

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Н. Г. КЕЛЛЬ

**ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД
В ДЕЙСТВИЯХ
С ПОГРЕШНОСТЯМИ
И ПОЛОЖЕНИЯМИ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА—ЛЕНИНГРАД
1948

Н. Г. КЕЛЛЬ ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД В ДЕЙСТВИЯХ С ПОГРЕШНОСТЯМИ И ПОЛОЖЕНИЯМИ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ЛАБОРАТОРИЯ АЭРОМЕТОДОВ

Н. Г. КЕЛЛЬ

Член-корреспондент Академии Наук СССР

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД
В ДЕЙСТВИЯХ
С ПОГРЕШНОСТЯМИ
И ПОЛОЖЕНИЯМИ
(РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ)



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА — ЛЕНИНГРАД

ЭБ "Научное наследие России"

1948

Работа выполнена автором в порядке социалистического обязательства, взятого им перед Ленинградским отделением Всесоюзного научного инженерно-технического горного общества к XXX годовщине Великой Октябрьской социалистической революции

Глава I

ПОГРЕШНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

п. 1. Применимость метода. Как сами погрешности, так и поправки к предварительным значениям искомых величин или положений обычно относительно невелики. Поэтому их вычисляют или находят с небольшой относительной точностью. Это позволяет с успехом применить графический метод при действиях с погрешностями или положениями точек, характеризующими ту или иную величину.

Точность построения является совершенно достаточной, чтобы обеспечить требуемую относительную точность искомых значений. При этом, обычно, не требуется применения особых приемов, повышающих точность построения и черчения.

Линейка, треугольник, простой транспортир и циркуль, острый карандаш или рейсфедер — вот все необходимые принадлежности для построения.

п. 2. Содержание работы. В данной работе с возможной полнотой систематически изложено применение графического метода, как это удалось разработать автору в течение почти сорока лет, начиная со времени обработки материалов Камчатской экспедиции 1908—1910 гг. Сама разработка, естественно, шла не тем, заранее намеченным путем, как это излагается в данной работе. Здесь мы даем обобщенные выводы в определенной логической последовательности,

облегчающей усвоение существа вопроса и предлагаемых приемов их разрешения.

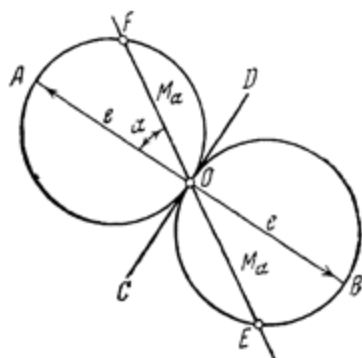
Везде мы будем опираться на теорию и сопоставлять, где это необходимо, графическое решение с аналитическим. Для сокращения изложения придется считать аналитические методы и приемы и их обоснование известными из существующих руководств и учебников по теории погрешностей и способу наименьших квадратов. Поэтому ссылки на эти методы и приемы будут весьма краткими и без пояснений.

Сначала мы разберем погрешности, а затем положения сами по себе и сопровождающие их погрешности. По возможности будем приводить примеры применения предлагаемой методики. Им мы придаем существенное значение.

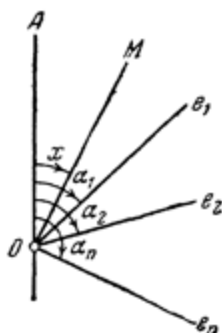
§ 2. ВЕКТОРИАЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

п. 1. Линейные и векториальные погрешности. Погрешность измеряемой величины всегда зависит от нескольких причин. Если эти причины независимы друг от друга и носят случайный характер, т. е. дают независимые случайные погрешности, подчиняющиеся закону Гаусса, то принято складывать квадраты погрешностей от отдельных причин, чтобы получить квадрат суммарной погрешности. Здесь мы имеем дело с так называемыми линейными погрешностями, не охарактеризованными направлением. Например, при измерении угла или длины случайные погрешности от различных причин квадратично складываются. Но бывают „направленные“ погрешности при определении положения точки, погрешности положения. Например, ошибка в длине стороны полигона вызывает перемещение вершины полигона вдоль этой стороны, а ошибка в направлении стороны вызывает поперечную ошибку. При этом как продольная, так и поперечные ошибки безразличны по знаку. Продольная ошибка перемещает вершину вперед или назад поперечная — влево или вправо: α и $\alpha \pm 180^\circ$. Такие направленные ошибки носят название векториальных ошибок в отличие от векторных величин, имеющих направление определенного знака (α). Векториальная ошибка обозначается значком $\longleftrightarrow$.

п. 2. Кривая действия векториальной ошибки. Для того чтобы узнать действие векториальной ошибки по некоторому направлению, не совпадающему с ее направлением, следует взять проекцию векториальной ошибки на данное направление. Очевидно, геометрическим местом проекций концов A и B (фиг. 1) векториальной ошибки $e = \vec{OA} = \vec{OB}$ на различные направления будут две касательные окружности, построенные на OA и OB как на диаметрах. Проек-



Фиг. 1



Фиг. 2

ция e на прямую CD , перпендикулярную к AOB , будет равна нулю.

$$M_0 = e \cos 90^\circ = 0. \quad (2.1)$$

Проекция e на любое другое направление EF , образующее с AB угол α , выразится равенством:

$$M_\alpha = \overline{OF} = \overline{OE} = e \cos \alpha. \quad (2.2)$$

Две окружности $AFOA$ и $OEBO$ мы называем кривой действия векториальной ошибки e .

п. 3. Сложение действия векториальных ошибок. Если векториальные ошибки $\longleftrightarrow e_1, \longleftrightarrow e_2, \dots, \longleftrightarrow e_n$, приложенные к одной точке O и имеющие направления $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (фиг. 2), подчиняются закону Гаусса, то для получения их совместного действия по какому-нибудь направлению x нужно

сложить квадраты их проекций на это направление и затем из суммы извлечь квадратный корень.

$$M^2 = e_1^2 \cos^2(\alpha_1 - x) + \dots + e_n^2 \cos^2(\alpha_n - x). \quad (2.3)$$

Для упрощения мы будем и впредь, как на фиг. 2, изображать векториальные ошибки в виде одного вектора, помня, что они могут быть направлены и в другую сторону, т. е. в равенстве (2.3) $\alpha_i - x$ могут быть заменены $\alpha_i - x \pm 180^\circ$, и, поскольку мы берем квадраты косинусов, величина M^2 не изменится от того, возьмем ли мы α или $\alpha \pm 180^\circ$.

п. 4. Нахождение кривой действия нескольких векториальных ошибок. Спроектируем векториальные ошибки $\overleftrightarrow{e_1}, \overleftrightarrow{e_2}, \dots, \overleftrightarrow{e_n}$ на две взаимно-перпендикулярные оси M_1 и M_2 с направлениями x и $x + 90^\circ$. Тогда, согласно равенству (2.3), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} M_1^2 &= e_1^2 \cos^2(\alpha_1 - x) + \dots + e_n^2 \cos^2(\alpha_n - x), \\ M_2^2 &= e_1^2 \sin^2(\alpha_1 - x) + \dots + e_n^2 \sin^2(\alpha_n - x). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Легко усмотреть, что сумма $M_1^2 + M_2^2$ постоянна, так как равна $e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2$ и не зависит от x . Поэтому, если M_1^2 будет максимальным, то M_2^2 будет минимальным, или наоборот.

Пусть M^2 или M приобретает максимальную величину при значении $x = \gamma$. Тогда имеем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} M_{\max}^2 &= e_1^2 \cos^2(\alpha_1 - \gamma) + \dots + e_n^2 \cos^2(\alpha_n - \gamma), \\ M_{\min}^2 &= e_1^2 \sin^2(\alpha_1 - \gamma) + \dots + e_n^2 \sin^2(\alpha_n - \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Кроме того, условие $\max$ или $\min$ требует, чтобы первая производная по x от M_1^2 или M_2^2 равнялась нулю, если

вместо x подставить γ . Это дает такое равенство:

$$e_1^2 \sin 2(\alpha_1 - \gamma) + e_2^2 \sin 2(\alpha_2 - \gamma) + \dots + e_n^2 \sin 2(\alpha_n - \gamma) = 0. \quad (2.6)$$

Теперь остается показать, что $\overleftrightarrow{M_{\max}}$ и $\overleftrightarrow{M_{\min}}$ эквивалентны данным $\overleftrightarrow{e_1}, \overleftrightarrow{e_2}, \dots, \overleftrightarrow{e_n}$, так как производят одинаковые действия по любому направлению.

Обозначим углы, образованные $\overleftrightarrow{e_i}$ с $\overleftrightarrow{M_{\max}}$, через α'_i , а соответствующий угол произвольного направления через u и докажем справедливость такого равенства:

$$e_1^2 \cos^2(\alpha'_1 - u) + e_2^2 \cos^2(\alpha'_2 - u) + \dots + e_n^2 \cos^2(\alpha'_n - u) = M_{\max}^2 \cos^2 u + M_{\min}^2 \sin^2 u. \quad (2.7)$$

Это и подтвердит эквивалентность $M_{\max}$ и $M_{\min}$ данным векториальных ошибок.

Согласно введенным обозначениям $\alpha_i - \gamma = \alpha'_i$, в соответствии с этим равенства (2.5) и (2.6) получают такие выражения:

$$M_{\max}^2 = [e^2 \cos^2 \alpha'], \quad M_{\min}^2 = [e^2 \sin^2 \alpha']; \quad (2.8)$$

$$[e^2 \sin 2\alpha'] = 0. \quad (2.9)$$

Преобразуем левую часть равенства (2.7). Получим:

$$[e^2 (\cos \alpha' \cos u + \sin \alpha' \sin u)^2] = [e^2 \cos^2 \alpha'] \cos^2 u + [e^2 \sin 2\alpha'] \frac{1}{2} \sin 2u + [e^2 \sin^2 \alpha'] \sin^2 u,$$

что на основании равенств (2.8) и (2.9) даст правую часть равенства (2.7), которое таким образом является доказанным. Значит, $\overleftrightarrow{M_{\max}}$ и $\overleftrightarrow{M_{\min}}$ дают ту же кривую действия ошибок, что и $\overleftrightarrow{e_1}, \overleftrightarrow{e_2}, \dots, \overleftrightarrow{e_n}$.

$M_{\max}$ и $M_{\min}$ взаимно-перпендикулярны. Кривая действия их строится на основании равенства

$$M^2 = M_{\max}^2 \cos^2 u + M_{\min}^2 \sin^2 u. \quad (2.10)$$

Очевидно, это будет подера или педальная кривая эллипса с полуосями $M_{\max}$ и $M_{\min}$.

Этот эллипс мы называем эллипсом погрешности, а суммарную погрешность — эллипсной.

Минимум две векториальные погрешности дают эллипсную погрешность с кривой действия в виде подеры эллипса.

п. 5. Построение элементов эллипса погрешности. Введем обозначения:

$$M_{\max}^2 + M_{\min}^2 = 2R; \quad M_{\max}^2 - M_{\min}^2 = 2r. \quad (2.11)$$

В связи с этим

$$M_{\max}^2 = R + r; \quad M_{\min}^2 = R - r. \quad (2.12)$$

На основании выражений (2.11) и равенств (2.8) находим, что при $[e^2 \sin 2\alpha']$ равном нулю, согласно равенству (2.9),

$$2R = [e^2]; \quad 2r = [e^2 \cos 2\alpha']. \quad (2.13)$$

Напомним, что здесь α' представляют собой углы, образованные e с осью $M_{\max}$:

$$\alpha' = \alpha - \gamma, \quad (2.14)$$

где γ — угол, образованный осью $M_{\max}$ с начальным направлением, от которого отсчитываются углы α векториальных ошибок e .

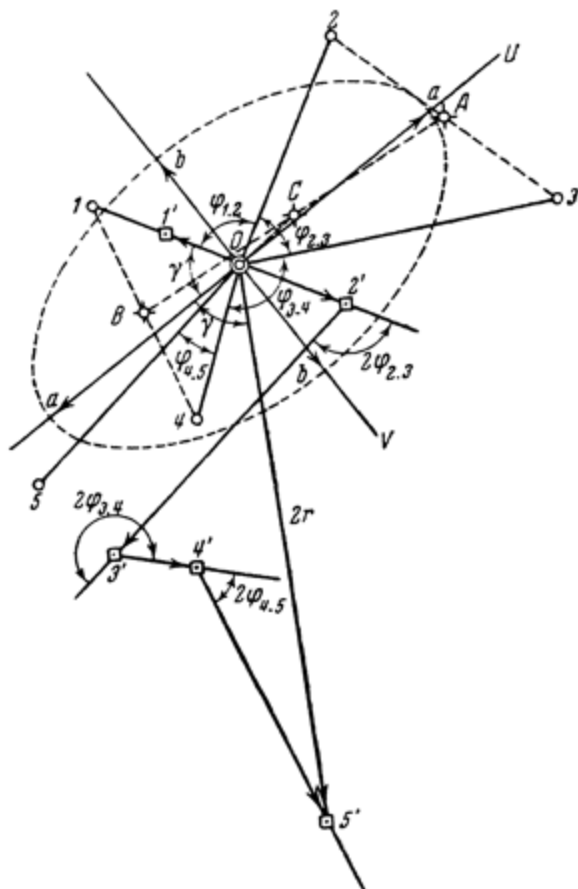
Равенства $2r = [e^2 \cos 2\alpha']$ и $[e^2 \sin 2\alpha'] = 0$ определяют такое построение для $2r$ и для угла γ .

Строим геометрическую сумму из e^2 с удвоением углов α в виде полигона. Замыкающая этого полигона будет $2r$. Она образует с начальным направлением угол, равный 2γ . Если этот угол разделить пополам, то биссектриса представит собой ось $M_{\max}$, которую мы обычно обозначаем через U ; $M_{\min}$ направляется по оси V . Таким образом, отмечая значком $\longleftrightarrow$ геометрическое сложение с удвоением углов, имеем

$$\longleftrightarrow 2r = [\longleftrightarrow e^2]. \quad (2.15)$$

После удвоения углов векториальные величины превращаются в векторные; α и $\alpha \pm 180^\circ$ после удвоения дают одно и то же направление 2α и $2\alpha \pm 360^\circ$. Далее имеем:

$$2R = [e^2]; M_{\max}^2 = R + r; M_{\min}^2 = R - r. \quad (2.16)$$



Фиг. 3

Так находятся элементы эквивалентного эллипса погрешности γ , $M_{\max}$ и $M_{\min}$. Угол γ определяет ориентирование эллипса. В частном случае r может быть равно нулю, и получается круговая ошибка с $M_{\max} = M_{\min}$.

п. 6. Эллипс рассеивания. В качестве примера на построение эллипса погрешности возьмем получение эллипса рассеивания.

На фиг. 3 точки 1, 2, 3, 4 и 5 представляют собой некоторые рассеянные на плоскости точки. Находим центр группирования O как центр тяжести этих точек, имеющих одинаковый вес. Для этого строим точку A посередине между точками 3 и 2, точку B — посередине между точками 4 и 1, точку C как середину между точками A и B и, наконец, точку O , расстояние которой от точки C по прямой $C—O$ равно $\frac{1}{5}$ расстояния $\overline{C—5}$, так как вес точки C равен 4, вес точки 5 равен 1, а вес точки O равен $4 + 1 = 5$.

Из точки O проводим радиусы-векторы e к данным точкам. Определяем их длину и возводим ее в квадрат.

Точки Ве- личины	1	2	3	4	5
e	26	40	53	26	48
e^2	680	1600	2810	680	2300
					$[e^2] = 8070$

$$2R = [e^2] = 8070.$$

Находим геометрическую сумму $\overrightarrow{2r} = [\overrightarrow{e^2}]$ с помощью построения квадратичного полигона $O—1'—2'—3'—4'—5'$ на фиг. 3. Сторона $\overrightarrow{O—1'}$ в некотором масштабе равна e_1^2 , в том же масштабе $\overrightarrow{1'—2'} = e_2^2$ и проведена под удвоенным углом $2\varphi_{1,2}$ ($\varphi_{1,2}$ почти равен 90°) к направлению $\overrightarrow{O—1'}$; сторона $\overrightarrow{2'—3'} = e_3^2$ образует с предшествующей стороной угол, равный $2\varphi_{2,3}$, где $\varphi_{2,3}$ равен углу между радиусами e_2 и e_3 , и т. д. Замыкающая $\overrightarrow{O—5'} = 2r$ в масштабе построения e^2 равна 4560. Значит,

$$R = \frac{1}{2} \cdot 8070 = 4035; r = \frac{1}{2} \cdot 4560 = 2280.$$

$$M_{\max}^2 = 4035 + 2280 = 6315; M_{\min}^2 = 4035 - 2280 = 1755.$$

Для определения размеров a и b среднего эллипса рассеивания полагается $M_{\max}^2$ и $M_{\min}^2$ разделить на $n-1$, где n — число точек, а затем извлечь квадратный корень:

$$\left. \begin{aligned} a &= \pm \sqrt{\frac{M_{\max}^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{6315}{4}} = \pm 39.7 \approx \pm 40, \\ b &= \pm \sqrt{\frac{M_{\min}^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{1755}{4}} \approx \pm 21. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Радиус-вектор $\overrightarrow{O-I}$ принят за начальное направление при построении квадратичного полигона. Поэтому угол между $\overrightarrow{O-I}$ и замыкающей $\vec{2r}$ равен 2γ , и его надо разделить пополам, чтобы получить ось U или направление большей оси a эллипса рассеивания.

Откладываем на U полуоси a и на V — полуоси b и проводим через концы полуосей эллипс (на фиг. 3 изображен пунктиром).

Таково построение эллипса рассеивания. Оно строго отвечает аналитическому нахождению элементов этого эллипса.

Точность такого построения отвечает точности нанесения пунктов $1, 2, \dots, n$.

Если построение вести непосредственно на листе, на котором получились рассеянные точки, то преимущество графического метода, поясненного на фиг. 3, несомненно.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ И РАЗЛОЖЕНИЕ НАПРАВЛЕННЫХ НА ПЛОСКОСТИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

п. 1. Сложение эллипсных погрешностей. Эллипсные погрешности представляются двумя взаимно-перпендикулярными векториальными погрешностями $M_{\max}$ и $M_{\min}$. Поэтому сложение эллипсных ошибок, по существу, сводится к сложению векториальных ошибок, что нами разобрано в предыдущем параграфе. Но при этом напрашивается некоторое упрощение, если использовать арифметический R и геометрический r элементы эллипсов.

Например, при сложении двух эллипсов погрешности вместо сложения четырех векториальных ошибок достаточно арифметически сложить R_1 и R_2 и геометрически r_1 и r_2 . Получится суммарный эллипс с элементами R и r : при удвоении угла между ними

$$R = R_1 + R_2; \quad \overleftrightarrow{r} = \overleftrightarrow{r_1} + \overleftrightarrow{r_2}, \quad (3.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2}(M_{\max 1}^2 + M_{\min 1}^2); \\ r_1 &= \frac{1}{2}(M_{\max 1}^2 - M_{\min 1}^2) \text{ и направлен по } M_{\max 1}, \\ R_2 &= \frac{1}{2}(M_{\max 2}^2 + M_{\min 2}^2); \\ r_2 &= \frac{1}{2}(M_{\max 2}^2 - M_{\min 2}^2) \text{ и направлен по } M_{\max 2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Поэтому удобнее эллипсные ошибки характеризовать элементами R и r , которые и можно непосредственно складывать, согласно равенствам (3.1), при любом числе эллипсов.

п. 2. Сложение эллипсной и векториальной ошибок. Если к эллипсной ошибке с элементами R_1 и r_1 присовокупляется векториальная ошибка e_2 , то элементы суммарной эллипсной ошибки R и r находятся непосредственно по формулам:

$$R = R_1 + \frac{1}{2} e_2^2; \quad \overleftrightarrow{r} = \overleftrightarrow{r_1} + \frac{1}{2} \overleftrightarrow{e_2^2}. \quad (3.3)$$

В частном случае, когда угол между r_1 и e_2 равен 90° и $\frac{1}{2} e_2^2 = r_1$, элемент r обращается в нуль и мы получаем круговую погрешность с

$$M_{\max} = M_{\min} = \sqrt{R}.$$

п. 3. Вычитание из эллипсной ошибки векториальной или эллипсной. Из эллипсной ошибки можно вычитать как

векториальную, так и эллипсную ошибку, если величины последних не превышают уменьшаемого.

Для этого служат формулы:

$$1) \quad R = R_1 - \frac{1}{2} e_2^2, \quad \overleftrightarrow{r} = \overleftrightarrow{r}_1 - \frac{1}{2} \overleftrightarrow{e}_2^2, \quad (3.4)$$

$$2) \quad R = R_1 - R_2, \quad \overleftrightarrow{r} = \overleftrightarrow{r}_1 - \overleftrightarrow{r}_2, \quad (3.5)$$

где R_1 и r_1 — элементы уменьшаемой эллипсной погрешности;
 e_2 — вычитаемая векториальная погрешность;
 R_2 и r_2 — элементы вычитаемой эллипсной погрешности;
 R и r — элементы разности, представляемой эллипсной погрешностью.

Углы, конечно, и при вычитании удваиваются.

В частных случаях r как в формулах (3.4), так и в формулах (3.5) может обратиться в нуль, благодаря чему разность представится круговой погрешностью, или r может оказаться равным R . Тогда в разности мы будем иметь векториальную погрешность

$$e = \sqrt{2R} = \sqrt{2r}.$$

Заметим здесь, что векториальную погрешность можно рассматривать как эллипсную с элементами.

$$R = r = \frac{1}{2} e^2. \quad (3.6)$$

Это объединяет формулы (3.1) и (3.3), с одной стороны, и формулы (3.4) и (3.5) — с другой.

Таким образом сложение и вычитание векториальных и эллипсных (направленных) ошибок можно объединить в одни формулы:

$$R = R_1 \pm R_2 \text{ и } \overleftrightarrow{r} = \overleftrightarrow{r}_1 \pm \overleftrightarrow{r}_2, \quad (3.7)$$

где в случае участия векториальных ошибок элементы R и r представляются формулой (3.6).

Знак минус перед $\overleftrightarrow{r}_2$ означает, что r_2 нужно отложить в обратную сторону по сравнению с $+\overleftrightarrow{r}_2$.

Так как геометрическая сумма всегда меньше арифметической и лишь в крайнем случае равна ей, то r не может быть больше R . Поэтому в случае вычитания уменьшаемое не может быть векториальной ошибкой, если вычитаемое представлено векториальной ошибкой другого направления или эллипсной ошибкой.

Уменьшаемые R_1 и r_1 в выражениях (3.7) представляются равенствами:

$$R_1 = R \vdash R_2; \quad \overleftrightarrow{r_1} = \overleftrightarrow{r} \vdash \overleftrightarrow{r_2}. \quad (3.8)$$

Из этих равенств вытекает, что R_1 может быть равно r_1 только в том случае, когда $R=r$, $R_2=r_2$ и r_2 направлено по r , т. е. когда уменьшаемое, вычитаемое и разность представлены векториальными ошибками одного направления.

Если одна из ошибок круговая (r_1 или r_2 равно нулю) то действие $\overleftrightarrow{r_1} \pm \overleftrightarrow{r_2}$ исключается; элемент r равен либо r_2 либо r_1 .

Также, если обе ошибки круговые, приходится складывать и вычитать только R_1 и R_2 . При этом в результате также получается круговая ошибка с $r=0$.

п. 4. Разложение направленных ошибок. Векториальная ошибка e может быть разложена на две векториальные ошибки e_1 и e_2 одинакового с ней направления так, чтобы удовлетворялось равенство

$$e_1^2 \vdash e_2^2 = e^2. \quad (3.9)$$

Эллипсная ошибка представляется двумя взаимно-перпендикулярными векториальными ошибками. Она может быть заменена двумя векториальными ошибками e_1 и e_2 или двумя эллипсными с элементами R_1, r_1 и R_2, r_2 . При этом, очевидно, должны удовлетворяться такие равенства:

$$e_1^2 \vdash e_2^2 = 2R; \quad \overleftrightarrow{e_1^2} \vdash \overleftrightarrow{e_2^2} = \overleftrightarrow{2r}, \quad (3.10)$$

$$R_1 \vdash R_2 = R; \quad \overleftrightarrow{r_1} \vdash \overleftrightarrow{r_2} = \overleftrightarrow{r}, \quad (3.11)$$

где R и r — элементы разлагаемой эллипсной ошибки.

Соединяем точку 2 с точкой B и из середины C отрезка $2-B$ восстанавливаем к $2-B$ перпендикуляр CD . Он дает на $O'A'$ точку D , которая отсекает отрезки $\overrightarrow{O'D} = e_3^2$ и $\overrightarrow{DB} = e_4^2 = \overrightarrow{D-2}$. Угол $BDC = \varphi_{3,4} = \frac{1}{2}$ угла $2-D-B$.

Извлекаем квадратный корень из значений $\overrightarrow{O'D}$ и $\overrightarrow{DB}$, взятых в масштабе построения $2R$, e_1^2 и e_2^2 ; получаем e_3 и e_4 , которые и откладываем на фиг. 4 на направлениях OA и Oe_4 . Последнее направление получено отложением от OA угла $\varphi_{3,4}$, измеренного на фиг. 5.

При построениях на фиг. 5 за начальное направление взято $O'A'$, отвечающее OA на фиг. 4; можно взять также направление одной из данных векториальных погрешностей. Построение останется тем же самым. Из него на фиг. 5 мы усматриваем, что $e_3 + e_4 = 2R$ и $\overleftrightarrow{e_3^2} + \overleftrightarrow{e_4^2} = 2r$, т. е. e_3 и e_4 дают те же элементы эллипсной погрешности, что и e_1 и e_2 . Сохраняется и ориентировка эллипса. Большая полуось направлена по $O'U'$, образующей угол γ (фиг. 4), равный половине угла $A'O'2$, с начальным направлением $O'A'$ (фиг. 5). Если угол γ отложить от OA на фиг. 4, то получим ось OU , образующую, с Oe_1 угол γ' , равный половине угла $IO'2$ на фиг. 5. Как следует из фиг. 5,

$$2\gamma = 2\gamma' + 2\varphi_{3,1}, \text{ или } \gamma = \gamma' + \varphi_{3,1},$$

что отвечает и соотношениям углов на фиг. 4.

Значит, для того чтобы построить направление большой оси U на фиг. 4, нужно или от OA отложить угол γ , равный половине угла $A'O'2$ на фиг. 5, или от Oe_1 отложить γ' , равный половине угла $IO'2$, взятого с фиг. 5.

Вообще выбор начального направления безразличен, как это следует и из общей теории сложения векториальных ошибок, разобранный выше (пп. 4 и 5 § 2). Здесь приходится исходить из удобства построения.

В том случае, когда одна из составляющих векториальных ошибок задана по величине, построение, приведенное на фиг. 5, заменяется следующим.

За исходное направление берется e_1 и строится треугольник, отвечающий треугольнику $O'12$ на фиг. 5. По данному по величине e_3 определяем $e_4^2 = 2R - e_3^2 = e_1^2 + e_2^2 - e_3^2$. Описываем из O' и 2 дуги радиусами e_3^2 и e_4^2 и получаем в их пересечении точку D (фиг. 5), которая определяет направления $O'A'$ и $D-2$, отвечающие погрешностям e_3 и e_4 . Перенос этих направлений на фиг. 4 осуществляется с помощью углов $\varphi_{3,1}$ и $\varphi_{3,4}$, определенных на фиг. 5.

Если e_1 и e_2 взаимно-перпендикулярны (фиг. 6), то одна из них (e_1) представляет большую и другая (e_2) малую полуоси эллипсной ошибки. В этом случае $2r$ получается как разность $e_1^2 - e_2^2$. Мы откладываем ее на e_1 в виде отрезка $\overline{OB}$ на фиг. 6. Пусть нам дана по величине e_3 . Тогда находим e_4 из равенства:

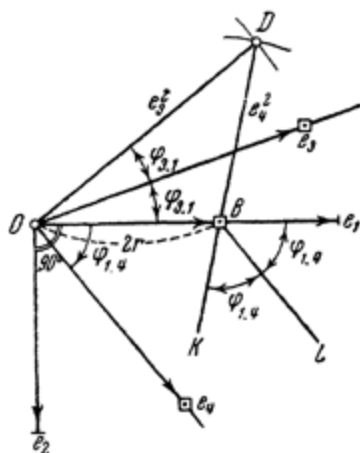
$$e_4^2 = 2R - e_3^2 = e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 \quad (3.12)$$

и из точек O и B описываем дуги радиусами e_3^2 и e_4^2 . В пересечении их получаем точку D , которую соединяем с точками O и B . Делим углы DOB и e_1BK пополам; получаем значения углов $\varphi_{3,1}$ и $\varphi_{4,1}$, определяющих направление погрешностей e_3 и e_4 .

Направление Oe_4 параллельно биссектрисе BL угла e_1BK . Таким образом мы разложили эллипсную ошибку на две векториальных, из которых одна задана по величине. Она может пойти и по другую сторону Oe_1 , поскольку треугольник ODB можно построить вниз от Oe_1 .

Значит, задача имеет два решения.

Очевидно, эллипсную ошибку можно разложить на любое число векториальных погрешностей, поскольку любое их число, будучи сложено, дает эллипсную ошибку.



Фиг. 6

п. 1. Погрешности вершин полигона. Рассмотрим полигон вынужденной формы, прокладываемый в шахте. На поверхности обычно стараются проложить вытянутый по прямой полигон, ошибки вершин которого легко выражаются аналитически.

Полигон, проложенный по подземным выработкам, подчинен этим выработкам и имеет изогнутую форму. Анализ такого полигона часто необходим для расчета точности встречных забоев при сбойке под землей. Он идет от ствола шахты, и на точность положения его вершин влияют:

1) ошибка ориентирования шахты m_α , т. е. передачи направления с поверхности в шахту; при этом мы опускаем, как незначительную, ошибку центрирования с помощью отвеса;

2) ошибки измерения углов m_β самого полигона;

3) ошибки измерения сторон с коэффициентом μ влияния случайных ошибок и относительной постоянной ошибкой γ .

Тогда для вершины с номером i , не считая начальную точку A , будем иметь такие общие выражения для элементов R_i и r_i суммарной эллипсной ошибки:

$$2R_i = \mu^2 (l_1 + l_2 + \dots + l_i) + (\gamma^2 + m_\alpha^2) D_A^2 + m_\beta^2 (D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_{i-1}^2); \quad (4.1)$$

$$\overrightarrow{2r_i} = \mu^2 (\overrightarrow{l_1} + \overrightarrow{l_2} + \dots + \overrightarrow{l_i}) + (\gamma^2 - m_\alpha^2) \overrightarrow{D_A^2} - m_\beta^2 (\overrightarrow{D_1^2} + \overrightarrow{D_2^2} + \dots + \overrightarrow{D_{i-1}^2}), \quad (4.2)$$

где $D_A, D_1, D_2, \dots, D_{i-1}$ — расстояния (радиусы-векторы) от данной вершины i до предыдущих вершин $A, 1, 2, \dots, i-1$;

l — длины сторон;

m_α и m_β выражены в аналитической мере.

При геометрическом сложении по формуле (4.2) углы как между l , так и между D удваиваются.

Погрешности $m_\alpha D_A$ и $m_\beta D$ направлены перпендикулярно к векторам D_A и D . Поэтому после удвоения углов, определяющих направление векторов D , нужно взять обратное направление, которое и будет отвечать удвоенному углу самих погрешностей:

$$\alpha_{\text{погр}} = \alpha_D + 90^\circ; \quad 2\alpha_{\text{погр}} = 2\alpha_D + 180^\circ.$$

Это в равенстве (4.2) выражено тем, что величины $m_\alpha^2 D_A^2, m_\alpha^2 D_1^2, m_\alpha^2 D_2^2$ и т. д. взяты со знаком минус. Значит, при построении квадратичного полигона нужно удваивать направления $D_A, D_1, D_2, \dots$ и затем брать направление, обратное удвоенному.

Член $\gamma^2 D_A^2$ выражает действие постоянной (систематической) ошибки γ , которая сказывается на удлинении или укорочении замыкающей D данной части полигона, сохраняя его подобие. Случайные ошибки длин сторон пропорциональны $\sqrt{l}$; квадраты их пропорциональны первой степени l . Это дает члены $\mu^2 l$. μ — именованное число, выражаемое в $\frac{1}{2}$ или $\text{мм}^{\frac{1}{2}}$; μ^2 выражается в м или мм.

При получении элементов R_i и r_i по формулам (4.1) и (4.2) может оказаться, что относительные значения величин μ, γ, m_β и m_α не установлены. Тогда остается раздельно получить только конструктивные элементы двух эллипсных ошибок в виде:

$$\begin{aligned} 1) \quad 2R'_{ii} &= l_1 + l_2 + \dots + l_i, \\ \overleftrightarrow{2r'_{ii}} &= \overleftrightarrow{l_1} + \overleftrightarrow{l_2} + \dots + \overleftrightarrow{l_i}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

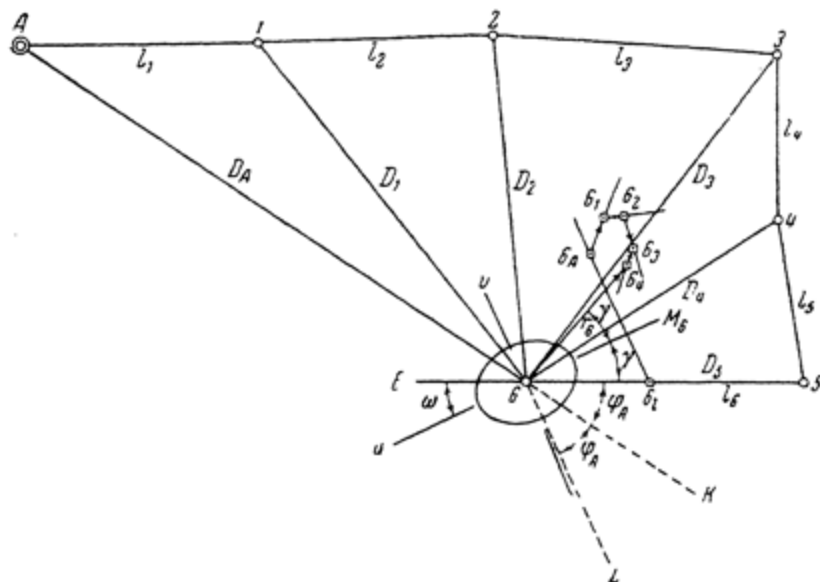
$$\begin{aligned} 2) \quad 2R'_{\beta i} &= D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_{i-1}^2, \\ \overleftrightarrow{2r'_{\beta i}} &= -\overleftrightarrow{D_1^2} - \overleftrightarrow{D_2^2} - \dots - \overleftrightarrow{D_{i-1}^2}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

и двух взаимно-перпендикулярных векториальных ошибок в виде:

$$3) \quad R'_\alpha = r'_\alpha = -\frac{1}{2} D_A^2; \quad 4) \quad R'_\gamma = r'_\gamma = +\frac{1}{2} D_A^2. \quad (4.5)$$

Из этих конструктивных элементов мы также отдельно получаем свои $M_{\max}^2 = R' + r'$ и $M_{\min}^2 = R' - r'$, которые нужны для того, чтобы рассчитать, каких значений μ, γ, m_β и m_α при данных условиях следует добиваться. Некоторые из них, например m_α , могут быть заданы заранее.

К сложению четырех ошибок, выраженных равенствами (4.3) — (4.5), можно приступить лишь после умножения элементов R' и r' на соответствующие определенные значения



Фиг. 7

$\mu^2, m_\beta^2, m_\alpha^2$ и γ^2 , т. е. после получения соответствующих R и r .

$$\left. \begin{aligned} R_{ii} &= \mu^2 R'_{ii}; & r_{ii} &= \mu^2 r'_{ii}; & R_{ai} &= m_\alpha^2 R'_{ai} = r_{ai} = m_\alpha^2 r'_{ai}, \\ R_{\beta i} &= m_\beta^2 R'_{\beta i}; & r_{\beta i} &= m_\beta^2 r'_{\beta i}; & R_{\gamma i} &= \gamma^2 R'_{\gamma i} = r_{\gamma i} = \gamma^2 r'_{\gamma i}. \end{aligned} \right\} (4.6)$$

На примере, представленном на фиг. 7, произведено совместное сложение ошибок по формулам (4.1) и (4.2) для шестой точки ($i = 6$).

При этом взяты такие значения средних квадратичных ошибок:

$$m_\alpha \approx \pm 2'; \quad m_\beta \approx \pm 1',$$

или в аналитической мере

$$m_{\alpha}^2 = \frac{4}{10} \cdot 10^{-6}; \quad m_{\beta}^2 = \frac{1}{10} \cdot 10^{-6};$$

$$\mu = \frac{\sqrt{20}}{1000} \text{ м }^{\frac{1}{2}}; \quad \mu^2 = 2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ мм};$$

$$\gamma = \frac{1}{1000\sqrt{5}}; \quad \gamma^2 = \frac{2}{10} \cdot 10^{-6}.$$

В связи с этим, если квадраты ошибок в положении вершин брать в кв. мм, а длины l и D — в м, то формулы (4.1) и (4.2) преобразуются в такие:

$$R_i = 10 l_1 + 10 l_2 + \dots + 10 l_i + 3 \cdot \frac{1}{10} D_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} D_1^2 + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} D_2^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} D_{i-1}^2; \quad (4.7)$$

$$\overleftrightarrow{r_i} = 10 \overleftrightarrow{l_1} + 10 \overleftrightarrow{l_2} + \dots + 10 \overleftrightarrow{l_i} - \frac{1}{10} \overleftrightarrow{D_A^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \overleftrightarrow{D_1^2} - \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \overleftrightarrow{D_2^2} - \dots - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \overleftrightarrow{D_{i-1}^2}. \quad (4.8)$$

На фиг. 7 стороны l_1, l_2, l_3 и l_6 идут по простиранию пласта, стороны l_4 и l_5 — примерно по падению или восстанию. Поэтому можно принять, что направления сторон l_4 и l_5 перпендикулярны к одинаковому, примерно, направлению сторон, идущих по простиранию. Это обстоятельство упрощает построение квадратичного полигона.

Для вершины $i = 6$ в принятом на фиг. 7 масштабе имеем:

$$D_A = 117; \quad D_1 = 83; \quad D_2 = 67; \quad D_3 = 80; \quad D_4 = 58;$$

$$D_5 = l_6 = 53;$$

$$l_{A.3} = l_1 + l_2 + l_3 = 146; \quad l_{3.5} = l_4 + l_5 = 63.$$

При построении r_6 сначала из точки 6 проводим прямую 6—6₁, параллельную стороне l_1 . Эта прямая на фиг. 7 совпадает со стороной l_6 .

Прямая $b - b_i$ принимается за начальное направление в построении квадратичного полигона. С этим направлением, как уже отмечалось, совпадают и стороны l_2 , l_3 и l_6 .

После удвоения направлений сторон l_4 и l_5 , как примерно перпендикулярных к начальному направлению, эти стороны направляются в обратную сторону.

Значит, $10(l_4 + l_5) = 360$ надо взять со знаком минус. Сторона $D_{i-1} = D_5$ имеет направление, одинаковое с l_1 и l_6 , но в формуле (4.8) помещена со знаком минус. Следовательно, она также присоединится к первому слагаемому со знаком минус (-140). В результате первая сторона геометрической суммы r_6 будет иметь значение $1460 - 630 + 530 - 140 = 1220$.

Вся же сумма r_6 выразится таким равенством:

$$\overleftrightarrow{r_6} = \overleftrightarrow{1220} - \overleftrightarrow{1370} - \overleftrightarrow{344} - \overleftrightarrow{224} - \overleftrightarrow{320} - \overleftrightarrow{168}.$$

В соответствии с этим на начальной прямой $b - b_i$ откладываем первое слагаемое в виде отрезка $\overrightarrow{b - b_i}$, равного 1220. Далее отложим отрезок $\overrightarrow{b_i - b_A} = 1370$ по направлению, обратному удвоенному направлению вектора D_A . Для этого удваиваем угол φ_A между $\overrightarrow{b - b_i}$ и вектором D_A (удобнее — между $\overrightarrow{b - b_i}$ и продолжением D_A в виде прямой $b - K$) (фиг. 7). Получаем направление $\overrightarrow{b - L}$.

Из точки b_i проводим прямую, параллельную $b - L$, и в сторону, обратную направлению $\overrightarrow{b - L}$, откладываем отрезок $\overrightarrow{b_i - b_A} = 1370$. Из точки b_A проводим прямую $\overrightarrow{b_A - b_1}$ по направлению, обратному удвоенному направлению вектора D_1 , поступая так же, как и с D_A , и откладываем отрезок $\overrightarrow{b_A - b_1} = 344$. Таким же образом строим и остальные слагаемые:

$$\overrightarrow{b_1 - b_2} = 224; \quad \overrightarrow{b_2 - b_3} = 320; \quad \overrightarrow{b_3 - b_4} = 168.$$

Последнее слагаемое отложено в направлении, обратном удвоенному направлению D_4 по отношению к начальному направлению $\overrightarrow{b - b_i}$.

Соединяя точку b_4 с точкой b , получаем замыкающую $b \xrightarrow{\rightarrow} b_4$ квадратичного полигона, равную искомому r_6 .

В масштабе чертежа $r_6 = 1560$ (31.2 мм).

Для определения направления большой оси эллипса погрешности делим угол $b_4 - b - b_l = 2\gamma$ пополам; получаем прямую $b - M_6$.

Находим R_6 по формуле (4.7) и данным значениям l и D .

$$R_6 = 1460 + 630 + 530 + 4110 + 344 + 224 + 320 + 168 + 140 = 7926.$$

После этого находим:

$$R_6 + r_6 = 7926 + 1560 = 9486; \quad R_6 - r_6 = 6366;$$

$$M_{\max 6} = \sqrt{R_6 + r_6} = \pm 97 \text{ мм}; \quad M_{\min 6} = \sqrt{R_6 - r_6} = \pm 80 \text{ мм}.$$

Эллипс с этими осями в масштабе 1/16 нанесен вокруг вершины b на фиг. 7.

Если точка b является точкой схода встречного забоя, направленного по $b \xrightarrow{\rightarrow} E$, то по эллипсу погрешности на точке b , найденному выше, можно определить поперечную ошибку v к направлению забоя и продольную ошибку u на точке b по формулам:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= M_{\max}^2 \sin^2 \omega + M_{\min}^2 \cos^2 \omega, \\ u^2 &= M_{\max}^2 \cos^2 \omega + M_{\min}^2 \sin^2 \omega, \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

где, как видно на фиг. 7, ω представляет собой угол между направлением выработки забоя $b \xrightarrow{\rightarrow} E$ и большой осью эллипса.

Обычно выработка забоя направлена вдоль конечного стана, как это и представлено на фиг. 7. Поэтому на нем $\omega = \gamma$.

Предел поперечной ошибки v задается заранее. Поэтому маркшейдер должен установить точность измерения сторон и углов, подходящих к месту сбойки полигонов, чтобы не превысить заданный предел.

Данный здесь прием построения эллипсов погрешности облегчает предвычисление ожидаемой поперечной ошибки.

Продольная ошибка и при сбойке не так вредна, и она меньше интересует маркшейдера.

Данное построение к тому же позволяет легко обнаружить в данном полигоне наиболее слабое место, способствующее главным образом увеличению поперечной ошибки.

В этом отношении нужно стремиться к тому, чтобы элемент r направлялся вдоль выработки забоя и при данном R был бы возможно большим. Это должно повести к наибольшему укорочению малой полуоси $M_{\min}$ эллипса, идущей в данном случае поперек выработки забоя.

п. 2. Центр линейных невязок сомкнутого полигона. В сомкнутом полигоне постоянная ошибка γ измерения длин не сказывается на линейной невязке полигона. Можно считать, что на линейной невязке отражаются лишь случайная ошибка μ измерения сторон и ошибка m_β измерения углов. Мы укажем здесь на прием установления отношения этих двух ошибок с помощью построения центра линейных невязок.

Найдем линейные невязки для каждой вершины сомкнутого полигона по измеренным сторонам и углам без предварительного уравнивания последних за их теоретическую сумму. Для каждой вершины i полигона будет своя линейная невязка f_i . При этом угол β_i при данной вершине не принимается во внимание, а учитываются углы при остальных $n - 1$ вершинах.

Достаточно только для одной вершины (назовем ее первой) найти аналитическую невязку f_1 ; для остальных они легко определяются графически.

При вычислении f_1 мы принимаем дирекционный угол первой по ходу лежащей стороны l_1 равным нулю и соответственно этому по внутренним углам вычисляем дирекционные углы остальных сторон. При этом внутренний угол β_1 не учитывается. Последняя сторона l_n получает направление от угла β_n , а l_1 имеет уже произвольно заданное направление с дирекционным углом $\alpha_1 = 0$.

По измеренным длинам сторон и найденным указанным образом их дирекционным углам вычисляются приращения

координат и строится линейная невязка f_1 по суммам приращений $\Sigma \Delta x$ и $\Sigma \Delta y$ в масштабе $1/10$ или $1/20$.

Таким образом получаем f_2 второй вершины, не изменяя дирекционных углов, кроме первой стороны, так как первая сторона I_1 получает вместо нуля дирекционный угол от дирекционного угла последней стороны через внутренний угол первой вершины, который раньше не принимался во внимание.

Положим, что внутренние углы дают невязку f_β , представляющую разность между теоретической и фактической их суммой. Тогда новый дирекционный угол первой стороны будет отличаться от прежнего, т. е. от нуля, на величину f_β . Поэтому к вектору f_1 нужно пристроить вектор, перпендикулярный к первой стороне и равный $\frac{I_1 f_\beta}{3438}$, если f_β выражено в минутах дуги, чтобы получить линейную невязку f_2 для второй вершины.

Затем для третьей вершины нужно изменить прежний дирекционный угол второй стороны на ту же величину f_β и к вектору f_2 пристроить вектор $\frac{I_2 f_\beta}{3438}$, перпендикулярный ко второй стороне, и таким образом обойти весь полигон.

Пристроенные к f_1 векторы $\frac{I_1 f_\beta}{3438}, \frac{I_2 f_\beta}{3438}, \dots, \frac{I_n f_\beta}{3438}$ создадут полигон, подобный данному и повернутый на 90° в ту или иную сторону, в зависимости от знака f_β . Поэтому можно не чертить этих векторов, а воспользоваться данным полигоном, повернув только в обратную сторону, согласно знаку f_β , на 90° первую невязку f_1 и изменив масштаб последней так, чтобы указанные векторы равнялись сторонам изображенного на плане полигона.

Пусть данный сомкнутый полигон вычерчен в масштабе $\frac{1}{M}$. Тогда $\frac{l}{M}$ должно отвечать $\frac{I f_\beta}{3438}$, т. е. $\frac{l}{M} k$ должно равняться $\frac{I f_\beta}{3438}$, или $\frac{k}{M} = \frac{f_\beta}{3438}$,

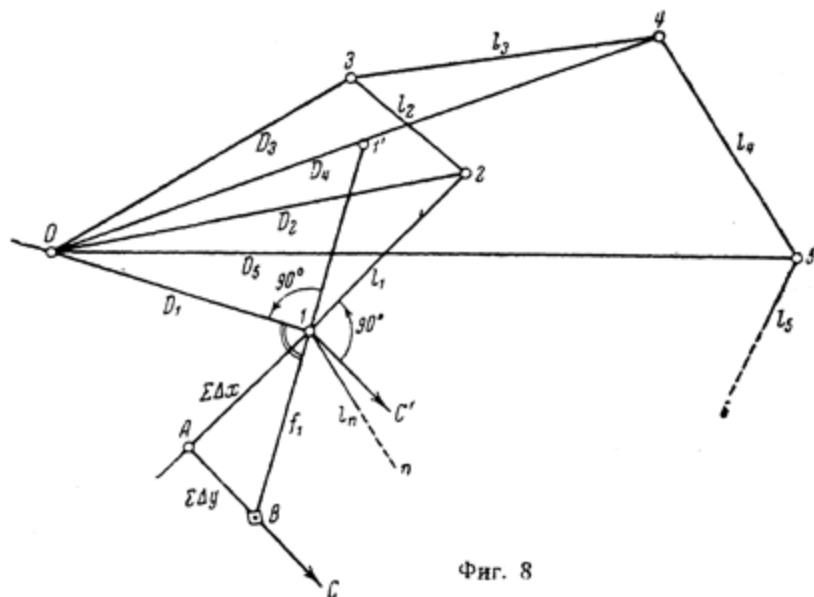
и

$$k = \frac{M f_\beta}{3438}. \quad (4.10)$$

Значит, вместо f_1 мы должны взять D_1 , выраженное равенством

$$D_1 = \frac{1}{k} f_1 = \frac{3438}{Mf_\beta} f_1. \quad (4.11)$$

Далее, пристроив соответствующим образом у первой вершины полигона вектор D_1 и соединив начало этого вектора с остальными вершинами, мы получим радиус-векторы $D_i = \frac{1}{k} f_i$, которые, будучи помножены на k , дадут значения линейных невязок f_i этих вершин. Для получения



Фиг. 8

направлений f_i нужно провести через каждую вершину полигона прямые, перпендикулярные к D_i .

На фиг. 8 все построение пояснено. Здесь в масштабе $1/7500$ нанесен полигон $1-2-3\dots$; f_β принято равным $5'$ и для первой вершины оказалось, что $\Sigma\Delta x = -32$ см и $\Sigma\Delta y = +18$ см при оси x , направленной, как условились выше, по первой стороне $1-2=l_1$.

Строим линейную невязку f_1 в масштабе $1/15$, откладывая $1 \rightarrow A = -21.3$ мм и $\vec{AB} = 12$ мм. Получаем вектор $1 \rightarrow B = f_1 = 23.7$ мм или 37 см в натуре.

Так как f_β положительное, т. е. действительная сумма внутренних углов меньше теоретической, а при получении дирекционных углов внутренние углы вычитались, и новый дирекционный угол получил приращение $+f_\beta$, то в данном случае первая сторона должна быть повернута вправо — ее конец отойдет вправо на величину $\frac{f_\beta l_1}{3438}$ в масштабе плана. Значит, в конце B вектора f_1 нужно пристроить вектор $\vec{BC}$, идущий перпендикулярно к стороне l_1 вправо от ее направления $l_1 \rightarrow 2$, т. е. по продолжению $\vec{AB}$.

