — подогрев питательной воды в регенераторах, водяном экономайзере и котле; $4 - 1$ — превращение воды в пар в котле ПК.

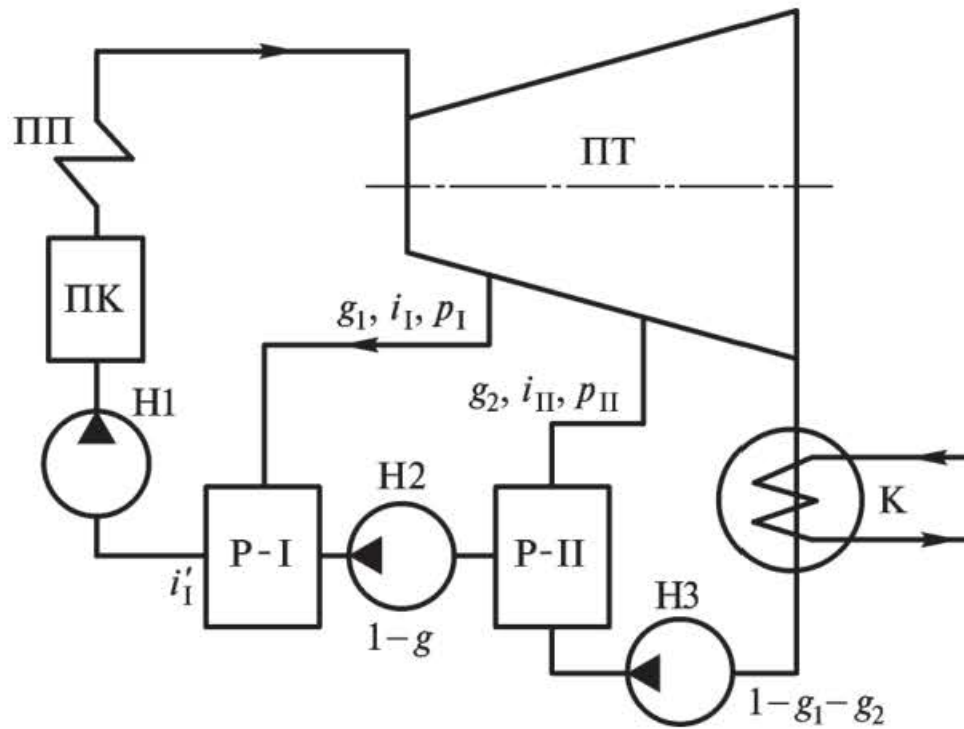
С увеличением числа ступеней турбины и регенератора ломаная линия $1 - a - b - c - d - 2'$ будет приближаться к прямой линии, эквидистантной линии $3 - 4$, а в целом цикл будет приближаться к обобщенному термодинамическому циклу Карно. Однако на практике

из-за конструктивных и эксплуатационных трудностей подобную схему регенерации не применяют. В частности, влажность пара ($1 - x_2$) в точке $2'$ при такой схеме оказалась бы недопустимо высокой.

Регенеративный цикл, широко применяемый в ПСУ, осуществляется путем последовательного отвода из турбины части пара для регенеративного подогрева питательной воды. При таком способе состояние оставшегося основного потока пара в турбине остается таким же, как и в цикле без регенерации.



Р и с. 6.11. Регенеративный цикл Ренкина с каскадными подогревателями



Р и с. 6.12. Принципиальная схема цикла Ренкина со смешивающими подогревателями:

P-I, P-II — регенеративные подогреватели; Н1, Н2, Н3 — насосы; ПК — паровой котел; К — конденсатор; g_1, g_2 — доли пара (от 1 кг), направляемого в отборы турбины; ПП — пароперегреватель; ПТ — паровая турбина; p_1, p_{II}, i_1, i_{II} — давление и энтальпия пара в отборах турбины

Различают две основные схемы регенеративного подогрева:

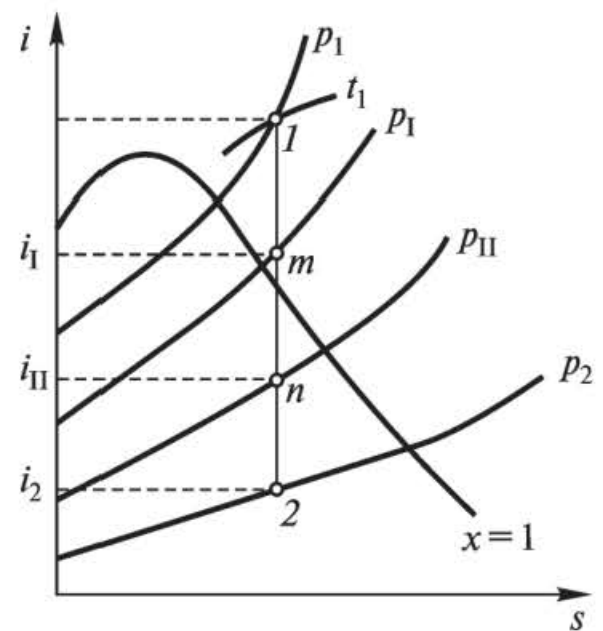
- смешивающая (содержит в качестве регенераторов подогреватели смешивающего типа);
- каскадная (содержит поверхностные подогреватели).

Простейшая смешивающая схема регенеративного подогрева питательной воды с двумя отборами пара из турбины и соответствующий ей цикл в is -координатах выглядят следующим образом (рис. 6.12, 6.13). Участок $m - n - 2$ изображен условно, так как здесь расширяется не весь поступивший в турбину пар.

Работа цикла $l_{ц}$ равна работе 1 кг пара при полном его расширении за минусом недовыработанной работы пара, направленного в отборы:

$$l'_{ц} = (i_1 - i_2) - g_1(i_1 - i_2) - g_2(i_{II} - i_2).$$

Количество подведенной в цикле теплоты $q'_1 = i_1 - i'_1$, где i'_1 — энтальпия, соответствующая температуре конца регенеративного подогрева $t_{рег}$.



Р и с. 6.13. Регенеративный цикл Ренкина со смешивающими подогревателями

Термический КПД регенеративного цикла

$$\eta_t = \frac{l'_u}{q'_1} = \frac{(i_1 - i_2) - g_1(i_1 - i_2) - g_2(i_{II} - i_2)}{i_1 - i'_1}.$$

Удельный расход пара на 1 МДж (одну техническую единицу работы)

$$d_0 = \frac{1000}{(i_1 - i_2) - g_1(i_1 - i_2) - g_2(i_{II} - i_2)}.$$

Сравнение этого выражения с выражением для удельного расхода пара в цикле Ренкина без регенерации (6.1) показывает, что удельный расход пара в регенеративном цикле выше, чем в цикле Ренкина.

В то же время удельный расход теплоты на выработку 1 кг пара (кДж/кг)

$$q'_1 = i_1 - 4,1868t'_1$$

в регенеративном цикле оказывается меньшим, чем в цикле Ренкина без регенерации

$$q_1 = i_1 - 4,1868t_2,$$

где t'_1 — температура питательной воды после ее подогрева в регенераторах.

Термический КПД цикла Ренкина с регенерацией определяется по формуле

$$\eta'_t = \frac{l'_u}{q'_1},$$

где l'_u — полезная работа цикла с регенерацией.

Ввиду того что часть пара, проходящего через турбину, направляется на подогрев питательной воды и не участвует в выработке полезной работы на лопатках турбины, полезная работа в цикле Ренкина с регенерацией будет меньше полезной работы обычного цикла Ренкина (при одинаковых начальных и конечных параметрах)

$$l'_u < l_u.$$

Однако расчеты показывают, что уменьшение расхода теплоты оказывается большим, чем уменьшение полезной работы, и поэтому

$$\eta'_t > \eta_t.$$

Увеличение КПД цикла Ренкина с регенерацией происходит за счет увеличения средней температуры подвода теплоты при одинаковой конечной температуре ее отвода.

Таким образом, применение регенеративного подогрева питательной воды приводит к следующему:

- увеличивается КПД ПСУ на 10...12 % и тем в большей степени, чем выше давление пара;
- уменьшается количество пара, проходящего через последние ступени турбины, а следовательно, уменьшаются и их габариты;
- уменьшается поверхность нагрева водяных экономайзеров. При этом, чтобы не снизить КПД котельной установки, теплоту уходящих газов стремятся максимально использовать для подогрева воздуха, поступающего в парогенератор, в воздушных подогревателях.

В заключение следует отметить, что введение регенерации может быть выгодным лишь до определенной температуры подогреваемой в регенераторах питательной воды, превышение которой приводит к необходимости отбирать для этих целей из турбины пар более высоких параметров. В этом случае может возникнуть ситуация, когда уменьшение полезной работы на лопатках турбины окажется бóльшим, чем уменьшение количества теплоты, затрачиваемой на выработку 1 кг пара, а удельный расход теплоты на единицу работы из-за увеличения удельного расхода пара будет возрастать. В связи с чем выгода, получаемая от применения регенерации, будет уменьшаться и при определенных условиях может оказаться равной нулю. Поэтому для каждой тепловой электрической станции существует определенная температура питательной воды, подогреваемой в регенераторах, которая дает максимальную прибавку КПД.

Термический КПД цикла Ренкина составляет 30...40 %. Это означает, что 70...60 % теплоты, затрачиваемой на получение пара, отдается холодному источнику теплоты (теплота q_2).

Кроме термодинамических потерь, в паросиловой установке имеются потери, связанные с работой оборудования (котлоагрегат, трубопроводы, турбогенератор и др.).

Низкий КПД паросиловой установки объясняется малой экономичностью основного процесса преобразования теплоты в работу в цикле Ренкина. Это связано в первую очередь с тем, что в парогенераторе теплообмен протекает при большой конечной разности температур между горячими газами и рабочим телом (паром). Именно здесь в результате необратимого теплообмена происходит наибольшая потеря работоспособности (эксергии) теплоты.

ЦИКЛЫ ХОЛОДИЛЬНЫХ МАШИН

§ 7.1. Классификация холодильных машин

Холодильными машинами, или *термокомпрессорами*, называют машины, непрерывно поддерживающие температуры тел ниже температуры окружающей среды.

Их подразделяют на воздушные (газовые), паровые, пароэжекторные, абсорбционные, а также машины, принцип действия которых основан на эффектах Пельтье и Ранка—Хильша.

В воздушной холодильной машине в качестве холодильного агента используется атмосферный воздух. Эти установки не получили широкого распространения ввиду сложности конструкции.

В паровых (парокомпрессорных) холодильных установках рабочим телом являются пары различных веществ — аммиака NH_3 , углекислоты CO_2 , сернистого ангидрида SO_2 , фреонов (фторохлорпроизводных углеводородов). Ввиду простоты конструкции (по сравнению с воздушными), высокой холодопроизводительности и большой надежности работы эти установки получили самое широкое распространение в технике.

В пароэжекторных и абсорбционных холодильных машинах для получения низких температур затрачивается не механическая работа (как в паровых или газовых), а теплота какого-либо рабочего тела с высокой температурой. В пароэжекторных установках холодильный агент сжимается в диффузоре эжектора с использованием кинетической энергии струи пара некоторого вещества. В абсорбционной холодильной установке холодильный агент выпаривается из абсорбента и сжимается в парогенераторе. Оба типа машин отличаются невысоким холодильным эффектом (термодинамически они менее совершенны, чем паровые или газовые). Однако значительно проще по конструкции (ввиду отсутствия компрессора), дешевле, более надежны в работе и поэтому получили достаточно широкое распространение (в большей степени абсорбционные).

Холодильные установки, принцип действия которых основан на использовании эффектов Пельтье и Ранка—Хильша, максимально просты по конструкции — не имеют движущихся деталей. Однако они пока не получили широкого распространения из-за низких значений холодильного коэффициента.

Холодильные машины работают по обратному циклу, т.е. циклу, изображенному в тепловых диаграммах (pv , Ts , is) в направлении против направления часовой стрелки. Наивыгоднейшим циклом, осуществляемым между двумя источниками теплоты с температурами T_1 и T_2 , будет обратный цикл Карно, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (рис. 7.1).

Рассмотрим процессы цикла: $1-2$ — адиабатное расширение рабочего тела (хладагента); $2-3$ — изотермическое расширение с подводом теплоты q_2 к хладагенту от охлаждаемого в холодильнике тела; $3-4$ — адиабатное сжатие; $4-1$ — изотермическое сжатие с отводом теплоты q_1 в окружающую среду.

В качестве характеристики термодинамической эффективности холодильного цикла принят холодильный коэффициент (коэффициент холодопроизводительности):

$$\varepsilon = \frac{q_2}{l},$$

где l — затрачиваемая механическая работа, равная площади $1-2-3-4$.

Для обратного цикла Карно

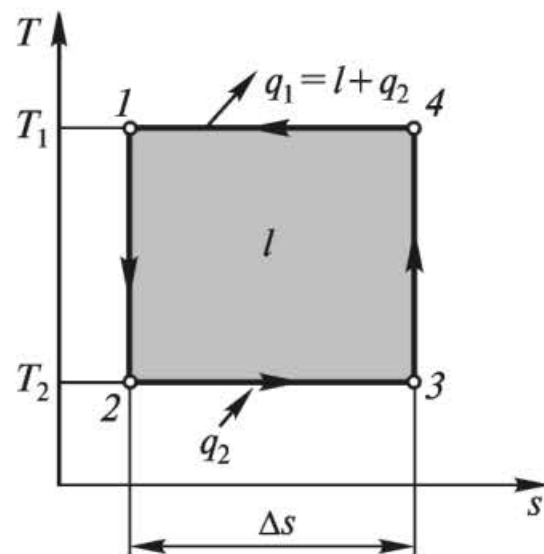
$$\varepsilon_k = \frac{q_2}{l} = \frac{q_2}{q_1 - q_2} = \frac{T_2 \Delta s}{T_1 \Delta s - T_2 \Delta s} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (7.1)$$

Холодильный коэффициент обратного цикла Карно имеет наибольшее значение по сравнению с другими циклами холодильных машин, осуществляемыми в том же интервале температур теплоисточников.

Из формулы (7.1) следует, что с увеличением температуры T_1 и уменьшением температуры T_2 коэффициент холодопроизводительности уменьшается и при $T_2 \rightarrow 0$ $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Работа L и мощность N , необходимые для осуществления обратного цикла, определяются по формулам

$$L = \frac{Q}{\varepsilon}; \quad N = \frac{L}{1000},$$

где Q — холодопроизводительность (количество теплоты, которое отводится от охлаждаемого тела в единицу времени).



Р и с. 7.1. Обратный обратный цикл Карно

§ 7.2. Цикл воздушной холодильной установки

Схема воздушной холодильной установки представлена на рис. 7.2. Принцип ее действия заключается в следующем. В компрессоре 1 воздух сжимается до давления p_2 и нагнетается в теплообменник (охладитель) 2, где от него отводится часть теплоты в количестве q_1 , полученной в результате сжатия. Затем сжатый воздух поступает в расширительный цилиндр, или детандер 3, где расширяется до начального давления. При расширении его температура понижается до $-60\dots-70^\circ\text{C}$. Холодный воздух направляется в теплообменник (охлаждаемое помещение) 4, где к нему подводится теплота в количестве q_2 .

На рис. 7.3 представлены диаграммы идеального цикла воздушной холодильной установки в Ts - и pv -координатах. Рассмотрим процессы цикла: 1 — 2 — адиабатное расширение воздуха в детандере 3 с понижением температуры от T_1 до T_2 ; 2 — 3 — изобарный подвод теплоты к воздуху в теплообменнике 4 с возрастанием температуры от T_2 до T_3 ; 3 — 4 — адиабатное сжатие рабочего тела в компрессоре 1 от давления $p_3 = p_2$ до $p_4 = p_1$; 4 — 1 — изобарный отвод теплоты q_1 к внешнему источнику с понижением температуры от T_4 до T_1 .

Работа, затраченная в цикле, будет

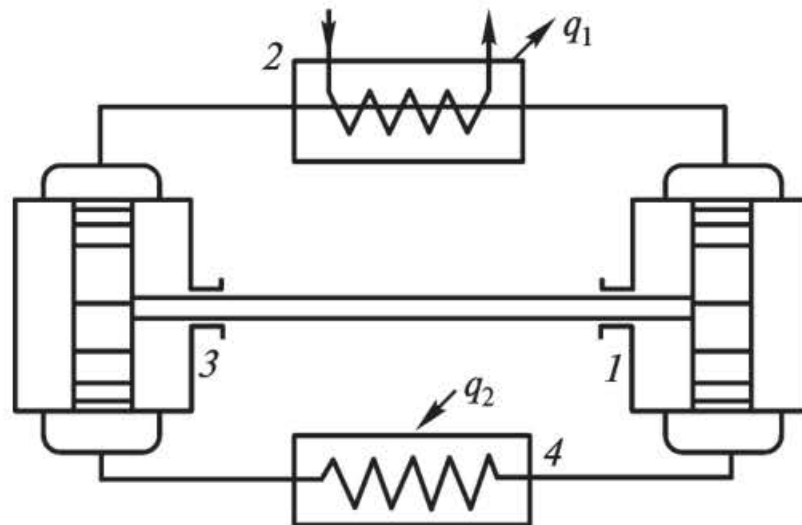
$$l = q_1 - q_2 = c_p(T_4 - T_1 - T_3 + T_2).$$

Отсюда

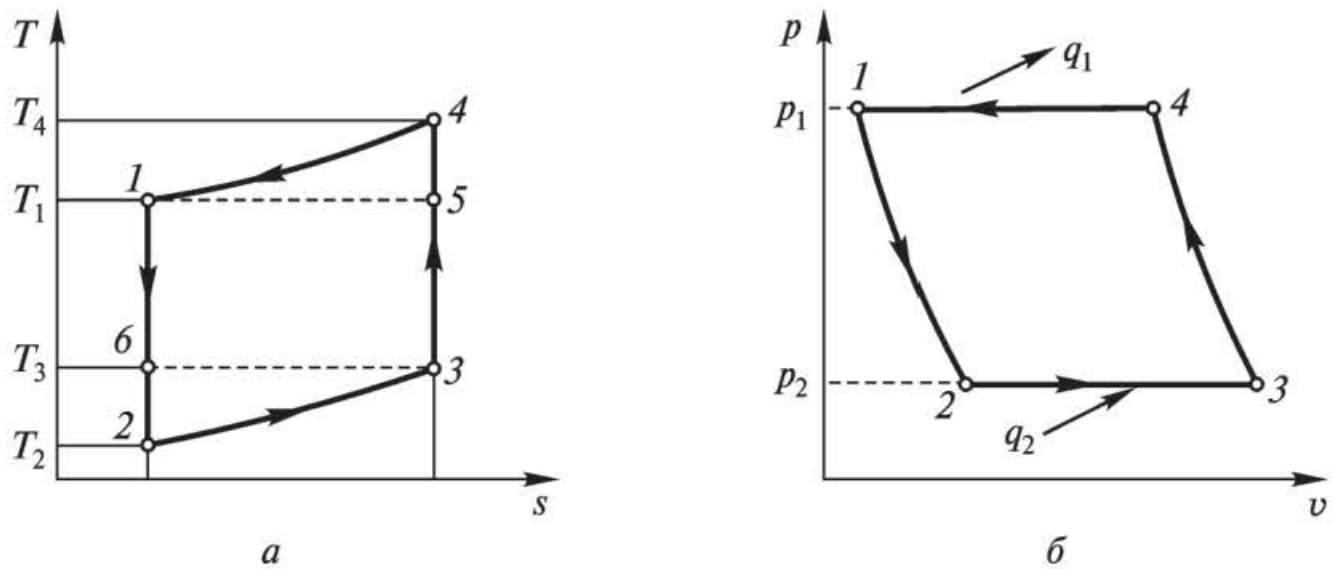
$$\varepsilon = \frac{q_2}{l} = \frac{T_3 - T_2}{(T_4 - T_1) - (T_3 - T_2)} = \frac{1}{[(T_4 - T_1)/(T_3 - T_2)] - 1}.$$

Для адиабатных процессов 1 — 2 и 3 — 4 можно записать

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad \text{и} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$



Р и с. 7.2. Принципиальная схема воздушной холодильной установки



Р и с. 7.3. Цикл воздушной холодильной установки в Ts - (а) и pv -координатах (б)

Так как $p_2 = p_3$, $p_1 = p_4$, то

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Отсюда

$$\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Формула для холодильного коэффициента в окончательном виде:

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}.$$

Таким образом, холодильный коэффициент зависит только от отношения давлений p_1/p_2 .

Цикл, изображенный на рис. 7.3, называется циклом Лоренца. Сравним его холодильный коэффициент с коэффициентом эквивалентного обратного обратимого цикла Карно, определяемым по формуле (7.1). Эта формула применительно к циклу Карно $1 - 5 - 3 - 6$, изображенному на рис. 7.3, примет вид

$$\varepsilon_k = \frac{q_2}{l} = \frac{q_2}{q_1 - q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_3}.$$

Так как $T_3 > T_2$, то $\varepsilon_k > \varepsilon$. Более низкий холодильный коэффициент цикла воздушной холодильной установки объясняется необрати-

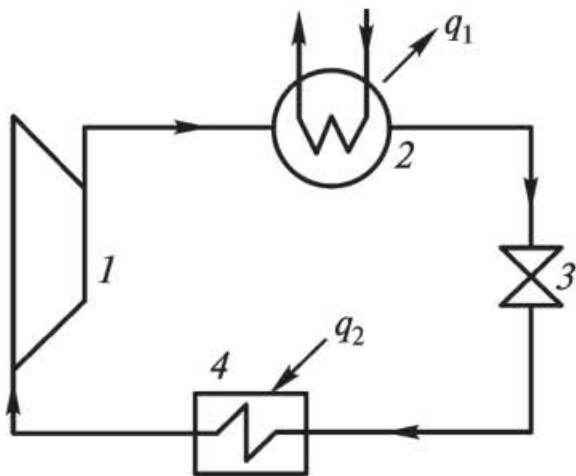
мостью теплообмена в изобарных процессах отвода ($4 - 1$) и подвода ($2 - 3$) теплоты к рабочему телу, так как они протекают при конечной разности температур.

§ 7.3. Цикл паровой компрессорной холодильной установки

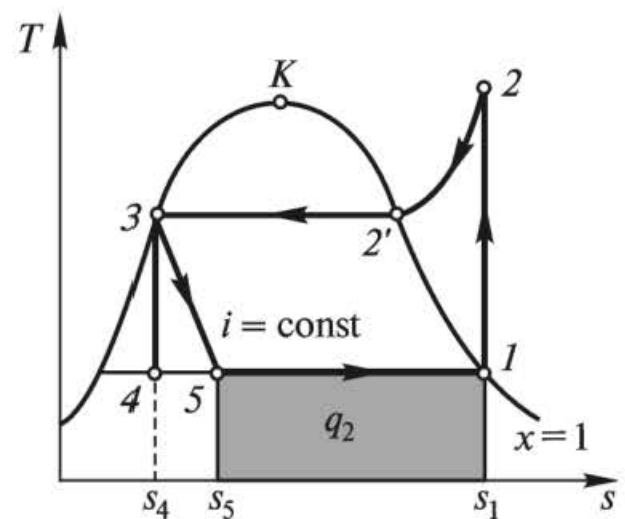
В парокомпрессорных холодильных установках в качестве рабочего тела используют низкокипящие жидкости. Благодаря этому рабочий цикл можно расположить в двухфазной области состояния, в которой изобарные процессы подвода и отвода теплоты можно заменить на изотермические и тем самым уменьшить потери, связанные с необратимостью процессов.

Принципиальная схема установки представлена на рис. 7.4, а диаграмма цикла в Ts -координатах — на рис. 7.5. Установка работает следующим образом. В компрессоре 1 пар адиабатно сжимается (процесс $1 - 2$). В конденсаторе 2 холодильный агент вначале охлаждается (процесс $2 - 2'$) при постоянном давлении и затем конденсируется (процесс $2' - 3$) с отдачей в окружающую среду теплоты q_1 . В дроссельном вентиле 3 происходит процесс дросселирования ($3 - 5$) с превращением жидкости во влажный пар. В испарителе 4 влажный пар принимает теплоту q_2 и содержащаяся в нем жидкость испаряется (процесс $5 - 1$).

Процесс дросселирования в дроссельном вентиле является существенно необратимым процессом и на диаграмме изображается условной кривой $3 - 5$. Если вместо него применить детандер (расширительный цилиндр), то процесс протекал бы по линии $3 - 4$. Таким образом, замена расширительного цилиндра дроссельным вентилем вызывает некоторую потерю холодопроизводительности, измеряе-



Р и с. 7.4. Принципиальная схема парокомпрессорной холодильной установки



Р и с. 7.5. Цикл парокомпрессорной холодильной установки

мую площадью фигуры $s_4 - 4 - 5 - s_5$ и вызванную возрастанием энтропии рабочего тела. Следовательно, его применение приводит к уменьшению количества теплоты q_2 , получаемой от охлаждаемых тел. Положительными сторонами применения дроссельного вентиля являются возможность легко регулировать давление пара, а также максимальная простота конструкции.

Холодильный коэффициент этой установки определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{q_2}{l_{\text{ц}}},$$

где q_2 — удельное количество теплоты, воспринимаемое паром в испарителе, $q_2 = i_1 - i_5 = i_1 - i_4$; $l_{\text{ц}}$ — удельная работа, затраченная при адиабатном сжатии пара в компрессоре, $l_{\text{ц}} = i_2 - i_1$.

Отсюда

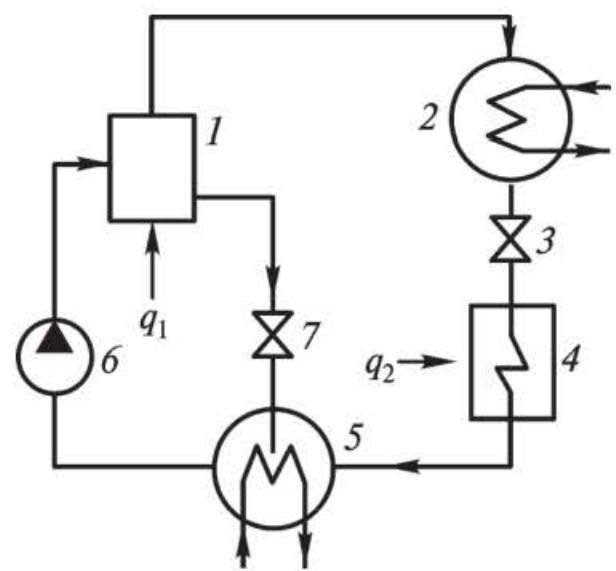
$$\varepsilon = \frac{i_1 - i_4}{i_2 - i_1}.$$

Значение холодильного коэффициента, определяемого по этой формуле, на 15...20 % ниже ε_k .

§ 7.4. Цикл холодильной установки абсорбционного типа

Абсорбционные холодильные установки существенно отличаются от всех других простотой конструкции. Холодильный эффект в них получается не за счет затраты энергии в форме механической работы, а за счет энергии в форме теплоты. Для абсорбционной установки подбирают две жидкости, которые полностью растворяются друг в друге и имеют разные температуры кипения. Процесс поглощения всей массы одного тела другим называется **абсорбцией**. При этом легкокипящую жидкость используют как холодильный агент, а жидкость с более высокой температурой кипения — как абсорбент.

Рассмотрим принципиальную схему установки (рис. 7.6). В парогенераторе 1 в результате подвода теплоты q_1 хо-



Р и с. 7.6. Принципиальная схема абсорбционной холодильной установки

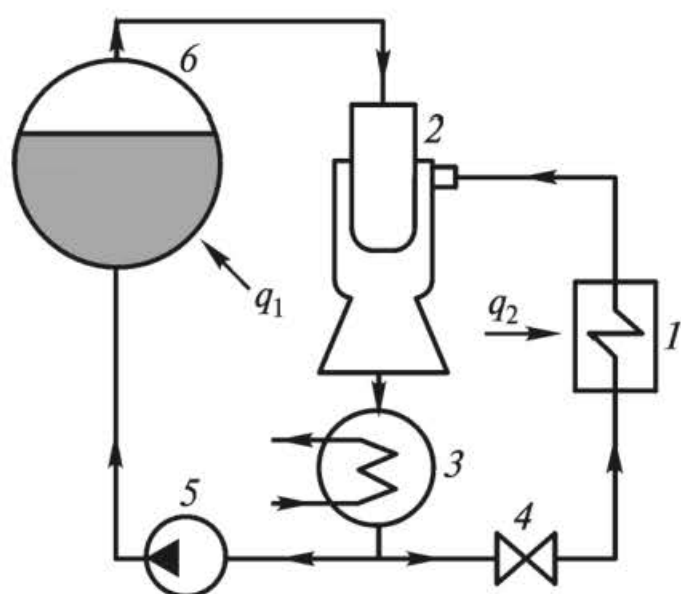
лодильный агент выпаривается из абсорбента в виде почти сухого насыщенного пара. В конденсаторе 2 он полностью конденсируется, отдавая теплоту парообразования охлаждающей воде. В дроссельном вентиле 3 холодильный агент дросселируется, что сопровождается уменьшением давления и температуры и увеличением объема. В теплообменнике 4 ему передается теплота q_2 от охлаждаемых тел. В абсорбере 5 он соединяется с абсорбентом, поступающим через дросселирующий вентиль 7. Полученная смесь насосом 6 направляется в парогенератор 1.

Холодильный коэффициент абсорбционной установки определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{q_2}{q_1}. \quad (7.2)$$

§ 7.5. Цикл парожеторной холодильной установки

Принципиальная схема парожеторной холодильной установки представлена на рис. 7.7. Из испарителя 1 пар холодильного агента поступает в камеру смешения эжектора 2. Сюда же одновременно подается пар из котла 6. Полученная смесь сжимается в диффузоре эжектора. Поступая в конденсатор 3, она конденсируется с отдачей теплоты парообразования. Затем часть жидкости дросселируется в дроссельном вентиле 4, где происходит падение давления и температуры. Другая ее часть с помощью питательного насоса 5 направляется в котел 6, где вновь с помощью подведенной извне теплоты q_1 превращается в пар. Холодильный коэффициент в данном случае определяется по формуле (7.2).



Р и с. 7.7. Принципиальная схема парожеторной холодильной установки

§ 7.6. Тепловой насос

Тепловыми насосами называют устройства, с помощью которых теплота, забираемая от источника с низкой температурой, посредством затраченной извне работы отдается потребителю при более высокой температуре. Работа теплового насоса в принципе не отличается от работы холодильной установки. Рассмотрим его принципиальную схему (рис. 7.8).

В компрессоре 1 холодильный агент сжимается с повышением температуры. В конденсаторе 2 парообразное рабочее тело конденсируется. Выделяющаяся при этом теплота q_1 передается жидкости, циркулирующей в отопительной системе. В дроссельном вентиле 3 конденсат рабочего тела дросселируется с понижением его давления и температуры. В испарителе 4 температура хладагента повышается за счет подвода удельного количества теплоты q_2 .

Эффективность работы теплового насоса характеризуется отопительным коэффициентом φ , который определяется по формуле

$$\varphi = \frac{q_1}{l} = \frac{q_2 + l}{l},$$

где q_1 — удельное количество теплоты, отданное рабочим телом потребителю в конденсаторе 2; q_2 — удельное количество теплоты, принятой рабочим телом в испарителе 4; l — удельное количество работы, затраченной на привод компрессора.

При использовании в качестве холодильного агента паров жидкости, кипящей при низких температурах (аммиак, углекислота, фреоны и др.), цикл теплового насоса не отличается от цикла парокомпрессионной холодильной установки, изображенного на рис. 7.5. Из рассмотрения этого цикла следует, что

$$q_1 = i_2 - i_4 = i_2 - i_5, \quad q_2 = i_1 - i_5.$$

Так как энтальпия рабочего тела в результате дросселирования не изменяется, то

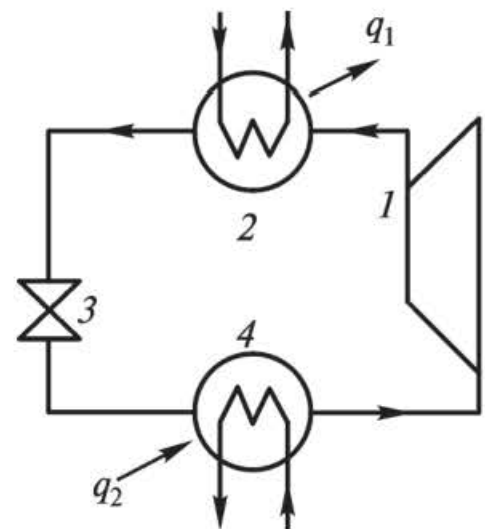
$$i_4 = i_5.$$

Тогда

$$l = q_1 - q_2 = (i_2 - i_5) - (i_1 - i_5) = i_2 - i_1.$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{q_1}{l} = \frac{i_2 - i_5}{i_2 - i_1}.$$



Р и с. 7.8. Принципиальная схема теплового насоса

Отопительный коэффициент в случае, если бы тепловой насос работал по обратному обратимому циклу Карно, был бы равен

$$\varphi = \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

Например, при отоплении здания зимой при температуре низшего источника (речная вода) $T_2 = 280$ К и температуре рабочего тела в отопительной системе $T_1 = 360$ К $\varphi = 360/(360 - 280) = 4,5$. Следовательно, тепловой насос передает в отопительную систему количество теплоты в 4,5 раза больше, чем количество затрачиваемой в компрессоре работы. Таким образом, при указанных значениях T_1 и T_2 он теоретически мог бы передать потребителю количество теплоты в 4,5 раза больше, чем при обычном электрообогреве при той же затраченной электроэнергии.

ЧАСТЬ II

ГЛАВА 8

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА

§ 8.1. Основы теории теплообмена

При наличии разности температур в теле или при соприкосновении нескольких тел, имеющих различную температуру, происходит обмен кинетической энергией между движущимися структурными частицами (молекулами, атомами, свободными электронами), вследствие чего интенсивность движения частиц тела с меньшей температурой увеличивается, а с большей — уменьшается. Такой энергетический обмен называется **теплообменом**, или **теплопередачей**. В результате одно из соприкасающихся тел нагревается, а другое — охлаждается. При этом теплота переходит от точек с более высокой к точкам с более низкой температурой, если процесс протекает в одном теле. При теплообмене между различными телами это положение также сохраняется, т.е. теплота переходит от более нагретых тел к менее нагретым. Таким образом, конечный результат теплообмена заключается в выравнивании температур, после чего процесс прекращается.

Такую форму передачи средней кинетической энергии от частицы к частице называют микрофизической, так как она происходит на молекулярном уровне без видимого движения тел. Микрофизическая трактовка процессов передачи теплоты дается в курсе теоретической физики. В курсе теплотехники эта проблема излагается в рамках макрофизики, поскольку указанный вид энергетического обмена обуславливается лишь температурным состоянием системы, а температура с молекулярно-кинетической точки зрения является величиной статистического характера, т. е. приобретает смысл только применительно к макроскопическим телам.

Понятие «теплообмен» охватывает совокупность всех явлений, при которых имеет место передача теплоты из одной части пространства в другую в твердых телах, а также в жидких и газообразных средах. Эти процессы по своей физико-механической природе весьма многообразны, отличаются большой сложностью и обычно протекают в виде целого комплекса разнородных явлений. Для удобства принято делить перенос теплоты на простейшие виды: теплопроводность, конвекцию, теплообмен излучением или радиацией.

Теплопроводность (кондукция) характеризуется тем, что ее действие связано с наличием вещественной среды и теплообмен может происходить только между такими частицами тела (молекулами и атомами), которые находятся в непосредственной близости друг от друга. При этом сами частицы не перемещаются. В связи с чем в твердых телах теплота передается только теплопроводностью.

Конвекция наблюдается тогда, когда материальные частицы какой-нибудь среды изменяют свое положение в пространстве и при этом передают теплоту от более нагретых объемов к менее нагретым. Это явление имеет место в жидкостях и газах и всегда сопровождается теплопроводностью, т.е. передачей теплоты от одной частицы к соседней, если только во всей текущей массе нет полного равенства температур. Рассматривая области, расположенные внутри потока, обе формы переноса теплоты можно охарактеризовать одним понятием — *теплопроводность в движущихся средах*. Если учесть, кроме этого, влияние ограничивающих твердых стенок, то будем наблюдать более общий случай теплообмена между стенками и движущейся жидкостью, который называется *теплоотдачей*.

Особый вид теплообмена наблюдается в тех случаях, когда на границе между стенкой и потоком происходит изменение агрегатного состояния тела. Это имеет место при переходе теплоты от поверхности нагрева к испаряющейся жидкости, от конденсирующихся паров к поверхностям охлаждения, при плавлении и кристаллизации. Соответствующие этому процессу математические модели относятся к числу наиболее сложных, описываемых дифференциальными уравнениями математической физики.

Теплообмен излучением характеризуется отсутствием контакта между телами, обменивающимися теплотой. Примером может служить передача теплоты от Солнца к Земле через космическое пространство. Тепловое излучение возникает у поверхности или внутри тела в результате сложных молекулярных и атомных возмущений. При этом некоторая часть внутренней энергии тела преобразуется в электромагнитные волны (или в другом представлении в фотоны — кванты энергии) и уже в такой форме передается через пространство.

Все эти различные формы переноса теплоты не обособлены. В большинстве случаев один вид теплообмена сопутствует другому, и разделить их между собой весьма трудно. В практических расчетах сложные сочетания различных видов расчлениют, и весь процесс сводят к какому-либо одному. При этом, если возможно, указывают условия, когда один выделенный вид теплообмена существенно доминирует над остальными. Практически все процессы, рассматриваемые в теории теплообмена, протекают при взаимодействии твердых тел с жидкими или газообразными средами, размеры которых много больше размеров составляющих их структурных частиц. Поэтому такие статистические понятия, как температура, давление, плотность, теплоемкость, вязкость и др., могут быть приписаны даже таким малым элементам системы, которые с физико-математической точки зрения могут рассматриваться как дифференциалы ее объема. Это означает, что изучаемую среду можно рассматривать не как совокупность отдельных материальных частей, а как непрерывное сплошное пространство, что позволяет при аналитическом описании процесса переноса теплоты использовать методы математического анализа, привлекая такие понятия, как непрерывность и дифференцируемость. Именно с этих позиций строится аналитическая теория теплопроводности. Исключение приходится делать только при взаимодействии тел с весьма разреженным газом, когда размеры тела становятся соизмеримыми с длиной пути свободного пробега молекул. Соответственно этому меняется и математическая модель процесса.

Перенос теплоты теплопроводностью, как и любой другой физический процесс, может быть выражен математической моделью. Прежде чем переходить к построению математических моделей, необходимо дать определение таким понятиям, как температурное поле, градиент температуры, вектор теплового потока.

§ 8.2. Температурное поле

Температурным полем называют совокупность значений температуры во всех точках рассматриваемого объема в каждый фиксированный момент времени. Температуре, характеризующей степень нагретости любой точки тела, нельзя приписать какое-либо направление и поэтому она является скалярной величиной. Математическое выражение распределения температуры в теле содержит в качестве независимых переменных пространственные координаты и время:

$$\left. \begin{array}{l}
\text{в декартовой системе координат} \\
T = T(x, y, z, t); \\
\text{в цилиндрической системе координат} \\
T = T(r, \varphi, z, t); \\
\text{в сферической системе координат} \\
T = T(r, \varphi, \Theta, t).
\end{array} \right\} \quad (8.1)$$

Основная задача аналитической теории теплопроводности — изучение пространственно-временного изменения температуры, т.е. нахождение зависимостей (8.1). При этом, если температура изменяется как в пространстве, так и во времени, то такой процесс теплообмена называется *нестационарным* (неустановившимся). Если температура в каждой точке тела с течением времени остается неизменной, изменяясь лишь от точки к точке, то такой процесс теплообмена называется *стационарным* (установившимся). Температура в данном случае является функцией только координат. Например, в декартовых координатах

$$T = T(x, y, z); \quad \partial T / \partial t = 0. \quad (8.2)$$

Температурное поле, соответствующее соотношениям (8.1), (8.2), является пространственным, или трехмерным, так как температура является функцией трех координат.

Если вдоль одной из координат температура остается постоянной, то математически это условие записывается (например, для координаты z) следующим образом: $\partial T / \partial z = 0$. В этом случае температурное поле называется двумерным и записывается: для нестационарного режима $T = T(x, y, t)$; для стационарного режима $T = T(x, y)$.

Если температура остается постоянной вдоль двух координат (например, y и z), то $\partial T / \partial y = 0$, $\partial T / \partial z = 0$ и поле называется одномерным. В этом случае можно записать: для нестационарного режима $T = T(x, t)$; для стационарного режима $T = T(x)$. Примером одномерного температурного поля может служить поле неограниченной пластины, у которой длина и ширина бесконечно велики по сравнению с толщиной; теплота в данном случае распространяется перпендикулярно ее поверхности.

Переменные x, y, z соотношения (8.1) определяют положение любой точки рассматриваемого тела, являясь ее координатами в выбранной системе координат. Они могут принимать бесконечное множество числовых значений, как и переменная t , характеризующая время течения процесса теплопроводности. Совокупность всевозможных числовых значений переменных x, y, z, t , каждому из которых соответствует вполне определенное значение температуры $T = T(x, y,$

z, t), называется *областью определения функции* $T(x, y, z, t)$. Функция $T = T(x, y, z, t)$ в своей области определения считается обычно непрерывной, дважды непрерывно дифференцируемой по пространственным координатам x, y, z и непрерывно дифференцируемой по времени t .

В теле, имеющем температуру $T = T(x, y, z, t)$, можно выделить поверхность, во всех точках которой в некоторый момент времени температура одинакова. Такая поверхность называется *изотермической поверхностью*, или *поверхностью уровня*. Уравнение поверхности уровня имеет следующий вид:

$$T(x, y, z, t) = C, \quad \text{где } C = \text{const.}$$

В отличие от стационарных, в нестационарных процессах форма и расположение изотермических поверхностей с течением времени изменяются. Изотермические поверхности характеризуются следующими основными свойствами:

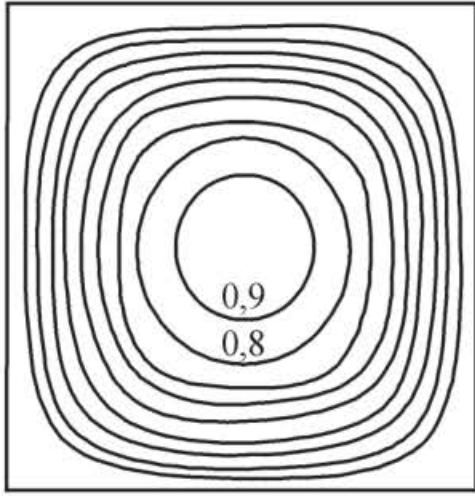
- две изотермические поверхности, имеющие различные температуры, никогда не пересекаются друг с другом, так как в одной и той же точке тела одновременно не может быть двух различных температур;

- изотермические поверхности не имеют границ внутри тела. Они или заканчиваются на поверхности, или замыкаются на себя, располагаясь внутри рассматриваемого объема;

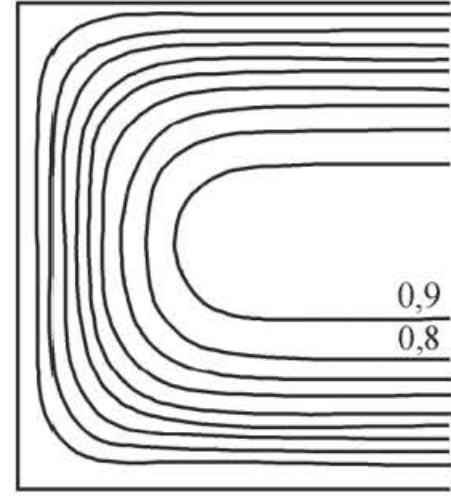
- теплота не распространяется вдоль изотермической поверхности, а направляется от одной изотермической поверхности к другой. Это следует из положения о том, что теплота распространяется от более нагретого участка тела к менее нагретому.

Пересечение изотермических поверхностей плоскостью дает на этой плоскости семейство изотерм (линии, соответствующие одинаковой температуре). Они обладают теми же свойствами, что и изотермические поверхности, т.е. не пересекаются, не обрываются внутри тела, заканчиваются на поверхности либо замыкаются внутри тела. На рис. 8.1 представлен участок двумерного температурного поля с изотермами $T \pm \Delta T$.





Р и с. 8.2. Изотермы в области квадратной формы



Р и с. 8.3. Изотермы в области прямоугольной формы

способ изображения поля особенно удобен, когда речь идет о двумерном температурном поле.

Равенство вида $T(x, y, t) = C$ (всюду время t фиксировано) определяет на плоскости (x, y) некоторую кривую $y = \varphi(x, c, t)$. Такие кривые называются *линиями уровня* (изотермами) плоского (двумерного) температурного поля $T = T(x, y, t)$ (рис. 8.2, 8.3). На практике в ряде случаев приходится исследовать температурные поля, обладающие свойствами симметрии, что облегчает их изучение. Рассмотрим некоторые частные случаи (для стационарных полей).

Поле T называется *плоскопараллельным*, если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого оно переходит само в себя. Плоскопараллельное (или двумерное) поле задается, как указывалось ранее, равенством $T = T(x, y)$. Его изотермические поверхности — семейство цилиндрических поверхностей $T(x, y)$.

Поле T называется *осесимметричным*, если не изменяется при повороте пространства на произвольный угол вокруг некоторой фиксированной прямой — оси его симметрии. Такое поле задается соотношением (в цилиндрической системе) $T = T(r, z)$, т.е. изображается функцией, зависящей только от переменных r и z (но не от угла). Его изотермические поверхности представляют собой поверхности вращения.

Если температурное поле T задается функцией, зависящей лишь от одной координаты r , т.е. $T = T(r)$, то оно называется *цилиндрическим*. Изотермические поверхности такого поля — круглые цилиндры.

Если значение функции T (в сферической системе координат) зависит лишь от переменной r (но не зависит от углов φ и Θ), где r — расстояние от некоторой фиксированной точки M_0 (начала координат), то такое температурное поле называется *сферическим*. Его изотермические поверхности — семейство концентрических сфер.

§ 8.3. Температурный градиент

Рассмотрим две бесконечно близкие изотермические поверхности с температурами T и $T + \Delta T$ ($\Delta T > 0$) и какую-либо точку, лежащую на одной из них (рис. 8.4). Перемещаясь из точки M вдоль любых направлений, можно обнаружить, что интенсивность изменения температуры по различным направлениям неодинакова. При перемещении по изотермической поверхности температура не меняется, а вдоль какого-либо направления \mathbf{l} , пересекающего изотермические поверхности, — изменяется. Используя понятие производной скалярного поля по заданному направлению, можно описать его локальные свойства, т.е. изменение температуры T при переходе от точки M к близкой точке M' по направлению \mathbf{l} . Скорость изменения температуры T в точке M в направлении \mathbf{l} характеризуется производной функции T :

$$\partial T / \partial l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} [T(M') - T(M)] / \Delta l. \quad (8.3)$$

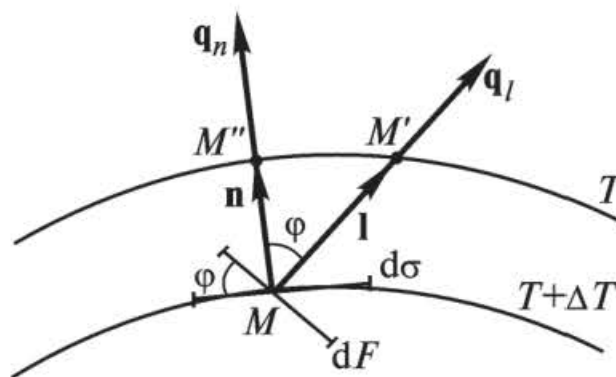
Производная функции $T(M)$ по направлению $\mathbf{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ вычисляется по формуле

$$\partial T / \partial l = (\partial T / \partial x) \cos \alpha + (\partial T / \partial y) \cos \beta + (\partial T / \partial z) \cos \gamma.$$

Наибольшая разность температур на единицу длины вектора перемещения $[T(M'') - T(M)] / \Delta l$ наблюдается в направлении нормали \mathbf{n} к изотермической поверхности (см. рис. 8.4). В соответствии с (8.3) максимальная скорость изменения температуры при этом равна пределу отношения изменения температуры ΔT к расстоянию между изотермическими поверхностями по нормали Δn , когда Δn стремится к нулю:

$$\partial T / \partial n = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} [T(M'') - T(M)] / \Delta n = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \Delta T / \Delta n. \quad (8.4)$$

Таким образом, в любой точке M изотермической поверхности можно построить некоторый вектор, направленный по нормали к ней



Р и с. 8.4. Графическая интерпретация градиента температуры

в сторону увеличения температуры. Абсолютная величина этого вектора равна изменению температуры на единице длины перемещения в рассматриваемом направлении — скорости возрастания температуры (т. е. производной от температурной функции T по направлению нормали \mathbf{n}). Такой вектор называют *градиентом температуры* в точке M , или градиентом температурного поля, и записывают в виде символа $\text{grad } T$:

в декартовых координатах (x, y, z)

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k}; \quad (8.5)$$

в цилиндрических координатах (r, φ, z)

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k}; \quad (8.6)$$

в сферических координатах (r, φ, Θ)

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \Theta} \mathbf{e}_\Theta + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (8.7)$$

Для обозначения вектора (8.5) в теории поля иногда применяют символ $\text{grad } T = \nabla T$.

Согласно сказанному, можно записать

$$|\text{grad } T| = \partial T / \partial n, \quad (8.8)$$

т.е. длина вектора $\text{grad } T$ равна скорости возрастания температуры в этом направлении. Здесь и всюду далее \mathbf{n} — единичный вектор нормали. Температурный градиент показывает, насколько интенсивно меняется температура тела.

Производная от функции T по направлению нормали \mathbf{n} и вектор $\text{grad } T$ связаны соотношением

$$dT/dn = \mathbf{n} \text{ grad } T. \quad (8.9)$$

Вектор нормали \mathbf{n} к поверхности $T = \text{const}$ в точке M может иметь два противоположных направления, одно из которых можно считать внешним по отношению к данной поверхности, а другое — внутренним. Независимо от того, как выбрано направление нормали \mathbf{n} , вектор (8.5) всегда направлен в сторону возрастания температуры.

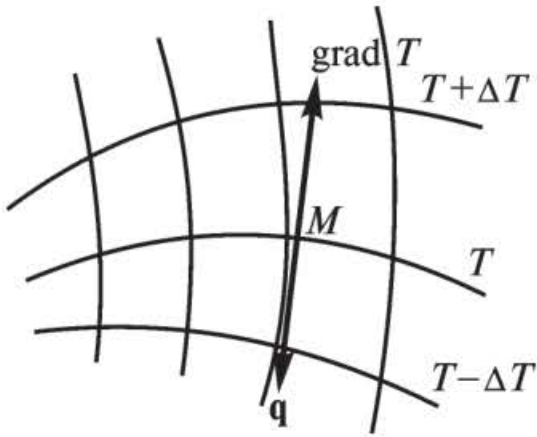
§ 8.4. Тепловой поток: векторная и скалярная формы закона Фурье

В теле, не находящемся в полном тепловом равновесии (т.е. обладающем неравномерным распределением температуры), всегда происходит перенос теплоты. Отсюда следует, что для ее передачи теплопроводностью необходимо неравенство нулю температурного градиента. В этом смысле температурный градиент является основным физическим параметром, определяющим условие возникновения теплового процесса. Следовательно, соотношение $\text{grad}T \neq 0$ является необходимым условием возникновения внутри тела теплового потока. Тепловой поток в отличие от температуры (величины скалярной) имеет вполне определенное направление, а именно: от точек тела с более высокой к точкам с более низкой температурой. Таким образом, тепловой поток можно рассматривать как вектор, направленный в сторону уменьшения температуры, а поле тепловых потоков — векторным. Для математического описания поля тепловых потоков вводится вектор \mathbf{q} , называемый *вектором плотности теплового потока*. Под вектором плотности теплового потока в точке M температурного поля понимают вектор, направление которого совпадает с направлением переноса теплоты. Абсолютная величина этого вектора выражает тепловой поток, измеряемый количеством теплоты, проходящей в единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению потока в рассматриваемой точке. Обозначим через dQ количество теплоты, проходящее через изотермическую поверхность площадью $d\sigma$ за время dt . Тогда абсолютное значение вектора плотности теплового потока можно записать в виде

$$q = dQ/(d\sigma dt). \quad (8.10)$$

Формула (8.10) характеризует плотность теплового потока единичного элемента изотермической поверхности. Это понятие, как будет показано далее, применимо к любой, а не только к изотермической, поверхности.

Опыт показывает, что передача теплоты теплопроводностью происходит по нормали к изотермической поверхности от участков тела с большей к участкам с меньшей температурой. Следовательно, вектор плотности теплового потока направлен по нормали к изотермической поверхности в направлении уменьшения температуры. Можно говорить о плотности теплового потока и вдоль любого другого направления \mathbf{l} , отличного от направления нормали \mathbf{n} . В этом случае



Р и с. 8.5. Направления векторов градиента температуры и теплового потока

плотность теплового потока в направлении \mathbf{l} есть проекция вектора \mathbf{q} на это направление, т.е. $\mathbf{q} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})$.

Идея о существовании органической связи между вектором плотности теплового потока и температурным градиентом легла в основу учения, созданного Фурье. Сущность гипотезы Фурье состоит в том, что тепловой поток через элемент изотермической поверхности вполне определяется значением температурного градиента в рассматриваемой точке M . Действительный смысл этой связи заключается в том,

что тепловые потоки в среде всегда определенно направлены. Их возникновение вдоль изотермических поверхностей невозможно, так как по всей изотермической поверхности составляющая градиента температуры равна нулю. Следовательно, векторы плотности теплового потока \mathbf{q} и $\text{grad } T$ направлены по нормали к изотермической поверхности, но в противоположные стороны (рис. 8.5).

С увеличением перепада температур, т.е. с возрастанием температурного градиента, повышается и плотность теплового потока. опыты показали, что ее можно считать пропорциональной первой степени удельного перепада температуры. Это и явилось основой гипотезы Фурье о наличии простейшей количественной зависимости между абсолютными значениями векторов плотности теплового потока и температурного градиента. На основе этих данных, а также соображений о противоположном направлении этих векторов закон Фурье в векторном виде записывается следующим образом:

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad } T. \quad (8.11)$$

Этот закон, сформулированный в виде гипотезы, был подтвержден многочисленными опытами. Выражение (8.11) используют при выводе уравнений, описывающих механизм процесса теплопроводности.

Наглядное представление о мгновенном распределении потоков теплоты могут дать линии, касательные к которым в каждой точке температурного поля совпадают с соответствующими нормальными к изотермическим поверхностям. Такие линии называются *линиями теплового потока* (см. рис. 8.5).

Коэффициент пропорциональности λ называется **теплопроводностью** и является физической константой, характеризующей тепло-

проводящие свойства материала данного тела. Единица измерения: Вт/(м · К).

Числовое значение теплопроводности определяет количество теплоты, проходящее через единицу площади изотермической поверхности в единицу времени при градиенте температуры, равном единице. Подобно другим величинам этого ряда (удельная теплоемкость, электрическое сопротивление, модуль упругости и т. п.) значение теплопроводности в общем случае зависит от природы вещества, его структуры, влажности, давления, температуры и других факторов. В большинстве случаев теплопроводность λ для различных материалов определяется опытным путем. С повышением температуры λ возрастает, а от давления практически не зависит.

Зависимость теплопроводности от температуры в общем случае довольно сложная, однако для большинства твердых тел, жидкостей и газов при умеренных температурах она оказывается почти линейной, т.е. $\lambda = \lambda_0[1 \pm b(T - T_0)]$, где λ_0 — теплопроводность при температуре T_0 ; b — постоянная, определяемая опытным путем. В классической аналитической теории теплопроводности величина λ для упрощения выводов считается постоянной (т.е. $\partial\lambda/\partial T = 0$).

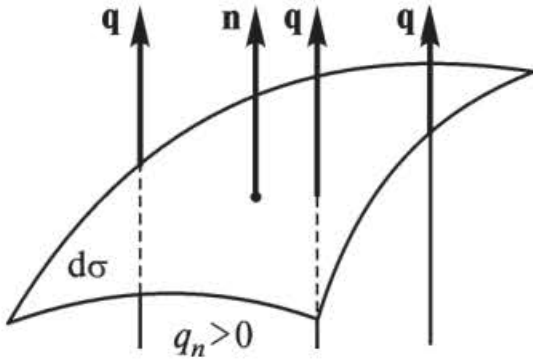
Соотношение (8.10) запишем в виде

$$dQ = qd\sigma dt. \quad (8.12)$$

Как отмечалось ранее, нормаль \mathbf{n} к элементу $d\sigma$ изотермической поверхности может иметь два направления (направляющие косинусы этих направлений отличаются только знаками). Условимся считать тепловой поток положительным, если его направление совпадает с выбранным направлением нормали, и отрицательным, если оно ему противоположно. Для абсолютных значений векторов, входящих в равенство (8.11), следует, что $\mathbf{q} = \lambda|\text{grad } T|$. Теперь в равенстве (8.8) необходимо поставить знак минус, т.е. $|\text{grad } T| = -\partial T/\partial n$, и

$$q = -\lambda\partial T/\partial n. \quad (8.13)$$

Действительно, для нормали, совпадающей с направлением градиента, имеем $\partial T/\partial n > 0$; перенос же теплоты происходит всегда в направлении уменьшения температуры, т.е. в противоположную сторону, и, следовательно, должно быть $\Delta Q < 0$ или, что то же самое, $q < 0$, что и объясняет знак минус в формуле (8.13). Изменив направление нормали на противоположное, имеем $\partial T/\partial n < 0$, но тогда $\Delta Q > 0$ и, следовательно, знак минус сохраняется. Подставляя теперь в (8.12) вместо q правую часть равенства (8.13), можно записать закон Фурье в скалярной форме



Р и с. 8.6. Изотермическая поверхность

$$dQ = -\lambda(\partial T/\partial n)d\sigma dt. \quad (8.14)$$

Выражение (8.14) определяет количество теплоты, проходящее через элементарный участок $d\sigma$ изотермической поверхности за время dt по направлению нормали к площадке (рис. 8.6). Количество теплоты, прошедшее за время t через изотермическую поверхность конечных размеров площадью σ , будет определяться по соотношению

$$Q = -\int_0^t \int_{\sigma} \lambda(\partial T / \partial n) d\sigma dt. \quad (8.15)$$

Тепловой поток может быть определен вдоль любого направления через площадь, перпендикулярную этому направлению. Однако на практике часто встречаются случаи, когда площадка ориентирована в поле произвольным образом. Покажем, что равенство (8.14) справедливо для любых поверхностей, а не только для изотермических.

Выберем произвольную элементарную площадку dF так, чтобы угол между нормалью \mathbf{l} к ней и вектором плотности теплового потока \mathbf{q}_n в рассматриваемой точке был равен φ (рис. 8.7). Поток теплоты по нормали \mathbf{n} в направлении \mathbf{l} можно вычислить, используя соотношения (8.10) и (8.14):

$$q_n = \frac{dQ}{d\sigma dt} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n};$$

$$q_l = \frac{dQ}{dF dt} = \frac{dQ}{d\sigma dt} \cos\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cos\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial l},$$

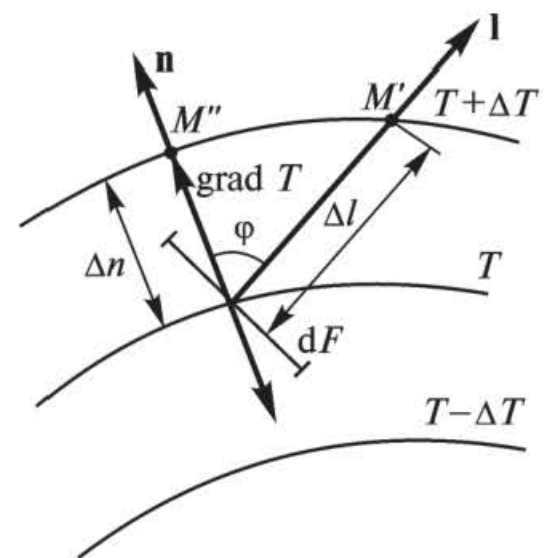
так как $n = l \cos \varphi$.

Отсюда находим, что

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial l} dF dt. \quad (8.16)$$

Общее количество теплоты, протекающее за время t через конечную площадь поверхности F ,

$$Q = -\int_0^t \int_F \lambda \frac{\partial T}{\partial l} dt dF. \quad (8.17)$$



Р и с. 8.7. Схема к определению теплового потока

В частном случае, когда тепловой режим стационарный и температурный градиент одинаков по всей площади поверхности F , можно записать

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial l} F t.$$

Таким образом, для определения количества теплоты, проходящей через какую-либо площадь поверхности твердого тела, нужно знать температурное поле внутри него, что составляет главную задачу аналитической теории теплопроводности.

Так как \mathbf{q}_l является составляющей вектора плотности теплового потока \mathbf{q}_n , т.е. $\mathbf{q}_l = \mathbf{q}_n \cos \varphi$, то из этого уравнения следует, что самым большим тепловым потоком, отнесенным к единице площади поверхности, будет тот, который рассчитан вдоль нормали \mathbf{n} к изотермической поверхности [$d\sigma \cos(\varphi = 0) = 1$].

В этом параграфе не рассматриваются усложненные анизотропией случаи теплопроводности. Для таких веществ, как древесина, слюда и т. п., теплопроводность λ зависит от направления, поэтому простое правило косинусов для получения составляющей \mathbf{q}_l несправедливо.

Если спроектировать вектор плотности теплового потока на координатные оси, то в соответствии с его определением (8.11) можно записать

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -\lambda(\partial T / \partial x); \\ q_y &= -\lambda(\partial T / \partial y); \\ q_z &= -\lambda(\partial T / \partial z). \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Тепловые потоки, выраженные соотношениями (8.18), являются составляющими вектора плотности теплового потока.

§ 8.5. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Изучение любого физического процесса методами математики сводится к установлению аналитических зависимостей между величинами, характеризующими это явление. Для сложных физических процессов, в которых определяющие величины изменяются в пространстве и времени, установить такие зависимости не всегда возможно. В этих случаях используют методы математической физики, с помощью которых рассматривают протекание процесса не во всем

изучаемом пространстве, а в некотором объеме вещества и в течение элементарного отрезка времени. Это дает возможность на основе самых общих принципов вывести его дифференциальное уравнение, которое представляет собой наиболее общую связь между существенными для исследуемых процессов величинами.

Связь между величинами, участвующими в передаче теплоты теплопроводностью, устанавливается так называемым дифференциальным уравнением теплопроводности, на основе которого строится математическая теория теплопроводности. В основу его вывода положен закон сохранения энергии, сочетаемый с законом Фурье.

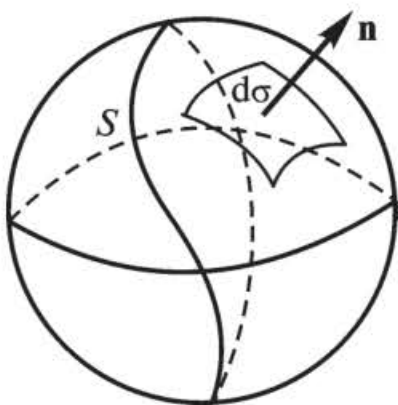
Закон сохранения энергии может быть сформулирован следующим образом. Выделим в теле некоторую часть объема V , ограниченного замкнутой поверхностью S , через которую происходит тепловое взаимодействие выделенной части с окружающей ее средой. Имеет место следующее утверждение: количество теплоты Q , полученное выделенным объемом за время dt вследствие теплопроводности, а также от внутренних источников теплоты, равно изменению внутренней энергии вещества, содержащегося в выделенном объеме:

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad (8.19)$$

где Q — изменение внутренней энергии вещества, содержащегося в выделенном объеме V за время dt ; Q_1 — количество теплоты, введенное в выделенный объем путем теплопроводности за время dt ; Q_2 — количество теплоты, которое выделилось в объеме V за время dt вследствие внутренних источников теплоты.

Это утверждение вместе с законом Фурье (8.14) положено в основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности. Для облегчения вывода примем следующие допущения:

- деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, является очень малой по сравнению с самим объемом и не учитывается;



Р и с. 8.8. Ограниченная замкнутая поверхность

- макроскопические частицы тела неподвижны относительно друг друга.

Пусть V — выделенный объем произвольной формы части тела, ограниченный замкнутой поверхностью S (не обязательно изотермической); \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к точкам поверхности S (рис. 8.8); $T(x, y, z, t)$ — температура тела в точке (x, y, z) в момент времени t . Вычислим общее количество теплоты Q , полученное выделенным объемом за малый отрезок времени dt , имея в виду, что $Q = Q_1 + Q_2$. Для вы-

числения Q_1 воспользуемся законом Фурье в скалярной форме (8.14). Количество теплоты, подведенное в выделенный объем через элементарную площадку $d\sigma$ за время dt , равно (с учетом того, что направление потока теплоты противоположно направлению нормали)

$$dQ_1 = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma dt = \lambda \mathbf{n} \text{ grad } T d\sigma dt = -\mathbf{q} \mathbf{n} d\sigma dt, \quad (8.20)$$

где \mathbf{q} — вектор плотности теплового потока, $\mathbf{q} = -\lambda \text{ grad } T$.

Количество теплоты, протекающее за время dt через площадь поверхности S , выразится интегралом

$$Q_1 = -dt \int_S \mathbf{q} \mathbf{n} d\sigma = -dt \int_S q_n d\sigma, \quad (8.21)$$

где q_n — проекция вектора \mathbf{q} на нормаль \mathbf{n} .

Поверхностный интеграл (8.21) можно преобразовать в объемный по формуле Остроградского—Гаусса, связывающей двойной интеграл по поверхности S с тройным интегралом по объему V , ограниченному этой поверхностью:

$$\int_S q_n d\sigma = \int_V \text{div } \mathbf{q} dV. \quad (8.22)$$

Таким образом,

$$Q_1 = -dt \int_V \text{div } \mathbf{q} dV. \quad (8.23)$$

Выделение или поглощение теплоты внутри объема V удобно характеризовать с помощью плотности (мощности) тепловых источников. Под *плотностью тепловых источников* понимают такую функцию $F(x, y, z, t)$, когда в элементарном объеме dV за отрезок времени dt выделяется количество теплоты, равное

$$dQ_2 = F(x, y, z, t) dV dt = F(M, t) dV dt. \quad (8.24)$$

Тогда за отрезок времени dt в теле объемом V выделится количество теплоты

$$Q_2 = dt \int_V F(M, t) dV, \quad (8.25)$$

где $F(M, t) > 0$. Если $F(M, t) < 0$, то теплота не выделяется, а поглощается. Функция $F(M, t)$ считается непрерывной и ограниченной.

Общее количество теплоты Q , полученное выделенным объемом V ,

$$Q = dt \int \int \int_V F(M, t) dV - dt \int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV. \quad (8.26)$$

Согласно формуле (8.19) это количество теплоты равно изменению внутренней энергии вещества, содержащегося в выделенном объеме, которое на основании первого закона термодинамики может быть выражено формулой

$$Q = CdT, \quad (8.27)$$

где C — теплоемкость выделенного объема; dT — изменение его температуры.

Таким образом, Q может быть вычислено двумя способами. С одной стороны, по формуле (8.26), с другой — путем учета изменения температуры в точках объема V , ограниченного поверхностью S . В точке (x, y, z) за промежуток времени dt температура $T(x, y, z, t)$ изменится на величину

$$T(x, y, z, t + dt) - T(x, y, z, t) = (\partial T / \partial t) dt.$$

Элементу объема dV массой ρdV для такого изменения температуры потребуется количество теплоты, равное $c\rho(\partial T / \partial t)dVdt$, а всему объему

$$CdT = dt \int \int \int_V c\rho(\partial T / \partial t) dV, \quad (8.28)$$

где c — удельная теплоемкость, Дж/(кг · К); ρ — плотность вещества, кг/м³.

Принимая во внимание (8.27), с учетом (8.26) и (8.28) находим

$$\int \int \int_V [c\rho \partial T / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{q} - F(M, t)] dV = 0. \quad (8.29)$$

Равенство (8.29) должно выполняться для любой части тела объемом V . Это возможно только тогда, когда в каждой точке внутри тела

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} - F(M, t) = 0. \quad (8.30)$$

Это заключение справедливо, если левая часть в равенстве (8.30) — непрерывная функция. Предположим, что в точке $M(x, y, z)$ равенство нарушается, т.е., например, $[c\rho \partial T / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{q} - F(M, t)] > 0$. Тогда, интегрируя обе части неравенства по некоторой области V , содержащей точку M , получим противоречие с условием (8.29).

Так как $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$, то равенство (8.30) можно записать в виде

$$c\rho\partial T/\partial t = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + F(M, t). \quad (8.31)$$

Уравнение (8.31) называется *дифференциальным уравнением теплопроводности*, или *уравнением Фурье*.

Для изотропного гомогенного тела параметры c , ρ , λ постоянные. Так как $\operatorname{div}(\operatorname{grad} T) = \nabla^2 T$, где ∇^2 — оператор Лапласа, то, разделив обе части (8.31) на $c\rho$, получим

$$\partial T / \partial t = a \nabla^2 T(M, t) + (1/c\rho) F(M, t), \quad (8.32)$$

где a — коэффициент пропорциональности, называемый температуропроводностью, $\text{м}^2/\text{с}$, $a = \lambda/c\rho$.

В декартовых координатах уравнение (8.32) имеет вид

$$\partial T / \partial t = a(\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 + \partial^2 T / \partial z^2) + (1/c\rho) F(x, y, z, t). \quad (8.33)$$

В цилиндрических координатах (r, φ, z) , связанных с декартовыми координатами соотношениями

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z$$

$$(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi < 2\pi; -\infty < z < +\infty),$$

уравнение (8.32) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c\rho} F(r, \varphi, z, t).$$

В сферических координатах (r, φ, Θ) , связанных с декартовыми координатами соотношениями

$$x = r \cos \varphi \sin \Theta; \quad y = r \sin \varphi \sin \Theta; \quad z = r \cos \Theta$$

$$(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi < 2\pi; 0 \leq \Theta \leq \pi),$$

уравнение (8.32) записывается в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial T}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{1}{c\rho} F(r, \varphi, \Theta, t).$$

В частном случае, когда температурное поле обладает сферической симметрией, последнее уравнение (при $F = 0$) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

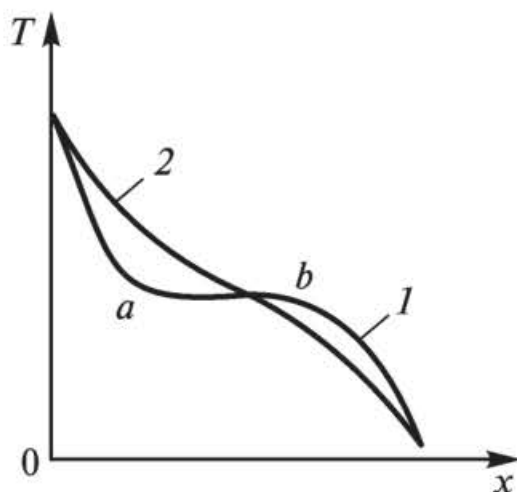
Если вместо $T(r, t)$ ввести новую функцию $U(r, t)$ с помощью подстановки $U(r, t) = rT(r, t)$, то вместо уравнения относительно $T(r, t)$ после несложных преобразований получим выражение

$$\partial U / \partial t = a(\partial^2 U / \partial r^2),$$

аналогичное уравнению теплопроводности для неограниченной пластины (или тонкого стержня с теплоизолированной боковой поверхностью). Применение указанной подстановки позволяет использовать найденные аналитические решения тепловых задач для бесконечной пластины при описании соответствующих температурных полей в сферических телах (сплошной или полый шар).

В отличие от λ , которая характеризует теплопроводящую способность тела, a характеризует его теплоинерционные свойства и является мерой скорости выравнивания температурного поля в рассматриваемой среде. Действительно, по определению, $a = \lambda / c\rho = \lambda / c'$, где c' — объемная изобарная теплоемкость. Отсюда температуропроводность a прямо пропорциональна теплопроводности λ и обратно пропорциональна аккумуляционной способности c' вещества. Особенно наглядным становится физический смысл a в уравнении теплопроводности, когда отсутствует внутреннее тепловыделение и $\partial T / \partial t = a \nabla^2 T(M, t)$. Зная вблизи точки $M(x, y, z)$ зависимость температуры от координат, можно предсказать, как быстро будет изменяться температура в этой точке при переходе к следующему моменту времени. При этом, чем больше a (т.е. чем меньше c'), тем пропорционально быстрее меняется во времени температура. Таким образом, a характеризует способность вещества изменять с большей или меньшей скоростью свою температуру во времени.

Оператор Лапласа в правой части (8.32) характеризует изменение



Р и с. 8.9. Схема к объяснению скорости изменения температуры

теплового потока в точке M и (в геометрическом смысле) является мерой кривизны изотермической поверхности в ней. Этим и обусловлено изменение температуры в данной точке, так как наибольшая скорость перестройки температурного поля отвечает участкам большей кривизны и наоборот. Для иллюстрации этих соображений рассмотрим две температурные кривые (рис. 8.9), соответствующие одномерному температурному полю $\partial T / \partial t = a \partial^2 T / \partial x^2$ (без источников теплоты $F = 0$), для моментов времени t_1 (кривая 1) и $t_2 = t_1 + dt$ (кри-

вая 2). Из рисунка видно, что за время dt температура наиболее изменилась на участках a и b , где температурная кривая обладает большей кривизной.

В то же время знак оператора Лапласа в данной точке показывает, в каких случаях ее температура при переходе от момента времени t_1 к $t_1 + dt$ возрастает (нагревание) и в каких убывает (охлаждение).

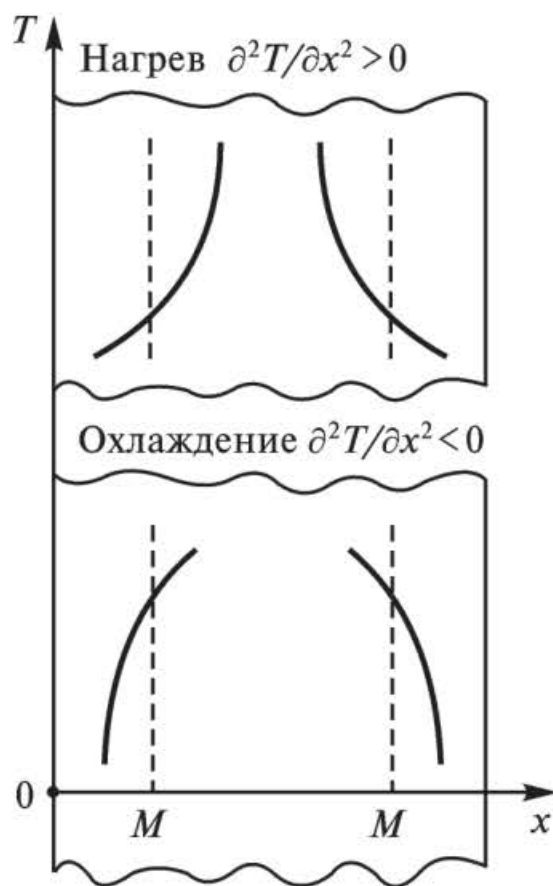
Возрастание температуры в точке обусловливается тем, что в слой материала, охватывающий ее, подводится теплоты больше, чем за тот же отрезок времени отводится (величина $\partial^2 T/\partial x^2$ положительна). При убывании температуры, наоборот, отводится теплоты больше, чем за время dt подводится (величина $\partial^2 T/\partial x^2$ отрицательна) (рис. 8.10).

Уравнение (8.32) выведено при условии некоторой идеализации процесса и в этом смысле является феноменологическим (описательным) уравнением аналитической теории теплопроводности. Вопрос о том, насколько точно оно описывает реальный физический процесс теплопроводности, может быть решен только сравнением результатов, полученных при решении, с экспериментальными данными.

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, в котором независимыми переменными являются время и три пространственные координаты, а зависимой переменной — функция T (температура). Это уравнение первой степени (линейное), поскольку зависимая переменная T входит в него в первой степени. Но вместе с тем оно является уравнением второго порядка, так как дифференциальный оператор ∇^2 содержит производные второго порядка от T по пространственным переменным. Функция F считается заданной, в общем случае функцией координат и времени.

Уравнение теплопроводности (8.32) в курсах математической физики относят к дифференциальным уравнениям параболического типа и согласно этому типу для него выбирают соответствующие аналитические методы решения.

В случае, когда температура рассматриваемого тела в любой его точке не изменяется во времени, т.е. является функцией только коор-



Р и с. 8.10. Схема к объяснению влияния оператора Лапласа на температурное состояние тела

динат (установившееся состояние), то $\partial T / \partial t = 0$ и уравнение (8.32) принимает вид

$$\nabla^2 T(M) + (1/\lambda)F(M) = 0, \quad (8.34)$$

где плотность тепловых источников $F(M)$ уже не зависит от времени.

Уравнение (8.34) называется *уравнением Пуассона*.

Если внутри тела отсутствуют тепловые источники и температурное поле стационарно, то имеем уравнение (в декартовых координатах)

$$\nabla^2 T(M) = \partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 + \partial^2 T / \partial z^2 = 0, \quad (8.35)$$

которое называется *уравнением Лапласа*.

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими. Уравнение Лапласа принадлежит к дифференциальным уравнениям эллиптического типа.

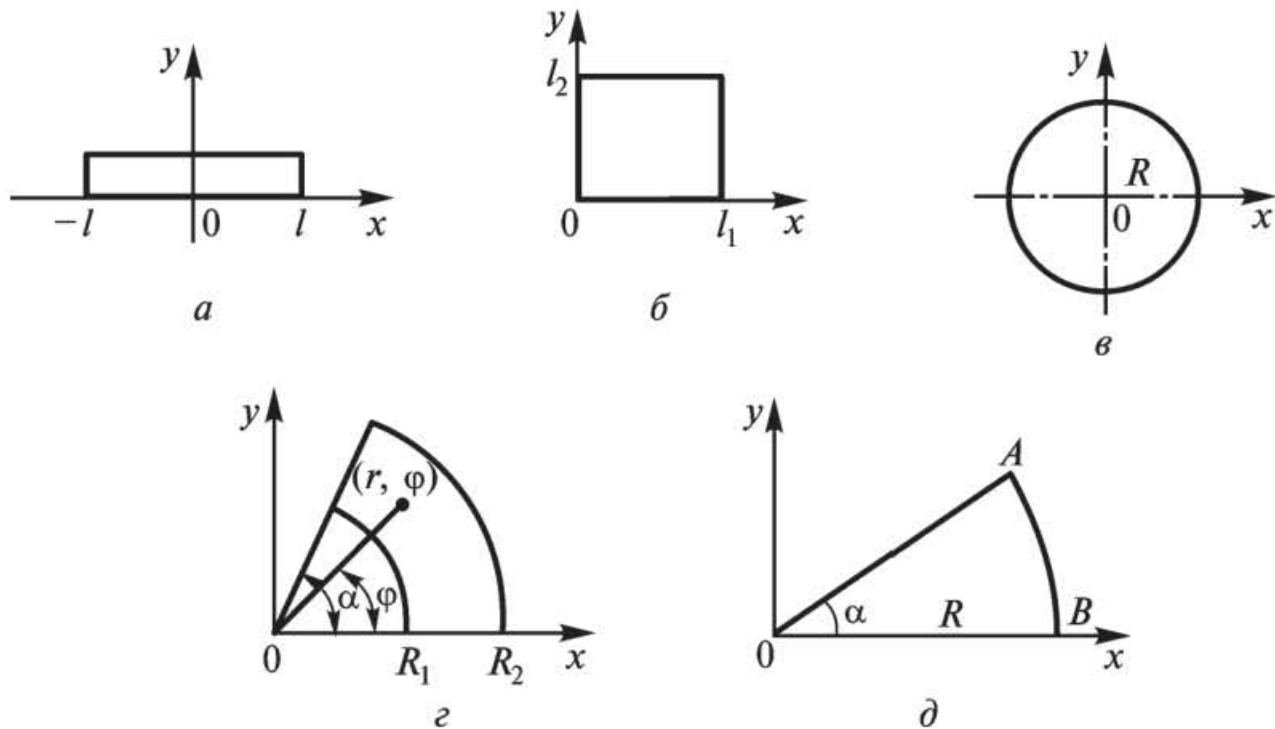
Г Л А В А 9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

§ 9.1. Условия однозначности

Дифференциальное уравнение (8.31) является математической моделью целого класса явлений теплопроводности, и при его интегрировании может быть получено бесчисленное множество различных решений. Чтобы найти одно частное решение, соответствующее определенной конкретной задаче, необходимо иметь дополнительные данные, не содержащиеся в исходном уравнении. Эти дополнительные условия, которые в совокупности с дифференциальным уравнением однозначно определяют конкретную задачу теплопроводности, называют **условиями однозначности**. В условия однозначности входят:

1. Геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела, в котором протекает процесс теплообмена. Например, если рассматривать стержень, то, поместив систему координат так, как это показано на рис. 9.1, *а*, можно математически описать его неравенством $-l \leq x \leq l$; форма и размеры тела (рис. 9.1, *б*) в виде прямоугольника опишутся неравенствами $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$; в случае круга радиусом R или его части (рис. 9.1, *в*, *г*), или кругового сектора (рис. 9.1, *д*)



Р и с. 9.1. Схемы к объяснению задания геометрических условий

соответственно запишем: $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$; $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$.

2. Физические условия, характеризующие физические свойства тела (тепло- и температуропроводность), а также закон распределения внутренних источников теплоты.

3. Граничные условия, определяющие особенности теплового взаимодействия граничной поверхности тела с окружающей средой.

4. Временные или начальные условия, характеризующие температурное состояние тела в исходный (начальный) момент времени.

Перечисленные условия в совокупности определяют одно (конкретное) явление теплопроводности, поэтому они и названы условиями однозначности, или единственности.

Для тела определенной геометрической формы с определенными (известными) физическими свойствами условия однозначности сводятся к заданию начального и граничного условий, которые в совокупности называются *краевыми условиями*: начальное является временным краевым условием, а граничное — пространственным краевым условием. Дифференциальное уравнение теплопроводности вместе с краевыми условиями составляет *краевую задачу теплопроводности*. Для установившегося (стационарного) процесса теплопроводности в задании начального условия нет необходимости, и в этом случае краевая задача будет состоять из уравнения теплопроводности и граничных условий.

§ 9.2. Краевые условия

Перейдем к формулировке начального и граничного условий, которым должна удовлетворять функция $T(x, y, z, t) = T(M, t)$, описывающая распределение температуры в некотором теле.

Начальное условие для уравнения теплопроводности состоит в задании температуры во всех точках области в момент $t = 0$, от которого ведется отсчет времени:

$$T(M, t) \Big|_{t=0} = \Phi_0(M), \quad (9.1)$$

где функция $\Phi_0(M)$ непрерывна во всех точках области. В случае равномерного распределения температуры в теле начальное условие упрощается

$$T(M, t) \Big|_{t=0} = T_0 = \text{const.} \quad (9.2)$$

Условие (9.1) означает, что следует найти такое решение $T(M, t)$ тепловой задачи, которое по мере приближения времени к начальному значению стремилось бы во всех точках области к заданной величине $\Phi_0(M)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(M, t) = \Phi_0(M). \quad (9.3)$$

Задание начального условия (9.1) в предельном смысле (9.3) объясняется исключительно теми классами конкретных функций, которыми описываются решения краевых задач уравнения теплопроводности. Эти функции во многих случаях не имеют смысла при $t = 0$, однако допускают предельный переход при $t \rightarrow 0$. Например, функция

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^{\infty} \Phi_0(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right) d\xi \quad (9.4)$$

является решением уравнения теплопроводности $\partial T/\partial t = a\partial^2 T/\partial x^2$ с начальным условием $T(x, 0) = \Phi_0(x)$, $x > 0$. Соотношение (9.4) не определено при $t = 0$, однако, если $\Phi_0(x)$ — непрерывная функция, то можно показать, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^{\infty} \Phi_0(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right) d\xi = \Phi_0(x).$$

Граничные условия — условия теплового взаимодействия тела с окружающей средой — могут быть заданы в различной форме в зависимости от характера процесса. В тех случаях, когда на границе тела

не происходит никакого поглощения или выделения теплоты и отсутствует теплообмен излучением, задание граничного условия на поверхности соприкосновения двух сред в самом общем виде заключаются в выполнении равенства температур и тепловых потоков

$$T_T = T_c; \lambda_T [\partial T_T (M, t) / \partial n] = \lambda_c [\partial T_c (M, t) / \partial n],$$

где T_T, T_c — температуры тела и среды; λ_T, λ_c — теплопроводности тела и среды; \mathbf{n} — нормаль к граничной поверхности.

Однако в практических задачах такая форма граничных условий неудобна, так как для расчета температуры твердого тела необходимо решать сопряженную задачу, т.е. отыскивать температурное поле и в окружающей среде. Поэтому в ряде практически важных задач желательно перейти к более простым граничным условиям. В математической теории теплопроводности в большинстве случаев используют четыре основных граничных условия, представляющих собой идеализацию действительных физических процессов.

Граничное условие первого рода состоит в задании поверхностного распределения температуры для любого момента времени

$$T(M, t) = \Phi(M, t), \quad (9.5)$$

где M — точка, находящаяся на поверхности тела; $\Phi(M, t)$ — заданная непрерывная функция (по пространственным переменным и времени t) во всех точках поверхности тела.

В частном случае может оказаться, что температура на поверхности одинакова на протяжении всего процесса теплообмена и с течением времени не меняется, т.е. $T(M, t) = T_{ст} = \text{const}$. В общем случае граничное условие первого рода является идеализацией, и на практике к его выполнению можно приблизиться лишь при особых условиях теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой, например в таких интенсивных процессах, как кипение, конденсация, вынужденное движение жидких металлов и др., когда температура поверхности тела близка к температуре окружающей среды.

Граничное условие второго рода состоит в задании плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела как функции координат и времени

$$-\lambda \partial T_{ст} (M, t) / \partial n = \Phi(M, t), \quad (9.6)$$

где $T_{ст}$ — температура стенки; $\Phi(M, t)$ — непрерывная функция точки M и времени t , заданная на поверхности тела; \mathbf{n} — нормаль к поверхности тела в точке M .

Следует различать процессы охлаждения и нагревания. Для первого ($\partial T / \partial n < 0$) тепловой поток считается положительным, для вто-

рого ($\partial T/\partial n > 0$) — отрицательным и соотношение (9.6) принимает вид

$$\lambda \partial T(M, t) / \partial n = \Phi(M, t). \quad (9.7)$$

В простейшем случае плотность теплового потока через поверхность может быть постоянной по поверхности и во времени

$$\lambda \partial T(M, t) / \partial n = q_n = \text{const.}$$

Выражение (9.6), когда $\Phi(M, t) = 0$, представляет условие тепловой изоляции граничной поверхности тела. *Теплоизолированной* называется такая поверхность, через которую не проходит поток теплоты. В этом случае (9.6) имеет вид

$$\partial T(M, t) / \partial n = 0. \quad (9.8)$$

В случае *граничных условий третьего рода* задают температуру окружающей среды T_c и закон конвективного теплообмена между ней и поверхностью тела. Для описания процесса теплообмена используют закон Ньютона—Рихмана.

Количество теплоты, отдаваемой единицей площади поверхности тела с температурой T_{ct} в единицу времени в окружающую среду с температурой T_c в процессе охлаждения ($T_{ct} > T_c$), пропорционально разности температур поверхности тела T_{ct} и окружающей среды

$$q = \alpha(T_{ct} - T_c) = \alpha[T(M, t) - T_c], \quad (9.9)$$

где α — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплоотдачи.

Для процесса нагрева тела можно написать аналогичное соотношение, поменяв в (9.9) местами T_{ct} и T_c . Коэффициент теплоотдачи α характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен количеству теплоты, отдаваемой (или воспринимаемой) единицей площади поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой в один градус. В отличие от теплопроводности не является физической константой, характерной для того или иного вещества. В общем случае он отражает совместное действие конвекции и излучения и поэтому зависит от многих факторов: геометрической формы и размеров тела, физических свойств среды, теплоемкости, плотности, вязкости среды, температуры поверхности нагрева T_{ct} и др. В общем случае α может изменяться заданным образом по координатам и времени. Для упрощения задачи в расчетных схемах в качестве первого приближения принимают α постоянным.

Согласно закону сохранения энергии теплота, которая отводится с единицы площади поверхности тела в единицу времени вследствие теплоотдачи (см. уравнение (9.9)), равна теплоте, подводимой к единице площади поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, и равна согласно закону Фурье $q = \lambda(\partial T/\partial n)$. Приравнивая эти выражения, получим граничное условие третьего рода при охлаждении тела:

$$-\lambda \partial T(M, t) / \partial n = \alpha [T(M, t) - \Phi(M, t)]. \quad (9.10)$$

В конкретных задачах при записи граничных условий третьего (или второго) рода приходится вычислять производную по нормали $\partial T/\partial n$, что в некоторых случаях вызывает определенные трудности (особенно в цилиндрической и сферической системах координат). Поясним эти вычисления на примерах. Рассмотрим охлаждение стержня (рис. 9.2) и вычислим производную по направлению нормали к его торцам в граничном условии (9.10).

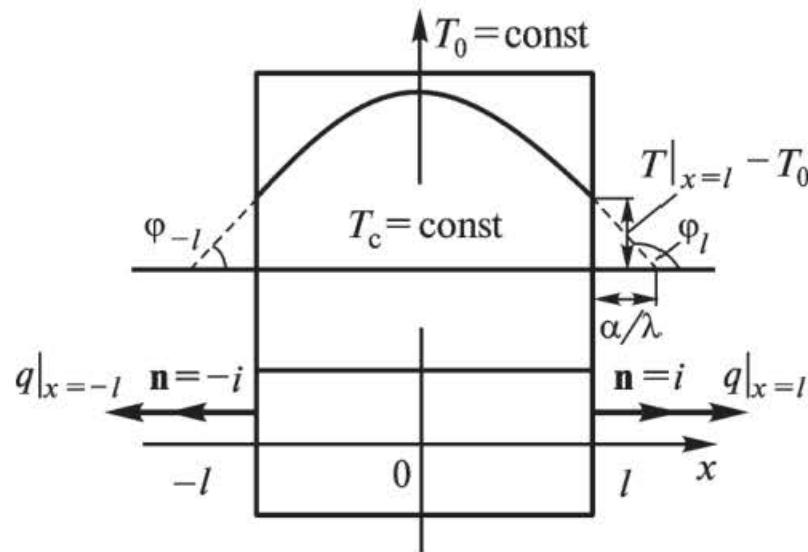
Так как температура T стержня зависит только от одной пространственной переменной x (температурное поле одномерное), то формула производной функции по нормали в данном случае имеет вид $\partial T/\partial n = (\partial T/\partial x) \cos \alpha$, где α — угол, образуемый нормалью \mathbf{n} с положительным направлением оси x . На левом конце стержня направление вектора нормали \mathbf{n} противоположно положительному направлению оси x и

$$\partial T / \partial n |_{x=-l} = \partial T / \partial x |_{x=-l} \cos \pi = -\partial T / \partial x |_{x=-l}.$$

На правом конце стержня эти направления совпадают и

$$\partial T / \partial n |_{x=l} = \partial T / \partial x |_{x=l} \cos 0 = \partial T / \partial x |_{x=l}.$$

Таким образом, граничные условия третьего рода для стержня при его охлаждении и нагревании соответственно имеют вид



Р и с. 9.2. Схема к определению производной по нормали

$$\left. \begin{aligned} \lambda(\partial T / \partial x)|_{x=-l} &= \alpha(T|_{x=-l} - T_c); \\ (\partial T / \partial x)|_{x=-l} &> 0; \\ -\lambda(\partial T / \partial x)|_{x=l} &= \alpha(T|_{x=l} - T_c); \\ (\partial T / \partial x)|_{x=l} &< 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Уравнение (9.10), выражающее в аналитической форме граничное условие третьего рода, называется дифференциальным уравнением теплообмена и по существу является частным выражением закона сохранения энергии для поверхности тела. Оно справедливо в условиях стационарного и нестационарного режимов, так как вытекает из соображений, что тонкий поверхностный слой, для которого составляется баланс подвода и отвода теплоты, не может аккумулировать или выделять теплоту.

Из граничного условия третьего рода как частный случай можно получить граничное условие первого рода. Запишем это условие в виде

$$-(\lambda / \alpha)[\partial T(M, t) / \partial n] = T(M, t) - T_c.$$

Если коэффициент теплообмена имеет очень большое значение ($\alpha \rightarrow \infty$) или теплопроводность λ мала ($\lambda \rightarrow 0$), то

$$T(M, t) - T_c = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [-(\lambda / \alpha) \partial T(M, t) / \partial n] = 0.$$

Отсюда $T(M, t) = T_c$, т.е. температура поверхности тела равна температуре окружающей среды. Если коэффициент теплообмена α очень мал ($\alpha \rightarrow 0$), то из (9.10) получим условие тепловой изоляции граничной поверхности — равенство нулю потока теплоты через поверхность тела $\partial T(M, t) / \partial n = 0$.

Граничные условия четвертого рода (условия сопряжения) применяются в случае контакта двух твердых тел. Если между их граничными поверхностями имеется идеальный тепловой контакт, то температуры на поверхности контакта должны быть одинаковыми. Кроме того, тепловой поток, выходящий из одного тела через контактную поверхность, должен быть равен тепловому потоку, входящему в другое тело. Таким образом, если T_1 и T_2 — температуры тел, находящихся в условиях идеального теплового контакта, то для точки M контактной поверхности граничные условия четвертого рода имеют вид

$$T_1(M, t) = T_2(M, t);$$

$$\lambda_1 \partial T_1(M, t) / \partial n = \lambda_2 \partial T_2(M, t) / \partial n,$$

где \mathbf{n} — общая нормаль к контактной поверхности в точке M .

МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 10.1. Основные положения и обоснование метода

Настоящая глава посвящена спектральным задачам, лежащим в основе всей аналитической теории краевых задач переноса. При использовании для их решения метода разделения переменных (метода Фурье) возникает необходимость нахождения функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям краевой задачи, полученным после разделения переменных в исходном уравнении. Такие функции известны лишь для классических дифференциальных уравнений (Штурма—Лиувилля, Бесселя, Лежандра и др.). Собственные числа находят из граничных условий краевой задачи путем решения трансцендентных уравнений. При сложных дифференциальных уравнениях, когда неизвестны удовлетворяющие им функции, трудности применения метода Фурье настолько возрастают, что во многих случаях он оказывается практически неприменим.

В настоящей работе для решения спектральных задач совместно с методом Фурье использован метод взвешенных невязок (ортогональный метод Бубнова—Галеркина). Важной особенностью является введение дополнительных граничных условий, необходимость которых объясняется появлением дополнительного неизвестного параметра μ после разделения переменных в исходном дифференциальном уравнении. Они выводятся из основного дифференциального уравнения путем его дифференцирования в граничных точках. Метод Бубнова—Галеркина позволяет находить приближенные аналитические решения высокой точности для всех краевых задач, уравнения (в частных производных) которых допускают разделение переменных. Такой подход значительно расширяет круг задач, решаемых с помощью метода Фурье, что связано с универсальностью метода Бубнова—Галеркина, при использовании которого на вид дифференциальных операторов не накладывается практически никаких условий. Это могут быть задачи с несимметричными и неоднородными граничными условиями первого, второго и третьего рода, с переменным начальным условием и физическими свойствами среды, задачи теплопроводности для многослойных конструкций и др.

Для многих приведенных далее аналитических решений выполняются сравнения с классическими точными аналитическими решениями, полученными А.В. Лыковым, Б.С. Петуховым, Н.М. Беляевым, А.А. Рядно, Л.Я. Григорьевым, О.Н. Маньковским, Л.В. Канторовичем, Г. Шлихтингом, П.В. Цоем.

§ 10.2. Неограниченная пластина (алгебраические координатные функции)

Рассмотрим методику определения собственных чисел, основанную на совместном использовании методов Фурье и взвешенных невязок. При таком подходе на первоначально принимаемое решение в виде простого алгебраического или тригонометрического полинома не накладывают никаких предварительных условий. Неизвестные коэффициенты решения определяют из выполнения основных и дополнительных граничных условий. Собственные числа находят интегрированием невязки дифференциального уравнения Штурма—Лиувилля либо из условия ортогональности невязки к собственной функции.

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу теплопроводности для бесконечно протяженной пластины при граничных условиях первого рода:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho < 1); \quad (10.1)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 1; \quad (10.2)$$

$$\partial \Theta(0, Fo) / \partial \rho = 0; \quad (10.3)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0, \quad (10.4)$$

где $\Theta(\rho, Fo)$ — относительная избыточная температура, $\Theta(\rho, Fo) = (T - T_{ст}) / (T_0 - T_{ст})$, $T_{ст}$ — температура пластины при $\rho = 1$; ρ — безразмерная координата, $\rho = x/\delta$, δ — половина толщины пластины; T_0 — начальная температура; Fo — число Фурье, $Fo = a\tau/\delta^2$, a — коэффициент температуропроводности; τ — время.

Следуя методу Фурье, решение задачи (10.1) — (10.4) принимают в виде

$$\Theta(\rho, Fo) = \varphi(Fo)\Psi(\rho). \quad (10.5)$$

Подставляя (10.5) в (10.1), находим

$$\frac{\varphi'(Fo)}{\varphi(Fo)} = \frac{\Psi''(\rho)}{\Psi(\rho)} = -\lambda^2,$$

где римская цифра в верхнем индексе означает производную от этой функции.

Отсюда получаем следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$d\varphi(Fo) / dFo + \lambda^2 \varphi(Fo) = 0; \quad (10.6)$$

$$d^2 \Psi(\rho) / d\rho^2 + \lambda^2 \Psi(\rho) = 0, \quad (10.7)$$

где λ^2 — некоторая постоянная.

Решение уравнения (10.6), как известно, имеет вид

$$\varphi(Fo) = A \exp(-\lambda^2 Fo), \quad (10.8)$$

где A — неизвестный коэффициент.

Уравнение Штурма—Лиувилля (10.7) представим следующим образом:

$$\Psi''(\rho) + \mu \Psi(\rho) = 0, \quad (10.9)$$

где $\mu = \lambda^2$.

Граничные условия для уравнения (10.9) согласно (10.3), (10.4) будут

$$\Psi'(0) = 0; \quad (10.10)$$

$$\Psi(1) = 0. \quad (10.11)$$

Решение задачи (10.9) — (10.11) разыскивают в виде следующего ряда:

$$\Psi(\mu, \rho) = \sum_{i=0}^n C_i N_i(\rho), \quad (10.12)$$

где $C_i (i = \overline{0, n})$ — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий задачи; $N_i(\rho) = \rho^i$ — координатные функции (алгебраический или тригонометрический полином).

Если ограничиться, например, пятью членами ряда (10.12) ($n = 4$), то будем иметь пять неизвестных коэффициентов $C_i (i = \overline{0, 4})$, а граничных условий только два (10.10), (10.11). В связи с чем необходимо добавить еще три дополнительных граничных условия, которые находятся из (10.10) и (10.9), а также соотношений, полученных после взятия производных от (10.9) различного порядка в граничных точках

$\rho = 0$ и $\rho = 1$. Такие дополнительные граничные условия будут иметь вид

$$\Psi(0) = \text{const} = 1; \quad (10.13)$$

$$\Psi''(1) = 0; \quad (10.14)$$

$$\Psi'''(0) = 0. \quad (10.15)$$

Необходимость введения дополнительных граничных условий объясняется тем, что в уравнениях (10.6), (10.7) появляется новый неизвестный параметр μ , который находят из характеристического уравнения, получаемого в результате подстановки (10.12) в дифференциальное уравнение (10.9). В зависимости от числа членов ряда (10.12) вводят соответствующее число дополнительных граничных условий и в итоге получают соответствующее количество собственных чисел.

Подставляя (10.12) в (10.10), (10.11), (10.13)—(10.15), получим пять алгебраических линейных уравнений относительно пяти неизвестных C_i . При этом каждое из неизвестных C_0, C_1, C_2 входит лишь в одно уравнение, из которого их легко определить. Все эти уравнения получают из граничных условий при $\rho = 0$ (условия (10.10), (10.13), (10.15)). Относительно неизвестных C_3, C_4 необходимо решить два взаимосвязанных алгебраических линейных уравнения. В итоге для всех искомым неизвестных постоянных будем иметь следующие значения:

$$C_0 = 1; C_1 = 0; C_2 = -1,2; C_3 = 0; C_4 = 0,2.$$

Подставляя найденные значения C_i в (10.12), получаем

$$\Psi(\rho) = 1 - 1,2\rho^2 + 0,2\rho^4. \quad (10.16)$$

Для определения первого собственного числа найдем интеграл взвешенной невязки уравнения (10.9), т.е.

$$\int_0^1 [\Psi''(\rho) + \mu \Psi(\rho)] d\rho = 0. \quad (10.17)$$

Подставляя (10.16) в (10.17), относительно μ получаем характеристическое уравнение, из которого находим $\mu_1 = 2,5$. Точное значение первого собственного числа $\mu_1 = 2,46740110027$.

Для уточнения первого собственного числа составим невязку уравнения (10.9) и потребуем ортогональность невязки к собственной функции (10.16), т.е.

$$\int_0^1 [\Psi''(\rho) + \mu \Psi(\rho)] \Psi(\rho) d\rho = 0. \quad (10.18)$$

Подставляя (10.16) в (10.18), относительно μ получаем характеристическое уравнение

$$0,5038730158730159 \mu - 1,243428571429 = 0.$$

Его решение $\mu_1 = 2,46774193$.

Следовательно, выполнение требования ортогональности невязки уравнения (10.9) к собственной функции (10.16) приводит к существенному уточнению первого собственного числа.

Для получения первых двух собственных значений вводят следующие дополнительные граничные условия, получаемые из уравнения (10.9),

$$\Psi''(0) = -\mu; \quad (10.19)$$

$$\Psi^{IV}(0) = \mu^2. \quad (10.20)$$

В итоге всего имеем семь граничных условий — два основных (10.10), (10.11) и пять дополнительных (10.13)—(10.15), (10.19), (10.20). Следовательно, для определения коэффициентов C_i ($i = 0, 6$) следует использовать семь членов ряда (10.12).

Подставляя (10.12) при $n = 6$ во все граничные условия задачи, относительно C_i получим семь алгебраических уравнений. Пять из них разделяются, т.е. в одно уравнение входит лишь одно неизвестное. Следовательно, находим неизвестные

$$C_0 = 1; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = -0,5\mu; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = \mu^2/24.$$

Неизвестные C_5, C_6 находим из системы двух алгебраических уравнений, составленных из граничных условий при $\rho = 1$, т.е. из граничных условий (10.11), (10.14). Из решения этой системы находим

$$C_5 = 39\mu^2 / 8 + 1,4\mu - 3; \quad C_6 = 2 - 0,9\mu - 59\mu^2 / 12.$$

После подстановки коэффициентов C_i в (10.12) составляем интеграл взвешенной невязки уравнения (10.9). Отсюда для определения собственных чисел получаем следующее характеристическое уравнение:

$$1,3857142857\mu - 7,02380952 \cdot 10^{-2} \mu^2 + 5,952381 \cdot 10^{-4} \mu^3 - 3 = 0.$$

Его решение $\mu_1 = 2,4669819$; $\mu_2 = 21,794472203$.

Для уточнения первых двух собственных чисел требуется ортогональность невязки уравнения (10.9) к собственной функции (10.12)

при $n = 6$. Для определения собственных чисел получаем характеристическое уравнение вида

$$1,241025641\mu - 0,1789433\mu^2 + 8,17016317 \cdot 10^{-3} \mu^3 - 1,2314074814 \cdot 10^{-4} \mu^4 + \\ + 5,9354226021 \cdot 10^{-7} \mu^5 - 2,0909 = 0.$$

Его решение $\mu_1 = 2,46740110$; $\mu_2 = 22,26983$.

Ввиду того, что уравнение Штурма—Лиувилля (10.9) удовлетворяется лишь при некоторых дискретных значениях μ (собственных значениях, образующих спектр), остальные корни уравнения (три корня) следует отбросить, как не удовлетворяющие ему (в чем можно убедиться непосредственной подстановкой).

Как видно, первое собственное число до девятого знака совпадает с точным его значением. Точное значение второго собственного числа

$$\mu_2 = 22,206609902.$$

Собственные функции находим из (10.12).

Для получения трех собственных чисел ко всем имеющимся граничным условиям добавляют дополнительные граничные условия вида

$$\Psi^V(0) = 0; \Psi^{VI}(0) = -\mu^3; \Psi^{VII}(0) = 0; \Psi^{VIII}(0) = \mu^4; \Psi^{IX}(0) = 0; \\ \Psi^X(0) = -\mu^5.$$

В данном случае для первых трех собственных чисел получают следующие значения (найжены с учетом ортогональности невязки уравнения (10.9) к функции (10.12)): $\mu_1 = 2,4674011001$; $\mu_2 = 22,2066135$; $\mu_3 = 62,055342$. Отметим, что точное значение третьего собственного числа составляет $\mu_3 = 61,68502750$.

Для получения пяти собственных чисел используют следующие дополнительные граничные условия

$$\Psi^{XI}(0) = 0; \Psi^{XII}(0) = \mu^6; \Psi^{XIII}(0) = 0; \Psi^{XIV}(0) = -\mu^7; \\ \Psi^{XV}(0) = 0; \Psi^{XVI}(0) = \mu^8; \Psi^{XVII}(0) = 0; \Psi^{XVIII}(0) = -\mu^9; \quad (10.21) \\ \Psi^{XIX}(0) = 0; \Psi^{XX}(0) = \mu^{10}.$$

В этом случае имеем $\mu_1 = 2,4674011002$; $\mu_2 = 22,206610$; $\mu_3 = 61,6850235$; $\mu_4 = 120,90249$; $\mu_5 = 201,0584$. Точные значения четвертого и пятого собственных чисел $\mu_4 = 120,90265$; $\mu_5 = 199,8595$.

Подставляя (10.8), (10.12) в (10.5), для каждого собственного числа будем иметь частные решения вида

$$\Theta_i(\rho, Fo) = A_i \Psi_i(\mu_i, \rho) \exp(-\mu_i Fo) \quad (i = \overline{1, 5}).$$

Каждое частное решение точно удовлетворяет граничным условиям (10.3), (10.4) и приближенно (в пятом приближении) уравнению (10.1) на отрезке $0 \leq \rho < 1$. Однако ни одно из этих частных решений, в том числе и их сумма

$$\Theta(\rho, Fo) = \sum_{i=1}^5 A_i \Psi_i(\mu_i, \rho) \exp(-\mu_i Fo), \quad (10.22)$$

не удовлетворяют начальному условию (10.2).

Для выполнения начального условия составляют его невязку и требуют ортогональности невязки к каждой собственной функции, т.е.

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^5 A_i \Psi_i(\mu_i, \rho) - 1 \right] \Psi_j(\mu_j, \rho) d\rho = 0 \quad (j = \overline{1, 5}). \quad (10.23)$$

Определяя интегралы в (10.23), для нахождения коэффициентов A_i ($i = \overline{1, 5}$) получаем систему пяти алгебраических линейных уравнений. Ее решение

$$A_1 = 1,274366; \quad A_2 = -0,427128; \quad A_3 = 0,257304; \quad A_4 = -0,182685; \\ A_5 = 0,150535.$$

Приведенные здесь коэффициенты найдены из уточненных значений собственных чисел (путем требования ортогональности невязки уравнения (10.9) к функции (10.12)).

Собственные числа для различных приближений в сравнении с точными их значениями приведены в табл. 10.1 (для каждого приближения верхняя строка — без ортогональности, нижняя — с ортогональностью невязки уравнения (10.9) к функции (10.12)).

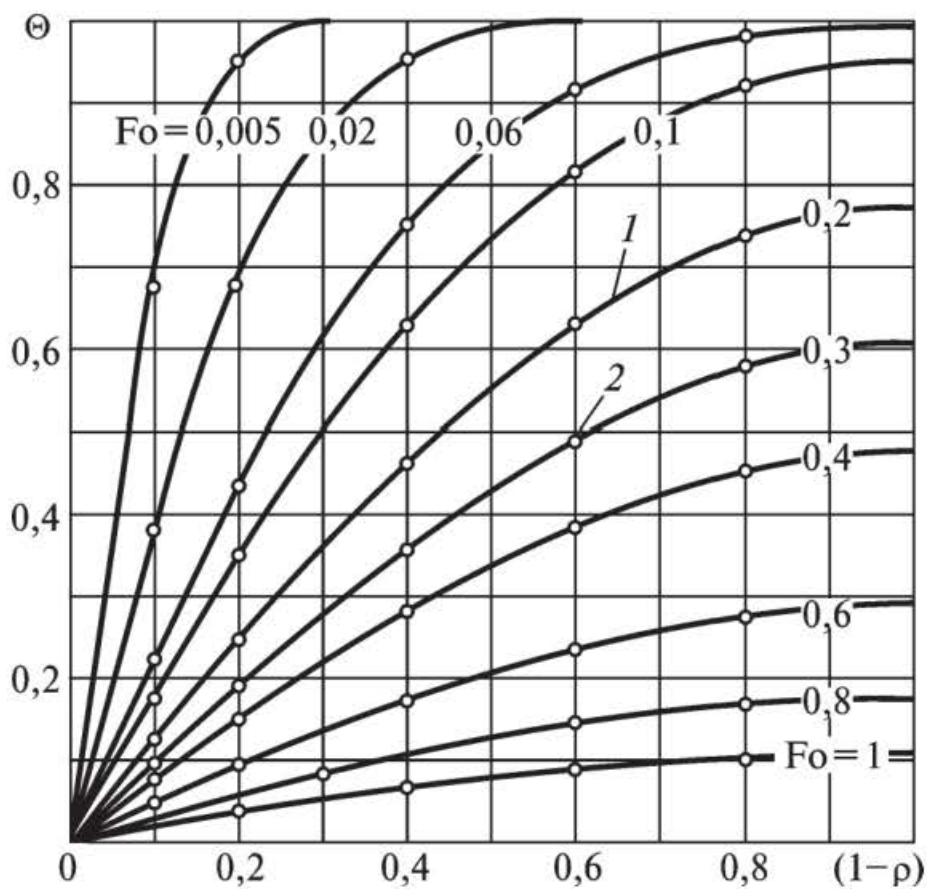
Результаты расчетов безразмерных температур по формуле (10.22) в сравнении с точными их значениями представлены на рис. 10.1, 10.2.

Анализ результатов расчетов позволяет заключить, что в пятом приближении температуры, полученные по формуле (10.22), в диапазоне чисел Фурье $0,008 \leq Fo \leq \infty$ практически совпадают с точными их значениями.

Таким образом, в методе Бубнова—Галеркина требуется удовлетворить условиям ортогональности невязки первым n функциям некоторой полной в данной области системы линейно-независимых функций. Из теории рядов Фурье следует, что равенство невязки нулю (а это имеет место при точном решении уравнения (10.9)) рав-

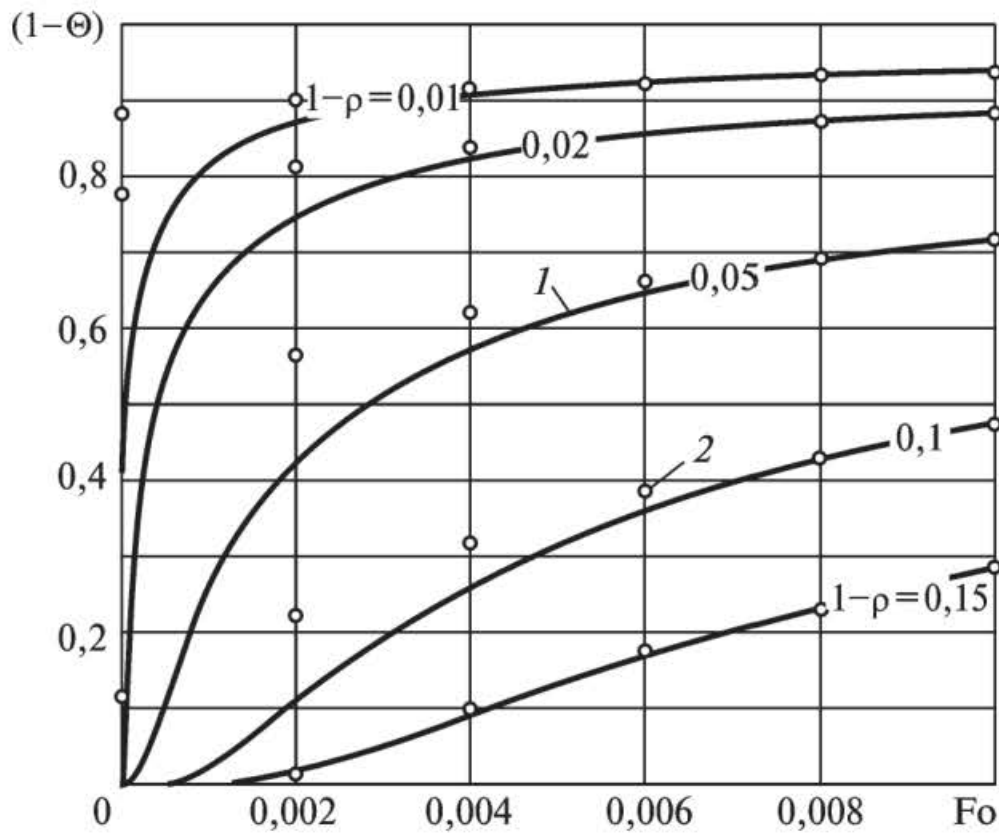
Число приближений	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1	2,5 2,4677419355	—	—	—	—
2	2,46698193 2,46740110	21,79447220 22,26983	—	—	—
3	2,4674011011 2,4674011001	22,2018150 22,2066100	61,465669 62,055342	—	—
4	2,4674011003 2,4674011002	22,2066102 22,2066098	61,680400 61,685017	120,5326 120,9039	—
5	2,4674011 2,4674011002	22,2066099 22,206610	61,684934 61,685023	120,9750 120,9024	238,095 201,058
Точные значения	2,4674011003	22,2066099	61,685026	120,9026	199,859

носильно требованию ортогональности ее ко всем функциям Ψ_i системы. Имея, однако, в своем распоряжении лишь n членов полинома (10.12) (или n постоянных C_i), можно удовлетворить только n условиям ортогональности, что и приводит лишь к приближенному решению.



