

И. КЕЛДЬ

ЭЧЗ

# Координаты ГАУССА-КРЮГЕРА

И  
ИХ  
ПРИМЕНЕНИЕ

ОПТИ  
ГОСГОРИЗДАТ

1932



НА ДОМ НЕ ВЫДАЕТСЯ

Э43

Н. БЕЛЛЬ

Горн. инж. и проф. Ленинградского Горного Института

05/188

# КООРДИНАТЫ ГАУССА-КРЮГЕРА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО  
ДЛЯ ГЕОДЕЗИСТОВ, ЗЕМЛЕМЕРОВ,  
МАРКШЕЙДЕРОВ, ТОПОГРАФОВ  
И ГИДРОГРАФОВ

инв. н 155

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ  
ДОПОЛНЕННОЕ

К.



ВНТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ГОРНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА 1932 ЛЕНИНГРАД

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Предисловие ко второму изданию . . . . .	3
Предисловие к первому изданию . . . . .	4
§ 1. Некоторые математические замечания . . . . .	5
§ 2. Сферический избыток и теорема Лежандра . . . . .	9
§ 3. Координаты Зольднера, переход с шара . . . . .	11
§ 4. Координаты Гаусса, переход с шара . . . . .	14
§ 5. Искажения проекции Гаусса при конечных расстояниях . . . . .	16
§ 6. Терминология и обозначения угловых величин . . . . .	24
§ 7. Земной сфероид . . . . .	29
§ 8. Формулы для координат Гаусса-Крюгера . . . . .	30
§ 9. Постановление III Геодезического совещания о координатах Гаусса-Крюгера . . . . .	30
§ 10. О точности вычислений применительно к имеющимся таблицам Шарнгорста-Матусевича . . . . .	40
§ 11. Таблицы Y и X и пользование ими . . . . .	45
§ 12. Вычисление плоских координат непосредственно по географическим . . . . .	54
§ 13. Нахождение приращений плоских координат по геодезическому азимуту и расстоянию на земной поверхности . . . . .	65
§ 14. Нахождение приращений плоских координат по приращениям географических координат . . . . .	72
§ 15. Нахождение приращений плоских координат путем перемещений по параллели и меридиану . . . . .	74
§ 16. Обработка на плоскости с непосредственно измеренными на земной поверхности углами и расстояниями . . . . .	79
§ 17. Вычисление $\gamma$ и составление абриса . . . . .	107
§ 18. Переход из одной полосы в другую . . . . .	111
§ 19. Получение географических координат по координатам Гаусса-Крюгера . . . . .	124
§ 20. Непосредственный переход к координатам Гаусса-Крюгера от другой системы плоских координат . . . . .	130
§ 21. Система координат Гаусса-Крюгера, размеры и номенклатура планшетов на I Всесоюзном маркшейдерском съезде . . . . .	149
Приложение (семь таблиц) . . . . .	152

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

Первое издание разошлось менее чем в год. Это свидетельствует о том, насколько единая система координат получила широкое распространение. Вопрос об общей системе координат имеет для нашего социалистического хозяйства большое значение. Роль единой системы плоских прямоугольных координат в ближайшем будущем будет значительна: она преобразует съемочное дело, автоматически объединит его, установит взаимный контроль всех организаций, ведущих съемки, и вызовет соревнование в точности выполняемых работ. При общей системе координат значительно облегчится использование для целей картографии различных ведомственных съемок, а также будет упрощена инвентаризация земель всего Союза при точной квадратной разбивке по общей координатной сетке. Таким образом проникновение единой системы координат Гаусса-Крюгера в гущу землемерных работников всех организаций даст могучий толчок рационализации съемочного дела и несомненно составит новую эру в развитии этого дела у нас в Союзе. Поэтому надеюсь, что предлагаемое руководство, несмотря на свою краткость и проистекающие отсюда недостатки, будет способствовать всему тому, что следует ожидать от введения единой системы координат Гаусса-Крюгера.

Второе издание по сравнению с первым дополнено особым формуляром вычисления координат Гаусса-Крюгера по географическим координатам и переходом от местной системы прямоугольных координат к системе Гаусса-Крюгера, кроме того в нем сделаны исправления всех замеченных опечаток и неточностей. \* В 1930 г. вышли и в 1931 г. переизданы таблицы, формулы и руководство для вычисления координат Гаусса-Крюгера для широт от 35 до 70°. Составлены под руководством и при участии проф. Ф. Н. Красовского инженерами-геодезистами В. И. Звоновым и Д. А. Лариным (Ленинград, 1932 г.). Они дают различные основные величины через 1', дуги параллелей через 5' по широте и кратко поясняют вычисления. Кроме того в 1931 г. вышли таблицы под названием: проф. Н. Н. Матусевич и А. П. Ющенко, Таблицы, формулы и краткое руководство для вычисления плоских

\* Прошу читателей делать замечания по содержанию книги и направлять их автору: Ленинград, Горный институт.

прямоугольных координат Гаусса-Крюгера. Эллипсоид Бесселя. Ленинград 1931. Обе эти таблицы облегчают вычисление и главным образом содержат таблицы различных величин, поэтому приобретение их следует рекомендовать всем производящим массовые вычисления координат Гаусса-Крюгера, после чего отпадет необходимость иметь таблицы Шарнгорста, предложенные для другой цели.

За настоящим кратким руководством остается популяризация идеи координат Гаусса-Крюгера и средство к самостоятельному усвоению сущности этих координат и вычислению семизначными таблицами логарифмов при помощи таблиц Шарнгорста необходимых переходов к координатам Гаусса-Крюгера в условиях самостоятельной работы на местах, где не всегда все пособия имеются под рукой.

*Н. Кель.*

Ленинград, апрель, 1932 г.

---

### ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

III Геодезическое совещание при Госплане СССР, принявшее постановление (см. ниже) о введении общей для всего Союза системы прямоугольных координат Гаусса-Крюгера, признало необходимым популяризацию идеи этих координат и составление руководства и таблиц для их применения.

Настоящее краткое руководство является попыткой элементарно изложить сущность этих координат, привести примеры перехода к ним и их использования, и тем дать возможность всем местным работникам, обладающим достаточной инициативой, вводить у себя рекомендованную и наиболее целесообразную общую систему координат. Руководство базируется на распространенных таблицах Шарнгорста-Матусевича \* и семизначных таблицах логарифмов. К руководству приложено семь небольших таблиц. Обращено внимание на достаточную иллюстрацию примерами. Во всех примерах основные члены вычислены семизначными логарифмами, а добавочные — пятизначными. В некоторых случаях можно было бы применить и шестизначные таблицы логарифмов, но в виду их малой распространенности оставлены семизначные логарифмы.

*Н. Кель.*

Ленинград, февраль, 1929 г.

---

\* „Таблицы для вычисления широт, долгот и азимутов, тригонометрических пунктов 1-го класса на сфероиде Бесселя“, изд. 4-е 1930. Можно выписать из Военно-топографического управления. Москва, Варварка, 26.

## § 1. Некоторые математические замечания.

**Число  $\rho$ .** Помимо градусной меры углов (градусы, минуты, секунды) употребляется аналитическая мера их, представляющая отвлеченное число: отношение длины дуги, описанной произвольным радиусом из вершины угла и заключенной между сторонами угла, к своему радиусу. Таким образом аналитическая мера будет:

$$\text{для } 360^\circ = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi; \quad 180^\circ = \pi; \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}.$$

Угол, аналитическая мера которого равна 1 (дуга равна радиусу), равен  $\frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44'',8$ , или содержит в себе, как принято обозначать,  $\rho$  секунд.  $\rho = 206\,264,80625$ ;

$$\log \rho = 5,3144251332; \quad \log \frac{1}{\rho} = \bar{6},6855748668. \quad (1)$$

**Логарифмирование тригонометрических величин малых углов.** В таблицах логарифмов пятизначных и семизначных в отделе чисел, в конце каждой страницы, имеются величины  $S$  и  $T$ , отвечающие определенному круглому числу секунд. Эти величины представляют собой не что иное как логарифм отношения  $\sin$  или  $\text{tg}$  малого угла с указанным круглым числом секунд к этому числу секунд. В таблицах можно усмотреть, что  $S$  и  $T$  изменяются медленно, поэтому если мы возьмем малый угол и не с круглым числом секунд, мы и для него легко интерполированием найдем соответствующие  $S$  и  $T$ .

Назовем число секунд в угле через  $\alpha$ . Тогда

$$\log \frac{\sin \alpha}{\alpha} = S \text{ и } \log \frac{\text{tg } \alpha}{\alpha} = T,$$

или

$$\log \sin \alpha = \log \alpha + S, \text{ а } \log \text{tg } \alpha = \log \alpha + T. \quad (2)$$

По этим формулам при данном  $\alpha$  (числе секунд) находится  $\log \sin \alpha$  и  $\log \text{tg } \alpha$ .

Для обратного решения будут служить формулы:

$$\log \alpha = \log \sin \alpha - S, \text{ или } \log \alpha = \log \text{tg } \alpha - T. \quad (3)$$

Чтобы применить формулу (3), нужно сначала найти приближенное значение  $\alpha$  в отделе тригонометрических величин, а затем в отделе чисел найти соответствующее  $S$  или  $T$ . При этом мантисса  $\log x$  всегда будет на той же странице, где бралось  $S$  или  $T$ . Формулами (2) и (3) удобнее пользоваться, чем таблицей логарифмов синусов и тангенсов малых углов, имеющейся например в семизначных логарифмах Вега.

$S$  и  $T$  для нуля секунд, т. е. в пределе когда угол стремится к нулю, равны между собой и равны  $\log \frac{1}{\rho}$ .

Если обратиться к семизначным таблицам логарифмов, то мы увидим, что  $S$  и  $T$  равны  $\log \frac{1}{\rho}$  даже до  $50''$ ; тем более можно считать, что  $S$  и  $T = \log \frac{1}{\rho}$  при  $\alpha = 1''$ , т. е.

$$\log \frac{\sin 1''}{1} = \log \frac{\operatorname{tg} 1''}{1} = \log \frac{1}{\rho},$$

или с большим приближением:

$$\frac{1}{\rho} = \sin 1'' = \operatorname{tg} 1''. \quad (4)$$

Вот почему часто в геодезических выражениях мы встречаем  $\sin 1''$  вместо  $\frac{1}{\rho}$ , а  $\frac{1}{\sin 1''}$  вместо  $\rho$ , хотя строго математически это неверно.

Для  $\cos$  малого угла можно воспользоваться формулой:

$$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha},$$

откуда

$$\log \cos \alpha = \log \sin \alpha - \log \operatorname{tg} \alpha,$$

или по формуле (2):

$$\log \cos \alpha = S - T. \quad (5)$$

**Число  $\mu$ .** Кроме обычных десятичных логарифмов, имеющих основанием число 10, мы знаем еще натуральные логарифмы, имеющие основанием число  $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , при  $n$  равном бесконечности.  $e = 2,7182818285$ . Десятичный логарифм числа  $e$  равен числу  $\mu$ , называемому модулем десятичных логарифмов.

$$\log_{10} e = \mu = 0,4342944819; \log_{10} \mu = 1,6377843113, \quad (6)$$

т. е.

$$10^\mu = e. \quad (7)$$

Десятичный логарифм всякого числа равен натуральному логарифму этого числа, помноженному на модуль  $\mu$ :

$$\log_{10} N = \mu \log_e N, \quad (8)$$

ибо, обозначая  $\log_{10} N$  через  $x$  и  $\log_e N$  через  $y$ , имеем, что

$$10^x = N = e^y = (10^\mu)^y = 10^{\mu y}, \text{ т. е. } x = \mu y.$$

**Необходимые ряды.** По общим формулам разложения в ряд различных функций, даваемых в дифференциальном исчислении, легко выводятся следующие ряды:

$$\sin(x \pm h) = \sin x \pm h \cos x - \frac{h^2}{2} \sin x \mp \dots; \quad (9)$$

$$\cos(x \pm h) = \cos x \mp h \sin x - \frac{h^2}{2} \cos x \pm \dots; \quad (10)$$

$$\operatorname{tg}(x + h) = \operatorname{tg} x + h \frac{1}{\cos^2 x} + h^2 \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \dots. \quad (11)$$

В этих формулах  $h$  выражено в аналитической мере. Далее:

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots; & \frac{1}{\sin x} &= \operatorname{cosec} x \\ &= \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \dots \right); \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots; & \frac{1}{\cos x} &= \sec x \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots; & \frac{1}{\operatorname{tg} x} &= \operatorname{ctg} x \\ &= \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Во второй части этих рядов  $x$  также выражено в аналитической мере.

Еще важные ряды:

$$\log_e(1+x) = +x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots; \quad (15)$$

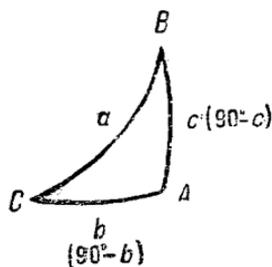
$$\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots. \quad (16)$$

Обыкновенные десятичные логарифмы этих выражений по формуле (8) будут:

$$\log(1+x) = \mu \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right); \quad (17)$$

$$\log(1-x) = -\mu \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right). \quad (18)$$

**Формулы сферических прямоугольных треугольников.** Сферическими треугольниками называются треугольники на шаровой поверхности, сторонами которых являются дуги больших кругов, выражаемые так же как и углы в градусной или аналитической мере, а не в линейной. Углами сферических треугольников служат двухгранные углы между плоскостями больших кругов, образующих стороны, или линейные углы, составляемые касательными к дугам больших кругов в точках их пересечения, т. е. в вершинах треугольника. Прямоугольным сферическим треугольником называется такой, у которого один угол прямой, т. е. плоскости двух сторон перпендикулярны. На черт. 1 изображен сферический прямоугольный треугольник:  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $a$  — гипотенуза,  $b$  и  $c$  — катеты.



Черт. 1.

Все формулы, связывающие элементы этого треугольника, можно выразить следующими словами правила Непера:

Косинус каждого элемента равен произведению котангенсов прилежащих, или произведению синусов непримежащих элементов, если считать только пять элементов:  $90^\circ - b$ ,  $C$ ,  $a$ ,  $B$  и  $90^\circ - c$ . (Угол  $A$  исключен, катеты заменены дополнением их до  $90^\circ$ ).

Так  $\cos B = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} (90^\circ - c) = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a} = \sin C \sin (90^\circ - b) = \sin C \cdot \cos b$ , и т. д. В общем мы получаем следующие формулы:

$$\cos a = \operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{ctg} B = \cos b \cdot \cos c; \quad (19)$$

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a} = \sin C \cdot \cos b; \quad (20)$$

$$\sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B} = \sin a \cdot \sin C; \quad (21)$$

$$\sin b = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} C} = \sin a \cdot \sin B; \quad (22)$$

$$\cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} = \sin B \cdot \cos c. \quad (23)$$

Если стороны этого треугольника станут очень малы по сравнению с радиусом шаровой поверхности, то их можно рассматривать как отрезки прямых, и в приведенных формулах вместо тригонометрических величин этих сторон брать аналитическую их меру по формулам (12)—(14), т. е.:

вместо  $\sin a$ ,  $\sin b$  и  $\sin c$  брать:

$$\frac{a}{R}, \quad \frac{b}{R} \quad \text{и} \quad \frac{c}{R};$$

вместо  $\cos a$ ,  $\cos b$  и  $\cos c$  брать:

$$1 - \frac{a^2}{2R^2}, \quad 1 - \frac{b^2}{2R^2}, \quad 1 - \frac{c^2}{2R^2};$$

вместо  $\operatorname{tg} a$ ,  $\operatorname{tg} b$  и  $\operatorname{tg} c$  брать:

$$\frac{a}{R}, \quad \frac{b}{R} \quad \text{и} \quad \frac{c}{R},$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — длины сторон, а  $R$  — радиус шаровой поверхности.

Тогда мы вместо формул (19)—(23) получим формулы плоской тригонометрии для прямоугольного треугольника.

Так вместо формулы  $\cos a = \cos b \cdot \cos c$  получим:

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} = \left(1 - \frac{b^2}{2R^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2R^2}\right),$$

или, отбрасывая член  $\frac{b^2 c^2}{4R^4}$ , получим известную формулу  $a^2 = b^2 + c^2$ .

Вместо  $\sin c = \sin a \cdot \sin C$  получим:  $c = a \sin C$ , и т. д.

## § 2. Сферический избыток и теорема Лезандра.

В сферических треугольниках, в отличие от плоских, сумма углов всегда больше  $180^\circ$ , и это превышение сверх  $180^\circ$  называется сферическим избытком и обозначается обычно через  $\epsilon$ .

$$\epsilon = A + B + C - 180^\circ, \quad (24)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — углы сферического треугольника.

Мы можем легко представить себе сферический треугольник, у которого все три угла прямые. Такие треугольники получатся если мы шар разрежем пополам и затем каждую половинку разделим крестообразно на четыре равные части. Значит поверхность  $F$  треугольника с тремя прямыми углами составляет  $\frac{1}{8}$  поверхности шара, или

$$F = \frac{1}{8} \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{2} \pi R^2.$$

Сферический избыток этого треугольника равен  $90^\circ$ , или в аналитической мере  $\frac{\pi}{2}$ . Если мы сравним аналитическую меру его сферического избытка с поверхностью, то увидим, что аналитическая мера избытка равняется поверхности треугольника, деленной на квадрат радиуса сферы. Это справедливо и для какого угодно сферического треугольника; вообще:

$$\left. \begin{array}{l} \text{в аналитической мере } \epsilon = \frac{F}{R^2} \\ \text{в секундах } \epsilon = \rho \frac{F}{R^2} \end{array} \right\} \quad (25)$$

Значение сферического избытка особенно важно для решения малых сферических треугольников (треугольников малого изгиба), т. е. таких треугольников, у которых стороны весьма малы по отношению к радиусу сферы. На земной поверхности мы обычно имеем дело только с такими треугольниками, так как длина сторон триангуляций редко превышает 60 км, что составляет только  $\frac{1}{100}$  земного радиуса. Дело в том что такие сферические треугольники можно решать по формулам плоской тригонометрии на основании теоремы Лежандра, которая гласит:

Если выпрямить стороны сферического треугольника малого изгиба, то полученный плоский треугольник будет иметь углы равные с большой точностью соответствующим сферическим углам, уменьшенным на одну треть сферического избытка; или длины сторон сферического треугольника малого изгиба равны сторонам плоского треугольника, у которого каждый угол получен из соответствующего сферического угла вычитанием почти точно  $\frac{1}{3}$  сферического избытка треугольника; при этом игнорируются только величины четвертого порядка по отношению к аналитической мере сторон сферического треугольника. Так например при стороне в 60 км аналитическая мера ее будет около  $\frac{1}{100}$ , а величина четвертого порядка равна  $\frac{1}{(100)^4} = 10^{-8}$ .

Назовем углы сферического треугольника через  $A$ ,  $B$  и  $C$ ; длину его сторон через  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а углы плоского треугольника, имеющего ту же длину сторон, через  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ ; тогда по теореме Лежандра будем иметь:

$$A' = A - \frac{1}{3} \epsilon; \quad B' = B - \frac{1}{3} \epsilon; \quad C' = C - \frac{1}{3} \epsilon, \quad (26)$$

где  $\epsilon$  — сферический избыток, который может быть вычислен по площади  $\Delta$  плоского треугольника, и выражен в секундах формулой:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \rho \frac{\Delta}{R^2}, \\ \Delta &= \frac{ab \sin C'}{2} = \frac{a^2 \sin B' \sin C'}{2 \sin A'} = \frac{ah_a}{2} \\ &= \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

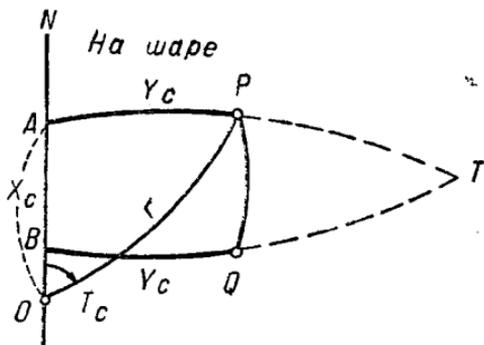
В треугольниках триангуляций  $\epsilon$  обычно составляет несколько секунд и поэтому может быть вычислено со сравнительно большой относительной ошибкой, например с точностью до  $\frac{1}{1000}$  (четырёхзначные логарифмы). Для этого достаточно довольно грубо решить все треугольники, игнорируя сферичность, и вычислить их площадь и сферический избыток. Затем все уравненные сферические углы

уменьшить на  $\frac{1}{3} \varepsilon$  соответствующих треугольников, как говорят получить плоские углы, и вновь уже тщательно перерешить все треугольники (шести или семизначными логарифмами), исходя из какой-нибудь данной стороны (базиса), выраженной в метрах. Так обычно и делается. Ниже будет предлагаться другой способ. Сферический треугольник будет заменяться также плоским, но не по принципу теоремы Лемандра, а по другому: на одну плоскость будет переноситься вся сеть треугольников без разрывов, а не каждый треугольник в отдельности. Больше того, мы перейдем к разворачиванию на плоскость проекции целой полосы шириной в  $6^\circ$  между меридианами протяжением от южного до северного полюса.

### § 3. Координаты Зольднера, переход с шара.

Вообразим меридиан  $ON$  на земном шаре (черт. 2), проходящий через начало координат точку  $O$ . Проведем из точки  $P$  дугу большого круга  $PA$ , перпендикулярную к меридиану  $ON$ ; тогда дуга  $OA$  будет называться сферической абсциссой  $x_c$ , а дуга  $PA$  — сферической ординатой  $y_c$  этой точки  $P$ . Знаки у этих сферических координат будут такие же, как в обычной плоской системе координат.

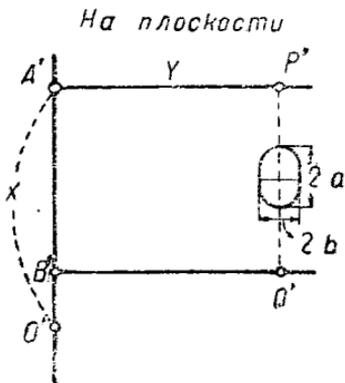
Соединив точку  $P$  с началом координат также дугой большого круга, получим так называемые полярные сферические координаты точки  $P$ : дуга  $OP = r$  — радиус-вектор и угол  $AOP = T_c$  — дирекционный угол вектора. В данном случае благодаря тому что ось абсцисс совмещена с меридианом, дирекционный угол может быть назван и азимутом  $A$ . Вообще же за ось абсцисс можно принять какой угодно большой круг и получить так называемую систему с косою осью.



Черт. 2.

Рассмотренные координаты можно назвать поверхностными координатами в отличие от географических, которые дают углы между прямыми в пространстве (в теле земли). При переходе с земной поверхности на плоскость плана или карты искажения неизбежны, при этом поверхностные координаты сохраняют свое значение и искажаются относительно мало. Пространственные же соотношения исчезают. Искажение зависит всецело от того способа, или как говорят от той проекции, при помощи которой часть шара-

вой поверхности переносится на плоскость. Зольднер предложил при переходе с шара на плоскость считать для каждой точки прямоугольные сферические координаты равными плоским прямоугольным координатам. Поэтому чтобы изобразить на плане согласно предложению Зольднера например точку  $P$  (черт. 2), мы должны



Черт. 3.

провести прямую  $O'A'$  (черт. 3), принять ее за ось абсцисс, отложить на ней отрезок  $O'A'$  равный  $x_0$  (черт. 2), восстановить перпендикуляр  $A'P'$  к оси абсцисс и на нем отложить отрезок  $A'P'$ , равный  $y_0$  (черт. 2). Получим точку  $P'$  как проекцию точки  $P$ . Если приравнять полярные координаты, то получим проекцию Постеля. Проекция на черт. 3 называется проекцией Зольднера, а плоские координаты  $x = x_0$  и  $y = y_0$ , построенные таким образом, называются координатами Зольднера. Часто и сферические прямоугольные

координаты называются координатами Зольднера, но лучше не путать эти понятия. Условимся твердо впредь называть координатами Зольднера—координаты, перенесенные на плоскость. \*

**Искажения проекции Зольднера.** Наиболее просто выявляется искажение расстояния между двумя точками, имеющими одинаковые ординаты. На шаре эти две точки ( $P$  и  $Q$  на черт. 2) лежат на малом круге, параллельном начальному меридиану; расстояние по этому кругу будет меньше разности абсцисс  $\Delta x$  этих точек, тогда как на проекции (черт. 3) расстояние между  $P'$  и  $Q'$  равно как раз разности абсцисс  $\Delta x$ , и легко подсчитать, насколько расстояние  $PQ$  (черт. 2) по параллели меньше расстояния  $P'Q'$  (черт. 3), равного расстоянию  $AB$  на начальном меридиане.  $\frac{\text{Дуга } AB}{\text{Дуга } PQ} = \frac{P'Q'}{PQ} =$  отношению радиусов дуг  $AB$  и  $PQ$ . Если обозначить радиус шара и дуги  $AB$  через  $R$ , то радиус параллели  $PQ$  будет равен  $R \cos \frac{y}{R}$ , как явствует из черт. 4, где  $S$ — центр шара,

\* В инструкции И. Г. У. 1923 г. по съемке и нивелировке городов несколько невразумительно сказано об этих координатах: п. 18. „Для пунктов 1 класса вычисляются прямоугольные сферические координаты; для пунктов всех остальных разрядов—плоские прямоугольные координаты“. А разве в пределах точности наблюдений плоские прямоугольные координаты всех остальных разрядов не являются в то же время и сферическими прямоугольными координатами!? Очевидно здесь речь идет лишь о точности вычисления.

$CP$  — радиус параллели  $PQ$ ,  $ST$  — радиус шара, проходящий на черт. 2 через пересечение дуг  $AP$  и  $BQ$  и перпендикулярный к плоскости начального меридиана  $ON$ .

Значит

$$\frac{P'Q'}{PA} = \frac{R}{R \cos \frac{y}{R}} = \frac{1}{\cos \frac{y}{R}},$$

или по формуле (13):

$$\frac{P'Q'}{PQ} = 1 + \frac{y^2}{2R^2}.$$

Как бы близко между собой ни были точки  $P$  и  $Q$ , расстояние между ними искажается в указанном отношении. Отношение бесконечно малых линейных элементов вокруг данной точки на проекции к соответствующим элементам на местности (на шаре) называется масштабом в данной точке по разным направлениям и обозначается буквой  $m$ . В данном случае масштаб в точке  $P'$  или  $Q'$  по направлению  $P'Q'$ , параллельному оси абсцисс, очевидно будет равен:

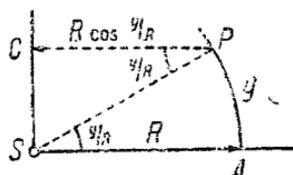
$$m_x = 1 + \frac{y^2}{2R^2}, \quad (28)$$

где  $y$  — ордината точки  $P'$  или  $Q'$ , а  $R$  — радиус шара.

Масштаб же по направлению ординаты будет равен единице, так как ординаты переносятся на проекцию без искажения:

$$m_y = 1. \quad (29)$$

Если вычертить величину масштабов по разным направлениям вокруг данной точки на проекции, то получится так называемый эллипс искажений, который в проекции Зольднера имеет такой вид, как примерно изображено на черт. 3, т. е. эллипс вытянут по направлению абсцисс, большая полуось его  $a = m_x = 1 + \frac{y^2}{2R^2}$ , а малая полуось  $b = m_y = 1$ . Это значит, что бесконечно малый круг вокруг данной точки на проекции Зольднера изображается эллипсом, т. е. подобие бесконечно малых фигур нарушается, и этот эллипс тем более вытянут и тем более отличается от круга, чем дальше отстоит данная точка от оси абсцисс, т. е. чем больше ее ордината. Раз масштаб по различным направлениям неодинаков, значит налицо искажение углов между направлениями, исходящими из данной точки, независимо от расстояния до тех точек, куда эти направления проведены, и это искажение увеличивается с увеличением ординаты данной точки. Максимальные искажения достигают



Черт. 4.

уже 10" при ординате, равной 90 км, и дальше растут пропорционально квадрату  $y$ . В этом главнейший недостаток проекций Зольднера, что заставило, несмотря на столетнюю их давность и значительное распространение в Западной Европе, особенно в Германии, перейти на другую проекцию, так называемую конформную или равноугольную проекцию Гаусса, у которой между бесконечно близкими точками искажения углов нет, и эллипс искажений представляет собой круг.

#### § 4. Координаты Гаусса, переход с шара.

Координаты Гаусса, как конформные, в последние годы завоевали себе общее признание во многих странах Западной Европы, в том числе и в тех, которые пользовались раньше, в течение многих десятилетий, координатами Зольднера, как например Германия. В СССР также начали сначала применять координаты Зольднера, как наиболее известные, и теперь еще кое-где продолжают ими пользоваться, несмотря на явное превосходство координат Гаусса. Проекция Гаусса равноугольная, это значит, что искажения длин у нее на данной точке по всем направлениям одинаковы. Как этого достигнуть? Чтобы уяснить себе сущность проекции Гаусса, следует также исходить из сферических прямоугольных координат, вернее — исходить из проекции Зольднера. Так как избежать искажения длин нельзя, то, чтобы добиться равенства искажений по всем направлениям, остается только при замене сферических прямоугольных координат плоскими сделать искажения длин и в направлении ординат одинаковыми с искажениями проекции Зольднера в направлении абсцисс, т. е. удлинить каждый бесконечно малый элемент ординаты умножением его на

$$\frac{1}{\cos \frac{y}{R}} = \sec \frac{y}{R},$$

переменный множитель, больший единицы, зависящий от расстояния  $y$  этого элемента от оси абсцисс.

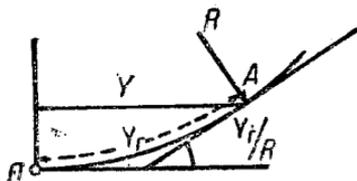
Итак чтобы получить прямоугольные координаты Гаусса, следует также, как и в проекции Зольднера, вычислить сферические прямоугольные координаты на шаре, сферическую абсциссу затем принять без изменения, а всю ординату несколько удлинить, помножая каждый элемент ее на переменный множитель  $\sec \frac{y}{R}$ .

Посмотрим, как изменится от этого вся длина ординаты, т. е. как выразится удлиненная ордината — обозначим ее через  $y_{\Gamma}$  ( $\Gamma$  — проекция Гаусса).

Помножить некоторую длину на  $\sec \alpha$ , или разделить на  $\cos \alpha$ , значит как бы по горизонтальному проложению линии получить ее наклонную длину при угле наклона равном  $\alpha$ . Таким образом удлиненную ординату  $y_{\Gamma}$  можно рассматривать как некоторую непрерывно изгибающуюся кривую, касательная к которой в каждой точке  $A$  наклонена к горизонту под углом  $\frac{y}{R}$  или  $\frac{y_{\Gamma}}{R}$  (черт. 5), где  $y$  — переменное горизонтальное расстояние точки касания  $A$  от начальной точки  $O$  кривой.

Приняв в первом приближении вследствие незначительности угла  $\frac{y_{\Gamma}}{R}$  эту кривую за дугу некоторого круга, имеющую своим центральным углом  $\frac{y_{\Gamma}}{R}$ , а линией синуса —  $y$ , мы получим такое соотношение:

$$\sin \frac{y_{\Gamma}}{R} = \frac{y}{R},$$



или по формуле (12):

Черт. 5.

$$\frac{y_{\Gamma}}{R} - \frac{y_{\Gamma}^3}{6R^3} = \frac{y}{R}.$$

Во втором члене левой части этого равенства  $y_{\Gamma}$  можно заменить через  $y$ , тогда мы получим для удлиненной ординаты такое выражение:

$$y_{\Gamma} = y \left( 1 + \frac{y^2}{6R^2} \right), \quad \text{или} = y \left( 1 + \frac{y_{\Gamma}^2}{6R^2} \right), \quad (30)$$

т. е. чтобы получить ординату Гаусса, нужно ординату Зольднера, или сферическую ординату помножить на

$$1 + \frac{y^2}{6R^2}, \quad \text{или на} \quad 1 + \frac{y_{\Gamma}^2}{6R^2}.$$

Отдельный же малый элемент ординаты помножается на

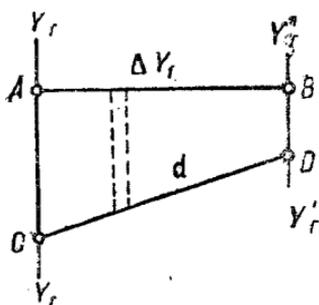
$$\frac{1}{\cos \frac{y}{R}}, \quad \text{или на} \quad \left( 1 + \frac{y^2}{2R^2} \right).$$

Это показывает, что относительное удлинение всей ординаты равно  $\frac{y^2}{6R^2}$  и составляет одну треть от  $\frac{y^2}{2R^2}$  относительного удлинения бесконечно малого элемента ординаты на конце ее, или короче:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Искажение всей ординаты Гаусса равно} \\ \text{одной трети искажения на конце ее.} \end{array} \right\} (31)$$

## § 5. Искажения проекции Гаусса при конечных расстояниях.

**Искажения конечных длин.** Возьмем на проекции две прямых, параллельных оси абсцисс, с ординатами  $y_{\Gamma}$  и  $y'_{\Gamma}$  и вообразим между этими прямыми отрезок ординаты и отрезок косою линией. На черт. 6  $AB$  — отрезок ординаты или приращение ординаты равно  $\Delta y_{\Gamma}$ , и  $CD$  — отрезок равный  $d$  произвольно направленной прямой, имеющий то же приращение ординаты равной  $\Delta y_{\Gamma}$ . Благодаря конформности, т. е. подобию бесконечно малых фигур на проекции Гаусса таковым же на местности, искажение каждого элемента отрезка  $d$  будет равно искажению соответствующего элемента



Черт. 6.

ординаты; поэтому и искажение всего отрезка  $d$  будет равно искажению приращения  $\Delta y_{\Gamma}$  ординаты.

Искажение приращения ординаты определяется легко по выражению (30):

$$\begin{aligned} \Delta y_{\Gamma} &= y'_{\Gamma} - y_{\Gamma} = y' + \frac{1}{6R^2}y'^3 - \left( y + \frac{1}{6R^2}y^3 \right) \\ &= \Delta y + \frac{1}{6R^2}(y'^3 - y^3) = \Delta y + \frac{\Delta y}{6R^2}(y'^2 + y'y + y^2), \end{aligned}$$

или

$$\Delta y_{\Gamma} = \Delta y \left( 1 + \frac{y'^2 + y'y + y^2}{6R^2} \right),$$

т. е. искажение равно

$$\frac{y'^2 + y'y + y^2}{6R^2}.$$

Таково же искажение будет и отрезка  $d$ , т. е.

$$d = s \left( 1 + \frac{y'^2 + y'y + y^2}{6R^2} \right), \quad (32)$$

где  $s$  — длина этого отрезка на местности.

Равенство (32) удобнее представить в другом виде, преобразовав  $\frac{y'^2 + y'y + y^2}{6R^2}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{y'^2 + y'y + y^2}{6R^2} &= \frac{2y'^2 + 2y'y + 2y^2 + y'^2 + y^2 - y'^2 - y^2}{12R^2} \\ &= \frac{y'^2 + y^2}{4R^2} - \frac{(y' - y)^2}{12R^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{y'^2}{2R^2} + \frac{y^2}{2R^2} \right) - \frac{1}{6} \cdot \frac{(\Delta y)^2}{2R^2}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$d = s \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{y'^2}{2R^2} + \frac{y^2}{2R^2} \right) - \frac{1}{6} \cdot \frac{(\Delta y)^2}{2R^2} \right], \quad (33)$$

что выражается следующими словами:

Искажение длины (относительное удлинение) конечного отрезка равно среднему арифметическому из искажений на его концах, уменьшенному на  $\frac{1}{6}$  того искажения на одном из его концов, которое получилось бы, если ось абсцисс перенести на другой конец.

**Логарифмы масштаба и поправка логарифма длины.**

В проекции Гаусса масштаб в точке по всем направлениям будет одинаков и равен согласно формулы (28):

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2}. \quad (34)$$

Десятичный логарифм масштаба выразится по формуле (17) следующим образом:

$$\log m = \mu \frac{y^2}{2R^2}. \quad (35)$$

Значение  $\mu$  пояснено равенством (6).

Если прологарифмировать выражение (33), то на основании формул (17) и (18) и равенства (35) получим:

$$\log d - \log s = \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) - \frac{1}{6} \log m_\Delta, \quad (36)$$

где

$$\log m_1 = \mu \frac{y_1^2}{2R^2}; \quad \log m_2 = \mu \frac{y_2^2}{2R^2}$$

и

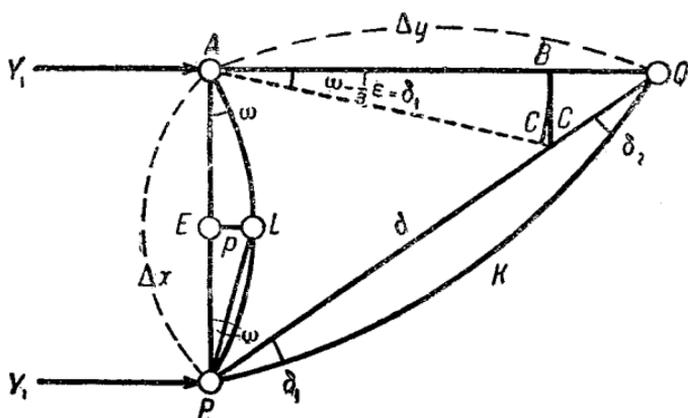
$$\log m_\Delta = \mu \frac{(y_2 - y_1)^2}{2R^2} = \mu \frac{(\Delta y)^2}{2R^2}.$$

Здесь в отличие от формулы (33) ординаты концов отрезка названы через  $y_1$  и  $y_2$ .

$\log d - \log s$  — поправка логарифма длины стороны при переходе с природы на проекцию.

**Поправки за кривизну.** Дуги больших и малых кругов на шаре при переносе на проекцию Гаусса также вообще изображаются дугами некоторых кривых линий за исключением дуг большого круга, перпендикулярных к оси абсцисс, и дуг малых кругов, параллельных оси абсцисс, каковые на проекции изображаются прямыми. Отклонения кривых линий на проекции, изображающих дуги кругов на шаре, от хорд, соединяющих концы дуг, настолько малы, что

практически для тех длин, с которыми приходится иметь дело, нет никакой разницы между длиной дуги на проекции и стягивающей ее хордой. Таким образом поправка длины „за кривизну“, т. е. разность между криволинейным изображением какой-нибудь стороны триангуляции на проекции и прямым отрезком, соединяющим концы этого изображения на проекции, практически равно нулю. Сказать же это по отношению „поправок за кривизну направлений“, дирекционных углов, нельзя: здесь получается уже величина ощутительная для сторон триангуляции I, II класса. На черт. 7 на проекции изображена криволинейно некоторая сторона триангуляции  $PKQ$ , т. е. отрезок дуги большого круга, длиной равной  $s$ . На проекции ее длина равна  $s'$ . Длину хорды  $PQ = d$  можно считать равной  $s'$ . Выпуклость дуги  $PKQ$  как гипотенузы всегда



Черт. 7.

направлена в сторону противоположную вершине ( $A$ ) прямого угла прямоугольного треугольника, образованного абсциссой, идущей от ближней к оси точке ( $P$ ), и ординатой, идущей от дальней точки ( $Q$ ); иначе—выпуклость направлена в сторону увеличения абсолютного значения ординаты, или, еще иначе, в сторону обратную точке пересечения перпендикуляра к данной хорде с осью абсцисс.

Пусть координаты точки  $P$  будут  $x_1$  и  $y_1$ , а координаты  $Q$ — $x_2$  и  $y_2$ . На черт. 7  $AP = \Delta x$  — приращение абсциссы и  $AQ = \Delta y$  — приращение ординаты. Прямая  $AP$  — изображение малого круга, параллельного меридиану, а дуга  $ALP$  — изображение дуги большого круга, проходящего через те же две точки  $A$  и  $P$ . Углы, помеченные на чертеже через  $\omega$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — в сущности углы между хордами и касательными к дугам  $ALP$  и  $PKQ$  в их концах. Найдем угол  $\omega$ , для чего определим стрелку  $EL = r$ , перейдя на шар. На шаре она представляет собой расстояние в средних точках между параллелью к начальному меридиану и большим кругом, проходя-



Итак для поправки за кривизну направления конечной стороны, параллельной оси абсцисс, найдено выражение (38), остается найти выражение для любого направления. Повторяем, что в проекции Гаусса нет искажения углов между бесконечно малыми отрезками дуг, т. е. нет искажения между касательными к дугам, изображающим на проекции конечные дуги больших кругов на шаре, в точках их пересечения. Это значит, что на черт. 7 угол например при точке  $P$  между касательными к дуге  $PK$  и дуге  $PL$  равен действительному углу на местности, измеренному в точке  $P$  между коллимационными плоскостями (направлениями), проходящими через точки  $A$  и  $Q$ . Условимся впредь под углами, образованными дугами, подразумевать углы между касательными к ним и будем называть эти углы, как и треугольники составленные дугами, — криволинейными и сопроводять их индексом „к“, в отличие от прямолинейных, которые будем писать без всякого индекса.

Так на черт. 7 криволинейные углы криволинейного треугольника  $AQKPL$  будут обозначаться  $A_k$ ,  $Q_k$  и  $P_k$ , а углы прямолинейного  $\triangle AQP$  — просто  $A$ ,  $Q$  и  $P$ .

Углы  $A_k$ ,  $Q_k$  и  $P_k$  равны действительным углам, а углы  $A$ ,  $Q$  и  $P$  будут искаженными и выразятся в зависимости от действительных следующим образом:

$$P = P_k + \omega - \delta_1; \quad A = A_k + \omega \quad \text{и} \quad Q = Q_k - \delta_2,$$

где  $\omega$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — „поправки за кривизну“. Сложим почленно эти равенства, в левой части получится сумма углов прямолинейного треугольника, т. е.  $180^\circ$ ; таким образом:

$$180^\circ = P_k + A_k + Q_k + \omega - \delta_1 + \omega - \delta_2,$$

или

$$\delta_1 + \delta_2 = P_k + A_k + Q_k - 180^\circ + 2\omega.$$

Принимая во внимание, что  $P_k + A_k + Q_k - 180^\circ$  равняется сферическому избытку  $\epsilon$  треугольника  $APQ$ , найдем, что

$$\delta_1 + \delta_2 = \epsilon + 2\omega.$$

$\epsilon$  по формуле (25) или по формуле (27) в аналитической мере равно  $\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2R^2}$ ,  $\omega$  выражено равенством (38); таким образом:

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{\Delta x}{2R^2} (2y_1 + \Delta y) = \frac{\Delta x}{2R^2} (y_1 + y_2). \quad (39)^*$$

\* Иначе:  $\delta_1 + \delta_2 =$  сферическому избытку трапеции, образованной ординатами  $y_1$  и  $y_2 = y_1 + \Delta y$ .

Вообразим теперь прямолинейный треугольник, построенный на стороне  $AP$  с углами равными  $A_k$ ,  $Q_k$  и  $P_k$ , уменьшенными на  $\frac{1}{3}$  сферического избытка  $\epsilon$ . Он будет подобен тому плоскому треугольнику, который образуется по теореме Лезандра; значит у него стороны будут пропорциональны действительным длинам на местности (на шаре), иначе говоря искажения всех его сторон должны быть одинаковы с искажением стороны  $AP$ , которое равняется  $\frac{y_1^2}{2R^2}$ . На черт. 7 построение осуществлено по двум сторонам и углу между ними, а именно:

Из точки  $A$  проведена прямая  $AC$  под углом  $A_k - \frac{1}{3} \epsilon$  к стороне  $AP$ , на ней отложен отрезок  $AC = \Delta y_c \left(1 + \frac{y_1^2}{2R^2}\right)$ . Точка  $C$  представляет третью вершину.

$\Delta y_c$  — действительное (на сфере) приращение ординаты. Легко сообразить, что  $\angle QAC = \omega + \frac{1}{3} \epsilon$ , так как он равен

$$\angle QAP - \left(A_k - \frac{1}{3} \epsilon\right) = A_k + \omega - \left(A_k - \frac{1}{3} \epsilon\right).$$

Опишем дугу  $CB$  радиусом  $AC$  из точки  $A$  и восстановим в точке  $B$  перпендикуляр к  $AQ$  до пересечения с  $PQ$  в точке  $C'$

$$\triangle BQC' \sim \triangle AQP,$$

сторона

$$BQ = AQ - AB = \Delta y - \Delta y_c \left(1 + \frac{y_1^2}{2R^2}\right);$$

по равенству (32)

$$\Delta y = \Delta y_c \left(1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6R^2}\right).$$

Значит

$$\begin{aligned} BQ &= \Delta y_c \left(\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6R^2} - \frac{y_1^2}{2R^2}\right) = \Delta y_c \frac{y_1 y_2 + y_2^2 - 2y_1^2}{6R^2} \\ &= \Delta y_c \frac{y_1(y_1 + \Delta y) + (y_1 + \Delta y)^2 - 2y_1^2}{6R^2} = \frac{\Delta y_c \cdot \Delta y}{2R^2} \left(y_1 + \frac{1}{3} \Delta y\right), \end{aligned}$$

или, заменяя  $\Delta y_c$  через  $\Delta y$ , получим:

$$BQ = \frac{(\Delta y)^2}{2R^2} \left(y_1 + \frac{1}{3} \Delta y\right)$$

и

$$\frac{BQ}{AQ} = \frac{BQ}{\Delta y} = \frac{\Delta y}{2R^2} \left(y + \frac{1}{3} \Delta y\right).$$

Далее из подобия треугольников  $AQP$  и  $BQC$  следует, что

$$BC' = AP \cdot \frac{BQ}{AQ} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2R^2} \left( y_1 + \frac{1}{3} \Delta y \right).$$

С другой стороны,

$$BC = AC \left( \omega + \frac{1}{3} \varepsilon \right) = \Delta y \left( \omega + \frac{1}{3} \varepsilon \right) - BQ \left( \omega + \frac{1}{3} \varepsilon \right).$$

В виду незначительности величин  $BQ$  и  $\omega + \frac{1}{3} \varepsilon$  произведение их можно отбросить и считать, что

$$BC = \Delta y \left( \omega + \frac{1}{3} \varepsilon \right),$$

или, принимая во внимание, что

$$\varepsilon = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2R^2}$$

и по равенству (38)

$$\omega = \frac{\Delta x \cdot y_1}{2R^2}$$

получим:

$$\omega + \frac{1}{3} \varepsilon = \frac{\Delta x}{2R^2} \left( y_1 + \frac{1}{3} \Delta y \right)$$

и

$$BC = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2R^2} \left( y_1 + \frac{1}{3} \Delta y \right),$$

таким образом  $BC = BC'$ .