Перенесем поступательно вектор f_1 так, чтобы он упирался концом B в вершину I , и повернем его вокруг точки I на 90° так, чтобы $\vec{BC}$, перенесенное в $I \rightarrow C'$, направилось по стороне $l_1 \rightarrow 2$. Тогда перенесенный вектор f_1 в виде отрезка $I' \rightarrow I$ займет положение на прямой $I-O$, перпендикулярной к $I-B$.

Изменим, как условились, масштаб f_1 , помножив f_1 на $\frac{1}{k}$ и получив D_1 , согласно равенству (4.9), и отложим на $I-O$ отрезок $O \rightarrow I$, равный D_1 . Получим точку O , которую мы называем центром линейных невязок сомкнутого полигона.

Для фиг. 8:

$$k = \frac{5.7500}{3438} = 11; D_1 = \frac{37}{11} = 3.4 \text{ см на плане.}$$

Соединяем точку O со всеми остальными вершинами полигона и получаем соответствующие D . На плане (фиг. 8) они оказались равными: $D_2=5.3$ см, $D_3=4.4$ см, $D_4=8.2$ см и т. д., и в масштабе k они дают соответствующие линейные невязки в натуре:

$$f_2 = k D_2 = 5.3 \cdot 11 = 58 \text{ см; } f_3 = 4.4 \cdot 11 = 48 \text{ см и т. д.}$$

Направлены эти линейные невязки перпендикулярно к своим D , как f_1 по отношению к D_1 .

Чем меньше угловая невязка f_β , тем меньше ее влияние на линейную невязку f_l . При $f_\beta=0$ коэффициент k обращается также в нуль и точка O удаляется в бесконечность.

Может случиться, что точка O упадет на одну из вершин полигона. Это будет означать, что линейная невязка для данной вершины равна нулю, в то время как для других она нулю не равна.

При удалении точки O в бесконечность, когда $f_\beta = 0$, мы получаем для линейных невязок выражение неопределенности $\frac{0}{0}$. Оно раскрывается таким образом, что линейные невязки всех вершин равны f_1 и по величине и по направлению. Это вытекает из приведенных выше рассуждений, объясняющих построение невязок других вершин, кроме первой.

Благоприятным в смысле фактического распределения ошибок сторон и углов следует признать тот случай, когда центр невязок O помещается примерно в середине данного замкнутого полигона.

Центр невязок O можно использовать для анализа ошибок измерения сторон и углов полигона μ и m_β . Ошибка γ , как указано в начале данного пункта, исключается.

В предыдущем пункте указано получение R'_i и r'_i по формулам (4.3). Они связаны исключительно с μ^2 и остаются неизменными для каждой вершины полигона. Условно эти элементы можно отнести к любой точке и на данной площади, занятой полигоном, в том числе и к центру линейных невязок O , в котором можно принять, что линейная невязка равна нулю, и что ошибки от измерения сторон компенсируются ошибками от измерения углов.

Построим эллипс погрешности для точки O по радиусам-векторам D , показанным на фиг. 8, найдя элементы R'_β и r'_β по формулам (4.4). При этом D должны быть выражены в метрах как и l , согласно масштабу плана. В соответствии с этим например, на фиг. 8,

$$D_1 = 7500 \cdot 3.4 \text{ см} = 255 \text{ м};$$

$$D_2 = 7500 \cdot 5.3 \text{ см} = 400 \text{ м};$$

$$D_3 = 7500 \cdot 4.4 \text{ см} = 330 \text{ м, и т. д.}$$

Помножая, согласно формулам (4.6), R'_i и r'_i на μ^2 и R'_β и r'_β на m_β^2 для точки O , мы должны получить R_i , r_i

и R_β , r_β как элементы двух эллипсов, в общем одинаковых по размерам или по площади.

Значит, следует принять, что

$$V(R_l + r_l)(R_l - r_l) = V(R_\beta + r_\beta)(R_\beta - r_\beta)$$

или

$$\mu^2 V R_l'^2 - r_l'^2 = m_\beta^2 V R_\beta'^2 - r_\beta'^2,$$

$$\frac{\mu^2}{m_\beta^2} = V \frac{R_\beta'^2 - r_\beta'^2}{R_l'^2 - r_l'^2} m, \quad (4.12)$$

где μ^2 выражено в m , m_β — в аналитической мере;

R_l' , r_l' и R_β' , r_β' — элементы, вычисленные и построенные по сторонам l и по радиусам-векторам D , соединяющим центр линейных невязок O со всеми вершинами данного сомкнутого полигона.

Из многих полигонов, измеренных при одинаковых условиях, можно получить среднее значение отношения

$\frac{\mu^2}{m_\beta^2} = \omega_{\text{ср}}$ и среднее значение m_β^2 , как среднее арифметическое из квадратов угловых невязок f_β , деленных на число

сторон n в каждом полигоне. $m_{\beta \text{ ср}}^2$ равно среднему арифметическому из $\frac{1}{n} \frac{f_\beta^2}{3438^2}$. Тогда среднее μ^2 найдется из формулы:

$$\mu_{\text{ср}}^2 = \omega_{\text{ср}} m_{\beta \text{ ср}}^2. \quad (4.13)$$

п. 3. Характеристика искажения сети точек эллипсом рассеивания. Бывает, что сеть точек, например триангуляционных, определяется дважды независимо друг от друга. Координаты одних и тех же точек поэтому получают двойное значение. При сопоставлении этих значений требуется прежде всего возможно лучше совместить сети, не нарушая их подобия. Допускается общее смещение с общим поворотом и некоторое уменьшение или увеличение размеров одной сети по отношению к другой. Мы называем это центрированием, ориентированием и масштабированием одной изменяемой с сохранением подобия сети. Обозначим элементы этих действий через a , b , τ и $m = 1 + \varepsilon$, где a и b — перемещения по координатным осям X и Y ,

τ — угол поворота изменяемой сети в аналитической мере и m — масштаб этой сети.

Обычно a , b , τ и ϵ — малые величины, так как предварительно сети могут быть достаточно приближенно ориентированы и центрированы относительно одних и тех же координатных осей и одного начала. Затем эти величины определяются по способу наименьших квадратов в предположении, что сумма квадратов остаточных отклонений общих точек по обоим координатным осям минимальная.

Величины a и b исключаются сами собой, если начало координат для обеих систем перенести в центры тяжести общих точек. Остается определить две величины — τ и ϵ .

Составляем для них следующие уравнения погрешности:

$$\left. \begin{aligned} -y_i\tau + x_i\epsilon - v_{xi} &= \delta x_i, \\ +x_i\tau + y_i\epsilon - v_{yi} &= \delta y_i, \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

которые могут быть заменены следующими:

$$\left. \begin{aligned} (x_i^2 + y_i^2)\tau - (x_iv_{yi} - y_iv_{xi}) &= v_\tau, \\ (x_i^2 + y_i^2)\epsilon - (x_iv_{xi} + y_iv_{yi}) &= v_\epsilon, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

где x_i и y_i — координаты точек той или иной системы при начале координат в центре тяжести общих точек;
 v_{xi} и v_{yi} — разности абсцисс и ординат изменяемой и оставляемой неизменной систем (изменяемое минус неизменное);

n — число общих точек.

Сумму $x_i^2 + y_i^2$ можно заменить квадратом расстояния s_i^2 от центра тяжести до данной точки i . Это расстояние можно измерить непосредственно по чертежу. Величины s_i , x_i и y_i в уравнениях (4.15) удобнее выражать в км, а v_{xi} и v_{yi} — в м. Тогда вместо τ и ϵ мы получим 1000τ и 1000ϵ , что предпочтительнее ввиду малости τ и ϵ .

Из уравнений (4.14) или (4.15) получаются два нормальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 1000 [s^2] \tau - ([xv_y] - [yv_x]) &= 0, \\ 1000 [s^2] \epsilon - ([xv_x] + [yv_y]) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Отсюда

$$1000 \tau = \frac{[xv_y] - [yv_x]}{[s^2]} ; \quad 1000 \varepsilon = \frac{[xv_x] + [yv_y]}{[s^2]} , \quad (4.17)$$

где x , y и s выражены в км, а v_x и v_y в м;

$$s^2 = x^2 + y^2.$$

Найдя τ и ε , вычисляем для общих точек остаточные отклонения δx_i и δy_i по формулам (4.14) и строим по найденным δx_i и δy_i векторы отклонений $e_i = \sqrt{\delta x_i^2 + \delta y_i^2}$ с их направлениями при одной произвольной точке.

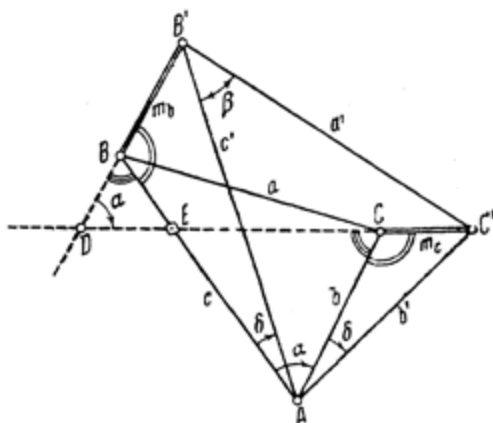
Эти векторы мы можем рассматривать как радиусы-векторы рассеивания точек и получить по ним соответственный эллипс рассеивания, как указано в п. 6 § 2 и пояснено на фиг. 3. Только здесь в отличие от формул (2.17) следует $M_{\max}^2$ и $M_{\min}^2$ разделить на $n - 2$, где n — число общих точек.

п. 4. Характеристика искажения бумаги или иного чертежного материала. Эллипсом рассеивания можно характеризовать тот или иной материал, употребляемый для черчения или печатания: бумагу, ватман, кальку или иной прозрачный материал, фотобумагу и т. д. Для этого на куске определенного размера исследуемого материала наносят равномерно по всей площади ряд точек и измеряют их координаты при помощи координатографа при определенной ориентировке и центрировке. Затем хранят материал некоторое время в определенных условиях или подвергают его различным воздействиям: свертывают в рулон, кладут под пресс, смачивают, охлаждают, нагревают и т. п.

После этого с той же примерно центрировкой и ориентировкой повторно измеряют координаты нанесенных точек на координатографе и, сопоставляя прежние координаты с новыми, исключают ошибку центрировки, перенося начало координат в центр тяжести точек, а также ошибку ориентировки τ и влияние некоторого возможного общего растяжения или сжатия в виде изменения масштаба вместо единицы на $1 \pm \varepsilon$. Это производится совершенно так же, как показано в предыдущем пункте.

В результате остаются по каждой точке некоторые векторы смещений e , которые можно рассматривать как векториальные ошибки и как таковые перенести поступательно в одну точку и квадратично сложить. Получатся величины $M_{\max}^2$ и $M_{\min}^2$, которые мы делим на $n - 2$, где n — число нанесенных на листе точек, и находим эллипс, определенно ориентированный, с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{M_{\max}^2}{n-2}} \quad \text{и} \quad b = \sqrt{\frac{M_{\min}^2}{n-2}}, \quad (4.18)$$



Фиг. 9

как указатель искажения всего листа данного материала после тех или иных манипуляций с ним.

Такое выражение искажений выдвигается здесь впервые. Поэтому интересно его проделать.

п. 5. Перенос направленных погрешностей. Для учета влияния ошибок в положении исходных (твердых) точек при развитии опорной триангуляционной сети требуется переносить погрешности от одних пунктов к другим. В качестве примера такого переноса разберем следующий случай.

Пусть подобные треугольники ABC и $A'B'C'$ (фиг. 9) повернуты относительно друг друга вокруг общей (твердой) вершины A на некоторый угол δ . Легко показать, что расстояния между другими соответствующими вершинами,

т. е. отрезки $\overline{BB'} = m_b$ и $\overline{CC'} = m_c$, будут пропорциональны соответствующим сторонам c и b или c' и b' и составят между собой угол, равный α .

Треугольники ABB' и ACC' подобны между собой, как имеющие равные углы δ при вершине A и пропорциональные стороны этих углов:

$$b : c = b' : c'.$$

Значит, и другие углы равны. Отсюда вытекает, что угол между BB' и CC' , т. е. угол $B'DC$ из треугольника BED , равен углу $BAC = \alpha$ из треугольника AEC . Кроме того,

$$\frac{m_b}{m_c} = \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} = \frac{\sin C}{\sin B}. \quad (4.19)$$

Поэтому, если вершина B при сохранении подобия треугольников опишет некоторую фигуру, то и точка C опишет подобную же фигуру, размеры которой пропорциональны расстояниям $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ от неподвижной точки A , повернутую на угол α , равный углу BAC .

Это означает, что, если мы получаем точку C из решения треугольника с абсолютно точно измеренными углами при безошибочном положении точки A и некоторой эллипсной ошибке на точке B , то на точке C мы также получим эллипс погрешности, как бы переданный от точки B . Он будет подобен эллипсу на точке B , но будет иметь другую ориентировку. Размеры его равны размерам ε_{BA} , помноженным на $\frac{b}{c}$, и повернут он на угол α по отношению к ε_{BA} . Это мы выражаем равенством

$$\varepsilon_{CA} = \varepsilon_{BA} \frac{b}{c} \text{ вращ. } \alpha. \quad (4.20)$$

где ε_{CA} — эллипс на точке C по отношению к точке A ,

ε_{BA} — эллипс на точке B по отношению к той же точке A .

Ошибки измерения углов треугольника ABC дадут свой эллипс погрешности ε_{AC} на точке C , который должен быть

сложен с эллипсом $\mathcal{E}_{CA}$, как показано в предыдущем параграфе.

Вместо эллипса $\mathcal{E}_{BA}$ на точке B мы можем мыслить такой же эллипс и при той же ориентировке на точке A . Обозначим его через $\mathcal{E}_{AB}$. Тогда эллипс погрешности $\mathcal{E}_{CB}$ на точке C относительно вершины B , очевидно, получит такое выражение:

$$\mathcal{E}_{CB} = \mathcal{E}_{AB} \frac{a}{c} \text{ вращ. } \beta, \quad (4.21)$$

где β — угол при вершине B .

Сопоставляя равенства (4.20) и (4.21), мы видим, что относительная продольная λ_u и поперечная λ_v ошибки на точке C остаются постоянными как для стороны BC , так и для AC , поскольку эллипс $\mathcal{E}_{BA}$ без изменения поступательно может быть перенесен в точку A в виде эллипса $\mathcal{E}_{AB}$.

Иначе и быть не может, так как наличие эллипса погрешности на одном из концов стороны AB свидетельствует об определенных относительных продольной и поперечной ошибках или об определенных ошибках масштабирования и ориентирования стороны AB .

При отсутствии ошибок в углах треугольника, естественно, эти ошибки масштабирования и ориентирования передадутся без изменения другим сторонам треугольника.

Относительная продольная ошибка получается от деления радиуса-вектора подеры эллипса, идущего вдоль стороны, на длину этой стороны, а относительная поперечная ошибка равна радиусу-вектору подеры эллипса, перпендикулярного к стороне, деленному на длину стороны, т. е. равна углу поворота стороны в аналитической мере, выражающему ошибку азимута (дирекционного угла) стороны.

Формулы (4.18) и (4.19) могут быть переписаны так:

$$\frac{\mathcal{E}_{CA}}{b} = \frac{\mathcal{E}_{BA}}{c} \text{ вращ. } \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\mathcal{E}_{CB}}{a} = \frac{\mathcal{E}_{AB}}{c} \text{ вращ. } \beta, \quad (4.22)$$

где $\frac{\mathcal{E}_{CA}}{b}$, $\frac{\mathcal{E}_{BA}}{c}$, $\frac{\mathcal{E}_{CB}}{a}$ и $\frac{\mathcal{E}_{AB}}{c}$ являются символами относительных ошибок.

Из всех этих рассуждений мы усматриваем, что эллипсы погрешностей положения точек должны рассматриваться относительно определенных точек. На одном пункте может быть бесчисленное множество таких эллипсов погрешности по отношению к бесчисленному множеству окружающих его точек. Все эти эллипсы различны по величине и по ориентированию. Мы называем их эллипсами первой категории.

Существует другая категория эллипсов, которые являются неизменными по отношению к ряду точек. Например, средний эллипс погрешности при вставке точки в сеть твердых точек, или эллипс погрешности $\varepsilon_{\Delta C}$ на вершине треугольника C по отношению к двум другим вершинам A и B , вызванный погрешностями измеренных углов A , B и C или A и B . Этот эллипс второй категории мы должны сложить с эллипсами первой категории ε_{CA} и ε_{CB} , чтобы получить два суммарных эллипса первой категории, учитывающих и ошибки измерения углов:

$$\varepsilon_{CA} = \varepsilon_{BA} \frac{b}{c} \text{ вращ. } \alpha \overset{\longleftrightarrow}{+} \varepsilon_{\Delta C},$$

$$\varepsilon_{CB} = \varepsilon_{AB} \frac{a}{c} \text{ вращ. } \beta \overset{\longleftrightarrow}{+} \varepsilon_{\Delta C},$$

где знак $\overset{\longleftrightarrow}{+}$ означает сложение эллипсов погрешности, разобранное в предыдущем параграфе.

§ 5. ЛИНИИ ПОЛОЖЕНИЯ, ГРАДИЕНТЫ И ВЫРАЖЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ

п. 1. Определения. При определении положения точки на плоскости (на плане), особенно в случае избыточных данных, исходят обычно из приближенного, предварительного ее положения. При этом геометрические места точек в виде некоторых кривых, отвечающих измеренному или данному значению соответствующей функции (углу, расстоянию), могут быть заменены без ущерба для точности результатов вблизи определяемой точки прямыми линиями, касательными к кривым линиям. Например, при обратной

засечке геометрическим местом измеренного угла между направлениями на опорные (твердые) точки является дуга круга, вмещающая измеренный угол. Небольшой элемент этой дуги заменяется отрезком касательной прямой определенного направления.

Небольшое изменение измеренной функции на величину l вызывает поступательное (параллельное) перемещение линии положения по нормали к ней на величину d . Конечно, параллельной своему первоначальному положению линия положения остается в сравнительно небольших практически допустимых пределах, отвечающих точности построения на чертеже.

Необходимым для всех манипуляций с линиями положения элементом является их градиент g , который теоретически представляет собой предел отношения l к d при стремлении l к нулю. Практически берется некоторое конечное приращение l

$$g = \frac{l}{d} . \quad (5.1)$$

Градиент g представляется вектором, направленным по нормали к линии положения в сторону, отвечающую увеличению измеряемой функции.

В применении на практике графического метода линий положения формула (5.1) является исходной для двух основных формул, служащих для взаимного перехода от l к d . Градиент g обычно всегда может быть определен заранее.

Эти формулы следующие:

$$d = \frac{l}{g} , \quad (5.2)$$

$$l = gd . \quad (5.3)$$

п. 2. Веса и погрешности. Кроме градиента g , линии положения характеризуются весом p , который обратно пропорционален квадрату средней квадратичной погрешности m измеряемой функции и прямо пропорционален квадрату градиента

$$p = \frac{g^2}{m^2} . \quad (5.4)$$

Если для различных сопоставляемых линий положения m одинаковы, то вес p , естественно, выражается формулой

$$p = g^2. \quad (5.5)$$

Иногда, несмотря на различные g , которые в этом случае нужны лишь для получения d по формуле (5.2), веса p считаются одинаковыми и принимаются поэтому равными единице.

Это бывает тогда, когда есть основание считать m пропорциональным g в формуле (5.4).

При $l = m$ в формуле (5.2) величина d превращается в векториальную погрешность e , совпадающую по направлению с градиентом g , но имеющую два знака, поскольку m имеет два знака:

$$\overleftrightarrow{e} = \pm \frac{m}{g}. \quad (5.6)$$

На основании этой формулы градиенты линий положения привлекаются к выражению направленных погрешностей.

п. 3. Градиент и погрешность расстояния. При измерении расстояний s линией положения служит отрезок касательной к дуге круга, описанного из начальной точки радиусом, равным s .

При $l = \delta_s$ и перемещение $d = \delta_s$. Значит, согласно формуле (5.1),

$$g_s = 1 \quad (5.7)$$

и согласно формуле (5.6)

$$\overleftrightarrow{e} = \pm m_s. \quad (5.8)$$

п. 4. Градиент и погрешность направления. При получении направления в виде некоторого дирекционного угла α линия положения представляется отрезком прямой линии прямой или боковой засечки. Перемещение d этого отрезка равно

$$s \operatorname{tg} \delta \alpha = \frac{s \delta \alpha''}{\rho''},$$

где s — приближенно найденное расстояние от опорной точки до искомой;

δ_α'' — изменение (угловое отклонение) угла α в секундах дуги и

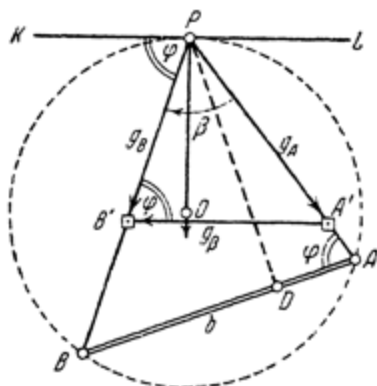
$\rho = 206265''$ — число секунд в дуге, равной радиусу.

Отсюда, разделив $\delta\alpha = l$ на d , согласно формуле (5.1), получим для градиента g_α направления такое выражение:

$$g_\alpha = \frac{\rho}{s} = \frac{206265}{s}''/\text{м} = \frac{20626}{s}''/\text{дм} = \frac{2063}{s}''/\text{см}, \quad (5.9)$$

где расстояние s везде выражено, как обычно, в м. Векториальная погрешность направления e_α перпендикулярна к линии положения с дирекционным углом α и, согласно формуле (5.6), выражается равенством:

$$\overleftrightarrow{e_\alpha} = \pm \frac{m_\alpha}{g_\alpha} \text{ м, дм или см.} \quad (5.10)$$



Фиг. 10

п. 5. Градиент и погрешность угла. Когда измеряется угол между направлениями, то его градиент выражается геометрической разностью градиентов направлений, чем

определяются и его величина и его направление.

Это основывается на теореме: *Градиент алгебраической суммы двух функций равен геометрической сумме или разности градиентов слагаемых функций*, которая легко доказывается.

На фиг. 10 показано получение градиента угла β , измеренного на точке P между направлениями на опорные точки A и B .

На стороне PA в некотором масштабе отложен градиент

$$g_A = \frac{\rho}{s_A} = \overrightarrow{PA'}$$

и на стороне PB — градиент

$$g_B = \frac{\rho}{s_B} = \overrightarrow{PB'}$$

Градиент g_β угла β равен $\overrightarrow{A'B'}$ в принятом масштабе. В данном случае $\overrightarrow{A'B'}$ дает направление линии положения KL угла β , которая параллельна $A'B'$. Действительное же направление градиента g_β перпендикулярно к $A'B'$ и к KL и направлено в сторону возрастания угла β , как показано на фиг. 10. Это следует из того, что g_A и g_B , будучи сами по себе перпендикулярными к PA и PB , для удобства построения совмещены с последними путем поворота на 90° по движению часовой стрелки. Таким образом

$$\vec{g}_\beta = \vec{g}_B - \vec{g}_A = \overrightarrow{A'B'}. \quad (5.11)$$

Треугольники $PA'B'$ и PAB подобны, так как угол β у них общий, а стороны, заключающие этот угол, пропорциональны. Стороне PA' отвечает сторона PB , а стороне PB' — сторона PA :

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PB'}} = \frac{\rho}{\overline{PA}} : \frac{\rho}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}.$$

Отсюда угол PAB равен углу $PB'A' = \varphi$; KL проведена параллельно $B'A'$. Значит, угол $KPB = \varphi$ и KL является касательной к окружности, проходящей через точки A, B, P и имеющей центр в точке O .

Из подобия треугольников ABP и $A'B'P$, кроме того, вытекает аналитическое выражение для g_β :

$$g_\beta = \rho \frac{B}{s_A s_B} = \rho \frac{\overline{AB}}{\overline{PA} \overline{PB}}. \quad (5.12)$$

Векториальная погрешность e_β угла β направлена по $\overleftrightarrow{PO}$ и выражается равенством:

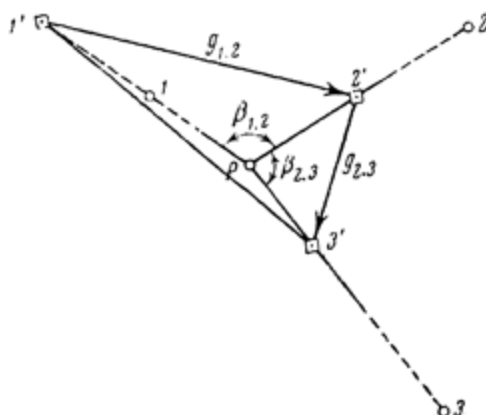
$$\overleftrightarrow{e}_\beta = \pm \frac{m_\beta}{g_\beta}, \quad (5.13)$$

где m_β — ошибка угла β .

п. 6. Эллипс погрешности прямой и обратной засечки. Прямая засечка представляет собой два направленных луча (линии положения), в пересечении которых находится иско-

мая точка. Эти две линии положения имеют перпендикулярные к себе векториальные погрешности, которые могут быть вычислены по формуле (5.10). Сложение их дает эллипс погрешности; характеризующий данную прямую засечку.

При обратной засечке (задача Потенота-Снелиуса) имеются три опорные точки и измеряется два (три) угла между направлениями на эти точки. На фиг. 11 точки 1, 2 и 3 являются опорными. На точке P измерены углы $\beta_{1,2}$ и $\beta_{2,3}$. Согласно фиг. 10, построены градиенты $g_{1,2}$ и $g_{2,3}$ этих углов.



Фиг. 11.

Разделив ошибку измерения углов m_β на $g_{1,2}$ и $g_{2,3}$, мы получим $\overleftrightarrow{e_{1,2}}$ и $\overleftrightarrow{e_{2,3}}$, направленные перпендикулярно к сторонам $1'-2'$ и $2'-3'$ так называемого „инверсионного“ треугольника $1'-2'-3'$.

Квадратичное сложение $\overleftrightarrow{e_{1,2}}$ и $\overleftrightarrow{e_{2,3}}$ даст эллипс погрешности обратной засечки.

Может быть измерен самостоятельно и третий угол $\beta_{3,1}$ с градиентом $g_{3,1}$. Это уже даст избыточное измерение, требующее уравнивания, о чем речь будет в гл. III.

Таковы некоторые предпосылки к правильному анализу точностей в положении триангуляционных и полигонометрических пунктов. Относительные эллипсы погрешности первой категории, отмеченные в предыдущем параграфе, обычно не выделяются, только в некоторых случаях ограничиваются

сложным вычислением весов и средних ошибок функций измеренных и уравновешенных величин.

Между тем очень важно выделить и наглядно показать влияние различных причин на точность положения определяемой точки и правильно установить, по отношению к чему эта точность получается.

Градиенты линий положения способствуют наглядному выражению погрешностей, придавая им направленность и определенную зависимость от точности измерения.

Сами градиенты от точности измерения не зависят. Они выражают конструктивный элемент веса, в то время как точность самого измерения является оперативным элементом веса. В результате получается вес измеренной величины p , выражаемой равенством (5.4).

Вес измеренной величины и вес измерения — не одно и то же.

Глава II

ПОГРЕШНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 6. СЕТКА КАВРАЙСКОГО И ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ЕЕ ПОМОЩЬЮ

п. 1. Значение картографической сетки. Преимущество сетки Каврайского. Станок. При графическом решении задач, связанных с угловыми пространственными соотношениями, приходится неизбежно применять ту или иную проекцию шара в виде картографической сетки меридианов и параллелей. Действия с направленными погрешностями в пространстве относятся к подобным задачам. Поэтому надлежит остановиться на наиболее удобной сетке.

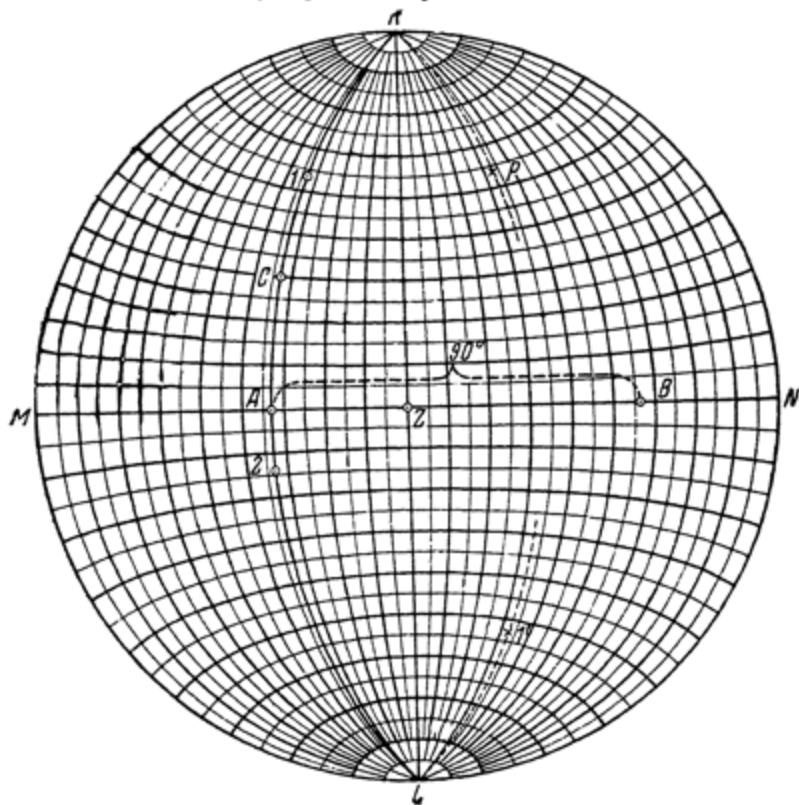
У кристаллографов и петрографов при исследовании кристаллического вещества нашли широкое применение поперечные азимутальные проекции, главным образом равноугольная (стереографическая) — сетка Вульфа и частично равновеликая — сетка Шмидта.

Между тем наиболее выгодной следует считать равнопромежуточную азимутальную проекцию, которая использована В. В. Каврайским для его сетки еще в 1911 г. Радиальный масштаб сетки Каврайского на всей площади одинаков, что обеспечивает одинаковую точность построения в различных частях сетки, тогда как у сеток Вульфа и Шмидта масштаб переменный.

Поэтому мы рекомендуем применять сетку Каврайского (фиг. 12) и будем в дальнейшем пользоваться именно ею.

Итак, выбранная нами сетка меридианов и параллелей представляет собой азимутальную равнопромежуточную по-

перечную проекцию, у которой, как и у всех поперечных проекций, полюсы или точки схода меридианов находятся на окружности основного круга, представляющего один из меридианов. Экватор и средний меридиан представлены взаимно-перпендикулярными прямыми линиями.



Фиг. 12

Для наших целей меридианы и параллели достаточно нанести через 5° , как представлено на фиг. 12; диаметр основного круга достаточен в пределах от 16 до 20 см ($1^\circ = 1$ мм).

Для удобства пользования сетку Каврайского следует наклеить на внутренний неподвижный круг особого станка. На этот круг заподлицо с ним надевается восьмиугольная или круглая доска с круглым вырезом примерно одинако-

вого с ним диаметра. Эта доска вращается вокруг неподвижного внутреннего круга. На нее наклеивается калька или иной прозрачный материал, на котором и происходит все построение.

Вращающуюся часть и внутренний круг изготавливают также из металла, придавая ему коробчатое сечение. В этом случае во вращающейся части делают несколько симметрично расположенных отверстий, куда забивают деревянные пробки, предназначенные для втыкания кнопок, прикрепляющих прозрачную бумагу.

Металлическая вращающаяся часть имеет форму диска, по краю которого сделано крупное рифление для более удобного вращения. С этой же целью деревянная доска делается восьмиугольной. Станок обеспечивает концентрическое вращение приколотого листа.

п. 2. Нанесение направлений и плоскостей с помощью сетки. В построениях всегда приходится переходить от направления к перпендикулярной к нему плоскости и обратно: от плоскости к перпендикулярному к ней направлению (вектору, лучу), дающему так называемый полюс плоскости на проекции.

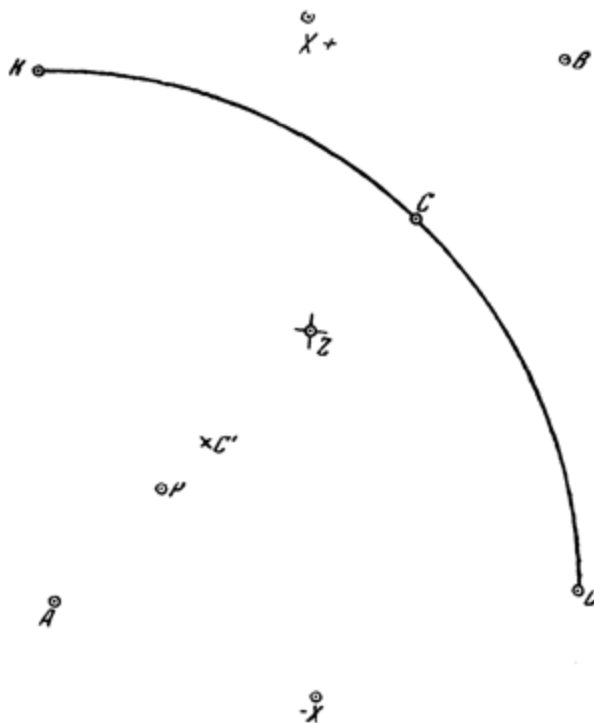
Все плоскости и направления мыслятся проходящими через одну точку, центр шара, меридианы и параллели которого нанесены на данной сетке Каврайского.

Плоскость задается направлением линии падения и углом наклона; направление вектора задается его азимутом или дирекционным углом и зенитным расстоянием или углом наклона.

Пусть заданное направление имеет дирекционный угол 217° и зенитное расстояние 53° . Предполагается, что горизонтальная плоскость совпадает с плоскостью основного круга сетки, и центр сетки является зенитом Z (проекцией отвесной линии).

Отметим, приколов прозрачный лист к станку, центр Z (фиг. 13) одной точкой и ось X двумя точками $+X$ и $-X$, лежащими на противоположных концах диаметра основного круга. Для этого повернем лист так, чтобы под точки $+X$ и $-X$ подошли концы экватора или среднего меридиана

сетки. Далее от точки $+X$ отсчитываем по движению часовой стрелки по окружности основного круга сетки 217° ; получим точку A . Затем поворачиваем лист на станке так, чтобы точка A переместилась на конец экватора, и по экватору от центра сетки (зенита Z) в сторону точки A откладываем зенитное расстояние, равное 53° . Получаем точ-



Фиг. 13

ку P как проекцию заданного направления на прозрачном листе.

Если при этом, не поворачивая листа, отложить от противоположного конца B экватора также 53° по экватору и получить точку C , то дуга KCL , проведенная через концы (полюсы) K и L среднего меридиана и точку C , как некоторый меридиан, с помощью соседних просвечивающих меридианов, будет проекцией плоскости, перпендикулярной к

заданному направлению. Точка P будет служить для нее полюсом, а точка C' , симметричная C и отмеченная крестиком, как находящаяся в нижней гемисфере, будет проекцией линии падения плоскости KCL .

Из этого ясно, как построить плоскость по направлению и углу падения. Прежде всего нужно построить проекцию ее линии падения, а затем уже строить дугу самой плоскости.

п. 3. Проведение плоскости через два направления и определение угла между этими направлениями. Приводим концентрическим вращением прозрачного листа заданные на нем точками 1 и 2 два направления на один меридиан сетки, как показано на фиг. 12, и проводим этот меридиан, пользуясь соседними просвечивающими меридианами сетки как транспорантом, в виде дуги $K-1-2-L$. Считая по параллелям, определяем, что дуга $1-2$ равна 67° .

Если при этом от противоположного конца N экватора отложим по экватору дугу NB , равную дуге ZA , или от центра Z отложим дугу ZB , равную дуге MA , где A — точка пересечения дуги $1-2$ с экватором, то получим точку B как полюс дуги $1-2$.

На фиг. 12 полюс B имеет зенитное расстояние, равное 57° , а плоскость $1-2$ имеет угол наклона, равный тем же 57° .

п. 4. Отложение углов в заданной плоскости. Требуется на дуге $1-2$, представляющей некоторую плоскость, отложить дугу $1-C$ (угол), равную 23° .

Приводим вращением листа дугу $1-2$ на меридиан сетки KAL (фиг. 12) и отсчитываем от точки 1 по этому меридиану с помощью просвечивающих и пересекающих его параллелей заданное число, т. е. 23° . Получаем точку C . Пусть далее от точки C в сторону K нужно отложить 97° . От точки C до точки K имеем только 60° ; остается еще отложить $97^\circ - 60^\circ = 37^\circ$. Для этого условимся продолжать дугу и на нижнюю половину шара (гемисферу) в виде пунктирных дуг меридианов, симметричных меридианам на верхней гемисфере. Так, продолжением дуги $C-1-K$ на фиг. 12 является симметричная ей дуга KP . Откладываем на ней оставшиеся 37° в виде дуги KP . Таким образом дуга $СКР$ составит 97° .

Точке I на нижней гемисфере будет отвечать точка I' , лежащая на симметричном меридиане $L-I'-PK$ в расстоянии $L-I' = K-I = 37^\circ$ от точки L .

Точки нижней полусферы отмечаются крестиками, а точки верхней — кружочками. Дуги плоскостей в верхней полусфере проводятся сплошными линиями, а в нижней — пунктирными.

п. 5. Определение величины двухгранного угла. Для определения величины двухгранного угла между двумя имеющимися на прозрачном листе плоскостями или наносят полюсы (нормали) этих плоскостей и определяют между ними величину дуги, как указано в предыдущем пункте, или, найдя точку пересечения дуг заданных плоскостей, проводят дугу, полюсом которой является найденное пересечение, и определяют ее величину между пересечениями с данными плоскостями.

Угол между нормальными к данным плоскостям может дополнять угол между плоскостями до 180° или быть ему равным.

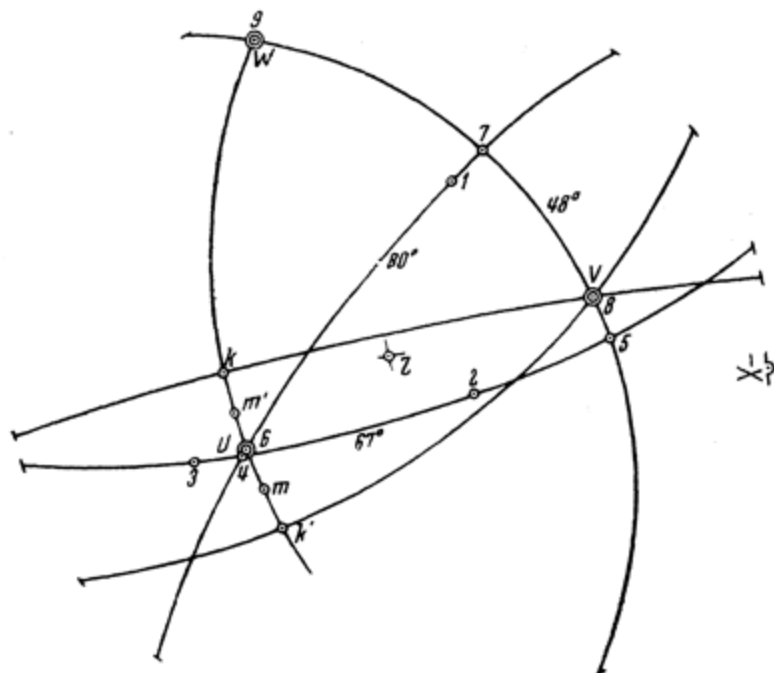
§ 7. ВЕКТОРИАЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

п. 1. Поверхность действия векториальной ошибки. По аналогии с кривой действия векториальной ошибки на плоскости, разобранный в п. 2 § 2, мы в пространстве можем мыслить для векториальной ошибки некоторую поверхность действия в виде поверхности двух равных касательных шаров, образованной от вращения двух равных касательных кругов, изображенных на фиг. 1, вокруг векториальной ошибки e .

На плоскости, перпендикулярной к e и касательной к шарам в их точке касания, действие векториальной ошибки равно нулю.

п. 2. Поверхность действия двух векториальных ошибок. Две векториальные погрешности, приложенные к одной точке, дают в своей плоскости эллипс погрешности и кривую действия в виде подеры этого эллипса. В двух взаимно-перпендикулярных плоскостях, проходящих через оси эллипса U и V и перпендикулярных к его плоскости,

кривые действия будут представлены двумя равными касательными окружностями, имеющими диаметры в одной плоскости UW большую, а в другой плоскости VW — малую полуось эллипса. Этим определяется поверхность действия двух векториальных ошибок. По прямой W , представляющей пересечение плоскостей UW и VW (третью



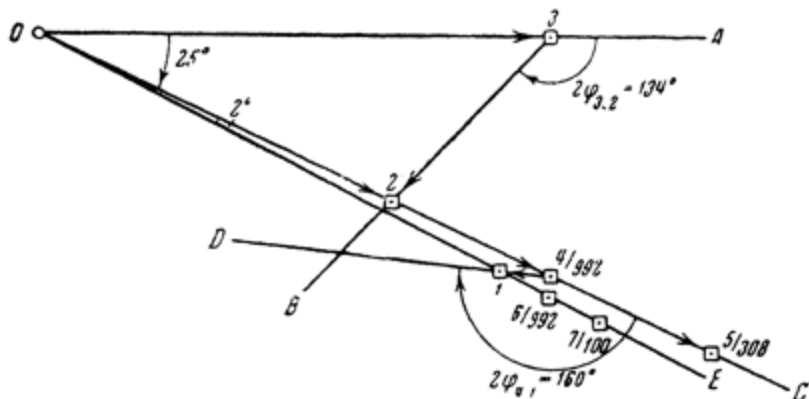
Фиг. 14

координатную ось), действие этих векториальных ошибок будет равно нулю.

п. 3. Поверхность действия трех векториальных погрешностей в пространстве. Действие трех, не лежащих в одной плоскости векториальных погрешностей, можно заменить тремя попарно перпендикулярными векториальными погрешностями e_u , e_v и e_w , дающими эллипсоид погрешности с полуосями: $M_g = e_u$, $M_m = e_v$ и $M_p = e_w$ по трем прямоугольным координатным осям U , V и W . Такую замену мы производим последовательными приближениями с помощью сетки Каврайского.

Пусть на прозрачном листе нанесены проекции 1, 2 и 3 направлений трех векториальных погрешностей $e_1 = 10$, $e_2 = 20$ и $e_3 = 30$ (фиг. 14). На особом чертеже сложим квадратично e_3 и e_2 , начиная с наибольшего. Так удобнее и скорее можно достичь удовлетворительного приближения.

Из оставшихся погрешностей всегда будем брать, как обязательное слагаемое, наибольшую. Поэтому первая сумма будет из наибольшей e_3 и средней e_2 .



Фиг. 15

Итак, на фиг. 15 сложим e_3 и e_2 , сняв с фиг. 14 величину дуги $3-2 = \varphi_{3.2} = 67^\circ$. Откладываем $\vec{O3} = e_3^2 = 900$; строим угол $A-3-B = 2\varphi_{3.2} = 134^\circ$, и откладываем $\vec{32} = 400 = e_2^2$. На продолжении $O-2$ в виде OC откладываем $\vec{O5} = e_3^2 + e_2^2 = 900 + 400 = 1300$. Делим $2-5$ пополам, получаем точку 4. Отрезок $\vec{O4} = e_4^2$ и $\vec{45} = e_5^2$, так как

$$\vec{O5} = 2R_{1.2}; \quad \vec{O2} = 2r_{1.2};$$

$$\vec{O4} = 2r_{3.2} + \frac{1}{2}(2R_{3.2} - 2r_{2.3}) = R_{3.2} + r_{3.2};$$

$$\vec{45} = \frac{1}{2}(2R_{3.2} - 2r_{3.2}) = R_{3.2} - r_{3.2}; \quad e_4^2 = 992; \quad e_5^2 = 308;$$

$2\gamma_{1.2}$ на фиг. 15 равно 25° .

Откладываем на фиг. 14 на дуге $3-2$ отрезок $3-4 = \gamma_{1,2} = 12.^\circ 5$ и отрезок $4-5 = 90^\circ$. Получаем точки 4 и 5 как проекции e_4 и e_5 . Далее проводим через 4 и 1 на фиг. 14 дугу плоскости и определяем ее величину: $4-1 = 80^\circ = \varphi_{4,1}$.

Строим на фиг. 15 угол $C-4-D = 2\varphi_{4,1} = 160^\circ$; откладываем на отрезке $4-D$ отрезок $4-1 = e_1^2 = 100$. Соединяем O с точкой 1 прямой и продолжаем последнюю в виде OE . Откладываем на OE отрезок $\overrightarrow{O-7} = e_4^2 + e_1^2 = 992 + 100 = 1092$; делим $1-7$ пополам в точке 6; $O-6 = e_6^2 = 992$; $6-7 = e_7^2 = 100$. Кроме того, имеем: $2\gamma_{4,1} = 2^\circ$.

Откладываем на фиг. 14 на дуге $4-1$ от точки 4 отрезок $4-6 = 1^\circ$ и далее $6-7 = 90^\circ$. Получаем точки 6 и 7 как проекции e_6 и e_7 . Как оказалось, на фиг. 14 дуга $6-5$ почти равна 90° , поскольку $4-5 = 90^\circ$, дуга же $6-7$ отложена равной 90° . Поэтому точку 6 можно принять за проекцию большой оси эллипсоида. Остается заменить e_5 и e_7 , лежащие в плоскости, перпендикулярной к e_6 , двумя взаимно-перпендикулярными векториальными ошибками e_8 и e_9 , которые и пойдут по другим двум осям эллипсоида V и W .

На фиг. 16 такая замена произведена. На отрезке OA отложен отрезок $O-5 = e_5^2 = 308$; построен угол $A-5-B = 2\varphi_{5,7} = 96^\circ$. Угол $\varphi_{5,7} = 48^\circ$ снят с фиг. 14 после проведения дуги через точки 5 и 7; дуга $5-7$ равна 48° .

Далее на фиг. 16 на отрезке $5-B$ отложен отрезок $5-7 = e_7^2 = 100$; точка O соединена с точкой 7 прямой, которая продолжена в виде OC . На ней отложен отрезок $O-9 = e_5^2 + e_7^2 = 308 + 100 = 408$. Отрезок $7-9$ точкой 8 разделен пополам. Получилось $O-8 = e_8^2 = 359$; $8-9 = e_9^2 = 49$; $2\gamma_{5,7} = 19^\circ$.

Угол $\gamma_{5,7} = 9^\circ.5$ перенесен на фиг. 14 в виде дуги $5-8$ и далее от точки 8 отложено 90° ; получилась точка 9. Как уже указывалось, точки 8 и 9 на фиг. 14 являются проек-

диями осей V и W . Таким образом эллипсоид построен. Имеем:

$$e_6^2 = M_g^2 = 992; \quad e_8^2 = M_m^2 = 359; \quad e_9^2 = M_p^2 = 49;$$

$$M_g = a = \pm 31; \quad M_m = b = \pm 19; \quad M_p = c = \pm 7;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 992 + 359 + 49 = 1400$$

должно равняться

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 100 + 400 + 900 = 1400.$$

Так и получилось.

п. 4. Подера эллипсоида. У эллипсоида погрешности в качестве поверхности действия служит своя „подера“, радиусы-векторы которой M выражаются равенством:

$$M^2 = M_g^2 \cos^2 \alpha + M_m^2 \cos^2 \beta + M_p^2 \cos^2 \gamma, \quad (7.1)$$

где α , β и γ — углы, образованные M с осями M_g , M_m и M_p .

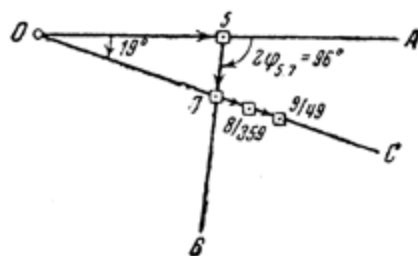
В трех главных сечениях подера эллипсоида дает подеры эллипсов с полуосями M_g и M_m , M_g и M_p и M_m и M_p .

Кроме того, подера эллипсоида имеет два симметричных эллипсных сечения, получающихся в результате двух круговых погрешностей и двух векториальных.

Эллипсоид может быть заменен одной круговой погрешностью с радиусом, равным M_m , и одной векториальной, равной $e_m = \pm \sqrt{M_g^2 + M_p^2 - M_m^2}$.

Таких комбинаций, симметричных между собой, существует две.

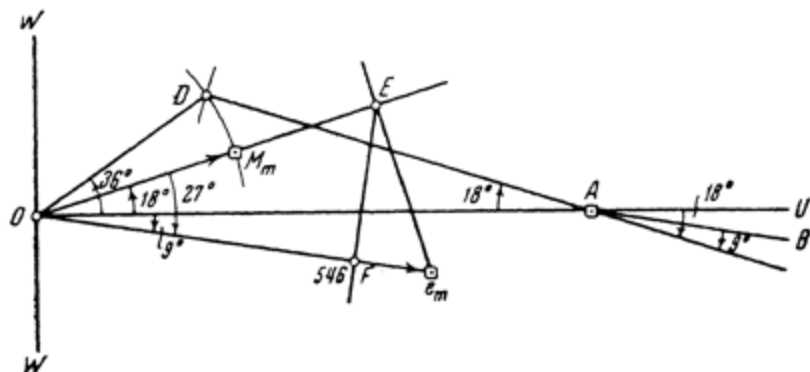
Возьмем сечение эллипсоида с полуосями M_g и M_p и согласно построению, данному на фиг. 6, заменим в этом сечении M_g и M_p двумя эквивалентными погрешностями M_m и $e_m = \sqrt{M_g^2 + M_p^2 - M_m^2}$.



Фиг. 16

На фиг. 17 применительно к полученным здесь значениям полуосей эллипсоида имеем: $M_m^2 = 359$; $e_m^2 = 992 + 49 - 359 = 682$. Отложим на направлении большой полуоси OU отрезок $\vec{OA} = M_g^2 - M_p^2 = 992 - 49 = 943$, и из концов O и A опишем дуги радиусами $\vec{OD} = M_m^2 = 359$ и $\vec{AD} = e_m^2 = 682$.

Получим в пересечении дуг точку D , которая определяет направления OD и DA . Делим угол DOU , равный 36° ,



Фиг. 17

пополам; получаем направление OE векториальной ошибки M_m . Отрезок $\vec{OM}_m = M_m^2 = 359$.