Р и с. 10.1. Изменение относительной избыточной температуры в пластине:

1 — точное решение; 2 — по формуле (10.22)



Р и с. 10.2. Изменение температуры в пластине:

1 — точное решение; 2 — по формуле (10.22)

Следует отметить высокую точность определения собственных чисел по сравнению с другими методами совместного использования точных и приближенных методов. К их числу относятся: совместное использование интегральных преобразований Лапласа и метода Бубнова—Галеркина, методов Фурье и Л.В. Канторовича, Фурье и Бубнова—Галеркина (без использования дополнительных граничных условий). Все они для одних и тех же задач приводят к мало отличающимся результатам. В качестве конкретного примера в табл. 10.2 приведены собственные числа для четвертого и пятого приближений, полученные при решении задачи (10.1)—(10.4) путем совместного использования интегральных преобразований Лапласа и метода Бубнова—Галеркина.

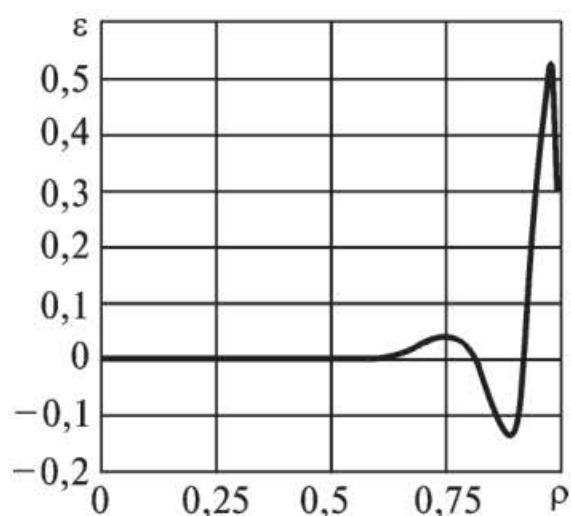
Т а б л и ц а 10.2

Число приближений	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
4	2,4674	22,217	65,459	222,51	—
5	2,4674	22,207	61,696	139,45	409,02
Точные значения	2,4674	22,207	61,685	120,90	199,86

Отметим, что последние собственные числа как в четвертом, так и пятом приближениях почти в два раза отличаются от точных их значе-

ний. При использовании дополнительных граничных условий, даже если не требовать ортогональности невязки к собственной функции, получаются значительно более точные значения собственных чисел, а при выполнении ортогональности невязки они практически совпадают с точными, причем первое и второе собственные числа — с точностью соответственно до десятого и шестого знака после запятой. Этот факт можно объяснить тем, что при совместном использовании точных и приближенных аналитических методов без применения дополнительных граничных условий собственные числа определяются из системы алгебраических линейных уравнений, матрицы которых, являясь заполненными квадратными матрицами с большим разбросом коэффициентов по абсолютной величине, при большом числе приближений, как правило, оказываются плохо обусловленными. В связи с чем получаемые решения могут существенно отличаться от точных и особенно при малых значениях числа Фурье.

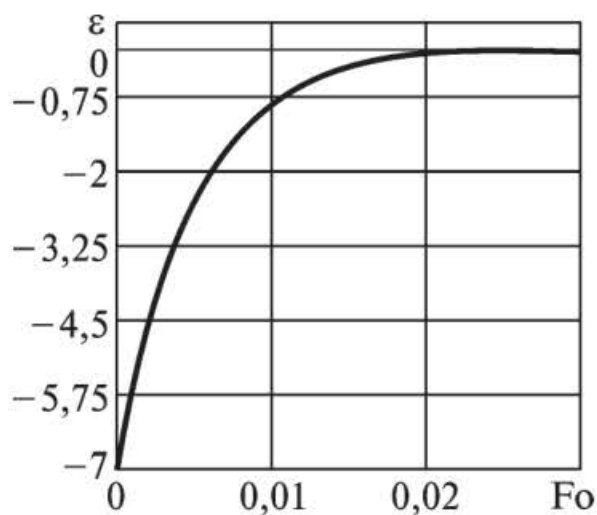
Главное отличие изложенного метода с использованием дополнительных граничных условий состоит в том, что в системе алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_i ($i = 0, n$) большая часть уравнений разделяется (в одно уравнение входит лишь один неизвестный коэффициент) и таким образом легко может быть найдено большинство неизвестных коэффициентов. Относительно оставшихся коэффициентов в общем виде приходится решать лишь два-три алгебраических линейных уравнения независимо от числа приближений. В результате система алгебраических уравнений при любом числе приближений решается на точном аналитическом уровне. Основную трудность здесь представляет нахождение решения характеристического уравнения относительно собственных чисел краевой задачи, степень которого с увеличением числа приближений возрастает. Математические методы решения та-



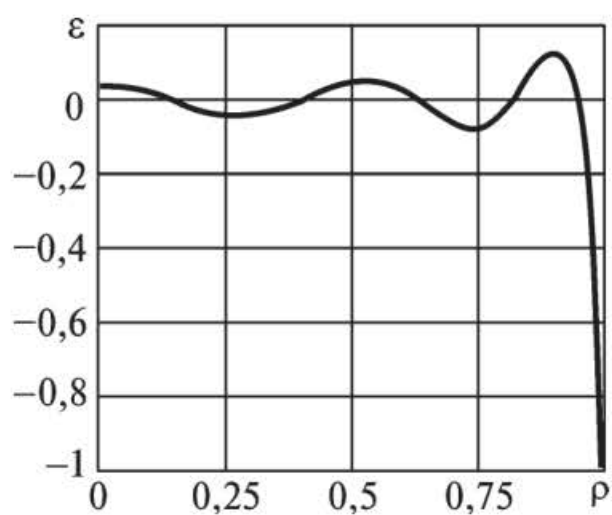
Р и с. 10.3. Изменение невязки уравнения (10.1) для $Fo = 0,02$

ких уравнений разработаны. Далее (см. § 10.3) будет показано, что решениями этих уравнений являются собственные числа краевых задач Штурма—Лиувилля.

На рис. 10.3, 10.4 дано изменение невязки ϵ уравнения (10.1) для пяти членов ряда (10.22). Из анализа графиков следует, что при $Fo = 0,02$ в диапазоне $0 \leq \rho \leq 0,6$ уравнение (10.1) удовлетворяется точно. Максимальная невязка имеет место вблизи точки $\rho = 1$. Невязка урав-



Р и с. 10.4. Изменение невязки уравнения (10.1) для $\rho = 0,9$



Р и с. 10.5. Изменение невязки начального условия

нения (10.1) в точке $\rho = 0,9$ для $Fo \geq 0,02$ становится практически равной нулю (рис. 10.4).

Максимальная невязка начального условия $\varepsilon = -1$ (рис. 10.5) при $n = 5$ наблюдается в точке $\rho = 1$. Это объясняется тем, что при $\rho = 1$ в любой момент времени выполняется граничное условие первого рода. С увеличением числа приближений невязка начального условия уменьшается за исключением точки $\rho = 1$, где она всегда равна $\varepsilon = -1$.

§ 10.3. Тригонометрические координатные функции

Найдем решение задачи (10.1)—(10.4) с использованием тригонометрических координатных функций. В данном случае, как и ранее, выполняем разделение переменных в уравнении (10.1) с получением уравнений (10.6), (10.9). Основные граничные условия для уравнения (10.9) имеют вид (10.10), (10.11).

Решение задачи (10.9)—(10.11) находим в виде

$$\Psi_n(\rho) = \sum_{i=1}^n C_i N_i(\rho), \quad (10.24)$$

где $C_i (i = \overline{1, n})$ — неизвестные коэффициенты; $N_i(\rho)$ — координатные функции, $N_i(\rho) = \cos(r\pi\rho/2)$, $r = 2i - 1$.

Для получения решения в первом приближении, исходя из (10.10), введем следующее дополнительное граничное условие

$$\Psi(0) = \text{const} = 1. \quad (10.25)$$

Соотношение (10.24) благодаря принятым координатным функциям точно удовлетворяет основным граничным условиям (10.10), (10.11) при любом числе приближений.

Ограничиваясь одним членом ряда в соотношении (10.24), для нахождения коэффициента C_1 подставим (10.24) в (10.25):

$$C_1 \cos(\pi\rho/2) = 1.$$

Отсюда при $\rho = 0$ $C_1 = 1$.

Соотношение (10.24) в первом приближении примет вид

$$\Psi(\rho) = \cos(\pi\rho/2). \quad (10.26)$$

Составляя невязку уравнения (10.9) и интегрируя ее в пределах от $\rho = 0$ до $\rho = 1$, получаем

$$\int_0^1 \left[-\frac{1}{4} \pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\rho\right) + \mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\rho\right) \right] d\rho = 0. \quad (10.27)$$

Вычисляя интегралы, находим $\mu_1 = \pi^2/4 = 2,4674011$.

В данном случае первое собственное число полностью совпадает с первым собственным числом краевой задачи Штурма—Лиувилля. Собственную функцию находим из (10.24).

Для получения решения во втором приближении введем еще одно дополнительное граничное условие, получаемое из уравнения (10.9) при $\rho = 0$,

$$\Psi''(0) = -\mu. \quad (10.28)$$

Для коэффициентов C_i , определяемых из граничных условий (10.25), (10.28), ограничиваясь двумя членами ряда (10.24), получаем следующие формулы:

$$C_1 = 9/8 - \mu/2\pi^2; \quad C_2 = \mu/2\pi^2 - 1/8.$$

Составляя интеграл взвешенной невязки уравнения (10.9), будем иметь

$$\int_0^1 \left[-\frac{\pi^2}{4} C_1 \cos\frac{\pi}{2}\rho - \frac{9}{4} \pi^2 C_2 \cos\frac{3}{2}\pi\rho + \mu \left(C_1 \cos\frac{\pi}{2}\rho + C_2 \cos\frac{3}{2}\pi\rho \right) \right] d\rho = 0.$$

Определяя интегралы, для нахождения собственных чисел μ получаем характеристическое уравнение вида

$$9\pi^4 - 40\pi^2 \mu + 16\mu^2 = 0. \quad (10.29)$$

Его корни: $\mu_1 = 2,4674011003$; $\mu_2 = 22,206609902$. Полученные собственные числа с точностью до седьмого знака совпадают с точными их значениями.

Характеристическое уравнение (10.29) можно представить в виде

$$\mu^2 - 24,674016\mu + 54,792638 = 0. \quad (10.30)$$

Уравнение (10.30) в матричной форме можно записать в виде

$$\det(A - \mu E) = \begin{vmatrix} 23,674016 - \mu & -1 \\ 31,118622 & 1 - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - 24,674016\mu + 54,792638 = 0,$$

где $A = \begin{bmatrix} 23,674016 & -1 \\ 31,118622 & 1 \end{bmatrix}$ — матрица собственных значений характеристического уравнения (10.30); $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ — единичная матрица.

Координаты собственных векторов матрицы A , отвечающих собственному значению μ , удовлетворяют однородной системе уравнений $(A - \mu X) = 0$, которая в данном случае будет

$$\left. \begin{aligned} (23,674016 - \mu)x_1 - x_2 &= 0; \\ 31,118622 x_1 + (1 - \mu)x_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решением этой системы уравнений является характеристическое уравнение вида (10.30), из которого находят собственные числа μ_1 и μ_2 . Следовательно, метод решения с использованием дополнительных граничных условий приводит к характеристическим уравнениям, решениями которых являются собственные числа краевой задачи Штурма—Лиувилля.

Соотношение (10.5) с учетом (10.8), (10.24) для каждого собственного числа будет иметь вид

$$\Theta_i(\rho, F_0) = A_i \Psi_i(\mu_i, \rho) \exp(-\mu_i F_0). \quad (10.31)$$

Каждое частное решение вида (10.31) точно удовлетворяет основным граничным условиям (10.3), (10.4) и приближенно (в зависимости от числа членов ряда (10.24)) — уравнению (10.1). Однако ни одно из этих частных решений, в том числе и их сумма

$$\Theta_n(\rho, F_0) = \sum_{i=1}^n A_i \Psi_i(\mu_i, \rho) \exp(-\mu_i F_0), \quad (10.32)$$

не удовлетворяют начальному условию (10.2). Для того чтобы соотношение (10.32) удовлетворяло начальному условию (10.2), составляют

его невязку и требуют ее ортогональность ко всем координатным функциям, т.е.

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n A_i \Psi_i(\mu_i, \rho) - 1 \right] N_j(\rho) d\rho = 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (10.33)$$

Определяя интегралы в (10.33), для нахождения коэффициентов A_i получим систему алгебраических линейных уравнений, число которых равно n , т.е. числу приближений (количеству собственных чисел).

Соотношение (10.33) для двух приближений примет вид

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 [A_1 \Psi_1(\mu_1, \rho) + A_2 \Psi_2(\mu_2, \rho) - 1] N_1(\rho) d\rho &= 0; \\ \int_0^1 [A_1 \Psi_1(\mu_1, \rho) + A_2 \Psi_2(\mu_2, \rho) - 1] N_2(\rho) d\rho &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.34)$$

Подставляя соответствующие каждому собственному числу собственные функции в соотношения (10.34), из решения системы двух алгебраических линейных уравнений получаем $A_1 = 1,274365753$; $A_2 = -0,42712842401$.

Для получения решения, например, в шестом приближении ($n = 6$) к граничным условиям (10.10), (10.11), (10.25), (10.28) вводят следующие дополнительные граничные условия:

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{III}}(0) &= 0; \quad \Psi^{\text{IV}}(0) = \mu^2; \quad \Psi^{\text{V}}(0) = 0; \quad \Psi^{\text{VI}}(0) = -\mu^3; \\ \Psi^{\text{VII}}(0) &= 0; \quad \Psi^{\text{VIII}}(0) = \mu^4; \quad \Psi^{\text{IX}}(0) = 0; \quad \Psi^{\text{X}}(0) = -\mu^5. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Дополнительные граничные условия (10.28), (10.35) получают из уравнения (10.9) путем его дифференцирования в точке $\rho = 0$. Отметим, что соотношение (10.24) удовлетворяет дополнительным граничным условиям, полученным из уравнения (10.9) с нечетными производными, т.е. условиям $\Psi^{\text{III}}(0) = 0$; $\Psi^{\text{V}}(0) = 0$; $\Psi^{\text{VII}}(0) = 0$; $\Psi^{\text{IX}}(0) = 0$, а также условиям (10.10), (10.11).

Для определения коэффициентов C_i ($i = \overline{1, 6}$) используют пять дополнительных граничных условий, полученных из дифференциального уравнения (10.9) с четными производными, т.е. $\Psi^{\text{II}}(0) = -\mu$; $\Psi^{\text{IV}}(0) = \mu^2$; $\Psi^{\text{VI}}(0) = -\mu^3$; $\Psi^{\text{VIII}}(0) = \mu^4$; $\Psi^{\text{X}}(0) = -\mu^5$, а также условие (10.25). После подстановки (10.24) во все эти граничные условия получаем систему из шести алгебраических линейных уравнений с шестью неизвестными C_i .

После подстановки найденных значений C_i ($i = \overline{1, 6}$) в (10.24) составляют интеграл взвешенной невязки уравнения (10.9), т.е.

$$\int_0^1 \left[d^2 \left(\sum_{i=1}^n C_i \cos r \frac{\pi}{2} \rho \right) / d\rho^2 + \mu \sum_{i=1}^n C_i \cos \left(r \frac{\pi}{2} \rho \right) \right] d\rho = 0 \quad (10.36)$$

$$(i = \overline{1, n}; n = 6; r = 2i - 1).$$

Определяя интегралы (10.36), относительно собственных чисел μ получаем характеристическое уравнение шестой степени. Его корни: $\mu_1 = 2,4674011004$; $\mu_2 = 22,206609900$; $\mu_3 = 61,685027529$; $\mu_4 = 120,90265386$; $\mu_5 = 199,85948911$; $\mu_6 = 298,55553320$.

Точные значения первых пяти собственных чисел приведены в табл. 10.1, а шестого: $\mu_6 = 298,555533132953$.

Соответствующие каждому собственному числу собственные функции находятся из (10.24). Подставляя собственные функции в (10.5), получаем

$$\Theta_n(\rho, Fo) = \sum_{i=1}^n A_i C_i(\mu_i) \cos(r \pi \rho / 2) \exp(-\mu_i Fo) \quad (10.37)$$

$$(n = 6; r = 2i - 1).$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_i ($i = \overline{1, n}$) составляют невязку начального условия (10.2) и требуют ее ортогональность к каждой координатной функции, т.е.

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n A_i C_i(\mu_i) \cos(r \pi \rho / 2) - 1 \right] \cos(j \pi \rho / 2) d\rho = 0 \quad (j = 2i - 1). \quad (10.38)$$

Для данного конкретного случая при таких простых начальных условиях (не зависящих от координаты ρ) процесс определения коэффициентов A_i может быть существенно упрощен (по сравнению со случаем их нахождения для двух приближений, см. систему уравнений (10.34)).

Ввиду ортогональности косинусов систему уравнений (10.38) приводим к виду

$$A_i C_i(\mu_i) \int_0^1 \cos^2 \left(r \frac{\pi}{2} \rho \right) d\rho = \int_0^1 \cos \left(r \frac{\pi}{2} \rho \right) d\rho.$$

Отсюда находим

$$A_i = \pm \frac{4}{r \pi C_i(\mu_i)} \quad (r = 2i - 1), \quad (10.39)$$

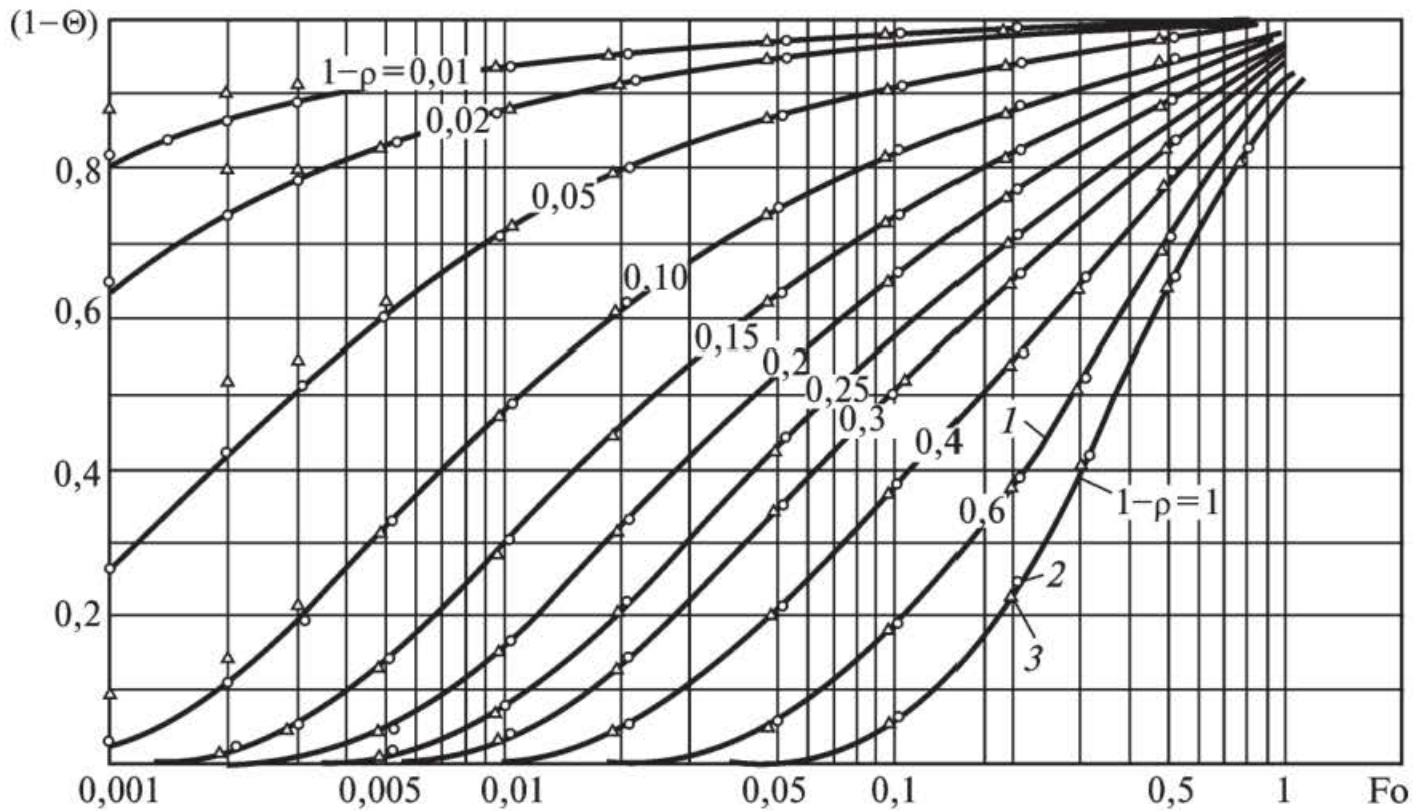
где знак «плюс» — для $r = 1, 5, 9, 13, \dots$; знак «минус» — для $r = 3, 7, 11, 15, \dots$.

По формуле (10.39) при известных $C_i(\mu_i)$ коэффициенты A_i могут быть найдены для любого числа приближений.

Результаты расчетов безразмерных температур по формуле (10.37) для шести приближений ($n = 6$) в сравнении с точным решением задачи (10.1)—(10.4) представлены на рис. 10.6. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне чисел Фурье $0,005 \leq Fo \leq \infty$ полученное решение практически совпадает с точным.

Используя изложенный метод, для задачи (10.1) — (10.4) можно также получить и точное аналитическое решение. При этом дополнительные граничные условия не вводим. Решение задачи (10.9)—(10.11) находим в виде (10.24), где все коэффициенты C_i принимаются равными единице.

Соотношение (10.24) при $C_i = 1$ ($i = \overline{1, n}$) точно удовлетворяет граничным условиям (10.10), (10.11). Для определения собственных чисел составляем невязку уравнения (10.9) и требуем ортогональность невязки ко всем координатным функциям $\cos r \frac{\pi}{2} \rho$ ($r = 2i - 1$), т.е.



Р и с. 10.6. Изменение температуры в пластине:

1 — точное решение; 2 — по формуле (10.37) при $n = 6$; 3 — по формуле (10.45) при $n = 20$

$$\int_0^1 \left[-\sum_{i=1}^n r^2 \frac{\pi^2}{4} \cos\left(r \frac{\pi}{2} \rho\right) + \mu \sum_{i=1}^n \cos\left(r \frac{\pi}{2} \rho\right) \right] \cos\left(j \frac{\pi}{2} \rho\right) d\rho = 0 \quad (10.40)$$

$$(j = r = 2i - 1).$$

Ввиду ортогональности косинусов соотношение (10.40) примет вид

$$\int_0^1 \left[-r^2 \frac{\pi^2}{4} \cos^2\left(r \frac{\pi}{2} \rho\right) + \mu \cos^2\left(r \frac{\pi}{2} \rho\right) \right] d\rho = 0. \quad (10.41)$$

Определяя интегралы в (10.41), получаем

$$\mu_i = r^2 \pi^2 / 4 \quad (i = \overline{1, n}; \quad r = 2i - 1). \quad (10.42)$$

Собственные числа, найденные по формуле (10.42), полностью совпадают с точными их значениями.

Для нахождения коэффициентов A_i ($i = \overline{1, n}$) используют начальное условие (10.2). Для этого составляют его невязку и требуют ее ортогональность ко всем координатным функциям, т.е.

$$\int_0^1 [A_i \Psi_i(\mu_i, \rho) - 1] N_j(\rho) d\rho = 0 \quad (j = 2i - 1). \quad (10.43)$$

Ввиду ортогональности косинусов неизвестные A_i в системе уравнений (10.43) разделяются (в каждое уравнение входит лишь одно неизвестное). Любое из этих уравнений будет иметь вид

$$A_i \int_0^1 \cos^2\left(r \frac{\pi}{2} \rho\right) d\rho = \int_0^1 \cos\left(r \frac{\pi}{2} \rho\right) d\rho \quad (i = \overline{1, n}; \quad r = 2i - 1).$$

Определяя интегралы, находим

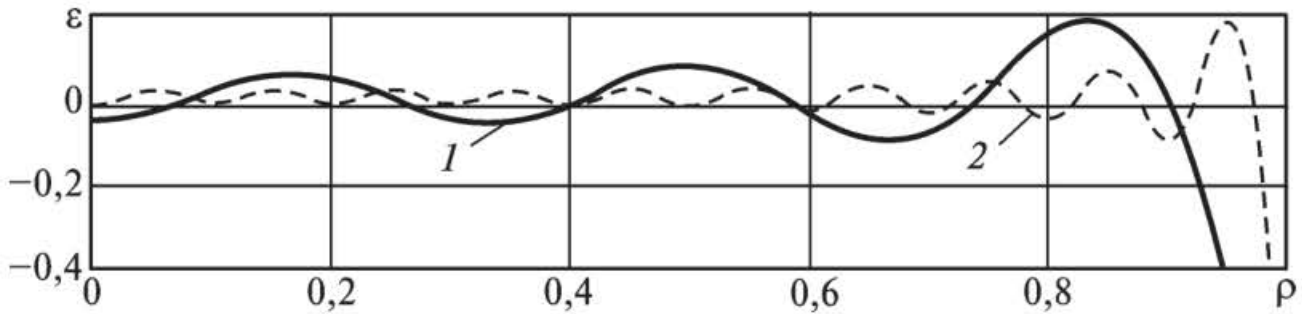
$$A_i = \pm 4 / r \pi, \quad (10.44)$$

где знак «плюс» — для $r = 1, 5, 9, 13, \dots$; знак «минус» — для $r = 3, 7, 11, 15, \dots$.

Соотношение (10.37) в данном случае принимает вид

$$\Theta_n(\rho, Fo) = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1} 4}{r \pi} \cos\left(r \frac{\pi}{2} \rho\right) \exp\left(-\frac{r^2 \pi^2}{4} Fo\right) \quad (r = 2i - 1). \quad (10.45)$$

На рис. 10.6 приведены результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (10.45) для 20 приближений в случае, когда собственные числа μ_i и коэффициенты A_i определяют соответственно по



Р и с. 10.7. Изменение невязки начального условия по координате ρ при $n = 6$ (1) и $n = 20$ (2)

формулам (10.42), (10.44). Для сравнения на них приведены точные значения температур. Анализ результатов показывает, что в диапазоне Фурье $0,001 \leq Fo \leq \infty$ полученное решение при $n = 20$ практически совпадает с точным.

Анализ изменения невязки уравнения (10.1) показывает, что при любом числе Фурье ($Fo \neq 0$) во всем диапазоне изменения координаты $0 \leq \rho \leq 1$ она практически равна нулю. Максимальная невязка начального условия, равная $\varepsilon = -1$, наблюдается при $\rho = 1$ (рис. 10.7).

§ 10.4. Неограниченная пластина (граничные условия третьего рода)

Рассмотрим задачу теплопроводности для пластины при граничных условиях третьего рода. Математическая постановка задачи в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho < 1); \quad (10.46)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 1; \quad (10.47)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} = 0; \quad (10.48)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} + Bi \Theta(1, Fo) = 0, \quad (10.49)$$

где Θ — относительная избыточная температура, $\Theta = (T - T_c)/(T_0 - T_c)$; Bi — число Био, $Bi = \alpha\delta/\lambda'$, α — коэффициент теплоотдачи; λ' — коэффициент теплопроводности; T_c — температура среды.

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (10.46)—(10.49) принимаем в виде

$$\Theta(\rho, Fo) = \varphi(Fo)\Psi(\rho), \quad (10.50)$$

где

$$\varphi(\text{Fo}) = A \exp(-\mu \text{Fo}); \quad (10.51)$$

$$\Psi''(\rho) + \mu \Psi(\rho) = 0. \quad (10.52)$$

Граничные условия для уравнения (10.52) согласно (10.48), (10.49) будут

$$\Psi'(0) = 0; \quad (10.53)$$

$$\Psi'(1) + \text{Bi} \Psi(1) = 0. \quad (10.54)$$

Решение задачи (10.52)—(10.54) находим в виде (10.12).

Принимая в (10.12) $n = 13$, будем иметь четырнадцать неизвестных коэффициентов C_i ($i = 0, 13$), а граничных условий для их определения только два (10.53), (10.54). Поэтому для нахождения неизвестных C_i необходимо иметь еще двенадцать дополнительных граничных условий. Одиннадцать из них, определяемых из уравнения (10.52), имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi(0) = 1; \quad \Psi''(0) = -\mu; \quad \Psi'''(0) = 0; \quad \Psi^{IV}(0) = \mu^2; \quad \Psi^V(0) = 0; \\ \Psi^{VI}(0) = -\mu^3; \quad \Psi^{VII}(0) = 0; \quad \Psi^{VIII}(0) = \mu^4; \quad \Psi^{IX}(0) = 0; \quad (10.55) \\ \Psi^X(0) = -\mu^5; \quad \Psi^{XI}(0) = 0. \end{aligned}$$

Еще одно дополнительное граничное условие получим в точке $\rho = 1$. Для этого продифференцируем уравнение (10.49) по Fo:

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo} \partial \rho} + \text{Bi} \frac{\partial \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = 0. \quad (10.56)$$

Продифференцируем уравнение (10.46) по переменной ρ и запишем его для точки $\rho = 1$:

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \rho \partial \text{Fo}} = \frac{\partial^3 \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \rho^3}. \quad (10.57)$$

Соотношение (10.56) перепишем с учетом уравнения (10.46)

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \rho \partial \text{Fo}} = -\text{Bi} \frac{\partial^2 \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \rho^2}. \quad (10.58)$$

Сравнивая (10.57) и (10.58), находим

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \rho^3} + \text{Bi} \frac{\partial^2 \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \rho^2} = 0. \quad (10.59)$$

Отсюда получаем следующее дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^3 \Psi(l)}{\partial \rho^3} + \text{Bi} \frac{\partial^2 \Psi(l)}{\partial \rho^2} = 0. \quad (10.60)$$

Подставляя (10.12) во все основные и дополнительные граничные условия, получаем 14 алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_i ($i = 0, 13$). Уравнения, составленные из граничных условий при $\rho = 0$, содержат лишь по одному неизвестному, которые легко могут быть найдены вне системы. Эти коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} C_0 &= 1; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = -\mu/2; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = \mu^2/24; \quad C_5 = 0; \\ C_6 &= -\mu^3/720; \quad C_7 = 0; \quad C_8 = \mu^4/40320; \quad C_9 = 0; \quad C_{10} = -\mu^5/3628800; \\ C_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты C_{12}, C_{13} находят из решения системы двух алгебраических уравнений, составленных из граничных условий (10.54), (10.60) при $\rho = 1$.

Составляя невязку уравнения (10.52) и интегрируя ее в пределах от $\rho = 0$ до $\rho = 1$, получаем следующее алгебраическое уравнение ($\text{Bi} = 1$):

$$b_1 \mu^6 + b_2 \mu^5 + b_3 \mu^4 + b_4 \mu^3 + b_5 \mu^2 + b_6 \mu + b_7 = 0, \quad (10.61)$$

где $b_1 = -2,8455005 \cdot 10^{-9}$; $b_2 = 8,8560324 \cdot 10^{-7}$; $b_3 = -1,1223927 \cdot 10^{-4}$; $b_4 = 6,7169004 \cdot 10^{-3}$; $b_5 = -0,17183627$; $b_6 = 1,3330125$; $b_7 = -0,89520958$.

Его первые три корня, удовлетворяющие уравнению (10.52), имеют вид

$$\mu_1 = 0,74017388; \quad \mu_2 = 11,73487194; \quad \mu_3 = 41,3346175. \quad (10.62)$$

Остальные корни следует отбросить, так как они не удовлетворяют уравнению Штурма—Лиувилля (10.52).

Точные значения первых трех собственных чисел

$$\mu_1 = 0,74011609; \quad \mu_2 = 11,73473536; \quad \mu_3 = 41,43883129. \quad (10.63)$$

Для уточнения первых трех собственных чисел составляют невязку уравнения (10.52) и требуют ее ортогональность к собственной функции (10.12), т.е.

$$\int_0^1 [\Psi''(\rho) + \mu \Psi(\rho)] \Psi(\rho) d\rho = 0. \quad (10.64)$$

Отсюда для нахождения собственных чисел получим алгебраическое уравнение, корни которого имеют следующий вид:

$$\mu_1 = 0,74017388; \quad \mu_2 = 11,7348618; \quad \mu_3 = 41,43838976.$$

Соотношение (10.50) с учетом (10.51), (10.12) в третьем приближении приводим к виду

$$\Theta(\rho, Fo) = \sum_{i=1}^3 A_i \Psi_i(\mu_i, \rho) \exp(-\mu_i Fo). \quad (10.65)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_i составляем связь начального условия (10.47) и требуем ее ортогональность к каждой собственной функции, т.е.

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^3 A_i \Psi_i(\mu_i, \rho) - 1 \right] \Psi_j(\mu_j, \rho) d\rho = 0 \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (10.66)$$

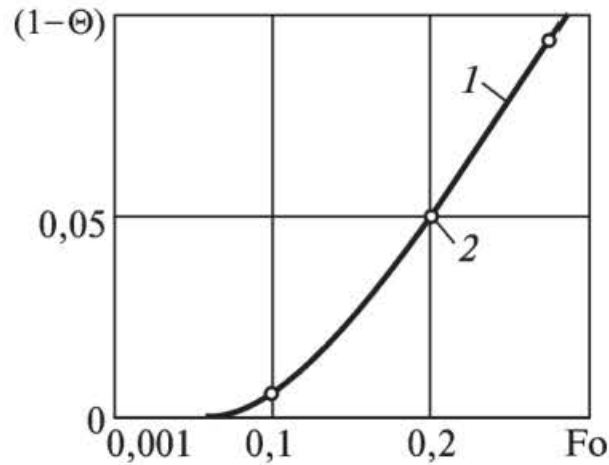
Определяя интегралы в (10.66), для нахождения коэффициентов A_i ($i = 1, 3$) получаем систему трех алгебраических линейных уравнений. Ее решение

$$A_1 = 1,11904448; \quad A_2 = -0,151528332; \quad A_3 = 0,046513896.$$

Приведенные здесь коэффициенты A_i найдены из уточненных значений собственных чисел.

Т а б л и ц а 10.3

Собственные числа	Bi				
	0	0,1	1	10	100
	<i>Без ортогональности</i>				
μ_1	0	0,096753874	0,74017388	2,04166951	2,41878741
μ_2	9,8696044	10,06854569	11,7348618	18,53992587	21,76936469
μ_3	39,4785807	39,67831722	41,4390256	52,2455249	60,46788237
μ_4	88,4825145	88,6782278	90,4230703	103,4742652	118,1472739
	<i>С ортогональностью</i>				
μ_1	0	0,09675387	0,74017388	2,04166951	2,41878741
μ_2	9,8696044	10,0685457	11,7348618	18,53992581	21,76936436
μ_3	39,4784176	39,67814882	41,4388078	52,24557114	60,47199631
μ_4	88,8222364	89,02208143	90,8036645	104,0409629	118,5325135
	<i>Точные значения</i>				
μ_1	0	0,09678321	0,74011609	2,04175521	2,41864704
μ_2	9,86965056	10,06856361	11,7347354	18,53991364	21,76968964
μ_3	39,4786022	39,67866081	41,4388313	52,24542961	60,47239696
μ_4	88,826855	89,02677316	90,8075585	104,0461200	118,5289464



Р и с. 10.8. Распределение температуры в пластине:

1 — точное решение; 2 — по формуле (10.50)

Значения собственных чисел для четырех приближений при различных числах Био приведены в табл. 10.3. Здесь даны собственные числа для случаев, когда интегрируют лишь невязку уравнения (10.52) и когда требуется ортогональность невязки к собственной функции $\Psi(\mu, \rho)$.

Результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (10.50) в пятом приближении при $Bi = 1$ и $\rho = 0$ в сравнении с точным решением даны на рис. 10.8.

§ 10.5. Бесконечный цилиндр (граничные условия первого рода)

Рассмотренную в § 10.2—10.4 методику определения собственных чисел краевой задачи Штурма—Лиувилля можно применить и к уравнению Бесселя, получающемуся после разделения переменных в уравнении теплопроводности для неограниченного цилиндра. Математическая постановка задачи при граничных условиях первого рода в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho < 1); \quad (10.67)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 1; \quad (10.68)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0; \quad (10.69)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} = 0, \quad (10.70)$$

где Θ — относительная избыточная температура, $\Theta = (T - T_{ст}) / (T_0 - T_{ст})$; Fo — число Фурье, $Fo = a\tau / R^2$; ρ — безразмерная координата,

$\rho = r/R$; R — радиус цилиндра; T_0 — начальная температура; $T_{ст}$ — температура стенки; a — коэффициент температуропроводности, τ — время; r — координата.

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (10.67)–(10.70) находим в виде

$$\Theta(\rho, Fo) = \varphi(Fo)X(\rho). \quad (10.71)$$

Подставляя (10.71) в (10.67), получаем

$$d\varphi(Fo)/dFo + \mu\varphi(Fo) = 0; \quad (10.72)$$

$$\frac{d^2 X(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dX(\rho)}{d\rho} + \mu X(\rho) = 0. \quad (10.73)$$

Решение уравнения (10.72), как известно, имеет вид

$$\varphi(Fo) = A \exp(-\mu Fo). \quad (10.74)$$

Решение уравнения Бесселя (10.73) находим в виде следующего алгебраического полинома

$$X(\mu, \rho) = \sum_{i=0}^n C_i N_i(\rho). \quad (10.75)$$

Для нахождения коэффициентов C_i к основным граничным условиям (10.69), (10.70), записанным для функции $X(\rho)$ в виде

$$X(1) = 0; \quad (10.76)$$

$$X'(0) = 0, \quad (10.77)$$

вводят дополнительные граничные условия, получаемые из (10.77) и дифференциального уравнения (10.73).

Дополнительные граничные условия получают путем дифференцирования уравнения (10.73) по ρ применительно к точкам $\rho = 0$ и $\rho = 1$. Непосредственно из (10.73) в точке $\rho = 1$ с учетом основного граничного условия (10.76) будем иметь следующее дополнительное граничное условие:

$$X''(1) + X'(1) = 0. \quad (10.78)$$

В точке $\rho = 0$ уравнение (10.73) принимает вид

$$X''(0) + \frac{1}{\rho} X'(0) + \mu X(0) = 0.$$

Раскрывая неопределенность во втором слагаемом по правилу Лопиталю и учитывая, что $X(0) = \text{const} = 1$, получаем

$$X''(0) + X''(0) + \mu = 0.$$

Отсюда находим следующее дополнительное граничное условие:

$$X''(0) = -\mu/2. \quad (10.79)$$

Дифференцируя уравнение (10.73) по переменной ρ , в точке $\rho = 1$ получаем дополнительное граничное условие вида

$$X'''(1) + X''(1) - X'(1) + \mu X'(1) = 0. \quad (10.80)$$

Ввиду того, что в точке $\rho = 1$ задано известное для всего времени протекания процесса значение искомой функции (граничное условие первого рода), последующие дополнительные граничные условия будем получать лишь для точки $\rho = 0$. Для этого возьмем производную по ρ от уравнения (10.73):

$$X'''(\rho) + \frac{1}{\rho} X''(\rho) - \frac{1}{\rho^2} X'(\rho) + \mu X'(\rho) = 0.$$

Раскрывая неопределенности по правилу Лопиталю в точке $\rho = 0$ и учитывая, что $X'(0) = 0$, получаем

$$X'''(0) + X'''(0) - \frac{1}{2} X'''(0) = \frac{3}{2} X'''(0) = 0.$$

Отсюда можно записать дополнительное граничное условие вида

$$X'''(0) = 0. \quad (10.81)$$

Для получения следующего граничного условия продифференцируем уравнение (10.73) дважды по ρ :

$$X^{IV}(\rho) + \frac{1}{\rho} X'''(\rho) - \frac{2}{\rho^2} X''(\rho) + \frac{2}{\rho^3} X'(\rho) + \mu X''(\rho) = 0.$$

Раскрывая неопределенности при $\rho = 0$ по правилу Лопиталю и учитывая, что $X''(0) = -\mu/2$, получаем

$$X^{IV}(0) + X^{IV}(0) - X^{IV}(0) + \frac{2}{6} X^{IV}(0) - \frac{\mu^2}{2} = \frac{4}{3} X^{IV}(0) - \mu^2 / 2 = 0.$$

Отсюда находим еще одно дополнительное граничное условие

$$X^{IV}(0) = 3\mu/8. \quad (10.82)$$

Аналогично путем взятия производных более высокого порядка от уравнения (10.73) и раскрытия неопределенностей по правилу Ло-

питая можно получить сколько угодно дополнительных граничных условий. Приведем некоторые из них

$$X^V(0) = 0; X^{VI}(0) = -5\mu^3/16; X^{VII}(0) = 0. \quad (10.83)$$

Если принять в (10.75) $n = 10$, то для определения неизвестных коэффициентов C_i ($i = 0, 10$) необходимо использовать 11 граничных условий ((10.76)—(10.83), а также $X(0) = \text{const} = 1$). Подставляя в них (10.75), после решения системы алгебраических линейных уравнений будем иметь

$$C_0 = 1; C_1 = 0; C_2 = -\mu/4; C_3 = 0; C_4 = \mu^2/64; \\ C_5 = 0; C_6 = -\mu^3/2304; C_7 = 0; \quad (10.84)$$

$$C_8 = \frac{(-361344\mu + 17628\mu^2 - 294\mu^3 + \mu^4 + 1555200)}{384(-242 + \mu)}; \\ C_9 = \frac{-(1843200 - 423936\mu + 19872\mu^2 - 296\mu^3 + \mu^4)}{288(-242 + \mu)}; \quad (10.85)$$

$$C_{10} = \frac{(-455040\mu + 20832\mu^2 - 294\mu^3 + 1990656 + \mu^4)}{768(-242 + \mu)}.$$

Отметим, что в данном случае всякий раз (при любом числе приближений) в общем виде приходится решать лишь три алгебраических линейных уравнения с тремя неизвестными. Они получаются из граничных условий, заданных при $\rho = 1$ ((10.76), (10.78), (10.80)). Уравнения, получаемые из граничных условий при $\rho = 0$, разделяются — в каждое входит лишь один неизвестный коэффициент, который легко может быть определен (см. коэффициенты $C_1, C_2, C_3, \dots, C_7$. Коэффициент $C_0 = 1$ получается из условия $X(0) = 1$).

Для того чтобы функция (10.75) как можно лучше удовлетворяла уравнению Бесселя (10.73), составим его невязку и проинтегрируем ее в пределах от $\rho = 0$ до $\rho = 1$:

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2 X(\mu, \rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dX(\mu, \rho)}{d\rho} + \mu X(\mu, \rho) \right] d\rho = 0. \quad (10.86)$$

После определения интегралов для нахождения собственных чисел будем иметь следующее характеристическое уравнение:

$$-3,7578162578 \cdot 10^{-7} (631019520\mu - 29961504\mu^2 + 48064\mu - \\ -2749\mu^4 - 2737152000 + 4\mu^5)(-242 + \mu)^{-1} = 0. \quad (10.87)$$

Его корни

$$\mu_1 = 5,78318; \mu_2 = 30,50791; \mu_3 = 69,01048. \quad (10.88)$$

Остальные корни уравнения следует отбросить, как не удовлетворяющие уравнению Бесселя (10.73).

Точные значения первых трех собственных чисел

$$\mu_1 = 5,78306; \mu_2 = 30,4733; \mu_3 = 74,8865. \quad (10.89)$$

Для каждого собственного числа собственные функции находим из (10.75).

Для уточнения первых трех собственных чисел составляем невязку уравнения (10.73) и требуем ее ортогональность к собственной функции (10.75), т.е.

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2 X(\mu, \rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dX(\mu, \rho)}{d\rho} + \mu X(\mu, \rho) \right] X(\mu, \rho) d\rho = 0. \quad (10.90)$$

Отсюда для нахождения собственных чисел получаем характеристическое уравнение девятой степени, которое имеет девять корней. Из них лишь три корня

$$\mu_1 = 5,78318; \mu_2 = 30,48123; \mu_3 = 74,07256 \quad (10.91)$$

удовлетворяют уравнению (10.73). Этот результат вполне объясним ввиду того, что оно удовлетворяется лишь при некоторых дискретных значениях μ (собственных значениях).

Сравнивая собственные числа (10.88) и (10.91), можно заметить, что требование ортогональности невязки уравнения (10.73) к функции (10.75) приводит к существенному повышению точности определения собственных чисел.

Подставляя (10.74), (10.75) в (10.71), получаем

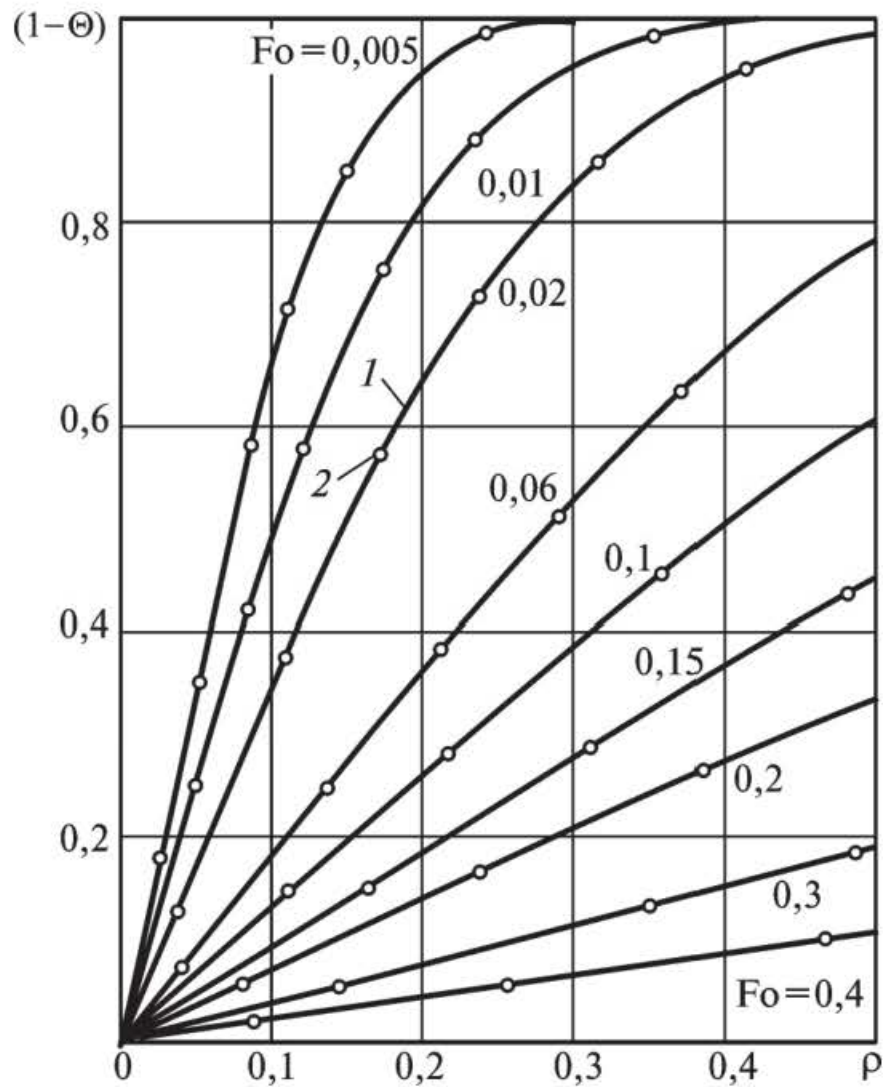
$$\Theta(\rho, Fo) = \sum_{i=1}^3 A_i X_i(\mu_i, \rho) \exp(-\mu_i Fo). \quad (10.92)$$

Неизвестные коэффициенты A_i в соотношении (10.92) находим из начального условия (10.68). Для этого составляем его невязку и требуем ее ортогональность к каждой собственной функции, т.е.

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^3 A_i X_i(\mu_i, \rho) - 1 \right] X_j(\mu_j, \rho) d\rho = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (10.93)$$

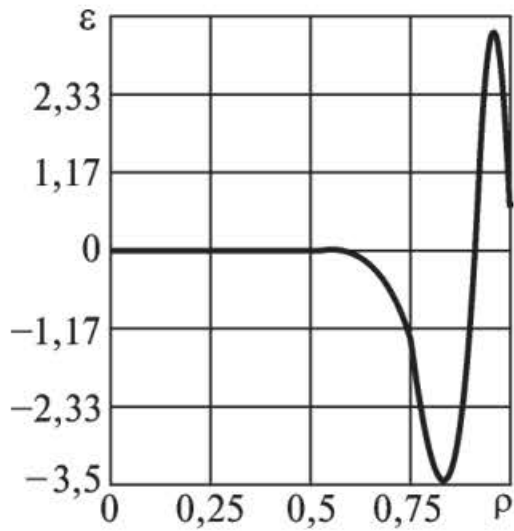
Число приближений	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1	5,7829 5,7784	—	—	—	—
2	5,7831 5,7832	30,058 30,548	—	—	—
3	5,7831 5,7831	30,507 30,481	69,010 74,072	—	—
4	5,7831 5,7831	30,471 30,470	74,887 74,833	139,255 140,982	—
5	5,7831 5,7831	30,471 30,471	74,887 74,887	139,042 139,041	217,790 222,498
Точные значения	5,7831	30,472	74,886	139,04	222,93

Определяя интегралы в (10.93), для нахождения коэффициентов A_i получим систему трех алгебраических линейных уравнений с тремя неизвестными. Из ее решения находим $A_1 = 1,544789$; $A_2 = -0,988519$; $A_3 = 0,5523595$.

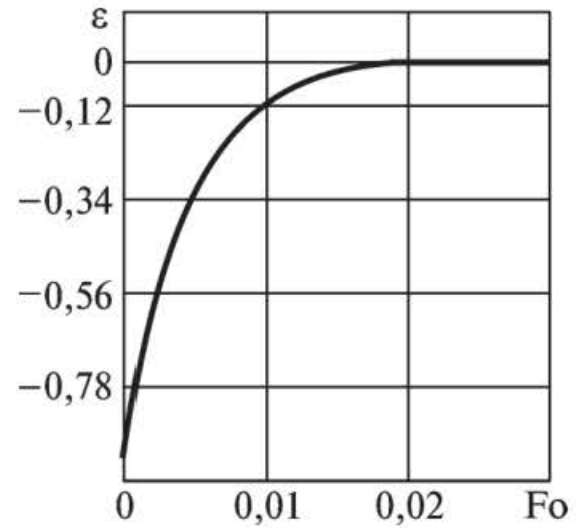


Р и с. 10.9. Распределение температуры в цилиндре:

1 — по формуле (10.92); 2 — точное решение



Р и с. 10.10. Изменение невязки уравнения (10.67) при $Fo = 0,002$



Р и с. 10.11. Изменение невязки уравнения (10.67) при $\rho = 0,9$

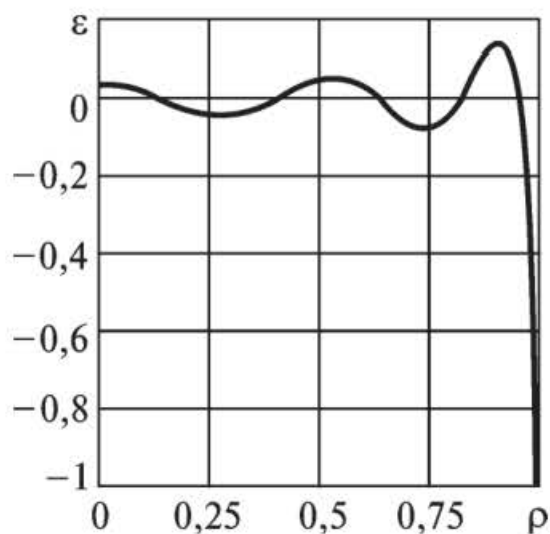
Приведенные коэффициенты A_i ($i = 1, 2, 3$) найдены из уточненных значений собственных чисел.

Собственные числа для различного числа приближений в сравнении с точными их значениями приведены в табл. 10.4. Для каждого приближения верхняя строка — без ортогональности, нижняя — с ортогональностью невязки уравнения (10.73) к функции (10.75).

Результаты расчетов безразмерных температур по формуле (10.92) в сравнении с точными их значениями представлены на рис. 10.9.

Из графиков следует, что температуры, полученные по формуле (10.92), в диапазоне $0,005 \leq Fo \leq \infty$ практически совпадают с точными их значениями.

На рис. 10.10, 10.11 представлено изменение невязки уравнения (10.67) по координате ρ при $Fo = 0,002$ и во времени при $\rho = 0,9$ в случае, когда используются пять членов ряда (10.92). Анализ результатов



Р и с. 10.12. Изменение невязки начального условия

позволяет заключить, что в диапазоне $0 \leq \rho \leq 0,6$ при $Fo = 0,002$ уравнение (10.67) выполняется точно, а в точке $\rho = 0,9$ для всех $Fo \geq 0,02$ она становится практически равной нулю.

Как и в случае бесконечной пластины, максимальная невязка начального условия (10.68) наблюдается в точке $\rho = 1$ (рис. 10.12). При этом изменение невязки начального условия для цилиндра при одинаковом числе приближений ($n = 5$) практически не отличается от изменения невязки для пластины (см. рис. 10.5).

§ 10.6. Бесконечный цилиндр (граничные условия третьего рода)

Рассмотрим краевую задачу теплопроводности для бесконечного цилиндра при граничных условиях третьего рода в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \quad (Fo > 0, 0 \leq \rho < 1); \quad (10.94)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 1; \quad (10.95)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} = 0; \quad (10.96)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} + Bi \Theta(1, Fo) = 0, \quad (10.97)$$

где $\Theta = (T - T_c)/(T_0 - T_c)$; $Bi = \alpha R/\lambda'$; T_c — температура среды.

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (10.94)—(10.97) представим в виде

$$\Theta(\rho, Fo) = \sum_{i=1}^m A_i X_i(\mu_i, \rho) \exp(-\mu_i Fo), \quad (10.98)$$

где $X_i(\mu_i, \rho)$ — функции, которые должны удовлетворять уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 X(\mu, \rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dX(\mu, \rho)}{d\rho} + \mu X(\mu, \rho) = 0. \quad (10.99)$$

Основные граничные условия для уравнения (10.99) согласно (10.96), (10.97) будут

$$X^I(0) = 0; \quad (10.100)$$

$$X^I(1) + Bi X(1) = 0. \quad (10.101)$$

Решение задачи (10.99)—(10.101) находим в виде (10.75).

Если ограничиться шестью членами ряда (10.75) ($n = 5$), то для нахождения неизвестных C_i ($i = 0, 5$) необходимо иметь еще четыре дополнительных граничных условия. Три из них имеют вид:

$$X(0) = \text{const} = 1; \quad (10.102)$$

$$X^{II}(0) = -\mu/2; \quad (10.103)$$

$$X^{III}(0) = 0. \quad (10.104)$$

Еще одно дополнительное граничное условие получим в точке $\rho = 1$. Продифференцируем уравнение (10.97) по переменной Fo :

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \rho} + Bi \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (10.105)$$

Продифференцируем уравнение (10.94) по переменной ρ :

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho \partial Fo} = \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^3} + \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho}. \quad (10.106)$$

Соотношение (10.105) перепишем с учетом уравнения (10.94):

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho \partial Fo} = -Bi \left[\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} \right]. \quad (10.107)$$

Сравнивая (10.106) и (10.107), находим

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^3} + \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} + Bi \left[\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} \right] = 0.$$

Учитывая (4.71), получаем следующее дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^3 X(1)}{\partial \rho^3} + (Bi + 1) \frac{\partial^2 X(1)}{\partial \rho^2} + (Bi - 1) \frac{\partial X(1)}{\partial \rho} = 0.$$

Подставляя (10.75) во все основные и дополнительные граничные условия, получаем шесть алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_i ($i = 0, 5$). Уравнения, полученные из граничных условий при $\rho = 0$, содержат лишь по одному неизвестному, которые легко могут быть найдены вне системы. Эти коэффициенты имеют вид $C_0 = 1$; $C_1 = 0$; $C_2 = -\mu/4$; $C_3 = 0$.

Уравнения, полученные из граничных условий при $\rho = 1$, содержат по два неизвестных коэффициента. Из решения системы двух алгебраических уравнений получаем

$$C_4 = \frac{1}{4} \frac{(-100Bi^2 + 21Bi^2\mu + 105Bi\mu - 300Bi + 150\mu)}{(140 + 63Bi + 9Bi^2)};$$

$$C_5 = \frac{(-16\mu + 32Bi - 12Bi\mu - 3Bi^2\mu + 16Bi^2)}{(140 + 63Bi + 9Bi^2)}.$$

Для определения собственных чисел составляем интеграл взвешенной невязки дифференциального уравнения (10.99), т.е.

$$\int_0^1 \left[X^{II}(\mu, \rho) + \frac{1}{\rho} X^I(\mu, \rho) + \mu X(\mu, \rho) \right] d\rho = 0. \quad (10.108)$$

Определяя интегралы, относительно μ получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\frac{-1}{60(140 + 63 \text{Vi} + 9 \text{Vi}^2)} (-6000\mu - 3320 \text{Vi} \mu - 415 \text{Vi}^2 \mu + 2000 \text{Vi}^2 + 12000 \text{Vi} + 410\mu^2 + 120 \text{Vi} \mu^2 + 12 \text{Vi}^2 \mu^2) = 0. \quad (10.109)$$

Неизвестные коэффициенты A_i в соотношении (10.98) (при $\text{Vi} = 1$) находим из начального условия (10.95). Для этого составляем его невязку и требуем ортогональность невязки к каждой собственной функции, т.е.

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^2 A_i X_i(\mu_i, \rho) - 1 \right] X_j(\mu_i, \rho) d\rho = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (10.110)$$

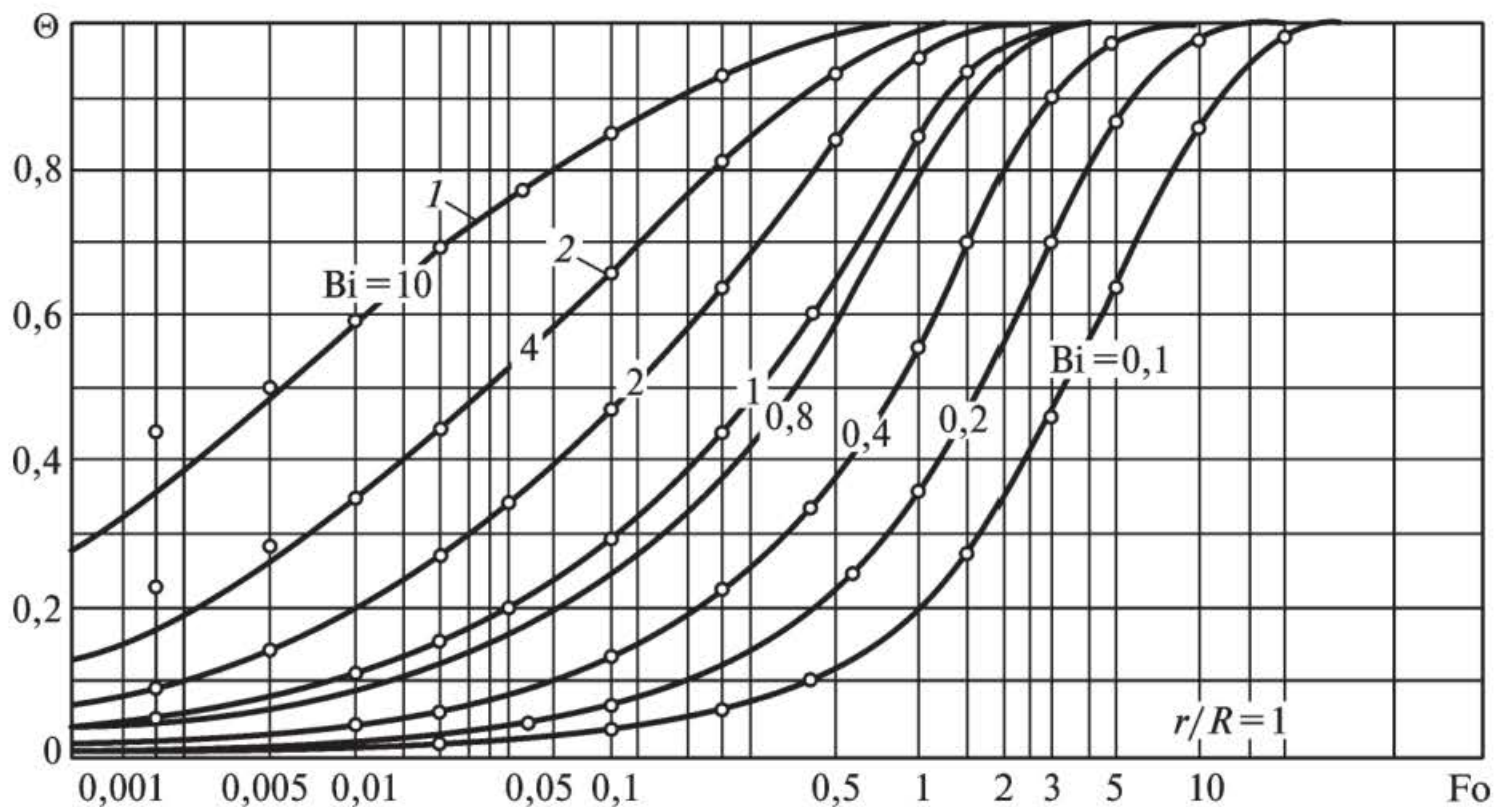
Определяя интегралы в (10.110), для нахождения коэффициентов A_i ($i = 1, 2$) получаем систему двух алгебраических линейных уравнений. Из решения этой системы находим

$$A_1 = 1,203566856; \quad A_2 = -0,23730618. \quad (10.111)$$

Приведенные здесь коэффициенты найдены с использованием собственных чисел для случая, когда требуется ортогональность невязки уравнения (10.99) к функции (10.75).

Для получения решения, например, в пятом приближении введем следующие дополнительные граничные условия, определяемые из уравнения (10.99):

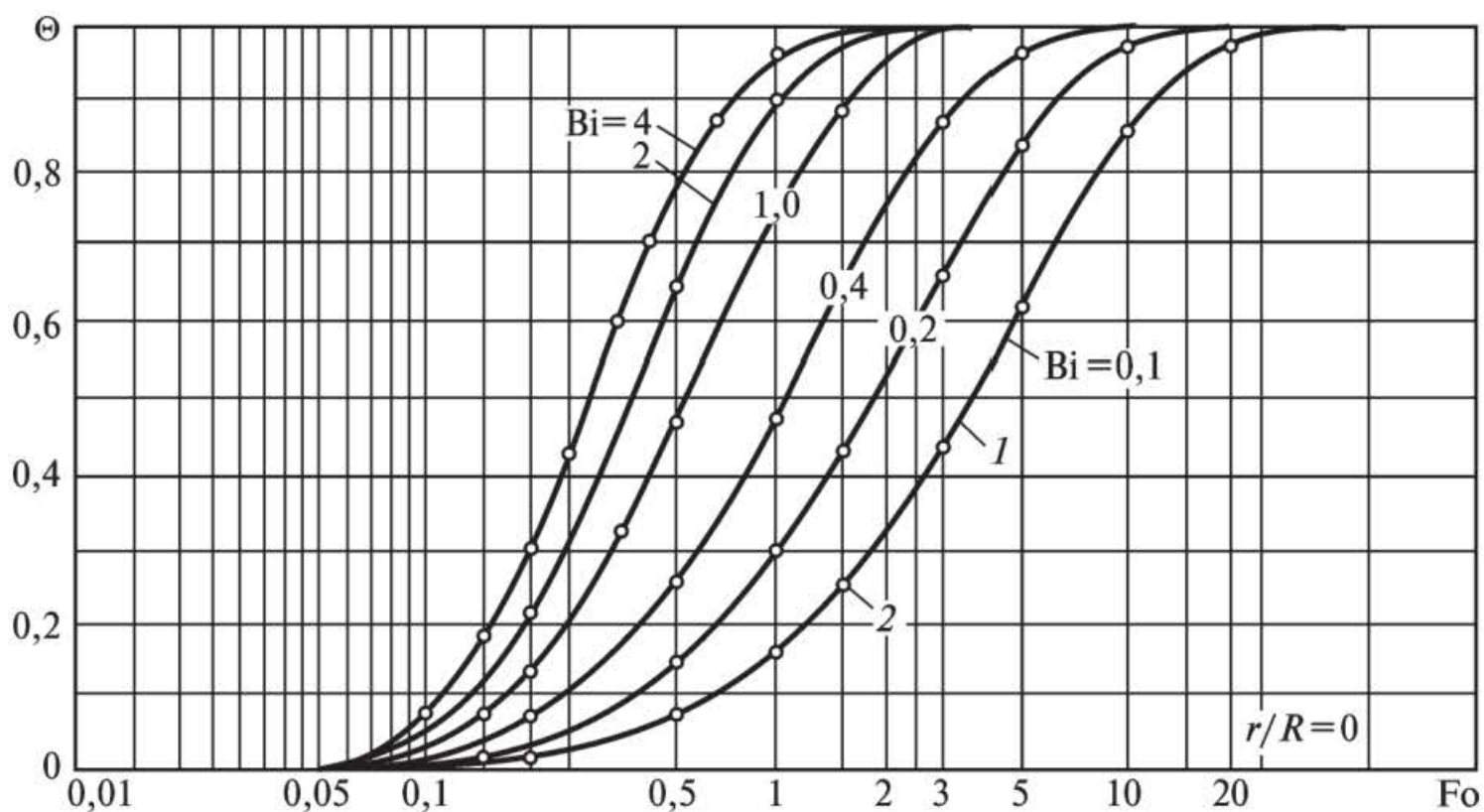
$$\begin{aligned} X^{VI}(0) &= -\frac{5}{16} \mu^3; \quad X^{VII}(0) = 0; \quad X^{VIII}(0) = \frac{35}{128} \mu^4; \quad X^{IX}(0) = 0; \\ X^X(0) &= -\frac{63}{256} \mu^5; \quad X^{XI}(0) = 0; \quad X^{XII}(0) = \frac{231}{1024} \mu^6; \quad X^{XIII}(0) = 0; \\ X^{XIV}(0) &= -\frac{429}{2048} \mu^7; \quad X^{XV}(0) = 0; \quad X^{XVI}(0) = \frac{6435}{32768} \mu^8; \\ X^{XVII}(0) &= 0; \quad X^{XVIII}(0) = -\frac{12155}{65536} \mu^9; \quad X^{XIX}(0) = 0; \\ X^{XX}(0) &= \frac{46189}{262144} \mu^{10}; \quad X^{XXI}(0) = 0. \end{aligned} \quad (10.112)$$



Р и с. 10.13. Изменение температуры на поверхности цилиндра:

1 — точное решение; 2 — по формуле (10.98)

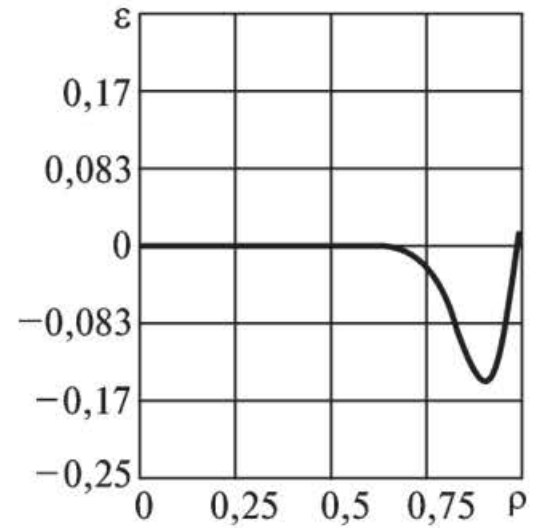
Подставляя (10.75) в (10.100), (10.101), (10.112), для определения неизвестных коэффициентов C_i получим систему 23 алгебраических линейных уравнений. В ней 21 уравнение, полученное из граничных условий при $\rho = 0$, разделяется. Таким путем находим неизвестные



Р и с. 10.14. Изменение температуры в центре цилиндра:

1 — точное решение; 2 — по формуле (10.98)

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1; C_1 = 0; C_2 = -\mu/4; C_3 = 0; \\
C_4 &= \mu^2/64; C_5 = 0; C_6 = -5\mu^3/11520; C_7 = 0; \\
C_8 &= \mu^4/147456; C_9 = 0; C_{10} = -\mu^5/14745600; \\
C_{11} &= 0; C_{12} = \mu^6/2123366400; C_{13} = 0; \\
C_{14} &= -\mu^7/416179814400; C_{15} = 0; \\
C_{16} &= \mu^8/106542032486400; C_{17} = 0; \\
C_{18} &= -\mu^9/34519618525593600; C_{19} = 0; \\
C_{20} &= \mu^{10}/13807847410237440000; C_{21} = 0.
\end{aligned}$$



Р и с. 10.15. Изменение невязки уравнения (10.94) при $Fo = 0,002$

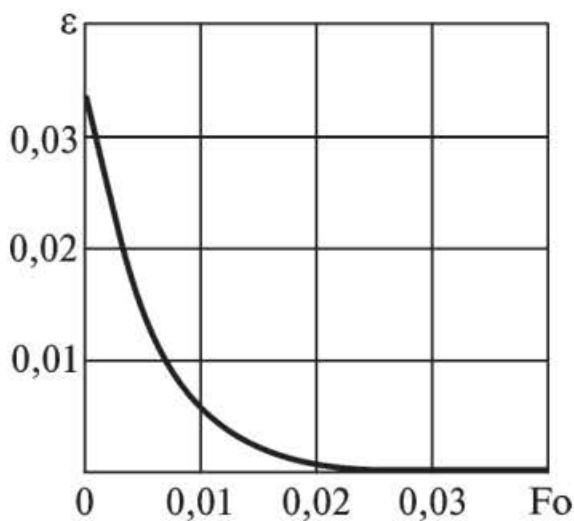
Оставшиеся два неизвестных C_{22}, C_{23} находим из системы двух алгебраических уравнений, составленных из граничных условий при $\rho = 1$.

Составляя интеграл взвешенной невязки уравнения (10.99), для определения собственных чисел получаем характеристическое уравнение. Собственные числа, найденные из него, для различных значений числа Био в сравнении с их точными значениями представлены в табл. 10.5 (для пяти приближений).

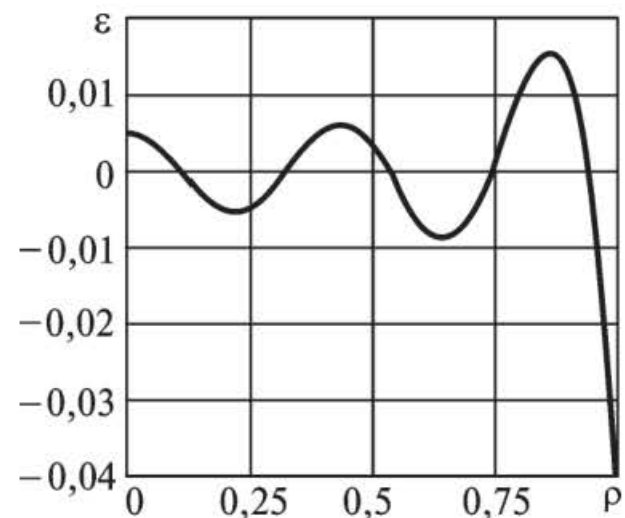
Собственные числа, найденные из условия ортогональности невязки уравнения (10.99) к функции (10.75), также представлены в табл. 10.5.

Результаты расчетов температур по формуле (10.98) в пятом приближении ($m = 5$) представлены на рис. 10.13, 10.14.

На рис. 10.15—10.17 даны изменения невязки уравнения (10.94) и начального условия (10.95) при $m = 5$.



Р и с. 10.16. Изменение невязки уравнения (10.94) при $\rho = 1$



Р и с. 10.17. Изменение невязки начального условия

Собственные числа	Bi			
	0	0,1	1	10
	<i>Без ортогональности</i>			
μ_1	0	0,1950827	1,57699273	4,75020542
μ_2	14,681970	14,881925	16,64213839	25,33322279
μ_3	49,218455	49,418442	51,20546121	63,31199412
μ_4	103,50733	103,70747	105,5024819	119,62182701
μ_5	173,71606	173,88755	175,4290557	188,96011016
	<i>С ортогональностью</i>			
μ_1	0	0,1950827	1,57699273	4,75020542
μ_2	14,681970	14,881925	16,64213839	25,33322279
μ_3	49,218456	49,418442	51,20546176	63,31199213
μ_4	103,49925	103,69925	105,4930115	119,60526540
μ_5	177,31367	177,51177	179,2900775	194,43000874
	<i>Точные значения</i>			
μ_1	0	0,1950988	1,57703364	4,75022025
μ_2	14,681924	14,881849	16,64232025	25,33310224
μ_3	49,218643	49,418088	51,20547364	63,31225761
μ_4	103,50010	103,69959	105,4934410	119,60265769
μ_5	177,52098	177,72089	179,5171225	194,82576400

§ 10.7. Шар (граничные условия первого рода)

Математическая постановка задачи для сплошного шара при граничных условиях первого рода имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \quad (Fo > 0; \quad 0 \leq \rho < 1); \quad (10.113)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 1; \quad (10.114)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} = 0; \quad (10.115)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0, \quad (10.116)$$

где обозначения те же самые, что и для цилиндра (см. § 10.5).

Следуя методу разделения переменных (см. § 10.5, 10.6), решение для уравнения (10.113) представляем в виде (10.98), где A_i — неизвестные коэффициенты, определяемые из начального условия (10.114); $X_i(\mu_i, \rho)$ — функции, определяемые таким образом, чтобы как можно лучше удовлетворялось уравнение Бесселя вида

$$\frac{d^2 X(\mu, \rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dX(\mu, \rho)}{d\rho} + \mu X(\mu, \rho) = 0. \quad (10.117)$$

Основные и дополнительные граничные условия определяем точно так же, как и для цилиндра. В данном случае, например, для получения трех собственных чисел они будут иметь вид

$$\begin{aligned} X(0) = 1; \quad X(1) = 0; \quad X^I(0) = 0; \quad X^{II}(0) = -\mu/3; \quad X^{III}(0) = 0; \quad X^V(0) = 0; \\ X^{IV}(0) = \mu^2/5; \quad X^{II}(1) + 2X^I(1) = 0; \quad X^{IV}(1) + 4X^{III}(1) = 0. \end{aligned} \quad (10.118)$$

Решение задачи (10.117) — (10.118) находим в виде степенного ряда (10.75), в котором ограничимся девятью членами ряда, $n = 8$, где C_i — коэффициенты, определяемые из граничных условий (10.118):

$$\begin{aligned} C_0 = 1; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = -\mu/6; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = \mu^2/120; \quad C_5 = 0; \\ C_6 = (-183\mu^2 + 6300\mu - 45360) / 5040; \\ C_7 = (551\mu^2 - 22260\mu + 166320) / 13440; \\ C_8 = (-5\mu^2 + 220\mu + 1680) / 384. \end{aligned}$$

Составляя невязку уравнения (10.117) и интегрируя ее в пределах от $\rho = 0$ до $\rho = 1$, получаем

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2 X(\mu, \rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dX(\mu, \rho)}{d\rho} + \mu X(\mu, \rho) \right] d\rho = 0.$$

После определения интегралов для нахождения собственных чисел будем иметь следующее алгебраическое уравнение:

$$\frac{2861}{4032} \mu - \frac{25513}{1209600} \mu^2 - \frac{51}{10} + \frac{5333}{33868800} \mu^3 = 0.$$

Его корни

$$\mu_1 = 9,8695224622; \quad \mu_2 = 38,221598127; \quad \mu_3 = 85,860501385. \quad (10.119)$$

Точные значения собственных чисел

$$\mu_1 = 9,869604401; \quad \mu_2 = 39,478417604; \quad \mu_3 = 88,82643961.$$

Для уточнения первых трех собственных чисел составляем невязку уравнения (10.117) и требуем ортогональность невязки к функции (10.75), т.е.

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2 X(\mu, \rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dX(\mu, \rho)}{d\rho} + \mu X(\mu, \rho) \right] X(\mu, \rho) d\rho = 0.$$

Отсюда для нахождения собственных чисел получаем характеристическое уравнение, первые три корня которого имеют следующий вид:

$$\mu_1 = 9,8715338; \quad \mu_2 = 40,5662364; \quad \mu_3 = 88,7444599. \quad (10.120)$$

Для выполнения начального условия составляем его невязку и требуем ортогональность невязки к каждой собственной функции, т.е.

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^3 A_i X_i(\mu_i, \rho) - 1 \right] X_j(\mu_i, \rho) d\rho = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (10.121)$$

Отсюда находим

$$A_1 = 1,83058062; \quad A_2 = -1,58304346; \quad A_3 = 0,86495378.$$

Приведенные здесь коэффициенты A_i ($i = 1, 2, 3$) найдены из уточненных значений собственных чисел.

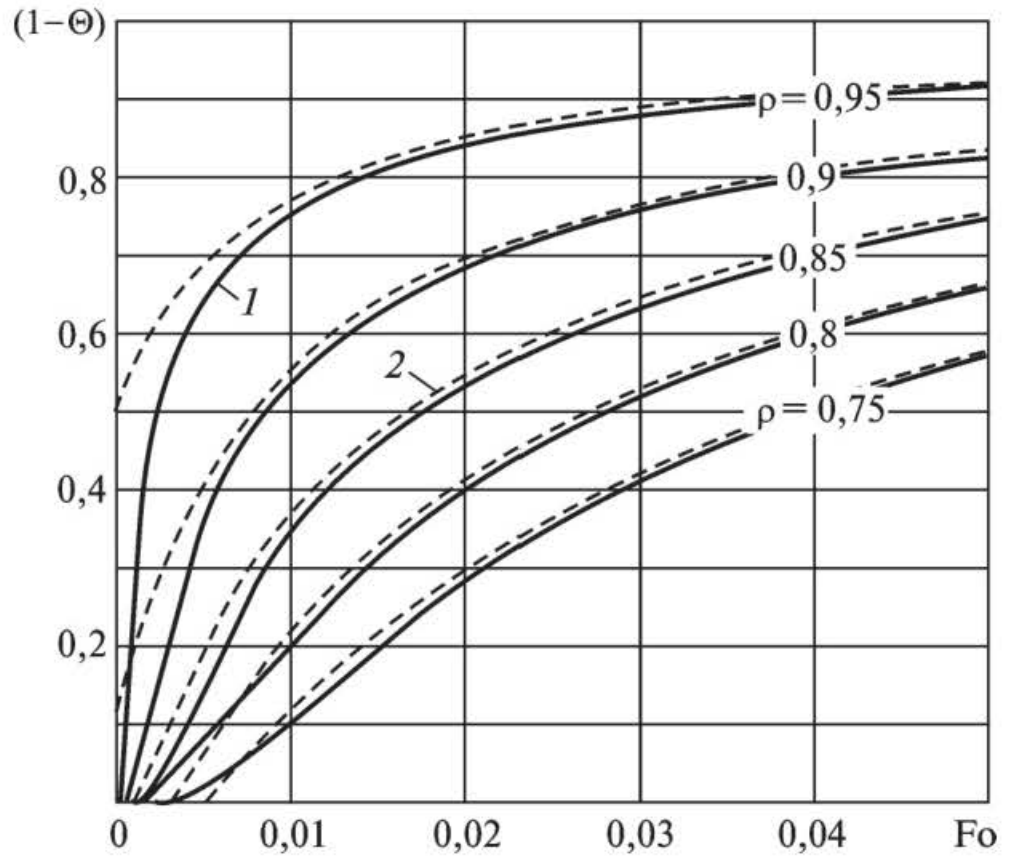
Собственные числа для различного числа приближений в сравнении с точными их значениями приведены в табл. 10.6 (для каждого

Т а б л и ц а 10.6

Число приближений	Собственные числа				
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1	9,87635505 9,87191042	—	—	—	—
2	9,86874847 9,86596516	37,12760341 41,73604585	—	—	—
3	9,86952246 9,87153384	38,22159981 40,56623640	85,86050 88,74445	—	—
4	9,869604401 9,869604401	39,47841881 39,47841677	88,82764 88,82990	153,3020 157,6641	—
5	9,869604401 9,869604401	39,47841761 39,47841760	88,82643 88,82644	157,9143 157,9182	234,33 243,79
Точные значения	9,869604401	39,478417604	88,82643	157,9136	246,74

Р и с. 10.18. Изменение температуры шара:

1 — точное решение; 2 — по формуле (10.98) (пятое приближение, $m = 5$)



приближения верхняя строка — без ортогональности, нижняя — с ортогональностью невязки уравнения (10.117) к функции (10.75)).

Результаты расчетов температур по формуле (10.98) при $m = 5$ в сравнении с точным решением даны на рис. 10.18. Их анализ позволяет заключить, что для $Fo \geq 0,05$ полученное здесь решение практически совпадает с точным.

§ 10.8. Шар (граничные условия третьего рода)

Рассмотрим задачу теплопроводности для шара при граничных условиях третьего рода. Математическая постановка задачи в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{\partial \Theta(\mu, \rho)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\mu, \rho)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \Theta(\mu, \rho)}{\partial \rho} \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho < 1); \quad (10.122)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 1; \quad (10.123)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} = 0; \quad (10.124)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} + Bi \Theta(1, Fo) = 0. \quad (10.125)$$

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (10.122)—(10.125) представляем в виде (10.98).

Уравнение Бесселя в данном случае имеет вид:

$$\frac{d^2 X(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dX(\rho)}{d\rho} + \mu X(\rho) = 0. \quad (10.126)$$

Основные и дополнительные граничные условия для уравнения (10.126):

$$\begin{aligned} X(0) = 1; \quad X^I(0) = 0; \quad X^{II}(0) = -\mu/3; \quad X^{III}(0) = 0; \quad X^{IV}(0) = \mu^2/5; \\ X^V(0) = 0; \quad X^{VI}(0) = -\mu^3/7; \quad X^{VII}(0) = 0; \quad X^{VIII}(0) = \mu^4/9; \\ X^{IX}(0) = 0; \quad X^X(0) = -\mu^5/11; \quad X^{XI}(0) = 0; \quad X^I(1) + \text{Bi}X(1) = 0; \\ X^{III}(1) + (\text{Bi} + 2)X^{II}(1) + 2(\text{Bi} - 1)X^I(1) = 0. \end{aligned} \quad (10.127)$$

Дополнительное граничное условие в точке $\rho = 1$ (соотношение (10.127)) находим так же, как для цилиндра (см. § 10.6).

Решение задачи (10.126—10.127) принимаем в виде следующего степенного ряда (ограничиваемся четырнадцатью членами ряда):

$$X(\mu, \rho) = \sum_{i=0}^{13} C_i \rho^i, \quad (10.128)$$

где C_i — коэффициенты, определяемые из граничных условий (10.127) и имеющие вид

$$\begin{aligned} C_0 = 1; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = -\mu/6; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = \mu^2/120; \quad C_5 = 0; \\ C_6 = -\mu^3/5040; \quad C_7 = 0; \quad C_8 = \mu^4/362880; \quad C_9 = 0; \\ C_{10} = -\mu^5/39916800; \quad C_{11} = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты C_{12}, C_{13} находим из решения системы двух алгебраических уравнений, составленных из граничных условий при $\rho = 1$.

Составляя невязку уравнения (10.126) и интегрируя ее в пределах от $\rho = 0$ до $\rho = 1$, для определения собственных чисел, например, для $\text{Bi} = 1$ получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} 9,350567 \cdot 10^{-8} \mu^5 - 4,186663 \cdot 10^{-2} \mu^2 + 0,55557\mu - 1,4621521 \cdot 10^{-5} \mu^4 + \\ + 1,1435048 \cdot 10^{-3} \mu^3 - 2,5376 \cdot 10^{-10} \mu^6 - 1,13258 = 0. \end{aligned} \quad (10.129)$$

Его первые три корня, удовлетворяющие уравнению (10.126), имеют вид

$$\mu_1 = 2,4674011; \quad \mu_2 = 22,2074227; \quad \mu_3 = 61,16889246. \quad (10.130)$$

Точные значения первых трех собственных чисел:

$$\mu_1 = 2,46741264; \quad \mu_2 = 22,20671376; \quad \mu_3 = 61,68531600.$$

Уточненные значения первых трех собственных чисел, найденных из условия ортогональности невязки уравнения (10.126) к собственной функции (10.128), имеют вид

$$\mu_1 = 2,4674011; \quad \mu_2 = 22,20668658; \quad \mu_3 = 61,90263514. \quad (10.131)$$

Для выполнения начального условия составляем его невязку и требуем ее ортогональность к каждой собственной функции.

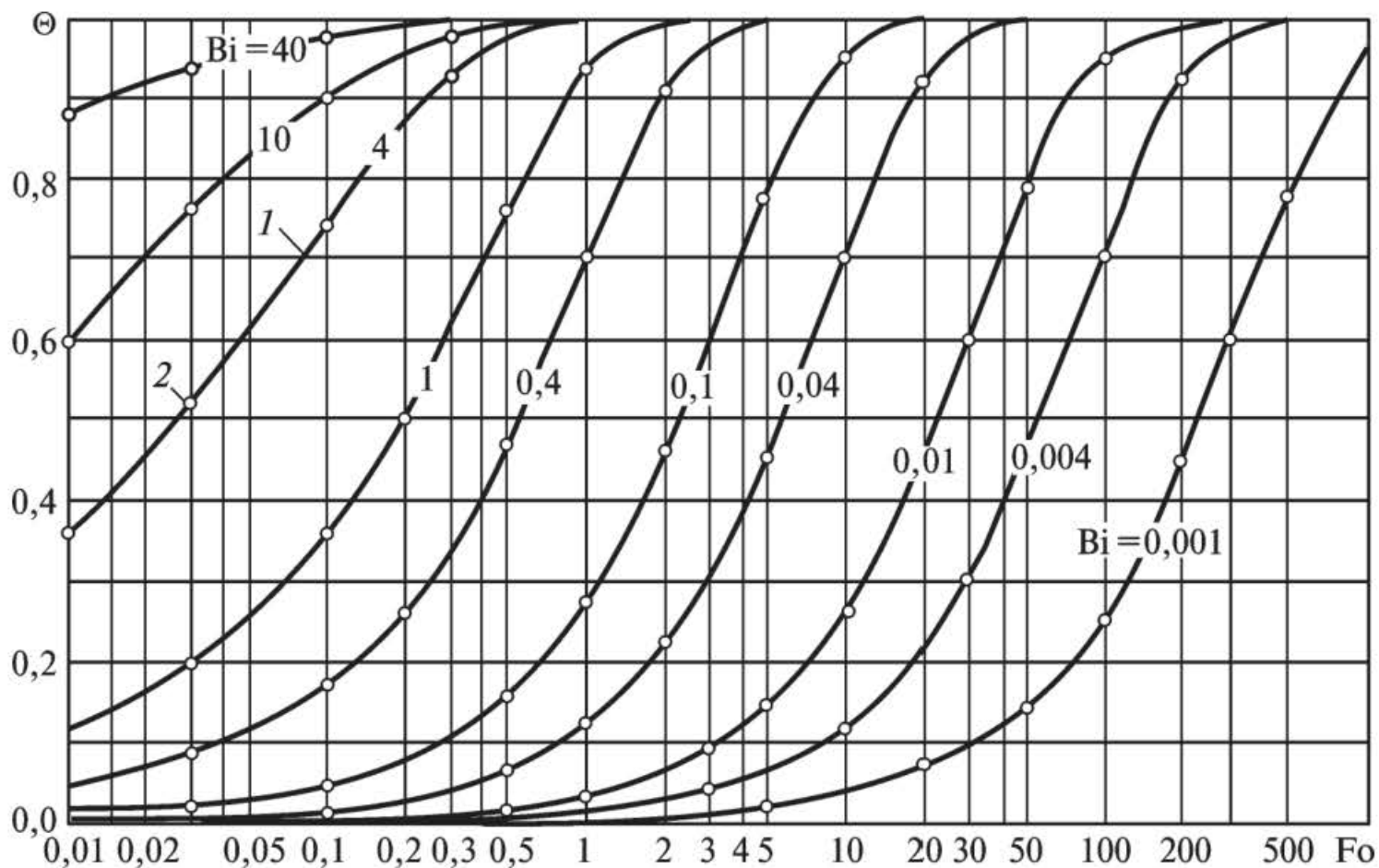
Коэффициенты A_i ($i = 1, 2, 3$), найденные из выполнения начального условия (10.123), равны

$$A_1 = 1,26938064; \quad A_2 = -0,40630603; \quad A_3 = 0,152957063.$$

Значения собственных чисел для пяти приближений в сравнении с точными их значениями для различных величин V_i приведены в табл. 10.7.

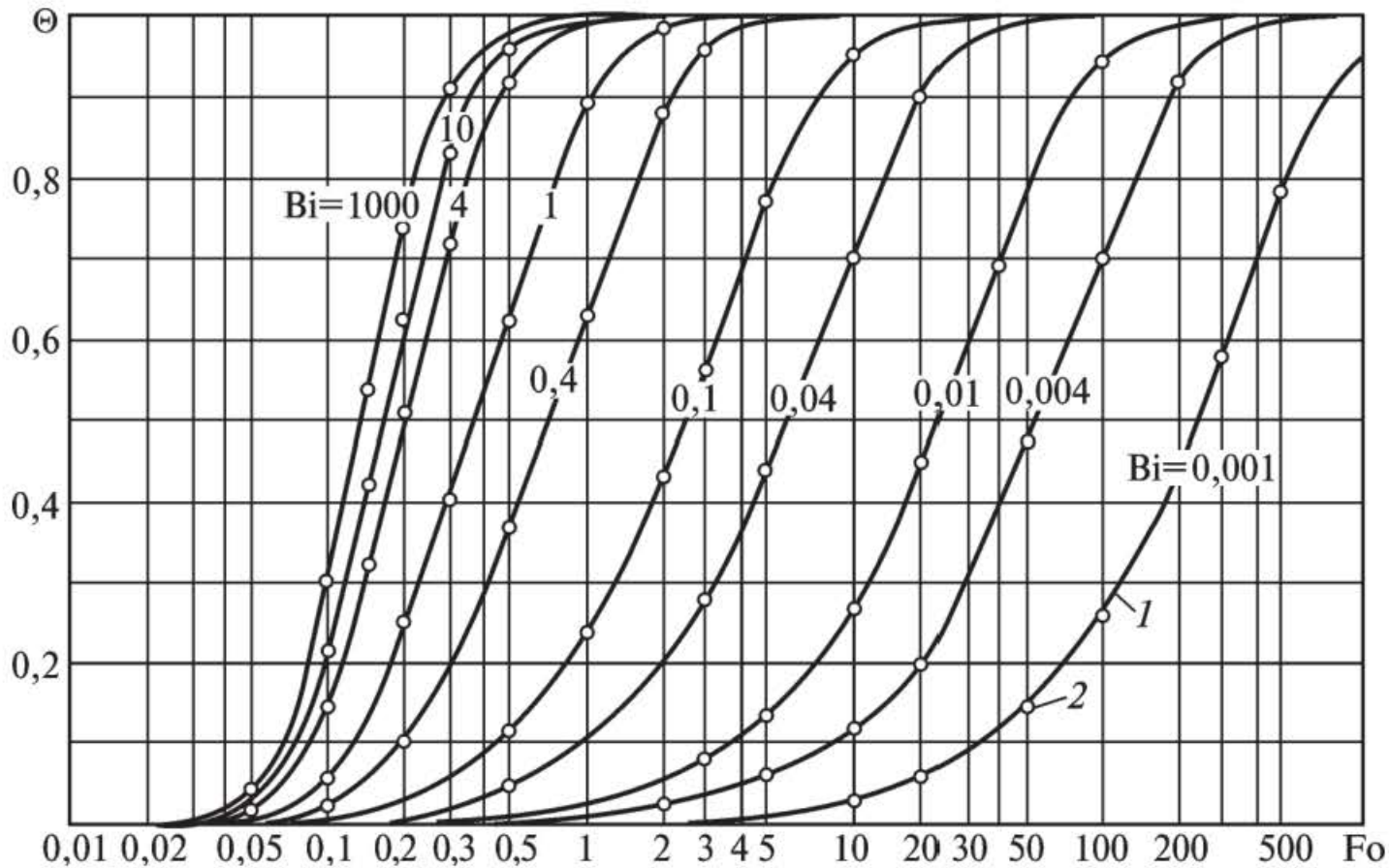
Т а б л и ц а 10.7

Собственные числа	V_i			
	0	0,1	1	10
	<i>Без ортогональности</i>			
μ_1	0	0,29406856	2,46740110	8,04459989
μ_2	20,19072856	20,39118919	22,20660990	32,68693841
μ_3	59,67951255	59,879668630	61,68502277	74,97315643
μ_4	118,9308651	119,13145693	120,9390042	135,8769197
μ_5	190,0974	190,2494592	191,6226418	204,4017868
	<i>С ортогональностью</i>			
μ_1	0	0,29406856	2,46740110	8,04459989
μ_2	20,19072856	20,39118919	22,20660990	32,68693841
μ_3	59,67951574	59,87967192	61,68502699	74,97315313
μ_4	118,8970773	119,09717126	120,90007394	135,8044347
μ_5	197,0049	197,2016926	198,9690112	214,4808974
	<i>Точные значения</i>			
μ_1	0	0,29408929	2,46741264	8,04459769
μ_2	20,19064356	20,39154649	22,20671376	32,68637584
μ_3	59,68026009	59,87973924	61,68531600	74,97308569
μ_4	118,8993968	119,10011689	120,9032194	135,7970702
μ_5	197,8579824	198,05777289	199,8604238	215,707969



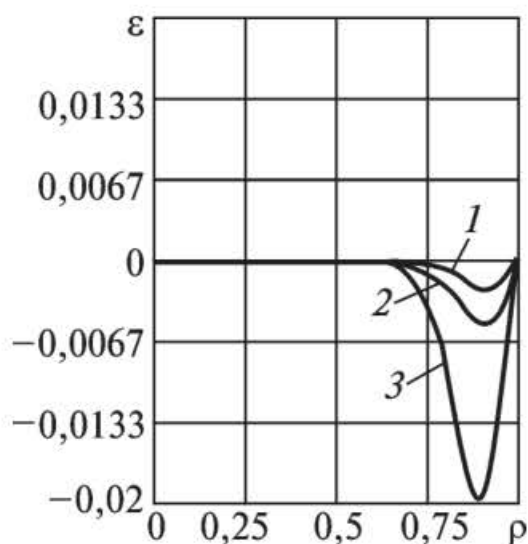
Р и с. 10.19. Изменение температуры на поверхности шара:

1 — точное решение; 2 — по формуле (10.98) (пятое приближение, $m = 5$)

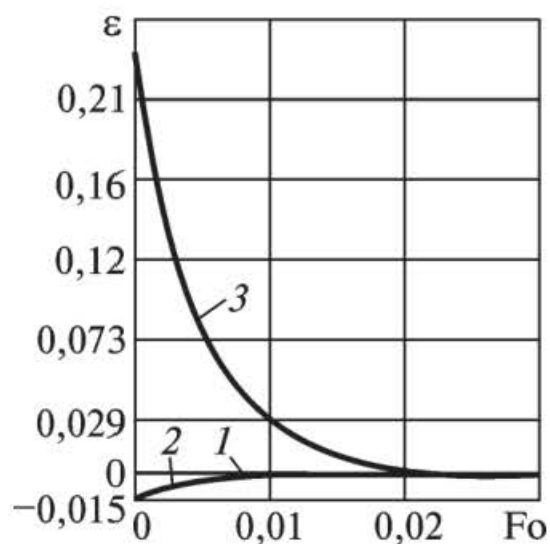


Р и с. 10.20. Изменение температуры в центре шара:

1 — точное решение; 2 — по формуле (10.98) (пятое приближение, $m = 5$)



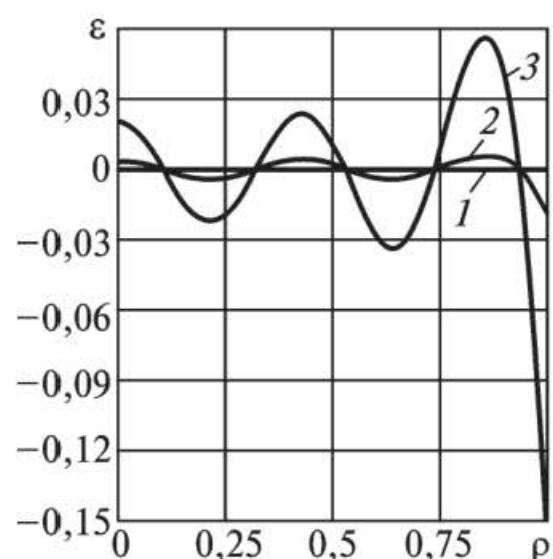
Р и с. 10.21. Изменение невязки уравнения (10.122) $m = 5$, $Fo = 0,002$ при Bi , равном: 0,1 (1); 1 (2); 4 (3)



Р и с. 10.22. Изменение невязки уравнения (10.122) $\rho = 1$, $m = 5$ при Bi , равном: 0,1 (1); 1 (2); 4 (3)

Результаты расчетов безразмерных температур по формуле (10.98) в сравнении с точными их значениями представлены на рис. 10.19, 10.20.

На рис. 10.21—10.23 даны изменения невязок уравнения (10.122) и начального условия (10.123) в зависимости от числа Био. Из их анализа следует, что с увеличением числа Био невязки возрастают и при $Bi \rightarrow \infty$ они становятся идентичными изменению невязок для шара при граничных условиях первого рода.



Р и с. 10.23. Изменение невязки начального условия (10.123) при $m = 5$ при Bi , равном: 0,1 (1); 1 (2); 4 (3)

§ 10.9. Задачи теплопроводности при несимметричных граничных условиях третьего рода

Решения нестационарных задач теплопроводности при несимметричных граничных условиях третьего рода, полученные с помощью классических аналитических методов (Фурье, интегральных преобразований и др.), выражаются сложными функциональными рядами, плохо сходящимися в граничных точках. Рассмотрим применение изложенного ранее метода дополнительных граничных усло-

вий к решению несимметричной задачи теплопроводности в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho < 1); \quad (10.132)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 0; \quad (10.133)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} - Bi_1 [\Theta(0, Fo) + D] = 0; \quad (10.134)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} + Bi_2 [\Theta(1, Fo) - 1] = 0, \quad (10.135)$$

где $\Theta(\rho, Fo) = [T(\rho, Fo) - T_0]/(T_2 - T_0)$ — относительная избыточная температура; $D = (T_0 - T_1)/(T_2 - T_1)$; ρ — безразмерная координата, $\rho = \eta/\delta$; δ — толщина пластины; Bi_1, Bi_2 — числа Био, $Bi_1 = \alpha_1 \delta/\lambda'$, $Bi_2 = \alpha_2 \delta/\lambda'$, α_1, α_2 — коэффициенты теплоотдачи; T_1, T_2 — температуры сред; T_0 — начальная температура.

Решение задачи (10.132)—(10.135) представим в виде суммы двух функций

$$\Theta(\rho, Fo) = \Theta_c(\rho) + \bar{\Theta}(\rho, Fo), \quad (10.136)$$

где $\Theta_c(\rho)$ — решение стационарной задачи при неоднородных граничных условиях вида (10.134), (10.135). Оно принимается в виде

$$\Theta_c(\rho) = F_1 + F_2 \rho, \quad (10.137)$$

где F_1, F_2 — неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (10.134), (10.135). Формулы для них (полагая, что $T_1 = T_0$ и $D = 0$)

$$F_1 = Bi_2/(Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2); \quad F_2 = F_1 Bi_1.$$

Функция $\bar{\Theta}(\rho, Fo)$ представляет решение нестационарной задачи теплопроводности при однородных граничных условиях:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \bar{\Theta}(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho < 1); \quad (10.138)$$

$$\bar{\Theta}(\rho, 0) = -\Theta_c(\rho); \quad (10.139)$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}(0, Fo)}{\partial \rho} - Bi_1 \bar{\Theta}(0, Fo) = 0; \quad (10.140)$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}(1, Fo)}{\partial \rho} + Bi_2 \bar{\Theta}(1, Fo) = 0. \quad (10.141)$$

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (10.138)—(10.141) принимаем в виде произведения двух функций

$$\bar{\Theta}(\rho, Fo) = \varphi(Fo)\Psi(\rho), \quad (10.142)$$

где функции $\varphi(Fo)$ и $\Psi(\rho)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \varphi(Fo)}{\partial Fo} + \lambda^2 \varphi(Fo) = 0; \quad (10.143)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(\rho)}{\partial \rho^2} + \lambda^2 \Psi(\rho) = 0, \quad (10.144)$$

где λ^2 — некоторая постоянная.

Решение уравнения (10.143) имеет вид

$$\varphi(Fo) = A \exp(-\mu Fo), \quad (10.145)$$

где $\mu = \lambda^2$.

Математическая постановка задачи для функции $\Psi(\rho)$ включает уравнение Штурма—Лиувилля (10.144) с соответствующими граничными условиями

$$\Psi''(\rho) + \mu \Psi(\rho) = 0; \quad (10.146)$$

$$\Psi'(0) - Bi_1 \Psi(0) = 0; \quad (10.147)$$

$$\Psi'(1) + Bi_2 \Psi(1) = 0. \quad (10.148)$$

Решение задачи (10.146)—(10.148) принимаем в виде следующего ряда:

$$\Psi_m(\rho) = \sum_{i=0}^m b_i \rho^i, \quad (10.149)$$

где b_i — неизвестные коэффициенты, определяемые из основных и дополнительных граничных условий; ρ^i ($i = 0, m$) — координатные функции.

Если ограничиться, например, девятью членами ряда (10.149), то будем иметь девять неизвестных коэффициентов b_i ($i=0, 8$) ($b_0 = 1$, см. далее), а граничных условий для их определения только два (10.147) и (10.148). В связи с чем необходимо добавить еще семь дополнительных граничных условий, которые находим из уравнения (10.146) путем его решения, а также производных от него различного порядка, в граничной точке $\rho = 0$. Такие дополнительные граничные условия будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{II}}(0) + \mu\Psi(0) &= 0; \quad \Psi^{\text{III}}(0) + \mu\Psi^{\text{I}}(0) = 0; \quad \Psi^{\text{IV}}(0) + \mu\Psi^{\text{II}}(0) = 0; \\ \Psi^{\text{V}}(0) + \mu\Psi^{\text{III}}(0) &= 0; \quad \Psi^{\text{VI}}(0) + \mu\Psi^{\text{IV}}(0) = 0; \quad \Psi^{\text{VII}}(0) + \mu\Psi^{\text{V}}(0) = 0; \\ \Psi^{\text{VIII}}(0) + \mu\Psi^{\text{VI}}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя (10.149) во все граничные условия, для определения b_i ($i=0, 8$) будем иметь девять алгебраических линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} b_1 - \text{Vi}_1 b_0 &= 0; \quad 2b_2 + \mu b_0 = 0; \quad 6b_3 + \mu b_1 = 0; \quad 24b_4 + 2\mu b_2 = 0; \\ 120b_5 + 6\mu b_3 &= 0; \quad 720b_6 + 24\mu b_4 = 0; \quad 5040b_7 + 120\mu b_5 = 0; \\ 40320b_8 + 720\mu b_6 &= 0; \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5 + 6b_6 + 7b_7 + 8b_8 + 9b_9 + \\ + \text{Vi}_2 (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9) &= 0. \end{aligned} \quad (10.150)$$

Если положить $b_0 = 1$, то неизвестные коэффициенты $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8$ могут быть непосредственно найдены из первых восьми уравнений путем последовательного их решения. Формулы для них будут

$$\begin{aligned} b_1 &= \text{Vi}_1; \quad b_2 = -\mu/2; \quad b_3 = -\text{Vi}_1\mu/6; \quad b_4 = \mu^2/24; \quad b_5 = \text{Vi}_1\mu^2/120; \\ b_6 &= -\mu^3/720; \quad b_7 = \text{Vi}_1\mu^3/5040; \quad b_8 = \mu^4/40320. \end{aligned}$$

Оставшийся коэффициент b_9 находим из решения уравнения (10.150), составленного из основного граничного условия (10.148). Формула для него при $\text{Vi}_1 = 3, \text{Vi}_2 = 2$ имеет вид

$$b_9 = -1 + \frac{9}{22}\mu - \frac{17}{440}\mu^2 + \frac{83}{55440}\mu^3 - \frac{1}{44352}\mu^4.$$

После определения коэффициентов b_i составляем интеграл взвешенной невязки уравнения (10.146), т.е.

$$\int_0^1 [\Psi_m''(\rho) + \mu \Psi_m(\rho)] d\rho = 0.$$

Отсюда для определения собственных чисел получаем характеристическое уравнение пятой степени

$$\frac{197}{55} \mu - 9 - \frac{27}{88} \mu^2 + \frac{37}{3850} \mu^3 - \frac{283}{2217600} \mu^4 + \frac{1}{1995840} \mu^5 = 0.$$

Первые два корня этого уравнения имеют вид

$$\mu_1 = 3,40427837936; \quad \mu_2 = 17,593927760071.$$

Для уточнения первых двух собственных чисел составляем невязку уравнения (10.146) и требуем ее ортогональность к собственной функции (10.149), т.е.

$$\int_0^1 [\Psi_m''(\rho) + \mu \Psi_m(\rho)] \Psi_m(\rho) d\rho = 0.$$

Отсюда получаем характеристическое уравнение, корни которого имеют следующие значения:

$$\mu_1 = 3,40429054352; \quad \mu_2 = 17,68929784568.$$

Точные значения собственных чисел представлены в табл. 10.8.

Т а б л и ц а 10.8

Число приближений	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
2	3,404278 3,404290	17,593 17,689			
3	3,404290 3,404290	17,683 17,683	48,120 48,586		
4	3,404290 3,404290	17,683 17,683	48,569 48,569	95,497 98,594	
5	3,404290 3,404290	17,683 17,683	48,569 48,569	98,357 98,357	166,909 167,648
Точные значения	3,404025	17,682	48,566	98,346	167,650

Подставляя (10.145), (10.149) в (10.142), получаем

$$\bar{\Theta}(\rho, Fo) = \sum_{n=1}^2 A_n \Psi_n(\rho) \exp(-\mu_n Fo). \quad (10.151)$$

Общее решение задачи (10.132)—(10.135) с учетом (10.137) и (10.151) будет

$$\Theta(\rho, Fo) = F_1 + F_2 \rho + \sum_{n=1}^2 A_n \Psi_n(\rho) \exp(-\mu_n Fo). \quad (10.152)$$

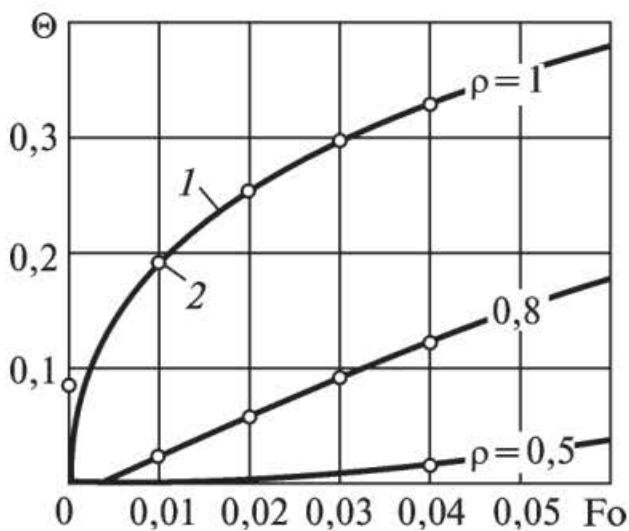
Неизвестные коэффициенты A_n в соотношении (10.152) находим из начального условия (10.133). Для этого составляем его невязку и требуем ее ортогональность к каждой собственной функции, т.е.

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^2 A_n \Psi_n(\rho) \exp(-\mu_n Fo) + F_1 + F_2 \rho \right] \Psi_j(\rho) d\rho = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (10.153)$$

Определяя интегралы в (10.153), для нахождения коэффициентов получим систему двух алгебраических линейных уравнений с двумя неизвестными. Из решения этой системы находим:

$$A_1 = -0,27528321009; \quad A_2 = 0,13713287824.$$

На рис. 10.24 представлены результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (10.136) в пятом приближении. При этом было использовано 30 членов ряда (10.149). Значения собственных чисел для различного числа приближений в сравнении с их точными значениями представлены в табл. 10.8. Здесь представлены значения собственных чисел для случаев, когда интегрируется лишь невязка уравнения (верхняя строка) и когда требуется ортогональность невязки к собственным функциям $\Psi_j(\rho)$ ($j = 1, n$) (нижняя строка в каждом приближении).



Р и с. 10.24. Распределение температуры в пластине:

1 — точное решение; 2 — по формуле (10.136) (пятое приближение)

Безразмерные температуры (см. рис. 10.24), полученные по формуле (10.136), в пятом приближении для чисел $Fo \geq 0,005$ практически совпадают с их точными значениями.

§ 10.10. Метод дополнительных граничных условий в задачах теплопроводности для многослойных конструкций

Рассмотрим применение рассмотренного ранее метода дополнительных граничных условий к решению задачи теплопроводности для двухслойной бесконечно протяженной пластины при граничных условиях третьего рода в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial \Theta_i(x, Fo)}{\partial Fo} = \frac{a_i}{a} \frac{\partial^2 \Theta_i(x, Fo)}{\partial x^2} \quad (Fo > 0; \quad x_{i-1} \leq x < x_i; \quad i = 1, 2; \quad (10.154)$$

$$x_0 = 0; \quad x_2 = 1);$$

$$\Theta_i(x, 0) = 1; \quad (10.155)$$

$$\partial \Theta_1(0, Fo) / \partial x = 0; \quad (10.156)$$

$$\Theta_1(x_1, Fo) = \Theta_2(x_1, Fo); \quad (10.157)$$

$$\lambda_1 \partial \Theta_1(x_1, Fo) / \partial x = \lambda_2 \partial \Theta_2(x_1, Fo) / \partial x; \quad (10.158)$$

$$\partial \Theta_2(1, Fo) / \partial x + Bi \Theta_2(1, Fo) = 0, \quad (10.159)$$

где x — безразмерная координата, $x = \eta / \delta$; $Fo = \alpha \tau / \delta^2$; $Bi = \alpha \delta / \lambda_2$; Θ — относительная избыточная температура, $\Theta_i(x, Fo) = (t_1 - t_c) / (t_{0i} - t_c)$; a — наименьший из коэффициентов температуропроводности, $a_i (i = 1, 2)$; $\lambda_i (i = 1, 2)$ — коэффициент теплопроводности первого и второго слоя; t_0 — начальная температура; t_c — температура среды; $\delta = \delta_1 + \delta_2$ — толщина двухслойной пластины; τ — время.

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (10.154)—(10.159) находим в виде

$$\Theta_i(x, Fo) = \varphi_i(Fo) \Psi_i(x). \quad (10.160)$$

Подставляя (10.160) в (10.154), получаем следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\varphi_i^I(\text{Fo}) + \mu \varphi_i(\text{Fo}) = 0; \quad (10.161)$$

$$\frac{a_i}{a} \Psi_i^{II}(x) + \mu \Psi_i(x) = 0, \quad (10.162)$$

где $\mu = \nu^2$.

Решение уравнения (10.161) известно и имеет вид

$$\varphi_{ni}(\text{Fo}) = A_n \exp(-\mu_n \text{Fo}), \quad (10.163)$$

где A_n — неизвестные коэффициенты.

Граничные условия и условия сопряжения для уравнения (10.162):

$$\Psi_1^I(0) = 0; \quad (10.164)$$

$$\Psi_1(x_1) = \Psi_2(x_1); \quad (10.165)$$

$$\lambda_1 \Psi_1^I(x_1) = \lambda_2 \Psi_2^I(x_1); \quad (10.166)$$

$$\Psi_2^I(1) + \text{Bi} \Psi_2(1) = 0. \quad (10.167)$$

Решение уравнения (10.162) принимаем в виде

$$\Psi_{ni}(x) = \sum_{k=0}^n C_{ki} N_{ki}(x) \quad (i = 1, 2), \quad (10.168)$$

где C_{ki} — неизвестные коэффициенты; $N_{ki}(x)$ — координатные функции.

В качестве координатных для первого и второго слоя примем функции

$$N_{k1}(x) = x^k \quad (k = 0, 2, 4, 6, \dots); \quad (10.169)$$

$$N_{k2}(x) = x^k \quad (k = 0, 1, 3, 5, \dots). \quad (10.170)$$

Неизвестные коэффициенты C_{ki} ($k = \overline{0, n}$; $i = 1, 2$) находим из граничных условий (10.164)—(10.167). Так как число коэффициентов C_{ki} может быть сколь угодно большим, а граничных условий и условий сопряжения только четыре, то необходимо ввести дополнительные граничные условия. Их можно получить путем записи уравнения (10.162) и производных от него различных степеней в точках $x = 0$ и $x = 1$. В качестве первого дополнительного условия возьмем соотношение

$$\Psi_1(0) = \text{const} = 1, \quad (10.171)$$

получаемое из граничного условия (10.164). Другие дополнительные граничные условия (в точке $x = 0$) будут иметь вид

$$\Psi_1^{\text{II}}(0) = -\mu a_2/a_1; \quad \Psi_1^{\text{III}}(0) = 0; \quad \Psi_1^{\text{IV}}(0) = \mu^2 a_2/a_1.$$

Для получения дополнительного граничного условия в точке $x = 1$ продифференцируем уравнение (10.159) по переменной Fo :

$$\frac{\partial^2 \Theta_2(1, \text{Fo})}{\partial x \partial \text{Fo}} + \text{Bi} \frac{\partial \Theta_2(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = 0. \quad (10.172)$$

Продифференцируем уравнение (10.154) по переменной x и запишем полученное соотношение для точки $x = 1$:

$$\frac{\partial^2 \Theta_2(1, \text{Fo})}{\partial x \partial \text{Fo}} = \frac{a_i}{a} \frac{\partial^3 \Theta_2(1, \text{Fo})}{\partial x^3}. \quad (10.173)$$

Соотношение (10.172) перепишем с учетом уравнения (10.154)

$$\frac{\partial^2 \Theta_2(1, \text{Fo})}{\partial x \partial \text{Fo}} = -\text{Bi} \frac{a_i}{a} \frac{\partial^2 \Theta_2(1, \text{Fo})}{\partial x^2}. \quad (10.174)$$

Сравнивая (10.173) и (10.174), получаем

$$\frac{\partial^3 \Theta_2(1, \text{Fo})}{\partial x^3} + \text{Bi} \frac{\partial^2 \Theta_2(1, \text{Fo})}{\partial x^2} = 0. \quad (10.175)$$

Из (10.175) имеем следующее дополнительное граничное условие:

$$\Psi_2^{\text{III}}(1) + \text{Bi} \Psi_2^{\text{II}}(1) = 0. \quad (10.176)$$

Для нахождения коэффициентов C_{ki} подставим (10.168) во все основные и дополнительные граничные условия. При этом в соотношении (10.168) для первого слоя ограничимся пятью членами ряда, а для второго слоя — четырьмя. В итоге будем иметь девять алгебраических линейных уравнений (по числу основных и дополнительных граничных условий) с девятью неизвестными C_{k1} ($k = 0, 4$) и C_{k2} ($k = 0, 3$).