Это свидетельствует о том, что точки  $C$  и  $C'$  можно считать совпадающими между собой, точку  $C$  лежащей на стороне  $PQ$ , и прямолинейные углы  $APQ$  и  $APC$  равными между собой, т. е. можно считать, что  $P = P_{\kappa} - \frac{1}{3} \varepsilon$ . Но мы видим на черт. 7, что

$$P = P_{\kappa} + \omega - \delta_2;$$

значит

$$\omega - \delta_1 = -\frac{1}{3} \varepsilon \quad \text{и} \quad \delta_1 = \omega + \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Значение  $\omega + \frac{1}{3} \varepsilon$  нами уже найдено.

Итак

$$\delta_1 = \frac{\Delta x}{2R^2} \left( y_1 + \frac{1}{3} \Delta y \right). \quad (40)$$

Из формулы (39)

$$\delta_2 = \frac{\Delta x}{2R^2} \left( y_1 + \frac{2}{3} \Delta y \right) = \frac{\Delta x}{2R^2} \left( y_2 - \frac{1}{3} \Delta y \right), \quad (41)$$

или, если под  $\Delta y$  подразумевать  $y_1 - y_2$ , выражение для  $\delta$  получает вид общий с формулой (40). Вообще  $\delta$  может быть выражена такой формулой:

$$\delta = \frac{\Delta x}{2R^2} \left( y + \frac{1}{3} \Delta y \right), \quad (42)$$

где  $y$  — ордината начальной точки, а  $\Delta x$  и  $\Delta y$  — приращения координат конечной точки, взятые со своими знаками: при этом под  $\delta$  следует подразумевать разность дирекционных углов касательной к кривой и хорды, или разность криволинейного и прямолинейного простирания, в соответствии с этим  $\delta_2$  на черт. 7 представляет собой отрицательную величину, и в формуле (39) вместо  $\delta_1 + \delta_3$  следует написать  $\delta_1 - \delta_2$ , ибо там  $\delta_2$  представляет собой абсолютную величину этой поправки, а не самую поправку. [См. ниже (56) формулу 8].

Равенство  $\delta_1 = \omega + \frac{1}{3} \varepsilon$  можно вывести еще из таких рассуждений. Обозначим через  $\Delta x_c$ ,  $\Delta y_c$  и  $s$  действительные расстояния на шаре, отвечающие  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $d$  на проекции (черт. 7).

Отложим на  $PQ$  отрезок  $PC' = s \frac{\Delta x}{\Delta x_c}$ . Проведем из  $C'$  прямую  $C'B$ , параллельную  $AP$ , она отсечет отрезок  $AB$ , очевидно равный  $\Delta y_c \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x_c}$ . В виду незначительности размеров  $\triangle C'BQ$  угол  $BAC'$  будет мал, так что сторону  $AC'$  можно считать равной отрезку  $AB$ , т. е.  $AC' = \Delta y_c \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x_c}$ , откуда явствует, что стороны  $\triangle AC'P$  пропорциональны действительным сторонам на шаре  $\Delta y_c$ ,  $\Delta x_c$  и  $s$ , ибо и сторона  $AP = \Delta x_c \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x_c}$ . Значит по теореме Лемандра этот треугольник имеет углы сферического треугольника, уменьшенные на  $\frac{1}{3}$  сферического избытка, т. е.

$$\angle APC' \text{ или } \angle APQ = P_{\kappa} - \frac{1}{3} \varepsilon,$$

$$\angle C'AP = A_{\kappa} - \frac{1}{3} \varepsilon \text{ и } \angle C' = Q_{\kappa} - \frac{1}{3} \varepsilon.$$

С другой стороны непосредственно из чертежа видно, что

$$\angle APQ = P_k + \omega - \delta_1 \quad \text{и} \quad A_k = \angle QAP - \omega,$$

отсюда вытекает, что

$$\delta_1 = \omega + \frac{1}{3} \varepsilon$$

и

$$\angle QAP - \angle C'AP = \angle QAC' = \omega + \frac{1}{3} \varepsilon = \delta_1.$$

## § 6. Терминология и обозначения угловых величин.\*

Условимся во избежание путаницы впредь называть азимутом какого-нибудь направления угол, составляемый этим направлением с меридианом безразлично где — на шаре, или на плоскости проекций. Одним словом азимут всегда связывается с меридианом, проходящим через полюс земли.

Угол же, составляемый направлением с каким-нибудь другим постоянным направлением, \*\* принятым за ось абсцисс, называется дирекционным углом. Автор называет его простираем и настаивает на этом термине по крайней мере для хорд на плоскости проекций.

Азимут в геодезии, как мы знаем, отсчитывается от северного конца меридиана по движению часовой стрелки от 0 до 360°.

Дирекционный угол (простираем) отсчитывается от положительного направления оси абсцисс также по движению часовой стрелки от 0 до 360°.

Будем впредь обозначать:

Азимут направления по кратчайшему пути на земной поверхности (геодезической линии), или, как его называют, геодезический (истинный) азимут, через  $A$ .

Азимут изображения этого пути (геодезической линии) на проекции через  $A'$  кратчайший путь, если рассматривать земную поверхность как шаровую, будет дуга большого круга). В конформной проекции (Гаусса)  $A' = A$ .

Азимут направления по кратчайшему пути на проекции через  $\beta$ . (Земная поверхность обычно проектируется на плоскость, тогда кратчайшим путем на проекции будет хорда,

---

\* См. статью автора в № 4 „Геодезиста“ за 1928 г. „Терминология и обозначения . . .“, стр. 26. Приведенные там обозначения изменены на совещании Каврайского, Келля и Магусевича.

\*\* В „Курсе геодезии“ под ред. Ф. Н. Красовского 1930 г., часть 1 стр. 235 это постоянное направление весьма неудачно названо условным меридианом, благодаря чему понятие дирекционный угол не выделяется.

например  $PQ$  на черт. 7; иногда земная поверхность проектируется на шаровую, тогда кратчайшим путем на проекции будет дуга большого круга).

Аналогично:

Дирекционный угол (простираение) направления по кратчайшему пути на земной поверхности (геодезической линии) через  $T_0$  или  $T_c$ .

Дирекционный угол изображения этого пути (геодезической линии) на проекции через  $T$  и дирекционный угол направления по кратчайшему пути на проекции через  $\alpha$ .

Следует еще раз отметить, что кратчайшая линия  $s$  на земной поверхности на проекции обычно изображается не кратчайшей линией (дуга большого круга обычно изображается на плоскости кривой линией, а не прямой), и обратно, кратчайший путь на проекции (хорда  $d$ ), перенесенный на земную поверхность, обычно уже не представляет там кратчайшего пути.

Приведем еще ряд относящихся сюда определений и обозначений.

### На земной поверхности.

На черт. 9:

$PK$  и  $QL$  — меридианы,  $PQ$  — кратчайшая (геодезическая) линия,  $A_1$  и  $A_2$  — геодезические азимуты.  $\Delta A = A_2 - A_1$  — приращение азимута на земной поверхности при переходе от точки  $P$  к точке  $Q$ ,

или приращение геодезического азимута.

На черт. 10:

$QN$  — меридиан,  $LQ$  и  $L'Q'$  — параллели (геодезические) к начальному меридиану, который находится где-то левее чертежа.

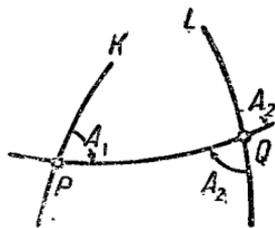
$KQ$  и  $K'Q'$  — ординаты на земной поверхности. Угол между меридианом данной точки  $Q$  и параллелью  $QL$  начальному меридиану, иначе азимут этой параллели называется сближением на земной поверхности меридиана данной точки или сфероидическим сближением меридиана. Обозначим это сближение через  $\gamma_0$  или  $\gamma_c$ .

Из черт. 10 имеем:

$$T_c = A - \gamma_c. \quad (44)$$

$\Delta T_c = T'_c - T_c$  — приращение дирекционного угла на земной поверхности

$$(45)$$

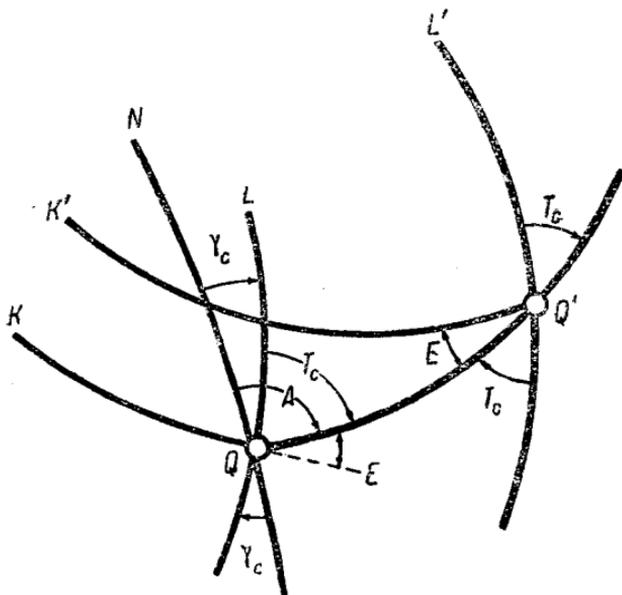


Черт. 9.

(при переходе от одной точки  $Q$  к другой  $Q'$ )  $\Delta I_c = E' - E$ , поэтому называется еще сближением ординат на земной поверхности. (46)

На проекции (на плоскости).

На черт. 11  $QN$  — изображение меридиана,  $QL$  и  $Q'L'$  — прямые, параллельные оси абсцисс, которая обычно представляет собой изображение начального (среднего) меридиана.  $QQ'$  — хорда, кратчайшее расстояние на проекции. Дуга  $QKQ'$  — изображение кратчайшей на земной поверхности линии.



Черт. 10.

Угол на проекции между изображением меридиана  $QN$  данной точки  $Q$  и прямой  $QL$ , параллельной оси абсцисс, иначе азимут абсциссы на проекции, называется сближением меридиана данной точки на проекции. Обозначается это сближение через  $\gamma$ . Другие величины:  $A'$ ,  $\beta$ ,  $T$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\delta'$ ,  $\alpha'$  и  $T'$ , помеченные на черт. 11, объяснены выше ( $\delta$  и  $\delta'$  — поправки за кривизну). Непосредственно из чертежа вытекает, что

$$\alpha = A' - \delta - \gamma. \quad (47)$$

Для проекции Гаусса как конформной  $A' = A$ . Значит для проекции Гаусса определение  $A'$  ненужно, в чем ее основ-

ное преимущество, и формула (47) для проекции Гаусса примет вид:

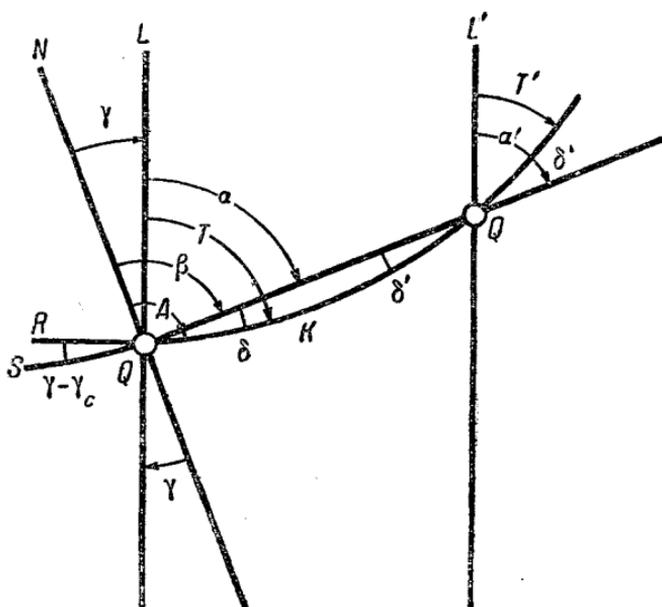
$$\alpha = A - \gamma - \delta, \quad (48)$$

или

$$A = \alpha + \gamma + \delta. \quad (49)$$

Эти две формулы являются весьма важными и основными в применении координат Гаусса-Крюгера, в непосредственном переходе с поверхности земли на плоскость и обратно.

Возвращаемся к черт. 11.



Черт. 11.

$$T = \alpha + \delta, \quad (50)$$

$$T' = \alpha' + \delta' \quad (\delta' \text{ — отрицательное}).$$

$\Delta T$  — приращение дирекционного угла изображения на проекции кратчайшей линии на земной поверхности,

$$\Delta T = T' - T = \alpha' + \delta' - \alpha - \delta = (\alpha' - \alpha) - (\delta - \delta').$$

На плоскости

$$\alpha = \alpha',$$

значит

$$\Delta T = \delta' - \delta \quad (\text{на черт. 11 отрицательное}). \quad (51)$$

$A - A' = k$  называется искажением направления за неконформность, . . . . . (52)

$k$  — у проекции Гаусса равно нулю.

$$A' = \beta - \delta. \quad (53)$$

$A - \beta$  будет общее искажение направления на проекции.

По формулам (52) и (53):

$$A - \beta = k + \delta. \quad (54)$$

При расстоянии  $QQ'$  бесконечно малом, или практически достаточно малом  $\delta = 0$ , остается только  $k$ , которое у конформных проекций равно нулю.

На черт. 11 даны еще  $RQ$  — плоская ордината (ордината проекции) и  $SQ$  — изображение на проекции сфероидической ординаты (ординаты на земной поверхности).

Если землю считать за шар,  $SQ$  будет изображение сферической ординаты; в этом случае она должна совпасть с плоской ординатой  $RQ$ , как на черт. 7. Если же поверхность земли принимать за сфероид, то  $RQ$  и  $SQ$  между собой не совпадут, и угол между ними будет равен  $\gamma - \gamma_c$  (весьма небольшой угол).

Итак, строго говоря, сближение меридиана на поверхности земли не равно сближению на проекции:  $\gamma_c$  (черт. 10) не равна  $\gamma$  (черт. 11).

Соберем все обозначения, необходимые для проекции Гаусса, и выведенные формулы.

$A$  — геодезический азимут (географический азимут) или просто азимут,

$\alpha$  — дирекционный угол прямолинейный (простираение хорды) или просто дирекционный угол (простираение),

$\delta$  — поправка за кривизну,

$T$  — криволинейный дирекционный угол,

$\gamma$  — сближение меридиана,

$\Delta T$  — приращение криволинейного дирекционного угла,

$\Delta A$  — приращение азимута,

$m$  — масштаб проекции на данной точке.

### Формулы точки.

$$1) \alpha = A - \gamma - \delta; \quad A = \alpha + \gamma + \delta.$$

$$2) \alpha = T - \delta; \quad T = \alpha + \delta.$$

$$3) T = A - \gamma; \quad A = T + \gamma.$$

4) В секундах:

$$\delta = \frac{\rho}{2R^2} \Delta x \left( y + \frac{1}{3} \Delta y \right) = (7) \Delta x \left( y + \frac{1}{3} \Delta y \right).$$

$$5) \quad m = 1 + \frac{y^2}{2R^2}; \quad \log m = \frac{\mu}{2R^2} y^2 = (6) y^2.$$

Заметим, что  
 $\delta = T - \alpha.$

(55)

### Формулы стороны.

- 6)  $\Delta A = A_2 - A_1$ ; обратный азимут  $= A_2 + 180^\circ$ .
- 7)  $\Delta T = T_2 - T_1$ ; обратное простирание  $= T_2 + 180^\circ$ .
- 8) В секундах:  $\Delta T = \delta_2 - \delta_1 = -\frac{\rho}{2R^2} \Delta x (y_1 + y_2)$ .
- 9) В секундах:  $\delta_1 = \frac{\rho}{2R^2} \Delta x \left( y_1 + \frac{1}{3} \Delta y \right)$   
 $= \frac{\rho}{2R^2} (x_2 - x_1) \left( y_1 + \frac{y_2 - y_1}{3} \right)$ .
- 10) В секундах:  $\delta_2 = -\frac{\rho}{2R^2} \Delta x \left( y_1 + \frac{2}{3} \Delta y \right)$   
 $= \frac{\rho}{2R^2} (x_1 - x_2) \left( y_2 + \frac{y_1 - y_2}{3} \right)$ .
- 11)  $d = s \left( 1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6R^2} \right) =$   
 $= s \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{y_1^2}{2R^2} + \frac{y_2^2}{2R^2} \right) - \frac{1}{6} \cdot \frac{(\Delta y)^2}{2R^2} \right]$ .
- 12)  $\log d - \log s = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{2R^2} y_1^2 + \frac{\mu}{2R^2} y_2^2 \right)$   
 $= \frac{1}{6} \cdot \frac{\mu}{2R^2} (\Delta y)^2 = \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) - \frac{1}{6} \log m_\Delta$   
 $= \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) - \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta y}{y_1} \right)^2 \log m_1$   
 $= \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) - \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta y}{y_2} \right)^2 \log m_2$ .

$d$  — длина хорды на проекции;  $s$  — длина на местности.

$$\Delta x = x_2 - x_1; \Delta y = y_2 - y_1.$$

### § 7. Земной сфероид.

Все формулы проекции Гаусса выше мы выводили в предположении, что земная поверхность представляет собой шаровую поверхность. Практически это допустимо лишь для незначительных сравнительно пространств. Значительно более близким приближением к действительной фигуре земли является сфероид—тело, полученное от вращения эллипса вокруг малой оси — оси вращения земли.

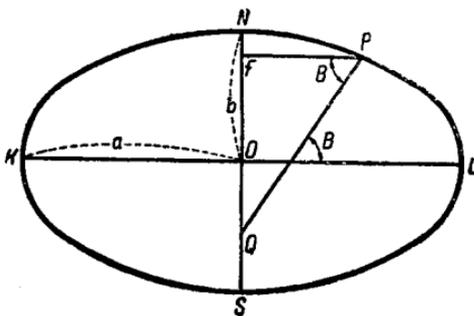
Итак ось вращения земли, или земная ось, является малой осью эллипса, представляющего собой сечение сфероида плоскостью меридиана. На черт. 12 изображен для ясности в весьма утрированном виде этот эллипс. На самом деле он должен быть гораздо ближе к форме круга. Укорочение одной оси по отношению к другой равно только  $\frac{1}{300}$ .

$ON = OS = b$  — малая полуось сфероида.

$OK = OL = a$  — большая полуось сфероида, радиус экватора.

$KL$  — линия пересечения плоскости меридиана с плоскостью экватора.

Размеры этих полуосей устанавливаются из градусных измерений, представляющих собой сочетание астрономических и геодезических триангуляционных работ. Астрономически определяются углы между отвесными линиями на земной поверхности, а триангуляционно определяются дуги на земной поверхности, отвечающие этим углам. Углы между отвесными линиями дают так называемые пространственные координаты, разности широт и долгот.



Черт. 12.

Кроме того астрономически определяются и азимуты направлений (астрономические азимуты).

Отвесная линия (вертикальная линия) и полуденная линия (направление меридиана) являются исходными направлениями на земной поверхности.

На черт. 12:  $PQ$  — отвесная линия; угол  $B$ , который она составляет с плоскостью экватора, называется географической широтой.

Углы между плоскостями меридианов, измеряемые по экватору или по параллелям, называются, как мы знаем, разностями географических долгот.

Зная угол между отвесными линиями и отвечающую ему дугу на земной поверхности, можно определить радиус кривизны этой дуги: радиус равен дуге, деленной на стягиваемый ею угол в аналитической мере.

Условимся несколько точнее, что мы подразумеваем под термином земная поверхность, когда здесь этот термин употребляем.

Возьмем некоторую отвесную линию и на ней произвольную точку, представим себе в этой точке элемент горизонтальной поверхности (плоскости), перпендикулярной к отвесной линии, продолжим мысленно этот элемент до пересечения с другой отвесной линией, бесконечно близкой к первой, элемент поверхности можно считать перпендикулярным и к другому отвесу. Так мы можем распространить горизонтальную поверхность во все стороны и обогнуть ею все земное тело, она будет в каждой своей точке нормальна (перпендикулярна) к отвесной линии.

Такая поверхность называется *уровенной поверхностью*. Уровенных поверхностей можно вообразить бесконеч-

ное множество как в самом теле земли, так и вне его. Исходной уральной поверхностью, по отношению к которой относятся все так называемые абсолютные высоты, является такая, которая совпадает со средним уровнем океанов и открытых морей в данный геологический момент. Она называется средней уральной поверхностью; ее-то в обиходе мы и называем земной поверхностью. Тело, ограниченное средней уральной поверхностью, называется геонидом, точный вид которого мы не знаем. Первым приближением уральной поверхности является плоскость (представление древних), вторым приближением—шаровая поверхность и третьим—сфероидическая. Размеры сфероида, наиболее близко подходящего к геониду, еще далеко не установлены; недостаточно произведено на земной поверхности точных астрономо-геодезических работ, преследующих эту цель. Различные исследователи дают различные значения для полуосей сфероида. Поэтому пока целесообразно остановиться на некотором определенном, как бы условном сфероиде, чтобы затем в соответствии с развитием науки и дальнейшего уточнения измерений, зависящих от развития техники и вообще от развития производительных сил общества, единообразно фиксировать новейшие достижения в определении фигуры земли с целью дать новое, более близкое приближение.

Для СССР I Геодезическое совещание в 1926 г. приняло сфероид Бесселя, который в Союзе уже получил наибольшее распространение и как будто лучше других согласуется с частью поверхности геонида, захватывающей Европейскую часть Союза.

На сфероиде вести геодезические вычисления труднее, чем на шаре. Происходит это во-первых потому, что отвесные линии, не принадлежащие к одному меридиану или к одной параллели (подразумевается малый круг, параллельный экватору), не пересекаются между собой, так что через два таких отвеса нельзя провести одной плоскости. Вертикальная плоскость в одной точке, проходящая через другую точку на сфероиде, не будет в этой другой точке вертикальной плоскостью, и обратно. При пересечении средней уральной поверхности такими двумя взаимными вертикальными плоскостями получаются, как говорят, два нормальных сечения, прямое и обратное, несовпадающих между собой. Это дает намек на то, что нормальные сечения не являются кратчайшими путями (кратчайший путь один) по поверхности сфероида, и что если нормальные сечения не совпадают, то кратчайший путь находится между ними. Кратчайший путь называется геодезической линией. На сфероиде она играет такую же роль, как на шаре—дуга большого круга. Но на шаре дуга большого круга—не только геодезическая линия, но и прямое и обратное нормальное сечение. К счастью земной сфероид так мало отличается от шара, что прак-

тически при длинах, не превышающих обычных сторон триангуляций, прямое и обратное нормальные сечения считаются совпадающими между собой и с геодезической линией, и во всех предыдущих формулах, где фигурировала дуга большого круга на шаре, можно подразумевать и геодезическую линию (кратчайший путь) на земном сфероиде.

Вторым неудобством в пользовании сфероидом является то, что радиусы кривизны его поверхности являются величинами переменными. Это неудобство неустранимо несмотря на близость земного сфероида к шару. Дело в том, что при переходе от географических (пространственных) координат к поверхностным на сфероиде и на плоскости радиусы кривизны входят в формулы непосредственно в первой степени. В каждой точке на сфероиде различают два главных радиуса кривизны, отвечающих двум главным взаимно перпендикулярным нормальным (вертикальным) сечениям: первое по плоскости меридиана, второе по плоскости, перпендикулярной к меридиану.

Будем обозначать первый радиус кривизны в плоскости меридиана через  $M$  и второй поперечный радиус кривизны (нормаль) через  $N$ .

$R = \sqrt{MN}$  — называется средним радиусом кривизны.

Радиус кривизны  $N$  представляет собой отрезок отвесной линии (нормали) от поверхности земли до земной оси, например отрезок  $PQ$  на черт. 12.

Радиус  $M$  всегда меньше  $N$ , лишь на северном и южном полюсах они становятся одинаковыми и обозначаются тогда через  $c$ .

На экваторе  $N$  равно радиусу экватора, т. е. большой полуоси  $a$ .

Точки, лежащие на одной параллели, имеют одинаковые  $N$  и  $M$ .

Величины  $M$  и  $N$  зависят от переменной широты  $B$  или  $\varphi$  и постоянных величин сфероида  $a$  и  $b$ .  $B$  — геодезическая широта, получаемая из триангуляции,  $\varphi$  — астрономическая широта.

К постоянным величинам сфероида относятся еще следующие употребительные величины, зависящие от  $a$  и  $b$ :

$$\left. \begin{aligned} e \text{ — эксцентриситет} &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \\ e' \text{ — эксцентриситет в новой форме} &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}, \\ p \text{ — сжатие} &= \frac{a - b}{a}, \\ c \text{ — радиус кривизны на полюсе} &= \frac{a^2}{b}. \end{aligned} \right\} (57)$$

Еще должны быть указаны следующие переменные вспомогательные величины, являющиеся функциями от  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} V &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B} = \sqrt{1 + \eta^2}, \\ W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \\ \eta &= e' \cos B, \\ t &= \operatorname{tg} B. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Радиусы кривизны выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{c}{V^3} = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}, \\ N &= \frac{c}{V} = \frac{a}{W}, \\ R &= \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2} = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{W^2} = \frac{b}{W^2}, \\ M &= V^2. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Радиус кривизны по азимуту  $A$ :

$$R_A = \frac{MN}{M \sin^2 A + N \cos^2 A}.$$

Радиус параллели при широте  $B$ :

$$r = N \cos B.$$

Последнее равенство явствует из черт. 12, где

$$r = FP; FP \perp NS; FP \parallel KL \text{ и } PQ = N.$$

### Постоянные сфероид Бесселя.

$$\left. \begin{aligned} a &= 6\,377\,397,15500 \text{ м} & \log a &= 6,8046434637 \\ b &= 6\,356\,078,96325 & \log b &= 6,8031892839 \\ c &= 6\,398\,786,84939 & \log c &= 6,8060976435 \\ e^2 &= 0,006674372231315 & \log e^2 &= \bar{3},8244104237 \\ e'^2 &= 0,006719218798677 & \log e'^2 &= \bar{3},8273187833 \\ p &= \frac{1}{299,1528128} = 0,003342773181579. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

**Таблицы Шарнгорста-Матусевича.** Для решения прямой и обратной геодезической задачи, т. е. для вычисления приращения географических координат по длине и азимуту стороны и обратно по методу Шрейбера, имеются на русском языке особые таблицы, составленные по прусскому образцу Шарнгорстом и дополненные Матусевичем. Они дают семизначные логарифмы главных величин,

входящих в вычисление, и пятизначные и четырехзначные логарифмы вспомогательных величин, и как единственные распространенные таблицы рекомендуются здесь для вычислений с координатами Гаусса-Крюгера.

Названные таблицы содержат в себе для различных  $B$  через одну минуту от  $35$  до  $80^\circ$   $\log (1)$ ,  $\log (2)$ ,  $\log (3)$  и  $\log (4)$ .

По нашим обозначениям здесь:

$$\left. \begin{aligned} (1) &= \frac{\rho}{M}; (2) = \frac{\rho}{N}; (3) = \frac{1}{2\rho} \cdot \frac{N}{M} = \frac{V^2}{2\rho}; \\ (4) &= 10^7 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta^2 t}{N}; V^2 = \frac{(1)}{(2)}; \frac{1}{V^2} = \frac{(2)}{(1)}. \end{aligned} \right\} (61)$$

По таблицам логарифмов этих величин можно найти, принимая во внимание формулы (58) и (59) (1) и (60):

$$\left. \begin{aligned} 1) \log V^2 &= \log 2\rho + \log (3) = 5,61546 + \log (3); \\ 2) \log V^2 &= \log (1) - \log (2) \text{ (семизначн.)}; \\ 3) \frac{1}{R^2} &= (1) (2) \cdot \frac{1}{\rho^2} = \{11,3711450\} (1) (2); \\ 4) \log \frac{1}{R^2} &= 11,3711450 + \log (1) + \log (2). \end{aligned} \right\} (62)$$

## § 8. Формулы для координат Гаусса-Крюгера.

Прусский геодезист Крюгер развил и улучшил формулы координат Гаусса для непосредственного перехода со сфероида на плоскость без промежуточного перехода на шар. Поэтому эти координаты называются координатами Гаусса-Крюгера. В дальнейшем для краткости будем называть их просто плоскими координатами.

Выше, беря шар, мы старались выяснить сущность этого перехода на плоскость и дали элементарный вывод искажений.

При непосредственном переходе со сфероида сущность проекции остается та же самая, и искажения для земного сфероида в первом, вполне достаточном для практических целей приближении имеют тот же вид, что и для шара.

Здесь для земного сфероида мы должны остановиться на незатронутом и для шара вопросе, а именно на формулах, выражающих связь между географическими координатами и плоскими прямоугольными координатами. Для шара это не имело смысла делать, ибо его географические координаты значительно отличаются от действительных географических координат, получаемых астрономически. Дадим эти основные формулы взаимного перехода без вывода, иначе это завело бы нас слишком далеко. Вывод формул

можно найти в специальных статьях Крюгера и в III томе геодезии Иордана, издания 1923 г. на немецком языке. \*

Обозначения:

На черт. 13  $BP$  — параллель с широтой  $B$  точки  $P$ , длина ее обозначается через  $Y$ ,

$NO$  — средний (начальный) меридиан (ось абсцисс),

$OQ$  — экватор,

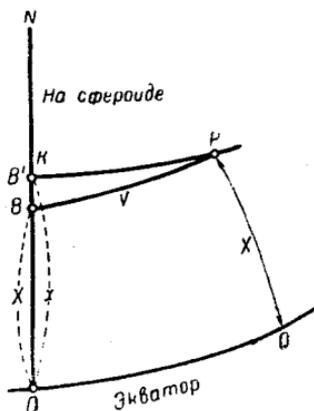
$KP$  — изображение на сфероиде соответствующей плоской ординаты.

Сама сфероидическая ордината, исходя из  $P$ , лежит несколько ниже  $KP$ , как показано на плоскости проекции (черт. 11), где  $RQ$  — плоская ордината, а  $SQ$  — изображение сфероидической ординаты. В этом различие между сфероидом и шаром. На шаре сферическая ордината и изображение плоской ординаты совпадают, так как проекция сферической ординаты есть сама плоская ордината, как уже указывалось выше. Как сфероидическая ордината, так  $PK$  и параллель  $PB$  составляют прямой угол с начальным меридианом (осью абсцисс). Итак точка  $K$  является изображением на сфероиде основания плоской ординаты. Широта точки  $K$  обозначается через  $B'$ .

Абсциссы координат Гаусса-Крюгера отсчитываются от экватора.

По начальному меридиану искажения нет, поэтому отрезок начального меридиана  $OK$  равен плоской абсциссе  $x$ . Отрезок же от параллели  $BP$  до экватора обозначается через  $X$ . Дуга  $BP$  в градусной мере, в секундах, обозначается через  $\lambda$ . Все длины даются в метрах.

Можно было бы принять дугу меридиана  $FQ = X$  за абсциссу, а длину дуги параллели  $PB = Y$  за ординату плоских прямоугольных координат; тогда получилась бы так называемая равновеликая проекция Сансона-Фламстеда, \*\* но она дает большие искажения углов.



Черт. 13.

\* В данное время появилась „Практическая геодезия“ А. В. Граур, где помещен вывод этих формул; скоро выйдет из печати курс „Высшая геодезия и геодезические работы“ Н. Г. Кель, ч. I, где также будет дан их вывод, равно как вероятно и в печатающейся II ч. „Высшей геодезии“ Ф. Н. Красовского.

\*\* См. картографию Витковского, стр. 320.

Сконцентрируем все обозначения:

- 1)  $B$  — широта данной точки;
- 2)  $\lambda$  — разность долгот данной точки и начального меридиана (среднего меридиана);
- 3)  $Y$  — длина дуги при широте  $B$ , отвечающая  $\lambda$  (ордината проекции Сансона-Фламстеда);
- 4)  $x$  и  $y$  — плоские координаты данной точки ( $x$  считается от экватора);
- 5)  $X$  — отрезок меридиана от экватора (абсцисса проекции Сансона-Фламстеда), отвечающий широте  $B$ ;
- 6)  $x - X$  — расстояние по среднему меридиану между основанием плоской ординаты и точкой, отвечающей широте  $B$  ( $KB$  на черт. 13);
- 7)  $B'$  — широта, отвечающая отрезку меридиана от экватора, равному  $x$ ; иначе широта точки, представляющей на сфероиде основание плоской ординаты;
- 8)  $t, \eta, V, N, M$  и  $R$  — известные по формулам (58) и (59) величины, отвечающие широте  $B$  или отрезку меридиана  $X$ , или относящиеся к точкам  $P$  и  $B$  или параллели  $PB$  на черт. 13;
- 9)  $t', \eta', V', N', M'$  и  $R'$  — те же величины, отвечающие широте  $B'$  или меридианальному отрезку от экватора, равному  $x$ , или относящиеся к точке  $K$  на черт. 13;
- 10)  $\Delta B$  и  $\Delta X$  — приращение широты и соответствующее приращение длины дуги меридиана:

$$\Delta B = B_2 - B_1; \Delta X = X_2 - X_1;$$

- 11)  $\Delta Y$  — приращение длины дуги =  $Y_2 - Y_1$  при широте  $B$ .

**Формулы.** I. Взаимный переход от  $B$  к  $X$  и обратно:

$$1) \Delta X = \frac{1}{(1)} \Delta B + (\Delta B)^3 \frac{M\eta^2}{8V^4p^3} (1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2t^2). \quad (63)$$

log (1) берется здесь по таблицам Шарнгорста-Матусевича при средней широте  $B_1 + \frac{1}{2} \Delta B$  или  $B_2 - \frac{1}{2} \Delta B$ .

$\Delta B$  выражено в секундах.

Второй член правой части равенства в своем максимальном значении начинает превышать  $0,0005 \text{ м} = 0,5 \text{ мм}$  лишь при  $\Delta B$ , большем  $900'' = 15'$ . Растет он пропорционально кубу  $\Delta B$ . Если отбросить этот второй член, то получим выражение для шарового меридиана с радиусом равным  $M_{\text{cp}}$  при средней широте.

$$2) \Delta B = (1) \Delta X - [(1) \Delta X]^3 \frac{\eta^2}{8V^4p^3} (1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2t^2). \quad (64)$$

$\log (1)$  берется при  $B_1 + \frac{1}{2} \Delta B$ , при этом  $\Delta B$  определяется предварительно менее точно при неточном  $\log (1)$ .

Второй член правой части в своем максимальном значении начинает превышать  $0''{,}00005$  лишь при  $\Delta X$  большем 42 км.

II. Взаимный переход от  $\lambda$  к  $Y$  и обратно:

$$3) Y = \lambda \frac{1}{(2)} \cos B, \text{ или } \Delta Y = \Delta \lambda \frac{1}{(2)} \cos B. \quad (65)$$

$$4) \lambda = \frac{Y}{\cos B} (2), \text{ или } \Delta \lambda = \frac{\Delta Y}{\cos B} (2). \quad (66)$$

III. Вычисление  $x$ ,  $y$ ,  $\gamma$  и  $m$  по данным  $B$  и  $\lambda$  или  $B$  и  $L$ :

$L$  — долгота от Гринвича. Чтобы найти  $\lambda$ , нужно знать долготу от Гринвича  $L_0$  оси абсцисс (среднего меридиана), тогда  $\lambda = L - L_0$  и выражается в секундах.

$$\left. \begin{aligned} 5) x - X &= + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{N}{\rho^2} \sin B \cos B \\ &+ \frac{\lambda^4}{24} \cdot \frac{N}{\rho^4} \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \\ &+ \frac{\lambda^6}{720} \cdot \frac{N}{\rho^6} \sin B \cos^5 B (61 - 58 t^2 + t^4), \end{aligned} \right\} (67)$$

или, вынеся в правой части первый член за скобки и логарифмируя по формуле (17), имея в виду, что в скобках мы будем иметь выражение такого рода:

$$\log (1 + ax + bx^2),$$

которое по формуле (17) равно:

$$\mu ax - \mu \frac{a^2 - 2b}{2} x^2 + \dots,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} 6) \log (x - X) &= \log \frac{N}{2 \rho^2} \lambda^2 \sin B \cos B \\ &+ \frac{\mu}{12 \rho^2} \lambda^2 \cos^2 B (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \\ &+ \frac{\mu}{1440 \rho^4} \lambda^4 \cos^4 B (119 - 182 t^2 - t^4). \end{aligned} \right\} (68)$$

$$\left. \begin{aligned} 7) y &= \lambda \frac{N}{\rho} \cos B + \frac{\lambda^3}{6} \frac{N}{\rho^3} \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2) \\ &+ \frac{\lambda^5}{120} \frac{N}{\rho^5} \cos^5 B (5 - 18 t^2 + t^4), \end{aligned} \right\} (69)$$

или также:

$$8) \log y = \log \lambda \cdot \frac{N}{\rho} \cos B + \frac{\mu}{6 \rho^3} \lambda^2 \cos^2 B (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\mu}{180 \rho^4} \lambda^4 \cos^4 B (5 - 22 t^2 - t^4). \quad (70)$$

$$9) \gamma = \lambda \sin B + \frac{\lambda^3}{3 \rho^3} \sin B \cos^2 B (1 + 3 \eta^2 + 2 \eta^4) + \frac{\lambda^5}{15 \rho^4} \sin B \cos^4 B (2 - t^2), \quad (71)$$

или

$$10) \log \gamma = \log \lambda \cdot \sin B + \frac{\mu}{3 \rho^3} \lambda^2 \cos^2 B (1 + 3 \eta^2 + 2 \eta^4) + \frac{\mu}{45 \rho^4} \lambda^4 \cos^4 B (1 - 3 t^2). \quad (72)$$

$$11) m = 1 + \frac{\lambda^2}{2 \rho^2} \cos^2 B (1 + \eta^2) + \frac{\lambda^4}{24 \rho^4} \cos^4 B (5 - 4 t^2). \quad (73)$$

$$12) \log m = \frac{\mu}{2 \rho^2} \lambda^2 V^2 \cos^2 B + \frac{\mu}{12 \rho^4} \lambda^4 \cos^4 B (1 - 2 t^2). \quad (74)$$

IV. Вычисление  $B$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  и  $m$  по данным  $x$  и  $y$ :

$$13) B' - B = \frac{y^2 \rho}{2 M' N'} t' - \frac{y^4}{24 M' N'^3} t' (5 + 3 t'^2 + \eta'^2 - 9 t'^2 \eta'^2). \quad (75)$$

$$14) \log(B' - B) = \log \frac{y^2 \rho}{2 M' N'} t' - \frac{\mu y^2}{12 N'^3} (5 + 3 t'^2 + \eta'^2 - 9 \eta'^2 t'^2). \quad (76)$$

$$15) \lambda = \frac{y \rho}{N' \cos B'} - \frac{y^3 \rho}{6 N'^3 \cos B'} (1 + 2 t'^2 + \eta'^2) + \frac{y^5 \rho}{120 N'^5 \cos B'} (5 + 28 t'^2 + 24 t'^4). \quad (77)$$

$$16) \log \lambda = \log \frac{y \rho}{N' \cos B'} - \frac{\mu y^2}{6 N'^3} (1 + 2 t'^2 + \eta'^2) + \frac{\mu y^4}{180 N'^5} (5 + 32 t'^2 + 26 t'^4). \quad (78)$$

$$17) \gamma = \frac{y^2}{N'} t' - \frac{13\mu}{3N'^3} t' (1 + t'^2 - \eta'^2) + \dots \quad (79)$$

$$18) \log \gamma = \log \frac{\rho}{N'} y t' - \frac{\mu}{6N'^2} y^2 (1 + t'^2 - \eta'^2) + \frac{\mu}{90N'^4} y^4 (7 + 20 t'^2 + 13 t'^4). \quad (80)$$

$$19) m = 1 + \frac{y^2}{2N'^2} (1 + \eta'^2) + \frac{y^4}{24N'^4} (1 + \eta'^2) = 1 + \frac{y^2}{2R'^2} + \frac{y^4}{24R'^4}. \quad (81)$$

$$20) \log m = \frac{\mu}{2N'^2} y^2 (1 + \eta'^2) - \frac{\mu}{12N'^4} y^4 = \frac{\mu}{2R'^2} y^2 - \frac{\mu}{12R'^4} y^4. \quad (82)$$

### § 9. Постановление III Геодезического совещания о координатах Гаусса-Крюгера.

**Историческая справка по этому вопросу.** В начале января 1926 г. на заседании кружка им. Витковского был заслушан доклад Н. Г. Келля „Плоские прямоугольные координаты значительных районов и применение их для Кузбасса“, в котором докладчик рекомендовал применение системы Гаусса-Крюгера и высказывался за необходимость введения общей системы прямоугольных координат по всей территории Союза. Кружок по этому докладу вынес такую резолюцию:

„Заслушав доклад Н. Г. Келля о плоских прямоугольных координатах и о применении их для значительного района Кузнецкого каменноугольного бассейна, топографо-геодезический кружок им. проф. В. В. Витковского постановляет обратиться в Геодезический комитет при Госплане с просьбой поставить на очередь вопрос о выработке и введении общей системы наиболее целесообразных плоских прямоугольных координат для всей территории Союза ССР, чтобы, в виду очевидной появившейся потребности в применении их различными ведомствами, своевременно установить единство в этом вопросе“.

Обращение комитету было послано.

Доклад Келля, составленный для кружка им. Витковского, был зачитан и на I Общесибирском съезде маркшейдеров, происшедшем 21—31 декабря 1925 г. Выдержки из доклада помещены в журнале „Геодезист“ за август 1926 г., а весь доклад напечатан в „Трудах I Общесибирского маркшейдерского съезда“, Томск, 1926.

Геодезический комитет Госплана на обращение кружка ответил в апреле 1926 г.:

„Геодезический комитет при президиуме Госплана СССР признает важность введения на территории СССР однообразной системы прямоугольных координат, но считает, что этот вопрос нуждается в серьезной научной проработке. Комитет намерен затронуть этот вопрос на Геодезическом совещании, созываемом в Москве с 19 по 22 апреля с. г., и в дальнейшем поставить его на очередь“.

Этому Геодезическому совещанию был предложен Келлем специальный доклад о координатах, но по болезни автора доклад не состоялся. Поднял вопрос о координатах в своем докладе о землеустроительных работах в УССР представитель Наркомзема УССР А. И. Ганджа.

Его поддержали Н. Н. Матусевич и В. В. Каврайский, последний высказался за координаты Крюгера. \*

I совещание постановило:

VIII. О введении прямоугольных координат.

37. Просить Геодезический комитет принять меры к разработке вопроса о введении прямоугольных координат.

Зимой 1926/27 г. председателем Геодезического комитета Ю. М. Шокальским к разработке вопроса о координатах были привлечены Н. Г. Келль и В. В. Каврайский. Последний взял на себя главную роль осветить с теоретической стороны достоинства различных проекций. Главным образом сравнились проекции Гаусса-Крюгера и Зольднера. Вопрос этот имел уже большую историю в Германии и был решен в пользу первых.

Каврайским и Келлем были сделаны доклады о прямоугольных координатах на заседании Геодезического комитета и на II Геодезическом совещании (11—14 апреля 1927 г.) \*\*

Постановление II Геодезического совещания о прямоугольных координатах отмечало:

Раздел V. 22. Признать, что немедленное введение на всей территории СССР той или иной единообразной системы прямоугольных координат является преждевременным.

23. Для окончательного решения вопроса о введении в СССР какой-либо системы прямоугольных координат поручить Геодезическому комитету Госплана СССР: а) обстоятельнее, чем это могло быть выполнено к настоящему времени, выяснить запросы всех ведомств по этой части; б) собрать иностранную литературу по этому вопросу как теоретическую, так и таблицы, инструкции, справочники и формуляры, и в) выяснить, как в действительности применяются в Западной Европе (главным образом в Германии и во Франции) те прямоугольные плоские координаты, на которых, судя по литературным данным, там остановились.

\* См. Труды I Геодезического совещания. Изд. „Плановое Хозяйство“, М. 1927.

\*\* См. Труды II Геодезического совещания. Изд. „Плановое Хозяйство“, М. 1930.

24. В случаях когда отдельным ведомствам или учреждениям, по ходу их работ, необходимо немедленное введение плоских прямоугольных координат, указывать им на то, что наиболее удобной в настоящее время является система Гаусса-Крюгера, причем границы зон при применении этой системы должны иметь долготу кратную  $3^\circ$  (от Гринвича).

25. Принять меры к более широкому ознакомлению с этой системой и к изданию необходимых таблиц.

Зимой 1927/28 г. координаты Гаусса-Крюгера кое-где нашли применение, помимо Кузнецкого бассейна, и к III Геодезическому совещанию (28 — 31 марта 1928 г.) почва была более подготовлена.

Главным докладчиком опять выступил В. В. Каврайский. Доклад был вполне убедительный. Содокладчиками были Н. Н. Матусевич и Н. Г. Келль. Постановление о координатах было принято почти единогласно и, нужно думать, дало окончательное и радикальное решение этого важного вопроса. Жизнь покажет, насколько введение общей системы прямоугольных координат окажет благотворное влияние на объединение съемочных работ и наилучшее их использование для картографии страны, и насколько это введение оправдает надежды инициаторов.

### ПОСТАНОВЛЕНИЕ III ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО СОВЕЩАНИЯ.

#### Раздел VI.

О введении в СССР единообразной системы прямоугольных координат.

14. Признать, что наиболее приемлемыми для немедленного применения в СССР являются прямоугольные координаты Гаусса-Крюгера.

15. Рекомендовать ширину координатных полос в  $6^\circ$  по долготе. При этом допускать применение и  $3^\circ$  полос.

16. Во изменение решения II Геодезического совещания, признать, что средние меридианы должны совпадать с средними меридианами листов международной карты в масштабе 1:1 000 000. Для  $3^\circ$  полос допустить средние меридианы, совпадающие с крайними меридианами листов миллионной карты.

Примечание. Долгота среднего меридиана листов международной карты равна  $6n + 3$ , где  $n$  — целое число.

17. Масштаб вдоль среднего меридиана принять равным единице.

18. Отсутствие опорных точек государственной триангуляции в покрываемых съемкой районах, или недостаточная геодезическая связь отдельных пунктов не должна служить основанием для произвольного выбора начального меридиана системы прямоугольных координат. В этом случае для каждой тригонометрической и полигонометрической сети, составляющих одно целое, следует выбирать исходный меридиан и начало системы прямоугольных координат согласно указанным выше правилам, основывая расчет на географических координатах какого-нибудь пункта сети, который удастся установить с наибольшей вероятностью.