Делим угол DAO , равный 18° , пополам; получаем направление $\vec{AB}$ второй эквивалентной ошибки e_m . Проводим Oe_m параллельно AB и откладываем $\vec{Oe}_m = e_m^2 = 682$. Угол между M_m и e_m оказался равным $18 + 9 = 27^\circ$.

Спроектируем e_m на OE и возьмем квадрат проекции, т. е. $e_m^2 \cos^2 27^\circ$. Для этого из e_m на фиг. 17 опускаем перпендикуляр на OE и получаем $\vec{OE} = e_m^2 \cos 27^\circ$; затем опускаем из E перпендикуляр на Oe_m и получаем $OF = e_m^2 \cos^2 27^\circ$, оказавшийся равным 546. Прибавляя к M_m^2 величину $e_m^2 \cos^2 27^\circ$, т. е. выполняя сложение $359 + 546 = 905$,

находим квадрат радиуса-вектора M_k^2 подеры эллипсоида по направлению $\vec{OE}$:

$$M_k^2 = 905; \quad M_k = \pm \sqrt{905} = \pm 30.$$

Положению M_m в сечении UW , очевидно, отвечает другое, ему симметричное, так как точка D на фиг. 17, как и на фиг. 6, имеет симметричную ей точку ниже оси OU .

Сечение поверхности действия плоскостью круговой погрешности с радиусом M_m , проходящей через ось V и прямую OE в плоскости UW , представляется, таким образом, эллипсом с осями $M_k = 30$ по OE и $M_m = 19$ по V . Это сечение образует с осью U угол, равный 18° , и представлено на фиг. 14 дугой $\check{k}\check{V}$ или $k'V$, где $Uk = Uk' = 18^\circ$. Тут же нанесены в виде точек m и m' векториальные погрешности e_m , сопряженные с круговыми погрешностями $\check{k}\check{V}$ и $k'V$, отложением дуг $\check{k}\check{m}$ и $k'm'$, равных 27° .

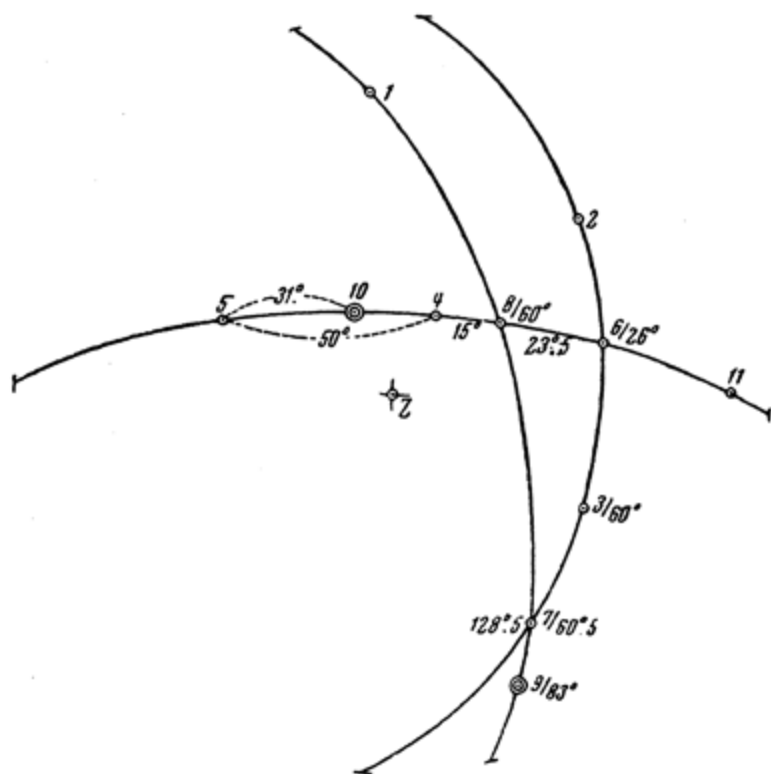
Если бы удалось построить m и плоскость kV или m' и $k'V$ и получить при этом e_m^2 и $e_k^2 = M_m^2$, исходя из того, что $e_m^2 + e_k^2 + e_k^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$, то перейти к осям V , U и W не составило бы труда. Потребовалось бы сначала пересечь $\check{k}\check{V}$ дугой, полюсом которой является m ; получилась бы точка V . Затем провели бы дугу $\check{m}\check{k}$, полюсом которой является V ; получилась бы точка k . Затем осталось бы сложить векториальные ошибки e_m и e_k , чтобы получить U и W , M_g и M_p .

Круговые сечения самого эллипсоида, аналогичные сечениям, перпендикулярным к оптическим осям двухосных кристаллов, не совпадают с эквивалентными круговыми погрешностями. Это следует отметить. В частном случае точки k и m' и k' и m могут совпадать (фиг. 14), когда

$$e_k = e_m \text{ и } M_m^2 = e_k^2 = \frac{1}{2} (M_g^2 + M_p^2).$$

п. 5. Сложение векториальных погрешностей в пространстве при любом их числе. Выше мы разобрали сложение двух и трех векториальных погрешностей в про-

странстве. При их числе, большем трех, естественно стремиться свести это число к трем. Для этого имеются такие возможности. На плоскость двух рационально выбранных погрешностей переносим постепенно остальные погрешности, заменяя каждую пару лежащих вне взятой плоскости



Фиг. 18

погрешностей двумя другими, из которых одна помещается в данной плоскости, а другая остается вне ее.

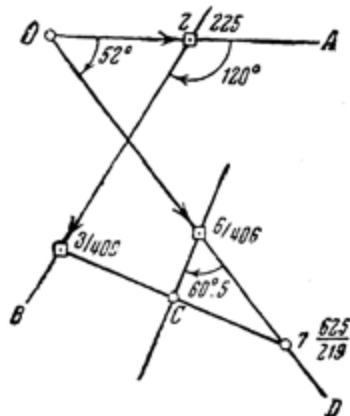
Таких переносов нужно сделать $n - 3$, где n — число погрешностей.

После этого в выбранной плоскости окажется $n - 3 + 2 = n - 1$ векториальных погрешностей, и вне ее останется только одна погрешность.

Первые $n - 1$ погрешностей по предыдущей главе заменяются двумя взаимно-перпендикулярными, которые вместе

с оставшейся погрешностью дадут три не лежащих в одной плоскости погрешности. Сложение таких погрешностей нами уже разобрано. Остается показать на примере, как производится перенос погрешностей на одну плоскость. Для этого используется прием разложения ошибок, разобранный в п. 4 § 3 (фиг. 4 и 5).

На фиг. 18 даны проекции пяти векториальных погрешностей: $e_1 = 10$; $e_2 = 15$; $e_3 = 20$; $e_4 = 25$ и $e_5 = 30$ в виде точек 1, 2, 3, 4 и 5. Выберем плоскость наибольших погрешностей 4 и 5 за начальную, на которую и будем сносить остальные. В качестве первой пары, подлежащей разложению, возьмем точки 2 и 3. Для этого найдем пересечение плоскости (дуги) $2-3$ с начальной плоскостью (дугой) $4-5$ в точке 6 и определим величину дуг $6-2$ и $2-3$. На фиг. 18 оказалось, что $6-2 = 26^\circ$; $2-3 = 60^\circ$.



Фиг. 19

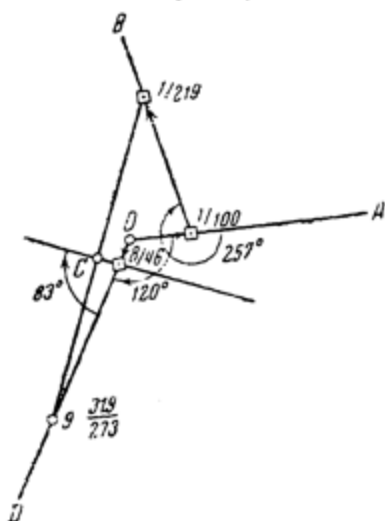
Отложим на отдельном чертеже (фиг. 19) на OA отрезок $O\vec{2} = e_2^2 = 225$; проведем $2-B$ под углом $60^\circ \times 2 = 120^\circ$ к OA , и отложим $2\vec{3} = e_3^2 = 400$. Далее проводим OD под удвоенным углом, равным удвоенной дуге $2-6$ на фиг. 18, т. е. равным $26^\circ \times 2 = 52^\circ$, и откладываем на OD отрезок $O\vec{7} = e_2^2 + e_3^2 = 225 + 400 = 625$. Точку 7 соединяем с точкой 3 и из середины C отрезка $7-3$ восстанавливаем перпендикуляр к $3-7$, который в точке 6 на $O-7$ отсечет отрезки $O\vec{6} = e_6^2 = 406$ и $6\vec{7} = 625 - 406 = 219 = e_7^2$.

Замеряем на фиг. 19 угол $7-6-C$. Он равен углу между погрешностями e_6 и e_7 и равен $60^\circ.5$. Поэтому если на фиг. 18 отложим на дуге $2-3$ от точки 6 дугу $6-7 = 60^\circ.5$, то получим в точке 7 проекцию e_7 .

Погрешности 2 и 3 заменились погрешностями 6 и 7.

Далее на фиг. 20 производим разложение погрешностей e_1 и e_7 , проведя на фиг. 18 дугу $1-7$ и замерив на ней отрезки: $1-8 = 60^\circ$ и $1-7 = 128^\circ.5$. Точка 8 является пересечением дуг $1-7$ и $5-4$.

На фиг. 20 отложено $O \rightarrow 1 = e_1^2 = 100$; построен угол $A-1-B = 128^\circ.5 \times 2 = 257^\circ$; отложено $1 \leftarrow 7 = e_7^2 = 219$; построен угол $AOD = 1-8 \times 2 = 60^\circ \times 2 = 120^\circ$; отложено $O \rightarrow 9 = e_1^2 + e_7^2 = 100 + 219 = 319$; соединены точки 7 и 9 и из середины C отрезка $7-9$ восстановлен перпендикуляр, давший на OD точку 8.



Фиг. 20

Отрезок $O \rightarrow 8 = e_8^2 = 46$; отрезок $8 \rightarrow 9 = 319 - 46 = 273 = e_9^2$. Угол $C-8-D = 83^\circ$ представляет угол между e_8 и e_9 . Он на фиг. 18 отложен в виде дуги $8-9$, чем определилась точка 9 как проекция e_9 .

Таким образом на фиг. 18 мы получили точки 5, 4, 8 и 6 на плоскости $5-4$ и точку 9 вне этой плоскости вместо точек 1, 2, 3, 4 и 5. Дуга $5-4 = 50^\circ$; дуга $4-8 = 15^\circ$; дуга $8-6 = 23^\circ.5$.

Сложим погрешности, лежащие в одной плоскости $5-4$. Сделаем это на вспомогательном чертеже (фиг. 21). На OA отложим $O \rightarrow 5 = e_5^2 = 900$; построим угол $A-5-B = 50^\circ \times 2 = 100^\circ$; отложим отрезок $5 \rightarrow 4 = e_4^2 = 25^2 = 625$; построим угол $B-4-C = 15^\circ \times 2 = 30^\circ$; отложим отрезок $4 \rightarrow 8 = e_8^2 = 46$; построим угол $C-8-D = 23^\circ.5 \times 2 = 47^\circ$ и отложим отрезок $8 \rightarrow 6 = e_6^2 = 406$. Соединив точку 6 с O ,

Остается e_9 , e_{10} и e_{11} заменить эллипсоидом с M_g , M_m и M_p , как указано выше, и этим сложение пяти векториальных погрешностей заканчивается.

п. 6. Разложение направленных погрешностей в пространстве. В п. 4 настоящего параграфа мы уже разобрали случай замены (разложения) трех векториальных погрешностей, представляющих оси эллипсоида погрешностей одной круговой погрешностью и одной векториальной, лежащей вне плоскости круговой погрешности.

Вообще можно проделать следующее.

1) Выделить заданную по направлению векториальную погрешность. На фиг. 22 даны три векториальные погрешности с проекциями в точках 1, 2 и 3. Желательно их заменить тремя другими, чтобы одна из них имела проекцию в точке 4. Соединяем точки 1 и 4 плоскостью и пересеем ее плоскостью 2—3 в точке 5. Заменяем 2 и 3 двумя другими точками 5 и 6, из которых одна имеет проекцию в точке 5.

Затем заменяем погрешности 1 и 5 погрешностями 4 и 7, из которых 4 задано своей проекцией (направлением). Таким образом у нас вместо погрешностей 1, 2 и 3 получились 4, 6 и 7. Если мы соединим 4 с 2 и найдем пересечение с 1—3, то получится другое решение; если 4 соединить с 3, то получится третье решение.

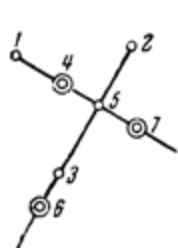
2) Выделить заданную по величине и лежащую в некоторой плоскости векториальную погрешность. На фиг. 23 при заданных e_1 , e_2 и e_3 и их проекциях в точках 1, 2 и 3 дается величина e_4 и плоскость KL , в которой e_4 должно находиться. Продолжим KL до пересечения с 1—2 в точке 5. Заменяем 1 и 2 погрешностями 5 и 6. Найдем пересечение 6—3 с KL в точке 7. Заменяем 6 и 3 погрешностями 7 и 8 и, наконец, заменим 5 и 7 погрешностями 4 и 9, из которых 4 задана своей величиной e_4 и лежит на KL . Получим погрешности 4, 9 и 8 вместо 1, 2 и 3.

Вместо KL можно взять любую плоскость; на ней получится своя погрешность, свое 4 с заданной величиной e_4 .

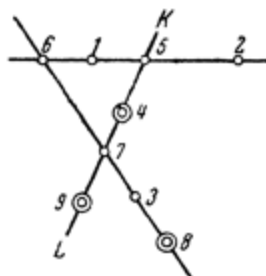
В результате мы будем иметь геометрическое место

проекций векториальных погрешностей, заданных величиной e_4 . Конечно, эта величина ограничена пределами, которые вытекают из построения треугольника OBD на фиг. 6 или AOD на фиг. 17. Точку 5 на фиг. 23 можно взять еще на отрезке $1-3$ или на $2-3$. В соответствии с этим получится еще два решения.

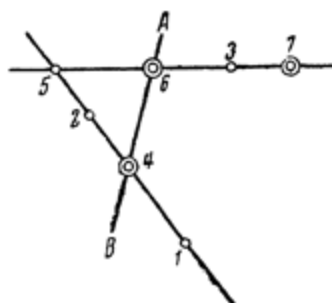
3) В заданной плоскости выделить эллипсную погрешность. На фиг. 24 даны погрешности 1, 2 и 3 и плоскость AB выделяемой эллипсной погрешности. Находим пересечение AB с $1-2$ в точке 4 и заменяем 1 и 2 погрешностями 4 и 5. Затем получаем пересечение с AB плоскости $3-5$ в точке 6 и заменяем 5 и 3 погрешностями 6 и 7.



Фиг. 22



Фиг. 23



Фиг. 24

В плоскости AB оказалось две погрешности 4 и 6, дающие эллипсную погрешность, и вне плоскости AB осталась погрешность 7.

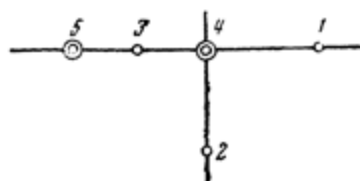
Задача должна иметь одно решение независимо от того, берем ли мы точку 4 на пересечении AB с $1-2$, или с $2-3$, или с $1-3$.

4) Поместить три векториальные погрешности в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях. Опустим из 2 (фиг. 25) перпендикулярную плоскость на $1-3$; получим точку 4. Заменяем 1 и 3 погрешностями 4 и 5, которые вместе с погрешностью 2 дадут три погрешности, лежащие во взаимно-перпендикулярных плоскостях $5-4$ и $4-2$, причем 4 является их пересечением.

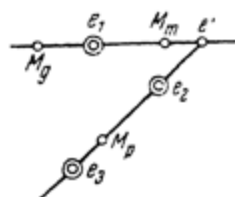
Поскольку разложение является действием, обратным сложению, очевидно, что эллипсоид погрешности можно разложить на любое число векториальных погрешностей, в том числе и на равные по величине.

Так, например, эллипсоид с полуосями M_g , M_m и M_p можно представить тремя равными векториальными погрешностями

$$e = \sqrt{\frac{1}{3}(M_g^2 + M_m^2 + M_p^2)}.$$



Фиг. 25



Фиг. 26

На фиг. 26 нанесены M_g , M_m и M_p ; надо их заменить тремя равными погрешностями $e_1 = e_2 = e_3 = e$. Предположим, что $M_m < e$. Тогда на плоскости $M_g M_m$ поместятся погрешности $e_1 = e$ и $e' = \sqrt{2e^2 - M_p^2}$, эквивалентные M_g и M_m . Теперь на плоскости $M_p e'$ остается разместить ошибки $e_2 = e$ и $e_3 = \sqrt{2e^2 - M_p^2 + M_p^2 - e^2} = e$, и задача будет решена.

§ 8. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПОСТРОЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА ПОГРЕШНОСТИ

п. 1. Эллипсоид рассеивания. В п. 6 § 2 мы разобрали построение эллипса рассеивания на плоскости. Очевидно, таково же в принципе будет построение эллипсоида рассеивания в пространстве.

Предполагается, что задана своими тремя прямоугольными координатами в пространстве группа из n точек, которые должны были представлять одну точку, но рассеи-

лись вследствие различных причин, носивших случайный характер.

Прежде всего следует получить прямоугольные координаты центра рассеивания как центра тяжести данной группы точек, взяв средние арифметические из их прямоугольных координат.

Затем начало координат переносится в центр рассеивания, и все точки получают полярные координаты в виде дирекционного угла α , зенитного расстояния δ и радиуса-вектора e .

Для этого служат известные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x}, \quad s = \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{x}{\cos \alpha}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{s}{z} = \frac{y}{x \sin \alpha} = \frac{x}{z \cos \alpha}, \\ e &= \frac{s}{\sin \delta} = \frac{y}{\sin \alpha \sin \delta} = \frac{x}{\cos \alpha \sin \delta} = \\ &= \frac{z}{\cos \delta} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

где x , y и z — прямоугольные координаты точек при начале координат в их центре тяжести.

Далее, рассматривая e как векториальные погрешности, производим их сложение. Для этого наносим по углам α и δ с помощью сетки Каврайского на прозрачный лист направления их, и, имея величины e , заменяем их тремя векторами, как показано в п. 5 предыдущего параграфа. От трех векторов переходим к M_g , M_m и M_p , согласно п. 3 того же параграфа. Это даст ориентировку эллипсоида рассеивания. Его размеры, т. е. полуоси a , b и c , выразятся формулами:

$$a = \sqrt{\frac{M_g^2}{n-1}}, \quad b = \sqrt{\frac{M_m^2}{n-1}}, \quad c = \sqrt{\frac{M_p^2}{n-1}}, \quad (8.2)$$

где n — число рассеянных точек.

п. 2. Характеристика искажения группы точек в пространстве. Выражение характеристики искажения группы

точек в пространстве аналогично подобному выражению сети точек на плане, данному в п. 3 параграфа 4.

Для примера возьмем так называемую модель местности, полученную путем обработки аэроснимков. Сравниваются фотограмметрические координаты n точек модели с геодезическими координатами этих точек, полученными обычным наземным значительно более точным путем и считающимися поэтому неизменными.

Пусть X, Y, Z — геодезические и X', Y', Z' — фотограмметрические координаты модели. Перенесем поступательно обе координатные системы так, чтобы начала координат совпали с центром тяжести всех n точек, и обозначим новые координаты через x, y, z и x'', y'', z'' . Тогда

$$x = X - X_0, \quad y = Y - Y_0, \quad z = Z - Z_0; \quad (8.3)$$

$$x'' = X' - X'_0, \quad y'' = Y' - Y'_0, \quad z'' = Z' - Z'_0, \quad (8.4)$$

где

$$X_0 = \frac{[X]}{n}, \quad Y_0 = \frac{[Y]}{n}, \quad Z_0 = \frac{[Z]}{n},$$

$$X'_0 = \frac{[X']}{n}, \quad Y'_0 = \frac{[Y']}{n}, \quad Z'_0 = \frac{[Z']}{n}.$$

Затем повернем систему координат модели на предварительно найденные углы λ, ω, θ и введем предварительно найденный масштаб $\frac{1}{M}$ модели. Полученные координаты x', y' и z' модели будут уже близки к геодезическим координатам. Они выразятся, согласно известным формулам поворота осей, следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x' &= M(x'' \cos \lambda \cos \theta + y'' \sin \lambda \cos \theta + z'' \sin \omega \sin \theta + \\ &\quad + x'' \sin \lambda \cos \omega \sin \theta - y'' \cos \lambda \cos \omega \sin \theta), \\ y' &= M(x'' \cos \lambda \sin \theta + y'' \sin \lambda \sin \theta - z'' \sin \omega \cos \theta - \\ &\quad - x'' \sin \lambda \cos \omega \cos \theta + y'' \cos \lambda \cos \omega \cos \theta), \\ z' &= M(z'' \cos \omega - x'' \sin \lambda \sin \omega + y'' \cos \lambda \sin \omega). \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Здесь λ — угол поворота модели вокруг оси Z'' до совмещения оси X'' с линией пересечения плоскостей XU и $X''Y''$;

ω — угол поворота модели вокруг указанной линии пересечения до совмещения оси Z'' с Z ;

θ — угол поворота модели вокруг оси Z'' или Z до совмещения осей X'' и Y'' с осями X и Y .

Предварительный масштаб модели $\frac{1}{M}$ легко находится

путем сравнения какого-нибудь расстояния на местности и на модели или по формуле

$$\frac{1}{M} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (8.6)$$

где x' , y' , z' и x , y , z — координаты одной из наиболее удаленных от начала общей точки.

Предварительные значения углов поворота λ , ω и θ могут быть определены графически с точностью до 1° при помощи сетки Каврайского.

На прозрачный лист наносят оси X , Y и Z геодезических координат, совмещая Z с центром сетки Каврайского. Затем по дирекционным углам и зенитным расстояниям в геодезической системе координат наносят проекции направлений с центра тяжести (начала координат) на три наилучшим образом расположенные общие точки 1, 2 и 3. Для этих же точек определяют зенитные расстояния δ'_1 , δ'_2 и δ'_3 в системе координат X'' , Y'' и Z'' по формулам (8.1).

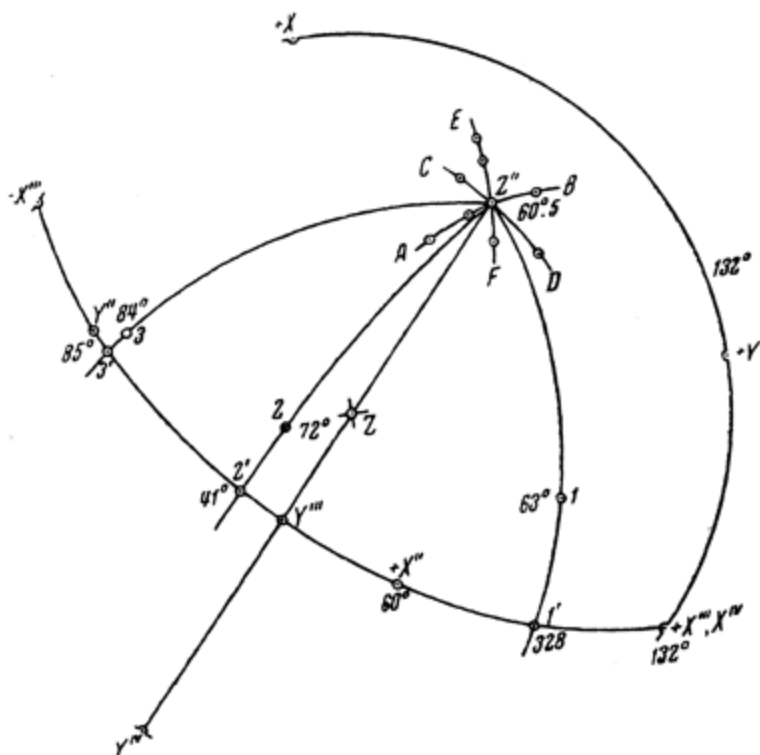
После этого на прозрачном листе с помощью сетки Каврайского можно засечь по трем зенитным расстояниям δ'_1 , δ'_2 и δ'_3 с трех точек 1, 2 и 3 проекцию направления оси Z'' модели. Для засечки достаточно двух точек, третья берется для контроля и для того, чтобы уточнить получение Z'' . Дуги, отвечающие δ'_1 , δ'_2 и δ'_3 , вблизи засекаемой точки Z'' строятся по точкам.

На фиг. 27 это показано. Здесь ось Z — в центре сетки, оси X и Y — на окружности основного круга, дуги между ними равны 90° . Точки 1, 2 и 3 построены по дирекцион-

ным углом α и зенитным расстояниям δ , как показано в п. 2 § 5.

Зенитные расстояния в фотограмметрической системе координат оказались равными: $\delta'_1 = 63^\circ$, $\delta'_2 = 72^\circ$ и $\delta'_3 = 84^\circ$.

Строим на фиг. 27 дугу AB по точкам, угловые расстоя-



Фиг. 27

ния которых от точки I равны 63° ; так же строим дуги CD и EF с расстояниями от точек 2 и 3 в 72 и 84° . Пересечение этих трех дуг определяет проекцию Z'' оси Z'' . Проведя плоскости $Z''I$, $Z''2$ и $Z''3$, найдем их пересечения I' , $2'$ и $3'$ с плоскостью $X''Y''$, полюсом которой является найденное Z'' . По дирекционным углам α'_1 , α'_2 и α'_3 в фотограмметрической системе направлений $O' - I$, $O' - 2$ и $O' - 3$ (O' — начало координат, совмещенное с центром тя-

жести) строим на фиг. 27 оси X'' и Y'' . Эти дирекционные углы оказались равными: $\alpha'_1 = 328^\circ$; $\alpha'_2 = 41^\circ$ и $\alpha'_3 = 85^\circ$.

Поэтому X'' на фиг. 27 получилось отложением дуг $1' \mp x'' = 360^\circ - 328^\circ = 32^\circ$; $2' \mp x'' = 41^\circ$; $3' \mp x'' = 85^\circ$. Y'' получилось отложением дуги $X''Y'' = 90^\circ$.

Теперь легко отсчитать искомые углы λ , ω и θ на фиг. 27. В самом деле, ось X''' является пересечением плоскостей XY и $X''Y''$. Поэтому дуга $\angle X''X''' = \lambda = 60^\circ$, дуга $Z''Z = \omega = 60^\circ.5$ и дуга $X''' \mp X = \theta = 132^\circ$. Сначала поворачиваем модель вокруг оси Z'' на 60° , получаем третье положение с X''' и Y''' ; затем поворачиваем модель вокруг X''' на $60^\circ.5$, получаем четвертое положение с осями Y^{IV} , Z^{IV} , совпадающими с Z и X^{IV} , которое в свою очередь совпадает с X''' . Наконец, поворачиваем модель вокруг Z или Z^{IV} на угол 132° ; получаем пятое положение с осями X' , Y' и Z' , совпадающими соответственно с X , Y и Z .

На фиг. 27 для ясности зенитное расстояние ω оси Z'' по отношению к Z взято большое, равное $60^\circ.5$. Фактически для фотограмметрической модели это расстояние невелико и не превышает $2-3^\circ$, редко может оно быть равно 5° . Поэтому ω находят другим путем, разлагая его при этом на две составляющих ω_x и ω_y , где ω_x — угол наклона оси X'' , или поворот вокруг оси Y'' , ω_y — угол наклона оси Y'' , или поворот вокруг оси X'' .

Используя эти углы поворота и совместив таким образом оси Z'' и Z , мы получим:

$$\left. \begin{aligned} z''' &= z' = z'' \cos \omega_x \cos \omega_y - x'' \sin \omega_x - y'' \sin \omega_y; \\ x''' &= x'' \cos \omega_x + z'' \sin \omega_x; \\ y''' &= y'' \cos \omega_y + z'' \sin \omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

После этого остается повернуть вокруг оси Z или Z'' , совмещенной с Z , на некоторый угол κ и получить координаты x' и y' по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x''' \cos \kappa - y''' \sin \kappa; \\ y' &= x''' \sin \kappa + y''' \cos \kappa. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Так или иначе нами получены приведенные к масштабу единицы координаты x' , y' и z' точек модели, предварительно совмещенных с геодезическими осями координат.

Остается еще по способу наименьших квадратов определить дополнительные углы поворота τ_x , τ_y и τ_z вокруг осей X , Y и Z и изменение масштаба $1 + \varepsilon$.

Для этого имеем для каждой точки с индексом i такие уравнения погрешности:

$$\left. \begin{aligned} z_i \tau_y + y_i \tau_z + x_i \varepsilon - \delta x_i &= v_{xi}, \\ + z_i \tau_x - x_i \tau_z + y_i \varepsilon - \delta y_i &= v_{yi}, \\ - y_i \tau_x - x_i \tau_y + z_i \varepsilon - \delta z_i &= v_{zi}. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Из них мы получаем следующие производные уравнения:

$$\begin{aligned} (z_i^2 + y_i^2) \tau_x + y_i x_i \tau_y - x_i z_i \tau_z - (z_i \delta y_i - y_i \delta z_i) &= w_{xi}, \\ + y_i x_i \tau_x + (z_i^2 + x_i^2) \tau_y + y_i z_i \tau_z - (z_i \delta x_i - x_i \delta z_i) &= w_{yi}, \\ - x_i z_i \tau_x + y_i z_i \tau_y + (x_i^2 + y_i^2) \tau_z - (y_i \delta x_i - x_i \delta y_i) &= w_{zi}, \\ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \varepsilon - (x_i \delta x_i + y_i \delta y_i + z_i \delta z_i) &= w_{ei}, \end{aligned}$$

и четыре нормальных уравнения, из которых четвертое даст значение ε :

$$\varepsilon = \frac{[x \delta x + y \delta y + z \delta z]}{[s^2]}, \quad (8.10)$$

где $s^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $\delta x = x' - x$; $\delta y = y' - y$; $\delta z = z' - z$

Первые три нормальных уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} A_x \tau_x + B_z \tau_y - B_y \tau_z - F_x &= 0, \\ B_z \tau_x + A_y \tau_y + B_x \tau_z - F_y &= 0, \\ -B_y \tau_x + B_x \tau_y + A_z \tau_z - F_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

где

$$\begin{aligned} A_x &= [y^2 + z^2], & A_y &= [x^2 + z^2], & A_z &= [x^2 + y^2], \\ B_x &= [yz], & B_y &= [xz], & B_z &= [xy], \\ F_x &= [z \delta y - y \delta z], & F_y &= [z \delta x - x \delta z], & F_z &= [y \delta x - x \delta y]. \end{aligned}$$

Решая уравнения (8.11), найдем τ_x , τ_y и τ_z — углы поворота вокруг координатных осей в аналитической мере.

Подставляя найденные значения τ_x , τ_y , τ_z и ε в уравнения (8.9), определим остаточные погрешности v_x , v_y и v_z .

координат. по которым по формулам (8.1) вычислим дирекционные углы, зенитные расстояния и радиусы-векторы e этих погрешностей, приняв в этих формулах x, y и z за v_x, v_y и v_z .

Далее переносим все погрешности e поступательно в одну точку $и$, рассматривая их как векториальные, строим, согласно предыдущему пункту, эллипсоид рассеивания с M_g, M_m и M_p . Квадраты последних делим на $\frac{3n-7}{3} = n - \frac{7}{3}$ и получаем квадраты полуосей a, b и c эллипсоида, характеризующего искажение данной фотограмметрической модели из n точек.

$$a = \sqrt{\frac{3M_g^2}{3n-7}}; \quad b = \sqrt{\frac{3M_m^2}{3n-7}}; \quad c = \sqrt{\frac{3M_p^2}{3n-7}}. \quad (8.12)$$

Делитель $\frac{3n-7}{3}$ взят из таких соображений: всего у n точек $3n$ координат; для ориентирования модели, как мы знаем, нужно минимум семь координат: остается $3n-7$. Для каждого вектора e пошло три координаты. Значит, нужно делить на $\frac{3n-7}{3}$.

п. 3. Передача эллипсов искажений со снимков прямой засечки на засекаемую точку. Вследствие ошибок проектирующего объектива на снимке получается для каждой заснятой точки местности свой эллипс погрешности определенных размеров и определенной ориентировки.

При прямой засечке с двух точек два эллипса погрешности на двух снимках передаются на засекаемую точку в виде некоторого эллипсоида погрешности. Чтобы построить этот эллипсоид, следует спроектировать эллипс на каждом снимке, относящийся к изображению засекаемой точки, на плоскость, перпендикулярную к проектирующему лучу данной точки. Получатся также два эллипса, которые поступательно переносятся в засекаемую точку с увеличением, согласно масштабу снимка в точке, являющейся изображением засекаемой точки.

Масштаб $\frac{1}{M}$ вычисляется по формуле

$$\frac{1}{M} = \frac{l}{L}, \quad (8.13)$$

где l — расстояние от центра проекции до изображения

L — расстояние от точки стояния (центра) до изображаемой точки на местности.

Размеры эллипсов, переданные на засеченную точку местности, будут равны произведению размеров эллипсов, являющихся проекциями эллипсов снимков на плоскости, нормальные к проектирующим лучам, на знаменатели масштабов M .

Ориентировка переданных эллипсов может быть определена, поскольку известна ориентировка в пространстве того и иного снимка и ориентировка на самих снимках эллипсов погрешностей. Все угловые соотношения устанавливаются с помощью сетки Каврайского.

Два перенесенных эллипса складываются и в сумме дают эллипсоид. Сложение двух эллипсов, лежащих в разных плоскостях, представляет собой сложение четырех векториальных погрешностей, согласно п. 4 предыдущего параграфа. Этими четырьмя погрешностями являются полуоси эллипсов.

п. 4. Плоскости положения, их градиенты и погрешности. В § 5 предыдущей главы мы разбирали линии положения на плоскости. Аналогично в пространстве мы имеем плоскости положения, касательные к поверхностям, представляющим геометрические места точек. Так, например, при обратной пространственной засечке в фотограмметрии геометрическим местом полученного со снимка так называемого позиционного угла между направлениями на две опорные точки на земле служит поверхность, образованная вращением дуги, вмещающей позиционный угол, вокруг хорды, соединяющей опорные точки. Касательная плоскость к этой поверхности вблизи определяемой точки стояния является плоскостью положения.

Нормально к плоскости положения направлен ее градиент в сторону увеличения функции. Выражается он той же формулой (5.1), что и градиент линии положения.

Также применимы формулы (5.2) — (5.6) для перехода от приращения функции l к поступательному перемещению d плоскости положения и обратно, к выражению веса измеренного значения функции и ее направленной в пространстве векториальной погрешности e .

При измерении теодолитом горизонтального и вертикального углов мы имеем две плоскости положения. Одна является коллимационной вертикальной плоскостью, наведенной на цель трубы теодолита, другая — наклонной плоскостью, проходящей через горизонтальную ось вращения трубы и ее визирную ось.

Для выражения градиентов этих плоскостей служит формула (5.9) градиента направления, причем для первой плоскости в качестве z берется проекция на горизонтальную плоскость расстояния от точки стояния теодолита до определяемой точки, а для второй плоскости — само наклонное расстояние.

На фиг. 10 (см. стр. 38) угол β можно принять за позиционный угол, т. е. за угол при вершине боковой грани трехгранной пирамиды обратной пространственной засечки, образованной тремя проектирующими лучами, идущими от трех опорных точек на земле.

Точка P на фиг. 10 представляет при этом точку стояния в воздухе, а точки A и B — опорные точки на местности. Треугольник ABP является боковой гранью пространственной пирамиды. Плоскостью положения угла β будет плоскость, проходящая через KL и перпендикулярная к плоскости грани ABP . Градиент этой плоскости положения так же выражен равенством (5.11) или (5.12); он изображен на фиг. 10. Он лежит в плоскости грани ABP и перпендикулярен к указанной плоскости положения, которая является касательной в точке P к поверхности, образованной вращением дуги BPA вокруг хорды AB . Для векториальной погрешности позиционного угла β , направленной по g_β , служит формула (5.13).

Градиентом расстояния s в пространстве служит также 1 (единица), направленная по радиусу шара, описанного из данной точки радиусом s .

Если положение плоскости ABP (фиг. 10) определяется углом вращения γ ее вокруг твердой оси AB , то сама она является плоскостью положения угла γ . При этом градиент g_γ при точке P перпендикулярен к ней и выражается равенством

$$g_\gamma = \frac{p}{D}, \quad (8.14)$$

где D — расстояние точки от AB , представленное на фиг. 10 перпендикуляром PD к прямой AB . Таков, например, будет градиент измеренного теодолитом угла наклона, где роль AB будет играть горизонтальная ось вращения трубы теодолита.

п. 5. Эллипсоиды погрешности прямой и обратной засечки в пространстве. Положение точки в пространстве определяется тремя плоскостями положения. Три векторные ошибки этих плоскостей дают эллипсоид погрешности, характеризующий точность найденного положения точки в пространстве по любому направлению. При прямой засечке достаточно с двух точек взять горизонтальные углы и с одной точки угол наклона. Это даст три плоскости положения, необходимые и достаточные для определения трех координат засекаемой точки. Если знать среднюю квадратичную ошибку каждого измеренного угла, то по формуле (5.6) можно определить величину e векториальной ошибки углов. Направления ошибок e определяются как нормали к плоскостям положения. Имея величину и направление трех e , строим элементы эллипсоида погрешности согласно п. 3 § 7.

При обратной пространственной засечке в фотограмметрии имеется три позиционных угла, дающих три плоскости положения с определенными градиентами, если найдено предварительное положение искомой точки, и с определенными векториальными погрешностями, если ошибки измеренных позиционных углов установлены или рассчитаны.

Сложение векториальных ошибок дает эллипсоид погрешности, определенным образом ориентированный в пространстве, поскольку хотя бы после предварительного получения искомой точки векториальные ошибки получают определенное направление.

Обратная пространственная засечка с помощью теодолита, стоящего на земле или на геодезическом знаке, может ограничиться измерением двух горизонтальных углов (задача Потенота) и одного вертикального угла на одну из трех опорных точек. Это даст также необходимое и достаточное число плоскостей положения в количестве трех с определенным эллипсоидом погрешности. При избыточном числе измеренных углов даже при трех опорных точках приходится уравнивать (об этом смотри ниже, в следующей главе). При трех опорных точках можно добавить еще один горизонтальный угол и два вертикальных; всего плоскостей положения будет шесть при трех избыточных.

§ 9. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА РАССЕЙВАНИЯ ПО ТРЕМ ФОТОСНИМКАМ МГНОВЕННЫХ ТОЧЕК

п. 1. Формулировка задачи и исходные данные. В качестве исчерпывающего примера построения эллипсоида и использования сетки Каврайского возьмем построение эллипсоида рассеивания по трем фотоснимкам рассеянных в пространстве точек.

Для того чтобы проверить точность решения при помощи тех средств, которыми мы располагали в виде сетки Каврайского диаметром 144 мм, зададимся наперед тремя прямоугольными координатами мгновенных точек и по данным элементам внешнего ориентирования снимков рассчитаем прямоугольные фотограмметрические координаты изображений этих точек на снимках.

После этого нанесем точки на чертежи, как бы представляющие отдельные снимки, и приступим к непосредственному решению задачи обычным порядком.

Для прямой засечки достаточно двух снимков. Третий берется для того, чтобы правильно опознавать идентичные точки и иметь контроль во всех построениях. Задачу рацио-

нальное решать графически, поскольку исходными данными служат графические материалы в виде фотоснимков.

В табл. 1 даны пространственные прямоугольные и вычисленные по ним полярные координаты 10 мгновенных точек.

Таблица 1

Координаты	Т о ч к и									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1 200	1 000	1 100	1 150	1 250	950	1 100	1 300	1 000	1 250
Y	300	400	350	450	250	200	400	250	250	400
Z	500	150	550	400	500	400	550	450	400	600
α	310°21'	150°01'	110°12'	80°55'	328°00'	214°16'	111°48'	336°11'	209°59'	32°00'
δ	74°58'.5	101°18'	29°39'	122°18'	81°57'	110°13'.5	49°05'	99°10'	118°04'	49°42'
e	77	153	80	150	143	233	107	188	170	186
e''	5 900	23 300	6 400	22 500	20 400	53 200	11 100	35 400	28 900	34 400

Полярные координаты α , δ и e имеют началом центр рассеивания: α — дирекционный угол, δ — зенитное расстояние, e — радиус-вектор. Вычисляются они по формуле (8.1).

Среднее квадратичное e равно

$$e = \sqrt{\frac{241900}{10}} = 160 \text{ м.}$$

Координаты центра рассеивания (средние арифметические из данных координат)

$$X_{\text{ср}} = 1130, Y_{\text{ср}} = 325, Z_{\text{ср}} = 480.$$

Данные элементы внешнего ориентирования снимков

1-й снимок: $X_0 = 0, Y_0 = 0, Z_0 = 0, \alpha_0 = 10^\circ 00', \delta_0 = 70^\circ 00';$

2-й снимок: $X_0 = +300, Y_0 = +700, Z_0 = +100,$

$$\alpha_0 = 335^\circ 00', \delta_0 = 70^\circ 00';$$

3-й снимок: $X_0 = +900, Y_0 = +1100, Z_0 = +50,$

$$\alpha_0 = 290^\circ 00', \delta_0 = 65^\circ 00',$$

X_0, Y_0, Z_0 — координаты точки стояния (центра объектива);
 α_0 — дирекционный угол оптической оси снимка;
 δ_0 — зенитное расстояние ее.

п. 2. Вычисление фотограмметрических координат. На фиг. 28 изображены:

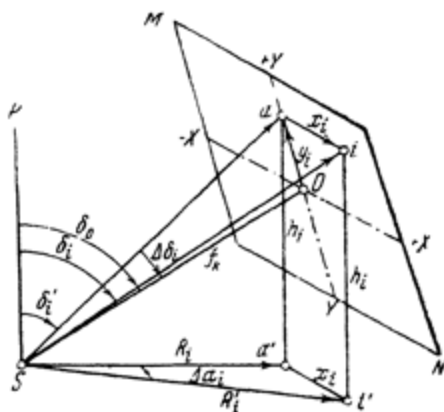
MN — плоскость снимка с зенитным расстоянием оптической оси OS , равным δ_0 ,

i — некоторая мгновенная точка,

$-X + X$ — главная горизонталь снимка,

$+Y - Y$ — главная вертикаль,

SP — отвесная линия в точке S ,



Фиг. 28

$\overline{SO}$ равно фокусному расстоянию f_k камеры,

$Sa'i'$ — горизонтальная плоскость,

aa' и ii' — вертикальные прямые.

Точки S, a, O и a' лежат в одной вертикальной плоскости.

Дано: $\Delta\alpha_i, \delta_0$ и δ_i .

Требуется найти: x_i и y_i точки i . Имеем $x_i = R_i \operatorname{tg} \Delta\alpha_i$;

$$\left. \begin{aligned} R_i &= R_i'' \sin \delta_i'; & R_i'' &= \frac{f_k}{\cos \Delta\delta_i} \\ x_i &= f_k \frac{\sin \delta_i'}{\cos \Delta\delta_i} \operatorname{tg} \Delta\alpha_i; & y_i &= f_k \operatorname{tg} \Delta\delta_i, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_i &= \frac{R_i}{h_i}, \quad \operatorname{tg} \delta_i' = \frac{R_i'}{h_i}, \quad R_i' = R_i \frac{1}{\cos \Delta \alpha_i}, \quad \operatorname{tg} \delta_i = \frac{R}{h_i \cos \Delta \alpha_i}, \\ R_i' &= \operatorname{tg} \delta_i \cos \Delta \alpha_i, \quad \Delta \alpha_i = \alpha_i - \alpha_0 \text{ (см. фиг. 28);} \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

$$\operatorname{tg} \delta_i' = \operatorname{tg} \delta_i \cos \Delta \alpha_i, \quad (9.3)$$

$$\Delta \delta_i = \delta_0 - \delta_i'. \quad (9.4)$$

Действия для вычисления x_i и y_i можно расположить по такой схеме:

$\Delta \alpha_i$	δ_i	x_i и y_i получаются умножением x_i и $\operatorname{tg} \delta_i$ на f_k . Нормальный ход вычислений будет обратен тому, что мы проделываем в данной задаче по формулам (9.1) — (9.4).
$\lg \operatorname{tg} \delta_i$	δ_i'	
$\lg \cos \Delta \alpha_i$	$\lg \operatorname{tg} \Delta \alpha_i$	
$\lg \operatorname{tg} \delta_i'$	+	
$\Delta \delta_i$	$\lg \sin \delta_i'$	
y_i	$\lg \operatorname{tg} \Delta \alpha_i + \lg \sin \delta_i'$	
x_i	$-\lg \cos \Delta \delta_i$	
	$\lg \frac{1}{f_k} x_i$	

Нормально будет дано: δ_0, α_0, x_i и y_i ; нужно будет найти α_i и δ_i . При этом действия расположатся в таком порядке:

$$1. \quad \Delta \delta_i = \arctg \frac{y_i}{f_k}, \quad \operatorname{tg} \Delta \delta_i = \frac{y_i}{f_k}; \quad (9.5)$$

$$2. \quad \delta_i' = \delta_0 - \Delta \delta_i; \quad (9.6)$$

$$3. \quad \Delta \alpha_i = \arctg \frac{x_i \cos \Delta \delta_i}{f_i \sin \delta_i'}, \quad \operatorname{tg} \Delta \alpha_i = \frac{x_i \cos \Delta \delta_i}{f_k \sin \delta_i'}; \quad (9.7)$$

$$4. \quad \alpha_i = \alpha_0 + \Delta \alpha_i; \quad (9.8)$$

$$5. \quad \delta_i = \arctg \delta_i' \frac{1}{\cos \Delta \alpha_i}, \quad \operatorname{tg} \delta_i = \operatorname{tg} \delta_i' \frac{1}{\cos \Delta \alpha_i}. \quad (9.9)$$

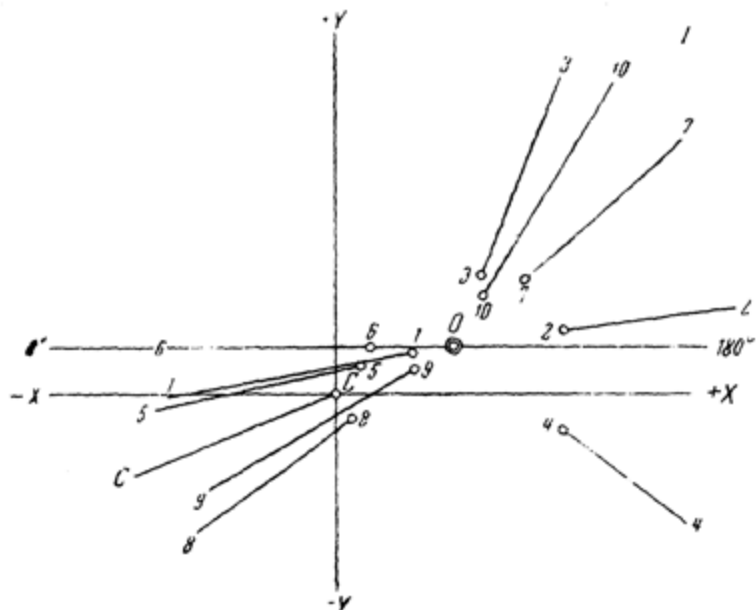
Имея с каждой точки стояния фототеодолита углы α_i и δ_i на точки рассеивания, мы находим их геодезические

координаты X_i , Y_i и Z_i , решая прямую засечку. После этого задача сводится к тому, что пояснено в п. 1 § 8.

В данном примере мы попытаемся, имея изображения мгновенных точек на трех снимках, непосредственно перейти от них к построению векториальных ошибок на прозрачной бумаге с помощью сетки Каврайского, принимая центры рассеивания изображений на каждом снимке за изображение центра рассеивания самих точек в пространстве. При таком допуске мы делаем определенную ошибку, так как только в ортогональной проекции проекция центра тяжести точек в пространстве является центром тяжести их проекций. Здесь же мы имеем дело с центральной проекцией. Но исследования показывают, что при большом фокусном расстоянии камеры и при относительно небольшом формате снимка, т. е. при углах между крайними проектирующими лучами, не превышающими $40-45^\circ$, ошибки, происходящие от указанного допущения, находятся в пределах графической точности.

В табл. 2 помещены вычисленные для трех снимков фотограмметрические координаты изображений мгновенных точек при фокусном расстоянии $f_k = 250$ мм. Здесь же приведены координаты изображения центра рассеивания и средние арифметические из координат изображений точек, т. е. координаты их центра рассеивания. Сопоставление тех и других дает расхождения в пределах 1 мм. С этим можно мириться и в качестве изображений центра рассеивания взять для построения эллипсоида рассеивания средние арифметические значения фотограмметрических координат изображенных точек, что значительно упростит решение, так как не потребует решения и уравнивания прямой засечки для каждой заснятой точки.

п. 3. Построение проекций радиусов-векторов. На фиг. 29—31 нанесены по вычисленным фотографическим координатам изображения мгновенных точек на снимках I, II и III и графически найдены центры рассеивания этих изображений. В действительности это следовало бы сделать на самих снимках. Поэтому в дальнейшем фиг. 29—31 мы считаем самими снимками.