Анализ этой системы уравнений позволяет заключить, что в пять уравнений, содержащих неизвестные C_{k1} , входят лишь по одному неизвестному (уравнения разделяются), которые легко могут быть определены. Эти неизвестные будут

$$C_{01} = 1; \quad C_{11} = 0; \quad C_{21} = -\frac{1}{2} \mu \frac{a_2}{a_1}; \quad C_{31} = 0; \quad C_{41} = \frac{1}{24} \mu^2 \frac{a_2}{a_1}.$$

Для определения коэффициентов C_{k2} ($k = \overline{0, 3}$) необходимо решать четыре алгебраических линейных уравнения, составленных из граничных условий (10.165)—(10.167), (10.176).

Найдем решение задачи (10.154)—(10.159) при следующих исходных данных: $\eta_1 = 0,002$ м; $\eta_2 = 0,006$ м; $a_1 = 12,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $a_2 = 6 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\lambda_1 = 45,24$ Вт/(м · К); $\lambda_2 = 16,24$ Вт/(м · К); $Bi = 2$; $a = a_2$.

После определения коэффициентов C_{ki} составляем интеграл взвешенной невязки уравнения (10.162):

$$\int_0^{x_1} \left(\frac{a_1}{a} \sum_{k=0}^4 C_{k1} \frac{\partial^2 N_{k1}}{\partial x^2} + \mu \sum_{k=0}^4 C_{k1} N_{k1} \right) dx + \int_{x_1}^1 \left(\frac{a_2}{a} \sum_{k=0}^3 C_{k2} \frac{\partial^2 N_{k2}}{\partial x^2} + \mu \sum_{k=0}^3 C_{k2} N_{k2} \right) dx = 0. \quad (10.177)$$

Определяя интегралы в соотношении (10.177), относительно параметра μ получаем характеристическое уравнение вида

$$-8,02234 \cdot 10^{-2} \mu^2 + 1,19421 \cdot 10^{-3} \mu^3 - 1,21949 + 1,25019 \mu = 0. \quad (10.178)$$

Его корни

$$\mu_1 = 1,044343; \quad \mu_2 = 22,316056; \quad \mu_3 = 43,816549. \quad (10.179)$$

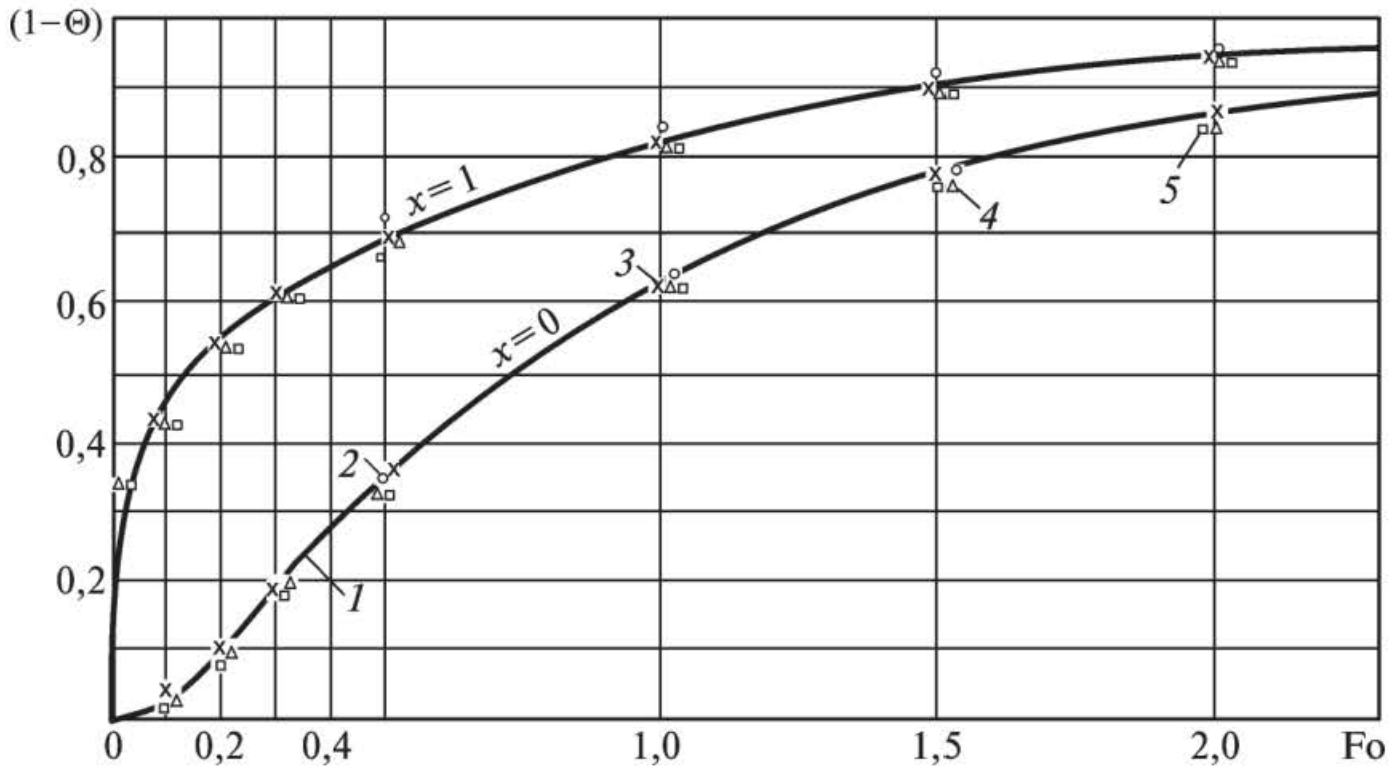
Собственные функции, соответствующие каждому собственному числу, находим из (10.168).

Соотношение (10.160) с учетом (10.163), (10.168) для каждого собственного числа:

$$\Theta_{ki}(x, Fo) = A_k \Psi_{ki}(x, \mu_k) \exp(-\mu_k Fo) \quad (k = \overline{1, 3}; \quad i = 1, 2). \quad (10.180)$$

Каждое частное решение вида (10.180) точно удовлетворяет граничным условиям (10.156), (10.159) и условиям сопряжения (10.157), (10.158) и приближенно (в зависимости от числа приближений — количества найденных из полинома (10.178) собственных чисел) — уравнению (10.154). Но ни одно из этих частных решений, в том числе и их сумма

$$\Theta_i(x, Fo) = \sum_{k=1}^3 A_k \Psi_{ki}(x, \mu_k) \exp(-\mu_k Fo) \quad (i = 1, 2), \quad (10.181)$$



Р и с. 10.25. Распределение температуры в двухслойной пластине:

1 — метод прогонки; 2 — точное решение (численное интегрирование уравнений (10.154)); 3 — по формуле (10.181) (третье приближение); 4, 5 — по данным [6] (шестое приближение)

не удовлетворяют начальному условию (10.155). Для того чтобы соотношение (10.181) удовлетворяло начальному условию, составляем его невязку и требуем ортогональность невязки к каждой собственной функции $\Psi_{k1}(x, \mu)$, т.е.

$$\int_0^{x_1} \left[\sum_{k=1}^3 A_k \Psi_{k1}(x, \mu_k) - 1 \right] \Psi_{j1}(x, \mu_j) dx +$$

$$+ \int_{x_1}^1 \left[\sum_{k=1}^3 A_k \Psi_{k2}(x, \mu_k) - 1 \right] \Psi_{j2}(x, \mu_j) dx = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (10.182)$$

Определяя интегралы в (10.182), относительно неизвестных коэффициентов A_k ($k = 1, 2, 3$) получим систему трех алгебраических линейных уравнений. Из решения этой системы находим $A_1 = 1,119281$; $A_2 = -0,500714$; $A_3 = 0,404640$.

После определения A_k решение задачи (10.154)—(10.159) в замкнутом виде находим из (10.181). Результаты расчетов по формуле (10.181) в сравнении с результатами, полученными другими методами, представлены на рис. 10.25.

ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФРОНТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

§ 11.1. Неограниченная пластина (граничные условия первого рода)

Известно, что решения задач теплопроводности, полученные с помощью классических аналитических методов, имеют вид бесконечных рядов, плохо сходящихся в окрестностях граничных точек и при малых значениях временной координаты. Исследования показывают, что сходимость точного аналитического решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при граничных условиях первого рода в диапазоне чисел Фурье $10^{-12} \leq Fo \leq 10^{-7}$ наблюдается лишь при использовании от 1000 ($Fo = 10^{-7}$) до 500 000 ($Fo = 10^{-12}$) членов ряда.

Эта проблема еще в большей степени характерна для вариационных методов (Ритца, Треффтца, Л.В. Канторовича и др.), а также методов взвешенных невязок (ортогональный метод Бубнова—Галеркина, метод моментов, коллокаций и др.). Для получения решений нестационарных задач теплопроводности при малых значениях временной координаты они практически неприменимы ввиду того, что при большом числе приближений относительно неизвестных коэффициентов искомого решения получаются большие системы алгебраических линейных уравнений. Матрицы коэффициентов таких систем, являясь заполненными квадратными матрицами с большим разбросом коэффициентов по абсолютной величине, как правило, плохо обусловлены.

В аналитической теории теплопроводности известны методы, в которых используется понятие глубины термического слоя (интегральные методы теплового баланса). При их использовании процесс нагрева (охлаждения) тел формально разделяют на две стадии. Первая характеризуется постепенным продвижением фронта температурного возмущения от поверхности к центру, а вторая — изменением температуры по всему объему тела вплоть до наступления стационарного режима. Перемещение фронта температурного возмущения учитывается введением новой функции $q_1(Fo)$, называемой глубиной проникания (глубиной термического слоя). Такую модель процесса

теплопроводности используют в ряде методов: интегральном методе теплового баланса; осреднения функциональных поправок; методах М.Е. Швеца, М. Био, А.И. Вейника и др.

Несомненным их преимуществом является возможность получения простых по форме аналитических решений удовлетворительной точности как для регулярного, так и нерегулярного процессов теплопроводности. Однако их серьезным недостатком является низкая точность. Причина в том, что получаемое решение, точно удовлетворяя начальному и граничным условиям, основному дифференциальному уравнению удовлетворяет лишь в среднем. Это связано с тем, что в основу положено построение так называемого интеграла теплового баланса, что равнозначно осреднению исходного дифференциального уравнения в пределах глубины термического слоя. Следовательно, очевидным путем повышения точности интегральных методов является улучшение выполнения исходного дифференциального уравнения. С этой целью в настоящей работе избрано направление аппроксимации температурной функции полиномами более высоких степеней. Для определения неизвестных коэффициентов таких полиномов основных граничных условий оказывается недостаточно. В связи с чем возникает необходимость привлечения дополнительных граничных условий, определяемых из исходного дифференциального уравнения с использованием основных граничных условий и условий, задаваемых на фронте температурного возмущения. Таким путем можно получать аналитические решения ряда краевых задач практически с заданной степенью точности во всем диапазоне времени нестационарного процесса ($0 \leq Fo < \infty$) без каких-либо ограничений на число Фурье в области малых его значений.

Основную идею метода рассмотрим на примере решения задачи теплопроводности для бесконечной пластины в следующей математической постановке:

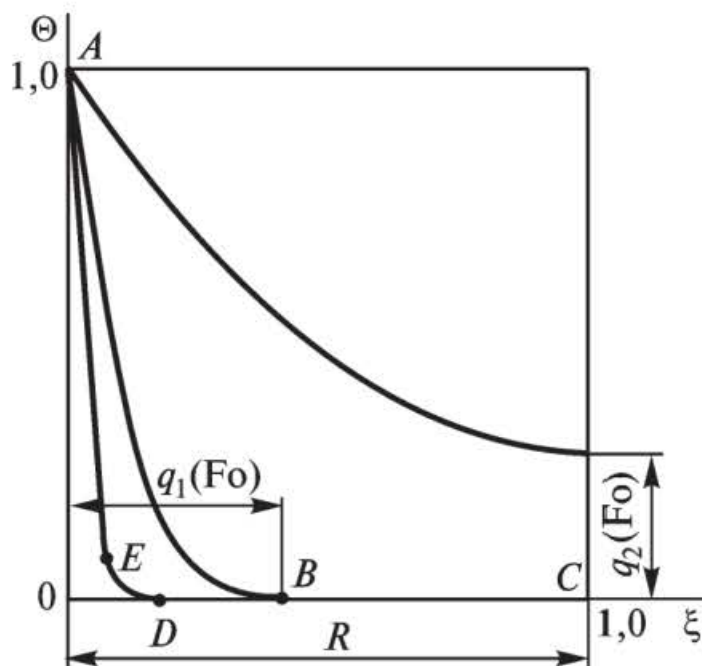
$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (11.1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (11.2)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad (11.3)$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0, \quad (11.4)$$

где Θ — относительная избыточная температура, $\Theta = (T - T_0) / (T_{ст} - T_0)$; $Fo = a\tau / R^2$; ξ — безразмерная координата, $\xi = x / R$; x — координата; R — половина толщины пластины; a — коэффициент температуро-



Р и с. 11.1. Расчетная схема теплообмена

проводности; τ — время; T_0 — начальная температура; $T_{ст}$ — температура стенки при $\xi = 0$.

Процесс нагрева разделим на две стадии по времени: $0 < Fo \leq Fo_1$ и $Fo_1 \leq Fo < \infty$. Для этого введем движущуюся во времени границу (фронт температурного возмущения), разделяющую исходную область $0 \leq \xi \leq 1$ на две подобласти $0 \leq \xi \leq q_1(Fo)$ и $q_1(Fo) \leq \xi \leq 1$, где $q_1(Fo)$ — функция, определяющая продвижение границы раздела во времени (рис. 11.1). При этом в области, расположенной за фронтом температурного возмущения, сохраняется начальная температура. Первая стадия процесса заканчивается при достижении движущейся границей центра пластины ($\xi = 1$), т.е. когда $Fo = Fo_1$. Во второй стадии изменение температуры происходит по всему объему тела $0 \leq \xi \leq 1$. Здесь вводят в рассмотрение дополнительную искомую функцию $q_2(Fo) = \Theta(1, Fo)$, характеризующую изменение температуры во времени в центре пластины.

Разделение процесса теплопроводности на два взаимосвязанных процесса позволяет существенно упростить последовательность получения решения задачи, так как в данном случае оказывается возможным применение метода аппроксимационного представления приближенного решения с определением любого числа его слагаемых. При определении неизвестных коэффициентов полинома возникает необходимость использования дополнительных граничных условий, нахождение которых связано с включением граничных точек по пространственной координате в область определения исходного дифференциального уравнения. Физический смысл дополнительных граничных условий состоит в том, что их выполнение равно-

сильно выполнению исходного дифференциального уравнения в граничных точках и на фронте температурного возмущения (т.е. внутри области). Причем точность его выполнения полностью определяется числом дополнительных граничных условий, от которого, в свою очередь, зависит число членов аппроксимирующего полинома (число приближений).

Математическая постановка краевой задачи для первой стадии процесса имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo)); \quad (11.5)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad (11.6)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (11.7)$$

$$\partial \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi = 0, \quad (11.8)$$

где соотношения (11.7), (11.8) представляют условия сопряжения прогретой и непрогретой зон. Соотношение (11.7) устанавливает равенство температуры тела в точке $\xi = q_1(Fo)$ его начальной температуре. Согласно условию (11.8) тепловой поток не распространяется за пределы фронта температурного возмущения (условие адиабатной стенки).

В связи с принятием допущения о равенстве температуры тела на фронте температурного возмущения $\xi = q_1(Fo)$ его начальной температуре обратим внимание на тот очевидный факт, что на первой стадии процесса задача (11.5) — (11.8) за пределами фронта температурного возмущения, т. е. на отрезке $q_1(Fo) \leq \xi \leq 1$, вообще не определена. В связи с чем здесь нет необходимости в выполнении начального условия вида (11.2) по всей толщине пластины (поэтому оно отсутствует в математической постановке задачи (11.5)—(11.8)). В данном случае вполне достаточным является выполнение граничного условия (11.7), согласно которому для всех $\xi = q_1(Fo)$ температура тела равна начальной температуре. Кроме того, в данной задаче отсутствует также граничное условие типа (11.4) ввиду того, что оно не влияет на процесс теплообмена в первой его стадии.

При использовании классического аналитического решения, полученного, например, с помощью метода разделения переменных, наибольшие проблемы возникают в случае нахождения температуры для малых значений числа Фурье ($Fo \rightarrow 0$). Это связано с тем, что искомое решение в данном случае должно описывать две линии — DC и AE , имеющую незначительную кривизну (см. рис. 11.1), связанные

между собой криволинейным участком ED и находящиеся почти под прямым углом друг к другу. Причем на одной из них (линия DC) температура неизменна, а на другой, при незначительно изменяющейся координате ξ , изменяется практически от нуля до единицы. Удовлетворить всем этим столь неоднородным и к тому же изменяющимся во времени условиям в одном аналитическом выражении (при $Fo \rightarrow 0$) можно лишь при использовании в нем бесконечно большого числа членов ряда, о чем уже упоминалось ранее.

Преимущество используемого здесь метода состоит в том, что получаемое решение в данном случае не связано с необходимостью аппроксимации температуры на участках DC , BC и др., т.е. за фронтом температурного возмущения $q_1(Fo) \leq \xi \leq 1$, так как в этой области на первой стадии процесса задача (11.5)—(11.8) не определена. Получаемое аналитическое решение описывает изменение температуры во времени, характеризуемое лишь кривыми вида AD , AB и др., для практически точного описания которых достаточно всего нескольких членов ряда решения вне зависимости от значения временной координаты.

Отметим, что задача (11.5)—(11.8) не относится к классу задач, в которых учитывается конечная скорость продвижения тепловой волны. Получение их решений сводится к интегрированию гиперболического (волнового) уравнения теплопроводности. Введенный в задаче (11.5)—(11.8) фронт температурного возмущения по физическому смыслу является аналогом движущейся изотермы (но не тепловой волны). Ввиду того что на фронте температурного возмущения в процессе его движения по координате ξ поддерживается начальная температура $\Theta(q_1, Fo) = 0$, то, следовательно, он является аналогом нулевой изотермы (будет показано, что скорость продвижения нулевой изотермы при $n \rightarrow \infty$ приближается к бесконечному значению, т.е. $Fo_1 \rightarrow 0$).

Решение задачи (11.5)—(11.8) находим в виде следующего полинома:

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n a_k(q_1) \xi^k, \quad (11.9)$$

где $a_k(q_1)$ — неизвестные коэффициенты. Для их определения используют граничные условия (11.6)—(11.8). Подставляя (11.9) (ограничиваясь тремя членами ряда) в (11.6)—(11.8), для определения $a_k(q_1)$ ($k = 0, 1, 2$) будем иметь систему трех алгебраических линейных уравнений. После определения $a_k(q_1)$ соотношение (11.9) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = (1 - \xi / q_1)^2. \quad (11.10)$$

Для нахождения неизвестной функции $q_1(\text{Fo})$ в первом приближении составим невязку уравнения (11.5) и проинтегрируем ее в пределах глубины термического слоя (что равнозначно построению интеграла теплового баланса — осреднению уравнения (11.5)):

$$\int_0^{q_1(\text{Fo})} \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} d\xi = \int_0^{q_1(\text{Fo})} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (11.11)$$

Подставляя (11.10) в (11.11), после определения интегралов получаем

$$q_1 dq_1 = 6d\text{Fo}. \quad (11.12)$$

Интегрируя уравнение (11.12), при начальном условии $q_1(0) = 0$ находим

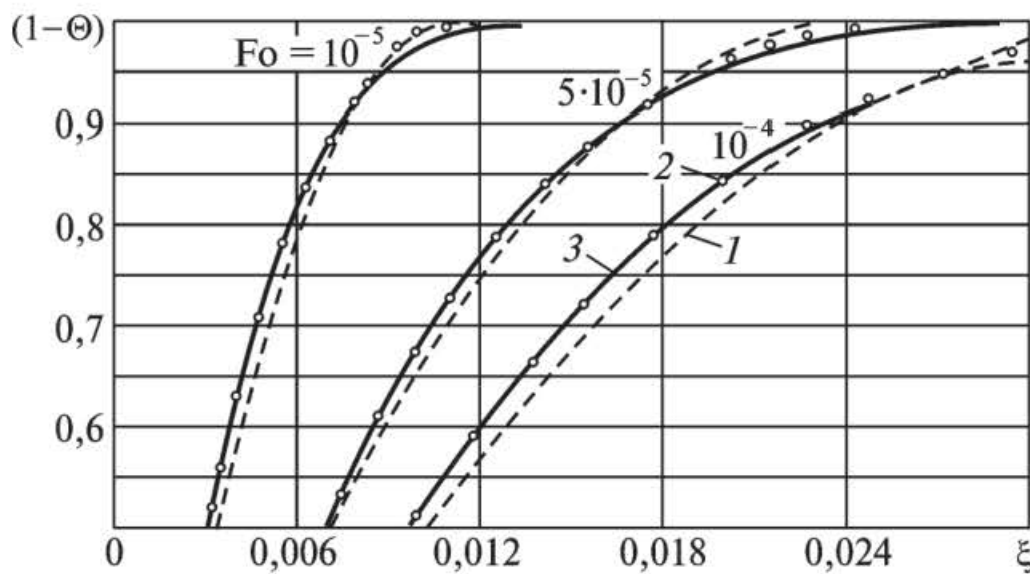
$$q_1(\text{Fo}) = \sqrt{12\text{Fo}}. \quad (11.13)$$

Положив $q_1(\text{Fo}_1) = 1$, из (11.13) определяем время окончания первой стадии процесса $\text{Fo}_1 = 1/12 \approx 0,083333$.

Соотношения (11.10), (11.13) определяют решение задачи (11.5)—(11.8) в первом приближении.

Результаты расчетов по формуле (11.10) в сравнении с точным решением приведены на рис. 11.2. Их анализ позволяет заключить, что расхождение с точным решением составляет 3...4%. При этом основная погрешность возникает из-за неточного выполнения дифференциального уравнения (11.5). Отметим, что граничные условия (11.6)—(11.8) и интеграл теплового баланса (11.11) выполняются точно.

Очевидным путем повышения точности решения является увеличение степени аппроксимирующего полинома (11.9). Для определе-



Р и с. 11.2. Изменение относительной избыточной температуры в пластине:

1 — по формуле (11.10); 2 — по формуле (11.24); 3 — точное решение

ния появляющихся при этом дополнительных неизвестных коэффициентов необходимо привлекать дополнительные граничные условия. Для их получения будем последовательно дифференцировать граничные условия (11.6)—(11.8) по переменной F_0 , а уравнение (11.5) — по переменной ξ . Сравнивая получающиеся при этом соотношения, можно найти любое необходимое число дополнительных граничных условий. Для получения первого из них продифференцируем условие (11.6) по переменной F_0 :

$$\partial\Theta(0, F_0)/\partial F_0 = 0. \quad (11.14)$$

Сравнивая (11.14) с уравнением (11.5), находим первое дополнительное граничное условие

$$\partial^2\Theta(0, F_0)/\partial\xi^2 = 0. \quad (11.15)$$

Продифференцируем соотношение (11.7) по переменной F_0 . Так как из (11.7) требуется находить значение $\Theta(\xi, F_0)$ в точке $\xi = q_1(F_0)$, то ξ является функцией F_0 , и, следовательно, $\Theta(\xi, F_0)$ будет сложной функцией. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial F_0} [\Theta(\xi, F_0)|_{\xi=q_1(F_0)}] &= \left[\frac{\partial\Theta(\xi, F_0)}{\partial\xi} \frac{d\xi}{dF_0} \right]_{\xi=q_1(F_0)} + \frac{\partial\Theta(\xi, F_0)}{\partial F_0} \Big|_{\xi=q_1(F_0)} = \\ &= \frac{\partial\Theta(\xi, F_0)}{\partial\xi} \Big|_{\xi=q_1(F_0)} \frac{dq_1}{dF_0} + \frac{\partial\Theta(\xi, F_0)}{\partial F_0} \Big|_{\xi=q_1(F_0)} = 0. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Соотношение (11.16) с учетом (11.8) приводим к виду

$$\partial\Theta(q_1, F_0)/\partial F_0 = 0. \quad (11.17)$$

Сравнивая (11.17) с уравнением (11.5), применительно к точке $\xi = q_1(F_0)$ получаем второе дополнительное граничное условие

$$\partial^2\Theta(q_1, F_0)/\partial\xi^2 = 0. \quad (11.18)$$

Продифференцируем соотношение (11.8) по F_0 с учетом того, что переменная ξ является функцией F_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial F_0} \left[\frac{\partial\Theta(\xi, F_0)}{\partial\xi} \Big|_{\xi=q_1(F_0)} \right] &= \left[\frac{\partial^2\Theta(\xi, F_0)}{\partial\xi^2} \frac{d\xi}{dF_0} \right]_{\xi=q_1(F_0)} + \frac{\partial^2\Theta(\xi, F_0)}{\partial\xi \partial F_0} \Big|_{\xi=q_1(F_0)} = \\ &= \frac{\partial^2\Theta(\xi, F_0)}{\partial\xi^2} \Big|_{\xi=q_1(F_0)} \frac{dq_1}{dF_0} + \frac{\partial^2\Theta(\xi, F_0)}{\partial\xi \partial F_0} \Big|_{\xi=q_1(F_0)} = 0. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Соотношение (11.19) с учетом (11.18) приводим к виду

$$\partial^2 \Theta(q_1, Fo) / (\partial \xi \partial Fo) = 0. \quad (11.20)$$

Продифференцируем уравнение (11.5) по переменной ξ и применим полученное соотношение к точке $\xi = q_1(Fo)$:

$$\partial^2 \Theta(q_1, Fo) / (\partial Fo \partial \xi) = \partial^3 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^3. \quad (11.21)$$

Так как $\Theta(\xi, Fo)$ и получаемые частные производные являются непрерывными функциями, то правомерна замена порядка дифференцирования, т.е.

$$\partial^2 \Theta(q_1, Fo) / (\partial Fo \partial \xi) = \partial^2 \Theta(q_1, Fo) / (\partial \xi \partial Fo). \quad (11.22)$$

Сравнивая (11.20) и (11.21), находим третье дополнительное граничное условие

$$\partial^3 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^3 = 0. \quad (11.23)$$

Во втором приближении, используя дополнительные граничные условия (11.15), (11.18), (11.23) совместно с заданными (11.6)—(11.8), можно найти уже шесть коэффициентов полинома (11.9) и задать температурную функцию в виде полинома пятой степени. Подставляя (11.9), ограничиваясь шестью членами ряда, во все перечисленные условия, относительно неизвестных коэффициентов a_k получаем систему шести алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы коэффициенты a_k ($k = 0, 5$) в соотношение (11.9), находим

$$\Theta(\xi, Fo) = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{q_1}\right) \left(1 - \frac{\xi}{q_1}\right)^4. \quad (11.24)$$

Подставляя (11.24) в (11.11), относительно $q_1(Fo)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$q_1 dq_1 = 10 dFo. \quad (11.25)$$

Интегрируя (11.25), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1 = \sqrt{20Fo}. \quad (11.26)$$

Положив в (11.26) $q_1(Fo_1) = 1$, находим $Fo = Fo_1 = 0,05$.

Соотношения (11.24), (11.26) определяют решение задачи (11.5)—(11.8) с дополнительными граничными условиями (11.15), (11.18), (11.23) во втором приближении. Анализ результатов расчетов по формуле (11.24) в сравнении с точным решением (см. рис. 11.2) позволяет

заклучить, что в диапазоне чисел Фурье $1 \cdot 10^{-5} \leq Fo \leq Fo_1 = 0,05$ отклонение составляет 1...2 %.

Применяя рассмотренный ранее способ, можно получить какое угодно число дополнительных граничных условий. Например, для получения четвертого дополнительного граничного условия продифференцируем граничное условие (11.15) по переменной Fo :

$$\partial^3 \Theta(0, Fo) / (\partial \xi^2 \partial Fo) = 0. \quad (11.27)$$

Продифференцируем уравнение (11.5) соответственно два и три раза по переменной ξ :

$$\frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo} = \frac{\partial^4 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^4}; \quad (11.28)$$

$$\frac{\partial^4 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^3 \partial Fo} = \frac{\partial^5 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^5}. \quad (11.29)$$

Сравнивая (11.27) и (11.28), применительно к точке $\xi = 0$ получаем четвертое дополнительное граничное условие

$$\partial^4 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^4 = 0. \quad (11.30)$$

Продифференцируем дополнительное граничное условие (11.18) по переменной Fo , считая, что $\xi = q_1(Fo)$ является функцией Fo :

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \left[\frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=q_1} \right] = \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=q_1} \frac{dq_1}{dFo} + \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo} \Big|_{\xi=q_1} = 0.$$

Последнее соотношение с учетом (11.23) примет вид

$$\partial^3 \Theta(q_1, Fo) / (\partial \xi^2 \partial Fo) = 0. \quad (11.31)$$

Сопоставляя (11.28) и (11.31), применительно к точке $\xi = q_1(Fo)$ находим пятое дополнительное граничное условие

$$\partial^4 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^4 = 0. \quad (11.32)$$

Дифференцируя условие (11.23) по переменной Fo , получаем

$$\frac{\partial^4 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^4} \Big|_{\xi=q_1} \frac{dq_1}{dFo} + \frac{\partial^4 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^3 \partial Fo} \Big|_{\xi=q_1} = 0. \quad (11.33)$$

Соотношение (11.33) с учетом (11.32) примет вид

$$\partial^4 \Theta(q_1, Fo) / (\partial \xi^3 \partial Fo) = 0. \quad (11.34)$$

Сопоставляя (11.29) и (11.34), применительно к точке $\xi = q_1(\text{Fo})$ находим шестое дополнительное граничное условие

$$\partial^5 \Theta(q_1, \text{Fo}) / \partial \xi^5 = 0. \quad (11.35)$$

Дополнительные граничные условия (11.15), (11.18), (11.23), (11.30), (11.32), (11.35) совместно с заданными (11.6)–(11.8) позволяют найти девять неизвестных коэффициентов a_k ($k = 0, 8$) из (11.9). Подставляя найденные из решения соответствующей системы алгебраических линейных уравнений значения коэффициентов a_k в (11.9), получаем следующее соотношение для определения температуры в третьем приближении:

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \left(1 + 3 \frac{\xi}{q_1} + 3 \frac{\xi^2}{q_1^2} \right) \left(1 - \frac{\xi}{q_1} \right)^6. \quad (11.36)$$

Подставляя (11.36) в (11.11), находим

$$5q_1 dq_1 = 72d\text{Fo}. \quad (11.37)$$

Интегрируя последнее уравнение, при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(\text{Fo}) = 12\sqrt{5\text{Fo}} / 5.$$

Время окончания первой стадии процесса $\text{Fo}_1 = 0,03472$.

Следующие три дополнительных граничных условия имеют вид

$$\frac{\partial^6 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^6} = 0; \quad \frac{\partial^6 \Theta(q_1, \text{Fo})}{\partial \xi^6} = 0; \quad \frac{\partial^7 \Theta(q_1, \text{Fo})}{\partial \xi^7} = 0.$$

Уравнение для $q_1(\text{Fo})$ в данном случае будет

$$7q_1 dq_1 = 132d\text{Fo}. \quad (11.38)$$

Его решение

$$q_1(\text{Fo}) = 2\sqrt{462\text{Fo}} / 7.$$

Вычисляя Fo_1 при $q_1(\text{Fo}_1) = 1$, находим $\text{Fo}_1 = 0,0265152$.

Соотношение (11.9) в четвертом приближении принимает вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{k=0}^{11} A_k (\xi / q_1)^k, \quad (11.39)$$

где $A_0 = 1$; $A_1 = -55/16$; $A_2 = A_4 = A_6 = 0$; $A_3 = 165/16$; $A_5 = -231/8$; $A_7 = 825/8$; $A_8 = -165$; $A_9 = 1925/16$; $A_{10} = -44$; $A_{11} = 105/16$.

Для получения решения в пятом приближении необходимо добавить еще три дополнительных граничных условия

$$\frac{\partial^8 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^8} = 0; \quad \frac{\partial^8 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^8} = 0; \quad \frac{\partial^9 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^9} = 0.$$

Уравнение относительно $q_1(Fo)$ в пятом приближении будет

$$21q_1 dq_1 = 490dFo. \quad (11.40)$$

Его решение

$$q_1(Fo) = 2\sqrt{105Fo} / 3. \quad (11.41)$$

Время окончания первой стадии процесса $Fo = Fo_1 = 0,0214286$.

Решение задачи (11.5)—(11.8) в пятом приближении записываем в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^{14} A_k (\xi / q_1)^k, \quad (11.42)$$

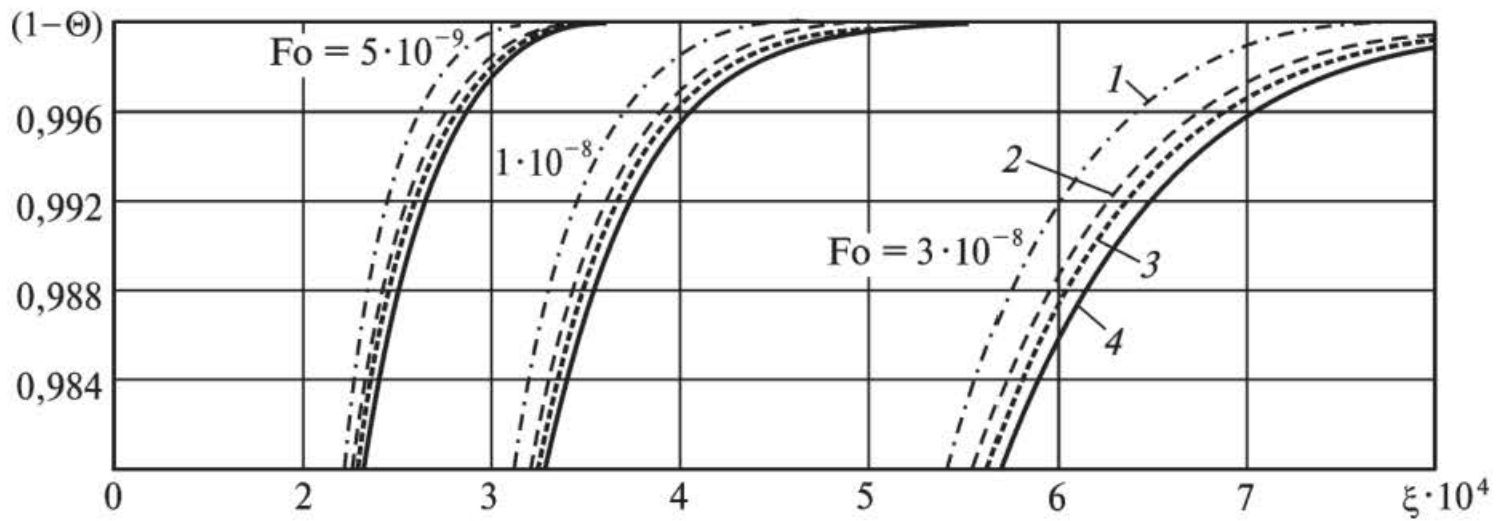
где $A_0 = 1$; $A_2 = A_4 = A_6 = A_8 = 0$; $A_1 = -245/64$; $A_3 = 455/32$; $A_5 = -3003/64$; $A_7 = 2145/16$; $A_9 = -35035/64$; $A_{10} = 1001$; $A_{11} = -28665/32$; $A_{12} = 455$; $A_{13} = -8085/64$; $A_{14} = 15$.

Аналогично можно записать дополнительные граничные условия и для других приближений. В частности, были также получены решения в десятом и четырнадцатом приближениях. Функция $q_1(Fo)$ для них соответственно определяется по формулам $q_1(Fo) = 2\sqrt{8262Fo} / 19$; $q_1(Fo) = 2\sqrt{287Fo} / 3$. Времена окончания первой стадии процесса для десятого и четырнадцатого приближений соответственно будут $Fo_1 = 0,010992$ и $Fo_1 = 0,00784$.

Формула для безразмерной температуры в десятом приближении имеет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^{29} A_k (\xi / q_1)^k, \quad (11.43)$$

где $A_0 = 1$; $A_2 = A_4 = A_6 = A_8 = A_{10} = A_{12} = A_{14} = A_{16} = A_{18} = 0$; $A_1 = -352495/\delta_1$; $A_3 = 1306305/\delta_2$; $A_5 = -16981965/\delta_1$; $A_7 = 21460725/\delta_3$; $A_9 = -350525175/\delta_1$; $A_{11} = 605452575/\delta_2$; $A_{13} = -3732515325/\delta_1$; $A_{15} = 1386362835/8192$; $A_{17} = -37105593525/\delta_1$; $A_{19} = 121732385775/\delta_2$; $A_{20} = -10015005$; $A_{21} = 991249427025/\delta_1$; $A_{22} = -15607800$; $A_{23} = 191981114325/\delta_3$; $A_{24} = -6531525$; $A_{25} = 176622625179/\delta_1$; $A_{26} =$



Р и с. 11.3. Изменение относительной избыточной температуры в пластине:

1 — третье приближение; 2 — седьмое; 3 — четырнадцатое; 4 — точное решение

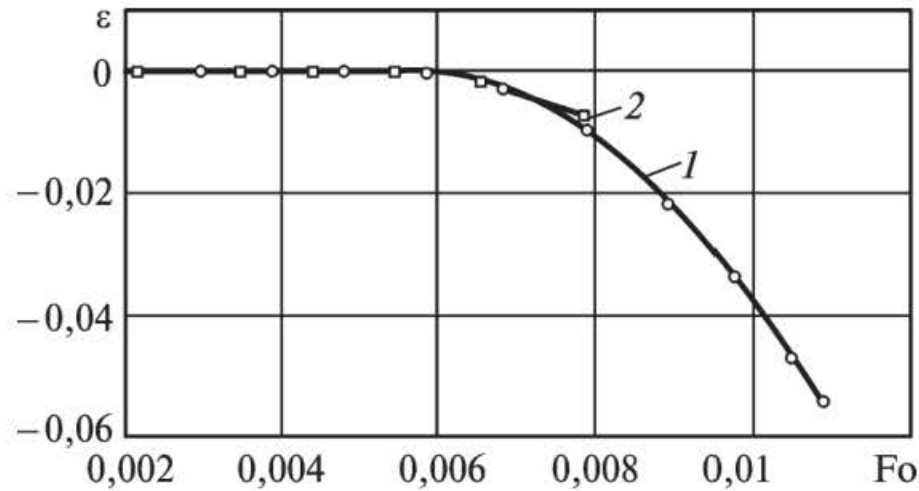
$$= -803880; \quad A_{27} = 5391411025/\delta_2; \quad A_{28} = -20735; \quad A_{29} = 79676025/\delta_1; \\ \delta_1 = 65536; \quad \delta_2 = 32768; \quad \delta_3 = 16384.$$

Отметим, что соотношения для полученных решений представляют степенные алгебраические полиномы относительно переменных ξ и Fo , которые не содержат как специальных функций (Бесселя, Лежандра, гамма-функций и др.), так и тригонометрических.

Анализируя результаты, можно заключить, что обыкновенные дифференциальные уравнения относительно функции $q_1(Fo)$ в любом приближении имеют одинаковый вид и отличаются лишь коэффициентами, что существенно упрощает их решение.

Результаты расчетов для третьего, седьмого и четырнадцатого приближений в сравнении с точным решением даны на рис. 11.3. Их анализ приводит к заключению о том, что с увеличением числа приближений решение всякий раз уточняется. Так, уже в седьмом приближении значения температур в диапазоне чисел $5 \cdot 10^{-9} \leq Fo \leq Fo_1$ отличаются от точных их значений не более чем на 0,002 %, а в четырнадцатом приближении — на 0,0004 %. Следует отметить трудности получения точного решения для столь малых чисел Фурье ввиду необходимости использования большого числа членов ряда точного решения. В частности, расчеты показали, что при $Fo = 10^{-7}$ для сходимости точного решения необходимо использовать около 1000 членов ряда. Для чисел $Fo = 10^{-8}; 10^{-9}; 10^{-10}; 10^{-11}; 10^{-12}$ сходимость точного решения наблюдается соответственно при следующих значениях чисел ряда: 5000; 10 000; 50 000; 200 000; 500 000.

Анализ полученных результатов позволяет сделать заключение о низкой эффективности применяемой в классических методах линейной суперпозиции частных решений с целью выполнения начального условия. Именно на этом этапе получения классического решения



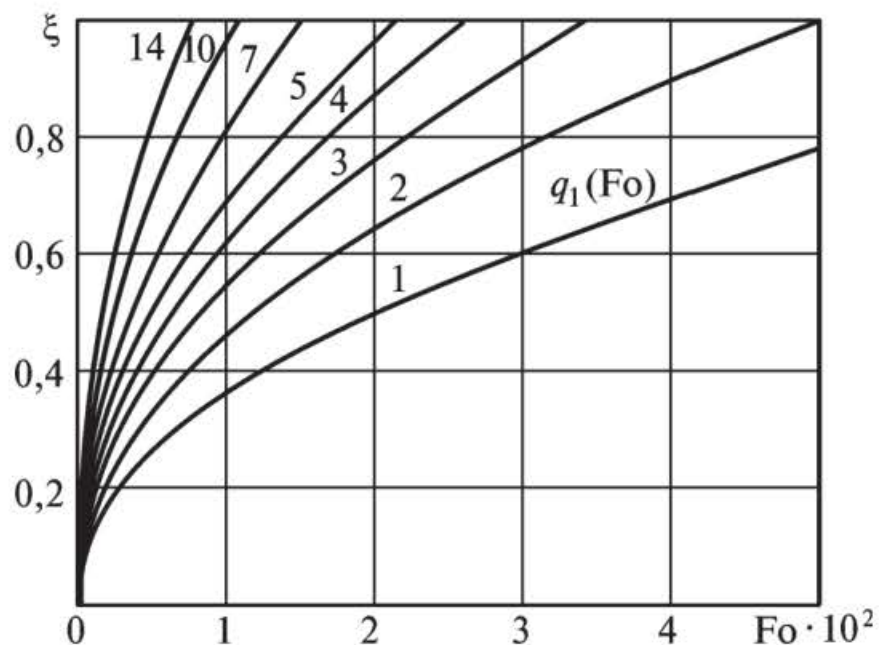
Р и с. 11.4. Изменение невязки уравнения (11.5) от безразмерного времени Fo в точке $\xi = 0,5$:

1 — седьмое приближение ($Fo_1 = 0,0154762$); 2 — четырнадцатое приближение ($Fo_1 = 0,00784$)

происходит его максимальное усложнение, что связано с необходимостью его подчинения столь неоднородным условиям, о которых уже упоминалось ранее и которые оказываются практически невыполнимыми при $Fo \rightarrow 0$ ($Fo \neq 0$) ввиду использования бесконечно большого числа членов ряда. Представление исходной краевой задачи в виде двух взаимосвязанных процессов, рассматриваемых отдельно и связанных лишь условием сопряжения при $Fo = Fo_1$, позволяет избежать указанных трудностей при возможности получения решения практически с любой заданной степенью точности.

Повышение точности решения с увеличением числа приближений происходит за счет повышения точности выполнения уравнения (11.5), что подтверждается анализом изменения его невязки ϵ (рис. 11.4). Отметим, что невязка уравнения (11.5) для любой точки координаты ξ определяется начиная с момента, когда фронт температурного возмущения достигает этой точки, и заканчивая моментом времени окончания первой стадии процесса в данном приближении, т.е. $Fo = Fo_1$. Из анализа полученных результатов следует, что с увеличением числа приближений невязка существенно уменьшается.

С целью дополнительного более глубокого анализа получаемых с помощью интегрального метода решений исследуем закономерности изменения фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$ во времени в сравнении с точным решением. Графики перемещения $q_1(Fo)$ по координате ξ во времени даны на рис. 11.5. Их анализ позволяет заключить, что с увеличением числа приближений время (Fo_1) достижения фронтом температурного возмущения координаты $\xi = 1$ уменьшается. Так, например, в первом приближении оно составляет $Fo_1 = 0,0833$. Для данного Fo_1 согласно точному решению температу-



Р и с. 11.5. Кривые перемещения фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$ по координате ξ во времени Fo : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14 — номер приближения

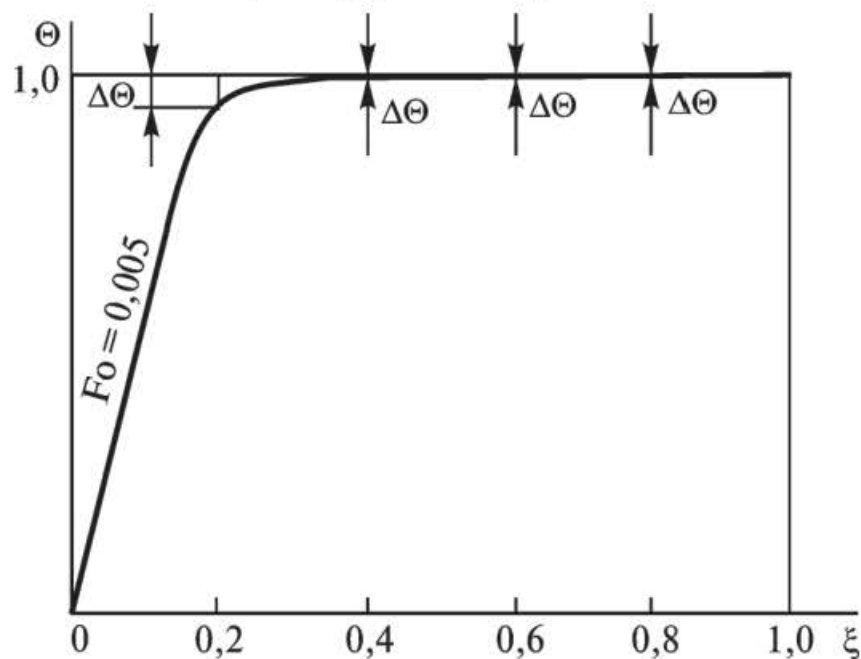
ра в центре пластины ($\xi = 1$) будет $\Theta_{\text{ц}}(1, Fo_1 = 0,0833) = 0,97139$. Согласно решению интегральным методом температура в данной точке равна $\Theta(1, Fo_1) = 1$ (так как в интегральном методе температура на фронте температурного возмущения, в том числе и в точке $\xi = 1$ при $Fo = Fo_1$, принимается равной начальной температуре $\Theta(\xi, 0) = 1$). Принятие начального условия равным единице, а граничного условия первого рода равным нулю (в отличие от задачи (11.1)—(11.4)) связано с удобством сравнения с точным аналитическим решением, полученным именно в такой постановке. Очевидно, что разность $v = \Theta(1, Fo_1) - \Theta_{\text{ц}}(1, Fo_1) = 1 - 0,971 = 0,0248$ (2,48 %) является отклонением решения, полученного интегральным методом, от точного аналитического решения.

Время окончания первой стадии процесса во втором приближении составляет $Fo_1 = 0,05$. Для этого Fo_1 температура, полученная из точного решения, будет $\Theta_{\text{ц}}(1, Fo_1) = 0,9969$. Следовательно, погрешность второго приближения по отношению к точному решению составит $v = 1 - 0,9969 = 0,0031$ (0,31 %). В третьем приближении расхождение решений будет $v = 1 - 0,9997 = 0,000295$ (0,0295 %), в четвертом $v = 0,28177 \cdot 10^{-4}$ (0,0028177 %), в четырнадцатом $v = 0,278538 \cdot 10^{-14}$ (0,278538 $\cdot 10^{-12}$ %).

Значения температур $\Theta_{\text{ц}}(1, Fo_1)$, полученных из точного аналитического решения, для различных значений чисел Fo_1 , найденных интегральным методом, а также величина v приведены в табл. 11.1.

Номер приближения	Fo_1	$\Theta_{\text{ц}}(1, Fo_1)$	ν
1	0,08333	0,97139	0,028608
2	0,05	0,996869	0,003131
3	0,0347222	0,9997044	$0,2956 \cdot 10^{-3}$
4	0,0265152	0,99997182	$0,28177 \cdot 10^{-4}$
5	0,0214286	0,9999972756	$0,2724 \cdot 10^{-5}$
7	0,0154762	0,999999973681	$0,263185416 \cdot 10^{-7}$
10	0,0109195	0,99999999997367	$0,26331566 \cdot 10^{-10}$
14	0,00783972125	0,9999999999999972146	$0,278538 \cdot 10^{-14}$

Анализ данных табл. 11.1 позволяет заключить, что при неограниченном приближении температуры в центре пластины $\Theta_{\text{ц}}(1, Fo_1)$, определяемой из точного аналитического решения, к начальной температуре $\Theta(\xi, 0) = 1$, т.е. при $\Theta(\xi, 0) - \Theta_{\text{ц}}(1, Fo_1) \rightarrow 0$, величина Fo_1 приближается к нулевому значению ($Fo_1 \rightarrow 0$). Полученный результат полностью согласуется с гипотезой о бесконечной скорости распространения теплового возмущения, лежащей в основе вывода параболического уравнения теплопроводности вида (11.1). Согласно этой гипотезе с момента начала действия граничного условия $\Theta(0, Fo) = 0$ при $\xi = 0$ температура на всем отрезке координаты $0 \leq \xi \leq 1$, в том числе и в центре пластины $\xi = 1$, уже не равна начальной температуре



Р и с. 11.6. Отклонение температуры $\Delta\Theta = 1 - \Theta(\xi, Fo)$ на фронте температурного возмущения и за его пределами от начальной температуры (без соблюдения масштаба)

$\Theta(\xi, 0) = 1$, а отличается от нее на некоторую (а в центре пластины на бесконечно малую) величину $\Delta\Theta$ (рис. 11.6). Значения этой величины, полученные из расчетов по точному аналитическому решению, в зависимости от координаты ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) для $Fo = 0,005$:

ξ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\Delta\Theta = 1 - \Theta(\xi, Fo)$. . .	1	0,3173	0,0455	0,0027	0,0000633	$0,5733 \cdot 10^{-6}$

Окончание

ξ	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\Delta\Theta = 1 - \Theta(\xi, Fo)$. . .	$0,197 \cdot 10^{-8}$	$0,266 \cdot 10^{-11}$	$0,124 \cdot 10^{-14}$	$0,15 \cdot 10^{-18}$	0

Анализ результатов позволяет заключить, что уже при $\xi = 0,3$ безразмерная температура отличается от начального условия на величину $1 - 0,9973 = 0,0027$. В связи с чем на всех графиках, приведенных в известной литературе, считается, что $\Theta(0,3; 0,005) \approx 1$, в том числе и для всех $\xi > 0,3$. Отметим, что при $\xi = 1$, $1 - \Theta(1; 0,005) \rightarrow 0$.

На рис. 11.6 представлены результаты расчетов, выполненных с использованием точного аналитического решения с целью оценки отклонения температуры по толщине пластины от начальной температуры $\Delta\Theta = \Theta(\xi, 0) - \Theta(\xi; 0,005)$ для $Fo = 0,005$, где $\Theta(\xi, 0) = 1$. Из анализа полученных результатов следует, что с увеличением точности определения температуры в интегральном методе время (Fo_1) достижения фронтом температурного возмущения координаты $\xi = 1$ уменьшается и в пределе при $n \rightarrow \infty$ $Fo_1 \rightarrow 0$. Следовательно, к нулю будет приближаться и расхождение приближенного и точного решений. Анализ изменения температуры и невязки ε уравнения (11.5) для различных приближений интегрального метода подтверждает данное заключение (см. рис. 11.3, 11.4).

Метод дополнительных граничных условий можно применить и для второй стадии процесса нагрева (охлаждения). Она соответствует времени $Fo \geq Fo_1$ и характеризуется изменением температуры уже по всему сечению пластины вплоть до наступления стационарного состояния. Для этой стадии понятие термического слоя теряет смысл, и в качестве дополнительной искомой функции принимается функция $\Theta(1, Fo) = q_2(Fo)$, характеризующая изменение температуры от времени в центре пластины (см. рис. 11.1).

Математическая постановка задачи для второй стадии процесса имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (Fo \geq Fo_1; \quad 0 \leq \xi \leq 1); \quad (11.44)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad (11.45)$$

$$\Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad (11.46)$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (11.47)$$

Задача (11.44)—(11.47) не содержит начального условия, что связано со следующими обстоятельствами. При $Fo = Fo_1$ $q_1(Fo_1) = 1$ и $q_2(Fo_1) = 0$. Граничные условия (11.45)—(11.47) в этом случае становятся идентичными граничным условиям (11.6)—(11.8), и, следовательно, математические постановки задач (11.5)—(11.8) и (11.41)—(11.47) полностью совпадают. Таким путем происходит плавный переход от первой стадии процесса ко второй.

Так как при $Fo = Fo_1$ $q_1(Fo_1) = 1$, то соотношение (11.10) будет иметь вид

$$\Theta(\xi, Fo_1) = (1 - \xi)^2. \quad (11.48)$$

Соотношение (11.48) представляет начальное условие задачи (11.44)—(11.47). Однако в его специальном удовлетворении нет никакой необходимости, так как оно будет выполнено в процессе решения этой задачи.

Как и в первой стадии, решение задачи (11.44)—(11.47) находим в виде полинома n -й степени:

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q_2) \xi^k. \quad (11.49)$$

Неизвестные коэффициенты b_k ($k = 0, 1, 2$) находим из граничных условий (11.45)—(11.47). После их определения и подстановки в (11.49) получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - (1 - q_2)\xi(2 - \xi). \quad (11.50)$$

Для нахождения решения в первом приближении составим невязку дифференциального уравнения (11.44) и проинтегрируем ее в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, т.е.

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (11.51)$$

Подставляя (11.50) в (11.51) и определяя интегралы, относительно неизвестной функции $q_2(\text{Fo})$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{dq_2(\text{Fo})}{d\text{Fo}} + 3q_2(\text{Fo}) - 3 = 0. \quad (11.52)$$

Интегрируя уравнение (11.52), при начальном условии $q_2(\text{Fo}_1) = 0$ получаем

$$q_2(\text{Fo}) = 1 - \exp[-3(\text{Fo} - \text{Fo}_1)]. \quad (11.53)$$

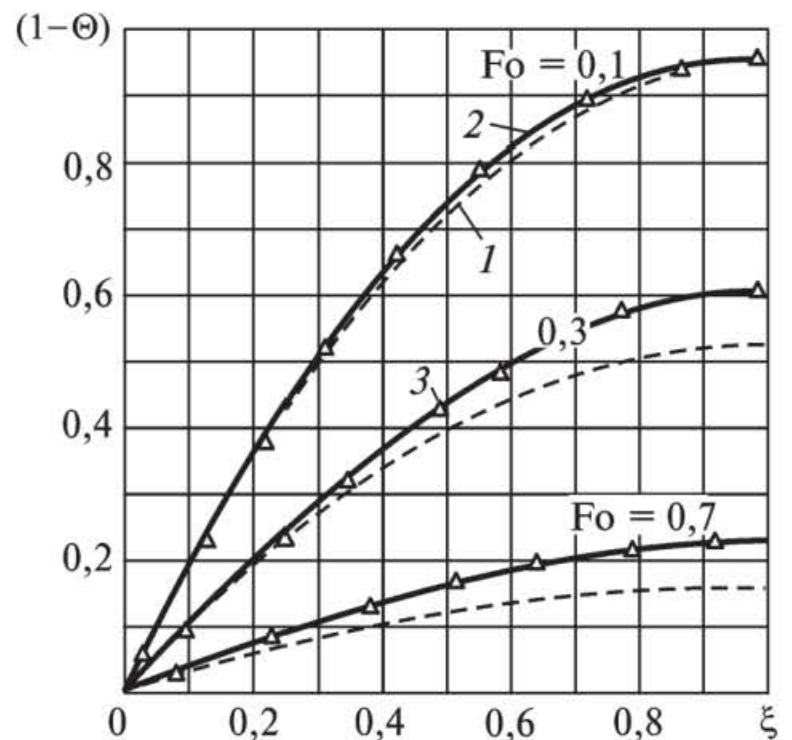
Подставляя (11.53) в (11.50), находим

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \xi(2 - \xi) \exp[-3(\text{Fo} - \text{Fo}_1)], \quad (11.54)$$

где $\text{Fo}_1 = 0,0833$ (найдено в первом приближении первой стадии процесса).

Результаты расчетов по формуле (11.54) в сравнении с точным решением даны на рис. 11.7. Их анализ позволяет заключить, что максимальное отличие температур, полученных по формуле (11.54), от точных их значений составляет 8 %. Анализ решения (11.54) показывает, что оно точно удовлетворяет начальному условию (11.48) и граничным условиям (11.45)—(11.47). Следовательно, основная погрешность решения происходит от неточного выполнения дифференциального уравнения (11.44). В самом деле, как это следует из соотношения (11.51), уравнение (11.44) удовлетворяется лишь в среднем по толщине пластины.

Увеличение точности решения связано с ростом числа членов ряда (11.49). Появляющиеся при этом дополнительные неизвестные



Р и с. 11.7. Изменение относительной избыточной температуры во второй стадии процесса:

1, 2 — соответственно первое и второе приближения; 3 — точное решение

коэффициенты b_k могут быть найдены из дополнительных граничных условий. Для их определения продифференцируем граничные условия (11.45)—(11.47) по переменной Fo :

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = 0; \quad (11.55)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{dq_2}{dFo}; \quad (11.56)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = 0. \quad (11.57)$$

Сравнивая соотношения (11.55) и (11.56) с уравнением (11.44), соответственно для точек $\xi = 0$ и $\xi = 1$ получаем первое и второе дополнительные граничные условия

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} = 0; \quad (11.58)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} = \frac{dq_2}{dFo}. \quad (11.59)$$

Для нахождения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (11.44) по переменной ξ и запишем полученное соотношение для точки $\xi = 1$:

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3}. \quad (11.60)$$

Сравнивая соотношения (11.57) и (11.60), получаем третье дополнительное граничное условие

$$\partial^3 \Theta(1, Fo) / \partial \xi^3 = 0. \quad (11.61)$$

Используя основные (11.45)—(11.47) и дополнительные (11.58), (11.59), (11.61) граничные условия, можно определить уже шесть коэффициентов ряда (11.49). Подставляя (11.49) во все перечисленные граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов b_k ($k = 0, 5$) получаем систему шести алгебраических линейных уравнений. Определяя из решения этой системы коэффициенты и подставляя их в соотношение (11.49), находим

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \frac{1}{2}(5\xi - 10\xi^3 + 10\xi^4 - 3\xi^5)(1 - q_2) - \frac{1}{8}(3\xi - 14\xi^3 + 16\xi^4 - 5\xi^5) \frac{dq_2}{dFo}. \quad (11.62)$$

Подставляя (11.62) в (11.51), для определения неизвестной функции $q_2(Fo)$ получаем следующее неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{11}{240} \frac{d^2 q_2}{dFo^2} + \frac{9}{8} \frac{dq_2}{dFo} + \frac{5}{2} q_2 - \frac{5}{2} = 0. \quad (11.63)$$

Общее решение уравнения (11.63) находим в виде суммы двух функций

$$q_2(Fo) = \eta + \varphi, \quad (11.64)$$

где η — частное решение неоднородного уравнения (11.63); φ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Характеристическое уравнение для однородного уравнения будет

$$\mu^2 + 24,545455\mu + 54,545455 = 0. \quad (11.65)$$

Последнее можно представить в виде

$$\det(A + \mu E) = \begin{vmatrix} 23,545455 + \mu & -1 \\ 31 & 1 + \mu \end{vmatrix} = \mu^2 + 24,545455\mu + 54,545455 = 0,$$

где $A = \begin{bmatrix} 23,545455 & -1 \\ 31 & 1 \end{bmatrix}$ — матрица собственных значений характеристического уравнения (11.65); $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ — единичная матрица.

Координаты собственных векторов матрицы A , отвечающих собственному значению μ , удовлетворяют однородной системе уравнений $(A + \mu X) = 0$, которая в данном случае будет

$$\left. \begin{aligned} (23,545455 + \mu)x_1 - x_2 &= 0; \\ 31x_1 + (1 + \mu)x_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решением этой системы уравнений является уравнение вида (11.65), из которого находим собственные числа μ_1 и μ_2 , имеющие следующие значения $\mu_1 = -2,471$, $\mu_2 = -22,074$. Они незначительно от-

личаются от собственных чисел краевой задачи Штурма—Лиувилля, точные значения которых $\mu_1 = 2,467401$; $\mu_2 = 22,206609$.

Следовательно, рассмотренный метод решения задачи во второй стадии процесса эквивалентен решению краевой задачи Штурма—Лиувилля.

Общее решение однородного дифференциального уравнения принимает вид

$$\varphi = C_1 \exp(-2,4709Fo) + C_2 \exp(-22,0745Fo),$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования.

Частное решение неоднородного уравнения (11.63) принимаем в виде $\eta = C_3$, где константу C_3 находим из выполнения уравнения (11.63). В данном конкретном случае $C_3 = 1$.

С учетом найденных частного решения неоднородного и общего решения соответствующего однородного уравнения соотношение (11.64) примет вид

$$q_2(Fo) = 1 + C_1 \exp(-2,4709Fo) + C_2 \exp(-22,0745Fo).$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 находим из начальных условий $q_2(Fo_1) = 0$; $dq_2(Fo_1)/dFo = 0$:

$$C_1 = 1,1261 \exp(2,4709Fo_1); C_2 = 0,1261 \exp(22,0745Fo_1).$$

С учетом C_1 и C_2 формулу для $q_2(Fo)$ приводим к виду

$$q_2(Fo) = 1 - 1,1261 \exp[-2,4709(Fo - Fo_1)] + \\ + 0,1261 \exp[-22,0745(Fo - Fo_1)]. \quad (11.66)$$

Подставляя (11.66) в (11.62), находим окончательное выражение для решения задачи (11.44) — (11.47) во втором приближении второй стадии процесса:

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - (1,772\xi - 0,761\xi^3 + 0,065\xi^4 + \\ + 0,05\xi^5) \exp[-2,471(Fo - Fo_1)] - (0,728\xi - 4,239\xi^3 + \\ + 4,935\xi^4 - 1,55\xi^5) \exp[-22,074(Fo - Fo_1)], \quad (11.67)$$

где $Fo_1 = 0,05$ (найдено во втором приближении первой стадии процесса).

Анализ результатов расчетов безразмерных температур по формуле (11.67) в сравнении с точным решением (см. рис. 11.7) позволяет заключить, что полученное здесь решение во всем диапазоне изменения числа Фурье второй стадии процесса практически совпадает с точным.

Рис, 11.8. Изменение невязки уравнения (11.44) по координате ξ при $Fo = 0,5$:

1 — первое приближение; 2 — второе приближение

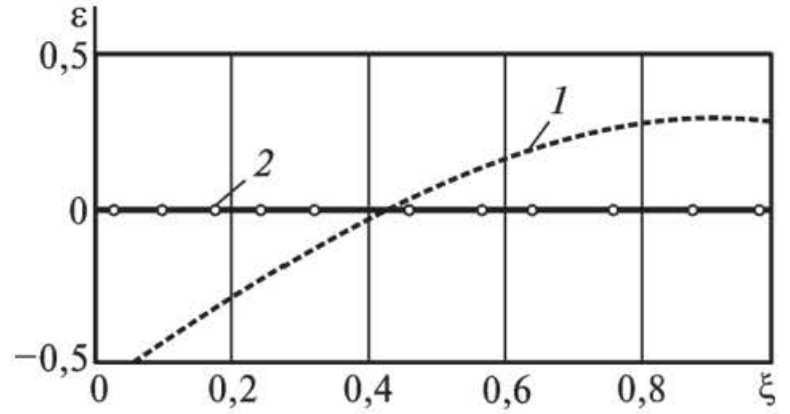
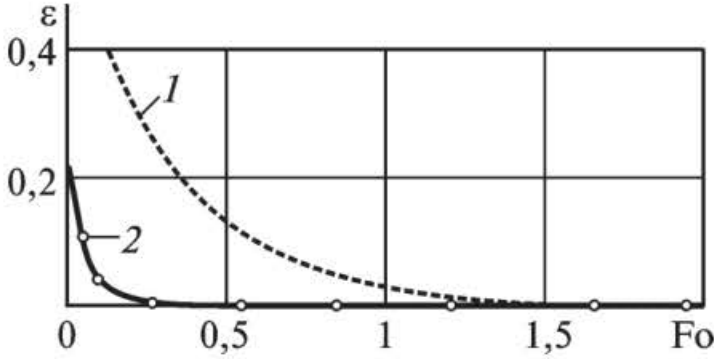


Рис. 11.9. Изменение невязки уравнения (11.44) для $\xi = 0,6$:

1 — первое приближение; 2 — второе приближение

Анализируя невязки уравнения (11.44), можно заметить, что во втором приближении второй стадии процесса в диапазоне времени $Fo_1 \leq Fo < \infty$ оно удовлетворяется практически точно (рис. 11.8, 11.9).

Ввиду достаточно высокой точности решения во втором приближении второй стадии процесса необходимость выполнения третьего приближения имеет лишь теоретическое значение. Для решения задачи (11.44)—(11.47) в третьем приближении найдем следующие три дополнительных граничных условия. Для этого продифференцируем по переменной Фурье дополнительные граничные условия (11.58), (11.59), (11.61). Сравнивая полученные соотношения с соотношениями (11.28), (11.29), применительно к точкам $\xi = 0$ и $\xi = 1$ будем иметь

$$\frac{\partial^4 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^4} = 0; \quad \frac{\partial^4 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^4} = \frac{d^2 q_2}{dFo^2}; \quad \frac{\partial^5 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^5} = 0. \quad (11.68)$$

Подставляя (11.49) в основные (11.45) — (11.47) и дополнительные (11.58), (11.59), (11.61), (11.68) граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов b_k ($k = \overline{0, 8}$) будем иметь систему девяти алгебраических линейных уравнений. Ее решение

$$\begin{aligned} b_0 &= 1; & b_1 &= -3v + v_1 q_2' + v_2 q_2''; & b_2 &= 0; & b_3 &= 7v - v_3 q_2' - v_4 q_2''; & b_4 &= 0; \\ b_5 &= -21v + v_5 q_2' + v_6 q_2''; & b_6 &= 28v - v_7 q_2' - v_8 q_2''; & b_7 &= -15v + v_9 q_2' + v_{10} q_2''; \\ & & b_8 &= 3v - v_{11} q_2' - v_{12} q_2'', \end{aligned}$$

где $v = 1 - q_2$; $v_1 = 17/28$; $v_2 = 19/1680$; $v_3 = 11/4$; $v_4 = 17/24$; $v_5 = 37/4$; $v_6 = 5/16$; $v_7 = 25/2$; $v_8 = 7/15$; $v_9 = 27/4$; $v_{10} = 13/48$; $v_{11} = 19/14$; $v_{12} = 2/35$.

Подставляя найденные значения b_k в (11.49), находим

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = & (-3 + 7\xi^2 - 21\xi^4 + 28\xi^5 - 15\xi^6 + 3\xi^7)\xi + \\ & + (v_1 - v_3\xi^2 + v_5\xi^3 - v_7\xi^5 + v_9\xi^6 - v_{11}\xi^7)\xi q'_2 + \\ & + (v_2 - v_4\xi^2 + v_6\xi^4 - v_8\xi^5 + v_{10}\xi^6 - v_{12}\xi^7)\xi q''_2. \end{aligned} \quad (11.69)$$

Подставляя (11.69) в (11.51), относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\frac{1}{1152} \frac{d^3 q_2}{dFo^3} + \frac{769}{10080} \frac{d^2 q_2}{dFo^2} + \frac{235}{168} \frac{dq_2}{dFo} = 3(1 - q_2). \quad (11.70)$$

Граничные условия для уравнения (11.70) имеют вид

$$q_2(Fo_1) = 0; \quad q'_2(Fo_1) = 0; \quad q''_2(Fo_1) = 0. \quad (11.71)$$

Интегрируя уравнение (11.70), находим

$$\begin{aligned} q_2(Fo) = & 1 + C_1 \exp(-2,467394Fo) + C_2 \exp(-22,132366Fo) + \\ & + C_3 \exp(-63,285954Fo), \end{aligned} \quad (11.72)$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (11.71):

$$\begin{aligned} C_1 = & -1,171132 \exp(2,467394Fo_1); \quad C_2 = 0,192950 \exp(22,132366Fo_1); \\ C_3 = & -0,0218182 \exp(63,285954Fo_1). \end{aligned}$$

С учетом найденных значений C_1, C_2, C_3 формула (11.72) принимает вид

$$\begin{aligned} q_2(Fo) = & 1 - 1,1711 \exp[-2,4674(Fo - Fo_1)] + 0,1929 \exp[-22,1324(Fo - \\ & - Fo_1)] - 0,0218 \exp[-63,2859(Fo - Fo_1)]. \end{aligned} \quad (11.73)$$

Соотношения (11.69), (11.73) представляют решение задачи (11.44)—(11.47) в третьем приближении. Результаты расчетов по формуле (11.69) в сравнении с точным решением даны в табл. 11.2.

Отметим, что в третьем приближении произошло существенное уточнение первого и второго собственных чисел в соотношении (11.73). Точное значение третьего собственного числа $\mu_3 = 61,6850$.

ξ	$\Theta(\xi; 0,035)$	$\Theta(\xi; 0,4)$	$\Theta(\xi; 1,0)$
0,2	0,5474	0,1469	0,0334
	0,5503	0,1467	0,0333
0,4	0,8734	0,2796	0,0635
	0,8694	0,2789	0,0634
0,6	0,9835	0,3847	0,0875
	0,9767	0,3839	0,0873
0,8	0,9996	0,4522	0,1029
	0,9975	0,4513	0,1027
1,0	0,9999	0,4755	0,1082
	0,9997	0,4745	0,1079

Примечание. Верхняя строка — значения по формуле (11.69), нижняя строка — точное значение.

Характерной особенностью полученных здесь аналитических решений является полиномиальная зависимость температуры от координаты ξ в отличие от классических точных аналитических решений, где она выражается через тригонометрические функции. Полиномиальная зависимость позволяет получить решение в виде поля изотермических линий. Принцип построения изотерм рассмотрим на примере первого приближения первой и второй стадий процесса. Выражая координату ξ как функцию температуры $\Theta(\xi, Fo)$ и времени Fo , соотношения (11.10) и (11.54) можно привести к виду

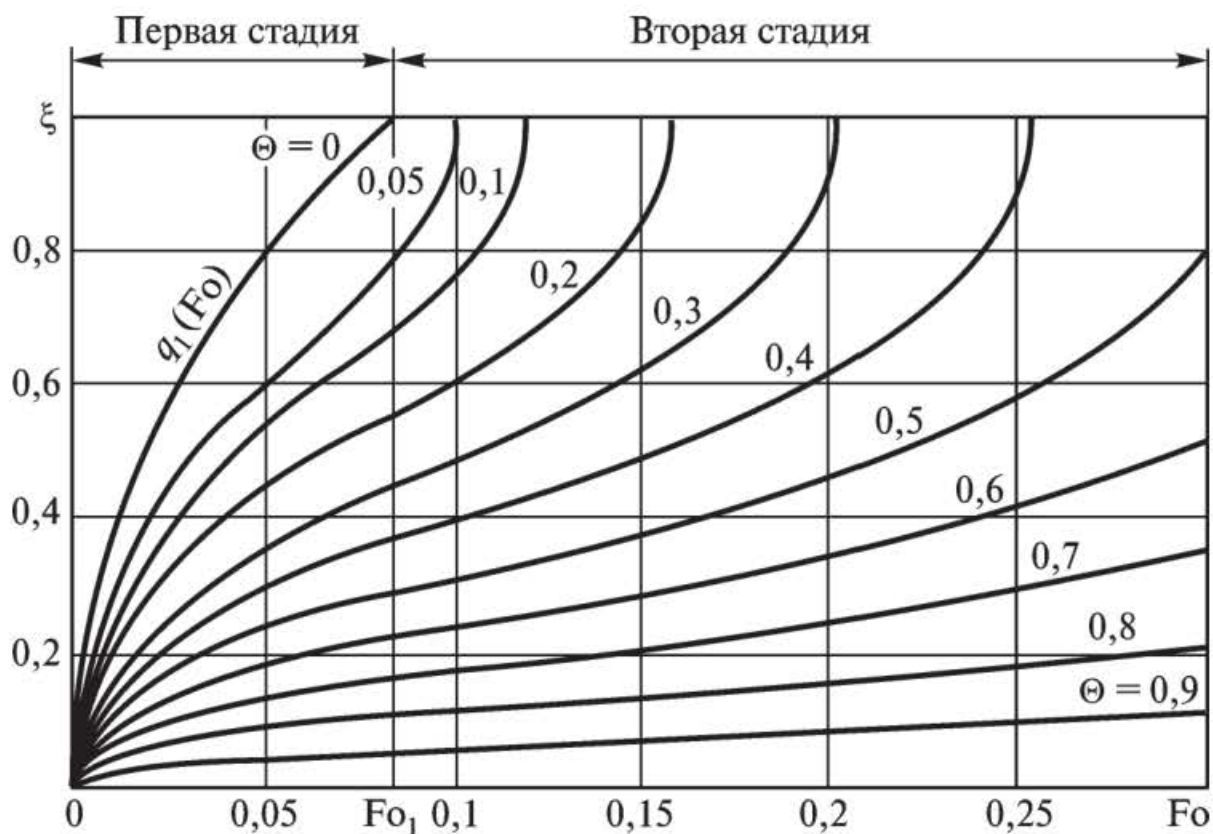
$$\xi = (1 - \sqrt{\Theta(\xi, Fo)}) \sqrt{12Fo}; \quad (11.74)$$

$$\xi = [E - \sqrt{E(E - 1 + \Theta)}] / E, \quad (11.75)$$

где $E = \exp[-3(Fo - Fo_1)]$.

Соотношения (11.74), (11.75) позволяют для любых конкретных $\Theta(\xi, Fo) = \text{const}$ построить графики зависимости температур от ξ и Fo (графики изотерм) (рис. 11.10).

Отметим, что нулевая изотерма $\Theta(\xi, Fo) = 0$ совпадает с графиком движения фронта температурного возмущения по координате ξ в зависимости от времени Fo в первом приближении (см. рис. 11.5). В самом деле при $\Theta(\xi, Fo) = 0$ выражение (11.74) принимает вид соотношения $\xi = \sqrt{12Fo}$, полностью совпадающего с формулой (11.13), характеризующей перемещение фронта температурного возмущения. Отсюда следует, что по физическому смыслу фронт температурного



Р и с. 11.10. Распределение изотерм $\Theta(\xi, Fo) = \text{const}$ в координатах ξ , Fo (первое приближение, $Fo = 0,0833$)

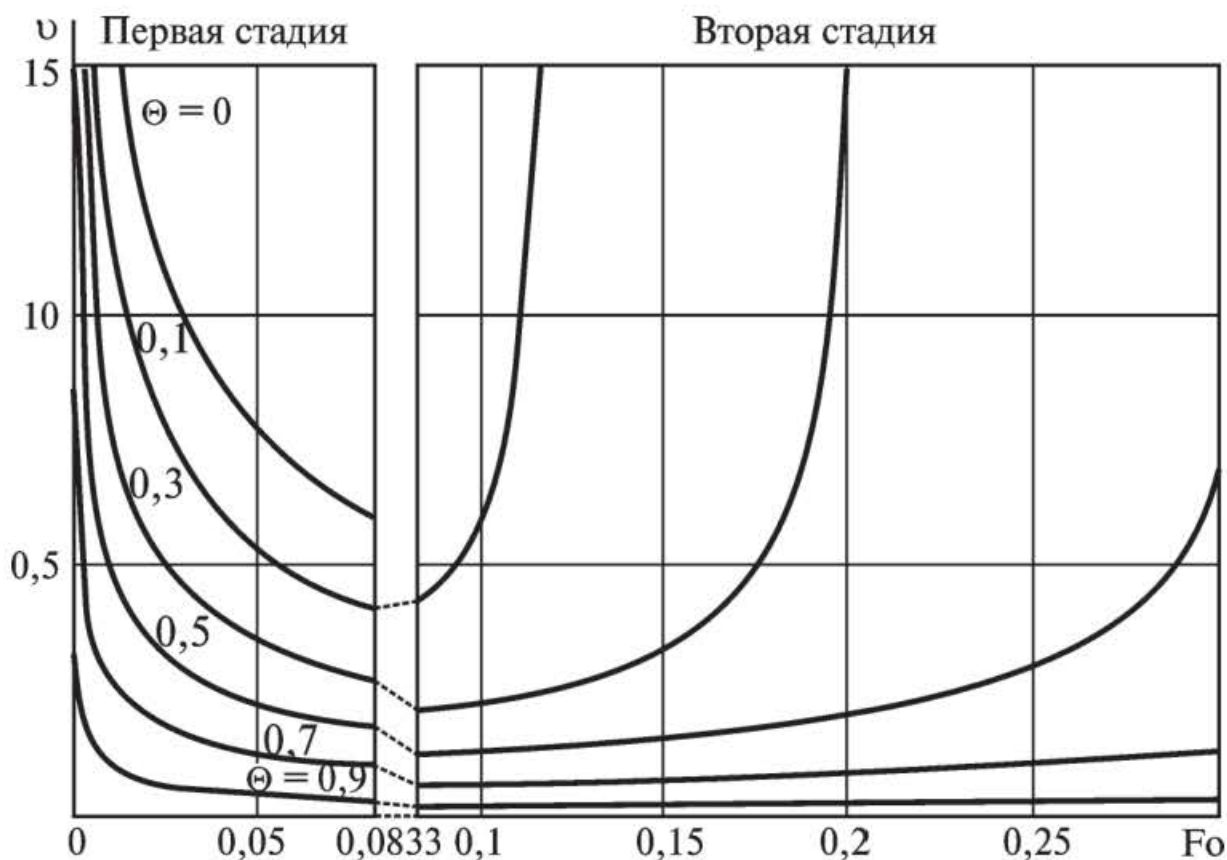
возмущения является аналогом изотермы, движущейся по координате ξ во времени Fo . В данном случае нулевая изотерма — изотерма начального условия. Ввиду положенной в основу вывода параболического уравнения (11.1) бесконечной скорости распространения теплового возмущения при большом числе приближений интегрального метода время первой стадии процесса будет приближаться к нулю и, следовательно, скорость движения нулевой изотермы будет приближаться к бесконечно большой величине.

Первые производные по времени от соотношений (11.74), (11.75) позволяют определить безразмерные скорости движения изотерм $v = d\xi/dFo$ по координате в зависимости от времени, а вторые производные — ускорения $a = d^2\xi/dFo^2$. Формулы скоростей для первой и второй стадий процесса соответственно будут

$$v = -\sqrt{3/Fo}(\sqrt{\Theta} - 1); \quad (11.76)$$

$$v = 3(1 - \Theta) / [2\sqrt{E^2 - E + E\Theta}]. \quad (11.77)$$

Графики скоростей движения изотерм, найденных по формулам (11.76), (11.77), даны на рис. 11.11. Их анализ позволяет заключить, что максимальные скорости изотермы имеют вблизи точки $\xi = 0$. По мере удаления от нее скорости существенно уменьшаются, достигая некоторого минимума. Затем при приближении к точке



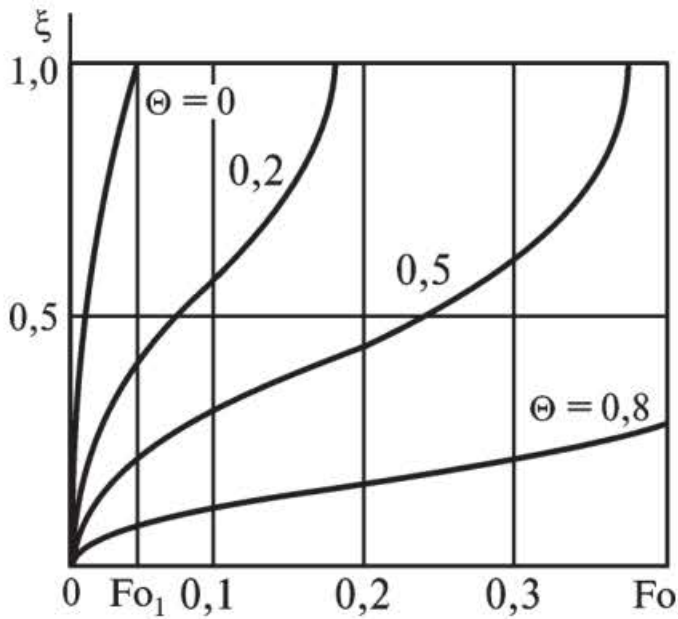
Р и с. 11.11. Графики скоростей изотерм (первое приближение)

$\xi = 1$ они вновь значительно возрастают. Графики ускорений изотерм по форме (качественно) практически соответствуют графикам скоростей и отличаются от них лишь количественно.

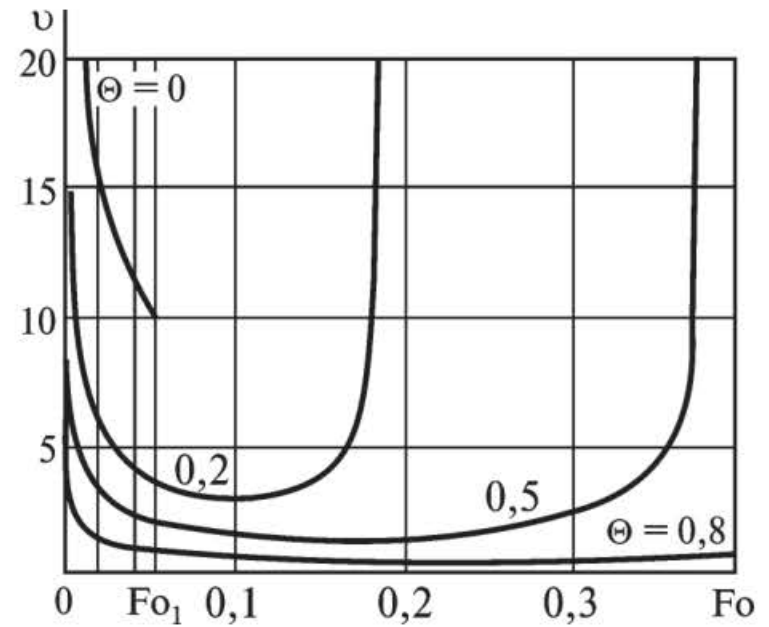
Ввиду невысокой точности первого приближения (и особенно во второй стадии процесса) изотермы, определяемые по формулам (11.74), (11.75), имеют небольшой излом при $Fo = Fo_1 = 0,0833$, т.е. в точке сопряжения решений для первой и второй стадий процесса (см. рис. 11.10). В связи с чем на рис. 11.11 в этой точке имеет место некоторый скачок в эпюрах скоростей, который уже во втором приближении практически не наблюдается, так же как и излом в изотермах (рис. 11.12, 11.13).

Чтобы построить изотермические линии в координатах ξ , Fo применительно к последующим приближениям, для каждого конкретных $\Theta(\xi, Fo)$ и Fo относительно ξ необходимо решать алгебраическое уравнение. Ввиду того что каждому ξ и Fo согласно полученным аналитическим решениям соответствует лишь одно значение температуры $\Theta(\xi, Fo)$, алгебраическое уравнение имеет лишь один корень, удовлетворяющий соответствующим решениям вида (11.24), (11.36), (11.39), (11.42), (11.43), (11.67), (11.69).

Объяснение распределению скоростей, показанному на рис. 11.11, 11.13, можно получить из анализа формул (11.76), (11.77). И в частности, из (11.76) следует, что с уменьшением числа Фурье ($Fo \rightarrow 0$) скорости изотерм неограниченно возрастают. Анализ фор-



Р и с. 11.12. Распределение изотерм во втором приближении



Р и с. 11.13. Изменение скоростей изотерм во втором приближении

мулы (11.77) позволяет заключить, что с приближением числа Фурье к значению, при котором соответствующая изотерма достигает координаты $\xi = 1$ (см. рис. 11.10), скорость изотермы также неограниченно возрастает. Исходя из (11.77), неограниченное возрастание скорости может быть лишь в случае, когда знаменатель приближается к нулю. В самом деле, определяя, например для $\Theta = 0,3$, число Фурье, при котором знаменатель в формуле (11.77) обращается в нуль, получаем $Fo = 0,20213$. Расчеты показывают, что именно при этом числе Фурье изотерма $\Theta = 0,3$ достигает центра пластины (см. рис. 11.10). Аналогичная ситуация имеет место и для любых других изотерм.

Найдем тепловой поток, приходящийся на единицу площади ограничивающей поверхности пластины:

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{2\lambda(T_{\text{ст}} - T_0)}{\sqrt{12a\tau}}. \quad (11.78)$$

Из последнего соотношения следует, что тепловой поток прямо пропорционален коэффициенту теплопроводности тела, разности между температурой стенки и начальной температурой и обратно пропорционален $\sqrt{\tau}$. Следовательно, в начальный момент времени он бесконечно велик, что приводит к бесконечно большим скоростям движения изотерм. С увеличением времени тепловой поток уменьшается, приводя к соответствующему уменьшению скоростей изотерм. Кроме того, при малых значениях времени ($\tau \rightarrow 0$) величина прогретого слоя совершенно незначительна ($q_1(Fo) \rightarrow 0$), и его термическое сопротивление практически отсутствует ($q_1(Fo)/\lambda \rightarrow 0$), что является причиной бесконечно большого теплового потока.

§ 11.2. Цилиндр, шар (граничные условия первого рода)

Известно, что в задачах цилиндрической и сферической симметрии представление температурного профиля в виде полинома вообще не дает удовлетворительного результата, так как найденное при этом решение для больших значений времени не стремится к предельному значению стационарного состояния. Это положение объясняется тем, что в случае центральной симметрии объем, в который диффундирует теплота, не остается одинаковым для равных значений приращения радиуса, как это имеет место в плоских задачах. Покажем, что, используя метод дополнительных граничных условий, можно получать аналитические решения с достаточной для инженерных приложений точностью для задач цилиндрической и сферической симметрии, применяя температурные профили в виде алгебраических полиномов высоких степеней.

В качестве конкретного примера рассмотрим нестационарную задачу теплопроводности для цилиндра и шара в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho^c} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^c \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right) \quad (Fo > 0; 0 < \rho < 1); \quad (11.79)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 0; \quad (11.80)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} = 0; \quad (11.81)$$

$$\Theta(1, Fo) = 1, \quad (11.82)$$

где ρ — безразмерная координата, $\rho = x/R$, x — координата; R — радиус цилиндра (шара); $c = 1, 2$ — соответственно для цилиндра, шара. Остальные обозначения те же, что и в задаче (11.1)—(11.4).

Процесс нагрева, как и ранее (см. § 11.1), разделим на две стадии по времени ($0 < Fo \leq Fo_1$ и $Fo_1 \leq Fo < \infty$), для чего введем движущуюся во времени границу, разделяющую исходную область $0 \leq \rho \leq 1$ на две подобласти $0 \leq \rho \leq q_1(Fo)$ и $q_1(Fo) \leq \rho \leq 1$, где $q_1(Fo)$ — функция, определяющая продвижение границы раздела по координате ρ в зависимости от времени (глубина проникания).

Если от координаты ρ перейти к новой переменной $\xi = 1 - \rho$ и ввести в качестве дополнительной искомой функции глубину термического слоя $q_1(Fo)$, то для первой стадии теплового процесса приходим к следующей математической постановке задачи (см. рис. 11.1):

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (11.83)$$

$$(0 < Fo \leq Fo_1; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo));$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad (11.84)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (11.85)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} = 0, \quad (11.86)$$

где соотношения (11.85), (11.86) представляют условия тепловой изоляции подвижной границы.

Здесь, так же как и в задаче (11.5)—(11.8), нет необходимости в выполнении начального условия $\Theta(\xi, 0) = 0$ по всему радиусу цилиндра (шара). Вполне достаточным является выполнение соотношения (11.85), согласно которому во всех точках по координате ξ , где находится фронт температурного возмущения, температура тела равна начальной температуре.

Представим искомый температурный профиль в виде полинома n -й степени (см. (11.9)).

Соотношение (11.9) после определения неизвестных коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (11.84) — (11.86) примет вид (11.10).

Составляя невязку уравнения (11.83) и интегрируя ее в пределах глубины термического слоя, получаем следующее интегральное уравнение (интеграл теплового баланса):

$$\int_0^{q_1(Fo)} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^{q_1(Fo)} \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (11.87)$$

Подставляя (11.10) в интеграл теплового баланса, относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида (при $c = 1$)

$$q_1(1 - 0,5q_1)dq_1 = 6dFo. \quad (11.88)$$

Интегрируя уравнение (11.88), при начальном условии $q_1(0) = 0$ находим

$$q_1^3 - 3q_1^2 + 36Fo = 0. \quad (11.89)$$

Значения $q_1(Fo)$, удовлетворяющие последнему уравнению, для некоторых чисел Фурье:

Fo . . .	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
q_1 . . .	$1,0956 \cdot 10^{-3}$	$3,4661 \cdot 10^{-3}$	$1,0974 \cdot 10^{-2}$	$2,4596 \cdot 10^{-2}$	0,111642	0,256126

Положив в (11.89) $q_1(Fo_1) = 1$, находим время окончания первой стадии процесса $Fo = Fo_1 = 1/18 \approx 0,055556$.

Ввиду отсутствия возможности явного выражения из уравнения (11.89) величины $q_1(Fo)$ затрудняется использование соотношения (11.10) как аналитического решения. Для построения аналитического решения уравнения (11.88) воспользуемся методикой, изложенной в § 11.10. Используя эту методику, получаем

$$q_1(Fo) = kFo^\lambda, \quad (11.90)$$

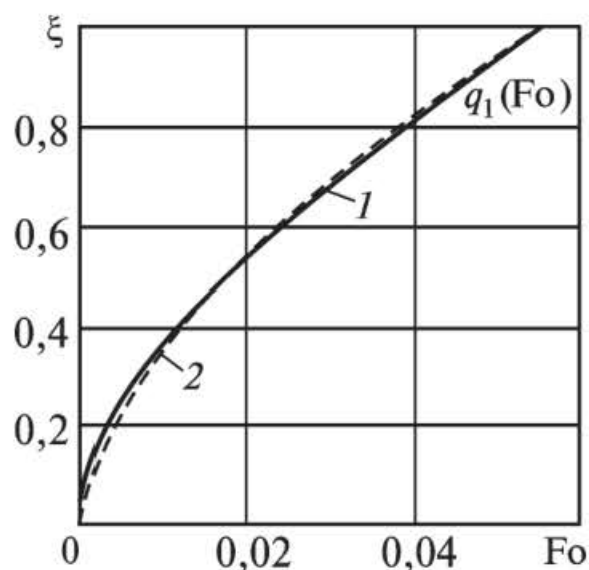
где $k = 5,66181$; $\lambda = 0,6$.

На рис. 11.14 приведены графики перемещения фронта температурного возмущения по координате ξ во времени, полученные с использованием табличных значений $q_1(Fo)$ (точное решение) и формулы (11.90). Из анализа графиков можно заключить, что результаты расчетов отличаются не более чем на 1,5 %. Следовательно, формула (11.90) с достаточной точностью может быть применена как аналитическое решение уравнения (11.89).

Результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (11.10) с использованием формулы (11.90) в сравнении с точным решением представлены на рис. 11.15. Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что в диапазоне чисел Фурье $1 \cdot 10^{-11} \leq Fo \leq 0,0556$ отличие найденных по формуле (11.10) температур от точных их значений составляет 4...5 %.

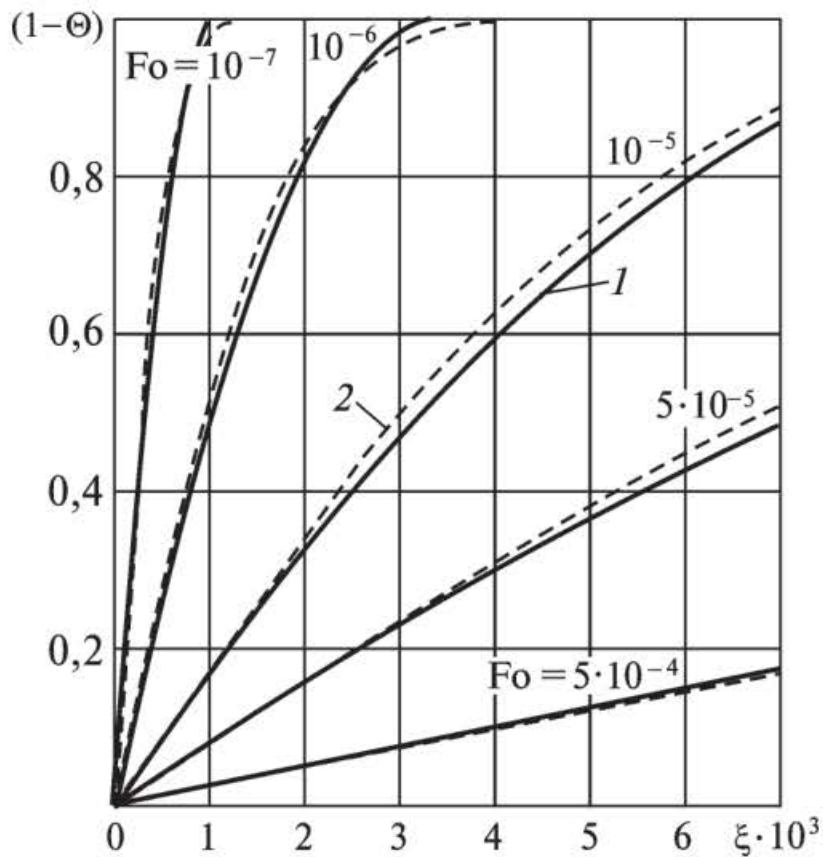
Для повышения точности решения необходимо увеличивать число членов ряда (11.9). В случае, когда число коэффициентов $a_k(q_1)$ больше трех, для их определения необходимо привлекать дополнительные граничные условия, которые могут быть получены путем использования заданных граничных условий (11.84)—(11.86) и уравнения (11.83).

Дифференцируя граничное условие (11.84) по переменной Fo и сравнивая полученное соотношение с уравнением (11.83), применительно к точке $\xi = 0$ получаем первое дополнительное граничное условие



Р и с. 11.14. Перемещение фронта температурного возмущения по координате ξ во времени Fo :

1 — точное решение; 2 — по формуле (11.90)



Р и с. 11.15. Изменение безразмерной температуры в цилиндре:
1 — расчет по формуле (11.10); 2 — точное решение

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} - c \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0. \quad (11.91)$$

Дифференцируя граничное условие (11.85) по переменной Fo и сравнивая полученное соотношение с уравнением (11.83), записанным для точки $\xi = q_1(Fo)$, с учетом соотношения (11.86) получаем второе дополнительное граничное условие

$$\partial^2 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^2 = 0. \quad (11.92)$$

Для нахождения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (11.83) по переменной ξ и запишем полученное соотношение для точки $\xi = q_1(Fo)$:

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = \frac{\partial^3 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^3} - \frac{c}{(1-q_1)} \frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^2} - \frac{c}{(1-q_1)^2} \frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi}. \quad (11.93)$$

Дифференцируя граничное условие (11.86) по Fo и сравнивая полученное соотношение с (11.93), с учетом (11.86) и (11.92) получаем третье дополнительное граничное условие

$$\partial^3 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^3 = 0. \quad (11.94)$$

Подставляя (11.9), ограничиваясь шестью членами ряда, в основные (11.84)—(11.86) и дополнительные (11.91), (11.92), (11.94) граничные условия относительно неизвестных коэффициентов $a_k(q_1)$

($k = \overline{0, 5}$) получаем систему шести алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы коэффициенты $a_k(q_1)$ в (11.9), будем иметь

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \frac{20}{cq_1 + 8} \frac{\xi}{q_1} - \frac{10cq_1}{cq_1 + 8} \left(\frac{\xi}{q_1}\right)^2 + \frac{20(cq_1 + 2)}{cq_1 + 8} \left(\frac{\xi}{q_1}\right)^3 - \frac{5(3cq_1 + 8)}{cq_1 + 8} \left(\frac{\xi}{q_1}\right)^4 + \frac{4(cq_1 + 3)}{cq_1 + 8} \left(\frac{\xi}{q_1}\right)^5. \quad (11.95)$$

Подставляя (11.95) в соотношение (11.87), относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ приходим к следующему нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению (при $c = 1$):

$$(3q_1^4 + 37q_1^3 + 16q_1^2 - 336q_1) \frac{dq_1}{dFo} + 420q_1 + 3360 = 0. \quad (11.96)$$

Разделяя переменные в уравнении (11.96) и интегрируя, при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$-\frac{q_1^4}{560} - \frac{13q_1^3}{1260} + \frac{11q_1^2}{105} - \frac{92q_1}{105} + \frac{736}{105} \ln\left(1 + \frac{q_1}{8}\right) = Fo. \quad (11.97)$$

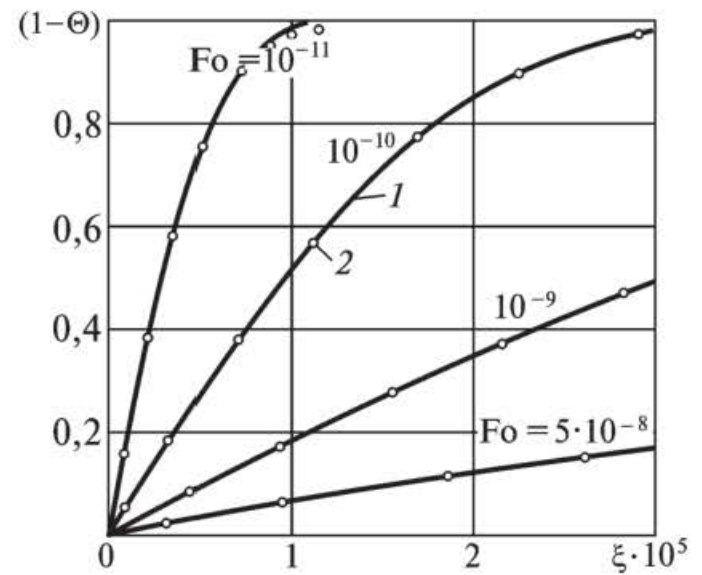
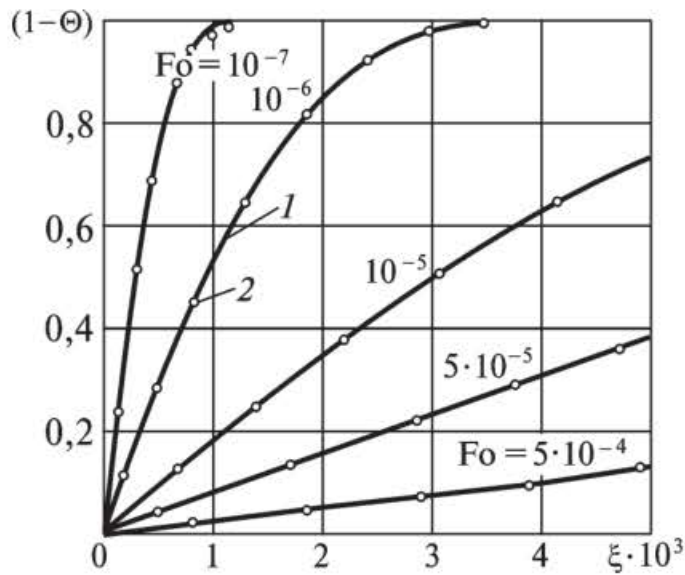
Полагая $q_1(Fo_1) = 1$, определяем время окончания первой стадии процесса во втором приближении $Fo_1 = 0,042$. Значения $q_1(Fo)$, найденные из соотношения (11.97), для некоторых чисел Фурье:

Fo . . .	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
q_1 . . .	0,001414	0,0044733	0,0141537	0,0316813	0,1426619	0,3230462

Используя методику решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, изложенную в § 11.10, находим приближенное аналитическое решение уравнения (11.96)

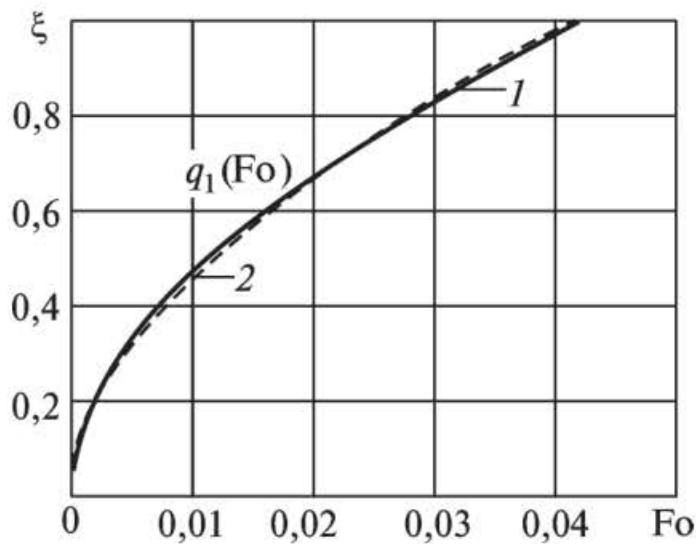
$$q_1(Fo) = 5,53918Fo^{0,54}. \quad (11.98)$$

Результаты расчетов безразмерных температур по формуле (11.95) в сравнении с точным решением представлены на рис. 11.16. Можно заключить, что полученное здесь решение с использованием дополнительных граничных условий в диапазоне чисел Фурье $10^{-11} \leq Fo \leq 0,042$ отличается от точного не более чем на 2...3 %. На рис. 11.17 представлены графики зависимости фронта температурного возмущения, полученные с использованием точных значений $q_1(Fo)$ и формулы (11.98).



Р и с. 11.16. Изменение температуры в цилиндре:

1 — по формуле (11.95); 2 — точное решение



Р и с. 11.17. Перемещение фронта температурного возмущения по координате ξ во времени Fo :

1 — точное решение; 2 — по формуле (11.98)

Для нахождения решения задачи (11.83)—(11.86) в третьем приближении необходимо использование еще трех дополнительных граничных условий. Чтобы получить четвертое дополнительное граничное условие, продифференцируем дополнительное граничное условие (11.91) по переменной Fo :

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo} - c \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = 0. \quad (11.99)$$

Дифференцируя уравнение (11.83) один раз и дважды по переменной ξ и записывая полученные соотношения для точки $\xi = 0$, будем иметь

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} - c \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} - c \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2}; \quad (11.100)$$

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial Fo \partial \xi^2} = \frac{\partial^4 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^4} - 2c \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} - 2c \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} - c \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3}. \quad (11.101)$$

Подставляя (11.100) и (11.101) в (11.99), получаем четвертое дополнительное граничное условие (при $c = 1$)

$$\frac{\partial^4 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^4} - 2 \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0. \quad (11.102)$$

Пятое и шестое дополнительные граничные условия находим также, как и соответствующие граничные условия для пластины:

$$\frac{\partial^4 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^4} = 0; \quad (11.103)$$

$$\frac{\partial^5 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^5} = 0. \quad (11.104)$$

Подставляя (11.9) во все основные (11.84) — (11.86) и дополнительные (11.91), (11.92), (11.94), (11.102), (11.103), (11.104) граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов a_k ($k = 0, 8$) будем иметь систему девяти алгебраических линейных уравнений. Ее решение:

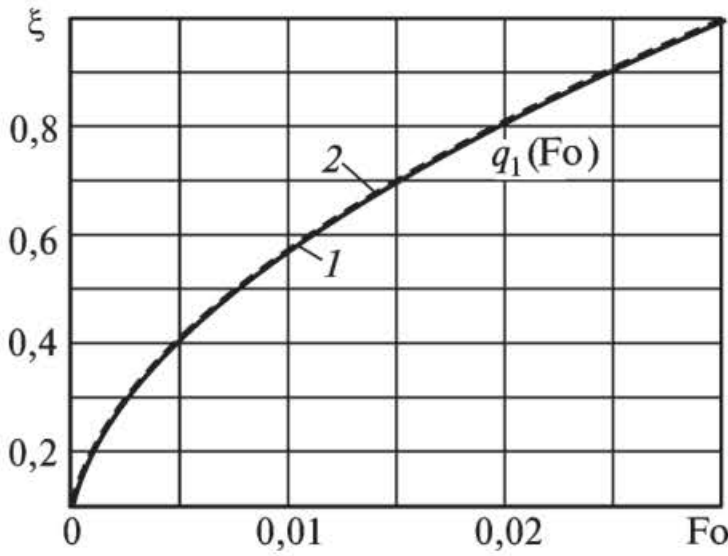
$$\begin{aligned} a_0 &= 1; \quad a_1 = 168(15 + 2q_1) / \eta; \quad a_2 = 84(15 + 2q_1) / \eta; \quad a_3 = -56(q_1^3 + 45q_1 + \\ &+ 105) / q_1^2 \eta; \quad a_4 = 210(q_1^2 - 64q_1 - 14) / q_1^2 \eta; \quad a_5 = -168(2q_1^3 - 16q_1^2 - \\ &- 72q_1 - 105) / q_1^4 \eta; \quad a_6 = 28(10q_1^3 - 90q_1^2 - 477q_1 - 840) / q_1^5 \eta; \quad (11.105) \\ a_7 &= -24(5q_1^3 - 48q_1^2 - 275q_1 - 525) / q_1^6 \eta; \\ a_8 &= 21(q_1^3 - 10q_1^2 - 60q_1 - 120) / q_1^7 \eta, \end{aligned}$$

где $\eta = (q_1^3 - 18q_1^2 - 216q_1 - 840)q_1$.

При $c = 1$ (цилиндр) интеграл теплового баланса (11.87) приводим к виду

$$\int_0^{q_1(Fo)} (1 - \xi) \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (11.106)$$

Подставляя (11.9) с учетом найденных коэффициентов a_k ($k = \overline{0, 8}$) в (11.106), относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:



Р и с. 11.18. Перемещение фронта температурного возмущения по координате ξ во времени Fo :

1 — численное решение уравнения (11.107);
2 — по формуле (11.108)

$$\frac{dq_1}{dFo} \frac{q_1 D}{1260(15 + 2q_1)(q_1^3 - 18q_1^2 - 216q_1 - 840)} - 1 = 0, \quad (11.107)$$

где $D = q_1^7 - 37q_1^6 - 72q_1^5 + 4710q_1^4 + 43395q_1^3 + 55575q_1^2 - 315000q_1 - 1102500$.

Получение аналитического решения уравнения (11.107) при начальном условии $q_1(0) = 0$ ввиду его существенной нелинейности весьма затруднительно. В связи с чем найдем численное решение уравнения (11.107). Кривая изменения $q_1(Fo)$ при численном решении представлена на рис. 11.18.

Приближенное аналитическое решение, полученное согласно методике, изложенной в § 11.10, имеет вид

$$q_1(Fo) = 6,1144Fo^{0,522}. \quad (11.108)$$

Кривая $q_1(Fo)$, полученная с использованием формулы (11.108), практически совпадает с кривой численного решения (см. рис. 11.18).

Результаты расчетов безразмерной температуры позволяют заключить, что в третьем приближении по сравнению со вторым точность решения повышается примерно на 1 %.

Метод дополнительных граничных условий можно применить и для второй стадии процесса нагрева (охлаждения) в случае цилиндрической или сферической симметрии. Вторая стадия теплового процесса, соответствующая времени $Fo \geq Fo_1$, характеризуется изменением температуры по всему сечению цилиндра (шара) вплоть до наступления стационарного состояния. Для нее в качестве дополнительной искомой функции принимаем температуру на оси цилиндра (в центре шара) $\Theta(1, Fo) = q_2(Fo)$. Расчетная схема теплообмена в данном случае будет аналогична схеме рис. 11.1, где R — радиус цилиндра (шара).

Математическая постановка задачи для второй стадии процесса имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (11.109)$$

$$(Fo \geq Fo_1; 0 \leq \xi \leq 1); \Theta(0, Fo) = 1; \quad (11.110)$$

$$\Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad (11.111)$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (11.112)$$

Начальным условием задачи (11.109)—(11.112) будет распределение температуры в цилиндре (шаре) в конце первой стадии процесса, т. е. при $Fo = Fo_1$, определяемое соотношением (11.10). Так как при $Fo = Fo_1$ $q_1(Fo_1) = 1$, то соотношение (11.10) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo_1) = (1 - \xi)^2. \quad (11.113)$$

Соотношение (11.113) является начальным условием задачи (11.109) — (11.112). Однако в его специальном выполнении нет необходимости, так как при $Fo = Fo_1$ $q_2(Fo_1) = 0$ и задачи (11.83)—(11.86) и (11.109)—(11.112) полностью совпадают, т.е. в данном случае (как и для пластины) происходит плавный переход от первой стадии ко второй без необходимости выполнения начального условия вида (11.113) — оно будет выполнено в процессе решения задачи (11.109)—(11.112).

Решение задачи (11.109)—(11.112) принимается в виде полинома

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q_2) \xi^k. \quad (11.114)$$

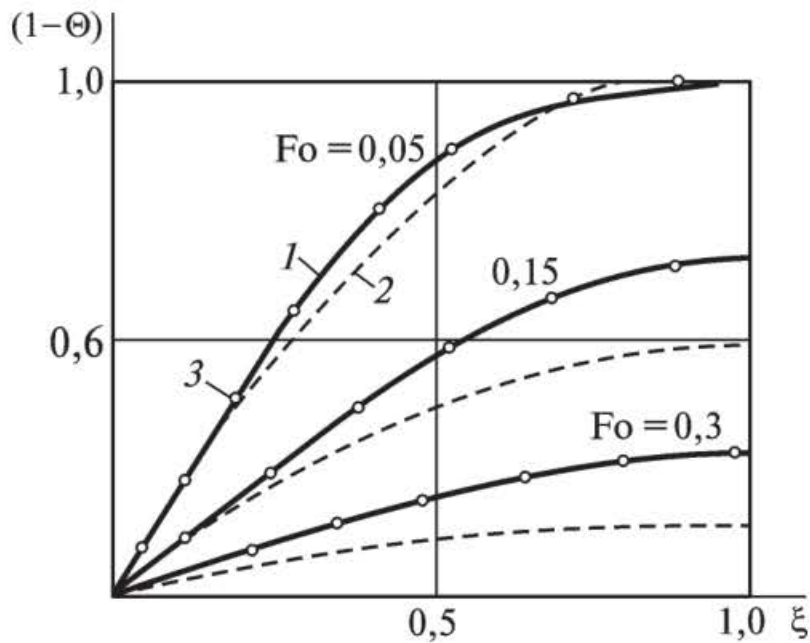
Определяя неизвестные коэффициенты b_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (11.110)—(11.112) и подставляя их в (11.114), находим

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - (1 - q_2)(2 - \xi)\xi. \quad (11.115)$$

Для определения неизвестной функции $q_2(Fo)$ составим невязку дифференциального уравнения (11.109) и проинтегрируем ее по переменной ξ в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$:

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (11.116)$$

Подставляя (11.115) в (11.116), после определения интегралов относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:



Р и с. 11.19. Изменение температуры в цилиндре:

1 — расчет по формуле (11.133); 2 — по формуле (11.119); 3 — точное решение

$$dq_2/(1 - q_2) = 8dFo. \quad (11.117)$$

Интегрируя уравнение (11.117), при начальном условии $q_2(Fo_1) = 0$ получаем

$$q_2(Fo) = 1 - \exp[-8(Fo - Fo_1)]. \quad (11.118)$$

Соотношение (11.115) с учетом (11.118) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \xi(2 - \xi)\exp[-8(Fo - Fo_1)]. \quad (11.119)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (11.119) точно удовлетворяет начальному условию (11.113) и граничным условиям (11.110)—(11.112). Уравнение (11.109), как это следует из (11.116), в данном случае удовлетворяется лишь в среднем.

Результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (11.119) в сравнении с точным решением представлены на рис. 11.19. Анализ позволяет заключить, что отличие температур, полученных по формуле (11.119), от точных их значений не превышает 8 %.

Для повышения точности решения необходимо вводить дополнительные граничные условия. Для их определения продифференцируем граничные условия (11.110), (11.112) по переменной Fo :

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = 0; \quad (11.120)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{dq_2(Fo)}{dFo}; \quad (11.121)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = 0. \quad (11.122)$$

Сопоставляя соотношение (11.120) с уравнением (11.109), получаем первое дополнительное граничное условие, которое будет совпадать с условием (11.91).