19. Необходимо обращать особое внимание на установление наиболее вероятного значения дирекционного угла для исходного направления, определяя азимут этого направления астрономически, в случае неблагонадежности имеющихся данных.

20. Принимая во внимание большое практическое значение введения системы плоских прямоугольных координат Гаусса-Крюгера, поручить Геодезическому комитету Госплана СССР озаботиться скорейшим опубликованием соответствующего практического руководства, составлением и изданием необходимых таблиц и вообще популяризацией идеи этих координат.

21. Военно-топографическому управлению, Геодезическому комитету ВСНХ и прочим учреждениям, ведущим триангуляции государственного значения, надлежит приступить к вычислению прямоугольных координат, а также других величин (сближения меридианов, масштабов и пр.), упрощающих применение этих координат, для точек государственной триангуляции, согласуя порядок этой работы с интересами Наркомземов и других ведомств, ведущих съемки.

Как видим, это постановление, помимо принятия самой системы координат, установило еще два важных принципа, которые в практике разных стран решаются различно, а именно ширину полос— $6^\circ$  и масштаб на среднем меридиане—единица, чем внесена полная определенность.

## § 10. О точности вычислений применительно к имеющимся таблицам Шарнгорста-Матусевича.

При вычислении будем стараться гарантировать точность получаемых координат до 1 см. Это требование позволяет допускать, чтобы только одно слагаемое вычислялось с такой точностью, остальные же слагаемые должны быть вычислены с точностью более высокой, т. е. до 0,001 м или 1 мм. Это заставляет и для первого слагаемого давать хотя бы не гарантированные миллиметры. Таблицы Шарнгорста-Матусевича дают семизначные логарифмы величин. Поэтому и таблицы логарифмов должны быть взяты с числом знаков, не превышающим семи.

Если мы гарантируем последний знак семизначного логарифма, то полная гарантия седьмого знака числа, получаемого по этому логарифму, будет тогда, когда табличная разность в обычных семизначных таблицах не меньше 100. Обратившись к таблицам, мы увидим, что это будет для чисел, не превышающих 43 430, и для логарифмов, не превышающих 4,6380000, если иметь в виду длины, выраженные в метрах. Длина дуги меридиана в  $1^\circ$  равна 111 км, значит, применяя семизначные логарифмы, мы можем гарантировать сантиметры в длине дуги меридиана, если она не содержит в себе больше  $24' = \frac{44}{111} \cdot 60$ .

Для дуг параллелей в широтах СССР эта норма может быть взята больше, а именно  $30—50'$ , ибо длина дуги параллели в  $1^\circ$  для широты  $40^\circ$  равна 85 км и для широты  $65^\circ—47$  км.

Рассмотрим с этой точки зрения все формулы (63)—(82).

1)  $\Delta X$  вычисляется при  $\Delta B$ , не большем  $24'$ , при этом второй член правой части (63) отбрасывается,  $\Delta X$  дается с тремя

знаками после запятой (мм). Для получения  $B$  следует иметь таблицу величин  $X$  с точностью до 0,001 м с интервалами  $B$  не больше  $20'$ , лучше конечно с интервалами в  $10'$ ; тогда, получая дважды, мы можем гарантировать уже 2 мм.

В табл. II приложения для средних широт от  $40$  до  $65^\circ$   $X$  дано через  $10'$ .

2)  $\Delta B$  вычисляется при  $\Delta X$ , не большем 44 км, при этом также отбрасывается второй член правой части (64), и  $\Delta B$  дается с четырьмя знаками после запятой (отвечает 3 мм). Для получения  $B$  применима та же таблица величин  $X$ .

3)  $\Delta Y$  вычисляется при  $\Delta \lambda$ , не превышающем  $30'$ , дается с тремя знаками после запятой (мм).

Для вычисления  $Y$  при  $\lambda$ , превышающем  $30'$ , следует разбить  $Y$  на два слагаемых:  $Y_k + \Delta Y$ , из которых  $Y_k$ , отвечающее  $\lambda_k$ , содержащей целые минуты или десятки минут, должно быть вычислено непосредственно из особой таблицы дуг (см. ниже) с точностью до 0,001 м, а  $\Delta Y$  по формуле (65) при отвечающей ему  $\Delta \lambda$ , меньшей  $10'$ , будет получаться с точностью до 3 мм, а при  $\Delta \lambda$ , меньшей  $1'$ , с точностью до 0,3 мм.

4)  $\Delta \lambda$  вычисляется при  $\Delta Y$ , не превышающем 40 км, дается с четырьмя десятичными знаками после запятой (отвечает 2 мм).

Для вычисления  $\lambda$  при  $Y$ , превышающем 40 км, опять необходимо применение указанной таблицы дуг, с разбивкой  $\lambda$  на два слагаемых:  $\lambda_k + \Delta \lambda$ .

5) При нахождении  $x - X$  первый член правой части (67) должен быть вычислен с гарантированной точностью до 0,01 м,  $\log$  этого члена не должен превышать 4,638. Беря максимальное  $\sin B \cos B = 1/2$ ,  $\log \frac{N}{4\rho^2}$  в среднем равное  $\bar{1},398 + \bar{1},491 + \bar{6},686 = \bar{5},575$ , найдем, чему может быть равно  $\lambda$ .  $4,638 = 2 \log \lambda + \bar{5},575$ . Отсюда  $\log \lambda = 4,5315$  и  $\lambda = 34\ 000'' = 9^\circ 27'$ .

При системе координат, принятых III Геодезическим совещанием,  $\lambda$  не превышает  $3^\circ$ . Значит  $x - X$  можно вычислять непосредственно по формуле (67) семизначными логарифмами и, давая лишний знак, выписывать три знака после запятой (мм).

6) Первый член выражения для  $y$  в формуле (69) представляет собой не что иное как длину дуги  $Y$ , и относительно его можно сказать то же, что сказано выше относительно вычисления  $Y$ , т. е. следует разбить на два слагаемых и применить особую таблицу величин  $Y$ .

7)  $\gamma$  как угол, входящий в азимут и дирекционный угол, достаточно иметь с точностью до  $0'',01$ , ибо в натуре азимуты и углы никогда не определяются с точностью, большей  $0'',1$  и лишь как средние даются в вычислениях с точностью до  $0'',01$ .

Исходя из этого, первый член  $\lambda \sin B$  в выражении (71) для  $\gamma$ , считая даже  $B = 90^\circ$ , достаточно находить с семизначными логарифмами. Максимально он может быть равен  $10\,800''$ , при  $\lambda = 3^\circ$ . Табличная разность в семизначных логарифмах для этого числа равна 400, значит при ошибке в логарифме на 1 единицу седьмого знака мы ошибемся в  $\gamma$  максимально лишь на  $1/4 \cdot 0'',01 = 0'',0025$ .

8)  $\log m$  вполне достаточно давать с точностью до восьмого знака, имея в виду, что мы всегда будем оперировать семизначными логарифмами.

Первый член выражения (74) для  $\log m$ , при максимальном  $\lambda = 10\,800''$  и максимальном  $\cos B$  в нашем Союзе, т. е. при  $B = 35^\circ$ , будет равен  $0,00040125$ , т. е. 4 012,5 единиц седьмого знака. Если искать  $\log m$  при помощи логарифмических таблиц, то достаточно употреблять пятизначные таблицы. Для числа 4 012 табличная разность в этих таблицах будет 11, значит вполне будет гарантироваться восьмой знак  $\log m$ .

Итак для нахождения  $\log m$  вполне достаточны пятизначные таблицы логарифмов. Возьмем выражение (82) для  $\log m$  и посмотрим, каково должно быть изменение  $y$ ,

чтобы  $\log m$  изменился на  $0,00000001 = 10^{-8}$ .

Для этого возьмем первый член  $\frac{\mu}{2R^2} y^2$ . Выставленное требование можно выразить так:

$$10^{-8} = \frac{\mu}{2R^2} (y + \Delta y)^2 - \frac{\mu}{2R^2} y^2 = \frac{\mu}{2R^2} [2y \Delta y + (\Delta y)^2],$$

найти  $\Delta y$ .

Вследствие незначительности  $\Delta y$ ,  $(\Delta y)^2$  можно отбросить, тогда получим:

$$\Delta y = \frac{10^{-8} \cdot R^2}{\mu y} \text{ при среднем } R,$$

$$\Delta y = \frac{940\,000}{y} \text{ м.}$$

Максимальное  $y = 270\,000$ , и минимальное  $\Delta y = 3$  м.

При  $y = 94$  км  $\Delta y$  становится равным 10 м.

Собственно говоря, для  $\log m$  можно допустить ошибку до 3 и даже до 5 единиц восьмого знака, тогда и для максимального  $y$  допустимая ошибка в нем будет 10—15 м. Это свидетельствует, что при вычислении  $\log m$  по формуле (82) достаточно иметь  $y$  с точностью до 10 м или до 0,01 км, а при вычислении по формуле (74) достаточно брать  $\lambda$  с точностью до  $5''$ , т. е., имея  $\lambda$  с точностью до  $1''$  и больше, округлять ее до  $10''$ .

## § 11. Таблицы $Y$ и $X$ и пользование ими.

В предшествующем исследовании выяснилась необходимость при пользовании семизначными таблицами логарифмов и таблицами Шарнгорста-Матусевича иметь таблицу величин  $X$  для различных  $B$  по крайней мере через  $20'$ . В приложении дана такая табл. II, в которой даны  $X$  с точностью до 1 мм через  $20'$  для широт от  $35$  до  $40^\circ$  и от  $65$  до  $80^\circ$ , а для средних широт через  $10'$ . Табл. I содержит для тех же широт величину  $Y$ , отвечающую  $\lambda_0 = 100'$  и данную также с точностью до 1 мм через каждые  $30'$ . \*

**Получение  $X$ .** Пример 1. Найти  $X$ , отвечающее  $B = 52^\circ 16' 39'', 4673$ .

Пользуемся формулой  $\Delta X = \Delta B \frac{1}{(1)}$ , табл. II приложения и таблицами Шарнгорста-Матусевича.

$$B_{1t} - \frac{1}{2} \Delta_1 B = B_t + \frac{1}{2} \Delta B + 5' \text{ или } + 10' \text{ при интервале в } 20'.$$

$$\log (1) \text{ найден при широте } B_t + \frac{1}{2} \Delta B_1,$$

$$\log (1)_1 \text{ при } B_{1t} - \frac{1}{2} \Delta_1 B,$$

$$\Delta_1 B = -600'' + \Delta B.$$

$$\begin{array}{r} B_t + \frac{1}{2} \Delta B \quad 52^\circ 13' 19'', 7 \\ \Delta B \quad 399'', 4637 \\ \log \Delta B \quad 2,6014812 \\ - \log (1) \quad -2,5099681 \\ \hline \log \Delta X \quad 4,0915131 \\ \Delta X \quad +12345,625 \\ X_t \quad 5781293,372 \\ X \quad 5793638,997 \text{ м} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} B_{1t} - \frac{1}{2} \Delta_1 B \quad 52^\circ 18' 19'', 7 \\ - \Delta_1 B \quad -200'', 5327 \\ \log \Delta_1 B \quad ,,2,3021852 \\ - \log (1)_1 \quad -2,5099619 \\ \hline \log \Delta_1 X \quad ,,3,7922233 \\ \Delta_1 X \quad -6197,597 \\ X_{1t} \quad 5799836,594 \\ X \quad 5793638,997 \text{ м} \end{array}$$

**Получение  $Y$ .** В табл. I приложения у нас даны длины  $Y_t$  дуг в  $100'$  для круглых широт через  $30'$ . Чтобы получить  $Y_0$  в  $100'$  для промежуточных широт, нужно вывести еще формулу для интерполяции.

По формуле (65):

$$Y_t = \frac{\lambda_0}{\rho} N_t \cos B_t;$$

$$Y_0 = \frac{\lambda_0}{\rho} (N_t + \Delta N) \cdot \cos (B_t + \Delta B).$$

\* Примеры решены с данными  $X$  (или  $B$  по Иордану), взятыми из таблиц Иордана для сравнения с точными вычислениями, помещенными в III томе геодезии Иордана. Табл. же I и II составлены согласно последним немецким данным также как таблицы Красовского и Матусевича, что вызывает различие в  $X$  на 1—2 мм.

Заменяем:  $N_t$  через  $N_m - \frac{1}{2} \Delta N$

$$N_t + \Delta N \quad , \quad N_m + \frac{1}{2} \Delta N$$

$$B_t \quad , \quad B_m - \frac{1}{2} \Delta B$$

$$B_t + \Delta B \quad , \quad B_m + \frac{1}{2} \Delta B$$

$N_m$  можно считать, что оно соответствует средней широте  $B_m$ , в чем убеждает нас то обстоятельство, что  $D$  величин  $\log(2)$  держится почти неизменной (см. таблицы Шарнгорста).

Тогда, обозначая  $Y_0 - Y_t$  через  $\Delta Y_0$ , получим:

$$\Delta Y_0 \frac{\rho}{\lambda_0} = N_m \cos \left( B_m + \frac{1}{2} \Delta B \right) - N_m \cos \left( B_m - \frac{1}{2} \Delta B \right) + \frac{1}{2} \Delta N \cos \left( B_m + \frac{1}{2} \Delta B \right) + \frac{1}{2} \Delta N \cos \left( B_m - \frac{1}{2} \Delta B \right)$$

$$= -2 N_m \sin B_m \sin \frac{1}{2} \Delta B + \Delta N \cos B_m \cos \frac{1}{2} \Delta B,$$

или, разлагая  $\sin \frac{1}{2} \Delta B$  и  $\cos \frac{1}{2} \Delta B$  в ряд,

$$= -\frac{N_m}{\rho} \sin B_m \cdot \Delta B + \frac{N_m}{24 \rho^3} \sin B_m (\Delta B)^3$$

$$+ \Delta N \cos B_m - \frac{\Delta N}{8 \rho^2} \cos B_m (\Delta B)^2,$$

или

$$-\Delta Y_0 = \frac{\lambda_0 N_m}{\rho^2} \Delta B \sin B_m - \frac{\lambda_0 \Delta N}{\rho} \cos B_m$$

$$+ \frac{\lambda_0 \Delta N}{8 \rho^3} (\Delta B)^2 \cos B_m - \frac{\lambda_0 N_m}{24 \rho^4} (\Delta B)^3 \sin B_m.$$

Определим  $\Delta N$ , применяя ряд (15) и (17): \*

$$\log \left( N_m + \frac{1}{2} \Delta N \right) - \log N_m = \log \left( 1 + \frac{\Delta N}{2 N_m} \right)$$

$$= \frac{\mu \Delta N}{2 N_m} - \frac{\mu (\Delta N)^2}{8 N_m^2},$$

$$\log \left( N_m - \frac{1}{2} \Delta N \right) - \log N_m = \log \left( 1 - \frac{\Delta N}{2 N_m} \right)$$

$$= -\frac{\mu \Delta N}{2 N_m} - \frac{\mu (\Delta N)^2}{8 N_m^2}.$$

\* Применяя ряд Тейлора,  $\Delta Y_0$  легко было бы получить непосредственно как разность функций  $f \left( B_m + \frac{1}{2} \Delta B \right)$  и  $f \left( B_m - \frac{1}{2} \Delta B \right)$ . Здесь дан несколько искусственный вывод.

Вычтем почленно:

$$\begin{aligned} \log\left(N_m + \frac{1}{2} \Delta N\right) - \log\left(N_m - \frac{1}{2} \Delta N\right) &= \frac{\mu \Delta N}{N_m} \\ &= \log \frac{N_m + \frac{1}{2} \Delta N}{N_m - \frac{1}{2} \Delta N} = \log \left( \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2\left(B_m + \frac{1}{2} \Delta B\right)}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{c}{1 + e'^2 \cos^2\left(B_m - \frac{1}{2} \Delta B\right)}} \end{aligned}$$

По формуле (15):

$$\begin{aligned} \frac{\mu \Delta N}{N_m} &= \frac{1}{2} \log \left[ 1 + e'^2 \cos^2\left(B_m - \frac{1}{2} \Delta B\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \log \left[ 1 + e'^2 \cos^2\left(B_m + \frac{1}{2} \Delta B\right) \right] \\ &= \mu e'^2 \frac{\Delta B}{\rho} \sin B_m \cos B_m - \mu e'^2 \frac{\Delta B}{\rho} \sin B_m \cos B_m \eta_m^2 \\ &= \mu \eta_m^2 \frac{\Delta B}{\rho} t_m - \mu \frac{\Delta B}{\rho} t_m \eta_m^4 \text{ и } \Delta N = \Delta B \cdot \frac{N_m}{\rho} t_m \eta_m^2 (1 - \eta_m^2). \end{aligned}$$

Подставим это значение  $\Delta N$  во второй и третий члены, и преобразуем все выражение для  $\Delta Y_0$ :

$$\begin{aligned} \Delta Y_0 &= -\frac{\lambda_0}{\rho} \cdot \frac{N_m}{\rho} \Delta B \sin B_m (1 - \eta_m^2 + \eta_m^4) \\ &\quad + \frac{\lambda_0 N_m (\Delta B)^3 \sin B_m}{24 \rho^4} (1 - 3 \eta_m^2 + 3 \eta_m^4), \end{aligned}$$

или, заменив  $1 - \eta_m^2 + \eta_m^4$  равной ей величиной

$$\frac{1}{1 + \eta_m^2} = \frac{1}{V_m^2} = \frac{M_m}{N_m},$$

получим:

$$\begin{aligned} \Delta Y_0 &= -\Delta_I Y_0 + \Delta_{II} Y_0 = -\frac{\lambda_0}{\rho} \cdot \frac{M_m}{\rho} \Delta B \sin B_m \\ &\quad + \frac{\lambda_0 M_m (\Delta B)^3 \sin B_m}{24 \rho^4} (1 - 2 \eta_m^2). * \end{aligned}$$

\* Более точный вывод дает в этих скобках:

$$\left(1 + \frac{-9 \eta^2 + 7 \eta^4 + 3 \eta^2 t^2 - 12 \eta^4 t^2}{V^4}\right).$$

Это полное выражение можно сократить, отбросив весьма малый член в скобках второго члена  $\Delta_{II} Y_0$ .

$\Delta_{II} Y_0$  максимально при  $B = 80^\circ$ ,  $\lambda_0 = 6000''$  и  $\Delta B = 1800''$  дает  $0,005 \text{ м} = 5 \text{ мм}$ , а при  $B = 35^\circ$  дает  $3 \text{ мм}$ ;  $2 \gamma_m^2$  при  $B_m = 30^\circ$  равняется  $0,009$  и при  $B_m = 80^\circ$  дает  $0,004$ , т. е. отбрасывание  $2 \gamma_m^2$  влечет за собой ошибку в среднем менее  $1/100$  от всего  $\Delta_{II} Y_0$ , или менее  $0,04 \text{ мм}$

Заметив, что  $\frac{M_m}{\rho} = \frac{1}{(1)_m}$ , и считая  $\lambda_0 = 6000$ , получим для  $\Delta_I Y_0$  следующее выражение:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_I Y_0 &= - \left\{ \bar{2},4637261 \right\} \Delta B \frac{1}{(1)_m} \sin B_m \\ \text{или} \\ \log \Delta_I Y_0 &= \bar{,}2,4637261 + \log \frac{\Delta B}{(1)_m} \sin B_m. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Если находить  $\Delta_I Y_0$  дважды, один раз исходя из  $B_t$ , а другой раз из  $B_t + 30'$ , то одно из  $\Delta B$  будет всегда меньше  $15'$  и для него  $\Delta_{II} Y_0$  можно не принимать во внимание, так как этот член для средних широт при  $\Delta B$  меньших  $15'$  становится меньше  $0,5 \text{ мм}$ , и  $Y_0$ , полученное по такой разности  $\Delta_I Y_0$ , будет точно до  $1 \text{ мм}$ .

Если все-таки желательно учесть  $\Delta_{II} Y_0$ , то это можно сделать по следующей формуле:

$$\Delta_{II} Y_0 = 0,23 \Delta_I Y_0 \left( \log \frac{1}{\rho} - S_{1/2 \Delta B} \right), \quad (85)$$

где, если  $\Delta_I Y_0$  выражено в км,  $\log \frac{1}{\rho} - S_{1/2 \Delta B}$  в единицах седьмого знака,  $\Delta_{II} Y_0$  получается в миллиметрах.  $S_{1/2 \Delta B}$  — величина поясненная формулами (2) (стр. 5) и отвечающая углу  $\frac{1}{2} \Delta B$ .

Формула (85) получена из такого вывода на основании формулы (12):

$$\Delta_{II} Y_0 = 2 \frac{\lambda_0}{\rho} M_m \sin B_m \left( \frac{\Delta B}{2\rho} - \sin \frac{1}{2} \Delta B \right) = 2 (A - Q),$$

причем  $A = \frac{1}{2} \Delta_I Y_0$ ;

$$\log A - \log Q = \log \frac{1}{\rho} - S_{1/2 \Delta B}; \quad 1 - \frac{A - Q}{A} = \frac{Q}{A};$$

$$\log \left( 1 - \frac{A - Q}{A} \right) = - (\log A - \log Q);$$

$$- \mu \frac{A - Q}{A} = - \left( \log \frac{1}{2} - S_{1/2 \Delta B} \right);$$

$$A - Q = A \cdot \frac{1}{\mu} \left( \log \frac{1}{\rho} - S_{1/2 \Delta B} \right),$$

$$\Delta_{II} Y_0 = \Delta_I Y_0 \cdot \frac{1}{\rho} \left( \log \frac{1}{\rho} - S_{1/2, \Delta B} \right);$$

$$\log \frac{1}{\rho} = \overline{6,6855749}.$$

Пример 1.  $\Delta Y_0$  максимально, при  $\Delta B = 30'$  и  $B_m = 80^\circ$ , равняется 1 600 м = 1,6 км.

На стр. семизначных логарифмов мы имеем для  $\frac{1}{2} \Delta B = 15'$ :

$$S = 4,6855735; \log \frac{1}{\rho} - S = 14 \text{ единиц седьмого знака.}$$

Отсюда

$$\Delta_{II} Y_0 = 0,23 \times 1,6 \times 14 = 5,2 \text{ мм.}$$

При  $\Delta Y_0$  максимально равно 1 600 м семизначные логарифмы гарантируют 0,4 мм получаемой разности  $\Delta_I Y_0$  по формуле (84).

Проверим формулы (83), (84) и (85).

Десятизначными логарифмами получено непосредственно по формуле (65):

$$\begin{array}{r} \text{для } 53^\circ \\ 53^\circ 30' \end{array} \quad \begin{array}{r} Y_t = 111\,881,6811 \\ - 110\,584,8758 \\ \hline - \Delta Y_0 = 1\,296,8053 \text{ м} \end{array}$$

По формулам (83), (84) и (85):

$B_m$	$53^\circ 15'$	$\log (1)_m = \overline{2,5098926}$
$\Delta B$	1 800	
$\log \Delta B$	$3,2552725$	$\Delta_{II} Y_0 = 1,3 \cdot 0,23 \cdot 14 = 4,2 \text{ мм}$
$\log \sin B_m$	$\overline{1,9037701}$	
$-\log (1)_m$	$1,4901074$	
$\log \Delta_I Y_0$	$\overline{3,1128761}$	
$\Delta_I Y_0 = \overline{+ 1\,296,8092}$		
$-\Delta_{II} Y_0 = \quad \quad 42$		
$-\Delta Y_0 = \quad \quad \underline{1\,296,8050}$		

Итак мм совпадают, формулы гарантируют мм.

Теперь нам остается показать, как найти  $Y$ , отвечающее некруглому  $\lambda$  и для некруглой широты  $B$ . Выше было пояснено, как это сделать. Дадим непосредственно пример.

Пример 2. Найти  $Y$ , отвечающее

$$\lambda = 2^\circ 49' 35'', 4611, \text{ при } B = 48^\circ 37' 42'', 1638.$$

Из табл. I приложения:

$$48^{\circ} 30' Y_t = 123\,154,037$$

$$49^{\circ} 00' Y_t = 121\,938,145.$$

1) Нахождение  $Y_0$ .

$B_t$	$48^{\circ} 30' 00''$	$\Delta B$	462,1638
$\frac{1}{2} \Delta B$	$3' 51'',082$	$\log \Delta B$	$\overline{2,6647960}$
$B_m$	$48\ 33\ 51,082$	$\log \sin B_m$	$\overline{1,8748861}$
$\log (1)_m$	$\overline{2,5102417}$	$-\log (1)_m$	$\overline{1,4897582}$
$\Delta_{II} Y_0$	$0,23 \cdot 0,31 \cdot 1,0 = 0,07$ мм		$\overline{n2,4637261}$
$B'_t$	$49^{\circ} 00' 00''$	$\log \Delta_1 Y_0$	$\overline{n2,4931664}$
$\frac{1}{2} \Delta' B$	$-11\ 08,918$	$\Delta Y_0$	$-311,2909 + 0,0001$
$B'_m$	$48\ 48\ 51,082$	$Y_t$	$123\,154,037$
$\log (1)'_m$	$\overline{2,5102228}$	$Y_0$	$122\,842,7462$
$\Delta'_{II} Y_0$	$0,23 \cdot 0,9 \cdot 9,0 = 1,8$ мм		
		$\Delta' B$	$-1\,337,8362$
		$\log \Delta B$	$\overline{n3,1263040}$
		$\log \sin B'_m$	$\overline{1,8765515}$
		$-\log (1)'_m$	$\overline{1,4897772}$
			$\overline{n2,4637261}$
		$\log \Delta' Y_0$	$2,9564578$
		$\Delta' Y_0$	$+904,6025 - 0,0018$
		$Y_t$	$121\,938,145$
		$Y_0$	$122\,842,7457$

Примечание:

$$\frac{1}{2} \Delta' B = -15' + \frac{1}{2} \Delta B; B'_m = B_m + 15'; \Delta' B = -1\,800' + \Delta B.$$

2) Нахождение  $Y_k$ .

$\lambda_k$	$2^{\circ} 40' = 160' = 1,6 \lambda_0$	$\lambda'_k$	$2^{\circ} 50' = 1,7 \lambda_0$
$Y_0$	122 842,746	$Y_0$	122 842,746
$0,6 Y_0$	73 705,648	$0,7 Y_0$	85 989,922
$Y_k$	196 548,394	$Y'_k$	208 832,668

3) Нахождение  $Y$ .

$\Delta \lambda$	$9' 35'',4611$	$\Delta' \lambda$	$-0' 24'',5389$
$\log (2)$	$\overline{2,5089639}$	$\Delta' \lambda$	$-24,5389$
$\Delta \lambda''$	575,4611	$\log \Delta' \lambda$	$\overline{n1,3898551}$
$\log \Delta \lambda''$	2,7600159	$\log \cos B$	$\overline{1,8201622}$
$\log \cos B$	$\overline{1,8201622}$	$-\log (2)$	$\overline{1,4910361}$
$-\log (2)$	$\overline{1,4910361}$	$\log \Delta' Y$	$\overline{n2,7010534}$
$\log \Delta Y$	4,0712142	$\Delta' Y$	$-502,404$
$\Delta Y$	+11 781,869	$Y'_k$	208 832,668
$Y_k$	196 548,394	$Y$	208 330,264
$Y$	208 330,263		

Примечание:  $\Delta \lambda = -600 + \Delta \lambda$ .

Последнее значение  $Y$  точнее, так как абсолютная величина  $\Delta'Y$  меньше.

Таким образом окончательно  $Y = 208\,330,264$  и получено с точностью, какой нельзя достигнуть, вычисляя непосредственно по формуле (65) даже восьмизначными логарифмами.

## § 12. Вычисление плоских координат непосредственно по географическим.

Введем для дальнейшего дополнительное обозначение:  $\lambda \cos B = k$  и напомним, что  $\operatorname{tg} B$  обозначается через  $t$ , и что по формуле (62):  $1 + \eta^2 = V^2 = 2\rho$  (3)  $= \frac{(1)}{(2)}$  и по предыдущему параграфу:  $Y = \frac{\lambda}{(2)} \cos B = \frac{k}{(2)}$ ;  $\lambda = \frac{Y(2)}{\cos B}$  и  $\lambda \cos B = k = Y(2)$ ;  $\lambda \sin B = kt$ , кроме того обозначим (2)  $y = \frac{y}{N} \rho$  через  $u$ .

**Нахождение  $u$ .** Первый член формулы (69) находится независимо по предыдущему параграфу, он равен  $Y$ .

Приняв во внимание приведенные выше замечания, вместо формулы (69) получим следующую:

$$\left. \begin{aligned} u &= Y + \frac{1}{3\rho} \frac{(3)}{(2)} k^3 - \frac{1}{6\rho^2} \cdot \frac{1}{(2)} k^3 t^2 + k^5 \frac{5 - 18t^2 + t^4}{120\rho^4(2)}, \\ \text{или} \\ u &= Y + \left\{ \overline{6,20845} \right\} \frac{(3)}{(2)} k^3 - \left\{ \overline{12,59300} \right\} \frac{k^3 t^2}{(2)} + \lambda^5 \Theta, \end{aligned} \right\} (86)$$

где  $\Theta = \frac{5 - 18t^2 + t^4}{120\rho^4(2)} \cos^5 B$ ,  $\log \Theta$  дан в табл. IV приложения.

$$\Theta = \left\{ \overline{22,1543} \right\} (5 - 18t^2 + t^4) \cos^5 B.$$

$u = Y + I - II + III$ ; II можно изобразить еще так:

$$\left\{ \overline{12,59300} \right\} \frac{(kt)^2 k}{(2)}.$$

Для  $u$  можно дать и другой вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= Y + \frac{1}{6\rho^2} Y^3 (1) (2) - \frac{1}{6\rho^2} Y^3 (2)^2 t^2 + Y^5 (2)^5 \Theta \frac{1}{\cos^5 B}; \\ u &= Y + \left\{ \overline{12,59300} \right\} (1) (2) Y^3 - \left\{ \overline{12,59300} \right\} (2)^2 t^2 Y^3 \\ &\quad + \left\{ \overline{8,544} \right\} \frac{\Theta}{\cos^5 B} \cdot Y^5 \end{aligned} \right\} (87)$$

( $\overline{8,544} = \log (2)^5$  для всех широт);

$u = Y + I - II + III$ ; II можно изобразить еще так:

$$\left\{ \overline{12,59300} \right\} kt^2 Y^3.$$

III в формулах (86) и (87) максимально, при  $\lambda = 3^\circ$  дает в нашем Союзе 60 мм. Это будет примерно при широте  $46^\circ,1$ . При  $B = 0$  он дает около 100 мм и обращается в нуль при  $B = 28, 77$  и  $90^\circ$ . Вычисление его трехзначными логарифмами вполне достаточно.

I и II достаточно вычислять пятизначными логарифмами, если  $\lambda$  не превышает  $3^\circ$ .

I принимает максимальное значение в СССР при  $B = 35^\circ$  и равняется при этом 84 м, т. е. дает только десятки метров.

II принимает максимальное значение при  $B = 54^\circ,6$  и дает тогда 51 м.

**Нахождение  $x$ .**  $X$  мы находили в предыдущем параграфе. Обратимся к  $x - X$ . Возьмем формулу (67). Третий член правой части этой формулы при  $\lambda$ , не превышающем  $3^\circ$ , можно отбросить.

Произведение:

$$\sin B \cos^5 B (61 - 58 t^2 + t^4)$$

$$\text{равно } \frac{1}{2} \sin 2B (120 \cos^4 B - 60 \cos^2 B + 1).$$

Оно обращается в нуль при  $B = 0, 90; 82,4$  и  $46^\circ,0$ . Максимальное значение его будет при  $B$  около  $30^\circ$ , когда оно становится равным примерно 10. Весь третий член при этом, при  $\lambda = 10\,800''$ , дает лишь 0,2 см.

Второй член формулы (67) при  $\lambda = 10\,800''$  максимально дает 3,8 м; значит чтобы получить его с абсолютной погрешностью, не превышающей 1 мм, относительная погрешность его не должна быть более  $1/4000$ .

Произведение:

$$\sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4)$$

$$\text{равно } \frac{1}{2} \sin 2B (5 \cos^2 B - \sin^2 B + 9 \eta^2 \cos^2 B + 4 \eta^4 \cos^2 B).$$

Оно обращается в нуль при  $B = 0; 90$  и  $66^\circ$  и дает максимум при  $B = 28^\circ$ . При  $30^\circ$  оно дает около 3, при этом

$$5 \cos^2 B - \sin^2 B = 6 \cos^2 B - 1 = 3,5;$$

$$9 \eta^2 \cos^2 B = 0,035$$

и  $\eta^4$  не более 0,0001.

Таким образом  $9 \eta^2 \cos^2 B$  дает  $1/100$  всего множителя и не может быть отброшено, поскольку требуется точность до  $1/4000$ .  $4 \eta^4 \cos^2 B$  можно отбросить.

В соответствии с этим и с замечаниями в начале параграфа формула (68) примет вид:

$$\log(x - X) = \log \frac{\lambda \sin B \cdot k}{2 \rho (2)} + \frac{\mu}{12 \rho^2} k^2 - \frac{\mu}{12 \rho^2} \lambda^2 + \frac{3 \mu}{4 \rho^2} e'^2 \cdot k^2 \cos^2 B,$$

или, выражая последние три члена в единицах седьмого знака, получим:

$$\left. \begin{aligned} \log(x - X) &= \bar{6},3845449 + \log \frac{k \lambda \sin B}{(2)} \\ &+ \{5,70790\} k^2 - \{\bar{6},92975\} \lambda^2 + \{\bar{7},7113\} k^2 \cos B, \end{aligned} \right\} (88)$$

или

$$\log(x - X) = I + II - III + IV,$$

где

$$I = \bar{6},3845449 + \log \frac{k \lambda \sin B}{(2)},$$

$$II = \{5,70790\} k^2, \quad III = \{\bar{6},92975\} \lambda^2 \quad \text{и} \quad IV = \{\bar{7},7113\} k^2 \cos^2 B.$$

Сопоставляя формулы (77) и (67) способом последовательной подстановки и перехода затем от величин при  $B'$  к величинам при  $B$ , автор вывел еще дополнительную формулу:

$$\begin{aligned} \log(x - X) &= \log \frac{y^2 t}{2N} + \frac{\mu}{12 N^2} (1 + 3 t^2 + 5 \eta^2) y^2 \\ &= \log \frac{(2) y^2 t}{2 \rho} + \frac{\mu}{12 \rho^2} (2)^2 y^2 + \frac{\mu}{4 \rho^2} (2)^2 y^2 t^2 \\ &\quad + \frac{5 \mu e'^2}{12 \rho^2} (2)^2 y^2 \cos^2 B, \end{aligned}$$

или, выражая последние три члена в единицах седьмого знака и заменяя (2)  $y$  через  $u$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \log(x - X) &= \bar{6},3845449 + \log y u t + \{\bar{6},92975\} u^2 \\ &+ \{\bar{5},40687\} u^2 t^2 + \{\bar{7},4461\} u^2 \cos^2 B, \end{aligned} \right\} (89)$$

или

$$\log(x - X) = I' + II' + III' + IV',$$

где

$$I' = \bar{6},3845449 + \log y u t,$$

$$II' = \{\bar{6},92975\} u^2, \quad III' = \{\bar{5},40687\} u^2 t^2$$

и

$$IV' = \{\bar{7},4461\} u^2 \cos^2 B.$$

**Получение  $\gamma$ .** В формуле (71) второй член следует несколько преобразовать, чтобы иметь возможность применить таблицы Шарнгорста-Матусевича, а именно:

$$\begin{aligned} 1 + 3\eta^2 + 2\eta^4 &= 2(1 + \eta^2)^2 - (1 + \eta) = 2V^4 - V^2 \\ &= 8\rho^2(3)^2 - 2\rho(3). \end{aligned}$$

Третий член в формуле (71) приобретает максимальное значение при  $B = 23^\circ,7$  и равен при этом только  $0'',0015$ , поэтому он может быть отброшен, поскольку  $\gamma$  мы даем до  $0'',01$ .

Формула же (72) примет вид:

$$\log \gamma = \log \lambda \sin B + \frac{8}{3} \mu (3)^2 k^2 - \frac{2\mu}{3\rho} (3) k^2,$$

или, выражая два последних члена в единицах седьмого знака логарифма:

$$\left. \begin{aligned} \log \gamma &= \log \lambda \sin B + \{7,06375\} (3)^2 k^2 - \{1,14727\} (3) k^2 \\ &= I + II - III. \end{aligned} \right\} (90)$$

В другой форме:

$$\log \gamma = \log (2) Yt + \frac{2\mu}{3\rho^2} (1)^2 Y^2 - \frac{\mu}{3\rho^2} (1) (2) Y^2,$$

или

$$\log \gamma = \log kt + \{\bar{5},83284\} (1)^2 Y^2 - \{\bar{5},53181\} (1) (2) Y^2 \quad (91)$$

(два последних члена дают единицы седьмого знака логарифма).

$\log \gamma = I + II - III$  для формуляра нахождения координат.

**Получение  $\log m$ .** В выражении (74) второй член дает максимальное положительное значение при  $B = 0$  и равен при этом  $+3$  единицам седьмого знака, максимальное отрицательное значение (минимальное) получается при  $B = 60^\circ$  и составляет только  $-2$  единицы восьмого знака. При  $B = 30^\circ$  получается 6 единиц восьмого знака логарифма и при  $B = 35^\circ,2$  он становится равным нулю. Таким образом в пределах СССР второй член в выражении (74) можно отбросить, и оно примет вид:

$$\log m = \frac{\mu}{\rho} (3) k^2 = \{1,32336\} (3) k^2 \quad (92)$$

в единицах седьмого знака.

Если взять формулу (82), то она даст в единицах седьмого знака логарифма:

$$\left. \begin{aligned} \log m &= \frac{\mu}{2\rho^2} (1) (2) y^2 - \frac{\mu}{12\rho^4} (1)^2 (2)^2 y^4 \\ &= \{\bar{5},70790\} (1) (2) y^2 - \{\bar{2},338\} y^4 = I_m - II_m, \end{aligned} \right\} (93)$$

причем (1) и (2) могут быть взяты не только при широте  $B'$  — основания ординаты, но и при  $B$  — самой точки, ибо на единицу пятого знака изменится  $\log(1)(2) = \log(1) + \log(2)$  лишь при изменении  $B$  от  $6'$  при  $B = 35^\circ$  и до  $20'$  при  $B = 80^\circ$ .

$B$  отличается от  $B'$  максимально на несколько минут,

Второй член формулы (93) при максимально возможном  $y = 270\,000$  м представляет 1,2 единицы седьмого знака. В большинстве же случаев, а именно при  $y < 200$  км, этот член даст неощутительную для седьмого знака величину.

Обычно  $\log m$  будет в дальнейшем вычисляться по формуле:

$$\log m = (6)y^2 - \overline{\{10,338\}} y^4, \quad (94)$$

где

$$(6) = \frac{y^2}{2R^2} = \{1,70790\} (1)(2).$$

В табл. IV и V приложения дан  $\log(6)$ ,  $y$  выражено здесь в км,  $\log m$  выражается в единицах седьмого знака.

**Формуляры нахождения плоских координат по географическим.** Пример 3. Дано:

$$B = 53^\circ 28' 20'', 9266; \quad L = 89^\circ 09' 38'', 8196;$$

$$\lambda = +2^\circ 09' 33'', 8196 = 7\,773'', 8196;$$

$$\lambda = L - L_0; \quad L_0 = 6n + 3 = 87^\circ.$$

#### А. Вспомогательные величины.

$$(\lambda \sin B = kt)$$

Формуляр 1.

Проверка:  $\log(2) Y = \log k$

1	2	3	4	5	6	7
№ и название точки	$\log \lambda$	$\log \lambda$	$\log k$	$\log(1)$	$\log \cos B$	$\log Y$
	$\log \cos B$	$\log \sin B$	$\log \operatorname{tg} B$	$\log(2)$	$-\log(2)$	$\log(2)$
	$\log k$	$\log \lambda \sin B$	$\log kt$	$\log(1)(2)$	$-\log(2)$	$\log k$
101	3,8906345	3,8906345	3,6653039	2,5098764	1,7746694	5,1564601
Клейстберг	1,7746694	1,9050242	0,1303549	2,5088438	1,4911562	2,5088438
	3,6653039	3,7956587	3,7956588	3,0187202	1,2658256	3,6653039
	и т. д.					

Нахождение  $Y$ .В. 1)  $Y_0$ ,  $Y_K$  и  $Y$ .

$$\lambda_K = 1,2\lambda_0; \lambda'_K = 1,3\lambda_0.$$

$$\Delta_{II} Y_0 = 1,2 \cdot 0,23 \cdot 13 = + 3,6 \text{ мм.}$$

Формуляр 2.

1	2	3	4	5	6	7	8
№	$B_m + 15'' = B'_m$ $\Delta B''$ $\Delta' B'' = -1800 + \Delta B$ $\Delta \lambda''$ $\Delta' \lambda'' = -600 + \Delta \lambda$	$\bar{n}2,4637261$ $\log \sin B_m$ $-\log (1)_m$ $\log \Delta B$ $\log \Delta_I Y_0$ $\log (1)_m$	$\bar{n}2,4637261$ $\log \sin B'_m$ $-\log (1)'_m$ $\log \Delta' B$ $\log \Delta'_I Y_0$ $\log (1)'_m$	$\log \Delta Y$ $\log \Delta \lambda$ $\log \cos B - \log (2)$ $\log \Delta' \lambda$ $\log \Delta' Y$ $-$	$Y_t$ $\Delta Y_0$ $Y_0$ ${}^n/_0 Y_0$ $Y_K$ $\Delta Y$	$Y'_t$ $\Delta' Y_0$ $Y_0$ ${}^{n+1}/_{10} Y_0$ $Y'_K$ $\Delta' Y$	$\Delta_I Y_0$ $\Delta_{II} Y_0$ $\Delta'_I Y_0$ $\Delta'_{II} Y_0$ $Y$ $Y$
101	53° 14' 10'',46	$\bar{n}2,4637261$	$\bar{n}2,4637261$	4,0246010	111 881,681	110 584,876	- 1 225,2093
	53° 29' 10'',46	$\bar{1},9036922$	$\bar{1},9051015$	$\bar{2},7587754$	- 1 225,206	+ 71,599	+ 0,0036
	+ 1 700,9266	1,4901064	1,4901246	1,2658256	110 656,475	110 656,475	+ 71,5994
	- 99,0734	3,2306856	$\bar{n}1,9959571$	$\bar{n}1,4179752$	22 131,295	33 196,942	- 0,0
	+ 573,8196	$\bar{n}3,0882103$	$\bar{1},8549093$	$\bar{n}2,6838008$	132 787,770	143 853,417	143 370,580
- 26,1504	$\bar{2},5098936$	$\bar{2},5098754$	-	10 582,810	- 482,837	143 370,580	
	И Т. Д.						

1	2	3	4	5	6	7	8
№	$\overline{12,59300}$ $\log(1)$ (2)	$\overline{6,20845}$ $\log(3)$	$\overline{12,59300}$ $2 \log kt$	$\overline{12,59300}$ $2 \log kt$	$5 \log k$	$5 \log \lambda$	I
	$3 \log Y$	$-\log(2)$	$\log Y$	$\log k$	$\log \Theta$	$\log \Theta$	- II
	$\log I$	$3 \log k$	$\log II$	$-\log(2)$	$\log k^5 \Theta$	$\log III$	I - II + III
		$\log I$		$\log II$	$-5 \log \cos B$	III	Y
					$\log II$		y
101	$\overline{12,59300}$	$\overline{6,20845}$	$\overline{12,59300}$	$\overline{12,59300}$	18,326	19,453	+ 12,053
	3,01872	6,38558	7,59132	7,59132	$\overline{n22,414}$	$\overline{n22,414}$	- 21,917
	15,46938	1,49116	5,15646	3,66530	$\overline{n4,740}$	$\overline{n3,867}$	- 9,871
	1,08110	10,99591	1,34078	1,49116	2,873	-0,0074	+ 143,370,580
	—	1,08110	—	1,34078	$\overline{n3,867}$	—	+ 143 360,709

и т. д.

(У Иордана 10-значными логарифмами получилась разница только на 1 мм . . . . , 708).

$$5 \log \lambda = \frac{1}{2} 10 \log \lambda, \text{ также}$$

$$5 \log k \text{ и } 5 \log \cos B.$$

$$\log III = \log k^5 \Theta - 5 \log \cos B = 5 \log \lambda + \log \Theta.$$

Нахождение X.

D. 1) X и u.

X = 5 926 591,258.

Формуляр 4.

1	2	3	4	5	6	7	8
№	$\Delta B$	$\log \Delta B$	$X_t$	$\Delta' B$	$\log \Delta' B$	$X_t'$	$\log y$
	$B_t + \frac{1}{2} \Delta B$	$-\log(1)_m$	$\frac{\Delta X}{X}$	$B_t' + \frac{1}{2} \Delta' B$	$-\log(1)_{m'}$	$\frac{\Delta' X}{X}$	$\frac{\log(2)}{\log u}$
	$\Delta B''$	$\log \Delta X$		$\Delta' B''$	$\log \Delta' X$		
101	8' 20'',9266	2,6997741	5 911 106,919	- 01' 39'',0734	$\overline{n1,9959571}$	5 929 653,797	5,1564301
	53° 24' 10'',463	- 2,5098815	+ 15 484,336	53° 29' 10'',463	- 2,5098754	- 3 062,539	2,5088438
	500,9266	4,1898926	5 926 591,255	- 99,0734	$\overline{n3,4860817}$	5 926 591,258	3,6652739

и т. д.

У Иордана X получился..., 258. Как и следовало ожидать, совпадает с тем определением, где  $\Delta B$  меньше.