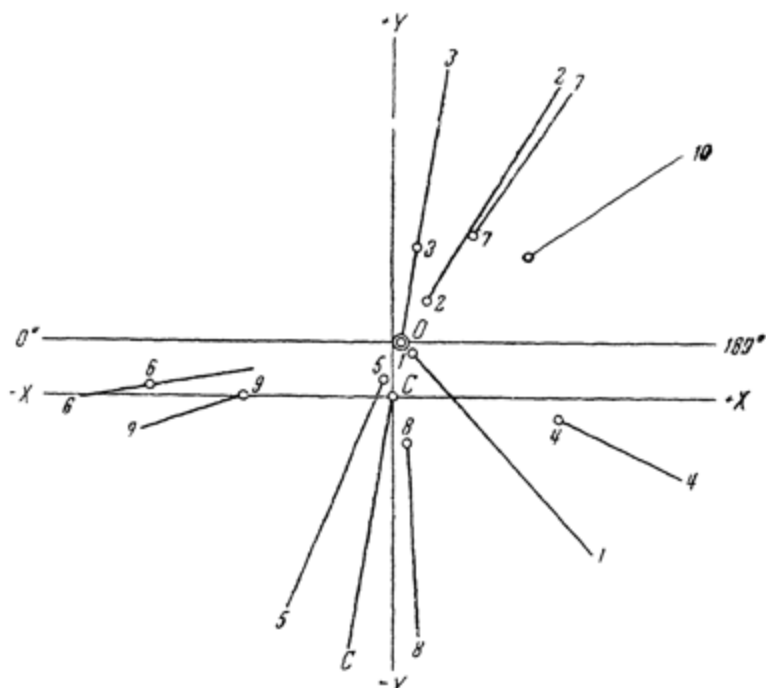


Фиг. 29

Таблица 2

Точки	Снимок I		Снимок II		Снимок III	
	x	y	x	y	x	y
1	мм +16.3	мм + 9.0	мм + 4.2	мм + 9.2	мм + 2.1	мм +12.1
2	+48.1	+13.4	+ 7.1	+20.5	-45.6	+22.0
3	+30.4	+24.9	+ 5.3	+31.8	-18.8	+34.6
4	+47.7	- 7.5	+35.8	- 4.8	+ 4.0	+ 7.7
5	+ 5.3	+ 6.2	- 1.4	+ 3.6	+ 9.3	+ 4.8
6	+ 7.6	+10.5	-52.2	+ 1.9	-70.1	-12.7
7	+39.9	+24.0	+17.3	+34.4	-14.8	+32.0
8	+ 3.6	5.3	+ 3.2	-10.0	+20.9	- 8.0
9	+16.4	+ 5.5	-31.9	0.0	-54.4	- 9.7
10	+31.0	+20.8	+29.4	+30.0	+23.8	+45.3
Центр рассеивания . . .	+24.5	+10.1	+ 2.7	+11.5	-13.4	+13.3
Среднее арифметическое координат	+24.6	+10.1	+ 1.7	+11.6	-14.3	+12.8
Разность	+ 0.1	0.0	+ 1.0	- 0.1	+ 0.9	+ 0.5

После нахождения на снимках центра рассеивания (центра тяжести) мы наносим на прозрачном листе с помощью сетки Каврайского плоскости снимков и направления в них, идущие от центра рассеивания к изображениям мгновенных точек на каждом снимке. Это представлено на фиг. 32 в предпо-



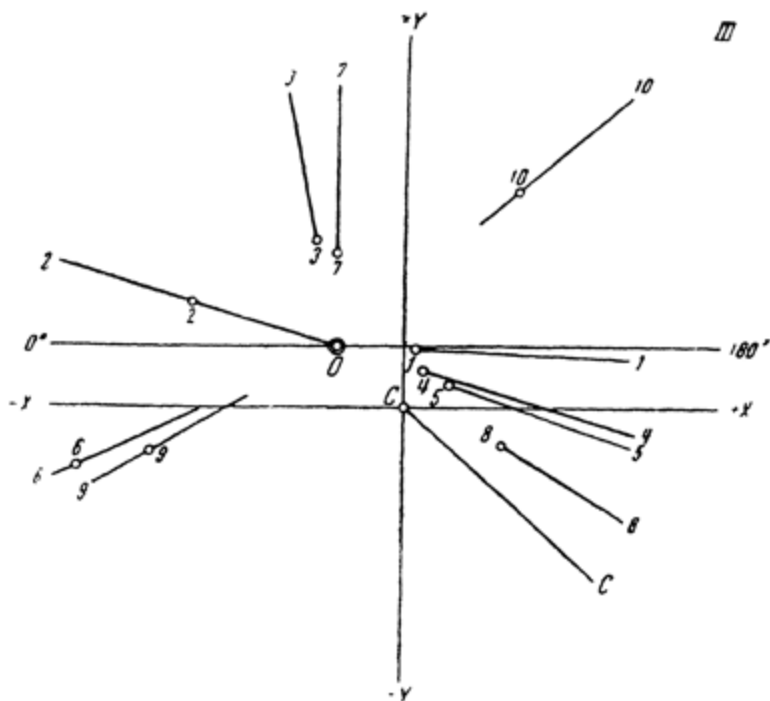
Фиг. 30

ложении, что все плоскости и направления перенесены поступательно в центр рассеивания мгновенных точек.

Прежде всего на фиг. 32 отмечены геодезические оси X , Y и Z . Горизонтальная плоскость принята за плоскость XU проекции; оси X и Y лежат на окружности основного круга, ось Z совпадает с центром круга.

Направление оптической оси снимка I имеет $\alpha_1 = 10^\circ$. Значит, обратное направление от плоскости, проходящей через центр рассеивания, к точке стояния снимка I будет иметь $\alpha = 190^\circ$. Аналогично для снимка II получим $335 - 180 = 155^\circ$ и для снимка III $290 - 180 = 110^\circ$. Эти обратные

направления отмечены на окружности основного круга точками *I*, *II* и *III*. Далее от центра (точки надира) в нижней гемисфере откладываются зенитные расстояния 70° для снимков *I* и *II* и 65° для снимка *III* на радиусах *ZI*, *ZII* и *ZIII* (фиг. 32). Получаются точки S_1 , S_2 и S_3 , представляющие проекции направлений осей снимков, идущих к точ-



Фиг. 31

кам их стояния (к наблюдателю). Эти точки отмечены крестиками; они являются полюсами плоскостей снимков (диапозитивов), которые на основании этого и проводятся.

На всех трех снимках соединяем центр рассеивания *O* с изображениями мгновенных точек и с главной точкой *C* снимка в виде векторов *b* и измеряем углы θ с помощью транспортира между горизонталью снимка, проходящей через *O*, и проведенными векторами *b*.

Значения θ для трех снимков помещены в табл. 3.

Снимок I		Снимок II		Снимок III	
обозначение	углы θ	обозначение	углы θ	обозначение	углы θ
b_1	0°	3_2	$100^\circ.0$	2_3	$16^\circ.5$
3_1	112.2	2_2	122.0	3_3	79.0
10_1	121.8	7_2	124.5	7_3	90.0
7_1	138.5	10_2	146.0	10_3	140.0
2_1	172.0	4_2	206.5	1_3	182.0
4_1	217.6	1_2	227.0	4_3	196.0
8_1	324.0	8_2	267.0	5_3	199.0
9_1	329.5	C_2	280.0	8_3	210.5
C_1	338.3	5_2	294.0	C_3	221.5
5_1	348.0	9_2	341.5	9_3	331.0
I_1	350.0	6_2	350.0	6_3	335.7

С помощью углов θ наносим на фиг. 32 направления векторов b на дугах, изображающих плоскости снимков.

Начинаем со снимка I. Воображаем себя стоящими в точке S_1 ; ближе к себе мы будем иметь верхнюю (сплошную) половину дуги плоскости снимка I, и от левой руки к правой станем откладывать углы θ из табл. 3 для этого снимка: сначала $\theta_6 = 0^\circ$, затем $\theta_3 = 112^\circ.2$, $\theta_{10} = 121^\circ.8$ и т. д. Получим на фиг. 32 точки b_1 , 3_1 , 10_1 , 7_1 и 2_1 , отмеченные кружочками, и, начиная с 4_1 , точки в нижней гемисфере, отмеченные крестиками. Для них θ больше 180° . Направления с $\theta = 0$ и 180° лежат на окружности основного круга.

Также наносим точки в виде кружочков 3_2 , 2_2 , 7_2 , 10_2 , и в виде крестиков 4_2 , 1_2 , 8_2 , C_2 , 5_2 , 9_2 и 6_2 на дугах снимка II и 2_3 , 3_3 и т. д. на дугах снимка III.

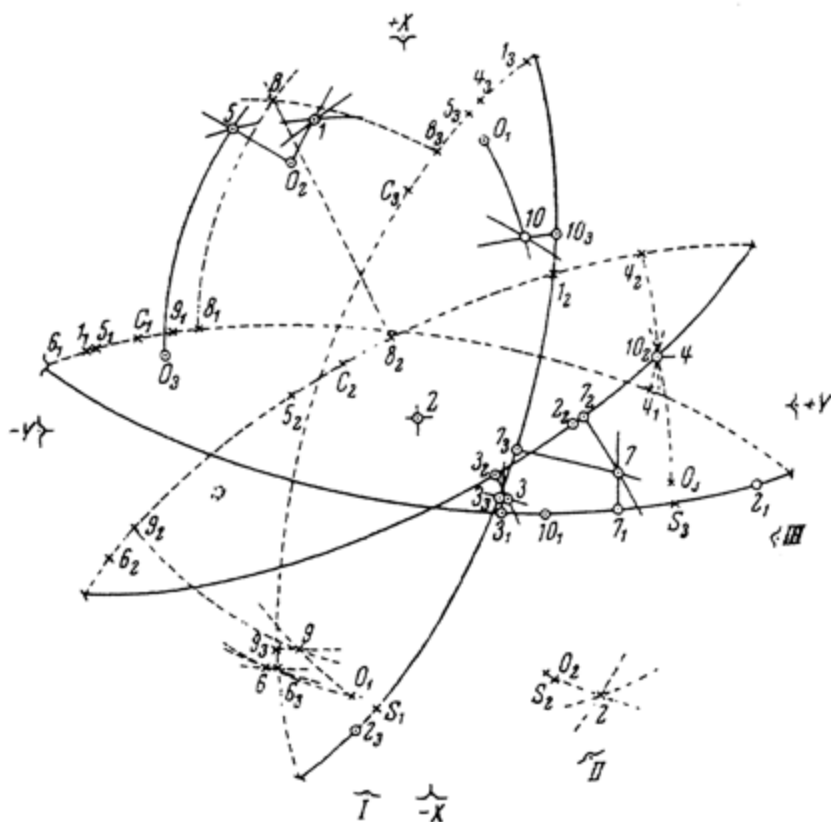
Остается теперь нанести на прозрачном листе (фиг. 32) направления лучей, проектирующих центр рассеивания на каждом из трех снимков. Эти направления находятся в плоскостях, проходящих через оси снимков S_1 , S_2 и S_3 и направления C_1 , C_2 и C_3 .

Устанавливаем по сетке Каврайского дуги этих плоскостей (п. 4 § 6) и откладываем на них углы λ между осью

снимка и лучом, проектирующим центр рассеивания. Получаем точки O_1 , O_2 и O_3 .

Углы λ вычисляются по формуле

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\overline{CO}}{f_k},$$



Фиг. 32

где отрезок CO измеряется на снимках (фиг. 29—31).

На снимке *I* $\overline{CO} = 26.5$ мм, на снимке *II* $\overline{CO} = 12.9$ мм, на снимке *III* $\overline{CO} = 19.5$ мм, что дает при $f_k = 250$ мм:

$$\lambda_1 = 6^{\circ}03', \lambda_2 = 2^{\circ}45', \lambda_3 = 4^{\circ}28'.$$

Углы λ_1 , λ_2 , λ_3 можно получить непосредственно без из-

мерения $\overline{CO}$ и вычисления с помощью особой прозрачной сетки, вычерченной в линейной проекции, с гномоном, равным f_k снимков. Сетка эта поперечная, меридианы на ней изображаются параллельными прямыми, а параллели — гиперболой при прямом экваторе. Она приурочена к данным снимкам, поскольку у нее гномон (расстояние центра проекции от плоскости проекции) равен фокусному расстоянию снимков.

Абсциссы x_m меридианов сетки вычисляются по формуле

$$x_m = f_k \operatorname{tg} \lambda, \quad (9.10)$$

где λ — долгота меридиана от среднего меридиана (оси Y). На меридианах от экватора (оси X) откладываются ординаты параллелей, вычисляемые по формуле

$$y_n = \frac{f_k}{\cos \lambda} \operatorname{tg} \varphi, \quad (9.11)$$

где φ — широта параллели от экватора.

Сетку можно приготовить самому, проведя меридианы и параллели через 1° и вычертив только половину, поскольку вследствие прозрачности ее можно поворачивать лицевой стороной вниз.

При получении точки O_1 на фиг. 32 мы привели точки S_1 и C_1 на одну дугу меридиана сетки Каврайского и отложили от точки S_1 дугу $\lambda_1 = 6^\circ$ в сторону C_1 , так как зенитное расстояние проектирующего луча S_1O_1 меньше зенитного расстояния оси снимка S_1C_1 , и точка O_1 , отвечающая на фиг. 32 лучу S_1O_1 , должна ближе находиться к центру Z , чем точка S_1 . Точка O_1 отмечена крестиком. Аналогично нанесены точки O_2 и O_3 , также отмеченные крестиками.

После этого проводим на фиг. 32 дуги плоскостей, проходящих через лучи, проектирующие центр рассеивания, и мгновенные точки, т. е. плоскостей, проектирующих радиусы-векторы e и проходящих через векторы b на снимках.

Для снимка I это будут дуги, соединяющие точку O_1 с точками $I_1, 2_1, \dots, 10_1$. На фиг. 32 проведены части этих дуг вблизи определяемых направлений векторов e .

Также проводим части дуг $O_2 - I_2$, $O_2 - 2_2$, ..., $O_2 - 10_2$ и $O_3 - I_3$, $O_3 - 2_3$, ..., $O_3 - 10_3$ снимков II и III.

Пересечение соответствующих дуг дали точки $1, 2, \dots, 10$, представляющие направления векторов $e_1, e_2, \dots, e_{10}$, соединяющих центр рассеивания с рассеянными мгновенными точками.

Для облегчения проведения указанных дуг, которые могут пересекаться и в верхней гемисфере, нанесены точки O_1 , O_2 и O_3 , отмеченные кружочками и симметричные точкам O_1 , O_2 и O_3 , отмеченным крестиками.

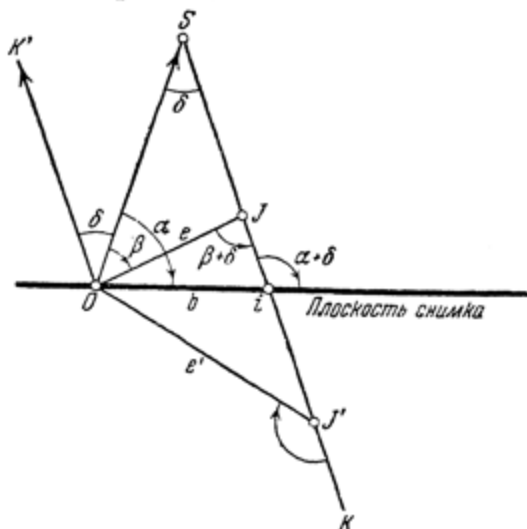
Поскольку векторы $e_1, e_2, \dots, e_{10}$ будут считаться как бы векториальными ошибками, безразлично, в какой гемисфере получить пересечение дуг, определяющих точки $1, 2, \dots, 10$. Но для вычисления длины векторов e необходимо знать действительное их направление, отвечающее углам α и δ , приведенным в табл. 1. Поэтому на фиг. 32 мы постарались найти эти действительные направления, учитывая то обстоятельство, что они должны находиться либо на дуге, соединяющей O с направлением векторов b в плоскостях снимков, либо на непосредственном продолжении этих дуг, продолжая идти в том же направлении от O к b . Дугу от O до b мы называем α , а дугу от O до действительного направления вектора e в том же направлении мы называем β , как показано на фиг. 33.

Углы α и β не могут быть больше 180° , причем углы близки к 90° , если объектив фототеодолита не слишком широкоугольный. Так, при получении истинного направления вектора e в виде точки I на фиг. 32 мы продолжили дуги $\overset{+}{O}_1 - \overset{+}{I}_1$, $\overset{+}{O}_2 - \overset{+}{I}_2$ и $\overset{+}{O}_3 - \overset{+}{I}_3$ за точки $\overset{+}{I}_1, \overset{+}{I}_2$ и $\overset{+}{I}_3$ в направлении от точек $\overset{+}{O}_1, \overset{+}{O}_2$ и $\overset{+}{O}_3$ и в их пересечении уже в верхней гемисфере получили точку $\overset{+}{I}$, хотя точки $\overset{+}{I}_1, \overset{+}{I}_2$ и $\overset{+}{I}_3$ были в нижней гемисфере (крестик вверху обозначения точки означает, что точка находится в нижней гемисфере, а кружок — в верхней).

Ни одна из дуг $\overset{+}{O}_1 - \overset{+}{I}$, $\overset{+}{O}_2 - \overset{+}{I}$ и $\overset{+}{O}_3 - \overset{+}{I}$ не превышает 180° . Кроме того, в верхней гемисфере получились точки $3, 5, 7$ и 10 ; остальные разместились в нижней гемисфере.

Легко сделать вывод по табл. 1, что те точки, у которых векторы e вышли в верхнюю гемисферу, имеют координату z (высоту) большую, чем точка рассеивания, т. е. большую $z_{\text{ср}} = 480$.

п. 4. Определение длины радиусов-векторов. Длина радиусов-векторов e вычисляется решением треугольников, представленных на фиг. 33, где



Фиг. 33

OS — луч, проектирующий на данном снимке центр рассеивания, представленный на фиг. 32 точками $\bar{O}_1^+$, $\bar{O}_2^+$ и $\bar{O}_3^+$;

OI — радиус-вектор e , лежащий ближе к наблюдателю, чем плоскость снимка;

OI' — радиус-вектор e' , находящийся дальше от наблюдателя, чем плоскость снимка;

Oi — плоскость снимка в сечении плоскостью рисунка;

$Oi = b$ — изображение e и e' на плоскости снимка измеряется на снимках.

Значение углов α , β и δ пояснено на фиг. 33. Углы α и β снимаются с фиг. 32.

Угол δ замеряется на снимках с помощью указанной выше линейной сетки меридианов и параллелей, что значительно

проще, чем находить его вычислением, а главное получается с точностью, отвечающей точности решения задачи в целом, поскольку эту точность определяет сетка Каврайского определенных небольших размеров.

Линейной сеткой пользуются совершенно так же, как всякой другой сеткой в поперечной азимутальной проекции, в том числе и сеткой Каврайского, что пояснено нами в § 6.

Вычислением угол δ получается в результате решения сферического треугольника по двум сторонам и углу между ними. Сторонами этого треугольника служат углы между оптической осью снимка и лучами OS и Si и углом (угол на снимке при главной точке C между CO и Ci).

Из фиг. 33 при сопоставлении треугольника iOS и IOS вытекает, что

$$e = b \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\beta + \delta)}. \quad (9.12)$$

Таково же будет выражение и для e' , где роль β будет играть угол $I'OS$, а роль $\beta + \delta$ — угол $K'I'O$. Угол δ берется всегда с плюсом.

При пользовании формулой (9.12) следует правильно определять углы α и β . Угол β измеряется между O и действительным направлением e_i на фиг. 32. Угол α измеряется от O до плоскости снимка в том же направлении, как и угол β .

Так, для снимка $I \alpha_1 = \overset{+}{O}_1 - 1_1 = 84^\circ$; $\beta_1 = \overset{+}{O}_1 - 1 = 148^\circ$.

Вектор e по формуле (9.12) получается в том масштабе, в каком взят снимок. Поэтому при получении e по различным снимкам с целью проверить, правильно ли взяты истинное направление вектора e и углы α и β , следует установить относительный масштаб взятых снимков.

Идентичность взятых на различных снимках одноименных точек проверяется тем, что при построении точек $1, 2, 3, \dots, 10$ на фиг. 32 три дуги трех снимков примерно пересекаются в одной точке.

В табл. 4 приведены снятые с фиг. 32 дирекционные углы α и зенитные расстояния δ векторов $e_1, e_2, \dots, e_{10}$, т. е. точек $1, 2, \dots, 10$ по отношению к осям X, Y и Z , нанесенным на фиг. 32. Сопоставляя эти значения α и δ с данными

в табл. 1, мы замечаем, что значительное расхождение в 7° в дирекционном угле получилось для точки 3; для остальных же точек расхождения для α не превышают 3° и для δ 1— 2° .

Расхождение $\delta\alpha_3$ для точки 3 объясняется тем, что она имеет небольшое зенитное расстояние, всего $27^\circ.5$, и потому неточное получение на снимках изображения центра рассеивания больше сказывается на дирекционном угле этого направления.

Кроме того, в табл. 4 приведены углы δ , α и β и отрезки в мм для первого снимка, поясненные на фиг. 33. Углы α и β замерены на фиг. 32, а углы δ и отрезки b взяты с фиг. 29 (снимка I).

Таблица 4

Величины	Т о ч к и									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha_{\text{дир. угол}}$	343°	148°	133°	77°	329°	214°	107.5	337°	209°	32°
$\delta_{\text{зен. расст.}}$	75	101.5	27.5	120	82	111.5	49	98	118	50
α	83.5	95.5	95.0	93.0	84.0	84.0	96.0	84.0	83.5	95.0
β } фиг. 33	147.5	46.5	98.0	100.0	133.5	17.0	103.5	132.0	14.0	157.0
δ }	2.0	5.3	3.7	6.6	4.4	4.0	4.6	5.9	2.2	2.8
b мм (фиг. 33) . . .	8.3	24.0	16.0	29.0	19.6	17.0	20.8	26.0	9.7	12.6
e в масштабе										
I снимка, мм . . .	16.3	30.0	16.2	29.8	29.2	47.4	21.5	38.8	34.7	36.2
$e_{\text{натур. м}}$	82	150	81	149	146	237	108	194	174	181
$e_{\text{ист. м}}$	77	153	80	150	143	233	107	188	170	186
Разность, м	+5	-3	+1	-1	+3	+4	+1	+6	+4	-5

На основании величин α , β , δ и b , поясненных на фиг. 33, по формуле (9.12) вычислены e в масштабе снимка I , выраженные в мм, поскольку b взято в мм. Эти e помещены также в табл. 4, в следующей строке после b . Для получения e в натуральную величину нужно вычислить масштаб снимка I , сравнить расстояние SO первого снимка (фиг. 33) с расстоянием точки I стояния от центра рассеивания.

$$\overline{SI - O_I} = \frac{f_k}{\cos 6^\circ 03'} = \frac{250}{0.926} = 251.6.$$

Расстояние точки стояния I от центра рассеивания находится решением прямой засечки с двух точек стояния I и II

или точек *I* и *III*. Это расстояние оказалось равным 1262 м. Отсюда переводный множитель M_1 от миллиметров на снимке *I* к метрам в натуре равен

$$M_1 = \frac{1262}{251.6} = 5.01.$$

Взяв этот множитель, мы получаем *e* натуральное в метрах. Сравнив эти *e* в табл. 4 с истинными, взятыми из табл. 1 мы видим, что расхождения находятся в пределах 6 м, что при среднем $e = 152$ м составляет 4%.

Такую точность получения элементов эллипсоида следует считать достаточной для данной задачи.

Для увеличения точности можно использовать более длинные векторы *b* или более близкие к 90° углы β в других снимках.

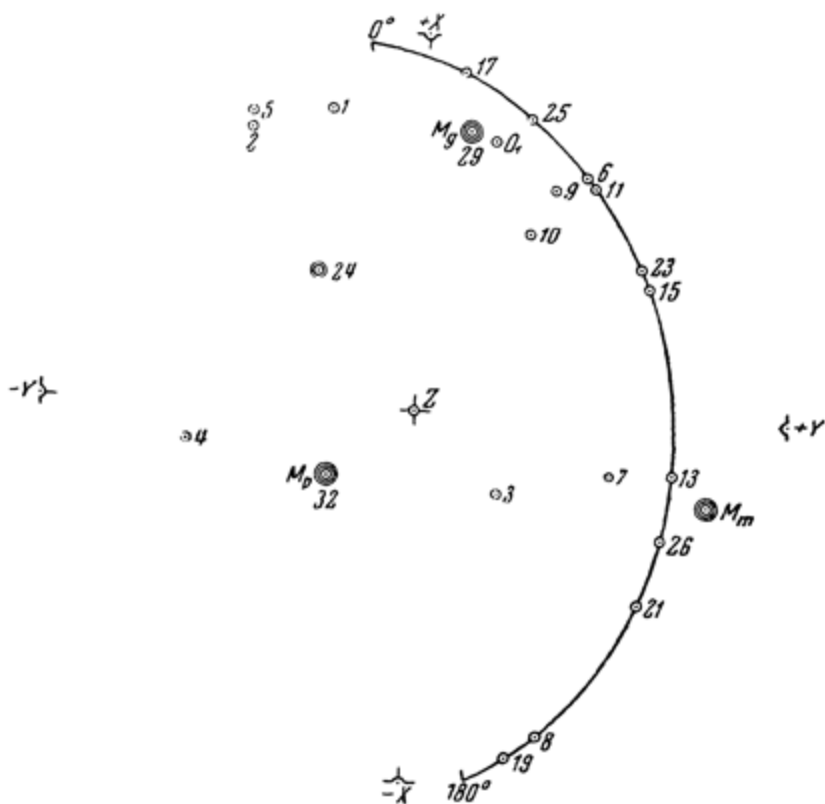
Например, вектор *b* для точки *I* лучше взять со снимка *III*, где он равен 16 мм вместо 8.3 на снимке *I*. Также для точек 6 и 9 следовало бы использовать снимок *III*, где $\beta_6 = 94^\circ$ и $\beta_9 = 87^\circ$ вместо 17 и 14° на снимке *I*, как это видно на фиг. 32.

п. 5. Построение элементов эллипсоида рассеивания. Переносим на отдельный прозрачный лист фиг. 34 найденные направления векторов, переколов прямо точки 1, 2, ..., 10 с фиг. 32 или построив их по дирекционным углам и зенитным расстояниям, взятым из табл. 4, имея нанесенными геодезические оси *X*, *Y* и *Z*. При этом можно ограничиться построением в одной только верхней гемисфере, заменив крестики симметричными им кружками, так как далее мы будем рассматривать *e* как векториальные погрешности. Так на фиг. 34 и сделано.

При построениях сложения и разложения векторов *e* квадраты их брались в подлиннике в масштабе $100 \text{ мм}^2 = 2 \text{ мм}$. Сами значения *e* брались в масштабе снимка *I* в мм. В соответствии с этим квадраты *e* выражались отрезками:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= 5.1 \text{ мм}; & e_2^2 &= 18.0 \text{ мм}; & e_3^2 &= 5.1 \text{ мм}; & e_4^2 &= 18.0 \text{ мм}; \\ e_5^2 &= 16.8 \text{ мм}; & e_6^2 &= 44.2 \text{ мм}; & e_7^2 &= 9.0 \text{ мм}; & e_8^2 &= 30.0 \text{ мм}; \\ e_9^2 &= 24.0 \text{ мм}; & e_{10}^2 &= 26.0 \text{ мм}. \end{aligned} \quad \text{Сумма } [e^2] = 196.2 \text{ мм}.$$

Сначала на фиг.34 все погрешности, кроме одной погрешности 24, были снесены на плоскость 6—8, согласно указаниям п. 5 § 7. На плоскости 6—8 оказались девять векторов: 17, 6, 11, 23, 15, 13, 21, 8 и 19, сложение которых дало два взаимно-перпендикулярных вектора 25 и 26.



Фиг. 34

Затем, согласно п. 3 § 7, постепенным приближением три вектора 24, 25 и 26 были заменены тремя взаимно-перпендикулярными векторами 29, 31 и 32, у которых $e_{29}^2 + e_{31}^2 + e_{32}^2$ равно первоначальной сумме $[e^2] = 196.2$,

$$e_{29} = M_g; e_{31} = M_m; e_{32} = M_p.$$

Из M_g , M_m и M_p по формулам (8.2) были найдены полуоси эллипсоида $a = \pm 26$ мм; $b = 17$ мм; $c = 11$ мм в масштабе снимка I , или при $M_1 = 5.01$ в натуральную величину

$$a = \pm 133 \text{ м}; b = 85 \text{ м}; c = 55 \text{ м}.$$

Направление осей эллипсоида определяется дирекционными углами

$$\alpha_a = 11-191^\circ; \alpha_b = 107-287^\circ; \alpha_c = 232-52^\circ$$

и зенитными расстояниями.

$$\delta_a = 68-112^\circ; \delta_b = 75-105^\circ; \delta_c = 27-153^\circ.$$

Как видно на фиг. 34, большая ось M_g оказалась близкой к оси O_1 снимка I .

Глава III

ГРАФИЧЕСКОЕ УРАВНИВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ ПО СПОСОБУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§ 10. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УРАВНИВАНИЯ ПОЛОЖЕНИЙ

п. 1. Уравнения линий положений. Как уже указывалось в § 5, линии положения строятся по отношению к некоторому предварительному (приближенному) положению O' искомой точки с помощью линейных отклонений d_i , получаемых по формуле (5. 2) $d = \frac{l}{g}$.

Примем точку O' за начало координат и выразим линии положений, определяющие искомую точку, уравнениями в нормальной форме:

$$\begin{aligned} x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - d_i &= 0, \\ i &= 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (10.1)$$

В этих уравнениях α_i представляет собой дирекционный угол нормали к линии положения; он равен $\alpha_{ix} - 90^\circ$, где α_{ix} — дирекционный угол самой линии положения; d_i — расстояние линии положений от начала O' .

Пусть окончательное уравненное положение находится в точке O с координатами x_0 и y_0 по отношению к началу O' .

Тогда, применив известную формулу, определяющую расстояние до прямой, выраженной в нормальной форме, получим обычные уравнения погрешности:

$$x_0 \cos \alpha_i + y_0 \sin \alpha_i - d_i = d_{ti} \text{ с весом } p_i, \quad (10.2)$$

где d_{ei} — расстояние линии положений с индексом i от уравненного положения O искомой точки, или остаточное линейное отклонение.

Веса p_i определяются по формулам (5.4) или (5.5) или в частных случаях принимаются равными единице или другим так или иначе установленным величинам.

Выставив исходное в способе наименьших квадратов требование:

$$[pd_v^2] = \min, \quad (10.3)$$

мы получаем два обычных нормальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 1) [p \cos^2 \alpha] x_0 + [p \sin \alpha \cos \alpha] y_0 - [pd \cos \alpha] &= 0, \\ 2) [p \sin \alpha \cos \alpha] x_0 + [p \sin^2 \alpha] y_0 - [pd \sin \alpha] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

п. 2. Переход к исключительным координатным осям. Для приспособления к построению уравнений (10.4) перейдем к особым координатным осям U и V , направления которых обусловлены тем, что коэффициент $[p \sin \alpha \cos \alpha]$ обращается в нуль. После этого нормальные уравнения упростятся и примут вид:

$$\left. \begin{aligned} 1) [p \cos^2 \alpha] u - [pd \cos \alpha] &= 0, \\ 2) [p \sin^2 \alpha] v - [pd \sin \alpha] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Для построения элементов этих последних уравнений прежде всего замечаем, что $[pd \cos \alpha]$ является проекцией T_u на ось U , а $[pd \sin \alpha]$ — проекцией T_v на ось V некоторого вектора T , являющегося геометрической суммой векторов $\vec{pd}$:

$$\vec{T} = [p\vec{d}]. \quad (10.6)$$

Затем, обозначая $[p \cos^2 \alpha]$ через $Q + q$ и $[p \sin^2 \alpha]$ через $Q - q$, мы находим, что

$$2Q = [p \sin^2 \alpha] + [p \cos^2 \alpha] = [p (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)],$$

$$2q = [p \cos^2 \alpha] - [p \sin^2 \alpha] = [p (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)],$$

откуда

$$2Q = [p], \quad (10.7)$$

$$2q = [p \cos 2\alpha]. \quad (10.8)$$

Присоединяем сюда еще условие $[p \sin \alpha \cos \alpha] = 0$ или

$$[p \sin 2\alpha] = 0. \quad (10.9)$$

На основании равенств (10.8) и (10.9) мы заключаем, во-первых, что $2q$ является вектором, замыкающим полигон со сторонами, равными p и имеющими удвоенный дирекционный угол 2α , причем α отвечает направлению нормали к линиям положения, и, во-вторых, что ось U параллельна замыкающей $2q$, поскольку $[p \sin 2\alpha]$, т. е. проекция $2q$ на ось V , равна нулю, а $[p \cos 2\alpha]$, т. е. проекция $2q$ на ось U , равна самому $2q$.

При построении вектора $2q$ за начальное направление, определяющее углы α , можно взять любое, в том числе и направление нормали к одной из линий положения.

Получив замыкающую $2q$, следует угол 2γ между нею и начальным направлением разделить пополам, чтобы получить действительное направление $2q$ и совпадающее с ним направление оси U .

Итак,

$$2Q = [p] \text{ и } \overleftrightarrow{2q} = \overleftrightarrow{[p]}, \quad (10.10)$$

и уравнения (10.5) преобразуются в такие:

$$\left. \begin{array}{l} 1) (Q + q)u - T_u = 0, \\ 2) (Q - q)v - T_v = 0, \end{array} \right\} \quad (10.11)$$

где T_u и T_v — проекции „вектора отклонений“ $\overrightarrow{T} = [\overrightarrow{pd}]$ на оси U и V .

Последние нормальные уравнения, очевидно, могут быть получены из двух линий положения, представленных уравнениями

$$\left. \begin{array}{l} 1) u - \frac{T_u}{Q + q} = 0 \quad \text{с весом } p_u = Q + q, \\ 2) v - \frac{T_v}{Q - q} = 0 \quad \text{с весом } p_v = Q - q. \end{array} \right\} \quad (10.12)$$

Эти уравнения выражают прямые, параллельные осям V и U .

Они дают те же нормальные уравнения (10.11), что и первоначальные уравнения (10.1), выражающие n линий положения. Поэтому прямые, представленные уравнениями (10.12), следует признать двумя линиями положения, эквивалентными данным линиям положения. Их пересечение дает уравненное положение O искомой точки, как наиболее вероятное по теории способа наименьших квадратов. Градиентами их служат и $\sqrt{Q+q}$ и $\sqrt{Q-q}$.

п. 3. Сложение линий положения. Замена n линий положения двумя эквивалентными взаимно-перпендикулярными линиями положения определенного веса можно назвать сложением линий положения, аналогичным сложению векториальных погрешностей.

Для того чтобы построить линии положения, представленные уравнениями (10.12), и найти их точку пересечения O , следует решить эти уравнения, т. е. определить расстояния d_u и d_v эквивалентных линий от предварительного положения O' :

$$d_u = u = \frac{T_u}{Q+q} = \frac{T_u}{p_u}, \quad d_v = v = \frac{T_v}{Q-q} = \frac{T_v}{p_v}, \quad (10.13)$$

где $p_u = Q+q$ и $p_v = Q-q$ — веса линий положения V и U .

Первое уравнение (10.12) имеет $\alpha = 0$ и отвечает линии положения $\alpha = 90^\circ$, т. е. оси V ; второе уравнение отвечает оси U , что очевидно.

При проведении осей V и U можно обойтись и без нахождения проекций T_u и T_v вектора T .

Находим отрезки E и F по формулам

$$E = \frac{T}{Q+q}; \quad F = \frac{T}{Q-q}. \quad (10.14)$$

Откладываем от O' на векторе T отрезки

$$\vec{O'E} = E \text{ и } \vec{O'F} = F$$

и проводим через точку F прямую, параллельную действительному направлению элемента $2q$, а через E — прямую,

перпендикулярную к $2q$. Первая будет осью U , направление вдоль которой будет иметь максимальный вес $p_u = Q + q$, а сама линия положения, представленная осью U , будет иметь вес $p_v = Q - q$. Вторая будет осью V с весом вдоль нее $p_v = Q - q$; вес же самой линии положения V будет $p_u = Q + q$, что является квадратом ее градиента так же, как $p_v = Q - q$ является квадратом градиента оси U .

При геодезической вставке точек в сеть опорных „твердых“ точек удобнее элементы $\vec{p}$ и $\vec{gl} = d\vec{g}^2$ направлять по самим линиям положения. Тогда построенное $\vec{T} = [\vec{gl}] = [d\vec{g}^2]$ должно быть повернуто на 90° против движения часовой стрелки, и уже после этого на нем откладываются отрезки E и F . Параллельной построенному в этих условиях направлению q будет ось V , так как q повернуто на 90° .

Ось V проводится через точку E , ось U — через точку F .

В дальнейшем мы так и будем поступать, чтобы сохранить общность с плоскостями положений в пространстве, где нормали к ним не приходится поворачивать.

Направление по оси U , совпадающее с действительным, не повернутым на 90° направлением $\vec{q}$, имеет наибольший вес $p_{\max} = Q + q$.

Таким образом сложение линий положений приводит к нахождению элементов Q и q и весов $p_{\max} = Q + q$ и $p_{\min} = Q - q$. Элемент Q мы называем арифметическим, а q — геометрическим весовым элементом. Они аналогичны элементам R и r при сложении векториальных погрешностей.

п. 4. Контроль нахождения уравненного положения. Возьмем уравнения погрешности (10.2) в таком виде:

$$V\bar{p}_i \cos \alpha_i x_0 + V\bar{p}_i \sin \alpha_i y_0 - V\bar{p}_i d_i = V\bar{p}_i d_{v,i} \quad (10.15)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Помножим их на свои $V\bar{p}_i \cos \alpha_i$ и сложим. Получим первое из двух нормальных уравнений (10.4) или (10.11) в левой части и сумму $[pd_v \cos \alpha] = T_{0u}$ — в правой.

Но так как левая часть равна нулю, то и правая

$$[pd_v \cos \alpha] = T_{0x} = 0.$$

Аналогично выводим, что и

$$[pd_v \sin \alpha] = T_{0y} = 0.$$

Это значит, что после уравнивания замыкающая T_0 полигона из остаточных линейных отклонений d_v , помноженных на свои веса p , должна равняться нулю. Полигон должен сомкнуться, т. е.

$$\vec{T}_0 = [\vec{pd}_v] = 0. \quad (10.16)$$

Это является конечным контролем не только самого уравнивания, но и полученных данных для построения фигуры погрешности, если d_v вычислены непосредственно со всею тщательностью так же, как вычислялись d , служившие для построения вектора T .

В случае, когда T_0 не получается равным нулю, проверяют веса p и величины Q и q , и при их безошибочности рассматривают T_0 в качестве нового T , находя в положении искомой точки второе приближение, которое должно быть окончательным.

п. 5. Сумма квадратов остаточных линейных отклонений. Для подсчета суммы $[pd_v^2]$, необходимой для вычисления средних квадратичных ошибок, а также для контроля уравнивания можно использовать известное из теории аналитического уравнивания равенство, имеющее при наших обозначениях такой вид:

$$[pd_v^2] = [pd^2] - T_x x - T_y y. \quad (10.17)$$

Это равенство справедливо при любом направлении координатных осей X и Y . Направим абсциссу по вектору T , тогда $T_x = T$, $T_y = 0$. При этом x будет равно отрезку t , отсекаемому на векторе T , идущем из O' , перпендикуляром к OD , опущенным из O на T :

$$t = \overline{O'D},$$

где O' — предварительное положение искомой точки, O — уравненное.

В соответствии с этим

$$[pd_v^2] = [pd^2] - Tt. \quad (10.18)$$

Произведение Tt — всегда положительное.

§ 11. ПОГРЕШНОСТИ И ВЕСА ПОЛОЖЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

п. 1. Эллипс положений. Для вывода средних квадратичных ошибок, получаемых после уравнивания величин, как известно, требуется сначала найти среднюю квадратичную ошибку измерения с весом, равным единице. В наших уравнениях погрешности величиной, характеризующей измерение, является линейное отклонение d . Для него мы и находим среднее квадратичное значение с весом, равным единице, и обозначаем это значение через d_m . Это мы вправе сделать, если правильно выберем единицу веса.

Если мы имеем некоторое значение с весом p , то значение с весом 1 будет в p раз больше.

При n линиях положения на плоскости число избыточных линий, определяющих искомую точку, будет $n - 2$.

В связи с этим для d_m должны взять такую формулу:

$$d_m^2 = \frac{[pd_v^2]}{n-2}. \quad (11.1)$$

При $p = g^2$ величина d_m представляет собой среднюю квадратичную ошибку измерения направления $m_{ср}$.

Если $p = \frac{g^2}{m^2}$, согласно формуле (5.4), то d_m , найденное по формуле (11.1), выражает собой некоторую условную величину. При $p = 1$ величина d_m является средним квадратичным линейным отклонением, выражаемым равенством

$$d_m^2 = \frac{[d_v^2]}{n-2}. \quad (11.2)$$

Для того чтобы охарактеризовать погрешность уравненного положения точки, как известно, условились получать

средний эллипс погрешности, представляющий собой такой эллипс, у которого все точки, лежащие на нем, дают постоянную сумму $[pd^2]$, отличающуюся от минимальной $[pd_v^2]$ на величину d_m^2 , т. е. у которого

$$[pd^2] - [pd_v^2] = Tt = d_m^2. \quad (11.3)$$

Согласно общей теории вывода размеров этого эллипса, из уравнений (10.11) мы усматриваем, что большая ось эллипса погрешности, отвечающая $M_{\max}$, направлена по оси V , малая же ось $M_{\min}$ направлена по оси U и параллельна элементу q . Таким образом,

$M_{\max} = M_v$ = средней квадратичной ошибке ординаты v или d_v ;
 $M_{\min} = M_u$ = средней квадратичной ошибке абсциссы u или d_u .

В направлении q или U мы имеем наименьшее перемещение с наибольшим весом $p_u = p_{\max} = Q + q$.

Размеры среднего эллипса погрешности положения или, как мы условимся называть его, просто эллипса положений, согласно имеющимся на этот счет выражениям и применительно к уравнениям (10.11), представляются такими равенствами:

$$M_{\max}^2 = \frac{d_m^2}{Q - q}, \quad M_{\min}^2 = \frac{d_m^2}{Q + q}, \quad (11.4)$$

где d_m^2 выражается равенством (11.1) или (11.2) и $M_{\max}$ совпадает по направлению с q .

В случае, когда $p = 1$,

$$Q = \frac{1}{2} n, \quad \overleftrightarrow{q} = \frac{1}{2} \overleftrightarrow{[1]}, \quad (11.5)$$

$$T = [d], \quad [d_v d_v] = [dd] - Tt = [dd] - [d] t. \quad (11.6)$$

При $q = 0$ эллипс превращается в круг положений с радиусом

$$M = \sqrt{\frac{d_m^2}{Q}}.$$

Таким образом на плоскости мы имеем такие положения:

1. Линия положений (или положения), у которой

$$Q = q; \quad p_{\max} = 2Q = 2q; \quad p_{\min} = 0. \quad (11.7)$$

2. Эллипс положений, охарактеризованный средним эллипсом погрешностей, с элементами

$$0 < q < Q, \quad p_{\max} = Q + q, \quad p_{\min} = Q - q. \quad (11.8)$$

3. Круг положений

$$q = 0, \quad p_{\max} = p_{\min} = Q. \quad (11.9)$$

п. 2. Кривая весов и квадратов погрешностей. По данным $M_{\max}$ и $M_{\min}$ можно, как известно, определить средние квадратичные ошибки M_x и M_y координат x и y при любом направлении координатных осей, если известен угол φ между осями X и U или X и $M_{\min}$

$$\left. \begin{aligned} M_x^2 &= M_{\min}^2 \cos^2 \varphi + M_{\max}^2 \sin^2 \varphi, \\ M_y^2 &= M_{\min}^2 \sin^2 \varphi + M_{\max}^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

Отсюда

$$M_x^2 + M_y^2 = M_{\max}^2 + M_{\min}^2 = 2M^2, \quad (11.11)$$

т. е. сумма $M_x^2 + M_y^2$ не зависит от угла φ .

Обычно $2M^2$ принимают за меру точности найденного положения. Мы предпочитаем в качестве такового брать M^2 при среднем весе P как гармоническом среднем из $p_{\max}$ и $p_{\min}$, т. е.

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_{\max}} + \frac{1}{p_{\min}} \right)$$

или

$$P = Q - \frac{q}{Q} q. \quad (11.12)$$

Приближенно, особенно при относительно небольшом q , можно считать, что

$$P = Q. \quad (11.13)$$

При этом эллипсная точка как бы заменяется круговой с равными ошибками по всем направлениям

$$e^2 = M^2 = \frac{d_m^2}{Q}. \quad (11.14)$$

Для получения веса p по любому направлению эллипса положений можно рекомендовать вычерчивание кривой весов, которая строится легко, если исходить из следующих соображений.

Веса обратно пропорциональны квадратам векториальных погрешностей, равным сумме квадратов проекций на них максимальной и минимальной погрешностей:

$$e_i^2 = e_{\max}^2 \cos^2 \varphi_i + e_{\min}^2 \sin^2 \varphi_i = \frac{\cos^2 \varphi_i}{p_{\min}} + \frac{\sin^2 \varphi_i}{p_{\max}},$$

$$p_i = \frac{1}{e_i^2} = \frac{p_{\max} p_{\min}}{p_{\max} \cos^2 \varphi_i + p_{\min} \sin^2 \varphi_i},$$

или

$$p_i = \frac{Q^2 - q^2}{Q - q \cos 2 \varphi_i}. \quad (11.15)$$

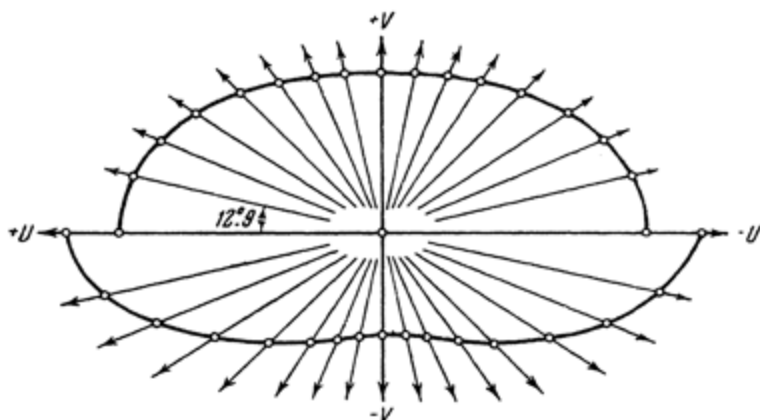
Последнее выражение легко построить, заметив, что $\sqrt{Q^2 - q^2}$, являясь катетом прямоугольного треугольника с гипотенузой Q и другим катетом q , в то же время является средним геометрическим p_i и $Q - q \cos 2 \varphi_i$.

Выберем углы φ_i таким образом, чтобы $\cos 2 \varphi_i$ был равен соответственно 0.9; 0.7; 0.4; 0.0; -0.4; -0.7; -0.9. Это будут $12^\circ.9$; $22^\circ.8$; $33^\circ.2$; $45^\circ.0$; $56^\circ.8$; $67^\circ.2$; $77^\circ.1$. На этих векторах произведем указанное построение, построив сначала $\sqrt{Q^2 - q^2}$.

Еще проще вычислить непосредственно p_i для семи направлений по формуле (11.15), найдя величину $A = Q^2 - q^2 = p_{\max} p_{\min}$ и величины $a_i = Q - q \cos 2 \varphi_i$. В табл. 5 приведены общие выражения и частные значения, отвечающие взятому примеру при $Q = 40$ и $q = 10$, для φ , a и p .

φ	a		$p = \frac{A}{a}$	p_{II}
	общие значения	частное		
12.9—167.1	$p_{\min} + 0.1 q = Q - 0.9 q$	31	48.4	54.5
22.8—157.2	$p_{\min} + 0.3 q = Q - 0.7 q$	33	45.5	46.2
33.2—146.8	$Q - 0.4 q = p_{\min} + 0.6 q$	36	41.7	37.5
45.0—135.0	$Q = p_{\min} + q$	40	37.5	30.0
56.8—123.2	$p_{\max} - 0.6 q = Q + 0.4 q$	44	34.1	25.0
67.2—112.8	$p_{\max} - 0.3 q = Q + 0.7 q$	47	31.9	22.2
77.1—102.9	$p_{\max} - 0.1 q = Q + 0.9 q$	49	30.6	20.7

$Q = 40$; $q = 10$; $A = Q^2 - p^2 = 1500$; $q_{\max} = 50$; $p_{\min} = 30$.
 p_{II} дано для $Q = 40$; $q = 20$; $A = 1200$; $p_{\max} = 60$;
 $p_{\min} = 20$.



Фиг. 35

На фиг. 35 верхняя половина дает кривую весов для $Q = 40$ и $q = 10$, а нижняя — для $Q = 40$ и $q = 20$ (вектора p_{II}). Выражение

$$\frac{1}{p} = \frac{\cos^2 \varphi}{p_{\min}} + \frac{\sin^2 \varphi}{p_{\max}} \quad (11.16)$$

аналогично выражению эллипса в полярных координатах

$$\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

Значит, вес p по любому направлению равен квадрату радиуса-вектора эллипса с полуосями, квадраты которых равны $p_{\min}$ и $p_{\max}$.

Погрешности же по любому направлению, согласно выражению

$$M^2 = M_{\min}^2 \cos^2 \varphi + M_{\max}^2 \sin^2 \varphi, \quad (11.17)$$

представляют собой радиусы-векторы подеры эллипса, полуосями которого служат $M_{\min}$ и $M_{\max}$.

Это различие существует, несмотря на то, что $p_{\max}$ и $p_{\min}$ конструируются из p совершенно аналогично тому, как $M_{\max}$ и $M_{\min}$ получаются из e^2 . У первых мы получаем Q и q , у вторых R и r арифметическим и геометрическим сложением соответственно величинам p и e^2 .

Если в выражении (11.17) заменить $M_{\min}^2$ через $R - r$ и $M_{\max}^2$ через $R + r$, согласно § 1, то получится равенство, аналогичное $Q - q \cos 2\varphi$:

$$M^2 = R - r \cos 2\varphi. \quad (11.18)$$

Значит, квадраты радиусов-векторов подеры эллипса погрешности могут быть получены из кривой, изображенной на фиг. 35, если построить ее по элементам R и r вместо Q и q , т. е. применить табл. 5, заменив в ней $p_{\min}$ через $M_{\min}$, q через r , Q через R и $p_{\max}$ через $M_{\max}$. Элементы $\vec{q}$ и $\vec{r}$ взаимно-перпендикулярны.

Вообще между Q , q и R , r существует простая связь, устанавливаемая из равенств (11.4):

$$(Q + q)(R - r) = (Q - q)(R + r) = d_m^2 \quad (11.19)$$

или, принимая условно d_m^2 равным единице, когда требуются только относительные значения величин Q и q или R и r , имеем:

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R-r} + \frac{1}{R+r} \right), \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R-r} - \frac{1}{R+r} \right) \quad (11.20)$$

и обратно

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q-q} + \frac{1}{Q+q} \right), \quad r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q-q} - \frac{1}{Q+q} \right). \quad (11.21)$$

п. 3. Весовые и нормальные коэффициенты при двух неизвестных. Для связи с обычной теорией, даваемой в пособиях по способу наименьших квадратов, остановимся на выводах весов функций с двумя переменными.