Запишем уравнение (11.109), применив его для точки $\xi = 1$:

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} - \left[\frac{c}{1-\xi} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right]_{\xi=1}. \quad (11.123)$$

Раскрывая возникающую во втором члене правой части соотношения (11.123) неопределенность по правилу Лопиталя, получаем

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} = (c+1) \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2}. \quad (11.124)$$

Сопоставляя соотношения (11.121) и (11.124), находим второе дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} = \frac{1}{c+1} \frac{dq_2(Fo)}{dFo}. \quad (11.125)$$

Для нахождения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (11.109) по переменной ξ и запишем полученное соотношение для точки $\xi = 1$:

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3} - \left[\frac{c}{(1-\xi)^2} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} - \left[\frac{c}{1-\xi} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \right]_{\xi=1}. \quad (11.126)$$

Раскрывая возникающую в правой части соотношения (11.126) неопределенность по правилу Лопиталя, получаем

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3} - \frac{1}{2} c \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3}. \quad (11.127)$$

Сопоставляя соотношения (11.122) и (11.127), находим третье дополнительное граничное условие

$$\partial^3 \Theta(1, Fo) / \partial \xi^3 = 0. \quad (11.128)$$

Граничные условия (11.110)—(11.112), (11.91), (11.125), (11.128) дают возможность определить шесть коэффициентов полинома (11.114). Подставляя найденные из решения системы алгебраических

линейных уравнений коэффициенты b_k ($k = \overline{0,5}$) в соотношении (11.114), находим

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \frac{1}{9}(20\xi + 10\xi^2 - 60\xi^3 + 55\xi^4 - 16\xi^5)(1 - q_2) + \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{12}\xi^2 - \xi^3 + \frac{13}{12}\xi^4 + \frac{1}{3}\xi^5 \right) \frac{dq_2}{dFo}. \quad (11.129)$$

Подставляя (11.129) в (11.116), относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ получаем следующее линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (при $c = 1$):

$$\frac{13}{1008}q_2'' + \frac{173}{378}q_2' + \frac{20}{9}q_2 - \frac{20}{9} = 0. \quad (11.130)$$

Последовательность решения уравнения (11.130) аналогична решению уравнения (11.63). Общее решение выражения (11.130) имеет вид

$$q_2(Fo) = 1 + C_1 \exp(-5,8051Fo) + C_2 \exp(-29,682Fo). \quad (11.131)$$

Формулы для констант интегрирования C_1 и C_2 , определяемых из начальных условий $q_2(Fo_1) = 0$; $dq_2(Fo_1)/dFo = 0$:

$$C_1 = -1,2431 \exp(5,8051Fo_1); \quad C_2 = 0,2431 \exp(29,682Fo_1). \quad (11.132)$$

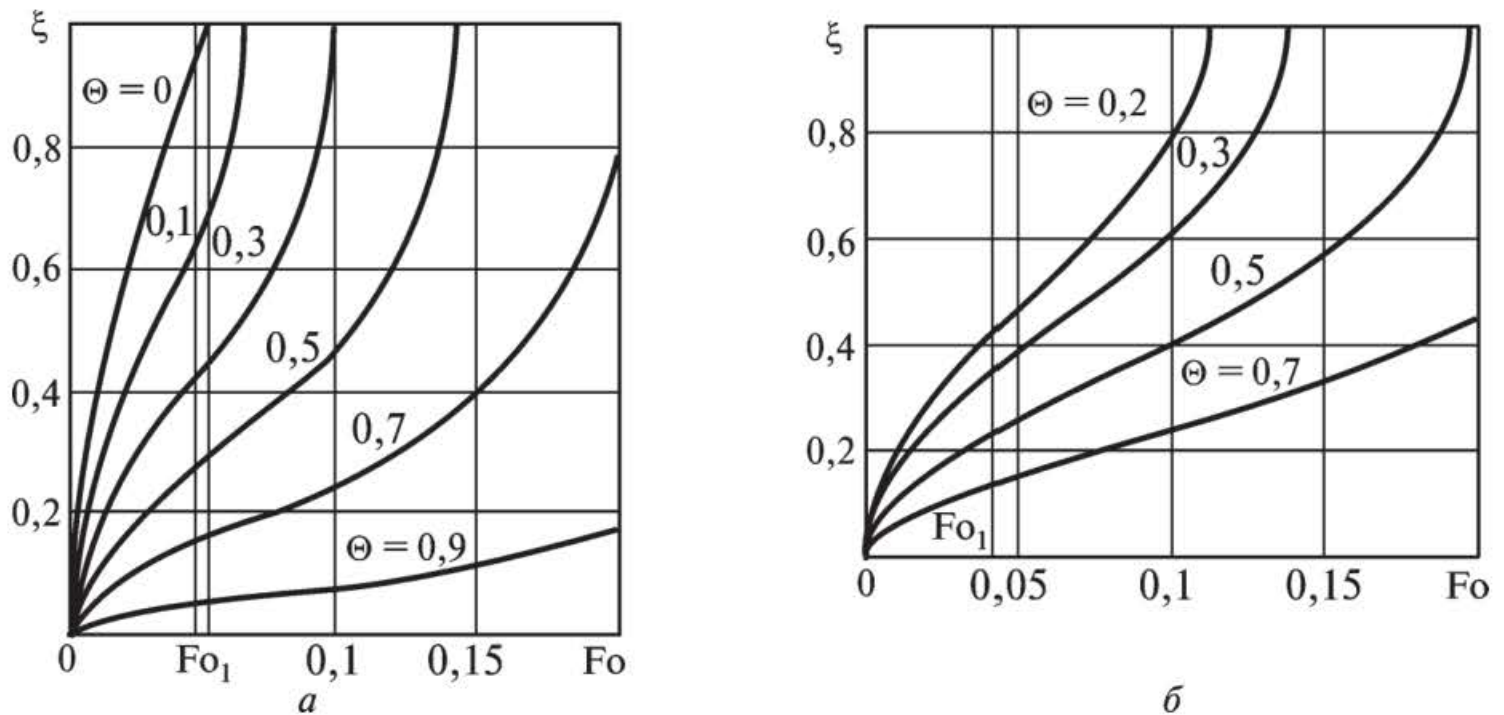
Соотношение (11.129) с учетом (11.131), (11.132) принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = & 1 - (1,56\xi + 0,78\xi^2 - 1,071\xi^3 - 0,221\xi^4 + \\ & + 0,195\xi^5) \exp[-5,805(Fo - Fo_1)] - (0,662\xi + \\ & + 0,331\xi^2 - 5,596\xi^3 + 6,332\xi^4 - 1,973\xi^5) \exp[-29,682(Fo - Fo_1)], \end{aligned} \quad (11.133)$$

где в качестве Fo_1 принимаем значение $Fo_1 = 0,042$, полученное во втором приближении первой стадии процесса. Отметим, что коэффициенты, находящиеся под знаком экспонент, незначительно отличаются от собственных значений краевой задачи (11.79)—(11.82) при ее решении точными аналитическими методами. Точные значения первых двух собственных чисел $\lambda_1 = 5,7831$; $\lambda_2 = 30,4733$.

Результаты расчетов по формуле (11.133) в сравнении с точным решением приведены на рис. 11.19. Анализ результатов позволяет заключить, что для $Fo \geq 0,05$ полученное здесь решение практически совпадает с точным.

Для построения графиков изотерм в соотношениях (11.10) и (11.119) выразим координату ξ как функцию $\Theta(\xi, Fo)$ и времени Fo :



Р и с. 11.20. Распределение изотерм в цилиндре:

a — первое приближение, $Fo_1 = 0,056$; *б* — второе приближение, $Fo_1 = 0,042$

$$\xi = (1 - \sqrt{\Theta(\xi, Fo)}) q_1(Fo); \quad (11.134)$$

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - [1 - \Theta(\xi, Fo)] \exp[8(Fo - Fo_1)]}. \quad (11.135)$$

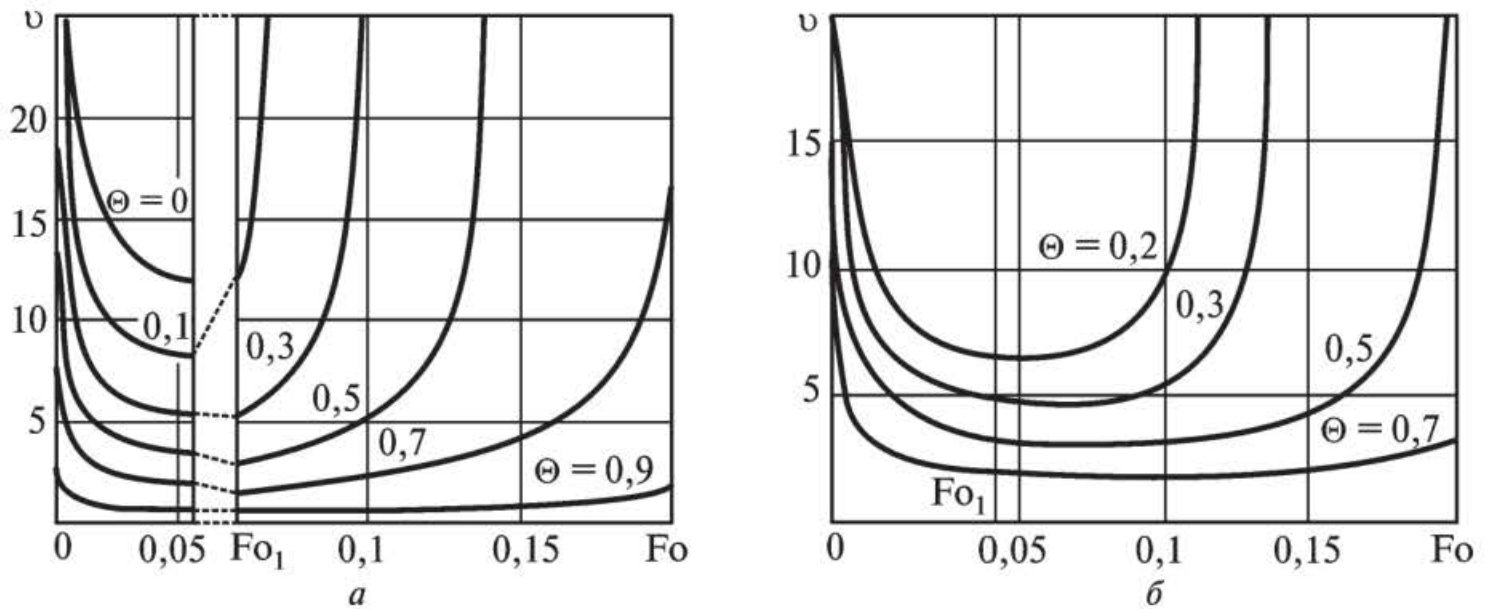
Используя соотношения (11.134), (11.135), для отдельных значений $\Theta(\xi, Fo) = \text{const}$ были построены графики изотерм, которые представлены на рис. 11.20. В данном случае, так же как и для пластины, нулевая изотерма $\Theta(\xi, Fo) = 0$ совпадает с графиком движения фронта температурного возмущения по координате ξ в зависимости от времени (см. рис. 11.20, *a*). В самом деле при $\Theta(\xi, Fo) = 0$ из (11.134) следует, что $\xi = q_1(Fo)$.

Определяя первые производные по времени от соотношений (11.134), (11.135), находим безразмерные скорости движения изотерм соответственно для первой и второй стадий процесса:

$$v_1(Fo, \Theta) = \frac{dq_1}{dFo} (1 - \sqrt{\Theta}); \quad (11.136)$$

$$v_2(Fo, \Theta) = \frac{4(1 - \Theta) \exp[8(Fo - Fo_1)]}{\sqrt{1 - (1 - \Theta) \exp[8(Fo - Fo_1)]}}. \quad (11.137)$$

Графики скоростей движения изотерм для первого и второго приближений даны на рис. 11.21. Отметим, что в первом приближении ввиду невысокой точности решений, определяемых по формулам (11.10), (11.119), в графиках изменения скоростей в точке перехо-



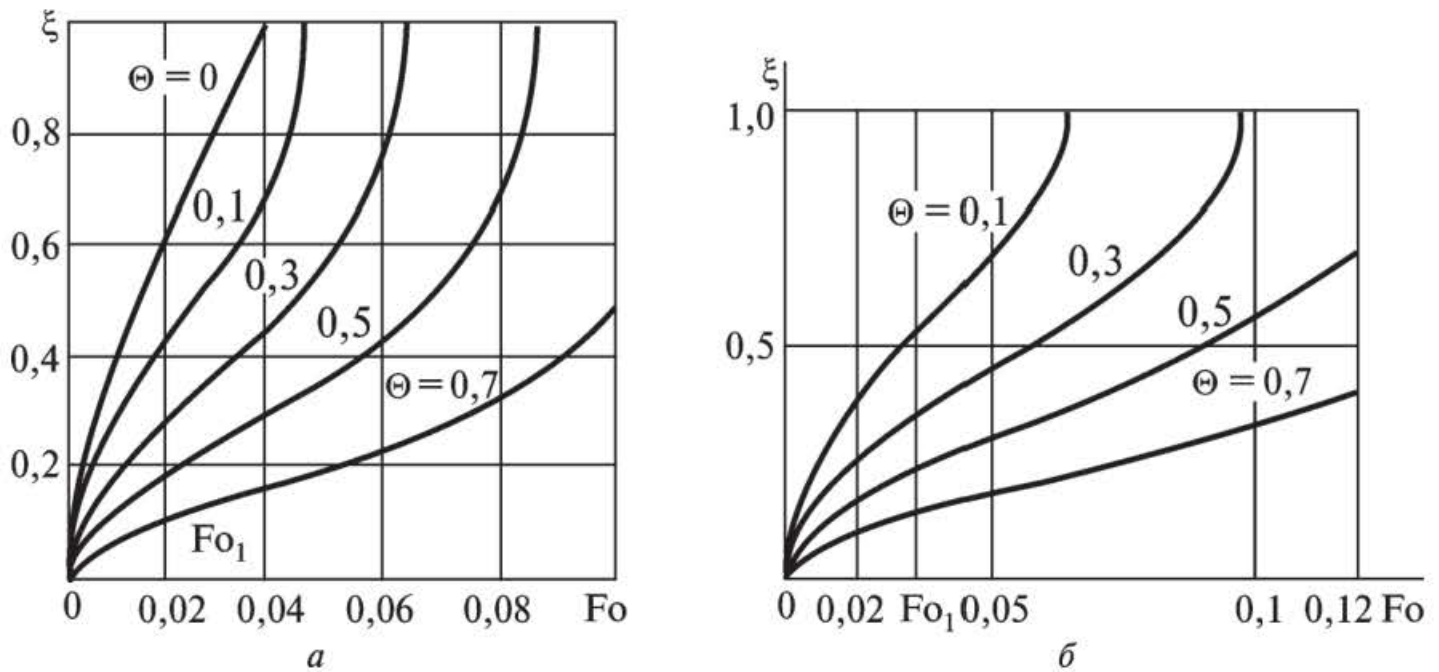
Р и с. 11.21. Распределение скоростей изотерм в цилиндре:

a — первое приближение, $Fo_1 = 0,056$; b — второе приближение, $Fo_1 = 0,042$

да от первой стадии процесса ко второй, т. е. при $Fo = Fo_1$, происходит некоторый скачок, который уже во втором приближении практически не наблюдается (см. рис. 11.21, b).

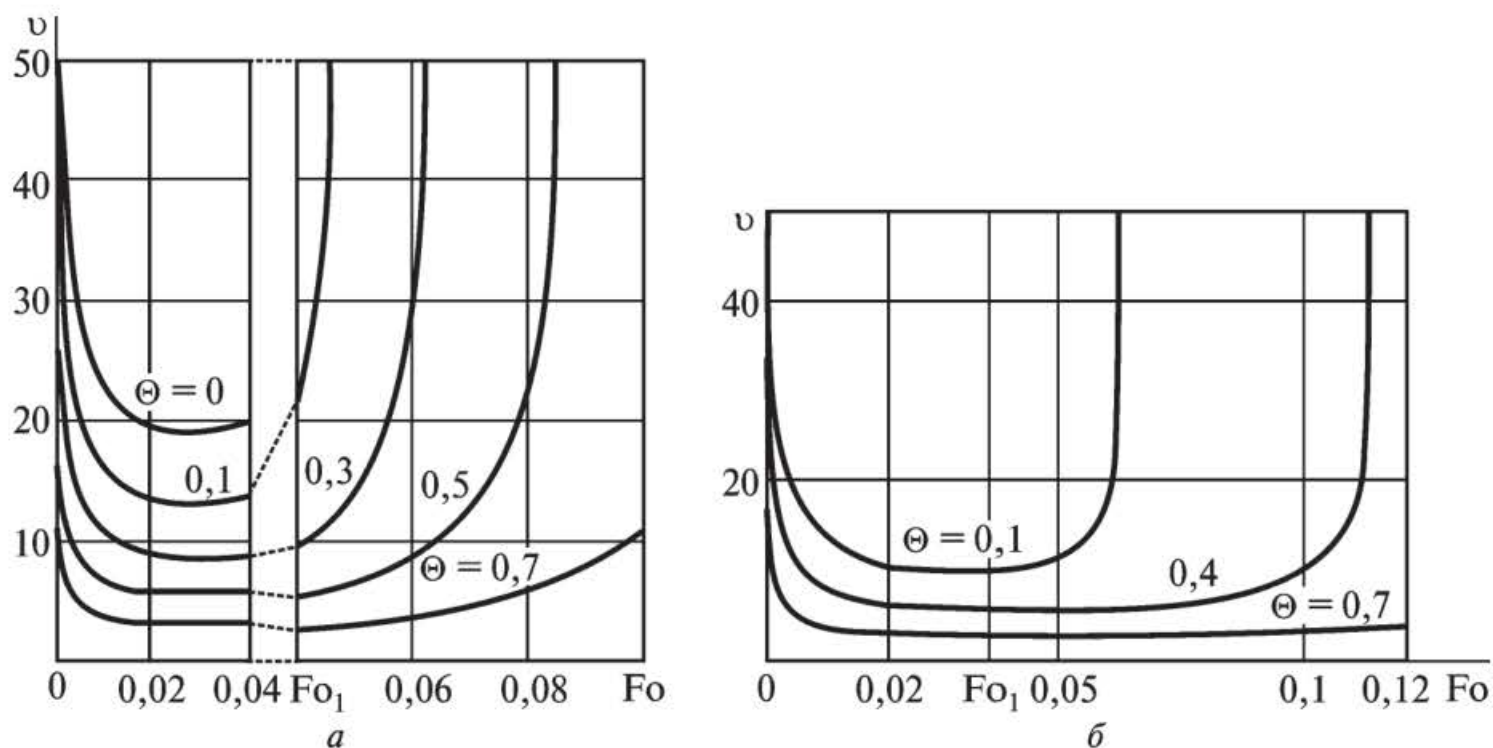
Анализ графиков скоростей позволяет заключить, что максимальные значения ($v \rightarrow \infty$) изотермы имеют вблизи точки $\xi = 0$ и при $Fo \rightarrow 0$ (т.е. вблизи поверхности цилиндра), а также вблизи точки $\xi = 1$ (т.е. в центре цилиндра). На отрезке между поверхностью и центром цилиндра скорости изотерм достигают некоторого минимального значения.

Аналогичные графики изотерм и скоростей их движения построены также и для шара (рис. 11.22, 11.23). Анализ позволяет заключить,



Р и с. 11.22. Распределение изотерм в шаре:

a — первое приближение, $Fo_1 = 0,0403$; b — второе приближение, $Fo_1 = 0,0359$



Р и с. 11.23. Распределение скоростей изотерм в шаре:

a — первое приближение, $Fo_1 = 0,0403$; *b* — второе приближение, $Fo_1 = 0,0359$

что из трех тел классической формы (пластина, цилиндр, шар) наибольшие скорости движения изотермы имеют в шаре, а наименьшие — в пластине. При этом время окончания первой стадии процесса в шаре оказывается наименьшим, а в пластине — наибольшим.

Тепловой поток на поверхности цилиндра будет определяться по формуле

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{2\lambda(T_{ст} - T_0)}{Rq_1(Fo)}$$

Анализируя эту формулу, приходим к заключению, что при $Fo = 0$ знаменатель дроби обращается в нуль. Следовательно, тепловой поток на поверхности цилиндра, так же как и на поверхности пластины, бесконечно велик, что и приводит к бесконечно большим скоростям движения изотерм (подробнее об этом см. § 11.1).

§ 11.3. Пластина, цилиндр, шар (граничные условия третьего рода)

Рассмотрим последовательность получения решения нестационарной задачи теплопроводности для пластины, цилиндра и шара при граничных условиях третьего рода. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial T(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho^c} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^c \frac{\partial T(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right] \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho \leq 1); \quad (11.138)$$

$$T(\rho, 0) = T_0; \quad (11.139)$$

$$\partial T(0, Fo)/\partial \rho = 0; \quad (11.140)$$

$$\partial T(1, Fo)/\partial \rho + Bi[T(1, Fo) - T_c] = 0, \quad (11.141)$$

где T — температура; T_0 — начальная температура; T_c — температура среды; $\rho = x/R$ — безразмерная координата; R — половина толщины пластины (радиус цилиндра, шара); $Bi = \alpha R/\lambda$; α — коэффициент теплоотдачи; λ — коэффициент теплопроводности; $Fo = a\tau/R^2$ — число Фурье; a — коэффициент температуропроводности; τ — время; $c = 0, 1, 2$ — соответственно для пластины, цилиндра и шара.

В соответствии со схемой решения задач, принятой в § 11.2, введем фронт температурного возмущения, характеризуемый функцией $q_1(Fo)$. Для упрощения процесса получения решения перейдем к новой независимой переменной $\xi = 1 - \rho$ и введем безразмерную температуру по формуле $\Theta = (T - T_0)/(T_c - T_0)$. С учетом принятых обозначений задача (11.138)—(11.141) для первой стадии процесса примет вид (рис. 11.24)

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (11.142)$$

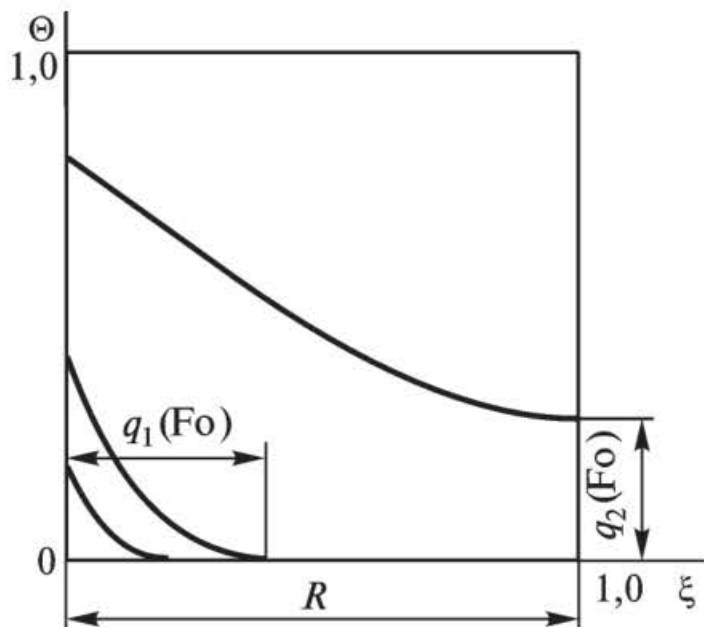
$$(0 < Fo \leq Fo_1; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo));$$

$$\partial \Theta(0, Fo)/\partial \xi - Bi[\Theta(0, Fo) - 1] = 0; \quad (11.143)$$

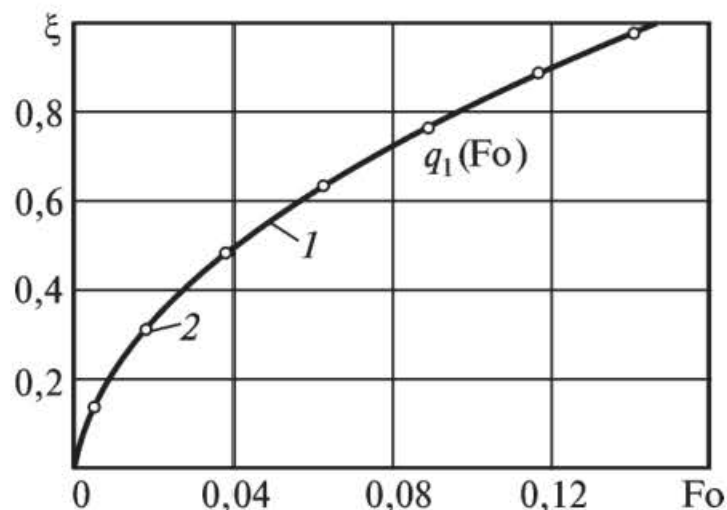
$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad \partial \Theta(q_1, Fo)/\partial \xi = 0, \quad (11.144)$$

где соотношения (11.144) представляют условия тепловой изоляции подвижной границы.

Применительно к задаче (11.142)—(11.144), как и ранее (см. § 11.1, 11.2), нет необходимости в выполнении начального условия типа (11.139) ввиду того, что в начальный момент времени она определена лишь в точке $\xi = 0$, где задается начальное условие вида $q_1(0) = 0$. В ней отсутствует также граничное условие адиабатной стенки вида (11.140), задаваемое в центре пластины (цилиндра, шара), так как оно не оказывает влияния на процесс теплообмена в первой стадии.



Р и с. 11.24. Расчетная схема теплообмена



Р и с. 11.25. Перемещение фронта температурного возмущения по координате ξ ($Bi = 1$):

1 — точное решение; 2 — по формуле (11.149)

Решение задачи (11.142)—(11.144) примем в виде полинома (11.9), где неизвестные коэффициенты a_k ($k = 0, 1, 2$) в первом приближении находим из граничных условий (11.143), (11.144). Соотношение (11.9) после их определения примет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{Bi}{2 + Biq_1} \left(q_1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{q_1} \right). \quad (11.145)$$

Проинтегрируем уравнение (11.142) по переменной ξ в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = q_1(Fo)$, т.е. найдем интеграл взвешенной невязки этого уравнения

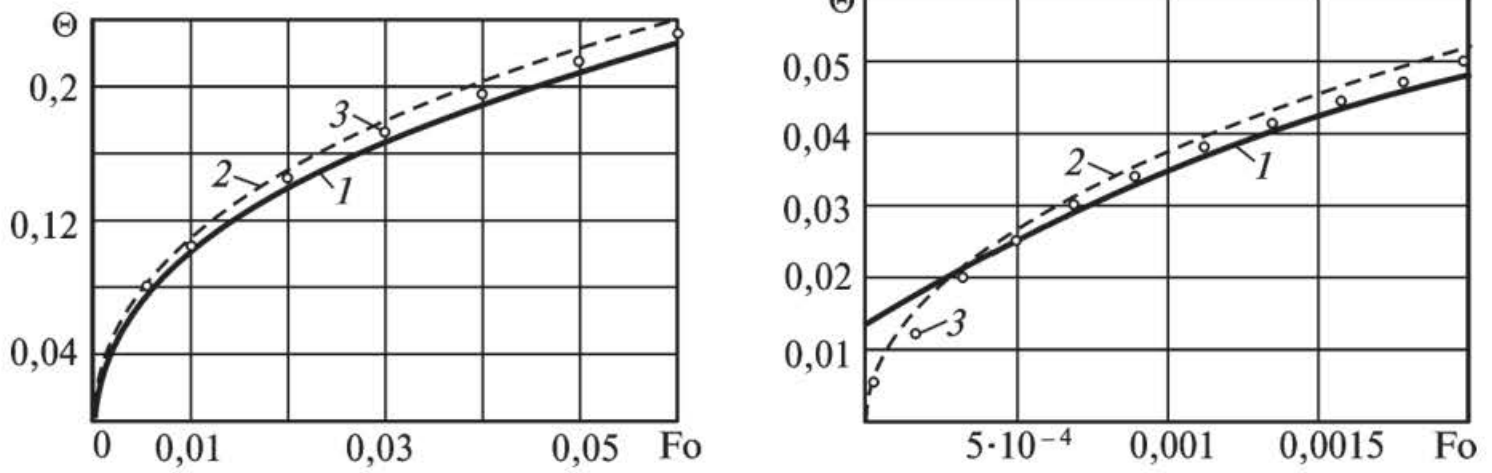
$$\int_0^{q_1(Fo)} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^{q_1(Fo)} \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (11.146)$$

Подставляя (11.145) в (11.146), после определения интегралов относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению (при $c = 0$):

$$(4 + Biq_1)q_1 dq_1 = 6(2 + Biq_1)dFo. \quad (11.147)$$

Интегрируя уравнение (11.147), при начальном условии $q_1(0) = 0$ находим

$$Fo = \frac{1}{12} q_1^2 + \frac{1}{3Bi} q_1 - \frac{2}{3Bi^2} \ln|Biq_1 + 2| + \frac{2}{3Bi^2} \ln(2). \quad (11.148)$$



Р и с. 11.26. Изменение температуры в пластине ($c = 0$) для $\xi = 0,001$ ($Bi = 1$):

1 — точное решение; 2 — по формуле (11.145); 3 — по формуле (11.154)

Соотношение (11.148) относительно $q_1(Fo)$ является трансцендентным уравнением. Его решение при различных значениях числа Фурье и при $Bi = 1$ (используются лишь действительные корни уравнения (11.148)):

$q_1 \dots \dots$	0,0	0,02	0,1	0,3	0,5	0,7
$Fo \dots \dots$	0,0	$6,4446 \cdot 10^{-5}$	0,0016399	0,014325	0,038738	0,074097

Положив в (11.148) $q_1(Fo_1) = 1$, найдем время окончания первой стадии процесса $Fo = Fo_1 = 0,14636$ (при $Bi = 1$).

Приближенное аналитическое решение уравнения (11.147) согласно методике, изложенной в § 11.10, имеет вид

$$q_1(Fo) = 2,7163Fo^{0,52}. \quad (11.149)$$

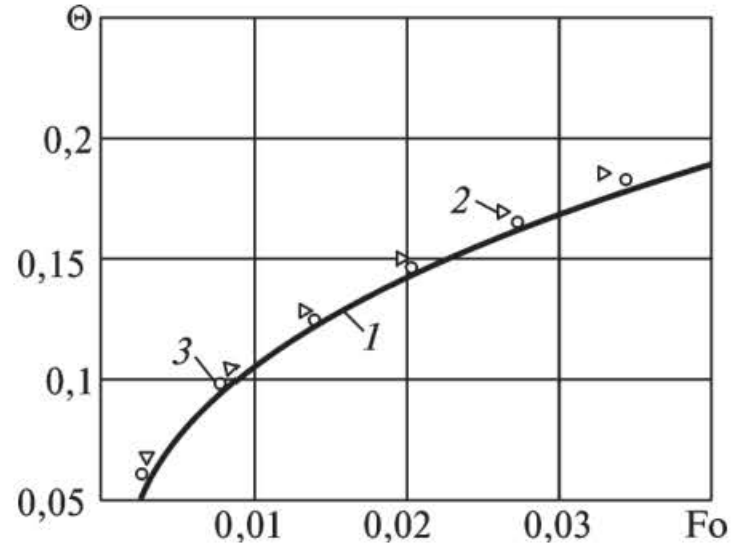
Результаты расчетов $q_1(Fo)$ по формуле (11.149) в сравнении с точным решением даны на рис. 11.25. Из анализа графиков следует, что полученные результаты практически совпадают.

Результаты расчетов по формуле (11.145) в сравнении с точным решением для различных значений числа Био представлены на рис. 11.26, 11.27. В связи с трудностями решения трансцендентного уравнения для определения собственных чисел в точном решении было использовано 16 членов ряда. Анализ полученных результатов позволяет заключить, что значения температур, полученных по формуле (11.145), отличаются от точных их значений не более чем на 1,5...2 %.

Для получения решения во втором приближении найдем дополнительные граничные условия. Продифференцируем граничное условие (11.143) по переменной Фурье:

Р и с. 11.27. Изменение температуры на поверхности пластины ($\xi = 0$) при $Bi = 1$:

1 — точное решение; 2 — по формуле (11.145); 3 — по формуле (11.154)



$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} - Bi \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (11.150)$$

Продифференцируем уравнение (11.142) по переменной ξ и применим полученное соотношение к точке $\xi = 0$:

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} - c \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} - c \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (11.151)$$

Соотношение (11.150) с учетом уравнения (11.142) и соотношения (11.151) примет вид

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} - c \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} - c \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} - Bi \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} + c Bi \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0.$$

Отсюда приходим к следующему дополнительному граничному условию:

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} - (Bi + c) \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} - c(1 - Bi) \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0. \quad (11.152)$$

Второе и третье дополнительные граничные условия определяются так же, как и соответствующие граничные условия для цилиндра (шара) при граничных условиях первого рода, и они имеют вид (11.92), (11.94).

Относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ в данном случае будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dq_1}{dFo} = \frac{10Bi^3 q_1^3 + 130Bi^2 q_1^2 + 570Bi q_1 + 900}{Bi^3 q_1^4 + 14Bi^2 q_1^3 + 73Bi q_1^2 + 120q_1}. \quad (11.153)$$

Интегрируя уравнение (11.153), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$\frac{q_1^2}{20} + \frac{q_1}{10\text{Bi}} + \frac{2}{\text{Bi}^2} \ln(\text{Bi}q_1 + 6) - \frac{17}{20\text{Bi}^2} \ln(\text{Bi}^2q_1^2 + 7\text{Bi}q_1 + 15) -$$

$$-\frac{\sqrt{11}}{10\text{Bi}^2} \arctg \left[\frac{\sqrt{11}}{11\text{Bi}} (2\text{Bi}^2q_1 + 7\text{Bi}) \right] - \frac{1}{20\text{Bi}^2} \left[40 \ln 6 - 17 \ln 15 - \right.$$

$$\left. - 2\sqrt{11} \arctg \left(\frac{7\sqrt{11}}{11} \right) \right] = \text{Fo}.$$

Положив $q_1(\text{Fo}_1) = 1$, найдем время окончания первой стадии процесса ($\text{Fo}_1 = 0,06532$) во втором приближении (при $\text{Bi} = 1$). Последнее соотношение для любых Bi и Fo позволяет находить значения $q_1(\text{Fo})$. Для некоторых чисел Fo и при $\text{Bi} = 1$ $q_1(\text{Fo})$ равно:

$q_1 \dots$	0,02	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0
$\text{Fo} \dots$	$2,666 \cdot 10^{-5}$	$6,655 \cdot 10^{-4}$	$5,967 \cdot 10^{-3}$	$1,651 \cdot 10^{-2}$	$3,222 \cdot 10^{-2}$	0,06532

Формула для безразмерной температуры во втором приближении первой стадии процесса при $\text{Bi} = 1$ принимает вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \frac{1}{q_1^2 + 7q_1 + 15} \left[\frac{q_1(2q_1 + 9)}{2} - \frac{5(q_1 + 6)\xi}{2} + \frac{15\xi^2}{q_1} + \frac{5\xi^3}{q_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{5(2q_1 + 3)\xi^4}{2q_1^3} + \frac{3(q_1 + 2)\xi^5}{2q_1^4} \right]. \quad (11.154)$$

Приближенное аналитическое решение уравнения (11.153) будет (см. § 11.10)

$$q_1(\text{Fo}) = 3,912703\text{Fo}^{0,5}. \quad (11.155)$$

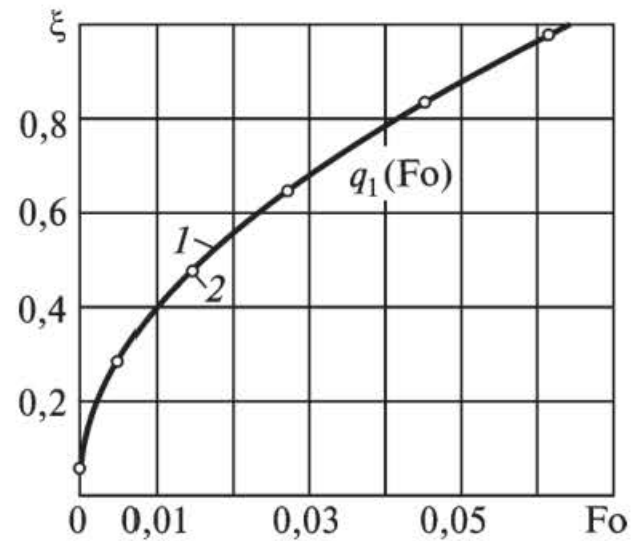
Анализ результатов расчетов по формуле (11.154) в сравнении с точным решением (см. рис. 11.26, 11.27) позволяет заключить, что решение во втором приближении в диапазоне чисел Фурье $0 \leq \text{Fo} \leq \text{Fo}_1$ отличается от точного не более чем на 0,5 %.

На рис. 11.28 представлены графики зависимости фронта температурного возмущения от безразмерного времени во втором приближении. Как видно из рисунка, они практически совпадают.

Во второй стадии процесса в качестве дополнительной искомой функции принимаем изменяющуюся во времени температуру в центре пластины (цилиндра, шара) $\Theta(1, \text{Fo}) = q_2(\text{Fo})$. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

Р и с. 11.28. Перемещение фронта температурного возмущения по координате ξ в зависимости от времени Fo (второе приближение):

1 — точное решение; 2 — по формуле (11.155)



$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (11.156)$$

$$(Fo \geq Fo_1; 0 \leq \xi \leq 1);$$

$$\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi - Bi[\Theta(0, Fo) - 1] = 0; \quad (11.157)$$

$$\Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad \partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (11.158)$$

Начальным условием задачи (11.156)—(11.158) будет распределение температуры, описываемое формулой (11.145), в конце первой стадии процесса, т. е. при $Fo = Fo_1$ и $q_1(Fo_1) = 1$. При этих условиях решение (11.145) приводим к соотношению вида

$$\Theta(\xi, Fo_1) = Bi(1 - 2\xi + \xi^2) / (2 + Bi), \quad (11.159)$$

которое и будет начальным условием задачи (11.156)—(11.158). Однако в специальном выполнении условия (11.159) нет необходимости ввиду того, что задачи (11.142)—(11.144) и (11.156)—(11.158) при $Fo = Fo_1$ полностью совпадают (см. § 11.1, 11.2).

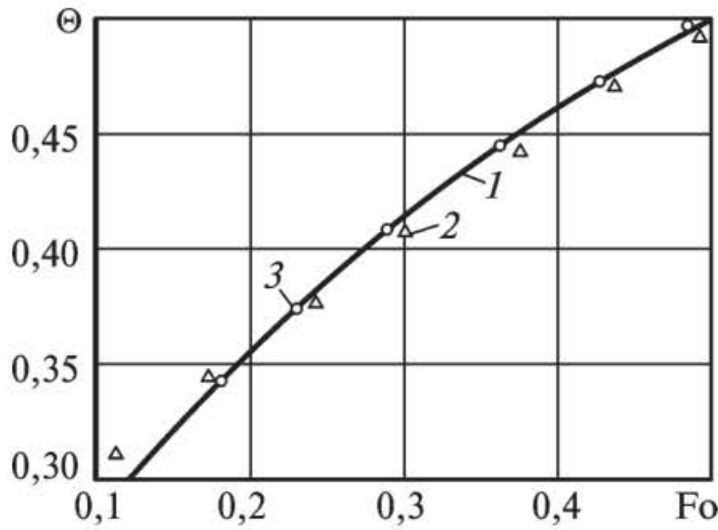
Решение задачи (11.156) — (11.158) разыскиваем в виде полинома (11.114). Соотношение (11.114) после определения b_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (11.157), (11.158) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{Bi + 2q_2}{2 + Bi} + \frac{2Bi(q_2 - 1)}{2 + Bi} \xi - \frac{Bi(q_2 - 1)}{2 + Bi} \xi^2. \quad (11.160)$$

Составляя невязку уравнения (11.156) и интегрируя ее в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, находим

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (11.161)$$

Подставляя (11.160) в (11.161), получаем (при $c = 0$)



Р и с. 11.29. Изменение температуры на поверхности пластины при $Bi = 1$:
 1 — точное решение; 2 — по формуле (11.165);
 3 — по формуле (11.169)

$$(Bi + 1)dq_2 = Bi(q_2 - 1)dFo. \quad (11.162)$$

Общий интеграл уравнения (11.162) имеет вид

$$q_2(Fo) = 1 - C \exp[-3BiFo/(3 + Bi)], \quad (11.163)$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия $q_2(Fo_1) = 0$,

$$C = \exp[3BiFo_1/(3 + Bi)]. \quad (11.164)$$

Соотношение (11.114) с учетом (11.163) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \frac{1}{2 + Bi} \exp\left[-\frac{3Bi(Fo - Fo_1)}{3 + Bi}\right] (2 + 2Bi\xi - Bi\xi^2). \quad (11.165)$$

Результаты расчетов по формуле (11.165) в сравнении с точным решением даны на рис. 11.29.

Для получения решения во втором приближении найдем дополнительные граничные условия. Продифференцируем граничные условия (11.157), (11.158) по переменной Фурье:

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} - Bi \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = 0; \quad (11.166)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{dq_2(Fo)}{dFo}; \quad (11.167)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = 0. \quad (11.168)$$

Сравнивая соотношения (11.166)—(11.168) с уравнением (11.142) и с выражением, полученным после нахождения производной от него

по переменной ξ , соответственно получим первое, второе и третье дополнительные граничные условия вида (11.152), (11.125), (11.128).

После определения неизвестных коэффициентов b_k ($k = \overline{0, 5}$) из основных и дополнительных граничных условий соотношение (11.114) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{D}{8} \{ (\delta_1 + \delta_2 q_2 + \delta_3 q_2') + (\delta_2 q_2 - \delta_4 + \delta_5 q_2') \xi - 2\xi^2 [20Bi(q_2 - 1) + \delta_6 q_2'] (3 - Bi\xi) + [\delta_7 (q_2 - 1) + \delta_8 q_2'] \xi^4 - [\delta_9 (q_2 - 1) + \delta_{10} q_2'] \xi^5 \}, \quad (11.169)$$

где $D = 1/(15 + 7Bi + Bi^2)$; $\delta_1 = Bi(36 + 8Bi)$; $\delta_2 = 20(6 + Bi)$; $\delta_3 = 24 + 3Bi$; $\delta_4 = \delta_2$; $\delta_5 = 3(8 + Bi)$; $\delta_6 = 7Bi + 10$; $\delta_7 = 20Bi(2Bi + 3)$; $\delta_8 = 16Bi^2 + 55Bi + 60$; $\delta_9 = 12Bi(2 + Bi)$; $\delta_{10} = 20Bi + 5Bi^2 + 24$.

Подставляя (11.169) в (11.161), относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$, получаем следующее неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$H_1 q_2'' + H_2 q_2' + H_3 q_2 - H_3 = 0, \quad (11.170)$$

где $H_1 = 11Bi^2(Bi + 10) + 360$; $H_2 = 270Bi(Bi + 8) + 3600$; $H_3 = 600Bi(Bi + 6)$.

Преобразуем уравнение (11.170) следующим образом:

$$q_2'' + N_1 q_2' + N_2 q_2 - N_2 = 0, \quad (11.171)$$

где $N_1 = H_2/H_1$; $N_2 = H_3/H_1$.

Общее решение уравнения (11.171) разыскиваем в виде

$$q_2(Fo) = \eta + \varphi, \quad (11.172)$$

где η — частное решение неоднородного уравнения (11.171); φ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Характеристическое уравнение для однородного уравнения будет

$$z^2 + N_1 z + N_2 = 0.$$

Корни последнего уравнения имеют вид

$$z_1 = -0,5(N_1 - \sqrt{N_1^2 - 4N_2}); \quad z_2 = -0,5(N_1 + \sqrt{N_1^2 - 4N_2}).$$

Отсюда общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$\varphi = C_1 \exp(z_1 Fo) + C_2 \exp(z_2 Fo),$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования.

Частное решение неоднородного уравнения (11.171) будем разыскивать в виде $\eta = C_3$, где константа C_3 находится из выполнения уравнения (11.171). В данном случае будем иметь $C_3 = 1$.

С учетом найденного частного решения неоднородного и общего решения однородного уравнения соотношение (11.172) принимает вид

$$q_2(\text{Fo}) = 1 + C_1 \exp(z_1 \text{Fo}) + C_2 \exp(z_2 \text{Fo}).$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 находим из начальных условий $q_2(\text{Fo}_1) = 0$; $dq_2(\text{Fo}_1)/d\text{Fo} = 0$:

$$C_1 = -\frac{z_2}{z_2 - z_1} \exp(z_1 \text{Fo}_1); \quad C_2 = \frac{z_1}{z_2 - z_1} \exp(z_2 \text{Fo}_1),$$

где Fo_1 — время окончания первой стадии процесса во втором приближении, $\text{Fo}_1 = 0,065323$.

Соотношение для $q_2(\text{Fo})$ с учетом констант интегрирования, например для $\text{Bi} = 1$, принимает вид

$$q_2(\text{Fo}) = 1 - 1,1198 \exp[-0,7402(\text{Fo} - \text{Fo}_1)] + 0,1446 \exp[-11,7962(\text{Fo} - \text{Fo}_1)]. \quad (11.173)$$

Соотношения (11.169), (11.173) определяют решение задачи (11.156)—(11.158) во втором приближении. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (11.169) точно удовлетворяет основным (11.157), (11.158) и дополнительным (11.152), (11.125), (11.128) граничным условиям, начальному условию (11.159) и приближенно (во втором приближении) уравнению (11.156).

Анализируя результаты расчетов по формуле (11.169) в сравнении с точным решением (см. рис. 11.29) видим, что решение во втором приближении второй стадии процесса в диапазоне чисел Фурье $\text{Fo}_1 \leq \text{Fo} \leq 0,1$ отличается от точного не более чем на 0,05 %, а в диапазоне $0,1 \leq \text{Fo} < \infty$ практически совпадает с ним.

Отметим, что коэффициенты, находящиеся под знаками экспонент соотношения (11.173), незначительно отличаются от двух первых собственных чисел ($\text{Bi} = 1$) при решении задачи классическими методами. Точные их значения: $\lambda_1 = 0,7401$; $\lambda_2 = 11,7347$. Коэффициенты перед экспонентами в классическом точном решении имеют вид $A_1 = 1,1191$; $A_2 = 0,1516$. Они также незначительно отличаются от коэффициентов перед экспонентами соотношения (11.173).

Выражая координату ξ как функцию температуры $\Theta(\xi, \text{Fo})$ и времени Fo , соотношения (11.145) и (11.165) можно привести к виду

$$\xi = q_1 + \sqrt{\Theta q_1 \text{Bi}(2 + q_1 \text{Bi})} / \text{Bi}; \quad (11.174)$$

$$\xi = 1 + \sqrt{\text{Bi}(\text{Bi} + 2)[q_2(q_2 - 1 - \Theta) + \Theta]} / [\text{Bi}(q_2 - 1)]. \quad (11.175)$$

Соотношения (11.174), (11.175) позволяют для любых конкретных $\Theta(\xi, \text{Fo}) = \text{const}$ построить графики зависимости температур от ξ и Fo (графики изотерм). Отметим, что нулевая изотерма $\Theta(\xi, \text{Fo}) = 0$ совпадает с графиком движения фронта температурного возмущения по координате ξ в зависимости от времени Fo (см. рис. 11.30, *в, г, д*).

Первые производные по времени от соотношений (11.174), (11.175) позволяют определить безразмерные скорости движения изотерм $v = d\xi/d\text{Fo}$ по координате ξ в зависимости от времени, а вторые производные — ускорения $a = d^2\xi/d\text{Fo}^2$. Формулы скоростей для первой и второй стадий процесса соответственно будут

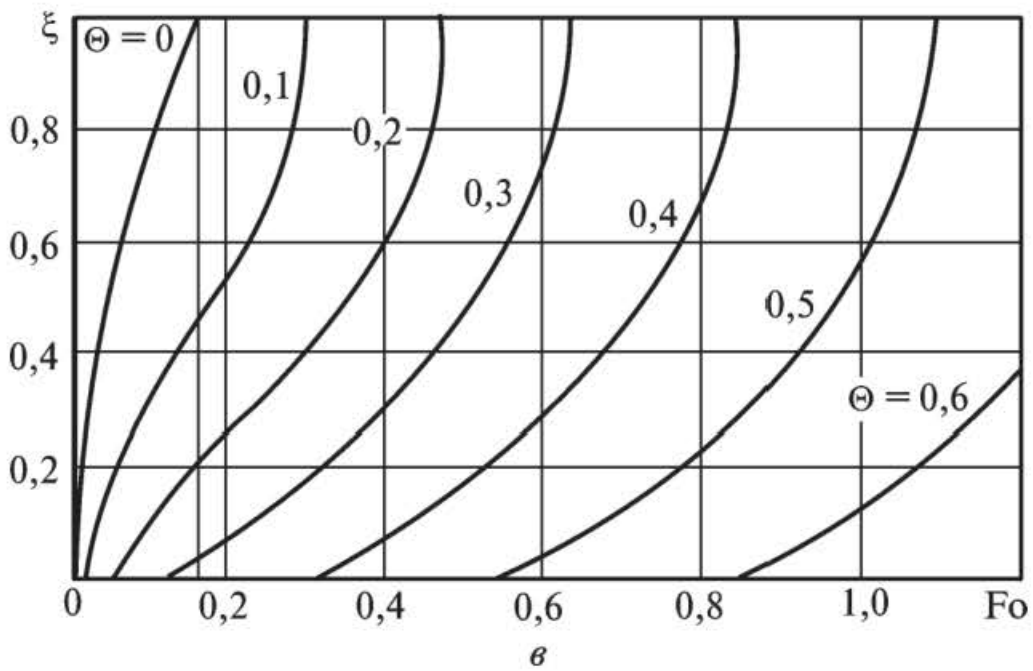
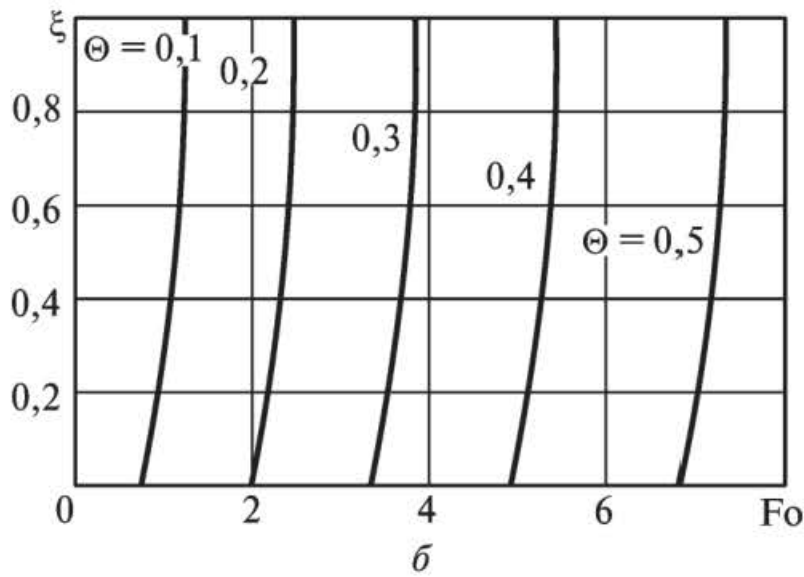
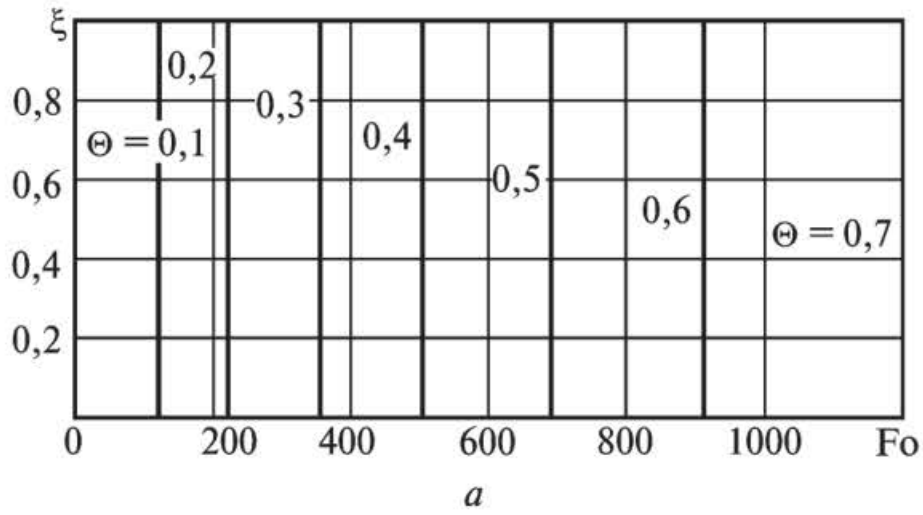
$$v = \frac{dq_1}{d\text{Fo}} \frac{\sqrt{\Theta q_1 \text{Bi} (2 + \text{Bi} q_1) + \Theta(1 + q_1 \text{Bi})}}{\sqrt{\Theta q_1 \text{Bi} (2 + \text{Bi} q_1)}}; \quad (11.176)$$

$$v = \frac{3(\Theta - 1)\sqrt{\text{Bi}(2 + \text{Bi})}}{2(3 + \text{Bi})\sqrt{\exp \eta (\Theta - 1 + \exp \eta)}}, \quad (11.177)$$

где $\eta = -3\text{Bi}(\text{Fo} - \text{Fo}_1)/(3 + \text{Bi})$.

Ввиду невысокой точности первого приближения изотермы, определяемые по формулам (11.174), (11.175), имеют небольшой излом при $\text{Fo} = \text{Fo}_1$. В связи с чем на всех графиках в этой точке имеет место некоторый скачок в эпюрах скоростей, который уже во втором приближении практически не наблюдается.

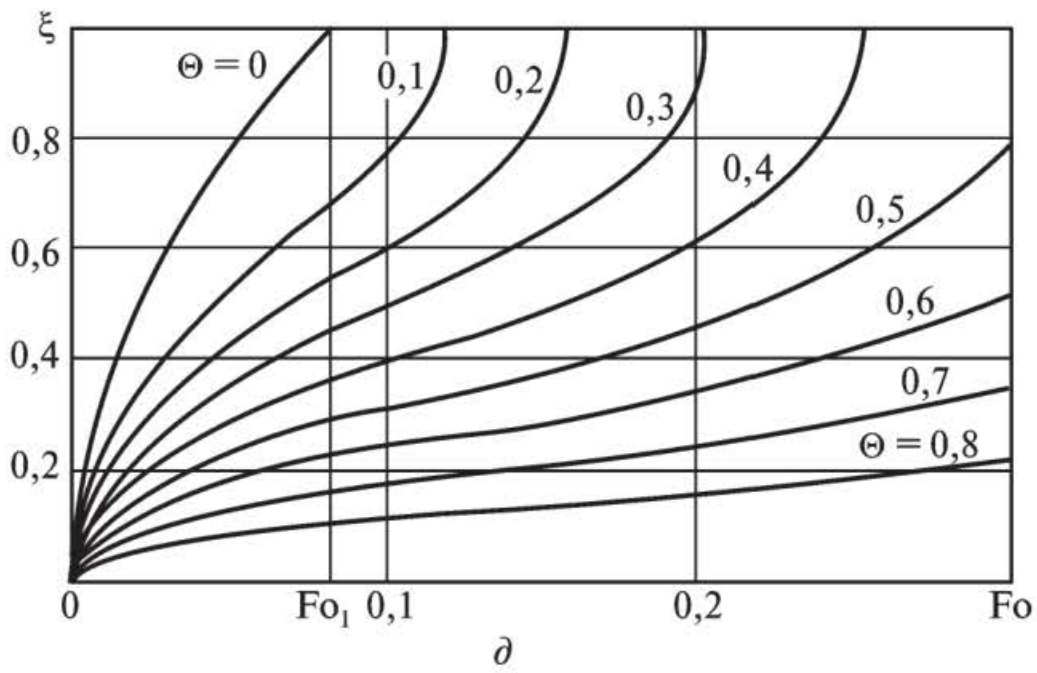
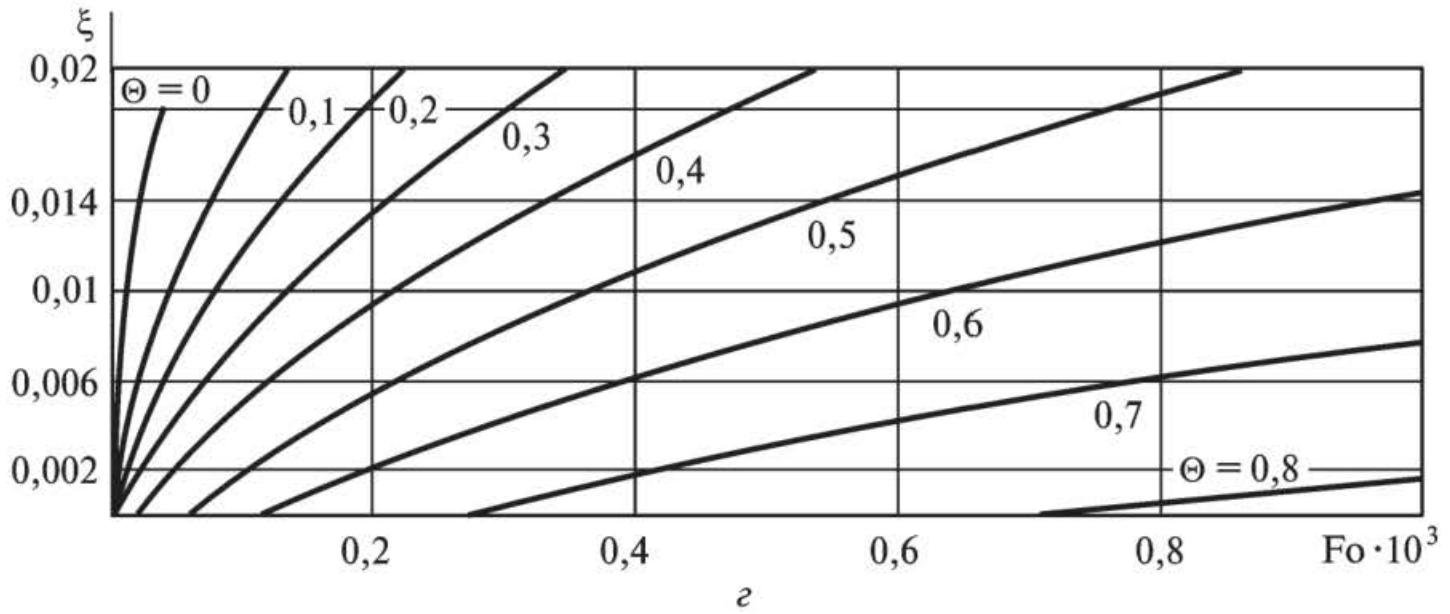
Распределение изотерм, полученных с использованием формул (11.174), (11.175), дано на рис. 11.30. Их анализ позволяет сделать следующие заключения. При малых значениях числа Bi ($\text{Bi} \leq 0,01$) внутреннее термическое сопротивление R/λ значительно меньше внешнего $1/\alpha$, поэтому скорость распространения теплоты в пластине будет значительно превосходить скорость ее подвода из окружающей среды. В результате скорость прогрева пластины будет в основном определяться скоростью подвода теплоты из окружающей среды, а температура всех ее точек в одни и те же моменты времени будет практически одинаковой. Изотермы, например, для $\text{Bi} = 0,001$ (см. рис. 11.30, *а*) имеют вид практически прямых линий, перпендикулярных как центру пластины, так и ее поверхности, что свидетельствует об отсутствии градиентов температур по толщине. Каждая изотерма появляется на поверхности пластины в определенный момент време-



Р и с. 11.30. Распределение изотерм в пластине при Bi , равном:
 0,001 (а); 0,1 (б); 1 (в); 100 (г); 2000 (д)

ни, имея определенную начальную скорость, причем, начальные скорости v_0 всех изотерм одинаковы (например, для $Bi = 0,001 v_0 \approx 1,0$).

Соотношение (11.165) при малых значениях числа Bi ($Bi \rightarrow 0$) приводим к виду



Продолжение рис. 11.30

$$\Theta = 1 - \exp[-\text{Bi}(\text{Fo} - \text{Fo}_1)] = 1 - \exp(-\text{BiFo}), \quad (11.178)$$

где $\exp(\text{BiFo}_1) = 1$ при $\text{Bi} \rightarrow 0$.

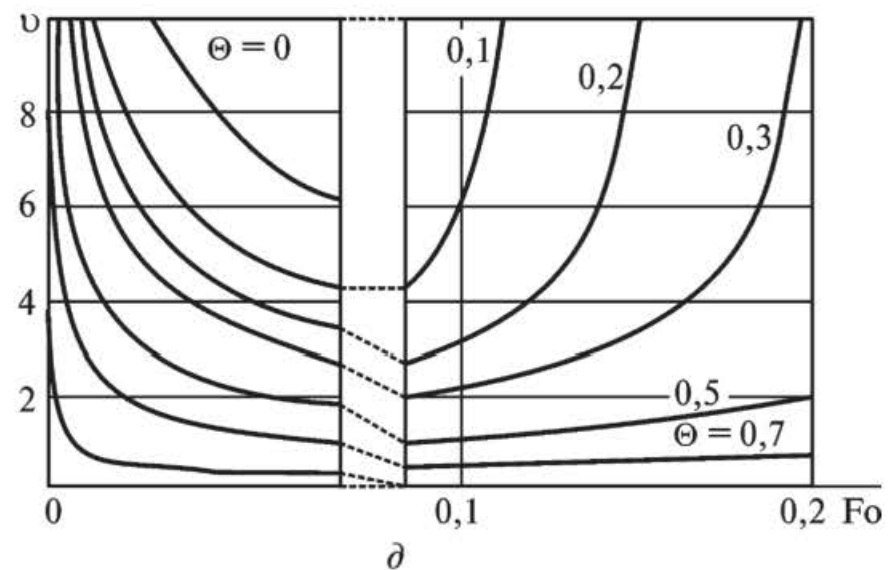
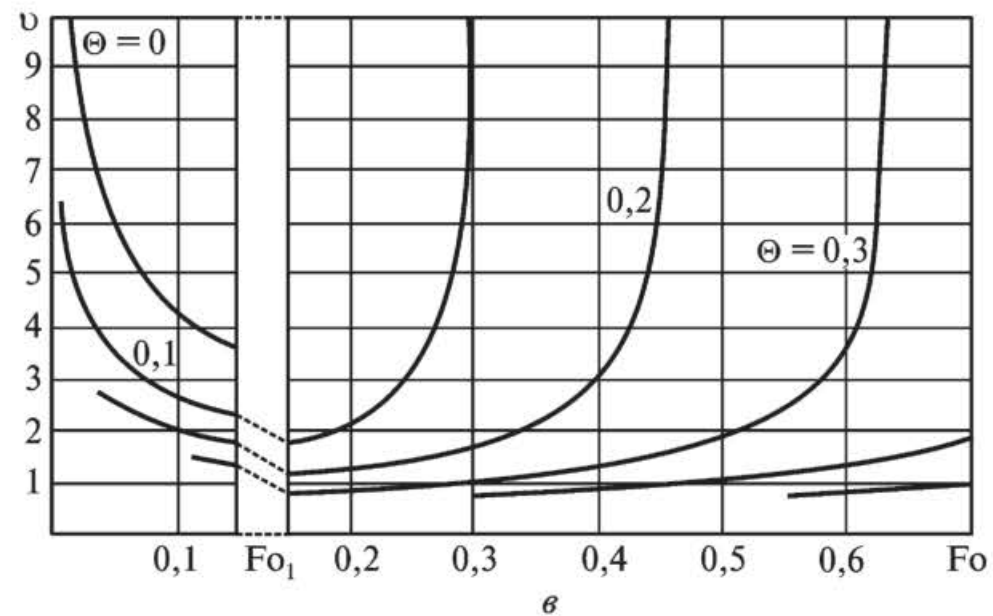
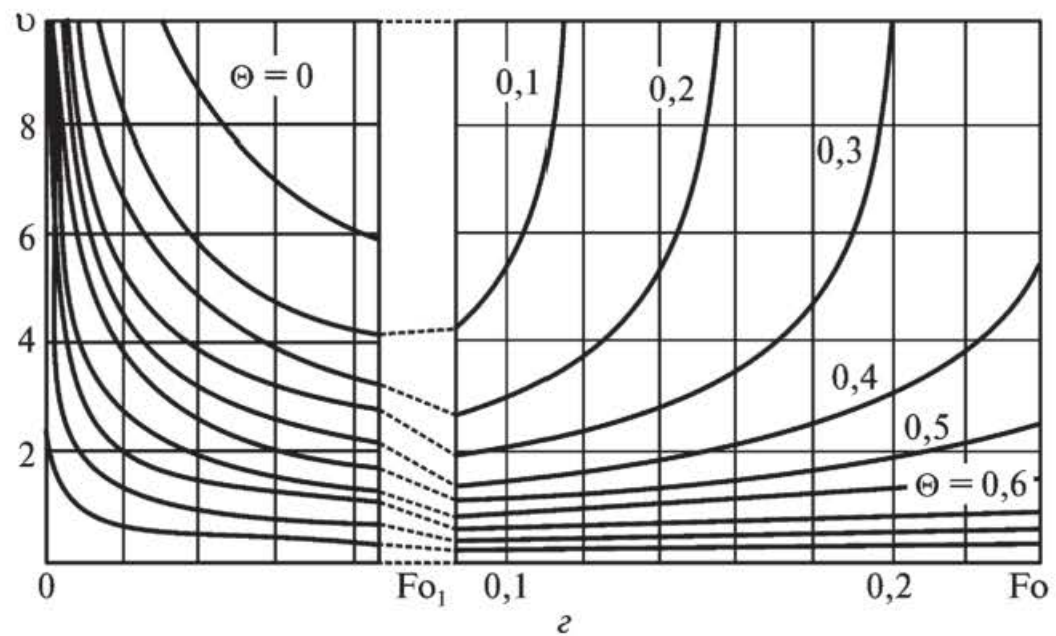
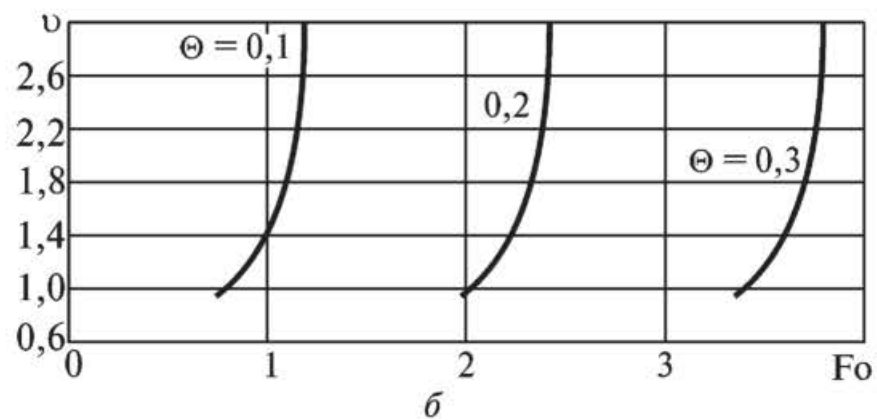
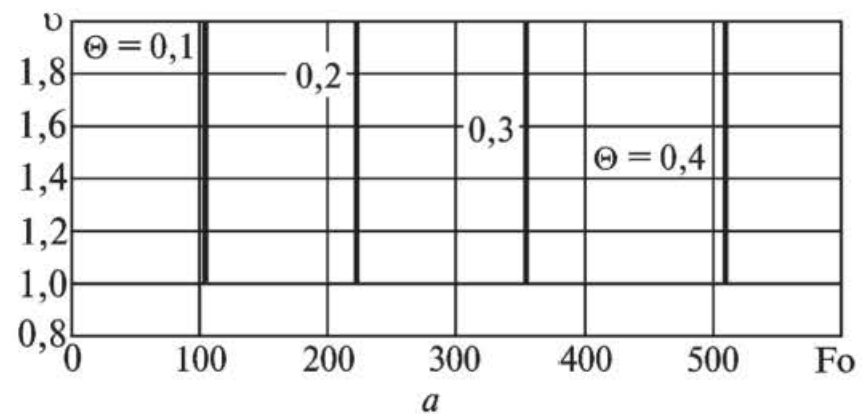
Произведение BiFo в соотношении (11.178), так же как и число Fo , по существу является безразмерным временем t :

$$\text{BiFo} = \frac{\alpha R}{\lambda} \frac{a\tau}{R^2} = \frac{\alpha}{c\rho R} \tau = \frac{\alpha S}{c\rho SR} \tau = \frac{\alpha S}{c\rho V} \tau = t, \quad (11.179)$$

где c — теплоемкость, Дж / (кг · К); ρ — плотность, кг/м³; S — площадь, м²; V — объем, м³.

Соотношение (11.178) с учетом (11.179) принимает вид

$$\Theta = 1 - \exp(-t). \quad (11.180)$$



Р и с. 11.31. Распределение скоростей изотерм в пластине при Bi , равном: 0,001 (а); 0,1 (б); 1 (в); 100 (г); 2000 (д)

Формула (11.180) представляет решение задачи о нагреве тела при отсутствии распределения температуры по координате ξ , т.е. температура тела изменяется лишь во времени. Изотермы в этом случае имеют вид прямых линий, перпендикулярных поверхностям пластины $\xi = 0$ и $\xi = 1$, что и подтверждается результатами расчетов, приведенных на рис. 11.30, *а*.

Анализ распределения изотерм и скоростей их движения для $Bi = 0,1$ (см. рис. 11.30, *б*, 11.31, *б*) показывает, что в данном случае по толщине пластины возникают незначительные градиенты температур. Изотермы имеют вид слабо наклоненных к поверхности ($\xi = 0$) пластины эквидистантных между собой кривых, перпендикулярных центру симметрии ($\xi = 1$). Имея начальное значение $v_0 = 0,90$, при приближении к центру пластины ($\xi \rightarrow 1$) скорости устремляются к бесконечным значениям.

В диапазоне средних значений Bi ($0,01 < Bi < 100$) внутреннее и внешнее термические сопротивления пластины становятся сопоставимыми величинами, и процесс нагрева определяется как скоростью подвода теплоты извне, так и скоростью ее распространения внутри пластины. Изотермы, например, для $Bi = 1$ (см. рис. 11.30, *в*) расположены так, что по толщине имеют место значительные градиенты температур. Здесь так же, как и для меньших Bi , каждая изотерма появляется на поверхности пластины в строго определенный момент времени. При этом время возникновения одних и тех же изотерм с увеличением числа Bi смещается в сторону меньших значений числа Fo .

Графики скоростей изотерм при $Bi = 1$ (рис. 11.31, *в*) характеризуются тем, что для малых значений Θ ($0 \leq \Theta < 0,1$) скорости вблизи поверхности пластины ($\xi \rightarrow 0$) в начальные моменты времени ($Fo \rightarrow 0$) устремляются к бесконечным значениям. При увеличении Θ ($\Theta \geq 0,1$) изотермы, возникая в определенный момент времени на поверхности пластины, имеют некоторую начальную скорость (например, изотерма $\Theta = 0,2$ имеет начальную скорость $v_0 = 2,7$, для изотермы $\Theta = 0,3$ $v_0 = 1,4$). При дальнейшем увеличении Θ ($\Theta \geq 0,4$) начальные скорости всех изотерм уменьшаются до одинакового значения, равного $v_0 \approx 0,75$. При $Bi = 1$, как и для меньших Bi , все изотермы перпендикулярны центру пластины, и скорости их при приближении к центру устремляются к бесконечным значениям.

При дальнейшем увеличении числа Bi ($Bi > 1,0$) градиенты температур по толщине пластины возрастают, одни и те же изотермы возникают на поверхности пластины при все меньших значениях чисел

Fo , а начальные скорости изотерм возрастают, устремляясь к бесконечным значениям (для $Bi = 100$ см. рис. 11.30, z , 11.31, z).

При очень больших числах Bi ($Bi \geq 2000$) теплообмен протекает практически при граничных условиях первого рода. Все изотермы возникают на поверхности пластины при значениях числа Fo , близких к нулю (см. рис. 11.30, d). Начальные скорости изотерм устремляются к бесконечным значениям (см. рис. 11.31, d).

Затем с увеличением времени скорости уменьшаются до некоторой минимальной (различной для каждой отдельной изотермы) величины, и при приближении изотерм к центру пластины они вновь возрастают до бесконечных величин. Рассмотрим причины бесконечно больших значений начальных скоростей изотерм. При малых значениях числа Фурье ($Fo \rightarrow 0$) величина прогретого слоя совершенно незначительна ($q_1(Fo) \rightarrow 0$) и, следовательно, его термическое сопротивление практически отсутствует ($q_1(Fo)/\lambda \rightarrow 0$). Кроме того, если найти тепловой поток на единицу площади внешней поверхности пластины, то можно увидеть, что при $Fo \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow 0$) он равен бесконечной величине

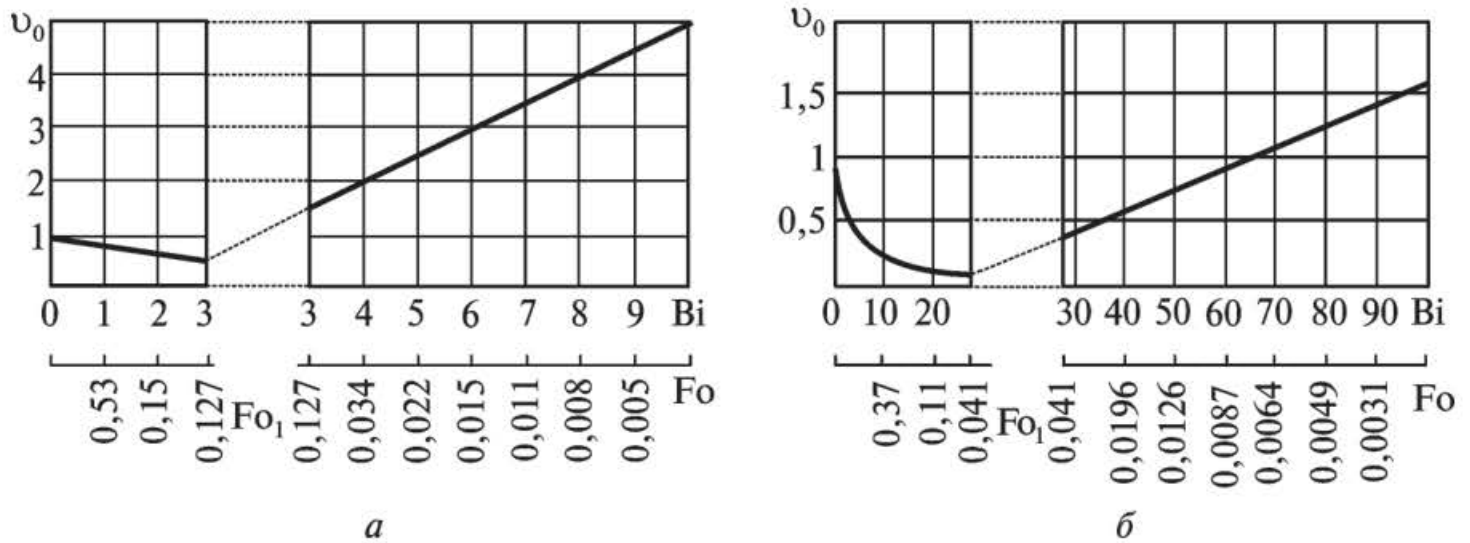
$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{2\lambda(T_{ст} - T_0)}{\sqrt{12a\tau}}, \quad (11.181)$$

где $T_{ст}$ — температура стенки, равная при $Bi \rightarrow \infty$ температуре среды T_c .

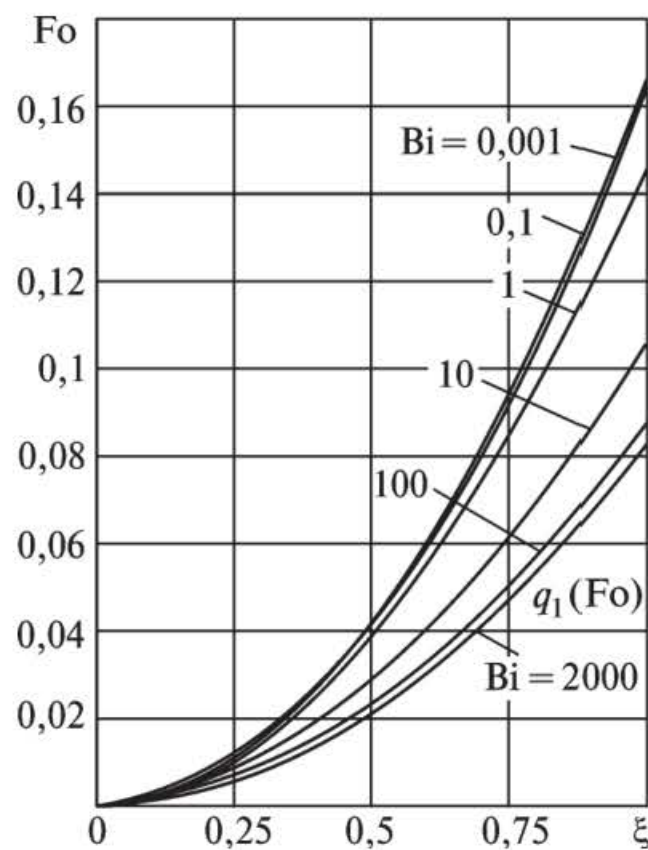
Таким образом, принятие граничных условий первого рода (тепловой удар) приводит к появлению бесконечно больших тепловых потоков на поверхности пластины и, как следствие, бесконечно больших начальных скоростей изотерм.

На рис. 11.32 представлены графики зависимости начальной скорости и времени появления изотерм на поверхности пластины от числа Био. Их анализ позволяет заключить, что с увеличением Bi время появления изотерм уменьшается. В первой стадии процесса зависимость Bi близка к линейной, причем, чем больше Bi , тем больше начальная скорость и тем меньше время, за которое от момента начала процесса данная изотерма появляется на поверхности пластины.

Для изотерм, появляющихся на поверхности в случаях, когда $Fo > Fo_1$ (вторая стадия процесса), имеет место нелинейная зависимость v_0 от Bi . Здесь с увеличением числа Био начальная скорость уменьшается, причем это уменьшение в наибольшей степени характерно для изотерм в диапазоне $0,5 \leq \Theta < 1$.



Р и с. 11.32. Изменение начальной скорости v_0 и времени появления изотерм на поверхности пластины от числа Bi для изотерм $\Theta = 0,5$ (а); $\Theta = 0,9$ (б)



Р и с. 11.33. Зависимость фронта температурного возмущения от числа Fo для различных Bi

На рис. 11.33 представлены графики перемещения фронта температурного возмущения q_1 по координате ξ в зависимости от времени Fo для различных Bi . Из анализа графиков можно заключить, что с увеличением числа Bi время достижения фронтом температурного возмущения ($Fo = Fo_1$) координаты $\xi = 1$ уменьшается. Наименьшее время соответствует значениям числа $Bi \geq 2000$, т.е. когда практически имеет место теплообмен при граничных условиях первого рода. Наибольшее время наблюдается для $Bi \leq 0,001$.

§ 11.4. Граничные условия второго рода

Найдем решение нестационарной задачи теплопроводности при постоянных во времени граничных условиях второго рода в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho^c} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^c \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right) \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho \leq 1); \quad (11.182)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 0; \quad (11.183)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} = 0; \quad (11.184)$$

$$-\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} + Ki = 0, \quad (11.185)$$

где $\Theta(\rho, Fo) = (T - T_0)/(T_c - T_0)$ — безразмерная температура; Ki — критерий Кирпичева, $Ki = qR/[\lambda(T_c - T_0)]$; T_c — температура среды; T_0 — начальная температура; q — тепловой поток. Остальные обозначения те же, что и в задаче § 11.3.

Рассматривая первую стадию теплового процесса, введем функцию, характеризующую глубину проникновения температурного возмущения $q_1(Fo)$. Если от координаты ρ , отсчитываемой от центра пластины (цилиндра, шара), перейти к новой переменной $\xi = 1 - \rho$, отсчитываемой от поверхности, то задача (11.182)—(11.185) приводится к виду

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (11.186)$$

$$(0 \leq \xi \leq q_1; 0 < Fo \leq Fo_1);$$

$$\frac{-\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = Ki; \quad (11.187)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (11.188)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} = 0. \quad (11.189)$$

По причинам, отмеченным ранее (см. § 11.1—11.3), в задаче (11.186)—(11.189) отсутствуют начальное условие вида (11.183) и граничное условие (11.184).

Представим искомый температурный профиль в виде полинома n -й степени (11.9). Составляя невязку уравнения (11.186) и интегрируя полученное соотношение в пределах толщины термического слоя, получаем

$$\int_0^{q_1} (1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^{q_1} \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (11.190)$$

Определяя интеграл в правой части соотношения (11.190), находим

$$\int_0^{q_1} (1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = (1-q_1)^c \frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (11.191)$$

Учитывая (11.187) и (11.189), соотношение (11.191) принимает вид

$$\int_0^{q_1} (1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = Ki. \quad (11.192)$$

Соотношение (11.9) после определения неизвестных коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (11.187)—(11.189) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = Ki(0,5q_1 - \xi + 0,5\xi^2/q_1). \quad (11.193)$$

Подставляя (11.193) в соотношение (11.192), находим (при $c = 0$)

$$q_1 dq_1 = 3dFo. \quad (11.194)$$

Интегрируя (11.194), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

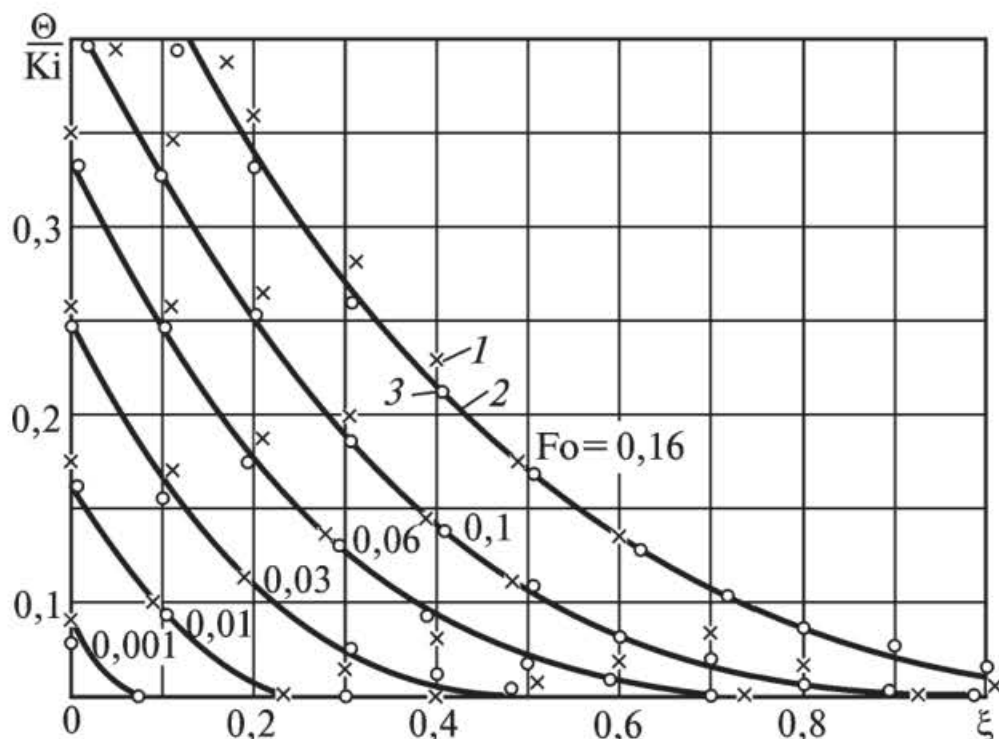
$$q_1 = \sqrt{6Fo}. \quad (11.195)$$

Положив $q_1(Fo_1) = 1$, находим время окончания первой стадии процесса $Fo = Fo_1 = 0,1667$.

Соотношения (11.193), (11.195) представляют решение задачи (11.186)—(11.189) в первом приближении первой стадии процесса. Результаты расчетов температур по формуле (11.193) в сравнении с точным решением представлены на рис. 11.34. Видим, что разброс составляет не более 6 %.

Для повышения точности решения необходимо привлекать дополнительные граничные условия. С целью их получения будем последовательно дифференцировать граничные условия (11.187)—(11.189) по переменной Fo , а уравнение (11.186) — по переменной ξ . Продифференцируем граничное условие (1.187) по переменной Fo :

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = 0. \quad (11.196)$$



Р и с. 11.34. Распределение температуры в пластине:

1 — по формуле (11.193); 2 — по формуле (11.200); 3 — точное решение

Продифференцируем уравнение (11.186) по переменной ξ и запишем полученное соотношение применительно к точке $\xi = 0$:

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} - c \left[c \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} \right]. \quad (11.197)$$

Сравнивая (11.196) и (11.197), получаем первое дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} - c \left[\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} \right] = 0. \quad (11.198)$$

Второе и третье дополнительные граничные условия имеют вид (см. § 11.1—11.3)

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^3} = 0. \quad (11.199)$$

Подставляя (11.9) в основные и дополнительные граничные условия, для определения неизвестных коэффициентов $a_k(q_1)$ ($k = 0, 5$) получаем систему шести алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы коэффициенты a_k в соотношение (11.9), находим

$$\Theta(\xi, Fo) = q_1 \text{Ki} \left[\frac{3}{10} - \frac{\xi}{q_1} + \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^4 + \frac{1}{5} \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^5 \right]. \quad (11.200)$$

Подставляя (11.200) в соотношение (11.192), относительно неизвестной функции $q_1(\text{Fo})$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$q_1 dq_1 = 7,5 d\text{Fo}. \quad (11.201)$$

Интегрируя уравнение (11.201), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1 = \sqrt{15\text{Fo}}. \quad (11.202)$$

При $q_1(\text{Fo}_1) = 1$ $\text{Fo}_1 = 0,06666$.

Соотношения (11.200), (11.202) определяют решение задачи (11.186)—(11.189) во втором приближении первой стадии процесса.

Результаты расчетов по формуле (11.200) в сравнении с точным решением представлены на рис. 11.34. Их анализ позволяет заключить, что расхождение результатов не превышает 1,5 %.

Найдем решение задачи (11.186)—(11.189) в третьем приближении. Для этого необходимо получить еще три дополнительных граничных условия. Для нахождения четвертого продифференцируем по переменной Fo соотношение (11.198):

$$\frac{\partial^4 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^3 \partial \text{Fo}} - c \left[\frac{\partial^3 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}} + c \frac{\partial^2 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi \partial \text{Fo}} \right] = 0. \quad (11.203)$$

Продифференцируем уравнение (11.186) дважды и трижды по переменной ξ и запишем полученные соотношения применительно к точке $\xi = 0$:

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \text{Fo} \partial \xi^2} = \frac{\partial^4 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^4} - 2c \frac{\partial^2 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^2} - c \frac{\partial^3 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^3}; \quad (11.204)$$

$$\frac{\partial^4 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \text{Fo} \partial \xi^3} = \frac{\partial^5 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^5} - 3c^3 \frac{\partial^3 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^3} - c \frac{\partial^4 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^4}. \quad (11.205)$$

Подставляя (11.197), (11.204), (11.205) в (11.203), получаем четвертое дополнительное граничное условие

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^5 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^5} - 2c \frac{\partial^4 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^4} - 3c^2 \frac{\partial^3 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^3} - \\ & - 3c^3 \frac{\partial^2 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^2} + c^4 \frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \quad (11.206)$$

Для нахождения пятого дополнительного граничного условия продифференцируем первое соотношение (11.199) по переменной Fo , считая, что $\xi = q_1(Fo)$ является функцией Fo :

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \left[\frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \right]_{\xi=q_1} = \left[\frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^3} \frac{d\xi}{dFo} \right]_{\xi=q_1} + \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo} \Big|_{\xi=q_1} = 0. \quad (11.207)$$

Соотношение (11.207) с учетом второго соотношения из (11.199) принимает вид

$$\partial^3 \Theta(\xi, Fo) / (\partial Fo \partial \xi^2) = 0. \quad (11.208)$$

Продифференцируем уравнение (11.186) дважды по переменной ξ и запишем полученное соотношение для точки $\xi = q_1(Fo)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo \partial \xi^2} \Big|_{\xi=q_1} &= \frac{\partial^4 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^4} \Big|_{\xi=q_1} - \frac{c}{(1-\xi)^c} \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=q_1} - \\ &- 2c^2 - \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=q_1}. \end{aligned} \quad (11.209)$$

Сравнивая (11.208) и (11.209), с учетом (11.199) получаем пятое дополнительное граничное условие

$$\partial^4 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^4 = 0. \quad (11.210)$$

Для получения шестого дополнительного граничного условия продифференцируем второе соотношение из (11.199) по переменной Fo , считая, что $\xi = q_1(Fo)$ является функцией Fo :

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \left[\frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^3} \right]_{\xi=q_1} = \left[\frac{\partial^4 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^4} \frac{d\xi}{dFo} \right]_{\xi=q_1} + \frac{\partial^4 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^3 \partial Fo} \Big|_{\xi=q_1} = 0. \quad (11.211)$$

Соотношение (11.211) с учетом (11.210) принимает вид

$$\partial^4 \Theta(q_1, Fo) / (\partial \xi^3 \partial Fo) = 0. \quad (11.212)$$

Продифференцируем уравнение (11.186) трижды по переменной ξ и запишем полученное соотношение для точки $\xi = q_1(Fo)$:

$$\frac{\partial^4 \Theta(q_1, Fo)}{\partial Fo \partial \xi^3} = \frac{\partial^5 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^5} - \frac{c}{(1-q_1)} \frac{\partial^4 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^4} - \frac{3c}{(1-q_1)^c} \frac{\partial^3 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^3}. \quad (11.213)$$

Сравнивая (11.212) и (11.213), с учетом (11.199), (11.210) получаем шестое дополнительное граничное условие:

$$\partial^5 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^5 = 0. \quad (11.214)$$

В третьем приближении относительно коэффициентов $a_k(q_1)$ ($k = 0, 8$) после подстановки (11.9) в основные (11.187)—(11.189) и дополнительные (11.198), (11.199), (11.206), (11.210), (11.214) граничные условия будем иметь систему девяти алгебраических линейных уравнений. Из ее решения получены следующие значения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_0 &= 15Ki q_1 / 64; \quad a_1 = -Ki; \quad a_2 = 21Ki / 16q_1; \quad a_3 = 0; \\ a_4 &= -35Ki / 32q_1^3; \quad a_5 = 0; \quad a_6 = -21Ki / 16q_1^5; \quad a_7 = -Ki / q_1^6; \quad (11.215) \\ a_8 &= 15Ki / 64q_1^7. \end{aligned}$$

Подставляя (11.9) с учетом (11.215) в интеграл теплового баланса (11.192), относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$q_1 dq_1 = 12dFo.$$

Интегрируя последнее уравнение при начальном условии $q_1(0) = 0$, находим

$$q_1 = \sqrt{24Fo}, \quad (11.216)$$

Подставляя (11.216) в (11.9), получаем формулу для определения температуры в третьем приближении:

$$\frac{\Theta(\xi, Fo)}{Ki} = q_1 \left[\frac{15}{64} - \frac{\xi}{q_1} + \frac{21}{16} \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^2 - \frac{35}{32} \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^4 + \frac{21}{16} \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^6 - \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^7 + \frac{15}{64} \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^8 \right].$$

Аналогично можно получить решение и в последующих приближениях. Для получения решения в четвертом приближении, например, для пластины ($c = 0$) добавляют еще следующие дополнительные граничные условия:

$$\partial^7 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^7 = 0; \quad \partial^6 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^6 = 0; \quad \partial^7 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^7 = 0.$$

Отметим, что обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $q_1(Fo)$ в любом приближении имеют одинаковый вид и отличаются лишь числовыми коэффициентами, что упрощает получение решений в последующих приближениях.

Математическая постановка задачи для второй стадии процесса имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (11.217)$$

$$(Fo \geq Fo_1; 0 \leq \xi \leq 1);$$

$$-\partial \Theta(0, Fo)/\partial \xi = Ki, \quad \Theta(1, Fo) = q_2(Fo), \quad \partial \Theta(1, Fo)/\partial \xi = 0. \quad (11.218)$$

Начальным условием задачи (11.217), (11.218) является формула (11.193) распределения температуры в конце первой стадии процесса в первом приближении, которая при $Fo = Fo_1$ и $q_1(Fo_1) = 1$ принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo_1) = Ki(0,5 - \xi + 0,5\xi^2). \quad (11.219)$$

Однако в специальном удовлетворении начального условия вида (11.219) нет необходимости ввиду того, что оно будет выполнено в процессе получения решения задачи (11.217), (11.218).

Составляя невязку уравнения (11.217) и интегрируя ее в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, по аналогии с соотношением (11.192) получаем

$$\int_0^1 (1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = Ki. \quad (11.220)$$

Решение задачи (11.217), (11.218) примем в виде (11.114). Соотношение (11.114) после определения из граничных условий (11.218) неизвестных коэффициентов b_k ($k = 0, 1, 2$) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = q_2(Fo) + Ki(0,5 - \xi + 0,5\xi^2). \quad (11.221)$$

Подставляя (11.221) в (11.220), относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению ($c = 0$):

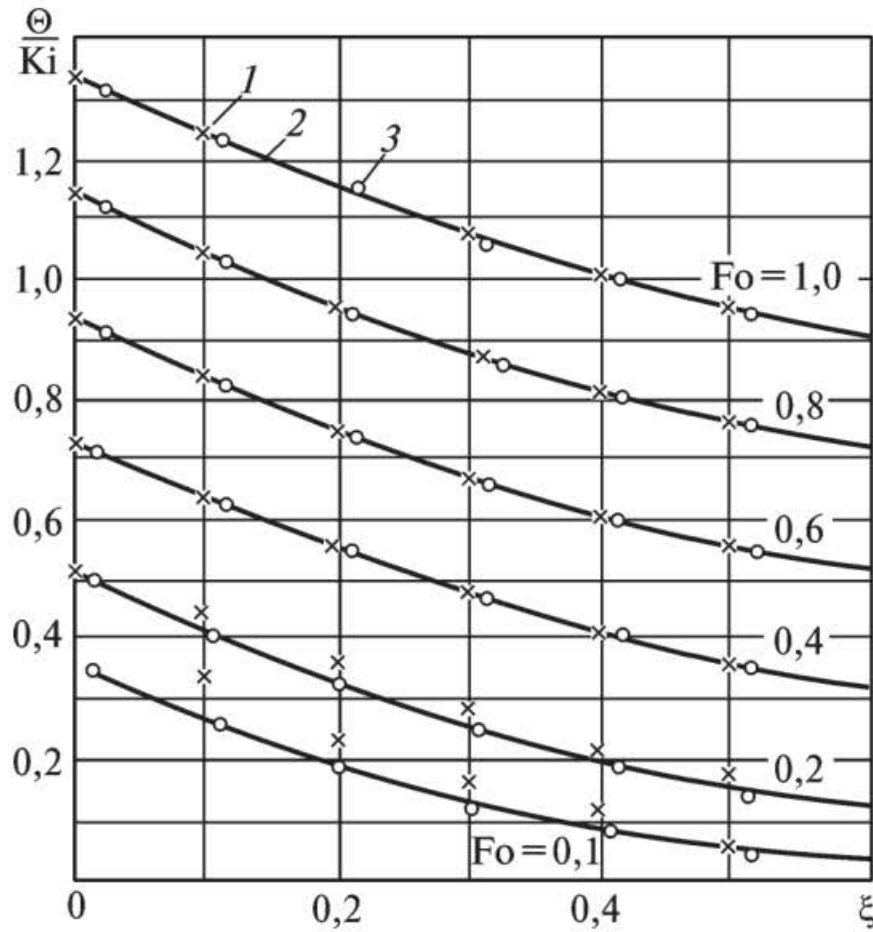
$$dq_2(Fo)/dFo = Ki. \quad (11.222)$$

Интегрируя уравнение (11.222), при начальном условии $q_2(Fo_1) = 0$ получаем

$$q_2(Fo) = Ki(Fo - Fo_1). \quad (11.223)$$

Соотношения (11.221), (11.223) определяют решение задачи (11.217), (11.218) в первом приближении второй стадии процесса. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (11.221) точно удовлетворяет граничным условиям (11.218), начальному условию (11.219), интегралу теплового баланса (11.220) и приближенно — уравнению (11.217).

Результаты расчетов по формуле (11.221) в сравнении с точным решением представлены на рис. 11.35. Их анализ позволяет заклю-



Р и с. 11.35. Распределение температуры в пластине:

1 — по формуле (11.221); 2 — по формуле (11.230); 3 — точное решение

чить, что отклонение полученных здесь результатов от точных значений температуры не превышает 6 %.

С целью повышения точности найдем решение задачи (11.217), (11.218) во втором приближении с привлечением дополнительных граничных условий, которые в данном случае идентичны граничным условиям (11.58), (11.59), (11.61).

Подставляя (11.114), ограничиваясь шестью членами ряда, в граничные условия (11.218), (11.58), (11.59), (11.61), относительно неизвестных коэффициентов $b_k(q_2)$ ($k = 0, 5$) получаем следующую систему шести алгебраических линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 (b_1 + 2b_2\xi + 3b_3\xi^2 + 4b_4\xi^3 + 5b_5\xi^4)_{\xi=0} &= -Ki; \\
 b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 &= q_2(Fo); \\
 b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5 &= 0; \\
 (6b_3 + 24b_4\xi + 60b_5\xi^2)_{\xi=0} &= 0; \\
 6b_3 + 24b_4 + 60b_5 &= 0; \\
 2b_2 + 6b_3 + 12b_4 + 20b_5 &= dq_2 / dFo.
 \end{aligned} \right\} \quad (11.224)$$

Из первого и четвертого уравнений системы (11.224) следует, что $b_1 = -Ki$; $b_3 = 0$. Формулы для оставшихся коэффициентов:

$$b_0 = \frac{3}{10}Ki + \frac{1}{5} \frac{dq_2(Fo)}{dFo} + q_2(Fo); \quad b_2 = Ki - \frac{1}{2} \frac{dq_2(Fo)}{dFo}; \quad (11.225)$$

$$b_4 = -\frac{1}{2}Ki + \frac{1}{2} \frac{dq_2(Fo)}{dFo}; \quad b_5 = \frac{1}{5}Ki - \frac{1}{5} \frac{dq_2(Fo)}{dFo}.$$

Подставляя (11.114) с учетом (11.225) в (11.220), относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$0,1q_2''(Fo) + q_2'(Fo) = Ki. \quad (11.226)$$

Общий интеграл уравнения (11.226) имеет вид

$$q_2(Fo) = KiFo - 0,1C_1 \exp(-10Fo) + C_2, \quad (11.227)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий $q_2(Fo_1) = 0$; $dq_2(Fo_1)/dFo = 0$:

$$C_1 = -Ki \exp(10Fo_1); \quad C_2 = -Ki(Fo_1 + 0,1). \quad (11.228)$$

Подставляя (11.228) в (11.227), получаем

$$q_2(Fo) = Ki\{(Fo - Fo_1) + 0,1[\exp(10(Fo_1 - Fo)) - 1]\}. \quad (11.229)$$

Подставляя (11.229) в (11.114), находим решение задачи (11.217), (11.218) во втором приближении второй стадии процесса:

$$\Theta(\xi, Fo) = Ki[0,3 + 0,2(1 - \exp(10(Fo_1 - Fo))) + (Fo - Fo_1 + 0,1 \exp(10(Fo_1 - Fo))) - 0,1] - 1, \quad (11.230)$$

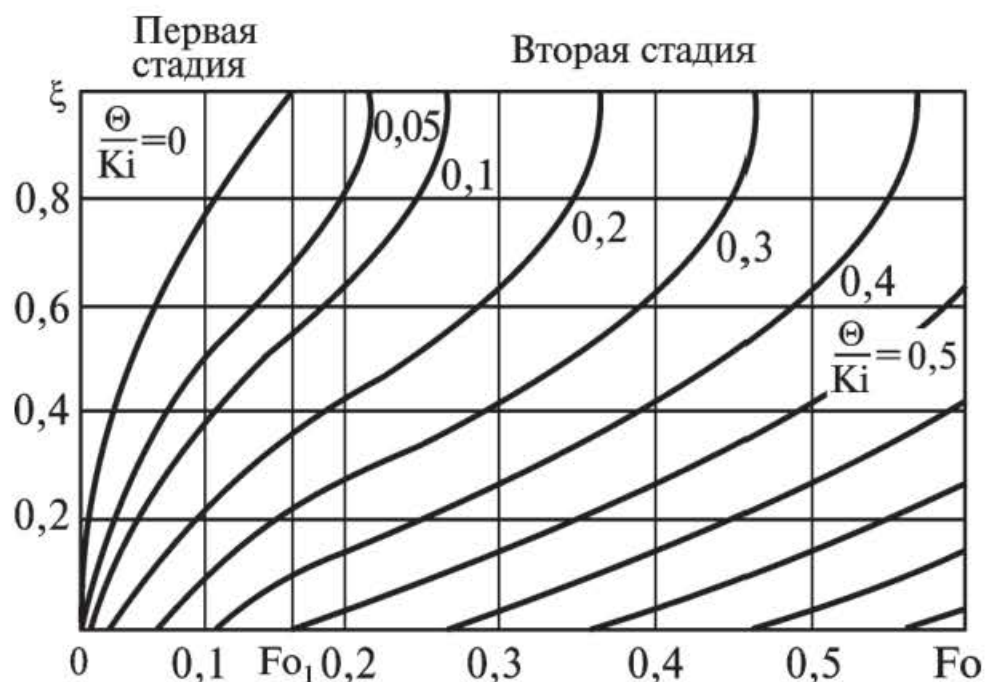
где в качестве Fo_1 принимаем время окончания первой стадии процесса во втором приближении $Fo_1 = 0,06666$.

Результаты расчетов по формуле (11.230) в сравнении с точным решением приведены на рис. 11.35. Их анализ позволяет заключить, что значения температур, полученных по формуле (11.230), в исследуемом диапазоне чисел Fo практически совпадают с точными их значениями.

Выражая координату ξ из соотношений (11.193) и (11.221), получаем следующие формулы для построения изотерм $\Theta(\xi, Fo)/Ki = \text{const}$ в координатах ξ, Fo :

первая стадия

$$\xi(\Theta, Fo) = \sqrt{6Fo} - \sqrt{2\Theta\sqrt{6Fo} / Ki}; \quad (11.231)$$



Р и с. 11.36. Распределение изотерм (Θ/Ki) в пластине при граничных условиях второго рода

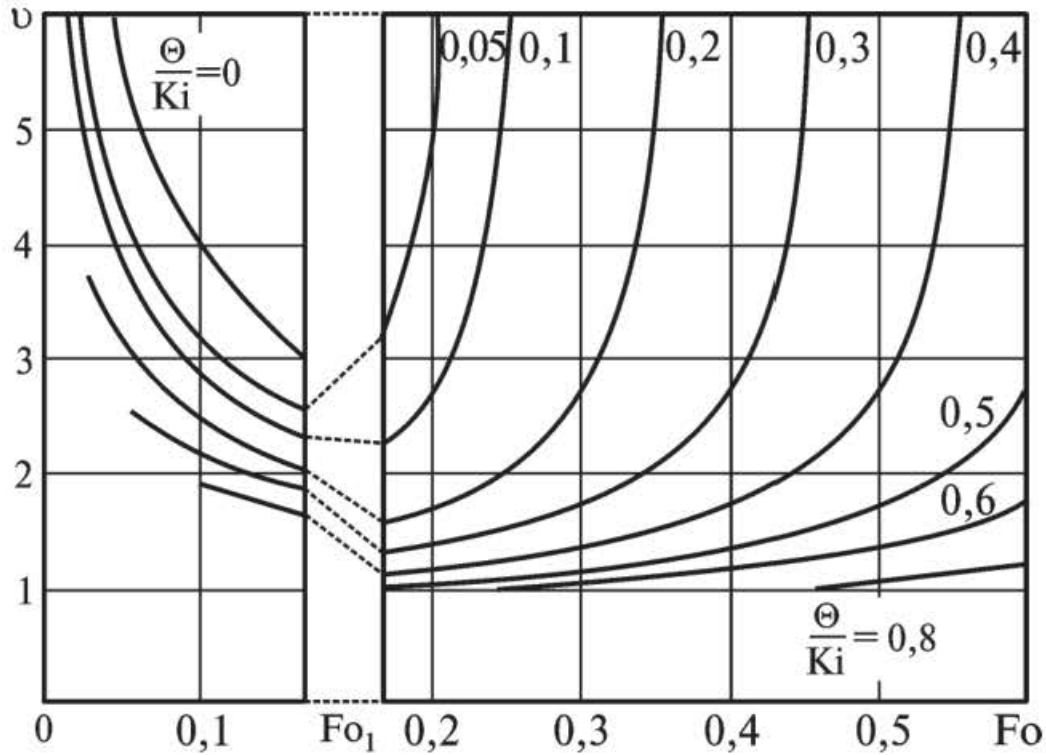
вторая стадия

$$\xi(\Theta, Fo) = 1 - \sqrt{2\Theta/Ki - 2 - Fo + Fo_1}. \quad (11.232)$$

Распределение изотерм $\Theta(\xi, Fo)/Ki = \text{const}$, найденное по формулам (11.231), (11.232), дано на рис. 11.36. Анализ полученных результатов позволяет заключить, что нулевая изотерма $\Theta(\xi, Fo)/Ki = 0$ совпадает с графиком движения фронта температурного возмущения по координате ξ во времени Fo , причем она возникает на поверхности пластины в момент времени $Fo = 0$. Каждая последующая изотерма $\Theta(\xi, Fo)/Ki > 0$ возникает на поверхности в строго определенный момент времени. При этом в первой стадии процесса отрезки времени ΔFo , отделяющие изотермы, отличающиеся друг от друга на одну и ту же величину (например, с шагом $\Delta\Theta(\xi, Fo)/Ki = 0,1$), оказываются различными. Во второй стадии происходит стабилизация времени возникновения изотерм. Каждая последующая возникает на поверхности пластины через равные отрезки времени.

Скорости движения изотерм находят путем дифференцирования соотношений (11.231), (11.232) по времени. Отсюда для первой стадии процесса получаем

$$v\left(\frac{\Theta}{Ki}, Fo\right) = \frac{d\xi}{dFo} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{Fo}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Theta/Ki}{\sqrt{(\Theta Fo \sqrt{6Fo})/Ki}}. \quad (11.233)$$



Р и с. 11.37. Распределение скоростей движения изотерм в пластине при граничных условиях второго рода

Для второй стадии процесса

$$v\left(\frac{\Theta}{Ki}, Fo\right) = \frac{d\xi}{dFo} = 1 / \sqrt{2(\Theta / Ki - Fo + Fo_1)}. \quad (11.234)$$

Графики распределения скоростей движения изотерм даны на рис. 11.37. Их анализ позволяет заключить, что в первой стадии процесса максимальную начальную скорость имеет нулевая изотерма $\Theta/Ki = 0$. У всех последующих они уменьшаются до некоторого минимального значения $v_0 = 1,0$, которое наблюдается у всех изотерм, возникающих во второй стадии процесса. По мере приближения изотерм к центру пластины их скорости неограниченно возрастают, устремляясь к бесконечным значениям при приближении к точке $\xi = 1$.

§ 11.5. Задачи теплопроводности с внутренними источниками теплоты (граничные условия первого рода)

Найдем решение задачи нестационарной теплопроводности с постоянными по координате и во времени внутренними источниками теплоты при граничных условиях первого рода в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho^c} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^c \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right] + Po \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho \leq 1); \quad (11.235)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 0; \quad (11.236)$$

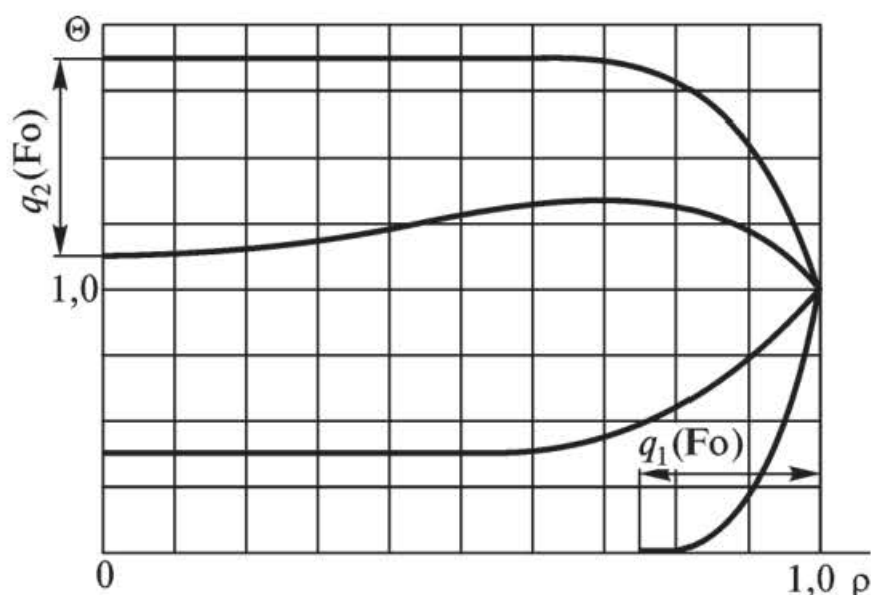
$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} = 0; \quad (11.237)$$

$$\Theta(1, Fo) = 1, \quad (11.238)$$

где $\Theta(\rho, Fo) = (T - T_0)/(T_{ст} - T_0)$ — относительная избыточная температура; T_0 — начальная температура; $T_{ст}$ — температура стенки; $c = 0, 1, 2$ — соответственно для пластины, цилиндра и шара; Po — критерий Померанцева, $Po = \omega R^2 / (T_{ст} - T_0)\lambda$; ω — мощность внутренних источников теплоты; λ — коэффициент теплопроводности.

Процесс теплообмена разделим на две стадии по времени. Первая стадия включает диапазон времени $0 < Fo \leq Fo_1$, где Fo_1 — время достижения фронтом температурного возмущения центра пластины (цилиндра, шара). Диапазон времени второй стадии процесса составляет $Fo_1 \leq Fo < \infty$.

Для фиксации фронта температурного возмущения введем движущуюся во времени границу, разделяющую исходную область $0 \leq \rho \leq 1$ на две подобласти $0 \leq \rho \leq q_1(Fo)$ и $q_1(Fo) \leq \rho \leq 1$, где $q_1(Fo)$ — функция, определяющая продвижение границы раздела по координате в зависимости от времени Fo (рис. 11.38). При этом в области, находящейся за пределами фронта температурного возмущения, наблюдается температура, вызванная действием внутреннего источника теплоты. Первая стадия процесса заканчивается при достижении движущейся границей центра тела.



Р и с. 11.38. Расчетная схема теплообмена для пластины с внутренним источником теплоты

Для упрощения процесса получения решения вместо координаты ρ , отсчитываемой от центра тела, перейдем к новой переменной $\xi = 1 - \rho$, отсчитываемой от поверхности. Математическую постановку задачи для первой стадии процесса в этом случае приводим к виду:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] + Po \quad (11.239)$$

$$(0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo));$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad (11.240)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = PoFo; \quad (11.241)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} = 0, \quad (11.242)$$

где соотношения (11.241), (11.242) представляют граничные условия на фронте температурного возмущения. Первое из них означает, что температура определяется лишь действием теплового источника. Согласно условию (11.242) тепловой поток за пределами фронта температурного возмущения отсутствует.

Начальное условие (11.236) и граничное условие (11.237) в задаче (11.239)—(11.242) не требуются (см. § 11.1—11.4).

Дифференцируя граничное условие (11.241) по переменной Fo , находим

$$\partial \Theta(q_1, Fo) / \partial Fo = Po.$$

Уравнение (11.239) с учетом последнего соотношения можно записать в виде (при $c = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial Fo} [\Theta(\xi, Fo) - \Theta(q_1, Fo)] = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}. \quad (11.243)$$

Потребуем, чтобы искомое решение удовлетворяло не исходному уравнению (11.243), а осредненному по толщине термического слоя:

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^{q_1} [\Theta(\xi, Fo) - \Theta(q_1, Fo)] d\xi = \int_0^{q_1} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (11.244)$$

Определяя интеграл в правой части уравнения (11.244), получаем

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^{q_1} [\Theta(\xi, Fo) - PoFo] d\xi = \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \Big|_0^{q_1}. \quad (11.245)$$

Учитывая соотношение (11.242), приходим к следующему интегральному условию (интегралу теплового баланса):

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^{q_1} \Theta(\xi, Fo) d\xi - Po q_1(Fo) = -\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (11.246)$$

Решение задачи (11.239)—(11.242) примем в виде полинома n -й степени (11.9). Для нахождения решения в первом приближении подставим (11.9), ограничиваясь тремя членами ряда, в граничные условия (11.240)—(11.242). Отсюда для получения коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2$) получим систему трех алгебраических линейных уравнений. Ее решение

$$a_0 = 1; \quad a_1 = 2(PoFo - 1)/q_1; \quad a_2 = (1 - PoFo)/q_1^2. \quad (11.247)$$

Соотношение (11.9) с учетом найденных значений коэффициентов a_k принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \frac{2(PoFo - 1)}{q_1} \xi - \frac{PoFo - 1}{q_1^2} \xi^2. \quad (11.248)$$

Подставляя (11.248) в интеграл теплового баланса (11.246), находим

$$\frac{dq_1(Fo)}{dFo} - \frac{Po}{1 - PoFo} q_1(Fo) - \frac{6}{q_1(Fo)} = 0. \quad (11.249)$$

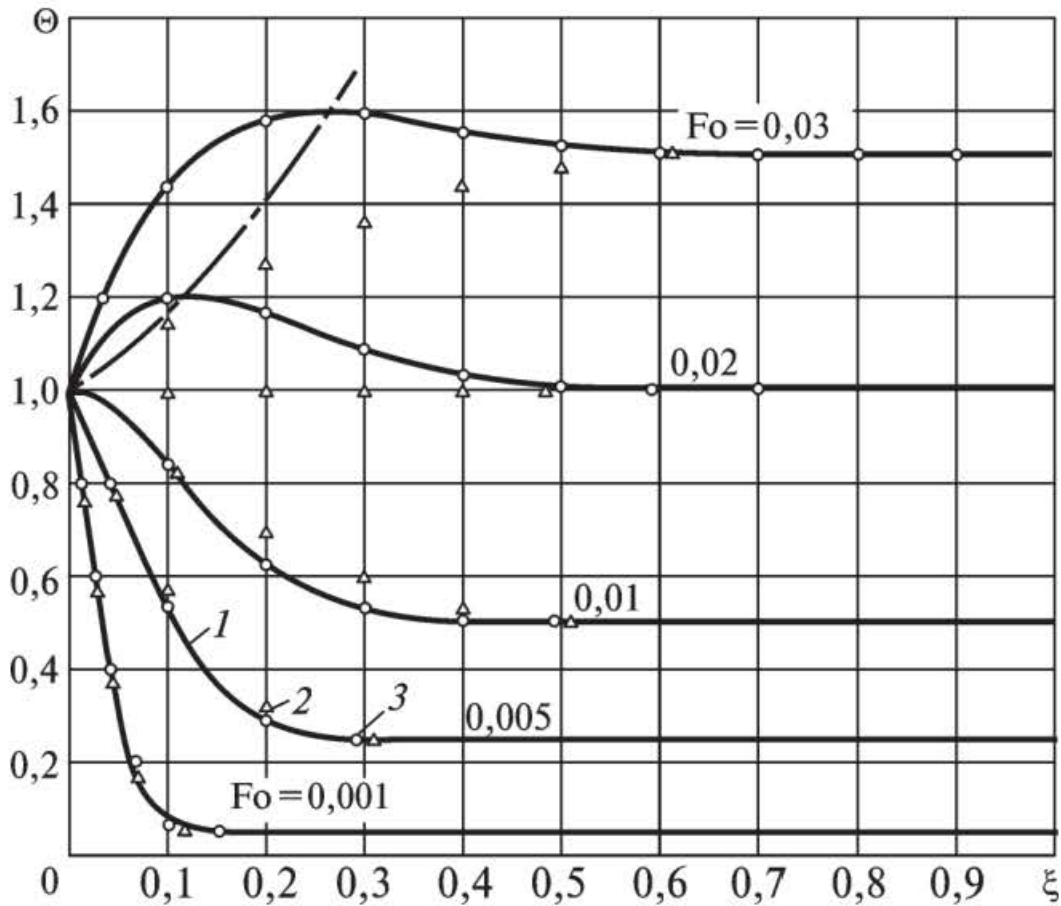
Интегрируя уравнение (11.249), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(Fo) = 2 \sqrt{\frac{(3 - 3PoFo + Po^2 Fo^2)Fo}{(PoFo - 1)^2}}. \quad (11.250)$$

Положив $q_1(Fo_1) = 1$, время окончания первой стадии ($Fo = Fo_1$) находим из следующего соотношения:

$$2Po^2 Fo_1^3 - Po(6 + Po)Fo_1^2 - 2(3 - Po)Fo_1 - 1 = 0.$$

Положив $Po = 0$, будем иметь $Fo_1 = 0,0833$. Данное значение числа Fo_1 совпадает с полученным в задаче для бесконечной пластины в первом приближении первой стадии процесса при отсутствии источника теплоты (см. § 11.1).