Формуляр 5•

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№	$\overline{6,3845449}$ $\log k$ $\log \lambda \sin B$ $-\log (2)$ I	$\overline{5,70790}$ $2 \log k$ $\frac{\log II}{II}$ II-III+IV	$\overline{6,92975}$ $2 \log \lambda$ $\log III$ III -III+IV	$\overline{7,7113}$ $2 \log k$ $2 \log \cos B$ $\frac{\log IV}{IV}$ IV	$\log (x - X)$ $= I + II - III + IV$ $= I' + II' + III' + IV'$ X $\frac{x - X}{x}$	$\overline{6,3845449}$ $\log y$ $\log u$ $\log t$ I'	$\overline{6,92975}$ $2 \log u$ $\log II'$ II' II'+III'+IV'	$\overline{5,40687}$ $2 \log u$ $2 \log t$ $\log III'$ III'	$\overline{7,4461}$ $2 \log u$ $2 \log \cos B$ $\log IV'$ IV'
101	$\overline{6,3845449}$ 3,6653039 3,7956587 1,4911562 $\overline{3,3366637}$	$\overline{5,70790}$ 7,33061 $\overline{3,03851}$ 1 092,7 582,5	$\overline{6,92975}$ 7,78127 $\overline{2,71102}$ 514,1 -510,2	7,7113 7,3306 $\overline{1,5493}$ $\overline{0,5912}$ 3,9	3,3367219.5 3,3367217.9 5 926 591,258 $+ 2 171,310$ $\overline{5 928 762,568}$	$\overline{6,3845449}$ 5,1564301 3,6652739 0,1303549 $\overline{3,3366038}$	$\overline{6,92975}$ 7,33055 $\overline{2,26030}$ 182,1 1 179,9	$\overline{5,40687}$ 7,33055 0,26071 $\overline{2,99813}$ 995,7	$\overline{7,4461}$ 7,3306 $\overline{1,5493}$ 0,3260 2,1
	и т. д.								

У Иордана  $\log (x - X) = \dots 219,1$ ; здесь среднее  $\dots 218,7$ ; более точный результат дает  $I + II - III + IV$ .

Ф. Нахождение  $\gamma$  и  $\log m$

$\gamma = 1^{\circ}44'077''87$ ;  $\log m = 0,0001095$ .

Формуляр 6.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
№	7,06375	$\overline{5,83384}$	1,14727	$\overline{5,53181}$	$\log \lambda \sin B$	1,32336	$\overline{5,70790}$	$\overline{22,338}$
	$2 \log (3)$	$2 \log (1)$	$\log (3)$	$\log (1) (2)$	$\frac{\text{II}-\text{III}}{\log \gamma}$	$\log (3)$	$\log (1) (2)$	$\log y$
	$2 \log k$	$2 \log Y$	$2 \log k$	$2 \log Y$	$\log \gamma$	$2 \log k$	$2 \log y$	$\log \text{II}_m$
	$\log \text{II}$	$\log \text{II}$	$\log \text{III}$	$\log \text{III}$	$\gamma''$	$\log \log m$	$\log I_m$	$I_m$
		II		III	$\gamma$	$\log m$	$\log m = I_m$	$\text{II}_m$
							$-\text{II}_m$	
101	7,06375	$\overline{5,83284}$	1,14727	$\overline{5,53181}$	3,7956587	1,32336	$\overline{5,70790}$	$\overline{22,338}$
	12,77116	$\overline{3,01975}$	$\overline{6,38558}$	$\overline{3,01872}$	+ 733,7	$\overline{3,38558}$	$\overline{3,01872}$	20,626
	7,33061	10,31292	7,33061	10,31292	$\frac{3,7957320.7}{62 \ 7'',871}$	7,33061	10,31286	$\overline{2,964}$
	$\overline{3,16552}$	$\overline{3,16551}$	$\overline{2,86346}$	$\overline{2,86345}$	62 7'',871	$\overline{3,03955}$	$\overline{3,03948}$	1 095,2
	—	1 463,9	—	730,2	$1^{\circ}44'07'',871$	1 095,3	1 095,1	0,09
	и т. д.							

$\gamma$  у Иордана получилась..... "8718—разошлось на 0'' 0008; но мы гарантируем только сотые секунды.  $\log m$  у Иордана—1 095,2; здесь среднее также 1 095,2.

Определение координат Гаусса-Крюгера по географическим без таблиц  $Y$ , и другим путем с таблицами  $Y$ , (наиболее удобное вычисление). Приведем формулы, которые рекомендованы самим Крюгером для перехода от географических к координатам Гаусса-Крюгера, несколько видоизменив их.

Эти формулы требуют восьмизначных таблиц логарифмов и восьмизначных логарифмов величин (2) или  $N$ . Но при  $y$ , не превышающих 50 км, т. е. при  $\lambda$  от  $35'$  до  $1^\circ$ , в зависимости от широты можно пользоваться ими и при наличии только семизначных таблиц, давая координаты с точностью до 1 см.

Ф о р м у л ы. (Выведены из формул § 8).

$$1) \quad \log y = \log Y + f - h + p, \quad (95)$$

где:

$$\log Y = \log k - \log (2); \quad \log k = \log \lambda + \log \cos B;$$

$$\log f = \overline{5,53181} + 2 \log k; \quad \log h = \overline{5,23078} + 2 \log \lambda;$$

$$\log p = \overline{7,058} + 2 \log k + 2 \log \cos B.$$

$$2) \log(x - X) = I_x + \frac{3}{2}f - \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}p \quad (X \text{ находится обычным путем по табл. II),}$$

где:

$$I_x = \overline{6,3845449} + \log Y + \log q; \quad \log q = \log \lambda + \log \sin B.$$

$$3) \log \gamma = \log q + f + 6p. \quad 4) \log m = \frac{3}{2}f + 3p.$$

Пример 3 bis. Пулковое сигнал.  $B = 59^\circ 46' 15'', 35$ ;  
 $L = 30^\circ 19' 24'', 78$

( $L_0$  взято для координат г. Ленинграда  $30^\circ$ ).

#### О п р е д е л е н и е $y$ .

	$\lambda = L - 30^\circ$	$19' 24'', 78 = 1164'', 78$
+	$\log \lambda$	3,0662439.0
	$\log \cos B$	$\overline{1,7019635.7}$
<hr/>		
	$\log k$	2,7682074.7
+	$-\log(2) = \log \frac{N}{\rho}$	1,4913029.9
<hr/>		
	$\log Y$	4,2595104.6
+	+ $f$	+ 11.7
	- $h$	- 23.1
	+ $p$	+ 0.0
<hr/>		
	$\log y$	4,2595093.2
	$y$	+ 18 176,461

Определение  $\gamma$ .

+	$\log q$	3,0027674
	+ $f$	+ 11.7
	+ $6p$	+ 0.1
<hr/>		
	$\log \gamma$	3,0027686
	$\gamma$	+ 1006",395 = + 16'46",395

Определение  $x$ .

+	$\Delta B$	6' 15",35 = 375",35
	$B_t + \frac{1}{2} \Delta B$	59°43' 07",7
	$\log \Delta B$	2,5744364
	$-\log (1)_m$	1,4905605
<hr/>		
	$\log \Delta X$	4,0649969
<hr/>		
+	$\log \lambda$	3,0662439
	$\log \sin B$	1,9365235
<hr/>		
+	$\log q$	3,0027674
	const	6,3845449
	$\log Y$	4,2595105
<hr/>		
+	$I_x$	1,6468228
	+ $\frac{3}{2} f$	+ 17.5
	- $\frac{1}{2} h$	- 11.5
	+ $\frac{3}{2} p$	+ 0.0
<hr/>		
	$\log (x - X)$	1,6468234
<hr/>		
+	$X_t$	6 616 244,036
	$\Delta X$	11 614,403
	$x - X$	44,343
<hr/>		
	$x$	6 627 902,782

Поправочные члены.

+	const	5,53181	+	const	7,058
	$2 \log k$	5,53641		$2 \log k$	5,536
<hr/>				$2 \log \cos B$	1,404
	$\log f$	1,06822		$\log p$	3,998
	$f$	11,7		$p$	0,01
<hr/>			<hr/>		
+	const	5,23078	Определение $\log m$ .		
	$2 \log \lambda$	6,13249	+	+ $\frac{3}{2} f$	+ 17.5
<hr/>				+ $3p$	+ 0.0
	$\log h$	1,36327		$\log m$	17.5
	$h$	23,08	<hr/>		

$\log m = 0,00000175$

В формулярах 1—6 даны образцы массового точного получения координат Гаусса-Крюгера по данным географическим координатам. Вследствие дублирования значительного числа вычислений в целях контроля эти формуляры громоздки. На основании формул (95) и (86) можно предложить более удобный порядок вычисления, столь же точный, как в примере 3, т. е. с применением при семи-значных логарифмах табл. I (дуг параллелей) и не логарифмического вычисления  $Y$ . Этот порядок удобен для единичных вычислений, но в виду отсутствия контроля требует вычислений в две руки. Дадим здесь вывод соответствующих формул и пример вычислений по ним.

$$v = Y + (v' - Y) + III_y = Y \left( 1 + \frac{y' - Y}{Y} \right) + III_y = Y(1 + z) + III_y;$$

$$y' = Y \left( 1 + \frac{y' - Y}{Y} \right) = Y(1 + z); \quad \log y' = \log Y + \log(1 + z),$$

$$\text{где } z = \frac{y' - Y}{Y}.$$

$III_y = \lambda^{50}$  по формуле (86), стр. 53 и находится при помощи табл. IV приложения.

На основании формулы 1) из (95):

$$\log(1 + z) = f - h + p = \sigma.$$

По формуле (17):

$$\log(1 + z) = \mu \left( + z - \frac{z^2}{2} \right).$$

Значит

$$\mu z - \frac{\mu z^2}{2} = \sigma.$$

Отсюда первое приближение  $z = \frac{\sigma}{\mu}$  и второе приближение

$$z = \frac{\sigma}{\mu} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^2.$$

С другой стороны

$$z = \frac{y' - Y}{Y},$$

следовательно

$$y' - Y = Y \left( \frac{\sigma}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\mu^2} \right),$$

или в логарифмическом виде

$$\log(y' - Y) = \log Y + \log \frac{\sigma}{\mu} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\mu} \right),$$

а по формуле (17)

$$= \log Y + \log \frac{\sigma}{\mu} + \frac{1}{2} \sigma.$$

Заменяя далее  $\log \frac{1}{\mu}$  его значением  $-0,36221.6$ , получим вместо формулы 1) из (95):

$$\left. \begin{array}{l} 1) \log(y' - Y) = \bar{7},36\ 221.6 + \log Y + \log \sigma + \frac{1}{2} \sigma \\ 2) \quad \quad \quad y = Y + (y' - Y) + III_y \end{array} \right\} (96)$$

где  $\sigma = f - h + p$  из (95) и выражено в единицах седьмого знака, поэтому характеристика  $\log \frac{1}{\mu}$  уменьшена на 7 единиц; кроме того следует заметить, что  $\sigma$  — может быть отрицательной и положительной.  $III_y = \lambda^{5\theta}$ .

Нахождение  $Y$  производится по стр. 50, нахождение  $x$ ,  $\gamma$  и  $\log t$  по формулам 2) и 3) из (95). Расположение вычислений дано в особом формуляре (взят тот же пример 3) на стр. 64.

По этому особому формуляру удобно решать и с более подробными таблицами, указанными в предисловии к настоящему второму изданию. В таблицах Матусевича и Юшенко имеются дуги параллелей в 1 минуту через каждую минуту по широте;  $Y_0$  можно получать применением вторых разностей или употребляя интерполяционную формулу (84) с постоянным множителем  $\{\bar{4},4637261\}$ , данную и Матусевичем. В таблицах Красовского даны дуги параллелей в  $10'$  через каждые пять минут по широте с точностью, превышающей на один знак (10 знаков вместо 9) табл. I здесь и таблицы Матусевича. Интерполяционная формула для длин дуг параллелей у Красовского не совсем удобна, поэтому надлежит пользоваться формулой (84), при этом достаточно находить только  $\Delta_1 Y_0$ , как и при пользовании таблицами Матусевича. В связи с этим полезны коэффициенты  $f$  и  $g$ , данные в таблицах Красовского, а применение коэффициентов  $h$  и  $k$ , данных там же, с успехом может быть заменено формулами (96).

**Особый формуляр вычисления координат Гаусса-Крюгера по данным географическим координатам.**

Дано:  $B = 53^{\circ} 28' 20'', 9266$ .  $L = 89^{\circ} 09' 33'', 8196$ . Точка . . . . .

$$\lambda = +2^{\circ} 09' 33'', 8196 = +7773'', 8196; \quad \lambda_k = 1,2\lambda_0;$$

$$\Delta\lambda = +9' 33'', 8196 = +573'', 8196.$$

1. Нахождение  $\log \Delta_1 Y_0$ .

$B_t$	$53^{\circ} 30'$
$\Delta B$	$-1' 39'', 0734$
$\Delta B''$	$-99'', 0734$
$\frac{1}{2} \Delta B$	$-0' 49', 437$
$B_t + \frac{1}{2} \Delta B = B_m$	$53^{\circ} 29' 10'', 463$
const	$\bar{n}2,4637261$
$\log \Delta B$	$\bar{n}1,9959571$
$\log \sin B$	$\bar{1},9051015$
$-\log (i)_m$	$\bar{1},4901246$
$\log \Delta_1 Y_0$	$\bar{1},8549093$

4. Поправочные члены.

$\log k$	
$\log \lambda$	$\bar{3},89063.4$
$\log \cos B$	$\bar{1},77466.9$
$\log k$	$\bar{3},66530.3$
$f$	
const	$\bar{5},53181$
$2 \log k$	$\bar{7},33061$
$\log f$	$\bar{2},86242$
$f$	$\bar{7}28,48$

2. Нахождение  $\log \Delta Y$  и  $\log q$ .

$-\log (2)$	$\bar{1},4911562$
$\log \Delta X$	$\bar{2},7587754$
$\log \cos B$	$\bar{1},7746694$
$\log \Delta Y$	$\bar{4},0246010$
$\log \lambda$	$\bar{3},8906345$
$\log \sin B$	$\bar{1},9050242$
$\log q$	$\bar{3},7956587$

$h$	
const	$\bar{5},23078$
$2 \log \lambda$	$\bar{7},78127$
$\log h$	$\bar{3},01205$
$h$	$\bar{1}028,14$

3 и 9. Нахождение  $Y$  и  $u$ .

$Y_t$	$110\ 584,876$
$\Delta_I Y_0$	$+71,599$
$\Delta_{II} Y_0$	$0,000$
$Y_0$	$110\ 656,475$
$\frac{n}{10} \cdot Y_0$	$22\ 131,295 \quad (n=2)$
$Y_k$	$132\ 787,770$
$Y$	$+10\ 582,810$
$Y$	$143\ 370,580$
$y' - Y$	$-9,8635$
$III_y$	$-0,0074$
$y$	$143\ 360,709$

$p$	
const	$\bar{7},058$
$2 \log k$	$\bar{7},331$
$2 \log \cos B$	$\bar{1},549$
$\log p$	$\bar{1},938$
$p$	$0,87$

$III_y$	
$5 \log \lambda$	$\bar{1}9,4531$
$\log \theta$	$\bar{n}22,414$
$\log III_y$	$\bar{n}3,867$
$III_y$	$-0,0074$

5. Нахождение  $\log \Delta X$ .

$B_t$	53° 30'
$\Delta B$	— 01' 39",0734
$\Delta B''$	— 99",0734
$\frac{1}{2} \Delta B$	— 0' 49",437
$B_t + \frac{1}{2} \Delta B = B_m$	53° 29' 10",463
$\log \Delta B$	$\bar{n}1,9959571$
$-\log (1)_m$	1,4901246
$\log \Delta X$	$\bar{n}3,48601817$

6. Нахождение  $\log (x - X)$ .

const	6,3845449
$\log q$	3,7956587
$\log Y$	5,1564601
$I_x$	3,3366637
$+\frac{3}{2} f$	+ 1092.7
$-\frac{1}{2} h$	— 514.1
$+\frac{9}{2} p$	+ 3.9
$\log (x - X)$	3,3367219.5

7. Нахождение  $x$ .

$X_t$	5 929 653,797
$\Delta X$	— 3 062,539
$X$	5 926 591,258
$x - X$	+ 2 171,311
$x$	5 928 762,569

8. Нахождение  $\log (y' - Y)$ .

$\sigma = f - h + p$	— 298,79
const	$\bar{7},36221.6$
$\log Y$	5,15646.0
$\log \sigma$	$\bar{n}2,47536.6$
$\frac{1}{2} \sigma$	— 1.5
$\log (y' - Y)$	$\bar{n}0,99403$

10. Нахождение  $\gamma$ .

$\log q$	3,7956587
$+f$	+ 728.5
$+6p$	+ 5.2
$\log \gamma$	3,7957320.7
$\gamma''$	6247",871

11. Нахождение  $\log m$ 

$+\frac{3}{2} f$	1092.7
$+3p$	+ 2.6
$107 \log m$	1095.3

## 12. Ответы.

$x$	5 298 762,569
$y$	+ 143 360,709
$\gamma$	+ 1° 44' 07",87
$\log m$	0,0001095.3

Примечание. 1 — берется согласно с табл. I приложения при ближайшей  $B_t$ . 3. — по стр. 50. 4. — находятся пятизначными и трехзначными логарифмами. 5 — берется согласно с табл. II приложения при ближайшем  $B_t$ ;  $B_t$ ,  $\Delta B$  и  $B_m$  в этом пункте могут быть иные, чем в пункте 1, вследствие разных интервалов таблиц I и II. При одинаковых интервалах (таблицы Матусевича) первые пять строчек п. 5 отпадают. 6 и 7 — находятся по формуле (95), 8 и 9 — по формуле (96), 8 — пятизначными логарифмами, 10 и 11 находятся по формуле (95):

$$-\log (1)_m = \log \Delta 1'' \text{ таблиц Красовского}$$

$$-\log (2) = \log \frac{N}{p''} \text{ тех же таблиц.}$$

**§ 13. Нахождение приращений плоских координат по геодезическому азимуту и расстоянию на земной поверхности. (По сфероидическим полярным координатам).**

Предшествующий параграф давал сравнительно очень громоздкое решение задачи в случае нахождения плоских координат непосредственно по географическим, особенно при большом  $u$ . Такой путь неизбежен только для одной исходной или в крайнем случае с целью контроля — для нескольких точек данного района, связанных между собой геодезически: триангуляционно или полигонально. Плоские координаты остальных точек гораздо проще вычислять путем нахождения приращений по истинным азимутам и действительным расстояниям, полученным обычным путем при вычислении на сфероиде триангуляций или полигональных ходов. Особенно при этом удобно следовать тетради, в которой вычислялись географические координаты.

Предположим, что начальная точка  $P_0$  получила плоские координаты  $x_0$  и  $y_0$ , сближение меридиана  $\gamma_0$  и логарифм масштаба  $\log m_0$  по предыдущему параграфу.

Надлежит найти плоские координаты соседней точки  $P_1$ , истинный азимут на которую  $= A_0$  и расстояние до которой равно  $s_0$ . Задача будет точно решена, если мы найдем достаточно точно дирекционный угол  $\alpha_0$  и и плоское расстояние  $d_0$  и по формулам плоской тригонометрии вычислим приращения координат. Для этого нам нужно, согласно формулам (55) и (56), которые остаются пригодными и для сфероида в большинстве практических случаев, получить поправку за кривизну  $\delta_0$  и логарифм масштаба  $\log m_1$  на точке  $P_1$ , которые получаются достаточно точно и при приближенных координатах точки  $P_1$ , найденных предварительно по приближенному простиранию и приближенному плоскому расстоянию. Приближенным простиранием может служить криволинейный дирекционный угол  $T_0 = A_0 - \gamma_0$ , и приближенным расстоянием длина  $d'$ , логарифм которой  $\log d' = \log s_0 + \log m_0$ . Получив сперва приближенные, а затем и окончательные плоские координаты точки  $P_1$ , мы уже координаты дальнейших точек можем получать из двух предшествующих точек, если имеем дело с рядом или сетью треугольников, чем достигается контроль, как это делается и при вычислении географических координат. Попутно с получением плоских координат на новых точках определяются и сближения меридиана путем вычисления обратных поправок за кривизну [ $\delta_2$  формул (56)], исходя из того положения, что обратный прямолинейный дирекционный угол равен прямому  $\pm 180^\circ$ .

$$\alpha_2 = \alpha_1 \pm 180^\circ; T_2 = \alpha_2 + \delta_2 \text{ и } \gamma_2 = A_2 - T_2.$$

$A_2$  — истинный азимут, предполагается известным.

Более точная формула для  $\delta$  на сфероиде выражается вместо (56) следующим образом (в аналитической мере): \*

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 = \frac{x_2 - x_1}{6R_1^2} (2y_1 + y_2) - \frac{\eta^2 t}{3R^3} (x_2 - x_1)^2 \\ + \frac{\eta^2 t}{6R^3} (y_2 - y_1)(3y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

и такая же формула для  $\delta_2$ , только  $x_1$  и  $y_1$  меняются ролями с  $x_2$  и  $y_2$ , и вместо  $R_1$  ставится средний радиус кривизны на второй точке —  $R_2$ .

Эта формула может быть преобразована (в секундах):

$$\left. \begin{aligned} \delta = \frac{\rho}{2R^2} \left( y + \frac{1}{3} \Delta y \right) \Delta x + \frac{\rho \eta^2 t}{R^3} \Delta y \left( y_1 + \frac{1}{3} \Delta y \right)^2 \\ + \frac{\rho \eta^2 t}{3R^3} (\Delta x)^2 y_1 + \frac{\rho \eta^2 t}{18 R^3} (\Delta y)^3, \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

где  $\Delta x = x_2 - x_1$ ;  $\Delta y = y_2 - y_1$ .

$R = \sqrt{MN}$  — средний радиус кривизны безразлично какой точки данного отрезка геодезической линии (стороны), ибо разница широт на  $0^\circ,5$ , или абсцисс на 55 км, вызывает изменение  $\frac{1}{R^2}$  максимально, при  $B = 35^\circ$ , лишь на 0,0001 его величины и, при максимальном  $\delta = 40''$  (см. ниже), дает ошибку 0'',004 в поправке за кривизну.

Для определения максимальной величины членов формулы (96) возьмем  $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{100} R$ , т. е. = 64 км — такая величина их практически будет весьма редка. Ординату  $y$  возьмем равной 270 км и  $y + \frac{1}{3} \Delta y = 250$  км. Тогда четвертый член оказывается меньшим 0'',00004, третий член  $< 0'',001$ , а второй член дает максимально около 0'',01. Поэтому вообще эти три члена могут быть опущены, если вычислять  $\delta$  с точностью до 0'',01 и только в исключительных случаях придется может быть принять во внимание второй член, приближающийся к пределу точности вычисления  $\delta$ . Для второго члена, если принять его во внимание, можно взять  $R$  постоянное, отвечающее средней широте нашего Союза, сажем  $55^\circ$ , и при этом мы сделаем ошибку менее  $\frac{1}{100}$  величины второго члена, т. е. меньше 0'',0001.

\* Иордан, III, 1923, § 94.

$\delta$  со вторым членом примет такое выражение:

$$\delta = (7) \Delta x \left( y + \frac{1}{3} \Delta y \right) + \left\{ 18,425 \right\} \Delta y \left( y_1 + \frac{1}{3} \Delta y \right)^2 \sin 2B, \quad (99)$$

где

$$(7) = \frac{\rho}{2R^2} = \frac{(1)(2)}{2\rho} = \{0,38454\} (1) (2),$$

или

$$(7) = \frac{2(3)^2 \rho^3}{c^2} = \{8,63211\} (3)^2, \text{ если } \Delta x, y \text{ и } \Delta y$$

выражены в км, кроме того  $\log(7)$  дан в табл. IV и VI приложения.

Для  $\log t$  мы имели формулы (92), (93) и (94). В конце параграфа 10 было уже объяснено, что для нахождения  $\log t$  достаточно  $y$  давать с точностью до 10 м. То же справедливо и по отношению к  $\delta$ . Как уже условились,  $\delta$  достаточно вычислять с точностью до  $0'',01$ .

Обозначим допустимую абсолютную ошибку для  $\Delta x$  и  $y + \frac{1}{3} \Delta y = y_\Delta$  через  $a$  метров. Тогда из формулы для  $\delta$  получим такое соотношение:

$$\delta + 0,01 = (7) (\Delta x + a) (y_\Delta + a),$$

или

$$\log(\delta + 0,01) = \log(7) + \log(\Delta x + a) + \log(y_\Delta + a),$$

или

$$\log \delta + \frac{\mu \cdot 0,01}{\delta} = \log(7) + \log \Delta x + \log y_\Delta + \mu \frac{a}{\Delta x} + \mu \frac{a}{y_\Delta}.$$

Так как  $\log \delta = \log(7) \Delta x \cdot y_\Delta = \log(7) + \log \Delta x + \log y_\Delta$ , то получается, что  $\frac{1}{100\delta} = \frac{a(y_\Delta + \Delta x)}{\Delta x y_\Delta}$ , или, заменяя  $\delta$  через  $\frac{\rho}{2R^2} \Delta x y_\Delta$ , имеем:

$$a = \frac{R^2}{50\rho(\Delta x + y_\Delta)}.$$

При  $B = 35^\circ$   $a$  будет равно:

$$a = \frac{3\,934\,000}{\Delta x + y_\Delta}.$$

Считая максимальное при этой широте  $y_\Delta = 270$  км, а  $\Delta x$  вообще не более 60 км, получим максимально для  $\delta$  —  $40''$  и минимально для  $a$  около 12 м. С уменьшением  $y_\Delta$   $\delta$  будет уменьшаться, а  $a$  — увеличиваться.

Таким образом точность до  $10 \text{ м} = 0,01 \text{ км}$  для  $\Delta x$  и для  $y$  будет вполне достаточной, и  $\delta$  можно вычислять пятизначными и даже в большинстве случаев четырехзначными логарифмами. Для вычисления  $\delta$  и  $\log m$  удобнее координаты и приращение их выражать в километрах и, в согласии с приведенными рассуждениями здесь и в конце параграфа 10, давать их с точностью до  $0,01 \text{ км}$ .

Сделав эти замечания, приведем формулы, решающие поставленную в настоящем параграфе задачу, и дадим пример из Донецкой триангуляции последовательного вычисления плоских координат, следуя имеющимся вычислениям Г. Г. Страхова географических координат этой триангуляции (тетрадь 5).

### Формулы для нахождения плоских координат по длине и азимуту на сфероиде. (100)

**А. Нахождение приближенного плоского дирекционного угла и расстояния.**

- 1)  $T_1 = A_1 - \gamma_1$  ( $\gamma_1$  и  $A_1$  даны)
- 2)  $\log d' = \log s + \log m_1$  ( $\log m_1$  и  $\log s$  даны).

**В. Нахождение приближенных приращений плоских координат и самих координат в км.**

- 3)  $\log \Delta'x = \log d' + \log \cos T_1.$
- 4)  $\log \Delta'y = \log d' + \log \sin T_1.$
- 5)  $y_2' = y_1' + \Delta'y$

( $y_1$  дано,  $\Delta'x$  и  $x_2'$  можно не находить, а ограничиться только нахождением  $\log \Delta'x$ ).

**С. Нахождение точного плоского дирекционного угла и расстояния.**

- 6)  $\log m_2 = \frac{\mu}{2R^2} y_2'^2 = (6) y_2'^2.$
- 7)  $\log d = \log s + \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) - \frac{1}{6} \log m_\Delta$   
 $= \log s + \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) - \tau.$   
 $\tau = \frac{1}{6} (6) (\Delta'y)^2 = \{0,92975\} (1) (2) (\Delta'y)^2.$
- 8)  $\delta_1 = \frac{\rho}{2R^2} \Delta'x \left( y_1' + \frac{1}{3} \Delta'y \right) = (7) \Delta'x \left( y_1' + \frac{1}{3} \Delta'y \right).$
- 9)  $\delta_2 = -\frac{\rho}{2R^2} \Delta'x \left( y_2' - \frac{1}{3} \Delta'y \right)$   
 $= -(7) \Delta'x \left( y_2' - \frac{1}{3} \Delta'y \right) = -(7) \left( y_1' + \frac{2}{3} \Delta'y \right) \Delta'x.$

$\tau$  — берется из табл. III приложения;

$\log (6)$  и  $\log (7)$  „ „ „ IV или V и VI приложения.

- 10)  $\alpha_1 = T_1 - \delta_1 = A_1 - \gamma_1 - \delta_1.$

Порядок вычисл.	Обозначения	Решение		
1	Данная точка	Васильевка	Васильевка	Грузская
2	Определяемая $\tau$	Г р у з с к а я	Н и к и т о в к а	
(3)	$A_1$	$38^\circ 55' 03'', 56$	$109^\circ 26' 50'', 92$	$161^\circ 11' 07'', 32$
(4)	$\gamma_1$	$-1^\circ 00' 02'', 228$	$-1^\circ 00' 02'', 228$	$-52' 34'', 811$
10	$A_1 - \gamma_1 = T_1$	$39^\circ 55' 05'', 783$	$110^\circ 26' 53'', 148$	$162^\circ 03' 42'', 131$
37	$\delta_1$	$-3'', 638$	$+1'', 745$	$+4'', 805$
39	$\alpha_1 = T_1 - \delta_1$	$39^\circ 55' 09'', 426$	$110^\circ 26' 51'', 403$	$162^\circ 03' 37'', 326$
40	$\alpha_2 = \alpha_1 \pm 180^\circ$	$219^\circ 55' 09'', 426$	$290^\circ 26' 51'', 403$	$342^\circ 03' 37'', 326$
38	$\delta_2$	$+3'', 475$	$-1'', 619$	$-4'', 664$
41	$\alpha_2 + \delta_2 = T_2$	$219^\circ 55' 12'', 901$	$290^\circ 26' 49'', 784$	$342^\circ 03' 32'', 662$
(5)	$A_2$	$219^\circ 02' 38'', 090$	$289^\circ 39' 03'', 87$	$341^\circ 15' 46'', 75$
42	$A_2 - T_2 = \gamma_2$	$-52' 34'', 811$	$-47' 45'', 914$	$-47' 45'', 912$
			$\gamma_2 = -47' 45'', 91$	
23	$2 \log y_2'$	$3,87082$	$3,79360$	
24	$\log (6)$	$2,72711$	$2,72712$	
25	$\log \log m_2$	$2,59793$	$2,52072$	
26	$\log m_2$	$396.2$	$331.7$	$331.7$
(6)	$\log m_1$	$521.5$	$521.5$	$396.2$
27	$1/2 (\log m_1 + \log m_2)$	$458.8$	$426.6$	$364.0$
28	$-\tau$	$-1.4$	$-3.6$	$-0.5$
29	$\log d - \log s$	$457.4$	$423.0$	$364$
(7)	$\log s$	$4,2963948$	$4,3299258$	$4,3766039$
30	$\log d$	$4,2964405$	$4,3299681$	$4,3766403$
14	$\log \Delta' x$	$1,18122$	$n,0,87326$	$n,1,35500$
13	$\log \cos T_1$	$1,88477$	$n,1,54328$	$n,1,97836$
11	$\log s + \log m_1 - 3$	$1,29645$	$1,32998$	$1,37664$
12	$\log \sin T_1$	$1,80732$	$1,97174$	$1,48854$
15	$\log \Delta' y$	$1,10377$	$1,30172$	$0,86518$
16	$y_1'$	$-98,88$	$-98,88$	$-86,18$
17	$\Delta_1' y$	$+12,70$	$+20,03$	$+7,33$
18	$y_2'$	$-86,18$	$-78,85$	$-78,85$
19	$1/3 \Delta' y$	$+4,23$	$+6,68$	$+2,44$
20	$y_1' + 1/3 \Delta' y$	$-94,65$	$-92,20$	$-83,74$
21	$y_2' - 1/3 \Delta' y$	$-90,41$	$-85,53$	$-81,29$
22	$\log y_2'$	$n,1,93541$	$n,1,89680$	
34	$\log \delta_1$	$n,0,56085$	$0,24175$	$0,68169$
33	$\log (y_1' + 1/3 \Delta_1' y)$	$n,1,97612$	$n,1,96473$	$n,1,92293$
31	$\log \Delta' x$	$1,18098$	$n,0,87326$	$n,1,35500$
32	$\log (7)$	$3,40375$	$3,40376$	$3,40376$
35	$\log (y_2' - 1/3 \Delta y)$	$n,1,95622$	$n,1,93212$	$n,1,91004$
36	$\log (-\delta_2)$	$n,0,54095$	$0,20914$	$0,66880$

Порядок вычисл.	Обозначения	Решение		
1	Данная точка	Васильевка	Васильевка	Грузская
2	Определяемая т.	Грузская	Никитовка	
46	$\log \Delta x$	$\overline{4,1812072}$	$^n\overline{3,8732297}$	$^n\overline{4,3549950}$
45	$\log \cos \alpha_1$	$\overline{1,8847667}$	$^n\overline{1,5432616}$	$^n\overline{1,9783547}$
43	$\log d$	$\overline{4,2964405}$	$\overline{4,3299681}$	$\overline{4,3766403}$
44	$\log \sin \alpha_1$	$\overline{1,8073373}$	$\overline{1,9717359}$	$\overline{1,4885716}$
47	$\log \Delta y$	$\overline{4,1037778}$	$\overline{4,3017040}$	$\overline{3,8652119}$
48	$\Delta x$	+ 15 177,745	- 7 468,436	- 22 646,180
(8)	$x_1$	5 369 018,94	5 369 018,94	5 384 196,68
50	$x_2$	5 384 196,685	5 301 550,504	5 361 550,500
		<b>5 384 196,68</b>	$x_2 = 5 361 550,50$	
49	$\Delta y$	+ 12 699,243	+ 20 031,065	+ 7 331,822
(9)	$y_1$	- 98 878,66	- 98 878,66	- 86 179,42
51	$y_2$	- 86 179,417	- 78 847,595	- 78 847,598
		<b>- 86 179,42</b>	$y_2 = - 78 847,60$	

## Примечания.

- №№ 3—9, заключенные в скобки, представляют собой данные величины.
- $d', \Delta' x, \Delta' y, y_1'$  и  $y_2'$  выражены в км.
- №№ 11—15, 22—25 и 31—36 вычисляются пятизначными логарифмами, № 21 должен = № 20 + № 19.
- № 34 = № 32 + № 31 + № 33.
- № 36 = № 31 + № 32 + № 35.
- № 46 = № 43 + № 45.
- № 47 = № 43 + № 44.
- $\log s + \log m' - 3 = \log d'$ .

В Донецкой триангуляции долготы даны от Пулкова. В приведенном здесь примере 4 долгота Пулкова взята =  $2^h 01^m 18^s, 58$ ; последние же определения дают  $18^s, 566$ , т. е. на  $0', 21$  меньше.

## D. Нахождение окончательных координат в м и сближения меридиана определяемой точки.

- $\log \Delta x = \log d + \log \cos \alpha_1.$
- $\log \Delta y = \log d + \log \sin \alpha_1.$
- $x_2 + x_1 + \Delta x.$
- $y_2 = y_1 + \Delta y$  ( $x_1$  и  $y_1$  даны).
- $\alpha_2 = \alpha_1 \pm 180^\circ.$
- $T_2 = \alpha_2 + \delta_2.$
- $\gamma_2 = A_2 - T_2$  (см. черт. 11 на стр. 27).

## § 14. Нахождение приращений плоских координат по приращениям географических координат.

Применяя метод вычисления плоских координат путем вычисления приращений и перехода от точки к точке, мы нередко можем столкнуться с таким случаем, когда нам даны только географические координаты и когда, чтобы свести задачи к предыдущему случаю, нам приходится решать сначала так называемую обратную геодезическую задачу, т. е. по географическим координатам двух точек находить расстояние между ними и азимут геодезической линии (стороны), их соединяющей.

Для указанной обратной задачи дадим здесь наиболее простые формулы, пригодные для небольших расстояний, не превышающих 30 км.

### Формулы средней широты и азимута. (101)

Даны:  $B_1$  и  $L_1$ ,  $B_2$  и  $L_2$ . Требуется найти:  $\log s$ ,  $A_1$  и  $A_2$ .

$$1) \Delta B = B_2 - B_1. \quad 2) \Delta L = \Delta \lambda = L_2 - L_1.$$

$$3) B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2) = B_1 + \frac{1}{2}\Delta B = B_2 - \frac{1}{2}\Delta B.$$

$$4) u = \frac{\Delta B}{(1)}. \quad 5) v = \frac{\Delta \lambda \cos B}{(2)} = \frac{k}{(2)}.$$

$$6) \operatorname{tg} A = \frac{v}{u}. \quad 7) s = \frac{u}{\cos A} = \frac{v}{\sin A}.$$

$$8) \Delta A = \Delta \lambda \sin B. \quad 9) A_1 = A - \frac{1}{2}\Delta A.$$

$$10) A_2 = A + \frac{1}{2}\Delta A \pm 180^\circ.$$

(1) и (2) берутся при широте  $B$  из таблиц Шарнгорста-Матусевича.

Найдя по этим формулам искомые величины, мы, если нам даны плоские координаты, логарифм масштаба и сближение меридиана одной из точек, можем найти по примеру 4 эти же величины для другой точки.

Дадим здесь пример использования формул (101).

Пример 5. Дано: пункт Васильевка:  $B_1 = 48^\circ 27' 07''$ , 7165;  $L_1 = 37^\circ 39' 46''$ , 9495 и решением по примеру 3 найдено:

$$x_1 = 5\,369\,018,94; \quad y_1 = -98\,878,66;$$

$$\gamma_1 = -1^\circ 00' 02'', 228; \quad \log m_1 = 0,0000521.5.$$

Пункт Грузская:  $B_2 = 48^\circ 35' 25''$ , 752;  $L_2 = 37^\circ 49' 53''$ , 646. Требуется найти (для Грузской):

$$x_2, y_2, \gamma_2 \text{ и } \log m_2.$$

**Объяснение к формуляру 8.** (1)  $\log(1)$  и  $\log(2)$  находятся одновременно при средней широте  $B$  из таблиц Шарнгорста-Матусевича.

2)  $\log \cos B$  и  $\log \sin B$  находятся также одновременно.

А. Решение обратной геодезической задачи [см. формулы (101)].

Формуляр 8.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Название точек 2-й 1-й	$\frac{B_2}{B_1}$ $\frac{\Delta B}{\frac{1}{2}\Delta B}$	$\frac{L_2}{L_1}$ $\frac{\Delta L}{B}$	$\frac{\Delta \lambda''}{\Delta B''}$ $\log \Delta B''$ $\log (1)$	$\frac{\log \Delta \lambda}{\log \cos B}$ $\frac{\log k}{\log (2)}$	$\frac{\log v}{\log u}$ $\frac{\log \operatorname{tg} A}{(A)}$	$\frac{\log \sin (A)}{\log \cos (A)}$ $\frac{\log s}{\log s}$	$\frac{\log \Delta \lambda}{\log \sin B}$ $\frac{\log \Delta A}{\Delta A}$	$\frac{A}{\frac{1}{2}\Delta A}$ $\frac{A_1}{A_2}$
2. Грузская	48° 35' 25", 752	37° 49' 53", 646	606,6965	2,7829715	4,0950868	$\overline{1,7986919}$	2,7829715	38° 58' 50", 83
	48° 27' 07", 7165	37° 39' 46", 9495	498,0355	$\overline{1,8210819}$	4,1870154	$\overline{1,8906205}$	$\overline{1,8745990}$	3' 47", 27
1. Васильевка	08' 18", 0355	10' 06", 6965	2,6972603	2,6040534	$\overline{1,9080714}$	4,2963949	2,6575705	38° 55' 03", 56
	04' 09", 018	48° 31' 16", 734	$\overline{2,5102449}$	$\overline{2,5089666}$	38° 58' 50", 83	4,2963949	454,538	219° 02' 38", 10
	и т. д.							

$$\log v = \log k - \log (2); \quad \log u = \log \Delta B'' - \log (1).$$

3) (A)—острый угол, непосредственно находимый в таблицах логарифмов.

4)  $\log \sin (A)$  и  $\log \cos (A)$  находятся одновременно с получением (A) в таблицах логарифмов.

5) Один  $\log s = \log v - \log \sin A$ , другой  $= \log u - \log \cos (A)$  —должны получиться одинаковые результаты.

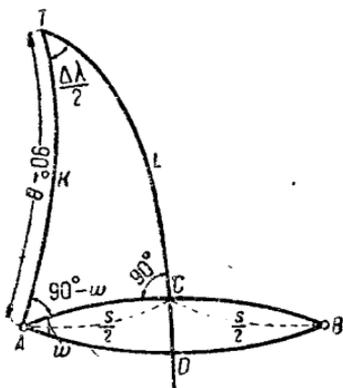
6) Если широты и долготы даются с точностью до  $0'',001$ , то можно гарантировать лишь шестой знак мантиссы  $\log s$  и десятые секунды в азимутах  $A_1$  и  $A_2$ . В данном примере изменение  $\Delta B$  на  $0'',001$  вызывает изменение  $\log \Delta B$  на 9 единиц седьмого знака.

### В. Получение плоских координат.

Производится дальше, как указано в примере 4.

## § 15. Нахождение приращений плоских координат путем перемещений по параллели и меридиану.

Для полного исчерпания вопроса и получения навыка в обращении с различными поправками при переходе со сфероид на плоскость можно вывести формулы, дающие приращения плоских координат при передвижении по меридиану (постоянная долгота,  $\Delta \lambda = 0$ ) и при передвижении по параллели (постоянная широта,  $\Delta B = 0$ ), чем достигается непосредственное получение плоских координат путем нахождения приращений от точки к точке без решения обратной геодезической задачи на сфероиде.



Черт. 14

Пусть на черт. 14  $ADB$  — параллель широты  $B$  на сфероиде.

Разность долгот точек  $B$  и  $A$  пусть  $= \Delta \lambda$ .

$ACB$  — геодезическая линия.

$C$  — середина геодезической линии.

$KA$  и  $LCD$  — меридианы.

Ясно, что  $\angle LCA$ , равно как и  $\angle KAD = 90^\circ$ . Выразим  $\angle CAD =$

$= \omega$ . Вообразим шаровую поверхность радиуса  $N$ , проходящую через параллель  $ADB$ , с центром, лежащим на земной оси в пересечении с нормалью  $N$ .  $N$  — поперечный радиус кривизны, отвечающий широте  $B$ . Благодаря близости точек  $C$  и  $D$  (при дуге  $AB = 1^\circ$   $CD$  меньше  $4''$ ) можно считать, что поперечный радиус кривизны и точки  $C$  равен  $N$ , и шаровая поверхность радиуса  $N$  проходит и через точку  $C$ . Действительно  $\log (2) = \log \frac{\rho}{N}$  в таблицах Шарнгорста-Матусевича меняется максимально

на 4,5 единицы седьмого знака при изменении широты на 1', при изменении же широты на 4'' логарифм этой величины изменится лишь всего на  $\frac{4,5}{15} = 0,3$  единицы седьмого знака.

Вообразим на этом шаре с радиусом  $N$ , что меридианы  $AK$  и  $DL$  продолжены до пересечения в точке  $T$ , и решим прямоугольный сферический  $\triangle TCA$ . У него сторона  $TA$  равна  $90^\circ - B$ , угол  $T = \frac{1}{2}\Delta\lambda$ . Применим формулу косинуса гипотенузы (19):

$$\cos(90^\circ - B) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\Delta\lambda \operatorname{ctg}(90^\circ - \omega),$$

или по (14):

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta\lambda \sin B = \left[ \frac{1}{2}\Delta\lambda + \frac{1}{24}(\Delta\lambda)^3 \right] \sin B,$$

или

$$\omega + \frac{\omega^3}{3} = \frac{1}{2}\Delta\lambda \sin B + \frac{(\Delta\lambda)^3}{24} \sin B.$$

Заменяя

$$\frac{\omega^3}{3} \text{ через } \frac{1}{24}(\Delta\lambda)^3 \sin^3 B$$

и перенеся его в правую часть, получим окончательно:

$$\omega = \frac{1}{2}\Delta\lambda \sin B + \frac{(\Delta\lambda)^3}{24} \sin B \cos^2 B. \quad (102)$$

Здесь  $\omega$  выражено в аналитической мере — так же, как и  $\Delta\lambda$ . Если же перейти к градусной мере, то  $\omega$  получит такое выражение:

$$\omega = \frac{1}{2}\Delta\lambda \sin B + \frac{(\Delta\lambda)^3}{24\rho^3} \sin B \cos^2 B, \quad (103)$$

или в логарифмическом виде:

$$\log \omega = \log \frac{1}{2}\Delta\lambda \sin B + \frac{\mu}{12\rho^3}(\Delta\lambda)^3 \cos^2 B. \quad (104)$$

Назовем длину геодезической линии  $AC$  на черт. 14 через  $\frac{s}{2}$ , тогда в  $\triangle TAC$ ,

$$\sin \frac{\Delta\lambda}{2} = \frac{\sin \frac{s}{2N}}{\cos B}; \quad \sin \frac{s}{2N} = \left( \frac{\Delta\lambda}{2} - \frac{(\Delta\lambda)^3}{48} \right) \cos B,$$

или аналогично с выводом формул (102) и (103):

$$s = \frac{\Delta\lambda}{(2)} \cos B - \frac{(\Delta\lambda)^3}{(2)24\rho^3} \cos B \sin^2 B \quad (105)$$

(здесь  $\Delta\lambda$  — в секундах). В логарифмическом виде:

$$\log s = \log \frac{\Delta\lambda}{(2)} \cos B - \frac{\mu}{24\rho^3}(\Delta\lambda)^3 \sin^2 B. \quad (106)$$

Перейдем теперь к длине  $d$  на проекции геодезической линии или стягивающей ее хорды.

По формуле (56):

$$\log d - \log s = \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) - \frac{1}{6} \log m_\Delta,$$

или по формулам (74) и (92):

$$\log d - \log s = \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) - \frac{\mu}{12 \rho^2} (\Delta\lambda)^2 V^2 \cos^2 B \quad (107)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \log d &= \log \frac{\Delta\lambda}{(2)} \cos B + \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) \\ &- \frac{\mu}{12 \rho^2} (\Delta\lambda)^2 (1 + \eta^2) \cos^2 B - \frac{\mu}{24 \rho^2} (\Delta\lambda)^2 \sin^2 B \\ &= \log \frac{\Delta\lambda}{(2)} \cos B + \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) \\ &- \frac{\mu}{24 \rho^2} (\Delta\lambda)^2 - \frac{\mu}{24 \rho^2} (\Delta\lambda \cos B)^2 - \frac{\mu}{12 \rho^2} \eta^2 (\Delta\lambda \cos B)^2. \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Обозначая  $\Delta\lambda \cos B$  через  $\Delta k$  и подставляя вместо  $\frac{\mu}{24 \rho^2}$  его логарифм, получим вместо (104) и (108) следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \log \omega &= \log \frac{1}{2} \Delta\lambda \sin B + 2 \{ \bar{6},629 \} (\Delta k)^2 \\ \log d &= \log \frac{\Delta k}{(2)} \\ &+ \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) - \{ \bar{6},629 \} (\Delta\lambda)^2 - \{ \bar{6},629 \} (\Delta k)^2 \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

$\frac{\Delta k}{(2)}$  есть не что иное как  $\Delta Y$  — длина дуги параллели  $ADB$  (черт. 14).