Обычно даются такие выражения. Линейная функция

$$F = f_1 x + f_2 y, \quad (11.22)$$

к которой можно привести любую функцию при исследовании погрешностей и весов путем дифференцирования и ограничения членами с первой производной. Веса P этой функции определяются по формуле

$$\frac{1}{P} = f_1^2 [\alpha\alpha] + 2f_1 f_2 [\alpha\beta] + f_2^2 [\beta\beta] \quad (11.23)$$

и уравнения, связывающие весовые коэффициенты, имеют вид:

$$1) \left. \begin{aligned} [aa][\alpha\alpha] + [ab][\alpha\beta] &= 1, \\ [ab][\alpha\alpha] + [bb][\alpha\beta] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad 2) \left. \begin{aligned} [aa][\alpha\beta] + [ab][\beta\beta] &= 0, \\ [ab][\alpha\beta] + [bb][\beta\beta] &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (11.24)$$

В первой системе определяемый весовой коэффициент $[\alpha\alpha]$ играет роль абсциссы x , а $[\alpha\beta]$ — роль ординаты y ; во второй системе роль x играет $[\alpha\beta]$, а роль y — коэффициент $[\beta\beta]$.

Положение точек, отвечающее этим x и y , мы можем определить графически с помощью u и v , связанных уравнениями (10.11):

$$(Q + q)u = T_u, \quad (Q - q)v = T_v,$$

у которых вектор T определяется тем, что в первой системе $T_x = 1$ и $T_y = 0$ и во второй системе $T_x = 0$ и $T_y = 1$. Значит, в первом случае T идет по оси X , а во втором — по оси Y , по их положительному направлению. В обоих случаях $T = 1$.

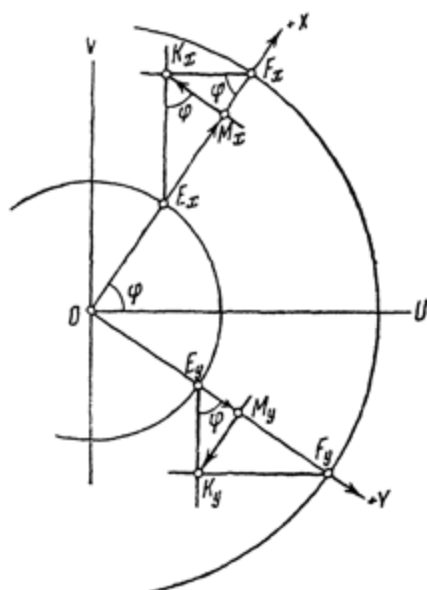
Поэтому, если строить, согласно указаниям п. 3 предыдущего параграфа, следует на положительном направлении оси X отложить отрезки

$$E = \frac{1}{Q + q} = R - r, \quad F = \frac{1}{Q - q} = R + r \quad (11.25)$$

и через концы этих отрезков проведем линии, параллельные осям V и U . В пересечении их получится K_x , координаты которой по отношению к осям X и Y будут $[\alpha\alpha]$ и $[\alpha\beta]$.

Также на положительном направлении оси Y откладываем те же отрезки $R-r$ и $R+r$ и через концы их проводим прямые, параллельные V и U и дающие в пересечении точку с координатами:

$$x=[\alpha\beta], \quad y=[\beta\beta].$$



Фиг. 36

Коэффициент $[\alpha\beta]$, таким образом, получился дважды

На фиг. 36 показано это построение. Имеем

$$\overrightarrow{OE_x} = \frac{1}{Q+q} = R-r;$$

$$\overrightarrow{OF_x} = \frac{1}{Q-q} = R+r.$$

$E_x K_x$ параллельна оси V ,
 $F_x K_x$ параллельна оси U ;

$\overrightarrow{OM_x}=[\alpha\alpha]$; $\overrightarrow{M_x K_x}=[\alpha\beta]$
 и в данном случае — отрицательное. Также

$$\overrightarrow{OE_y}=R-r; \quad \overrightarrow{OF_y}=R+r;$$

$$M_y K_y=[\alpha\beta]; \quad \overrightarrow{OM_y}=[\beta\beta].$$

При угле φ между осями X и U из фиг. 36 получаем:

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{Q+q} + \left(\frac{1}{Q-q} - \frac{1}{Q+q} \right) \sin^2 \varphi = (R+r) \sin^2 \varphi + \\ + (R-r) \cos^2 \varphi = R - r \cos 2\varphi = \frac{Q-q \cos 2\varphi}{Q^2 - q^2}; \quad (11.26)$$

$$[\alpha\beta] = [R+r - (R-r)] \sin \varphi \cos \varphi = \\ = r \sin 2\varphi = \frac{q}{Q^2 - q^2} \sin 2\varphi; \quad (11.27)$$

$$[\beta\beta] = \frac{1}{Q+q} + \frac{2q}{Q^2-q^2} \cos^2 \varphi = (R+r) \cos^2 \varphi + \\ + (R-r) \sin^2 \varphi = R + r \cos 2\varphi = \frac{Q+q \cos 2\varphi}{Q^2-q^2}. \quad (11.28)$$

Из этих равенств вытекает, что $[\alpha\alpha]$ и $[\beta\beta]$ являются квадратами радиусов-векторов подеры эллипса с полуосями $\sqrt{R+r}$ и $\sqrt{R-r}$, как и квадрат погрешности M^2 , и выражаются формулами (11.17) и (11.18). Большая полуось $\sqrt{R+r}$ совпадает с осью U .

Поскольку уравнения (11.24) обеих систем совместны между собой, можно выделить из них такие две системы:

$$1) \left. \begin{aligned} [\alpha\alpha][aa] + [\alpha\beta][ab] &= 1, \\ [\alpha\beta][aa] + [\beta\beta][ab] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad 2) \left. \begin{aligned} [\alpha\alpha][ab] + [\alpha\beta][bb] &= 0, \\ [\alpha\beta][ab] + [\beta\beta][bb] &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (11.29)$$

где роль неизвестных уже играют коэффициенты нормальных уравнений $[aa]$ и $[ab]$, с одной стороны, и $[ab]$ и $[bb]$, с другой.

Для графического решения обеих последних систем нужно исходить из тех же элементов Q и q с тем же направлением осей U и V , т. е. U должно быть параллельно q и иметь частные значения $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ и $[\beta\beta]$ в виде $\frac{1}{Q+q}$, 0 и $\frac{1}{Q-q}$ при осях U и V .

Требуется определить коэффициенты $[aa]$, $[ab]$ и $[bb]$ при другом направлении координатных осей, не совпадающих с U и V . Для этого применимо то же построение, которое проведено на фиг. 36, но только с другими элементами.

На положительном направлении оси X от начала координат откладываются отрезки $E_x = Q + q$ и $F_x = Q - q$, и через концы их проводятся прямые, параллельные V и U , дающие точку пересечения с координатами:

$$x = [aa], \quad y = [ab] \\ \left(E_x = 1 : \frac{1}{Q+q}; \quad F_x = 1 : \frac{1}{Q-q} \right).$$

В данном случае точка E_x будет дальняя, а F_x — ближняя, т. е. наоборот, чем на фиг. 36.

Так же на оси Y откладываются $E_y = Q + q$ и $F_y = Q - q$, проводятся прямые, параллельные V и U , и получаются точки с координатами:

$$x = [ab], \quad y = [bb].$$

Аналитически коэффициенты нормальных уравнений выражаются равенствами, подобными (11.26) — (11.28), а именно $[aa] = Q + q \cos 2\varphi$; $[ab] = q \sin 2\varphi$; $[bb] = Q - q \cos 2\varphi$. (11.30)

Таким образом элементы Q и q пригодны для получения как весовых, так и „нормальных“ коэффициентов.

Это справедливо при двух неизвестных при определении положения одной точки на плоскости. При числе неизвестных большем двух, например при совместной вставке двух точек, весовые элементы, применяемые для определения весов, отличаются, как увидим ниже, от нормальных элементов, служащих для определения коэффициентов нормальных уравнений.

п. 4. Веса некоторых функций уравненного положения точки. Используем выражения (11.22) и (11.23) в связи с формулами (11.26) — (11.28) для вывода весов простейших функций.

1) Веса координат u и v :

$$\varphi = 0, \quad [\alpha\alpha] = \frac{1}{Q + q}; \quad [\alpha\beta] = 0; \quad [\beta\beta] = \frac{1}{Q - q};$$

$$F = u; \quad f_1 = 1; \quad f_2 = 0;$$

$$\frac{1}{P_u} = f_1^2 [\alpha\alpha] = \frac{1}{Q + q}; \quad P_u = Q + q = p_{\max}; \quad (11.31)$$

$$F = v; \quad f_1 = 0; \quad f_2 = 1;$$

$$\frac{1}{P_v} = f_2^2 [\beta\beta] = \frac{1}{Q - q}; \quad P_v = Q - q = p_{\min}. \quad (11.32)$$

Эти же результаты получаются и из других соображений.

При решении уравнений (10.5) мы имеем:

$$u = \frac{T_u}{Q+q} = \frac{p_1 d_1 \cos \alpha_1}{Q+q} + \frac{p_2 d_2 \cos \alpha_2}{Q+q} + \dots + \frac{p_n d_n \cos \alpha_n}{Q+q},$$

$$v = \frac{T_v}{Q-q} = \frac{p_1 d_1 \sin \alpha_1}{Q-q} + \frac{p_2 d_2 \sin \alpha_2}{Q-q} + \dots + \frac{p_n d_n \sin \alpha_n}{Q-q}.$$

Отсюда по известной формуле, выражающей ошибку функции, считая $\sqrt{p d}$ равными между собой и равными средней ошибке m , получаем:

$$M_u^2 = \frac{[p \cos^2 \alpha]}{(Q+q)^2} m^2; \quad M_v^2 = \frac{[p \sin^2 \alpha]}{(Q-q)^2} m^2.$$

Но $[p \cos^2 \alpha] = Q + q$, $[p \sin^2 \alpha] = Q - q$. Поэтому

$$M_u^2 = \frac{m^2}{Q+q} \quad \text{и} \quad M_v^2 = \frac{m^2}{Q-q}$$

с весами

$$P_u = Q + q = p_{\max} \quad \text{и} \quad P_v = Q - q = p_{\min}.$$

2) Веса координат x и y :

$$[\alpha\alpha] = \frac{Q - q \cos 2\varphi}{Q^2 - q^2}; \quad [\alpha\beta] = \frac{q'}{Q^2 - q^2} \sin 2\varphi; \quad [\beta\beta] = \frac{Q + q \cos 2\varphi}{Q^2 - q^2};$$

$$F = x; \quad f_1 = 1; \quad f_2 = 0;$$

$$\frac{1}{P_x} = f_1^2 [\alpha\alpha]; \quad P_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]} = \frac{Q^2 - q^2}{Q + q \cos 2\varphi}; \quad (11.33)$$

$$F = y; \quad f_1 = 0; \quad f_2 = 1;$$

$$\frac{1}{P_y} = f_2^2 [\beta\beta]; \quad P_y = \frac{1}{[\beta\beta]} = \frac{Q^2 - q^2}{Q - q \cos 2\varphi}. \quad (11.34)$$

3) Вес направления, связывающего твердую точку с определяемой:

$$F_\alpha = g \sin \alpha u - g \cos \alpha v; \quad f_1 = g \sin \alpha; \quad f_2 = -g \cos \alpha,$$

где g — градиент данного направления (см. п. 4 § 5), u и v —

v — координаты смещения при особом направлении координатных осей (U параллельно q).

$\varphi=0$; значит,

$$\begin{aligned}
 [\alpha\alpha] &= \frac{1}{Q+q}; \quad [\alpha\beta]=0 \quad \text{и} \quad [\beta\beta]=\frac{1}{Q-q}; \\
 \frac{1}{P_\alpha} &= f_1^2[\alpha\alpha] + f_2^2[\beta\beta] = g^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{Q+q} + \frac{\cos^2 \alpha}{Q-q} \right) = \\
 &= g^2 \frac{Q+q \cos 2\alpha}{Q^2 - q^2}, \\
 P_\alpha &= \frac{Q^2 - q^2}{g^2 (Q + q \cos 2\alpha)} = \frac{s^2}{\rho^2} \frac{Q^2 - q^2}{Q + q \cos 2\alpha}. \quad (11.35)
 \end{aligned}$$

По данному направлению можно направить ось X . Тогда

$$F_\alpha = -gy, \quad f_1 = 0; \quad f_2 = -g; \quad \varphi = \alpha.$$

Отсюда

$$\frac{1}{P_\alpha} = g^2 [\beta\beta] = g^2 \frac{Q + q \cos 2\alpha}{Q^2 - q^2},$$

т. е. получилось то же самое.

Формула (11.35) представляет вес смещения в поперечном направлении.

4) Вес расстояния до твердой точки.

$s^2 = U^2 + V^2$, или $s ds = U dU + V dV$, или $F_s = \frac{U}{s} dU + \frac{V}{s} dV$, или $F_s = u \cos \alpha + v \sin \alpha$, где dU заменено u и dV заменено v ;

$$\frac{U}{s} = \cos \alpha, \quad \frac{V}{s} = \sin \alpha, \quad f_1 = \cos \alpha; \quad f_2 = \sin \alpha, \quad \varphi = 0;$$

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{Q+q}; \quad [\alpha\beta] = 0; \quad [\beta\beta] = \frac{1}{Q-q};$$

$$\frac{1}{P_s} = f_1^2[\alpha\alpha] + f_2^2[\beta\beta] = \frac{\cos^2 \alpha}{Q+q} + \frac{\sin^2 \alpha}{Q-q} = \frac{Q - q \cos 2\alpha}{Q^2 - q^2}.$$

То же самое получится, если F_s посчитать равной x , т. е. направить ось X по данному направлению, соединяющему данную точку с твердой точкой. При этом

$$f_1=1; \quad f_2=0; \quad \varphi=\alpha \quad \text{и} \quad \frac{1}{P_s}=[\alpha\alpha],$$

выражаемому равенством (11.26). Значит,

$$P_s = \frac{Q^2 - q^2}{Q - q \cos 2\alpha}, \quad (11.36)$$

т. е. получилась формула, аналогичная (11.15).

§ 12. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

п. 1. Общие принципы сложения положений на плоскости. Как было пояснено в п. 1 § 11, мы различаем положения в виде линий, эллипсов и кругов. Иначе положения называют распределениями: распределение около прямой, эллипс распределения, распределение около плоскости и т. д.

Линии и круги можно рассматривать как частный случай эллипса, характеризуя их элементами Q и q . У линий $q=Q$, у кругов $q=0$.

В п. 3 § 10 мы разобрали сложение линий положений. Эллипс положений представляется двумя линиями положений определенного направления и взаимно-перпендикулярных друг к другу. Круг также может быть представлен двумя взаимно-перпендикулярными равновесными линиями положения произвольного направления. Следовательно, как эллипсы, так и круги могут быть слагаемыми наряду с линиями положений. При этом при прибавлении эллипса или круга удобнее прямо оперировать с элементами Q и q .

Например, к весу p имеющейся линии положения арифметически и геометрически с удвоенным углом прибавляются $2Q_1$ и $2q_1$ эллипса положений. Получаются новые $2Q$ и $2q$ нового эллипса. При сложении двух эллипсов с элементами Q_1, q_1 и Q_2, q_2 нужно арифметически сложить Q_1 и Q_2 и гео-

метрически сложить с удвоением $\longleftrightarrow$ угла q_1 и q_2 , чтобы получить $Q = Q_1 + Q_2$ и $q = q_1 + q_2$ суммарного эллипса положений. Направление q этого эллипса устанавливается как равноделящее угла между начальным направлением и геометрической суммой.

При прибавлении круга положений, очевидно, имеющее-ся q_1 остается без изменения как по величине, так и по направлению. Получает приращение только арифметический элемент Q_1 в виде слагаемого Q_2 круга положений.

Положения могут быть охарактеризованы не весовыми элементами Q и q , а погрешностями $M_{\max}$ и $M_{\min}$. Тогда приходится определять Q и q по равенствам (11.20) или

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_{\min}^2} + \frac{1}{M_{\max}^2} \right), \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_{\min}^2} - \frac{1}{M_{\max}^2} \right), \quad (12.1)$$

где q имеет направление, общее с $M_{\max}$.

Если приходится складывать положения, часть которых охарактеризована элементами Q и q , а часть $M_{\max}$ и $M_{\min}$ или R и r , то следует учитывать значение d_m , фигурирующее в формуле (11.19), для каждого слагаемого положения. Лишь в том случае, когда все положения охарактеризованы средними погрешностями, можно применить формулу (12.1). Конечно, слагаемые элементы Q и q должны быть получены при одной единице веса.

При прибавлении нового положения размеры среднего эллипса погрешности уменьшаются, так как веса увеличиваются, в отличие от сложения направленных погрешностей, где каждое новое слагаемое увеличивает суммарную погрешность.

Кроме того, при сложении положений требуется установить самое новое положение, уравненное как наиболее вероятное.

Это делается путем построения вектора отклонений T , как и при сложении одних только линий положений, разобранном в п. 3 § 10.

п. 2. Сложение двух эллипсов положений. На фиг. 37 имеем два эллипса положений с центрами O_1 и O_2 и элемен-

тами $Q_1 = 40$; $q_1 = 30$; $Q_2 = 50$; $q_2 = 20$. Элементы q_1 и q_2 направлены по осям U_1 и U_2 .

Получаем сумму $Q = Q_1 + Q_2 = 40 + 50 = 90$ и строим

$$\overleftrightarrow{q} = \overleftrightarrow{q_1} + \overleftrightarrow{q_2}.$$

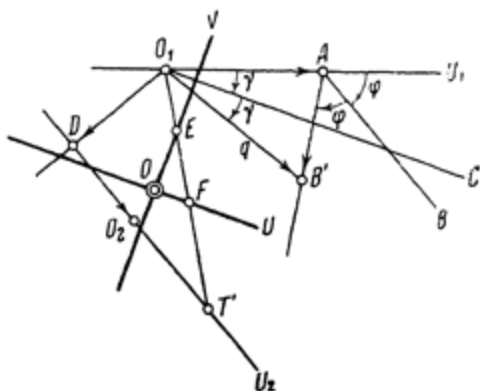
Для этого откладываем на U_1 в любую сторону от O_1 отрезок $O_1\vec{A} = q_1 = 30$. Проводим из A прямую AB , параллельную O_2U_2 , и удваиваем угол $U_1AB = \varphi$. На стороне AB' удвоенного угла откладываем отрезок $\vec{AB'} = q_2 = 20$, и проводим замыкающую $O_1\vec{B'}$. Длина ее $q = 33$ (по чертежу). Угол между векторами $O_1\vec{A}$ и $O_1\vec{B'}$, равный 2γ , делим пополам; биссектриса его O_1C . Определяем направление элемента q суммарного эллипса:

$$Q + q = 90 + 33 = 123;$$

$$Q - q = 90 - 33 = 57.$$

Строим вектор отклонений T . Для этого опускаем из O_1 , которая принимается нами за предварительное положение определяемой точки, на две линии положения U_2 и V_2 , не проходящие через O_1 , перпендикуляры $d_{v.2}$ и $d_{u.2}$. По существу, достаточно опустить один перпендикуляр на U_2 в виде $O_1\vec{D} = d_{v.2}$. Величина другого перпендикуляра $d_{u.2}$ будет равна $D\vec{O}_2$. Отрезок $D\vec{O}_2 = 18$.

Для построения T нужно на O_1D отложить отрезок, равный $(Q_2 - q_2) O_1\vec{D}$, и затем параллельно оси U_2 — отрезок, равный $(Q_2 + q_2) D\vec{O}_2$. Замыкающая будет T . Затем T следует разделить на $Q + q$ и $Q - q$.



Фиг. 37

Для упрощения построения возьмем вместо T вектор T' , связанный с ним равенством:

$$T' = \frac{T}{Q_2 - q_2} \text{ или } T = (Q_2 - q_2) T'. \quad (12.2)$$

Тогда

$$\vec{T}' = \vec{O_1 D} + D\vec{O_2} \frac{Q_2 + q_2}{Q_2 - q_2}. \quad (12.3)$$

Замерив T' на фигуре, откладываем на его направлении от O_1 отрезки:

$$E = \frac{T}{Q + q} = T' \frac{Q_2 - q_2}{Q + q}; \quad F = \frac{T}{Q - q} = T' \frac{Q_2 - q_2}{Q - q}. \quad (12.4)$$

Применительно к фиг. 37

$$\frac{Q_2 + q_2}{Q_2 - q_2} = \frac{70}{30} = 2.33; \quad \frac{Q_2 - q_2}{Q + q} = \frac{30}{123} = 0.244;$$

$$\frac{Q_2 - q_2}{Q - q} = \frac{30}{57} = 0.526;$$

$$\overline{DO_2} \cdot \frac{Q_2 + q_2}{Q_2 - q_2} = 18 \cdot 2.33 = \frac{7}{3} \cdot 18 = 42.$$

Откладываем отрезок $\vec{DT}' = 42$. Соединяем T' с O_1 ; измеряем $O_1 \vec{T}' = T'$, получаем 48. Отсюда

$$E = 48 \cdot 0.244 = 11.7; \quad F = 48 \cdot 0.526 = 25.2.$$

Откладываем отрезки $\vec{O_1 E} = 11.7$ и $\vec{O_1 F} = 25.2$. Получаем точки E и F . Через F проводим ось U , параллельную элементу q или $O_1 C$, и через E — ось V , перпендикулярную к $O_1 C$. В пересечении осей U и V в точке O получаем уравненное положение или центр суммарного эллипса с элементами $Q = 90$ и $q = 33$.

Как увидим ниже, сосредоточенный вес точки O_1 равен $(Q_1 - q_1)(Q_1 + q_1) = 70 \cdot 10$. Такой же вес точки O_2 равен $(Q_2 - q_2)(Q_2 + q_2) = 70 \cdot 30$. Отношение весов точек O_2 и $O_1 = \frac{70 \cdot 30}{70 \cdot 10} = 3$.

Расстояние уравненного положения от данных в разбираемом примере примерно обратно пропорционально сосредоточенным весам данных положений. Так на фиг. 37 и получилось: расстояние $\overline{OO_2}$ примерно в три раза меньше расстояния $\overline{OO_1}$.

Примешивается еще влияние сосредоточенных весов четырех точек пересечения осей U_1 и V_1 с осями U_2 и V_2 .

п. 3. Сосредоточенные веса точек пересечения линий положений. В некоторых учебниках геодезии касаются графического уравнивания прямых засечек путем построения фигуры погрешности, состоящей из линий положения. Доказывается, что уравненное положение или центр фигуры погрешности получается как центр тяжести точек пересечения фигуры погрешности, веса которых принимаются равными π , выраженным равенством:

$$\pi = g_i^2 \cdot g_k^2 \sin^2 \varphi_{i,k}, \quad (12.5)$$

где g_i и g_k — градиенты пересекающихся линий положения с индексами i и k и $\varphi_{i,k}$ — угол между ними.

Подробнее об этом можно узнать в книге автора „Высшая геодезия и геодезические работы“, ч. II, „Графическое уравнивание“, где разобран и метод Берто уравнивания фигуры погрешности. В русском переводе книги Э. Уиттекер и Г. Робинсон „Математическая обработка результатов наблюдений“ изд. 1935 г. (стр. 235—236) приведен метод d'Ocagne заимствованный из его статьи в Journ. de l'Ecole Pol. Car. 63 (1893) p.1, уравнивания фигуры погрешности путем построения центра наименьших квадратов — он же центр тяжести весов π , выраженных равенством (12.5).

Вес π мы называем сосредоточенным весом точек пересечения линий положения.

Сосредоточенный вес центра эллипса равен произведению весов его осей при угле $\varphi = 90^\circ$, т. е.

$$\pi_a = (Q + q)(Q - q) = Q^2 - q^2. \quad (12.6)$$

Решим задачу, представленную на фиг. 37, путем сложения сосредоточенных весов, чтобы проиллюстрировать этот метод.

суммарного эллипса и направлений его осей. Поэтому построение на фиг. 37 предпочтительнее, чем на фиг. 38. При сложении эллипса положений O_1 (с линией положения AB) с весом $p = 2Q_2 = 2q_2$ нужно геометрически сложить q_1 и q_2 , опустить из O_1 на AB перпендикуляр d и на нем построить точки E и F по отрезкам:

$$E = \frac{P}{Q + \frac{1}{2}p + q} d; \quad F = \frac{P}{Q_1 + \frac{1}{2}p - q} d.$$

Через F проводим параллельно $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$ ось U , а через E , как обычно, — ось V . В пересечении U и V имеем центр суммарного эллипса. Заметим, что элемент q_2 перпендикулярен к линии положений AB .

п. 4. Прибавление круговых положений. При прибавлении к эллипсу с центром O_1 и элементами Q_1 и q_1 круга положений с центром O_2 и весовым элементом Q_2 получается эллипс с центром O и элементами $Q = Q_1 + Q_2$ и q , равным q_1 по величине и направлению.

У круга его эквивалентные взаимно-перпендикулярные линии могут быть направлены как угодно. Направим одну из них по прямой O_2O_1 . Тогда, согласно построению, приведенному в п. 2, вектор T направится по этой прямой и будет равняться $Q_2 \cdot \vec{O_1O_2}$, поскольку другой перпендикуляр на ось, совпадающую с O_1O_2 , будет равняться нулю. Далее поступаем обычно: делим T на $Q + q_1$ и $Q - q_1$, строим точки E и F и проводим через них прямые, параллельные осям V_1 и U_1 слагаемого эллипса. Получаем точку O .

Характерно, что O не получается на прямой O_1O_2 , если только $\vec{O_1O_2}$ не совпадает с осью V_1 или U_1 . При совпадении же O_1O_2 с осью V_1 , отрезок $\vec{O_1O}$ выразится равенством

$$\vec{O_1O} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2 - q_1} \vec{O_1O_2},$$

а при совпадении с осью U_1

$$\vec{O_1O} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2 + q_1} \vec{O_1O_2}.$$

При сложении двух кругов положений с центрами O_1 и O_2 и элементами Q_1 и Q_2 уравненное положение O получается на прямой O_1O_2 в расстояниях, обратно пропорциональных Q_1 и Q_2 :

$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \overrightarrow{O_1O_2}; \quad \overrightarrow{O_2O} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \overrightarrow{O_1O_2}.$$

В сумме получается также круг положений с элементом

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

При прибавлении круга положений с центром O_2 и элементом Q_2 к линии положений AB с весом $p = 2Q_1 = 2q_1$ опускают перпендикуляр d из O_2 на AB и на нем находят точку O , определяя отрезок $\overrightarrow{O_2O}$ по формуле

$$\overrightarrow{O_2O} = \frac{p}{p + Q} d.$$

В сумме получается эллипс положений с элементами $Q = Q_2 + \frac{1}{2}p$ и $q = \frac{1}{2}p$ и с осью U , перпендикулярной к AB .

п. 5. Уравнивание узловых точек полигонов. В качестве примера применения сложения эллипсов положений можно привести уравнивание узловых точек полигонов.

В п.1 § 4 мы рассмотрели задачу о выражении погрешности в положении вершин полигона в виде эллипса. Если построить такие эллипсы для конца каждой ветви полигонов, сходящихся в узловой точке, то мы получим несколько положений узловой точки, охарактеризованных своими эллипсами погрешностей. Число эллипсов положений будет равно числу ветвей. Остается сложить эти положения как разобрано выше, и мы получим строго уравненное положение узловой точки. Выполняется это вкратце так. Получают сначала значения координат узловой точки из каждой ветви. По разностям этих значений в крупном масштабе 1:10 наносят точки, отвечающие значениям координат, полученным из каждой ветви. Эти точки служат центрами эллипсов, полученных так, как указано в п. 1 § 4. От элементов R и z

этих эллипсов переходят по равенствам (11.20) к элементам Q и q и складывают графически эллипсы положений, согласно п. 2, предыдущего параграфа и таким образом находят графически в масштабе 1 : 10 положение уравненной узловой точки по отношению к положению, определенному по любой из ветвей, сходящихся в узловой точке полигонов.

п. 6. Сложение положений в пространстве. В пространстве мы различаем следующие положения или распределения: плоскость, эллиптический или круговой цилиндр и эллипсоид или шар.

Общим видом положений можно считать эллипсоид, выводя из него остальные виды как частные.

При сложении положений на плоскости мы убедились, что действия с весами p одинаковы с действиями над квадратами e^2 векториальных погрешностей. Элементы R и r заменяются элементами Q и q . Взаимный переход их выражен равенствами (11.19)—(11.21), основанными на исходной инверсионной зависимости относительных значений:

$$pe^2 = 1. \quad (12.7)$$

Выводы, полученные для плоскости, распространяются и для пространства. При сложении положений в пространстве следует применить приемы, предложенные в предыдущей главе для сложения направленных погрешностей (см. п. 4 § 7).

Три плоскости положений дают эллипсоид положений с весами по его осям U , V и W , обозначенными нами через p_g , p_m и p_p (p_g — наибольший, p_p — наименьший и p_m — средний вес). Векторами, которые складываются арифметически и геометрически с удвоением углов, вместо e^2 служат нормали к плоскостям положений с весами p .

При числе плоскостей положений, большем трех, сначала число их сокращается до трех методом, указанным в п. 4 § 7, затем три плоскости заменяются плоскостями симметрии эллипсоида UV , UW и VW , и вместо трех нормалей плоскостей с весами p_1 , p_2 и p_3 мы получаем три нормали по осям W , V и U с весами p_p , p_m и p_g , как указано в п. 3 § 7 относительно e^2 , e_2^2 и e_3^2 .

Сложение двух плоскостей положений дает эллиптический и в частном случае круговой цилиндр положений с осью, являющейся линией пересечения плоскостей, и направляющей в виде эллипса или круга, полученного сложением весов p_1 и p_2 данных плоскостей или их нормалей.

При сложении положений в пространстве, как и на плоскости, приходится находить уравненное положение точек путем построения вектора T отклонений или путем вычисления его проекций на координатные оси. В пространстве предпочтительнее последнее.

Находятся линейные отклонения d плоскостей положений, в том числе и плоскостей симметрии эллипсоида от предварительного положения определяемой точки, помножаются на веса p , и произведения pd проектируются на найденные направления осей U , V и W . Получается сумма проекций по каждой оси в виде проекций T_u , T_v и T_w вектора T на эти оси.

После этого получают координаты u , v и w уравненного положения по отношению к предварительному по формулам, аналогичным (10.13):

$$u = \frac{T}{p_g}; \quad v = \frac{T}{p_m}; \quad w = \frac{T}{p_p}. \quad (12.8)$$

Эллипсоид положений характеризуется средним эллипсоидом погрешностей, элементы которого получаются так же, как и элементы эллипса, по формулам:

$$M_g^2 = \frac{d_m^2}{p_p}; \quad M_m^2 = \frac{d_m^2}{p_m}; \quad M_p^2 = \frac{d_m^2}{p_g}, \quad (12.9)$$

где d_m^2 находится по формуле, аналогичной формуле (11.1)

$$d_m^2 = \frac{[pd_v^2]}{n-3} \quad (12.10)$$

(d_v — остаточные линейные отклонения плоскостей положений). Погрешность M по любому направлению выражается равенством

$$M^2 = M_p^2 \cos^2 \alpha + M_m^2 \cos^2 \beta + M_g^2 \cos^2 \gamma, \quad (12.11)$$

где α , β и γ — углы, образованные данным направлением с осями U , V и W .

Веса p обратны M^2

$$pM^2 = 1, \quad (12.12)$$

или равны постоянной величине d_m^2 .

Радиусы-векторы эллипсоида с осями $\sqrt{p_g}$, $\sqrt{p_m}$ и $\sqrt{p_p}$ взятые в квадрате, являются весами p по любому направлению, как это доказывается и для эллипса, согласно выражению (11.16) в п. 2 § 11.

п. 7. Вычитание положений. Вычитание или разложение положений является действием, обратным сложению. Вычесть одну величину из другой, значит найти такую величину, которая, будучи сложена с вычитаемым, дала бы уменьшаемое. Этим определяются те действия и построения, с помощью которых производится вычитание или разложение положений на два, из которых одно так или иначе задано.

В § 3 разобраны различные случаи разложения направленных погрешностей на плоскости. Аналогично можно вычитать и разлагать положения как на плоскости, так и в пространстве, выполняя определенные требования.

Для общности приемов построения при вычитании положений можно заменить вычитание сложением с мнимым положением, имеющим отрицательный вес. Мы выделяем мнимую линию и мнимую плоскость положений. В соответствии с этим может быть получен эллипс положений с одной или двумя мнимыми осями, а также эллипсоид положений с одной, двумя или тремя мнимыми осями или плоскостями положений.

Вычитание одной линии положений из другой в общем дает эллипс положений с одной мнимой осью. При этом Q может быть и положительным и отрицательным, но по абсолютному значению оно всегда меньше q , так как разность двух сторон всегда меньше третьей. q считается положительной как результат геометрического вычитания или сложения с направлением $2\alpha \pm 180^\circ$. Поэтому $Q - q$ в этом случае всегда отрицательно, а $Q + q$ всегда положительно.

В частном случае, когда уменьшаемое и вычитаемое представлены параллельными линиями положений, разность также является действительной или мнимой линией положений.

Мнимые линии и плоскости положений имеют смысл как промежуточная продукция.

Разложение положений может возникнуть в связи с вопросом получения круговых или шаровых положений, дающих наилучшие по точности результаты при наименьшей затрате измерительного труда и техники.

Эллипсоид положений может быть разложен на шар и две или три плоскости положений действительных или мнимых или на шар и эллипсоид с той же ориентировкой.

При сложении двух линий положений на плоскости или трех плоскостей в пространстве центр эллипса или эллипсоида находится непосредственно в пересечении линий и плоскостей, и построение вектора отклонений T отпадает. При обратном действии в этих случаях все также относится к одной точке. И вообще при вычитании и разложении практически вряд ли потребуются изменение самого положения исследуемой точки. Дело должно ограничиться лишь нахождением весовых элементов.

§ 13. ПРИМЕР НА СЛОЖЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

п. 1. Задание примера. В качестве примера, уясняющего метод сложения положений в пространстве, возьмем прямую засечку с трех твердых точек с определением также высоты засекаемой точки.

На фиг. 39 представлены три опорные точки 1, 2 и 3 с данными координатами и взятыми с них углами в виде дирекционных углов α и зенитных расстояний δ .

$$x_1 = +493.2; \quad y_1 = +86.0; \quad z_1 = +300.0;$$

$$\alpha_1 = 180^\circ 00'0; \quad \delta_1 = 59^\circ 46'7;$$

$$x_2 = +189.0; \quad y_2 = +311.5; \quad z_2 = +100.0;$$

$$\alpha_2 = 260^\circ 00'0; \quad \delta_2 = 29^\circ 47'5;$$

$$x_3 = +0.0; \quad y_3 = 0.0; \quad z_3 = +300.0;$$

$$\alpha_3 = 30^\circ 00'0; \quad \delta_3 = 40^\circ 47'6.$$

и вычисленный дирекционный угол:

$$\alpha'_3 = 29^\circ 57'6.$$

Так как дирекционные углы с точек 1 и 2 и зенитное расстояние с точки 2 использованы для получения предварительных координат, то для этих углов измеренные и вычисленные значения одинаковы и отклонения измеренное минус вычисленное равны нулю.

В общем мы будем иметь такие угловые отклонения:

$$\delta\delta_1 = \delta'_1 - \delta_1 = 59^\circ 49'6 - 59^\circ 46'7 = +2'9; \quad \delta\alpha_1 = 0'0;$$

$$\delta\delta_2 = 0'0; \quad \delta\alpha_2 = 0'0;$$

$$\delta\delta_3 = \delta'_3 - \delta_3 = 40^\circ 43'8 - 40^\circ 47'6 = -3'8;$$

$$\delta\alpha_3 = \alpha_3 - \alpha'_3 = 30^\circ 00'0 - 29^\circ 57'6 = +2'4.$$

Для зенитных расстояний пришлось брать вычисленное минус измеренное, так как с увеличением зенитного расстояния высота уменьшается.

Теперь требуется определить градиенты горизонтальных направлений α и зенитных расстояний δ .

Для получения градиентов α определим по плану фиг. 39 горизонтальные расстояния s . Они получились следующие:

$$s_1 = \overrightarrow{O-1} = 344 \text{ м}; \quad s_2 = \overrightarrow{O-2} = 229 \text{ м}; \quad s_3 = \overrightarrow{O-3} = 172 \text{ м}.$$

В соответствии с этим, применяя формулу (5.9) для минут и дм,

$$g = \frac{345}{s} \text{ '}/\text{дм}, \quad (13.1)$$

получим

$$g_1 = 1.0; \quad g_2 = 1.5; \quad g_3 = 2.0.$$

Градиенты зенитных расстояний (обозначим их через g'), очевидно, выразятся формулой

$$g' = g \sin \delta, \quad (13.2)$$

так как наклонные расстояния s' равны $\frac{s}{\sin \delta}$:

$$\sin \delta_1 = 0.865; \quad \sin \delta_2 = 0.495; \quad \sin \delta_3 = 0.652.$$

Отсюда

$$g'_1 = 0.865; \quad g'_2 = 0.742; \quad g'_3 = 1.304.$$

Примем, что веса зенитных расстояний в 2.5 раза меньше весов горизонтальных направлений, так как обычно вертикальные углы измеряются менее точно, чем горизонтальные. В данном случае мы считаем, что погрешность их в $\sqrt{2.5} = 1.58$ раза больше погрешности горизонтальных углов.

Таким образом для зенитных расстояний мы вводим еще оперативный вес, равный $\frac{2}{5} = 0.4$, и определяем их общие веса по формуле

$$p' = 0.4 g'^2,$$

в то время как направления α имеют вес:

$$p = g^2;$$

$$p_1 = 1.00; \quad p_2 = 2.25; \quad p_3 = 4.00;$$

$$p'_1 = 0.4 \cdot 0.75 = 0.30; \quad p'_2 = 0.4 \cdot 0.55 = 0.22; \quad p'_3 = 0.4 \cdot 1.70 = 0.68.$$

Найдем теперь линейные отклонения d и d' по формуле (5.2), т. е.

$$d = \frac{\delta \alpha}{g} \text{ дм}; \quad d' = \frac{\delta \delta}{g'} \text{ дм}.$$

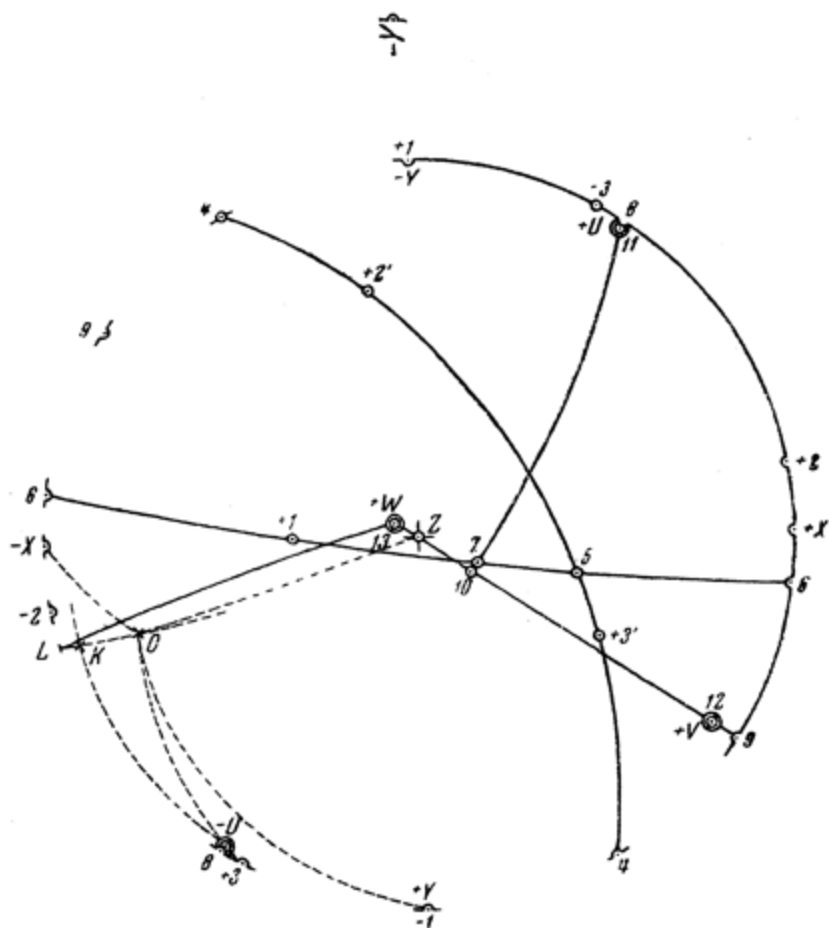
Получаем

$$d_1 = 0.0; \quad d_2 = 0.0; \quad d_3 = + \frac{2.4}{2.0} = + 1.2 \text{ дм};$$

$$d'_1 = + \frac{2.9}{0.865} = + 3.4; \quad d'_2 = 0.0; \quad d'_3 = - \frac{3.8}{1.304} = - 2.9 \text{ дм}.$$

п. 3. Переход на проекцию шара. С помощью сетки Каврайского наносим на прозрачный лист (фиг. 40) проекции нормалей плоскостей положения измеренных углов (направлений). По окружности основного круга сетки размещаются нормали к вертикальным коллимационным (визирным) плоскостям дирекционных углов. Если первую нормаль поставить на 0° , то для второй нормали нужно взять 80° и для третьей 210° по окружности основного круга. Таким образом на фиг. 40 нанесены диаметры $+1-1$, $+2-2$ и $+3-3$.

Далее строим нормали к наклонным плоскостям, проходящим через горизонтальную ось вращения трубы теодолита при визировании на вставляемую точку. Обозначим их через $+1'$, $+2'$ и $+3'$. Они на фиг. 40 лежат на перпендикуляре



Фиг. 40

к диаметрам $+1-1$, $+2-2$ и $+3-3$, как раз представляющим горизонтальную ось вращения трубы теодолита. Поэтому, если эти диаметры совместить со средним меридианом сетки, то нормали $+1'$, $+2'$ и $+3'$ будут лежать на экваторе сетки на расстояниях от центра сетки Z , равных

дополнениям до 90° зенитных углов δ , или на расстояниях от края сетки, равных δ .

Дуги будут равны

$$\begin{aligned} Z \smile + 1' &= 90^\circ - 59^\circ.9 = 30^\circ.1; & Z \smile + 2' &= 90^\circ - 29^\circ.8 = 60^\circ.2; \\ Z \smile + 3' &= 90^\circ - 40^\circ.7 = 49^\circ.3. \end{aligned}$$

п. 4. Сокращение числа нормалей до трех. Согласно разъяснениям п. 6 предыдущего параграфа и примера, разобранного в п. 5 § 7, сократим шесть нормалей до трех, им эквивалентных. Для этого мы должны оперировать с весами p и p' нормалей. Поскольку в одной (горизонтальной) плоскости уже оказалось три нормали 1, 2 и 3, сносим на нее составляющие остающихся вне ее пар нормалей.

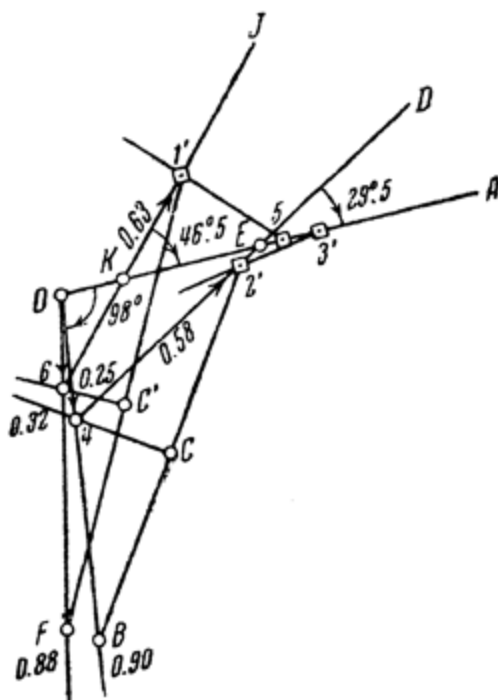
Проведем на фиг. 40 через нормали $+3'$ и $+2'$ дугу плоскости до пересечения с горизонтальной плоскостью в точках 4—4. Заменим нормали $3'$ и $2'$ с весами p'_3 и p'_2 двумя эквивалентными нормальями, одной из которых является 4—4. Для этого на особом чертеже (фиг. 41) проведем прямую OA и отложим на ней отрезок $\overrightarrow{O-3'} = p'_3 = 0.68$. Затем проводим $3'-2'$ под углом $2'-3'-A$, равным удвоенной дуге $+2 \smile +3'$ на фиг. 40, т. е. $94^\circ.5.2 = 189^\circ$ в направлении против движения часовой стрелки (угол $O-3'-2' = 189 - 180 = 9^\circ$). Построение ведется согласно п. 4 § 3. Далее проводим на фиг. 41 прямую под углом AOB , равным удвоенной дуге $+3' \smile 4$ на фиг. 40, т. е. под углом $49^\circ.0.2 = 98^\circ$, и откладываем $\overrightarrow{OB} = p'_2 + p'_3 = 0.22 + 0.68 = 0.90$. На фиг. 5, 19 и 20 это делалось несколько иначе, там сначала откладывалась сумма разлагаемых векторов. Точку B на фиг. 41 соединяем с $2'$ и из середины C отрезка $2'-B$ восстанавливаем к $B-2'$ перпендикуляр до пересечения с OB в точке 4. Последнюю соединяем с точкой $2'$; получаем прямую 4— D , которая образует с OA удвоенный угол DEA , равный $29^\circ.5$, как измерено транспортиром.

Делим $29^\circ.5$ пополам и половину, равную $14^\circ.7$, откладываем с помощью сетки Каврайского на фиг. 40 в виде дуги

$+3' - 5 = 14^{\circ}.7$. Нормали 5 и 4 эквивалентны $+3'$ и $+2'$. Веса их определяются из фиг. 41:

$$\overrightarrow{O-4} = \overleftrightarrow{p_4} = 0.32; \quad \overrightarrow{4-2'} = \overleftrightarrow{p_5} = 0.58.$$

Так же сносим на горизонтальную плоскость одну из составляющих нормалей, эквивалентных 5 и $+1'$. Для этого



Фиг. 41

на фиг. 41 на OA откладываем $\overrightarrow{O-5} = \overleftrightarrow{p_5} = 0.58$, проводим $5-I'$ под углом, равным удвоенной дуге $5 - +1'$ на фиг. 40, т. е. $67^{\circ}.0 \cdot 2 = 134^{\circ}$.

На фиг. 41 134° составляет угол $I'-5-A$. Откладываем на его стороне $5-I' = \overleftrightarrow{p_1} = 0.30$. Проводим OF под углом AOF , равным удвоенной дуге $6 - 5$ на фиг. 40, т. е. под углом $51^{\circ}.5 \cdot 2103^{\circ}$.

$$-3 \overset{\sim}{-} + 2 \times 2 = 50^\circ \times 2 = 100^\circ;$$

$$+ 2 \overset{\sim}{-} 6 \times 2 = 18^\circ \times 2 = 36^\circ;$$

$$6 \overset{\sim}{-} 4 \times 2 = 52^\circ \times 2 = 104^\circ.$$

Получилась замыкающая $2q = 4.00$ с двойным углом $2\gamma = 78^\circ$. Угол $\gamma = 39^\circ$ отложен на фиг. 40 в виде дуги $+1 \overset{\sim}{-} 8$.

$$2Q = 1.00 + 4.00 + 2.25 + 0.25 + 0.32 = 7.82;$$

$$Q = 3.91; q = 2.00; Q + q = p_s = 5.91; Q - q = p_9 = 1.91.$$

На фиг. 40 нормаль p_9 нанесена отложением на окружности основного круга дуги $8-9$, равной 90° .

Таким образом мы свели шесть нормалей к трем: 7, 8 и 9 с весами $p_7 = 0.63$; $p_8 = 5.91$; $p_9 = 1.91$:

$$p_7 + p_8 + p_9 = 8.45 = p_1 + p_2 + p_3 + p'_1 + p'_2 + p'_3 = \\ = 1.00 + 2.25 + 4.00 + 0.30 + 0.22 + 0.68.$$

п. 5. Переход к эллипсоиду. От трех нормалей мы переходим к эллипсоиду, т. е. к трем взаимно-перпендикулярным нормалям, из которых одна имеет наибольший, а другая наименьший вес. Этот переход осуществляется так же, как показано в п. 3 § 7. Применяется фиг. 40 и дополнительная фиг. 43.

Нормали 8 и 7 с углом $87^\circ.5$ между собой заменены нормальюми 10 и 11 с теми же весами 0.63 и 5.91, но с углом 90° между ними.

Наконец, 10 и 9 заменены нормальюми 12 и 13 с весами $p_{12} = 1.94$ и $p_{13} = 0.60$. Дуга $9-12$ на фиг. 40 равна $\frac{1}{2} \cdot 13^\circ = 6^\circ.5$. Дуга $12-13 = 90^\circ$. При этом дуги $11-12$ и $11-13$ также оказались примерно равными 90° . Поэтому нормали 11, 12 и 13 мы приняли за оси U, V и W эллипсоида с $p_g = 5.91$; $p_m = 1.94$ и $p_p = 0.60$; $p_g + p_m + p_p = 8.45$.

п. 6. Сложение положений. Теперь в отличие от сложения векториальных погрешностей остается сложить сами положения, т. е. найти наиболее вероятное положение искомой точки, наиболее вероятные координаты ее. Используем указания п. 6 предыдущего параграфа.

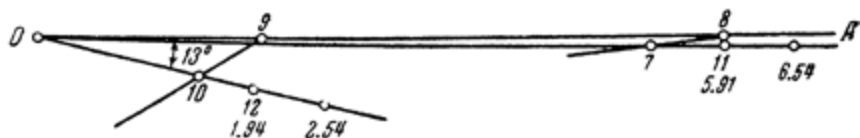
Обратимся к линейным отклонениям плоскостей положений от предварительного положения искомой точки, т. е. к

$$d_3 = +1.2 \text{ дм}; d'_1 = +3.4 \text{ дм}; d'_3 = -2.9 \text{ дм}.$$

Помножим эти отклонения на их веса, спроектируем каждое произведение на три оси U , V и W и разделим сумму проекций по каждой оси на вес последней.