Р и с. 11.39. Распределение температуры в пластине с внутренним источником теплоты:

1 — точное решение (по формуле (11.251)); 2 — по формуле (11.248); 3 — по формуле (11.261);
 - - - - - линия локальной симметрии температурного поля (линия отсутствия теплообмена); $Po = 50$

Соотношения (11.248), (11.250) представляют решение задачи (11.239)—(11.242) в первом приближении. Результаты расчетов температуры по формуле (11.248) в сравнении с точным решением представлены на рис. 11.39. Как видим, отличие температур, полученных по формуле (11.248), от точных их значений в диапазоне числа Фурье $10^{-7} \leq Fo \leq 0,015$ находится в пределах 1...8 %. При увеличении времени расхождение решений увеличивается, и при $Fo = 0,03$ оно составляет около 20 %. Отметим, что для получения температур при малых значениях безразмерного времени в точном решении было взято 2000 членов ряда. Выражение для точного решения при $Bi \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \frac{1}{2} Po(1 - \xi^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{Po}{\mu_n^2}\right) A_n \cos(\mu_n \xi) \exp(-\mu_n^2 Fo), \quad (11.251)$$

где $A_n = 2(-1)^{n+1}/\mu_n$; $\mu_n = (2n - 1)\pi/2$.

Повышение точности решения связано с введением дополнительных граничных условий. Для получения первого из них продифференцируем граничное условие (11.240) по переменной Fo :

$$\partial\Theta(0, Fo)/\partial Fo = 0. \quad (11.252)$$

Запишем уравнение (11.239) для точки $\xi = 0$:

$$\frac{\partial\Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2\Theta(0, Fo)}{\partial\xi^2} - c \frac{\partial\Theta(0, Fo)}{\partial\xi} + Po. \quad (11.253)$$

Сравнивая (11.252) и (11.253), находим первое дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^2\Theta(0, Fo)}{\partial\xi^2} - c \frac{\partial\Theta(0, Fo)}{\partial\xi} + Po = 0. \quad (11.254)$$

Для получения второго дополнительного граничного условия продифференцируем соотношение (11.241) по переменной Fo , считая $\Theta(\xi, Fo)$ сложной функцией, и запишем полученное соотношение применительно к точке $\xi = q_1(Fo)$:

$$\frac{\partial\Theta(q_1, Fo)}{\partial Fo} + \frac{\partial\Theta(q_1, Fo)}{\partial\xi} \frac{dq_1}{dFo} = Po. \quad (11.255)$$

Учитывая (11.242), соотношение (11.255) приводим к виду

$$\partial\Theta(q_1, Fo)/\partial Fo = Po. \quad (11.256)$$

Запишем уравнение (11.239) для $\xi = q_1(Fo)$:

$$\frac{\partial\Theta(q_1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2\Theta(q_1, Fo)}{\partial\xi^2} - \frac{c}{1-q_1} \frac{\partial\Theta(q_1, Fo)}{\partial\xi} + Po. \quad (11.257)$$

Сравнивая (11.256) и (11.257), с учетом соотношения (11.242) получаем второе дополнительное граничное условие

$$\partial^2\Theta(q_1, Fo)/\partial\xi^2 = 0. \quad (11.258)$$

Третье дополнительное граничное условие в данном случае имеет вид

$$\partial^3\Theta(q_1, Fo)/\partial\xi^3 = 0. \quad (11.259)$$

Подставляя (11.9) во все основные и дополнительные граничные условия, относительно коэффициентов a_k ($k = 0, 5$) получаем следующую систему шести алгебраических линейных уравнений (при $c = 0$):

$$\left. \begin{aligned} (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + a_5\xi^5)_{\xi=0} &= 1; \\ a_0 + a_1q_1 + a_2q_1^2 + a_3q_1^3 + a_4q_1^4 + a_5q_1^5 &= \text{PoFo}; \\ a_1 + 2a_2q_1 + 3a_3q_1^2 + 4a_4q_1^3 + 5a_5q_1^4 &= 0; \\ (2a_2 + 6a_3\xi + 12a_4\xi^2 + 20a_5\xi^3)_{\xi=0} &= -\text{Po}; \\ 2a_2 + 6a_3q_1 + 12a_4q_1^2 + 20a_5q_1^3 &= 0; \\ 6a_3 + 24a_4q_1 + 60a_5q_1^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.260)$$

Из первого и четвертого уравнений системы (11.260) следует, что $a_0 = 1$; $a_2 = -0,5\text{Po}$. Определяя оставшиеся коэффициенты a_k и подставляя их в (11.9), находим

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \text{Fo}) &= 1 + [20(\text{PoFo} - 1)\text{Po}q_1^2] \frac{\xi}{8q_1} - 0,5\text{Po}\xi^2 - [20(\text{PoFo} - 1) - \\ & - 3\text{Po}q_1^2] \frac{\xi^3}{4q_1^3} + [40(\text{PoFo} - 1) - 4\text{Po}q_1^2] \frac{\xi^4}{8q_1^4} + [12(1 - \text{PoFo}) + \text{Po}q_1^2] \frac{\xi^5}{8q_1^5}. \end{aligned} \quad (11.261)$$

Подставляя (11.261) в интеграл теплового баланса (11.246), относительно неизвестной функции $q_1(\text{Fo})$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{d\text{Fo}} [60q_1\text{PoFo} - \text{Po}q_1^3] = \frac{30}{q_1^2} [20q_1\text{PoFo} - \text{Po}q_1^3]. \quad (11.262)$$

Интегрируя уравнение (11.262), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(\text{Fo}) = \sqrt{20\text{Fo}}. \quad (11.263)$$

Положив $q_1(\text{Fo}_1) = 1$, из (11.263) находим время окончания первой стадии процесса $\text{Fo} = \text{Fo}_1 = 0,05$ во втором приближении.

Результаты расчетов по формуле (11.261) в сравнении с точным решением представлены на рис. 11.39. Их анализ позволяет заключить, что значения температур, полученных по формуле (11.261), отличаются от точных не более чем на 0,5 %.

Отметим, что в результате взаимного действия источника теплоты и граничного условия первого рода, для $\Theta > 1,0$, кроме основной симметрии при $\xi = 1$, наблюдается еще локальная симметрия температурного поля (штрихпунктирная линия на рис. 11.39).

Вторая стадия теплового процесса, соответствующая времени $Fo \geq Fo_1$, характеризуется изменением температуры от действия граничного условия (11.240) уже по всему сечению пластины. Понятие глубины проникновения теряет смысл, и в качестве дополнительной искомой функции принимаем функцию $\Theta(1, Fo) = q_2(Fo)$, характеризующую изменение температуры во времени в центре пластины (см. рис. 11.38).

Математическая постановка задачи для второй стадии процесса имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] + Po \quad (11.264)$$

$$(Fo \geq Fo_1; 0 \leq \xi \leq 1);$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad (11.265)$$

$$\Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad (11.266)$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (11.267)$$

Начальным условием задачи (11.264)—(11.267) является формула (11.248) для распределения температуры в конце первой стадии процесса в первом приближении, которая при $Fo = Fo_1$ и $q(Fo_1) = 1$ принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo_1) = 1 + (PoFo_1 - 1)(2 - \xi)\xi. \quad (11.268)$$

Однако специального выполнения начального условия (11.268) не требуется ввиду того, что оно будет выполнено в процессе получения решения задачи (11.264)—(11.267) (см. § 11.1—11.4).

Осредняя уравнение (11.264) по всему объему тела, получаем интеграл теплового баланса вида

$$\int_0^1 (1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = Po - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (11.269)$$

Как и для первой стадии процесса, искомый температурный профиль принимаем в виде полинома n -й степени (11.114). После определения коэффициентов b_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (11.265)—(11.267) и подстановки их в (11.114) будем иметь

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \xi(1 - q_2)(2 - \xi). \quad (11.270)$$

Подставляя (11.270) в интеграл теплового баланса (11.269), принимая $c = 0$, относительно неизвестной функции $q_2(\text{Fo})$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dq_2/d\text{Fo} = 3(\text{Po}/2 + 1 - q_2). \quad (11.271)$$

Разделяя переменные в уравнении (11.271) и интегрируя, находим

$$q_2(\text{Fo}) = 0,5\text{Po} - r \exp(-3\text{Fo}), \quad (11.272)$$

где r — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия.

Начальное условие для определения постоянной интегрирования имеет вид

$$q_2(\text{Fo}_1) = \text{PoFo}_1. \quad (11.273)$$

Подставляя (11.272) в (11.273), имеем

$$r = 0,5(2\text{PoFo}_1 - 2 - \text{Po})\exp(-3\text{Fo}_1). \quad (11.274)$$

Соотношение (11.272) с учетом (11.274) принимает вид

$$q_2(\text{Fo}) = 1 + 0,5\text{Po} + (\text{PoFo}_1 - 1 - 0,5\text{Po})\exp[-3(\text{Fo} - \text{Fo}_1)]. \quad (11.275)$$

Соотношения (11.270), (11.275) определяют решение задачи (11.264)—(11.267) в первом приближении.

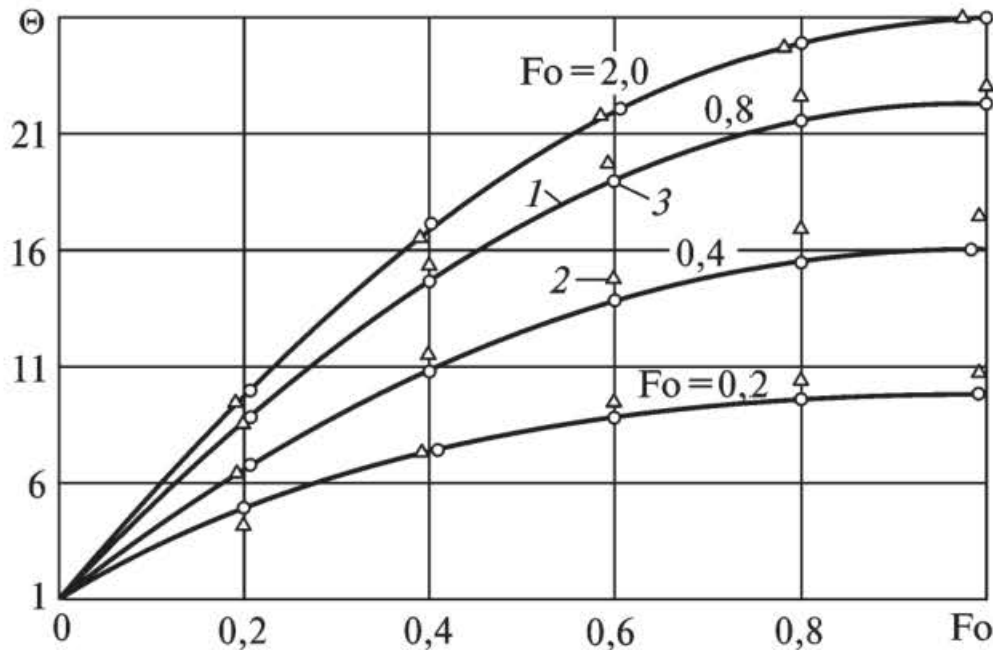
Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (11.270) точно удовлетворяет интегралу теплового баланса (11.269), граничным условиям (11.265)—(11.267) и начальному условию (11.268).

Результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (11.270) представлены на рис. 11.40. Анализ позволяет заключить, что их отличие от точных значений температур не превышает 6 %.

Для нахождения решения задачи во втором приближении необходимо ввести дополнительные граничные условия. Для их получения продифференцируем граничные условия (11.265)—(11.267) по переменной Fo :

$$\frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = 0; \quad \frac{\partial \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{dq_2(\text{Fo})}{d\text{Fo}}; \quad \frac{\partial^2 \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo} \partial \xi} = 0. \quad (11.276)$$

Записывая уравнение (11.264) для точки $\xi = 0$ и сравнивая полученное соотношение с первым соотношением из (11.276), получаем первое дополнительное граничное условие, которое совпадает с соотношением (11.254).



Р и с. 11.40. Распределение температуры в пластине с внутренним источником:
 1 — точное решение (по формуле (11.251)); 2 — по формуле (11.270); 3 — по формуле (11.287);
 $Po = 50$

Записывая уравнение (11.264) для точки $\xi = 1$, получаем

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} - \left[\frac{c}{1-\xi} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} + Po. \quad (11.277)$$

Раскрывая возникающую во втором члене правой части соотношения (11.277) неопределенность по правилу Лопиталья, будем иметь

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = (c+1) \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} + Po. \quad (11.278)$$

Сопоставляя второе соотношение из (11.276) и соотношение (11.278), находим второе дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} = \frac{1}{c+1} \left[\frac{dq_2(Fo)}{dFo} - Po \right]. \quad (11.279)$$

Для определения третьего дополнительного граничного условия про дифференцируем уравнение (11.264) по переменной ξ и запишем полученное соотношение для точки $\xi = 1$:

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3} - \left[\frac{c}{(1-\xi)^2} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} - \left[\frac{c}{1-\xi} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \right]_{\xi=1}. \quad (11.280)$$

Раскрывая возникающую в правой части соотношения (11.280) неопределенность по правилу Лопиталья, получаем

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3} - \frac{c}{2} \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3}. \quad (11.281)$$

Сопоставляя третье соотношение из (11.276) с соотношением (11.281), получаем третье дополнительное граничное условие

$$\partial^3 \Theta(1, Fo) / \partial \xi^3 = 0. \quad (11.282)$$

Подставляя (11.114), ограничиваясь шестью членами ряда, во все основные и дополнительные граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов b_k ($k = 0, 5$) получим систему шести алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы значения коэффициентов b_k в (11.114), находим

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = 1 + \left(-\frac{5}{2} + \frac{3}{8}\mu - \frac{1}{4}Po + \frac{5}{2}q_2 \right) \xi - \frac{1}{2}Po\xi^2 + \left(5 + \frac{5}{2}Po - 5q_2 - \frac{7}{4}\mu \right) \xi^3 + \\ + \left(-5 - \frac{5}{2}Po + 5q_2 + 2\mu \right) \xi^4 + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}Po - \frac{3}{2}q_2 - \frac{5}{8}\mu \right) \xi^5, \end{aligned} \quad (11.283)$$

где $\mu = dq_2/dFo$.

Подставляя (11.283) в интеграл теплового баланса (11.269) (при $c = 0$), относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ получаем следующее линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 q_2}{dFo^2} + \frac{270}{11} \frac{dq_2}{dFo} + \frac{600}{11} q_2 - \frac{300}{11} Po - \frac{600}{11} = 0. \quad (11.284)$$

Проинтегрировав уравнение (11.284), находим

$$q_2(Fo_1) = r_1 \exp(-2,4711Fo) + r_2 \exp(-22,075Fo) + 0,5Po + 1, \quad (11.285)$$

где r_1 и r_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий $q_2(Fo_1) = PoFo_1$; $\frac{dq_2(Fo_1)}{dFo} = Po$:

$$r_1 = A_1 \exp 2,4711Fo_1; \quad r_2 = A_2 \exp 22,075Fo_1, \quad (11.286)$$

где $A_1 = -0,512Po - 1,1261 + 1,1261PoFo_1$; $A_2 = 0,012Po + 0,12605 - 0,12605PoFo_1$.

Подставляя (11.285) в (11.283), получаем формулу для определения температуры во втором приближении второй стадии процесса

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \xi(Po - 0,5\xi) + A_1(1,5733\xi + 0,6756\xi^3 + 0,0578\xi^4 + 0,0444\xi^5) \exp [2,4711(Fo_1 - Fo)] + A_2(5,7781\xi + 33,631\xi^3 - 39,15\xi^4 + 12,297\xi^5) \exp [22,075(Fo_1 - Fo)], \quad (11.287)$$

где в качестве Fo_1 принимаем величину, равную времени окончания первой стадии процесса во втором приближении $Fo_1 = 0,05$.

Сравнивая результаты расчетов температур по формуле (11.287) с точным решением (см. рис. 11.40), видим, что они практически совпадают. Из графиков также следует, что при $Fo = 2,0$ наступает стационарный режим.

Ввиду невысокой точности первого приближения как в первой, так и во второй стадиях процесса построение изотерм будем выполнять с использованием формул (11.261) и (11.287) второго приближения. Задавая какие-либо конкретные значения безразмерной температуры $\Theta = \text{const}$ и времени Fo , они принимают вид алгебраических уравнений относительно переменной ξ . Например, при $\Theta = 0,7$ и $Fo = 0,01$ формула (11.261) будет:

$$111,8034 \xi^5 - 187,5 \xi^4 + 111,8034 \xi^3 - 25 \xi^2 + 0,3 = 0. \quad (11.288)$$

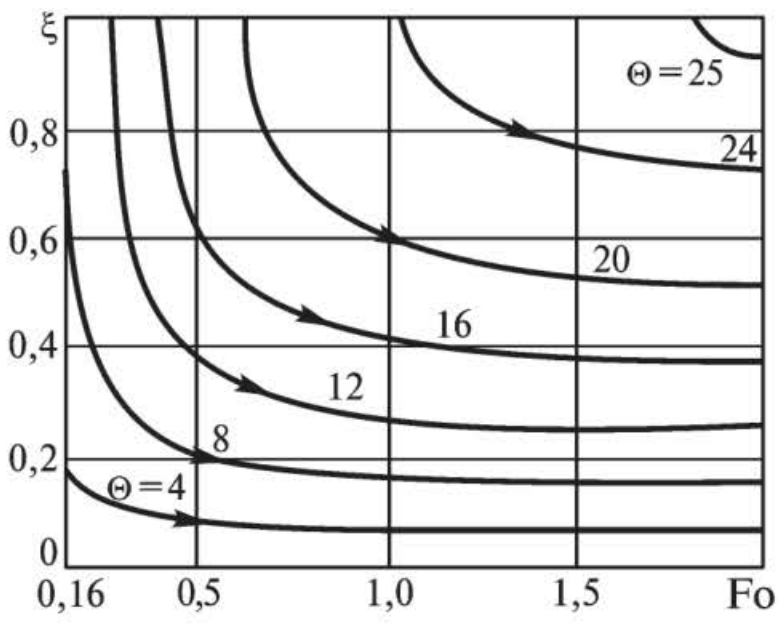
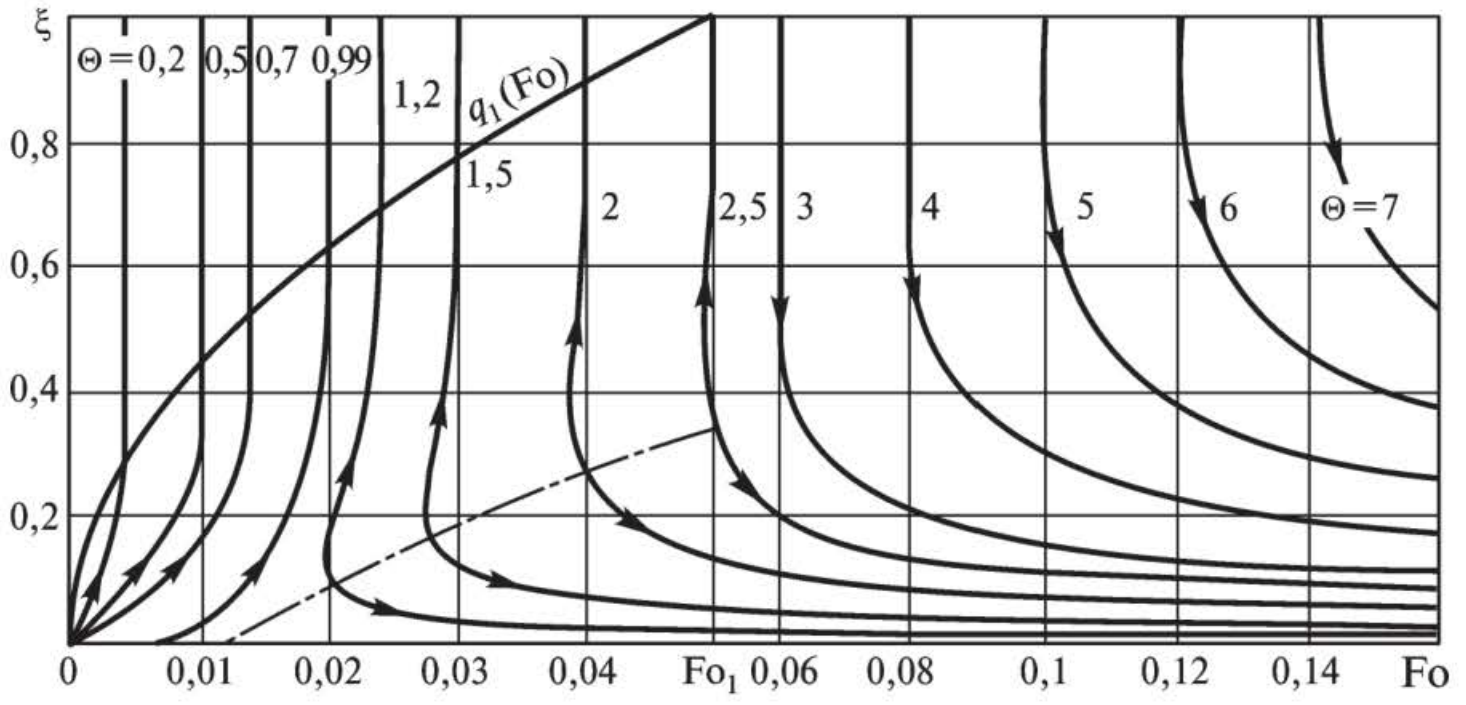
Соотношение (11.287), например, при $\Theta = 4,0$ и $Fo = 0,1$ примет вид

$$0,74089 \xi^5 - 6,57005 \xi^4 + 18,87131 \xi^3 - 25 \xi^2 + 15,96181 \xi - 3 = 0. \quad (11.289)$$

Из пяти корней уравнения (11.288) единственным корнем, удовлетворяющим соотношению (11.261) при $\Theta = 0,7$ и $Fo = 0,01$, является $\xi = 0,163226$. Аналогично, единственным корнем уравнения (11.289), удовлетворяющим соотношению (11.287) при $\Theta = 4,0$ и $Fo = 0,1$, является $\xi = 0,3006239$.

Задавая при $\Theta = \text{const}$ различные значения числа Fo , путем решения соответствующих алгебраических уравнений можно получить значения координаты ξ , используемые затем для построения графиков изотерм в координатах ξ, Fo (рис. 11.41).

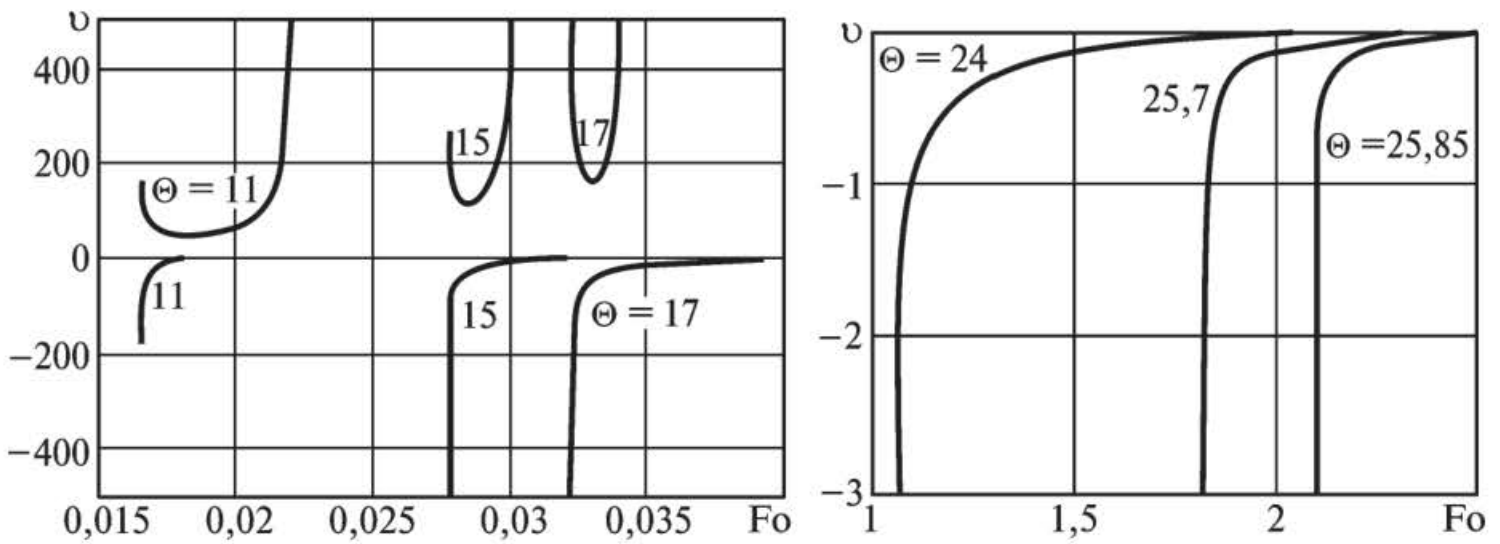
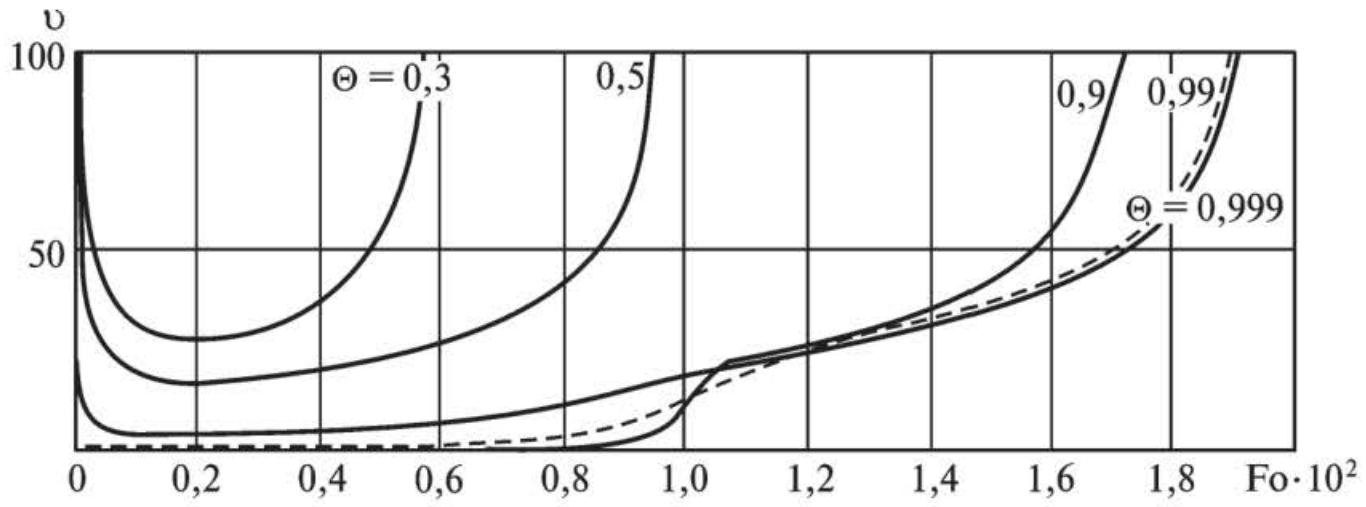
Анализ распределения изотерм позволяет сделать следующие выводы. В первой стадии процесса изотермы в области до фронта температурного возмущения имеют вид кривых линий. В области за фронтом температурного возмущения они вырождаются в прямые, что связано с действием источника теплоты. Для изотерм $1 < \Theta \leq 3,0$ наблюдается локальная симметрия температуры, обусловленная взаимным действием граничного условия первого рода (11.265) и источника теплоты (штрихпунктирная линия на рис. 11.41). Изотермы одина-



Р и с. 11.41. Распределение изотерм в пластине с внутренним источником теплоты (второе приближение, $Fo_1 = 0,05$; $Ro = 50$); --- — линия отсутствия теплообмена

кового потенциала, возникая на линии симметрии, движутся в противоположных направлениях. После достижения фронтом температурного возмущения координаты $\xi = 1$ направление движения всех изотерм оказывается противоположным направлению оси ξ . Причем с увеличением их потенциала длина пути по координате ξ уменьшается, и при $\Theta = 25,99$ они вырождаются в точку, расположенную на отметке координаты $\xi = 1$ (наступает стационарный режим теплообмена). Стационарный режим практически имеет место уже при $Fo = 2,0$ (см. рис. 11.40).

Определяя первые производные от координаты ξ по времени Fo , находим скорости движения изотерм $v = d\xi/dFo \approx \Delta\xi/\Delta Fo$ (рис. 11.42). Анализ распределения скоростей изотерм позволяет заключить, что для значений $0 < \Theta < 1,0$ при приближении к фронту температурного возмущения скорости всех изотерм устремляются к бесконечным значениям.



Р и с. 11.42. Распределение скоростей изотерм в пластине с внутренним источником теплоты (второе приближение, $Pe = 50$)

Это обстоятельство объясняется выполнением на линии фронта температурного возмущения условия адиабатной стенки вида (11.242). Для $1,0 < \Theta < 3,0$ ввиду возникновения локальной симметрии температурного поля (см. рис. 11.39, 11.41) характер распределения изотерм качественно меняется. И в частности, изотермы одинакового потенциала, возникая на линии симметрии, движутся в противоположных направлениях (для движущихся противоположно направлению оси ξ условно приняты отрицательные значения скоростей). При этом их начальные скорости устремляются к бесконечным значениям. Затем скорости изотерм, движущихся противоположно оси ξ , уменьшаются, приближаясь к нулевому значению при некотором значении ξ ($\xi \neq 0$), а у движущихся по направлению оси ξ — от бесконечно большого начального значения сначала уменьшаются, а затем при приближении к точке $\xi = 1,0$ вновь устремляются к бесконечным значениям.

Для всех $\Theta > 3,0$ направление движения изотерм противоположно направлению оси ξ . При этом все они возникают на адиабатной

стенке ($\xi = 1,0$) и имеют бесконечно большие начальные скорости. Затем скорости движения уменьшаются, приближаясь к нулевым значениям.

§ 11.6. Внутренние источники теплоты при граничных условиях второго рода

Математическая постановка задачи теплопроводности для бесконечной пластины с внутренними источниками теплоты при граничных условиях второго рода для первой стадии процесса имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Po \quad (0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo)); \quad (11.290)$$

$$-\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = Ki; \quad (11.291)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = PoFo; \quad (11.292)$$

$$\partial \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (11.293)$$

Решение задачи (11.290)—(11.293) принимаем в виде (11.9). После нахождения неизвестных коэффициентов $a_k(q_1)$ из граничных условий (11.291)—(11.293) соотношение (11.9) принимает вид:

$$\Theta(\xi, Fo) = PoFo + Ki(0,5q_1 - \xi + 0,5\xi^2/q_1). \quad (11.294)$$

Интеграл теплового баланса для уравнения с источником теплоты имеет вид (см. § 11.5):

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^{q_1} \Theta(\xi, Fo) d\xi - Poq_1 = -\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (11.295)$$

Соотношение (11.295) с учетом (11.291) будет

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^{q_1} \Theta(\xi, Fo) d\xi = Poq_1 + Ki. \quad (11.296)$$

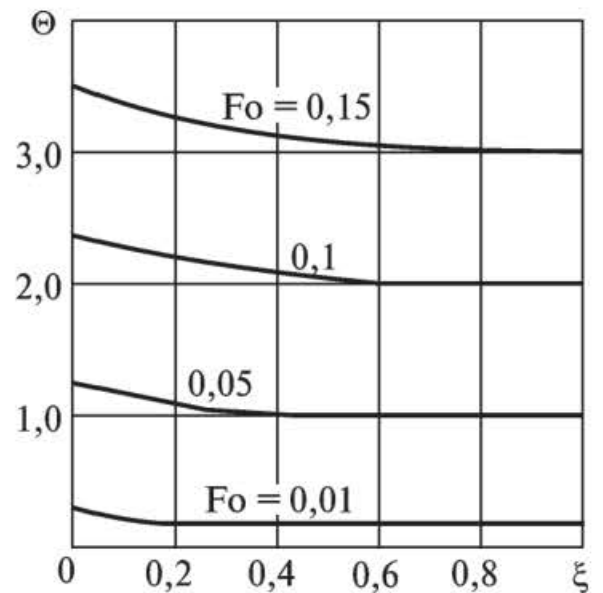
Подставляя (11.294) в (11.296), находим

$$q_1 dq_1 = 3dFo. \quad (11.297)$$

Интегрируя уравнение (11.297), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(Fo) = \sqrt{6Fo}. \quad (11.298)$$

Р и с. 11.43. Изменение температуры в пластине (внутренние источники теплоты при граничных условиях второго рода: $Po = 20$; $Ki = 1,0$)



Соотношения (11.294), (11.298) определяют решение задачи (11.290)—(11.293) в первом приближении. Результаты расчетов по формуле (11.294) представлены на рис. 11.43.

§ 11.7. Внутренние источники теплоты при граничных условиях третьего рода

Математическая постановка задачи теплопроводности для бесконечной пластины с внутренними источниками теплоты при симметричных граничных условиях третьего рода для первой стадии процесса имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Po \quad (0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo)); \quad (11.299)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} - Bi[\Theta(0, Fo) - 1] = 0; \quad (11.300)$$

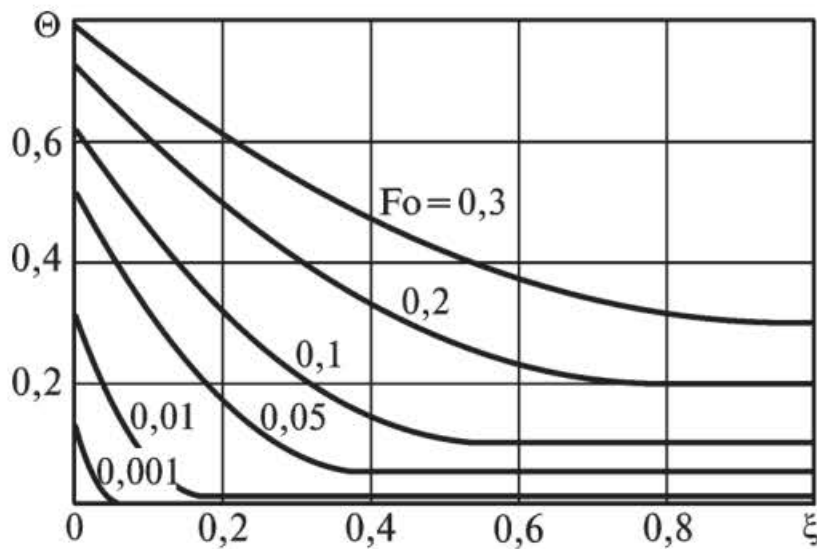
$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (11.301)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} = 0. \quad (11.302)$$

Интеграл теплового баланса для уравнения (11.299) имеет вид (см. § 11.5):

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \left[\int_0^{q_1} \Theta(\xi, Fo) d\xi \right] - Po q_1(Fo) = - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (11.303)$$

Решение задачи (11.299) — (11.302) находим в виде (11.9). Соотношение (11.9) после определения из граничных условий (11.300)—(11.302) неизвестных коэффициентов $a_k(q_1)$ ($k = 1, 2, 3$) в первом приближении будет:



Р и с. 11.44. Изменение температуры в пластине (внутренние источники теплоты при граничных условиях третьего рода: $Bi = 5,0$; $Po = 1,0$)

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{Bi q_1 + 2PoFo}{2 + Bi q_1} + \frac{2Bi(PoFo - 1)}{2 + Bi q_1} \xi - \frac{Bi(PoFo - 1)}{q_1(2 + Bi q_1)} \xi^2. \quad (11.304)$$

Подставляя (11.304) в (11.303), относительно $q_1(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dq_1}{dFo} \frac{q_1(PoFo - 1)(4 + Bi q_1)}{(2 + Bi q_1)(Po q_1^2 - 6PoFo + 6)} + 1 = 0. \quad (11.305)$$

Интегрируя уравнение (11.305), положив $Bi = 5,0$; $Po = 1,0$, при начальном условии $q_1(0)$ находим

$$q_1(Fo) = 1,7767\sqrt{Fo}. \quad (11.306)$$

Соотношения (11.304), (11.306) определяют решение задачи (11.299)—(11.302) в первом приближении. Результаты расчетов температур по формуле (11.304) представлены на рис. 11.44.

§ 11.8. Двумерные задачи теплопроводности с источником теплоты

Покажем, что рассмотренный ранее метод с использованием понятия фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий позволяет получать аналитические решения двумерных задач стационарной теплопроводности с источниками теплоты. В качестве конкретного примера рассмотрим краевую задачу стационарной теплопроводности с источником теплоты в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = -1 \quad (0 \leq x \leq d; 0 \leq y \leq b); \quad (11.307)$$

$$T(x, b) = T(d, y) = 0; \quad (11.308)$$

$$\frac{\partial T(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = 0. \quad (11.309)$$

Аналогичная математическая постановка применима и к задаче о кручении прямоугольной призмы.

Потребуем, чтобы искомое решение удовлетворяло не уравнению (11.307), а некоторому осредненному. Для этого проинтегрируем его по переменной y в пределах от $y = 0$ до $y = b$:

$$\int_0^b \left[\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} + 1 \right] dy = 0. \quad (11.310)$$

Отсюда найдем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^b T(x, y) dy \right] + \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_0^b + b = 0. \quad (11.311)$$

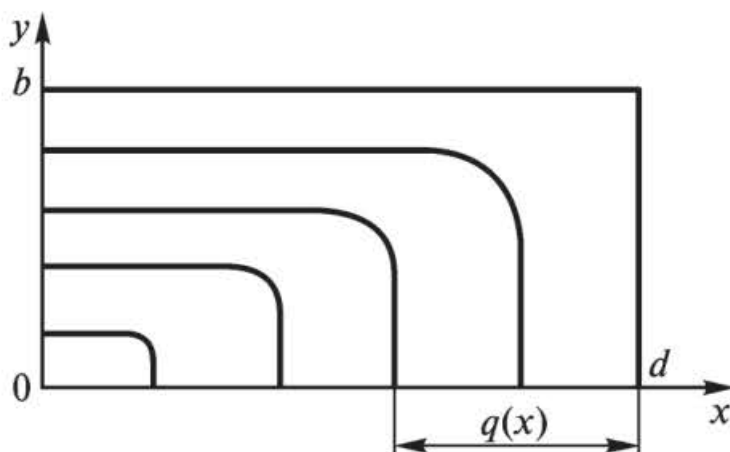
Учитывая (11.309), получаем следующее интегральное уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^b T(x, y) dy \right] + \frac{\partial T(x, b)}{\partial y} + b = 0. \quad (11.312)$$

Введем в качестве дополнительной искомой функции температуру по линии симметрии $T(x, 0) = q(x)$ (рис. 11.45). Решение задачи (11.307)—(11.309) находим в виде следующего алгебраического полинома:

$$T(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k(q) y^k. \quad (11.313)$$

Для решения задачи (11.307)—(11.309) в первом приближении имеем следующие граничные условия:



Р и с. 11.45. Расчетная схема теплообмена

$$T(x,0) = q(x); \quad \partial T(x,0) / \partial y = 0; \quad T(x,b) = 0. \quad (11.314)$$

Подставляя (11.313) в (11.314), ограничиваясь тремя членами ряда, для определения коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2$) будем иметь систему трех алгебраических линейных уравнений. Ее решение $a_0 = q(x)$; $a_1 = 0$; $a_2 = -q(x)/b^2$.

Подставляя найденные значения коэффициентов a_k в (11.313), получаем

$$T(x,y) = q(x)(1 - y^2/b^2). \quad (11.315)$$

Подставляя (11.315) в интегральное уравнение (11.312), относительно неизвестной функции $q(x)$ будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 q(x)}{dx^2} - \frac{3}{b^2} q(x) + 1,5 = 0. \quad (11.316)$$

Граничные условия для уравнения (11.316) имеют вид

$$q(d) = 0; \quad dq(0)/dx = 0. \quad (11.317)$$

Интегрируя уравнение (11.316), с учетом граничных условий (11.317) получаем

$$q(x) = 0,5b^2 [1 - \text{ch}(\sqrt{3}x/b) / \text{ch}(\sqrt{3}d/b)]. \quad (11.318)$$

Подставляя (11.318) в (11.315), получаем решение задачи (11.307)—(11.309) в первом приближении:

$$T(x,y) = 0,5(b^2 - y^2) [1 - \text{ch}(\sqrt{3}x/b) / \text{ch}(\sqrt{3}d/b)]. \quad (11.319)$$

Для повышения точности найдем решение во втором приближении. Для этого необходимо увеличивать степень полинома (11.313). Появляющиеся при этом дополнительные коэффициенты a_k могут быть найдены с помощью дополнительных граничных условий, определяемых из дифференциального уравнения (11.307) и заданных граничных условий (11.314). Для нахождения дополнительных граничных условий последовательно продифференцируем уравнение (11.307) по переменной y :

$$\frac{\partial^3 T}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} = 0; \quad \frac{\partial^4 T}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} = 0; \quad \frac{\partial^5 T}{\partial y^3 \partial x^2} + \frac{\partial^5 T}{\partial y^5} = 0. \quad (11.320)$$

Так как функция $T(x,y)$ является непрерывной вместе со своими частными производными, то правомерна замена порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^3 T}{\partial y^3} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right); \quad \frac{\partial^5 T}{\partial y^5} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \right). \quad (11.321)$$

Продифференцируем дважды по x второе соотношение из (11.314):

$$\partial^3 T(x, 0) / (\partial y \partial x^2) = 0. \quad (11.322)$$

Сравнивая (11.322) с первым соотношением из (11.321), получаем первое дополнительное граничное условие:

$$\partial^3 T(x, 0) / \partial y^3 = 0. \quad (11.323)$$

Дважды дифференцируя по x дополнительное граничное условие (11.323) и сравнивая полученное соотношение с третьим соотношением из (11.321), находим второе дополнительное граничное условие:

$$\partial^5 T(x, 0) / \partial y^5 = 0. \quad (11.324)$$

Продолжая процедуру получения дополнительных граничных условий, будем иметь

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial^3 T(x, 0)}{\partial y^3} = \frac{\partial^5 T(x, 0)}{\partial y^5} = \frac{\partial^7 T(x, 0)}{\partial y^7} = \dots = 0. \quad (11.325)$$

На основании (11.325) можно заключить, что все коэффициенты a_k ($k = 0, 1, 3, 5, 7, \dots$) при нечетных степенях переменной y будут равны нулю $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$. Следовательно, решение задачи следует искать по четным степеням переменной y :

$$T(x, y) = a_0(x) + a_2(x)y^2 + a_4(x)y^4 + a_6(x)y^6 + \dots \quad (11.326)$$

Из граничных условий (11.314) неиспользованных осталось два:

$$T(x, 0) = q(x); \quad T(x, b) = 0. \quad (11.327)$$

Для нахождения следующих дополнительных граничных условий продифференцируем соотношения (11.327) дважды по x :

$$\partial^2 T(x, 0) / \partial x^2 = d^2 q(x) / dx^2; \quad \partial^2 T(x, b) / \partial x^2 = 0. \quad (11.328)$$

Сопоставляя уравнение (11.307) с соотношениями (11.328), получаем следующие дополнительные граничные условия:

$$\partial^2 T(x, 0) / \partial y^2 = -1 - d^2 q(x) / dx^2; \quad \partial^2 T(x, b) / \partial y^2 = -1. \quad (11.329)$$

Для нахождения решения задачи (11.307)—(11.309) во втором приближении подставим (11.326) (ограничиваясь четырьмя членами ряда) в граничные условия (11.327), (11.329). Относительно неизвест-

ных коэффициентов a_k ($k = 0, 2, 4, 6$) получаем систему четырех алгебраических линейных уравнений. Ее решение:

$$a_0 = q(x); \quad a_2 = -(1 + d^2 q / dx^2) / 2;$$

$$a_4 = \left[\frac{15 - 30q}{b^2} + 14 \frac{d^2 q}{dx^2} \right] / (18b); \quad a_6 = - \left[1 - 2 \frac{q}{b^2} + \frac{5}{6} \frac{d^2 q}{dx^2} \right] / (3b^4). \quad (11.330)$$

Подставляя (11.326) с учетом найденных коэффициентов a_k в интегральное соотношение (11.312), относительно неизвестной функции $q(x)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 q}{dx^4} - \frac{95}{4b^2} \frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{105}{2b^4} q - \frac{105}{4b^2} = 0. \quad (11.331)$$

Общее решение уравнения (11.331) имеет вид

$$q(x) = Achv + Bshv + Csch\mu + Dsh\mu + 0,5b^2, \quad (11.332)$$

где A, B, C, D — постоянные интегрирования; $v = 1,5706x/b$; $\mu = 4,6134x/b$.

Для определения постоянных интегрирования имеем два граничных условия вида (11.317), которые находим из граничных условий

$$T(d, y) = 0; \quad \partial T(0, y) / \partial x = 0. \quad (11.333)$$

Для получения еще двух недостающих граничных условий продифференцируем соотношения (11.333) дважды по переменной y :

$$\partial^2 T(d, y) / \partial y^2 = 0; \quad \partial^3 T(0, y) / (\partial x \partial y^2) = 0. \quad (11.334)$$

Продифференцируем уравнение (11.307) по переменной x :

$$\partial^3 T(x, y) / \partial x^3 + \partial^3 T(x, y) / (\partial x \partial y^2) = 0. \quad (11.335)$$

С учетом уравнения (11.307), а также соотношений (11.334), (11.335), получаем еще два дополнительных граничных условия:

$$d^2 q(d) / dx^2 = -1; \quad d^3 q(0) / dx^3 = 0. \quad (11.336)$$

Определяя из граничных условий (11.317), (11.336) постоянные интегрирования A, B, C, D и подставляя их в (11.332), находим:

$$q(x) = \frac{b^2}{2} \left(1 - N_1 \frac{\text{ch}v}{\text{ch}v_1} + N_2 \frac{\text{ch}\mu}{\text{ch}\mu_1} \right), \quad (11.337)$$

где $N_1 = 1,0248$; $N_2 = 0,0248$; $v_1 = 1,5706d/b$; $\mu_1 = 4,6134d/b$.

Подставляя (11.330), (11.337) в (11.326), получаем решение задачи (11.307)—(11.309) во втором приближении

$$T(x, y) = \frac{b^2}{2} \left[1 - N_1 \frac{\operatorname{ch} \nu}{\operatorname{ch} \nu_1} + N_2 \frac{\operatorname{ch} \mu}{\operatorname{ch} \mu_1} - \left(1 + N_3 \frac{\operatorname{ch} \nu}{\operatorname{ch} \nu_1} - N_4 \frac{\operatorname{ch} \mu}{\operatorname{ch} \mu_1} \right) \frac{y^2}{b^2} - \right. \\ \left. - \left(N_5 \frac{\operatorname{ch} \nu}{\operatorname{ch} \nu_1} - N_6 \frac{\operatorname{ch} \mu}{\operatorname{ch} \mu_1} \right) \frac{y^4}{b^4} + \left(N_7 \frac{\operatorname{ch} \nu}{\operatorname{ch} \nu_1} - N_8 \frac{\operatorname{ch} \mu}{\operatorname{ch} \mu_1} \right) \frac{y^6}{b^6} \right], \quad (11.338)$$

где $N_3 = 1,264$; $N_4 = 0,2639$; $N_5 = 0,258$; $N_6 = 0,3692$; $N_7 = 0,019$; $N_8 = 0,1301$; $d = 2$; $b = 1$. Результаты расчетов по формулам (11.319), (11.338) для квадрата $d/b = 1$ прямоугольника $d/b = 2$ в сравнении с приближенным аналитическим и точным решением представлены в табл. 11.3. В ней же дана оценка отклонений приближенных решений от точного.

Т а б л и ц а 11.3

$\left(\frac{d}{b}\right)$	Точное решение	Расчет по формуле (11.319)		Расчет по формуле (11.338)		Второе приближение	
	$T_m(0,0)$	$T_I(0,0)$	$\varepsilon, \%$	$T_{II}(0,0)$	$\varepsilon, \%$	$T(0,0)$	$\varepsilon, \%$
1	0,29501	0,328	12	0,295999	0,2	0,294327	0,33
2	0,45549	0,468729	0,029	0,4555782	0,064	0,455523	0,0072

Погрешность ε приближенных решений определяли по формуле

$$\varepsilon = [T(0,0) - T_m(0,0)] / T_m(0,0),$$

где $T_m(0,0)$ — точное решение.

Как видно из табл. 11.3, использование дополнительных граничных условий приводит к значительному повышению точности приближенного решения. Так, например, если погрешность решения в первом приближении для квадратной области составляет 12 %, то уже во втором — 0,2 %. Для области прямоугольной формы точность приближенного решения еще более значительна.

§ 11.9. Анализ решений уравнений теплопроводности при конечной и бесконечной скорости распространения теплоты

В классической теории теплопроводности используют понятие бесконечной скорости распространения теплового возмущения, которое заложено в основу всех уравнений нестационарной теплопро-

водности параболического типа. Следует, однако, заметить, что применение классического параболического уравнения теплопроводности вида

$$\frac{1}{a} \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (11.339)$$

для описания процессов передачи теплоты во всех случаях является некоторым приближением к реальным (действительным) нестационарным процессам теплопереноса, более точно описываемым гиперболическим уравнением. Это связано с тем, что при выводе параболического уравнения (11.339) принимают условие бесконечной скорости распространения теплового возмущения (тепловой волны), являющееся, естественно, идеализацией. Отметим, что оно имеет теоретическую природу и вводится лишь с целью упрощения математического описания реальных физических процессов теплопроводности. В связи с чем следует выполнить оценку степени отклонения результатов, получаемых из решения параболического уравнения (11.339), от имеющих место в реальных физических процессах, описываемых гиперболическими уравнениями.

При выводе гиперболического уравнения теплопроводности используют следующую формулу для теплового потока:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} - \tau_r \frac{\partial q_x}{\partial \tau}, \quad (11.340)$$

где τ_r — постоянная времени (время релаксации), связанная со скоростью продвижения тепловой волны (W , м/с) следующим соотношением:

$$\tau_r = a / W^2, \quad (11.341)$$

где a — коэффициент температуропроводности.

Очевидно, что с ростом коэффициента температуропроводности время релаксации увеличивается, а с повышением скорости тепловой волны — уменьшается. На основе формулы (11.341) в зависимости от рода среды (характеризуемой величиной a) и скорости продвижения тепловой волны W можно оценить величину τ_r и, следовательно, второй член в правой части соотношения (11.340).

Соотношение (11.340) получено А.В. Лыковым на основе сформулированной им обобщенной системы уравнений Онзагера. Введение второго члена в правой части (11.340) связано с нестационарностью процесса теплопереноса. Для стационарных процессов $dq_x/d\tau = 0$ и, следовательно, $\tau_r dq_x/d\tau = 0$. Из формулы (11.340) следует, что в не-

стационарных процессах закон распространения теплоты, вообще говоря, не подчиняется гипотезе Фурье. В формуле для теплового потока необходимо учитывать влияние конечной скорости распространения теплового возмущения (второй член в правой части формулы (11.340)).

С учетом (11.340) на основе закона сохранения энергии выводим гиперболическое уравнение теплопроводности вида

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (11.342)$$

Уравнение (11.342) отличается от уравнения (11.339) наличием дополнительного члена $\tau_r \partial^2 t(x, \tau) / \partial \tau^2$, характеризующего волновой процесс распределения теплоты. В данном случае учитывается диссипация (рассеивание) энергии (теплоты), связанная с хаотическим тепловым движением молекул и зависящая от длины их свободного пробега.

При $W \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\tau_r \rightarrow 0$ уравнение (11.342) принимает вид уравнения (11.339). Дадим оценку величин W и τ_r для некоторых материалов. Например, для твердых тел (металлов) $\tau_r \approx 10^{-11}$ с. Тогда скорость продвижения тепловой волны для стали $W = 1800$ м/с. Для газов (азот): $\tau_r \approx 10^{-9}$ с и $W = 150$ м/с. Для сильно разреженных газов (например, в условиях сверхзвукового течения) величина W может оказаться незначительной. В этом случае второй член в левой части уравнения (11.342) будет сопоставим с другими его членами и его учет является необходимым условием адекватного описания реального физического процесса. Гиперболические уравнения теплопроводности необходимо использовать также при выполнении расчетов высокоинтенсивных быстропротекающих нестационарных процессов, время протекания которых сопоставимо с временем релаксации τ_r .

Наряду с понятием скорости движения тепловой волны W в классической теории теплопроводности есть понятие скорости движения изотермы v , м/с. Для установления взаимосвязи между ними перепишем уравнение (11.340) в виде

$$\frac{q_x}{\lambda} = -\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{1}{c\rho W^2} \frac{\partial q_x}{\partial \tau}, \quad (11.343)$$

где c — теплоемкость; ρ — плотность.

Если W велико, а коэффициент теплопроводности мал, то из уравнения (11.343) получаем классическое уравнение закона Фурье

$$q_x = -\lambda \partial t / \partial x. \quad (11.344)$$

Если величина W незначительна, а коэффициент теплопроводности велик ($\lambda \rightarrow \infty$), то формулу (11.343) приводим к виду

$$-\partial t = \frac{1}{c_p W^2} \frac{\partial x}{\partial \tau} \partial q_x, \quad (11.345)$$

или

$$\partial q_x = c_p \frac{W^2}{v} \partial t, \quad (11.346)$$

где v — скорость движения изотермы, $v = dx/d\tau$.

Интегрируя уравнение (11.346), с учетом того, что q является функцией процесса, а t — функцией состояния, находим

$$q_x = c_p \frac{W^2}{v} (t_2 - t_1). \quad (11.347)$$

Отсюда следует, что скорости движения тепловой волны и изотермической поверхности относятся к двум различным понятиям. Первая связана с длиной свободного пробега молекул и уменьшается с ее увеличением (например, разреженные газы). Большие значения W для металлов объясняются наличием большого числа свободных электронов и малой длиной их свободного пробега (известно, что электронная теплопроводность в металлах значительно превосходит решетчатую, связанную с колебаниями узлов кристаллической решетки). Таким образом, скорость движения тепловой волны зависит от релаксационных свойств материалов, связанных с хаотическим тепловым движением молекул (газы) и свободных электронов (твердые вещества). Если период релаксации мал $\tau_r \rightarrow 0$, то из уравнения (11.340) получаем классическое уравнение закона Фурье вида (11.344), а из уравнения (11.342) — классическое параболическое уравнение теплопроводности вида (11.339). Если период релаксации велик, то релаксационные члены в уравнениях (11.340) и (11.342) необходимо учитывать.

Скорости движения изотерм связаны с интенсивностью перемещения линий (поверхностей) одинаковых температур по пространственной координате во времени. Для объяснения этого понятия рассмотрим уравнение изотермы $t(x, \tau) = \text{const}$. Полный дифференциал от него будет

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial t}{\partial x} dx = 0.$$

Его можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + v \frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

Сравнивая это уравнение с (11.339), находим

$$v \frac{\partial t}{\partial x} = -a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}.$$

Отсюда

$$v = -a \frac{\partial^2 t / \partial x^2}{\partial t / \partial x}.$$

Следовательно, скорость продвижения изотермы пропорциональна коэффициенту температуропроводности.

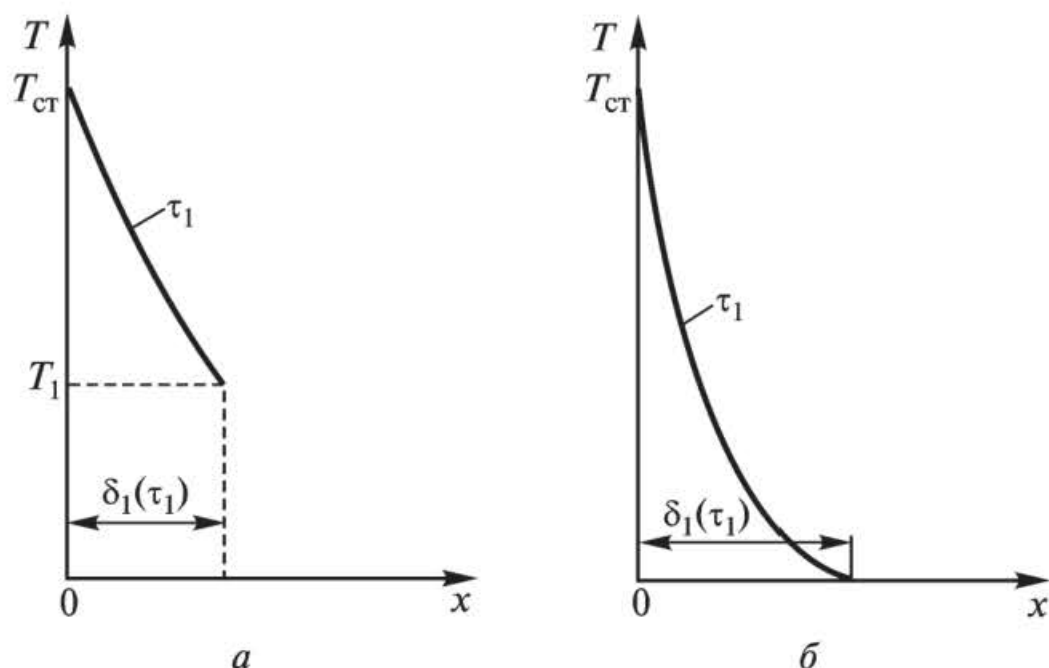
Решение уравнения (11.342) для полупространства при граничном условии первого рода $T(0, \tau) = T_{\text{ст}}$ с равномерным начальным распределением температуры $T(x, 0) = T_0 = 0$ имеет вид:

$$T(x, \tau) = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{1}{a\tau_r}} \int_{\tau^*}^{\tau} \exp\left(-\frac{\tau}{2\tau_r}\right) \frac{J_1(z) \left[\frac{1}{2\tau_r} (\tau^2 - x^2\tau_r/a)^{1/2} \right]}{(\tau^2 - x^2\tau_r/a)} d\tau + \exp\left(-\frac{x}{2} \sqrt{1/(a\tau_r)}\right), \quad (11.348)$$

где $J_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода; $\tau^* = x\sqrt{\tau_r/a}$.

Результаты расчетов по формуле (11.348) даны на рис. 11.46, а. Их анализ позволяет заключить, что для времени $\tau = \tau_1$ тепловое возмущение распространяется на глубину $\delta_1 = \tau_1 \sqrt{a/\tau_r} = \tau_1 W$, где W — скорость распространения теплового возмущения, $W = d\delta/d\tau = \sqrt{a/\tau_r}$. На некотором расстоянии $x = \delta_1(\tau_1)$ кривая изменения температуры обрывается, достигая при этом значения $T_1 = \exp(-\tau_1/2\tau_r)$, превышающего начальное $T_0 = 0$. В классической теории теплопроводности (с учетом бесконечной скорости распределения теплоты) такого разрыва в кривой распределения температуры не наблюдается (рис. 11.46, б).

Выполним исследование точного аналитического решения уравнения (11.339) с целью оценки влияния условия бесконечной скорости распространения теплового возмущения на распределение тем-



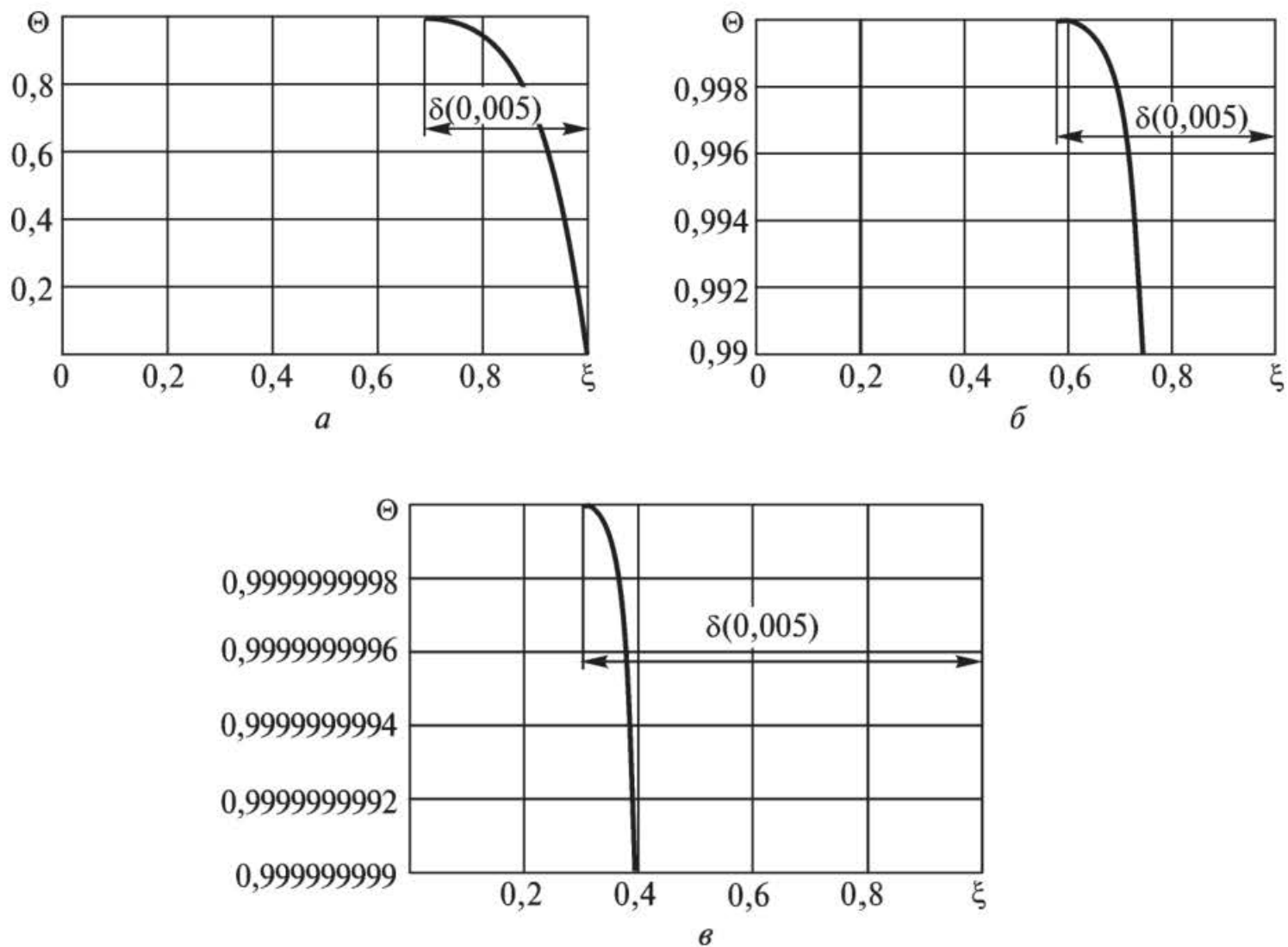
Р и с. 11.46. Распределение температуры в полуограниченном теле для времени $\tau = \tau_1$ с учетом конечной (а) и бесконечной (б) скорости распространения теплового возмущения

пературы в стадии инерционного (нерегулярного) процесса теплообмена. Точное аналитическое решение уравнения (11.339) для бесконечной пластины при постоянном начальном условии $\Theta(\xi, 0) = \Theta_0 = 1$ и граничном условии первого рода $\Theta(1, Fo) = \Theta_{ст} = 0$ имеет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \cos\left[\frac{1}{2}(2n-1)\pi\xi\right] \exp\left[-\frac{1}{4}(2n-1)^2 \pi^2 Fo\right], \quad (11.349)$$

где $\xi = x/R$; $Fo = a\tau/R^2$.

Результаты расчетов по формуле (11.349) для числа $Fo = 0,005$ даны на рис. 11.47. Их анализ позволяет заключить, что понятие времени продвижения фронта температурного возмущения по координате ξ связано с точностью определения температуры на фронте. Тотчас же после начала действия граничного условия первого рода (ввиду бесконечной скорости распространения теплового возмущения) температура в центре пластины (в том числе и на фронте температурного возмущения) уже не равна начальной. Она меньше ее на некоторую конечную величину $\Delta\Theta$ на фронте температурного возмущения и на бесконечную малую величину в центре пластины. Анализ позволяет заключить, что точка расположения фронта температурного возмущения по координате ξ зависит от точности, с которой в ней определяется температура. И в пределе при бесконечном увеличении точно-



Р и с. 11.47. Распределение температуры в бесконечной пластине при $Fo = 0,005$ при симметричных граничных условиях первого рода вблизи значений Θ , отличающихся от начальной температуры на $0,01$ (а); $1 \cdot 10^{-3}$ (б); $1 \cdot 10^{-10}$ (в)

сти скорость движения фронта устремляется к бесконечному значению, а время его движения от $\xi = 0$ до $\xi = 1$ приближается к нулю (более подробный анализ см. в § 11.1).

§ 11.10. Приближенные аналитические решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Получение решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в случаях, когда они включают члены, содержащие искомую функцию в степенях $n \geq 3$, представляет значительные трудности не только для аналитических, но и численных методов. При достаточно больших n , когда нахождение аналитических решений вообще не представляется возможным, весьма затруднительным оказывается и получение численных решений. Это связано с тем, что в результате конечно-разностной аппроксимации

исходного дифференциального уравнения относительно искомой функции получают большие системы алгебраических уравнений высокого порядка, методы решения которых (как численные, так и аналитические) пока еще не разработаны.

Рассмотрим методику получения приближенных аналитических решений краевых задач, математические постановки которых содержат нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. С целью оценки точности предлагаемой методики найдем сначала решения обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих точные аналитические решения. И в частности, рассмотрим краевую задачу о движении фронта температурного возмущения, возникающую как промежуточный этап решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода, рассмотренной в § 11.1. Задача о движении фронта температурного возмущения в пятом приближении содержит нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вида (11.40) и соответствующее начальное условие:

$$21 \frac{dq_1(Fo)}{dFo} = \frac{490}{q_1(Fo)}; \quad (11.350)$$

$$q_1(0) = 0 \quad (11.351)$$

$$(0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq q_1(Fo) \leq 1).$$

Уравнение (11.350) не представляет затруднений для непосредственного интегрирования, и точное аналитическое решение задачи (11.350), (11.351) имеет вид (11.41). Представим это решение следующим образом:

$$q_1(Fo) = \frac{2}{3} \sqrt{105Fo}^{0.5}. \quad (11.352)$$

Положив $q_1(Fo_1) = 1$, из соотношения (11.352) находим время окончания первой стадии процесса $Fo = Fo_1 = 0,0214285714$.

Рассмотрим методику получения приближенного аналитического решения задачи (11.350), (11.351). С целью упрощения процесса введем новую независимую переменную $\eta = Fo/Fo_1$. Тогда уравнение (11.350) примет вид

$$21 \frac{dq_1(\eta)}{d\eta} = \frac{490Fo_1}{q_1(\eta)}; \quad (11.353)$$

$$q_1(0) = 0 \quad (11.354)$$

$$(0 \leq \eta \leq 1; 0 \leq q_1(\eta) \leq 1).$$

Для уравнения (11.353) должно быть выполнено также условие

$$q_1(1) = 1. \quad (11.355)$$

Решение задачи (11.353), (11.354) примем в виде

$$q_1(\eta) = b\eta^\lambda, \quad (11.356)$$

где b, λ — некоторые пока неизвестные постоянные. Отметим, что из условия (11.355) следует $b = 1$.

Для определения коэффициента λ потребуем, чтобы соотношение (11.356) удовлетворяло не уравнению (11.353), а некоторому осредненному, т. е. уравнению (11.353), умноженному на $d\eta$ и проинтегрированному в пределах от $\eta = 0$ до $\eta = 1$:

$$\int_0^1 \left(21 \frac{dq_1(\eta)}{d\eta} - \frac{490Fo_1}{q_1} \right) d\eta = 0. \quad (11.357)$$

Подставляя (11.356) в (11.357), после вычисления интеграла находим

$$70Fo_1 + 3\lambda - 3 = 0. \quad (11.358)$$

Уравнение (11.358) содержит две неизвестные величины Fo_1 и λ . Для их определения используем еще одно уравнение, получаемое путем введения дополнительного граничного условия, которое можно найти, если потребовать, чтобы соотношение (11.356) удовлетворяло уравнению (11.354) в точке $\eta = 1$, т.е.

$$21 \left[\frac{dq_1(\eta)}{d\eta} \right]_{\eta=1} = \frac{490Fo_1}{q_1(1)}.$$

Последнее соотношение с учетом (11.355) приводим к следующему алгебраическому уравнению:

$$21 \frac{\lambda}{Fo_1} - 490 = 0. \quad (11.359)$$

Из совместного решения уравнений (11.358) и (11.359) находим $\lambda = 0,5$; $Fo_1 = 0,0214285714$. Отметим, что полученное таким путем значение Fo_1 до одиннадцати знаков после запятой совпадает с точным, а значение коэффициента λ полностью совпадает с показателем степени числа Фурье соотношения (11.352).

Соотношение (11.356) с учетом найденных значений Fo_1 и λ для независимой переменной Fo принимает вид:

$$q_1(Fo) = kFo^{0,5}, \quad (11.360)$$

где $k = 1/Fo_1^{0,5} = 6,831300513$.

Точное аналитическое решение (11.352) задачи (11.350), (11.351) можно представить в виде формулы (11.360), где $k = \frac{2}{3}\sqrt{105} = 6,831300511$.

Отсюда следует, что отличие приближенного аналитического решения задачи (11.350), (11.351) от точного наблюдается лишь в девятом знаке после запятой в значении коэффициента k .

С целью применения рассмотренного ранее метода для решения более сложных уравнений рассмотрим краевую задачу в следующей математической постановке:

$$(3q_1^4 + 37q_1^3 + 16q_1^2 - 336q_1) \frac{dq_1}{dFo} + 420q_1 + 3360 = 0; \quad (11.361)$$

$$q_1(0) = 0 \quad (11.362)$$

$$(0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq q_1(Fo) \leq 1).$$

Задача (11.361), (11.362) возникает как промежуточный этап решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечного цилиндра при граничных условиях первого рода (см. § 11.2). Уравнение вида (11.361) получаем при решении указанной задачи во втором приближении первой стадии процесса (см. (11.96)).

Непосредственное интегрирование уравнения (11.361) при начальном условии (11.362) приводит к соотношению (11.97). Время окончания первой стадии процесса составляет $Fo_1 = 0,042124470264$.

Соотношение (11.97) относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ является трансцендентным уравнением, аналитическое решение которого не представляется возможным. Численные значения q_1 в зависимости от Fo приведены на с. 211.

Для нахождения приближенного аналитического решения задачи (11.361), (11.362) приведем уравнение (11.361) к безразмерному виду посредством использования новой независимой переменной $\eta = Fo/Fo_1$. Тогда оно примет вид:

$$(3q_1^4 + 37q_1^3 + 16q_1^2 - 336q_1) \frac{dq_1}{d\eta} + 420q_1 Fo_1 + 3360 Fo_1 = 0; \quad (11.363)$$

$$q_1(0) = 0 \quad (11.364)$$

$$(0 \leq \eta \leq 1; 0 \leq q_1 \leq 1).$$

Решение задачи (11.363), (11.364) примем в виде

$$q_1(\eta) = b\eta^{\lambda_1}. \quad (11.365)$$

Из условия $q_1(1) = 1$ находим $b = 1$.

Потребуем, чтобы соотношение (11.365) удовлетворяло осредненному уравнению (11.363). Для этого проинтегрируем уравнение (11.363) в пределах от $\eta = 0$ до $\eta = 1$, т.е.

$$\int_0^1 \left[(3q_1^4 + 37q_1^3 + 16q_1^2 - 336q_1) \frac{dq_1}{d\eta} + 420q_1 Fo_1 + 3360Fo_1 \right] d\eta = 0. \quad (11.366)$$

Подставляя (11.365) в (11.366), после вычисления интеграла получаем

$$9169(1 + \lambda_1) - 226800Fo_1 - 201600Fo_1\lambda_1 = 0. \quad (11.367)$$

Выражение (11.367) содержит две неизвестные величины Fo_1 и λ_1 . Для их определения необходимо еще одно уравнение. В качестве такого уравнения используем дополнительное граничное условие, согласно которому в точке $\eta = 1$ должно выполняться выражение (11.363), т.е.

$$\left[(3q_1^4 + 37q_1^3 + 16q_1^2 - 336q_1) \frac{dq_1}{d\eta} + 420q_1 Fo_1 + 3360Fo_1 \right]_{\eta=1} = 0. \quad (11.368)$$

Подставляя (11.365) в дополнительное граничное условие (11.368), с учетом того, что $q_1(1) = 1$, относительно неизвестных Fo_1 и λ_1 получаем следующее алгебраическое линейное уравнение:

$$14\lambda_1 - 189Fo_1 = 0. \quad (11.369)$$

Из совместного решения уравнений (11.367), (11.369) находим $Fo_1 = 0,04212447026$; $\lambda_1 = 0,568680348566$.

Отметим, что величина Fo_1 до 12-го знака после запятой совпадает с точным его значением, полученным из соотношения (11.97).

Решение задачи (11.363), (11.364) принимает вид

$$q_1(\eta) = \eta^{\lambda_1}. \quad (11.370)$$

Переходя к независимой переменной Fo , получаем

$$q_1(Fo) = k_1 Fo^{\lambda_1}, \quad (11.371)$$

где $k_1 = 1/Fo_1^{\lambda_1} = 6,056500253089$.

Максимальное расхождение результатов расчетов по формуле (11.371) в сравнении с точным решением (11.97) составляет 2 %.

Для повышения точности получаемого решения применим итеративный метод, заключающийся в следующем. Принимая решение уравнения (11.363) в виде (11.365), определяем значения $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_{10}$ для случаев, когда фронт температурного возмущения находится соответственно в точках 0,9; 0,8; 0,7 ... 0,1 координаты ξ . Затем найдем средний коэффициент ($\lambda_{\text{ср}}$) из всех полученных. Причем вклад каждого в определение среднего значения принимается различным. Вклад коэффициента λ_1 , найденного для $q_1(\text{Fo}) = 1$, принимаем за единицу, так как он найден с учетом всего пути, проходимого фронтом температурного возмущения ($0 \leq \xi \leq 1$). Соответственно вклад коэффициента λ_2 , найденного для $q_1(\text{Fo}) = 0,9$ ($0 \leq \xi \leq 0,9$), принимаем равным 0,9, коэффициента λ_3 , найденного для $q_1(\text{Fo}) = 0,8$ ($0 \leq \xi \leq 0,8$), — равным 0,8 и т.д. В итоге $\lambda_{\text{ср}}$ определяем по формуле

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{\lambda_1 + 0,9\lambda_2 + 0,8\lambda_3 + \dots + 0,1\lambda_{10}}{\mu}, \quad (11.372)$$

где $\mu = 1 + 0,9 + 0,8 + \dots + 0,1 = 5,5$.

Для определения коэффициента λ_2 применительно к уравнению (11.361) вводим новую независимую переменную $\eta = \text{Fo}/\text{Fo}_2$, где Fo_2 — время, за которое фронт температурного возмущения достигает координаты $\xi = 0,9$. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид

$$(3q_1^4 + 37q_1^3 + 16q_1^2 - 336q_1) \frac{dq_1}{d\eta} + 420q_1 \text{Fo}_2 + 3360\text{Fo}_2 = 0; \quad (11.373)$$

$$q_1(0) = 0 \quad (11.374)$$

$$(0 \leq \eta \leq 1; 0 \leq q_1(\eta) \leq 0,9).$$

Решение задачи (11.373), (11.374) принимаем в виде

$$q_1(\eta) = b\eta^{\lambda_2}. \quad (11.375)$$

Из условия $q_1(1) = 0,9$ получаем $b = 0,9$.

Потребуем, чтобы соотношение (11.375) удовлетворяло осредненному уравнению (11.373):

$$\int_0^1 \left[(3q_1^4 + 37q_1^3 + 16q_1^2 - 336q_1) \frac{dq_1}{d\eta} + 420q_1 \text{Fo}_2 + 3360\text{Fo}_2 \right] d\eta = 0. \quad (11.376)$$

Подставляя (11.375) в (11.376), получаем

$$41,922927(1 + \lambda_2) - 2Fo_2(623 + 560\lambda_2) = 0. \quad (11.377)$$

Уравнение (11.377) содержит две неизвестные величины Fo_2 и λ_2 . Для нахождения еще одного уравнения используем дополнительное граничное условие, задаваемое в точке $\eta = 0,9$. И в частности, потребуем, чтобы в ней соотношение (11.375) удовлетворяло уравнению (11.373), т.е.

$$\left[(3q_1^4 + 37q_1^3 + 16q_1^2 - 336q_1) \frac{dq_1}{d\eta} + 420q_1 Fo_2 + 3360Fo_2 \right]_{\eta=0,9} = 0. \quad (11.378)$$

Подставляя (11.375) в (11.376), с учетом того, что $q_1(1) = 0,9$, относительно неизвестных Fo_2 и λ_2 получаем алгебраическое линейное уравнение

$$3738Fo_2 - 234,44883\lambda_2 = 0. \quad (11.379)$$

Из совместного решения уравнений (11.377), (11.379), находим $Fo_2 = 0,03490821620$; $\lambda_2 = 0,5565688349$.

Аналогичный путь решения для $q_1(\eta) = 0,8; 0,7; 0,6; \dots; 0,1$ приводит к следующим значениям коэффициентов Fo и λ :

$$\begin{aligned} Fo_3 &= 0,02817861687; \lambda_3 = 0,5461082219; Fo_4 = 0,02201149563; \\ \lambda_4 &= 0,5370446616; Fo_5 = 0,01647827834; \lambda_5 = 0,5291777391; \\ Fo_6 &= 0,01164582637; \lambda_6 = 0,5223475478; Fo_7 = 0,007576300062; \\ \lambda_7 &= 0,5164253894; Fo_8 = 0,004327043073; \lambda_8 = 0,5113069740; \\ Fo_9 &= 0,00195048068; \lambda_9 = 0,5069073780; Fo_{10} = 0,0004940273676; \\ \lambda_{10} &= 0,5031572611. \end{aligned}$$

Для среднего значения λ , определяемого по формуле (11.372), имеем: $\lambda_{cp} = 0,5405000014509$.

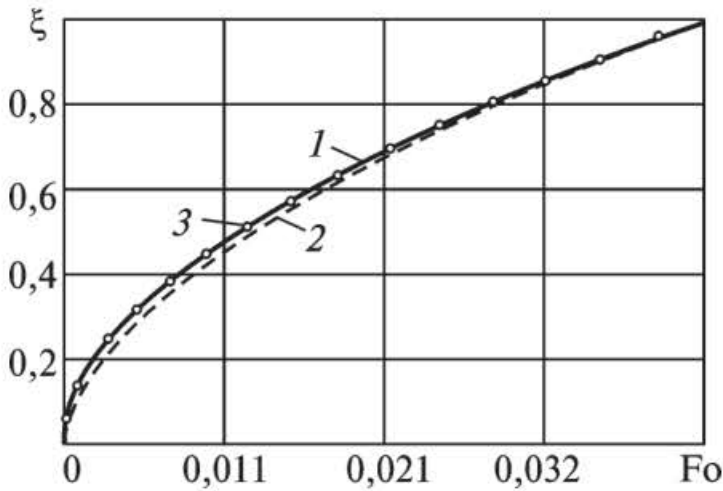
Приближенное аналитическое решение задачи (11.361), (11.362) приводим к виду

$$q_1(Fo) = kFo^{\lambda_{cp}}, \quad (11.380)$$

где $k = 1/Fo_1 = 1/0,04212447026 = 5,539099039974$.

Результаты расчетов фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$ по формуле (11.380) даны на рис. 11.17, 11.48.

На рис. 11.49 представлены результаты расчетов относительной невязки уравнения (11.361) для случаев использования в качестве

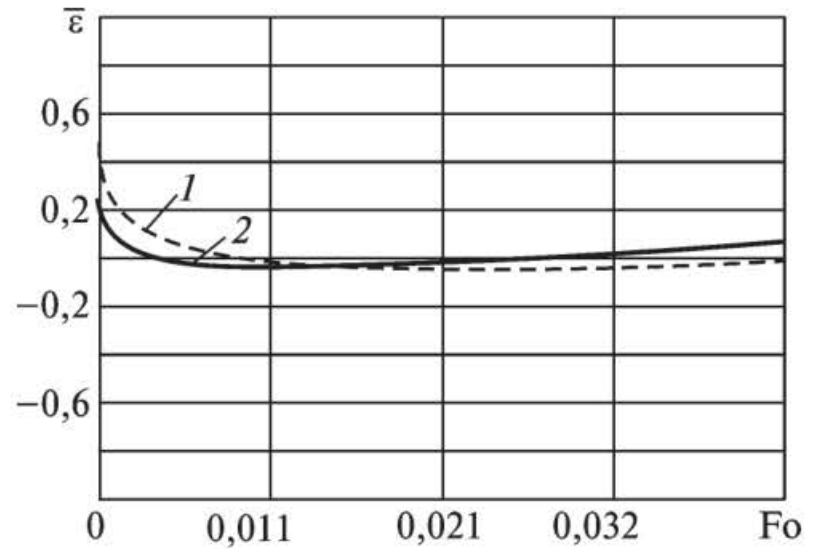


Р и с. 11.48. Перемещение фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$ во времени Fo :

1 — по формуле (11.97) (точное решение);
2 — по формуле (11.371); 3 — по формуле (11.380)

Р и с. 11.49. Изменение относительной невязки $\bar{\varepsilon}$ уравнения (11.361):

1 — для решения по формуле (11.371);
2 — по формуле (11.380)



приближенных аналитических решений соотношений (11.371) и (11.380). Относительная невязка определялась по формуле

$$\bar{\varepsilon} = (\mu - \varepsilon) / \mu \quad (0 \leq \bar{\varepsilon} \leq 1),$$

где μ — свободный член уравнения (11.361), $\mu = 3360$; ε — невязка уравнения (11.361).

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что отличие значений $q_1(Fo)$, найденных по формулам (11.371) и (11.380), от точных в диапазоне чисел $0,05 \leq Fo \leq Fo_1$ не превышает соответственно 2 и 0,05 %.

Эффективность описанного ранее итерационного способа получения решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений показана на достаточно большом числе конкретных примеров (см. § 11.2—11.7; 12.2; 12.3, 14.7 и др.). Такой результат можно объяснить тем, что в данном случае удастся получить решение, которое благодаря использованию дополнительных граничных условий наилучшим образом удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению на всем отрезке изменения независимой переменной $0 \leq \xi \leq 1$, определяя при этом всего два неизвестных коэффициента λ_{cp} и k . Первый из них характеризует кривизну кривой $q_1(Fo)$, а второй — ее наклон.

**ПЕРЕМЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ
И ИСТОЧНИКИ ТЕПЛОТЫ**

**§ 12.1. Температура стенки — линейная
функция времени**

Рассмотренный в гл. 11 интегральный метод теплового баланса с использованием дополнительных граничных условий достаточно эффективен и при решении задач теплопроводности с переменными во времени граничными условиями и источниками теплоты. В частности, найдем решение задачи теплопроводности с переменным во времени граничным условием первого рода (температура стенки — линейная функция времени). Математическая постановка задачи для пластины, цилиндра и шара в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{a}{r^c} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^c \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right] \quad (\tau > 0; 0 \leq r \leq R); \quad (12.1)$$

$$T(r, 0) = T_0; \quad (12.2)$$

$$\partial T(0, \tau) / \partial r = 0; \quad (12.3)$$

$$T(R, \tau) = T_0 + b\tau, \quad (12.4)$$

где T — температура; T_0 — начальная температура; r — координата; R — половина толщины пластины (радиус цилиндра, шара); τ — время; b — коэффициент, характеризующий скорость изменения температуры стенки во времени, К/с; $c = 0, 1, 2$ — соответственно для пластины, цилиндра и шара; a — коэффициент температуропроводности.

Введем следующие обозначения:

$$\Theta = (T - T_0) / T_0; \quad \text{Fo} = a\tau / R^2; \quad \rho = r / R; \quad \text{Pd} = bR^2 / aT_0, \quad (12.5)$$

где Pd — критерий Предводителя.

С учетом принятых обозначений задача (12.1) — (12.4) принимает вид

$$\frac{\partial \Theta(\rho, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{\rho^c} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^c \frac{\partial \Theta(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} \right] \quad (\text{Fo} > 0; 0 \leq \rho \leq 1); \quad (12.6)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 0; \quad (12.7)$$

$$\partial\Theta(0, Fo) / \partial\rho = 0; \quad (12.8)$$

$$\Theta(1, Fo) = PdFo. \quad (12.9)$$

Вводя движущуюся во времени границу (фронт температурного возмущения $q_1(Fo)$) и переходя к новой независимой переменной $\xi = 1 - \rho$, для первой стадии процесса приходим к задаче в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial\xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi} \right] \quad (12.10)$$

$$(0 < Fo \leq Fo; \quad 0 \leq \xi \leq q_1(Fo));$$

$$\Theta(0, Fo) = Pd Fo; \quad (12.11)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (12.12)$$

$$\partial\Theta(q_1, Fo) / \partial\xi = 0. \quad (12.13)$$

В задаче (12.10)—(12.13), как и ранее (см. § 11.1—11.7), отсутствуют начальное условие вида (12.7) и условие адиабатной стенки в центре пластины (цилиндра, шара).

Решение задачи (12.10)—(12.13) принимаем в виде ряда (11.9). После определения неизвестных коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (12.11)—(12.13) соотношение (11.9) в первом приближении принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = Pd Fo(1 - \xi / q_1)^2. \quad (12.14)$$

Составляя невязку дифференциального уравнения (12.10) и интегрируя полученное соотношение в пределах глубины термического слоя, относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

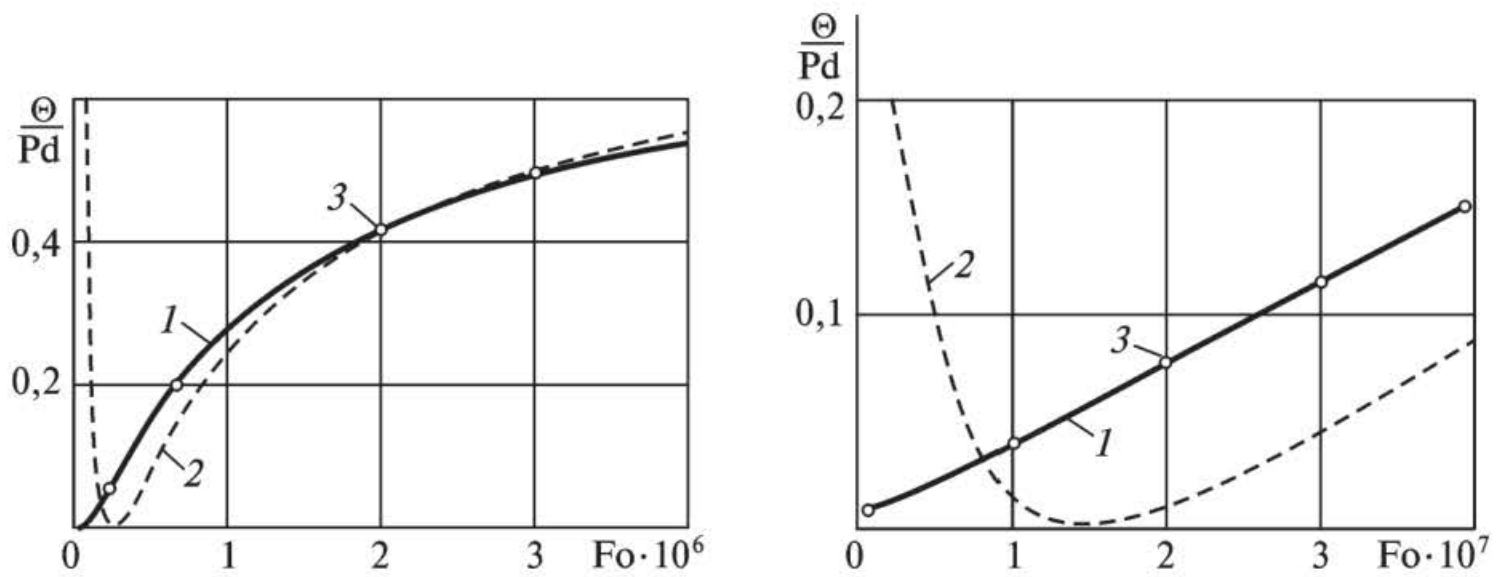
$$q_1 Fodq_1 = (6Fo - q_1^2) dFo. \quad (12.15)$$

Интегрируя уравнение (12.15), при начальном условии $q_1(0) = 0$ находим

$$q_1(Fo) = 2\sqrt{Fo}. \quad (12.16)$$

Полагая в (12.16) $q_1(Fo_1) = 1$, определяем время окончания первой стадии процесса $Fo = Fo_1 = 0,25$.

Соотношения (12.14), (12.16) представляют решение задачи (12.10)—(12.13) в первом приближении. Результаты расчетов по формуле (12.14) в сравнении с точным решением приведены на рис. 12.1.



Р и с. 12.1. Изменение температуры пластины $\xi = 0,001$:

1 — точное решение; 2 — по формуле (12.14); 3 — по формуле (12.20)

Видим, что отличие полученных здесь температур от их точных значений в диапазоне чисел $10^{-7} \leq Fo \leq 5 \cdot 10^{-5}$ не превышает 7...8 %.

Чтобы получить решение во втором приближении, найдем дополнительные граничные условия. Дифференцируя граничное условие (12.11) по переменной Fo и сравнивая полученное соотношение с уравнением (12.10), получаем первое дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} - c \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = Pd. \quad (12.17)$$

Второе и третье дополнительные граничные условия в данном случае имеют вид (см. § 11.1):

$$\partial^2 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^2 = 0; \quad (12.18)$$

$$\partial^3 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^3 = 0. \quad (12.19)$$

После определения коэффициентов a_k ($k = \overline{0, 5}$) из граничных условий (12.11)—(12.13), (12.17)—(12.19) соотношение (11.9) будет (при $c = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(\xi, Fo)}{Pd} = & Fo - \frac{20Fo + q_1^2}{8q_1} \xi + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{20Fo - 3q_1^2}{4q_1^3} \xi^3 - \\ & - \frac{10Fo - q_1^2}{2q_1^4} \xi^4 + \frac{12Fo - q_1^2}{8q_1^5} \xi^5. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Определяя интеграл взвешенной невязки уравнения (12.10) относительно $q_1(\text{Fo})$, будем иметь дифференциальное уравнение вида

$$q_1(\text{Fo})dq_1(\text{Fo}) = 10d\text{Fo}. \quad (12.21)$$

Интегрируя уравнение (12.21), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(\text{Fo}) = \sqrt{20\text{Fo}}. \quad (12.22)$$

При $q_1(\text{Fo}_1) = 1$ находим $\text{Fo}_1 = 0,05$.

Анализ результатов расчетов по формуле (12.20) в сравнении с точным решением (см. рис. 12.1) позволяет заключить, что во втором приближении по сравнению с первым благодаря применению дополнительных граничных условий происходит значительное уточнение решения.

Во второй стадии процесса в качестве дополнительной искомой функции принимаем температуру в центре пластины (цилиндра, шара) $\Theta(1, \text{Fo}) = q_2(\text{Fo})$. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi} \right] \quad (12.23)$$

$$(\text{Fo} \geq \text{Fo}_1; 0 \leq \xi \leq 1);$$

$$\Theta(0, \text{Fo}) = \text{Pd Fo}; \quad (12.24)$$

$$\Theta(1, \text{Fo}) = q_2(\text{Fo}); \quad (12.25)$$

$$\partial \Theta(1, \text{Fo}) / \partial \xi = 0. \quad (12.26)$$

Начальным условием задачи (12.23)—(12.26) будет соотношение (12.14) при $\text{Fo} = \text{Fo}_1$ и $q_1(\text{Fo}_1) = 1$, т.е.

$$\Theta(\xi, \text{Fo}_1) = \text{Pd Fo}_1 (1-\xi)^2. \quad (12.27)$$

Однако в его специальном удовлетворении нет необходимости ввиду того, что задачи (12.10)—(12.13) и (12.23)—(12.26) при $\text{Fo} = \text{Fo}_1$ (т.е. когда $q_2(\text{Fo}_1) = 0$) полностью совпадают и таким образом происходит плавный переход от первой стадии процесса ко второй.

Решение задачи (12.23)—(12.26) принимаем в виде (11.114). Соотношение (11.114) после определения из граничных условий (12.24), (12.26) неизвестных коэффициентов b_k ($k = 0, 1, 2$) примет вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \text{Pd Fo} - (\text{Pd Fo} - q_2)(2\xi - \xi^2). \quad (12.28)$$

Составляя невязку уравнения (12.23) и интегрируя полученное соотношение в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, относительно неизвестной функции $q_2(\text{Fo})$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение (при $c = 0$):

$$d[2/(3q_2) + \text{PdFo}/3 - q_2] = d\text{Fo}.$$

Интегрируя его, находим

$$q_2(\text{Fo}) = \text{Pd}(\text{Fo} - 1,5)/3 + C \exp(-3\text{Fo}), \quad (12.29)$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия $q_2(\text{Fo}_1) = 0$:

$$C = \text{Pd}(0,5 - \text{Fo}_1)\exp(3\text{Fo}_1). \quad (12.30)$$

Подставляя (12.30) в (12.29), получаем

$$q_2(\text{Fo}) = 0,5\text{Pd}(1 - 2\text{Fo}_1)\exp[-3(\text{Fo} - \text{Fo}_1)]. \quad (12.31)$$

Соотношения (12.28), (12.31) представляют решение задачи (12.23)—(12.26) в первом приближении. Оно точно удовлетворяет начальному условию (12.27), граничным условиям (12.24)—(12.26) и приближенно — уравнению (12.23).

Найдем решение задачи (12.23)—(12.26) во втором приближении с использованием дополнительных граничных условий. Для этого продифференцируем граничное условие (12.24) по переменной Fo . Сравнивая полученное соотношение с уравнением (12.23), получаем первое дополнительное граничное условие, которое совпадает с условием (12.17).

Второе и третье дополнительные граничные условия получаем также, как (11.125), (11.128).

После определения из основных и дополнительных граничных условий неизвестных коэффициентов b_k ($k = \overline{0,5}$) соотношение (11.114) принимает вид (при $c = 0$):

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \frac{1}{8}\text{Pd}(8\text{Fo} - \xi + 4\xi^2 - 6\xi^3 + 4\xi^4 - \xi^5) - \frac{1}{2}(5\xi + 10\xi^3 + 10\xi^4 - 3\xi^5)(\text{PdFo} - q_2) + \frac{1}{8}(3\xi + 14\xi^2 + 16\xi^4 - 5\xi^5)\frac{dq}{d\text{Fo}}. \quad (12.32)$$

Подставляя (12.32) в уравнение (12.23) и определяя интеграл в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, относительно $q_2(\text{Fo})$ получаем следующее неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$q_2'' + \frac{270}{11}q_2' + \frac{600}{11}q_2 - \frac{600}{11} + \frac{30}{11}\text{Pd} = 0. \quad (12.33)$$

Интегрируя уравнение (12.33), при начальных условиях $q_2(Fo_1) = 0$, $q_2'(Fo_1) = 0$ находим

$$q_2(Fo) = Pd\{Fo - 0,5 + 0,4557 \exp[-2,47(Fo - Fo_1)] - 0,0057 \exp[-22,075(Fo - Fo_1)]\}. \quad (12.34)$$

Подставляя (12.34) в (12.32), получаем окончательное выражение для температурного поля в неограниченной пластине во втором приближении второй стадии процесса

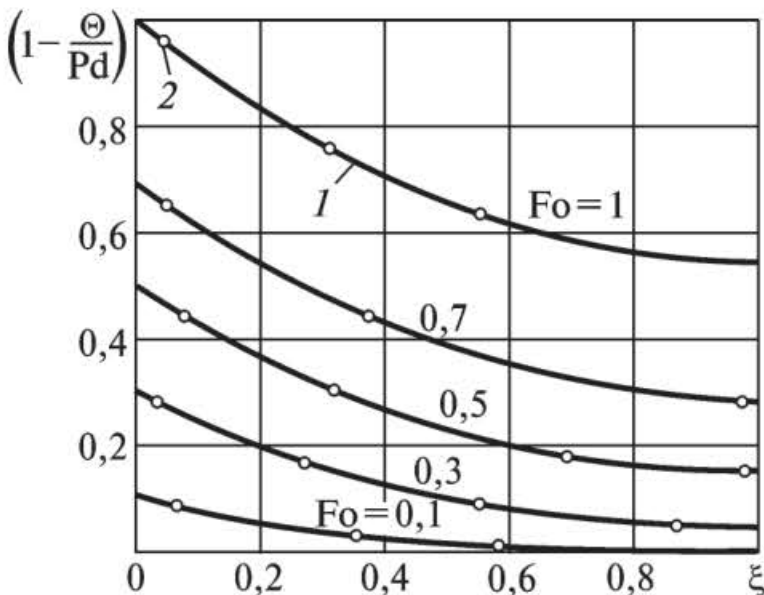
$$\frac{\Theta(\xi, Fo)}{Pd} = Fo - \xi + 0,5\xi^2 + (0,717\xi - 0,308\xi^3 + 0,0265\xi^4 + 0,0202\xi^5) \times \exp[-2,471(Fo - Fo_1)] + (0,033\xi - 0,192\xi^3 + 0,223\xi^4 - 0,0702\xi^5) \times \exp[-22,075(Fo - Fo_1)], \quad (12.35)$$

где $Fo_1 = 0,05$ (получено во втором приближении первой стадии процесса).

Результаты расчетов температур по формуле (12.35) в сравнении с точным решением приведены на рис. 12.2. Их анализ позволяет заключить, что полученные по формуле (12.35) значения температур практически совпадают с точными.

Отметим, что коэффициенты, расположенные под знаком экспонент в формуле (12.35), незначительно отличаются от первых двух собственных чисел, получающихся при решении задачи (12.1)—(12.2) классическими методами. Точные их значения $\lambda_1 = 2,467401$; $\lambda_2 = 22,206609$.

Используя формулы (12.20) и (12.35), найдем соотношения для определения изотерм. При конкретных значениях температуры $\Theta/Pd = \text{const}$ и времени $Fo = \text{const}$ формулы (12.20) и (12.35) принимают вид степенных алгебраических уравнений относительно пере-



Р и с. 12.2. Изменение температуры пластины при переменной во времени температуре стенки (вторая стадия процесса):

1 — расчет по формуле (12.35); 2 — точное решение

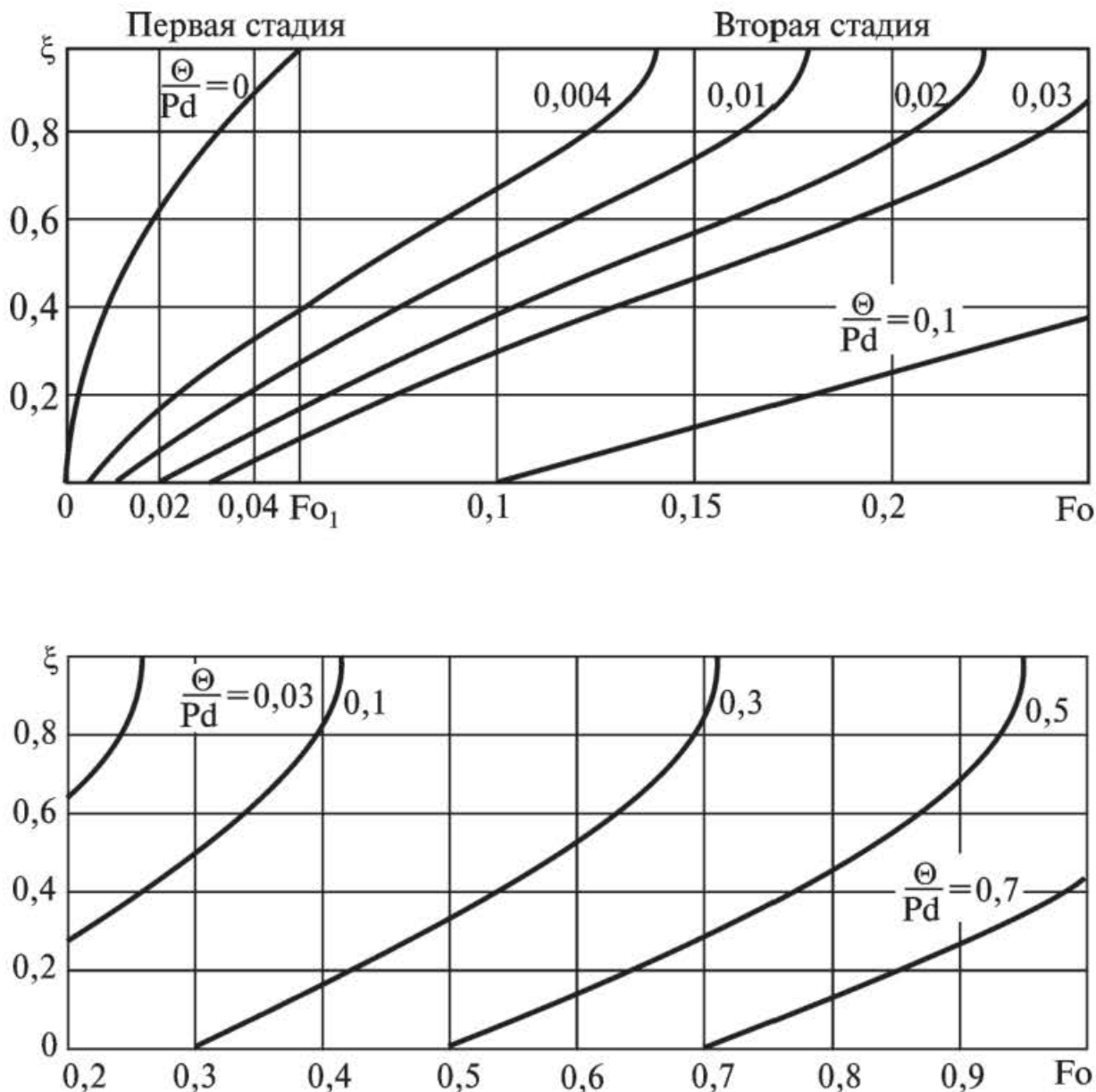


Рис. 12.3. Распределение изотерм в пластине при граничных условиях первого рода с переменной во времени температурой стенки (второе приближение $Fo_1 = 0,05$)

менной ξ . Например, при $\Theta/Pd = 0,03$ и $Fo = 0,04$ формула (12.20) примет вид

$$0,01 - 0,2236\xi + 0,5\xi^2 - 0,559\xi^3 + 0,3125\xi^4 - 0,06988\xi^5 = 0. \quad (12.36)$$

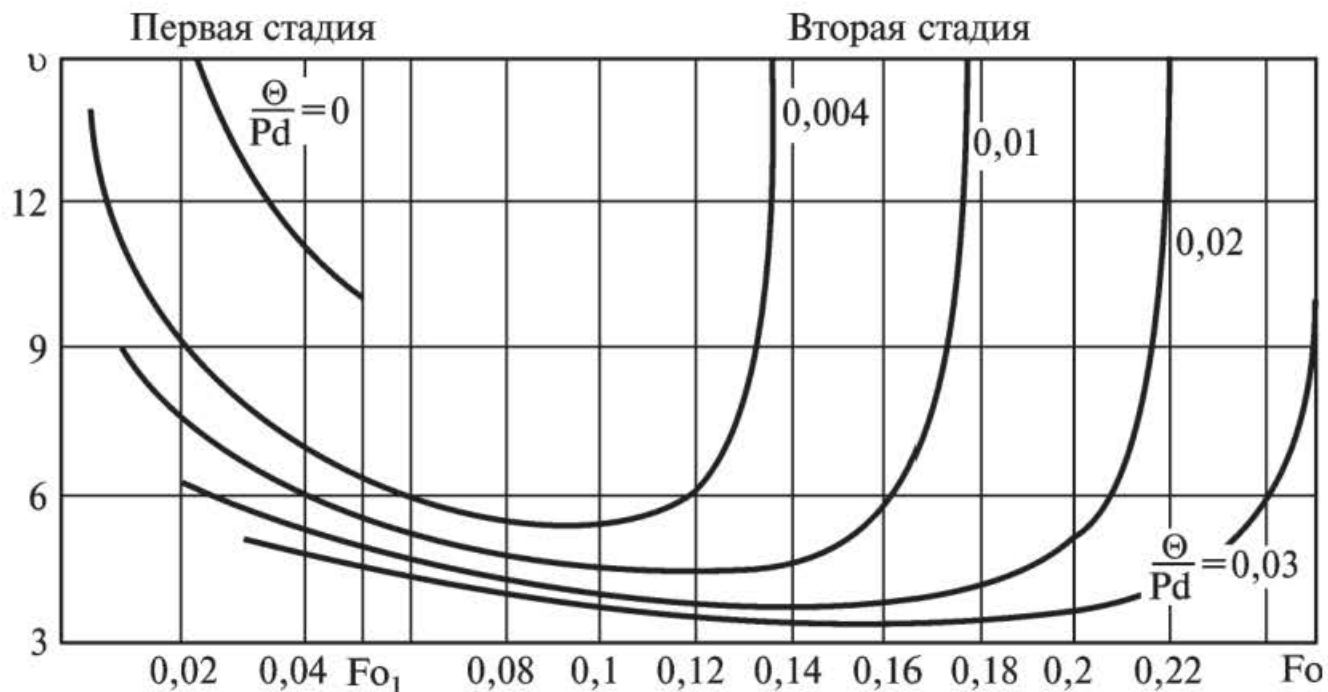
Уравнение (12.36) имеет пять корней. Из них лишь один корень $\xi = 0,500116$ удовлетворяет соотношению (12.20).

Используя формулу (12.35), приняв $\Theta/Pd = 0,5$ и $Fo = 0,8$, относительно переменной ξ получаем следующее алгебраическое уравнение:

$$0,3 - 0,887\xi + 0,5\xi^2 - 0,04827\xi^3 + 0,004153\xi^4 + 0,003166\xi^5 = 0. \quad (12.37)$$

Из пяти корней уравнения (12.37) лишь один $\xi = 0,444989$ удовлетворяет соотношению (12.35).

Задавая при $\Theta/Pd = \text{const}$ различные значения переменной Fo , путем решения соответствующих алгебраических уравнений можно найти зависимость $\xi = f(Fo)$ и построить графики изотерм в координатах ξ, Fo (рис. 12.3).



Р и с. 12.4. Распределение скоростей изотерм в пластине при граничных условиях первого рода с переменной во времени температурой стенки

Анализ распределения изотерм по координате ξ во времени Fo позволяет заключить, что нулевая изотерма $\Theta/Pd = 0$ исходит из начала координат ($\xi = 0$; $Fo = 0$) и закачивается в точке $\xi = 1$ при $Fo = Fo_1 = 0,05$. Она представляет движение фронта температурного возмущения по координате ξ во времени и описывается формулой (12.22). Каждая последующая изотерма появляется на поверхности ($\xi = 0$) пластины в строго определенные моменты времени, а именно при $Fo = \Theta/Pd$, что следует непосредственно из формул (12.20) и (12.35).

Определяя производные от пути ξ , пройденного изотермами, по времени Fo , находим скорости их движения $v = d\xi/dFo \approx \Delta\xi/\Delta Fo$ (рис. 12.4). Анализ распределения скоростей позволяет заключить, что начальные скорости изотерм малого потенциала ($\Theta/Pd \rightarrow 0$) устремляются к бесконечным значениям. Затем по мере увеличения потенциала они уменьшаются и при $\Theta/Pd \geq 0,5$ становятся одинаковыми для всех изотерм. При приближении изотерм к центру пластины ($\xi \rightarrow 0$) их скорости возрастают, устремляясь к бесконечным значениям.

§ 12.2. Граничные условия третьего рода с переменной во времени температурой среды

Математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности для пластины, цилиндра и шара при граничных условиях третьего рода с переменной во времени температурой среды имеет вид:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{a}{r^c} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^c \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right] \quad (\tau > 0; 0 \leq r \leq R);$$

$$T(r, 0) = T_0; \quad \partial T(0, \tau) / \partial r = 0;$$

$$\lambda \partial T(R, \tau) / \partial r + \alpha [T(R, \tau) - T_c(\tau)] = 0.$$
(12.38)

Допустим, что температура среды изменяется по линейному закону $T_c(\tau) = T_0 + b\tau$, где b — скорость изменения температуры среды, К/с.

С учетом обозначений вида (12.5) задача (12.38) в безразмерном виде примет вид

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho^c} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^c \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right] \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho \leq 1);$$
(12.39)

$$\Theta(\rho, 0) = 0;$$
(12.40)

$$\partial \Theta(0, Fo) / \partial \rho = 0;$$
(12.41)

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} + Bi [\Theta(1, Fo) - PdFo] = 0.$$
(12.42)

Разделяя процесс теплообмена на две стадии по времени путем введения фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$ и переходя к новой независимой переменной $\xi = 1 - \rho$, для первой стадии процесса получаем следующую математическую постановку задачи:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right]$$
(12.43)

$$(0 < Fo \leq Fo_1; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo));$$

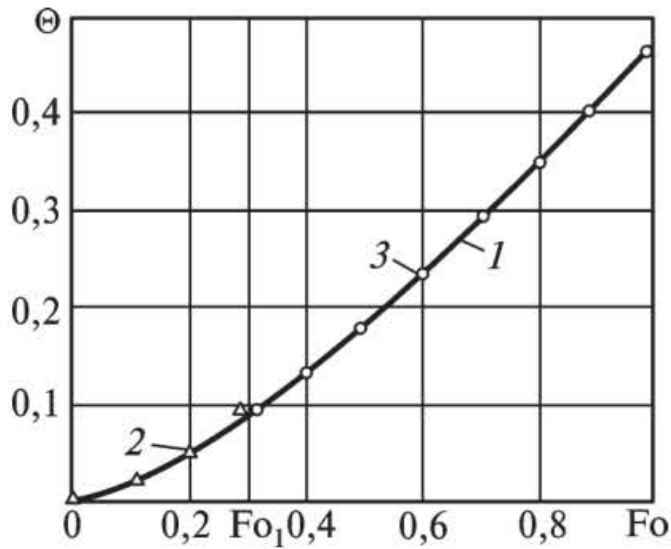
$$-\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} + Bi [\Theta(0, Fo) - PdFo] = 0;$$
(12.44)

$$\Theta(q_1, Fo) = 0;$$
(12.45)

$$\partial \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi = 0.$$
(12.46)

Решение задачи (12.43) — (12.46) принимаем в виде (11.9). После определения коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (12.44)—(12.46) соотношение (11.9) примет вид (при $c = 0$):

$$\Theta(\xi, Fo) = Bi Pd Fo (q_1 - 2\xi + \xi^2 / q_1) / (2 + Biq_1).$$
(12.47)



Р и с. 12.5. Изменение температуры в пластине ($\xi = 0$) при переменной во времени температуре среды ($Bi = 1$; $Pd = 1$);

1 — точное решение; 2 — по формуле (12.47); 3 — по формуле (12.57)

Определяя интеграл взвешенной невязки уравнения (12.43), относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dq_1}{dFo} = \frac{(2 + Biq_1)(6Fo - q_1^2)}{q_1 Fo(4 + Biq_1)}. \quad (12.48)$$

Начальное условие для (12.48) имеет вид $q_1(0) = 0$. Ввиду трудности непосредственного интегрирования нелинейного уравнения (12.48) найдем его приближенное аналитическое решение. Используя метод, изложенный в § 11.10, находим (при $Bi = 1$):

$$q_1(Fo) = 1,809Fo^{0,5}. \quad (12.49)$$

Положив $q_1(Fo_1) = 1$, получаем $Fo_1 = 0,3056$.

Соотношения (12.47), (12.49) представляют решение задачи (12.43)—(12.46) в первом приближении. Результаты расчетов по формуле (12.47) в сравнении с точным решением ($Bi = 1$, $Pd = 1$) даны на рис. 12.5.

Для получения решения во втором приближении найдем дополнительные граничные условия. Для этого продифференцируем граничное условие (12.44) по переменной Fo

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} + Bi \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = Bi Pd. \quad (12.50)$$

Продифференцируем уравнение (12.43) по переменной ξ и применим полученное соотношение к точке $\xi = 0$. С учетом найденного соотношения и уравнения (12.43) из (12.50) получаем первое дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} - (Bi + c) \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} - c(1 - Bi) \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = Bi Pd. \quad (12.51)$$

Второе и третье дополнительные граничные условия имеют вид (11.92), (11.94).