Последний член формулы (108) отброшен, так как он при  $\Delta\lambda = 2000'' = 33'20''$  составляет при  $B = 35^\circ$  и  $\eta^2 = 0,0045$  всего одну единицу восьмого знака логарифма.

Последние члены в формулах (109) дают единицы седьмого знака логарифма.

Криволинейный дирекционный угол  $ACB$  из черт. 14 на проекции очевидно будет:

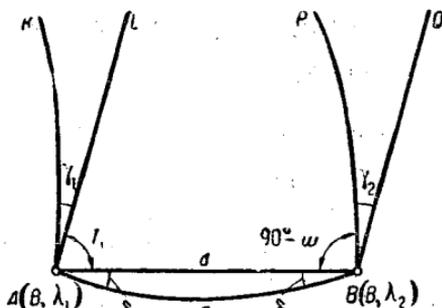
$$T_1 = 90^\circ - \gamma_1 - \omega \text{ и для } BSA \text{ будет } T_2 = 270^\circ - \gamma_2 + \omega. \quad (110)$$

Дальше, чтобы получить плоские координаты точки  $B$ , мы можем идти согласно формул (100) за исключением нахождения точного плоского расстояния  $d$ , которое уже имеется по формулам (109).

**Переход по параллели.** Пусть на черт. 15  $A$  и  $B$  имеют одинаковую широту  $B$ , нанесены они на проекции.  $LA$  и  $QB$ —линии, параллельные оси абсцисс,  $KA$  и  $PB$ —изображения меридианов, дуга  $ACB$ —изображение геодезической линии.

Даны плоские координаты точки  $A: x_1, y_1, \gamma_1$  и  $\log m_1$ , и географические обеих точек  $A$  и  $B: B, L_1$  и  $L_2$  или  $B, \lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Ищутся плоские координаты точки  $B: x_2, y_2, \gamma_2$  и  $\log m_2$ . Длину хорды  $AB$  обозначим через  $d$ .



Черт. 15.

По предыдущему имеем:  $\angle KACB = 90^\circ - \omega = \angle PBCA$  и еще следующие формулы:

- 1) 
$$\gamma_2 = 360^\circ - (d_1 + 180^\circ + \delta_2 + 90^\circ - \omega)$$

$$= \gamma_1 + 2\omega + \delta_1 - \delta_2;$$
- 2)  $\log m_2 = \{1,32336\} (3)k^2$ , где  $k = \lambda_2 \cos B$ ;
- 3)  $\log \Delta Y = \log \frac{\Delta k}{(2)}$ , где  $\Delta k = \Delta \lambda'' \cos B$ ,  

$$\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1;$$
- 4)  $\log d - \log \Delta Y = \frac{1}{2}(\log m_2 + \log m_1) - (8) - (9)$ ,  
 где (8) =  $\{6,629\} (\Delta \lambda)^2$   
 и (9) =  $\{6,629\} (\Delta \lambda^2)$ ;
- 5)  $\log 2\omega = \log \Delta \lambda \sin B + 2(9)$ ;
- 6)  $\delta_1 = \frac{1}{2R^2} (\gamma_1 + \omega) d' \left( y'_1 + \frac{1}{3} d' \right) = \delta_3 + \delta_4$ ;
- 7)  $-\delta_2 = \delta_1 + \delta_4$ ,  
 где  $\delta_3 = \{8,088\} d' y' (\gamma_1 + \omega)$  и  
 $\delta_4 = \{9,611\} d'^2 (\gamma_1 + \omega)$ ;

Формулы 6) и 7) выведены из соотношений

$$\Delta'x = d' \cos T_1 = \frac{1}{\rho} (\gamma_1 + \omega) d',$$

а  $\Delta'y$  принято равным  $d'$  в виду незначительности самого  $\delta_1$ ;  $\delta_4$  обычно очень мало;  $y'_1$  и  $d'$  выражено в километрах;  $d$  имеет свой знак, одинаковый с  $\Delta \lambda$ ;

$$\left. \begin{aligned} 8) \log \Delta x &= \log d + S + \log \psi, \text{ отн. } S \text{ см. формулу (2);} \\ 9) \Delta y &= d \cos \psi, \text{ где } \psi = \gamma_1 + \omega + \delta_1; \\ 10) x_2 &= x_1 + \Delta x; y_2 = y_1 + \Delta y; \\ 11) \gamma_2 &= \psi + \omega - \delta. \end{aligned} \right\} (111)$$

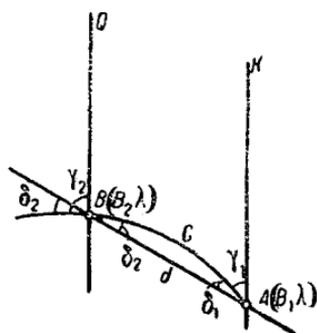
Ниже дан пример на такой переход.

**Переход по меридиану.** Приближенный дирекционный угол хорды меридиана равен  $360^\circ - \gamma$ , отсюда легко получают приближенные координаты ее конца, поправки за кривизну и истинный дирекционный угол этой хорды, а следовательно и приращение плоских координат;  $\log m$  конечной точки меридианального отрезка несколько отличается от  $\log m$  начальной точки, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \log m_1 - \log m_2 &= \{1,32336\} (3) \lambda^2 (\cos^2 B_1 - \cos^2 B_2) \\ &= 2 (\log m) \frac{\Delta B}{\rho} \operatorname{tg} B. \end{aligned} \right\} (112)$$

На черт. 16  $BCA$ —изображение отрезка меридиана с долготой  $\lambda$ ,  $BQ$  и  $AK$ —линии параллельные оси абсцисс,  $d$ —длина хорды.

Дано:  $x_1, y_1, \gamma_1, \log m_1, B_1, B_2$  и  $\lambda$ . Находится:  $x_2, y_2, \gamma_2$  и  $\log m_2$  на точке  $B$ .



Черт. 16.

**Формулы.** (113)

1)  $\log d = \log \frac{\Delta B}{(1)} + \log m$ , где  $\Delta B = B_2 - B_1$  (1) взято при средней широте  $B$ .

$$B = B_1 + \frac{1}{2} \Delta B = B_2 - \frac{1}{2} \Delta B;$$

$$\log m = \log m_1 - \Delta \log m;$$

$$\Delta \log m = \{6,686\} \Delta B \operatorname{tg} B \log m_1.$$

2)  $\delta_1 = \delta_3 - \delta_4 + \delta_5$ ;  $-\delta_2 = \delta_1 + \delta_5$ , где  $\delta_3 = (7) d' y$ ,

$$\delta_4 = \{14,473\} d' y_1^2 \gamma_1^2, \quad \delta_5 = \{9,611\} d'^2 \gamma_1^2.$$

$\delta_4$  и  $\delta_5$  обычно очень малы.

Значения для  $\delta_1$  и  $\delta_2$  получились из соотношений:

$$\Delta' x = d' \cos \gamma_1 = d' - \frac{d'}{2\rho^2} \gamma_1^2 \quad \text{и} \quad \Delta' y = \frac{d'}{\rho} \gamma_1,$$

таким образом

$$\delta_1 = \frac{\rho}{2R^2} \Delta'x \left( y'_1 + \frac{1}{2} \Delta'y \right) = (7) d'y' - \frac{1}{4\rho R^2} d'y'_1 \gamma_1^2 + \frac{1}{6R^2} d'^2 \gamma_1.$$

3)  $\Delta x = d \cos (\gamma_1 + \delta_1)$ ,  $d$  имеет свой знак, одинаковый с  $\Delta B$ .

4)  $-\Delta y d \sin (\gamma_1 + \delta_1)$ ;  $\log (-\Delta y) = \log d + S + \log (\gamma_1 + \delta_1)$ , относительно  $S$  см. формулу 2).

5)  $x_2 = x_1 + \Delta x$ ;  $y_2 = y_1 + \Delta y$ .

6)  $\log m_2 = \log m - \Delta \log m$  [ $\log m$  и  $\Delta \log m$  найдены выше в формуле 1)].

7)  $\gamma_2 = \gamma_1 + \delta_1 - \delta_2$ .

Дадим примеры одновременно на оба перехода.

Пример 6 см. на стр. 83—85 и пример 7 на стр. 86—89.

Приведенный способ, если географические координаты даны точно, дает более точное решение, чем способ решения обратной геодезической задачи по формулам (101). Плоское расстояние между двумя данными точками и простираение прямой, их соединяющей, можно уже получить по найденным плоским координатам, применяя обычные формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{и} \quad d = \frac{\Delta y}{\sin \alpha} = \frac{\Delta x}{\cos \alpha}$$

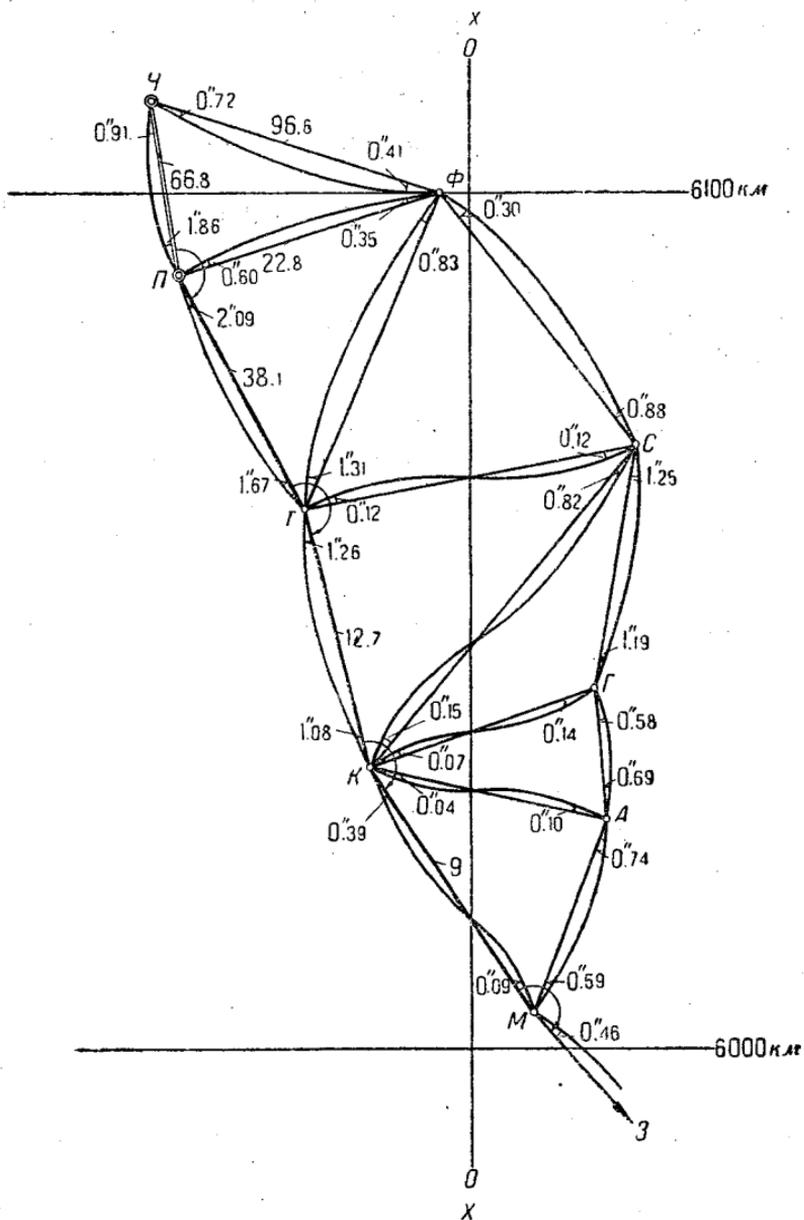
(см. ниже стр. 102, формуляр 16).

От плоских данных  $\alpha$  и  $d$  можно перейти к действительным длинам и к геодезическому азимуту на основании неоднократно приводившихся выше формул.

## § 16. Обработка на плоскости с непосредственно измеренными на земной поверхности углами и расстояниями.

На черт. 17 дан некоторый ряд треугольников, примкнувший к данным точкам  $П$ ,  $Ч$  и  $М$ . Кроме того в точке  $М$  взято направление на известную точку  $З$ .

Мы имеем плоские координаты точек  $Ч$ ,  $П$ ,  $М$  и  $З$ . Эти координаты могли быть получены из географических координат названных точек указанным выше способом. По плоским координатам точек  $Ч$  и  $П$  легко определяется дирекционный угол  $ПЧ$  и плоское расстояние  $ПЧ$ . Также по координатам  $М$  и  $З$  находится дирекционный угол  $МЗ$ . Таким образом можно считать, что нам дано (см. ниже стр. 90):



Черт. 17.

Нахождение приращений плоских координат передвижением по параллели и меридиану.

Формуляр 9. От 1) Васильевки к 2) Грузской. Пример 6.

Порядок вычисл.	Обозначения		Решение		
I	По параллели $B = 48^\circ 27' 07'', 7165$ Васильевки				
1		$\lambda_2$	—	$1^\circ 10' 06'', 354$	
2		$\lambda_1$	—	$1^\circ 20' 13'', 0505$	
3		$\Delta\lambda$	+	$10' 06'', 6965$	
4		$\Delta\lambda''$	+	$606,6965$	
5		$\lambda_2''$	—	$4\ 206,35$	
6		$\gamma_1$	—	$1^\circ 00' 02'', 228$	
23		$2\ \omega$		$454,053$	
24		$\gamma_1''$	—	$3\ 602,228$	
25		$\omega$		$227,026$	
26		$\gamma_1'' + \omega$	—	$3\ 375,202$	
51		$\gamma_1'' + \omega + \delta_1 = \psi''$	—	$3\ 375,153$	
52		$\psi$	—	$56' 15'', 153$	
53		$\psi + \omega - \delta_2 = \gamma_2$	—	$52' 28'', 080$	
27	18	$\log \lambda_2''$	$\log (8)$	$^n 3,62391$	$0,205$
28	17	$\log \cos B$	$2 \log \Delta\lambda$	$1,82168$	$5,576$
29	16	$\log k$	$\{ \bar{6},629 \}$	$^n 3,44559$	$\bar{6},629$
30	19	$2 \log k$	$2 \log \Delta k$	$1,89118$	$5,209$
31	20	$\log (3)$	$\log (9)$	$6,38582$	$1,838$
32	42	$\{ 1,32336 \}$	$\log \delta_2$	$\boxed{1,323361}$	$^n 3,330$
33	41	$\log \log m_2$	$2 \log d'$	$2,60036$	$2,191$
34	40	$\log m_2$	$\{ \bar{9},611 \}$	$398.4$	$\bar{9},611$
7	39	$\log m_1$	$\log (\gamma_1 + \omega)$	$521.5$	$3,528$
35	43	$\frac{1}{2} (\log m_2 + \log m_1)$	$\{ \bar{8},088 \}$	$459.9$	$\bar{8},088$
36	44	— (8) — (9)	$\log d_1'$	$- 1.6 - 0.7$	$1,096$
37	45	$\log d - \log \Delta Y$	$\log y_1'$	$457.6$	$^n 1,995$
	46		$\log \delta_3$		$2,707$
49	47	$\delta_3 + \delta_4 = \delta_1$	$\delta_3$	$+ 0,049$	$+ 0,051$
50	48	$\delta_1 + \delta_4 = -\delta_2$	$\delta_4$	$+ 0,047$	$- 0,002$
22		$\log 2\ \omega$		$2,657\ 1065$	
21		$2\ (9)$			$1.4$
11		$\log \sin B$		$\bar{1},874\ 1349$	
10		$\log \Delta\lambda''$		$1,782\ 9715$	
12		$\log \cos B$		$\bar{1},821\ 6742$	
13		$\log \Delta k$		$2,604\ 6457$	
14		$\log (2)$		$\bar{2},508\ 9683$	
15		$\log \Delta k - \log (2) = \log \Delta Y$		$4,095\ 6774$	

Порядок вычисл.	Обозначения	Решение	
56	$\log \Delta x$	$^n 2,309\ 5720$	
55	$\log \psi$	$^n 3,528\ 2934$	
54	$S$	$6,685\ 5554$	
38	$\log d$	$4,095\ 7232$	
57	$\log \cos \psi$	$1,999\ 9418$	
58	$\log \Delta y$	$4,095\ 6650$	
8	$x_1$	$5\ 369\ 018,94$	
59	$\log \Delta x$	$-203,973$	
61	$x_2$	$5\ 368\ 814,967$	
9	$y_1$	$-98\ 878,66$	
60	$\Delta y$	$+12\ 464\ 218$	
62	$y_2$	$-86\ 414,448$	
II По меридиану $\lambda = -1^\circ 10' 06'',354$ Грузской			
1	$B_2$	$48^\circ 35' 22'',752$	
2	$B_1$	$48^\circ 27' 07'',7165$	
3	$\Delta B$	$+ 08' 18'',0355$	
4	$\frac{1}{2} \Delta B$	$+ 4' 09'',018$	
5	$B_1 + \frac{1}{2} \Delta B = B$	$48^\circ 31' 16'',734$	
6	$\Delta B''$	$+ 498,0355$	
7	$\gamma_1$	$- 52' 28'',080$	
41	$\gamma_1''$	$- 3\ 148,080$	
42	$\gamma_1'' + \delta_1$	$- 3\ 151,451$	
43	$\gamma_1 + \delta_1 - \delta_2 = \gamma_2$	$- 52' 34'',825$	
8	$\log m_1$	$398.4$	$2,600$
19	$-\Delta \log m$	$- 1.1$	$0,053$
20	$\log m_1 - \Delta \log m = \log m$	$\{ 6,686 \}$	$6,686$
21	$\log m - \Delta \log m = \log m_2$	$\log \Delta B$	$2,697$
18		$\log \Delta \log m$	$0,035$
23	$\log (7)$	$\{ 9,611 \}$	$9,611$
24	$\log d'$	$2 \log a'$	$2,374$
25	$\log y_1'$	$\log \gamma_1''$	$^n 3,498$
26	$\log \delta_3$	$\log \delta_5$	$^n 3,483$
36	$\delta_3$	$\{ 14,473 \}$	$14,473$
37	$- \delta_4$	$\log d'$	$1,187$
38	$+ \delta_5$	$\log y_1'$	$- 0,003$
39	$\delta_3 - \delta_4 + \delta_5 = \delta_1$	$2 \log \gamma_1''$	$^n 1,937$
40	$\delta_1 + \delta_2 = \delta_2$	$\log \delta_4'$	$- 3,374$

Порядок вычисл.	Обозначения	Решение
11	$\log \Delta B''$	2,697 2603
12	$\log (1)$	2,510 2449
13	$\log \Delta B'' - \log (1)$	4,187 0154
22	$\log \frac{\Delta B}{(1)} + \log m = \log d$	4,187 0551
46	$\log \Delta x$	4,187 0045
45	$\log \cos (\gamma_1 + \delta_1)$	1,999 9494
44	$\log d$	4,187 0551
47	$S$	6,685 5580
48	$\log (\gamma_1'' + \delta_1)$	„3,498 5104
49	$\log (-\Delta y)$	„2,371 1235
9	$x_1$	5 368 814,967
50	$\Delta x$	+ 15 381,706
52	$x_2$	5 384 196,673
10	$y_1$	- 86 414,448
51	$\Delta y$	+ 235,030
53	$y_2$	- 86 179,418
Найдено:		
54	$x_2$	5 384 196,67
55	Для $y_2$	- 86 179,42
56	Грузской $\gamma_2$	- 52'34'',82
57	$\log m_2$	0.0000396.2

Примечания к примеру 6. В I: № 10 + № 12 = № 13; № 10 + № 11 + № 21 = № 22; № 16 + № 17 = № 18; № 16 + № 19 = № 20; № 39 + № 40 + № 41 = № 42; № 39 + № 43 + № 44 + № 45 = № 46; № 38 = № 15 + № 37; № 38 + № 54 + № 55 = № 56; № 38 + № 57 = № 58.

Во II: № 44 + № 45 = № 46; № 44 + № 47 + № 48 = № 49. В I и II  $d'$  и  $y'$  выражены в километрах,  $\log d' = \log d - 3$ ,  $\log y_1' = \log y_1 - 3$ .  $S$  берется внизу логарифмических таблиц, см. формулы (2).

При  $\gamma$ , не превышающем или немного превышающем  $1^\circ$ , и при  $d'$ , не превышающем 20 км,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  в I и во II будут меньше 0'',005 и поэтому могут быть опущены. Во II  $\delta_2$  может не вычисляться при всяком  $\gamma$ , если  $d'$  будет меньше 20 км.

## Формуляр 10.

По меридиану  $\lambda = -1^{\circ} 20' 13'',0505$  Васильевка

$B_2$			$48^{\circ} 35' 25'', 752$	
$B_1$			$48^{\circ} 27' 07'', 7165$	
$\Delta B$		+	$08' 18'', 0355$	
$\frac{1}{2} \Delta B$		+	$4' 09'', 018$	
$B_1 + \frac{1}{2} \Delta B = B$			$48^{\circ} 31' 16'', 734$	
$\Delta B''$			+ 498,0355	
$\gamma_1$		-	$1^{\circ} 00' 02'', 23$	
$\gamma_1''$			- 3 602,23	
$\gamma_1'' + \delta_1$			- 3 606,08	
$\gamma_1 + \delta_1$		-	$1^{\circ} 00' 06'', 08$	
$\gamma_1 + \delta_1 - \delta_2 = \gamma_2$		-	$1^{\circ} 00' 09'', 94$	
$\log m_1$	$\log \log m$		521.5	2,717
$-\Delta \log m$	$\log \operatorname{tg} B$		- 1.4	0,053
$\log m_1 - \Delta \log m = \log m$	$\{\bar{6},686\}$		520.1	$\bar{6},686$
$\log (7)$	$\log \Delta B''$		$\bar{3},40375$	2,697
$\log d'$	$\log \Delta \log m$		1,18707	0,153
$\log y_1'$	$\delta_3 = \delta_1$		${}_n 1,99510$	- 3,854
$\log \delta_3$	$= - \delta_2$		${}_n 0,58592$	- 3,86
$\log \Delta B''$			2,6972603	
$\log (1)$			$\bar{2},5102449$	
$\log \Delta B - \log (1)$			$\bar{4},1870154$	

По параллели  $B = 48^\circ 35' 25'',752$  Грузская

$\lambda_2$	$-1^\circ 10' 06'',354$
$\lambda_1$	$-1^\circ 20' 13'',0505$
$\Delta\lambda$	$+ 10' 06'',6965$
$\Delta\lambda''$	$+ 606,6965$
$\lambda_2''$	$- 4206,35$
$\gamma_1$	$-1^\circ 00' 09'',94$
$2\omega$	$+ 455,023$
$\gamma_1''$	$- 3 609,94$
$\omega$	$+ 227,51$
$\gamma_1'' + \omega$	$- 3 382,43$
$\gamma_1'' + \omega + \delta_1 = \psi$	$- 3 382,38$
$\psi$	$- 56' 22'',38$
$\psi + \omega - \delta_2 = \gamma_2''$	$- 3 154,82$
$\gamma_2$	$- 52' 34'',82$

$\log \lambda_2''$	$\log (8)$	3,62391	0,205
$\log \cos B$	$2 \log \Delta\gamma$	$\overline{1,82049}$	5,576
$\log k$	$\{ \overline{6,629} \}$	${}_n 3,44440$	$\overline{6,629}$
$2 \log k$	$2 \log \Delta k$	6,88880	5,207
(3)	$\log (9)$	6,38582	$\overline{1,836}$
$\{ 1,32336 \}$	$\log (\gamma_1 + \omega)$	1,32336	${}_n 3,52$
$\log \log m_2$	$\{ \overline{8,088} \}$	2,59798	$\overline{8,808}$
$\log m_2$	$\log d_1$	396.3	1,095
$\log m_1$	$\log y_1'$	518.7	${}_n 1,994$
$\frac{1}{2} (\log m_2 + \log m_1)$	$\log \delta_3$	457.5	$\overline{2,706}$
$-(8) - (9)$	$\delta_3 = \delta_1$	$-1.6 - 0.7$	$+ 0,05$
$\log d - \log \Delta Y$	$= - \delta_2$	455.2	$+ 0,05$

По меридиану  $\lambda = -1^{\circ}20'13'',0505$  Васильевка

$\frac{\log \Delta x}{\log \cos (\gamma_1 + \delta_1)}$	4,1870010
	1,9999336
$\log \frac{\Delta B}{(1)} + \log m = \log d$	4,1870674
S	6,68 5527
$\frac{\log (\gamma_1'' + \delta_1)}{\log (-\Delta y)}$	$\frac{3,5570354}{2,4296555}$
$x_1$	5 369 018,94
$\Delta x$	— 15 381,58
$x_2$	5 384 400,52
$y_1$	— 98 878,66
$\Delta y$	+ 268,940
$y_2$	— 98 609,72
$\log m - \Delta \log m = \log m_2$	0,0000518.7

Найдено

Для Грузской	$\left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ \gamma \\ \log m \end{array} \right.$	x	5 384 196,67
		y	— 86 179,42
		$\gamma$	— 52'34'',82
		$\log m$	0,0000396,3

Для контроля произведено перемещение сначала по меридиану, а затем по параллели.

По параллели  $B = 48^{\circ} 35' 25'',752$  Грузская

$2 \omega$	<u>2,6580336</u>
$2 (9)$	1.4
$\log \sin B$	<u>1,8750620</u>
$\log \Delta \lambda''$	2,7829715
$\log \cos B$	<u>1,8204881</u>
$\log \Delta k$	2,6034596
$\log (2)$	<u>2,5089649</u>
$\log \Delta k - \log (2) = \log - Y$	<u>4,0944947</u>
<u><math>\log \Delta x</math></u>	<u>2,3093180</u>
$\log \psi''$	3,5292224
$S$	<u>6,6855554</u>
$\log d$	4,0945402
$\log \cos \psi$	<u>1,9999416</u>
$\log \Delta y$	<u>4,0944818</u>
$x_1$	5 384 400,52
<u><math>\Delta x</math></u>	<u>— 203,853</u>
$x_2$	5 384 196,667
$y_1$	— 98 609,72
<u><math>\Delta y</math></u>	<u>+ 12 430,306</u>
$v_2$	— 86 179,414

Для точки Ч:  $x = 6\ 111\ 647,16$ ;  $y = -36\ 772,91$

„ „ П:  $x = 6\ 090\ 571,98$ ;  $y = -36\ 903,42$

„ „ М:  $x = 6\ 003\ 829,84$ ;  $y = +7\ 701,28$

Дир. угол ПЧ =  $352^\circ 14' 47'',69$ . Дир. угол МЗ =  $143^\circ 29' 52'',93$ .

$\log ПЧ = 4,3277600$  (плоское расст. в м).

Выпишем теперь данные измерения на местности (углы):

$\triangle ПЧФ$	$\angle П = 79^\circ 29' 20'',98$	$\triangle ПФТ$	$\angle П = 79^\circ 43' 42'',94$
	$\angle Ч = 63^\circ 47' 44'',85$		$\angle Ф = 49^\circ 32' 14'',61$
	$\angle Ф = 36^\circ 42' 54'',17$		$\angle Т = 50^\circ 44' 05'',28$

---

$$\Sigma = 180^\circ + 0'',00$$

---

$$\Sigma = 180^\circ + 2'',83$$

$\triangle ТФС$	$\angle Т = 56^\circ 58' 23'',72$	$\triangle ТСК$	$\angle Т = 87^\circ 31' 48'',99$
	$\angle Ф = 58^\circ 46' 47'',54$		$\angle С = 39^\circ 50' 53'',87$
	$\angle С = 64^\circ 14' 51'',84$		$\angle К = 52^\circ 37' 18'',51$

---

$$\Sigma = 180^\circ + 3'',10$$

---

$$\Sigma = 180^\circ + 1'',37$$

$\triangle КСГ$	$\angle К = 31^\circ 16' 41'',13$	$\triangle КГА$	$\angle К = 32^\circ 02' 38'',98$
	$\angle С = 30^\circ 51' 11'',97$		$\angle Г = 72^\circ 33' 38'',44$
	$\angle Г = 117^\circ 52' 09'',44$		$\angle А = 75^\circ 23' 43'',44$

---

$$\Sigma = 180^\circ + 2'',54$$

---

$$\Sigma = 180^\circ + 0'',56$$

---

$$\triangle КАМ$$

$\angle К = 43^\circ 25' 34'',44$
$\angle А = 84^\circ 23' 58'',48$
$\angle М = 52^\circ 10' 29'',53$

---

$$\Sigma = 180^\circ + 2'',45$$

От этих углов мы должны перейти к измеренным углам на плоскости проекции, т. е. к таким углам, которые получились бы, если бы мы, перенеся точки на плоскость проекции по правилам Гаусса-Крюгера, измерили эти углы на плоскости с теми же ошибками, с какими их измеряли на земной сфероидической поверхности. Для этого мы должны вычислить поправки за кривизну  $\delta$ . А для получения  $\delta$  нужно иметь приближенные координаты, к получению которых и перейдем, определяя попутно и  $\log m$ . Координаты вычисляются в км (см. стр. 91).

**А. Нахождение приближенных координат и логарифмов масштаба  $\log m$**  (см. формуляр 11).

Так же как по формуляру 11 получены координаты других точек:

точки С  $x = 6\ 070,25$ ;  $y = +18,91$ ;  $\log m = 0,0000019.0$

„ К  $x = 6\ 032,79$ ;  $y = -11,78$ ;  $\log m = 0,0000007.4$

„ Г  $x = 6\ 042,12$ ;  $y = +14,72$ ;  $\log m = 0,0000011.5$

„ А  $x = 6\ 026,72$ ;  $y = +15,25$ ;  $\log m = 0,6000012.4$

А. Нахождение приближенных координат и логарифмов масштаба,  $\log m$ .

Формуляр 11.

1	2	3	4	5	6	7	8
<i>A</i>	$x_A$ $\Delta x_A$	$y_A$ $\Delta y_A$	Пр. <i>AB</i> $\angle A$	$\log AB$ $\log \sin P$	$\log \Delta x_A$ $\log \cos \text{Пр. } AP$	$\log \Delta x_B$ $\log \cos \text{Пр. } BP$	$\log y$
<i>B</i>	$x = x_A + \Delta x_A$	$y = y_A + \Delta y_A$	Пр. <i>AP</i> Пр. <i>BA</i>	$\log \frac{AB}{\sin P}$	$\log AP$ $\log \sin \text{Пр. } AP$	$\log BP$ $\log \sin \text{Пр. } BP$	$2 \log y$ $\log (6)$
<i>P</i>	$x_B$ $\Delta x_B$	$y_B$ $\Delta y_B$	$\angle B$ Пр. <i>BP</i>	$\log \sin B$ $\log \sin A$ $\angle P$	$\log \Delta y_A$ $x$	$\log \Delta y_B$ $y$	$\log \log m + 7$ $10^7 \log m$
<i>П</i>	6 090,57 10,00	- 33,90 + 30,91	352° 14',8 79 29,3	1,32776 1,77658	1,00019 1,49611	1,04421 1,50038	10,55509
<i>Ч</i>	6 100,57 6 111,65	- 3,59 - 36,77	71 44,1 172 14,8	1,55118 1,95290	1,50408 1,97754	1,54383 1,97708	1,11018 2,72648
<i>Ф</i>	- 11,07 6 100,58	+ 33,18 - 3,59	63 47,7 108 27,1	1,99265 36° 42', 9	1,48162 6 100,58	1,52091 - 3,59	1,83666 0,7
<i>П</i>	6 090,57 - 27,56	- 33,90 + 14,99	71° 44',1 79 43,7	1,50408 1,88887	1,44024 1,94375	1,57473 1,96654	1,27692
<i>Ф</i>	6 063,01 6 100,58	- 18,91 - 3,59	151 27,8 251 44,1	1,61521 1,88128	1,49649 1,67918	1,60819 1,57728	2,55384 2,72651
<i>Т</i>	- 37,56 6 063,02	- 15,33 - 18,92	49 32,2 202 11,9	1,99298 50° 44', 1	1,17567 6 063,02	1,18547 - 18,92	1,28035 19,1
и т. д.							

Примечание. Пр.—означает простирание, т. е. дирекционный угол.

Координаты точки  $M$  даны:  $x = 6\,003,83$ ;  $y = +7,70$ ;  $\log m = 0,0000003.2$ .

Для точки  $Ч$   $\log m = 0,0000072.0$  и для точки  $П$   $\log m = 0,0000061.2$ .

**Объяснение к формуляру 11.** В столбце 1 дается название точек:  $A$  и  $B$  — данные точки,  $P$  — искомая точка,  $A$ ,  $B$  и  $P$  выбираются по движению часовой стрелки; так например в  $\triangle ПЧФ$  на черт. 17 исходными точками являются  $П$  и  $Ч$ , и роль  $A$  должна играть точка  $П$ , а роль  $B$  — точка  $Ч$ . Дирекционный угол  $AB$  дается, углы  $A$ ,  $B$  и  $P$  даются, и если соблюдено вышеуказанное условие, то всегда дирекционный угол  $AP =$  дирекц. уг.  $AB + \sphericalangle A$  и дир. угол  $BP =$  дир. уг.  $BA - \sphericalangle B$ , дир. угол  $BA =$  дир. уг.  $AB + 180^\circ$ .

Дальше в столбце 5 идет обычное решение треугольника по стороне и двум прилежащим углам.

$$\log AP = \log \frac{AB}{\sin P} + \log \sin B; \quad \log BP = \log \frac{AB}{\sin P} + \log \sin A.$$

В столбцах 6 и 7 находятся приращения координат, во 2 и 3 получаются координаты точки  $P$ , и наконец в 8 столбце находится логарифм масштаба.  $\text{Log } (6)$  берется из табл. V приложения при полученной абсциссе  $x$  точки  $P$ . Все можно было вычислять четырехзначными логарифмами.

## **В. Нахождение поправок за кривизну и поправок логарифмов сторон.**

В формуляре 12 показано, как мы находим для всех сторон поправки  $\delta$  и поправки логарифмов сторон,  $\log d - \log s$ . Все эти величины помещены на черт. 17,  $\log d - \log s$  даны, как обычно, в единицах седьмого знака и написаны у каждой стороны. Весьма целесообразно, как на черт. 17, чертить изображения геодезической линии в виде дуг; это, давая наглядность, гарантирует безошибочное применение поправок  $\delta$  в смысле их знака. Нужно следить только, чтобы выпуклость дуг была направлена в соответствующую сторону, на это в своем месте уже указывалось выше (стр. 18). Если к стороне восстановить перпендикуляр, то дуга помещается в противоположную сторону от пересечения этого перпендикуляра с осью абсцисс. Здесь следует отметить расположение дуг, пересекающих ось абсцисс. Они в тех хордах, у которых части, лежащие по разные стороны оси абсцисс, больше  $\frac{1}{3}$  всей хорды, располагаются с двух сторон хорды, как например для сторон:  $ТС$ ,  $КС$ ,  $КГ$ ,  $КА$ , и  $КМ$ . У тех же хорд, у которых отделяемая осью абсцисс часть меньше  $\frac{1}{3}$  всей длины, дуга помещается с одной стороны, отвечающей большей части, как например для стороны  $ФС$ .

В. Нахождение поправок за кривизну и поправок логарифмов сторон.

Формуляр 12.

1	2	3	4	5	6	7
A	$x_A$ $y_A$	$x_B$ $y_B$	$\Delta y = y_B - y_A$ $\frac{1}{3} \Delta y$	$\Delta x = x_B - x_A$ $\log \Delta x$	$\log \Delta x$ (7) $\log (y_A + \frac{1}{3} \Delta y)$	$\log (7) \Delta x$ $\log (y_A + \frac{2}{3} \Delta y)$
B	$\log m_A$ $\frac{1}{2}(\log m_A + \log m_B)$	$\log m_B$ $\tau$	$y_A + \frac{1}{3} \Delta y$ $y_A + \frac{2}{3} \Delta y^*$	$\log (7)$ $\log d - \log s$	$\log \delta_{AB}$ $\delta_{AB}$	$\log (-\delta_{BA})$ $\delta_{BA}$
Червева, Ч	6 111,65	6 090,57	+ 2,87	- 21,08	$\bar{n}2,72699$	$\bar{n}2,72699$
	- 36,77	- 33,90	+ 0,96	$n1,32387$	$n1,55400$	$n1,54220$
	72.0	61.2	- 35,81	$\bar{3},40312$	0,28099	0,26919
Панфиловская, П	66.6	0.1	- 34,85	66,5	+ 1'',91	- 1'',86
Ч	6 111,65	6 100,58	+ 33,18	- 11,07	$\bar{n}2,4472$	$\bar{n}2,4472$
	- 36,77	- 3,59	+ 11,06	$n1,0441$	$n1,4101$	$n1,1658$
	72.0	0.7	- 25,71	$\bar{3},4031$	$\bar{n}1,8573$	$\bar{1},6130$
Ф	36.3	9.8	- 14,65	26,5	+ 0'',72	- 0'',41
И т. д.						

\*  $y_A + \frac{2}{3} \Delta y = (y_A + \frac{1}{3} \Delta y) + \frac{1}{3} \Delta y$ .

С. Получение плоских углов и предварительное решение треугольников на плоскости.  
 Формуляр 13.

1	2	3	4	5	6	7
<i>P</i>	$\angle P_K$	Поправки	$\angle P_{II}$	$\angle P$	$\log \sin P$	$\log AB$
<i>A</i>	$\angle A_K$	за кривизну	$\angle A_{II}$	$\angle A$	$\log \sin A$	$\log BP$
<i>B</i>	$\angle B_K$	$\epsilon$	$\angle B_{II}$	$\angle B$	$\log \sin B$	$\log AP$
	$v_K$		$v_{II}$	$v = 0$	$\log \frac{AB}{\sin P}$	
	о ' "	"	"	"		
Фоминихинский, Ф	36 42 54,17	+0,41+0,35=+0,76	54,93	55,50	$\overline{1,7765856}$	4,3277600
Панфиловская, П	79 29 20,98	-1,86+0,60=-1,26	19,72	20,28	—	—
Червева, Ч	63 47 44,85 + 0,00	-1,91+0,72=-1,19 1,69	43,66 - 1,69	44,22 0,00	$\overline{1,9529012}$ 4,5511744	4,5040756
<i>T</i>	50 44 05,28	-1,67+1,31=-0,36	03,92	04,81	$\overline{1,8888663}$	4,5040756
<i>II</i>	79 43 42,94	-0,60-2,02=-2,62	40,32	40,21	$\overline{1,9929827}$	4,6081920
<i>Ф</i>	49 32 14,61 + 2,83	-0,35+0,93=+0,48 2,50	15,09 + 0,33	14,98 0,00	$\overline{1,8812881}$ 4,6152093	4,4964974
<i>C</i>	64 14 51,84	-0,12-0,88=-1,00	50,84	50,92	$\overline{1,9545701}$	4,6081920
<i>T</i>	56 58 23,72	-1,31+0,12=-1,19	22,53	22,60	—	—
<i>Ф</i>	58 46 47,54 + 3,10	-0,33-0,30=-1,13 3,32	46,41 - 0,22	46,48 0,00	$\overline{1,9320573}$ 4,6536219	4,5856792
<i>K</i>	52 37 18,51	-1,08+0,15=-0,93	17,58	18,12	$\overline{1,9001730}$	4,5856792
<i>T</i>	87 31 48,99	-0,12-1,26=-1,38	47,61	48,16	$\overline{1,9995964}$	4,6851026
<i>C</i>	39 50 53,87 + 1,37	+0,12-0,82=-0,70 3,01	53,17 - 1,64	53,72 0,00	$\overline{1,8066931}$ 4,6855062	4,4921993
<i>Г</i>	117 52 09,44	-0,14-1,15=-1,29	08,15	07,90	$\overline{1,9464620}$	4,6851026
<i>K</i>	31 16 41,13	-0,15+0,07=-0,08	41,05	40,80	—	—
<i>C</i>	30 51 11,97 + 2,54	+0,82-1,25=-0,43 1,80	11,54 + 0,74	11,30 0,00	$\overline{1,7099812}$ 4,7386406	4,4486218
<i>A</i>	75 23 43,44	+0,10-0,59=-0,49	42,95	43,01	$\overline{1,9857355}$	4,4486218
<i>K</i>	32 02 38,98	-0,07-0,04=-0,11	38,87	38,93	—	—
<i>Г</i>	72 33 38,44 + 0,66	+0,14-0,58=-0,44 1,04	38,00 - 0,18	38,06 0,00	$\overline{1,9795640}$ 4,4628863	4,4424503
<i>M</i>	52 10 29,53	+0,09-0,59=-0,50	29,03	28,77	$\overline{1,8975632}$	4,4424503
<i>K</i>	43 25 34,44	+0,04-0,39=-0,35	34,09	33,84	$\overline{1,8372209}$	4,3821080
<i>A</i>	84 23 58,48 + 2,45	-0,10-0,74=-0,84 1,69	57,64 + 0,76	57,39 0,00	$\overline{1,9979218}$ 4,5448871	4,5428089

**Объяснение к формуляру 12.**  $\tau$  находится в табл. III приложения по  $\Delta u$ .  $\log(7)$  находится в табл. VI приложения при среднем

$$x = \frac{1}{2} (x_A + x_B).$$

$\log d - \log s = \frac{1}{2} (\log m_A + \log m_B) - \tau$  и выражено в единицах седьмого знака.  $d$  — длина хорды на проекции,  $s$  — длина стороны на местности, приведенная к уровню моря. Все вычисление достаточно вести четырехзначными логарифмами, как это сделано в примере для стороны ЧФ.

Имея поправки  $\delta$ , легко перейти от измеренных углов на местности к углам между хордами на проекции, т. е. от углов между дугами на черт. 17 к углам между хордами. Проекция конформная, углы между дугами равны действительным углам на местности. По черт. 17, где дуги начерчены и проставлены  $\delta$ , легко сообразить, с каким знаком следует вводить поправки направлений. Так в  $\Delta$  ЧФП: прямолинейный угол  $P_{II}$  = криволинейному углу  $P_k$  (измер. на местности) —  $1'',86 + 0'',60$ .

В формуляре 13 приведены эти прямолинейные углы для всех треугольников. Мы называем их измеренные плоские углы. В формуляре 13 кроме того дано решение треугольников на плоскости проекций с распределением невязки углов в каждом треугольнике поровну на каждый угол. Этим мы определяем наиболее вероятное значение логарифмов сторон ПТ, ТК и КМ, которые затем войдут в уравнивание полигона ЧПТКМ.

**Объяснение к формуляру 13.**  $P$  — искомая точка,  $A$  и  $B$  — данные точки (дан логарифм стороны  $AB$ ).

$P_k$ ,  $A_k$  и  $B_k$  — углы, измеренные на местности, равные криволинейным углам на плоскости.

$P_{II}$ ,  $A_{II}$  и  $B_{II}$  — измеренные плоские углы (углы между хордами на проекции).

$\epsilon$  — сферический избыток = минус сумме всех поправок  $\delta$ , входящих в данный треугольник.

$$v_k = P_k + A_k + B_k - 180^\circ; \quad v_{II} = P_{II} + A_{II} + B_{II} - 180^\circ;$$

$$v = A + B + P - 180^\circ = 0.$$

$P$ ,  $A$  и  $B$  — предварительно уравненные плоские углы:

$$\text{Угол } P = \angle P_{II} - \frac{1}{3} v_{II}; \quad \angle A = \angle A_{II} - \frac{1}{3} v_{II}$$

$$\text{и} \quad \angle B = \angle B_{II} - \frac{1}{3} v_{II}.$$

Таким образом найдены логарифмы сторон полигона *ПТКМ*:

$$\log PT = 4,496\ 4974, \quad \log TK = 4,492\ 1993$$

и

$$\log KM = 4,542\ 8089,$$

кроме того из плоских измеренных углов мы имеем углы этого полигона:

$$\begin{aligned} \angle ЧПТ &= 159^\circ 13' 00'',04; & \angle ПТК &= 195^\circ 14' 15'',06; \\ \angle ТКМ &= 159^\circ 22' 11'',59 & \text{и} & \angle КМЗ = 177^\circ 25' 39'',24. \end{aligned}$$

Вычислим по этим углам дирекционный угол *МЗ*, исходя из данного дирекционного угла *ПЧ* =  $352^\circ 14' 47'',69$ .

Дир. угол *ПТ* =  $352^\circ 14' 47'',69 + 159^\circ 13' 00'',04 = 151^\circ 27' 47'',73$ .

Дир. угол *ТК* =  $151^\circ 27' 47'',73 - 180^\circ + 195^\circ 14' 15'',06 = 166^\circ 42' 02'',79$ .

Дир. угол *КМ* =  $166^\circ 42' 02'',79 - 180^\circ + 159^\circ 22' 11'',59 = 146^\circ 04' 14'',38$ .

Дир. угол *МЗ* =  $146^\circ 04' 14'',38 - 180^\circ + 177^\circ 25' 39'',24 = 143^\circ 29' 53'',62$ .

Сравнив последний дирекционный угол с данным *МЗ* =  $143^\circ 29' 55'',93$ , получим невязку  $55'',93 - 53'',62 = 2'',31$ , которую распределим поровну на четыре угла полигона, увеличив их на  $\frac{2'',31}{4}$ .

В соответствии с этим вычислим приращения координат и координаты полигона, найдем затем невязку в координатах и, уравнив ее пропорционально длинам сторон, получим наконец окончательные координаты точек *Т* и *К*. Воспользуемся данным случаем для примера вычисления и уравнивания на плоскости полигона с достаточно длинными сторонами.

Предположим, что нами измерены непосредственно на местности стороны *ПТ*, *ТК* и *КМ* и логарифмы этих сторон, приведенные к уровню моря, равны числам, найденным и приведенным выше (формуляр 13).

Даны координаты *П* и *М* и прямолинейные дирекционные углы *ПЧ* и *МЗ*, и измерены на местности углы: *ЧПТ*, *ПТК*, *ТКМ* и *КМЗ* (черт. 17).

Так же, как и выше, мы должны от измеренных величин на местности перейти на плоскость проекции, для чего должны найти приближенные координаты всех точек полигона.

**Пример на вставку полигона между двумя точками с примычными углами.** Даны две точки, их географические или плоские координаты и между ними вставляется полигон с измерен-

ными или вычисленными на сфероиде сторонами, причем на данных точках также измеряются примычные углы по отношению к известным направлениям. Если мы имеем дело с географическими координатами и истинными азимутами данных направлений, всегда можно по предыдущим параграфам перейти к плоским координатам и дирекционным углам, найдя сближение меридиана и поправку за кривизну на данной точке данного направления. Так на черт. 17 нам могли быть даны истинные азимуты  $ПЧ$  и  $МЗ$ .