В результате получатся координаты u , v и w уравненного положения искомой точки по отношению к предварительному. Обозначим произведение pd через t .

$$t_3 = +4.00 \cdot 1.2 = +4.80; t'_1 = +0.30 \cdot 3.4 = +1.02; \\ t'_3 = -0.68 \cdot 2.9 = -1.97.$$



Фиг. 43

Замеряем по сетке Каврайского на фиг. 40 дуги между направлениями $+3$, $+I'$ и $+3'$ и положительными направлениями осей U , V и W . Получаем:

$$\alpha_3 = +3 \sim +U = 175^\circ; \beta_3 = +3 \sim +V = 85^\circ; \\ \gamma_3 = +3 \sim +W = 90^\circ; \\ \alpha'_1 = 106^\circ; \beta'_1 = 108^\circ; \gamma'_1 = 24.^\circ 5; \alpha'_3 = 87^\circ; \beta'_3 = 34^\circ; \gamma'_3 = 56^\circ.$$

Проекции выразятся равенствами:

$$t_u = t \cos \alpha; \quad t_v = t \cos \beta; \quad t_w = t \cos \gamma. \quad (13.3)$$

В соответствии с этим получаем:

для $+3$	$t_u = -4.78;$	$t_v = +0.42;$	$t_w = 0.0;$
для $+I'$	$t_u = -0.28;$	$t_v = -0.32;$	$t_w = +0.93;$
для $+3'$	$t_u = -0.10;$	$t_v = -1.63;$	$t_w = -1.10.$
для T	$T_u = -5.16;$	$T_v = -1.53;$	$T_w = -0.17.$

Отсюда

$$u = \frac{T_u}{p_g} = -\frac{5.16}{5.91} = -0.95; \quad v = \frac{T_v}{p_m} \sim \frac{1.53}{1.94} = -0.79;$$

$$w = \frac{T_w}{p_p} = -\frac{0.17}{0.60} = -0.28 \text{ дм.}$$

Далее вычисляем длину f и направление в пространстве вектора перемещения искомой точки из предварительного положения в окончательное, уравненное.

Для этого служат формулы:

$$f = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \quad (13.4)$$

$$\cos \alpha = \frac{u}{f}; \quad \cos \beta = \frac{v}{f}; \quad \cos \gamma = \frac{w}{f}, \quad (13.5)$$

где α , β и γ — углы, образованные f с осями U , V и W ;

$$f = \sqrt{0.95^2 + 0.79^2 + 0.28^2} = 1.27 \text{ дм};$$

$$\cos \alpha = -0.75, \quad \cos \beta = -0.62, \quad \cos \gamma = -0.22;$$

$$\alpha = 138^\circ.6, \quad \beta = 128^\circ.3, \quad \gamma = 102^\circ.7.$$

По этим углам на фиг. 40 можно нанести проекцию направления вектора f . Но удобнее воспользоваться обычными принятыми в геодезии углами полярных координат, т. е. дирекционным углом α_u , отсчитываемым от оси U в плоскости UV , и зенитным расстоянием γ от оси W . Для полярных координат имеем формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{v}{u}; \quad \cos \gamma = \frac{w}{f}; \quad f = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}. \quad (13.6)$$

Для данной задачи

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{-0.79}{-0.95} = +0.83, \quad \alpha_u = 180^\circ + 39^\circ.7 = 219^\circ.7;$$

γ найдено выше и равно $102^\circ.7$.

Откладываем на фиг. 40 по UV дугу $+UK = \alpha_u = 219^\circ.7$. Часть ее заходит в нижнюю гемисферу в виде пунктирной линии.

Проводим через $+W$ и K дугу плоскости $+WZK$, продолжая ее в нижнюю гемисферу пунктиром, и откладываем дугу KO , равную $90^\circ - \gamma = -12^\circ.7$.

Получаем в нижней гемисфере точку O , отмеченную крестиком и отвечающую направлению вектора f .

Здесь же, на фиг. 40, наносим геодезические оси X , Y и Z , согласно фиг. 39. Оси X и Y , как горизонтальные находятся на окружности основного круга. Ось Y совпадает с $+I-I$. Положительное направление нормали $+Z$, как видно на фиг. 39, проходит между $+Y$ и $-X$. Этим определяется положительное направление осей $+X$ и $+Y$, показанное на фиг. 40. Ось $+Z$ совпадает с центром сетки.

Точка O , находящаяся в нижней гемисфере, образует с положительными направлениями осей X , Y и Z следующие углы, измеренные на фиг. 40:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= +\widetilde{XO} = 180^\circ - 24^\circ.5; \\ \beta_0 &= +\widetilde{YO} = 74^\circ; \gamma_0 = +\widetilde{ZO} = 180^\circ - 73^\circ,\end{aligned}$$

что даст:

$$\begin{aligned}\delta x &= -1.27 \cos 24^\circ.5 = -1.16; \delta y = 1.27 \cos 74^\circ = +0.35; \\ \delta z &= -1.27 \cos 73^\circ = -0.37 \text{ дм.}\end{aligned}$$

Отсюда уравненные координаты вставляемой точки будут:

$$\begin{aligned}x &= +149.2 - 0.116; \quad y = +86.0 + 0.035 = +86.035; \\ z &= +499.97 - 0.037 = +499.933.\end{aligned}$$

п. 7. Получение среднего эллипсоида погрешности.

Для получения элементов среднего эллипсоида погрешности необходимо получить среднее квадратичное линейное отклонение d_m с весом, равным единице, по формуле (12.10), т. е.

$$d_m = \frac{[pd_v^2]}{n-3}, \quad (13.7)$$

где d_v — остаточные отклонения и n — число плоскостей положений.

Величины d_v можно определить из равенств:

$$d_v = d - f \cos \varepsilon, \quad (13.8)$$

где f — вектор смещения;

d — участвовавшие в уравнивании расстояния плоскостей положений от предварительного положения определяемой точки;

d_v — остаточное отклонение плоскостей, т. е. расстояние их от уравненного положения точки;

ε — угол между f и d или d_v , т. е. угол между направлением смещения и нормалью к плоскости положений, который легко измерить на фиг. 40.

Так, для плоскости с нормалью $+3$ на фиг. 40

$$\varepsilon_3 = +3 - 0 = 46^\circ, \quad d_{v,3} = 1.2 - 1.27 \cos 46^\circ = +0.32 \text{ дм.}$$

Получив d_m , мы вычисляем полуоси среднего эллипса погрешности по формулам:

$$M_p = \frac{d_m}{\sqrt{p_p}}, \quad M_m = \frac{d_m}{\sqrt{p_m}}, \quad M_g = \frac{d_m}{\sqrt{p_g}}, \quad (13.9)$$

и от них переходим к средним квадратичным ошибкам координат M_x , M_y и M_z по формулам, аналогичным формуле (12.11):

$$\begin{aligned} M_x^2 &= M_p^2 \cos^2 \alpha_x + M_m^2 \cos^2 \beta_x + M_g^2 \cos^2 \gamma_x, \\ M_y^2 &= M_p^2 \cos^2 \alpha_y + M_m^2 \cos^2 \beta_y + M_g^2 \cos^2 \gamma_y, \\ M_z^2 &= M_p^2 \cos^2 \alpha_z + M_m^2 \cos^2 \beta_z + M_g^2 \cos^2 \gamma_z, \end{aligned}$$

где $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ — углы, образованные осями X, Y и Z с осью U ,
 $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ — углы, образованные теми же осями с осью V ,
 $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ — углы, образованные теми же осями с осью W .

п. 8. Сравнение произведенного уравнивания с обычным.

Интересно сопоставить полученные результаты по уравниванию вставленной точки O с теми, которые получаются обычно в геодезии, когда сначала уравнивают горизонтальные координаты, а затем получают среднюю высоту.

На фиг. 39 произведено графическое уравнивание на плоскости засечек с трех точек 1, 2 и 3. Для этого построен

вектор $2q$ из весов p_1, p_2 и p_3 в виде замыкающей полигоны $O-1-2-3$. Взяты направления самих линий положений, а не нормали к ним. Поэтому биссектриса угла $1-O-3' = 2\gamma$ должна быть названа осью V , а не U , как это принято было в предыдущих построениях. Векторы равны $2q = 4.35$, $2Q = 1.00 + 2.25 + 4.00 = 7.25$, $Q = 3.625$, $q = 2.175$, $Q \div q = 5.80$, $Q - q = 1.45$.

Как определено выше,

$$d_1 = d_2 = 0; \quad d_3 = +1.2 \text{ дм при } p_3 = 4.00.$$

Поэтому

$\vec{T} = [\vec{p}\vec{d}] = \vec{p}_3 d_3 = 4.00 \cdot 1.2 = 4.80$ и направлено перпендикулярно к линии положений $3-O$ и вправо от нее, поскольку d_3 положительно.

$$E = \frac{T}{Q + q} = \frac{4.80}{5.80} = 0.83 \text{ дм}, \quad F = \frac{T}{Q - q} = \frac{4.80}{1.45} = 3.30 \text{ дм}.$$

На T откладываем отрезки $\vec{OE}$ и $\vec{OF}$, равные 0.83 и 3.30 в принятом для d масштабе, равном 1:5.

Проводим через точку E прямую, параллельную OV , а через F — перпендикулярную к OV . В пересечении получаем точку O' , координаты которой в системе осей X и Y по отношению к точке O в масштабе 1:5 будут искомыми поправками координат

$$\delta x = -0.10; \quad \delta y = +0.95 \text{ дм}.$$

Таким образом уравненные горизонтальные координаты будут:

$$\begin{aligned} x &= +149.2 - 0.010 = +149.190; \\ y &= +86.0 + 0.095 = +86.095. \end{aligned}$$

По этим координатам найдем горизонтальные расстояния от опорных точек до искомой, и по измеренным зенитным расстояниям вычисляем трижды высоту искомой точки. Получилось

$$z_{0.1} = 500.39; \quad z_{0.2} = 499.91; \quad z_{0.3} = 499.60.$$

Берем из них весовое среднее при весах $p'_1=0.30$; $p'_2=0.22$; $p'_3=0.68$, оперируя с $\delta z = z_0 - 500$:

$$p'_1 \delta z_1 = +0.30 \cdot 0.39 = +0.117; \quad p'_2 \delta z_2 = -0.22 \cdot 0.09 = -0.20;$$

$$p'_3 \delta z_3 = -0.68 \cdot 0.40 = -0.272; \quad [p' \delta z] = -0.175; \quad [p'] = 1.20;$$

$$\text{среднее } \delta z = -\frac{0.175}{1.20} = -0.146.$$

Значит, среднее $z_0 = 500 - 0.146 = 499.854$.

Таким образом для сравнения мы имеем:

	x	y	z
строгое уравнивание	+149.084	+86.035	+499.933
обычное уравнивание	+149.190	+86.095	+499.854
Разность	-0.106	-0.060	+0.079

Общее смещение равно

$$\sqrt{0.106^2 + 0.060^2 + 0.079^2} = 0.145 \text{ м.}$$

Если бы веса вертикальных углов были приняты одинаковыми с весами горизонтальных, то расхождения координат получились бы еще большими.

Г л а в а IV

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ВСТАВКА ОДНОЙ ТОЧКИ

§ 14. РЕДУЦИРОВАНИЕ НАПРАВЛЕНИЙ

п. 1. Определения. При вставках точек в триангуляционную сеть методом косвенных наблюдений мы различаем внутренние направления, идущие от вставляемых точек к твердым и к другим вставляемым точкам, и внешние направления, измеренные на твердых и вставляемых точках на вставляемые точки.

Обычно на той или иной точке стояния направления представляют веер связанных между собой лучей, общая ориентировка которых также подлежит уравниванию путем отыскания наиболее вероятной поправки z к предварительному ориентированию веера. При аналитическом уравнивании освобождаются от этого неизвестного еще до составления нормальных уравнений. Это особенно целесообразно при графическом уравнивании. Освобождение от ориентирной поправки z влечет за собой изменение свободных членов и прибавляет некоторые фиктивные уравнения, согласно предложениям Шрейбера, объединение которых с действительными вносит особые коэффициенты σ весовых элементов, участвующих в уравнивании.

п. 2. Редуцирование внутренних направлений. Для внутренних направлений имеются такие уравнения погрешностей:

$$\begin{aligned} z + a_i x + b_i y - l_i &= v_i, \\ i &= 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Чтобы освободиться от z , целесообразно применить известное предложение Шрейбера. При этом для упрощения следует заменить l_i редуцированными свободными членами l'_i , получаемыми из l_i по следующему равенству:

$$l'_i = l_i - \frac{1}{n} [l]. \quad (14.2)$$

Средний ориентирный угол $\omega_{\text{ср}}$ получается как арифметическое среднее из всех вычисленных дирекционных углов как твердых, так и не твердых направлений, измеренных на данной станции.

При внутренних направлениях твердых нет.

Для того чтобы получать уравнения погрешности в виде (14.1), т. е. со свободным членом, имеющим перед собой знак минус, мы условимся вычитать всегда из среднего ориентирного угла $\omega_{\text{ср}}$ ориентирный угол ω_i каждого направления, участвовавшего в получении $\omega_{\text{ср}}$, а не наоборот, как обычно делают.

Сумма всех l' , т. е. $[l']$, равна 0. Поэтому, если, согласно предложениям Шрейбера, для исключения z перейти к новой производной системе уравнений без z , получится

$$\left. \begin{aligned} n \text{ уравнений } a_i x + b_i y - l'_i = v_i \text{ с весом } = 1, \\ \text{одно уравнение } [a] x + [b] y = 0 \text{ с весом } 2\sigma = -\frac{1}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

п. 3. Редуцирование внешних направлений. При рассмотрении редуцирования внешних направлений для общности разберем сразу случай совместной вставки двух точек. Выводы, полученные при этом, можно легко применить для одной точки, а также распространить на любое число совместно вставляемых точек.

Обозначим поправки координат двух вставляемых точек через x_1, y_1 и x_2, y_2 . Возьмем некоторую твердую точку с индексом i и предположим, что она имеет внешние направления на обе вставляемые точки и, кроме того, несколько „твердых“ направлений на твердые точки, а всего k направлений на k точек.

Подчеркнем, что при получении свободных членов мы неизменно, как условились, будем пользоваться средним ориентирным углом $\omega_{\text{ср}}$.

При этом вычисленные твердые направления берутся из абриса, где они обычно даны.

Вычитая из полученного таким образом $\omega_{\text{ср}}$ ориентирные углы ω каждого отдельного направления, мы получим, как уже указывалось, сразу редуцированные свободные члены, дающие в сумме нуль, если взять их все. Свободные члены твердых направлений нам не нужны.

Ориентирные углы ω получаются вычитанием приведенных и уравненных на станциях направлений из вычисленных или данных дирекционных углов α этих направлений.

$$\omega_i = \alpha_i - \beta_i, \quad \omega_{\text{ср}} = \frac{1}{k} [\omega], \quad l_i = \omega_{\text{ср}} - \omega_i, \quad [l] = 0, \quad (14.4)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Значок „прим“ у l мы опускаем, поскольку условились иметь дело только с редуцированными свободными членами, получая их непосредственно при вычислении свободных членов, согласно равенствам (14.4).

Для взятой твердой точки i , учитывая и ориентирную поправку z , мы будем иметь уравнения двух родов.

1) $k - 2$ уравнений направлений на твердые точки:

$$z_i - l_{i,s} = v_{i,s} \quad \text{при } s = 3, 4, 5, \dots, k; \quad (14.5)$$

2) два уравнения внешних направлений на вставляемые точки

$$\left. \begin{aligned} z_i + a_i x_1 + b_i y_1 - l_{i,1} &= v_{i,1}, \\ z_i + c_i x_2 + d_i y_2 - l_{i,2} &= v_{i,2}. \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

Отсюда, по Шрейберу, получаем редуцированную систему без z_i всего из трех уравнений вместо k уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_i x_1 + b_i y_1 - l_{i,1} &= v_{i1} \quad \text{с весом } 2\sigma = 1, \\ c_i x_2 + d_i y_2 - l_{i,2} &= v_{i2} \quad \text{с весом } 2\sigma = 1, \\ a_i x_1 + b_i y_1 + c_i x_2 + d_i y_2 &= 0 \quad \text{с весом } 2\sigma = -\frac{1}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

Роль уравнений (14.5) сказалась только в том, что свободный член в последнем уравнении системы (14.7) приведен к нулю, и

$$[l_{i,s}]_{s=3}^{s=k} = -(l_{i,1} + l_{i,2}).$$

Для дальнейшего уравнения (14.5) исчезли.

п. 4. Случай вставки одной точки. Когда с твердой точки берется одно внешнее направление на одну из вставляемых точек или вставляется только одна точка, редуцированная система уравнений, связанная с внешним направлением, будет состоять всего из двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y - l_i &= v_i \text{ с весом } 2\sigma = 1, \\ a_1 x + b_1 y &= 0 \text{ с весом } 2\sigma = -\frac{1}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

Поскольку коэффициенты при неизвестных у этих последних уравнений одинаковы, их можно соединить в одно такое уравнение:

$$a \sqrt{\frac{k-1}{k}} x + b \sqrt{\frac{k-1}{k}} y - \sqrt{\frac{k}{k-1}} l = \sqrt{\frac{k}{k-1}} v. \quad (14.9)$$

Из этого уравнения мы усматриваем, что со свободным членом l не нужно ничего делать при переходе к нормальным уравнениям, а коэффициенты при неизвестных получают множитель 2σ при

$$\sigma = \frac{k-1}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}. \quad (14.10)$$

Если к уравнению (14.9) присоединить еще уравнение противоположного внутреннего направления с теми же коэффициентами a и b , то это будет равносильно введению коэффициента весовых элементов σ , равного $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{k-1}{k} \right)$, т. е.

$$\sigma = \frac{2k-1}{2k} = 1 - \frac{1}{2k}, \quad (14.11)$$

и суммарное уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} a \sqrt{\frac{2k-1}{k}} x + b \sqrt{\frac{2k-1}{k}} y + \sqrt{\frac{k}{2k-1}} (l_{\text{внешн}} + l_{\text{внутр}}) = \\ = \sqrt{\frac{k}{2k-1}} (v_{\text{внешн}} + v_{\text{внутр}}). \end{aligned} \quad (14.12)$$

п. 5. Общие замечания. Часто считают, что на твердых точках имеются как бы ориентированные внешние направления, не требующие ориентирной поправки z . Если для этого имеется некоторое основание при вставке одной точки, то при совместной вставке нескольких точек такое игнорирование ориентирной поправки определенно нарушает строгость уравнивания. Поэтому при вставке одной точки редуцирование (освобождение от z) рекомендуется, а при совместной вставке двух и более точек оно является обязательным.

Система уравнений (14.7), когда с твердой точки берется два внешних направления на обе совместно вставляемые точки, не пригодна для непосредственного построения, поскольку в последнем уравнении этой системы имеется четыре неизвестных.

§ 15. УРАВНИВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРИ ВСТАВКЕ ОДНОЙ ТОЧКИ

п. 1. Общие установки. В § 10 мы рассматривали уравнения линий положения и превращение их в обычные уравнения погрешностей косвенных (посредственных) наблюдений. При этом мы исходим из уравнений прямых, выраженных в нормальной форме (10.11), где угол α является дирекционным углом нормали к линии положения.

При геодезической триангуляционной вставке точек имеют место линии положений направлений с определенно направленным градиентом g . В уравнения (10.1) как раз и входит дирекционный угол α градиентов. Для упрощения построений удобнее условно повернуть градиент на 90° до совмещения с его линией положения в определенную сторону. Это делается обычно в сторону вращения часовой стрелки. Тогда вместо α в уравнениях (10.1) мы должны взять $\alpha - 90^\circ$, чтобы перейти к дирекционным углам самих линий положения, вернее к дирекционным углам повернутых на 90° по движению часовой стрелки градиентов, и мы получаем вместо уравнения (10.1) уравнение прямой в обычной нормальной форме

$$x \sin \alpha_i - y \cos \alpha_i - d_i = 0 \quad (15.1)$$

и затем вместо уравнения погрешности (10.2) такое:

$$x_0 \sin \alpha_i - y_0 \cos \alpha_i - d_i = d_{v,i}. \quad (15.2)$$

Умножая это последнее на свой градиент g_i , будем иметь

$$g_i \sin \alpha_i x_0 - g_i \cos \alpha_i y_0 - g_i d_i = g_i d_{v,i},$$

или, согласно равенству (5.3),

$$g_i \sin \alpha_i x_0 - g_i \cos \alpha_i y_0 - l_i = l_{v,i}, \quad (15.3)$$

где l_i и $l_{v,i}$ — угловые отклонения, обычно фигурирующие в начальных уравнениях погрешности триангуляционных вставок.

В соответствии с этим мы заключаем, что коэффициенты a и b в этих уравнениях погрешности представляют собой либо

$$a = g \sin \alpha, \quad b = -g \cos \alpha, \quad (15.4)$$

когда градиент повернут на 90° по часовой стрелке и α является направлением повернутого таким образом градиента, либо

$$a = g \cos \alpha, \quad b = g \sin \alpha, \quad (15.5)$$

когда α является дирекционным углом действительного направления градиента.

Предыдущие выводы мы основывали на неповернутых нормалях (градиентах) к линиям положения. Кроме того, мы принимали во внимание некоторый безличный вес p . Таким весом в уравнениях (15.3) следует признать

$$p = g^2. \quad (15.6)$$

При сложении весов $p = g^2$, согласно § 10, мы будем считать, что ось U параллельна элементу q неповернутых на 90° градиентов, а при повернутых градиентах параллельной элементу q мы будем считать ось V , чтобы сохранить общность со всем предыдущим.

п. 2. Построения при повернутых градиентах. Мы находим графически непосредственно не наиболее вероятные поправки к предварительным координатам в определенной

координатной системе, а само наиболее вероятное положение вставляемой точки, независимое от направления координатных осей. Попутно нами получаются весовые элементы Q и q и направление осей эллипса погрешностей. Если брать повернутые на 90° по часовой стрелке градиенты, то, согласно пп. 2 и 3 § 10, для $2Q$ и $2q$ мы имеем те же выражения (10.10) с заменой p через g^2 , т. е.

$$2Q = [g^2], \quad \overrightarrow{2q} = [\overrightarrow{g^2}]. \quad (15.7)$$

Так же, согласно (10.6), определяем T .

$$\vec{T} = [pd] = [g^2 d] = [g\vec{l}]. \quad (15.8)$$

Вектор T нужно повернуть на 90° против движения часовой стрелки и отложить на нем отрезки E и F , вычисленные согласно равенствам (10.14). После деления угла 2γ пополам через точку E надо провести прямую, параллельную построенному элементу q , считая ее осью V , а через F провести прямую, перпендикулярную к q , как ось U , параллельную q при неповернутых градиентах.

Градиентами двух линий положения, эквивалентных данным и направленных по осям U и V , будут служить

$$g_u = \sqrt{Q - q}; \quad g_v = \sqrt{Q + q}. \quad (15.9)$$

Весами направлений вдоль осей U и V , согласно п. 3 § 10, будут

$$p_u = p_{\max} = g_v^2 = Q + q; \quad p_v = p_{\min} = g_u^2 = Q - q. \quad (15.10)$$

п. 3. Учет ориентирной поправки. Согласно предыдущему параграфу, исключение ориентирной поправки вводит новое дополнительное фиктивное уравнение погрешностей с отрицательным весом, которое, очевидно, должно представляться некоторой мнимой линией положения.

Обозначим градиент линии положений, представленной последним уравнением в системе (14.3), через t . Это будет обозначать, что либо

$$[a] = t \sin \alpha_t \text{ и } [b] = -t \cos \alpha_t, \quad (15.11)$$

когда все градиенты повернуты на 90° по движению часовой стрелки, либо

$$[a] = t \cos \alpha_i \text{ и } [b] = t \sin \alpha_i, \quad (15.12)$$

когда градиенты сохраняют свои направления (в сторону возрастания функции).

Так или иначе, согласно равенствам (15.4) или (15.5), имеем равенство

$$[\vec{t}] = [\vec{g}], \quad (15.13)$$

т. е. вектор t является геометрической суммой всех n градиентов внутренних направлений на вставляемой точке.

Этот вектор, или градиент, t с отрицательным весом учитывается как при получении арифметической суммы $2Q$, так и геометрической суммы $2q$ в виде слагаемого $-\frac{t^2}{n}$. Знак минус означает, что при получении арифметической суммы нужно вычесть $\frac{t^2}{n}$, а при получении геометрической суммы, т. е. при построении квадратичного полигона, следует удвоенный угол $2\alpha_i$ изменить на $\pm 180^\circ$ и таким образом сторону, равную $\frac{t^2}{n}$, направить по обратному $2\alpha_i$ направлению.

При построении вектора отклонений T градиент t не включается, поскольку мы условились заранее редуцировать свободные члены, согласно указаниям предыдущего параграфа.

При редуцировании внешних направлений, согласно уравнениям (14.9) и (14.2), в слагаемом, касающемся данного направления и его градиента g , коэффициенты σ учитываются только при получении Q и q или коэффициенты 2σ — при получении $2Q$ и $2q$.

Вообще следует считать, что

$$Q = [\sigma g^2], \quad \vec{q} = [\sigma \vec{g}^2], \quad (15.14)$$

где названный нами коэффициент σ весовых элементов равен:

$\frac{1}{2}$ — при односторонних внутренних или внешних направлениях,

$-\frac{1}{2n}$ — при наличии n внутренних направлений,
 $\frac{k-1}{2k}$ или $\frac{2k-1}{2k}$ — при условиях, сопутствовавших выводам
уравнений (14.9) и (14.12).

Коэффициенты σ в построении вектора отклонений T не участвуют. Они касаются только весовых элементов Q и q , отсюда и их название. Введение их искусственное, облегчающее вычисление и построение, особенно последнее.

При построении вектора T включаются только оперативные веса, если они есть, т. е. веса при наличии различной учитываемой точности направлений.

п. 4. Контроль уравнивания. Построение T и элементов Q и q в предыдущих пунктах ведется при выполнении условия способа наименьших квадратов

$$[l_v l_v] = [g^2 d_v^2] = \min. \quad (15.15)$$

Это значит, что минимальной суммой квадратов должна быть сумма квадратов угловых отклонений l при одинаковых весах, равных единице, или сумма квадратов линейных отклонений при весах, равных квадратам градиентов.

Это построение, согласно равенству (10.16), дает контроль

$$T_0 = [l_v l_v] = [g^2 d_v d_v] = 0. \quad (15.16)$$

Кроме того, согласно равенству (10.18), мы имеем контроль

$$[l_v l_v] = [ll] - Tt, \quad (15.17)$$

где t имеет то же значение, что и в равенстве (10.18), l_v — остаточные угловые отклонения.

п. 5. Погрешности и веса вставки. Сюда целиком применимы выводы § 11.

При наличии смешанных засечек, или внутренних и внешних направлений, средняя квадратичная ошибка направления с весом, равным единице, выражается равенством

$$m^2 = \frac{[l_v l_v]}{n-3}, \quad (15.18)$$

где n — число всех измеренных направлений — внешних и внутренних.

При наличии одних только внешних направлений, т. е. при прямой многократной засечке, обычно вместо выражения (15.18) берут такое:

$$m^2 = \frac{[l_r l_v]}{n - 2}, \quad (15.19)$$

полагая, что третьей неизвестной в виде ориентирной поправки нет.

Сумма $[l_r l_v]$ может быть вычислена с контролем по равенству (15.17).

Далее фигурируют Q и q и весовые коэффициенты.

Величина m^2 делится на веса $Q + q$ и $Q - q$; получаются средние квадратичные погрешности как элементы эллипса погрешностей, и т. п. (см. § 11).

§ 16. ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНИЙ ПОЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

п. 1. Решение задачи Потенота. В настоящем параграфе кратко остановимся на некоторых задачах, которые решены или предложены нами в связи с применением линий положения и были частично опубликованы.

К числу таких задач относится, во-первых, способ решения задачи Потенота-Снелиуса, которую для краткости будем просто называть „потенотом“. Мы предлагаем решать потенот путем последовательного приближения, исходя из графического определения координат искомой точки по плану или по снимку. Найдя способом Болотова положение искомой точки среди трех опорных точек, мы, как обычно, определяем градиенты направлений и строим градиенты углов, согласно фиг. 10 и 11 (см. стр. 38 и 40); получаем инверсионный треугольник. По предварительным приближенным координатам находим по четырехзначным таблицам первое приближение значений измеренных двух углов α и β между направлениями на опорные точки 1 и 2 и 2 и 3. Определяя разность между измеренными значениями этих углов и их первым приближением, получаем первые поправки $\delta_1 \alpha$ и $\delta_1 \beta$ углов α и β . Затем по формуле (5.2) находим линейные отклонения d_α и

d_β двух линий положения, и в масштабе 1:100 или 1:500 в зависимости от того, насколько грубо было первое приближение, строим смещение двух линий положения от первого положения. В пересечении их находим второе приближение, затем уже по шестизначным или пятизначным таблицам определяем вторые поправки $\delta_2 \alpha$ и $\delta_2 \beta$ и наносим второе перемещение линий положений в масштабе 1:10 или 1:50. В пересечении смещенных линий положения получаем третье приближение, которое может быть окончательным, если при вычислении шестизначными или семизначными таблицами $\delta_3 \alpha$ и $\delta_3 \beta$ окажутся менее $1/10$ точности измерения углов. В противном случае придется находить четвертое приближение на чертеже в масштабе 1:2—1:10.

Точность потенота зависит от площади инверсионного треугольника. Если привлечь третий угол γ после приведения трех углов к горизонту ($\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$) или после уравнивания направлений, то третья линия положений должна всегда проходить через пересечение двух других. Это должно служить контролем построения и вычисления поправок. При независимом измерении трех углов не следует их уравнивать, а лучше построить треугольник погрешности из трех линий положений и его уравнивать либо сложением сосредоточенных весов его вершин (см. п. 3 § 12), либо нахождением элементов Q и q . Последние дадут возможность определить точность найденного решения потенота положения точки.

п. 2. Отыскание потерянного центра. Вместо применения способа Марека при отыскании потерянного центра проще применить построение смещений двух линий положения, отвечающих двум углам, известным ранее и затем измеренным на выбранной точке, по предположению довольно близко находящейся от зарытого центра. Смещение, как и в предыдущем пункте, определяется с помощью градиентов этих линий положения, построенных для них направлений и разности между известными, полученными ранее значениями углов и их измеренными значениями с приближенной точки. Здесь вычисления минимальные и достаточны с небольшой относительной точностью.

п. 3. Определение смещений в горизонтальной плоскости. С технической целью иногда требуется определить небольшое смещение точек, происходящее, например, от оползневых явлений или от оседания поверхности под влиянием подземных горных разработок полезного ископаемого. Когда эти точки трудно доступны для промеров расстояний до них лентами или рулетками, наиболее рациональным следует признать предложенный нами впервые на оползнях Крыма метод обратных засечек с применением линий положений замеренных повторно на смещающейся точке углов между направлениями на заведомо неподвижные точки. Заметим, что при повторном независимом определении координат точки обычными методами необходимо знать точное положение опорных точек. Между тем предложенный дифференциальный метод дает с высокой абсолютной точностью небольшое смещение при сравнительно небольшой относительной точности, а тем более небольшой абсолютной точности в положении опорных и определяемых точек. При точности координат опорных и смещающихся точек в метрах, точность определения смещения достигает 1 мм. Поэтому достаточно на планшет с помощью кипрегеля нанести опорные точки и все оползневые или изучаемые точки, чтобы получить градиенты всех замеряемых углов и строить фигуры смещений в крупном масштабе, от 1:1 до 1:10, с относительной точностью около 1:1000, что при смещении даже в 1 м даст ошибку в 1 мм.

Фигуры смещения строятся на основании разности в значениях углов (измеряемых заранее через известный промежуток времени, определяемый интенсивностью процесса) и раз установленной величины и направления градиентов углов (линии положений), согласно фиг. 10.

Измеряемые на каждой точке углы выбираются такие, которые дают линии положений с наибольшими градиентами и пересекающиеся под углами, близкими к 90° , т. е. дающие в пересечении наибольший сосредоточенный вес π , согласно равенству (12.5).

Для контроля и большей уверенности можно привлечь третью линию положения, третий угол между направления-

ми на ближайшие озорные точки. Тогда получится треугольник смещения, который придется уравнивать.

При многих линиях положений, чего обычно не должно быть, придется уравнивать, опуская перпендикуляры из одной вершины фигуры смещения на все ее остальные стороны, как указано в пп. 2 и 3 § 10, и принимая веса p равными квадрату градиентов линий положений.

п. 4. Ординаты створа. Обычно при определении смещения точек на поверхности разбивают створы и на них через определенные интервалы устанавливают реперы, смещение которых определяют.

Перемещение этих реперов вдоль створа определяется непосредственно точными промерами расстояния между ними, в том числе и начальным неподвижным репером.

Смещение поперек створа или определение ординат реперов довольно сложно, и часто его избегают. Предпочитают, если это необходимо, разбивать взаимно-перпендикулярную сеть створов. Тогда измерение расстояний между реперами по одним створам будет служить определением ординат для других перпендикулярных створов.

Мы предлагаем для определения ординат применить линии положения углов, близких к 180° или к 0 , у которых градиенты равны арифметической сумме или разности градиентов направлений, составляющих стороны таких углов.

Пусть некоторый створ имеет n одинаковых пролетов с двумя конечными неподвижными реперами A и B и $n-1$ промежуточными реперами, смещение которых определяется, и пусть длина пролета равна l м.

Если стаг с теодолитом на первом после A репере и измерить угол B_1 между направлениями на начальный репер A и конечный B , то градиент g_1 линии положения этого угла будет равен

$$\frac{206.3}{l} + \frac{206.3}{(n-1)l} \text{"/мм} = g + \frac{1}{n-1} g = \frac{n}{n-1} g,$$

$$g_1 = \frac{n}{n-1} g, \quad (16.1)$$

где $g = \frac{206.3}{t}$ " / мм и является как бы градиентом одного пролета.

Условимся считать положительными градиентами те, которые идут вправо от направления $\overrightarrow{AB}$. Тогда, чтобы знак ординаты отвечал знаку угла β , находямому по формуле

$$\beta = 180^\circ - B, \quad (16.2)$$

углом B следует считать угол, измеряемый слева по ходу. Ордината y_1 первого репера выражается равенством

$$y_1 = \frac{\beta_1}{g_1} = \frac{n-1}{n} \frac{\beta_1}{g} = \frac{n-1}{n} \Delta y_1. \quad (16.3)$$

Далее на втором репере измеряем слева лежащий угол B_2 между направлениями на задний ближайший (соседний) первый репер и конечный репер B . Градиент этого угла выражается равенством

$$g_2 = g + \frac{1}{n-2} g = \frac{n-1}{n-2} g. \quad (16.4)$$

Вводим угол $\beta_2 = 180^\circ - B_2$, согласно равенству (16.2).

Для определения ординаты y_2 второго репера нужно еще определить угол $\beta'_2 = 180^\circ - B'_2$, где B'_2 — угол, отвечающий тому положению ближайшего, первого репера, когда его ордината равна нулю (он находится в створе). Значит, $B_2 - B'_2 = y_1 g$; $B'_2 = B_2 - y_1 g$,

$$\beta'_2 = \beta_2 + y_1 g. \quad (16.5)$$

В связи с этим

$$y_2 = \frac{\beta'_2}{g_2} = \frac{\beta_2 + y_1 g}{\frac{n-1}{n-2} g} = \frac{n-2}{n-1} (y_1 + \Delta y_2), \quad (16.6)$$

где $\Delta y_2 = \frac{\beta_2}{g}$.

Затем измеряем угол B на третьем репере между направлением на второй репер и на репер B , находим $\beta_3 = 180^\circ - B_3$, $\Delta y_3 = \frac{\beta_3}{g}$ и выражаем y_3 :

$$y_3 = \frac{n-3}{n-2} (y_2 + \Delta y_3), \quad (16.7)$$

и т. д.;

$$y_i = \frac{n-i}{n-i+1} (y_{i-1} + \Delta y_i), \quad (16.8)$$

где

$$\Delta y_i = \frac{\beta_i}{g}; \quad \beta_i = 180^\circ - B_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Ординаты будут для второй половины створа получаться точнее, если идти от конечного репера B к середине, измеряя всегда угол, как и в первой половине, между направлениями на ближайший (соседний) задний репер и на конечный передний репер A .

Вес ординаты выражается равенством:

$$\frac{1}{p_i} = (n-1)^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-2)^2} + \dots + \frac{1}{(n-i+1)^2} \right), \quad (16.9)$$

что для средней ординаты при $i = \frac{1}{2}n$ даст примерно

$$\sqrt{\frac{1}{p_i}} = \frac{1}{2} \sqrt{n} \quad (16.10)$$

и ошибку ординаты, выражаемую равенством:

$$m_{1/2, n} = \frac{1}{2} \sqrt{n} \frac{m''_{\beta}}{g} = \frac{1}{2} \sqrt{n} \frac{m''_{\beta} l}{206.3} \text{ мм.} \quad (16.11)$$

При $l = 20$ м

$$m_{\beta} = \pm 5'', \quad n = 16, \quad m_s = \pm 2 \cdot \frac{5}{10} = \pm 1 \text{ мм.}$$

Таким способом можно определять ординаты основных реперов, расположенных более редко. В сгущенной части ординаты дополнительных реперов следует определять отдельно по отношению к основным реперам.

При относительно небольшом расстоянии между основными реперами ординаты промежуточных реперов можно измерять и непосредственно обычным способом, визируя теодолитом с основных реперов.

Можно также на продолжении створа далеко выставить миру. И если расстояние до этой точки в 10—20 раз больше длины всего створа, то можно непосредственно измерять малые острые углы δ_i между направлением на точку и на ближайший передний репер. Измерение надо вести, начиная с репера A , если точка за репером B_i (получаем угол δ_i), и кончая репером $n-1$ (угол δ_n).

При этом

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \Delta y_1 = \frac{\delta_1}{g}; \quad y_2 = y_1 + \Delta y_2 = y_1 + \frac{\delta_2}{g}; \dots \\ y_i &= \sum_{l=1}^{l=i} \Delta y_l; \quad \Delta y_l = \frac{\delta_l}{g}; \quad y_n = 0; \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

$g = \frac{206.3}{l}''/\text{мм}$, если пролет l выражен в м.

Для измерения углов δ удобно приспособить тангенциальный винт на горизонтальном лимбе с делениями на барабане в 0.0001.

Тогда градиент g должен быть заменен просто $\frac{1}{l}$, и Δy_i выразится так:

$$\Delta y_i = 0.1 \delta_i l \text{ мм}, \quad (16.13)$$

где δ_i — число делений барабана, и l выражено в м.

п. 5. Восстановление или перенос точек в натуру. В п. 2 мы коснулись отыскания потерянного центра с помощью линий положения. Этот же метод удобен для переноса точек в натуру или точного восстановления их согласно имеющимся координатам. Такой перенос и восстановление могут потребовать большой точности измерения. Задача

состоит в том, чтобы по данным с аналитической точностью прямоугольным или полярным координатам наметить на местности точку без потери заданной точности.

Первоначально наметить точку мы можем лишь единичными двумя измерениями или отложениями, например, провесить две прямые линии под измеренными (отложенными) углами или провесить одну линию и отложить данную длину. Ясно, что при этом точность будет недостаточна, поскольку мы не могли применить многократность измерений, повышающую точность, а главное не использовали избыточных измерений от нескольких твердых опорных точек, которые также имеют некоторые ошибки в своем положении. Влияние этих ошибок можно ослабить лишь привлечением нескольких твердых точек, дающим большую уверенность в получаемых результатах.

Остается единственный путь: тем или иным способом наметить или нанести на местности интересующую нас точку. Она будет иметь предварительное приближенное положение, из которого мы должны исходить. Можно с достаточной точностью определить координаты предварительного положения, произведя необходимые многократные и избыточные измерения, и после сравнения этих координат с данными передвинуть точку на местности на разность координат.

Но чаще оказывается целесообразнее сопоставить не координаты, а непосредственно измеряемые величины, поскольку они обычно бывают даны частично или полностью для восстанавливаемой или вновь переносимой с проекта точки. Такими измеряемыми величинами могут быть не только углы прямых и обратных засечек, что предпочтительнее, но и расстояния. Последние не всегда удобно откладывать, чаще их приходится откладывать не по горизонтальному проложению, учитывая наклон. Поэтому угловые засечки предпочтительнее, но они не всегда доступны в достаточном количестве при закрытой местности.

Наметив точку на местности, измеряем с достаточной точностью данные для нее углы и расстояния и сопоставляем заданные значения с измеренными для предваритель-

ного положения. Разности между данными и измеренными значениями с помощью градиентов этих величин переводятся в линейные отклонения d линий положений их, что позволяет начертить фигуру погрешности в крупном масштабе и даже в натуральную величину, если измерения были точные и предварительное положение близко к истинному. Как находить градиенты и направления их и линий положения — мы знаем. Напомним, что градиент расстояния равен единице. При наличии разноименных линий положения, т. е. расстояний и углов, следует правильно установить их веса обратно пропорционально квадратам возможных линейных перемещений линий положения или ошибкам этих перемещений.

Фигура погрешности или „поправочная“ фигура уравнивается путем сложения линий положений; находится уравненное положение, в которое на местности и переносится вставляемая точка. Направление и величину вектора переноса легко снять с чертежа фигуры погрешности.

Наличие фигуры погрешности позволяет наглядно оценить точность нанесения точки и быстро численно выразить эту точность, согласно сделанным выше указаниям.

§ 17. ИССЛЕДОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАСЕЧЕК

1. Многократные обратные засечки. Многократные обратные засечки получаются или путем измерения отдельных углов между направлениями на твердые точки, что предпочтительнее, или, обычно, путем измерения и уравнивания на станции направлений, из которых уже получаются углы во всех комбинациях.

В этом последнем случае линии положения полученных углов подчиняются следующим условиям: линии положения фигуры погрешности, относящиеся к трем углам между каждыми тремя направлениями, образующими своими градиентами инверсионный треугольник, пересекаются по три в одной точке, называемой нами тройной; линии же положения, отвечающие двум углам, не имеющим общей стороны (направления), пересекаются в двойных точках. Тройные точки отвечают отдельным „потенотам“.

При измерении n направлений на n твердых точках мы имеем в разных комбинациях p_n различных углов и соответствующих им линий положения, которые дают N_n''' тройных и N_n'' двойных точек пересечения.

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2}(n-1)n, \\ N_n''' &= \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n, \\ N_n'' &= \frac{1}{8}(n-3)(n-2)(n-1)n. \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

Например, при $n=4$

$$p_4=6; \quad N_4'''=4; \quad N_4''=3; \quad N_4=N_4''+N_4'''=7;$$

при $n=5$

$$p_5=10, \quad N_5'''=10; \quad N_5''=15; \quad N_5=25.$$

Доказана такая теорема:

„Точка приложения равнодействующей сосредоточенных весов тройных точек совпадает с точкой приложения равнодействующей двойных точек“.

При этом в случае четырех направлений сумма весов тройных точек равна утроенной сумме весов двойных точек, а вообще

$$\left. \begin{aligned} P_n''' &= \frac{3}{n-3} P_n'', \\ P_n &= P_n''' + P_n'' = \frac{n}{n-3} P_n'' = \frac{n}{3} P_n''', \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

где n — число направлений, как в формулах (17.1);

P_n''' — сумма сосредоточенных весов тройных точек;

P_n'' — сумма таких же весов двойных точек;

P_n — сумма сосредоточенных весов всех точек пересечения фигуры погрешности, или вес уравненного положения точки.

Четыре тройные точки при четырех уравненных направлениях дают четыре возможных потенота.

Это не мешает запомнить, так как нередко рекомендуется решать по крайней мере два потенота из четырех, хотя построить точки, отвечающие остальным трем, при решении только одного потенота не составляет никакого труда и придает решению полную наглядность и стройность. Среднее же из двух потенотов может дать худший результат, чем один с точкой, наиболее близкой к центру фигуры погрешности, построение которой в этом отношении создает полную определенность.

Метод линий положений позволяет выбрать направления, наилучшие с точки зрения повышения конструктивного веса данной вставки обратными засечками.

п. 2. Получение круга положений в потеноте. Наиболее выгодной вставкой будет такая, при которой получается круг положений. Для примера, как получить круг положений, возьмем потенот с тремя отдельно измеренными углами.

На фиг. 44 даны три твердые точки A, B и C и вставляемая потенотом точка O , положение которой на плане примерно определено заранее. Отдельно измерены углы $1, 2$ и 3 . Они не уравнены за условие горизонта.

Измерив на плане примерные расстояния $s_A = \overline{OA}$; $s_B = \overline{OB}$ и $s_C = \overline{OC}$, мы, согласно фиг. 10 (см. стр. 38), определим градиенты g_A, g_B и g_C направлений и затем построим градиенты g_1, g_2 и g_3 измеренных углов. Получится инверсионный треугольник $A'B'C'$ со сторонами g_1, g_2 и g_3 и углами $\varphi_{2,3}, \varphi_{1,3}$ и $\varphi_{1,2}$.

Для того чтобы получился круг положений, необходимо привести элемент q к нулю. Это будет тогда, когда квадратичный полигон, составленный из квадратов градиентов, помноженных на некоторые множители λ как оперативные

веса, сомкнется, т. е. представит в данном случае треугольник.

Для такого квадратичного треугольника мы будем иметь пропорциональность сторон и синусов углов, т. е.

$$\lambda_1 g_1^2 : \lambda_2 g_2^2 : \lambda_3 g_3^2 = \sin 2\varphi_{2.3} : \sin 2\varphi_{1.3} : \sin 2\varphi_{1.2}. \quad (17.3)$$

Углы при построении квадратичного полигона удваивались.

Инверсионный треугольник $A'B'C'$ дает пропорциональность:

$$g_1^2 : g_2^2 : g_3^2 = \sin^2 \varphi_{2.3} : \sin^2 \varphi_{1.3} : \sin^2 \varphi_{1.2}. \quad (17.4)$$

Чтобы перейти от нее к выражению (17.3), очевидно, следует принять множители λ_1 , λ_2 и λ_3 равными котангенсам углов $\varphi_{2.3}$, $\varphi_{1.3}$ и $\varphi_{1.2}$, так как $\sin 2\varphi_{2.3} = 2 \sin^2 \varphi_{2.3} \cdot \operatorname{ctg} \varphi_{2.3}$, и т. д.

Таким образом котангенсы углов инверсионного треугольника, вернее, величины, им пропорциональные, явятся теми оперативными весами противоположащих линий положений, которые обращают эллипс погрешности в круг.

Весами линий положения, участвующими в сложении положений, явятся

$$p_1 = g_1^2 \operatorname{ctg} \varphi_{2.3}, \quad p_2 = g_2^2 \operatorname{ctg} \varphi_{1.3}, \quad p_3 = g_3^2 \operatorname{ctg} \varphi_{1.2}; \quad (17.5)$$

$$\overleftrightarrow{2q} = \overleftrightarrow{p_1} + \overleftrightarrow{p_2} + \overleftrightarrow{p_3} \text{ должно равняться нулю.}$$

$$d_m^2 = \frac{p_1 d_{0.1}^2 + p_2 d_{0.2}^2 + p_3 d_{0.3}^2}{3 - 2} = [pd_0^2]. \quad (17.6)$$

Радиус M круга погрешности выразится так:

$$M^2 = \frac{[pd_0^2]}{\frac{1}{2} [p]}. \quad (17.7)$$

п. 3. Точка с кругом положений в потеноте. Задача состоит в том, чтобы на площади треугольника трех твердых точек найти такую, которая определялась бы потеном по этим твердым точкам как точка с кругом положений.

ний. Эта точка должна удовлетворять одновременно двум равенствам отношений (17.3) и (17.4), приведенным в предыдущем пункте. Разделив почленно выражение (17.3) на (17.4), представленное в виде:

$$g_1 : g_2 : g_3 = \sin \varphi_{2.3} : \sin \varphi_{1.3} : \sin \varphi_{1.2}, \quad (17.8)$$

получим:

$$g_1 : g_2 : g_3 = \cos \varphi_{2.3} : \cos \varphi_{1.3} : \cos \varphi_{1.2}. \quad (17.9)$$

Совместное существование выражений (17.8) и (17.9) возможно лишь при равностороннем инверсионном треугольнике, когда его углы $\varphi_{2.3}$, $\varphi_{1.3}$ и $\varphi_{1.2}$ равны между собой. Значит, градиенты углов g_1 , g_2 , и g_3 должны быть между собой равны (см. фиг. 44).

В п. 5 § 5 мы имели аналитическое выражение (5.12) для градиента угла. Из этого выражения следует, что равенство $g_1 = g_2 = g_3$ должно быть заменено таким:

$$\frac{a}{s_B \cdot s_C} = \frac{b}{s_A \cdot s_C} = \frac{c}{s_A \cdot s_B}, \quad (17.10)$$

где a , b и c — стороны „твердого“ треугольника, и s_A , s_B и s_C — расстояния от вставляемой точки до „твердых“ вершин этого треугольника.

Умножая равенства (17.10) на произведение s_A , s_B , s_C , мы приходим к следующему равенству отношений:

$$s_A : s_B : s_C = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}. \quad (17.11)$$

Удовлетворение последнего равенства требует довольно сложного построения. Вкратце это построение таково. Точкой D делим сторону $AC = b$ на части AD и DC , пропорциональные $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}$. Далее на продолжении AC находим точку M с применением гармонического отношения или гармонического среднего

$$\frac{1}{DM} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{CM} \right). \quad (17.12)$$

Нужно отметить, что при $c < a$ точка M получается на продолжении CA за точкой A . Если же $c > a$, то точка M получается за точкой C .