Во второй стадии процесса понятие фронта температурного возмущения теряет смысл, и в качестве дополнительной искомой функции принимаем температуру в центре пластины (цилиндра, шара) $\Theta(1, Fo) = q_2(Fo)$. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (Fo \geq Fo_1; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (12.52)$$

$$-\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi + Bi[\Theta(0, Fo) - Pd Fo] = 0; \quad (12.53)$$

$$\Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad (12.54)$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (12.55)$$

Начальным условием задачи (12.52)—(12.55) является соотношение (12.47) при $q_1(Fo_1) = 1$, т.е.

$$\Theta(\xi, Fo_1) = Bi Pd Fo (1-\xi)^2 / (2 + Bi). \quad (12.56)$$

Однако его специального выполнения не требуется ввиду полной идентичности краевых задач для первой и второй стадий процесса при $Fo = Fo_1$.

Решение задачи (12.52)—(12.55) находим в виде (11.114). После определения неизвестных коэффициентов b_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (12.53)—(12.55) соотношение (11.114) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = [Bi Pd Fo + 2q_2 + Bi \xi (q_2 - Pd Fo)(2 - \xi)] / (2 + Bi). \quad (12.57)$$

Найдем интеграл от уравнения (12.52) в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$:

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (12.58)$$

Подставляя (12.57) в (12.58), находим:

$$dq_2/dFo = aFo + bq_2 + c, \quad (12.59)$$

где $a = 6Bi Pd/\mu$; $b = -6Bi/\mu$; $c = -Bi Pd/\mu$; $\mu = -6 + 2Bi$.

Для решения уравнения (12.59) сделаем подстановку вида

$$z(Fo) = aFo + bq_2. \quad (12.60)$$

Тогда относительно $z(\text{Fo})$ приходим к следующему неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$dz/d\text{Fo} = bz + c_1, \quad (12.61)$$

где $c_1 = a + bc$.

Общее решение неоднородного уравнения (12.61) найдем в виде суммы двух функций

$$z(\text{Fo}) = \eta + \varphi, \quad (12.62)$$

где φ — частное решение неоднородного уравнения (12.61); η — общее решение однородного уравнения, т.е. уравнения вида

$$d\eta/d\text{Fo} = b\eta. \quad (12.63)$$

Общее решение уравнения (12.63) имеет вид

$$\eta = c_2 \exp(b\text{Fo}), \quad (12.64)$$

где c_2 — постоянная интегрирования.

Частное решение неоднородного уравнения (12.61) представим в виде константы $\varphi = c_3$. Подставляя его в (12.61), находим $c_3 = -c_1/b$.

Общее решение неоднородного уравнения (12.61) принимает вид

$$z(\text{Fo}) = c_2 \exp(b\text{Fo}) - c_1/b. \quad (12.65)$$

Подставляя (12.65) в (12.60), получаем

$$q_2(\text{Fo}) = [bc_2 \exp(b\text{Fo}) - c_1 - ab\text{Fo}]/b^2. \quad (12.66)$$

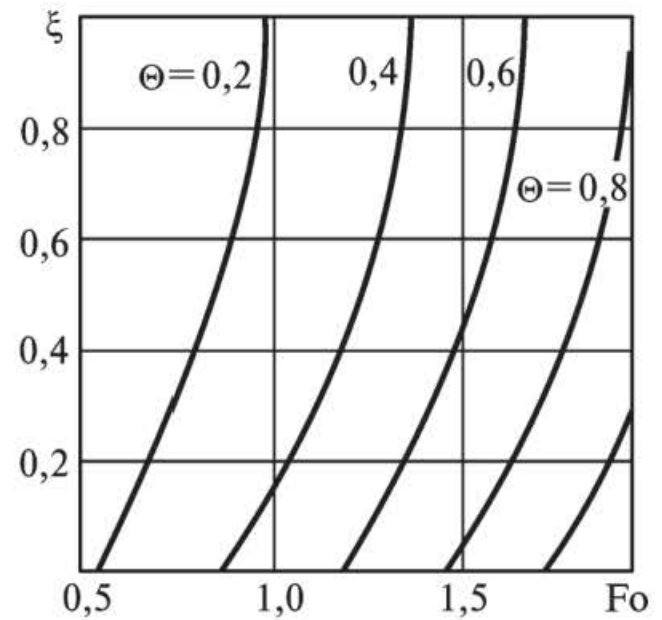
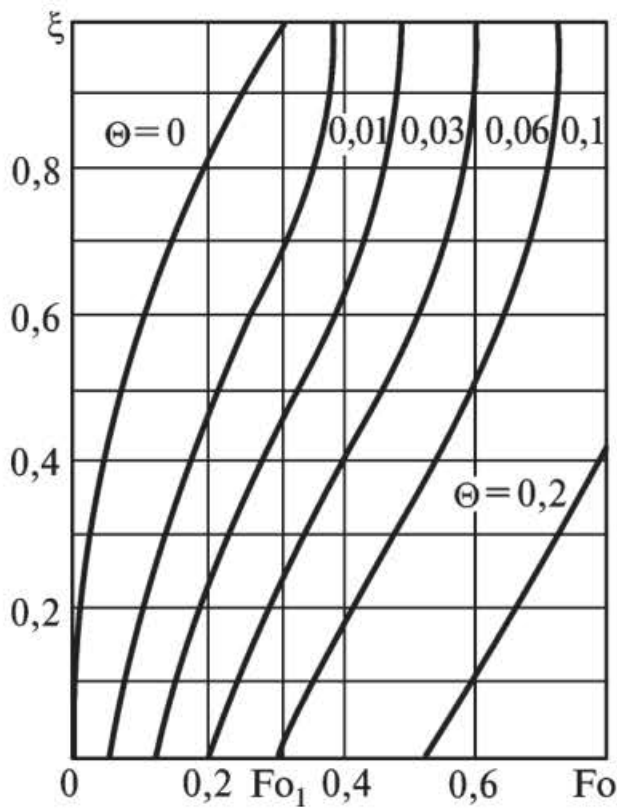
Постоянную интегрирования c_2 находим из начального условия $q_2(\text{Fo}_1) = 0$:

$$c_2 = \frac{(c_1 + ab\text{Fo}_1)}{b} \exp(-b\text{Fo}_1). \quad (12.67)$$

Подставляя (12.67) в (12.66), находим общее решение уравнения (12.59):

$$q_2(\text{Fo}) = \frac{1}{b^2} \{ (a + bc) \exp[-b(\text{Fo} - \text{Fo}_1)] + \\ + ab\text{Fo}_1 \exp[-b(\text{Fo} - \text{Fo}_1)] - a - bc - ab\text{Fo} \}. \quad (12.68)$$

Соотношения (12.57) и (12.68) определяют решение задачи (12.52)—(12.55) в первом приближении. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (12.57) точно удовлетворяет граничным условиям (12.53)—(12.55), начальному условию (12.56), соотношению (12.58) или, что то же самое, осредненному



Р и с. 12.6. Распределение изотерм в пластине при граничных условиях третьего рода с переменной во времени температурой среды ($Bi = 1$; $Pd = 1$)

уравнению (12.52). Результаты расчетов температуры по формуле (12.57) в сравнении с точным решением даны на рис. 12.5.

Дополнительные граничные условия для получения решения во втором приближении второй стадии процесса имеют вид (12.51), (11.59), (11.61).

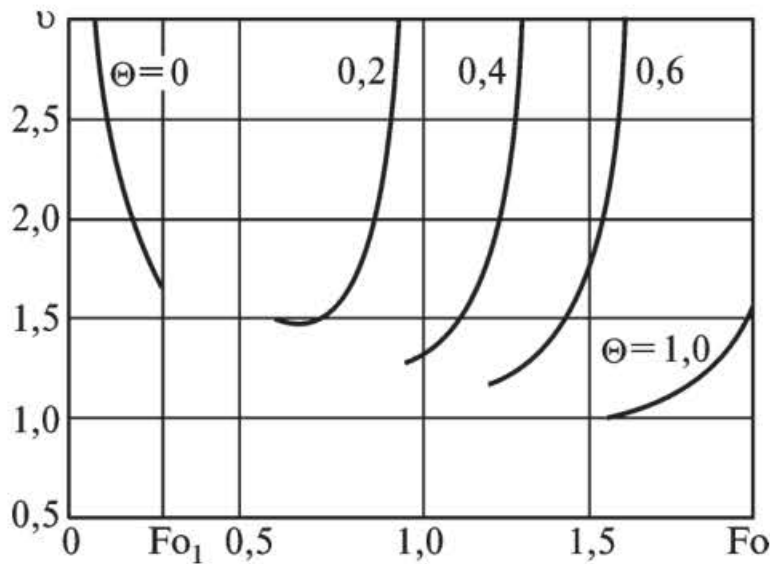
Выражая координату ξ из соотношений (12.47), (12.57), для определения изотерм в первой и второй стадиях процесса соответственно получаем следующие формулы:

$$\xi(\Theta, Fo) = \frac{1}{2BiFo} \left[2kBi\sqrt{Fo^3} - 2\sqrt{\frac{\Theta}{Pd} k^2 Bi Fo^2 + 2k \frac{\Theta Bi^2}{Pd} \sqrt{Fo^3}} \right]; \quad (12.69)$$

$$\xi(\Theta, Fo) = \frac{Bi q_2 - Bi Pd Fo + \sqrt{(q_2 - Pd Fo)(Bi^2 q_2 + 2Bi q_2 - \Theta Bi - 2\Theta)}}{(q_2 - Pd Fo) Bi}, \quad (12.70)$$

где $k = 1,809$.

Анализ распределения изотерм показывает, что каждая изотерма появляется на поверхности пластины в строго определенный момент времени. Причем для изотерм $0 \leq \Theta \leq 1,2$ отрезки времени, отделяющие появление каждой последующей (через равные разности температур $\Delta\Theta = \text{const}$), оказываются различными (рис. 12.6). Для $1,2 \leq \Theta \leq \infty$ появление каждой последующей изотермы происходит через равные отрезки времени.



Р и с. 12.7. Распределение скоростей движения изотерм при переменной во времени температуре среды ($Bi = 1$; $Pd = 1$)

Определяя первые производные по времени от соотношений (12.69), (12.70), находим формулы для расчета скоростей движения изотерм соответственно для первой и второй стадий процесса:

$$v = \frac{k}{2\sqrt{Fo}} \frac{\sqrt{\frac{\Theta k Bi}{Pd} \sqrt{Fo}^3 (k Bi \sqrt{Fo} + 2) + \frac{\Theta}{Pd}}}{\sqrt{\frac{\Theta k}{Pd} Bi \sqrt{Fo}^3 (k Bi \sqrt{Fo} + 2)}}; \quad (12.71)$$

$$v = \frac{8\sqrt{3}Fo_1 \Omega(Fo) + (6Fo_1 \Omega(Fo) - 9\Omega(Fo))(Fo - \Theta) - 12\Omega(Fo) + 12}{4\sqrt{I(Fo)(2Fo_1 \Omega(Fo) - 3\Omega(Fo) + 3 - 2Fo + 2\Theta)I(Fo)}}, \quad (12.72)$$

где $I(Fo) = (2Fo_1 \Omega(Fo) - 3\Omega(Fo) + 3)$; $\Omega(Fo) = \exp[3(Fo_1 - Fo)/4]$; $Pd = 1$; $Bi = 1$.

Анализ распределения скоростей движения изотерм позволяет заключить, что для $\Theta \geq 1,0$ начальные скорости изотерм становятся одинаковыми и равными $v_0 = 1,0$ (рис. 12.7).

§ 12.3. Граничные условия третьего рода с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи

При протекании любого естественного процесса теплового взаимодействия наряду с изменением температурного состояния тел происходит также изменение и граничных условий теплообмена. Особенно это характерно для коэффициента теплоотдачи α . Его переменность в процессе нагрева (охлаждения) тел в условиях конвекции является твердо установленным экспериментальным фактом. В связи с этим допущение о его постоянстве во многих практических расчетах

может быть весьма грубым приближением к реальным физическим процессам теплообмена.

Покажем, что на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий можно получать решения задач теплообмена с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи. В качестве конкретного примера рассмотрим задачу теплопроводности для бесконечной пластины при граничных условиях третьего рода в случае линейной зависимости коэффициента теплоотдачи от времени:

$$\alpha(\tau) = \alpha_0(1 + \beta\tau),$$

где α_0 — начальное значение коэффициента теплоотдачи; β — коэффициент.

Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} \quad (\tau > 0; 0 \leq r \leq R); \\ T(r, 0) &= T_0; \quad \partial T(0, \tau) / \partial r = 0; \\ \lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} &+ \alpha_0(1 + \beta\tau)[T(R, \tau) - T_c] = 0. \end{aligned} \quad (12.73)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\Theta = (T - T_0) / (T_c - T_0); \quad \rho = r/R; \quad \text{Fo} = a\tau/R^2.$$

С учетом принятых обозначений задача (12.73) примет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho^2} \quad (\text{Fo} > 0; 0 \leq \rho \leq 1); \quad (12.74)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 0; \quad (12.75)$$

$$\partial \Theta(0, \text{Fo}) / \partial \rho = 0; \quad (12.76)$$

$$\partial \Theta(1, \text{Fo}) / \partial \rho + \text{Bi}(1 + \text{PdFo})[\Theta(1, \text{Fo}) - 1] = 0, \quad (12.77)$$

где $\text{Pd} = \beta R^2/a$; $\text{Bi} = \alpha_0 R/\lambda$.

Используя понятие фронта температурного возмущения $q_1(\text{Fo})$, разделим процесс теплообмена на две стадии по времени. После введения новой независимой переменной $\xi = 1 - \rho$ для первой стадии процесса приходим к следующей математической постановке задачи:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} \quad (0 < \text{Fo} \leq \text{Fo}_1; 0 \leq \xi \leq q_1(\text{Fo})); \quad (12.78)$$

$$\partial\Theta(0, Fo)/\partial\xi - Bi(1 + PdFo)[\Theta(0, Fo) - 1] = 0; \quad (12.79)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (12.80)$$

$$\partial\Theta(q_1, Fo)/\partial\xi = 0. \quad (12.81)$$

Решение задачи (12.78)—(12.81) найдем в виде полинома (11.9). После определения из граничных условий (12.79)—(12.81) неизвестных коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2$) соотношение (11.9) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{Bi(1 + PdFo)(q_1 - 2\xi + \xi^2 / q_1)}{Bi q_1 (1 + PdFo) + 2}. \quad (12.82)$$

Найдем интеграл от уравнения (12.78) в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = q_1(Fo)$, т.е. осредним это уравнение в пределах толщины прогретого слоя:

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^{q_1} \frac{\partial^2\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi^2} d\xi. \quad (12.83)$$

Подставляя (12.82) в (12.83), после определения интегралов относительно функции $q_1(Fo)$ имеем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$q_1 q_1' [Bi q_1 (1 + 2PdFo + Pd^2 Fo^2) + 4(PdFo + 1)] + 2Pd q_1^2 - \quad (12.84) \\ - 6Bi q_1 (1 + 2PdFo + Pd^2 Fo^2) - 12(1 + PdFo) = 0$$

при начальном условии $q_1(0) = 0$.

Ввиду нелинейности нахождение точного решения уравнения (12.84) весьма затруднительно. Используя метод решения таких уравнений, изложенный в § 11.10, находим (при $Bi = 1$; $Pd = 1$):

$$q_1(Fo) = 2,6079 Fo^{0,511}. \quad (12.85)$$

Положив $q_1(Fo) = 1$, получаем $Fo_1 = 0,1532$.

Соотношения (12.82), (12.85) определяют решение задачи (12.78)—(12.81) в первом приближении (при $Bi = 1$; $Pd = 1$).

На рис. 12.8 даны результаты расчета перемещения фронта температурного возмущения по формуле (12.85). Результаты расчетов при $Bi = 1$ и $Pd = 0$ показали, что график $q_1(Fo)$ полностью совпадает с аналогичным графиком для случая граничных условий третьего рода с постоянным во времени коэффициентом теплоотдачи.

При $Pd \rightarrow \infty$ ($\alpha \rightarrow \infty$) теплообмен протекает при граничных условиях первого рода с температурой стенки, равной температуре среды.

Р и с. 12.8. Перемещение фронта температурного возмущения по координате ξ во времени Fo при $Bi = 1$:

$Pd \rightarrow \infty$ (1); $Pd = 0$ (2); $Pd = 1$ (3)

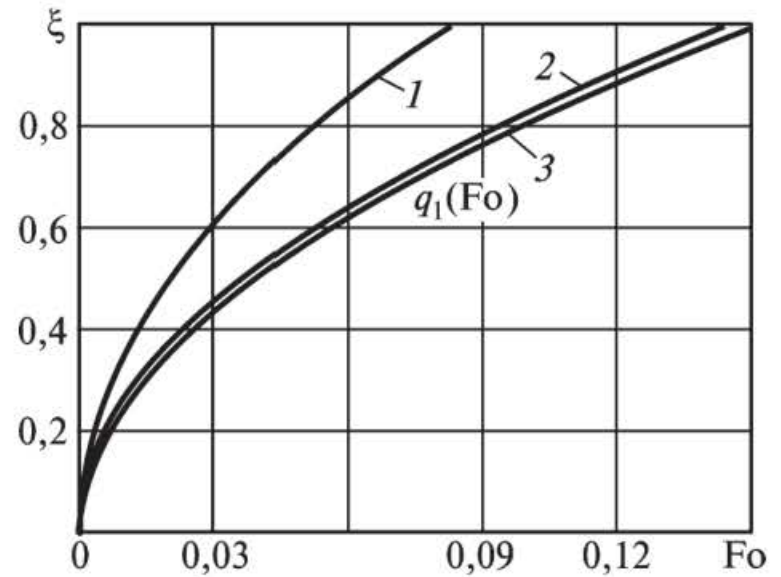


График $q_1(Fo)$ в данном случае совпадает с аналогичным графиком для граничных условий первого рода.

Получение решения во втором приближении связано с нахождением дополнительных граничных условий. Для определения первого из них продифференцируем граничное условие (12.79) по переменной Fo :

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} - Bi \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} - BiPd [\Theta(0, Fo) - 1] - BiPdFo \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (12.86)$$

Продифференцируем уравнение (12.78) по переменной ξ применительно к точке $\xi = 0$:

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3}. \quad (12.87)$$

Подставляя (12.78), (12.87) в (12.86), получаем первое дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} - Bi \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} (1 + PdFo) - BiPd [\Theta(0, Fo) - 1] = 0. \quad (12.88)$$

Второе и третье дополнительные граничные условия определяем так же, как и соответствующие граничные условия для пластины при граничных условиях первого рода, которые имеют вид (11.18), (11.23).

Используя основные и дополнительные граничные условия, можно определить уже шесть коэффициентов ряда (11.9) и получить решение задачи (12.78)—(12.81) во втором приближении.

Во второй стадии процесса в качестве дополнительной искомой функции принимаем температуру в центре пластины $\Theta(1, Fo) = q_2(Fo)$. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (Fo \geq Fo_1; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (12.89)$$

$$\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi - Bi(1 + PdFo)[\Theta(0, Fo) - 1] = 0; \quad (12.90)$$

$$\Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad \partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (12.91)$$

Начальным условием в задаче (12.89)—(12.91) является решение задачи (12.78)—(12.81) вида (12.82) в конце первой стадии процесса, т.е. при $Fo = Fo_1$. Соотношение (12.82) ввиду того, что при $Fo = Fo_1$ $q_1(Fo_1) = 1$, принимает вид:

$$\Theta(\xi, Fo_1) = \frac{Bi(1 + PdFo_1)(1 - 2\xi + \xi^2)}{Bi(1 + PdFo_1) + 2}. \quad (12.92)$$

Решение задачи (12.89)—(12.91) принимаем в виде (11.114). Неизвестные коэффициенты b_k в первом приближении находим из граничных условий (12.90)—(12.91). После определения b_k ($k = 0, 1, 2$) соотношение (11.114) принимает вид:

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{Bi[1 + PdFo_1 + (q_2 - 1)(1 + PdFo_1)(2\xi - \xi^2)] + 2q_2}{2 + Bi(1 + PdFo)}. \quad (12.93)$$

Для определения неизвестной функции $q_2(Fo)$ составляем интеграл взвешенной невязки уравнения (12.89):

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (12.94)$$

Подставляя (12.93) в (12.94), после определения интегралов относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} & q_2' [6 + Bi(5 + Bi) + BiPdFo(5 + 2Bi + BiPdFo)] - \\ & - q_2 [Bi(Pd - 6 - 3Bi) - 3BiPdFo(2Bi + 2 + BiPdFo)] + \\ & + Bi(Pd - 6 - 3Bi) - 3BiPdFo(2Bi + 2 + BiPdFo) = 0. \end{aligned} \quad (12.95)$$

Решение уравнения (12.95) находим в виде суммы двух функций

$$q_2(Fo) = \eta + \varphi, \quad (12.96)$$

где η — частное решение неоднородного уравнения (12.95); φ — общее решение соответствующего однородного уравнения, т.е. при

$$Bi(Pd - 6 - 3Bi) - 3BiPdFo(2Bi + 2 + BiPdFo) = 0.$$

Частное решение неоднородного уравнения принимаем в виде $\eta = C$, где константу C находим из выполнения уравнения (12.95). В данном случае будем иметь $C = 1$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$\varphi = C_1 \exp \left\{ \ln \frac{2 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo})}{3 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo})} + \frac{9 \ln[3 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo})]}{\text{BiPd}} - 3\text{Fo} \right\}, \quad (12.97)$$

где C_1 — константа интегрирования, определяемая из начального условия $q_2(\text{Fo}_1) = 0$:

$$C_1 = -\exp \left\{ 3\text{Fo}_1 - \ln \frac{2 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo}_1)}{3 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo}_1)} - \frac{9 \ln[3 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo}_1)]}{\text{BiPd}} \right\}. \quad (12.98)$$

Соотношение (12.96) после определения частного решения неоднородного и общего решения соответствующего однородного уравнения принимает вид:

$$q_2(\text{Fo}) = 1 - \exp \left[\ln \frac{3 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo}_1)}{3 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo})} - \ln \frac{2 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo}_1)}{2 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo})} - \frac{9}{\text{BiPd}} \ln \frac{3 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo}_1)}{3 + \text{Bi}(1 + \text{Pd Fo})} - 3(\text{Fo} - \text{Fo}_1) \right]. \quad (12.99)$$

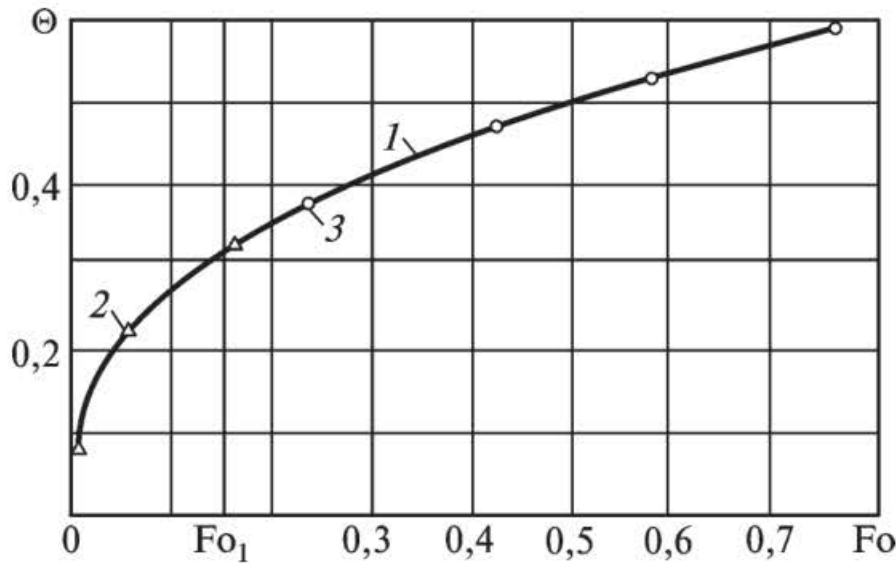
В частном случае при $\text{Pd} = 0$ $q_2(\text{Fo})$ не определено. Переходя к пределу при $\text{Pd} \rightarrow 0$, соотношение (12.99) приводим к виду

$$q_2(\text{Fo}) = \exp \frac{3\text{BiFo}}{3 + \text{Bi}} - \exp \frac{3\text{BiFo}_1}{3 + \text{Bi}} \exp \left(-\frac{3\text{BiFo}}{3 + \text{Bi}} \right). \quad (12.100)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (12.93) с учетом (12.99) точно удовлетворяет граничным условиям (12.90), (12.91) и начальному условию (12.92), а соотношения (12.99), (12.100) удовлетворяют начальному условию $q_2(0) = 0$. Уравнение (12.89), как это следует из (12.94), в данном случае удовлетворяется лишь в среднем.

Результаты расчетов по формуле (12.93) при $\text{Pd} = 0$, $\text{Bi} = 1$ в сравнении с точным решением представлены на рис. 12.9.

Дополнительные граничные условия для получения решения во втором приближении в данном случае имеют вид (12.88), (11.59), (11.61).



Р и с. 12.9. Изменение температуры в пластине при $Bi = 1, Pd = 0$:

1 — точное решение; 2 — по формуле (12.82) (первая стадия); 3 — по формуле (12.93) (вторая стадия)

Выражая из (12.82) переменную ξ через Θ и Fo , для определения изотерм в первой стадии процесса получаем следующую формулу ($Bi = 1; Pd = 1$):

$$\xi(\Theta, Fo) = 0,5 \sqrt{2k(\sqrt{Fo^3} + \sqrt{Fo}) - 2\Theta k v} / (Fo + 1), \quad (12.101)$$

где $k = 2,6079$; $v = kFo^3 + 2\sqrt{Fo^3} + 2kFo^2 + 2\sqrt{Fo} + kFo$.

Выражая координату ξ из соотношения (12.93), получаем формулу для определения изотерм во второй стадии процесса:

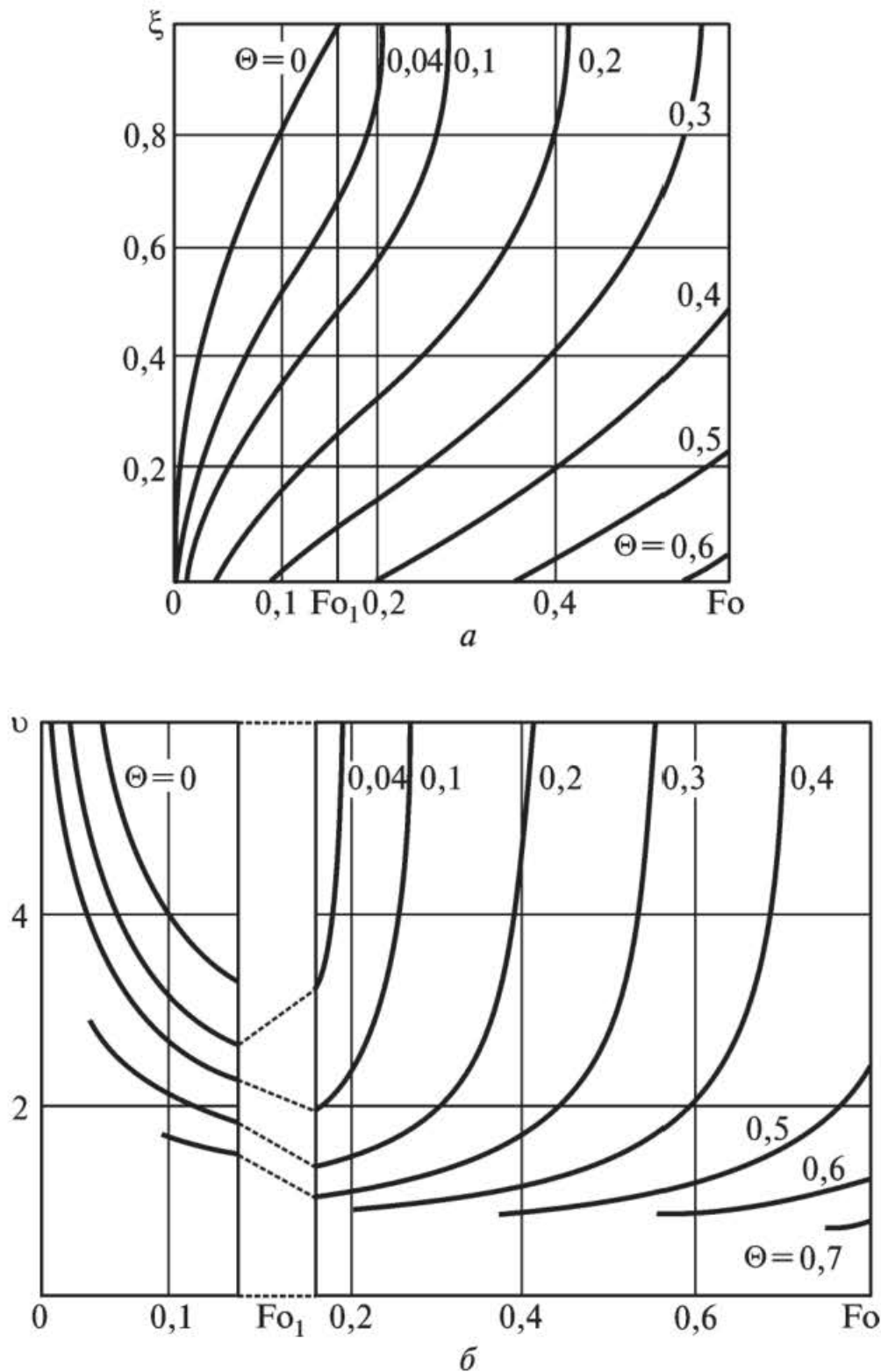
$$\xi(\Theta, Fo) = 1 + \frac{\sqrt{(3 + 4Fo + Fo^2)(q_2^2 - q_2\Theta - q_2 + \Theta)}}{(1 + Fo)(q_2 - 1)}. \quad (12.102)$$

Графики распределения изотерм даны на рис. 12.10, а. Их анализ позволяет заключить, что каждая изотерма появляется на поверхности пластины в строго определенный момент времени, имея при этом некоторую начальную скорость (рис. 12.10, б). Причем для изотерм малого потенциала $0 \leq \Theta < 0,1$ наблюдаем высокие начальные скорости, устремляющиеся к бесконечности при $\Theta \rightarrow 0$. При увеличении Θ они уменьшаются и начиная с $\Theta = 0,4$ незначительно отличаются друг от друга, стабилизируясь в пределах $0,7 \leq v_0 \leq 0,8$. Скорости изотерм при их приближении к значению координаты $\xi = 1$ устремляются к бесконечности.

Определяя первую производную по времени от соотношения (12.101), получаем формулу для определения скоростей движения изотерм в первой стадии процесса:

$$v(Fo, \Theta) = (Fo - 2D^2 + 1) / [4D(Fo + 1)^2], \quad (12.103)$$

где $D = \sqrt{2k(\sqrt{Fo^3} + \sqrt{Fo}) - 2\Theta k v}$.



Р и с. 12.10. Распределение изотерм (а) и их скоростей (б) в пластине при переменном во времени коэффициенте теплоотдачи (первое приближение, $Fo_1 = 0,1528$; $Bi = 1$; $Pd = 1$)

Формулу для определения скоростей изотерм во второй стадии найдем дифференцированием соотношения (12.102):

$$v(\Theta, Fo) = -0,5 \frac{2q_2(q_2 - 1 - \Theta) + q_2'(1 - \Theta)(Fo^2 + 4Fo + 3) + 2\Theta}{(1 + Fo)(q_2 - 1)\sqrt{(3 + 4Fo + Fo^2)(q_2 - 1)(q_2 - \Theta)}}. \quad (12.104)$$

Графики скоростей движения изотерм, найденных по формулам (12.103), (12.104), даны на рис. 12.10, б.

§ 12.4. Переменные во времени граничные условия второго рода

Найдем решение нестационарной задачи теплопроводности при переменных во времени граничных условиях второго рода в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho^c} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^c \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right) \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho \leq 1); \quad (12.105)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 0; \quad (12.106)$$

$$\partial \Theta(0, Fo) / \partial \rho = 0; \quad (12.107)$$

$$-\partial \Theta(1, Fo) / \partial \rho + Ki(Fo) = 0, \quad (12.108)$$

где $\Theta(\rho, Fo) = (T - T_0) / (T_c - T_0)$; $Ki(Fo) = v(Fo)R / [\lambda(T_c - T_0)]$; $v(Fo)$ — тепловой поток.

В первой стадии процесса после введения функции $q_1(Fo)$, характеризующей глубину проникновения температурного возмущения, и перехода к новой независимой переменной $\xi = 1 - \rho$ задачу (12.105)–(12.108) приводим к виду:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (12.109)$$

$$(0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo));$$

$$-\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = Ki(Fo); \quad (12.110)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (12.111)$$

$$\partial \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (12.112)$$

Найдем интеграл от уравнения (12.109) в пределах толщины термического слоя:

$$\int_0^{q_1} (1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^{q_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (12.113)$$

Определяя интеграл в правой части соотношения (12.113), находим

$$\int_0^{q_1} (1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = (1-q_1)^c \frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (12.114)$$

Учитывая (12.110) и (12.112), соотношение (12.114) примет вид

$$\int_0^{q_1} (1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = Ki(Fo). \quad (12.115)$$

Представим искомый температурный профиль в виде (11.9). Это соотношение после определения неизвестных коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (12.110)—(12.112) примет вид:

$$\Theta(\xi, Fo) = Ki(Fo)(0,5q_1 - \xi + 0,5\xi^2/q_1). \quad (12.116)$$

Найдем решение задачи для случая, когда тепловой поток — линейная функция времени:

$$Ki(Fo) = Ki_0 Fo, \quad (12.117)$$

где Ki_0 — начальная величина теплового потока.

Подставляя (12.116) в (12.115), относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение ($c = 0$):

$$dq_1^2/dFo^2 + q_1^2/Fo = 6. \quad (12.118)$$

Интегрируя уравнение (12.118), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(Fo) = \sqrt{3Fo}. \quad (12.119)$$

Соотношения (12.116), (12.119) определяют решение задачи (12.109)—(12.112) в первом приближении.

Для повышения точности решения необходимо привлекать дополнительные граничные условия. Дифференцируя граничное условие (12.110) по переменной Fo , а уравнение (12.109) по переменной ξ и сравнивая получающиеся соотношения, применительно к точке $\xi = 0$ получаем первое дополнительное граничное условие:

$$-\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} + c \left[\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} \right] = \frac{dKi(Fo)}{dFo}.$$

Второе и третье дополнительные граничные условия в данном случае имеют вид (11.18), (11.23).

Для получения решения задачи (12.109)—(12.112) во втором приближении подставим (11.9) (ограничиваясь шестью членами ряда) во все основные дополнительные граничные условия. Отсюда для определения неизвестных коэффициентов $a_k(q_1)$ ($k = 0, 5$) получим систему шести алгебраических линейных уравнений. Ее решение:

$$a_0 = -q_1 [Dq_1 - Ki(36 - 8cq_1)] / 20D_1; \quad a_1 = -Ki;$$

$$a_2 = 0,5(12Ki + Dq_1) / (q_1 D_1); \quad a_3 = -(D - 2cKi) / (q_1 D_1);$$

$$a_4 = [3Dq_1 - Ki(12 + 8cq_1)] / (4q_1^3 D_1); \quad a_5 = -[Dq_1 - 3Ki(2 + cq_1)] / (5q_1^4 D_1),$$

где $D = [cKi + dKi(Fo)/dFo]q_1$; $D_1 = cq_1 + 6$.

С учетом найденных значений коэффициентов $a_k(q_1)$ соотношение (11.9) примет вид ($c = 0$):

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = & -\frac{q_1(A_1 - 36Ki)}{120} - Ki\xi + \frac{(12Ki + A_1)}{12q_1} \xi^2 - \frac{A_1}{6} \frac{\xi^3}{q_1^2} + \\ & + \frac{(A_1 - 4Ki)}{8q_1^3} \xi^4 - \frac{(A_1 - 6Ki)}{30q_1^4} \xi^5, \end{aligned} \quad (12.120)$$

где $A_1 = q_1^2 dKi/dFo$.

Математическая постановка задачи для второй стадии процесса имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (12.121)$$

$$(Fo \geq Fo_1; \quad 0 \leq \xi \leq 1);$$

$$-\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = Ki(Fo); \quad \Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} = 0. \quad (12.122)$$

Начальным условием задачи (12.121), (12.122) является распределение температуры в конце первой стадии процесса в первом приближении (см. формулу (12.116) при $q_1(Fo_1) = 1$):

$$\Theta(\xi, Fo_1) = Ki(Fo)(0,5 - \xi + 0,5\xi^2). \quad (12.123)$$

Интеграл теплового баланса по аналогии с соотношением (12.115) во второй стадии процесса:

$$\int_0^1 (1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = Ki(Fo). \quad (12.124)$$

Решение задачи принимаем в виде (11.114). Это соотношение после выполнения граничных условий (12.122) примет вид:

$$\Theta(\xi, Fo) = q_2(Fo) + Ki(Fo)(0,5 - \xi + 0,5\xi^2). \quad (12.125)$$

Подставляя (12.125) в (12.124), относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению ($c = 0$):

$$\frac{dq_2(Fo)}{dFo} + \frac{1}{6} \frac{dKi(Fo)}{dFo} - Ki(Fo) = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение, при начальном условии $q_2(Fo_1) = 0$ получаем

$$q_2(Fo) = \int Ki(Fo) dFo - \int Ki(Fo) dFo|_{Fo= Fo_1} - \frac{1}{6} [Ki(Fo) - Ki(Fo_1)]. \quad (12.126)$$

Соотношения (12.125), (12.126) определяют решение задачи (12.121), (12.122) в первом приближении второй стадии процесса.

При линейной зависимости теплового потока от времени вида (12.117) соотношение (12.126) приводим к виду

$$q_2(Fo) = 0,5Ki_0 \left[(Fo^2 - Fo_1^2) - \frac{1}{3}(Fo - Fo_1) \right].$$

С целью повышения точности найдем решение задачи (12.121), (12.122) во втором приближении с привлечением дополнительных граничных условий. Для их нахождения продифференцируем граничные условия (12.122) по переменной Fo :

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = \frac{dKi}{dFo}; \quad \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{dq_2}{dFo}; \quad \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = 0. \quad (12.127)$$

Дифференцируя уравнение (12.121) по переменной ξ (при $c = 0$) и сравнивая полученное соотношение с первым и третьим соотношениями из (12.127), находим следующие два дополнительных граничных условия:

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} = \frac{dKi(Fo)}{dFo}; \quad \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3} = 0. \quad (12.128)$$

Сравнивая уравнение (12.121) и второе соотношение из (12.127), находим третье дополнительное граничное условие (при $c = 0$):

$$\partial^2 \Theta(1, Fo) / \partial \xi^2 = dq_2(Fo) / dFo. \quad (12.129)$$

Подставляя (11.114), ограничиваясь шестью членами ряда, во все основные и дополнительные граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов $b_k(q_2)$ ($k = 0, 5$) получаем следующую систему шести алгебраических линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (b_1 + 2b_2\xi + 3b_3\xi^2 + 4b_4\xi^3 + 5b_5\xi^4)_{\xi=0} &= -\text{Ki}(\text{Fo}); \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 &= q_2(\text{Fo}); \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5 &= 0; \\ (6b_3 + 24b_4\xi + 60b_5\xi^2)_{\xi=0} &= d\text{Ki}(\text{Fo})/d\text{Fo}; \\ 6b_3 + 24b_4 + 60b_5 &= 0; \\ 2b_2 + 6b_3 + 12b_4 + 20b_5 &= dq_2/d\text{Fo}. \end{aligned} \right\} \quad (12.130)$$

Из первого и четвертого уравнений системы (12.130) следует, что $b_1 = -\text{Ki}(\text{Fo}); b_3 = \frac{1}{6} \frac{d\text{Ki}}{d\text{Fo}}$. Формулы для других коэффициентов:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{120} \frac{d\text{Ki}}{d\text{Fo}} + \frac{1}{5} \frac{dq_2}{d\text{Fo}} - \frac{7}{10} \text{Ki} + q_2; & b_2 &= \text{Ki} - \frac{1}{12} \frac{d\text{Ki}}{d\text{Fo}} - \frac{1}{2} \frac{dq_2}{d\text{Fo}}; \\ b_4 &= \frac{1}{2} \frac{dq_2}{d\text{Fo}} - \frac{1}{8} \frac{d\text{Ki}}{d\text{Fo}} - \frac{1}{2} \text{Ki}; & b_5 &= 0,5\text{Ki} + \frac{1}{30} \frac{d\text{Ki}}{d\text{Fo}} - 0,2 \frac{dq_2}{d\text{Fo}}. \end{aligned}$$

Подставляя (11.114) (с учетом найденных значений коэффициентов b_k) в интеграл теплового баланса (12.124), находим

$$\frac{1}{10} \frac{d^2 q_2}{d\text{Fo}^2} + \frac{dq_2}{d\text{Fo}} = \text{Ki}(\text{Fo}) - \frac{1}{360} \frac{d^2 \text{Ki}(\text{Fo})}{d\text{Fo}^2} - \frac{1}{15} \frac{d\text{Ki}(\text{Fo})}{d\text{Fo}}. \quad (12.131)$$

При линейной зависимости теплового потока от времени вида (12.117) уравнение (12.131) примет вид:

$$\frac{1}{10} \frac{d^2 q_2}{d\text{Fo}^2} + \frac{dq_2}{d\text{Fo}} - \text{Ki}_0 \left(\text{Fo} - \frac{1}{15} \right) = 0. \quad (12.132)$$

Преобразуем уравнение (12.132) путем введения новой переменной

$$r(\text{Fo}) = dq_2/d\text{Fo}. \quad (12.133)$$

Уравнение (12.132) с учетом (12.133) приводим к виду

$$\frac{dr(\text{Fo})}{d\text{Fo}} + 10r(\text{Fo}) - 10\text{Ki}_0 \left(\text{Fo} - \frac{1}{15} \right) = 0. \quad (12.134)$$

Интегрируя уравнение (12.134), находим

$$r(\text{Fo}) = \frac{1}{6} (6\text{Ki}_0 \text{Fo} \eta - \text{Ki}_0 \eta + 6C_1) / \eta, \quad (12.135)$$

где C_1 — константа интегрирования; $\eta = \exp(10\text{Fo})$.

Подставляя (12.135) в (12.133) и интегрируя полученное уравнение, получаем

$$q_2(\text{Fo}) = \frac{1}{2} \text{Ki}_0 \text{Fo} \left(\text{Fo} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{10} C_1 \exp(-10\text{Fo}) + C_2, \quad (12.136)$$

где C_2 — константа интегрирования.

Константы интегрирования C_1 и C_2 находим из граничных условий

$$q_2(\text{Fo}_1) = 0; \quad dq_2(\text{Fo}_1)/d\text{Fo} = 0; \quad (12.137)$$

$$C_1 = -\frac{\text{Ki}_0 (6\text{Fo}_1 - 1)}{6 \exp(-10\text{Fo}_1)}; \quad C_2 = \text{Ki}_0 \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{15} \text{Fo}_1 - \frac{1}{2} \text{Fo}_1^2 \right). \quad (12.138)$$

Решение задачи с учетом (12.136) и найденных значений постоянных интегрирования C_1 и C_2 принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(\xi, \text{Fo})}{\text{Ki}_0} = & \text{Fo} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \text{Fo} \right) - \frac{1}{24} - \frac{1}{60} \mu - \text{Fo} \xi + \frac{\xi^2 \text{Fo}}{2} + \frac{\xi^2}{12} \mu + \\ & + \frac{\xi^3}{6} - \frac{5\xi^4}{24} - \frac{\xi^4}{12} \mu + \frac{\xi^5}{15} + \frac{\xi^5}{30} \mu, \end{aligned} \quad (12.139)$$

где $\mu = \exp[-10(\text{Fo} - \text{Fo}_1)]$.

§ 12.5. Переменные во времени внутренние источники теплоты

Найдем решение задачи нестационарной теплопроводности при граничных условиях первого рода с переменными во времени внутренними источниками теплоты в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{\rho^c} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^c \frac{\partial \Theta(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} \right] + \text{Po}(\text{Fo}) \quad (\text{Fo} > 0; \quad 0 \leq \rho \leq 1); \quad (12.140)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 0; \quad \frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \rho} = 0; \quad \Theta(1, \text{Fo}) = 1, \quad (12.141)$$

где $\text{Po}(\text{Fo})$ — критерий Померанцева, $\text{Po}(\text{Fo}) = \omega(\text{Fo})\delta^2 / [(T_c - T_0)\lambda]$; $\omega(\text{Fo})$ — мощность внутренних источников теплоты.

После разделения процесса теплопроводности на две стадии по времени и перехода к новой независимой переменной $\xi = 1 - \rho$ задачу (12.140), (12.141) для первой стадии процесса приводим к виду:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-\xi)^c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^c \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] + Po(Fo) \quad (12.142)$$

$$(Fo > 0; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo));$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad (12.143)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = Q(Fo); \quad (12.144)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} = 0, \quad (12.145)$$

где соотношения (12.144), (12.145) представляют граничные условия на фронте температурного возмущения. Первое из них означает, что температура на фронте теплового возмущения определяется лишь действием теплового источника, где $Q(Fo)$ находим по формуле

$$Q(Fo) = \int_0^{Fo} Po(Fo) dFo. \quad (12.146)$$

Условие (12.145) означает отсутствие теплового потока за пределами фронта температурного возмущения.

Дифференцируя соотношение (12.144) по времени, с учетом (12.146) находим

$$\partial \Theta(q_1, Fo) / \partial Fo = Po(Fo). \quad (12.147)$$

С учетом (12.147) уравнение (12.142) можно переписать в виде (при $c = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial Fo} [\Theta(\xi, Fo) - \Theta(q_1, Fo)] = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}. \quad (12.148)$$

Потребуем, чтобы искомое решение удовлетворяло не исходному уравнению (12.148), а осредненному по толщине термического слоя:

$$\int_0^{q_1(Fo)} \frac{\partial}{\partial Fo} [\Theta(\xi, Fo) - \Theta(q_1, Fo)] d\xi = \int_0^{q_1(Fo)} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (12.149)$$

Соотношение (12.149) с учетом (12.144) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \left[\int_0^{q_1(Fo)} \Theta(\xi, Fo) d\xi - \int_0^{q_1(Fo)} Q(Fo) d\xi \right] = \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \Big|_0^{q_1(Fo)}.$$

Учитывая соотношение (12.145), приходим к следующему интегральному условию (интегралу теплового баланса):

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \left[\int_0^{q_1(Fo)} \Theta(\xi, Fo) d\xi - Q(Fo) q_1(Fo) \right] = - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (12.150)$$

Представим искомый температурный профиль в виде полинома (11.9). Это соотношение после определения из граничных условий (12.143)—(12.145) неизвестных коэффициентов a_k принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \frac{2[Q(Fo) - 1]}{q_1} \xi - \frac{Q(Fo) - 1}{q_1^2} \xi^2. \quad (12.151)$$

Найдем решение задачи для случая линейной зависимости источника теплоты от времени:

$$Po(Fo) = Po_0(1 + \beta Fo), \quad (12.152)$$

где Po_0 — начальное значение критерия Померанцева; β — коэффициент.

С учетом (12.152) соотношение (12.146) примет вид

$$Q(Fo) = Po_0 Fo(1 + 0,5\beta Fo). \quad (12.153)$$

Подставляя (12.151) в интеграл теплового баланса (12.150), находим

$$q_1 \frac{dq_1}{dFo} (2Fo + \beta Fo^2 - 2) + 2q_1^2 (1 + \beta Fo) = 6Fo(2 + \beta Fo) - 12. \quad (12.154)$$

Ввиду нелинейности получение точного аналитического решения уравнения (12.154) затруднительно. Приближенное аналитическое решение, следуя методике, изложенной в § 11.10, приводим к виду

$$q_1(Fo) = 4,0959 Fo^{0,5435}.$$

Для нахождения решения задачи (12.142)—(12.145) во втором приближении найдем дополнительные граничные условия. Дифференцируя граничное условие (12.143) по переменной Fo и сравнивая полученное соотношение с уравнением (12.142), применительно к точке $\xi = 0$ получаем первое дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} - c \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{d \xi} + Po(Fo) = 0.$$

Для нахождения второго дополнительного условия продифференцируем граничное условие (12.144) по переменной Fo , считая $\Theta(\xi, Fo)$ (при $\xi = q_1(Fo)$) сложной функцией, т.е.

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial Fo} + \frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} \frac{dq_1}{dFo} = \frac{\partial Q(Fo)}{\partial Fo}.$$

Учитывая (12.145) и (12.146), последнее соотношение приводим к виду

$$\partial \Theta(q_1, Fo) / dFo = Po(Fo).$$

Сравнивая полученное соотношение с уравнением (12.142), с учетом (12.145) для $\xi = q_1(Fo)$ получаем второе дополнительное граничное условие

$$\partial^2 \Theta(q_1, Fo) / d\xi^2 = 0.$$

Третье дополнительное граничное условие в данном случае совпадает с граничным условием (11.23).

После определения неизвестных a_k ($k = \overline{0, 5}$) из основных и дополнительных граничных условий и подстановки (11.9) в интеграл теплового баланса (12.150) относительно неизвестной функции времени $q_1(Fo)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. После его интегрирования при начальном условии $q_1(0) = 0$ процесс получения решения задачи (12.142)—(12.145) во втором приближении первой стадии процесса можно считать законченным.

§ 12.6. Переменное начальное условие

Используя метод дополнительных граничных условий, найдем решение задачи теплопроводности при линейном распределении начальной температуры по толщине пластины. Наклон линии начальной температуры примем таким, чтобы при $x = 0$ ($\tau = 0$) она имела максимальное значение, равное T_0 , а при $x = \delta$ — минимальное, равное $T_{ст}$ ($T_0 > T_{ст}$), где $T_{ст}$ — температура стенки при $x = 0$ и $x = \delta$ (граничное условие первого рода).

Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0; 0 \leq x \leq \delta); \quad (12.155)$$

$$T(x, 0) = T_0 - x(T_0 - T_{\text{ст}})/\delta; \quad (12.156)$$

$$T(0, \tau) = T(\delta, \tau) = T_{\text{ст}}, \quad (12.157)$$

где T_0 — начальная температура; $T_{\text{ст}}$ — температура стенки; δ — толщина пластины.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\Theta = (T - T_{\text{ст}})/(T_0 - T_{\text{ст}}); \quad \xi = x/\delta; \quad \text{Fo} = a\tau/\delta^2.$$

С учетом принятых обозначений задачу (12.155)—(12.157) приводим к виду

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} \quad (\text{Fo} > 0; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (12.158)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1 - \xi; \quad (12.159)$$

$$\Theta(0, \text{Fo}) = 0; \quad (12.160)$$

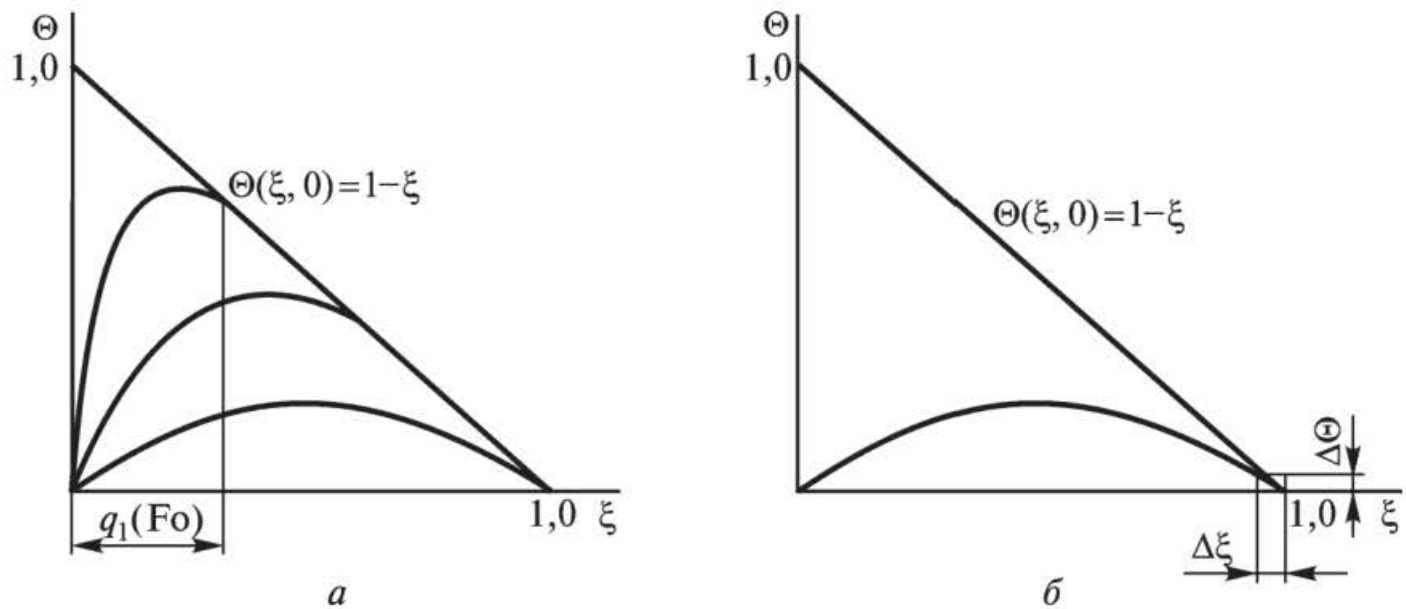
$$\Theta(1, \text{Fo}) = 0. \quad (12.161)$$

Введем движущуюся во времени границу, разделяющую исходную область $0 \leq \xi \leq 1$ на две подобласти $0 \leq \xi \leq q_1(\text{Fo})$ и $q_1(\text{Fo}) \leq \xi \leq 1$, где $q_1(\text{Fo})$ — функция, определяющая продвижение границы раздела по координате ξ во времени. При этом в области, находящейся за пределами фронта температурного возмущения, сохраняется начальная температура (рис. 12.11, *a*). Первая стадия процесса заканчивается при достижении движущейся границей положения $q_1(\text{Fo}) = 1$.

Ввиду того, что в рассмотрение введена новая функция $q_1(\text{Fo})$, необходимо добавить условия, выполняющиеся на фронте температурного возмущения. Находим их из начального условия (12.159):

$$\Theta(q_1, \text{Fo}) = 1 - q_1; \quad \partial \Theta(q_1, \text{Fo})/\partial \xi = -1. \quad (12.162)$$

Первое из условий (12.162) означает равенство температуры на фронте температурного возмущения начальной температуре тела. Из второго условия (12.162) следует, что линия температурного профиля является касательной к линии начальной температуры $\Theta(\xi, 0) = 1 - \xi$ (см. рис. 12.11, *a*).



Р и с. 12.11. Расчетная схема теплообмена:

a — первая стадия; *b* — вторая стадия

Математическая постановка задачи для первой стадии процесса имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (0 < Fo \leq Fo_1; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo)); \quad (12.163)$$

$$\Theta(0, Fo) = 0; \quad \Theta(q_1, Fo) = 1 - q_1; \quad \frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} = -1. \quad (12.164)$$

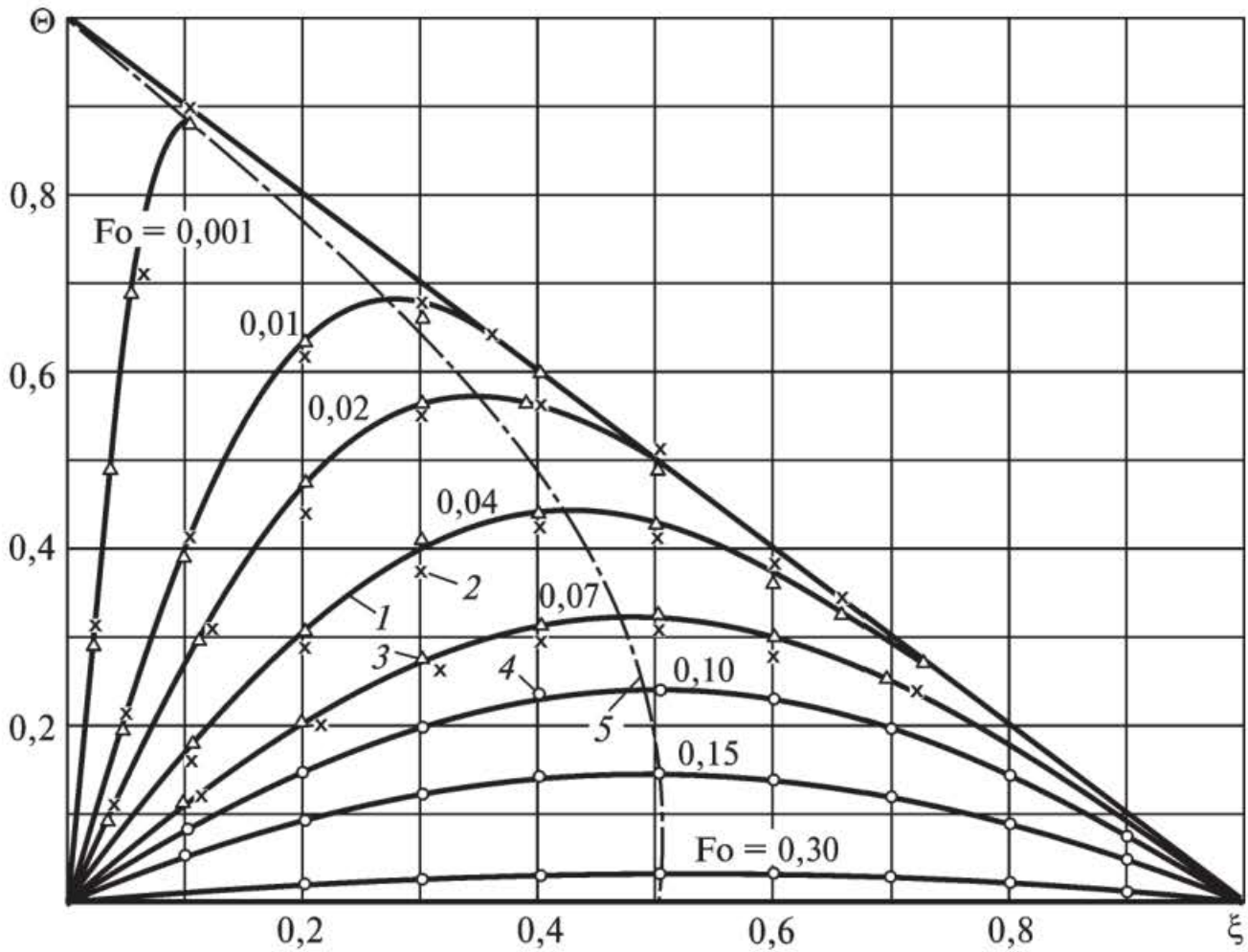
Отметим, что в задаче (12.163), (12.164) отсутствует начальное условие вида (12.159). Это связано с тем, что за пределами фронта температурного возмущения она вообще не определена. В ней отсутствует также граничное условие (12.161), так как оно не влияет на процесс теплообмена в первой его стадии.

Потребуем, чтобы искомое решение задачи удовлетворяло не первоначальному уравнению (12.163), а осредненному по толщине термического слоя. Для этого возьмем интеграл от уравнения (12.163) по координате ξ в пределах от нуля до $q_1(Fo)$. Отсюда получим следующее интегральное условие (интеграл теплового баланса):

$$\int_0^{q_1(Fo)} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^{q_1(Fo)} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (12.165)$$

Определяя интеграл в правой части соотношения (12.165), с учетом (12.164) находим

$$\int_0^{q_1(Fo)} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = -1 - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (12.166)$$



Р и с. 12.12. Распределение температуры в пластине при переменном начальном условии:

1 — метод прогонки; 2 — по формуле (12.167); 3 — по формуле (12.171); 4 — по формуле (12.196); 5 — линия максимальной температуры

Решение задачи (12.163), (12.164) находим в виде (11.9). Это соотношение после определения неизвестных коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (12.164) примет вид:

$$\Theta(\xi, Fo) = \xi(2/q_1 - \xi/q_1^2 - 1). \quad (12.167)$$

Подставляя (12.167) в интеграл теплового баланса (12.166), находим

$$q_1 dq_1 = 6dFo. \quad (12.168)$$

Интегрируя уравнение (12.168), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(Fo) = \sqrt{12Fo}. \quad (12.169)$$

Положив в (12.169) $q_1(Fo_1) = 1$, найдем $Fo_1 = 0,0833333$.

Результаты расчетов по формуле (12.167) в сравнении с расчетом по методу конечных разностей (метод прогонки) представлены на рис. 12.12. Их анализ позволяет заключить, что максимальное расхождение результатов не превышает 4 %.

Для получения решения во втором приближении необходимо вводить дополнительные граничные условия, которые в данном случае имеют вид:

$$\partial^2 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^2 = 0; \quad \partial^2 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^2 = 0; \quad \partial^3 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^3 = 0. \quad (12.170)$$

Подставляя (11.9) во все основные и дополнительные граничные условия, относительно коэффициентов a_k ($k = \overline{0,5}$) получаем систему шести алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы коэффициенты a_k в (11.9), будем иметь

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \xi - \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{q_1}\right) \left(1 - \frac{\xi}{q_1}\right)^4. \quad (12.171)$$

Подставляя (12.171) в интеграл теплового баланса (12.166), находим

$$q_1 dq_1 = 10 dFo. \quad (12.172)$$

Интегрируя уравнение (12.172), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(Fo) = \sqrt{20Fo}. \quad (12.173)$$

Полагая $q_1(Fo_1) = 1$, находим время окончания первой стадии процесса во втором приближении $Fo = Fo_1 = 0,05$.

Соотношения (12.171), (12.173) определяют решение задачи (12.163), (12.164) во втором приближении первой стадии процесса. Сравнивая результаты расчетов по формуле (12.171) с методом конечных разностей (см. рис. 12.12), видим, что расхождение результатов составляет не более 1 %.

Кривая 5 на рис. 12.12 обозначает линию, в каждой точке которой для соответствующего числа Fo температура имеет максимальное значение. Отметим, что симметрия температурного поля относительно кривой 5 не наблюдается.

Дополнительные граничные условия для получения решения в третьем приближении имеют вид:

$$\partial^4 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^4 = 0; \quad \partial^4 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^4 = 0; \quad \partial^5 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^5 = 0. \quad (12.174)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ в данном случае будет

$$5q_1 dq_1 = 72 dFo. \quad (12.175)$$

Его решение

$$q_1(Fo) = 12\sqrt{5Fo} / 5. \quad (12.176)$$

Время окончания первой стадии процесса составляет $Fo_1 = 0,03472$.

Решение в третьем приближении приводим к виду

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^8 A_k (\xi / q_1)^k, \quad (12.177)$$

где $A_0 = A_2 = A_4 = 0$; $A_1 = 3$; $A_3 = -7$; $A_5 = 21$; $A_6 = -28$; $A_7 = 15$; $A_8 = -3$.

Дополнительные граничные условия в четвертом приближении имеют вид:

$$\partial^6 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^6 = 0; \quad \partial^6 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^6 = 0; \quad \partial^7 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^7 = 0. \quad (12.178)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $q_1(Fo)$:

$$7q_1 dq_1 = 132 dFo. \quad (12.179)$$

Его решение

$$q_1(Fo) = 2\sqrt{462Fo} / 7. \quad (12.180)$$

При $q_1(Fo_1) = 1$ находим $Fo_1 = 0,026515$.

Аналогично можно записать дополнительные граничные условия и для других приближений. В частности, были также получены решения для пятого, десятого и четырнадцатого приближений. Формулы для $q_1(Fo)$ в этих приближениях имеют вид

$$q_1^5(Fo) = 2\sqrt{105Fo} / 3; \quad q_1^{10}(Fo) = 2\sqrt{8262Fo} / 19; \quad q_1^{14}(Fo) = 2\sqrt{287Fo} / 3.$$

Времена окончания первой стадии процесса соответственно будут $Fo_1^5 = 0,0214286$; $Fo_1^{10} = 0,010992$; $Fo_1^{14} = 0,00784$.

Анализируя полученные результаты, можно заключить, что уравнения относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ (12.168), (12.172), (12.175), (12.179) полностью совпадают с уравнениями, полученными для нее в случае симметричной пластины при постоянном начальном условии, т.е. с уравнениями (11.12), (11.25), (11.37), (11.38). Следовательно, закономерность перемещения фронта температурного возмущения по координате ξ во времени Fo не зависит от вида начального условия и определяется лишь граничными условиями краевой задачи. В связи с чем все результаты решений по определению функции $q_1(Fo)$, приведенные в § 11.1, могут быть применены и для решения задачи (12.163), (12.164).

Результаты расчетов по формуле (12.177) (третье приближение) позволяют заключить, что их отличие от результатов метода конечных разностей находится в пределах 0,5 %. Дальнейшее сравнение с

методом конечных разностей теряет смысл ввиду необходимости оценки и его точности.

Вторая стадия теплового процесса, соответствующая времени $Fo \geq Fo_1$, характеризуется изменением температуры уже по всему сечению пластины вплоть до наступления стационарного режима. На этой стадии понятие термического слоя теряет смысл, и в качестве дополнительной неизвестной функции принимаем скалярную величину градиента температуры на поверхности пластины при $\xi = 1$ (см. рис. 12.11, б)

$$\partial\Theta(1, Fo)/\partial\xi = q_2(Fo). \quad (12.181)$$

Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi^2} \quad (Fo \geq Fo_1; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (12.182)$$

$$\Theta(0, Fo) = 0; \quad \Theta(1, Fo) = 0; \quad \partial\Theta(1, Fo)/\partial\xi = q_2(Fo). \quad (12.183)$$

Задачи (12.163), (12.164) и (12.182), (12.183) при $Fo = Fo_1$ ввиду того, что $q_1(Fo_1) = 1$ и $q_2(Fo_1) = -1$, полностью совпадают. Следовательно, начальное условие задачи (12.182), (12.183), определяемое из соотношения (12.167), при $Fo = Fo_1$:

$$\Theta(\xi, Fo_1) = (1 - \xi)\xi. \quad (12.184)$$

Интеграл теплового баланса для второй стадии теплового процесса имеет вид:

$$\int_0^1 \frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \frac{\partial\Theta(1, Fo)}{\partial\xi} - \frac{\partial\Theta(0, Fo)}{\partial\xi} = q_2(Fo) - \frac{\partial\Theta(0, Fo)}{\partial\xi}. \quad (12.185)$$

Решение задачи (12.182), (12.183) принимаем в виде (11.114). После определения неизвестных коэффициентов b_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (12.183) соотношение (11.114) примет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = q_2\xi(\xi - 1). \quad (12.186)$$

Подставляя (12.186) в интеграл теплового баланса (12.185), находим

$$dq_2/dFo = -12q_2. \quad (12.187)$$

Интегрируя уравнение (12.187), получаем

$$q_2(Fo) = C \exp(-12Fo), \quad (12.188)$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия

$$q_2(\text{Fo}_1) = \partial\Theta(1, \text{Fo}_1)/\partial\xi = -1. \quad (12.189)$$

Соотношение (12.189) находим из (12.181) ввиду того, что $\Delta\Theta = -\Delta\xi$ (см. рис. 12.11, б).

После нахождения постоянной интегрирования соотношение (12.188) принимает вид

$$q_2(\text{Fo}) = -\exp[-12(\text{Fo} - \text{Fo}_1)]. \quad (12.190)$$

Соотношения (12.186) и (12.190) определяют решение задачи (12.182), (12.183) в первом приближении. Расхождение температур, найденных по формуле (12.186), с результатами расчетов по методу конечных разностей составляет около 8 %.

Для повышения точности найдем решение задачи (12.182), (12.183) во втором приближении с привлечением дополнительных граничных условий, которые в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \partial^2\Theta(0, \text{Fo})/\partial\xi^2 = 0; \quad \partial^2\Theta(1, \text{Fo})/\partial\xi^2 = 0; \\ \partial^3\Theta(1, \text{Fo})/\partial\xi^3 = dq_2/d\text{Fo}. \end{aligned} \quad (12.191)$$

Подставляя (11.114), ограничиваясь шестью членами ряда, в граничные условия (12.183), (12.191), относительно неизвестных коэффициентов b_k ($k = 0, 5$) получаем систему шести алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы коэффициенты b_k в (11.114), имеем

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \frac{1}{2}(3\xi^5 - 10\xi^4 + 10\xi^3 - 3\xi)q_2 + \frac{1}{24}(3\xi^5 - 8\xi^4 + 6\xi^3 - \xi)\frac{dq_2}{d\text{Fo}}. \quad (12.192)$$

Подставляя (12.192) в интеграл теплового баланса (12.185), находим

$$\frac{d^2q_2}{d\text{Fo}^2} + 70\frac{dq_2}{d\text{Fo}} + 600q_2 = 0. \quad (12.193)$$

Граничные условия для уравнения (12.193) имеют вид

$$q_2(\text{Fo}_1) = -1; \quad dq_2(\text{Fo}_1)/d\text{Fo} = 0. \quad (12.194)$$

Интегрируя уравнение (12.193), находим

$$q_2(\text{Fo}) = 0,2 \exp[60(\text{Fo}_1 - \text{Fo})] - 1,2 \exp[10(\text{Fo}_1 - \text{Fo})]. \quad (12.195)$$

Подставляя (12.195) в (12.192), получаем окончательное выражение для определения температуры во втором приближении второй стадии процесса:

$$\Theta(\xi, Fo) = (1,3 \xi - 3 \xi^3 + 2 \xi^4 - 0,3 \xi^5) \exp[10 (Fo_1 - Fo)] - (12.196)$$

$$- (0,8 \xi - 4 \xi^3 + 5 \xi^4 - 1,8 \xi^5) \exp[60 (Fo_1 - Fo)],$$

где $Fo_1 = 0,05$.

Результаты расчетов по формуле (12.196) в сравнении с методом конечных разностей представлены на рис. 12.13. Их анализ позволяет заключить, что найденные по формуле (12.196) значения температур практически совпадают с температурами, полученными по методу прогонки, в связи с чем дальнейшее сопоставление с методом конечных разностей теряет смысл.

Для доказательства сходимости получаемых во второй стадии решений с точными найдем решение в третьем приближении. Дополнительные граничные условия в этом случае имеют вид

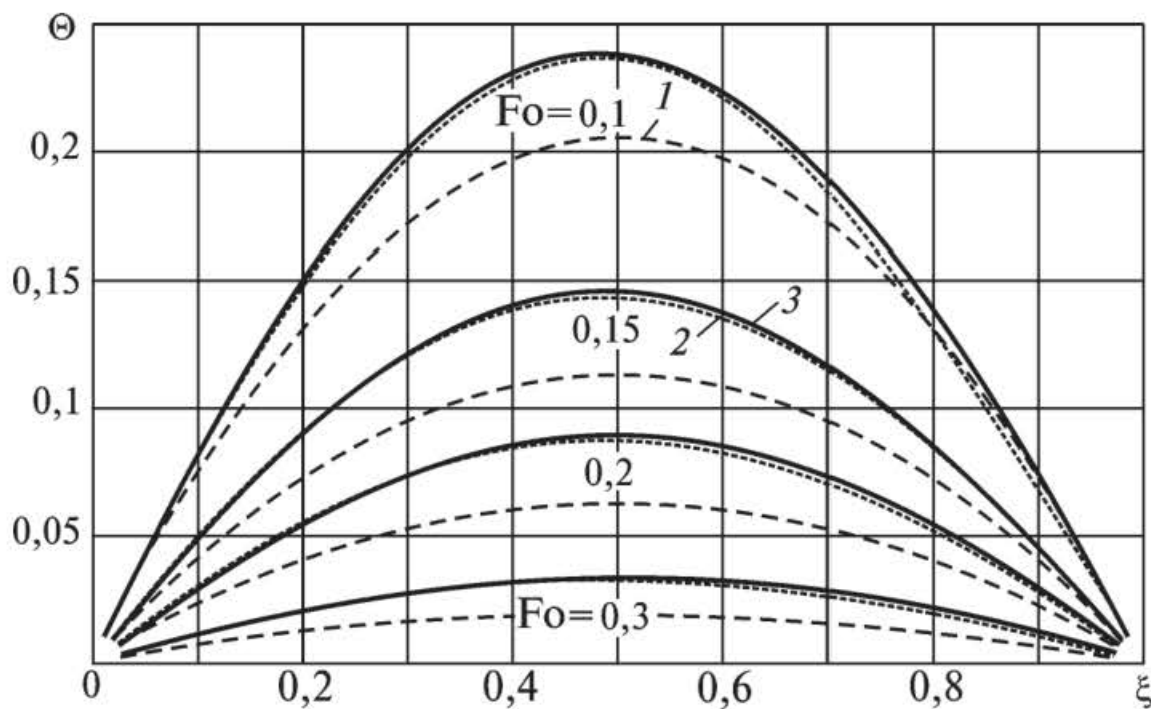
$$\partial^4 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^4 = 0; \quad \partial^4 \Theta(1, Fo) / \partial \xi^4 = 0; \quad \partial^5 \Theta(1, Fo) / \partial \xi^5 = d^2 q_2 / dFo^2.$$

Соотношение (11.114) после определения неизвестных коэффициентов $b_k(q_2) (k = 0, 8)$:

$$\Theta(\xi, Fo) = (-2\xi + 7\xi^3 - 24\xi^5 + 28\xi^6 - 15\xi^7 + 3\xi^8) q_2 +$$

$$+ \left(-\frac{3}{28}\xi + \frac{7}{12}\xi^3 - \frac{9}{4}\xi^5 + \frac{19}{6}\xi^6 - \frac{7}{4}\xi^7 + \frac{5}{14}\xi^8 \right) \frac{dq_2}{dFo} + (12.197)$$

$$+ \left(-\frac{1}{1680}\xi + \frac{1}{240}\xi^3 - \frac{1}{48}\xi^5 + \frac{1}{30}\xi^6 - \frac{1}{48}\xi^7 + \frac{1}{240}\xi^8 \right) \frac{d^2 q_2}{dFo^2}.$$



Р и с. 12.13. Изменение температуры во второй стадии процесса:
1 — по формуле (12.186); 2 — по формуле (12.197); 3 — по формуле (12.196)

Подставляя (12.197) в (12.185), относительно неизвестной функции $q_2(\text{Fo})$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{24192} \frac{d^3 q_2}{d\text{Fo}^3} + \frac{101}{10080} \frac{d^2 q_2}{d\text{Fo}^2} + \frac{67}{168} \frac{dq_2}{d\text{Fo}} + 3q_2 = 0. \quad (12.198)$$

Граничные условия для уравнения (12.198) имеют вид:

$$q_2(\text{Fo}_1) = -1; \quad \frac{dq_2(\text{Fo}_1)}{d\text{Fo}} = 0; \quad \frac{d^2 q_2(\text{Fo}_1)}{d\text{Fo}^2} = 0. \quad (12.199)$$

Интегрируя уравнение (12.198), находим

$$q_2(\text{Fo}) = C_1 \exp(-\lambda_1 \text{Fo}) + C_2 \exp(-\lambda_2 \text{Fo}) + C_3 \exp(-\lambda_3 \text{Fo}), \quad (12.200)$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования; $\lambda_1 = 9,87050275$; $\lambda_2 = 37,74930546$; $\lambda_3 = 194,78019179$.

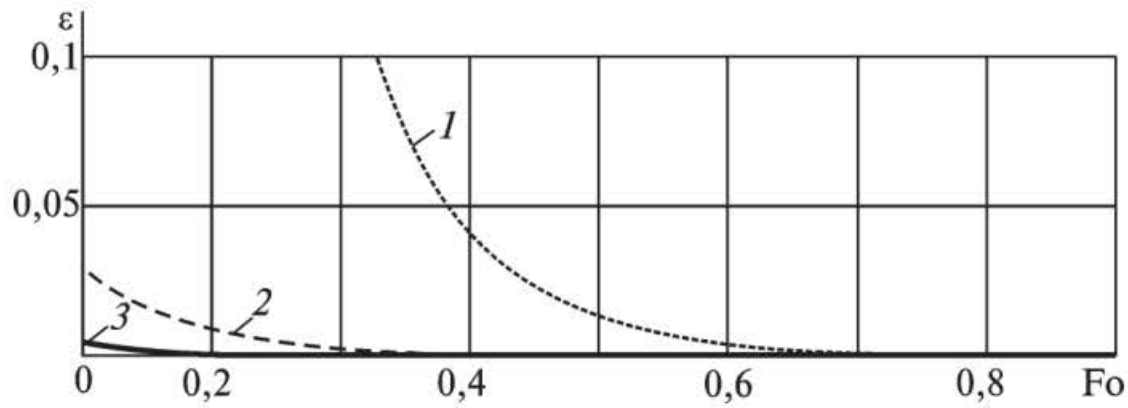
Отметим, что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные числа краевой задачи (12.182), (12.183). С увеличением числа приближений собственные числа с низшими номерами всякий раз уточняются. Например, в первом приближении $\lambda_1 = 12$, во втором $\lambda_1 = 10$; $\lambda_2 = 60$ (см. ранее соотношения (12.190), (12.196)), в третьем $\lambda_1 = 9,8705$.

Формулы для постоянных интегрирования, определяемых из граничных условий (12.199), имеют вид:

$$C_1 = -1,426329 \exp(\lambda_1 \text{Fo}_1); \quad C_2 = 1,426329 \exp(\lambda_2 \text{Fo}_1); \\ C_3 = -1,426329 \exp(\lambda_3 \text{Fo}_1),$$

где $\text{Fo}_1 = 0,03472$ (найдена в третьем приближении первой стадии процесса).

Соотношения (12.197), (12.200) представляют решение задачи (12.182), (12.183) в третьем приближении. Результаты расчетов по формуле (12.197) в сравнении с первым (формула (12.186)) и вторым (формула (12.196)) приближениями даны на рис. 12.13. Анализируя полученные результаты, можно отметить существенное повышение точности во втором приближении по сравнению с первым. Отличие результатов третьего приближения по сравнению со вторым уже менее заметное (в пределах 1 %), что свидетельствует о быстрой сходимости процесса. Результаты расчетов невязки ε уравнения (12.182) подтверждают данное заключение (рис. 12.14). И в частности, во всем диапазоне времени второй стадии процесса $\text{Fo} \geq \text{Fo}_1$ невязка в третьем приближении практически равна нулю. В связи с чем проблема использования последующих приближений во второй стадии процесса



Р и с. 12.14. Изменение невязки ε уравнения (12.182) в зависимости от времени Fo для $\xi = 0,01$:

1 — по формуле (12.186); 2 — по формуле (12.196); 3 — по формуле (12.197)

(в отличие от первой) не является актуальной, хотя она вполне может быть решена.

Для построения графиков перемещения изотерм по координате ξ во времени выразим ξ из соотношений (12.167) и (12.186) как функцию температуры $\Theta(\xi, Fo)$ и времени Fo . Соотношение (12.167) относительно переменной ξ представляет полином второй степени, который имеет два действительных корня (ξ_1 и ξ_2), используемых для построения изотерм в первой стадии процесса:

$$\xi_{1,2}(\Theta, Fo) = 2\sqrt{3Fo} - 6Fo \pm 2\sqrt{3Fo - 6\sqrt{3Fo^2} + 9Fo^2 - 3Fo\Theta}. \quad (12.201)$$

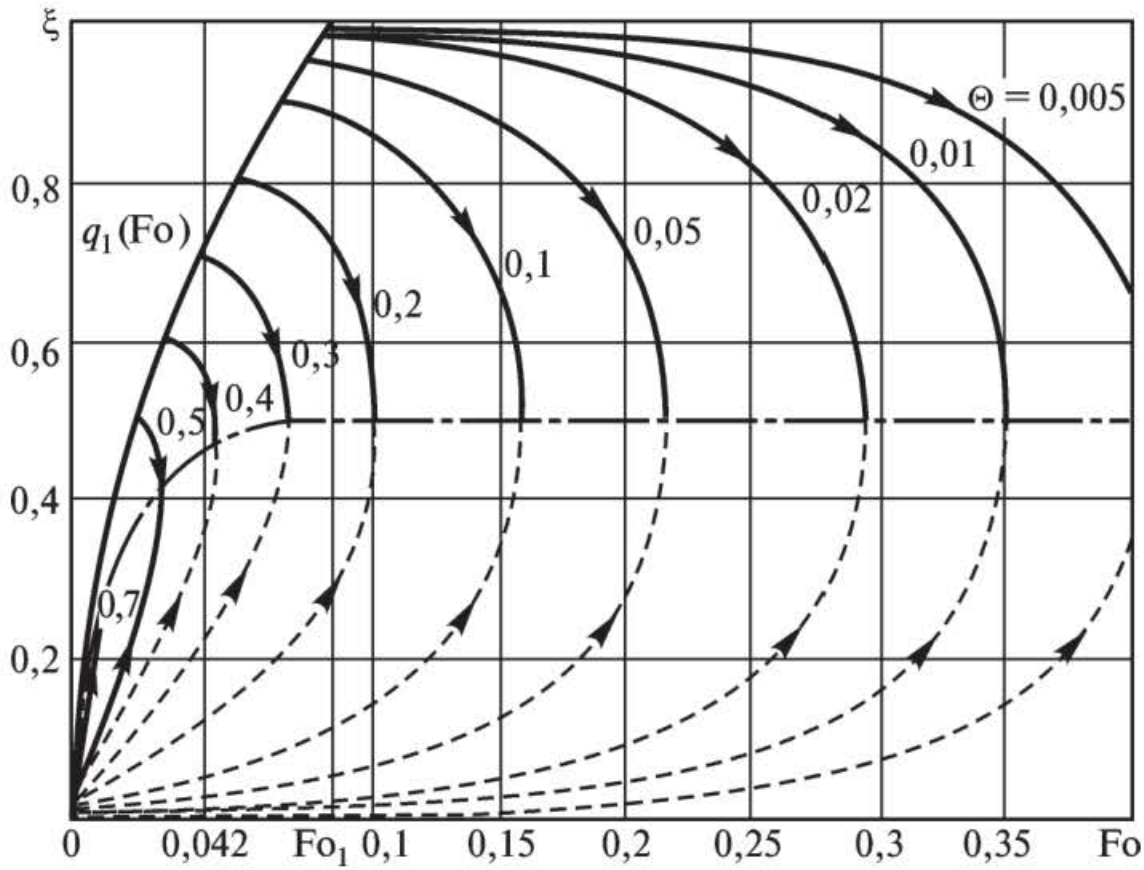
Выражая ξ из формулы (12.186), получаем следующее соотношение для определения изотерм во второй стадии процесса:

$$\xi(\Theta, Fo) = [E - \sqrt{E^2 - 4E\Theta}] / 2E, \quad (12.202)$$

где $E = \exp[12(Fo_1 - Fo)]$.

На рис. 12.15 для некоторых конкретных $\Theta(\xi, Fo) = \text{const}$ приведены графики изотерм в координатах ξ, Fo . Здесь же дана кривая перемещения фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$.

Анализ полученных результатов позволяет заключить, что изотермы одного и того же потенциала возникают как в точке $\xi = 0$, так и на линии перемещения фронта температурного возмущения и движутся в противоположных направлениях. Так, изотермы, возникающие в точке $\xi = 0$, движутся в направлении оси ξ , а появляющиеся на линии $q_1(Fo)$, — противоположно ей. Изотермы одного и того же потенциала соединяются на линии, где выполняется условие максимума температур (см. рис. 12.12, 12.15). Изотермы на линии $q_1(Fo)$ возникают с некоторым запаздыванием во времени. Они появляются в тот



Р и с. 12.15. Перемещение изотерм по координате ξ во времени Fo :

----- линия максимальных температур; - - - - - изотермы, движущиеся в направлении оси ξ ;
 — — — — — изотермы, движущиеся противоположно направлению оси ξ

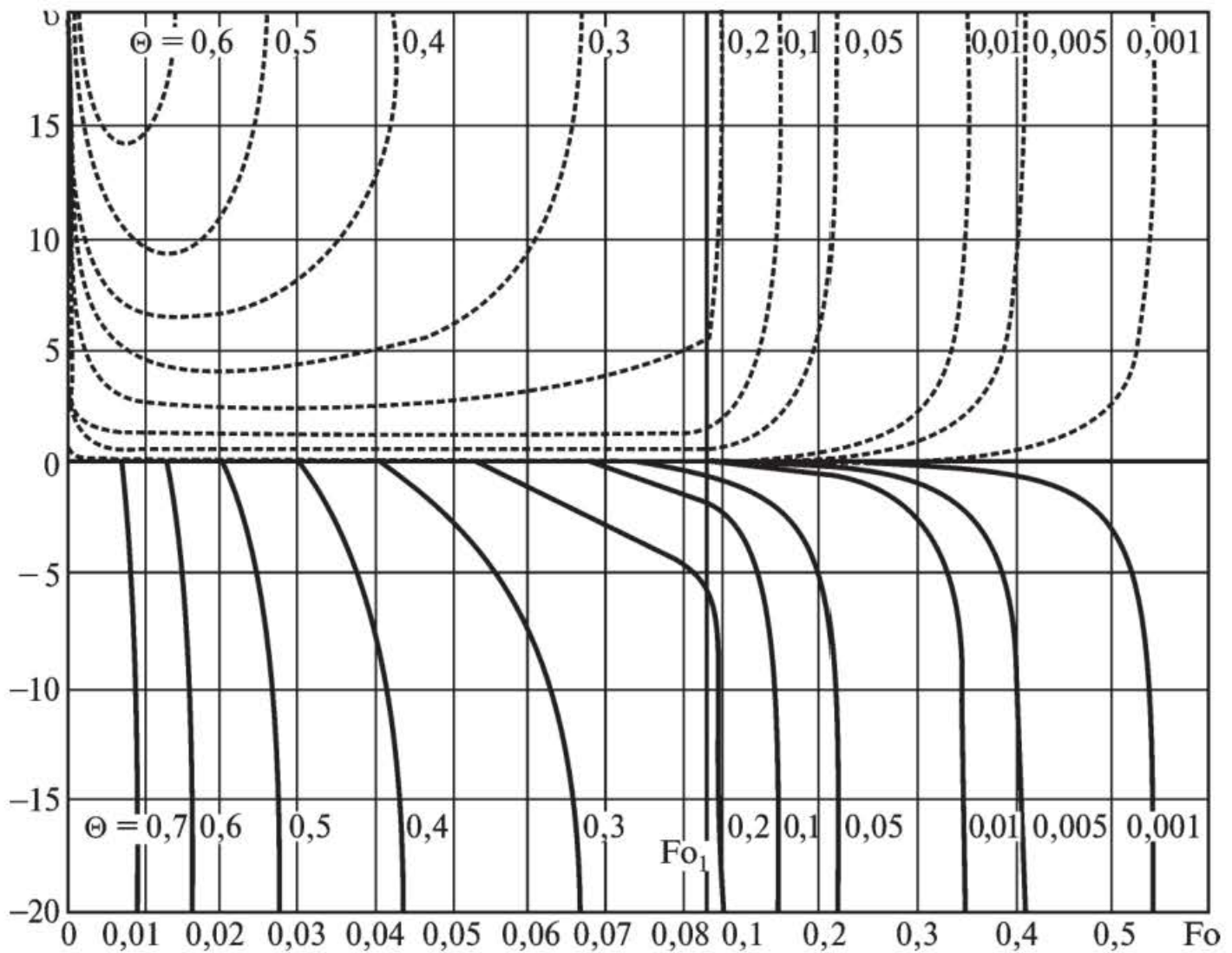
момент и при том значении координаты ξ , когда фронт температурного возмущения достигает ее.

Определяя первые производные по времени от соотношений (12.201), (12.202), получаем соответственно формулы для нахождения скоростей движения изотерм

$$\frac{d\xi_{1,2}}{dFo} = v_{1,2}(\Theta, Fo) = \sqrt{\frac{3}{Fo} - 6} \pm \frac{(3 - 9\sqrt{3Fo} + 18Fo - 3\Theta)}{\sqrt{3Fo - 6\sqrt{3Fo^3} + 9Fo^2 - 3Fo\Theta}}; \quad (12.203)$$

$$\frac{d\xi}{dFo} = v = 12\Theta / \sqrt{E^2 - 4E\Theta}. \quad (12.204)$$

Анализ распределения скоростей движения изотерм по координате ξ во времени, найденных по формулам (12.203), (12.204), приводит к заключению о том, что начальные скорости изотерм, возникающих в точке $\xi = 0$, устремляются к бесконечным значениям. Затем на относительно коротком отрезке времени они уменьшаются до некоторых минимальных значений. По мере приближения к осевой линии максимальных температур скорости движения изотерм вновь возрастают, устремляясь к бесконечным значениям (рис. 12.16).



Р и с. 12.16. Изменение скоростей движения изотерм:

--- — скорости изотерм в направлении оси ξ ; — — скорости изотерм в направлении, противоположном направлению оси ξ

Все изотермы, возникающие на линии фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$, имеют нулевые начальные скорости. Затем по мере приближения к осевой линии максимальных температур скорости движения устремляются к бесконечным значениям. Ввиду того что изотермы, возникающие на линии $q_1(Fo)$, движутся противоположно направлению оси ξ , их скорости на рис. 12.16 условно приняты со знаком «минус».

§ 12.7. Несимметричные граничные условия

Процесс передачи теплоты от одной среды (жидкой или газообразной) к другой через разделяющую их стенку возможен лишь при несимметричных граничных условиях. Подобные процессы протекают практически во всех используемых в технике теплообменниках. В связи с чем актуальной является проблема оценки температурного состояния стенки в нестационарном режиме теплообмена. Ее реше-

ние сводится к интегрированию уравнения нестационарной теплопроводности при несимметричных граничных условиях. Рассмотрим, например, задачу теплопроводности для случая, когда на границах плоской стенки заданы граничные условия первого рода, причем одно из них совпадает с начальным. Математическая постановка такой задачи имеет вид:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0; 0 \leq x \leq \delta); \quad (12.205)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad T(0, \tau) = T_{ст1}; \quad T(\delta, \tau) = T_0, \quad (12.206)$$

где T_0 — начальная температура; $T_{ст1}$ — температура стенки при $x = 0$; δ — толщина пластины.

Получение точного аналитического решения задачи (12.205), (12.206) связано с громоздкими математическими преобразованиями, а температурные поля внутри тел выражаются сложными бесконечными функциональными рядами, к тому же плохо сходящимися при малых значениях временной и пространственной координат. Все это существенно затрудняет внедрение найденных решений в практику тепловых расчетов и особенно в случаях, когда они являются промежуточным этапом при получении аналитических решений других более сложных задач, например термоупругости, управления полем температуры, обратных задач теплопроводности и др.

Найдем решение задачи (12.205), (12.206) интегральным методом теплового баланса с использованием дополнительных граничных условий. С целью упрощения задачи и процесса получения решения введем следующие безразмерные переменные:

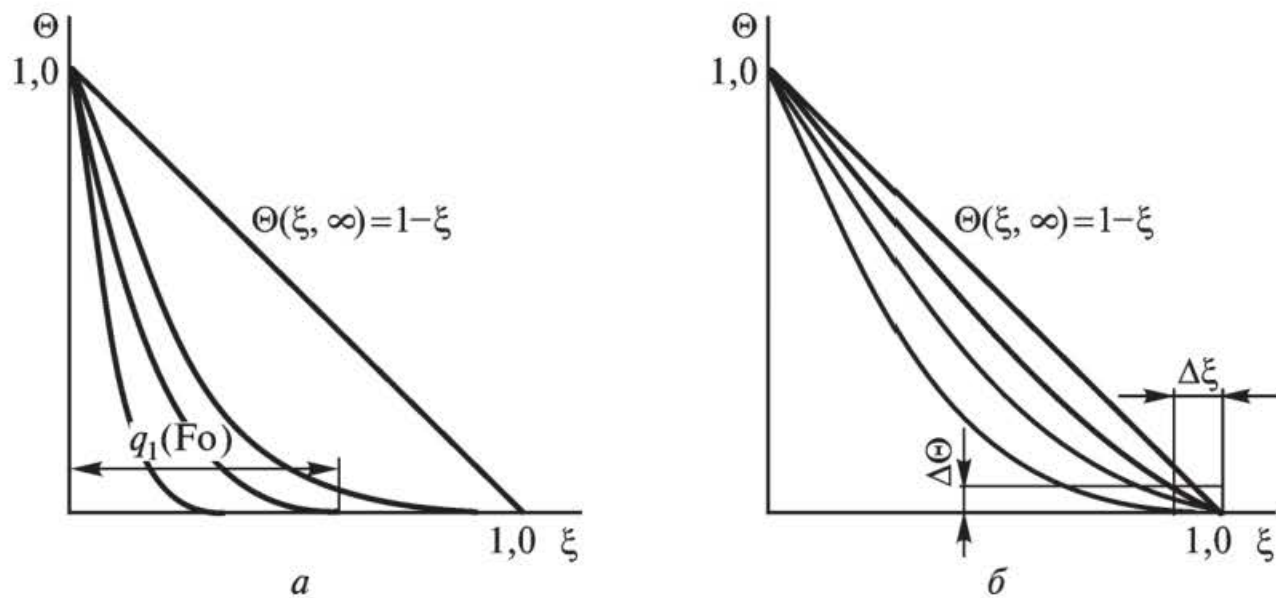
$$\Theta = (T - T_0) / (T_{ст1} - T_0); \quad \xi = x / \delta; \quad Fo = a\tau / \delta^2.$$

С учетом принятых обозначений задача (12.205), (12.206) примет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (Fo > 0; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (12.207)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad \Theta(0, Fo) = 1; \quad \Theta(1, Fo) = 0. \quad (12.208)$$

Разделяя процесс теплообмена на две стадии по времени ($0 \leq Fo \leq Fo_1$ и $Fo_1 \leq Fo < \infty$) и вводя движущуюся во времени границу (фронт температурного возмущения), разделяющую исходную область $0 \leq \xi \leq 1$ на две подобласти $0 \leq \xi \leq q_1(Fo)$ и $q_1(Fo) \leq \xi \leq 1$, приходим к следующей математической постановке задачи (рис. 12.17, а):



Р и с. 12.17. Расчетная схема теплообмена:
a — первая стадия; *b* — вторая стадия

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo)); \quad (12.209)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad \Theta(q_1, Fo) = 0; \quad \partial \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (12.210)$$

Сравнивая задачи (11.5)—(11.8) и (12.209), (12.210), можно увидеть, что они полностью совпадают. Следовательно, все решения, полученные в § 11.1 для первой стадии процесса, могут быть использованы применительно к задаче (12.209), (12.210).

Вторая стадия теплового процесса, соответствующая времени $Fo \geq Fo_1$, характеризуется изменением температуры уже по всему сечению пластины вплоть до наступления стационарного режима. На этой стадии понятие термического слоя теряет смысл, и в качестве дополнительной неизвестной функции принимаем скалярную величину градиента температуры на поверхности пластины при $\xi = 1$ (см. рис. 12.17):

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = q_2(Fo).$$

Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (Fo \geq Fo_1; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (12.211)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad \Theta(1, Fo) = 0; \quad \partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = q_2(Fo). \quad (12.212)$$

Задачи (11.5)—(11.8) и (12.211), (12.212) при $Fo = Fo_1$ ввиду того, что $q_2(Fo_1) = 0$, полностью совпадают. Следовательно, начальным условием задачи (12.211), (12.212) будет распределение температуры в

конце первой стадии процесса. Принимая в формуле (11.10) $q_1(Fo_1) = 1$, приходим к следующему начальному условию задачи:

$$\Theta(\xi, Fo_1) = (1 - \xi)^2. \quad (12.213)$$

Ранее было отмечено, что специального выполнения условия (12.213) не требуется ввиду того, что в данном случае происходит плавный переход от первой стадии ко второй, о чем свидетельствует идентичность краевых задач при $Fo = Fo_1$.

Интеграл теплового баланса для второй стадии теплового процесса имеет вид:

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = q_2(Fo) - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (12.214)$$

Решение задачи (12.211), (12.212) принимаем в виде (11.114). После определения коэффициентов b_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (12.212) соотношение (11.114) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \xi(2 - \xi) - q_2 \xi(1 - \xi). \quad (12.215)$$

Подставляя (12.215) в интеграл теплового баланса (12.214), находим

$$dq_2 = -12q_2 dFo. \quad (12.216)$$

Интегрируя уравнение (12.216), получаем

$$q_2(Fo) = C \exp(-12Fo) - 1, \quad (12.217)$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия

$$q_2(Fo_1) = \partial \Theta(1, Fo_1) / \partial \xi = 0. \quad (12.218)$$

Соотношение (12.218) находим из (11.10) при $Fo = Fo_1$; $q_1 = 1$; $\xi = 1$.

После нахождения постоянной интегрирования соотношение (12.217) принимает вид

$$q_2(Fo) = \exp[-12(Fo - Fo_1)] - 1. \quad (12.219)$$

Соотношения (12.215), (12.219) представляют решение задачи (12.211), (12.212) в первом приближении второй стадии процесса.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (12.215) точно удовлетворяет интегралу теплового баланса (12.214), граничным условиям (12.212), а также начальному условию (12.213) и приближенно (в среднем) — уравнению (12.211).

Сравнение результатов расчетов по формуле (12.215) с точным решением позволяет заключить, что максимальное отличие не превышает 4 %. В качестве Fo_1 была принята величина $Fo_1 = 0,0833$, полученная из формулы (11.13) в первом приближении первой стадии процесса.

Для повышения точности найдем решение задачи (12.211), (12.212) во втором приближении с привлечением дополнительных граничных условий, которые в данном случае будут такими же, как и условия (12.191). С использованием основных и дополнительных граничных условий решение задачи во втором приближении принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \frac{\xi}{2} \left(5 + 3q_2 + \frac{q'_2}{12} \right) + 5\xi^3 \left(1 + q_2 + \frac{q'_2}{20} \right) - \\ - 5\xi^4 \left(1 + q_2 + \frac{q'_2}{15} \right) + \frac{3}{2}\xi^5 \left(1 + q_2 + \frac{q'_2}{12} \right). \quad (12.220)$$

Подставляя (12.220) в интеграл теплового баланса (12.214), относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ получаем следующее неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 q_2}{dFo^2} + 70 \frac{dq_2}{dFo} + 600q_2 + 600 = 0. \quad (12.221)$$

Решение уравнения (12.221) принимаем в виде

$$q_2 = \eta + \varphi, \quad (12.222)$$

где η — частное решение неоднородного уравнения (12.221); φ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения принимаем в виде $\eta = C$, где константу C находим из выполнения уравнения (12.221): $C = -1$.

Характеристическое уравнение для однородного уравнения:

$$\mu^2 + 70\mu + 600 = 0. \quad (12.223)$$

Корни уравнения (12.223): $\mu_1 = -10$; $\mu_2 = -60$.

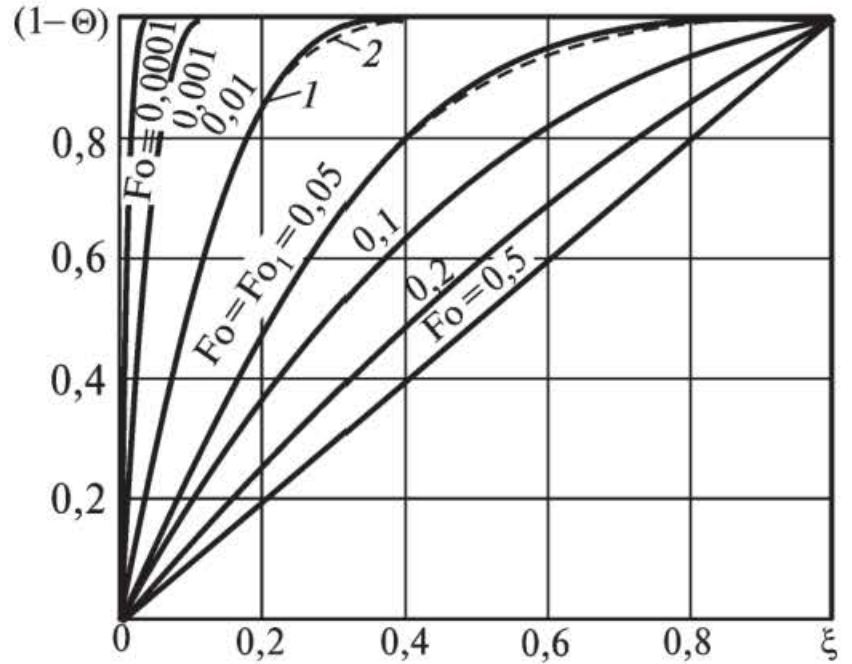
Отсюда общее решение однородного дифференциального уравнения принимает вид

$$\varphi = C_1 \exp(-10Fo) + C_2 \exp(-60Fo),$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования.

Р и с. 12.18. Распределение температуры в пластине при несимметричных граничных условиях:

1 — расчет по формулам (11.24) (для $0 \leq Fo \leq 0,05$) и (12.220) (для $0,05 \leq Fo \leq 0,5$); 2 — точное решение



С учетом найденных частного решения неоднородного и общего решения соответствующего однородного уравнения соотношение (12.222) будет

$$q_2(Fo) = C_1 \exp(-10Fo) + C_2 \exp(-60Fo) - 1. \quad (12.224)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из граничных условий

$$q_2(Fo_1) = 0; \quad dq_2(Fo_1)/dFo = 0, \quad (12.225)$$

где $Fo_1 = 0,05$ найдено во втором приближении первой стадии процесса (см. § 11.1). С учетом найденных значений постоянных интегрирования C_1 и C_2 соотношение (12.224) будет

$$q_2(Fo) = \frac{6}{5} \exp[10(Fo_1 - Fo)] - \frac{1}{5} \exp[60(Fo_1 - Fo)] - 1. \quad (12.226)$$

Соотношения (12.220) и (12.226) представляют решение задачи (12.211)—(12.212) во втором приближении второй стадии процесса. Результаты расчетов по формуле (12.220) в сравнении с точным решением даны на рис. 12.18.

Отметим, что характеристические уравнения задач с переменным начальным (см. § 12.6) и несимметричными граничными условиями совпадают. Следовательно, обе эти задачи во второй стадии процесса имеют одинаковые собственные числа, являющиеся собственными числами соответствующей задачи Штурма—Лиувилля (подробнее об этом см. § 11.1).

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 13.1. Коэффициент температуропроводности — линейная функция температуры

Решение дифференциальных уравнений теплопроводности с зависящими от температуры физическими свойствами среды связано с большими математическими трудностями из-за нелинейности краевой задачи. В этой связи весьма актуальной проблемой является разработка приближенных аналитических методов решения нелинейных задач. Покажем, что изложенная ранее методика с использованием дополнительных граничных условий достаточно эффективна и при решении краевых задач нестационарной теплопроводности в нелинейной постановке.

При постоянной объемной теплоемкости $C_V = c\rho = \text{const}$ уравнение нелинейной теплопроводности для бесконечной пластины

$$c(t)\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right]$$

с использованием подстановки Т. Гудмена

$$T = \rho \int_0^T c(t) dt$$

приводим к виду

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(T) \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right],$$

где c — теплоемкость; ρ — плотность; λ , a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности.

Отсюда математическая постановка задачи нестационарного нелинейного теплопереноса при линейной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры $a(T) = a_0(1 + \beta T)$ будет иметь вид:

$$\frac{\partial T(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \beta T) \frac{\partial T(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (Fo > 0; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (13.1)$$

$$T(\xi, 0) = T_0; \quad (13.2)$$

$$\partial\Theta(1, Fo) / \partial\xi = 0; \quad (13.3)$$

$$T(0, Fo) = T_{ст}, \quad (13.4)$$

где $Fo = a_0\tau/\delta^2$; a_0 — коэффициент температуропроводности при $T = T_0$ ($T_0 < T_{ст}$); $\xi = x/\delta$, δ — половина толщины пластины; β — коэффициент; T_0 — начальная температура; $T_{ст}$ — температура стенки.

Процесс нагрева, как и ранее, разделим на две стадии по времени Fo , а исходную область на две подобласти по координате ξ , которые разделяет движущаяся во времени граница, фиксирующая фронт температурного возмущения (см. рис. 11.1).

С целью упрощения процесса получения решения введем избыточную температуру по формуле $\Theta(\xi, Fo) = T(\xi, Fo) - T_0$ и заменим координату ξ , отсчитываемую от центра пластины, переменной $y = 1 - \xi$, направленной от поверхности. После введения новой функции $q_1(Fo)$ (глубина проникновения) для первой стадии процесса приходим к следующей математической постановке задачи:

$$\frac{\partial\Theta(y, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial\Theta(y, Fo)}{\partial y} \right] \quad (13.5)$$

$$(0 \leq Fo \leq Fo_1; \quad 0 \leq y \leq q_1(Fo));$$

$$\Theta(0, Fo) = \Delta T; \quad (13.6)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (13.7)$$

$$\frac{\partial\Theta(q_1, Fo)}{\partial y} = 0, \quad (13.8)$$

где $\Delta T = T_{ст} - T_0$.

В задаче (13.5)—(13.8), как и в предыдущих, отсутствуют начальное условие вида (13.2) и граничное условие (13.4).

Требую, чтобы искомое решение задачи (13.1)—(13.4) удовлетворяло не первоначальному уравнению (13.1), а осредненному по толщине термического слоя, получаем

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial\Theta(y, Fo)}{\partial Fo} dy = \int_0^{q_1} \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial\Theta(y, Fo)}{\partial y} \right] dy. \quad (13.9)$$

Определяя интеграл в правой части соотношения (13.9), находим

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^{q_1} \Theta(y, Fo) dy = [1 + \beta(\Theta + T_0)] \frac{\partial\Theta(y, Fo)}{\partial y} \Big|_0^{q_1}. \quad (13.10)$$

Учитывая соотношение (13.8), приходим к следующему выражению для интеграла теплового баланса:

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^{q_1} \Theta(y, Fo) dy = -(1 + \beta T_{ct}) \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial y}. \quad (13.11)$$

Решение задачи (13.5)—(13.8) находим в виде

$$\Theta(y, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q_1) y^k. \quad (13.12)$$

После определения из граничных условий коэффициентов b_k ($k = 0, 1, 2$) соотношение (13.12) принимает вид

$$\Theta(y, Fo) = \Delta T (1 - y/q_1)^2. \quad (13.13)$$

Подставляя (13.13) в интеграл теплового баланса (13.11), будем иметь

$$\frac{d}{dFo} \int_0^{q_1} \left(1 - \frac{y}{q_1}\right)^2 dy = \frac{2(1 + \beta T_{ct})}{q_1(Fo)}. \quad (13.14)$$

Отсюда для определения неизвестной функции $q_1(Fo)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{3} \frac{dq_1(Fo)}{dFo} = \frac{2(1 + \beta T_{ct})}{q_1(Fo)}. \quad (13.15)$$

Интегрируя уравнение (13.15), при начальном условии $q_1(0) = 0$ находим

$$q_1(Fo) = \sqrt{12(1 + \beta T_{ct})Fo}. \quad (13.16)$$

Соотношения (13.13), (13.16) определяют решение задачи (13.5)—(13.8) в первом приближении. Положив $q_1(Fo_1) = 1$, из (13.16) найдем время окончания первой стадии процесса

$$Fo = Fo_1 = 1/[12(1 + \beta T_{ct})].$$

Введем относительную избыточную температуру по формуле

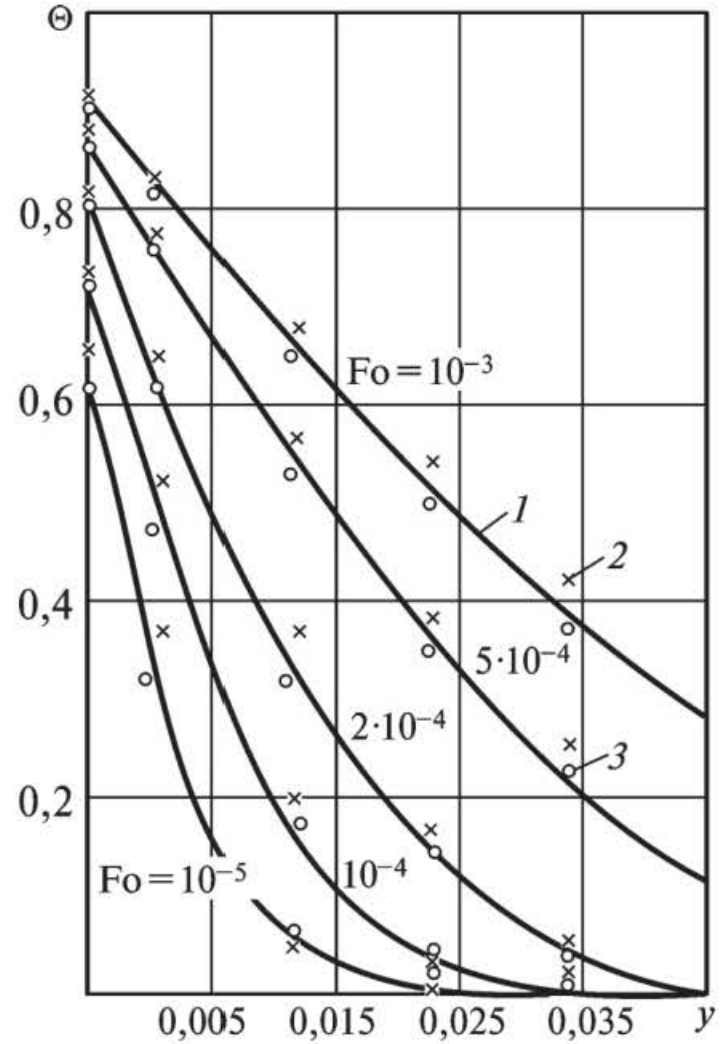
$$\bar{\Theta}(y, Fo) = \Theta(y, Fo) / (T_{ct} - T_0).$$

С учетом принятого обозначения соотношение (13.13) будет

$$\bar{\Theta}(y, Fo) = \left(1 - \frac{y}{q_1}\right)^2. \quad (13.17)$$

Р и с. 13.1. Распределение безразмерной температуры:

1 — метод прогонки; 2 — по формуле (13.17);
3 — по формуле (13.25)



При $\beta = 0$ (линейная задача) соотношение (13.16) приводим к виду (11.13). Последние два выражения полностью совпадают с формулами (11.10), (11.13), полученными при решении в первом приближении линейной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при граничных условиях первого рода.

Результаты расчетов нелинейной задачи по формуле (13.17) при $\beta = 0,001$; $T_0 = 0$ °С; $T_{ст} = 100$ °С в сравнении с расчетом по конечно-разностному методу прогонки представлены на рис. 13.1. Их анализ позволяет заключить, что максимальное расхождение не превышает 6 %.

Для повышения точности аналитического решения привлечем дополнительные граничные условия. Для этого будем последовательно дифференцировать уравнение (13.5) по переменной y , а граничные условия (13.6)—(13.8) по переменной Fo .

Дифференцируя граничное условие (13.6) по переменной Fo и сравнивая полученное соотношение с уравнением (13.5), применительно к точке $\xi = 0$ получаем первое дополнительное граничное условие

$$\beta \left(\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial y} \right)^2 + (1 + \beta T_{ст}) \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial y^2} = 0. \quad (13.18)$$

Для нахождения второго дополнительного граничного условия продифференцируем соотношение (13.7) по переменной Fo , учитывая, что $y = q_1(Fo)$ является функцией Fo :

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial y} \frac{dq_1}{dFo} + \frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (13.19)$$

Запишем уравнение (13.5) для $y = q_1(Fo)$:

$$\left. \frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial Fo} \right|_{y=q_1} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial y} \right]_{y=q_1}. \quad (13.20)$$

Сравнивая (13.19) и (13.20), с учетом соотношения (13.8) получаем второе дополнительное граничное условие

$$\partial^2 \Theta(q_1, Fo) / \partial y^2 = 0. \quad (13.21)$$

Для получения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем соотношение (13.8) по переменной Fo с учетом того, что переменная y является функцией Fo :

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial y^2} \frac{dq_1}{dFo} + \frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial y \partial Fo} = 0. \quad (13.22)$$

Продифференцируем уравнение (13.5) по переменной y и применим полученное соотношение для $y = q_1(Fo)$:

$$\left. \frac{\partial^2 \Theta(y, Fo)}{\partial Fo \partial y} \right|_{y=q_1} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial y} \right] \right\}_{y=q_1}. \quad (13.23)$$

Сравнивая (13.22) и (13.23), с учетом соотношений (13.8) и (13.21) получаем третье дополнительное граничное условие:

$$\partial^3 \Theta(q_1, Fo) / \partial y^3 = 0. \quad (13.24)$$

После определения неизвестных b_k ($k = \overline{0, 5}$) из основных и дополнительных граничных условий соотношение (13.12) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \Delta T + B_1 \frac{y}{q_1} + B_2 \frac{y^2}{q_1^2} - B_3 \frac{y^3}{q_1^3} + B_4 \frac{y^4}{q_1^4} + B_5 \frac{y^5}{q_1^5}, \quad (13.25)$$

где $B_1 = 2r - \sqrt{B}$; $B_2 = 2(2\sqrt{B} - 5\Delta T - 4r)$; $B_3 = -2(3\sqrt{B} - 10\Delta T - 6r)$;
 $B_4 = 4\sqrt{B} - 15\Delta T - 8r$; $B_5 = 4\Delta T + 2r - \sqrt{B}$; $B = 10r\Delta T + 4r^2$;
 $r = 2(1 + \beta T_{cr}) / \beta$.

Подставляя (13.25) в интеграл теплового баланса (13.11), находим

$$q dq = k_1 dFo, \quad (13.26)$$

где $k_1 = -30 \frac{2(1+2\beta T_{ct}) - \beta\sqrt{k} + \beta^2 T_{ct} (2T_{ct} - \sqrt{k})}{5\Delta T\beta + 2(1+\beta T_{ct}) - \beta\sqrt{k}}$; $k = (1 + \beta T_{ct})(5\Delta T\beta + 4 + 4\beta T_{ct})/\beta^2$.