Так или иначе можно считать, что мы имеем исходные плоские координаты и дирекционные углы.

Дано (черт. 17):

Координаты точки  $П$ :  $x = 6\ 090\ 571,98$  м,  $y = -33\ 903,42$  м,  
 $10^7 \log m = 61.2$ .

Координаты точки  $М$ :  $x = 6\ 003\ 829,84$  м,  $y = +7\ 701,28$  м,  
 $10^7 \log m = 3.2$ .

Плоский дирекционный угол  $ПЧ = 352^\circ 14' 47'',69$  и дирекционный угол  $МЗ = 143^\circ 29' 56'',93$ .

$\delta_{ПЧ} = -1'',86$  и  $\delta_{МЗ} = -0'',46$ .

Измерены на местности:

$\angle ЧПТ = 159^\circ 13' 03'',92$ ,  $\angle ПТК = 195^\circ 14' 17'',99$ ,  $\angle ТКМ = 159^\circ 22' 13'',06$  и  $\angle КМЗ = 177^\circ 25' 38'',69$  и стороны:

$ПТ = 31\ 369,49$  м,  $ТК = 31\ 059,74$  м и  $КМ = 34\ 898,66$  м.

**Объяснение к формуляру 14.** (6) берется из табл. IV приложения по  $x$ ,  $\tau$  берется из табл. III по  $\Delta y$ .

(7) берется из табл. V по среднему  $x$  данной стороны.

$\beta$  — углы излома полигона, слева по ходу лежащие.

$\alpha$  — дирекционные углы:  $\alpha_n = \alpha_{n-1} \pm 180 + \beta_n$ .

$d$  — расстояния (длина сторон в километрах).

$\delta_{пр}$  и  $\delta_{обр}$  — прямые и обратные поправки за кривизну.

$$\log \delta_{пр} = \log \left( y + \frac{1}{3} \Delta y \right) + \log \Delta x + \log (7);$$

$$\log (-\delta_{обр}) = \log \Delta x + \log (7) + \log \left( y + \frac{2}{3} \Delta y \right).$$

$$v + \frac{2}{3} \Delta y = \left( y + \frac{1}{3} \Delta y \right) + \frac{1}{3} \Delta y.$$

$\delta$  при полигонах обычно можно не вычислять: оно бывает очень мало.

$$\log d - \log s = \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2) - \tau;$$

$$\log \log m = 2 \log y + \log (6).$$

**Объяснение к формуляру 15.**  $\beta_k$  — углы излома полигона, слева по ходу лежащие, измеренные на местности и равные криволинейным углам на проекции.

**D. Вычисление приближенных координат, логарифмов масштаба, поправок  
за кривизну и поправок логарифмов сторон полигона.**

Формуляр 14.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Точки	$\beta$  $d$	$\alpha$ $\delta_{np}$ $\delta_{обп}$ $\log d - \log s$	$\log \cos \alpha$ $\log d$ $\log \sin \alpha$ $\log \Delta y$	$\log (y + \frac{1}{3}\Delta y)$ $\log \Delta x$ $\log (7)$ $\log (y + \frac{2}{3}\Delta y)$	$\log \delta_{np}$ $\log (-\delta_{обп})$ $\frac{1}{2}(\log m_1 + \log m_2)$ $\tau$	$y$ $\frac{1}{3}\Delta y$ $y + \frac{1}{3}\Delta y$ $\Delta y$	$x$ $y + \frac{2}{3}\Delta y$ $\log y$ $\Delta x$	$\log m$ $2 \log y$ $\log (6)$ $\log \log m$
Ч		172° 14', 8 $\delta_{обп} = -1'', 86$						
П	159° 13', 0	151° 27', 8 + 2'', 02	$\bar{n}1,94375$ $\bar{n}1,49649$	$n1,46090$ $n1,44024$	0,30428 0,22178	- 33,90 + 5,00	6 090,57 - 23,90	61.2
	31,36 км	- 1,67 38,1	$\bar{n}1,67918$ $\bar{n}1,17567$	$n3,40314$ $n1,37840$	40.1 2.0	- 28,90 + 14,99	- 27,56	
Т	195° 14', 3	166° 42', 1 + 1'', 26	$\bar{n}1,98819$ $\bar{n}1,49219$	$n1,21827$ $n1,48038$	0,10181 0,03430	- 18,91 + 2,38	6 063,01 - 14,15	19.0 2,55338
	31,06	- 1,08 12,7	$\bar{n}1,36177$ $\bar{n}0,85396$	$n3,40316$ $n1,15076$	13.2 0.5	- 16,53 + 7,14	$n1,27669$ - 30,23	2,72651 1,27989
К	159° 22', 2	146° 04', 3 + 0'', 39	$\bar{n}1,91894$ $\bar{n}1,54281$	$n0,72263$ $n1,46175$	$\bar{n}1,58757$ $\bar{n}2,94773$	- 11,77 + 6,49	6 032,78 + 1,21	7.4 2,14146
	34,90	+ 0,09 1,9	$\bar{n}1,74675$ $\bar{n}1,28956$	$n3,40319$ $n0,08279$	5.3 3.4	- 5,28 + 19,48	$n1,07078$ - 28,96	2,72653 0,86799
М	177° 25', 7	143° 30', 0 Дано: 29,9				+ 7,71 Дано: 7,70	6 003,82 3,83	
		+ 0,1 $\delta_{np} = -0'', 46$				+ 0,01	- 0,01	3.2
З								

Е. Вычисление плоских координат и уравнение их.

Формуляр 15.

1	2	3	4	5	6	7	8
Точки	$\beta_K$ Поправки $\delta$ $\beta_{II}$ (секунды)	$\alpha_{II}$ Распред. невязки $\alpha$ (секунды)	$s$ $\log s$ $\log d - \log s$	$\log d$ $\log \cos \alpha$ $\frac{\log d}{\log \Delta x}$	$\log d$ $\log \sin \alpha$ $\frac{\log d}{\log \Delta y}$	$\Delta x$ Распред. невязки $x$	$\Delta y$ Распред. невязки $y$
У		172° 14' 47",69					
П	159° 13' 03",92 - 1",86 - 2",02 = - 3",88 00,04	151° 27' 47",73 + 0,58 48,31	31 368,49 4,4964936	4,4964974 $n\bar{1},9437479$	4,4964974 $\bar{1},6791732$	6 090 571,98	- 33 903,42
Т	195° 14' 17",99 - 1,67 - 1,26 = - 2,93 15,06	166° 42' 02",79 0,58 × 2 = + 1,16 03,95	31 059,74 4,4921980	4,4921993 $n\bar{1},9881946$	4,4921993 $\bar{1},3617866$	- 27 557,85 - 0,28 6 063 013,85	+ 14 985,48 - 1,51 - 18 919,45
К	150° 22' 13",06 - 1,08 - 0,39 = - 1,47 11,59	146° 04' 14",38 0,58 × 3 = + 1,74 16,12	4 898,66 4,5428087	4,5428089 $n\bar{1},9183375$	4,5428089 $\bar{1},7467610$	- 30 226,92 - 0,27 6 032 786,66	+ 7 144,73 - 1,49 - 11 776,21
М	177° 25' 38",69 + 0,09 + 0,46 = + 0,55 39,24	143° 29' 53",62 + 2,31 55,93 Дано:	Периметр = 97,4 км		Дано: $\Sigma \Delta x$ и $\Sigma \Delta y$	- 28 956,52 - 0,30 6 003 829,84	+ 19 479,14 - 1,65 + 7 701,28
З		2,31 : 4 = 0,58		Разность данных коорд.		- 86 741,29 Невязка + 0,85 - 86 742,14	+ 41 609,35 + 4,65 + 41 604,70

Поправка на 1 км: - 0,0087

- 0,0477

$\delta$  — поправки за кривизну, берутся из предшествующего решения (формуляр 14) и черт. 17.

$\beta_n$  — измеренные плоские углы.

$\alpha_n$  — неуровненные дирекционные углы хорд:

$$(\alpha_n)_n = (\alpha_n)_{n-1} + 180^\circ + \beta_n.$$

$\alpha$  — урavnненные дирекционные углы хорд.

$s$  — расстояния на местности, приведенные к уровню моря.

$d$  — расстояния на проекции;  $\log d$  —  $\log s$  взяты из формуляра 14.

Невязка координат распределялась пропорционально длинам сторон.

Данный пример взят из Кузнецкой триангуляции, из сети треугольников выделен небольшой ряд и урavnнен здесь отдельно приближенным способом. Строгое урavnнение совместно всей сети дало для координат точек  $T$  и  $K$  несколько иные значения, отличающиеся от найденных в формуляре 15 на следующие величины:

$$\text{для } T \dots \delta x = -0,28 \text{ м, } \delta y = -0,15 \text{ м;}$$

$$\text{для } K \dots \delta x = -0,30 \text{ м, } \delta y = +0,12 \text{ м.}$$

Этот пример может пригодиться для полигонального урavnнения триангуляции. Для простых же полигонов с короткими сторонами поправки  $\delta$  отпадут как незначительные по величине по сравнению с точностью измерения углов полигона. Останутся только поправки логарифмов сторон  $\log d - \log s$ .

Дальше координаты точек  $\Phi$ ,  $C$ ,  $\Gamma$  и  $A$  можно получать путем урavnнения засечек с определенных уже точек. Вставим для примера точку  $\Phi$ .

**Пример на вставку точки прямыми засечками.** Даны (черт. 17) координаты точек  $Ч$ ,  $П$  и  $T$  и измерены с них углы на точку  $\Phi$ , требуется найти плоские координаты точки  $\Phi$  в системе Гаусса-Крюгера. Если мы имеем географические координаты точек  $Ч$ ,  $П$  и  $T$ , то должны прежде всего получить плоские координаты этих точек по способам, указанным выше, затем уже решать поставленную задачу. В данном примере будем считать, что плоские координаты данных точек уже имеются или найдены.

Дано: коорд. точки  $Ч$ :  $x = 6\ 111\ 647,16$ ,  $y = -36\ 772,91, 10^7$   
 $\log m = 72,0$ ;

коорд. точки  $П$ :  $x = 6\ 090\ 571,98$ ,  $y = -33\ 903,42, 10^7$   
 $\log m = 61,2$ ;

коорд. точки  $T$ :  $x = 6\ 063\ 013,85$ ,  $y = -18\ 919,45, 10^7$   
 $\log m = 19,0$ .

Измерено на местности:  $\angle \Phi Ч П = 63^\circ 47' 44'', 85$

(черт. 17)  $\angle Ч П \Phi = 79^\circ 29' 20'', 98$

$\angle \Phi П Т = 79^\circ 43' 42'', 94$

$\angle П Т \Phi = 50^\circ 44' 05'', 28$

Ф. Нахождение плоских дирекционных углов и расстояний между точками заданными  
 Формуляр. 16. плоскими прямоугольными координатами.

1	2	3	4	5	6	7
Начальная точка	$x_k$	$y_k$	$\log (\Delta x + \Delta y)$	$\log \Delta y$	$\log \Delta y$	$\log \Delta x$
Конечная точка	$x_n$	$y_n$	$\log (\Delta x - \Delta y)$	$\log \Delta x$	$\log \sin (\alpha)$	$\log \cos (\alpha)$
	$x_k - x_n = \Delta x$ $\Delta x - \Delta y$	$y_k - y_n = \Delta y$ $\Delta x + \Delta y$	$\log \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha)$ $(45^\circ + \alpha)$	$\log \operatorname{tg} \alpha$ $(\alpha)$	$\operatorname{tg} d$ $\alpha$	$\log d$ $\log d$
П	6 111 647,16 6 090 571,98	- 36 772,91 - 33 903,42	4,2602071 4,3792088	$^n$ 3,4578047 4,3237713	3,4578047 $\bar{1}$ ,1300443	4,3237713 $\bar{1}$ ,9960113
	+ 21 075,18 + 23 944,67	- 2 869,49 + 18 205,69	$\bar{1}$ ,8809983 37°14'47'',69	$\bar{1}$ ,1340334 7°45'12'',31	4,3277604 352°14'47'',69	4,3277600 4,3277600
П	6 063 013,85 6 090 571,98	- 18 919,45 - 33 903,42	$^n$ 4,0994790 $^n$ 4,6288189	4,1756269 $^n$ 4,4402498	4,1756269 $\bar{1}$ ,6791359	4,4402498 $\bar{1}$ ,9437588
	- 27 558,13 - 42 542,10	+ 14 983,97 - 12 574,16	1,4706601 16°27'57'',92	$^n$ 1,7353771 28°32'02'',07	4,4964910 151°27'57'',92	4,4964910 4,4964910
	и т. д.					

Прежде всего следует найти плоские дирекционные углы и расстояния между данными точками (см. формуляр 16).

**Объяснение к формуляру 16.** Столбец 4 введен для проверки, в нем используется известная формула:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y},$$

в то время как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{и} \quad d = \frac{\Delta y}{\sin \alpha} = \frac{\Delta x}{\cos \alpha} = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2}.$$

$(45^\circ \mp \alpha)$  и  $(\alpha)$  — острые неприведенные углы, находимые непосредственно в таблицах логарифмов.

Далее следует вычислить поправки за кривизну и попутно  $\log d - \log s$ , это надлежит сделать по формуляру 12 на стр. 93, найдя предварительно приближенные координаты по формуляру 11, стр. 91. Для сокращения все это вычисление не приводится, результаты его даны на черт. 17.

Получим теперь прямолинейные плоские дирекционные углы с точек  $Ч$ ,  $П$  и  $Т$  на искомую точку  $\Phi$  из данных измеренных углов на местности, т. е. по криволинейным углам на проекции (см. данные на этой же странице):

Дир. уг.  $Ч\Phi = 172^\circ 14' 47'', 69 - (63^\circ 47' 44'', 85 - 1'', 91 + 0'', 72) = 108^\circ 27' 04'', 03$  (черт. 17).

”  $Т\Phi = 331^\circ 27' 57'', 92 + (50^\circ 44' 05'', 28 - 1'', 67 + 1'', 31) = 22^\circ 12' 02'', 84$ .

”  $П\Phi = 352^\circ 14' 47'', 69 + (79^\circ 29' 20'', 98 - 1'', 86 - 0'', 60) = 71^\circ 44' 06'', 21$  из дир. уг.  $ПЧ$  и  $\angle ЧП\Phi$ .

”  $П\Phi = 151^\circ 27' 57'', 92 - (79^\circ 43' 42'', 94 - 2'', 02 + 0'', 60) = 71^\circ 44' 16'', 40$  из дир. уг.  $ПТ$  и  $\angle \Phi ПТ$ .

Как видим, для дир. угла  $П\Phi$  получилось два значения, берем из них среднее:  $71^\circ 44' 11'', 30$ . (Мы считаем, что углы при точке  $\Phi$  нам не даны — они были использованы при нахождении сторон форм. 13).

**Объяснение к формуляру 17.** Вершины треугольника помещены по движению часовой стрелки, начиная с искомой точки  $P$ ;  $\angle P =$  дир. уг.  $BP -$  дир. уг.  $AP$ ;  $\angle A =$  дир. уг.  $AP -$  дир. уг.  $AB$ ;  $\angle B =$  дир. уг.  $BA -$  дир. уг.  $BP$ . Сумма углов  $A + B + P = \Sigma$  должна равняться  $180^\circ$ .

Для данного случая достаточно было определить логарифм общей стороны  $П\Phi$ , поэтому в формуляре 17 не все заполнено.

Как видим,  $\log П\Phi$  из обоих треугольников разошелся на 17 единиц седьмого знака. Это позволяет нам построить фигуру погрешности при точке  $\Phi$ .

Г. Предварительное решение треугольников на проекции.

Формуляр 17.

1	2	3	4	5
<i>P</i>	Дир. уг. <i>AB</i>	$\angle P$	$\log \sin P$	$\log AB$
<i>A</i>	" " <i>AP</i>	$\angle A$	$\log \sin A$	$\log BP$
<i>B</i>	" " <i>BP</i>	$\angle B$	$\log \sin B$	$\log AP$
(По час. стрелке)	" " <i>BA</i>	$\Sigma$	$\log \frac{AB}{\sin P}$	
<i>Ф</i>	352° 14' 47'', 69	36° 42' 52'', 73	$\bar{1},7765778$	4,3277600
<i>П</i>	71° 44' 11'', 30	79° 29' 23'', 61		
<i>Ч</i>	108° 27' 04'', 03	63° 47' 43'', 66	$\bar{1},9529006$	4,5040828
	172° 14' 47'', 69	180° 00' 00'', 00	4,5511822	
<i>Ф</i>	331° 27' 57'', 92	49° 32' 08'', 46	$\bar{1},8812763$	4,4964910
<i>Г</i>	22° 12' 02'', 84	50° 44' 04'', 92	$\bar{1},8888664$	4,5040811
<i>П</i>	71° 44' 11'', 30	79° 43' 46'', 62		
	151° 27' 57'', 92	180° 00' 00'', 00	4,6152147	
	и т. д.			

Определим, какому отрезку отвечает разность логарифмов в 17 единиц седьмого знака стороны *ПФ*. Для этого применима формула:

$$\log \Delta d = \log \Delta \log d + \log d + \bar{7},3622, \quad (114)$$

которая выводится из такого соотношения:

$$\log (d + \Delta d) - \log d = \log \frac{d + \Delta d}{d},$$

или

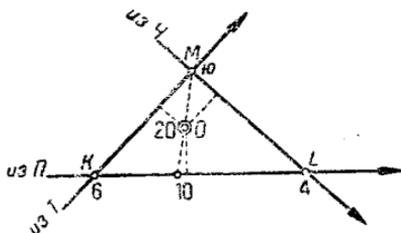
$$\Delta \log d = \log \left( 1 + \frac{\Delta d}{d} \right) = \mu \frac{\Delta d}{d}, \quad \Delta d = \frac{d}{\mu} \Delta \log d,$$

где  $\mu$  — модуль десятичных логарифмов. Если прологарифмировать последнее равенство и считать, что  $\Delta \log d$  выражено в единицах седьмого знака, мы и получим выше написанную формулу (114).

Таким образом в ней  $\Delta \log d$  означает разность логарифмов в единицах седьмого знака. Для данного случая:

$$\begin{aligned} \log \Delta d &= \log 17 + 4,5041 + \bar{7},3622 = 1,2304 \\ &= +4,5041 + \bar{7},3622 + \bar{1},1967 \text{ и } \Delta d = 0,157 \text{ м.} \end{aligned}$$

На черт. 18 строим фигуру погрешности. Проводим произвольную прямую, на ней откладываем отрезок  $KL$ , равный  $0,157$  м в масштабе  $\frac{1}{2}$  или  $\frac{1}{5}$ . При точке  $L$  строим простым транспортиром угол равный  $\angle ЧПФ$  (черт. 17) с точностью до  $\frac{1}{2}^\circ$ , а при точке  $K$  угол равный  $\angle ПФТ$ . Углы строим в соответствующую сторону, смотря на черт. 17 и помня, что здесь  $KL$  отвечает  $ПФ$  на черт. 17. Получим треугольник погрешности,  $\triangle KLM$ . По теории погрешностей, если требовать наименьшей суммы квадратов линейных (по перпендикуляру в конце засечки) отклонений, положение искомой точки в треугольнике погрешности найдется, как точка приложения равнодействующей параллельных сил, приложенных в вершинах фигуры погрешности и пропорциональных квадратам синусов углов пересечения этой фигуры. Для этого достаточно разбить все углы от  $0$  до  $90^\circ$  на десять градаций и составить такую таблицу:



Черт. 18.

Углы	$0^\circ - 13^\circ$	дают вес =	0
"	13 — 23	" "	= 1
"	23 — 30	" "	= 2
"	30 — 36	" "	= 3
"	36 — 42	" "	= 4
"	42 — 48	" "	= 5
"	48 — 54	" "	= 6
"	54 — 60	" "	= 7
"	60 — 67	" "	= 8
"	67 — 77	" "	= 9
"	77 — 90	" "	= 10

По этой таблице проставлены на черт. 18 веса вершин треугольника и найдена точка приложения их равнодействующей, точка  $O$ .

Сначала сложены  $6$  и  $4$  — равнодействующая  $10$  на прямой  $KL$ , а затем эта точка сложена с  $10$  при точке  $M$  — равнодействующая  $20$  в точке  $O$ . Напомним, что расстояния от точки приложения равнодействующей до точек приложения двух составляющих

обратно пропорциональны составляющим силам. Перпендикуляры, опущенные из точки  $O$  на стороны  $KM$ ,  $ML$  и  $KL$ , равны соответственно 0,024, 0,029 и 0,036 м. Это и будут так называемые линейные отклонения засечек, по которым можно вычислить угловые отклонения засечек или поправки дирекционных углов по формуле:

$$\Delta\alpha = \frac{t}{d} \rho = \{5,3144\} \frac{t}{d}, \quad (115)$$

где  $\Delta\alpha$  — поправка дирекционного угла,

$t$  — линейное отклонение,

$d$  — расстояние в метрах от соответствующей данной точки до искомой, взятое с грубым приближением, например прямо по масштабной линейке со схемы триангуляции, вычерченной в определенном мелком масштабе.

Для засечки:

$$ЧФ \log \Delta\alpha = \log 0,029 + 5,314 - 4,544 = \bar{1},232$$

$$\Delta\alpha = + 0'',17$$

$$ПФ \log \Delta\alpha = \log 0,036 + 5,314 - 4,504 = \bar{1},366$$

$$\Delta\alpha = - 0'',23$$

$$ТФ \log \Delta\alpha = \log 0,024 + 5,314 - 4,608 = \bar{1},086$$

$$\Delta\alpha = + 0'',12.$$

Таким образом уравненные дирекционные углы засечек на точку  $\Phi$  будут:

Оконч. дирекционный угол:

$$ЧФ = 108^\circ 27' 04'',03 + 0'',17 = 108^\circ 27' 04'',20$$

$$ПФ = 71^\circ 44' 11'',30 - 0'',23 = 71^\circ 44' 11'',07$$

$$ТФ = 22^\circ 12' 02'',84 + 0'',12 = 22^\circ 12' 02'',96.$$

Имея эти дирекционные углы, решим один из треугольников формуляра 17 в окончательном виде и найдем окончательные координаты искомой точки  $\Phi$  (см. формуляр 18).

**Объяснение к формуляру 18.** Вершины треугольника пишутся в порядке, следуемом движению часовой стрелки.  $P$  — искомая точка.

$\angle A$  = дир. уг.  $AP$  — дир. уг.  $AB$ ;  $\angle B$  = дир. уг.  $BA$  — дир. уг.  $BP$ ;  
 $\angle P$  = дир. уг.  $BP$  — дир. уг.  $AP$ .

Сумма,  $\angle A + \angle B + \angle P$ , должна =  $180^\circ$  — проверка первая.

## Н. Окончательное решение треугольников и вычисление координат.

Формуляр 18.

1	2	3	4	5	6	7
A	$x_A$ $\Delta x_A$	$y_A$ $\Delta y_A$	Пр. AP Пр. AB	$\angle A$ $\log \sin A$	$\log (AB : \sin P)$ $\log \Delta x_A$	— $\log \Delta x_B$
B	$x_B$ $\Delta x_B$	$y_B$ $\Delta y_B$	Пр. BA Пр. BP	$\angle B$ $\log \sin B$ $\angle P$	$\log \cos$ Пр. AP $\log AP$ $\log \sin$ Пр. AP	$\log \cos$ Пр. BP $\log BP$ $\log \sin$ Пр. BP
P	$x = x_A + \Delta x_A$ $x = x_B + \Delta x_B$	$y = y_A + \Delta y_A$ $y = y_B + \Delta y_B$	$\log AB$ $\log \sin P$	$\angle A + \angle B + \angle P$	$\log \Delta y_A$	$\log \Delta y_B$
T	6 063 013,85 + 37 561,97	— 18 919,45 + 15 329,38	22° 12' 02'',96 331° 27' 57'',92	50° 44' 05'',04 1,8888667 79° 43' 46'',85	4,6152153 4,5747483	— 4,0001659
II	6 090 571,98 + 10 003,82	— 33 903,42 + 30 313,36	151° 27' 57'',92 71° 44' 11'',07	1,9929852 49° 32' 08'',11	1,9665478 4,6082005 1,5773241	1,4960839 4,5040820 1,9775520
Ф	6 100 575,82 6 100 575,80	— 3 590,07 — 3 590,06	4,4964910 1,8812757	180° 00' 00'',00	4,1855246	4,4816340
	и т. д.					

Примечание. Пр. (простираение) означает дирекционный угол указанного направления.

Итак окончательные координаты точки Ф:  $x = 6\ 100\ 575\ 81$  м,

$y = - 3\ 590\ 06$  м.

$$\log AP = \log \frac{AP}{\sin P} + \log \sin B; \quad \log BP = \log \frac{AB}{\sin P} + \log \sin A,$$

$$\Delta x_A = AP \cdot \cos \text{Пр. } AP;$$

$$\Delta y_A = AP \cdot \sin \text{Пр. } AP \text{ и т. д.}$$

$x_A + \Delta x_A$  должно равняться  $x_B + \Delta x_B$  — проверка вторая и

$y_A + \Delta y_A$  „ „ „  $y_B + \Delta y_B$  — проверка третья.

Таковы примеры обработки данных геодезических измерений на плоскости. Метод введения поправок за кривизну и поправок длин универсален, он дает возможность переходить на плоскость во всех случаях. При помощи этого метода может быть решена и задача Потенота и Ганзена на сфероиде без тех усложнений, которые возникают при наличии ощутительных сферических избытков, и какая угодно другая вставка точек, рядов треугольников, сетей. Все это касается точных вычислений.

В обычной практике, маркшейдерской, землеустроительной, разведочной, изыскательской, при съемках крупного масштаба, поправки  $\delta$  будут всегда исчезающе малы и могут совершенно не учитываться, останутся только поправки логарифмов сторон. Но они не представляют никаких затруднений, так как могут считаться в пределах данного участка постоянными. Для мелких триангуляций например достаточно только раз в логарифмы базисов ввести постоянную поправку,  $\log m$ , аналогичную поправке за приведение к уровню моря. При вставке затем полигонов между данными точками уравнивание полигонов внесет само собой поправку сторон. Затруднения с введением логарифма масштаба совершенно того же порядка, как учет абсолютной высоты для длин при работах на разных горизонтах. При перемещении с востока на запад или обратно на 10 км логарифм масштаба можно считать даже при точных съемочных работах постоянным, а при графической мензульной съемке вообще искажения длин на проекции неощутимы. Это легко самому исследовать, ибо относительная ошибка длины  $= \frac{\log m}{\mu} = 2,3 \log m$ , а  $\log m$  мы умеем вычислять. Так например если  $\log m = 0,0001095$ , то искажение будет  $2,3 \times 0,00011 = 0,00025$  или  $= \frac{1}{4000}$ . При сравнительно больших расстояниях можно к тому же прикинуть искажение углов, т. е. найти поправки направлений за кривизну, чтобы убедиться, не приближаются ли они к точности измерения углов. В данном ограниченном районе искажение длины можно ввести в базис-компаратор, тогда переход на плоскость в системе Гаусса-Крюгера будет происходить автоматически. В прецезионных дальномерах Босхард-Цейса устроено даже корректирующее приспособление, позволяющее вводить искажение длины на проекции автоматически.

## § 17. Вычисление $\gamma$ и составление абриса.

Иногда может встретиться необходимость при наличии только плоских прямоугольных координат иметь геодезический азимут того или иного направления, например при определении склонения магнитной стрелки. Для этого, как явствует из формул, связывающих дирекционный угол с геодезическим азимутом, необходимо иметь сближение меридиана  $\gamma$  (или дирекционный угол направления на север). Его можно вычислить по формуле:

$$\log \gamma = \log \gamma_1 - I - II + III + \omega_1, \quad (116)$$

где  $\gamma_1 = (2)' \operatorname{tg} B'$ ;  $I = \frac{\mu}{3 \rho^2} \gamma_1^2 = \{5,53181\} \gamma_1^2$  — в единицах седьмого знака;  $II = \frac{\mu}{3 c^2} y^2 = \{8,54848\} y^2$  — также в единицах седьмого знака;  $III = \{12,203\} y^2 \cos^4 B$  и при  $y = 300\,000$ , считая  $\cos^4 B = 1$ , дает лишь 0,15 единицы седьмого знака, поэтому безусловно может быть опущено;  $\omega_1$  также обычно не принимается во внимание, хотя на краю полосы она дает несколько единиц седьмого знака (см. таблицу VII приложения). Таким образом

$$\log \gamma = \log \gamma_1 - I - II. \quad (117)$$

Формула (116) выведена из формулы (80), в которой  $1 - \eta^2$  заменено через  $\frac{1}{1 + \eta^2} - \eta^4 = \frac{1}{V^2} - \eta^4$  и  $\frac{1}{N^2 V^2}$  через  $\frac{1}{c^2}$  где  $c$  — постоянная величина — радиус кривизны на полюсе.

Чтобы вычислять по формуле (117), нужно сначала найти широту  $B'$ , при которой берется и  $\log (2)$ ;  $B'$  — это широта основания ординаты, или широта, отвечающая в табл. II приложения меридианальному отрезку  $X$ , равному  $x$ . Непосредственно из табл. II мы берем ближайший  $X_t$ , отвечающий круглой широте  $B_t$ , затем находим приближенную разность  $B' - B_t$  с множителем (1), при широте  $B_t$  по формуле (64):

$$\Delta_1 B = (1)_t (x - X_t),$$

после чего при средней широте

$$B_t + \frac{1}{2} \Delta_1 B$$

берем окончательно величину (1) и получаем семизначными логарифмами  $B' - B_t$ . Для контроля и большей точности полезно  $B'$  получить еще, исходя из ближайшей в табл. II большей широты  $B'_t$  по формуле:

$$B'_t - B = (1)' (X'_t - x),$$

## Вычисление сближения меридиана по данным плоским координатам.

Формуляр 19.

(К черт. 17).

1	2	3	4	5	6	7
№	$X_t'$ $x$ $X_t$	$\log(x - X_t)$ $\log(1)_t$ $\log \Delta_1 B$	$\log(x - X_t)$ $\log(1)$ $\log(B_t' - B_t)$	$B_t' - B_t$ $B_t' - B'$	$\log y$ $\log \operatorname{tg} B'$ $\log(2)'$	$\bar{5},53181$ $2 \log \gamma_1$ $\log I$
Название точки	$x - X_t$ $X_t' - x$ $y$	$\Delta_1 B$ $B_t$ $B_t + \frac{1}{2} \Delta_1 B$	$\log(X_t' - x)$ $(\log(1)')$ $\log(B_t' - B')$	I II γ	$\log \gamma_1$ $-(I + II)$ $\log \gamma$	$\bar{8},54848$ $2 \log$ $\log$
1	6 115 150,954 6 111 647,16 6 096 598,931 + 15 048,229 + 3 503,794 - 36 772,91	4,17749 <u>2,50977</u> 2,68726 486", 70 55° 00' 55° 04' 03", 3	4,1774854 <u>2,5097611</u> 2,6872465 3,5445386 <u>2,5097551</u> 2,0542937	486", 6834 113,3166 55° 08' 06", 6834 98.7 47.8 -0° 28' 23", 230	$\bar{n}4,5655280$ 0,1569560 <u>2,5088038</u> $\bar{n}3,2312878$ - 147 $\bar{n}3,2312731$	$\bar{5},53181$ 6,46258 <u>1,99439</u> $\bar{8},54848$ 9,13106 <u>1,67954</u>
Червева, Ч						
3	6 096 598,931 6 090 571,98 6 078 047,418 + 12 524,562 + 6 026,951 - 33 903,42	4,09776 <u>2,50978</u> 2,60754 405", 1 54° 50' 54° 53' 22", 5	4,09776 <u>2,50977</u> 2,60753 3,78010 <u>2,50977</u> 2,28987	405", 07 194,93 54° 56' 45", 07 82.7 40.6 - 0° 25' 58", 977	$\bar{n}4,5302435$ 0,1539000 <u>2,5088083</u> $\bar{n}3,1929518$ - 123 $\bar{n}3,1928395$	$\bar{5},53181$ 6,38590 <u>1,91771</u> $\bar{8},54848$ 9,06049 <u>1,60897</u>
Панфиловская, П						
и т. д.						

где  $\log(1)'$  берется при широте

$$B_i' - \frac{1}{2} \Delta_1' B = B_i + \frac{1}{2} \Delta_1 B + 10',$$

если в табл. II интервал в  $20'$  или  $+5'$ , если интервал в  $10'$ .

### Объяснение к формуляру 19.

$$B_i' - \frac{1}{2} \Delta_1' B = B_i + \frac{1}{2} \Delta' B$$

$+$   $\frac{1}{2}$  интервала таблиц, т. е.  $+5'$  или  $10'$ .

$\log(1)$  и  $\log(1)'$  берутся одновременно из таблиц Шарнгорста-Матусевича при широтах

$$B_i + \frac{1}{2} \Delta_1 B \quad \text{и} \quad B_i' - \frac{1}{2} \Delta_1' B.$$

$B_i$  и  $B_i'$  — смежные круглые широты, взятые из таблиц. Между этими широтами заключается  $B'$  — широта основания ординаты.  $X_i$  и  $X_i'$  — соответствующие отрезки меридианов (абсциссы Сансона). Если необходима только  $\gamma$ , и  $B'$  дальше не понадобится, то последнюю достаточно вычислить с точностью до 0,01, т. е. пятизначными логарифмами.

**Абрис.** Для удобства пользования всеми данными, получающимися в результате обработки триангуляций на плоскости, и для наглядности целесообразно эти данные сконцентрировать в одном списке, который называется абрисом. Как можно видеть из помещенного ниже образца его, он позволяет легко перейти от величин на плоскости проекции к величинам на земной поверхности (на средней уроченной поверхности) как в отношении углов, так и в отношении расстояний по неоднократно приводимым выше простым формулам.

**Объяснение к формуляру 20.** № II означает номер полосы по разбивке международной миллионной карты. Дело в том, что разбивка на координатные полосы совпадает у нас согласно постановления III Геодезического совещания с колоннами упомянутой международной карты. Ширина колонн, как известно,  $6^\circ$  по долготе. Номера колонн идут следующим образом. Колонна, заключенная между меридианами  $0$  и  $6^\circ$  от Гринвича, имеет номер 31. Колонна между  $6$  и  $12^\circ$  — № 32, между  $12$  и  $18^\circ$  — № 33, и т. д.

Здесь поставлено 45 II, что означает 45-я координатная полоса между меридианами  $84$  и  $90^\circ$  восточной долготы от Гринвича, средний меридиан этой полосы имеет долготу  $87^\circ$ . Имея номер

Формуляр 20.

1 Начальная точка	2 Конечные точки		3 Дир. углы (простиранья)		4 Расстояния	
№ Название $x$ № П у $y$ $\gamma$ $\log t$	№	Название	$\alpha$	$\delta$	$\log d$	$10^7 \times$ $\log d - \log s$
1 Червева $6^\circ 111' 647'',16$ 45 П — 36 772,91 $-0^\circ 28' 23'',23$ 72.0	2 3	Фоминихинский Панфиловская	108° 27' 04'',20 172° 14' 47'',69	+ 0'',72 + 1,91	Не определено 4,3277600	26.5 66.5
			и т. д.			
3 Панфиловская 6 090 571,98 45 П — 33 903,42 $-0^\circ 25' 58'',08$ 61.2	1 2 4	Червева Фоминихинский Тараданова	352° 14' 47'',69 71° 44' 11'',07 151° 27' 57'',92	— 1,86 — 0,60 + 2,02	4,3277600 4,6082005 4,4964910	66.5 22.8 38.1
			и т. д.			
		и т. д.				

полосы, можно определить число градусов в долготе среднего меридиана по следующей формуле для нашего Союза:

$$L_{\text{ср}}^{\circ} = (N - 30) \cdot 6 - 3, \quad (118)$$

где  $N$  — номер полосы,  $L_{\text{ср}}^{\circ}$  — число градусов в долготе от Гринвича среднего меридиана координатной полосы.

И обратно, имея долготу среднего меридиана, можно определить номер полосы по следующей формуле:

$$N = \frac{L_{\text{ср}}^{\circ} + 3}{6} + 30, \quad (119)$$

где обозначения те же, что и в формуле (118); при этом

$$L_{\text{ср}} = 6n + 3,$$

где  $n$  — целое число.

Например вершина сопки Опалы на Камчатке имеет долготу от Гринвича  $157^{\circ} 19' 48''$ , 8, значит средний меридиан координатной полосы, в которой она лежит, будет:

$$n = \frac{157}{6} = 26, L_{\text{ср}}^{\circ} = 156 + 3 = 159^{\circ}$$

и

$$N = \frac{159 + 3}{6} + 30 = 57,$$

т. е. юг Камчатки лежит в 57-й полосе (колонне), и ординаты его в списках (абрисах) должны сопровождаться символом 57 П. Можно вместо номера полосы просто писать градусы среднего меридиана, например вместо 45 П написать  $87^{\circ}$  (см. § 21).

## § 18. Переход из одной полосы в другую.

Получая только плоские прямоугольные координаты точек, можно незаметно при работах на границе координатной полосы перейти за отдельный, крайний меридиан, т. е. с координатами одной полосы войти в смежную полосу. Желательно поэтому от координат точки одной полосы переходить к координатам той же точки в смежной системе. При больших работах наличие двух систем координат может несколько затруднить вычисление, например при уравнивании на плоскости широтного триангуляционного ряда, пересекающего отдельный меридиан. Поэтому самым рациональным было бы установить две разбивки на координатные полосы, перекрывающие друг друга. Одна разбивка, скажем  $A$ , на шестиградусные полосы совпадает с листами международной миллионной карты, а другая разбивка  $B$ , также шестиградусная, сдвинута по отношению к разбивке  $A$  на  $3^{\circ}$ , и координаты всех опор-



$D$  и  $D'$ —симметричные на местности точки относительно раздельного меридиана, так что на местности  $D'L = DL$ .

Имея координаты  $x$  и  $y$  точки  $D$ , требуется найти координаты  $x'$  и  $y'$  точки  $D'$ . Для этого можно предложить такой путь. Найдем прежде всего координаты  $x_m$  и  $y_m$  точки  $L$  и разность долгот  $\Delta\lambda$  точек  $L$  и  $D$ , или длину  $\Delta Y$  дуги  $LD$  на местности.  $\Delta\lambda$  и  $\Delta Y$  будут те же и для дуги  $D'L$ , поэтому дальше остается применить известный уже нам способ передвижения по параллели (§ 15) и получить координаты  $x'$  и  $y'$ . Очевидно, что в этом способе без нахождения общей для точек  $D$ ,  $L$  и  $D'$  широты  $B$  нельзя обойтись.

Широта  $B$  может быть определена лишь по данным координатам  $x$  и  $y$ . Для этого нужно применить формулу (76) с предварительным получением  $B'$ , как это делалось в предыдущем параграфе.

Формула (76) имеет вид:

$$\log(B' - B) = \log \frac{y^2 \rho}{2M'N'} t' - \frac{\mu y^2}{12N'^2} (5 + 3t'^2 + \eta'^2 - 9\eta'^2 t'^2) + \dots,$$

где  $t' = \operatorname{tg} B'$ , и все величины берутся при широте  $B'$ .

$$\frac{\rho}{M'N'} \text{ можно заменить выражением } \frac{(1)'(2)'}{\rho};$$

таким образом

$$\log \frac{y^2 \rho}{2M'N'} = \bar{6},384\,5449 + \log(1)'(2)'y^2.$$

$\frac{1}{12N'^2} (5 + 3t'^2 + \eta'^2 - 9\eta'^2 t'^2)$  можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12N'^2} [6 - 6t'^2 - (1 - \eta'^2) + 9t'^2(1 - \eta'^2)] \\ & = \frac{1}{2N'^2} - \frac{t'^2}{2N'^2} - \frac{1}{12c^2} + \frac{3t'^2}{4c^2}. \end{aligned}$$

Принимая все это во внимание, получим:

$$\log(B' - B) = \bar{6},384\,5449 + uv(1)' - I + II + III - IV, \quad (120)$$

где

$$u = y(2)', \quad v = yt'$$

$$I = \frac{\mu}{2c^2} u^2 = \{\bar{5},70780 \cdot 4\} u^2; \quad II = \frac{\mu}{2c^2} u^2 t'^2 = I \cdot t'^2.$$

$$III = \frac{\mu}{12c^2} y^2 = \{\bar{9},94640 \cdot 8\} y^2; \quad IV = \frac{3\mu}{4c^2} v^2 = \{\bar{8},90065 \cdot 0\} v^2.$$

Пример вычисления  $B' - B$  дан в следующем параграфе.

Вычислив  $B$ , мы по § 12 находим координаты  $x_m$  и  $y_m$ , а также  $\gamma_m$  и  $\log m_m$  точки  $L$  (черт. 19) по географическим координатам  $B$  и  $\lambda = 3^\circ = 10\,800''$ , при этом задача по сравнению с примером § 12 несколько упрощается, так как мы имеем здесь дело с круглой долготой. По  $x_m$  и  $y_m$  и данным координатам находим расстояние  $d$  между точками  $D$  и  $L$  на проекции по обычным формулам (формуляр 16). Далее находим  $\Delta Y$  — длину на местности дуги  $DL$  и  $D'L$ . Для этого воспользуемся второй из формул (109) стр. 76, заменив в ней  $\Delta\lambda$  через первое приближение:

$$\Delta_1\lambda = \frac{d(2)}{\cos B}$$

и выразив  $\Delta Y$  в зависимости от  $d$ , после чего формула примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \log \Delta Y &= \log d - \frac{1}{2} (\log m + \log m_m) + \{\overline{6,754}\} * (\Delta_1\lambda)^2, \\ \text{или еще лучше найти непосредственно } \Delta\lambda &\text{ по формуле:} \\ \log \Delta\lambda &= \log \Delta_1\lambda - \frac{1}{2} (\log m + \log m_m) + \{\overline{6,754}\} (\Delta_1\lambda)^2, \end{aligned} \right\} (121)$$

где

$$\Delta_1\lambda = \frac{d(2)}{\cos B}, \log m \text{ и } \log m_m \text{ — логарифмы}$$

масштаба точек  $D$  и  $L$ , или:

$$\log \Delta\lambda = \log \Delta_1\lambda - I + II. \quad (121)$$

Теперь, применяя формулы (111), остается получить координаты  $x'$  и  $y'$  точки  $D'$  по приведенному уже формуляру 9. (его первая половина), причем  $d'$  (плоское расстояние—хорда  $LD'$ ) следует получать не по формуле (109), а по более простой:

$$\left. \begin{aligned} \log d' &= \log d - \frac{1}{2} (\log m + \log m_m) + \frac{1}{2} (\log m' + \log m_m) \\ &= \log d - \frac{1}{2} (\log m - \log m'); \end{aligned} \right\} (122)$$

$d'$  здесь отвечает  $d$  в формулах (111), а также конечно и приближенному значению  $d'$ .

$\log m'$  отвечает  $\log m_2$ .

Формула (122) упрощает несколько вычисление, а именно отпадают 3) и 4) формул (111) и действия 18, 17, 43, 44 и 45 первой половины формуляра 9.

В этом способе не требуется определение долготы данного пункта  $D$ , хотя в сущности она определена, так как для получения ее остается прибавить  $\Delta\lambda$  к  $3^\circ$ .

\*  $\cos^2 B$  принят в среднем  $= \cos^2 55^\circ = 1/3$  в этом добавочном весьма малом члене.

Можно предложить еще способ, в котором действительно не потребуются определения широты и долготы данной точки  $D$ . Проведем на черт. 19 прямую  $FD \perp ML$  до пересечения с изображением раздельного меридиана в точке  $P$ . Очевидно точка  $P$  будет иметь абсциссу  $x$  одинаковую с точкой  $D$ . Если мы найдем ординату точки  $P$ , которую назовем через  $y_k$  и сближение меридиана  $\gamma_k$  в этой точке, то задача далее легко разрешается, а именно: на местности  $PD$  и  $PD'$  равны, на проекции  $PD = y - y_k$ , в первом приближении  $PD'$  на проекции также  $= y - y_k$  и дирекционный угол хорды  $PD' = 270^\circ - 2\gamma_k$ , точный дирекционный угол  $PD' = 270^\circ - 2\gamma_k + \delta$ , так как в виду симметричности точек  $D$  и  $D'$

$$\angle D'QPK = \angle KPD = 90^\circ = \gamma_k.$$

Из первых приближений длины  $PD'$  и ее простираения мы можем найти приближенные приращения координат  $\Delta_1 x$  и  $\Delta_1 y$ , т. е.  $D'F$  и  $PF$ .

$$\Delta_1 x = (y - y_k) \cos(270^\circ - 2\gamma_k) = -(y - y_k) \sin 2\gamma_k$$

и

$$\Delta_1 y = -(y - y_k) \cos 2\gamma_k.$$

Приближенные координаты точки  $D'$  будут:

$$x_1' = x + \Delta_1 x = x - (y - y_k) \sin 2\gamma_k;$$

$$y_1' = y_k + \Delta_1 y = y_k - (y - y_k) \cos 2\gamma_k.$$

По этим приближенным координатам мы найдем и  $\log m'$  точки  $D'$  и  $\delta$  направления  $PD'$  по обычным формулам.