Так же точкой E делим сторону $\overline{AB} = c$ на части $\overline{AE}$ и $\overline{EB}$, пропорциональные $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, и на продолжении AB в соответствующей стороне находим N , подчиненную условию

$$\frac{1}{\overline{EN}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\overline{AN}} + \frac{1}{\overline{BN}} \right). \quad (17.13)$$

Далее на отрезках $\overline{DM}$ и $\overline{EN}$ как на диаметрах строим окружности, пересечение которых внутри треугольника ABC даст искомую точку P , для которой

$$\overline{PA} : \overline{PB} : \overline{PC} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

или

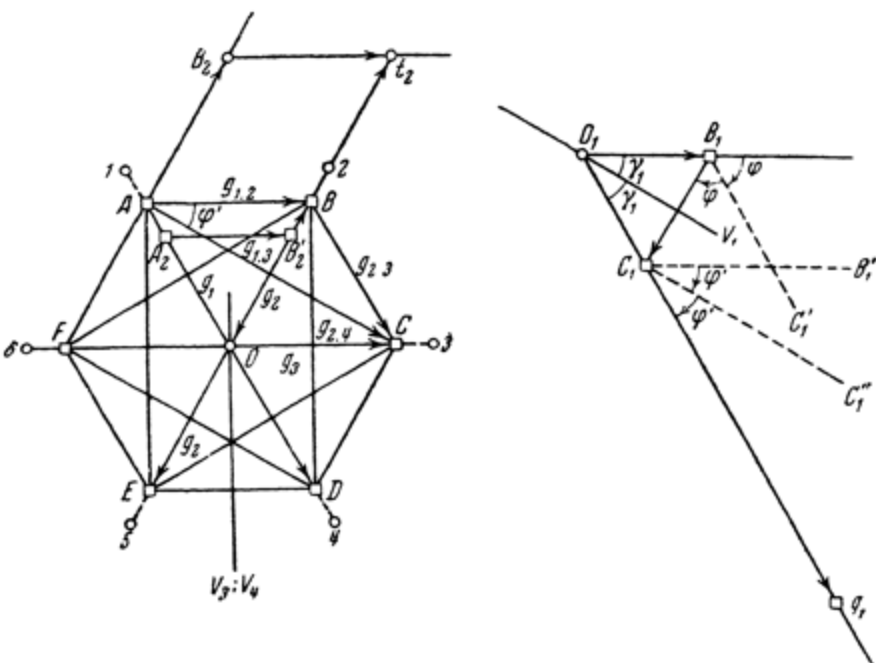
$$\overline{PA} \cdot a = \overline{PB} \cdot b = \overline{PC} \cdot c. \quad (17.14)$$

п. 4. Потенот в сети равносторонних треугольников.
В качестве системы твердых точек возьмем правильный шестиугольник с его вершинами $1, 2, 3, 4, 5$ и 6 (фиг. 45) и со вставляемой точкой в центре O . У такой фигуры многие градиенты равны между собой; это облегчает построение, но не нарушает ни принципов, ни приемов использования градиентов для анализа.

Градиенты внутренних направлений на фиг. 45 $g_1 = \overrightarrow{OA}$, $g_2 = \overrightarrow{OB}, \dots, g_6 = \overrightarrow{OF}$ равны между собой и равны g . Тому же будут равны градиенты $g_{1,2} = \overrightarrow{AB}$, $g_{2,3} = \overrightarrow{BC}, \dots, g_{6,1} = \overrightarrow{FA}$ углов между направлениями 1 и 2 , 2 и 3 , 3 и 4 и т. д.

Градиенты же $g_{1,3} = \overrightarrow{AC}$, $g_{2,4} = \overrightarrow{BD}, \dots, g_{6,2} = \overrightarrow{FB}$ углов между направлениями через одну точку равны $\sqrt{3}g$, в то время как градиенты $g_{1,4} = \overrightarrow{AD}$, $g_{2,5} = \overrightarrow{BE}$, $g_{3,6} = \overrightarrow{CF}, \dots$ углов, равных 180° , равны $2g$.

Возьмем потенот с тремя самостоятельно измеренными углами $1-0-2$, $2-0-3$ и $1-0-3$ (вставка 1) с градиентами $g_{1,2}=g_{2,3}=g$ и $g_{1,3}=\sqrt{3}g$, составляющими инверсионный треугольник ABC . Эта вставка 1 даст $Q_1=\frac{5}{2}g^2$ и



Фиг. 45

$\overleftrightarrow{q_1} = \frac{1}{2}\overleftrightarrow{g^2_1} + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{g^2_2} + \frac{3}{2}\overleftrightarrow{g^2_3}$. Построение $\overleftrightarrow{q_1}$ произведено отдельно справа на фиг. 45.

Проведено $\overline{O_1B_1}$ параллельно AB (градиенту $g_{1,2}$) и отложено $\overline{O_1B_1} = \frac{1}{2}g^2_{1,2} = \frac{1}{2}g^2$. Далее проведено $\overline{B_1C_1'}$ параллельно $\overline{BC}$ и удвоен угол φ .

Получено направление $\overrightarrow{B_1C_1}$, на котором отложено

$$\frac{1}{2}g^2_{2,3} = \frac{1}{2}g^2 = \overrightarrow{B_1C_1}.$$

Проведено $C_1\overline{B_1'}$ параллельно $\overline{AB}$ и C_1C_1'' параллельно $\overrightarrow{AC}=g_{1.3}$; удвоен угол φ' . Получено направление $\overrightarrow{C_1q_1}$, на котором отложено $\overrightarrow{C_1q_1}=\frac{1}{2}g_{1.3}^2=\frac{3}{2}g^2$. Тогда q_1 соединена с O_1 . Замыкающая $\overrightarrow{O_1q_1}$ является геометрическим элементом q_1 вставки I .

В силу того, что угол $\varphi=60^\circ$, $\varphi'=30^\circ$ и $\overline{O_1B_1}=\overline{B_1C_1}$, точки O_1 , C_1 и q_1 лежат на одной прямой, и $\overrightarrow{O_1C_1}=\overrightarrow{O_1B_1}=\frac{1}{2}g^2$.

Значит, $\overleftrightarrow{O_1q_1}=\overleftrightarrow{q_1}=\frac{1}{2}g^2+\frac{3}{2}g^2=2g^2$.

Разделив угол $B_1O_1q_1=2\gamma_1$ пополам, получаем направление вектора q_1 , или оси V_1 , поскольку все градиенты повернуты на 90° . Ось V_1 параллельна градиенту $g_{1.3}$.

$$p_{\min}=Q_1-q_1=\frac{5}{2}g^2-2g^2=\frac{1}{2}g^2; \quad p_{\max}=Q_1+q_1=\frac{9}{2}g^2;$$

$$\frac{1}{P_1}=\frac{1}{p_{\min}}+\frac{1}{p_{\max}}=\frac{20}{9g^2}; \quad P_1=\frac{9}{20}g^2=0.45g^2;$$

$$\Pi_1=(Q_1-q_1)(Q_1+q_1)=\frac{9}{4}g^4=2.25g^4.$$

п. 5. Вставка 2 с измеренными направлениями. Возьмем тот же потенот, что и в вставке I , но с измеренными совместно направлениями I , 2 и 3 .

$$Q_2=\frac{1}{2}g^2+\frac{1}{2}g^2+\frac{1}{2}g^2-\frac{1}{6}t_2^2; \quad \overleftrightarrow{q_2}=\frac{1}{2}g_1^2+\frac{1}{2}g_2^2+ \\ +\frac{1}{2}g_3^2-\frac{1}{6}t_2^2.$$

Получим сначала t_2 , согласно п. 3 § 15. Это будет замыкающая Ot_2 полигона OAB_2t_2 на фиг. 45. $\overrightarrow{OA}=g_1$; $\overrightarrow{AB_2}$ равна и параллельна $\overrightarrow{OB}=g_2$; $\overline{B_2t_2}$ равна и параллельна $\overrightarrow{OC}=g_3$.

Благодаря равенству градиентов g_1 , g_2 и g_3 получаем, что

$$t_2 = 2g; \quad \frac{1}{6} t_2^2 = \frac{2}{3} g^2.$$

Значит,

$$Q_2 = \frac{3}{2} g^2 - \frac{2}{3} g^2 = \frac{5}{6} g^2.$$

Квадратичный полигон для q_2 для первых трех слагаемых дает замкнутый равносторонний треугольник OA_2B_2' , т. е. в сумме нуль; остается одно четвертое слагаемое, равное $-\frac{1}{6} t_2^2 = -\frac{2}{3} g^2$, которое направлено по $\overrightarrow{OE}$ или $\overrightarrow{OB}$ безразлично и после деления угла 2γ пополам, так как в данном случае $2\gamma_2 = 0$. Итак, $q_2 = \frac{2}{3} g^2$ и направлено по $\overrightarrow{EB}$, т. е. перпендикулярно к оси V_1 в вставке 1.

$$P_{\min} = Q_2 - q_2 = \frac{5}{6} g^2 - \frac{2}{3} g^2 = \frac{1}{6} g^2; \quad P_{\max} = Q_2 + q_2 = \frac{3}{2} g^2;$$

$$\frac{1}{P_2} = \frac{6}{g^2} + \frac{2}{3g^2} = \frac{20}{3g^2}; \quad P_2 = 0.15 g^2;$$

$$\Pi_2 = (Q_2 - q_2)(Q_2 + q_2) = 0.25 g^4.$$

Сравнение вставок 1 и 2 показывает, что $\frac{P_1}{P_2} = 3$ и $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = 9$.

При этом нужно заметить, что в вставке 1 мы имеем ошибки m_β измерения углов, а в вставке 2 — ошибки m_α измерения направлений. Обычно $m_\alpha^2 : m_\beta^2 = 1 : 2$. Поэтому $M_1^2 = \frac{m_\beta^2}{P_1}$ и

$M_2^2 = \frac{m_\alpha^2}{P_2}$ дадут отношение

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{m_\alpha^2}{m_\beta^2} \cdot \frac{P_1}{P_2} = \frac{3}{2}.$$

Все-таки измерение углов выгоднее.

Заметим, что отношение квадратов полуосей эллипса погрешностей у вставки 1 равно $(Q_1 + q_1) : (Q_1 - q_1) = = \frac{9}{2} g^2 : \frac{1}{2} g^2 = 9$; также и у вставки 2 $a^2 : b^2 = \frac{3}{2} : \frac{1}{6} = 9$. Эллипсы подобны между собой: $a : b = 3$. Эллипс вставки достаточно вытянутый.

п. 6. Вставки с четырьмя твердыми точками. Рассмотрим потенот на четыре точки 1, 2, 4 и 5 (фиг. 45) с измерением направлений. t_3 , очевидно, равно нулю, так как геометрические суммы $\vec{g}_1 + \vec{g}_4$ и $\vec{g}_2 + \vec{g}_5$ равны нулю. Значит,

$$Q_3 = \frac{1}{2} g^2 + \frac{1}{2} g^2 + \frac{1}{2} g^2 + \frac{1}{2} g^2 = 2g^2.$$

Для получения q_3 сложим попарно $\frac{1}{2} \overleftrightarrow{g_1} + \frac{1}{2} \overleftrightarrow{g_4}$ и $\frac{1}{2} \overleftrightarrow{g_2} + \frac{1}{2} \overleftrightarrow{g_5}$. Каждая пара дает g^2 с направлением $\vec{DA}$ и $\vec{EB}$ или $\vec{AD}$ и $\vec{BE}$, или AD и EB безразлично. Сумма этих g^2 с двойным углом дает (если исходить из направления OA) q_3 , направленное по OB , что после деления угла AOB пополам определит истинное направление повернутого на 90° вектора q_3 или оси V_3 . Величина же q_3 будет равна g^2 как сторона равностороннего треугольника. Таким образом имеем:

$$p_{\min} = Q_3 - q_3 = 2g^2 - g^2 = g^2; p_{\max} = Q_3 + q_3 = 3g^2;$$

$$\frac{1}{P_3} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{3g^2} = \frac{4}{3g^2}; P_3 = \frac{3}{4} g^2; \Pi_3 = 3g^4;$$

$$a^2 : b^2 = 3; \frac{P_3}{P_2} = \frac{3}{4} : \frac{3}{20} = 5.$$

Вес вставки 3 в пять раз больше веса вставки 2.

При вставке 4 возьмем те же четыре точки, что и в вставке 3, но только будем считать, что измерено независимо два угла $1-O-4$ и $2-O-5$ с грездиентами $g_{1,4} = = g_{2,5} = 2g$; $Q_4 = 4g^2$; q_4 , подобно вставке 3, равно $2g^2$ и направлено параллельно AE или BD . Ось V_4 совпадает с V_3 .

$$p_{\min} = 2g^2; p_{\max} = 6g^2;$$

$$a^2 : b^2 = 3; \frac{1}{P_4} = \frac{1}{2g^2} + \frac{1}{6g^2}; P_4 = \frac{3}{2} g^2; \Pi = 12g^4; \frac{P_4}{P_3} = 2,$$

но зато квадраты ошибок углов в вставке 4 в два раза больше квадратов ошибок направлений в вставке 3, так что вставки 3 и 4 по точности равноценны.

Если в вставке 4 добавить еще углы $1-O-5$ и $2-O-4$, то вес P_5 в вставке 5 увеличится, но еще более увеличится объем работы по измерению углов

$$Q_5 = 7g^2; q_5 = 5g^2; p_{\min} = 2g^2; p_{\max} = 12g^2; P_5 = \frac{12}{7}.$$

Эллипс погрешности более вытянут, $a^2 : b^2 = 6$.

Работа увеличилась вдвое, а вес всего в $\frac{12}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{7}$ раза. Поэтому выгоднее повторить измерение углов $1-O-4$ и $2-O-5$, чем присоединять новые углы $1-O-5$ и $2-O-4$.

Чем больше у углов градиенты, тем выгоднее их брать.

Это подводит нас к наивыгоднейшему распределению весов. Наименьшее число линий положения два. Нужно выбрать две с наибольшими градиентами (наибольшим весом), образующими между собой угол, близкий к 90° , и сосредоточить все усилия на измерение углов, представленных выбранными линиями положения.

Если градиенты одинаковы и угол равен 90° , то $q=0$, и точка получает круг положений, что еще выгоднее.

п. 7. Вставки внутри треугольника или шестиугольника. Возьмем еще потенот с тремя твердыми точками, образующими равносторонний треугольник $1-3-5$ или $6-2-4$ на фиг. 45. Пусть независимо измерены углы $1-O-3$, $3-O-5$ и $5-O-1$. Градиенты $g_{1,3} = g_{3,5} = g_{5,1} = \sqrt{3}g$. Как легко убедиться, в этой 6 вставке $q_6 = 0$, точка с кругом положений $Q_6 = \frac{9}{2} g^2$,

$$p_{\min} = p_{\max} = \frac{9}{2} g^2; M_6 = \frac{2}{3} \frac{m_\beta}{g}, \text{ так как } P_6 = \frac{9}{4} g^2.$$

Для сравнения предположим, что в треугольнике $1-3-5$ измерены направления на 1 , 3 и 5 точки. Эта вставка 7 также дает точку с кругом положений $q_7=0$, $Q_7=\frac{3}{2}g^2$;

$$p_{\min}=p_{\max}=\frac{3}{2}g^2; \quad P_7=\frac{3}{4}g^2; \quad M_7=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{m_\alpha}{g}.$$

Считая $m_\beta^2=2m_\alpha^2$, имеем, что

$$\frac{M_6^2}{M_7^2}=\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4}=\frac{2}{3}.$$

Но в вставке 6 при трех углах мы измеряем шесть направлений, в то время как в вставке 7 — всего три направления, т. е. объем работ в вставке 7 в два раза меньше.

Если за этот счет увеличить вес в два раза, то отношение M_6^2 к M_7^2 будет равно $\frac{4}{3}$.

Таким образом, в данном случае измерение направлений предпочтительнее измерения углов.

Возьмем, наконец, потенот из всех шести точек с измерением направлений. Вставляемая точка будет иметь также круг положений $q_8=0$; $Q_8=3g^2$ (вставка 8);

$$p_{\min}=p_{\max}=3g^2; \quad P_8=\frac{3}{2}g^2; \quad \Pi_8=9g^4; \quad P_8:P_2=\frac{3}{2}:\frac{3}{20}=10,$$

хотя число направлений увеличилось всего в два раза. Вставка 8 в пять раз выгоднее вставки 2 .

Сравнивая вставки 8 и 3 , имеем:

$$P_8:P_3=\frac{3}{2}:\frac{3}{4}=2,$$

но число направлений в вставке 8 увеличилось в $1\frac{1}{2}$ раза по сравнению со вставкой 3 . Следовательно, вставка 8 несколько выгоднее вставки 3 .

Отношение весов вставок 8 и 7 равно:

$$P_8:P_7=\frac{3}{2}:\frac{3}{4}=2;$$

число направлений увеличилось также в два раза. Вставки 8 и 7 равноценны, если объем работы сделать одинаковым.

Рассмотренные примеры достаточно осветили производство анализа графическим методом вставок отдельных точек.

Эти вставки могут быть осуществлены не только обратными, но и смешанными засечками. Метод анализа остается тот же самый. Для прямых засечек обычно отпадает вектор ориентирной поправки.

СОВМЕСТНАЯ ВСТАВКА ДВУХ ТОЧЕК

§ 18. ОБОСНОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

п. 1. Первое общее редуцирование уравнений. Предположим, что при совместной вставке двух точек имеется:

1) m твердых точек с внешними направлениями на обе вставляемые точки, связанные всего с $k_1, k_2, \dots, k_m$ направлениями. Они образуют:

m уравнений $z + a_1 u_1 + b_1 v_1 - l_{1\text{внешн}} = \text{ОП}$
(остаточная погрешность),

m уравнений $z + a_2 u_2 + b_2 v_2 - l_{2\text{внешн}} = \text{ОП}.$

2) m' твердых точек, дающих по одному внешнему направлению на первую вставляемую точку и имеющих всего измеренными по $k'_1, k'_2, \dots, k'_{m'}$ направлений. Они, согласно выводам п. 4 § 14, образуют:

$$\begin{aligned} m' \text{ уравнений } a_1 \sqrt{\frac{k'-1}{k'}} u_1 + \\ + b_1 \sqrt{\frac{k'-1}{k'}} v_1 - \sqrt{\frac{k'}{k'-1}} l_{1\text{внешн}} = \text{ОП}. \end{aligned} \quad (18.2)$$

3) m'' твердых точек с внешними направлениями на одну вторую вставляемую точку. Всего совместно на каждой точке измерено по $k''_1, k''_2, \dots, k''_{m''}$ направлений. Эти точки дают

$$\begin{aligned} m'' \text{ уравнений } a_2 \sqrt{\frac{k''-1}{k''}} u_2 + \\ + b_2 \sqrt{\frac{k''-1}{k''}} v_2 - \sqrt{\frac{k''}{k''-1}} l_{2\text{внешн}} = \text{ОП}. \end{aligned} \quad (18.3)$$

4) n_1 — число всех внутренних направлений, измеренных на первой вставляемой точке, что дает

$$\left. \begin{aligned} n_1 - 1 \text{ уравнений } z_1 + a_1 u_1 + b_1 v_1 - l_{1\text{внутр}} &= \text{ОП,} \\ \text{одно уравнение } z_1 + a_{c1} u_1 + b_{c1} v_1 + a_{c2} u_2 + \\ &+ b_{c2} v_2 - l_{c2} = \text{ОП.} \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

5) n_2 — число внутренних направлений на второй точке, образующих

$$\left. \begin{aligned} n_2 - 1 \text{ уравнений } z_2 + a_2 u_2 + b_2 v_2 - l_{2\text{внутр}} &= \text{ОП,} \\ \text{одно уравнение } z_2 + a_{c1} u_1 + b_{c1} v_1 + a_{c2} u_2 + \\ &+ b_{c2} v_2 - l_{c2} = \text{ОП.} \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

В этих уравнениях неизвестные u и v представляют собой поправки предварительных координат при особо выбранных отдельно на каждой вставляемой точке координатных осях U_1, V_1 и U_2, V_2 .

Если применить равенства (15.5), т. е. исходить из действительного (не повернутого) направления градиентов, то

$$a_{c1} = g_{1.2.u}; \quad b_{c1} = g_{1.2.v}; \quad a_{c2} = g_{2.1.u}; \quad b_{c2} = g_{2.1.v},$$

где $g_{1.2}$ — градиент направления от первой точки ко второй, идет вправо от этого направления;

$g_{2.1}$ — градиент направления от второй точки к первой;

a_{c2} и b_{c2} не равны, как обычно $-a_{c1}$ и $-b_{c1}$, так как на второй точке направление координатных осей U_2 и V_2 иное, чем U_1 и V_1 на первой точке;

z — ориентирные поправки внешних направлений на m первых твердых точках;

z_1 — ориентирная поправка всех измеренных направлений на точке 1;

z_2 — такая же поправка на точке 2.

После введения фиктивных уравнений для исключения z, z_1 и z_2 , согласно § 14, получим $N = 3m + m' + m'' + n_1 + n_2 + 1$ редуцированных уравнений такого вида:

$$\begin{aligned}
& 1) m \text{ уравнений} \\
& \quad a_1 u_1 + b_1 v_1 - l_{1\text{внешн}} = \text{ОП}, \\
& 2) m' \text{ уравнений} \\
& \quad a_1 \sqrt{\frac{k'-1}{k'}} u_1 + \\
& \quad + b_1 \sqrt{\frac{k'-1}{k'}} v_1 - \sqrt{\frac{k'}{k'-1}} l_{1\text{внешн}} = \text{ОП}, \\
& 3) n_1 - 1 \text{ уравнений} \\
& \quad a_1 u_1 + b_1 v_1 - l_{1\text{внешн}} = \text{ОП};
\end{aligned}
\tag{18.6}$$

$$\begin{aligned}
& 1) m \text{ уравнений} \\
& \quad a_2 u_2 + b_2 v_2 - l_{2\text{внешн}} = \text{ОП}, \\
& 2) m'' \text{ уравнений} \\
& \quad a_2 \sqrt{\frac{k''-1}{k''}} u_2 + \\
& \quad + b_2 \sqrt{\frac{k''-1}{k''}} v_2 - \sqrt{\frac{k''}{k''-1}} l_{2\text{внешн}} = \text{ОП}, \\
& 3) n_2 - 1 \text{ уравнений} \\
& \quad a_2 u_2 + b_2 v_2 - l_{2\text{внутр}} = \text{ОП};
\end{aligned}
\tag{18.7}$$

$$\begin{aligned}
& 1) m \text{ уравнений} \\
& \quad a_1 \sqrt{-\frac{1}{k}} u_1 + b_1 \sqrt{-\frac{1}{k}} v_1 + \\
& \quad + a_2 \sqrt{-\frac{1}{k}} u_2 + b_2 \sqrt{-\frac{1}{k}} v_2 = \text{ОП}, \\
& 2) \text{одно уравнение} \\
& \quad a_{c1} \sqrt{-\frac{1}{n_2}} u_1 + b_{c1} \sqrt{-\frac{1}{n_2}} v_1 + \\
& \quad + t_{2u} \sqrt{-\frac{1}{n_2}} u_2 + t_{2v} \sqrt{-\frac{1}{n_2}} v_2 = 0, \\
& 3) \text{одно уравнение} \\
& \quad t_{1u} \sqrt{-\frac{1}{n_1}} u_1 + t_{1v} \sqrt{-\frac{1}{n_1}} v_1 + \\
& \quad + a_{c2} \sqrt{-\frac{1}{n_1}} u_2 + b_{c2} \sqrt{-\frac{1}{n_1}} v_2 = 0, \\
& 4) \text{одно уравнение} \\
& \quad \sqrt{2} a_{c1} u_1 + \sqrt{2} b_{c1} v_1 + \sqrt{2} a_{c2} u_2 + \\
& \quad + \sqrt{2} b_{c2} v_2 - \sqrt{\frac{1}{2}} (l_{c1} - l_{c2}) = \text{ОП}.
\end{aligned}
\tag{18.8}$$

По сравнению с системами (18.1) — (18.5) прибавилось два суммарных уравнения с отрицательными весами $-\frac{1}{n_2}$ и $-\frac{1}{n_1}$, у которых

$$\begin{aligned} t_{2,u} &= [a_2]_{n_2-1} + a_{c2}; & t_{2,v} &= [b_2]_{n_2-1} + b_{c2}; \\ t_{1,u} &= [a_1]_{n_1-1} + a_{c1}; & t_{1,v} &= [b_1]_{n_1-1} + b_{c1}; \end{aligned}$$

т. е. $t_{2,u}$ и $t_{2,v}$ представляют собой, как и при вставке одной точки, проекцию геометрической суммы t_2 градиентов уравнений системы (18.5) числом n_2 на координатные оси U'_2 и V'_2 , а $t_{1,u}$ и $t_{1,v}$ — проекцию геометрической суммы t_1 градиентов уравнений системы (18.4) на оси U'_1 и V'_1 .

Кроме того, прибавилось m уравнений системы (18.8), согласно последнему уравнению системы (14.7).

После редуцирования последние уравнения систем (18.4) и (18.5) объединились в одно последнее уравнение системы (18.8).

Произведение gl в этом последнем уравнении, очевидно, будет либо $g_{1,2}(l_{c1} + l_{c2})$, либо $g_{2,1}(l_{c1} + l_{c2})$ в зависимости от того, от каких двух неизвестных u_1 и v_1 или u_2 и v_2 будем освобождаться:

$$V^2 g \sqrt{\frac{1}{2}} (l_{c1} + l_{c2}) = g (l_{c1} + l_{c2}).$$

Свободные члены первых трех уравнений системы (18.8) равны нулю, поскольку мы условились еще в предыдущей главе получать свободные члены начальных уравнений погрешности как отклонения ориентирных углов от их арифметического среднего.

п. 2. Коэффициенты весовых элементов. Многие уравнения в системах (18.6) и (18.7) для построения должны быть объединены как принадлежащие двухсторонним, „сплошным“ (вычерчиваемым на схемах сплошными линиями) направлениям с одним и тем же градиентом не только по величине, но и по направлению, как, например, это

сделано в уравнении (14.9). В связи с этим слагаемые элементов q и Q получают особые множители, которые мы называли выше коэффициентами весовых элементов и обозначили их через σ .

Они включают в себя и множитель $\frac{1}{2}$, если получать q и Q , а не $2q$ и $2Q$.

Применительно к уравнениям (18.6) — (18.8) коэффициенты σ получают такие выражения, которые мы занумеруем через (18.9).

Для первой точки

- 1) $\sigma_{1.1} = \frac{k-1}{2k}$ для первых уравнений систем (18.6) и (18.8) с односторонним внешним направлением на первую точку. Градиент g' .
- 2) $\sigma_{1.2} = \frac{2k-1}{2k}$ для общих градиентов тех же уравнений, но с двухсторонними внешними и внутренними направлениями на первую точку. Обозначение градиентов тоже g' .
- 3) $\sigma_{1.3} = \frac{2k'-1}{2k'}$ для второго и третьего объединенных вместе уравнений системы (18.6) с общими градиентами g_1 двухсторонних направлений.
- 4) $\sigma_{1.4} = \frac{k'-1}{2k'}$ для второго уравнения той же системы (18.6) с односторонним внешним направлением. Обозначение градиента g_1 .
- 5) $\sigma_{1.5} = \frac{1}{2}$ для третьего уравнения системы (18.6) с односторонним внутренним направлением. Градиент g_1 .
- 6) $\sigma_{1.6} = \frac{2n_2-1}{2n_2}$ для второго и четвертого уравнений системы (18.8) для квадрата общего градиента $g_{1.2}$ неизвестных u_1 и v_1 .
- 7) $\sigma_{1.7} = -\frac{1}{2n_1}$ для третьего уравнения системы (18.8) для градиента t_1 неизвестных u_1 и v_1 .

- 1) $\sigma_{2.1} = \frac{k-1}{2k}$ для первых уравнений систем (18.7) и (18.8) с односторонним внешним направлением на вторую точку. Градиенты g'' .
- 2) $\sigma_{2.2} = \frac{2k-1}{2k}$ для тех же уравнений, но с двухсторонним внешним и внутренним направлением на вторую точку. Градиент g'' .
- 3) $\sigma_{2.3} = \frac{2k''-1}{2k''}$ для объединенных второго и третьего уравнений системы (18.7) с общими градиентами g_2 двухсторонних направлений.
- 4) $\sigma_{2.4} = \frac{k''-1}{k''}$ для вторых уравнений той же системы (18.7) с односторонним внешним направлением. Градиент g_2 .
- 5) $\sigma_{2.5} = \frac{1}{2}$ для третьего уравнения системы (18.7) с односторонним внутренним направлением. Градиент g_2 .
- 6) $\sigma_{2.6} = \frac{2n_1-1}{2n_1}$ для третьего и четвертого уравнений системы (18.8) для квадрата общего градиента $g_{2.1}$ неизвестных u_2 и v_2 .
- 7) $\sigma_{2.7} = -\frac{1}{2n_2}$ для второго уравнения системы (18.9) для градиента t_2 неизвестных u_2 и v_2 .

Число первых и вторых уравнений для первой точки равно m ; $3 + 4 = m'$; $3 + 5 = n_1 - 1$. Для второй точки $1 + 2 = m$; $3 + 4 = m''$; $3 + 5 = n_2 - 1$.

п. 3. Построение нормальных элементов и связующих градиентов. Обратимся к системам уравнений (18.6)—(18.8). Найдем сначала направление координатных осей U'_1 и V'_1 при выполнении требования, чтобы $[a_1 \ b_1]$ равнялось нулю, а также осей U'_2 и V'_2 , при которых $[a_2 \ b_2] = 0$. Здесь под a_1 , b_1 , a_2 и b_2 подразумеваются все коэффициенты при соответствующих неизвестных во всех уже редуцированных уравнениях систем (18.6)—(18.8).

При этом получатся элементы Q_1' , q_1' , Q_2' и q_2' , которые при установках, принятых в § 10, дадут

$$\begin{aligned}[a_1 a_1] &= Q_1' + q_1'; & [b_1 b_1] &= Q_1' - q_1'; \\ [a_2 a_2] &= Q_2' + q_2'; & [b_2 b_2] &= Q_2' - q_2'.\end{aligned}$$

Члены с коэффициентами $[a_1 b_1]$ и $[a_2 b_2]$ исчезнут. Останутся еще не определенными коэффициенты $[a_1 a_2]$, $[a_1 b_2]$, $[b_1 a_2]$ и $[b_1 b_2]$ в системе нормальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 1) (Q_1' + q_1') u_1 + [a_1 a_2] u_2 + [a_1 b_2] v_2 - T_{1..u}' &= 0, \\ 2) (Q_1' - q_1') v_1 + [b_1 a_2] u_2 + [b_1 b_2] v_2 - T_{1..v}' &= 0, \\ 3) [a_1 a_2] u_1 + [b_1 a_2] v_1 + (Q_2' + q_2') u_2 - T_{2..u}' &= 0, \\ 4) [a_1 b_2] u_1 + [b_1 b_2] v_1 + (Q_2' - q_2') v_2 - T_{2..v}' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.10)$$

Легко заметить, что градиентами отдельных слагаемых $a_1 a_2 u_1 + b_1 a_2 v_1$ и $a_1 b_2 u_1 + b_1 b_2 v_1$ третьего и четвертого уравнений системы (18.10) будут:

$$g_1 a_2 \text{ и } g_1 b_2 \text{ или } g_1 g_{2..u} \text{ и } g_1 g_{2..v},$$

где $g_{2..u}$ и $g_{2..v}$ — проекции градиента g_2 на оси U_2' и V_2' .

Значит, суммы $[a_1 a_2] u_1 + [b_1 a_2] v_1$ и $[a_1 b_2] u_1 + [b_1 b_2] v_1$ представляют собой некоторые градиенты, которые мы обозначим через α и β и которые являются геометрическими суммами:

$$\vec{\alpha}_1 = [\vec{g}_1 g_{2..u}]; \quad \vec{\beta}_1 = [\vec{g}_1 g_{2..v}]. \quad (18.11)$$

Аналогично для точки 2 имеем:

$$\vec{\alpha}_2 = [\vec{g}_2 g_{1..u}]; \quad \vec{\beta}_2 = [\vec{g}_2 g_{1..v}]. \quad (18.12)$$

В соответствии с этим уравнения (18.10) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} 1) (Q_1' + q_1') u_1 + \alpha_{2..u} u_2 + \alpha_{2..v} v_2 - T_{1..u}' &= 0, \\ 2) (Q_1' - q_1') v_1 + \beta_{2..u} u_2 + \beta_{2..v} v_2 - T_{1..v}' &= 0, \\ 3) \alpha_{1..u} u_1 + \alpha_{1..v} v_1 + (Q_2' + q_2') u_2 - T_{2..u}' &= 0, \\ 4) \beta_{1..u} u_1 + \beta_{1..v} v_1 + (Q_2' - q_2') v_2 - T_{2..v}' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

В построении векторов $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и β_2 участвуют только коэффициенты уравнений (18.8), содержащих все четыре неизвестных. Поэтому, расшифровывая выражения (18.11) и (18.12), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= \vec{\tau}_1 g_{2.1.u} - \frac{1}{n_2} \vec{g}_{1.2} t_{2.u} - \left[\frac{1}{k} \vec{g}' g''_u \right], \\ \vec{\beta}_1 &= \vec{\tau}_1 g_{2.1.v} - \frac{1}{n_2} \vec{g}_{1.2} t_{2.v} - \left[\frac{1}{k} \vec{g}' g'_v \right], \\ \vec{\alpha}_2 &= \vec{\tau}_2 g_{1.2.u} - \frac{1}{n_1} \vec{g}_{2.1} t_{1.u} - \left[\frac{1}{k} \vec{g}'' g'_u \right], \\ \vec{\beta}_2 &= \vec{\tau}_2 g_{1.2.v} - \frac{1}{n_1} \vec{g}_{2.1} t_{1.v} - \left[\frac{1}{k} \vec{g}'' g'_v \right], \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

где τ_1 и τ_2 вспомогательные векторы, находимые по формулам:

$$\vec{\tau}_1 = 2\vec{g}_{1.2} - \frac{1}{n_1} \vec{t}_1; \quad \vec{\tau}_2 = 2\vec{g}_{2.1} - \frac{1}{n_2} \vec{t}_2; \quad (18.15)$$

$g_{1.2}$ — градиент направления от вставляемой точки 1 к 2;

$g_{2.1}$ — градиент обратного направления;

$g_{2.1.u}$ и $t_{2.u}$ — проекции $g_{2.1}$ и t_2 на ось U'_2 ;

$g_{2.1.v}$ и $t_{2.v}$ — проекции $g_{2.1}$ и t_2 на ось V'_2 ;

$g_{1.2.u}$ и $t_{1.u}$, $g_{1.2.v}$ и $t_{1.v}$ — соответствующие проекции на оси U'_1 и V'_1 ;

g' представляет собой градиент внешнего направления, идущего от одной из m твердых точек, дающих уравнения (18.1) на первую вставляемую точку;

g'' — градиент подобного же направления, идущего на точку 2, т. е. g' и g'' являются градиентами внешних направлений с тех твердых точек, с которых имеются засечки на обе соответственно вставляемые точки;

g'_u, g'_v, g''_u и g''_v — соответствующие проекции этих градиентов на оси U'_1, V'_1 и U'_2, V'_2 .

Вследствие симметрии коэффициентов нормальных уравнений имеем контроль построения векторов α и β :

$$\alpha_{1.u} = \alpha_{2.u}; \quad \beta_{1.v} = \beta_{2.v}; \quad \alpha_{1.v} = \beta_{2.u}; \quad \alpha_{2.v} = \beta_{1.u}; \quad (18.16)$$

$\alpha_{1.u}, \beta_{1.u}, \alpha_{1.v}, \beta_{1.v}$ — проекции векторов α_1 и β_1 на оси U'_1 и V'_1 ,
 $\alpha_{2.u}, \beta_{2.u}, \alpha_{2.v}, \beta_{2.v}$ — проекции векторов α_2 и β_2 на оси U'_2 и V'_2 .

п. 4. Второе редуцирование уравнений и построение положений. Освободимся теперь по правилу Шрейбера от неизвестных u_2 и v_2 в системах (18.6) — (18.8).

Напомним относящееся сюда правило Шрейбера.

Для исключения одного неизвестного x в системе уравнений $a_1x + b_1y + c_1z + d_1u + \dots - l_1 = v_1$ следует добавить к системе без первого неизвестного x

$b_1y + c_1z + d_1u + \dots - l_1 = v_1$ с весом, равным 1,
 одно уравнение

$$[ab]y + [ac]z + [ad]u + \dots - [al] = v_{n+1} \text{ с весом } -\frac{1}{[aa]}.$$

Для исключения второго неизвестного y выписываются:
 система уравнений $c_1z + d_1u + \dots - l_1 = v_1$ с весом, равным 1,

одно уравнение $[ac]z + [ad]u + \dots - [al] = v_{n+1}$ с весом, равным $-\frac{1}{[aa]}$

и одно уравнение $[bc \cdot 1]z + [bd \cdot 1]u + \dots - [bl \cdot 1] = v_{n+2}$
 с весом, равным $\frac{1}{[bb \cdot 1]}.$

В уравнениях систем (18.6) — (18.8) можно сразу освободиться от неизвестных u_2 и v_2 , обратившись к системе нормальных уравнений (18.13) и заметив, что третье и четвертое уравнения этой системы содержат u_2 и v_2 порознь. Поэтому сразу же можно выписать два фиктивных уравнения с весами $-\frac{1}{Q'_2 + q'_2}$ и $-\frac{1}{Q'_2 - q'_2}$ и объединить их с уравнениями, вытекающими из третьего и четвертого уравнений системы (18.13).

В результате мы получим такую систему четырех редуцированных уравнений погрешности, представляющих четыре линии положений на плоскости, т. е. содержащих два неизвестных:

$$\left. \begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt{Q_1 + q_1} \, u_1 - \frac{1}{\sqrt{Q_1 + q_1}} T_{1,u} = \text{ОП}, \\
 2) \quad & \sqrt{Q_1 - q_1} \, v_1 - \frac{1}{\sqrt{Q_1 - q_1}} T_{1,v} = \text{ОП}, \\
 3) \quad & \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{Q_2 + q_2}} \alpha_{1,u} u_1 + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{Q_2 + q_2}} \alpha_{1,v} v_1 - \\
 & - \frac{\sqrt{Q_2 + q_2}}{\sqrt{-1}} (-u_2') = \text{ОП}, \\
 4) \quad & \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{Q_2 - q_2}} \beta_{1,u} u_1 + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{Q_2 - q_2}} \beta_{1,v} v_1 - \\
 & - \frac{\sqrt{Q_2 - q_2}}{\sqrt{-1}} (-v_2') = \text{ОП},
 \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

где

$$u_2' = \frac{T_{2,u}}{Q_2 + q_2}; \quad v_2' = \frac{T_{2,v}}{Q_2 - q_2}, \quad (18.18)$$

т. е. u_2' и v_2' представляют собой первое приближение поправок координат второй точки при координатных осях U_2' и V_2' и как таковые являются в уравнениях (18.17) как бы известными величинами, входящими в свободные члены.

Третье и четвертое уравнения системы (18.17) представлены двумя мнимыми линиями положений с градиентами

$$g_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{Q_2 + q_2}} \alpha_1 \quad \text{и} \quad g_\beta = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{Q_2 - q_2}} \beta_1.$$

Поэтому всю систему (18.17) можно, подобно выводам уравнений (10.11), заменить двумя следующими нормальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned}
 1) \quad & (Q_1 + q_1) u_1 - T_{1,u} = 0, \\
 2) \quad & (Q_1 - q_1) v_1 - T_{1,v} = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (18.19)$$

где Q_1, q_1 и T_1 по сравнению с Q'_1, q'_1 и T'_1 дополнены членами указанных мнимых линий положений, а именно:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q'_1 - \frac{1}{2(Q'_2 + q'_2)} \alpha_1^2 - \frac{1}{2(Q'_2 - q'_2)} \beta_1^2, \\ \overleftrightarrow{q_1} &= \overleftrightarrow{q'_1} - \frac{1}{2(Q'_2 + q'_2)} \overleftrightarrow{\alpha_1^2} - \frac{1}{2(Q'_2 - q'_2)} \overleftrightarrow{\beta_1^2}, \\ \vec{T}_1 &= \vec{T}'_1 - \vec{\alpha}_1 u'_2 - \vec{\beta}_1 v'_2; \end{aligned} \right\} \quad (18.20)$$

u'_2 и v'_2 найдены по равенствам (18.18).

Аналогично для вставляемой точки 2 получаем:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad (Q_2 + q_2) u_2 - T_{2.u} &= 0, \\ 2) \quad (Q_2 - q_2) v_2 - T_{2.v} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= Q'_2 - \frac{1}{2(Q'_1 + q'_1)} \alpha_2^2 - \frac{1}{2(Q'_1 - q'_1)} \beta_2^2, \\ \overleftrightarrow{q_2} &= \overleftrightarrow{q'_2} - \frac{1}{2(Q'_1 + q'_1)} \overleftrightarrow{\alpha_2^2} - \frac{1}{2(Q'_1 - q'_1)} \overleftrightarrow{\beta_2^2}, \\ \vec{T}_2 &= \vec{T}'_2 - \vec{\alpha}_2 u'_1 - \vec{\beta}_2 v'_1, \end{aligned} \right\} \quad (18.22)$$

при

$$u'_1 = \frac{T'_{1.u}}{Q'_1 + q'_1} \quad \text{и} \quad v'_1 = \frac{T'_{1.v}}{Q'_1 - q'_1}. \quad (18.23)$$

Этим определяется построение элементов Q_1, q_1, Q_2 и q_2 и окончательных уравненных положений вставляемых точек 1 и 2. Координаты $u'_1, v'_1, u'_2, v'_2, u_1, v_1, u_2$ и v_2 находятся так, как показано в п. 3 § 10, т. е. с помощью отрезков E и F .

п. 5. Весовые и нормальные коэффициенты. Для двух точек с четырьмя неизвестными, как известно, следует получить десять весовых коэффициентов

$$\begin{aligned} &[\alpha\alpha], [\alpha\beta], [\alpha\gamma], [\alpha\delta], \\ &[\beta\beta], [\beta\gamma], [\beta\delta], \\ &[\gamma\gamma], [\gamma\delta], \\ &[\delta\delta]. \end{aligned}$$

Для их определения дается четыре системы уравнений, из которых первая имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} 1) [a_1 a_1] [\alpha \alpha] + [a_1 b_1] [\alpha \beta] + [a_1 a_2] [\alpha \gamma] + [a_1 b_2] [\alpha \delta] &= 1, \\ 2) [a_1 b_1] [\alpha \alpha] + [b_1 b_1] [\alpha \beta] + [b_1 a_2] [\alpha \gamma] + [b_1 b_2] [\alpha \delta] &= 0, \\ 3) [a_1 a_2] [\alpha \alpha] + [b_1 a_2] [\alpha \beta] + [a_2 a_2] [\alpha \gamma] + [a_2 b_2] [\alpha \delta] &= 0, \\ 4) [a_1 b_2] [\alpha \alpha] + [b_1 b_2] [\alpha \beta] + [a_2 b_2] [\alpha \gamma] + [b_2 b_2] [\alpha \delta] &= 0. \end{aligned} \right\} (18.24)$$

Возьмем произвольное направление оси абсцисс и определим отвечающие этому направлению весовые коэффициенты $[\alpha \alpha]$, $[\alpha \beta]$, $[\alpha \gamma]$ и $[\alpha \delta]$, как неизвестные x_1 , y_1 , x_2 и y_2 написанной системы уравнений (18.24). Решать уравнения мы будем согласно предыдущему пункту при осях U_1 , V_1 и U_2 , V_2 , соответственно изменив коэффициенты при неизвестных, но оставив без изменения свободные члены. У первого уравнения системы (18.24) свободный член равен -1 . С другой стороны, он равен $-T_1$. Свободные члены других уравнений равны нулю. Это значит, что применительно к выводам предыдущих пунктов у системы (18.24) имеется $T_1' = 1$, идущее по положительному направлению оси абсцисс взятой системы координат, и T_2' , равное нулю.

Поэтому u_2' и v_2' для них, согласно равенствам (18.18), равны нулю, и $T_1 = T_1' = 1$, согласно равенству (18.20).

Значит, на оси X , как показано в п. 3 § 11, нужно отложить отрезки E и F и построить, проводя оси V_1 и U_1 , как бы положение точки I . Ее координаты x_1 и y_1 по отношению к взятым осям X и Y будут соответственно равны $[\alpha \alpha]$ и $[\alpha \beta]$. Далее, построив вектор $\vec{T}_2 = -\vec{\alpha}_2 u_1' = \vec{\beta}_2 v_1'$,

поскольку $T_2' = 0$, откладываем на нем отрезки $E = \frac{T_2}{Q_2 + q_2}$ и $F = \frac{T_2}{Q_2 - q_2}$, и получаем как бы положение точки 2, координаты которой x_2 и y_2 по отношению к тем же осям X и Y будут представлять величины $[\alpha \gamma]$ и $[\alpha \delta]$. Для построения $\vec{T}_2$ величины u_1' и v_1' находим из равенств (18.23), помня, что $T_1' = 1$ и направлено по положительному направлению оси X . На нем откладываем отрезки

$$E_1' = \frac{1}{Q_1' + q_1'}, \quad F_1' = \frac{1}{Q_1' - q_1'}, \text{ и т. д.}$$

Так же решаем и остальные три системы:

$$\begin{cases} 1) [a_1 a_1] [\alpha \beta] + [a_1 b_1] [\beta \beta] + [a_1 a_2] [\beta \gamma] + [a_1 b_2] [\beta \delta] = 0, \\ 2) [a_1 b_1] [\alpha \beta] + [b_1 b_1] [\beta \beta] + [b_1 a_2] [\beta \gamma] + [b_1 b_2] [\beta \delta] = 1, \end{cases} \quad (18.25)$$

и т. д. и получаем шесть остальных весовых коэффициентов.

При этом неквадратичные коэффициенты получаются дважды. Проще строятся коэффициенты $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ и $[\beta\beta]$, с одной стороны, и $[\gamma\gamma]$, $[\gamma\delta]$ и $[\delta\delta]$, с другой, как относящиеся к одной точке 1 или 2. Для них нужны только весовые элементы Q_1 и q_1 , либо Q_2 и q_2 , как при вставке одной точки. Для построения же остальных коэффициентов нужны, кроме весовых элементов Q и q , также и связующие векторы α и β и нормальные элементы Q' и q' .

Четыре системы уравнений вида (18.24) можно перегруппировать, сделав неизвестными коэффициенты нормальных уравнений, как это мы сделали в п. 3 § 11 при двух неизвестных.

Например, выделяем систему уравнений

$$\begin{cases} [\alpha\alpha] [a_1 a_1] + [\alpha\beta] [a_1 b_1] + [\alpha\gamma] [a_1 a_2] + [\alpha\delta] [a_1 b_2] = 1, \\ [\alpha\beta] [a_1 a_1] + [\beta\beta] [a_1 b_1] + [\beta\gamma] [a_1 a_2] + [\beta\delta] [a_1 b_2] = 0, \\ [\alpha\gamma] [a_1 a_1] + [\beta\gamma] [a_1 b_1] + [\gamma\gamma] [a_1 a_2] + [\gamma\delta] [a_1 b_2] = 0, \\ [\alpha\delta] [a_1 a_1] + [\beta\delta] [a_1 b_1] + [\gamma\delta] [a_1 a_2] + [\delta\delta] [a_1 b_2] = 0. \end{cases} \quad (18.26)$$

с частными значениями неизвестных $[a_1 a_1]$, $[a_1 b_1]$, $[a_1 a_2]$, $[a_1 b_2]$ при направлении координатных осей U'_1 , V'_1 и U'_2 и V'_2 , согласно системам уравнений (18.10) и (18.13), выраженных равенствами:

$$[a_1 a_1] = Q'_1 + q'_1; [ab] = 0; [a_1 a_2] = \alpha_{2..n}; [a_1 b_2] = \alpha_{2..v}.$$

Таких систем можно еще выписать три с частными значениями неизвестных при тех же осях U'_1 , V'_1 , U'_2 и V'_2 :

$$\begin{aligned} [b_1 b_2] &= Q'_1 - q'_1; & [b_1 a_2] &= \beta_{2..n}; & [b_1 b_2] &= \beta_{2..v}; \\ [a_2 a_2] &= Q'_2 + q_2; & [b_2 b_2] &= Q'_2 - q'_2. \end{aligned}$$

Таким образом элементы Q и q наряду со связующими векторами α и β служат исходными для получения коэф-

фициентов нормальных уравнений при любом направлении координатных осей.

Поэтому Q' и q' мы называем нормальными элементами в отличие от весовых элементов Q и q , являющихся исходными для получения весовых коэффициентов $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ и т. д.

Коэффициенты $[a_1a_1]$, $[a_1b_1]$ и $[b_1b_1]$, равно как и $[a_2a_2]$, $[a_2b_2]$ и $[b_2b_2]$, получаются из Q'_1 , q'_1 и Q'_2 , как при вставке одной точки $[aa]$, $[ab]$ и $[bb]$ из Q и q (см. конец п. 3 § 11). Так же для этих коэффициентов пригодны формулы (11.30) для каждой из двух вставляемых точек в отдельности. В этих формулах вместо Q и q нужно иметь в виду Q'_1 и q'_1 или Q'_2 и q'_2 и вместо φ угол φ'_1 или φ'_2 , т. е. углы между осью X и осями U'_1 и U'_2 .

Построение коэффициентов $[a_1a_2]$, $[a_1b_2]$, $[b_1a_2]$ и $[b_1b_2]$ сложнее. При этом нужно исходить из конструирования векторов α и β , и, пожалуй, проще вновь построить их по формулам (18.14), беря вместо проекций на оси U'_2 , V'_2 и U'_1 , V'_1 проекции на оси X и Y в качестве множителей в указанных формулах.

§ 19. ВЕСА И ПОГРЕШНОСТИ УРАВНЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ ДВУХ СОВМЕСТНО ВСТАВЛЕННЫХ ТОЧЕК

п. 1. Веса координат при особом направлении координатных осей. Возьмем, как обычно, линейную функцию

$$F = f_1u_1 + f_2v_1 + f_3u_2 + f_4v_2,$$

где u_1 , v_1 и u_2 , v_2 — координаты с особо выбранными направлениями осей U_1 , V_1 и U_2 , V_2 при совместной вставке двух точек, согласно предыдущему параграфу.

Вес функции $F=u$, т. е. при $f_1=1$, $f_2=f_3=f_4=0$, как известно, определяется по формуле

$$\frac{1}{P_{a.1}} = [\alpha\alpha].$$

Значит, при получении коэффициента $[\alpha\alpha]$ для выражения веса

абсциссы u_1 нужно отрезок, равный единице на оси U_1 , разделить на $Q_1 + q_1$. Это и будет

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{Q_1 + q_1} = \frac{1}{P_{u.1}}.$$

Аналогично получаем и веса других координат при особом направлении координатных осей. Итак,

$$\begin{aligned} P_{u.1} &= Q_1 + q_1; \quad P_{v.1} = Q_1 - q_1; \quad P_{u.2} = Q_2 + q_2; \\ P_{v.2} &= Q_2 - q_2; \end{aligned} \quad (19.1)$$

$P_{u.1} = p_{\max}$; $P_{v.1} = p_{\min}$ в эллипсе погрешности точки 1;
 $P_{u.2} = p_{\max}$; $P_{v.2} = p_{\min}$ в эллипсе погрешности точки 2.