Интегрируя уравнение (13.26), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(Fo) = \sqrt{2k_1 Fo}. \quad (13.27)$$

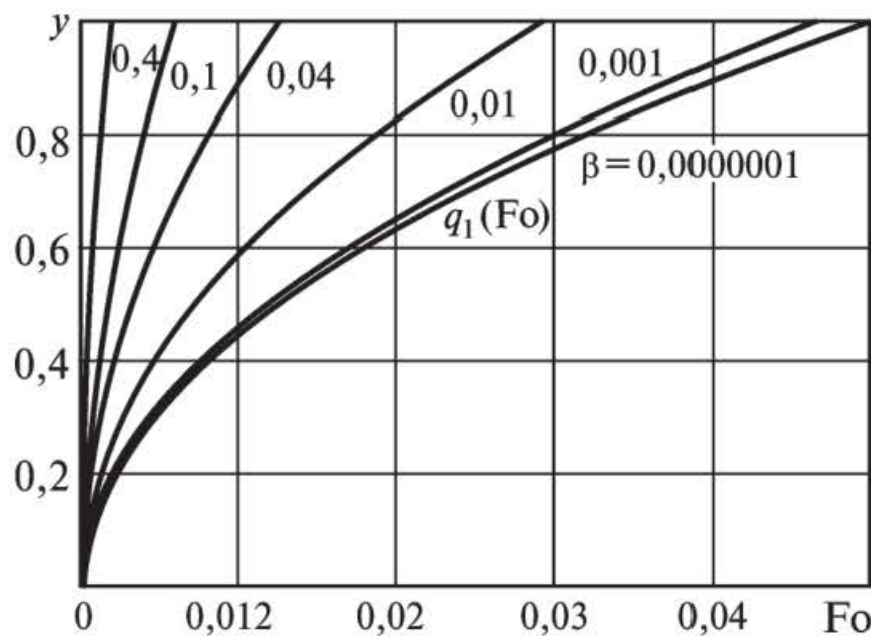
Положив в (13.27) $q_1(Fo_1) = 1$, найдем время окончания первой стадии процесса во втором приближении:

$$Fo_1 = 1/2k_1.$$

С учетом приведенных ранее данных $Fo_1 = 0,04713$.

Соотношения (13.25), (13.27) определяют решение задачи (13.5)—(13.8) во втором приближении. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что все основные и дополнительные граничные условия, а также интеграл теплового баланса удовлетворяются точно. Дифференциальное уравнение (13.5) благодаря использованию дополнительных граничных условий точно выполняется во всех точках по координате y , в которых в данный момент времени находится фронт температурного возмущения, включая точки $y = 0$ и $y = 1$.

На рис. 13.2 представлены графики изменения функции $q_1(Fo)$ при различных значениях β . Их анализ позволяет заключить, что с возрастанием β время достижения фронтом температурного возмущения координаты $y = 1$ уменьшается.



Р и с. 13.2. Графики изменения функции $q_1(Fo)$ при различных значениях β

Результаты расчетов по формуле (13.25) и методу прогонки представлены на рис. 13.1. Из анализа графиков следует, что расхождение результатов находится в пределах 1 %.

Вторая стадия теплового процесса, соответствующая времени $Fo > Fo_1$, характеризуется изменением температуры уже по всему сечению пластины вплоть до наступления стационарного состояния. На этой стадии понятие термического слоя теряет смысл, и в качестве обобщенной координаты выбираем температуру в центре пластины $\Theta(1, Fo) = q_2(Fo)$ (см. рис. 11.1).

Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial y} \right] \quad (Fo \geq Fo_1; 0 \leq y \leq 1); \quad (13.28)$$

$$\Theta(0, Fo) = \Delta T; \quad \Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad \partial \Theta(1, Fo) / \partial y = 0. \quad (13.29)$$

Начальным условием задачи (13.28), (13.29) будет соотношение (13.13) при $Fo = Fo_1$ и при $q_1(Fo_1) = 1$, т.е.

$$\Theta(y, Fo_1) = \Delta T(1 - y)^2. \quad (13.30)$$

Осредняя дифференциальное уравнение (13.28) по всему объему тела ($0 \leq y \leq 1$), интеграл теплового баланса с учетом третьего соотношения из (13.29) приводим к виду

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^1 \Theta(y, Fo) dy = -(1 + \beta T_{ct}) \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial y}. \quad (13.31)$$

Решение задачи (13.28), (13.29) принимаем в виде

$$\Theta(y, Fo) = \sum_{k=0}^n C_k(q_2) y^k. \quad (13.32)$$

После определения неизвестных коэффициентов $C_k(q_2)$ ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (13.29) соотношение (13.32) будет

$$\Theta(y, Fo) = \Delta T - 2(\Delta T - q_2)y + (\Delta T - q_2)y^2. \quad (13.33)$$

Подставляя (13.33) в интеграл теплового баланса (13.31), получаем

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^1 [\Delta T - 2(\Delta T - q_2)y + (\Delta T - q_2)y^2] dy = 2(1 + \beta T_{ct})(\Delta T - q_2).$$

Определяя интеграл, относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$d(\Delta T + 2q_2) = 6(1 + \beta T_{ct})(\Delta T - q_2)dFo. \quad (13.34)$$

Интегрируя уравнение (13.34), получаем

$$q_2(Fo) = \Delta T + r \exp[-3(1 + \beta T_{ct})Fo], \quad (13.35)$$

где r — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия. Так как при $Fo = Fo_1$ температура в центре пластины ($y = 1$) равна начальной температуре, то начальное условие будет $q_2(Fo_1) = 0$.

После определения постоянной интегрирования соотношение (13.35) примет вид

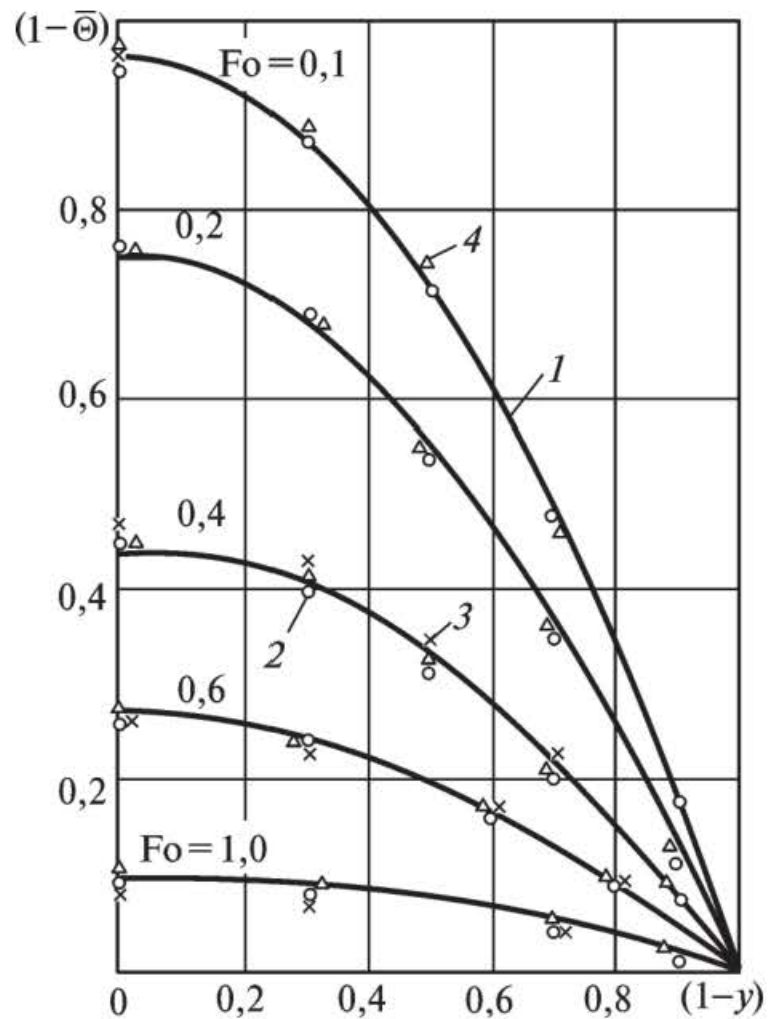
$$q_2(Fo) = \Delta T\{1 - \exp[-3(1 + \beta T_{ct})(Fo - Fo_1)]\}. \quad (13.36)$$

Подставляя (13.36) в (13.33), получаем решение задачи (13.28), (13.29) в первом приближении:

$$\Theta(y, Fo) = \Delta T\{1 - y(2 - y)\exp[-3(1 + \beta T_{ct})(Fo - Fo_1)]\}. \quad (13.37)$$

Можно убедиться, что соотношение (13.37) точно удовлетворяет граничным условиям (13.29), интегралу теплового баланса (13.31), начальному условию (13.30) и приближенно (в среднем) уравнению (13.28).

Результаты расчетов температур по формуле (13.37) в сравнении с данными из [5] и по методу прогонки представлены на рис. 13.3.



Р и с. 13.3. Распределение безразмерной температуры при $\beta = 0,01$:

1 — по данным [5]; 2 — метод прогонки; 3 — по формуле (13.37); 4 — по формуле (13.40)

Для получения решения во втором приближении второй стадии процесса необходимо ввести дополнительные граничные условия. Первое в данном случае совпадает с (13.18). Однако с целью получения наиболее простого обыкновенного дифференциального уравнения относительно неизвестной функции $q_2(\text{Fo})$ ограничимся лишь выполнением условия

$$\partial^2 \Theta(0, \text{Fo}) / \partial y^2 = 0, \quad (13.38)$$

т.е. в данном случае будем считать, что первый член соотношения (13.18) близок к нулю, что, вообще говоря, справедливо при малых значениях β .

Второе дополнительное граничное условие имеет вид

$$\partial^3 \Theta(1, \text{Fo}) / \partial y^3 = 0. \quad (13.39)$$

Подставляя (13.32) в основные (13.29) и дополнительные (13.38), (13.39) граничные условия, относительно неизвестных $C_k(q_2)$ ($k = \overline{0,4}$) получим систему пяти алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы коэффициенты $C_k(q_2)$ в соотношение (13.32), будем иметь

$$\Theta(y, \text{Fo}) = \Delta T - \frac{1}{5} (\Delta T - q_2) (8y - 4y^3 + y^4). \quad (13.40)$$

Подставляя (13.40) в интеграл теплового баланса (13.31), относительно неизвестной функции $q_2(\text{Fo})$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$d(q_2 - \Delta T) = -2,5(q_2 - \Delta T)(1 + \beta T_{\text{ст}})d\text{Fo}. \quad (13.41)$$

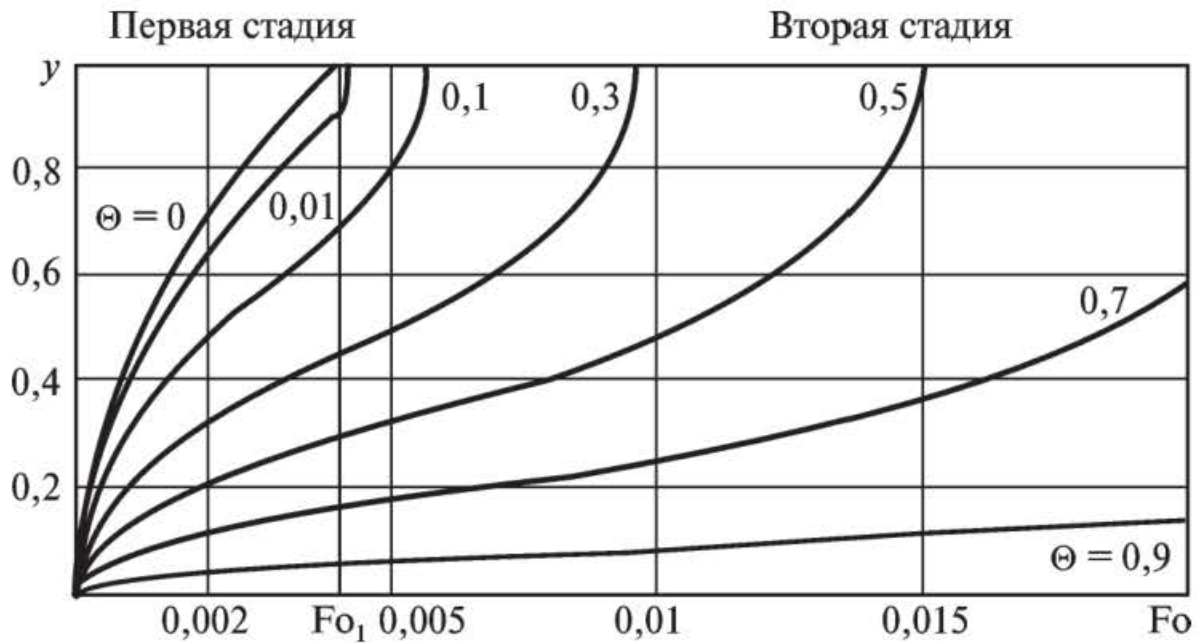
Интегрируя уравнение (13.41), при начальном условии $q_2(\text{Fo}_1) = 0$ находим

$$q_2 = \Delta T \left\{ 1 - \frac{1}{5} (8y - 4y^3 + y^4) \exp[-2,5(\text{Fo} - \text{Fo}_1)(1 + \beta T_{\text{ст}})] \right\}, \quad (13.42)$$

где в качестве Fo_1 принимаем время окончания первой стадии процесса во втором приближении.

Результаты расчетов по формуле (13.40) в сравнении с решением из [5], а также с расчетом по методу прогонки даны на рис. 13.3.

При выполнении второго приближения второй стадии процесса в данном случае было использовано лишь два дополнительных граничных условия, а не три, как в предыдущих задачах. Это связано с тем, что при использовании в нелинейной задаче трех дополнительных граничных условий возникают трудности, связанные с интегрирова-



Р и с. 13.4. Распределение изотерм для нелинейной задачи ($\beta = 0,1$)

нием обыкновенного дифференциального уравнения относительно $q_2(Fo)$.

Используя соотношения (13.17), (13.37), соответственно для первой и второй стадий получаем следующие формулы для нахождения изотерм в координатах y, Fo :

$$y(\Theta, Fo) = 2[3(1 + \beta T_{ст})Fo]^{0,5} (1 - \Theta^{0,5} \Delta T^{-0,5}); \quad (13.43)$$

$$y(\Theta, Fo) = \frac{1}{2KN} \{2KN - 2[K(K-1)(T_{ст} - 200T_{ст} + 10^4) - \Theta KN^{0,5}]\}, \quad (13.44)$$

где $K = \exp[-3(1 + \beta T_{ст})(Fo - Fo_1)]$; $N = T_{ст} - 100$.

Результаты расчетов распределения изотерм в координатах y, Fo , найденных с использованием формул (13.43), (13.44), даны на рис. 13.4.

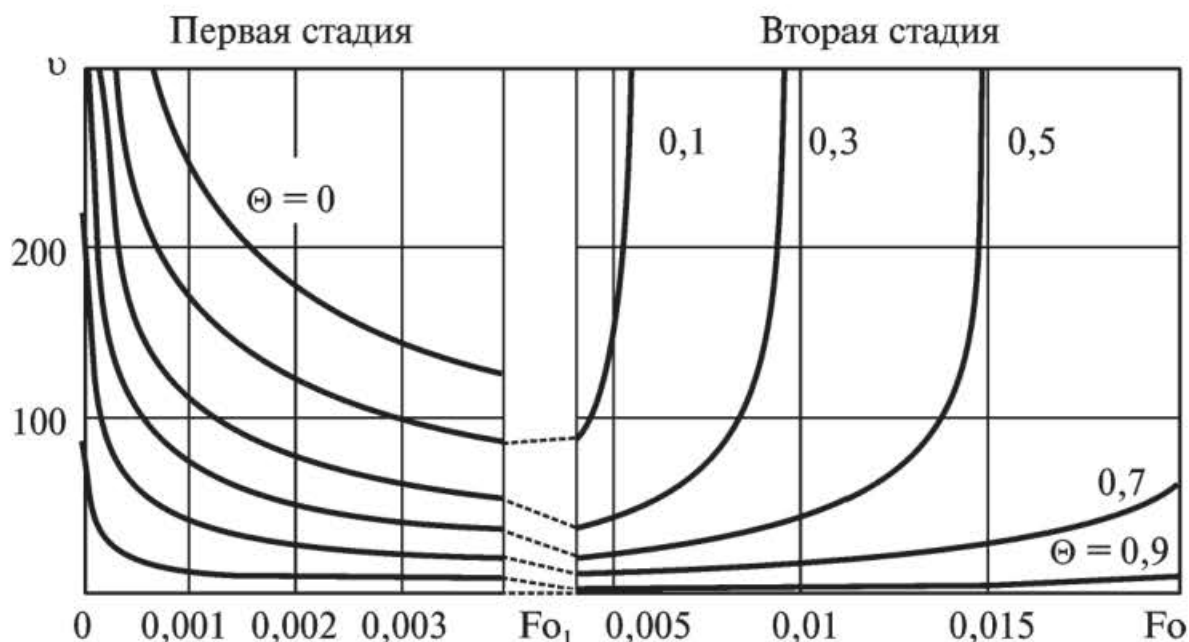
Определяя первые производные по времени от соотношений (13.43), (13.44), найдем формулы для определения скоростей движения изотерм по координате y во времени Fo соответственно для первой и второй стадий процесса:

$$v_1 = 4,5825\sqrt{3/Fo} - 0,7937\Theta / \sqrt{\Theta Fo}; \quad (13.45)$$

$$v_2 = 3,15(100 - \Theta) / \sqrt{100 \exp(0,5 - 126Fo) - (100 - \Theta) \exp(0,25 - 63Fo)}. \quad (13.46)$$

Результаты расчетов распределения скоростей движения изотерм, найденных с использованием формул (13.45), (13.46), приведены на рис. 13.5.

Анализ рис. 13.4 и 13.5 показывает, что скорости движения изотерм одинакового потенциала значительно выше, чем скорости их



Р и с. 13.5. Распределение скоростей изотерм для нелинейной задачи ($\beta = 0,1$)

движения в линейной задаче (см. рис. 11.10, 11.11). Например, время продвижения изотермы $\Theta = 0,3$ от координаты $y = 0$ до $y = 1$ составляет $Fo = 0,00595$, тогда как в линейной задаче это время $Fo = 0,202$.

§ 13.2. Коэффициент температуропроводности — степенная функция температуры

Найдем решение нестационарной нелинейной задачи теплопроводности при степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры вида $a(T) = a_0 T^\beta$. Математическая постановка задачи для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial T(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(T^\beta) \frac{\partial T(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (Fo > 0; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (13.47)$$

$$T(\xi, 0) = T_0; \quad \partial T(0, Fo) / \partial \xi = 0; \quad T(1, Fo) = T_{ст}. \quad (13.48)$$

Процесс теплообмена, как и ранее, разделим на две стадии по времени Fo , а исходную область на две подобласти по координате ξ , которые разделяет движущаяся во времени граница, фиксирующая фронт температурного возмущения $q_1(Fo)$. Вводя избыточную температуру по формуле $\Theta(\xi, Fo) = T(\xi, Fo) - T_0$ и заменяя координату ξ переменной $y = 1 - \xi$, для первой стадии процесса приходим к следующей математической постановке задачи:

$$\frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\Theta + T_0)^\beta \frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial y} \right] \quad (13.49)$$

$$(0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq y \leq q_1(Fo));$$

$$\Theta(0, Fo) = \Delta T; \quad \Theta(q_1, Fo) = 0; \quad \partial \Theta(q_1, Fo) / \partial y = 0. \quad (13.50)$$

Требую, чтобы искомое решение задачи удовлетворяло не первоначальному уравнению (13.49), а осредненному по толщине термического слоя, получаем

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial Fo} dy = \int_0^{q_1} \frac{\partial}{\partial y} \left[(\Theta + T_0)^\beta \frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial y} \right] dy. \quad (13.51)$$

Определяя интеграл в правой части уравнения (13.51), с учетом третьего соотношения из (13.50) приходим к следующему выражению для интеграла теплового баланса:

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^{q_1} \Theta(y, Fo) dy = -T_{ст}^\beta \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial y}. \quad (13.52)$$

Решение задачи (13.49), (13.50) находим в виде (13.12). После определения коэффициентов b_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (13.50) соотношение (13.12) примет вид (13.13). Подставляя (13.13) в интеграл теплового баланса (13.12), будем иметь

$$q_1 dq_1 = 6 T_{ст}^\beta dFo. \quad (13.53)$$

Интегрируя уравнение (13.53), при начальном условии $q_1(0) = 0$ находим

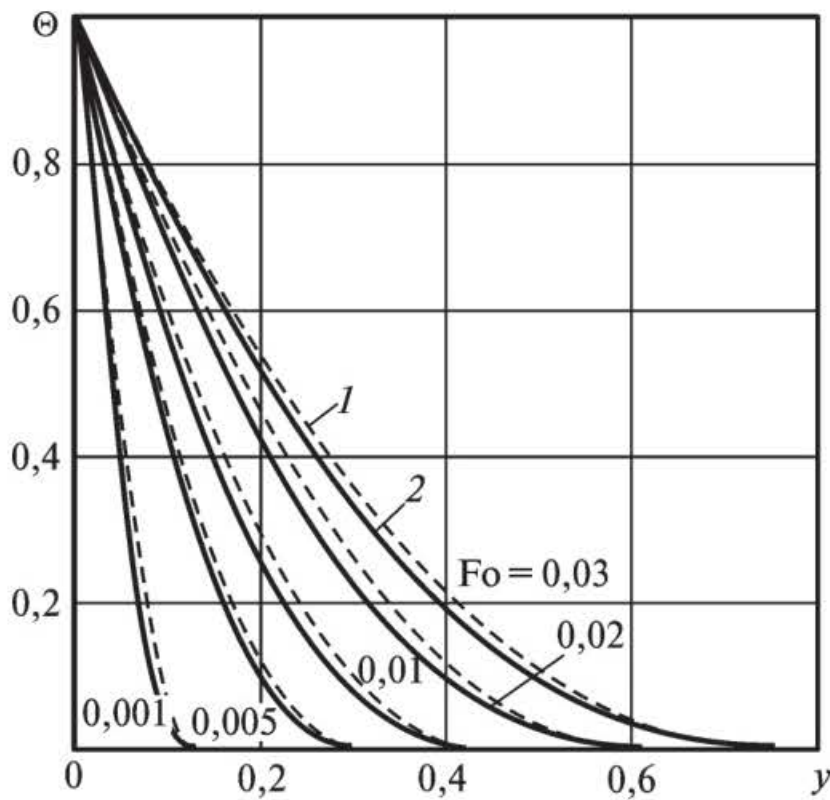
$$q_1(Fo) = 2\sqrt{3Fo \exp(\beta \ln T_{ст})}. \quad (13.54)$$

Соотношения (13.13), (13.54) определяют решение задачи (13.49), (13.50) в первом приближении. Положив $q_1(Fo_1) = 1$, из (13.54) находим время окончания первой стадии процесса

$$Fo_1 = 1/12 \exp(\beta \ln T_{ст}). \quad (13.55)$$

Введем, как и ранее, относительную избыточную температуру и с учетом принятого обозначения соотношение (13.13) примет вид (13.17). При $\beta = 0$ (линейная задача) соотношение (13.54) приводим к виду (11.13).

Результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (13.17) при $\beta = 0, 1$; $T_0 = 0^\circ\text{C}$; $T_{ст} = 100^\circ\text{C}$ представлены на рис. 13.6.



Р и с. 13.6. Распределение температуры в пластине при степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры:

1 — по формуле (13.17); 2 — по формуле (13.57)

Дополнительные граничные условия для получения решения задачи (13.49), (13.50) во втором приближении имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(\Theta + T_0)^\beta \partial \Theta (y, Fo)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0;$$

$$\partial^2 \Theta (q_1, Fo) / \partial y^2 = 0; \quad \partial^3 \Theta (q_1, Fo) / \partial y^3 = 0. \quad (13.56)$$

Соотношение (13.12) после определения коэффициентов b_k ($k = \overline{0, 5}$):

$$\begin{aligned} \Theta (y, Fo) = \Delta T - \left(4\Delta T + \frac{\eta}{2\beta} \right) \frac{y}{q_1} + \left(6\Delta T + \frac{2\eta}{\beta} \right) \frac{y^2}{q_1^2} - \\ - \left(4\Delta T + \frac{3\eta}{\beta} \right) \frac{y^3}{q_1^3} + \left(\Delta T - \frac{2\eta}{\beta} \right) \frac{y^4}{q_1^4} + \frac{\eta}{2\beta} \frac{y^5}{q_1^5}, \end{aligned} \quad (13.57)$$

где $\eta = 8(\beta\Delta T + T_{ct}) - 4\sqrt{T_{ct}(5\beta\Delta T + 4T_{ct})}$.

Подставляя (13.57) в (13.52), относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$q_1(5\beta\Delta T + 2T_{ct})dq_1 = (30T_{ct}\beta\eta_1 - 60T_{ct}^{\beta+1})dFo, \quad (13.58)$$

где $\eta_1 = T_{ct} \sqrt{5\beta\Delta T + 4T_{ct}}$.

Интегрируя уравнение (13.58), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(Fo) = 2\sqrt{\eta_2(T_{ct} - \eta_1)Fo} / (3T_{ct} + 5\beta\Delta T), \quad (13.59)$$

где $\eta_2 = -(45T_{ct} + 75\beta\Delta T)\exp(\beta \ln T_{ct})$.

Положив в (13.59) $q_1(Fo_1) = 1$, находим $Fo_1 = 0,32824$.

Соотношения (13.57), (13.59) представляют решение задачи (13.49), (13.50) во втором приближении первой стадии процесса. Результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (13.57) в сравнении с решением в первом приближении даны на рис. 13.6.

Математическая постановка задачи для второй стадии процесса в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\Theta + T_0)^\beta \frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial y} \right] \quad (Fo \geq Fo_1; 0 \leq y \leq 1); \quad (13.60)$$

$$\Theta(0, Fo) = \Delta T; \quad \Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad \partial \Theta(1, Fo) / \partial y = 0. \quad (13.61)$$

Интеграл теплового баланса с учетом третьего соотношения из (13.61) будет

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^1 \Theta(y, Fo) dy = -T_{ct}^\beta \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial y}. \quad (13.62)$$

Формулу для безразмерной температуры в первом приближении приводим к виду

$$\Theta(y, Fo) = \Delta T - y(\Delta T - q_2)(2 - y). \quad (13.63)$$

Подставляя (13.63) в (13.62), получаем

$$dq_2/dFo = 3T_{ct}^\beta(\Delta T - q_2).$$

Интегрируя полученное уравнение, при начальном условии $q_2(Fo_1) = 0$ находим

$$q_2 = \Delta T \{1 - \exp[-3T_{ct}^\beta(Fo - Fo_1)]\}. \quad (13.64)$$

Соотношения (13.63), (13.64) представляют решение задачи (13.60), (13.61) в первом приближении второй стадии процесса.

§ 13.3. Нелинейные задачи теплопроводности с внутренними источниками теплоты

Найдем решение нелинейной задачи теплопроводности для бесконечной пластины с внутренним источником теплоты. Математическая постановка задачи при линейной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры $a(T) = a_0(1 + \beta T)$ имеет вид:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \beta T) \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right] + \frac{\omega}{c\rho} \quad (13.65)$$

$$(\tau > 0; 0 \leq x \leq \delta); \quad T(x, 0) = T_0; \quad \partial T(0, \tau) / \partial x = 0; \quad T(1, \tau) = T_{\text{ст}}.$$

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$Fo = a_0 \tau / \delta^2; \quad Po = \omega \delta^2 / \lambda_0; \quad \lambda_0 = a_0 c\rho; \quad \xi = x / \delta; \quad \Theta = T - T_0.$$

С учетом принятых обозначений задача (13.65) принимает вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] + Po \quad (Fo > 0; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (13.66)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad \partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = 0; \quad \Theta(1, Fo) = \Delta T. \quad (13.67)$$

После замены переменной $\xi = 1 - y$ и введения фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$ задача (13.66), (13.67) для первой стадии процесса будет

$$\frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial \Theta(y, Fo)}{\partial y} \right] + Po \quad (13.68)$$

$$(Fo > 0; 0 \leq y \leq q_1(Fo));$$

$$\Theta(0, Fo) = \Delta T; \quad \Theta(q_1, Fo) = PoFo; \quad \partial \Theta(q_1, Fo) / \partial y = 0, \quad (13.69)$$

где второе соотношение из (13.69) означает, что температура на фронте температурного возмущения определяется лишь действием внутреннего источника теплоты $Po = \text{const}$ (см. § 11.5).

Интеграл теплового баланса для уравнения (13.68) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \left[\int_0^{q_1} \Theta(y, Fo) dy \right] - Poq_1 = - (1 + \beta T_{\text{ст}}) \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial y}. \quad (13.70)$$

После определения коэффициентов b_k ($k = 0, 1, 2$) полинома вида (13.12) решение задачи (13.68), (13.69) в первом приближении будет

$$\Theta(y, Fo) = \Delta T + (PoFo - \Delta T) \left(2 - \frac{y}{q_1} \right) \frac{y}{q_1}. \quad (13.71)$$

Подставляя (13.71) в (13.70), находим

$$q_1 \frac{dq_1}{dFo} = -\frac{Poq_1}{\Delta T - PoFo} + 6(1 + \beta T_{cr}). \quad (13.72)$$

Интегрируя уравнение (13.72), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(Fo) = \sqrt{4 + (1 + \beta T_{cr})Fo \frac{3\Delta T(\Delta T - PoFo) + Po^2 Fo^2}{(\Delta T - PoFo)^2}}. \quad (13.73)$$

Соотношения (13.71), (13.73) определяют решение задачи (13.68), (13.69) в первом приближении первой стадии процесса.

§ 13.4. Задачи теплопроводности с переменными физическими свойствами среды

Найдем решение нестационарной задачи теплопроводности для неоднородной неограниченной пластины при экспоненциальной зависимости коэффициента теплопроводности от пространственной координаты

$$\lambda(x) = \lambda_0 \exp(-mx), \quad (13.74)$$

где m — коэффициент, характеризующий интенсивность изменения коэффициента теплопроводности по пространственной координате ($m > 0$); λ_0 — значение коэффициента теплопроводности при $x = 0$.

Из формулы (13.74) следует, что при фиксированном значении величины m теплопроводность пластины с увеличением координаты уменьшается.

Математическая постановка задачи при симметричных граничных условиях первого рода в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\exp(-v\xi) \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (Fo > 0; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (13.75)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad \Theta(1, Fo) = 1; \quad \partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = 0, \quad (13.76)$$

где $\Theta = \frac{T - T_0}{T_{cr} - T_0}$; $Fo = \frac{a_0 \tau}{\delta^2}$; $v = m\delta$; $\xi = x / \delta$; $\lambda(\xi) = \lambda_0 \exp(-m\delta\xi)$.

Разделяя процесс теплообмена на две стадии, после введения новой независимой переменной $\rho = 1 - \xi$ приходим к следующей математической постановке задачи для первой стадии процесса:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\exp(-v(1-\rho)) \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right] \quad (13.77)$$

$$(0 \leq Fo \leq Fo_1; \quad 0 \leq \rho \leq q_1(Fo));$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad \Theta(q_1, Fo) = 0; \quad \partial \Theta(q_1, Fo) / \partial \rho = 0. \quad (13.78)$$

После определения коэффициентов b_k ($k = 0, 1, 2$) полинома вида (13.12) решение задачи (13.77), (13.78) в первом приближении будет

$$\Theta(\rho, Fo) = (1 - \xi / q_1)^2. \quad (13.79)$$

Интеграл теплового баланса для уравнения (13.77) имеет вид

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} d\rho = \int_0^{q_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\exp(-v(1-\rho)) \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right] d\rho. \quad (13.80)$$

Подставляя (13.79) в (13.80), относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$q_1 \frac{dq_1}{dFo} = -6 \exp(-v). \quad (13.81)$$

Интегрируя уравнение (13.81), при начальном условии $q_1(0) = 0$ находим

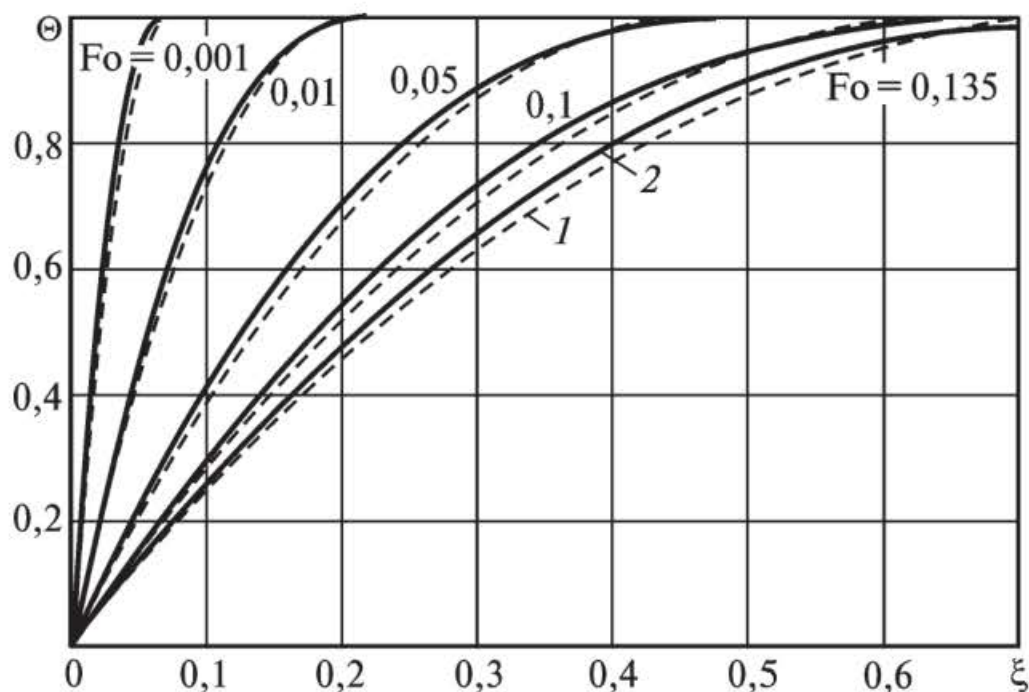
$$q_1(Fo) = 2\sqrt{3 Fo \exp v} / \exp v. \quad (13.82)$$

Положив $q_1(Fo_1) = 1$ (при $v = 1$), получаем $Fo_1 = 0,22652$.

Соотношения (13.79), (13.82) представляют решение задачи (13.77), (13.78) в первом приближении. Результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (13.79) приведены на рис. 13.7.

Для нахождения решения задачи (13.77), (13.78) во втором приближении используем следующие дополнительные граничные условия:

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \rho^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \rho^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \rho^3} = 0. \quad (13.83)$$



Р и с. 13.7. Распределение температуры при экспоненциальной зависимости коэффициента теплопроводности:

1 — по формуле (13.79); 2 — по формуле (13.84)

После определения неизвестных коэффициентов b_k ($k = \overline{0,5}$) решение задачи во втором приближении приводим к виду

$$\Theta(\rho; Fo) = 1 - \frac{5}{2} \frac{\rho}{q_1} + 5 \frac{\rho^3}{q_1^3} - 5 \frac{\rho^4}{q_1^4} + \frac{3}{2} \frac{\rho^5}{q_1^5}. \quad (13.84)$$

Подставляя (13.84) в интеграл теплового баланса (13.80), относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$q_1 dq_1 = 10 \exp(-v) dFo. \quad (13.85)$$

Отметим, что уравнения для функции $q_1(Fo)$ в первом и втором приближениях отличаются лишь значением коэффициента перед экспонентой.

Интегрируя уравнение (13.85), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(Fo) = 2\sqrt{5Fo \exp v} / \exp v. \quad (13.86)$$

Положив в (13.86) $q_1(Fo_1) = 1$, находим время окончания первой стадии процесса во втором приближении $Fo_1 = 0,13592$ (при $v = 1$).

Соотношения (13.84), (13.86) представляют решение задачи (13.77), (13.78) во втором приближении первой стадии процесса. Результаты расчетов температуры по формуле (13.84) даны на рис. 13.7 (при $v = 1$).

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ПОТОКАХ ЖИДКОСТЕЙ

§ 14.1. Общие сведения о пограничном слое. Гидродинамическая теория теплообмена

При движении жидкости с большими числами Рейнольдса вблизи поверхности стенки образуются две области:

- динамического пограничного слоя, в пределах которого наблюдаются большие поперечные градиенты скорости и значительные касательные напряжения; влияние сил вязкости проявляется наиболее существенно;
- невозмущенного потока (потенциального течения), где поперечные градиенты скорости незначительны и влияние сил вязкости пренебрежимо мало.

Деление потока на пристеночную область пограничного слоя и внешнюю область невозмущенного потока значительно упрощает анализ течения в целом ввиду того, что каждую из них можно рассматривать отдельно. При этом упрощается математическое описание движения применительно к рассматриваемым областям. В невозмущенном потоке инерционные силы существенно превосходят силы вязкостного трения, поэтому для описания движения можно использовать уравнение идеальной жидкости. Математическая модель движения жидкости в пограничном слое также значительно упрощается и полученные приближенные уравнения могут быть непосредственно проинтегрированы.

Если температуры жидкости и стенки не одинаковы, то вблизи поверхности обтекаемого тела образуется тепловой пограничный слой, в пределах которого температура изменяется от температуры стенки до температуры невозмущенного потока. Применительно к тепловому пограничному слою предельный переход выполняется по числу Пекле (Pe), которое здесь принимается очень большим. Так как $Pe = PrRe$, то два условия (числа Re и Pe велики) можно заменить одним — число Прандтля ($Pr = \nu/a$) не очень мало. Это условие выполняется для капельных жидкостей ($Pr \geq 1$) и газов ($Pr = 0,6...1$). И лишь для жидких металлов число Прандтля существенно (на порядок) меньше единицы.

В связи с тем, что соотношение толщин динамического и теплового пограничных слоев определяется числом Прандтля, то для вязких жидкостей толщина динамического слоя больше толщины тепло-

вого, для газов они примерно одинаковы, а для жидких металлов тепловой пограничный слой проникает в область невозмущенного динамического потока.

Механизм и интенсивность переноса теплоты зависят от режима течения жидкости внутри пограничного слоя. Если движение ламинарное, то теплота в направлении, перпендикулярном стенке, в основном переносится теплопроводностью. И лишь вблизи внешней границы слоя, где температура по нормали к стенке меняется незначительно, преобладающим оказывается перенос конвекцией вдоль стенки.

Теория пограничного слоя была предложена Л. Прандтлем в 1904 г., и в настоящее время на ней базируются основные современные представления о процессах переноса теплоты и массы. Теория пограничного слоя связана с гидродинамической теорией теплообмена, основывающейся на идее О. Рейнольдса о единстве механизма конвективного переноса теплоты и механической энергии в пограничном слое. Такое представление позволяет установить связь между теплоотдачей и гидравлическим сопротивлением трения, что, в свою очередь, позволяет на основе гидродинамических расчетов или экспериментов получать формулы для определения коэффициентов теплоотдачи.

Дифференциальные уравнения Навье — Стокса применительно к динамическому пограничному слою с учетом ряда допущений, а также в предположении отсутствия градиента давления в направлении оси x (т.е. $dp/dx = 0$) приводим к одному уравнению вида

$$v_x \frac{\partial \bar{v}_x(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} + v_y \frac{\partial \bar{v}_x(\zeta, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\nu}{l} \frac{\partial^2 \bar{v}_x(\zeta, \eta)}{\partial \eta^2}, \quad (14.1)$$

где v_x, v_y — составляющие скорости по координатным осям; $\bar{v}_x = v_x/\nu$; $\zeta = x/l$; $\eta = y/l$; ν — скорость невозмущенного потока; ζ, η — безразмерные координаты; l — характерный размер системы; x, y — координаты.

Дифференциальное уравнение энергии применительно к тепловому пограничному слою с учетом ряда допущений и в предположении о том, что перенос теплоты теплопроводностью вдоль оси x незначителен, приводим к виду

$$v_x \frac{\partial \Theta(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} + v_y \frac{\partial \Theta(\zeta, \eta)}{\partial \eta} = \frac{a}{l} \frac{\partial^2 \Theta(\zeta, \eta)}{\partial \eta^2}, \quad (14.2)$$

где $\Theta = (t - t_c)/t_{ст} - t_c$; t_c — температура невозмущенного потока; $t_{ст}$ — температура поверхности пластины; a — коэффициент температуропроводности жидкости.

Граничные условия для уравнений (14.1) и (14.2) имеют вид

$$\bar{v}_x(\zeta, 0) = 0; \Theta(\zeta, 0) = 0; \bar{v}_x(\zeta, \delta(\zeta)) = 1; \Theta(\zeta, \Delta(\zeta)) = 1, \quad (14.3)$$

где $\delta(\zeta)$ и $\Delta(\zeta)$ — толщины соответственно динамического и теплового пограничных слоев.

Из соотношений (14.1)—(14.3) следует, что при $\nu = a$ ($Pr = 1$) безразмерные значения $v_x(\zeta, y)$ и $\Theta(\zeta, y)$ для одной и той же системы будут одинаковы, где ν — коэффициент кинематической вязкости. Тогда

$$\frac{v_x}{\nu} = \frac{t - t_c}{t_{ст} - t_c}. \quad (14.4)$$

Теоретическое исследование двумерного турбулентного потока жидкости, выполненное Прандтлем, показало, что $Pr_T \approx 1$. Экспериментальное измерение этой величины подтверждает ее близость к единице. В связи с чем соотношение (14.4) без каких-либо дополнительных условий можно применять и для турбулентных потоков жидкости.

Используя подобие скоростных и температурных полей в соответствующих пограничных слоях, можно найти количественную зависимость между трением и теплоотдачей.

Вблизи стенки теплота в жидкости передается теплопроводностью согласно закону Фурье:

$$q = \lambda \frac{\partial t(x, 0)}{\partial y}, \quad (14.5)$$

где λ — коэффициент теплопроводности жидкости, $\lambda = ac\rho$; c — теплоемкость; ρ — плотность.

Напряжение трения у поверхности стенки по закону Ньютона будет равно

$$\tau = \mu \frac{\partial v_x(x, 0)}{\partial y}, \quad (14.6)$$

где μ — коэффициент динамической вязкости, $\mu = \nu\rho$.

Разделив почленно (14.5) на (14.6), получаем

$$\frac{q}{\tau} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial t / \partial y}{\partial v_x / \partial y}. \quad (14.7)$$

Дифференцируя соотношение (14.4), находим

$$\frac{\partial t / \partial y}{\partial v_x / \partial y} = \frac{t_{ст} - t_c}{v}. \quad (14.8)$$

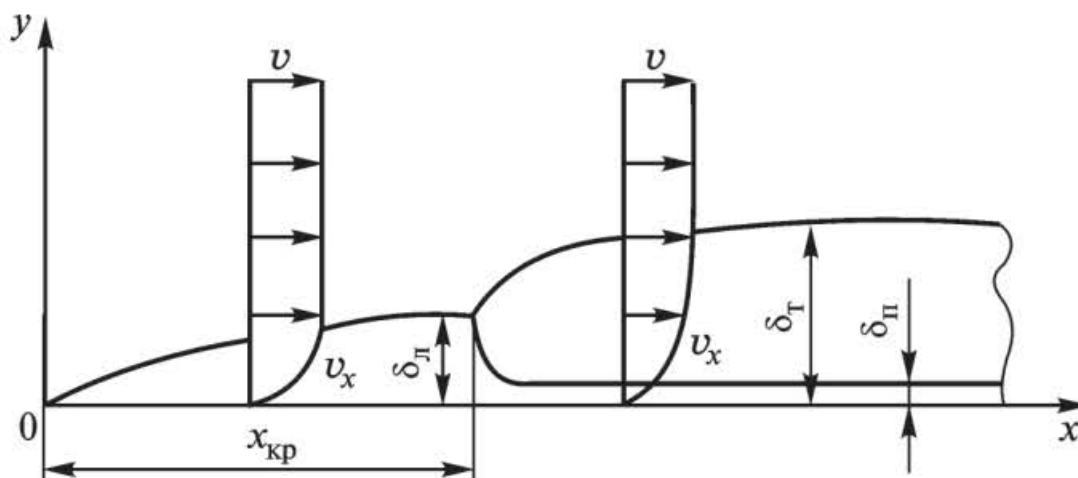
Сопоставляя (14.7) и (14.8), будем иметь

$$q = \tau \frac{\lambda}{\mu} \frac{t_{ст} - t_c}{v}. \quad (14.9)$$

Соотношение (14.9) определяет зависимость между теплоотдачей и трением в жидкости. Оно позволяет получить конкретные формулы, связывающие коэффициенты теплоотдачи с коэффициентами сопротивления трения, экспериментальное определение которых значительно проще, чем коэффициентов теплоотдачи.

§ 14.2. Динамический пограничный слой

При обтекании плоской поверхности потоком жидкости вблизи стенки происходит образование ламинарного динамического пограничного слоя δ_l (рис. 14.1). В нем в результате действия сил вязкостного трения скорость изменяется от нуля на стенке до скорости невозмущенного потока v на внешней границе пограничного слоя. Течение жидкости в динамическом пограничном слое на небольших расстояниях от кромки пластины является ламинарным. Однако на некотором расстоянии $x_{кр}$ происходит срыв ламинарного пограничного слоя, и течение принимает турбулентный характер. В этом случае в пределах турбулентного пограничного слоя δ_t происходит интенсивное перемешивание жидкости. В то же время вблизи поверхности сохраняется тонкий вязкий подслой $\delta_{п}$, в пределах которого течение ламинарное.



Р и с. 14.1. Схема ламинарного и турбулентного пограничных слоев

Приближенные формулы для толщин ламинарного и турбулентного пограничных слоев имеют вид:

$$\delta_{\text{л}} = 5x\sqrt{\text{Re}_x}; \quad \delta_{\text{т}} = 0,37x / \text{Re}_x^{0,2}, \quad (14.10)$$

где Re_x — число Рейнольдса, в котором в качестве характерного размера принято расстояние x , $\text{Re}_x = vx/\nu$.

Переход к турбулентному режиму течения жидкости в пограничном слое определяется критическим числом Рейнольдса, которое при продольном обтекании пластины равно

$$\text{Re}_{x_{\text{кр}}} = vx_{\text{кр}}/\nu \approx 5 \cdot 10^5.$$

Впервые теоретический расчет распределения скоростей в ламинарном пограничном слое путем численного интегрирования системы дифференциальных уравнений пограничного слоя был выполнен Г. Блазиусом в 1908 г. В частности, расчеты показали, что отношение скоростей v_x/ν зависит лишь от одной переменной $\eta = y\sqrt{\nu/vx}$ (рис. 14.2). Анализируя эту зависимость, можно заключить, что уже при значении $\eta \approx 5$ $v_x = \nu$. Это значение η определяет расстояние $y = \delta(x)$, принимаемое за толщину ламинарного пограничного слоя. Отсюда получаем первую формулу в (14.10).

Касательное напряжение трения в ламинарном пограничном слое определяем по формуле

$$\tau = 0,33\rho\nu^2 / \sqrt{\text{Re}_x}. \quad (14.11)$$

Формула для среднего значения касательного напряжения на отрезке $0 \leq x \leq l$ имеет вид

$$\tau_{\text{ср}} = 0,66\rho\nu^2 / \sqrt{vl/\nu}. \quad (14.12)$$

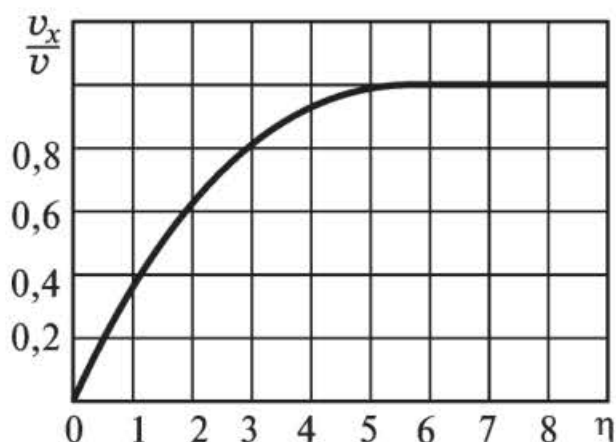
Из (14.12) следует, что касательное напряжение в ламинарном пограничном слое уменьшается с увеличением l .

На основе обобщения экспериментальных данных получена следующая формула для определения скоростей в пределах турбулентного пограничного слоя

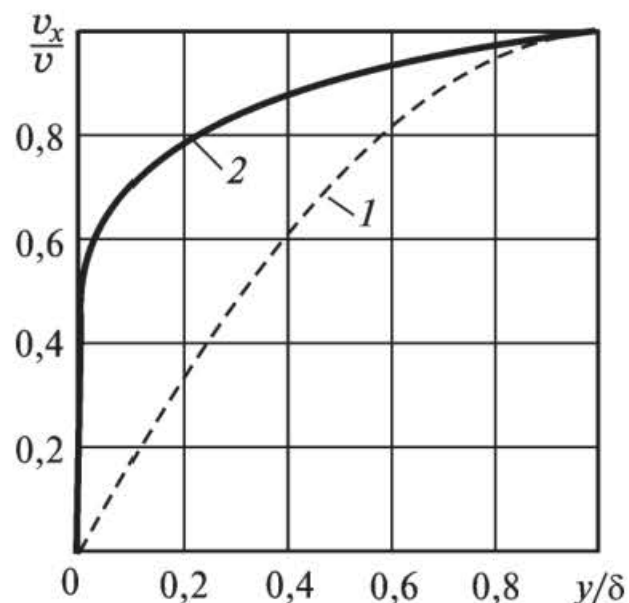
$$v_x/\nu = [y/\delta_{\text{т}}(x)]^{1/7}. \quad (14.13)$$

В пределах толщины вязкого подслоя $\delta_{\text{п}}$ распределение скорости становится практически линейным.

Кривые изменения безразмерных скоростей от безразмерной координаты $y/\delta(x)$ для ламинарного и турбулентного пограничных слоев даны на рис. 14.3.



Р и с. 14.2. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое



Р и с. 14.3. Распределение скоростей в ламинарном (1) и турбулентном (2) пограничных слоях

Обобщая экспериментальные данные, приходим к следующей формуле для определения касательных напряжений в турбулентном пограничном слое:

$$\tau = 0,03\rho v^2(vx/v)^{-1/5}. \quad (14.14)$$

Средняя величина касательных напряжений на отрезке $0 \leq x \leq l$ будет

$$\tau_{\text{ср}} = 0,037\rho v^2(vl/v)^{-1/5}. \quad (14.15)$$

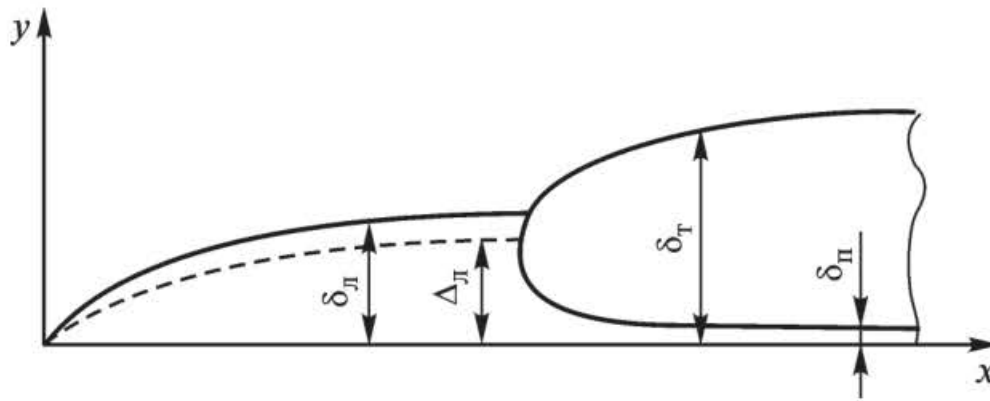
Из последней формулы следует, что касательное напряжение при турбулентном пограничном слое с увеличением l уменьшается в меньшей степени, чем при ламинарном.

§ 14.3. Тепловой пограничный слой

В случае если температуры поверхности пластины и набегающего потока различны, вблизи поверхности формируется тепловой пограничный слой, в пределах которого температура изменяется от значения, равного температуре стенки $t_{\text{ст}}$ (непосредственно на стенке), до температуры невозмущенного потока t_c на границе теплового пограничного слоя (рис. 14.4, 14.5). При этом между поверхностью пластины и потоком жидкости (газа) протекает процесс теплообмена. Плотность теплового потока согласно закону Ньютона—Рихмана пропорциональна температурному напору:

$$q = \alpha(t_c - t_{\text{ст}}), \quad (14.16)$$

где α — коэффициент теплоотдачи, подлежащий определению.



Р и с. 14.4. Тепловой и динамический пограничные слои

Тот же самый тепловой поток q передается на границе жидкость — стенка теплопроводностью:

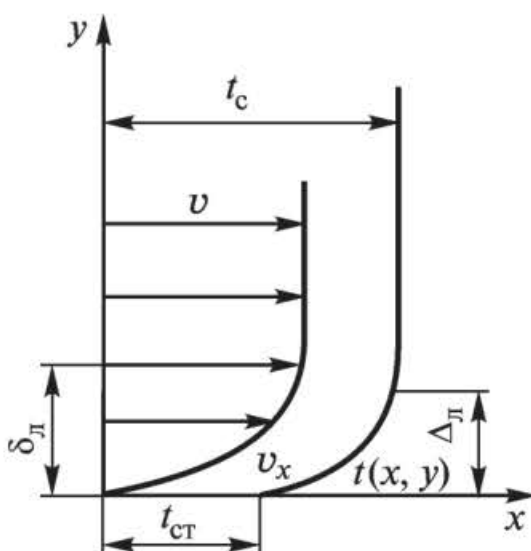
$$q = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} . \quad (14.17)$$

Объединяя две последние формулы, получаем уравнение конвективной теплоотдачи

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} = \alpha (t_c - t_{ст}) . \quad (14.18)$$

Найти коэффициент теплоотдачи из формулы (14.18) можно лишь в случае, если будет известно распределение температуры по толщине теплового пограничного слоя в виде аналитической зависимости $t = t(x, y)$. Получение таких аналитических решений рассмотрено далее (см. § 14.5, 14.6).

Процесс формирования теплового пограничного слоя сходен с аналогичным процессом для динамического слоя. Соотношение их



Р и с. 14.5. Распределение скоростей и температур в ламинарном пограничном слое

толщин для ламинарного пограничного слоя зависит лишь от числа Прандтля. Следовательно, зависимость $\Delta_{л}$ от скорости v и расстояния x сохраняется такой же, как и для динамического слоя. При $Pr = 1$ толщины слоев оказываются равными $\Delta_{л} = \delta_{л}$. Принимаем, что в ламинарном пограничном слое перенос теплоты между слоями жидкости происходит лишь путем теплопроводности. Основное изменение температуры в турбулентном пограничном слое происходит в пределах тонкого вязкого подслоя $\delta_{п}$, где также принимаем, что теплота передается только путем теплопроводности.

§ 14.4. Аналитические решения уравнений динамического пограничного слоя

Таким образом, при обтекании тела потоком жидкости вблизи стенки образуются динамический и тепловой пограничные слои (см. рис. 14.1—14.6), которые представляют собой границы соответствующих фронтов возмущения, отделяющие возмущенный поток от невозмущенного.

Дифференциальные уравнения динамического пограничного слоя (уравнения Прандтля) выводятся из уравнений движения (Навье—Стокса) и уравнения сплошности, которые с учетом ряда допущений имеют вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \quad (14.19)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (14.20)$$

Граничные условия для уравнений (14.19) и (14.20) будут

$$v_x|_{y=0} = v_y|_{y=0} = 0; \quad (14.21)$$

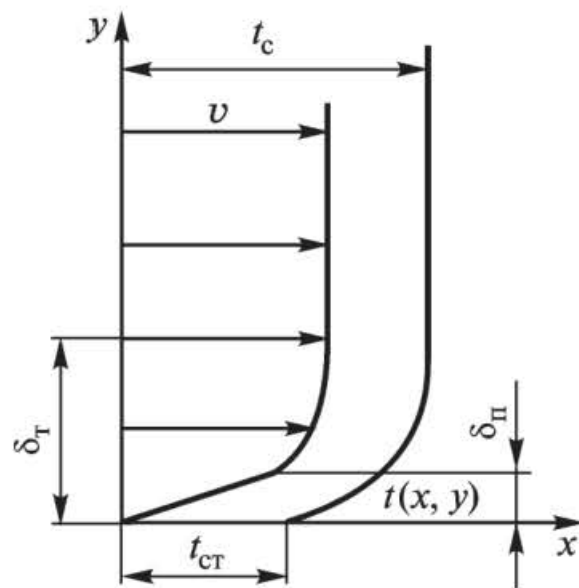
$$v_x|_{y=\delta(x)} = v = \text{const}; \quad (14.22)$$

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} = 0; \quad (14.23)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0, \quad (14.24)$$

где $\delta(x)$ — толщина динамического пограничного слоя.

Граничное условие (14.23) характеризует плавность сопряжения профилей скоростей на внешней границе пограничного слоя. Граничное условие (14.24) получаем из дифференциального уравнения (14.19) при $y = 0$, где $v_x = v_y = 0$. Следовательно, выполнение условия (14.24) является выполнением уравнения (14.19) в точке $y = 0$. Соотношение



Р и с. 14.6. Распределение скоростей и температур в турбулентном пограничном слое

(14.24) по сути является дополнительным граничным условием в задаче (14.19)—(14.24).

Задача (14.19)—(14.24) является нелинейной. Точные аналитические решения ее не получены — получены решения лишь путем численного интегрирования исходных дифференциальных уравнений (14.19), (14.20).

Найдем приближенное аналитическое решение задачи (14.19)—(14.24). Для этого потребуем, чтобы искомое решение удовлетворяло не исходным уравнениям (14.19), (14.20), а осредненным в пределах толщины динамического слоя, т.е. определим интегралы от данных уравнений по переменной y в пределах от $y = 0$ до $y = \delta(x)$:

$$\int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = \nu \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy = \nu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=\delta} - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} \right]; \quad (14.25)$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = - \int_0^{\delta} \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = - (v_y)_{y=\delta}. \quad (14.26)$$

Интеграл в правой части соотношения (14.25) с учетом граничного условия (14.23) приводим к виду

$$\nu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=\delta} - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} \right] = - \nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (14.27)$$

Запишем закон Ньютона для касательного напряжения в жидкости, прилегающей к стенке:

$$\tau_{ст} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho \nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (14.28)$$

Соотношение (14.28) можно записать в виде

$$\nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\tau_{ст}}{\rho}. \quad (14.29)$$

Подставляя (14.29) в (14.27), находим

$$\nu \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy = - \nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\tau_{ст}}{\rho}. \quad (14.30)$$

Выполняя интегрирование по частям во втором члене левой части уравнения (14.25), получаем

$$\int_0^{\delta} v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = (v_y v_x)_{y=\delta} - \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} dy. \quad (14.31)$$

Учитывая граничное условие (14.22) и уравнение неразрывности (14.20), последнее соотношение приводим к виду

$$\int_0^{\delta} v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = v(v_y)_{y=\delta} + \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy. \quad (14.32)$$

Подставляя (14.26) в (14.32), находим

$$\int_0^{\delta} v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = -v \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy. \quad (14.33)$$

Подставляя (14.29), (14.33) в (14.25), с учетом того, что $(\partial v_x / \partial y)_{y=\delta} = 0$, получаем

$$2 \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - v \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = -\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho}. \quad (14.34)$$

Соотношение (14.34) приводим к известному интегральному уравнению для динамического пограничного слоя, впервые полученному Карманом в 1921 г.:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x^2 dy - v \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x dy = -\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho}. \quad (14.35)$$

Учитывая соотношение (14.28), а также тот факт, что интегралы в левой части зависят лишь от одной переменной x , соотношение (14.35) можно представить в виде

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (v_x - v)v_x dy = v \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (14.36)$$

Суть использования интегрального уравнения (14.36) в том, что при получении решения задачи (14.19)—(14.24) требуется выполнение не исходных дифференциальных уравнений в частных производных (14.19), (14.20), а некоторых осредненных по толщине динамического пограничного слоя, которые в конечном итоге сводятся к одному интегральному уравнению вида (14.36). Разумеется, подобное осреднение снижает точность решения исходных уравнений (14.19), (14.20). Однако, как будет показано далее, применение дополнительных граничных условий позволяет найти такое приближенное аналитическое решение, которое в зависимости от числа приближений удовлетворяет уравнениям (14.19), (14.20) практически с заданной степенью точности.

Решение интегрального уравнения (14.36) с граничными условиями (14.21)—(14.24) примем в виде алгебраического полинома

$$v_x = \sum_{k=0}^n a_k(\delta) y^k, \quad (14.37)$$

где $a_k(\delta)$ — неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (14.21)—(14.24).

Подставляя (14.37), ограничиваясь четырьмя членами ряда, в граничные условия (14.21)—(14.24), относительно $a_k(\delta)$ ($k = 0, 1, 2, 3$) получаем систему четырех алгебраических линейных уравнений. Ее решение:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = \frac{3v}{2\delta}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{v}{2\delta^3}. \quad (14.38)$$

Подставляя (14.38) в (14.37), находим

$$\frac{v_x}{v} = \frac{3y}{2\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (14.39)$$

Подставляя (14.39) в интегральное уравнение (14.36), относительно неизвестной функции $\delta(x)$ будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140v}{13v}. \quad (14.40)$$

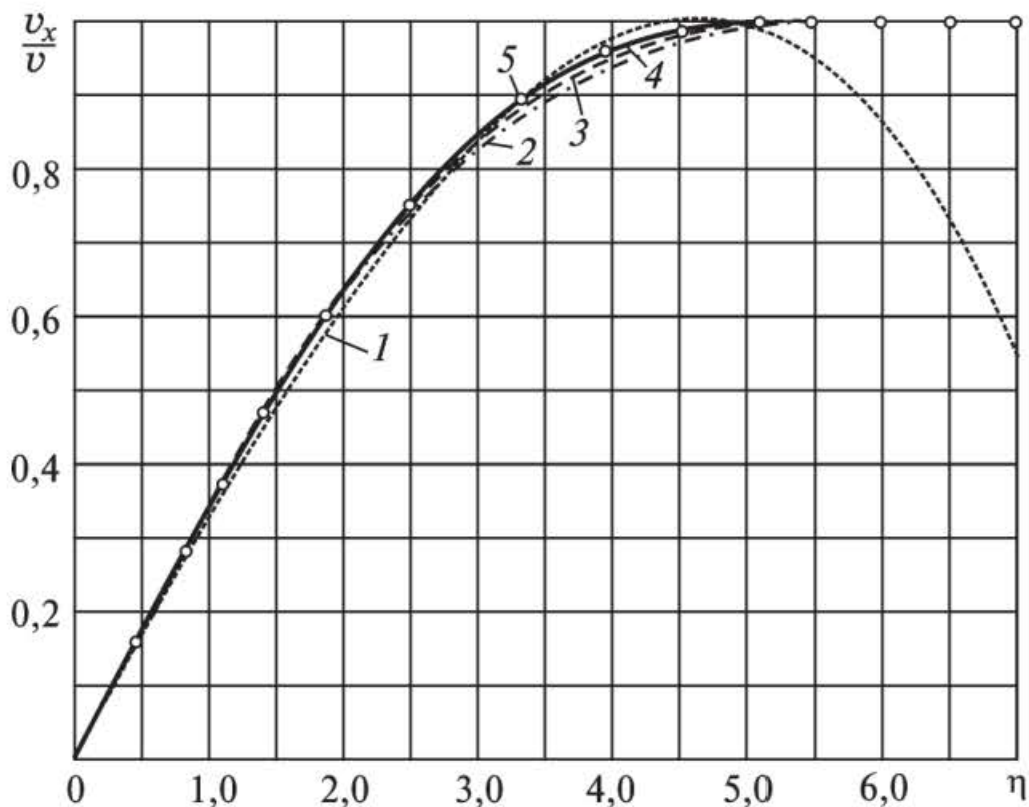
Интегрируя уравнение (14.40), при начальном условии $\delta(0) = 0$ находим

$$\delta(x) = 4,64 \sqrt{vx/v} = \frac{4,64x}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (14.41)$$

Соотношения (14.39), (14.41) представляют решение задачи (14.19)—(14.24) в первом приближении. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (14.39) точно удовлетворяет граничным условиям (14.21)—(14.24) и интегральному уравнению (14.36). Уравнения (14.19), (14.20), как это следует из (14.25), (14.26), в данном случае удовлетворяются лишь в среднем.

Соотношение (14.41) представим следующим образом

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{4,64}{\text{Re}^{0,5}}. \quad (14.42)$$



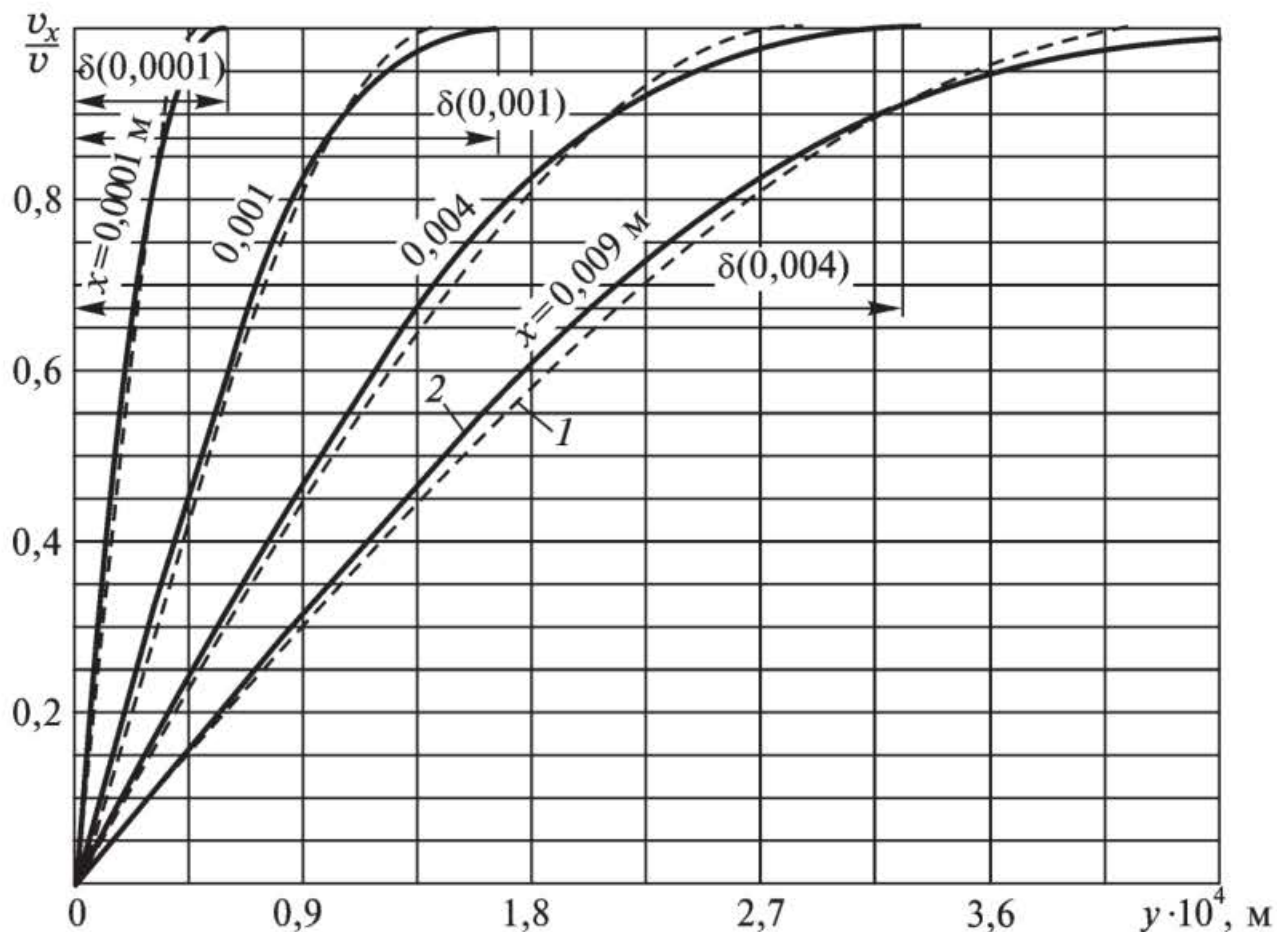
Р и с. 14.7. Распределение безразмерных скоростей в зависимости от безразмерной координаты:

1, 2, 3, 4 — первое, второе, третье и четвертое приближения; 5 — точное решение

Из соотношения (14.42) следует, что условие $\delta(x) \ll x$, лежащее в основе всей теории пограничного слоя, выполняется при достаточно больших числах Рейнольдса. Следовательно, теория пограничного слоя является теорией движения реальной жидкости при больших значениях числа Рейнольдса.

Результаты расчетов безразмерной скорости по формуле (14.39) в сравнении с точным решением уравнений (14.19), (14.20) (численное интегрирование) приведены на рис. 14.7, 14.8. Анализ полученных результатов позволяет заключить, что в диапазоне безразмерной переменной $0 \leq \eta \leq 4,0$ ($\eta = y / \delta(x) = y \sqrt{v / \nu x}$) максимальное расхождение составляет 3 %, в диапазоне $4,0 \leq \eta \leq 6,0$ — 15 %, а при $\eta > 6$ решение (14.39) практически непригодно для использования. Таким образом, решение в первом приближении наименее точно вблизи границы динамического пограничного слоя.

Ввиду того что решение задачи о распределении скорости в динамическом пограничном слое вида (14.39) будет использовано далее при решении задачи для теплового пограничного слоя, такое расхождение полученных результатов с точным решением может привести к еще большей неточности в анализе распределения температуры внутри теплового слоя. Вопрос точности решения динамической задачи актуален еще и потому, что при решении задачи теплового пограничного слоя исходное уравнение энергии также осредняют и приводят к



Р и с. 14.8. Распределение безразмерных скоростей в динамическом пограничном слое:

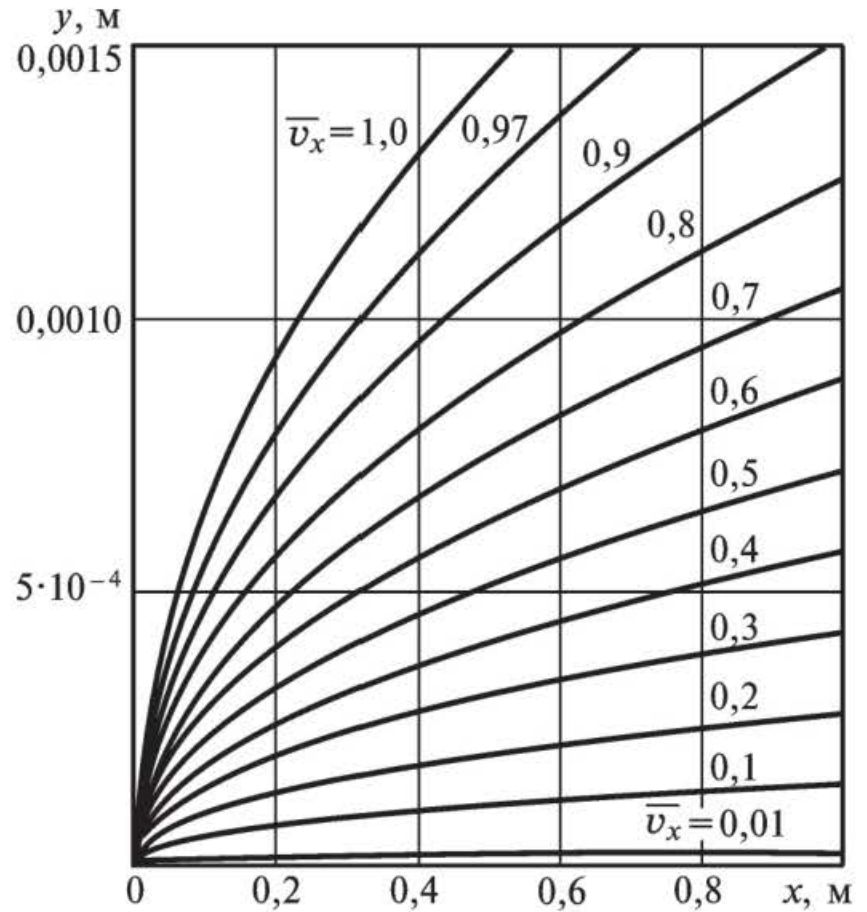
1 — по формуле (14.39) (первое приближение); 2 — по формуле (14.61) (четвертое приближение)

интегральному (интегралу теплового баланса). К тому же следует учесть еще и тот факт, что при получении исходных дифференциальных уравнений для динамического пограничного слоя вида (14.19), (14.20) были приняты допущения, позволившие максимально упростить математическую постановку задачи. В связи с этим проблема точности решения исходных уравнений (14.19), (14.20) является весьма актуальной. Важность получения как можно более точных решений состоит еще в том, что на их основе выводят широко используемые в теории конвективного теплообмена формулы для определения коэффициентов теплоотдачи и касательных напряжений.

Соотношение (14.39) благодаря полиномиальной зависимости скорости от координаты y позволяет построить линии изотак (одинаковых скоростей) в пределах толщины динамического пограничного слоя в координатах y, x (рис. 14.9). Задавая постоянные значения безразмерной скорости $v_x/v = \bar{v}_x$, для различных значений координаты x находят такие y , которые удовлетворяют соотношению (14.39).

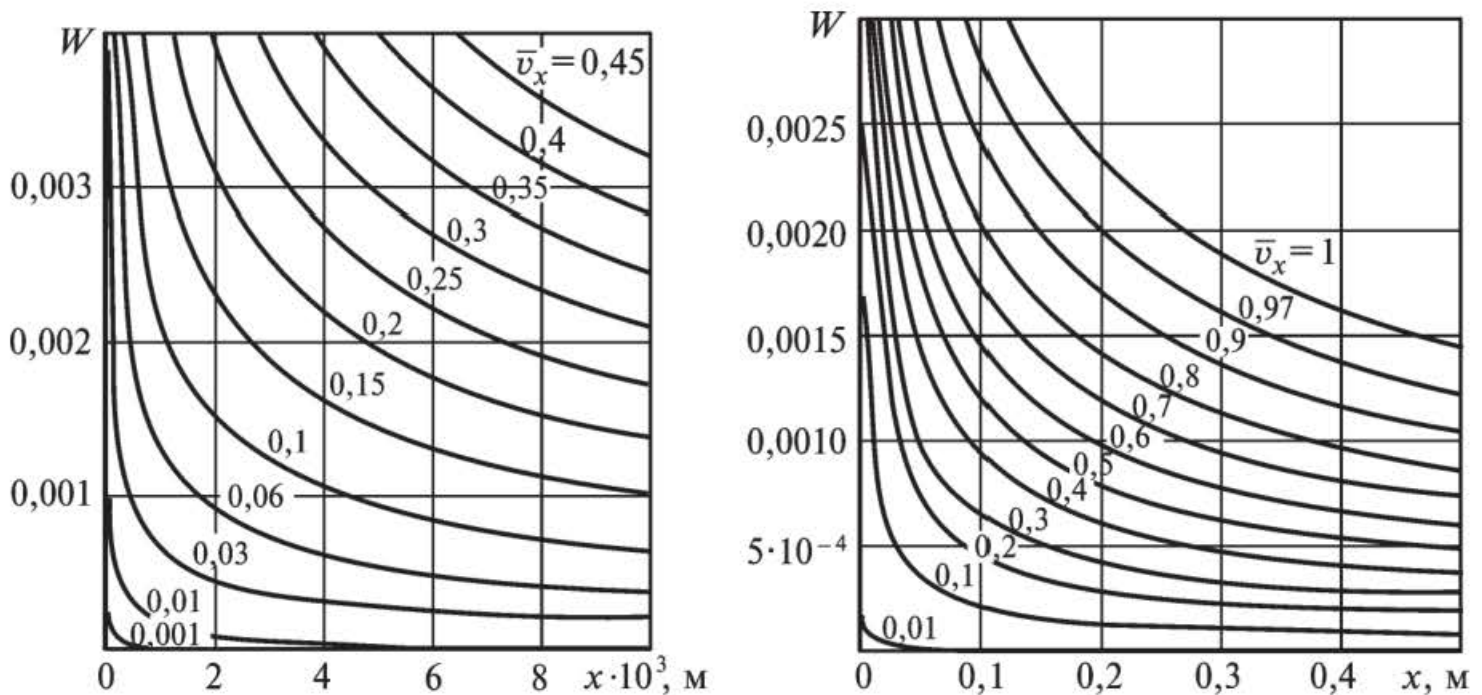
Анализ распределения изотак позволяет заключить, что все они ($0 \leq \bar{v}_x \leq 1$) возникают на поверхности стенки в точке $x = 0, y = 0$. Изотака нулевой скорости $\bar{v}_x = 0$ совпадает с осью x . Изотака единичной скорости $\bar{v}_x = 1$ совпадает с линией динамического пограничного

Р и с. 14.9. Графики распределения изотак в динамическом пограничном слое
($Pr = \nu/a = 1, v = 5 \text{ м/с}$)



слоя. Отмечается их сгущение вблизи стенки и разрежение вблизи границы, отделяющей возмущенный поток от невозмущенного.

На основе рис. 14.9 по соотношению $W = \Delta y / \Delta x$ определяют скорости перемещения изотак по координате y в зависимости от координаты x (рис. 14.10). Их анализ позволяет сделать вывод о том, что максимальную скорость перемещения имеет единичная изотаха, а скорость перемещения нулевой равна нулю. Все они возникают на поверхности стенки в точке $x = 0, y = 0$, имея при этом бесконечно



Р и с. 14.10. Графики изменения скоростей движения изотак по координате y в зависимости от координаты $x, v = 5 \text{ м/с}$

большие начальные скорости. Затем по мере продвижения по координате y в зависимости от координаты x скорости существенно уменьшаются с последующей стабилизацией изменения по закону, близкому к линейному. Отметим, что наибольший градиент скорости имеют изотакти малого потенциала на относительно небольшом расстоянии по координате x .

Для повышения точности решения задачи (14.19)—(14.24) необходимо увеличивать степень полинома (14.37). Для определения вновь возникающих при этом неизвестных коэффициентов $a_k(\delta)$ будем привлекать дополнительные граничные условия. Принцип их нахождения заключается в следующем. Для получения первого из них уравнение (14.19) применяют в точке $y = 0$. Именно таким путем было получено дополнительное граничное условие (14.24). Для получения второго дополнительного граничного условия применим уравнение (14.19) в точке $y = \delta(x)$

$$\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_{y=\delta} + \left(v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \left(v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=\delta}. \quad (14.43)$$

Продифференцируем граничное условие (14.22) по переменной x . Так как из (14.22) находим значение $v_x(y)$ в точке $y = \delta(x)$, то y является функцией x , и, следовательно, $v_x(y)$ будет сложной функцией. Тогда по правилу определения производной от сложной функции будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_x(y)]_{y=\delta} = \left[\frac{\partial v_x(y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right]_{y=\delta} + \frac{\partial v_x(y)}{\partial x} \Big|_{y=\delta} = 0.$$

Последнее соотношение с учетом граничного условия (14.23) примет вид

$$\frac{\partial v_x(y)}{\partial x} \Big|_{y=\delta} = 0. \quad (14.44)$$

Уравнение (14.43) с учетом (14.23) и (14.44) будет

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=\delta} = 0. \quad (14.45)$$

Соотношение (14.45) представляет второе дополнительное граничное условие, из которого следует, что подчинение решения вида (14.37) этому условию равносильно выполнению уравнения (14.19) во всех точках $y = \delta(x)$.

Для получения последующих дополнительных граничных условий необходимо дифференцировать (многократно) уравнение (14.19) по переменной y , а граничные условия (основные и дополнительные) — по переменной x . Сравнивая получающиеся при этом соотношения, можно получить какое угодно число дополнительных граничных условий, необходимых для нахождения как можно более точных аналитических решений уравнений (14.19), (14.20). Например, для получения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (14.19) по переменной y и запишем полученное соотношение для точки $y = \delta(x)$:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=\delta} = v \left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} \right)_{y=\delta}. \quad (14.46)$$

Соотношение (14.46) с учетом (14.22), (14.23), (14.45) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} \right)_{y=\delta} = \frac{v}{v} \left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} \right)_{y=\delta}. \quad (14.47)$$

Продифференцируем граничное условие (14.23) по переменной x , учитывая, что v_x — сложная функция:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=\delta} = \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \frac{dy}{dx} \right]_{y=\delta} + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} \right)_{y=\delta} = 0.$$

Последнее соотношение с учетом (14.45) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} \right)_{y=\delta} = 0. \quad (14.48)$$

Сравнивая (14.47) и (14.48), получаем третье дополнительное граничное условие

$$\left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} \right)_{y=\delta} = 0. \quad (14.49)$$

По физическому смыслу оно означает выполнение на границе динамического пограничного слоя соотношения, полученного после определения первой производной по переменной y от уравнения (14.19).

Для получения четвертого дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (14.19) по переменной y и запишем полученное соотношение для точки $y = 0$:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = v \left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} \right)_{y=0}. \quad (14.50)$$

Учитывая уравнение неразрывности (14.20) и граничное условие (14.21), соотношение (14.50) приводим к виду

$$\left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0. \quad (14.51)$$

Соотношение (14.51) представляет четвертое дополнительное граничное условие.

Для получения следующих двух дополнительных граничных условий необходимо продифференцировать уравнение (14.19) дважды по переменной y и записать полученные соотношения для точек $y = 0$ и $y = \delta(x)$. Сравнивая их с соотношениями, найденными посредством дифференцирования граничных условий (14.24) и (14.45) по переменной x , находим следующие два дополнительных граничных условия:

$$\left(\frac{\partial^4 v_x}{\partial y^4} \right)_{y=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial^4 v_x}{\partial y^4} \right)_{y=\delta} = 0. \quad (14.52)$$

Аналогично можно получить сколько угодно дополнительных граничных условий.

Физический смысл дополнительных граничных условий заключается в выполнении исходного дифференциального уравнения (14.19) и выражений, полученных после определения производных различной степени от него, в точках $y = 0$ и $y = \delta(x)$ (на линии динамического пограничного слоя — фронте гидравлического возмущения). Ввиду того что перемещение фронта гидравлического возмущения охватывает весь диапазон изменения переменной y , то, следовательно, для всех значений переменной x , которым соответствуют значения переменной y , обозначающие линию динамического пограничного слоя, уравнение (14.19) выполняется точно. Таким образом, благодаря использованию дополнительных граничных условий можно существенно повысить точность выполнения исходного дифференциального уравнения, несмотря на то, что функция $\delta(x)$ определяется из интегрального уравнения (14.36), которое в любом приближении выполняется точно. При этом точность выполнения уравнения (14.19) будет зависеть от числа дополнительных граничных условий — числа приближений (числа членов ряда (14.37)).

Для получения решения задачи (14.19)—(14.24) во втором приближении подставим соотношение (14.37), ограничиваясь шестью членами ряда, в основные (14.21)—(14.23) и дополнительные (14.24), (14.45), (14.49) граничные условия. Относительно неизвестных коэффициентов $a_k(\delta)$ ($k = \overline{0, 5}$) будем иметь систему шести алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из ее решения коэффициенты $a_k(\delta)$ в соотношение (14.37), находим

$$\frac{v_x}{v} = \frac{5}{2} \frac{y}{\delta} - 5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + 5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^5. \quad (14.53)$$

Подставляя (14.53) в интегральное уравнение (14.36), относительно неизвестной функции $\delta(x)$ имеем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{99}{2} \frac{v}{v}. \quad (14.54)$$

Интегрируя его, при начальном условии $\delta(0) = 0$ находим

$$\delta(x) = 7,0356 \sqrt{vx/v} = \frac{7,0356x}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (14.55)$$

Соотношения (14.53), (14.55) представляют решение задачи (14.19)—(14.24) во втором приближении. Анализ результатов расчетов по формуле (14.53) в сравнении с первым приближением и точным решением (см. рис. 14.7) позволяет заключить, что максимальное расхождение составляет около 2%. Важным является тот факт, что произошло значительное повышение точности на участках координаты y , расположенных вблизи границы пограничного слоя ($5 \leq \eta \leq 6$).

Для получения решения в третьем приближении были использованы следующие дополнительные граничные условия:

$$\left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial^4 v_x}{\partial y^4} \right)_{y=\delta} = 0; \quad \left(\frac{\partial^5 v_x}{\partial y^5} \right)_{y=\delta} = 0. \quad (14.56)$$

Граничные условия (14.21)—(14.24), (14.45), (14.49), (14.52), (14.56) позволяют определить уже девять неизвестных коэффициентов $a_k(\delta)$ ($k = \overline{0, 8}$) ряда (14.37). Подставляя (14.37) в перечисленные граничные условия, относительно $a_k(\delta)$ получим систему девяти алгебраических линейных уравнений. С учетом найденных значений коэффициентов $a_k(\delta)$ соотношение (14.37) принимает вид

$$\frac{v_x}{v} = \frac{8}{3} \frac{y}{\delta} - \frac{70}{3} \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + 56 \left(\frac{y}{\delta}\right)^5 - 56 \left(\frac{y}{\delta}\right)^6 + \frac{80}{3} \left(\frac{y}{\delta}\right)^7 - 5 \left(\frac{y}{\delta}\right)^8. \quad (14.57)$$

Подставляя (14.57) в интегральное уравнение (14.36), относительно неизвестной функции $\delta(x)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\delta d\delta/dx = 3978v/131v. \quad (14.58)$$

Разделяя переменные в уравнении (14.58) и интегрируя, при начальном условии $\delta(0) = 0$ получаем

$$\delta(x) = 7,7931\sqrt{vx/v} = 7,7931x / \sqrt{\text{Re}_x}. \quad (14.59)$$

Соотношения (14.57), (14.59) представляют решение задачи (14.19)—(14.24) в третьем приближении. Анализ результатов расчетов по формуле (14.57) в сравнении с точным решением (см. рис. 14.7) позволяет заключить, что безразмерные скорости, полученные по формуле (14.57), на большей части изменения безразмерной координаты $\eta = y\sqrt{v/vx}$ ($0 \leq \eta \leq 7,0$) практически совпадают с точными их значениями, и лишь на участке $4,0 \leq \eta \leq 5,0$ максимальное расхождение составляет около 1 %.

Найдем решение задачи (14.19)—(14.24) в четвертом приближении. Дополнительные граничные условия в данном случае имеют вид

$$\left(\frac{\partial^4 v_x}{\partial y^4}\right)_{y=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial^6 v_x}{\partial y^6}\right)_{y=\delta} = 0; \quad \left(\frac{\partial^7 v_x}{\partial y^7}\right)_{y=\delta} = 0. \quad (14.60)$$

Отметим, что в каждом приближении используют три дополнительных граничных условия — одно задается при $y = 0$, а два других — при $y = \delta(x)$. Использование меньшего числа дополнительных граничных условий не приводит к заметному повышению точности решения в данном приближении.

Подставляя (14.37) во все основные и дополнительные граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов $a_k(\delta)$ ($k = \overline{0, 11}$) будем иметь систему двенадцати алгебраических линейных уравнений. После определения a_k соотношение (14.37) примет вид

$$\frac{v_x}{v} = \frac{11}{4} \frac{y}{\delta} - \frac{231}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^5 + 462 \left(\frac{y}{\delta}\right)^6 - 825 \left(\frac{y}{\delta}\right)^7 + 825 \left(\frac{y}{\delta}\right)^8 - \frac{1925}{4} \left(\frac{y}{\delta}\right)^9 + 154 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{10} - 21 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{11}. \quad (14.61)$$

Подставляя (14.61) в (14.36), относительно $\delta(x)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\delta d\delta/dx = 89148v/2615v. \quad (14.62)$$

Отметим, что обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $\delta(x)$ в любом приближении отличаются друг от друга лишь числовым коэффициентом (см. уравнения (14.40), (14.54), (14.58), (14.62)), что значительно упрощает процесс получения их решений.

Интегрируя уравнение (14.62), при начальном условии $\delta(0) = 0$ находим

$$\delta(x) = 8,25724\sqrt{vx/v} = 8,25724x / \sqrt{Re_x}. \quad (14.63)$$

Соотношения (14.61), (14.63) представляют решение задачи (14.19)—(14.24) в четвертом приближении. Результаты расчетов безразмерных скоростей по формуле (14.61) (табл. 14.1) показывают, что расхождение с точным решением не превышает 0,01 %. Сравнение результатов расчетов безразмерных скоростей в первом и четвертом приближениях дано на рис. 14.8.

Т а б л и ц а 14.1

η	$\frac{v_x}{v}$ по формуле (14.61)	$\frac{v_x}{v}$ точное решение
1	0,3312	0,3298
2	0,6312	0,6298
3	0,8444	0,8461
4	0,9539	0,9555
5	0,9918	0,9916
6	0,9994	0,9989
7	0,99999	0,99992

По известной толщине пограничного слоя можно найти формулу для касательного напряжения трения на поверхности пластины и та-

ким образом оценить сопротивление, оказываемое твердой поверхностью движущейся жидкости при ламинарном режиме. Подставляя (14.61) в формулу закона Ньютона для касательного напряжения (14.6), находим

$$\tau_{\text{ст}} = \mu(\partial v_x / \partial y)_{y=0} = 2,75\mu v / \delta(x).$$

После подстановки в последнее соотношение формулы для толщины динамического пограничного слоя (14.63) получаем

$$\tau = 0,331 \rho v^2 / \sqrt{\text{Re}_x}.$$

Отличие коэффициента 0,331 от точного его значения 0,332 составляет 0,1 %. Отметим, что в первом приближении он равен 0,323 (отличие от точного около 3 %).

§ 14.5. Аналитические решения уравнений теплового пограничного слоя при граничных условиях первого рода на стенке

Теплообмен в тепловом пограничном слое (см. рис. 14.4, 14.5) описывается уравнением энергии, известным под названием уравнения Польшаузена:

$$v_x \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} + v_y \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2}. \quad (14.64)$$

Граничные условия для уравнения (14.64) определяют соотношениями:

$$t(x, 0) = t_{\text{ст}}; \quad (14.65)$$

$$t(x, \Delta) = t_c; \quad (14.66)$$

$$\partial t(x, \Delta) / \partial y = 0, \quad (14.67)$$

где соотношения (14.66), (14.67) представляют условия сопряжения прогретой и не прогретой зон. Условие (14.66) означает, что температура на границе теплового пограничного слоя (на границе фронта температурного возмущения) равна температуре невозмущенного потока t_c . Согласно условию (14.67) тепловой поток не распространяется за пределы пограничного слоя.

Для получения еще одного граничного условия запишем уравнение (14.64) применительно к точке $y = 0$. Так как в этом случае

$v_x(0) = v_y(0) = 0$, то получим дополнительное граничное условие вида (по сути это есть первое дополнительное граничное условие):

$$\frac{\partial^2 t(x,0)}{\partial y^2} = 0. \quad (14.68)$$

Потребуем, чтобы искомое решение удовлетворяло не уравнению (14.64), а некоторому осредненному, т. е. уравнению (14.64), проинтегрированному по переменной y в пределах толщины теплового пограничного слоя $\Delta(x)$:

$$\int_0^{\Delta} v_x \frac{\partial t(x,y)}{\partial x} dy + \int_0^{\Delta} v_y \frac{\partial t(x,y)}{\partial y} dy = a \int_0^{\Delta} \frac{\partial^2 t(x,y)}{\partial y^2} dy. \quad (14.69)$$

Определяя интегралы в (14.69), получаем следующее интегральное уравнение (интеграл теплового баланса):

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} v_x [t_c - t(x,y)] dy = a \frac{\partial t(x,0)}{\partial y}. \quad (14.70)$$

Уравнение (14.70) можно также получить из рассмотрения балансовых соотношений по тепловым потокам в пределах теплового пограничного слоя. Таким путем его впервые получил Г.Н. Кружилин в 1936 г.

Введем избыточную температуру по соотношению $T = t - t_{ст}$. Тогда $T_c = t_c - t_{ст}$. Интегральное уравнение (14.70) и граничные условия (14.65)—(14.67) для избыточной температуры примут вид:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} v_x [T_c - T(x,y)] dy = a \frac{\partial T(x,0)}{\partial y}; \quad (14.71)$$

$$T(x, 0) = 0; \quad (14.72)$$

$$T(x, \Delta) = T_c; \quad (14.73)$$

$$\frac{\partial T(x, \Delta)}{\partial y} = 0; \quad (14.74)$$

$$\frac{\partial^2 T(x,0)}{\partial y^2} = 0. \quad (14.75)$$

Сопоставляя уравнения (14.19) и (14.64), можно убедиться, что при $\nu = a$ ($Pr = \nu/a = 1$) по форме записи эти уравнения полностью совпадают. Если привести математические постановки задач к безразмерному виду (см. § 14.1), то полностью идентичными оказываются

ся и граничные условия. Это означает, что безразмерные решения этих двух задач будут одинаковыми, а размерные распределения скоростей и температур вдоль оси x взаимно подобны. Следовательно, отношение теплового и динамического слоев не зависит от координаты x . Это условие будет использовано далее при решении обыкновенных дифференциальных уравнений относительно толщины теплового пограничного слоя $\Delta(x)$.

Возникновение пограничных слоев (динамического и теплового) обусловлено переносом импульса и теплоты по направлению поперечной координаты y . Следовательно, толщина каждого из них определяется интенсивностью соответствующего процесса переноса. Так как характеристикой интенсивности переноса импульса является кинематический коэффициент вязкости, а теплоты — коэффициент температуропроводности, то соотношение толщин этих слоев должно зависеть от соотношения коэффициентов переноса, т.е. от числа $Pr = \nu/a$. Чем больше значение критерия Прандтля, тем более интенсивным является поперечный перенос импульса по сравнению с переносом теплоты и, следовательно, тем больше в этом случае будет толщина динамического слоя по сравнению с тепловым.

Ввиду того что толщины динамического и теплового пограничных слоев должны подчиняться условию $\Delta(x) \leq \delta(x)$, то критерий Прандтля должен быть $Pr \geq 1$. Последнее условие приближенно выполняется для газов ($Pr \approx 0,75$) и неэлектропроводных жидкостей ($Pr > 1$) и не выполняется для жидких металлов ввиду высокого значения коэффициента температуропроводности ($10^{-3} \leq Pr \leq 10^{-2}$).

Решение задачи (14.71)—(14.75) принимаем в виде

$$T(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k(\Delta) y^k, \quad (14.76)$$

где $a_k(\Delta)$ — неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (14.72)—(14.75); $\Delta(x)$ — толщина теплового пограничного слоя.

Ввиду подобия гидравлической и тепловой задач по аналогии с (14.39) для функции $T(x, y)$ можно записать:

$$\frac{T}{T_c} = \frac{3}{2} \frac{y}{\Delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^3. \quad (14.77)$$

Подставляя (14.77) и (14.39) в интегральное уравнение (14.71), находим

$$\frac{d}{dx} \left\{ T_c v \delta \left[\frac{3}{20} \left(\frac{\Delta}{\delta} \right)^2 - \frac{3}{280} \left(\frac{\Delta}{\delta} \right)^4 \right] \right\} = a \frac{dT(x,0)}{dy}. \quad (14.78)$$

Дифференцируя (14.77) по переменной y , применительно к $y = 0$ будем иметь

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial y} = \frac{3}{2} \frac{T_c}{\Delta}. \quad (14.79)$$

Если принять $\Delta < \delta$, то вторым членом в левой части уравнения (14.78) можно пренебречь. Тогда соотношение (14.78) с учетом (14.79) примет вид

$$\frac{3}{20} v \frac{d}{dx} (\beta^2 \delta) = \frac{3}{2} \frac{a}{\beta \delta}, \quad (14.80)$$

где $\beta = \Delta/\delta$.

Ввиду независимости величины β от координаты x $d\beta/dx = 0$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{10} v \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a. \quad (14.81)$$

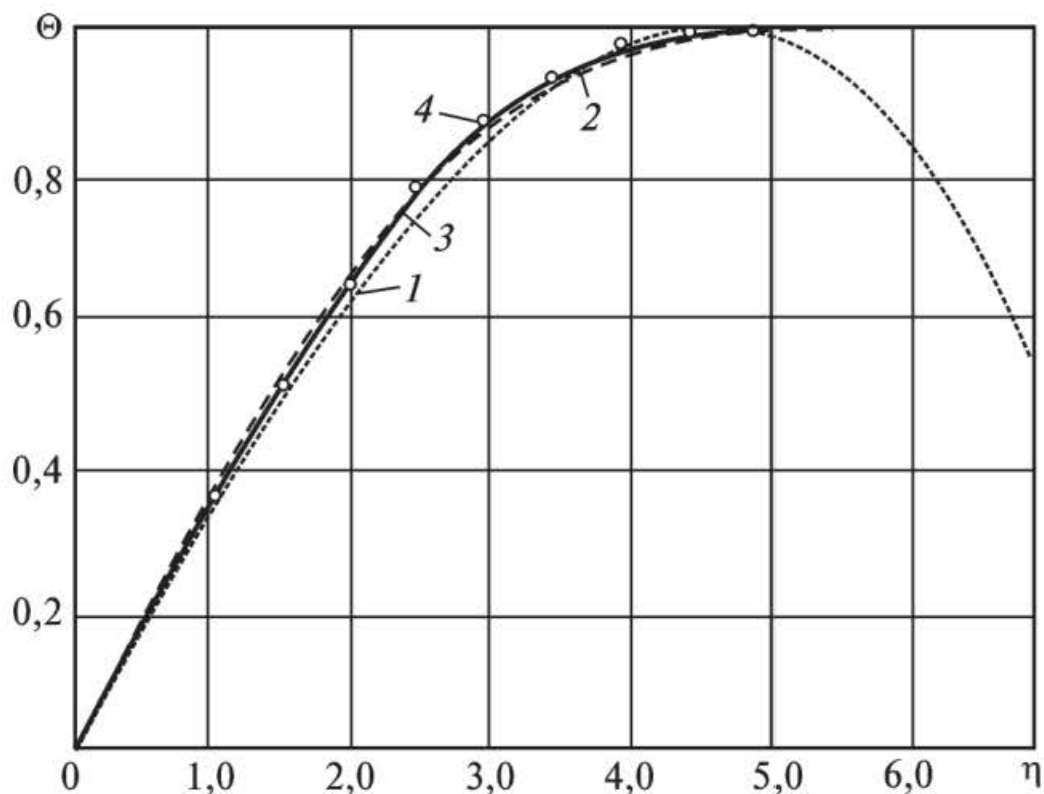
Подставляя (14.41) в (14.81), находим

$$\Delta(x) = \frac{4,64x}{\sqrt{\frac{vx}{v}} \sqrt[3]{\frac{v}{a}}}. \quad (14.82)$$

Соотношения (14.77), (14.82) определяют решение задачи (14.64)—(14.67) в первом приближении. Анализ результатов расчетов относительных избыточных температур $\Theta = T/T_c = (t - t_{ст})/(t_c - t_{ст})$ по формуле (14.77) в сравнении с точным решением (рис. 14.11) приводит к заключению о том, что расхождение составляет 5...11 %. Причем максимальное расхождение наблюдается вблизи верхней границы теплового пограничного слоя.

Для повышения точности решения введем дополнительные граничные условия. Метод их получения аналогичен рассмотренному ранее. И в частности, применяя уравнение (14.64) к точке $y = \Delta(x)$, с учетом (14.67) находим

$$\frac{\partial t(x, \Delta)}{\partial x} = \frac{a}{v_x} \frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial y^2}. \quad (14.83)$$



Р и с. 14.11. Распределение безразмерных температур $\Theta = T/T_c$ в зависимости от безразмерной координаты $\eta = y\sqrt{v/vx}$:

1, 2, 3 — соответственно первое, второе и третье приближения; 4 — точное решение

Дифференцируя (14.66) по переменной x и сравнивая полученное соотношение с (14.83), находим второе дополнительное граничное условие (первым из них является соотношение (14.68)):

$$\frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial y^2} = 0. \quad (14.84)$$

Для получения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (14.64) по переменной y и применим полученное соотношение для точки $y = \Delta(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial t(x, \Delta)}{\partial x} + v_x \frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial t(x, \Delta)}{\partial y} + \\ + v_y \frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial y^2} = a \frac{\partial^3 t(x, \Delta)}{\partial y^3}. \end{aligned} \quad (14.85)$$

Соотношение (14.85) с учетом (14.23), (14.67), (14.68) примет вид

$$\frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial x \partial y} = \frac{a}{v_x} \frac{\partial^3 t(x, \Delta)}{\partial y^3}. \quad (14.86)$$

Дифференцируя (14.67) по переменной x и сравнивая полученное соотношение с (14.86), находим третье дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^3 t(x, \Delta)}{\partial y^3} = 0. \quad (14.87)$$

Подставляя (14.76), ограничиваясь шестью членами ряда, в граничные условия (14.72)—(14.75), (14.84), (14.87), относительно неизвестных коэффициентов a_k ($k = 0, 5$) будем иметь систему шести алгебраических линейных уравнений (отметим, что все дополнительные граничные условия для функций T и t идентичны). Подставляя найденные из ее решения значения коэффициентов a_k в (14.76), находим

$$\frac{T(x, y)}{T_c} = \frac{5}{2} \frac{y}{\Delta} - 5 \left(\frac{y}{\Delta} \right)^3 + 5 \left(\frac{y}{\Delta} \right)^4 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^5. \quad (14.88)$$

Подставляя (14.88) и (14.53) в интегральное уравнение (14.71), после определения интегралов относительно неизвестной функции $\Delta(x)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{v}{5544} \frac{d}{dx} \left(660 \frac{\Delta^2}{\delta} + 77 \frac{\Delta^5}{\delta^4} - 165 \frac{\Delta^4}{\delta^3} - 12 \frac{\Delta^6}{\delta^5} \right) = \frac{5}{2} \frac{a}{\Delta}. \quad (14.89)$$

Ввиду того что $\Delta < \delta$, вторым, третьим и четвертым членами в левой части соотношения (14.89) можно пренебречь. Тогда (14.89) примет вид

$$\frac{165}{1388} v \frac{d}{dx} (\beta^2 \delta) = \frac{5}{2} \frac{a}{\beta \delta}. \quad (14.90)$$

Так как величина $\beta = \Delta/\delta$ не зависит от x , то уравнение (14.90) приводим к виду

$$\frac{1}{21} v \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a. \quad (14.91)$$

Подставляя (14.55) в (14.91), находим

$$\Delta(x) = \frac{6,661x}{\sqrt{\frac{vx}{v}} \sqrt[3]{\frac{v}{a}}}. \quad (14.92)$$

Соотношения (14.88), (14.92) представляют решение задачи (14.64)—(14.67) во втором приближении. Анализ результатов расчетов безразмерных температур по формуле (14.88) (см. рис. 14.11) позволяет заключить, что уточнение решения во втором приближении

по сравнению с первым составляет около 3 % для $0,5 \leq \eta \leq 3,0$, а вблизи границы теплового пограничного слоя $\eta > 5,0$ оно практически совпадает с точным.

Соотношение (14.88) точно удовлетворяет всем основным (14.65)—(14.67) и дополнительным (14.75), (14.84), (14.87) граничным условиям, а также интегральному уравнению (14.71). По сравнению с первым приближением в данном случае наблюдаем более точное решение уравнения (14.64) благодаря дополнительным граничным условиям, согласно которым оно точно выполняется в точках $y = 0$ и $y = \Delta(x)$, т.е. на границе фронта температурного возмущения. Так как фронт температурного возмущения изменяется в диапазоне всего рассматриваемого участка координаты y , то, следовательно, уточнение уравнения (14.64) происходит внутри всей области изменения искомой функции.

Найдем дополнительные граничные условия, необходимые для получения решения задачи в третьем приближении. Для этого продифференцируем уравнение (14.64) по переменной y и запишем полученное соотношение для точки $y = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial t(x,0)}{\partial x} + v_x \frac{\partial^2 t(x,0)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial t(x,0)}{\partial y} + \\ + v_y \frac{\partial^2 t(x,0)}{\partial y^2} = a \frac{\partial^3 t(x,0)}{\partial y^3}. \end{aligned} \quad (14.93)$$

Продифференцируем граничное условие (14.65) по переменным x и y :

$$\frac{\partial t(x,0)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial t(x,0)}{\partial y} = 0. \quad (14.94)$$

Соотношение (14.93) с учетом (14.21) и (14.94) приводим к виду

$$\frac{\partial^3 t(x,0)}{\partial y^3} = 0. \quad (14.95)$$

Соотношение (14.95) представляет первое дополнительное граничное условие третьего приближения.

Аналогично, путем двух- и трехкратного дифференцирования уравнения (14.64) по переменной y и сравнения полученных соотношений с основными и дополнительными граничными условиями и производными от них по переменным x и y применительно к точке

$y = \Delta(x)$ получаем второе и третье дополнительные граничные условия:

$$\frac{\partial^4 t(x, \Delta)}{\partial y^4} = 0; \quad \frac{\partial^5 t(x, \Delta)}{\partial y^5} = 0. \quad (14.96)$$

Граничные условия (14.72)—(14.75), (14.84), (14.87), (14.95), (14.96) позволяют найти уже девять неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ ($k = 0, 8$) ряда (14.76). Подставляя (14.76) в перечисленные граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ получим систему девяти алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из ее решения значения коэффициентов $a_k(\Delta)$ в (14.76), находим

$$\frac{T(x, y)}{T_c} = \frac{8}{3} \frac{y}{\Delta} - \frac{70}{3} \left(\frac{y}{\Delta}\right)^4 + 56 \left(\frac{y}{\Delta}\right)^5 - 56 \left(\frac{y}{\Delta}\right)^6 + \frac{80}{3} \left(\frac{y}{\Delta}\right)^7 - 5 \left(\frac{y}{\Delta}\right)^8. \quad (14.97)$$

Отметим, что в третьем приближении, как и во всех предыдущих, формулы для безразмерных температур и скоростей полностью совпадают, что можно объяснить полной аналогией интегральных уравнений (14.36) и (14.71), а также всех основных и дополнительных граничных условий.

Подставляя (14.97) в интегральное уравнение (14.71), относительно неизвестной функции $\Delta(x)$ приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx} \left\{ -\frac{v}{196911} \left[-19448 \frac{\Delta^2}{\delta} + 3672 \frac{\Delta^7}{\delta^6} + 99 \frac{\Delta^9}{\delta^8} + 6644 \frac{\Delta^5}{\delta^4} - \right. \right. \quad (14.98)$$

$$\left. \left. -7344 \frac{\Delta^6}{\delta^5} - 935 \frac{\Delta^8}{\delta^7} \right] \right\} = \frac{8}{3} \frac{a}{\Delta}.$$

Так как $\Delta < \delta$, то всеми членами, кроме первого, в левой части уравнения (14.98) можно пренебречь. Тогда оно примет вид

$$\frac{19448}{196911} v \left[\frac{d}{dx} (\beta^2 \delta) \right] = \frac{8}{3} \frac{a}{\beta \delta}. \quad (14.99)$$

Учитывая, что $\beta = \Delta/\delta$ не зависит от x , находим

$$\frac{1}{27} v \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a. \quad (14.100)$$

Подставляя в (14.100) соотношение (14.59), получаем

$$\Delta(x) = \frac{7,491x}{\sqrt{\frac{vx}{v}} \sqrt[3]{\frac{v}{a}}}. \quad (14.101)$$

Соотношения (14.97), (14.101) представляют решение задачи (14.64)—(14.67) в третьем приближении. Анализ результатов расчетов по формуле (14.97) в сравнении с точным решением (см. рис. 14.11) позволяет заключить, что отклонение не превышает 2 %.

Дополнительные граничные условия, необходимые для получения решения задачи (14.64)—(14.67) в четвертом приближении, по форме аналогичны условиям (14.60). После определения неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ ($k = \overline{0, 11}$) соотношение (14.76) по аналогии с (14.61) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_c} = & \frac{11}{4} \frac{y}{\Delta} - \frac{231}{2} \frac{y^5}{\Delta^5} + 462 \frac{y^6}{\Delta^6} - 825 \frac{y^7}{\Delta^7} + 825 \frac{y^8}{\Delta^8} - \\ & - \frac{1925}{4} \frac{y^9}{\Delta^9} + 154 \frac{y^{10}}{\Delta^{10}} - 21 \frac{y^{11}}{\Delta^{11}}. \end{aligned} \quad (14.102)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\Delta(x)$ в данном случае будет

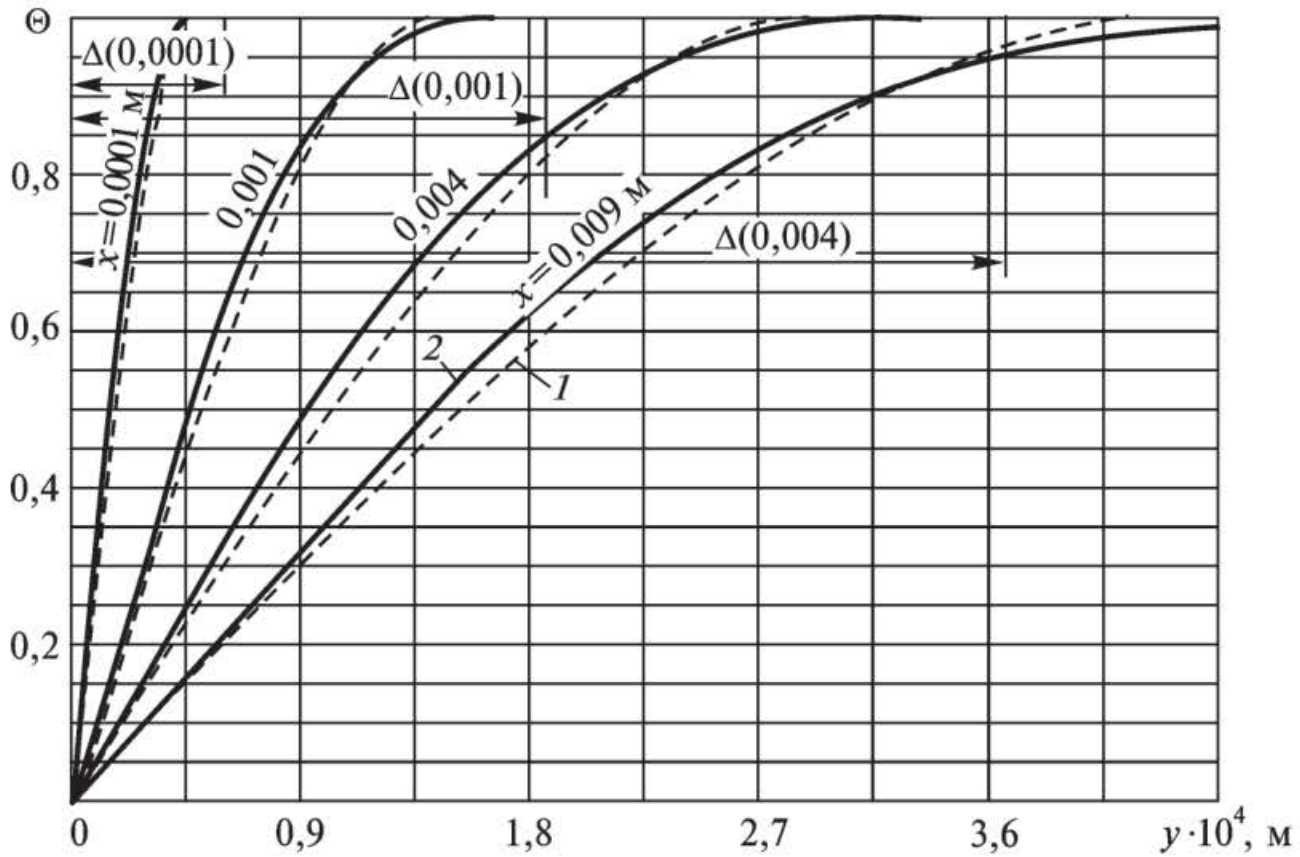
$$\frac{5}{156} v \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a. \quad (14.103)$$

Подставляя (14.63) в (14.103), находим

$$\Delta(x) = \frac{8,017x}{\sqrt{\frac{vx}{v}} \sqrt[3]{\frac{v}{a}}}. \quad (14.104)$$

Соотношения (14.102), (14.104) представляют решение задачи (14.64)—(14.67) в четвертом приближении. Результаты расчетов по формуле (14.102) показывают, что расхождение с точным решением не превышает 0,01 %. Сравнение результатов расчетов безразмерных температур в первом и четвертом приближениях дано на рис. 14.12.

Анализируя результаты расчетов по формулам (14.102) и (14.61) при $Pr = 1$, можно заключить, что расхождение не превышает 0,01 %. Отсюда следует, что безразмерные значения скоростей и температур



Р и с. 14.12. Изменение безразмерных температур $\Theta = T/T_c$ в пределах теплового пограничного слоя:

1 — по формуле (14.77); 2 — по формуле (14.102)

согласно гидродинамической теории теплообмена (см. § 14.1) практически совпадают.