Тогда  $\angle P$  прямоугольного треугольника  $FPD'$  (черт. 19) будет определен точно и равен  $2\gamma_k - \delta$ . Логарифм же гипотенузы  $PD'$  будет равен:

$$\begin{aligned} \log d_1 = \log PD' &= \log(y - y_k) - \frac{1}{2}(\log m + \log m_k) + \frac{1}{6} \log m_A + \\ &+ \frac{1}{2}(\log m_k + \log m') - \frac{1}{6} \log m_A' \\ &= \log(y - y_k) - \frac{1}{2}(\log m - \log m') \\ &+ \frac{\mu}{12R^2} [(y - y_k)^2 - (y - y_k)^2 \cos^2 2\gamma_k] \\ &= \log(y - y_k) - \frac{1}{2}(\log m - \log m') \\ &+ \frac{\mu}{6R^2} (y - y_k)^2 (1 + \cos 2\gamma_k) \sin^2 \gamma_k. \end{aligned}$$

$\gamma_{\kappa}$  максимально при  $B = 35^\circ$  равно  $3^\circ \sin 35^\circ = 1^\circ, 7$ ;

$$\sin^2 \gamma_{\kappa} < 0,001.$$

$$\frac{\mu}{6R^2} (y - y_{\kappa})^2 (1 + \cos 2\gamma_{\kappa}) < 4\tau,$$

где  $\tau$  — величина из табл. III приложения. При  $y - y_{\kappa} = 50$  км  $\tau = 22$  единицам седьмого знака; значит при этом весь последний член в выражении для  $\log d_1$  меньше 0,1 единицы седьмого знака и подлежит несомненному игнорированию. Соберем теперь все формулы, служащие для перехода от точки  $P$  к точке  $D'$  на черт. 19

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \Delta_1 x &= -(y - y_{\kappa}) \sin 2\gamma_{\kappa}; \\ 2) \quad \Delta_1 y &= -(y - y_{\kappa}) \cos 2\gamma_{\kappa}; \\ 3) \quad y_1' &= y_{\kappa} + \Delta_1 y; \\ 4) \quad \log m_1' &= (6) y_1'^2 \text{ и } \log m_1 = (6) y^2; \\ 5) \quad \delta &= (7) \Delta_1 x \left( y_{\kappa} + \frac{1}{3} \Delta_1 y \right); \\ 6) \quad \log d_1 &= \log (y - y_{\kappa}) - \frac{1}{2} (\log m_1 - \log m_1') + \Delta_m, \end{aligned} \right\} (123)$$

где

$$\Delta_m = \frac{\mu}{3R^4} y_{\kappa}^3 (y - y_{\kappa}) = \{10,940\} y_{\kappa}^3 (y - y_{\kappa});$$

$$\begin{aligned} 7) \quad \log(-\Delta x) &= \log d_1 \sin(2\gamma_{\kappa} - \delta) \\ &= \log d_1 + S + \log(2\gamma_{\kappa} - \delta)'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad \log(-\Delta y) &= \log d_1 \cos(2\gamma_{\kappa} - \delta); \\ x' &= x + \Delta x; \quad y' = y_{\kappa} + \Delta y. \end{aligned}$$

В формуле 6) введена еще поправка  $\Delta_m$ , в виду того что по формуле 4)  $\log m_1'$  и  $\log m_1$  вычисляются при больших  $y$  не совсем точно. В формулах 1), 2), 3), 4) и 5) длины взяты в километрах.

Остается теперь вывести формулы для получения  $y_{\kappa}$  и  $\gamma_{\kappa}$ . По формуле (77):

$$\frac{\lambda}{\rho} N' \cos B' = y - \frac{y^3}{6N'^2} (1 + 2t'^2 + \eta'^2) + \dots$$

в первом приближении

$$y = \frac{\lambda}{\rho} N' \cos B'$$

и во втором:

$$y = \frac{\lambda}{\rho} N' \cos B' \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{6 \rho^2} \cos^2 B' (1 + 2 t'^2 + \eta'^2) \right].$$

По формуле (78):

$$\begin{aligned} \log y &= \log \lambda + \log \frac{N' \cos B'}{\rho} \\ &+ \frac{\mu y^3}{6 N'^2} (1 + 2 t'^2 + \eta'^2) - \frac{\mu y^4}{180 N'^4} (5 + 32 t'^2 + 26 t'^4). \end{aligned}$$

Подставляя сюда в третий член правой части второе приближение  $y$ , а в четвертый член первое приближение, и ограничиваясь членами четвертого порядка с исключением в них членов, содержащих  $\eta'^2$ , получим в конечном виде такую формулу:

$$\left. \begin{aligned} \log y &= \log Y' + \frac{\mu}{6} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^2 \cos^2 B' (1 + 2 t'^2 + \eta'^2) \\ &+ \frac{\mu}{180} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^4 \cos^4 B' (5 + 8 t'^2 + 14 t'^4), \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

где  $Y'$  — длина дуги с широтой  $B'$ , равная  $\frac{N'}{\rho} \lambda \cos B'$ .

Заменяя  $\frac{\lambda}{\rho} \cos B'$  через  $\frac{Y'}{N'}$  и переходя обратно от логарифма к самому числу, получим:

$$\left. \begin{aligned} y &= Y' + \frac{Y'^3}{6 N'^2} (1 + 2 t'^2 + \eta'^2) \\ &+ \frac{Y'^5}{120 N'^4} (5 + 12 t'^2 + 16 t'^4), \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

или, принимая во внимание, что  $1 + \eta'^2 = \frac{(1)'}{(2)'}$ , получим:

$$y = Y' + \frac{1}{6} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^2 \cos^2 B' \frac{(1)'}{(2)'} Y' + \frac{1}{3} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^2 \sin^2 B' \cdot Y' + \omega, \quad (126)$$

где

$$\omega = \frac{1}{120} N' \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^5 \cos^5 B' (5 + 12 t'^2 + 16 t'^4).$$

$Y'$  должно получаться по табл. I приложения согласно примера 2 или примера 3 формуляра 2 без столбца 5, оно отвечает постоянному круглому  $\lambda = 3^\circ = 180'' = 10\ 800''$ , что несколько облегчает вычисление.

Подставив вместо  $\lambda$  его значение в формулу (126), получим  $y_k$ .

$$y_k = Y' + I + II + \omega, \quad (127)$$

где

$$I = \{4,65984 \cdot 6\} \cos^2 B' \frac{(1)'}{(2)'} Y' = \{2,27530\} (3) Y' \cos^2 B'$$

достаточно вычислять пятизначными логарифмами, так как максимальное значение его около 80 м.

$$\Pi = \{ \bar{4},96087 \cdot 6 \} Y' \sin^2 B'$$

максимальное значение также около 80 м.

$$\omega = \{ \bar{4},8302 \} \frac{1}{(2)'} (5 + 12 t'^2 + 16 t'^4) \cos^5 B'$$

находится непосредственно по табл. VII приложения.

$\gamma_k$  удобнее всего вычислить по формуле (117), столбцы 6, 7 и 5 формуляра 19, так как  $y_k$  и  $B'$  уже получены.

Для контроля выведем еще для нее формулу тем же способом, что и для  $y_k$ , исходя из формулы (80) и подставляя в нее приближенные значения  $y$ .

После подстановки, приведения подобных членов и отбрасывания высших степеней получится:

$$\left. \begin{aligned} \log \gamma &= \log \lambda \sin B' - \frac{\mu}{6} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^2 \cos^2 B' (1 - 3 \eta'^2) \\ &+ \frac{\mu}{180} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^4 \cos^4 B' (10 + 21 t'^2 + 22 t'^4), \end{aligned} \right\} (128)$$

или, подставляя значение  $\lambda = 10\,800$  и преобразуя множитель

$$1 - 3 \eta'^2 \text{ на } \frac{3}{1 + \eta'^2} - 2,$$

получим:

$$\log \gamma_k = 4,0334237.6 + \log \sin B' + I - \Pi + \omega_2, \quad (129)$$

где

$$I = \{ 3,59866 \} \cos^2 B'$$

в единицах седьмого знака,

$$\Pi = \{ 3,77475 \} \frac{(2)'}{(1)'} \cos^2 B' = \{ \bar{2},15930 \} \frac{\cos^2 B'}{(3)'}$$

также в единицах седьмого знака.

$\omega_2$  равно как и  $\omega_1$ , добавочный член к формуле (117) или (80), при  $\lambda = 10\,800$  даны в табл. VII приложения:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= + \frac{\mu}{90 N'^4} y^4 (7 + 20 t'^2 + 13 t'^4) \\ &= \frac{\mu}{90} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^4 \cos^4 B' (7 + 20 t'^2 + 13 t'^4); \\ \omega_2 &= + \frac{\mu}{180} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^4 \cos^4 B' (10 + 21 t'^2 + 22 t'^4). \end{aligned}$$

Табл. VII дает значения их при  $\lambda = 10\,800$ , при этом они выражаются:

$$\omega_1 = + \{ \bar{1},5600 \} (7 + 20 t'^2 + 13 t'^4) \cos^4 B'$$

и

$$\omega_2 = + \{ \bar{1} 2590 \} (10 + 21 t'^2 + 22 t'^4).$$

Нужно помнить, что в формулах (127) и (129)  $B'$  есть широта основания ординаты как точки  $D$ , так и точки  $P$  на черт. 19, или это есть широта, отвечающая по табл. II меридианальному отрезку  $X$ , равному общей обоим точкам абсциссе  $x$ . Кроме того напомним, что  $t'$  это есть  $\operatorname{tg} B'$ . \*

**Объяснение к формуляру 21.** Получается впечатление довольно сложного вычисления, так как выписаны все преобразования и преращения величин и ряд действий дублирован. Два раза получены  $B'$ ,  $Y_0$  и  $\gamma_k$ . Формуляр 21 собрал в себе формуляры 19 и 2 и формулы (127), (129) или (117) и (123). Ордината в смежной системе =  $-y'$ .

Так же можно переходить от координат той полосы, в которой данная точка находится, к координатам соседней (чужой) полосы. Нужно только следить за знаками приращений координат.

Получив координаты только одной, начальной в данном участке, точки в другой системе, уже легко и все соседние связанные с нею точки перевычислить в этой новой системе, особенно если имеется достаточно полный абрис (см. формуляр 20). Для этого нужно сначала установить разность дир. углов в обеих системах одного направления, исходящего из начальной точки, эту разность придать ко всем прежним дирекционным углам, получатся приближенные дирекционные углы всех направлений в новой системе, по которым, применяя прежние расстояния, вычислим приближенные координаты всех точек в новой системе. Эти координаты дадут возможность получить новые  $\delta$ ,  $\log m$  и  $\log d - \log s$ . Вычтя из величин, данных в абрисе, старые  $\delta$  и  $\log d - \log s$  и прибавив новые, мы сможем перейти уже к новым точным прямолинейным дирекционным углам на плоскости, если при этом хотя бы для одного направления точно будет установлена разность дирекционных углов в обеих системах, а также к новым расстояниям, после чего уже легко будет получить и координаты всех точек в новой системе. Разность прямолинейных дирекционных углов на плоскости какого-нибудь направления, исходящего из данной точки, можно установить из таких соотношений: геодезический азимут  $A$  направления не меняется от перемены системы координат, в одной системе он будет равен:

$$A = \alpha + \gamma + \delta,$$

\*  $u_k$  и  $\gamma_k$  можно найти из упомянутых выше таблиц раздельного меридиана, которые легко составить по данным здесь формулам.

Дано:  $x = 5\ 540\ 618,37,45Л$ ,  $y = +\ 239\ 548,65$

Найдено:  $x = 5\ 538\ 669,23,46Л$ ,  $y = -\ 190\ 950,83$

126. Высокая грива

1	$X_t'$	5 558 815,882			
2	$x$	5 540 618,37			
3	$X_t$	5 540 279,543			
4	$x - X_t$	338,827			
5	$X_t' - x$	18 197,512			
6	$y$	+ 239 548,65			
11	$\Delta_1 B$	10'',97			
7	$B_t$	50°00'			
12	$B_t + \frac{1}{2}\Delta_1 B$	57°00'05'',5			
18	$B' - B_t$	10'',9676	65	$I_\gamma$	+ 2 332,6
19	$B_t' - B'$	589,0324	66	$II_\gamma$	+ 1 637,5
20	$B'$	50°00'10'',9676	67	$I_\gamma + II_\gamma$	3 970,1
21	$B_m$	50°00'05'',4838	73	$I'_\gamma$	1 639,6
22	$\Delta' B$	- 29'49'',0324	74	$II'_\gamma$	2 452,6
23	$B_m + 15' = B'_m$	50°15'05'',4838	75	$I'_\gamma - II'_\gamma$	- 813,0
24	$\Delta B''$	10,9676	84	$\log(-\Delta_1 x)$	0,2901
25	$\Delta' B''$	- 1 789,0324	82	$\log \sin 2\gamma_\kappa$	2,9037
36	$Y_t$	119 478,358	81	$\log(y - y_\kappa)$	1,3864
37	$\Delta Y_0$	- 7,550	83	$\log \cos 2\gamma_\kappa$	1,9986
38	$Y_0$	119 470,808	85	$\log(-\Delta_1 y)$	1,3850
39	$Y_t'$	118 234,617	86	$\Delta_1 y$	- 24,27
40	$\Delta' Y_0$	+ 1 236,164	87	$\frac{1}{3}\Delta_1 y$	- 8,09
41	$Y_0$	119 470,811			
42	$Y_0$	+ 119 470,808			
43	$0,8 Y_0$	95 576,646			

8	$\log(x - X_t)$	$\overline{2,52998}$	8	$\log(x - X_t)$	2,5299780
9	$\log(1)_t$	2,51013	13	$\log(1)$	$\overline{2,5101334}$
10	$\log \Delta_1 B$	1,04011	14	$\log(B' - B_t)$	1,0401114
45	$\log \sin B'$	$\overline{1,88427}$	15	$\log(X_t' - x)$	4,2600120
46	$\log \cos B'$	$\overline{1,80804}$	16	$\log(1)'$	2,5101272
47	$\log Y'$	5,33254	17	$\log(B_t' - B')$	2,7701392
		$\boxed{2,27530}$	26	$\log(1)_m$	$\overline{2,5101334}$
48	(3)'	$\overline{6,38575}$	27	$\log(1)'_m$	$\overline{2,5101147}$
49	$2 \log \cos B'$	$\overline{1,61608}$			$\overline{n2,4637261}$
50	$\log I_y$	1,60967	28	$\log \sin B_m$	$\overline{1,8842636}$
47	$\log Y''$	5,33254	29	$-\log(1)_m$	1,4898666
		$\boxed{4,96088}$	30	$\log \Delta B''$	1,0401114
51	$2 \log \sin B'$	$\overline{1,76854}$	31	$\log \Delta Y_0$	$\overline{n0,8779677}$
52	$\log II_y$	2,06196			$\overline{n2,4637261}$
		$\boxed{5,53181}$	32	$\log \sin B_m'$	$\overline{1,8858466}$
61	$2 \log \gamma_1$	7,83602	33	$-\log(1)'_m$	1,4898852
62	$\log I_\gamma$	3,36783	34	$\log \Delta' B''$	$\overline{n3,2526182}$
		$\boxed{8,54848}$	35	$\log \Delta' V_0$	3,0920761
63	$2 \log y_\kappa$	10,66570	57	$\log y_\kappa$	5,3328496
64	$\log II_\gamma$	3,21418	58	$\log \operatorname{tg} B'$	0,0762335
			59	$\log(2)'$	$\overline{2,5089294}$



а в другой:

$$A = \alpha' + \gamma' + \delta';$$

отсюда

$$\alpha + \delta + \gamma = \alpha' + \delta' + \gamma'$$

и

$$\alpha' - \alpha = -[(\gamma' + \delta') - (\gamma + \delta)] = -(\gamma' - \gamma) - (\delta' - \delta). \quad (130)$$

Значит для получения разности дирекционных углов  $\alpha' - \alpha$  нужно иметь сближение меридиана в исходной точке в обеих системах координат, т. е. иметь  $\gamma$  и  $\gamma'$ . Разность  $\gamma' - \gamma$  будет постоянной как равная сближению средних меридианов.

## § 19. Получение географических координат по координатам Гаусса-Крюгера.

Эта задача в обычной практике землемерных работников не будет иметь места. Она разобрана здесь для полноты вопроса и для более твердого усвоения взаимной связи тех и других координат, тем более что в предыдущем параграфе мы уже подходили к получению географических координат.

Метод, здесь предлагаемый, также позволяет с семизначными логарифмами находить с достаточной точностью долготу  $\lambda$ , подобно тому как в прямой задаче мы находим ординату. Прямой непосредственный переход по формулам Крюгера от  $\lambda$  к  $u$  и обратно требует по крайней мере восьмизначных таблиц логарифмов — слабое место этих формул. Нас в этом отношении выручает табл. I приложения.

Предлагаемый порядок вычисления будет таков. По выше разобранной формуле (120) находим сначала географическую широту  $B$  посредством широты  $B'$ . Затем грубо определим долготу  $\lambda$ , чтобы знать, какая к ней будет ближайшая круглая долгота  $\lambda_k$ . Имея долготу  $\lambda_k$  и широту  $B$ , находим, следуя в примере 3 формулярам 1, 2 без столбца 5, 3, 4 и 5, плоские координаты  $x_k$  и  $y_k$  точки с долготой  $\lambda_k$  от среднего меридиана и широтой  $B$ . Затем по формуле (121) находим  $\Delta\lambda$ , т. е. разность  $\lambda - \lambda_k$  и саму долготу  $\lambda$  данной точки, причем длина  $d$  хорды дуги  $\Delta\lambda$  на проекции, входящая в формулу (121), легко находится по данным и полученным координатам ее концов, т. е. по  $x$ ,  $y$  и  $x_k$  и  $y_k$  (формуляр 16).

Сближение меридиана  $\gamma$  можно вычислить по формуле (117) (формуляр 19) или по формуляру 6, примера 3, т. е. по  $u$  или по  $\lambda$ . (В формуляр 22 она не включена).

$\log m$  и  $\log m_k$ , необходимые для применения формулы (121), вычисляются или по формуле:

$$\log m = (6) y^2 - \{10,338\} y^4 = \log m' - \Delta \log m, \quad (131)$$

или по формуляру 6, столбцы 7, 8 и 9.

Грубо долгота  $\lambda$  определяется по формуле:

$$\lambda_1 = y (2) \frac{1}{\cos B} = \frac{u}{\cos B}, \quad (132)$$

где  $u$ , согласно обозначений формулы (120),  $= (2) y$ .

**Объяснение к формуляру 22.** В нем, в отличие от других формуляров, действия не дублированы. Поэтому  $X_i$  берется ближайшее к  $x$  независимо от того, является ли оно больше  $x$  или меньше, так что  $x - X_i$  и  $B' - B_i$  могут иметь положительное и отрицательное значение. Также и  $B_{1i}$  взято из табл. I ближайшее к  $B$ .

$\lambda_x$  представляет ближайшее к  $\lambda_1$  долготу, содержащую целые десятки минут. В № 11  $\log (1)$  взят при широте под № 10,  $\log (1)_m$  взят при широте  $B_m$ ,  $\log (1)'_m$  — при широте под № 79,  $\log (1)'$  и  $\log (2)'$  при широте  $B'$ .

$$\log m = \log m' - \Delta \log m; \quad \log m_x = \log m'_x - \Delta \log m_x.$$

Взят пример обратный примеру 3, и, как видно, получилось то же, что в примере 3 было дано.

Вычисление  $\gamma$  не включено. Оно могло быть вычислено отдельно раньше по § 17.

Здесь еще следует указать, что прямоугольными координатами можно также удобно пользоваться для нанесения опорных точек на обычные мензульные планшеты, где рамкою является трапеция, составленная меридианами и параллелями. Для этого нужно только вычислить прямоугольные координаты Гаусса-Крюгера угловых точек рамки, что для нас теперь не должно составлять затруднений, ибо каждая угловая точка трапеции имеет определенную широту и долготу, следовательно задача сводится к получению плоских прямоугольных координат по географическим. Конечно при этом не требуется той точности, которая была принята в наших вычислениях. Для мензульных планшетов масштаба  $1/25\,000$  и мельче вполне достаточно вычислять координаты угловых точек с точностью до одного метра, что должно упростить применяемые формулы и потребует лишь пятизначных таблиц логарифмов. Какие члены в формулах можно отбросить, это легко установить, прикинув величину этих членов, подобно тому как это неоднократно делалось выше. К ним безусловно относятся члены порядка выше третьего.

Имея прямоугольные координаты угловых точек, мы можем их нанести на планшет, разбив на нем координатную сетку квадратов, которая позволит затем легко нанести все пункты, имеющие плоские прямоугольные координаты. Таким образом и для топографической съемки географические координаты необязательны. Наоборот, следует рекомендовать, чтобы на мензульных брульонах нано-

Формуляр 22.

Дано:  $x = 5\ 928\ 762,568\ 45\ \Pi$ ,  $y = +\ 143\ 360,708$

Найдено:  $B = 53^\circ 58' 20'',9266$  и  $L = 89^\circ 09' 33'',8196$

101. Клейстберг

1	$x$	5 928 762,568				5	$\log(x - X_t)$	$\bar{n}2,94999$	5	$\log(x - X_t)$	$\bar{n}2,9499893$
3	$X_t$	929 653,797				6	$\log(1)_t$	$\bar{2},50987$	11	$\log(1)$	$\bar{2},5098747$
4	$x - X_t$	- 891,229				7	$\log \Delta_1 B$	$\bar{n}1,45986$	12	$\log(B' - B_t)$	$\bar{n}1,4598640$
2	$y$	+ 143 360,708	29	$I_B$	1092.3			$\boxed{5,70780}$	18	$\log u$	3,6652734
8	$\Delta_1 B$	- 28'',83	30	$IV_B$	2984.3	21	$2 \log u$	7,33055	16	$\log(2)'$	$\bar{2},5088453$
9	$B_t$	50° 30'	31	$I_B + IV_B$	4076.3	22	$\log I_B$	3,03835	15	$\log y$	5,1564301
10	$B_t + \frac{1}{2} \Delta_1 B$	53° 29' 45'',6	18	$\log u$	3,6653	23	$2 \log \operatorname{tg} B'$	0,26133	19	$\log \operatorname{tg} B'$	0,1306611
13	$B' - B_t$	- 28'',8313	38	$-\log \cos B$	0,2253	24	$\log II_B$	3,29968	20	$\log v$	5,2870942
14	$B'$	53° 29' 31'',1687	39	$\log \lambda_1$	3,8906			$\boxed{9,94641}$	18	$\log u$	3,6652734
36	$B' - B$	01' 10'',2421	72	$5 \log \lambda_x$	19,460	25	$2 \log y$	10,31236	20	$\log v$	5,2870942
37	$B$	53° 28' 20'',9266	73	$\log \theta$	$\bar{n}22.414$	26	$\log III_B$	2,25927	17	$\log(1)'$	$\bar{2},5098750$
40	$\lambda_1$	7773'' = 2° 09' 33''	74	$\log III_y$	$\bar{n}3,874$	27	$2 \log v$	10,57419	32	$II_B$	+ 1993.6
41	$\lambda_x$	130' = 7800''	75	$III_y$	- 0,0075	28	$\log IV_B$	3,47484	33	$III_B$	+ 181.6
42	$B_t t$	53° 30'			$\boxed{7,7113}$	60	$\log k$	3,66676	34	$\Sigma$	1,8470050.4
43	$\Delta B$	- 1' 39'',0734	89	$2 \log k$	7,334	61	$\log \operatorname{tg} B$	0,13035	31	$-(I_B + IV_B)$	- 4076.6
44	$B_m$	53° 29' 10'',463	93	$2 \log \cos B$	$\bar{1},549$	62	$\log kt$	3,79711	35	$\log(B' - B)$	1,8465974
45	$\Delta B''$	- 99,0734	94	$\log IV_x$	0,594	63	$\log(1)$	$\bar{2},50988$	46	$\log(1)_m$	$\bar{2},5098754$
						64		$\bar{2},50884$			

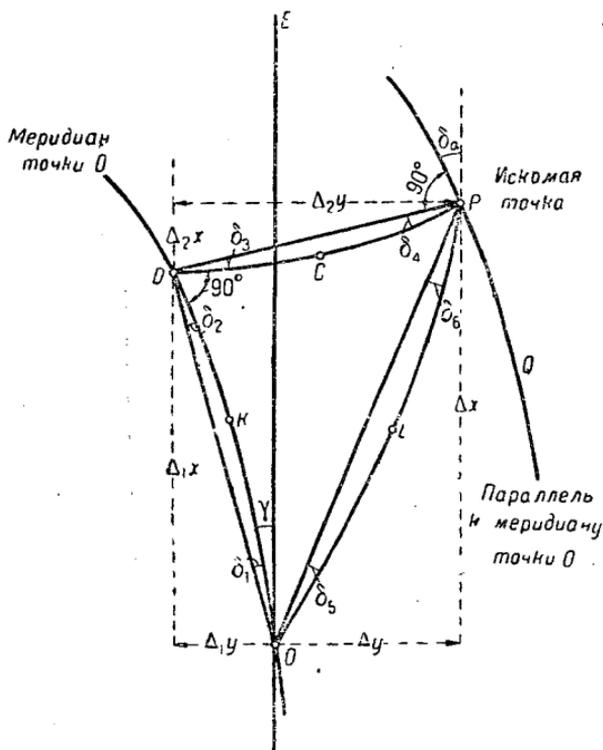
51	$Y_t$	+ 110 584,876	95	$IV_x$	+ 3.9	66	$3 \log Y_m$	15,47376	47		$n^2,4637261$
52	$\Delta Y_0$	+ 71,599	96	$- III_x$	- 517.5			$\boxed{12,59300}$	48	$\log \sin B_m$	$\bar{1},9051015$
53	$Y_0$	+ 110 656,475	97	$- III_x + IV_x$	- 513.6	67	$\log I_y$	1,08548	49	$-\log (1)_m$	1,4901246
54	${}^{n/10} Y$	+ 33 196,942	98	$II_x$	+ 1 100.1			$\boxed{12,59300}$	50	$\log \Delta B''$	$n^1,9959571$
55	$Y_K$	+ 143 853,417	99	$II_x - III_x + IV_x$	+ 586.5	68	$2 \log kt$	7,59432	59	$\log \Delta Y_0$	1,8549094
70	$I_y$	+ 12,1753	120	$\log \Delta \log m$	$\bar{2},964$	65	$\log Y_K$	5,15792	57	$\log \lambda_K \sin B$	3,7971188
71	$- II_y$	- 22,1384	118	$4 \log y$	8,626	69	$\log II_y$	1,34514	56	$\log \sin B$	$\bar{1},9050242$
76	$I_y - II_y + III_y$	- 9,971			$\boxed{10,338}$			$\boxed{5,70790}$	58	$\log \lambda_K$	3,8920946
77	$y_K$	+ 143 843,446	119	$4 \log y_K$	8,652	89	$2 \log k$	7,33353	60	$\log \cos B$	$\bar{1},7746694$
78	$B - B_{II_t}$	- 1' 39",0734	121	$\log \Delta \log m_K$	$\bar{2},970$	90	$\log II_x$	3,04143	81	$\log k$	3,6667640
79	$B_{II_t}$		122	$\log m'$	1 095.2			$\boxed{6,92675}$	82	$\log (B - B_{II_t})$	$n^1,9959571$
	$+ \frac{1}{2} (B - B_{II_t})$	53° 29' 10",463	123	$-\Delta \log m$	- 0.1	91	$2 \log \lambda_K$	7,78419	83	$-\log (1)_{m'}$	$\bar{2},5098754$
80	$(B - B_{II_t})''$	- 99",0734	124	$\log m$	1 095.1	92	$2 \log III_x$	2,71394	60	$\log \Delta X_t$	$n^3,4860817$
84	$X_t$	5 929 653,797	125	$\log m_K'$	1 102.6	105	$\log \Delta y$	$n^2,6837115$			$\boxed{6,3845449}$
85	$\Delta X_t$	- 3 062,539	126	$-\Delta \log m$	- 0.1	106	$\log \Delta x$	$n^1,1658969$	59	$\log k$	3,6667640
86	$X_K$	5 926 591,258	127	$\log m_K$	1 102.5	107	$\log \operatorname{tg} \alpha$	1,5178146	87	$\log \lambda_K \sin B$	3,7971188
101	$\Delta X$	+ 2 185,962			$\boxed{6,754}$	109	$\log \sin \alpha$	$\bar{1},9998000$	88	$-\log (2)$	1,4911562
102	$x_K$	5 928 777,220	130	$2 \log \Delta_1 \lambda$	2,836	110	$\log \cos \alpha$		99	$I_x$	3,3395839
103	$\Delta x = x - x_K$	- 14,652	131	$\log II_\lambda$	$\bar{3},590$	111	$\log d$	$n^2,6839115$	100	$II_x - III_x + IV_x$	+ 586.5
104	$\Delta y = y - y_K$	- 482,738	132	$- II_\lambda$	0.0	112	$\log y_K$	2,15789	111	$\log \Delta X$	3,3396426
108	( $\alpha$ )	88° 15' 00",1	133	$\frac{1}{2} (\log m + \log m_K)$	1 093.8	116	$\log \log m'$	3,03948	64	$\log (2)$	$\bar{2},5088438$
136	$\Delta \lambda$	- 26",1804	134	$I_\lambda - II_\lambda$	1 099	114	$2 \log y$	4,31286	128	$-\log \cos B$	0,2253306
137	$\lambda$	2° 09' 33",8196				113	$\log (6)$	$\bar{2},72662$	129	$\log \Delta_1 \lambda$	$n^1,4180859$
						115	$2 \log y_K$	4 31578	134	$-(I_\lambda - II_\lambda)$	- 1099
						117	$\log \log m_K'$	3,04240	135	$\log \Delta \lambda$	$n^1,4179760$

силась одновременно или вместо географической сетки меридианов и параллелей сетка квадратов в принятой системе плоских координат. Это значительно облегчит пополнения этих брульонов новыми данными, когда все землемерные и маркшейдерские работы будут вестись в общей системе координат Гаусса-Крюгера.

## 20. Непосредственный переход к координатам Гаусса-Крюгера от другой системы плоских координат.

Здесь коснемся вопроса непосредственного перехода от плоских прямоугольных координат других систем к координатам Гаусса-Крюгера. У нас в СССР имеют некоторое распространение координаты Зольднера и в

Донбассе на маркшейдерских планах принята система Баумана, кроме того имеются местные системы обычных прямоугольных координат. Поэтому разберем три примера: 1) переход от координат Зольднера, 2) от координат Баумана и 3) от местной системы простых прямоугольных координат. Примеры намечают путь, по какому следует идти, чтобы дать наиболее простой способ указанного перехода, который был бы под силу каждому рядовому работнику. Статья Клаусса в тетради 18 немецкого журнала *Zeitschrift für Vermessungswesen* от 15 сентября



Черт. 20.

1929 г. и ряд дальнейших статей в том же журнале показывают, что этот вопрос занимает и германских геодезистов, где различные системы плоских координат нашли большое распространение.

Пример 1-й взят из практики Ленинградского Гороткомхоза. Способ перехода как и во втором примере разработан автором. На черт. 20 дуга *OKD* представляет изображение в проекции

Гаусса-Крюгера меридиана точки  $O$ , служащей началом координат в системе Зольднера.  $OE$  — прямая параллельная оси абсцисс Гаусса-Крюгера. Угол между дугой  $OKD$  и  $OE$  обозначим через  $\gamma$ . Дуга  $DCP$  представляет собой изображение сферической ординаты точки  $P$ ; следовательно вследствие конформности проекции Гаусса угол между дугами  $OKD$  и  $DCP$  равен  $90^\circ$ . Дуга  $OLP$  является сферической полярной координатой точки  $P$ . Назовем координаты точки  $P$  в системе Зольднера через  $x'$  и  $y'$ , а в системе Гаусса-Крюгера через  $x$  и  $y$ ; координаты Зольднера точки  $O$  будут равны нулю, а вычисленные по географическим координатам координаты Гаусса-Крюгера этой точки назовем через  $x_0$  и  $y_0$ ; при нахождении этих последних были найдены  $m_0$ , масштаб на точке  $O$  и  $\gamma$ , которые таким образом нам известны ( $\gamma$  оказалась =  $16' 28''$ ,  $170$ ). В  $\gamma$  вообще говоря можно включить и ошибку ориентировки всей сети точек, если бы таковая была (для Ленинграда она оказалась равной  $0''$ ,  $029$ ).

Перейдем от точки  $O$  к точке  $D$ , а затем к точке  $P$ .

Обозначим масштаб на точке  $D$  через  $m'$  и на точке  $P$  через  $m$ ; дальнейших пояснений обозначения на черт. 20 не требуют.

Приступим к выводам.

Длина хорды  $OD = \frac{m_0 + m'}{2} x'$  или  $= m_0 x'$ , так как  $m$  можно считать равным  $m_0$  вследствие незначительности угла  $\gamma$ , а следовательно и  $\Delta_1 y$  (это справедливо в данном частном случае).

Длина хорды  $DP = m_y y'$ , где  $\log m_y = \frac{1}{2} (\log m' + \log m) - \tau$  (по формуле 7, стр. 6).

Далее из чертежа 20:

$$\begin{aligned} \Delta_1 x &= m_0 x' \cos(\gamma + \delta_1) = x' \cos(\gamma + \delta_1) \\ &+ (m_0 - 1) x' \cos(\gamma + \delta_1) - x' - 2 \sin \frac{1}{2} \gamma \sin \frac{1}{2} (\gamma + \delta_1) x' \\ &+ (m_0 - 1) x' - (m_0 - 1) x' \cdot 2 \sin^2 \frac{1}{2} (\gamma + \delta_1) \\ &= x' + (m_0 - 1) x' - \frac{(\gamma + \delta_1)^2}{2 \rho^2} x' \end{aligned}$$

(последний член из-за незначительности отброшен).

Дирекционный угол дуги  $DKO$  равен:

$$180^\circ - (\gamma + \delta_1) - \delta_2 = 180^\circ - (\gamma + \delta_1 + \delta_2).$$

Дирекционный угол хорды  $DP$  равен дирекционному углу дуги  $DKO - 90^\circ - \delta_3$

$$= 90^\circ - (\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3).$$

Значит

$$\begin{aligned}\Delta_2 x &= m_y y \sin(\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) = m_y y' \sin \gamma \\ &\quad + \frac{m_y y' (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)}{\rho} \cos \gamma \\ &= y' \sin \gamma + (m_y - 1) y' \sin \gamma + y' \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{\rho} \\ &\quad + (m_y - 1) y' \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{\rho} + y' \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{\rho} \cdot \frac{\gamma^2}{2\rho^2}.\end{aligned}$$

Последние два члена можно отбросить как исчезающе малые.

Отсюда

$$\Delta x = \Delta_1 x + \Delta_2 x = x' + (m_0 - 1)x' - \frac{(\gamma + \delta_1)^2}{2\rho^2} x' + y' \sin \gamma + (m_y - 1)y' \sin \gamma + y' \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{2\rho^2}. \quad (a)$$

Аналогично:

$$\Delta y = \Delta_2 y - \Delta_1 y = y' - x' - \sin \gamma - (m_0 - 1)x' \sin \gamma - \frac{\delta_1}{\rho} x' + (m_y - 1)y' - y' \frac{(\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2}{2\rho^2}. \quad (б)$$

Обозначим:

$$x' \sin \gamma \text{ через } \delta' y \text{ и } y' \sin \gamma \text{ через } \delta' x.$$

Ордината Гаусса-Крюгера точки  $O$ , равная  $y_0$ , оказалась равной 17,74 км и  $\gamma = 988'', 170$ .

По известным уже нам формулам:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= (7) \Delta_1 x \left(17,74 - \frac{1}{3} \Delta_1 y\right) = (7) x' \left(17,74 - \frac{1}{3} \delta' y\right); \\ \delta_2 &= (7) x' \left(17,74 - \frac{2}{3} \delta' y\right); \quad \delta_1 + \delta_2 = (7) x' (35,48 - \delta' y); \\ \delta_3 &= (7) \delta' x \left(17,74 + \frac{1}{3} \Delta y\right) = (7) \delta' x \left(17,74 + \frac{1}{3} y'\right).\end{aligned}$$

Считая максимально  $x'$  и  $y' = 20$  км, мы получим максимально  $\delta_1 + \delta_2 = 1''$  и  $\delta_3 = 0'', 006$ . Это позволяет выражения  $\frac{1}{2\rho^2} (\gamma + \delta_1)^2$  и  $\frac{1}{2\rho^2} \cdot (\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2$  заменить просто через  $\frac{\gamma^2}{2\rho^2}$ , ошибка от этого будет меньше 1 мм, ибо

$$y' \frac{\gamma \cdot (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)}{\rho^2} = \frac{20\,000 \cdot 2 \cdot 988}{206\,265 \cdot 206\,265} = \approx \frac{1}{1\,000} \text{ м.}$$

Кроме того  $y' \frac{\delta_3}{\rho}$  при  $y' = 20\,000$  составляет только 0,6 мм, поэтому  $\delta_3$  в выражении

$$y' \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{\rho}$$

также можно отбросить.

$$m - 1 = \frac{\log m}{\mu} = 2,3 \log m;$$

$\log m$  в данном частном случае не больше 0,000005, а  $m_y - 1$  максимально около 0,00001;  $y' \sin \gamma$  и  $x' \sin \gamma$  максимально = 100 м, значит  $(m_y - 1)y' \sin \gamma$  максимально достигнет 1 мм, а  $(m_0 - 1)x' \sin \gamma$  будет еще меньше.

Все это приводит равенства (а) и (б) к такому упрощению:

$$\Delta x = x' + \delta'x + \frac{1}{\mu} \log m_0 x' + y' \frac{\delta_1 + \delta_2}{\rho} - x' \frac{\gamma^2}{2\rho^2};$$

$$\Delta y = y' - \delta'y + \frac{1}{\mu} \log m_y y' - x' \frac{\delta_1}{\rho} - y' \frac{\gamma^2}{2\rho^2};$$

$$\frac{1}{\mu} \log m_y = \frac{1}{2\mu} (\log m' + \log m) - \frac{1}{\mu} \tau,$$

или, заменив  $\log m'$  его значением, получим:

$$\frac{1}{\mu} \log m_y = \frac{1}{2\mu} (\log m_0 + \log m) - \frac{\tau}{\mu} - \frac{2y_0 \delta' y}{3R^2},$$

где  $\tau$  берется при  $\Delta y = y' - \delta'y$ .

Выражение  $\frac{2y_0 \delta' y}{3R^2}$ , будучи помножено на максимальное  $y' = 20\,000$ , дает только 0,5 мм, поэтому может быть отброшено.

Подставив вместо  $\delta_1 + \delta_2$  и вместо  $\delta_1$  их значения, приведенные выше, мы можем  $y' \frac{\delta_1 + \delta_2}{\rho}$  и  $x' \frac{\delta_1}{\rho}$  разбить на два слагаемых, из которых вторые слагаемые при максимальных  $x'$  и  $y' = 20$  км будут равны 0,5 мм и 0,2 мм и потому отбрасываются. Это приводит нас в конечном виде к таким формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x' + \delta'x + \frac{2(7) x' y' y_0}{\rho} - \left( \frac{\gamma^2}{2\rho^2} - \frac{\log m_0}{\mu} \right) x' \\ \Delta y &= y' - \delta'y - \frac{(7) x'^2 y_0}{\rho} - \frac{\gamma^2}{2\rho^2} y' + \frac{\log m_y}{\mu} y' \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

$\log m_0 = 16,7$  единиц седьмого знака,

$$\log m_y = \frac{\log m_0 + \log m}{2} - \tau,$$

где  $m$  находится при  $y = y_0 + y' - \delta'y$ ,  $\tau$  берется при  $\Delta y = y' - \delta'y$  (см. табл. III приложения).

$\gamma = 988'', 170$ ,  $y_0 = 17,74$ . Подставляя эти данные и логарифмируя коэффициенты, получим рабочие формулы следующего вида:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $x = x_0 + \Delta x$ ;                         | 10) $\delta'y = \{3,6804049\} x' =$      |
| 2) $\Delta x = x' + \delta x$ ;                   | $= \sin \gamma \cdot x'$ ;               |
| 3) $\delta x = \delta'x + I_x - II_x$ ;           | 11) $I_y = \{10,33723\} x'^2$ ;          |
| 4) $\delta'x = \{3,6804049\} y' =$                | 12) $II_y = \{5,05976\} y'$ ;            |
| $= \sin \gamma \cdot y'$ ;                        | 13) $III_y = \{7,36222\} y' \log m_y$ ;  |
| 5) $I_x = \{10,63826\} x' y'$ ;                   | 14) $\log m_y = \frac{1}{2} (\log m_0 +$ |
| 6) $II_x = \{6,88252\} x'$ ;                      | $+ \log m) - \tau$ ;                     |
| 7) $y = y_0 + \Delta y$ ;                         | 15) $\log m_0 = 16,7$ ;                  |
| 8) $\Delta y = y' - \delta y$ ;                   | 16) $\log m = \{2,72602\} y_m^2$ ,       |
| 9) $\delta y = \delta'y + I_y + (II_y - III_y)$ ; | где $y_m = y_0 + y' - \delta'y$ .        |

$I_x$ ,  $II_x$ ,  $I_y$  и  $(II_y - III_y)$  получаются в метрах при  $x'$  и  $y'$ , выраженных в километрах.

Для величин  $\delta'x$  или  $\delta'y$ ,  $I_x$ ,  $II_x$ ,  $I_y$  и для  $(II_y - III_y)$  вместе вычислены по соответственным аргументам таблицы, которые значительно облегчают вычисление.

Таблица для  $\delta'x$  или  $\delta'y$ , для  $II_x$  и  $I_y$  (см. ниже) даны при  $y'$  или  $x'$  или  $x' + \delta'x$  равными 0,1 м, 0,2 м... 0,9, 1 м, 2 м... 9 м, 10 м, 20 м... 100 м, 200 м... 1 км, 2 км... 10 км, 20 км и 30 км. Для  $I_x$  таблица с двумя входами по двум аргументам  $x'$  и  $y'$  через 0,5 км от 0 до 10 км. Для  $II_y - III_y$  по аргументу  $y'$  через 0,5 и 0,2 км от -10 до +10 км.

Если  $x'$  и  $y'$  были больше 10 км, то все поправочные члены вычислялись непосредственно без указанных таблиц по приведенным формулам, что также не доставляло затруднений.

Остается еще вывести переход от дирекционного угла  $\alpha'$  в системе Зольднера к дирекционному углу  $\alpha$  в проекции Гаусса-Крюгера. Вернемся к черт. 20.

Дирекционный угол дуги  $PCD$  в проекции Гаусса-Крюгера =  $= 270^\circ - (\gamma_1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)$ .

Дирекционный угол параллели  $PQ = 270^\circ - (\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4) + 90^\circ = 360^\circ - (\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)$ .

Значит угол, обозначенный на черт. 20 через  $\delta\alpha$ , равен  $\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$ ;  $\delta_1 + \delta_2$  нами определено выше, а  $\delta_3 + \delta_4 = (7) \delta'x (2y_0 + y')$ .

Таким образом

$$\left. \begin{aligned} \delta\alpha &= \gamma + (7) x' (2y_0 - \delta'y) + (7) \delta'x (2y_0 + y') \\ &= \gamma + (7) 2y_0 (x' + \delta'x) - (7) x' \delta'y + (7) y' \delta'x \\ &= \gamma + (7) 2y_0 (x' + \delta'x) - (7) \sin \gamma (x'^2 - y'^2) \\ &= \gamma + I_\gamma - II_\gamma, \end{aligned} \right\} (134)$$

где  $I_\gamma = \{5,95270\} (x' + \delta'x)$ ;  $II_\gamma = \{5,083\} (x'^2 - y'^2)$ .

$I_{\gamma}$  и  $II_{\gamma}$  получаются в секундах, для  $II_{\gamma}$   $x'$  и  $y'$  берутся в км. Чтобы от  $\alpha'$  какого-нибудь направления на точке  $P$ , черт. 20, перейти к  $\alpha$ , следует применить известную нам формулу:

$$\alpha + \delta = T = \alpha' - \delta\alpha. \quad (135)$$

$\delta$  — поправка за кривизну направления на проекции Гаусса-Крюгера.

$\delta\alpha$  — поправка, вычисленная по формуле (134),  $\alpha'$  — дирекционный угол в проекции Зольднера.

Формулу для  $\delta\alpha$  можно вывести, исходя из  $\delta_b$  и  $\delta_g$  на черт. 20 и из сближения ординат в проекции Зольднера.

Рассмотренный пример, как видим, относится к тому случаю, когда начало координат системы Зольднера близко к среднему меридиану системы Гаусса-Крюгера ( $\gamma$  — мало) \* и когда координаты Зольднера распространяются на небольшую площадь, — последнее бывает при съемках городов.

Пример 2-й носит уже более общий характер.

Требуется для всего Донбасса разработать такой способ перехода от координат Баумана к координатам Гаусса-Крюгера, чтобы каждое рудоуправление могло своими силами выполнить этот переход. Наиболее рациональным представляется следующий путь.

1. Выберем в каждом рудоуправлении свое временное начало, совпадающее с триангуляционной точкой Баумана, занимающей центральное место на территории горных разработок данного рудоуправления, и перенесем без поворота в это начало координатные оси Баумана и также координатные оси системы Гаусса-Крюгера и назовем координаты относительно этого начала переходными, обозначив их для системы Баумана через  $x'$  и  $y'$ , а для Гаусса-Крюгера — через  $x$  и  $y$ .

2. Вычислим по имеющимся географическим координатам координаты Гаусса-Крюгера, сближение меридиана и масштаб в этом начале.

Назовем соответственно эти величины через  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $m_0$ . Очевидно координаты Гаусса-Крюгера каждой точки в пределах данного рудоуправления будут  $x_0 + x$  и  $y_0 + y$ .

Так же приходится обозначить и координаты Баумана этих точек, которые нам даны, т. е. имеющиеся координаты Баумана мы назовем:  $x'_0 + x'$  и  $y'_0 + y'$ , где  $x'_0$  и  $y'_0$  — координаты Баумана временного начала.

3. Дадим формулы для перехода от  $x'$  и  $y'$  к  $x$  и  $y$ , а следовательно и для перехода к  $x_0 + x$  и  $y_0 + y$ .

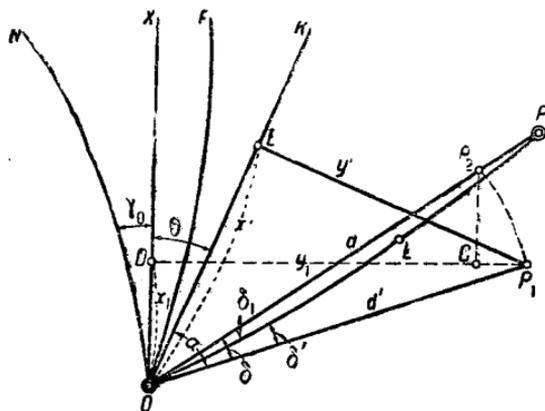
\* Кто держится еще за координаты Зольднера, предлагает как компромисс брать начало координат Зольднера на средних меридианах полос Гаусса-Крюгера.

Бауман, как известно, в своей проекции применил двойной переход—сперва со сфероида на шар, а затем уже с шара на плоскость.

Радиус шара  $R$  вычислялся по особой формуле, хотя этого не следовало бы делать, так как он тождественно равен среднему радиусу кривизны сфероида в точке, имеющей начальную широту проекции  $= 42^{\circ} 12' 32''$ , 7.