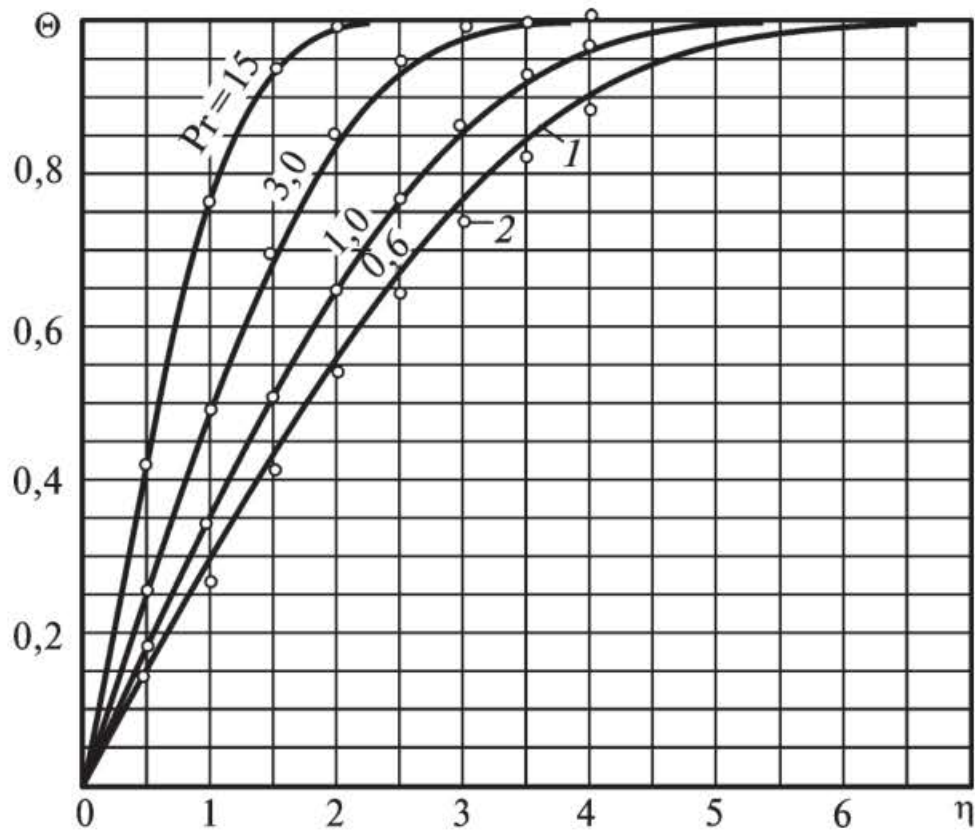
На рис. 14.13 даны результаты расчетов по формуле (14.102) для различных значений критерия Прандтля в сравнении с точным решением. Как видно из рисунка, для $Pr = 1,0; 3,0; 15,0$ полученные по формуле (14.102) значения безразмерных температур практически совпадают с точными. Расхождение результатов, составляющее около 3 %, наблюдается для $Pr = 0,6$, т.е. для газов.

На основе полученных ранее зависимостей для скорости и температуры в пределах соответствующих пограничных слоев, используя дифференциальное уравнение конвективной теплоотдачи (14.18), можно определить коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{\lambda}{(T_c - T_{ст})} \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y}. \quad (14.105)$$

Если использовать решение в первом приближении (соотношение (14.77)), то для коэффициента теплоотдачи получим формулу

$$\alpha = 1,5 \frac{\lambda}{\Delta(x)}. \quad (14.106)$$



Р и с. 14.13. Распределение безразмерных температур $\Theta = T/T_c$ в зависимости от безразмерной координаты для различных значений критерия Прандтля ($Pr = \nu/a$):

1 — по формуле (14.102); 2 — точное решение

Для решения (14.102) в четвертом приближении будем иметь

$$\alpha = 2,75 \frac{\lambda}{\Delta(x)}. \quad (14.107)$$

Подставляя (14.82) в (14.106), находим

$$Nu_x = 0,3232 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}, \quad (14.108)$$

где Nu_x — критерий Нуссельта, $Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda}$; λ — коэффициент теплопроводности жидкости.

Подставляя (14.104) в (14.107), имеем

$$Nu_x = 0,3430 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}, \quad (14.109)$$

Отсюда следует, что расхождение коэффициентов в критериальных уравнениях теплоотдачи в первом и четвертом приближениях составляет 1,98 %.

§ 14.6. Аналитические решения уравнений теплового пограничного слоя при граничных условиях третьего рода на стенке

Ранее (см. § 14.5) было получено приближенное аналитическое решение задачи теплообмена применительно к тепловому пограничному слою при граничных условиях первого рода на стенке. Однако существенный интерес представляют задачи теплообмена для случаев, когда на стенке (со стороны окружающей среды) заданы граничные условия третьего рода (теплопроводностью стенки пренебрегаем). Математическая постановка задачи для динамического пограничного слоя в этом случае не изменяется и имеет вид (14.19)—(14.24), а для теплового слоя (рис. 14.14):

$$v_x \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} + v_y \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} \quad (0 \leq y \leq \Delta(x); \quad 0 \leq x < \infty); \quad (14.110)$$

$$\frac{\partial t(x, 0)}{\partial y} = \frac{\alpha}{\lambda} [t(x, 0) - t_{c1}]; \quad (14.111)$$

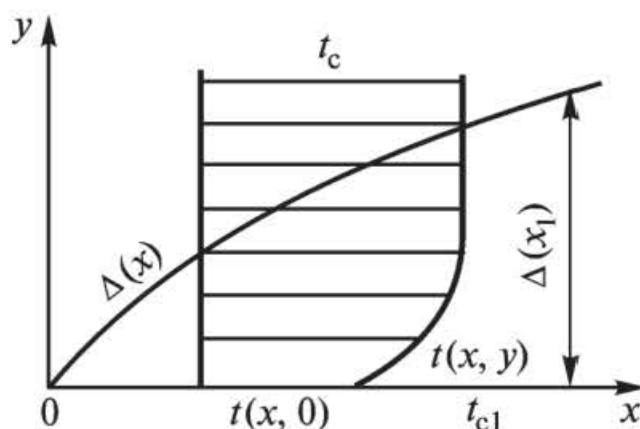
$$t(x, \Delta) = t_c; \quad (14.112)$$

$$\partial t(x, \Delta) / \partial y = 0; \quad (14.113)$$

$$\partial^2 t(x, 0) / \partial y^2 = 0, \quad (14.114)$$

где α — коэффициент теплоотдачи; λ — коэффициент теплопроводности жидкости; t_c — температура невозмущенного потока; t_{c1} — температура среды с противоположной поверхности стенки ($y = 0$) (теплопроводность стенки принимаем бесконечной, а ее толщиной пренебрегаем); $\Delta(x)$ — толщина теплового пограничного слоя.

Ввиду нелинейности задачи (14.110)—(14.114) ее точное аналитическое решение не получено. Известно лишь решение, найденное пу-



Р и с. 14.14. Схема теплового пограничного слоя при граничных условиях третьего рода на стенке

тем численного интегрирования уравнения (14.110). Осредняя его в пределах толщины теплового пограничного слоя, получаем следующее интегральное уравнение:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} v_x [t_c - t(x, y)] dy = a \frac{\partial t(x, 0)}{\partial y}. \quad (14.115)$$

Граничные условия для него остаются в виде (14.111)—(14.114).

Применительно к интегральному уравнению (14.115) с граничными условиями (14.111)—(14.114) с целью приведения граничного условия (14.111) к однородному введем избыточную температуру по формуле $T = t - t_{c1}$. Тогда $T_c = t_c - t_{c1}$. Уравнение (14.115) и граничные условия (14.111)—(14.114) примут вид:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} v_x [T_c - T(x, y)] dy = a \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y}; \quad (14.116)$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} - \frac{\alpha}{\lambda} T(x, 0) = 0; \quad (14.117)$$

$$T(x, \Delta) = T_c; \quad (14.118)$$

$$\partial T(x, \Delta) / \partial y = 0; \quad (14.119)$$

$$\partial^2 T(x, 0) / \partial y^2 = 0. \quad (14.120)$$

Решение задачи (14.116)—(14.120) принимаем в виде (14.76). После определения неизвестных $a_k(\Delta)$ ($k = \overline{0, 3}$) из граничных условий (14.117)—(14.120) соотношение (14.76) будет

$$\frac{T}{T_c} = \frac{1}{A} \left[3\lambda + \alpha y \left(3 - \frac{y^2}{\Delta^2} \right) \right], \quad (14.121)$$

где $A = 3\lambda + 2\alpha\Delta(x)$.

Подставляя (14.39) и (14.121) в интегральное уравнение (14.116), относительно неизвестной функции $\Delta(x)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\Delta^3 (\Delta^2 - 14\delta^2)}{\delta^3 A} \right] = - \frac{140a}{Av}. \quad (14.122)$$

Так как $\Delta < \delta$, то первым членом в его левой части можно пренебречь. Подставляя (14.41) в (14.122), а также учитывая введенное ранее допущение о том, что $\beta = \Delta(x)/\delta(x) = \text{const}$, получаем следующее соотношение для толщины теплового пограничного слоя:

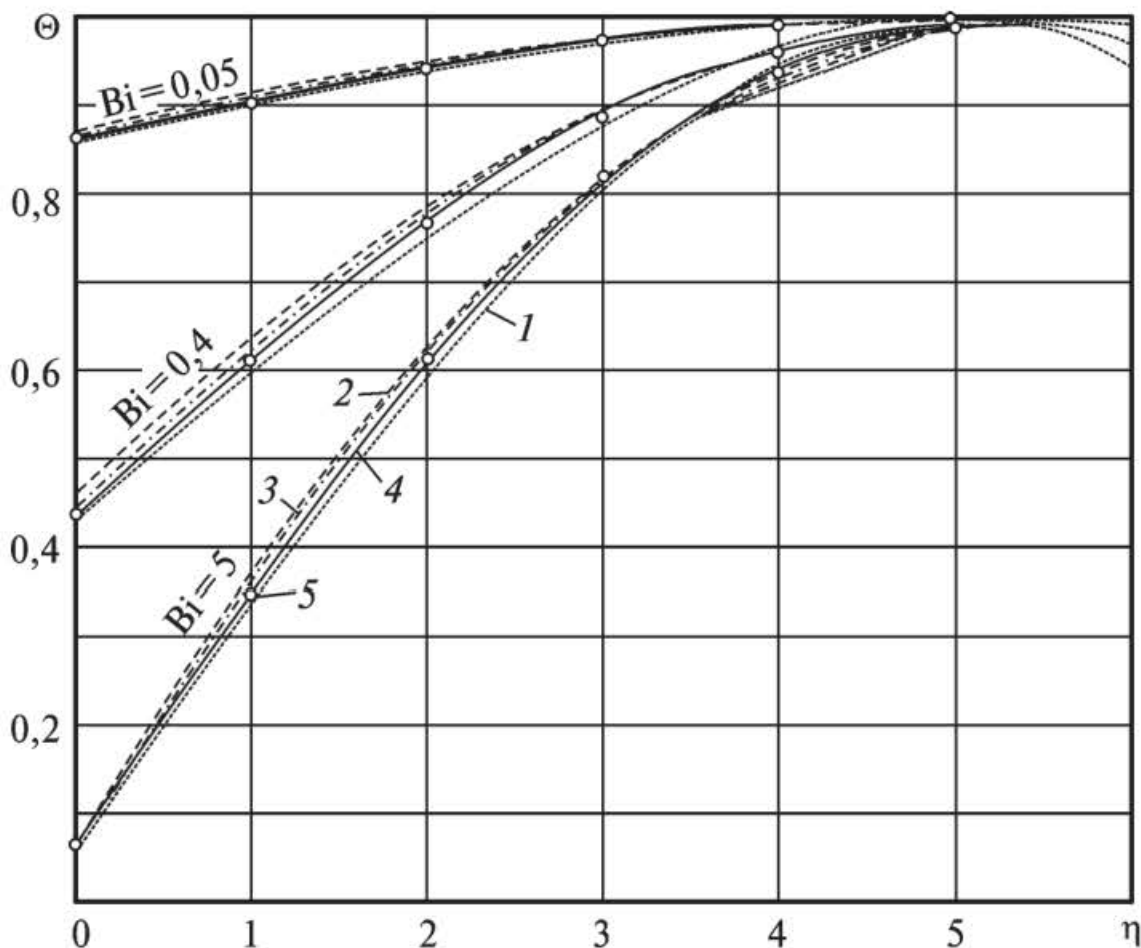
$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{A_1 \Delta^2}{xR} - \frac{A_2 \lambda^2 v}{\alpha^2 v R_1} \right) + \frac{27 \lambda^3 \alpha^3 v A_3}{v R A_4} = \frac{10a}{vA}, \quad (14.123)$$

где $A_1 = 0,053879310344$; $A_2 = 0,121228448275$; $A_3 = 55,68\lambda + 74,24\alpha\Delta$;
 $A_4 = (111,36\alpha^3\lambda R + 74,24\alpha^4 R_2 \Delta / R)^2$; $R = \sqrt{vx/v}$; $R_1 = \sqrt{(vx/v)^3}$;
 $R_2 = vx/v$.

Соотношение (14.123) для любых конкретных исходных данных позволяет найти $\Delta(x)$.

Соотношения (14.121), (14.123) представляют решение задачи (14.110)—(14.114) в первом приближении. Решение (14.121) в данном случае точно удовлетворяет интегральному уравнению (14.116), граничным условиям (14.111)—(14.114) и приближенно (в среднем) уравнению энергии (14.110). Результаты расчетов по формуле (14.121) в сравнении с точным решением (численное интегрирование уравнения (14.110)) представлены на рис. 14.15. Их анализ позволяет заключить, что максимальное расхождение не превышает 7 %.

Если положить $\alpha \rightarrow \infty$, то соотношение (14.111) приводится к граничному условию первого рода $t(x, 0) = t_{c1} = \text{const}$. Результаты расче-



Р и с. 14.15. Распределение безразмерных температур $\Theta = T/T_c = (t - t_{c1}) / (t_c - t_{c1})$ в зависимости от безразмерной координаты $\eta = y\sqrt{v/vx}$:

1, 2, 3, 4 — соответственно первое, второе, третье, четвертое приближения; 5 — точное решение;
 $Bi = \alpha\sqrt{vx/v}/\lambda$; $Pr = 0,72$

тов по формуле (14.121) для этого случая совпадают с результатами, получаемыми по формуле (14.77).

Для повышения точности найдем решение задачи во втором приближении с использованием дополнительных граничных условий, которых должно быть не менее трех. Первое такое условие вида (14.120) уже было использовано в первом приближении. Его физический смысл — выполнение уравнения (14.110) в точке $y = 0$. Так как в этой точке $v_x = v_y = 0$, то уравнение (14.110) приводим к соотношению (14.120). Принцип получения следующих дополнительных граничных условий аналогичен тому, который был применен ранее при решении задач для динамического и теплового пограничных слоев. И в частности, следующие два дополнительных граничных условия имеют вид:

$$\partial^2 T(x, \Delta) / \partial y^2 = 0; \quad \partial^3 T(x, \Delta) / \partial y^3 = 0. \quad (14.124)$$

Соотношение (14.76) после определения неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ ($k = 0, 5$) из граничных условий (14.117)—(14.120), (14.124) во втором приближении принимает вид

$$\frac{T}{T_c} = \frac{1}{B} \left[5\lambda + \alpha y \left(5 - 10 \frac{y^2}{\Delta^2} + 10 \frac{y^3}{\Delta^3} - 3 \frac{y^4}{\Delta^4} \right) \right], \quad (14.125)$$

где $B = 5\lambda + 2\alpha\Delta$.

Подставляя (14.53) и (14.125) в интегральное уравнение (14.116), относительно неизвестной функции $\Delta(x)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\Delta^3 (77\Delta^3 \delta - 165\Delta^2 \delta^2 - 12\Delta^4 + 660\delta^4)}{\delta^5 B} \right] = \frac{13860 a}{Bv}. \quad (14.126)$$

Так как по условию задачи $\Delta < \delta$, то первым, вторым и третьим членами левой части уравнения (14.126) можно пренебречь. С учетом этого допущения, а также того, что $\beta = \Delta/\delta = \text{const}$, после подстановки в него соотношения для толщины динамического пограничного слоя (14.55) получаем следующее соотношение:

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{C_1 \Delta^2}{xR} - \frac{C_2 \lambda^2 v}{\alpha^2 v R_1} \right) + \frac{125 \lambda^3 \alpha^3 v C_3}{v R C_4} = \frac{21a}{vB}, \quad (14.127)$$

где $C_1 = 0,0355335721189$; $C_2 = 0,222084825743$; $C_3 = 140,712\lambda + 112,5696\alpha\Delta$; $C_4 = (281,424\alpha^3 \lambda R + 112,5696\alpha^4 R_2 \Delta / R)^2$.

Соотношения (14.125), (14.127) представляют решение задачи (14.110)—(14.114) во втором приближении. Из анализа результатов

расчетов безразмерных температур по формуле (14.125) в сравнении с точным решением (см. рис. 14.15) следует, что расхождение уменьшилось с 7 % (в первом приближении) до 4 % (во втором).

В третьем приближении используют следующие дополнительные граничные условия (совместно с основными (14.117)—(14.120) и дополнительными условиями (14.124) второго приближения):

$$\frac{\partial^3 T(x, 0)}{\partial y^3} = 0; \quad \frac{\partial^4 T(x, \Delta)}{\partial y^4} = 0; \quad \frac{\partial^5 T(x, \Delta)}{\partial y^5} = 0. \quad (14.128)$$

Температуру в третьем приближении определяем по формуле

$$\frac{T}{T_c} = \frac{1}{D} \left[8\lambda + \alpha y \left(8 - 70 \frac{y^3}{\Delta^3} + 168 \frac{y^4}{\Delta^4} - 168 \frac{y^5}{\Delta^5} + 80 \frac{y^6}{\Delta^6} - 15 \frac{y^7}{\Delta^7} \right) \right], \quad (14.129)$$

где $D = 8\lambda + 3\alpha\Delta$.

Соотношение для определения $\Delta(x)$ имеет вид

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{D_1 \Delta^2}{xR} - \frac{D_2 \lambda^2 v}{\alpha^2 v R_1} \right) + 512 \frac{\lambda^3 \alpha^3 v D_3}{v R D_4} = \frac{27a}{vD}, \quad (14.130)$$

где $D_1 = 0,021386440141$; $D_2 = 0,152081352117$; $D_3 = 841,6548\lambda + 631,2411\alpha\Delta$; $D_4 = (1683,3096\alpha^3\lambda R + 631,2411\alpha^4 R_2 \Delta / R)^2$.

Соотношения (14.129) и (14.130) представляют решение задачи (14.110)—(14.114) в третьем приближении. Результаты расчетов по формуле (14.129) в сравнении с точным решением даны на рис. 14.15, из которого следует, что расхождение температур не превышает 1,5 %.

Дополнительные граничные условия четвертого приближения по форме аналогичны условиям (14.60). Формула для безразмерной температуры в данном случае принимает вид

$$\frac{T}{T_c} = \frac{1}{H} \left[11\lambda + \alpha y \left(11 - 462 \frac{y^4}{\Delta^4} + 1848 \frac{y^5}{\Delta^5} - 3300 \frac{y^6}{\Delta^6} + 3300 \frac{y^7}{\Delta^7} - 1925 \frac{y^8}{\Delta^8} + 616 \frac{y^9}{\Delta^9} - 84 \frac{y^{10}}{\Delta^{10}} \right) \right], \quad (14.131)$$

где $H = 11\lambda + 4\lambda\Delta$; $\frac{1}{\alpha} \left(\frac{H_1 \Delta^2}{xR} - \frac{H_2 \lambda^2 v}{\alpha^2 v R_1} \right) + \frac{1331 \lambda^3 \alpha^3 v H_3}{v R H_4} = \frac{156a}{5vH}$;

$H_1 = 0,015138230207$; $H_2 = 0,114482865946$; $H_3 = 2906,54848\lambda + 2113,85344\alpha\Delta$; $H_4 = (5813,09696\alpha^3\lambda R + 2113,85344\alpha^4 R_2 \Delta / R)^2$.

Результаты расчетов безразмерных температур по формуле (14.131) (см. рис. 14.15 и табл. 14.2) показывают, что расхождение с точным решением не превышает 0,01 % (для табл. 14.2 $\eta = 0$; $Pr = 0,72$).

Т а б л и ц а 14.2

Bi	Θ по формуле (14.131)	Θ точное решение
0,05	0,1395	0,1447
0,1	0,2449	0,2528
0,4	0,5648	0,5750
0,8	0,7219	0,7302
5	0,9419	0,9441
10	0,9701	0,9713
20	0,9848	0,9854

Если в соотношениях (14.121), (14.125), (14.129) и (14.131) положить $\alpha \rightarrow \infty$, то получаемые решения приводятся к решениям при граничных условиях первого рода, приведенным в § 14.5.

§ 14.7. Теплообмен при течении жидкостей в плоскопараллельных каналах

Рассмотрим задачу о теплообмене при вязкостном течении жидкости в плоской трубе в случае постоянной температуры стенки. Примем следующие допущения:

- течение жидкости и процесс теплообмена стационарны;
- жидкость несжимаема, ее физические свойства постоянны;
- профиль скорости не изменяется по длине;
- температура жидкости на входе постоянна по сечению и равна t_0 ;
- температура внутренней поверхности стенки трубы на участке теплообмена постоянна и равна $t_{ст}$, причем $t_{ст} \neq t_0$;
- внутренние источники теплоты и диссипацию энергии не учитываем;
- теплопроводностью вдоль оси трубы пренебрегаем.

С учетом принятых допущений математическая постановка задачи имеет вид

$$\omega(\xi) \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \eta} = a \frac{\partial^2 t(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \quad (\eta > 0; 0 \leq \xi \leq r_0); \quad (14.132)$$

$$t(\xi, 0) = t_0; \quad \frac{\partial t(0, \eta)}{\partial \xi} = 0; \quad t(r_0, \eta) = t_{\text{ст}},$$

где t — температура; ξ — поперечная координата; η — продольная координата; a — коэффициент температуропроводности; r_0 — половина ширины плоского канала; t_0 — начальная температура; $t_{\text{ст}}$ — температура стенки; $\omega(\xi)$ — распределение скорости по координате ξ ($0 \leq \xi \leq r_0$), $\omega(\xi) = 1,5\omega_{\text{cp}}(1 - \xi^2/r_0^2)$; ω_{cp} — средняя скорость.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{t - t_0}{t_{\text{ст}} - t_0}; \quad y = \frac{\xi}{r_0}; \quad x = \frac{8}{3} \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\eta}{h}; \quad \text{Pe} = \frac{\omega_{\text{cp}} h}{a},$$

где Θ — относительная избыточная температура; y — безразмерная поперечная координата; x — безразмерная продольная координата; Pe — число Пекле; h — ширина канала, $h = 2r_0$.

С учетом принятых обозначений задача (14.132) принимает вид

$$(1 - y^2) \frac{\partial \Theta(y, x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Theta(y, x)}{\partial y^2} \quad (x > 0; \quad 0 \leq y \leq 1); \quad (14.133)$$

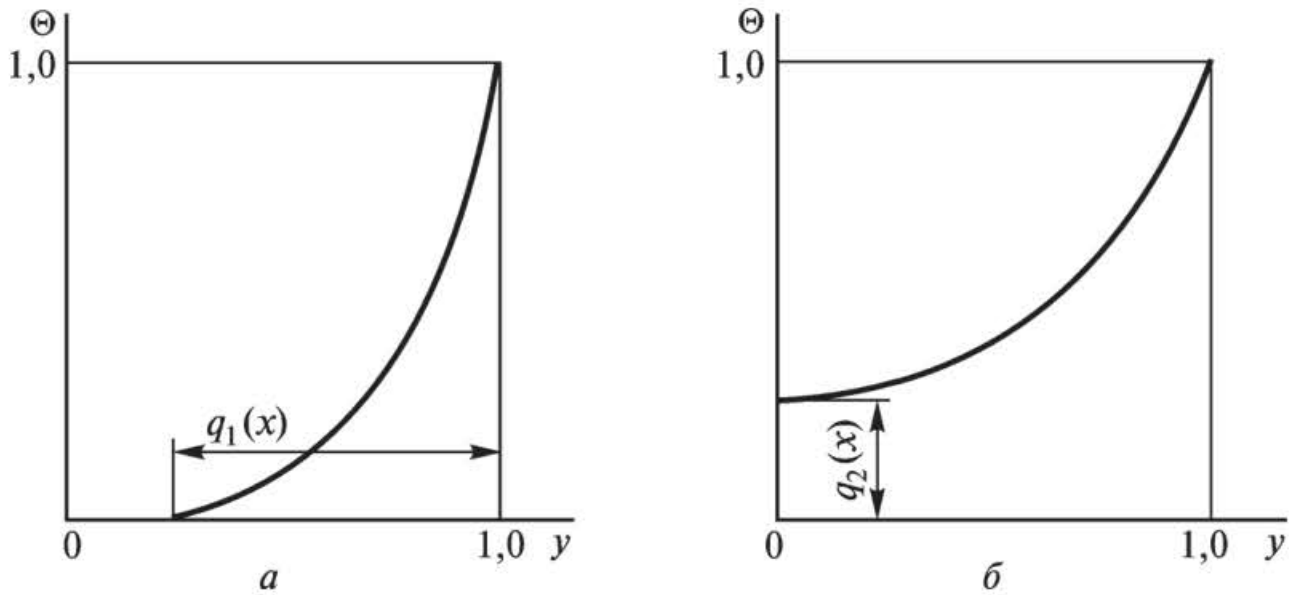
$$\Theta(y, 0) = 0; \quad (14.134)$$

$$\partial \Theta(0, x) / \partial y = 0; \quad (14.135)$$

$$\Theta(1, x) = 1. \quad (14.136)$$

Процесс нагрева среды разделим на две стадии по координате x : $0 \leq x \leq x_1$ и $x_1 \leq x < \infty$. Для этого введем движущуюся по координате y границу, разделяющую исходную область на две подобласти — прогретую $0 \leq y \leq q_1(x)$ и не прогретую $q_1(x) \leq y \leq 1$, где $q_1(x)$ — функция, определяющая продвижение границы раздела по координате y в зависимости от продольной координаты x (рис. 14.16, а). При этом в области, не затронутой нагревом, сохраняется температура t_0 , заданная на входе в канал. Первая стадия процесса заканчивается при достижении движущейся границей середины канала. Во второй стадии теплообмена изменение температуры происходит по всему объему среды $0 \leq y < 1$ (рис. 14.16, б). Здесь в рассмотрение вводим новую функцию $q_2(x) = \Theta(0, x)$, характеризующую изменение температуры во времени в центре канала ($y = 0$).

Если от координаты y , отсчитываемой от центра канала, перейти к новой переменной $z = 1 - y$, отсчитываемой от поверхности, то задачу нагрева жидкости для первой стадии процесса можно сформулировать в виде



Р и с. 14.16. Расчетная схема теплообмена:

a — первая стадия; b — вторая стадия

$$(2z - z^2) \frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Theta(z, x)}{\partial z^2} \quad (0 \leq x \leq x_1; \quad 0 \leq z \leq q_1(x)); \quad (14.137)$$

$$\Theta(0, x) = 1; \quad (14.138)$$

$$\Theta(q_1, x) = 0; \quad (14.139)$$

$$\partial \Theta(q_1, x) / \partial z = 0, \quad (14.140)$$

где соотношения (14.139), (14.140) представляют условия тепловой изоляции подвижной границы. Первое из них означает равенство температур жидкости на движущейся границе и на входе в канал. Второе — отсутствие теплового потока за пределами фронта температурного возмущения.

В задаче (14.137)—(14.140) отсутствует начальное условие вида (14.134). Это связано с тем, что за пределами фронта температурного возмущения она вообще не определена, поэтому нет никакой необходимости в его выполнении по всей ширине канала. Здесь вполне достаточно выполнения условия (14.139), согласно которому температуры на фронте температурного возмущения и на входе в канал равны. В задаче (14.137)—(14.140) отсутствует также граничное условие вида (14.135), так как оно не влияет на процесс теплообмена в первой его стадии.

Потребуем, чтобы искомое решение задачи (14.137)—(14.140) удовлетворяло не исходному уравнению (14.137), а осредненному по толщине термического слоя $0 \leq z \leq q_1(x)$. Определяя интеграл от уравнения (14.137) по z в пределах от $z = 0$ до $z = q_1(x)$, получаем следующее интегральное условие (интеграл теплового баланса):

$$\int_0^{q_1(x)} (2z - z^2) \frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial x} dz = \int_0^{q_1(x)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial z} \right) dz.$$

Определяя интеграл в его правой части, находим

$$\int_0^{q_1(x)} (2z - z^2) \frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial x} dz = \frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=q_1} - \frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Учитывая соотношение (14.140), интеграл теплового баланса:

$$\int_0^{q_1(x)} (2z - z^2) \frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial x} dz = - \frac{\partial \Theta(0, x)}{\partial z}. \quad (14.141)$$

Представим искомый температурный профиль в виде полинома

$$\Theta(z, x) = \sum_{k=0}^n a_k(q_1) z^k. \quad (14.142)$$

Соотношение (14.142) после определения неизвестных коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (14.138) — (14.140) принимает вид

$$\Theta(z, x) = (1 - z/q_1)^2. \quad (14.143)$$

Подставляя (14.143) в интеграл теплового баланса (14.141), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{q_1(x)} (2z - z^2) \left(1 - \frac{z}{q_1}\right)^2 dz = \frac{2}{q_1}. \quad (14.144)$$

Определяя интеграл в левой части последнего соотношения, относительно неизвестной функции $q_1(x)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{6} q_1^2 - \frac{1}{30} q_1^3 \right) = \frac{2}{q_1}. \quad (14.145)$$

Интегрируя уравнение (14.139), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$x = \frac{q_1^3}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{q_1}{40} \right). \quad (14.146)$$

Соотношения (14.143), (14.146) определяют решение задачи (14.137)—(14.140) в первом приближении. Положив $q_1(x_1) = 1$, най-

дем расстояние, которое проходит жидкость по оси x при достижении фронтом температурного возмущения центра плоскопараллельного канала: $x = x_1 = 0,04306$. Значения $q_1(x)$, полученные по формуле (14.146), для различных x :

x	0,001	0,0025	0,005	0,0075	0,01
$q_1(x)$	0,267555	0,366027	0,464955	0,5354196	0,592186

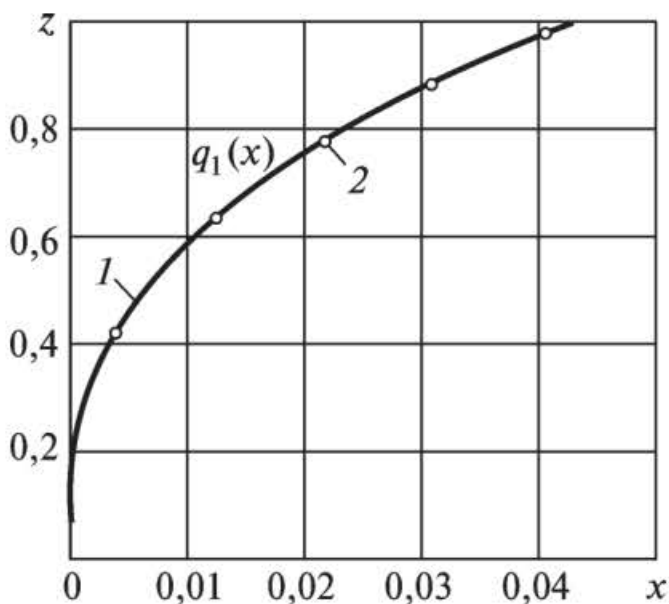
Ввиду отсутствия возможности явного выражения величины $q_1(x)$ из соотношения (14.146), следуя методике, изложенной в § 11.10, находим приближенное аналитическое решение уравнения (14.145):

$$q_1(x) = k x^\lambda, \quad (14.147)$$

где $k = 3,10278$; $\lambda = 0,36$. Значения $q_1(x)$, найденные по формуле (14.147), в сравнении с точным решением (по соотношению (14.146)) даны на рис. 14.17. Из рисунка следует, что результаты расчетов практически совпадают.

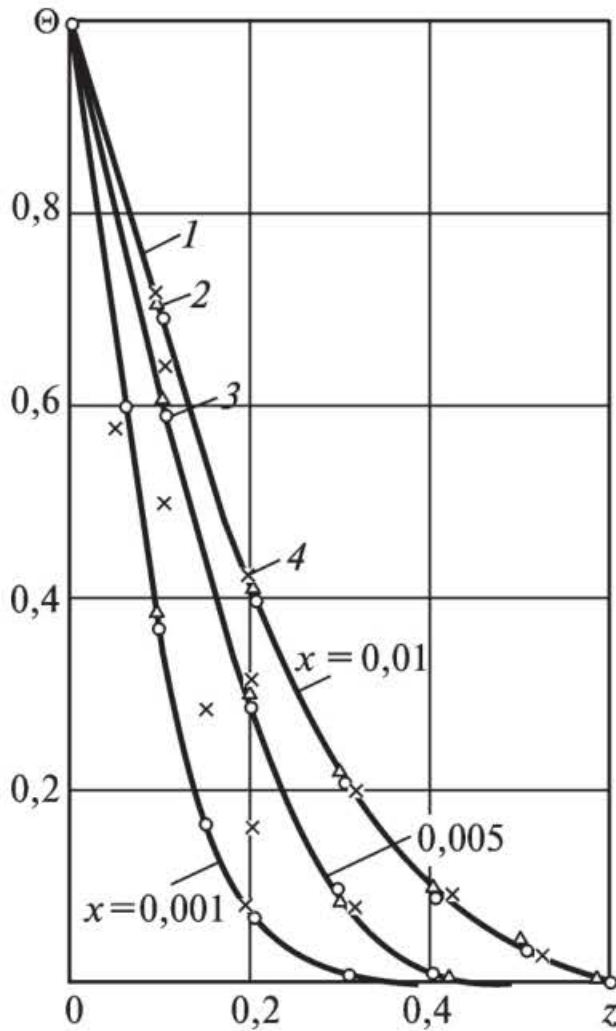
Результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (14.143) в сравнении с точным решением приведены на рис. 14.18.

В точном решении было взято восемь членов ряда. Использование столь малого числа членов ряда связано с трудностями решения алгебраического полинома для определения собственных чисел при большом числе приближений. Анализ полученных результатов позволяет заключить, что значения температур, полученные по формуле (14.143), в диапазоне безразмерной координаты $0,001 \leq x \leq 0,01$ отличаются от точных не более чем на 2 %. При меньших значениях координаты x расхождение с точным методом возрастает. Отметим, что использование восьми членов ряда точного решения не позволяет достигать высокой точности определения температур при малых значениях



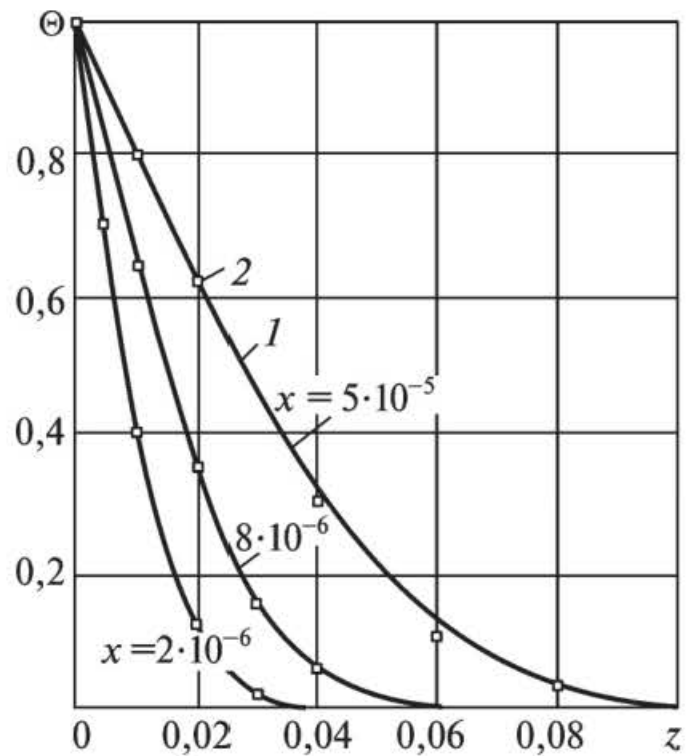
Р и с. 14.17. Перемещение фронта температурного возмущения по координате z в зависимости от координаты x :

1 — по соотношению (14.146) (точное решение);
2 — по формуле (14.147)



Р и с. 14.18. Изменение безразмерной температуры жидкости в плоскопараллельном канале:

1 — по формуле (14.156) (второе приближение); 2 — по формуле (14.143) (первое приближение); 3 — метод прогонки; 4 — точное решение



Р и с. 14.19. Изменение безразмерной температуры жидкости в плоскопараллельном канале:

1 — по формуле (14.156) (второе приближение); 2 — метод прогонки

x . В частности, при $x = 0,001$ результаты точного решения на 10...12 % отличаются от расчетов по методу прогонки. В то же время результаты по методу прогонки в диапазоне координаты $2 \cdot 10^{-6} \leq x \leq 0,01$ отличаются от полученных по формуле (14.156) (второе приближение) (рис. 14.19) не более чем на 1 %.

С целью получения решения задачи (14.137)—(14.140) во втором приближении найдем дополнительные граничные условия. Дифференцируя соотношение (14.138) по переменной x и сравнивая полученное выражение с уравнением (14.137), применительно к точке $z = 0$ получаем первое дополнительное граничное условие:

$$\partial^2 \Theta(0, x) / \partial z^2 = 0. \quad (14.148)$$

Для нахождения второго дополнительного граничного условия продифференцируем соотношение (14.139) по переменной x . Так как

из (14.139) требуется определять значение $\Theta(z, x)$ в точке $z = q_1(x)$, то переменная z является функцией x , и, следовательно, $\Theta(z, x)$ будет сложной функцией. Отсюда по правилу дифференцирования сложной функции будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x} [\Theta(z, x)|_{z=q_1}] = \frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=q_1} \frac{dq_1}{dx} + \frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial x} \Big|_{z=q_1} = 0. \quad (14.149)$$

Соотношение (14.149) с учетом (14.140) принимает вид

$$\partial \Theta(q_1, x) / \partial x = 0. \quad (14.150)$$

Сравнивая (14.150) с уравнением (14.137), применительно к точке $z = q_1(x)$ получаем второе дополнительное граничное условие:

$$\partial^2 \Theta(q_1, x) / \partial z^2 = 0. \quad (14.151)$$

Для нахождения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем (14.140) по переменной x с учетом того, что переменная z является функцией x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=q_1} \right] = \frac{\partial^2 \Theta(q_1, x)}{\partial z^2} \frac{dq_1}{dx} + \frac{\partial^2 \Theta(q_1, x)}{\partial z \partial x} = 0. \quad (14.152)$$

С учетом (14.151) соотношение (14.152) приводим к виду

$$\partial^2 \Theta(q_1, x) / \partial z \partial x = 0. \quad (14.153)$$

Дифференцируя уравнение (14.137) по переменной z и применяя полученное соотношение к точке $z = q_1(x)$ с учетом (14.150), находим

$$\frac{\partial^2 \Theta(z, x)}{\partial x \partial z} \Big|_{z=q_1} = \frac{1}{(2q_1 - q_1^2)} \frac{\partial^3 \Theta(z, x)}{\partial z^3} \Big|_{z=q_1}. \quad (14.154)$$

Сравнивая (14.153) и (14.154), получаем третье дополнительное граничное условие:

$$\partial^3 \Theta(q_1, x) / \partial z^3 = 0. \quad (14.155)$$

Подставляя (14.142) во все основные и дополнительные граничные условия, для определения коэффициентов a_k ($k = \overline{0, 5}$) получаем систему шести алгебраических линейных уравнений. Ее решение:

$$a_0 = 1; a_1 = -\frac{5}{2q_1}; a_2 = 0; a_3 = \frac{5}{2q_1^3}; a_4 = -\frac{5}{2q_1^4}; a_5 = \frac{3}{2q_1^5}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов a_k в соотношение (14.142), находим

$$\Theta(z, x) = 1 - \frac{5}{2} \frac{z}{q_1} + 5 \frac{z^3}{q_1^3} - 5 \frac{z^4}{q_1^4} + \frac{3}{2} \frac{z^5}{q_1^5}. \quad (14.156)$$

Подставляя (14.156) в интеграл теплового баланса (14.141), относительно функции $q_1(x)$, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{2}{5} q_1 \left(\frac{4}{21} q_1 - \frac{5}{112} q_1^2 \right) dq_1 = dx. \quad (14.157)$$

Интегрируя уравнение (14.157), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получаем

$$\frac{15}{4} q_1^4 - \frac{64}{3} q_1^3 = -840x. \quad (14.158)$$

Значения $q_1(x)$, полученные по формуле (14.158), для различных x :

x	0,02093	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001
$q_1(x)$	0,999956	0,769320	0,603916	0,347476	0,274509	0,159412

Положив в (14.158) $q_1(x_1) = 1$, найдем время окончания первой стадии процесса во втором приближении $x = x_1 = 0,02093254$.

Приближенное аналитическое решение уравнения (14.157) имеет вид (14.147), где $k = 3,87001$; $\lambda = 0,35$.

Результаты расчетов по формуле (14.147) практически совпадают со значениями функции $q_1(x)$, полученными из (14.158).

Анализ результатов расчетов по формуле (14.156) в сравнении с результатами по методу прогонки (см. рис. 14.19) позволяет заключить, что в диапазоне величин $2 \cdot 10^{-6} \leq x \leq 0,01$ разброс не превышает 2 %.

Метод дополнительных граничных условий на основе интеграла теплового баланса можно применить и для второй стадии процесса теплообмена. Она соответствует продольной координате $x \geq x_1$ и характеризуется изменением температуры уже по всему сечению канала вплоть до состояния, когда вся жидкость прогреется до температуры стенки. Для этой стадии понятие термического слоя теряет смысл, и в качестве обобщенной координаты выбираем температуру в центре канала $\Theta(1, x) = q_2(x)$ (см. рис. 14.16, б).

Математическая постановка задачи для второй стадии процесса имеет вид:

$$(2z - z^2) \frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Theta(z, x)}{\partial z^2} \quad (x \geq x_1; 0 \leq z \leq 1); \quad (14.159)$$

$$\Theta(0, x) = 1; \quad \Theta(1, x) = q_2(x); \quad \partial \Theta(1, x) / \partial z = 0. \quad (14.160)$$

Начальным условием задачи (14.159), (14.160) будет формула (14.143) при $q_1(x_1) = 1$:

$$\Theta(z, x_1) = (1 - z)^2. \quad (14.161)$$

Однако в специальном удовлетворении начального условия вида (14.161) нет необходимости, так как оно будет выполнено в процессе получения решения задачи (14.159), (14.160). Это связано с тем, что при $x = x_1$, т.е. когда $q_1(x) = 1$ и $q_2(x_1) = 0$, математические постановки задач (14.137)—(14.140) и (14.159), (14.160) полностью совпадают.

Осредняя дифференциальное уравнение (14.159) по всему объему среды ($0 \leq z \leq 1$), получаем интеграл теплового баланса:

$$\int_0^1 (2z - z^2) \frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial x} dz = - \frac{\partial \Theta(0, x)}{\partial z}. \quad (14.162)$$

Решение задачи примем в виде полинома

$$\Theta(z, x) = \sum_{k=0}^n b_k(q_2) z^k. \quad (14.163)$$

После определения коэффициентов b_k ($k = 0, 1, 2$) из граничных условий (14.160) соотношение (14.163) примет вид:

$$\Theta(z, x) = 1 - (1 - q_2)(2 - z)z. \quad (14.164)$$

Подставляя (14.164) в интеграл теплового баланса (14.162), относительно неизвестной функции $q_2(x)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{8}{15} \frac{d}{dx} (1 - q_2) = -2(1 - q_2). \quad (14.165)$$

Интегрируя уравнение (14.165), находим

$$\ln|1 - q_2| = -15x / 4 + C, \quad (14.166)$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия $q_2(x_1) = 0$, $C = 15x_1 / 4$. Соотношение (14.166) с учетом найденного значения постоянной интегрирования примет вид:

$$q_2 = 1 - \exp[-15(x - x_1)/4]. \quad (14.167)$$

Подставляя (14.167) в (14.164), получаем решение задачи (14.159), (14.160) в первом приближении:

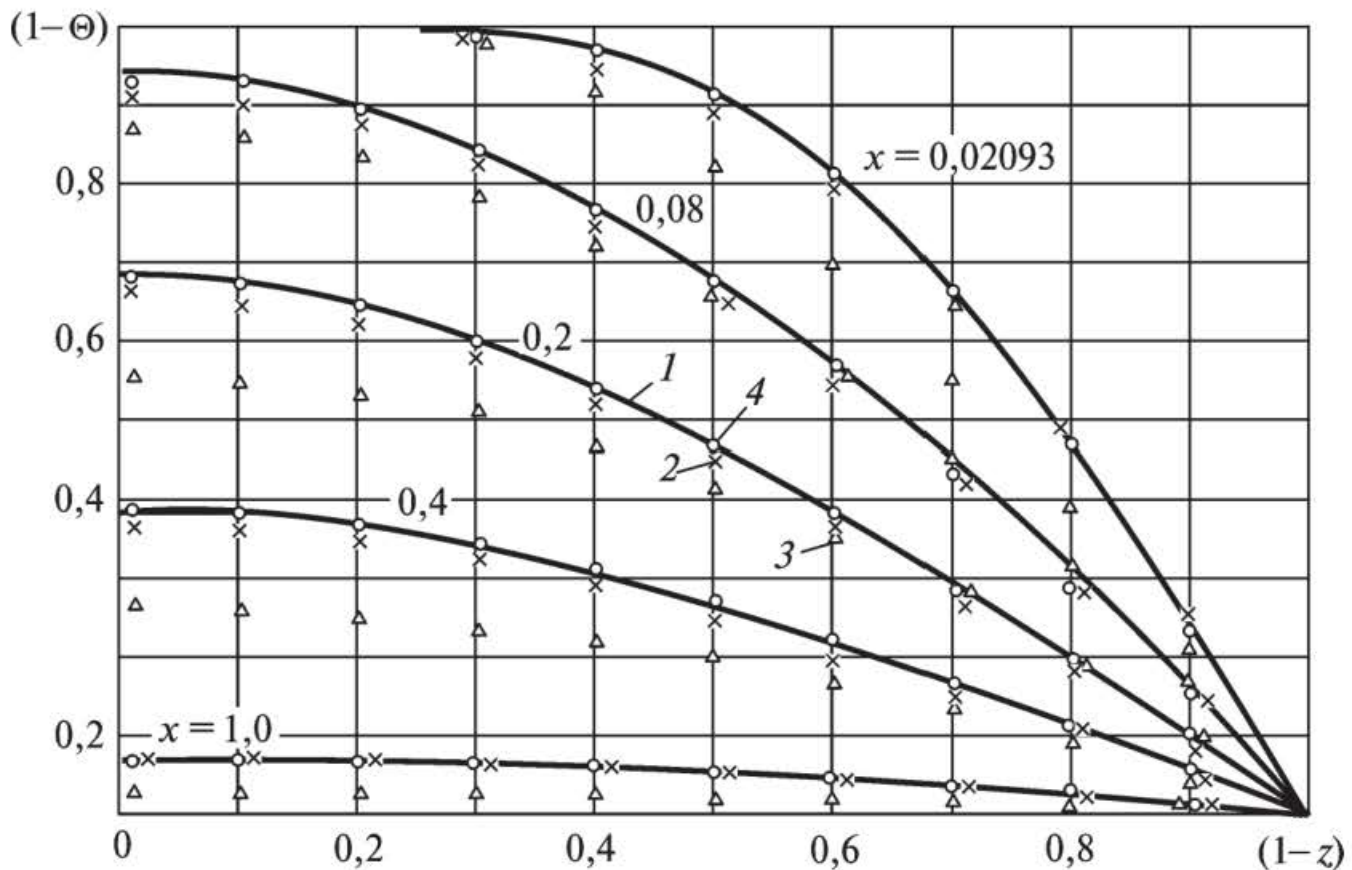
$$\Theta(z, x) = 1 - (2 - z) \exp[-15(x - x_1)/4], \quad (14.168)$$

где $x_1 = 0,04306$ (получен из формулы (14.146) в первом приближении первой стадии процесса при $q_1(x_1) = 1$).

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (14.168) точно удовлетворяет интегралу теплового баланса (14.162), начальному условию (14.161) и граничным условиям (14.160). Уравнение (14.159), как это следует из (14.162), в данном случае удовлетворяется лишь в среднем.

Результаты расчетов по формуле (14.168) в сравнении с точным решением и методом прогонки представлены на рис. 14.20. Их анализ позволяет заключить, что при значениях переменной x , незначительно отличающихся от x_1 ($0,08 \leq x \leq 0,15$), расхождение составляет 6...8%. С увеличением координаты x расхождение температур возрастает до 12%.

Для повышения точности найдем решение задачи (14.159), (14.160) во втором приближении с привлечением дополнительных



Р и с. 14.20. Изменение температуры жидкости в плоскопараллельном канале:

1 — точное решение; 2 — по формуле (14.177) (второе приближение); 3 — по формуле (14.168) (первое приближение); 4 — метод прогонки

граничных условий. Для их нахождения продифференцируем граничные условия (14.160) по переменной x :

$$\frac{\partial \Theta(0, x)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \Theta(1, x)}{\partial x} = \frac{dq_2(x)}{dx}; \quad \frac{\partial^2 \Theta(1, x)}{\partial z \partial x} = 0. \quad (14.169)$$

Сравнивая уравнение (14.159) с первым и вторым соотношениями из (14.169), получаем следующие два дополнительных граничных условия:

$$\partial^2 \Theta(0, x) / \partial z^2 = 0; \quad \partial^2 \Theta(1, x) / \partial z^2 = 0. \quad (14.170)$$

Для получения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (14.154) по переменной z и запишем его для точки $z = 1$:

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, x)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 \Theta(1, x)}{\partial z^3}. \quad (14.171)$$

Сравнивая третье соотношение из (14.169) с соотношением (14.171), получаем третье дополнительное граничное условие:

$$\partial^3 \Theta(1, x) / \partial z^3 = 0. \quad (14.172)$$

Подставляя (14.163) в основные и дополнительные граничные условия, относительно неизвестных $b_k(q_2)$ ($k = \overline{0,5}$) получаем систему шести алгебраических линейных уравнений. Ее решение:

$$b_0 = 1; \quad b_1 = \frac{5}{2}(q_2 - 1) + \frac{3}{8} \frac{dq_2}{dx}; \quad b_2 = 0; \quad b_3 = 5(1 - q_2) - \frac{7}{4} \frac{dq_2}{dx};$$

$$b_4 = 5(q_2 - 1) + 2 \frac{dq_2}{dx}; \quad b_5 = \frac{3}{8}(1 - q_2) - \frac{5}{8} \frac{dq_2}{dx}.$$

Подставляя (14.163) с учетом полученных значений коэффициентов $b_k(q_2)$ в интеграл теплового баланса (14.162), относительно неизвестной функции $q_2(x)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 q_2}{dx^2} + \frac{6460}{191} \frac{dq_2}{dx} + \frac{16800}{191} q_2 - \frac{16800}{191} = 0. \quad (14.173)$$

Общий интеграл уравнения (14.173) будет

$$q_2(x) = 1 + C_1 \exp(-2,8389x) + C_2 \exp(-30,9831x), \quad (14.174)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий

$$q_2(x_1) = 0; \quad dq_2(x_1)/dx = 0. \quad (14.175)$$

Подставляя (14.174) в (14.175), находим

$$C_1 = -1,100870 \exp(2,8389x_1); \quad C_2 = 1,100870 \exp(30,9831x_1). \quad (14.176)$$

Формула для безразмерной температуры примет вид:

$$\Theta(x, z) = 1 - (A_1 z - A_3 z^3 - A_5 z^4 + A_7 z^5) \exp(v_1(x_1 - x)) - \\ - (A_2 z - A_4 z^3 + A_6 z^4 - A_8 z^5) \exp(v_2(x_1 - x)), \quad (14.177)$$

где $v_1 = 2,8389$; $v_2 = 30,9831$; $A_1 = 1,5802$; $A_2 = 0,9198$; $A_3 = 0,0351$; $A_4 = 4,9648$; $A_5 = 0,7462$; $A_6 = 5,7462$; $A_7 = 0,3020$; $A_8 = 1,8020$; $x_1 = 0,02093254$.

Величина x_1 была найдена из формулы (14.158) во втором приближении первой стадии процесса при $q_1(x_1) = 1$.

Отметим, что коэффициенты v_1 и v_2 , находящиеся под знаком экспонент, незначительно отличаются от первых двух собственных чисел краевой задачи (14.133)—(14.136) в случае, когда для ее решения применяют классический аналитический метод разделения переменных. Их точные значения $v_1 = 2,8278$; $v_2 = 32,1473$.

Анализ результатов расчетов по формуле (14.177) в сравнении с точным решением и расчетом по конечно-разностному методу прогонки позволяет заключить, что в диапазоне $x_1 \leq x < \infty$ разброс значений составляет не более 2 %. Отметим, что температуры, полученные по методу прогонки, в этом же диапазоне переменной x практически совпадают с точными их значениями. В точном решении, как уже указывалось ранее, было использовано восемь членов ряда.

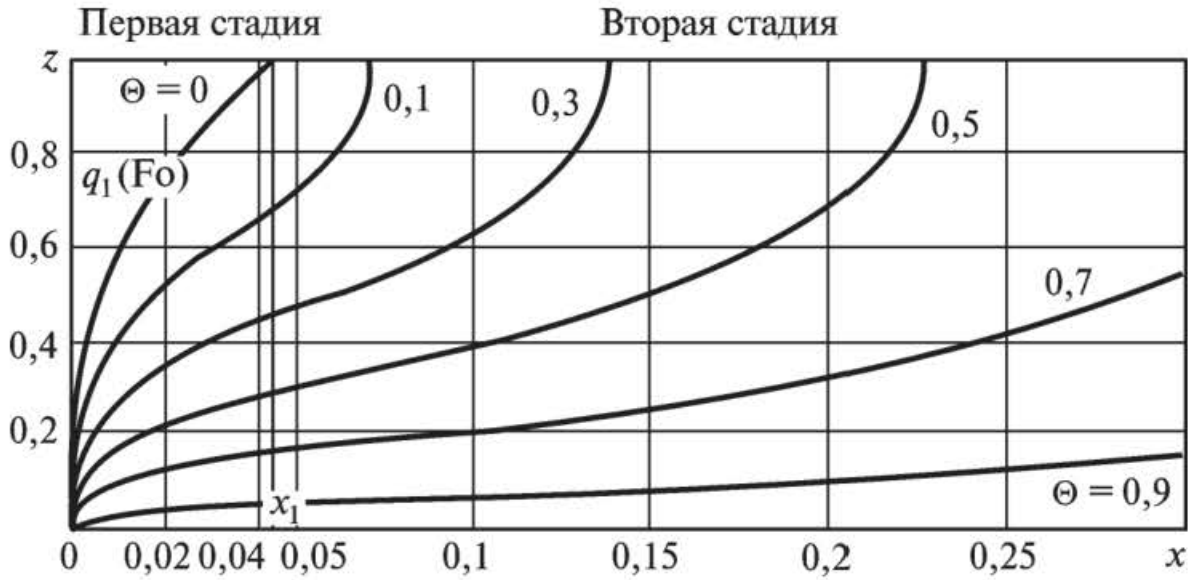
Выражая координату z из соотношений (14.143) и (14.168) как функцию температуры $\Theta(z, x)$ и переменной x , для построения изотерм $\Theta = \text{const}$ в координатах z, x соответственно для первой и второй стадий процесса получаем

$$z(x, \Theta) = (1 - \sqrt{\Theta}) q_1(x); \quad (14.178)$$

$$z(x, \Theta) = 1 - \frac{1}{\exp v} [\exp v^2 - v(1 - \Theta)]^{\frac{1}{2}}, \quad (14.179)$$

где $v = 15(x - x_1)/4$.

Результаты расчетов по формулам (14.178), (14.179) даны на рис. 14.21. Их анализ позволяет заключить, что распределение изотерм для движущейся жидкости и бесконечной пластины качественно идентично (см. рис. 11.10, 11.12), отличие лишь количественное (если принять продольную координату x в задаче для движущейся жидкости в качестве аналога числа Fo в задаче для бесконечной пластины).

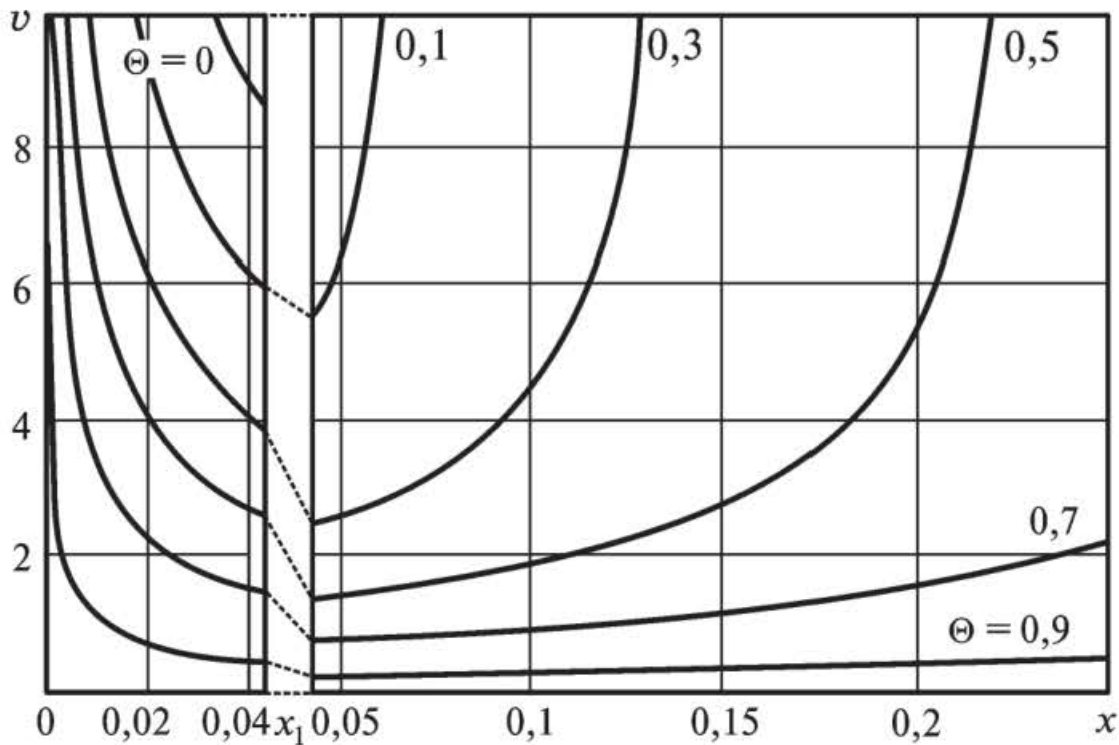


Р и с. 14.21. Распределение изотерм при течении жидкости

Определяя первые производные по переменной x от соотношений (14.178), (14.179), получаем следующие формулы для нахождения скоростей движения изотерм соответственно для первой и второй стадий процесса:

$$v(x, \Theta) = \frac{dz(x, \Theta)}{dx} = \frac{d[(1 - \sqrt{\Theta})q_1(x)]}{dx}; \quad (14.180)$$

$$v(x, \Theta) = \frac{15(1 - \Theta)}{8 \left[\exp\left(\frac{15}{2}(x_1 - x)\right) - \exp\left(\frac{15}{4}(x_1 - x)\right) \right] (1 - \Theta)}^{1/2}. \quad (14.181)$$



Р и с. 14.22. Изменение скоростей перемещения изотерм по координате y в зависимости от координаты x (первое приближение, $x_1 = 0,04306$)

Результаты расчетов скоростей движения изотерм даны на рис. 14.22. Закономерность распределения скоростей, так же как и изотерм, качественно совпадает с аналогичной закономерностью для пластины (см. рис. 11.11, 11.13).

Ввиду невысокой точности решений в первом приближении в графиках распределения изотерм в точке $x = x_1$ (точка перехода от первой стадии процесса ко второй) имеет место незначительный излом (см. рис. 14.21), а в графиках распределения скоростей их движения в этой же точке наблюдается некоторый скачок (см. рис. 14.22). Однако уже во второй стадии процесса этого не наблюдается.

Г Л А В А 15

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

§ 15.1. Стационарная теплопроводность в многослойной пластине

Задачу теплопроводности для многослойных конструкций в классической постановке решают методом сопряжения решений для отдельных слоев в точке их контакта и сводят в конечном итоге к решению в общем виде систем алгебраических линейных уравнений относительно $2n$ неизвестных коэффициентов. Однако с ростом числа слоев возникают определенные трудности при получении аналитических решений и проведении практических расчетов ввиду того, что они становятся громоздкими и малопригодными для параметрического анализа. Применительно к нестационарным задачам теплопроводности для многослойных конструкций относительно собственных чисел краевой задачи Штурма — Лиувилля получают системы многопараметрических трансцендентных уравнений, точные аналитические решения которых пока еще не получены. Использование приближенных аналитических методов (вариационных, взвешенных невязок и др.), совместное их применение с классическими точными аналитическими методами (Фурье, интегральных преобразований и др.) позволяет избежать решения этих систем. Это связано с тем, что используют системы координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения. Однако такие методы получения решений эффективны лишь в диапазоне регулярного

режима нестационарного процесса. При малых значениях временной координаты (в нерегулярном режиме) для обеспечения заданной точности необходимо большое число приближений. В этом случае относительно неизвестных коэффициентов решения получают большие системы алгебраических линейных уравнений. Матрицы их коэффициентов, являясь заполненными квадратными матрицами с большим разбросом коэффициентов по абсолютной величине, как правило, плохо обусловлены.

Одним из эффективных методов составления исходных дифференциальных уравнений и решения соответствующих задач теплопроводности является метод, основанный на применении обобщенных функций. Согласно ему многослойную систему рассматривают как один слой с переменными (разрывными) физическими свойствами среды, описываемыми с помощью единичных характеристических (асимметричных) функций. Отличительной особенностью такого метода решения является отсутствие необходимости специального выполнения условий сопряжения, что связано с особыми свойствами асимметричной функции, благодаря которым удовлетворить условиям идеального термического контакта между слоями многослойной системы удастся непосредственно в уравнении.

Рассмотрим применение обобщенных функций с целью получения аналитических решений задач теплопроводности для многослойной пластины с несимметричными граничными условиями первого рода в следующей математической постановке (рис. 15.1):

$$\frac{d^2 T_i(x)}{dx^2} = 0 \quad (x_{i-1} < x < x_i; (i = \overline{1, n})); \quad (15.1)$$

$$T_1(x_0) = T_{ст1}; \quad (15.2)$$

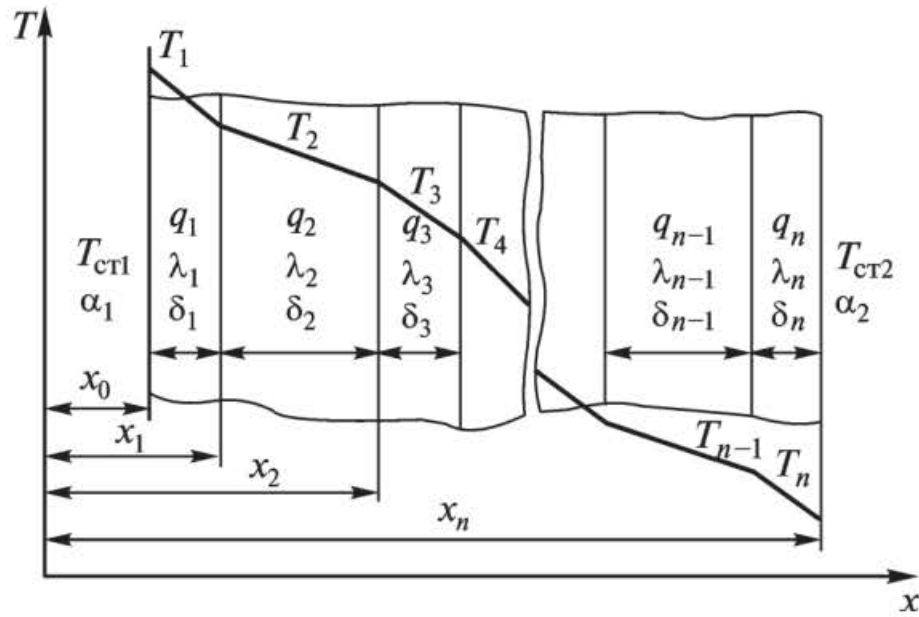
$$T_i(x_i) = T_{i+1}(x_i); \quad (15.3)$$

$$\lambda_i \frac{dT_i(x_i)}{dx} = \lambda_{i+1} \frac{dT_{i+1}(x_i)}{dx}; \quad (15.4)$$

$$T(x_n) = T_{ст2}, \quad (15.5)$$

где T_i — температура i -го слоя; x — координата; $T_{ст1}$, $T_{ст2}$ — температуры стенок соответственно при $x = x_0$ и $x = x_n$; λ_i — коэффициент теплопроводности i -го слоя; $x_n = x_0 + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$; n — число слоев.

Представим кусочно-постоянные значения коэффициентов теплопроводности материалов слоев через асимметричную единичную функцию в виде



Р и с. 15.1. Расчетная схема многослойной конструкции

$$\lambda(x) = \lambda_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) H(x - x_i), \quad (15.6)$$

где $H(x - x_i)$ — асимметричная единичная функция, обладающая следующими свойствами

$$H(x - x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_i; \\ 1 & \text{при } x \geq x_i. \end{cases} \quad (15.7)$$

Например, для двухслойной пластины соотношение (15.6) будет

$$\lambda(x) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) H(x - x_1). \quad (15.8)$$

Задача (15.1) — (15.5) с учетом (15.6) примет вид

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda(x) \frac{dT}{dx} \right] = 0 \quad (x_0 < x < x_n); \quad (15.9)$$

$$T(x_0) = T_{\text{ст}1}; \quad (15.10)$$

$$T(x_n) = T_{\text{ст}2}. \quad (15.11)$$

В виду того что $\lambda(x)$ — кусочно-постоянная функция с конечным числом точек разрыва первого рода, уравнение (15.9) можно непосредственно проинтегрировать. Интегрируя первый раз, находим

$$\lambda(x) \frac{dT}{dx} = C_1, \quad (15.12)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Уравнение (15.12) запишем в виде

$$dT = \frac{1}{\lambda(x)} C_1 dx. \quad (15.13)$$

Соотношение $1/\lambda(x)$ из (15.13) по аналогии с (15.6) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) H(x - x_i). \quad (15.14)$$

Подставляя (15.14) в (15.13), получаем

$$dT = C_1 \left[\frac{1}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) H(x - x_i) \right] dx. \quad (15.15)$$

Интегрируя (15.15), находим

$$T(x) = C_1 \left[\int_{x_0}^x \frac{dx}{\lambda_1} + \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) H(x - x_i) dx \right] + C_2, \quad (15.16)$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

Второй интеграл в правой части соотношения (15.16) ввиду свойства асимметричной единичной функции приводим к виду:

$$\int_{x_0}^x \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) H(x - x_i) dx = \int_{x_i}^x \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) H(x - x_i) dx. \quad (15.17)$$

Определяя интегралы в правой части соотношения (15.16), будем иметь

$$T(x) = C_1 \left[\frac{1}{\lambda_1} (x - x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) (x - x_i) H(x - x_i) \right] + C_2. \quad (15.18)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из граничных условий (15.10), (15.11). Подставляя (15.18) в (15.10), получаем

$$T_{\text{ср1}} = C_1 \left[\frac{1}{\lambda_1} (x_0 - x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) (x_0 - x_i) H(x_0 - x_i) \right] + C_2. \quad (15.19)$$

Так как оба члена в квадратных скобках обращаются в нуль, то $C_2 = T_{\text{ср1}}$.

Подставляя (15.18) в (15.11), находим

$$T_{\text{ср2}} = C_1 \left[\frac{1}{\lambda_1} (x_n - x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) (x_n - x_i) H(x_n - x_i) \right] + T_{\text{ср1}}. \quad (15.20)$$

Отсюда

$$C_1 = (T_{\text{ст}2} - T_{\text{ст}1}) / \left[\frac{1}{\lambda_1} (x_n - x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) (x_n - x_i) H(x_n - x_i) \right]. \quad (15.21)$$

Соотношение (15.18) с учетом найденных значений C_1 и C_2 принимает вид:

$$T(x) = \frac{(T_{\text{ст}2} - T_{\text{ст}1}) \left[\frac{1}{\lambda_1} (x - x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) (x - x_i) H(x - x_i) \right]}{\frac{1}{\lambda_1} (x_n - x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) (x_n - x_i) H(x_n - x_i)} + T_{\text{ст}1}. \quad (15.22)$$

Соотношение (15.22) описывает распределение температуры в n -слойном теле при несимметричных граничных условиях первого рода. Проверим полученное решение применительно к двухслойной стенке при следующих исходных данных:

$$T_{\text{ст}1} = 100 \text{ }^\circ\text{C}; \quad T_{\text{ст}2} = 0 \text{ }^\circ\text{C}; \quad x_1 = 0,5 \text{ м}; \quad x_2 = 1 \text{ м}; \quad x_0 = 0;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ Вт / (м} \cdot \text{К)}.$$

Соотношение (15.22) для двухслойной стенки примет вид

$$T(x) = \frac{(T_{\text{ст}2} - T_{\text{ст}1}) \left[\frac{1}{\lambda_1} (x - x_0) + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) (x - x_1) H(x - x_1) \right]}{\frac{1}{\lambda_1} (x_2 - x_0) + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) (x_2 - x_1)} + T_{\text{ст}1}. \quad (15.23)$$

Используя соотношение (15.23), найдем температуру в точке контакта слоев, т.е. при $x = x_1$:

$$T(x_1) = \frac{(T_{\text{ст}2} - T_{\text{ст}1})(x_1 - x_0) / \lambda_1}{(x_2 - x_0) / \lambda_1 + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) (x_2 - x_1)} + T_{\text{ст}1}. \quad (15.24)$$

С учетом исходных данных находим $T(x_1) = 50 \text{ }^\circ\text{C}$. Полученное значение температуры совпадает с точным решением.

Проверим выполнение условий сопряжения (15.3), (15.4). Для этого запишем соотношение (15.23) соответственно для первого и второго слоев:

$$T_1(x) = \frac{(T_{ct2} - T_{ct1})(x - x_0)/\lambda_1}{(x_2 - x_0)/\lambda_1 + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)(x_2 - x_1)} + T_{ct1}; \quad (15.25)$$

$$T_2(x) = \frac{(T_{ct2} - T_{ct1}) \left[(x - x_0)/\lambda_1 + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)(x - x_1) \right]}{(x_2 - x_0)/\lambda_1 + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)(x_2 - x_1)} + T_{ct1}. \quad (15.26)$$

Подстановкой (15.25), (15.26) в (15.3), (15.4) можно убедиться, что условия сопряжения в данном случае выполняются.

Таким образом, применение асимметричной единичной функции позволяет получать эффективные аналитические решения задач теплопроводности для многослойных конструкций, рассматривая их как однослойные с переменными (кусочно-однородными) свойствами среды. Преимущество такого метода состоит в том, что в процессе получения решения определению подлежат лишь две константы интегрирования, которые находят из граничных условий краевой задачи. При этом благодаря свойствам асимметричных единичных функций автоматически выполняются условия идеального теплового контакта (условия сопряжения) между слоями.

Найдем решение уравнения (15.9) в случае несимметричных граничных условий третьего рода вида:

$$\lambda_1 \frac{dT(x_0)}{dx} = \alpha_1 [T(x_0) - T_{c1}]; \quad (15.27)$$

$$\lambda_n \frac{dT(x_n)}{dx} = \alpha_2 [T_{c2} - T(x_n)], \quad (15.28)$$

где α_1, α_2 — коэффициенты теплоотдачи; T_{c1}, T_{c2} , ($T_{c1} > T_{c2}$) — температуры сред.

Подставляя (15.18) в (15.27), (15.28), относительно постоянных интегрирования C_1 и C_2 получаем систему двух алгебраических линейных уравнений. Ее решение:

$$C_1 = \alpha_1 (C_2 - T_{c1}); \quad C_2 = (T_{c1} B + T_{c2} \alpha_2 \lambda_1) / (B + \alpha_2 \lambda_1), \quad (15.29)$$

где $B = \alpha_1 \lambda_1 A [\lambda_n + \alpha_2 (x_n - x_i)] + \alpha_1 \alpha_2 (x_n - x_0) + \alpha_1 \lambda_n$;

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right). \quad (15.30)$$

С учетом найденных значений C_1 и C_2 соотношение (15.18) принимает вид

$$T(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 (T_{c2} - T_{c1})}{B + \alpha_1 \lambda_1} \left[\frac{x - x_0}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) (x - x_i) H(x - x_i) \right] + (T_{c1} B + T_{c2} \alpha_2 \lambda_1) / (B + \alpha_2 \lambda_1). \quad (15.31)$$

Например, для двухслойной стенки соотношение (15.31) будет

$$T(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 (T_{c2} - T_{c1})}{B + \alpha_1 \lambda_1} \left[\frac{x - x_0}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) (x - x_1) H(x - x_1) \right] + (T_{c1} B + T_{c2} \alpha_2 \lambda_1) / (B + \alpha_2 \lambda_1). \quad (15.32)$$

Найдем решение уравнения (15.9) при смешанных граничных условиях второго и третьего рода. Допустим, что при $x = x_0$ многослойная стенка нагревается постоянным тепловым потоком q , а при $x = x_n$ она охлаждается по закону Ньютона. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$-\lambda_1 \frac{dT(x_0)}{dx} = q; \quad (15.33)$$

$$\lambda_n \frac{dT(x_n)}{dx} = \alpha_2 [T_{c2} - T(x_n)]. \quad (15.34)$$

Подставляя (15.18) в (15.33), находим $C_1 = -q$. Подставляя (15.18) в (15.34), будем иметь

$$C_2 = T_{c2} + q \left\{ \lambda_1 \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) [\lambda_n + \alpha_2 (x_n - x_i)] + \lambda_n + \alpha_2 (x_n - x_0) \right\} / (\lambda_1 \alpha_2).$$

Подставляя найденные значения коэффициентов C_1 и C_2 в соотношение (15.18), находим

$$T(x) = -q \left[\frac{(x - x_0)}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) (x - x_i) H(x - x_i) \right] + T_{c2} + q \left\{ \lambda_1 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) [\lambda_n + \alpha_2 (x_n - x_i)] + \lambda_n + \alpha_2 (x_n - x_0) \right\} / (\lambda_1 \alpha_2). \quad (15.35)$$

Соотношение (15.35), например для двухслойной пластины, примет вид

$$T(x) = -q \left[\frac{(x-x_0)}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) (x-x_1) H(x-x_1) \right] + T_{c2} + \\ + q \left\{ \lambda_1 \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) [\lambda_2 + \alpha_2 (x_2 - x_1)] + \lambda_2 + \alpha_2 (x_2 - x_0) \right\} / (\lambda_1 \alpha_2).$$

§ 15.2. Стационарная теплопроводность в многослойном цилиндре

Рассмотрим многослойный полый цилиндр (см. рис. 15.1), температуры внутренней ($x_0 = r_0$) и внешней ($x_n = r_n$) поверхностей которого заданы и равны соответственно T_{c1} и T_{c2} . Считаем, что между слоями выполняется идеальный термический контакт, а постоянные в пределах каждого слоя коэффициенты теплопроводности представим в виде

$$\lambda(r) = \lambda_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) H(r-r_i), \quad (15.36)$$

где $H(r-r_i)$ — асимметричная единичная функция, определяемая соотношением (15.7).

Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dr} \left[r \lambda(r) \frac{dT(r)}{dr} \right] = 0 \quad (r_0 < r < r_n); \quad (15.37)$$

$$T(r_0) = T_{c1}; \quad (15.38)$$

$$T(r_n) = T_{c2}. \quad (15.39)$$

Общий интеграл уравнения (15.37):

$$T(r) = C_1 \int_{r_0}^r \frac{1}{\lambda(r)} \frac{dr}{r} + C_2. \quad (15.40)$$

Подставляя соотношение (15.14) в (15.40), находим

$$T(r) = C_1 \left[\int_{r_0}^r \frac{1}{\lambda_1} \frac{dr}{r} + \int_{r_i}^r \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) H(r-r_i) \frac{dr}{r} \right] + C_2. \quad (15.41)$$

Определяя интегралы (15.41), будем иметь

$$T(r) = C_1 \left[\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r}{r_0} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) \ln \frac{r}{r_i} H(r-r_i) \right] + C_2. \quad (15.42)$$

Подставляя (15.42) в (15.38), (15.39), получаем $C_2 = T_{c1}$;

$$C_1 = (T_{c2} - T_{c1}) / \left[\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_n}{r_0} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) \ln \frac{r_n}{r_i} \right]. \quad (15.43)$$

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в (15.42), находим

$$T(r) = \frac{(T_{c2} - T_{c1}) \left[\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r}{r_0} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) \ln \frac{r}{r_i} H(r-r_i) \right]}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_n}{r_0} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) \ln \frac{r_n}{r_i}} + T_{c1}. \quad (15.44)$$

Для контакта двух тел соотношение (15.44) принимает вид

$$T(r) = \frac{(T_{c2} - T_{c1}) \left[\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r}{r_0} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \ln \frac{r}{r_1} H(r-r_1) \right]}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_0} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \ln \frac{r_2}{r_1}} + T_{c1}. \quad (15.45)$$

Найдем решение уравнения (15.37) при несимметричных граничных условиях третьего рода:

$$\lambda_1 \frac{dT(r_0)}{dr} = \alpha_1 [T(r_0) - T_{c1}]; \quad (15.46)$$

$$\lambda_n \frac{dT(r_n)}{dr} = \alpha_2 [T_{c2} - T(r_n)]. \quad (15.47)$$

Определяя из граничных условий (15.46), (15.47) постоянные интегрирования C_1 и C_2 соотношения (15.42), находим

$$C_1 = \alpha_1 r_0 (C_2 - T_{c1});$$

$$C_2 = \frac{\lambda_n \alpha_1 r_0 T_{c_1} A_1 + \alpha_1 \alpha_2 r_0 r_n T_{c_1} \left[A_1 \ln \frac{r_n}{r_0} + \lambda_1 A \ln \frac{r_0}{r_i} \right] + \lambda_1 \alpha_2 r_n T_{c_2}}{\lambda_n \alpha_1 r_0 A_1 + \alpha_1 \alpha_2 r_0 r_n \left[A_1 \ln \frac{r_n}{r_0} + \lambda_1 A \ln \frac{r_0}{r_i} \right] + \lambda_1 \alpha_2 r_n}, \quad (15.48)$$

где $A_1 = 1 + \lambda_1 A$; значение A находим из соотношения (15.30).

После подстановки соотношений (15.48) в (15.42) получим замкнутое аналитическое решение задачи теплопроводности для многослойного цилиндра при несимметричных граничных условиях третьего рода.

Найдем решение уравнения (15.37) при граничных условиях второго и третьего рода вида (15.33), (15.34). Подставляя решение (15.42) в соотношения (15.33), (15.34), для нахождения констант C_1 и C_2 получаем следующие формулы:

$$C_1 = -qr_0;$$

$$C_2 = \frac{\lambda_n qr_0 (1 + \lambda_1 A)}{\alpha_2 r_n \lambda_1} + qr_0 \left[A \ln \frac{r_n}{r_i} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_n}{r_0} \right] + T_{c_2}.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в соотношение (15.42), в замкнутом виде получаем точное аналитическое решение уравнения (15.37) с граничными условиями (15.33), (15.34).

§ 15.3. Многослойная пластина с постоянными внутренними источниками теплоты

Найдем решение стационарной задачи теплопроводности для многослойной плоской стенки с внутренними источниками теплоты в следующей математической постановке (см. рис. 15.1):

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} \right] = -q(x) \quad (x_0 < x < x_n); \quad (15.49)$$

$$T(x_0) = T_{c_1}; \quad (15.50)$$

$$T(x_n) = T_{c_2}, \quad (15.51)$$

где $\lambda(x)$ определяется из (15.6). По аналогии с $\lambda(x)$ величину интенсивности внутренних источников теплоты $q(x)$ через асимметричную единичную функцию $H(x - x_i)$ можно представить в виде

$$q(x) = q_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} - q_i) H(x - x_i),$$

где $H(x - x_i)$ определяется по соотношению (15.7).

Непосредственное интегрирование уравнения (15.49) приводит к следующему соотношению:

$$T(x) = - \int_{x_0}^x \left[\frac{1}{\lambda(\xi)} \int_{x_0}^{\xi} q(\xi) d\xi \right] d\xi + C_1 \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\lambda(\xi)} + C_2, \quad (15.52)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Определив интегралы в (15.52) и постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (15.50), (15.51), можно получить искомое решение. Однако такой путь приводит к весьма громоздкому выражению для аналитического решения. В связи с чем рассмотрим другой способ. Для этого введем новую независимую переменную z по соотношению

$$z(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{\lambda(x)} dx, \quad (15.53)$$

где $\frac{1}{\lambda(x)}$ находим из (15.14). Отсюда (15.53) примет вид:

$$z(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\lambda_1} + \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) H(x - x_i) dx. \quad (15.54)$$

Второй интеграл правой части соотношения (15.54) ввиду свойства (15.7) асимметричной единичной функции приводим к виду

$$\int_{x_0}^x \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) H(x - x_i) = \int_{x_i}^x \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) H(x - x_i).$$

Определяя интегралы в (15.54), получаем

$$z(x) = \frac{x - x_0}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) (x - x_i) H(x - x_i).$$

Из последнего соотношения следует, что

$$z_n = \frac{x_n - x_0}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i} \right) (x_n - x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \quad (15.55)$$

Из (15.55), например для двухслойного тела, находим

$$z_1 = \frac{x_1 - x_0}{\lambda_1} = \frac{\delta_1}{\lambda_1}; \quad z_2 = \frac{x_1 - x_0}{\lambda_1} + \frac{x_2 - x_1}{\lambda_2} = \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} = \sum_{i=1}^2 \frac{\delta_i}{\lambda_i}.$$

Отсюда можно заключить, что новая независимая переменная представляет собой термическое сопротивление соответствующего участка стенки. Ее размерность ($\text{м}^2 \cdot \text{К}/\text{Вт}$) обратна размерности коэффициента теплопередачи.

Продифференцируем соотношение (15.53) по переменной x :

$$\frac{dz(x)}{dx} = \frac{1}{\lambda(x)}. \quad (15.56)$$

Так как переменная z является функцией x , то справедливы следующие соотношения:

$$\lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} = \lambda(x) \frac{dT(z)}{dz} \frac{dz}{dx} = \lambda(x) \frac{dT(z)}{dz} \frac{1}{\lambda(x)} = \frac{dT(z)}{dz}.$$

Отсюда следует, что производная от температуры по переменной z является мерой теплового потока:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \lambda(x) \frac{dT(x)}{dx}. \quad (15.57)$$

С учетом приведенных соотношений дифференциальный оператор левой части уравнения (15.49) примет вид:

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} \right] = \frac{d}{dz} \left[\frac{dT(z)}{dz} \right] \frac{dz}{dx} = \frac{d^2 T(z)}{dz^2} \frac{1}{\lambda(z)}. \quad (15.58)$$

Отсюда математическая постановка задачи (15.49)—(15.51):

$$\frac{d^2 T(z)}{dz^2} = -\lambda(z)q(z) \quad (z_0 < z < z_n; \quad z_0 = 0); \quad (15.59)$$

$$T(0) = T_{c1}; \quad (15.60)$$

$$T(z_n) = T_{c2}. \quad (15.61)$$

Для произведения $\lambda(z)q(z)$ по аналогии с (15.6) можно записать

$$\lambda(z)q(z) = \lambda_1 q_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} q_{i+1} - \lambda_i q_i) H(z - z_i), \quad (15.62)$$

где $H(z - z_i)$ определяется соотношением, аналогичным (15.7).

Очевидно, что уравнение (15.59) для непосредственного интегрирования является более простым, чем (15.49). Интегрируя его первый раз, находим

$$\frac{dT}{dz} = -\int_0^z \lambda_1 q_1 dz - \int_{z_i}^z \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} q_{i+1} - \lambda_i q_i) H(z - z_i) dz + C_1, \quad (15.63)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Определяя интегралы в (15.63), получаем

$$\frac{dT}{dz} = -\lambda_1 q_1 z - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} q_{i+1} - \lambda_i q_i) (z - z_i) H(z - z_i) + C_1. \quad (15.64)$$

Интегрируя соотношение (15.64), будем иметь

$$T(z) = -\int_0^z \lambda_1 q_1 z dz - \int_{z_i}^z \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} q_{i+1} - \lambda_i q_i) (z - z_i) H(z - z_i) dz + \int_0^z C_1 dz + C_2. \quad (15.65)$$

Определяя интегралы в правой части соотношения (15.65), находим

$$T(z) = -\frac{1}{2} \lambda_1 q_1 z^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} q_{i+1} - \lambda_i q_i) (z - z_i)^2 H(z - z_i) + C_1 z + C_2. \quad (15.66)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из граничных условий (15.60), (15.61). Подставляя (15.66) в (15.60), получаем $C_2 = T_{c1}$. Подставляя (15.66) в (15.61), будем иметь

$$T_{c2} = -\frac{1}{2} \lambda_1 q_1 z_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} q_{i+1} - \lambda_i q_i) (z_n - z_i)^2 + C_1 z_n + T_{c1}. \quad (15.67)$$

Отсюда

$$C_1 = \left[(T_{c2} - T_{c1}) + \frac{1}{2} \lambda_1 q_1 z_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} q_{i+1} - \lambda_i q_i) (z_n - z_i)^2 \right] / z_n. \quad (15.68)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов C_1 и C_2 в (15.66), получаем

$$T(z) = -\frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} q_{i+1} - \lambda_i q_i) (z - z_i)^2 H(z - z_i) +$$

$$+ \left[(T_{c2} - T_{c1}) + \frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} q_{i+1} - \lambda_i q_i) (z_n - z_i)^2 \right] \frac{z}{z_n} + T_{c1}. \quad (15.69)$$

Соотношение (15.69) в замкнутом виде определяет решение задачи (15.49)—(15.51). Например, для двухслойной пластины оно принимает вид

$$T(z) = -\frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z^2 - \frac{1}{2} (\lambda_2 q_2 - \lambda_1 q_1) (z - z_1)^2 H(z - z_1) +$$

$$+ \left[(T_{c2} - T_{c1}) + \frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z_2^2 + \frac{1}{2} (\lambda_2 q_2 - \lambda_1 q_1) (z_2 - z_1)^2 \right] \frac{z}{z_2} + T_{c1}. \quad (15.70)$$

В случае $q_1 = q_2 = 0$ при исходных данных, приведенных в § 15.1, решение (15.70) совпадает с решением (15.23).

Для проверки выполнения условий сопряжения в точке контакта слоев ($z = z_1$) запишем соотношение (15.70) соответственно для первого и второго слоев:

$$T_1(z) = -\frac{\lambda_1 q_1 z^2}{2} + \left[(T_{c2} - T_{c1}) + \frac{\lambda_1 q_1 z_2^2}{2} + \frac{1}{2} (\lambda_2 q_2 - \lambda_1 q_1) (z_2 - z_1)^2 \right] \frac{z}{z_2} + T_{c1};$$

$$(15.71)$$

$$T_2(z) = -\frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z^2 - \frac{1}{2} (\lambda_2 q_2 - \lambda_1 q_1) (z - z_1)^2 + \left[(T_{c2} - T_{c1}) + \frac{1}{2}\lambda_1 q_1 z_2^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\lambda_2 q_2 - \lambda_1 q_1) (z_2 - z_1)^2 \right] \frac{z}{z_2} + T_{c1}. \quad (15.72)$$

Очевидно, при $z = z_1$ $T_1(z_1) = T_2(z_1)$.

Проверим выполнение условия равенства тепловых потоков, т.е.

$$\lambda_1 \frac{dT_1(z_1)}{dz} \frac{dz_1(x_1)}{dx} = \lambda_2 \frac{dT_2(z_1)}{dz} \frac{dz(x_1)}{dx}. \quad (15.73)$$

Соотношение (15.73) записано с учетом того, что переменная z является функцией x . Учитывая (15.56), соотношение (15.73) можно записать в виде

$$\lambda_1 \frac{dT_1(z_1)}{dz} \frac{1}{\lambda(x)} = \lambda_2 \frac{dT_2(z_1)}{dz} \frac{1}{\lambda(x)}. \quad (15.74)$$

Подставляя (15.14) в (15.74), будем иметь

$$\lambda_1 \frac{dT_1(z_1)}{dz} \left[\frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) H(\eta) \right] = \lambda_2 \frac{dT_2(z_1)}{dz} \left[\frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) H(\eta) \right], \quad (15.75)$$

где $\eta = x - x_1$.

Соотношение (15.75) с учетом свойства асимметричной единичной функции (15.7) приводим к виду

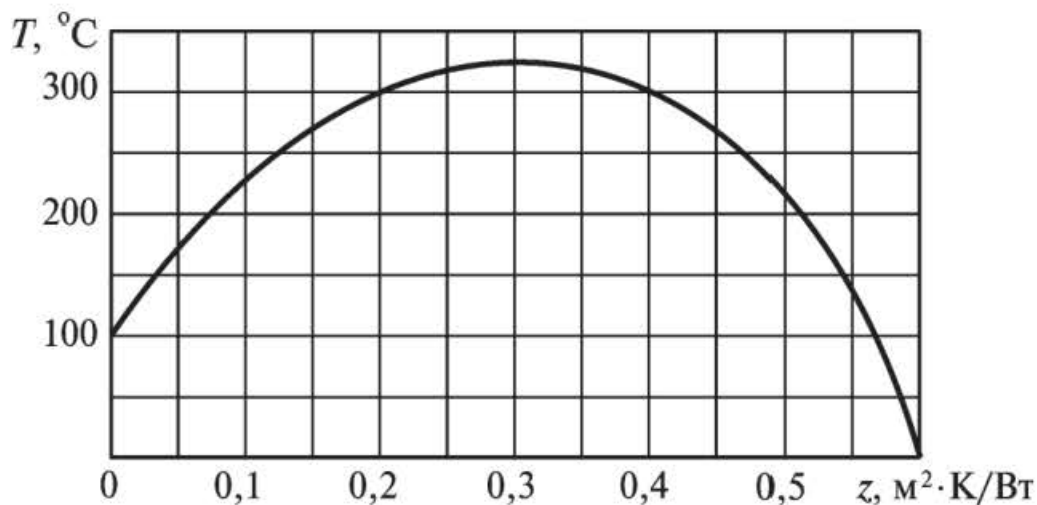
$$\frac{dT_1(z_1)}{dz} = \frac{dT_2(z_1)}{dz}. \quad (15.76)$$

Таким образом, для новой независимой переменной условие равенства тепловых потоков преобразуется в условие равенства производных от температурных функций.

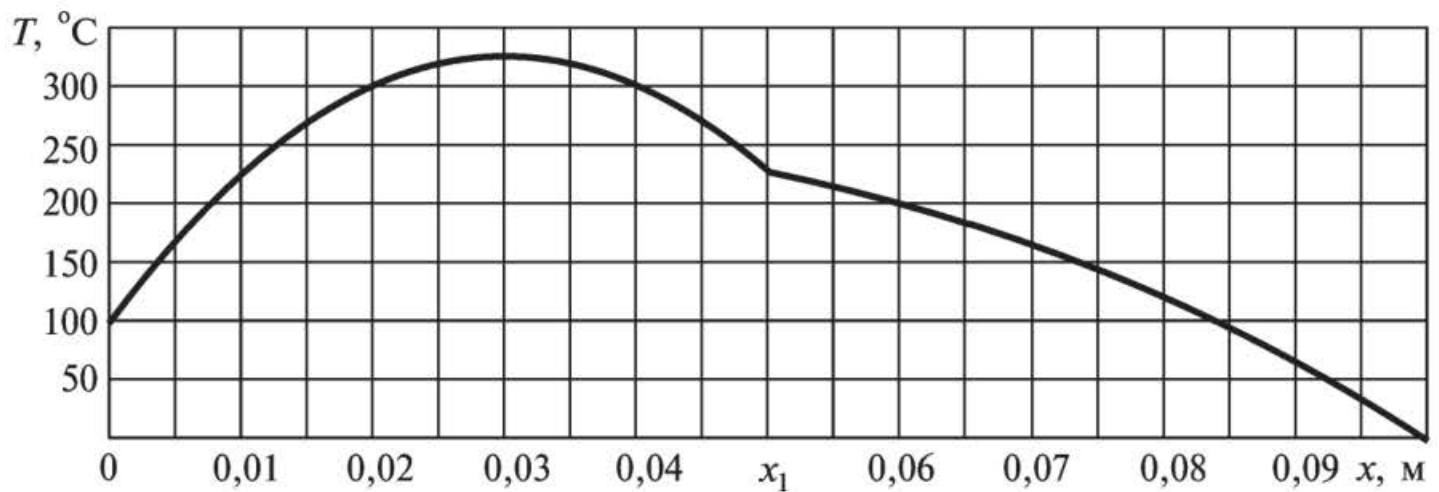
Подставляя (15.71), (15.72) в (15.76), можно убедиться, что второе условие сопряжения (условие равенства тепловых потоков в точке контакта слоев) также выполняется.

Используя соотношение (15.70), найдем решение конкретной задачи теплопроводности для двухслойной пластины с постоянными в пределах каждого слоя внутренними источниками теплоты при следующих исходных данных: $\lambda_1 = 0,1$ Вт/(м · К); $\lambda_2 = 0,6$ Вт/(м · К); $q_1 = 5 \cdot 10^4$ Вт/м³; $q_2 = 5 \cdot 10^4$ Вт/м³; $\delta_1 = 0,05$ м; $\delta_2 = 0,05$ м; $T_{c1} = 100$ °С; $T_{c2} = 0$ °С.

Анализ результатов расчетов температуры по формуле (15.70) (рис. 15.2) позволяет заключить, что толщины слоев при использовании в качестве пространственной координаты переменной z распределяются согласно их термическим сопротивлениям. Так как коэффициент температуропроводности первого слоя значительно мень-



Р и с. 15.2. Распределение температуры в двухслойной пластине при использовании независимой переменной z



Р и с. 15.3. Распределение температуры в двухслойной пластине при использовании независимой переменной x

ше, чем второго, то при одинаковой действительной толщине слоев ($\delta_1 = \delta_2$) толщина первого слоя в переменной z ввиду его большего термического сопротивления оказывается значительно большей, чем второго. При этом излом температурной кривой на границах слоев (при $z = z_1$) отсутствует. Это связано с тем, что в переменной z на границе слоев выполняется условие (15.76).

Распределение температуры при использовании в качестве пространственной координаты переменной x дано на рис. 15.3. В этом случае в точке контакта слоев ($x = x_1$) должно выполняться условие $\lambda_1 dT_1/dx = \lambda_2 dT_2/dx$, в связи с чем в ней наблюдается излом температурной кривой.

Если положить $\lambda_1 = \lambda_2$, $q_1 = q_2 = 0$, то при заданных ранее температурах на границах двухслойной системы в точке контакта слоев по формуле (15.72) получаем температуру $T = 50$ °С, что соответствует точному решению.

Найдем решение уравнения (15.49) при неоднородных граничных условиях третьего рода вида (15.46), (15.47). Подставляя (15.66) в (15.46), (15.47), для определения неизвестных коэффициентов C_1 и C_2 будем иметь систему двух алгебраических линейных уравнений. Ее решение:

$$C_1 = -\frac{1}{2} \frac{\lambda_1 q_1 \alpha_2 a + 2\alpha_1 \lambda_1 \lambda_n q_1 z_n + \alpha_1 \alpha_2 A b + 2\alpha_1 \lambda_n A c + 2\alpha_1 \alpha_2 \Delta T}{\alpha_1 \alpha_2 (z_0 - z_n) - \alpha_1 \lambda_n - \alpha_2 \lambda_1};$$

$$C_2 = \frac{1}{2} [2\lambda_n (a_3 a_7 + \lambda_1 q_1 z_0 a_6 + \alpha_1 T_{c1}) + a_3 \alpha_2 (2T_{c2} + a_1 z_n^2 - a_2 A z_i) + 2z_n \alpha_2 a_4] / (\alpha_1 a_5 + \alpha_2 a_3),$$

где $a = 4\lambda_1 z_0 + \alpha_1 (z_n^2 - 2z_0^2)$; $b = (z_n - z_i)^2$; $c = z_n - z_i$; $a_1 = \lambda_1 q_1 + A$; $a_2 = 2z_n - z_i$; $a_3 = \lambda_1 - \alpha_1 z_0$; $a_4 = \lambda_1 q_1 z_0 a_6 + \alpha_1 T_{c1}$; $a_5 = \alpha_2 z_n + \lambda_n$;

$a_6 = \alpha_1 z_0 - 2\lambda_1$; $a_7 = \lambda_1 q_1 z_n + Ac$; величина A находится из соотношения (15.30).

Найдем решение уравнения (15.49) при смешанных граничных условиях второго и третьего рода вида (15.33), (15.34). Формулы для постоянных интегрирования C_1 и C_2 соотношения (15.66) в данном случае будут:

$$C_1 = (\lambda_1^2 q_1 z_0 - q) / \lambda_1;$$

$$C_2 = [2\lambda_n \lambda_1^2 q_1 (z_n - z_0) + 2\lambda_n A \lambda_1 (z_n - z_i) + 2q(\lambda_n + \alpha_2 z_n) + 2\alpha_2 \lambda_1 (T_{c2} - Az_n z_i) + \alpha_2 \lambda_1^2 q_1 z_n (z_n - 2z_0) + \alpha_2 A \lambda_1 (z_n^2 - z_i^2)] / (2\alpha_2 \lambda_1).$$

§ 15.4. Стационарная нелинейная теплопроводность в многослойной пластине

К нелинейным относятся задачи теплопроводности, в которых учитывается зависимость теплофизических свойств от температуры. Математическая постановка нелинейной задачи теплопроводности для многослойной пластины при граничных условиях первого рода имеет вид:

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda(x, T) \frac{dT(x)}{dx} \right] = 0 \quad (x_0 < x < x_n); \quad (15.77)$$

$$T(x_0) = T_{c1}; \quad (15.78)$$

$$T(x_n) = T_{c2}. \quad (15.79)$$

Коэффициент теплопроводности $\lambda(x, T)$ через асимметричную единичную функцию $H(x - x_i)$ записываем следующим образом:

$$\lambda(x, T) = \lambda_1(T) + \sum_{i=1}^{n-1} [\lambda_{i+1}(T) - \lambda_i(T)] H(x - x_i). \quad (15.80)$$

Предположим, что коэффициент теплопроводности каждого слоя является линейной функцией температуры:

$$\lambda_i(T) = a_i + b_i T \quad (i = \overline{1, n}). \quad (15.81)$$

Соотношение (15.81) для многослойной стенки, представленной в виде однослойной с кусочно-однородными свойствами, можно представить в виде

$$\lambda(x, T) = a(x) + b(x)T, \quad (15.82)$$

где

$$a(x) = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) H(x - x_i); \quad (15.83)$$

$$b(x) = b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) H(x - x_i). \quad (15.84)$$

Интегрируя уравнение (15.77) в пределах от x_0 до x , находим

$$\lambda(x, T) \frac{dT(x)}{dx} = C_1, \quad (15.85)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Подставляя (15.82) в (15.85), получаем

$$[a(x) + b(x)T(x)] \frac{dT(x)}{dx} = C_1. \quad (15.86)$$

Проинтегрируем соотношение (15.86):

$$\int [a(x) + b(x)T(x)] \frac{dT(x)}{dx} dx = C_1 \int dx. \quad (15.87)$$

Соотношение (15.87) можно переписать в виде

$$\int_{x_0}^x [a(x) + b(x)T(x)] dT(x) = C_1 x + C_2, \quad (15.88)$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

Подставляя (15.83) и (15.84) в (15.88), находим

$$\int_{x_0}^x \left\{ a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) H(x - x_i) + \right. \\ \left. + \left[b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) H(x - x_i) \right] T(x) \right\} dT(x) = C_1 x + C_2. \quad (15.89)$$

Соотношение (15.89) приводим к виду

$$\int_{x_0}^x a_1 dT(x) + \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) H(x - x_i) dT(x) + \\ + \int_{x_0}^x b_1 T(x) dT(x) + \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) H(x - x_i) T(x) dT(x) = C_1 x + C_2. \quad (15.90)$$

Определяя интегралы, находим

$$a_1 T(x) \Big|_{x_0}^x + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) H(x - x_i) T(x) \Big|_{x_i}^x + \frac{1}{2} b_1 T^2(x) \Big|_{x_0}^x +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) H(x - x_i) T^2(x) \Big|_{x_i}^x = C_1 x + C_2. \quad (15.91)$$

Подставляя пределы интегрирования в соотношении (15.91), получаем

$$a(x) T(x) + \frac{1}{2} b(x) T^2(x) - a_1 T(x_0) - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) H(x - x_i) T(x_i) -$$

$$- \frac{1}{2} b_1 T^2(x_0) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) H(x - x_i) T^2(x) = C_1 x + C_2. \quad (15.92)$$

Ввиду того что третий и пятый члены левой части соотношения (15.92) не зависят от переменной x , их можно отнести к постоянной интегрирования C_2 . Тогда соотношение (15.92) будет

$$a(x) T(x) + \frac{1}{2} b(x) T^2(x) - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) H(x - x_i) T(x_i) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) H(x - x_i) T^2(x_i) = C_1 x + C_2. \quad (15.93)$$

Из соотношения (15.93) находим формулу для температуры:

$$T(x) = -\frac{a(x)}{b(x)} + \left[\frac{a^2(x)}{b^2(x)} + \frac{2}{b(x)} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) H(x - x_i) T(x_i) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b(x)} \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) H(x - x_i) T^2(x_i) + \frac{2}{b(x)} (C_1 x + C_2) \right]^{1/2}. \quad (15.94)$$

Неизвестные температуры в точках контакта слоев $T(x_i)$ находим из следующей системы алгебраических нелинейных уравнений (где x_i — расстояние от начала координат до конца i -го слоя):

$$a(x_j)T(x_j) + \frac{1}{2}b(x_j)T^2(x_j) - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)H(x_j - x_i)T(x_j) - \quad (15.95)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i)H(x_j - x_i)T^2(x_j) = C_1x + C_2 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n-1).$$

Учитывая свойства асимметричной единичной функции, систему уравнений (15.95) приводим к виду

$$\left. \begin{aligned} a_1T(x_1) + \frac{1}{2}b_1T^2(x_1) &= C_1x_1 + C_2; \\ a_2T(x_2) + \frac{1}{2}b_2T^2(x_2) - (a_2 - a_1)T(x_2) - \frac{1}{2}(b_2 - b_1)T^2(x_2) &= C_1x_2 + C_2; \\ a_3T(x_3) + \frac{1}{2}b_3T^2(x_3) - \sum_{i=1}^2 (a_{i+1} - a_i)T(x_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (b_{i+1} - b_i)T^2(x_i) &= C_1x_3 + C_2; \\ \dots & \\ a_kT(x_k) + \frac{1}{2}b_kT^2(x_k) - \sum_{i=1}^{k-1} (a_{i+1} - a_i)T(x_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} (b_{i+1} - b_i)T^2(x_i) &= C_1x_k + C_2; \\ \dots & \\ a_{n-1}T(x_{n-1}) + \frac{1}{2}b_{n-1}T^2(x_{n-1}) - \sum_{i=1}^{n-2} (a_{i+1} - a_i)T(x_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} (b_{i+1} - b_i)T^2(x_i) &= C_1x_{n-1} + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (15.96)$$

Из первого уравнения системы (15.96) находим

$$T(x_1) = -\frac{a_1}{b_1} + \left[\frac{a_1^2}{b_1^2} - \frac{2}{b_1}(C_1x_1 + C_2) \right]^{1/2}. \quad (15.97)$$

Оставшиеся неизвестные $T(x_k)$ находим по следующей рекуррентной формуле:

$$T(x_k) = -\frac{a_k}{b_k} + \left[\frac{a_k^2}{b_k^2} - \frac{2}{b_k} \sum_{i=1}^{k-1} (a_{i+1} - a_i)T(x_i) + \right. \quad (15.98)$$

$$\left. + \frac{1}{b_k} \sum_{i=1}^{k-1} (b_{i+1} - b_i)T^2(x_i) - \frac{2}{b_k}(C_1x_k + C_2) \right]^{1/2} \quad (k = 2, 3, 4, \dots, n-1).$$

Подставляя (15.97) и (15.98) в (15.94), находим общее решение дифференциального уравнения (15.77). Постоянные интегрирования

C_1 и C_2 определяем из граничных условий (15.78), (15.79). Для этого имеем систему двух алгебраических нелинейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} T_{c1} &= -\frac{a_1}{b_1} + \sqrt{\frac{a_1^2}{b_1^2} + \frac{2}{b_1} C_2}; \\ T_{c2} &= -\frac{a_n}{b_n} + \left[\frac{a_n^2}{b_n^2} + \frac{2}{b_n} \sum_{i=1}^{n-2} (a_{i+1} - a_i) T(x_i) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) T^2(x_i) - \frac{2}{b_n} (C_1 x_n + C_2) \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (15.99)$$

Определяя из системы (15.99) постоянные интегрирования C_1 и C_2 и подставляя их в (15.94), получаем искомое решение нелинейной задачи теплопроводности для многослойной стенки.

Соотношение (15.94) для двухслойной стенки примет вид

$$\begin{aligned} T(x) &= -\frac{a(x)}{b(x)} + \left[\frac{a^2(x)}{b^2(x)} - \frac{2}{b(x)} (a_2 - a_1) H(x - x_i) T + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b(x)} (b_2 - b_1) H(x - x_i) T_1^2 - \frac{2}{b(x)} (C_1 x + C_2) \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (15.100)$$

где T_1 — температура в точке контакта слоев, т.е. при $x = x_1$.

Найдем решение конкретной задачи при следующих исходных данных: $T_{c1} = 100$ °С; $T_{c2} = 0$ °С; $x_1 = 0,5$ м; $x_2 = 1$ м; $x_0 = 0$; $a_1 = a_2 = 1$; $b_1 = b_2 = 0,001$.

Константу интегрирования C_2 находим из первого уравнения системы (15.99) ($C_2 = 100,5$). Уравнение для нахождения константы интегрирования C_1 , определяемое из второго соотношения системы (15.99), будет иметь вид

$$T_{c2} = -\frac{a_2}{b_2} + \left[\frac{a_2^2}{b_2^2} + \frac{2}{b_2} (a_2 - a_1) T_1 + \frac{1}{b_2} (b_2 - b_1) T_1^2 - \frac{2}{b_2} (C_1 x_2 + C_2) \right]^{1/2}. \quad (15.101)$$

Из (15.101) находим $C_1 = -100,5$.

Температура в точке контакта слоев, определяемая из соотношения (15.97), будет $T_1 = 49,1$ °С.

Отметим, что в данном случае ввиду малых значений коэффициентов b_1 и b_2 задача приближается к линейной. Точное решение линейной задачи составляет $T_1 = 50$ °С. Если уменьшить величины b_1 и b_2 до значения 0,0001, то получаемая по формуле (15.97) температура будет $T_1 = 50,2$ °С, т.е. задача становится практически линейной.

Анализ полученных результатов позволяет заключить, что применение асимметричной единичной функции позволяет получать достаточно простые и удобные для практического использования аналитические решения стационарных нелинейных задач теплопроводности для многослойных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глазунов Ю.Т.* Вариационные методы.— Москва—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006.
2. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М.: Высшая школа, 2001.
3. *Киреев В.И., Пантелеев А.П.* Численные методы в примерах и задачах. Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2006.
4. *Кудинов В.А., Карташов Э.М.* Техническая термодинамика. Учеб. пособие для вузов. 5-е изд. — М.: Высшая школа, 2007.
5. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2005.
6. *Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В.* Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. Учеб. пособие. — М.: Высшая школа, 2008.
7. *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. — М.: Физматлит, 2004.
8. *Цирельман Н.М.* Прямые и обратные задачи тепломассопереноса. — М.: Энергоатомиздат, 2005.
9. *Цой П.В.* Системные методы расчета краевых задач теплопереноса. — М.: Изд-во МЭИ, 2005.
10. *Aziz A.* A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 14 (2009).

Оглавление

Введение	3
--------------------	---

ЧАСТЬ I

Глава 1. Первый закон термодинамики. Основные понятия и определения	5
--	----------

§ 1.1. Термодинамическая система и окружающая среда	5
§ 1.2. Основные термодинамические параметры состояния	6
§ 1.3. Термодинамический процесс	10
§ 1.4. Уравнение состояния	12
§ 1.5. Уравнения состояния реальных газов	15
§ 1.6. Энергия. Внутренняя энергия	19
§ 1.7. Теплота и работа	20
§ 1.8. Первый закон термодинамики	21

Глава 2. Второй закон термодинамики	26
--	-----------

§ 2.1. Энергия и энтропия	26
§ 2.2. Равновесность и обратимость процессов	28
§ 2.3. Условия работы тепловых машин	29
§ 2.4. Цикл Карно	31
§ 2.5. Обратный обратимый цикл Карно	36
§ 2.6. Метод циклов. Открытие энтропии как функции состояния	37
§ 2.7. Общая математическая формулировка второго закона термодинамики	41
§ 2.8. Физический смысл и свойства энтропии	43
§ 2.9. Обобщенный термодинамический цикл Карно. Регенерация теплоты	46
§ 2.10. Эксергетический метод исследования	47
§ 2.11. Эксергия теплоты	49

Глава 3. Компрессорные машины	51
--	-----------

§ 3.1. Процессы сжатия в компрессорных машинах	51
§ 3.2. Мощность привода и коэффициенты полезного действия компрессора	56
§ 3.3. Многоступенчатый компрессор	57

Глава 4. Циклы поршневых двигателей внутреннего сгорания	60
---	-----------

§ 4.1. Краткие исторические сведения	60
§ 4.2. Циклы ДВС с подводом теплоты при постоянном объеме	61

§ 4.3. Циклы ДВС с подводом теплоты при постоянном давлении.	64
§ 4.4. Циклы ДВС со смешанным подводом теплоты.	67
Глава 5. Циклы газотурбинных установок	69
§ 5.1. Циклы ГТУ с подводом теплоты при постоянном давлении.	69
§ 5.2. Циклы ГТУ с подводом теплоты при постоянном объеме	72
§ 5.3. Методы повышения термического КПД ГТУ	74
Глава 6. Циклы паросиловых установок	81
§ 6.1. Цикл Карно во влажном паре и его недостатки	81
§ 6.2. Основной цикл ПСУ — цикл Ренкина	82
§ 6.3. Полезная работа цикла Ренкина. Работа питательного насоса	83
§ 6.4. Термический КПД цикла Ренкина	84
§ 6.5. Влияние параметров пара на термический КПД цикла Ренкина	86
§ 6.6. Промежуточный перегрев пара.	87
§ 6.7. Регенеративный цикл паросиловой установки.	89
Глава 7. Циклы холодильных машин.	94
§ 7.1. Классификация холодильных машин	94
§ 7.2. Цикл воздушной холодильной установки	96
§ 7.3. Цикл паровой компрессорной холодильной установки	98
§ 7.4. Цикл холодильной установки абсорбционного типа	99
§ 7.5. Цикл пароэжекторной холодильной установки	100
§ 7.6. Тепловой насос.	101

ЧАСТЬ II

Глава 8. Общие вопросы теории теплообмена.	103
§ 8.1. Основы теории теплообмена	103
§ 8.2. Температурное поле	105
§ 8.3. Температурный градиент	109
§ 8.4. Тепловой поток: векторная и скалярная формы закона Фурье.	111
§ 8.5. Дифференциальное уравнение теплопроводности	115
Глава 9. Математическая постановка краевых задач.	122
§ 9.1. Условия однозначности	122
§ 9.2. Краевые условия	124
Глава 10. Метод дополнительных граничных условий в нестационарных задачах теплопроводности	129
§ 10.1. Основные положения и обоснование метода.	129
§ 10.2. Неограниченная пластина (алгебраические координатные функции)	130
§ 10.3. Тригонометрические координатные функции.	139
§ 10.4. Неограниченная пластина (граничные условия третьего рода)	146
§ 10.5. Бесконечный цилиндр (граничные условия первого рода).	150
§ 10.6. Бесконечный цилиндр (граничные условия третьего рода)	157
§ 10.7. Шар (граничные условия первого рода)	162
§ 10.8. Шар (граничные условия третьего рода)	165

§ 10.9. Задачи теплопроводности при несимметричных граничных условиях третьего рода.	169
§ 10.10. Метод дополнительных граничных условий в задачах теплопроводности для многослойных конструкций.	175
Глава 11. Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий.	180
§ 11.1. Неограниченная пластина (граничные условия первого рода) . . .	180
§ 11.2. Цилиндр, шар (граничные условия первого рода).	207
§ 11.3. Пластина, цилиндр, шар (граничные условия третьего рода). . .	221
§ 11.4. Граничные условия второго рода.	238
§ 11.5. Задачи теплопроводности с внутренними источниками теплоты (граничные условия первого рода)	248
§ 11.6. Внутренние источники теплоты при граничных условиях второго рода	262
§ 11.7. Внутренние источники теплоты при граничных условиях третьего рода	263
§ 11.8. Двумерные задачи теплопроводности с источником теплоты. . .	264
§ 11.9. Анализ решений уравнений теплопроводности при конечной и бесконечной скорости распространения теплоты.	269
§ 11.10. Приближенные аналитические решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.	275
Глава 12. Переменные граничные условия и источники теплоты	283
§ 12.1. Температура стенки — линейная функция времени	283
§ 12.2. Граничные условия третьего рода с переменной во времени температурой среды.	290
§ 12.3. Граничные условия третьего рода с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи	296
§ 12.4. Переменные во времени граничные условия второго рода . . .	304
§ 12.5. Переменные во времени внутренние источники теплоты	309
§ 12.6. Переменное начальное условие.	312
§ 12.7. Несимметричные граничные условия	324
Глава 13. Нелинейные задачи теплопроводности	330
§ 13.1. Коэффициент температуропроводности — линейная функция температуры	330
§ 13.2. Коэффициент температуропроводности — степенная функция температуры	340
§ 13.3. Нелинейные задачи теплопроводности с внутренними источниками теплоты	343
§ 13.4. Задачи теплопроводности с переменными физическими свойствами среды	345
Глава 14. Конвективный теплообмен в потоках жидкостей	348
§ 14.1. Общие сведения о пограничном слое. Гидродинамическая теория теплообмена	348
§ 14.2. Динамический пограничный слой	351
§ 14.3. Тепловой пограничный слой	353

§ 14.4. Аналитические решения уравнений динамического пограничного слоя	355
§ 14.5. Аналитические решения уравнений теплового пограничного слоя при граничных условиях первого рода на стенке	368
§ 14.6. Аналитические решения уравнений теплового пограничного слоя при граничных условиях третьего рода на стенке	379
§ 14.7. Теплообмен при течении жидкостей в плоскопараллельных каналах	384
Г л а в а 15. Обобщенные функции в задачах теплопроводности для многослойных конструкций	397
§ 15.1. Стационарная теплопроводность в многослойной пластине . . .	397
§ 15.2. Стационарная теплопроводность в многослойном цилиндре. . .	404
§ 15.3. Многослойная пластина с постоянными внутренними источниками теплоты	406
§ 15.4. Стационарная нелинейная теплопроводность в многослойной пластине.	413
Литература.	419