Если исследовать искажения примененной Бауманом равнопромежуточной проекции на шаре, то окажется, что  $\log$  масштаба на крайней параллели района меньше 5 единиц девятого знака, а искажения углов для бесконечно малых расстояний не превышают  $0''$ , 0025. Это позволяет в пределах одного рудоуправления совершенно игнорировать не только искажения длин, но и искажения углов, получающихся при переходе

со сфероида на шар, иначе говоря дуги больших кругов на части шаровой поверхности Баумана, отвечающей территории рудоуправления, можно считать совпадающими с геодезическими линиями на сфероиде, т. е. считать длины и азимуты этих дуг равными длинам и азимутам соответствующих геодезических линий на сфероиде. Это значит, что при вычислении искажений



Черт. 21.

как в проекции Баумана, так и в проекции Гаусса-Крюгера в пределах отдельных рудоуправлений Донбасса мы будем иметь в виду постоянный радиус кривизны, равный радиусу  $R$  шара Баумана.

$$\log R = 6,8048036.$$

Перейдем к выводу необходимых формул. Пусть на черт. 21 на проекции Гаусса-Крюгера точка  $O$  представляет собой временное (переходное) начало данного рудоуправления,  $OX$  — ось абсцисс временного начала в системе Гаусса-Крюгера,  $ON$  — меридиан точки  $O$ ,  $P$  — точка, координаты которой определяются (трансформируются),  $OF$  — дуга, представляющая изображение сферической ординаты (абсциссы) Баумана,  $OK$  — касательная к этой дуге в точке  $O$ .

Отложим  $OE = x'$ , переходной плоской абсциссе Баумана.

$$EP_1 \text{ перпендикулярно } OK \text{ и } EP_1 = y',$$

переходной плоской ординате Баумана

Тогда  $OP_1 = d'$  будет плоское расстояние на проекции Баумана.  $OLP$  — изображение дуги большого круга на проекции Гаусса-Крюгера, соединяющей точки  $O$  и  $P$ .  $OP = d$  — хорда этой дуги, равная плоскому расстоянию на проекции Гаусса-Крюгера. Отложим  $OP_2 = OP$ . Назовем  $\angle POP_1$  через  $\delta$ , угол между касательной к дуге  $OLP$  в точке  $O$  и хордой  $OP$  назовем через  $\delta_1$  и угол между этой касательной и прямой  $OP_1$  через  $\delta'$ .

Вследствие конформности проекции Гаусса-Крюгера угол между дугами  $OF$  и  $OLP$  равен сферическому углу простираения  $A$  в проекции Баумана.  $\angle KOP_1 =$  плоскому углу простираения  $\alpha$  в проекции Баумана. Таким образом  $\delta' = \alpha - A$  (см. „Триангуляция Донецкого каменноугольного бассейна“ Баумана) и может быть найдено по формуле, данной Бауманом.  $\delta_1$  находится по формулам проекции Гаусса-Крюгера (формула 42).

$$[\delta = \delta' + \delta_1. \quad (a)$$

$$\angle KOX = \Theta = 360^\circ - Nord - \gamma_0. \quad (б)$$

*Nord* — угол простираения направления на север, дается в абрисах „Триангуляции Донецкого каменноугольного бассейна“.

Для точки  $P_1$  координаты Гаусса-Крюгера при начале  $O$  выразятся по известным формулам аналитической геометрии следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x' \cos \Theta - y' \sin \Theta \\ y_1 &= x' \sin \Theta + y' \cos \Theta \end{aligned} \right\}. \quad (в)$$

Чтобы перейти от координат Гаусса-Крюгера точки  $P_1$  к таким же координатам точки  $P$ , перейдем сначала к точке  $P_2$ . По незначительности угла  $\delta$  можно применить при этом такие формулы, вытекающие из подобия треугольников  $P_2P_1C$  и  $P_1DO$  ( $P_2C$  параллельно  $XO$ ).

$$x_2 = x_1 + y_1 \delta \text{ и } y_2 = y_1 - x_1 \delta,$$

где  $\delta$  выражено в аналитической мере, а  $x_2$  и  $y_2$  — координаты точки  $P_2$ . Чтобы затем перейти к точке  $P$ , очевидно нужно применить такие формулы:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_2 + x_2 k \text{ или } = x_2 + x_1 k \\ y &= y_2 + y_2 k \text{ или } = y_2 + y_1 k \end{aligned} \right\}, \quad (г)$$

где  $k$  — относительное удлинение  $d$  по отношению к  $d'$ , т. е.

$$k = \frac{d}{d'} - 1.$$

Подставляя значения  $x_2$  и  $y_2$  в формулы (г), получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + y_1 \delta + x_1 k = x_1 + \Delta x \\ y &= y_1 - x_1 \delta + y_1 k = y_1 + \Delta y \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

$$k = \frac{d}{s} - 1 - \left( \frac{d'}{s} - 1 \right) = \frac{d - d'}{s} = \sim \frac{d - d'}{d'} = \frac{d}{d'} - 1, \quad (е)$$

где  $s$  — расстояние  $OP$  на местности (действительное).

$\gamma_0$  можно вычислить по формулам проекции Гаусса-Крюгера; как видим,  $k$  находится как разность величины  $\frac{d}{s} - 1$  и  $\frac{d'}{s} - 1$ , которые также могут быть вычислены: первая по данным в этом руководстве формулам проекции Гаусса-Крюгера, а вторая по формуле Баумана, помещенной в его труде „Триангуляция Донецкого каменноугольного бассейна“. \*

Таким образом задача у нас решена, остается составить необходимые таблицы, чтобы облегчить вычисление. Приведем здесь формулы, выражающие величины  $\delta$  и  $k$ .

$$\delta = \delta' + \delta_1$$

$$\delta' = \alpha - A = \frac{2x_0' + x}{4R^2} y' + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{12} \left[ \frac{(2x_0' + x')^2}{2R^2} - \frac{x_{\max}^2}{R^2} \right]$$

(см. „Триангуляция Донецкого каменноугольного бассейна“)

$$\delta_1 = \frac{1}{6R^2} (3y_0 + y_1) x_1 = \frac{1}{2R^2} \left( y_0 + \frac{1}{3} y_1 \right) x_1$$

(см. формулу (42))

$$k = \frac{d}{s} - 1 - \left( \frac{d'}{s} - 1 \right)$$

$$\frac{d}{s} - 1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{y_0^2}{2R^2} + \frac{(y_0 + y_1)^2}{2R^2} \right] - \frac{1}{6} \frac{y_1^2}{2R^2}$$

(см. формулу (33))

$$\begin{aligned} \frac{d'}{s} - 1 &= \frac{1}{6} \left[ \frac{(2x_0' + x')^2}{2R^2} - \frac{x_{\max}^2}{R^2} \right] \\ &+ \frac{\sin^2 \alpha}{12} \left[ \frac{(2x_0' + x')^2}{2R^2} - \frac{x_{\max}^2}{R^2} \right] \end{aligned}$$

(см. „Триангуляция Донецкого каменноугольного бассейна“)

\* „Триангуляция Донецкого каменноугольного бассейна“. Вып. I; под ред. В. И. Баумана, 1917. (Можно выписать из Ленинградского Горного Института).

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'}; \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{x' y'}{x'^2 + y'^2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{y'^2}{x'^2 + y'^2};$$

$$\frac{x_{\max}^2}{R^2} = 0,000157243519$$

из вычислений Донецкой триангуляции.

Введем для удобства следующие обозначения:

$$1) m = \frac{x' y'}{x'^2 + y'^2}; \quad 2) n = \frac{y'^2}{x'^2 + y'^2} + 2; \quad 3) \frac{2x_0' + x'}{4R^2} = A_0 + p,$$

$$\text{где } A_0 = \frac{x_0'}{2R^2}; \quad p = \frac{x'}{4R^2};$$

$$4) \frac{(2x_0' + x')^2}{24R^2} - \frac{x_{\max}^2}{12R^2} = B,$$

или

$$B = \frac{(2x_0' + x')^2}{24R^2} - 0,000013104;$$

$$5) \frac{y_0 + \frac{1}{3} y_1}{2R^2} = C_0 + q, \quad \text{где } C_0 = \frac{y_0}{2R^2} \text{ и } q = \frac{y_1}{6R^2};$$

$$6) \frac{1}{2} \left[ \frac{y_0^2}{2R^2} + \frac{(y_0 + y_1)^2}{2R^2} \right] - \frac{1}{6} \frac{y_1^2}{2R^2} = D_0 + D_1 - \tau,$$

$$\text{где } D_0 = \frac{y_0^2}{4R^2}, \quad D_1 = \frac{(y_0 + y_1)^2}{4R^2} \text{ и } \tau_1 = \frac{y_1^2}{12R^2}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (A_0 + p) y' + mB + (C_0 + d) x_1 \\ k &= D_0 + D_1 - \tau_1 - nB = D - nB \end{aligned} \right\} \quad (\text{ж})$$

Составим прежде всего таблицы величин:  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  и  $\tau_1$  в зависимости от  $x'$ ,  $y'$  и  $y_1$ . Они будут годны для всех рудоуправлений Донбасса. Затем для данного рудоуправления вычислим величины  $A_0$ ,  $C_0$  и  $D_0$  и составим таблицы величин  $B$  и  $D$  — первую в зависимости от  $x'$ , вторую в зависимости от  $y_1$ ; наконец полезно составить для данного рудоуправления таблицу величин  $x_1$  и  $y_1$  в зависимости от  $x'$  и  $y'$  по формулам (в), после чего можно прямо составить таблицу поправок  $\Delta x$  и  $\Delta y$  с двумя входами в зависимости от  $x'$  и  $y'$  от 0 до  $\pm 20$  км через 1 км для данного рудоуправления; имея эти таблицы, легко будет

находить координаты Гаусса-Крюгера в окончательном виде по формулам (первым двум):

$$\left. \begin{aligned} x_0 + x &= x_0 + x' \cos \Theta - y' \sin \Theta + \Delta x \\ y_0 + y &= y_0 + x' \sin \Theta + y' \cos \Theta + \Delta y \\ \Delta x &= y_1 \delta + x_2 k; \Delta y = y_1 k - x_1 \delta \\ \delta &= (A_0 + p) y' + (C_0 + q) x_1 + mB \\ k &= D - nB \\ \log R &= 6,80480; \log R^2 = 13,60961 \end{aligned} \right\} (135)^*$$

По правочные члены  $\Delta x$  и  $\Delta y$  будут малы, поэтому указанные таблицы не будут обширны, их достаточно составить через 1 км для аргументов  $x'$  и  $y'$ .

Таков рекомендуемый путь перехода от проекции Баумана, очевидно он пригоден и для какой угодно проекции, если для нее будут даны формулы искажений углов и длин при конечных расстояниях.

Пример 3-й — переход от местной системы прямоугольных плоских координат к системе Гаусса-Крюгера. Для этого должна быть возможность получить координаты Гаусса-Крюгера одной из точек и географический азимут одного из направлений данной сети, при этом всегда можно перейти к координатам Гаусса-Крюгера местного начала координат и вычислить угол, представляющий собой криволинейный дирекционный угол оси  $X$  местной системы.

Пусть на черт. 22 на проекции Гаусса-Крюгера:

$OX$  — ось  $x$  Гаусса-Крюгера,

$O$  — начало координат местной системы,

$OM$  — меридиан точки  $M$ ,

$OX_M$  — ось  $x$  местной системы (дуга большого круга),

$OK$  — к ней касательная,

$OP$  — направление на некоторую точку  $P$ , географический азимут  $A$  которого дан.

$OP$  благодаря конформности проекции имеет дирекционный угол в местной системе, равный  $\alpha_M$  на черт. 22.

Очевидно из этого чертежа, что

$$\theta = A - \gamma - \alpha_M, \quad (136)$$

где  $\gamma$  — сближение меридиана точки  $O$  в системе Гаусса-Крюгера, получаемая одновременно с вычислением координат Гаусса-Крюгера точки  $O$ .

\* Можно раньше на черт. 21 найти координаты Баумана точки  $P$ , перейдя от  $P_1$ , а затем сделать поворот осей. Подробнее см. Н. Г. Келль, Нанесение координатной сетки Баумана на планшетах одноверстной съемки Донбасса. Издание „Угля“, 1930.



рез  $x_2$  и  $y_2$ , а затем и к координатам точки  $P$  относительно начала  $O$ . Опустим перпендикуляр  $P_2K$  на  $DP_1$ ,

$$\triangle P_2KP_1 \sim \triangle ODP_1.$$

$OP_2 = OP_1$  — есть искаженная длина  $s_1$ , равная длине на местности, поскольку  $x_1$  и  $y_1$  не искажены.

$OP$  — искаженная длина  $d$  согласно проекции Гаусса-Крюгера. Отношение сторон треугольников  $P_2P_1k$  и  $P_1DO$  будет равно, как и на черт. 21,

$$\frac{P_2P_1}{OP_1} = \frac{d \cdot \delta}{d} = \delta.$$

Отсюда

$$kP_1 = x_1\delta; \quad kP_2 = y_1\delta,$$

где  $\delta$  выражено в аналитической мере.

Таким образом координаты точки  $P_2$  будут:

$$x_2 = x_1 + y_1\delta \quad \text{и} \quad y_2 = y_1 - x_1\delta. \quad (137)$$

Эти выражения можно получить и из формул поворота осей. Координаты же точки  $P$  получают такое выражение:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x_2 \frac{d}{s} = x_2 + \frac{d-s}{s} x_2 = x_2 + \frac{d-s}{d} x_1 \\ (x_2 \text{ заменено через } x_1) \quad (y_2 \text{ заменено через } y_1) \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

или на основании формулы (137):

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x_1 + y_1\delta + \frac{d-s}{s} x_1 \\ \Delta y &= y_1 - x_1\delta + \frac{d-s}{s} y_1 \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

Остается выразить  $\delta$  и  $\frac{d-s}{s}$ . По формулам (56) стр.

$$\delta = \frac{x_1}{2R^2} (y_0 + \frac{1}{3}y_1), \quad (a)$$

$$\frac{d-s}{s} = \frac{(y_0 + y_1) + (y_0 + y_1)y_0 + y_0^2}{6R^2}. \quad (б)$$

При незначительности  $x_1$  и  $y_1$  и при незначительности самих поправок  $y_1\delta$ ,  $x_1\delta$ ,  $\frac{d-s}{s} x_1$  и  $\frac{d-s}{s} y_1$  выражение для  $\delta$  и  $\frac{d-s}{s}$  можно преобразовать так:

$$\delta = \frac{y_0}{2R^2} x_1, \quad (140)$$

т. е. при  $y_0$  — постоянном  $\delta$  является линейной функцией от  $x_1$

$$\frac{d-s}{s} = \frac{y_0^2 + 2y_0y_1 + y_1^2 + y_0^2 + y_1y_0 + y_0^2}{6R^2} = \frac{y_0^2}{2R^2} + \frac{y_0y_1}{2R^2}. \quad (141)$$

Подставив эти значения  $\delta$  и  $\frac{d-S}{S}$  в формулы (139), получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x_1 + \frac{y_0}{2R^2} x_1 y_1 + \frac{y_0^2}{2R^2} x_1 + \frac{y_0}{2R^2} x_1 y_1 = x_1 \\ &\quad + \frac{y_0}{R^2} x_1 y_1 + \frac{y_0^2}{2R^2} x_1 \\ \Delta y &= y_1 - \frac{y_0}{2R^2} x_1^2 + \frac{y_0^2}{2R^2} y_1 + \frac{y_0^2}{2R^2} y_1^2. \end{aligned} \right\} (142)$$

Указанный выше поворот осей местной системы, как известно, дает такие формулы:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_M \cos \theta - y_M \sin \theta \\ y_1 &= y_M \cos \theta + x_M \sin \theta \end{aligned} \right\} (143)$$

Если  $\theta$  угол небольшой, что бывает тогда, когда по формуле (136)  $\alpha_M$  равно  $A$  или почти равно  $A$ , т. е. когда местная система ориентирована по географическому меридиану, то формулы (143) могут быть преобразованы так:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_M - \frac{\theta}{\rho} y_M - \frac{\theta^2}{2\rho^2} x_M = x_M - y_M \sin \theta - C x_M \\ y_1 &= y_M + \frac{\theta}{\rho} x_M - \frac{\theta^2}{2\rho^2} y_M = y_M + x_M \sin \theta - C y_M \end{aligned} \right\} (144)$$

где  $\theta$ —угол, выраженный в секундах, а  $C = \frac{\theta^2}{2\rho^2}$ .

Подставляя значение  $x_1$  и  $y_1$  в формулы (142) и принимая во внимание, что разница между  $x_M, y_M$  и  $x_1, y_1$  незначительна, можно в поправочных членах  $x_1, y_1$  заменить через  $x_M$  и  $y_M$  и в конечном счете получить следующее выражение:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x_M - y_M \sin \theta - \frac{\theta^2}{2\rho^2} x_M + \frac{y_0}{2R^2} 2x_M y_M \\ &\quad + \frac{y_0^2}{2R^2} x_M = x_M - y_M \sin \theta - (C - A) x_M \\ &\quad + B 2x_M y_M = x_M - I_c - II_x + III_x \end{aligned} \right\} (145)$$

где  $C = \frac{\theta^2}{2R^2}$ ;  $A = \frac{y_0^2}{2R^2}$ ;  $B = \frac{y_0}{2R^2}$  — постоянные величины

$$I_x = y_M \sin \theta; \quad II_x = (C - A) x_M; \quad III_x = B 2x_M y_M.$$

Аналогично:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= y_M + x_M \sin \theta - \frac{\theta^2}{2\rho^2} x_M - \frac{y_0}{2\rho^2} x_M^2 + \frac{y_0^2}{2R^2} y_M \\ &+ \frac{y_0}{2R^2} y_M^2 = y_M + x_M \sin \theta - (C - A) y_M \\ &+ B(x - y)(x + y) = y_M + I_y - II_y + III_y, \end{aligned} \right\} (146)$$

где

$$I_y = x_M \sin \theta; \quad II_y = (C - A) y_M \quad \text{и} \quad III_y = B(x_M + y_M)(x_M - y_M).$$

Выпишем отдельно рабочие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x_M - I_x - II_x + III_x \\ \Delta y &= y_M + I_y - II_y + III_y \end{aligned} \right\} (147)$$

Для величин I и II целесообразно составить таблицы, а для III вычертить график: или гиперболические кривые, или анаморфозу, или номограмму из выравненных точек по правилам номографии (см. хотя бы „Основы номографии“ проф. И. М. Герсеванова, 1932).

I и II составляют линейную функцию от  $x_M$  или  $y_M$  с постоянными множителями  $\sin \theta$  и  $C - A = \frac{\theta^2}{2\rho^2} - \frac{y_0^2}{2R^2}$ .

III представляет собой график от двух переменных (аргументов)

$$2x_M \text{ и } y_M, \text{ можно } x_M \text{ и } 2y_M \text{ или } x_M + y_M \text{ и } x_M - y_M,$$

в первом случае получим  $III_x$ , во втором —  $III_y$ .

**Пример из Анжеро-судженской триангуляции.** Она имела местную систему координат. Путем привязки к государственной триангуляции вычислено:

$x_0 = 6\,222\,129,922$ ;  $y_0 = -60\,630,092$ ;  $\gamma = -0^\circ 48' 34'',299$   
и установлено, что

$$\theta = -48' 00'',7.$$

Отсюда постоянные:

$$\log \sin \theta = \bar{2},1450588; \quad \log C = \bar{5},98912; \quad \log A = \bar{5},65396;$$

$$\log (C - A) = \bar{5},71973; \quad \log B = \bar{10},87127,$$

или если аргументы брать в км, то

$$\log B = \bar{4},87127.$$

На основании этих данных составлены нижепомещенные табл. 1 и 2 и график для величин  $III_x$  и  $III_y$ .

Таблица 1.

Для величин  $I_x$  и  $I_y$  ( $I_x = u_M \sin \theta$ ;  $I_y = x_M \sin \theta$ ).

Аргумент $u_M$ или $x_M$	$I_x$ или $I_y$										
0,01 м	0,0001 м	0,1 м	0,0014 м	1 м	0,0140 м	10 м	0,1397 м	100 м	1,3966 м	1 км	13,9666 м
0,02 "	2 "	0,2 "	28 "	2 "	279 "	20 "	0,2793 "	200 "	2,7931 "	2 "	27,9312 "
0,03 "	3 "	0,3 "	42 "	3 "	499 "	30 "	0,4190 "	300 "	4,1897 "	3 "	41,8967 "
0,04 "	0,0006 м	0,4 "	0,0056 "	4 "	0,0559 "	40 "	0,5586 "	400 "	5,5862 "	4 "	55,8623 "
0,05 "	7 "	0,5 "	70 "	5 "	698 "	50 "	0,6983 "	500 "	6,9828 "	5 "	69,8279 "
0,06 "	8 "	0,6 "	84 "	6 "	838 "	60 "	0,8379 "	600 "	8,3794 "	6 "	83,7935 "
0,07 "	0,0010 м	0,7 "	0,0098 "	7 "	0,0978 "	70 "	0,9776 "	700 "	6,7759 "	7 "	97,7590 "
0,08 "	11 "	0,8 "	112 "	8 "	1117 "	80 "	1,11720 "	800 "	11,1725 "	8 "	111,7246 "
0,09 "	13 "	0,9 "	126 "	9 "	1257 "	90 "	1,2569 "	900 "	12,5690 "	9 "	125,6902 "

Таблица 2

Для величин:  $\Pi_x = (C-A) x_M$  или  $\Pi_y = (C-A) y_m$ .

М КМ	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
	м и л л и м е т р ы									
0	00	5	10	16	21	26	31	37	42	47
1	52	58	63	68	73	79	84	89	94	100
2	105	110	115	121	126	131	136	142	147	152
3	157	163	168	173	178	184	189	194	199	205
4	210	215	220	226	231	236	241	247	252	257
5	262	268	273	278	283	289	294	299	304	310
6	315	320	325	331	336	341	346	352	357	362
7	367	373	378	383	388	394	399	404	409	415
8	420	425								

График выражает собой функцию:

$$f = Bxy = \{1,87127\} xy, \quad (148)$$

где  $x$  и  $y$ —абсциссы и ординаты графика, выражающие собой в км  $2x_M$  и  $2y_M$  или  $2y_M$  и  $x_M$  для  $\Pi_x$ , или  $x_M + y_M$  и  $x_M - y_M$  для  $\Pi_y$ ,  $f$  получается в мм.

Для примера функцию (148) представим на графике рядом гипербол, при построении которых удобнее поступить следующим образом.

Задаемся определенным интервалом между значениями функции  $f$ , в данном случае берем 10 мм и вычисляем, какова должна быть одна переменная (координата) в равенстве (148), если другая (интервал другой между гиперболами) будет принимать последовательно круглые значения 0,5..., 1,5..., 3 км... и т. д. до тех пор, пока одна не станет равна другой (дойдет до середины гиперболы).

Для этого из равенства (148) мы имеем:

$$10 = \{1,87127\} xy \text{ или } x = \frac{13,450}{\Delta y} \text{ или } y = \frac{13,450}{\Delta x}. \quad (149)$$

Средина первой гиперболы, ее вершина, будет при координатах графика  $x = y = \sqrt{13,450} = 3,67$  км. Средина второй при  $x = y = 3,67 \sqrt{2}$ , средина третьей при  $3,67 \sqrt{3}$  и т. д.

Таким образом первая гипербола будет отвечать  $\Pi_x$  и  $\Pi_y$  равным 10 мм, вторая гипербола — 20 мм, третья — 30 мм, четвертая — 40 мм и т. д.

Пример перечисления координат при помощи таблиц 1 и 2 и графика.

Название пункта	$u_M$	$I_y$	$y_1 = u_M + I_y$	$II_y$	$III_y$	$\Delta y = y_1 - II_y + III_y$	$\left. \begin{array}{l} \Delta y \\ \Delta x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{полученное} \\ \text{другим спо-} \\ \text{собом через} \\ \text{полярн. ко-} \\ \text{ордин. для} \\ \text{сравнения} \end{array}$
	$x_M$	$I_x$	$x_1 = x_M - I_x$	$II_x$	$III_x$	$\Delta x = x_1 - II_x - III_x$	
Я	- 3 471,911	+ 14,842	- 3 457,069	- 0,138	- 0,008	- 3 456,894	- 3 456,893
	+ 1 062,791	- 48,487	+ 1 111,278	+ 0,056	- 0,005	+ 1 111,227	+ 1 111,229
Р	+ 1 325,428	+ 64,226	+ 1 389,694	+ 0,069	+ 0,014	+ 1 389,639	+ 1 389,642
	+ 4 601,772	+ 18,511	+ 4 583,261	+ 0,241	+ 0,009	+ 4 583,011	+ 4 583,009
Андреевская и т. д.	+ 4 010,015	- 59,779	+ 3 950,236	+ 0,210	+ 0,002	+ 3 950,028	+ 3 950,025
	- 4 280,434	+ 56,002	- 4 336,436	- 0,225	- 0,024	- 4 336,187	- 4 336,189

По формуле (149) вычислим таблицу для построения этих гипербол.

Таблица 3 для построения гипербол величин  $\Pi_x$  и  $\Pi_y$ .

Значения интервалов в км одной координаты между гиперболами ( $\Delta u$ или $\Delta x$ графика)	Соответственное значение другой координаты в км ( $x$ или $y$ графика)
0,0	26,90
0,6	22,42
0,7	19,21
0,8	16,81
1,0	13,45
1,25	10,76
1,5	8,97
2,0	6,72
2,5	5,38
3,0	4,48

Пользование графиком простое: по оси абсцисс берется один аргумент  $2x_M$  или  $2y_M$  или  $x_M + y_M$ , по оси ординат — другой  $y_M$  или  $x_M$ , или  $x_M - y_M$ , или, наоборот, точка обычно попадает между какими-нибудь двумя гиперболами, и поскольку они отличаются только на 10 мм, легко на-глаз с точностью до 1 мм получить соответствующее значение  $\Pi_x$  или  $\Pi_y$  \*. Можно построить номограммы из выравненных точек на-подобие тех, которые например даны в таблицах Гаусса-Крюгера-Красовского XII, XIII и XIV, стр. 70—79, изд., 1931.

Вместо табл. 1 можно применить логарифмы или арифмометр, тогда в случае пользования логарифмами вычисление удобно расположить в следующем формуляре:

1	2	3	4	5
	$x_M$	$y_M$		
	$- y_M \sin \theta$	$+ x_M \sin \theta$	$\log y_M$	$\log x_M$
Точка	$x_1$	$y_1$	$\log \sin \theta$	$\log \sin \theta$
	м	м	$\log y_M \sin \theta$	$\log x_M \sin \theta$

\* См. „Геодезист“ № 5, 1931.

6	7	8	9	10
$2x_M$ или $2y_M$	$-II_x$	$-II_y$	$\Delta x = x_1 + \delta_x$	$\Delta y = y_1 + \delta_y$
$x_M + y_M$	$+III_x$	$+III_y$	$x_0$	$y_0$
$x_M - y_M$	$\delta_x$	$\delta_y$	$x$	$y$
км	мм	мм	м	м

Если  $\theta$  — довольно значительный угол, то табл. 2 следует разделить на две: одну, представляющую линейную функцию, от  $x_M$  или  $y_M$  с постоянным множителем  $C = \frac{\theta^2}{2\rho^2}$ , другую — так же линейную функцию — от  $x_1$  или  $y_1$  с постоянным множителем  $A = \frac{y_0^2}{2R^2}$ .

## § 21. Система координат Гаусса-Крюгера, размеры и номенклатура планшетов на I Всесоюзном маркшейдерском съезде.

На состоявшемся 12—19 января 1932 г. I Всесоюзном маркшейдерском съезде по вопросу о единой системе координат Гаусса-Крюгера и о номенклатуре планшетов крупных масштабов в комиссии были одобрены следующие предложения.

В отношении координат Гаусса-Крюгера следует исходить из постановления III Геодезического совещания (см. § 9).

В виду того что некоторые уже перешли к трехградусной координатной полосе (зоне) (Урал — средний меридиан  $60^\circ$ , Ленинград —  $30^\circ$ ), трехградусную разбивку на полосы следует оставить в силе, как основную разбивку, с перекрытием для основных геодезических работ смежных полос не менее чем на  $\frac{1}{2}^\circ$ , для некоторых обособленных районов (Донбасс, Кузбасс) допускать перекрытие до  $1\frac{1}{2}^\circ$ . (Заход в смежную полосу).

Начало координат конечно остается на экваторе, с отбрасыванием в абсциссах, если потребуется для сокращения, тысяч и сотен километров.

Для маркшейдерского дела, как и для других, важно обеспечить постоянство координат, предусмотреть, чтобы с дальнейшим уточнением государственных триангуляционных работ не происходили передвижки осей абсцисс и ординат.

При введении единой системы Гаусса-Крюгера рамки планшетов для масштабов  $\frac{1}{20000}$  и крупнее несомненно должны быть

квадратные. Размеры их приходится установить двойкие:  $50 \times 50$  см и  $40 \times 40$  см, чтобы в каждом листе более мелкого масштаба укладывалось целое число листов следующего более крупного масштаба. Это можно представить в следующей таблице.

Масштаб	Размеры рамки	Площадь
1:50000	$40 \times 40$ см	400 кв. км
1:25000	$40 \times 40$ "	100 "
1:20000	$50 \times 50$ "	100 "
1:10000	$50 \times 50$ "	25 "
1:5000	$40 \times 40$ или $50 \times 50$ см	4 или 6,25 км
1:2000	$50 \times 50$ см	1 км
1:1000	$50 \times 50$ "	$\frac{1}{4}$ кв. км = 25 га
1:500	$40 \times 40$ или $50 \times 50$ см	$\frac{1}{25}$ или $\frac{1}{16}$ км = 4 или 6,25 га
1:200	$50 \times 50$ см	$\frac{1}{100}$ кв. км = 1

Мензульная съемка в масштабах  $\frac{1}{20000}$  и крупнее производится исключительно на планшетах  $50 \times 50$  см.

Специальные маркшейдерские планы могут иметь координатную сетку Гаусса-Крюгера, нанесенную косо; это не должно быть запрещено.

Номенклатура планшетов, общая для всех масштабов, была предложена в двух вариантах (поясним прямо на примерах).

I-й вариант (Келля).

Пример 1.

Планшет  $87^\circ - 147,5 \frac{6275,0}{-0,5} + 0,5:1000$ .

$87^\circ$  — средний меридиан  $87^\circ$  от Гринвича, к западу (минус) от него находится левая сторона рамки на расстоянии 147,5 км, северная сторона рамки имеет абсциссу 6275,0 км, южная сторона  $6275,0 - 0,5 = 6274,5$  км и восточная имеет ординату —  $-147,5 + 0,5 = -147,0$  км. Размер планшета в натуре  $0,5 \times 0,5$  км, масштаб 1:1000.

Все величины даны в км. Расположение ординат и абсцисс такое же, как и на самом планшете, левая, верхняя, нижняя правая — занимают свое место. Начинается перечисление координат с левого верхнего угла (как привыкли писать).

Пример 2.

$87^\circ + 102 \frac{5342}{-2} + 2:5000$ .

Ордината левой стороны + 102 км.

Абсцисса верхней стороны 5342 км.

„ нижней „ 5342 — 2 = 5340 км.

Ордината правой стороны  $102 + 2 = + 104$  км.

Масштаб — 1 : 5000.

2-й вариант (Каврайского).

Пример 1. Планшет  $(6274\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, 87352\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) : 1000$

Дана абсцисса южной (нижней) стороны планшета:

$6274\frac{1}{2}$  км, северная сторона имеет  $6274\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 6275$  км.

Ордината  $87352\frac{1}{2}$  западной стороны рамки получена следующим образом: впереди стоит число градусов долготы среднего меридиана 87, к действительной ординате — 147,5 прибавлено 500 км (начало перенесено к западу на 500 км), получилось  $352\frac{1}{2}$  км, это число и приписано к 87, правая восточная рамка имеет искусственную ординату  $87352\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 87353$  км. В общем в этой номенклатуре даны как бы координаты левого нижнего угла.

Пример 2. Планшет  $(5340 + 2, 87602 + 2) : 5000$ .

Оба варианта дают полную определенность при планшетах и не квадратной формы, а в виде прямоугольника.

Если же ограничивать все планшеты квадратами, то номенклатура 2-го варианта упрощается:

Пример 1. Планшет  $(6274\frac{1}{2}, 87352\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : 1000$ .

Пример 2. Планшет  $(5340, 87602, 2) : 5000$ .

В номенклатуре мензульных планшетов, имеющих стандартный размер  $50 \times 50$  см, можно отбросить размеры рамок и тем еще более ее упростить:

Пример 1.  $(6274\frac{1}{2}, 87352\frac{1}{2}) : 1000$ .

Ни одному из вариантов предпочтения не было высказано. Других предложений не было. Можно рекомендовать 1-й вариант, вследствие его большей наглядности.

На стыках двух полос (зон) планшеты квадратной формы равных зон будут частично перекрывать друг друга. Для сопоставления их между собой следует на каждом из них прочерчивать отдельный меридиан.

На планшетах же мелкого масштаба в многогранной проекции придется наносить две координатные сетки двух смежных полос.

Как видим, маркшейдерское дело к единой системе координат не предъявляет никаких особых требований, отличных от требований других организаций. Если при составлении инструкции по переходу к координатам Гаусса-Крюгера достаточно будут учтены все общие требования, то эта инструкция должна будет удовлетворить и маркшейдеров.

Остается пожелать только, чтобы, согласно п. 21 постановления III Геодезического совещания, возможно скорее было произведено перечисление географических координат в координаты Гаусса-Крюгера, и чтобы раз данные координаты в дальнейшем не подвергались частому изменению.

Таблица I.

В	У	В	У	В	У
35° 00'	152 128,799	50° 00'	119 478,358	65° 00'	78 616,115
30	151 197,601	30	118 234,647	30	77 143,608
36° 00'	150 254,861	51 00	116 981,849	66° 00'	75 665,136
30	149 300,651	30	115 720,058	30	74 190,811
37 00	148 335,039	52° 00'	114 449,369	67 00	72 690,747
30	147 358,097	30	113 169,878	30	71 195,059
38° 00'	146 369,898	53 00	111 881,681	68° 00'	69 693,861
30	145 370,514	30	110 584,876	30	68 187,269
39 00	144 360,019	54° 00'	109 279,560	69 00	66 675,398
30	143 338,488	30	107 995,832	30	65 158,366
40° 00'	142 305,996	55 00	106 643,791	70° 00'	63 636,287
30	141 262,620	30	105 313,538	30	62 109,281
41 00	140 208,437	56° 00'	103 975,172	71 00	60 577,463
30	139 143,526	30	102 628,796	30	59 040,952
42° 00'	138 067,965	57 00	101 274,510	72° 00'	57 499,867
30	136 981,834	30	99 912,419	30	55 954,326
43 00	135 885,214	58° 00'	98 542,626	73 00	54 404,449
30	134 778,187	30	97 165,233	30	52 850,354
44° 00'	133 660,835	59 00	95 780,347	74° 00'	51 292,163
30	132 533,241	30	94 388,072	30	49 729,994
45 00	131 395,489	60° 00'	92 988,514	75 00	48 163,970
30	130 247,664	30	91 581,780	30	46 594,210
46° 00'	129 089,852	61 00	90 167,976	76° 00'	45 020,837
30	127 922,139	30	88 747,212	30	43 443,971
47 00	126 744,613	62° 00'	87 319,594	77 00	41 863,735
30	125 557,361	30	85 885,232	80	40 280,251
48° 00'	124 360,472	63 00	84 444,236	78° 00'	38 693,642
30	123 154,037	30	82 996,715	30	37 104,030
49 00	121 938,145	64° 00'	81 542,781	79 00	35 511,539
30	120 712,888	30	80 082,543	30	33 916,291
50° 00'	119 478,358	65° 00'	78 616,115	80° 00'	32 318,411

Таблица II.

В	Х	В	Х	В	Х
35° 00'	3 874 208,045 м	45° 00'	4 984 439,266 м	53° 00'	5 874 014,722 м
20	911 185,342	10	5 002 959,445	10	892 560,560
40	948 194,675	20	021 480,165	20	911 106,918
		30	040 001,427	30	929 653,796
36° 00'	3 985 146,053	40	058 523,229	40	948 201,183
20	4 022 129,485	50	077 045,573	50	966 749,108
40	059 114,978				
		46° 00'	5 095 568,458	54° 00'	5 985 297,539
37° 00'	096 102,540	10	114 091,884	10	6 003 846,487
20	133 092,177	20	132 615,850	20	022 395,949
40	170 083,898	30	151 140,358	30	040 945,926
		40	169 665,406	40	059 496,415
		50	188 190,994	50	078 047,417
38° 00'	4 207 077,708				
20	244 073,614	47° 00'	5 206 717,123	55° 00'	6 096 598,930
40	281 071,622	10	225 243,793	10	115 150,933
		20	243 771,002	20	133 703,484
39° 00'	318 071,739	30	262 298,750	30	152 256,524
20	355 073,968	40	280 827,029	40	170 810,070
40	392 078,317	50	299 355,866	50	189 364,121
40° 00'	4 429 084,790	48° 00'	5 317 885,232	56° 00'	6 207 918,678
10	447 588,824	10	336 415,137	10	226 473,737
20	466 093,891	20	354 945,581	20	245 029,299
30	484 598,491	30	373 476,562	30	263 585,362
40	503 104,125	40	392 008,081	40	282 141,924
50	521 610,294	50	410 540,138	50	300 698,985
41° 00'	4 540 116,987	49° 00'	5 429 072,731	57° 00'	6 319 256,543
10	558 624,235	10	447 605,861	10	337 814,598
20	577 132,009	20	466 139,527	20	356 373,147
30	595 640,320	30	484 673,728	30	374 932,189
40	614 149,167	40	503 208,465	40	393 491,724
50	632 658,550	50	521 743,736	50	412 051,750
42° 00'	4 651 168,471	50° 00'	5 540 279,542	58° 00'	6 430 612,265
10	669 678,930	10	558 815,881	10	449 173,269
20	688 189,927	20	577 352,754	20	467 734,759
30	706 701,462	30	595 890,159	30	486 296,734
40	725 213,536	40	614 428,096	40	504 859,194
50	743 726,150	50	632 966,565	50	523 422,136
43° 00'	4 762 239,302	51° 00'	5 651 505,564	59° 00'	6 541 985,559
10	780 752,993	10	670 045,094	10	560 549,462
20	799 267,225	20	688 585,154	20	579 113,844
30	817 781,996	30	707 125,742	30	597 678,702
40	836 297,308	40	725 666,859	40	616 244,035
50	854 813,160	50	744 208,503	50	634 809,842
44° 00'	4 873 329,553	52° 00'	5 762 750,674	60° 00'	6 653 376,121
10	891 846,486	10	781 293,371	10	671 942,870
20	910 363,960	20	799 836,594	20	690 510,089
30	928 881,975	30	818 380,341	30	709 077,775
40	947 400,531	40	836 924,612	40	727 645,927
50	965 919,627	50	855 469,406	50	746 214,544
45° 00'	4 984 439,266 м	53° 00'	5 874 014,722 м	61° 00'	6 764 783,622 м

B		X		B		X		B		X	
61° 00'	6 764 733,622 м	65° 00'	7 210 575,780 м	72° 00'	7 991 270,794 м	61° 10'	793 353,162	65° 20'	247 736,331	72° 20'	8 028 482,264
20	801 923,161	40	284 898,533	40	065 654,995	61° 30'	820 493,618	65° 40'	359 227,823	72° 40'	102 843,965
40	839 064,531	66° 00'	7 322 062,369	60	140 044,154	61° 50'	857 635,898	66° 20'	396 394,877	73° 00'	177 240,541
50	857 635,898	40	582 253,552	60	400 442,319	62° 00'	6 876 207,717	66° 40'	7 433 563,515	74° 00'	8 214 438,105
62° 00'	6 876 207,717	67° 00'	7 433 563,515	20	251 636,324	62° 10'	894 779,987	67° 20'	470 733,719	20	288 836,676
10	894 779,987	40	507 905,472	40	326 037,641	62° 20'	913 352,706	67° 40'	7 545 078,756	40	363 239,896
20	913 352,706	68° 00'	7 545 078,756	60	400 442,319	62° 30'	931 925,873	68° 20'	582 253,552	75° 00'	8 214 438,105
30	931 925,873	40	619 429,843	60	400 442,319	62° 40'	950 499,485	68° 40'	7 656 607,610	20	512 058,374
40	950 499,485	69° 00'	7 656 607,610	40	549 265,547	62° 50'	969 073,540	69° 20'	693 786,834	40	586 473,676
50	969 073,540	40	730 967,497	60	623 682,738	63° 00'	6 987 648,037	69° 40'	7 768 149,579	40	623 682,738
63° 00'	6 987 648,037	70° 00'	7 768 149,579	77° 00'	8 437 646,988	63° 10'	7 006 222,974	70° 20'	805 333,062	20	474 852,180
10	7 006 222,974	40	842 517,925	40	512 058,374	63° 20'	7 024 793,349	70° 40'	916 891,717	20	512 058,374
20	7 024 793,349	71° 00'	7 879 704,150	60	549 265,547	63° 30'	7 043 374,161	71° 20'	954 080,605	40	586 473,676
30	7 043 374,161	40	916 891,717	40	623 682,738	63° 40'	7 061 950,407	71° 40'	7 991 270,794 м	60	623 682,738
40	7 061 950,407	72° 00'	7 991 270,794 м	77° 40'	8 437 646,988	63° 50'	7 080 527,085	72° 20'	805 333,062	20	474 852,180
50	7 080 527,085	40	954 080,605	80° 00'	8 884 170,359 м	64° 00'	7 099 104,194	72° 40'	842 517,925	40	512 058,374
64° 00'	7 099 104,194	73° 00'	8 214 438,105	78° 00'	8 660 892,711	64° 10'	117 681,731	73° 20'	805 333,062	20	698 103,570
10	117 681,731	40	842 517,925	40	698 103,570	64° 20'	136 259,696	73° 40'	842 517,925	40	735 315,294
20	136 259,696	71° 00'	7 879 704,150	60	772 527,858	64° 30'	154 838,085	71° 20'	7 879 704,150	20	772 527,858
30	154 838,085	40	916 891,717	40	809 741,239	64° 40'	173 416,896	71° 40'	7 879 704,150	20	809 741,239
40	173 416,896	72° 00'	7 991 270,794 м	40	846 955,414	64° 50'	191 996,129	72° 20'	7 991 270,794 м	40	846 955,414
50	191 996,129	72° 00'	7 991 270,794 м	80° 00'	8 884 170,359 м	65° 00'	7 210 575,780 м	72° 00'	7 991 270,794 м	80° 00'	8 884 170,359 м

Таблица III. Величины  $\tau = \frac{1}{6} (\delta) (\Delta y)^2$ .

$\Delta y$ км	B			$\Delta y$ км	B		
	35°	55°	80°		35°	55°	80°
0	0	0	0	35	10,9	10,9	10,8
5	0,2	0,2	0,2	36	11,6	11,5	11,5
10	0,9	0,9	0,9	37	12,2	12,2	12,1
15	2,0	2,0	2,0	38	12,9	12,8	12,8
18	2,9	2,9	2,9	39	13,6	13,5	13,4
20	3,6	3,6	3,5	40	14,3	14,2	14,1
22	4,3	4,3	4,3	41	15,0	14,9	14,9
24	5,1	5,1	5,1	42	15,7	15,7	15,6
26	6,0	6,0	6,0	43	16,5	16,4	16,4
28	7,0	7,0	6,9	44	17,3	17,2	17,1
30	8,0	8,0	8,0	45	18,1	18,0	17,9
31	8,6	8,5	8,5	46	18,9	18,8	18,7
32	9,1	9,1	9,1	47	19,7	19,6	19,5
33	9,7	9,7	9,6	48	20,6	20,5	20,4
34	10,3	10,3	10,2	49	21,4	21,3	21,2
35	10,9	10,9	10,8	50	22,3	22,2	22,1



Таблица V.  $\log(6) = \log 10^{13} \frac{\mu}{2R^2}$

X или x Тысячи км	С о т н и н км									
	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
3									*854	*845
4	2,72836	827	819	810	801	792	783	774	765	755
5	746	737	728	719	710	701	692	683	674	665
6	656	648	639	631	622	614	606	598	590	582
7	575	568	561	554	547	541	534	528	522	517
8	2,72512	506	501	496	491	487	483	480	476	473

Таблица VI.  $\log(7) = \log 10^6 \frac{\rho}{2R^2}$

X или x Тысячи км	С о т н и н км									
	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
3									*518	*509
4	3,40500	491	483	474	465	456	447	438	429	419
5	410	401	392	383	374	365	356	347	338	329
6	320	312	303	295	286	278	270	262	254	246
7	239	232	225	218	211	205	198	192	186	181
8	3,40176	170	165	160	155	151	147	144	140	137

Пропорциональные части к таблицам V и VI.

9		8		7		6		5		4		3	
км	0												
5,6	1	6,2	1	7,1	1	8,3	1	10,0	1	12,5	1	16,7	1
16,7	2	18,8	2	21,4	2	25,0	2	30,0	2	37,5	2	50,0	2
27,8	3	31,2	3	35,7	3	41,7	3	50,0	3	62,5	3	83,3	3
38,9	4	43,8	4	50,0	4	58,3	4	70,0	4	87,5	4		4
50,0	5	56,2	5	64,3	5	75,0	5	90,0	5		5		5
61,1	6	68,8	6	78,6	6	91,7	6		6		6		6
72,2	7	81,2	7	92,9	7		7		7		7		7
83,3	8	93,8	8		8		8		8		8		8
94,4	9		9		9		9		9		9		9

Таблица VII.

B	Метры		Единицы 7-го знака		B	Метры		Единицы 7-го знака	
	ω	Δω	ω <sub>1</sub>	ω <sub>2</sub>		ω	Δω	ω <sub>1</sub>	ω <sub>2</sub>
35°	0,114		3,3	2,1	60°	0,121	4	4,2	3,1
40	118	4	3,4	2,2	65	113	8	4,3	3,3
45	122	4	3,6	2,4	70	099	14	4,5	3,5
50	125	3	3,8	2,6	75	080	19	4,6	3,7
55	125	0	4,0	2,8	80°	0,056	24	4,7	3,9

Сдано в набор 27 февр. 1932 г. Поступило к печати 26 апр. 1932 г.

Формат бумаги 82 × 111. Количество печатных листов 9<sup>3/4</sup>. Ответственный редактор Е. Фальк.

Количество печ. знаков в листе 45832.

Технический редактор А. М. Усова.

Инд. Г-56-5-2.

Гориз № 2463-12-Л.

Д

---

1675

43