п. 2. Веса обычных координат. При другом произвольном направлении оси абсцисс X , составляющей с осями U_1 и U_2 углы φ_1 и φ_2 , мы получаем

$$P_{x.1} = \frac{1}{[\alpha\alpha]}; \quad P_{y.1} = \frac{1}{[\beta\beta]}; \quad P_{x.2} = \frac{1}{[\gamma\gamma]}; \quad P_{y.2} = \frac{1}{[\delta\delta]}, \quad (19.2)$$

где весовые координаты $[\alpha\alpha], \dots, [\delta\delta]$ получены согласно предыдущему параграфу при осях X и Y .

Можно для этих коэффициентов применить формулы (11.26) и (11.28):

$$\left. \begin{aligned} [\alpha\alpha] &= \frac{Q_1 - q_1 \cos 2\varphi_1}{Q_1^2 - q_1^2} = R_1 - r_1 \cos 2\varphi_1, \\ [\beta\beta] &= \frac{Q_1 + q_1 \cos 2\varphi_1}{Q_1^2 - q_1^2} = R_1 + r_1 \cos 2\varphi_1, \\ [\gamma\gamma] &= \frac{Q_2 - q_2 \cos 2\varphi_2}{Q_2^2 - q_2^2} = R_2 - r_2 \cos 2\varphi_2, \\ [\delta\delta] &= \frac{Q_2 + q_2 \cos 2\varphi_2}{Q_2^2 - q_2^2} = R_2 + r_2 \cos 2\varphi_2, \end{aligned} \right\} \quad (19.3)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q_1 - q_1} + \frac{1}{Q_1 + q_1} \right); & r_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q_1 - q_1} - \frac{1}{Q_1 + q_1} \right); \\ R_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q_2 - q_2} + \frac{1}{Q_2 + q_2} \right); & r_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q_2 - q_2} - \frac{1}{Q_2 + q_2} \right). \end{aligned}$$

п. 3. Вес направления и расстояния между совместно вставленными двумя точками 1 и 2. Для определения веса направления направим ось X по направлению 1—2. Функция F примет вид

$$F_x = g_{1,2} y_2 - g_{1,2} y_1, \quad (19.4)$$

т. е.

$$f_1 = f_3 = 0; \quad f_2 = -g_{1,2}; \quad f_4 = +g_{1,2}.$$

Значит, в данном случае на основании известного выражения (11.23) имеем

$$\frac{1}{P_x} = g_{1,2}^2 ([\beta\beta] - 2[\beta\delta] + [\delta\delta]). \quad (19.5)$$

Для определения веса P_s расстояния s между точками 1 и 2 ось X направляем по прямой 1—2.

$$F_s = x_2 - x_1; \quad f_1 = -1; \quad f_3 = +1; \quad f_2 = f_4 = 0. \\ \frac{1}{P_s} = [\alpha\alpha] - 2[\alpha\gamma] + [\gamma\gamma]. \quad (19.6)$$

Весовые коэффициенты в выражениях (19.5) и (19.6) получаются согласно § 18. Коэффициенты $[\beta\delta]$ и $[\alpha\gamma]$ требуют построения связующих градиентов α и β и нормальных элементов Q' и q' ; $g_{1,2}$ в выражении (19.5)—градиент направления 1—2, равный $\frac{20626}{s}''/\text{дм}$.

п. 4. Веса направления и расстояния, связывающих одну из двух совместно вставленных точек с некоторой твердой точкой. Поскольку ошибки такого направления или расстояния зависят от ошибки только одной точки, применимы выводы п. 4 § 11:

$$\frac{1}{P_x} = g^2[\beta\beta] \text{ или } = g^2[\delta\delta]; \quad \frac{1}{P_s} = [\alpha\alpha] \text{ или } = [\gamma\gamma], \quad (19.7)$$

где $[\alpha\alpha]$ и $[\beta\beta]$ находятся по Q_1 и q_1 , а $[\gamma\gamma]$ и $[\delta\delta]$ —по Q_2 и q_2 ;

$\frac{1}{[\beta\beta]}$ равно квадрату перпендикулярного к данному на-

правлению радиуса-вектора эллипса с полуосями $\sqrt{Q_1 + q_1}$ и $\sqrt{Q_1 - q_1}$ (см. замечание в п. 2 § 11);

$\frac{1}{[\delta\delta]}$ отвечает радиусу-вектору эллипса с элементами Q_2 и q_2 .

Напомним, что для весов мы берем квадрат радиуса-вектора самого весового эллипса с квадратами полуосей, равными $p_{\max}$ и $p_{\min}$, а для погрешностей следует брать радиус-вектор подеры эллипса погрешности;

$\frac{1}{[\alpha\alpha]}$ равно квадрату радиуса-вектора весового эллипса точки 1, идущего по данному направлению;

$\frac{1}{[\gamma\gamma]}$ равно тому же для точки 2.

п. 5. Сумма квадратов остаточных погрешностей. Для определения погрешностей, связанных с уравненным положением двух совместно вставленных точек и для контроля уравнивания имеется выражение:

$$[l_v l_v] = [ll] - [a_1 l] x_1 - [b_1 l] y_1 - [a_2 l] x_2 - [b_2 l] y_2. \quad (19.8)$$

Обратимся к уравнениям (18.10) или (18.13), у которых свободные члены не обременены фиктивными членами для исключения неизвестных.

Направим ось X по вектору T'_1 . Тогда $[a_1 l] = 0$, $[b_1 l] = T'_1$, и абсцисса x , как показано и в п. 5 § 10, будет равна отрезку t_1 , отсекаемому на векторе T'_1 идущем из Q'_1 , перпендикуляром $O_1 D_1$, опущенным из уравненного положения O точки 1 на T'_1 .

Это даст

$$[l_v l_v] = [ll] - T'_1 t_1 - [a_2 l] x_2 - [b_2 l] y_2. \quad (19.9)$$

Направим далее ось X по вектору T'_2 и заменим благодаря этому, как и для точки 1, $[a_2 l] x_2 + [b_2 l] y_2$ через $T'_2 t_2$, где t_2 — отрезок $O'_2 D_2$ на векторе T'_2 , отсекаемый перпендикуляром $O_2 D_2$.

В конечном счете мы получаем:

$$[l_v l_v] = [ll] - T'_1 t_1 - T'_2 t_2. \quad (19.10)$$

Отсюда ясно, что T'_1 и T'_2 , составленные из $g l_v$, равны нулю. Сумма $[l_v l_v]$ нужна для вывода средних квадратичных

ошибок m с весом, равным единице, и затем средних квадратичных ошибок координат и размеров эллипса погрешности, как и при вставке одной точки.

Число избыточных измеренных направлений следует считать равным $n-6$, где n — число всех внутренних и внешних направлений, в том числе и четырех взаимных направлений, связывающих обе вставляемые совместно точки. Таким образом, для ошибки с весом, равным единице, имеем:

$$m^2 = \frac{[L_v L_v]}{n-6}. \quad (19.11)$$

§ 20. ПРИМЕР СОВМЕСТНОЙ ВСТАВКИ ДВУХ ТОЧЕК

п. 1. Задание примера. Для иллюстрации сделанных выводов по графическому методу при совместной вставке двух точек возьмем пример конкретной вставки из „Курса маркшейдерского искусства“ И. М. Бахурина, чтобы иметь возможность сопоставить графическое решение с аналитическим, подробно изложенным в указанном курсе (задачи № 6—10, стр. 206—227).

Заметим, что при аналитическом решении внешние направления взяты не редуцированными и не связанными между собой для обеих точек. Вес их принят равным $1/2$, вес же внутренних направлений принят равным 1. Это заставило и нас для получения сравнимых результатов учесть данное обстоятельство при выражении коэффициентов σ весовых элементов и при получении связующих векторов α и β , лишившихся благодаря этому слагаемых с градиентами g' и g'' , фигурирующими в выражениях (18.14).

Требуется вставить совместно две точки: 1 (D) (Дубовая) и 2 (E) (Ершова), в сеть из пяти твердых точек с данными координатами:

	x	y
3 — П (Полозюкова)	— 7102.435,	+ 6656.202;
4 — 143.	— 1518.915,	+ 10953.650;
5 — О (Овчарова)	— 25503.235,	+ 7578.051;
6 — Ч (Черноморская)	— 24095.650,	— 5798.073;
7 — З (Заповедная)	— 9003.642,	— 985.231.

Измерены с одинаковой точностью направления в виде приведенных направлений на вставляемых точках и в виде углов на твердых точках

На точке 1 (D)		На точке 2 (E)	
3 (П)	0°00'00",	7 (З)	0°00'00",
4 (143)	20 52 43 ,	1 (D)	39 09 46 ,
5 (O)	174 42 50 ,	5 (O)	133 59 40 ,
7 (З)	293 54 49 ,	6 (Ч)	265 47 48 .
2 (E)	206 12 49 ,		

На твердых точках углы

$$\begin{aligned}
 5-3-1 &= 3^{\circ}44'31'', \\
 7-5-1 &= 23\ 01\ 00\ , \\
 5-7-1 &= 322\ 13\ 08\ , \\
 5-7-2 &= 15\ 21\ 14\ , \\
 7-6-2 &= 56\ 02\ 04\ , \\
 2-5-7 &= 30\ 38\ 57\ .
 \end{aligned}$$

Выписаны твердые направления

(дирекционные углы)

$$\begin{aligned}
 6-7 &= 17^{\circ}41'15''.1, \\
 3-5 &= 177\ 07\ 55.1, \\
 5-7 &= 332\ 34\ 14.5.
 \end{aligned}$$

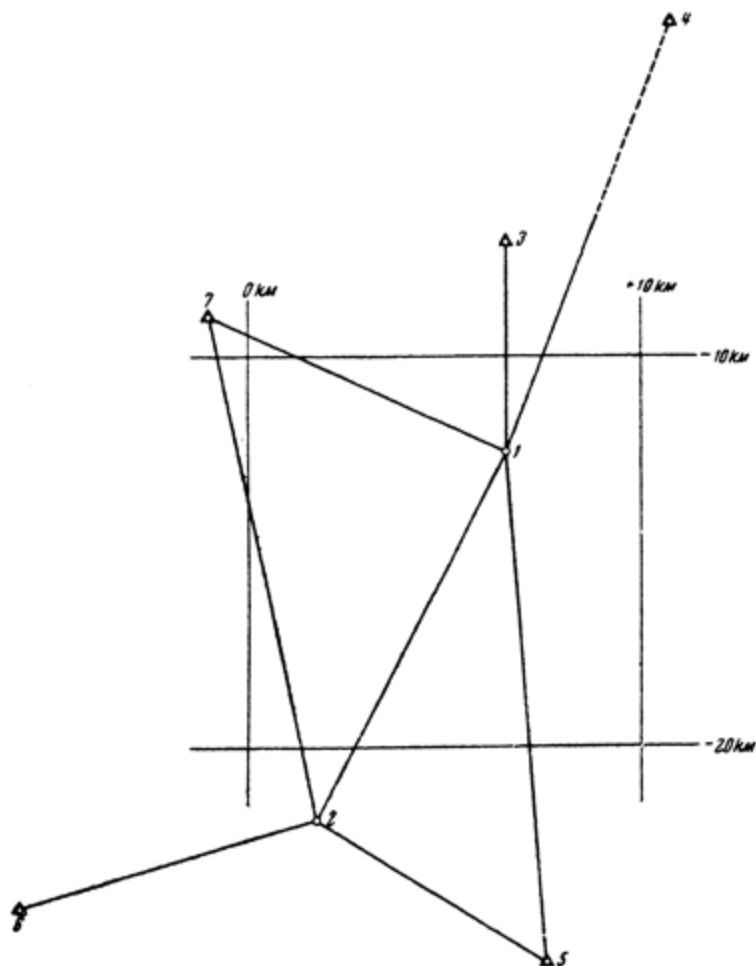
п. 2. Получение свободных членов и градиентов. Были найдены предварительные (приближенные — по обычно принятой у нас неправильной терминологии) координаты для вставляемых точек:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -12494.864; & y_1 &= +6573.622; \\
 x_2 &= -21885.410; & y_2 &= +1770.595.
 \end{aligned}$$

По этим координатам и координатам твердых точек дан на фиг. 46 чертеж расположения точек в масштабе 1:100 000 в подлиннике (клише же уменьшено в 2 раза). По этому чертежу определены графически расстояния от вставляемых точек до твердых и между вставляемыми, и по обычной

формуле $g = \frac{20626}{s} n/\text{дм}$ вычислены градиенты направлений, помещенные в табл. 6—8.

В табл. 6 мы даем вычисление свободных членов уравнений погрешностей с предлагаемым нами одновременным



Фиг. 46

редуцированием их с помощью среднего ориентирного угла $\omega_{\text{ср}}$ в отличие от схем, данных в указанном курсе И. М. Бахурина.

Для внешних направлений пришлось прямо сравнивать измеренный угол с вычисленным. Вычисленные направления

Точка		Приведенное направление β	Вычисленные дирекционные углы α	Ориентирные углы $\omega = \alpha - \beta$	$t = \omega_{\text{ср}} - \omega$	s м	g "/дм
стояния	визи- рова- ния						
1	2	206°12'49"	207°05'18".9	0°52'29".9	+ 1.3	10 500	1.95
	3	00 00 00	0 52 38.5	38.5	- 7.3	5 400	3.82
	4	20 52 43	21 45 17.3	34.3	- 3.1	11 800	1.75
	5	174 42 50	175 35 05.0	15.0	+16.2	12 950	1.58
	7	293 54 49	294 47 27.2	38.2	- 7.0	8 300	2.49
				$\omega_{\text{ср}} = 31.2$	+ 0.1	$t_1 =$	4.00
2	1	39°09'46"	27°05'18".9	347°55'32".9	-1.25	10 500	1.95
	5	133 59 40	121 55 16.8	36.8	-5.15	6 830	3.02
	6	265 47 48	253 43 16.3	28.3	+3.35	7 850	2.61
	7	0 00 00	347 55 28.6	28.6	+3.05	13 050	1.57
				$\omega_{\text{ср}} = 31.65$	0.0	$t_2 =$	1.16
3	5	0 00 00	177°07'55".1	177°07'55".1	—	—	—
	1	3°44'31"	180 52 38.5	08 07.5	-12".4	—	—
5	7	0 00 00	332°34'14".5	332°34'14".5	—	—	—
	1	23°01'00"	355 35 05.0	34 05.0	+9".5	—	—
7	5	0 00 00	152°34'14".5	152°34'14".5	—	—	—
	1	322°13'08"	114 47 27.2	34 19.2	-4".7	—	—
7	5	0 00 00	152°34'14".5	152°34'14".5	—	—	—
	2	15°21'14"	167 55 28.6	34 14.6	-0".1	—	—
6	7	0 00 00	17°41'15".1	17°41'15".1	—	—	—
	2	56°02'04"	73 43 16.3	4 41 12.3	+2".8	—	—
5	2	0 00 00	301°55'16".8	301°55'16".8	+0".7	—	—
	7	30°38'57"	332 34 14.5	55 17.5	—	—	—

На- прав- ление	Выраженный коэффициент τ	Угол направле- ния β	Градиенты		Число направ- лений		σ	τg^2
			обозначение	значение	обозначение	значение		
1	3 $\frac{2 k_3 - 1}{2 k_3}$	0 . 0	$g_{1.3}$	3.82(″/дм)	k_3	2	$3/4$	10.92(″/дм)
	4 $\frac{2 k_4 - 1}{k_4}$ одн	20.9	$g_{1.4}$	1.75	k_4	1	$1/2$	1.53
	5 $\frac{2 k_5 - 1}{2 k_5}$	174.7	$g_{1.5}$	1.58	k_5	2	$3/4$	1.87
	7 $\frac{2 k_7 - 1}{2 \tau}$	293.9	$g_{1.7}$	2.49	k_7	2	$3/4$	4.65
	2 $\frac{2 n_2 - 1}{n_2}$	206.2	$g_{1.2}$	1.95	n_2	4	$7/$	3.32
	$t_1 - \frac{1}{2 n_1}$	323.0	t_1	4.00	n_1	5	$-1/10$	-1.60
	q'_1	3.3	q'_1	12.42(″/дм) ²			$Q'_1 =$	20.69
	$\alpha_1 - \frac{1}{2(Q'_2 + q'_2)}$	195.0	α_1	2.05			-0.0248	-0.10
	$\beta_1 - \frac{1}{2(Q'_2 - q'_2)}$	17.0	β_1	7.65			-0.0383	-2.24
	q_1	0.3	$q_1 =$	10.40			$Q_1 =$	18.35
2	7 $\frac{2 k_7 - 1}{2 k_7}$	0 . 0	$g_{2.7}$	1.57(″/дм)	k_7	2	$3/4$	1.84
	5 $\frac{2 k_5 - 1}{2 k_5}$	134.0	$g_{2.5}$	3.02	k_5	2	$3/4$	6.84
	6 $\frac{2 k_6 - 1}{2 k_6}$	265.8	$g_{2.6}$	2.61	k_6	2	$3/4$	5.10
	1 $\frac{2 n_1 - 1}{2 n_1}$	39.2	$g_{2.1}$	1.95	n_1	5	$9/10$	3.42
	$t_2 - \frac{1}{2 n_2}$	46.7	t_2	1.16	n_2	4	$-1/8$	-0.17
	q'_2	113.6	q'_2	4.00(″/дм) ²			$Q'_2 =$	17.03
	$\alpha_2 - \frac{1}{2(Q'_1 + q'_1)}$	218.6	α_2	7.72			-0.0151	-0.90
	$\beta_2 - \frac{1}{2(Q'_1 - q'_1)}$	218.0	β_2	1.80			-0.0605	-0.19
	q_2	116.7	$q_2 =$	4.95			$Q_2 =$	15.94

мы заимствуем непосредственно из аналитического решения. Вычисление их неизбежно и в графическом решении. Это самая трудоемкая часть работы, если не считать решения нормальных уравнений.

Мы вычитаем из измеренных значений вычисленные; у Бахурина — наоборот. Поэтому здесь свободные члены l имеют знак, обратный свободным членам v в руководстве Бахурина.

Для внешних направлений можно было бы также находить $\omega_{\text{ср}}$ и получать l как разность $\omega_{\text{ср}} - \omega$. Тогда само собой получалось бы введение веса, равного $1/2$.

п. 3. Получение данных для построения. В табл. 7 приведены данные для построения весовых элементов и оставлены места для помещения результатов последующих построений. В табл. 8 выписаны данные для построения векторов отклонений T .

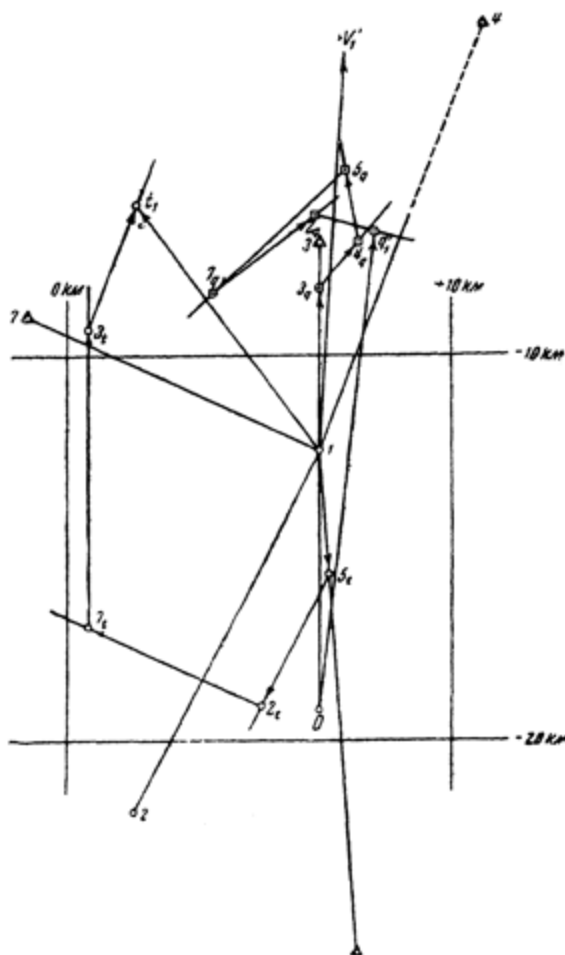
Получение отдельных величин ясно из таблиц. Так, в табл. 8 свободные члены l , связанные с одним и тем же градиентом, объединены по формуле $l = l_{\text{внутр}} + \frac{1}{2} l_{\text{внешн}}$,

Таблица 8

На- прав- ления	Углы β	$l_{\text{внешн}}$	$l_{\text{внутр}}$	$\frac{1}{2} l_{\text{внешн}} + l_{\text{внутр}} = l$	g	gl	
1	2	206°.2	-1".25	+1".30	+ 0".05	1.95"/дм	+ 0.1"/дм
	3	0.0	-12.4	- 7.3	-13.5	3.82	-51.6
	4	20.9	—	- 3.1	- 3.1	1.75	- 5.4
	5	174.7	+ 9.5	+16.2	+20.95	1.58	+33.1
	7	293.9	- 4.7	- 7.0	- 9.35	2.49	-23.3
	α_1	195.0	—	—	+ 1.30 дм	2.05	+ 2.7
	β_1	17.0	—	—	+ 0.30 дм	7.65	+ 2.3
2	1	39.2	+1.30	-1.25	+0.05	1.95	+ 0.1
	5	134.0	+0.7	-5.15	-4.80	3.02	-14.5
	6	265.8	+2.8	+3.35	+4.75	2.61	+12.4
	7	0.0	-0.1	+3.05	+3.00	1.57	+ 4.7
	α_2	218.6	—	—	+3.00 дм	7.72	+23.2
	β_2	218.0	—	—	-3.40 дм	1.80	- 6.1

что и отмечено в заголовке. Только взаимные направления $1-2$ и $2-1$ имеют $l = l_{\text{внутр}} + l_{\text{внешн}}$.

Величины векторов $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и β_2 внесены в столбец g табл. 8, а в столбце l на строках $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и β_2 проставлены



Фиг. 47

значения ниже найденных построением координат u'_2, v'_2, u'_1 и v'_1 с обратными знаками, согласно последним равенствам в системах (18.20) и (18.22). При этом α_1 отвечает $-u'_2$, β_1 отвечает $-v'_2$, и т. д.

п. 4. Построение векторов t и q' . Все построение можно обычно производить на одном чертеже, но здесь для большей ясности мы разнесем построение на несколько отдельных фигур.

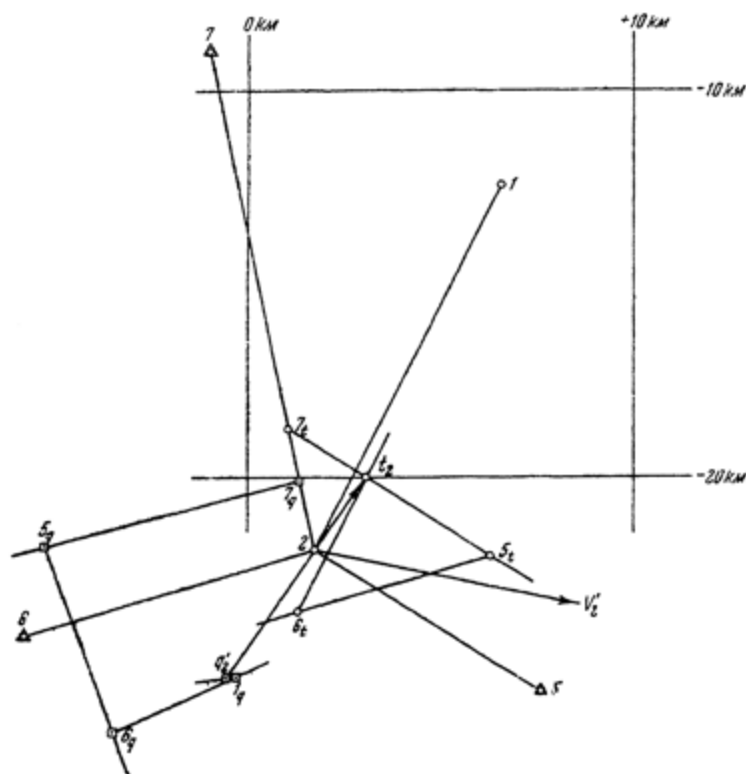
На фиг. 47 переколото с фиг. 46 всё, что относится к точке I , и произведено построение векторов t_1 и q'_1 . Для первого служит полигон $I-5_t-2_t-7_t-3_t-t_1$, стороны которого соответственно параллельны $\overrightarrow{I-5}$, $\overrightarrow{I-2}$, $\overrightarrow{I-7}$, $\overrightarrow{I-3}$ и $\overrightarrow{I-4}$ и равны в некотором масштабе градиентам $g_{1.5}$, $g_{1.2}$, $g_{1.7}$, $g_{1.3}$ и $g_{1.4}$. Замыкающая $I-t_1$ в принятом масштабе оказалась равной 4.00 " / дм. Дирекционный угол ее, замеренный транспортиром, равен $323^\circ.0$. Все это занесено в строку t табл. 7.

Далее, на фиг. 47 построен вектор q'_1 по взятым из табл. 7 σg^2 для точки I . Это делалось с удвоением углов β по транспортиру от начального направления $I-3$.

Так как для этого направления $\sigma g^2_{1.3}$ равно 10.92 (" / дм) и в принятом масштабе $1 \text{ см} = 1 (" / \text{дм})^2$ не помещается на фигуре, если $\sigma^2 g^2_{1.3}$ откладывать от точки I , то возьмем точку O на продолжении $3-I$, и от нее начнем построение. Вектор q'_1 является замыкающим квадратичного полигона $O-3_q-4_q-5_q-7_q-2_q-q'_1$. Последняя сторона $2_q-\overrightarrow{q'_1}$ равна минус 1.60 и отвечает градиенту t_1 . Это значит, что угол β для t_1 удвоен, а затем из него вычтено или к нему прибавлено 180° (взято обратное направление вследствие наличия знака минус). В данном случае $2\beta = 323^\circ \times 2 = 646^\circ$ или $646 - 360 = 286^\circ$. Опять от 286° отнимаем 180° , получаем 106° . Под этим углом к направлению $I-\overrightarrow{3}$ и проведена сторона $2_q-\overrightarrow{q'_1} = 1.60$. Вектор $O-\overleftrightarrow{q'_1}$ оказался равным $12.42 (" / \text{дм})^2$ и образует двойной угол с начальным направлением $\overrightarrow{I-3}$, равный $6^\circ.6$. Значит, истинное его направление, с которым в данном случае совпадает ось V'_1 , поскольку мы оперируем градиентами, направленными по линиям положений, т. е. повернутыми на 90° по движению часовой стрелки, будет иметь угол $\beta = \frac{1}{2} 6^\circ.6 = 3^\circ.3$, что и занесено в табл. 7

в строку q'_1 , равно как и величина его 12.42. Под углом $3^\circ.3$ на фиг. 47 к направлению $1-3$ проведена ось V'_1 .

Так же на фиг. 48, на которую с фиг. 46 переколото то, что относится к точке 2, построены векторы t_2 и q'_2 .

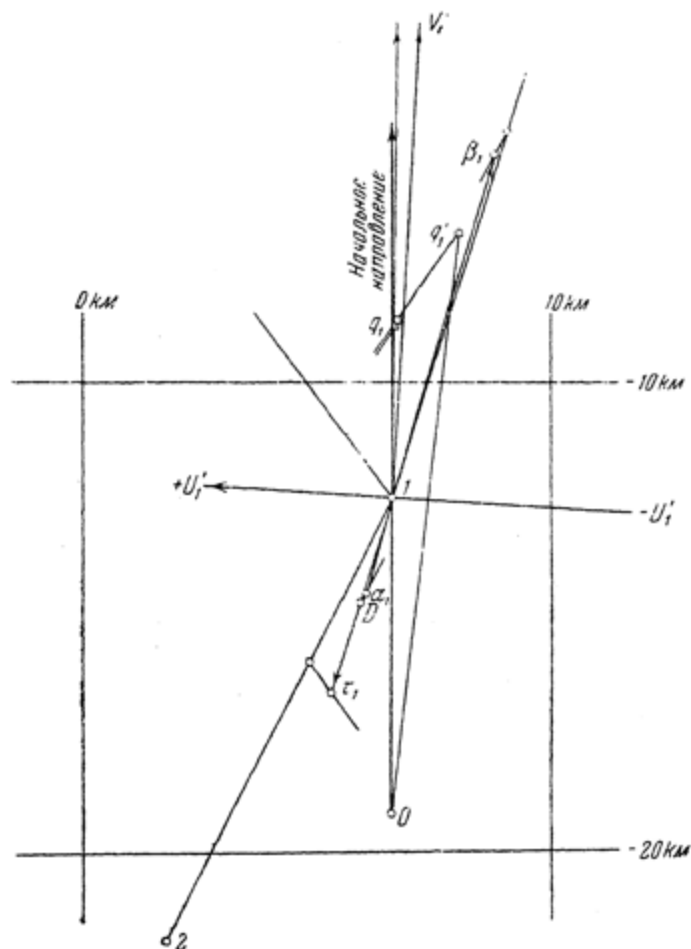


Фиг. 48

Полигон $2-7_t-5_t-6_t-t_2$ дает в качестве замыкающего вектор $t_2=1.16$ " / дм с углом $\beta=46^\circ.7$, образованным с начальным направлением $\overrightarrow{2-7}$. Сторона $6_t-\overrightarrow{t_2}$ параллельна $\overrightarrow{2-1}$ и равна $g_{2.1}=1.95$.

Квадратичный полигон $2-7_q-5_q-6_q-1_q-q'_2$ построен по удвоенным углам β , выписанным из табл. 6 в табл. 7, при начальном направлении $\overrightarrow{2-7}$. Последняя небольшая сторона $1_q-\overleftrightarrow{q'_2}$ равна $-\frac{1}{8}t^2=-0.17$. Она отложена под углом

$2\beta \pm 180^\circ = 46.^\circ 7 \times 2 + 180^\circ = 273.^\circ 4$ к начальному направлению. Величина замыкающей $2 \overleftrightarrow{q_2} = \overleftrightarrow{q_2}$ оказалась равной 4.00 (″/дм)². Она образует с $2 \overrightarrow{7}$ угол $2\beta = 227^\circ.2$, половина



Фиг. 49

которого $\beta = 113^\circ.6$ занесена в табл. 7 как и величина 4.00 . Под углом $113^\circ.6$ к начальному направлению $2 \overrightarrow{7}$ проведена ось V_2' .

п. 5. Построение векторов α , β и q . Для построения связующих векторов α и β нужно учесть то обстоятельство, ЭБ "Научное наследие России"

что у нас в данном примере, как и вообще, это удобнее при геодезической вставке, все градиенты повернуты на 90° по движению часовой стрелки.

Это значит, что в формулах (18.14) мы должны заменить g_u через $+g_v$ и g_v через $-g_u$. В соответствии с этим вместо формулы (18.14) получим:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= +\vec{\tau}_1 g_{2.1.v} - \frac{1}{n_2} \vec{g}_{1.2} t_{2.v} - \left[\frac{1}{k} \vec{g}' g_v'' \right], \\ \vec{\beta}_1 &= -\vec{\tau}_1 g_{2.1.u} + \frac{1}{n_2} \vec{g}_{1.2} t_{2.u} + \left[\frac{1}{k} \vec{g}' g_u'' \right], \\ \vec{\alpha}_2 &= +\vec{\tau}_2 g_{1.2.v} - \frac{1}{n_1} \vec{g}_{2.1} t_{1.v} - \left[\frac{1}{k} \vec{g}'' g_v' \right], \\ \vec{\beta}_2 &= -\vec{\tau}_2 g_{1.2.u} + \frac{1}{n_1} \vec{g}_{2.1} t_{1.u} + \left[\frac{1}{k} \vec{g}'' g_u' \right]. \end{aligned} \right\} \quad (20.1)$$

Вспомогательные векторы τ_1 и τ_2 строятся по формулам (18.15). Так как в данном примере не было редуцирования внешних направлений, то в формулах (20.1), как уже указывалось, члены с g' и g'' отпадают и α и β состоят только из двух первых слагаемых.

На фиг. 49 и 50 сначала построены векторы τ_1 и τ_2 и затем их величина перенесена в табл. 9, где, кроме того, выписаны проекции на оси V' и U' других соответствующих градиентов и вычислены слагаемые векторов α и β .

Таблица 9

Обозначения		Значения				
I	II	I	II _v	+I · II _v	II _u	-I · II _u
$+\tau_1$	$g_{2.1}$	+4.30	+0.52	+2.24	+1.89	-8.15
$-\frac{1}{n_2} \vec{g}_{1.2}$	t_2	-0.49	+0.45	-0.22	+1.06	+0.52
			α_1	=2.05	β_1	=7.65
τ_2	$g_{1.2}$	+3.65	-1.79	-6.54	+0.77	-2.81
$-\frac{1}{n_1} \vec{g}_{2.1}$	t_1	-0.39	+3.03	-1.18	+2.58	+1.01
			α_2	=7.72	β_2	=1.80

его, т. е. угол β с начальным направлением, равен 195° . Все это занесено в табл. 7. Так же построен вектор β_1 на фиг. 49 и векторы α_2 и β_2 на фиг. 50. Их величины и направления помещены в табл. 7.

После этого на фиг. 49 и 50 построены элементы q_1 и q_2 , для чего на них с фиг. 47 и 48 перенесены векторы q'_1 и q'_2 и оси V'_1 и V'_2 . Отрицательные слагаемые для $\overleftrightarrow{q_1}$ и $\overleftrightarrow{q_2}$, согласно формулам (18.20) и (18.22), вычислены в табл. 7 и помещены там в строках α и β и столбцах sg^2 . Вследствие наличия знака минус требовалось после удвоения угла направления β прибавлять или отнимать еще 180° .

Так, при построении q_1 на фиг. 49 от конца q'_1 проведена в качестве первого слагаемого бо́льшая сторона, равная

$$-2.24 = -\frac{\beta_1}{2(Q'_2 - q'_2)},$$

под углом $17.0 \cdot 2 + 180 = 214^\circ$ к начальному направлению. Далее отложена небольшая сторона, равная -0.10 .

После разделения углов между начальными направлениями и векторами $\overleftrightarrow{O - q_1}$ и $\overleftrightarrow{2 - q_2}$ (фиг. 49 и 50) пополам, получены направления осей V_1 и V_2 .

п. 6. Построение векторов T' и T уравненного положения точек. На следующих двух фигурах (фиг. 51 и 52) сначала построены векторы T'_1 и T'_2 , для которых были взяты слагаемые gl данных направлений из табл. 8.

Слагаемые параллельны непосредственно самим градиентам, как и слагаемые векторов t_1 и t_2 на фиг. 47 и 48. Поэтому на фиг. 51 и 52 перенесены не только начальные, но и другие имеющиеся направления.

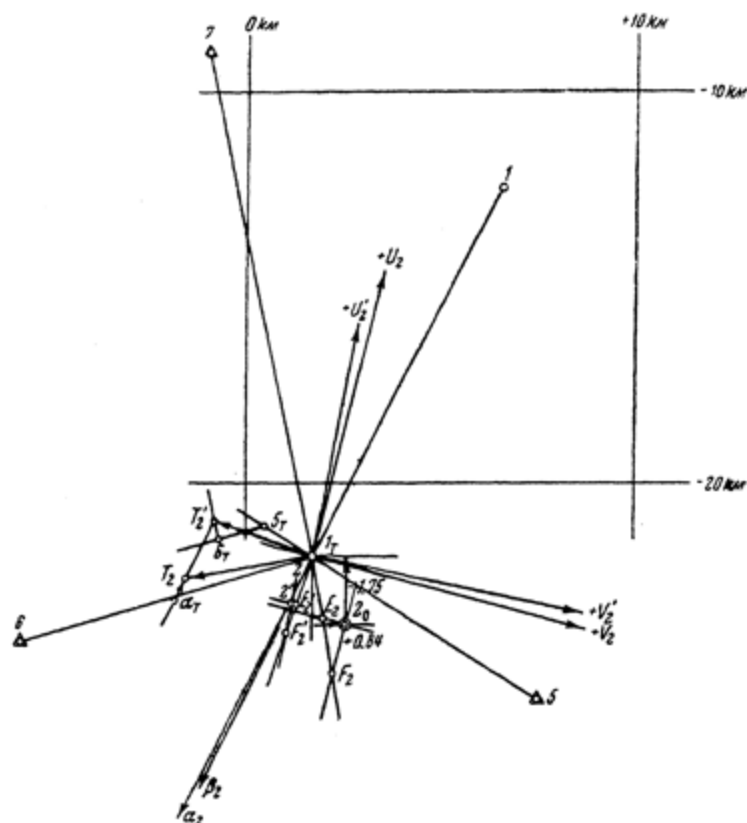
Подчеркнем еще раз, что все построения при достаточной тренировке можно производить на одном чертеже (фиг. 46), но для наглядности мы расчленили построение на ряд отдельных фигур, давая к тому же для каждой из двух вставляемых точек свой отдельный чертеж.

Знак минус в слагаемых gl означает, что нужно отложить отрезок в сторону, обратную той, которую показывает соответствующий градиент.

The diagram illustrates a complex geometric configuration. At point 1, several vectors originate: $V_T + V_T'$ pointing upwards, $-U_T'$ pointing downwards-right, and others towards points 2, 3, 4, 5, and 7. Point 3 is located near the top center, point 4 is further up and to the right, point 5 is at the bottom, and point 7 is on the left. Horizontal reference lines are drawn at vertical levels labeled $+10 \text{ km}$, -10 km , and -20 km . Vertical lines are also present, with one labeled 0 km near point 7. Various geometric relationships are indicated: a circle centered at point 1 passes through point 2; another circle is shown near point 3; a dashed line connects points 3 and 4; and several angles are marked, including α_T and β_T . Specific distance values are noted: $+2.78$ and $+2.96$ along a vertical segment near point 1, and 1.1 and 1.2 near point 5. Symbols like F_1 , E_1 , r_1 , and t_1 are used to denote specific locations or parameters.

Вектор T_1 на фиг. 51 состоит из пяти геометрических слагаемых, представленных полигоном $1-2_T-3_T-4_T-$

$-5_T - T'_1$. Точка 2_T совпадает с точкой I , поскольку в принятом масштабе стороны $1-2_T=0.1$ мм. Как видим, слагаемые $\overrightarrow{2_T-3_T}$, $\overrightarrow{3_T-4_T}$ и $\overrightarrow{5_T-T'_1}$ направлены в обратную градиентам $g_{1.3}$, $g_{1.4}$ и $g_{1.7}$ сторону.



Фиг. 52

Величина T'_1 оказалась равной 101.4 ($n^2/\text{дм}$).

Далее на фиг. 51 получено первое приближение точки I , отмеченное I' . Для этого вектор T'_1 повернут против движения часовой стрелки на 90° и на нем отложены отрезки

$$E'_1 = \frac{T'_1}{Q'_1 + q'_1} = \frac{101.4}{33.41} = 3.06 \text{ дм}; F'_1 = \frac{T'_1}{Q'_1 - q'_1} = \frac{101.4}{8.27} = 12.26 \text{ дм}.$$

Величины Q_1 и q_1' взяты из табл. 7. Величина Q_1' получена арифметическим сложением непосредственно в табл. 7, а q_1' найдена выше, на фиг. 49.

Для отложения отрезков E_1' и F_1' , согласно размерам фиг. 51, взят масштаб $M = 1/20$, соответственно уменьшенный при изготовлении клише.

Получены точки E_1' и F_1' , через которые проведены прямые, параллельные осям V_1' и U_1' . В пересечении этих прямых получена точка I , координаты которой $u_1' = -3.00$ дм и $v_1' = 3.40$ дм по отношению к точке I в системе осей U_1' и V_1' внесены в табл. 8 с обратными знаками в строки α_2 и β_2 для второй точки.

Так же на фиг. 52 построен вектор T_2' с помощью полигона $2 - I_T - 5_T - 6_T - T_2'$. Величина T_2' получилась равной 27.0. Отсюда

$$E_2' = \frac{T_2'}{Q_2' + q_2'} = \frac{27.0}{21.03} = 1.28 \text{ дм}; F_2' = \frac{T_2'}{Q_2' - q_2'} = \frac{27.0}{13.03} = 2.07 \text{ дм.}$$

Вектор T_2' повернут на 90° против движения часовой стрелки; на нем нанесены точки E_2' и F_2' и затем построена точка $2'$ проведением $E_2' - 2'$ и $F_2' - 2'$ параллельно и перпендикулярно к V_2' .

Координаты точки $2'$ в системе осей U_2' и V_2' по отношению к точке 2 оказались (масштаб в два раза крупнее, чем на фиг. 51) равными:

$$u_2' = -1.30 \text{ дм}; \quad v_2' = -0.30 \text{ дм.}$$

Данные значения с обратными знаками внесены в табл. 8 для точки I в строки α_1 и β_1 .

Затем в табл. 8 подсчитаны дополнительные слагаемые к векторам T' , чтобы получить T в виде произведений: $-\alpha_1 u_2'$, $-\beta_1 v_2'$, $-\alpha_2 u_1'$, $-\beta_2 v_1'$. Эти произведения получены в столбце gl табл. 8 в строках α и β .

После этого приступают к построению векторов T_1 и T_2 .

На фиг. 51 к вектору T_1 до его поворота на 90° пристроен вектор $\overrightarrow{T_1 - \alpha_T}$, параллельный $\overrightarrow{1 - \alpha_1}$ и направленный в ту же сторону, поскольку $-\alpha_1 u_2 = +2.7$. Далее в направлении вектора β_1 отложено $-\beta_1 v_2 = +2.3$ и получена точка T_1 , почти совпадающая с T_1' .

Также на фиг. 52 к T_2 пристроены два вектора $\overrightarrow{T_2 - \alpha_T}$ и $\overrightarrow{\alpha_T - T_2}$, равные $+23.2$, -6.1 . В результате построений имеем:

$T_1 = 101.6$ " / дм на фиг. 51 и $T_2 = 33.4$ " / дм на фиг. 52.

Теперь остается получить окончательные уравненные положения точек 1 и 2. Для этого опять повернем против движения часовой стрелки на 90° векторы T_1 и T_2 и отложим на них

$$E_1 = \frac{T_1}{Q_1 + q_1} = \frac{101.6}{18.35 + 10.40} = \frac{101.6}{28.75} = 3.57 \text{ дм},$$

$$F_1 = \frac{T_1}{Q_1 - q_1} = \frac{101.6}{7.95} = 12.78 \text{ дм},$$

в масштабе 1 : 20 на фиг. 51 и

$$E_2 = \frac{T_2}{Q_2 + q_2} = \frac{33.4}{15.94 + 4.95} = \frac{33.4}{20.89} = 1.60 \text{ дм},$$

$$F_2 = \frac{T_2}{Q_2 - q_2} = \frac{33.4}{10.99} = 3.04 \text{ дм}$$

в масштабе 1 : 10 на фиг. 52 (при изготовлении клише черитеж уменьшен в два раза).

Через точки E_1 и F_1 проводим прямые, параллельные осям V_1 и U_1 , перенесенным с фиг. 49 на фиг. 51. Получаем в пересечении точку I_0 , как окончательное уравненное положение вставляемой точки 1.

Координаты x и y точки I_0 по отношению к точке 1 оказались равными: $x_1 = +2.78$ дм; $y_1 = +3.46$ дм (масштаб 1 : 20).

В руководстве Бахурина аналитически получилось

$$x_1 = +2.79 \text{ дм}; \quad y_1 = +3.50 \text{ дм}.$$

п. 7. Получение весовых коэффициентов. Для иллюстрации выводов п. 5 § 18 произведено построение весовых коэффициентов. Перенесем на отдельный чертеж (фиг. 53) с предшествующих фигур точки 1 и 2, направление осей V'_1 , U'_1 и V_1 на точке 1, ось V_2 и векторы α_2 и β_2 на точке 2.

Примем на фиг. 53 направление $2 \xrightarrow{I}$ за положительное направление оси X . Решим первую систему уравнений (18.24).

Буквенные обозначения, относящиеся к этому решению, будем обозначать внизу индексом 1.1 или 2.1. Первый индекс означает первую точку и первую систему уравнений, второй индекс — вторую точку и первую систему уравнений. Ниже мы встретим индексы 1.2, 2.2 — это будет обозначать точки 1 и 2 и вторую систему уравнений (18.25). Далее 2.3 и 2.4 будет обозначать точки 2 и 3 и четвертую систему уравнений весовых коэффициентов.

При решении первой системы уравнений отложим на положительном направлении оси X отрезки $\overrightarrow{I-E_{1.1}} = \frac{1}{Q_1 + q_1}$ и $\overrightarrow{I-F_{1.1}} = \frac{1}{Q_1 - q_1}$.

Все величины, необходимые для построений, и результаты построений помещены в табл. 10. Масштаб построений 0.01 в 5 мм или 0.02 в 1 см (при изготовлении клише он уменьшен в 2 раза).

Проводим $E_{1.1}K_{1.1}$ параллельно V_1 и $F_{1.1}K_{1.1}$ — перпендикулярно к V_1 . Координаты точки $K_{1.1}$ в системе X, Y при начале координат в точке 1 будут $x_1 = [\alpha\alpha]$ и $y_1 = [\alpha\beta]$. Записываем их значения в третьем столбце табл. 10.

Затем находим $u'_{1.1}$ и $v'_{1.1}$ по данной величине вектора $T'_{1.1} = 1$, направленного по положительному направлению оси X как пояснено в п. 5 § 18. Откладываем $\overrightarrow{I-E'_{1.1}} = \frac{1}{Q'_1 + q'_1}$ и $\overrightarrow{I-F'_{1.1}} = \frac{1}{Q'_1 - q'_1}$ и проводим прямые — параллельную оси V'_1 и перпендикулярную к ней. Получаем точку $K'_{1.1}$; ее координаты по отношению осей U'_1 и V'_1 будут искомые $u'_{1.1}$

Точка	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Обозначения	$\frac{1}{Q_1+q_1}$	$\frac{1}{Q'_1+q'_1}$	$[\alpha\alpha]$	$[\gamma\gamma]$	α_2	$u'_{1.2}$	$-u_{1.2}\alpha_2$	$\frac{T_{2.1}}{Q_2+q_2}$	$[\alpha\gamma]$
	$\frac{1}{Q_1-q_1}$	$\frac{1}{Q'_1-q'_1}$	$[\alpha\beta]$	$[\gamma\gamma]$	β_2	$v'_{1.2}$	$-v_{1.2}\beta_2$	$\frac{T_{2.1}}{Q_2-q_2}$	$[\beta\gamma]$
	$\frac{1}{Q_2+q_2}$	—	$[\beta\beta]$	$[\delta\delta]$	$u'_{1.1}$	$-u'_{1.1}\alpha_2$	$T_{2.1}$	$\frac{T_{2.1}}{Q_2+q_2}$	$[\alpha\delta]$
	$\frac{1}{Q_2-q_2}$	—	$[\beta\alpha]$	$[\gamma\delta]$	$v'_{1.1}$	$-v'_{1.1}\beta_2$	$T_{2.2}$	$\frac{T_{2.2}}{Q_2-q_2}$	$[\beta\delta]$
Значения	0.035	0.031	0.107	0.050	7.72	-0.028	+0.216	0.005	-0.0013
	0.126	0.119	-0.036	+0.009	1.80	-0.049	+0.083	0.010	+0.0030
	0.048	—	0.053	0.0875	-0.012	+0.093	0.105	0.014	-0.0102
	0.091	—	-0.036	+0.009	+0.108	-0.198	0.299	0.027	+0.0265

и $v'_{1.1}$. Значения их вносим в пятый столбец табл. 10. Далее строим на точке 2 вектор $\vec{T}_{2.1} = -u'_{1.1}\alpha_2 - v'_{1.1}\beta_2$ и поворачиваем его на 90° против движения часовой стрелки, поскольку у нас α_2 и β_2 построены при градиентах, повернутых на 90° по движению часовой стрелки. Слагаемые вектора $T_{2.1}$ помещены в табл. 10 в шестом столбце и отложены в направлении: прямом α_2 —отрезок +0.093 и обратном β_2 —отрезок -0.198 в масштабе $0.1 = 1$ см (учесть уменьшение клише) в виде отрезков $2-\vec{A}$ и $\vec{A}-T_{2.1}$. На повернутом $T_{2.1}$ отложены отрезки $2-\vec{E}_{2.1} = \frac{T_{2.1}}{Q_2+q_2}$ и $2-\vec{F}_{2.1} = \frac{T_{2.1}}{Q_2-q_2}$ и через точки $E_{2.1}$ и $F_{2.1}$ проведены прямые — параллельная оси V_2 и перпендикулярная к ней.

Величины $T_{2.1}$ и отрезков $2-\vec{E}_{2.1}$ и $2-\vec{F}_{2.1}$ мы имеем в табл. 10.

Проведенные через точки $E_{2.1}$ и $F_{2.1}$ прямые дают в пересечении точку $K_{2.1}$, координаты которой в системе X и Y при начале координат в точке 2 будут: $x_2 = [\alpha\gamma]$ и $y_2 = [\alpha\delta]$,

что и занесено в девятый столбец табл. 10. Масштаб построения точки $K_{2.1}$ 0.005 в 1 см (до уменьшения клише).

Переходим к решению второй системы уравнений (18.25).

Вектор $T_{1.2} = 1$ направляем по положительному направлению оси y_1 , откладывая на ней отрезки $1 - E_{1.2} = \frac{1}{Q_1 + q_1}$

и $1 - F_{1.2} = \frac{1}{Q_1 - q_1}$ и строим точку $K_{1.2}$, проведя $E_{1.2}K_{1.2}$ параллельно V_1 и $F_{1.2}K_{1.2}$ — перпендикулярно к V_1 . Координаты $K_{1.2}$ в принятой системе X, Y будут: $x_1 = [\alpha\beta]$; $y_1 = [\beta\beta]$.

Найденное $[\alpha\beta]$ должно равняться предыдущему значению, полученному из первой системы уравнений. Так оно и получилось. Значения $[\beta\alpha]$ и $[\beta\beta]$ занесены в табл. 10 (третий столбец).

Теперь находим $u'_{1.2}$ и $v'_{1.2}$, строя точку $K'_{1.2}$ отложением по оси Y_1 отрезков

$$1 - E'_{1.2} = \frac{1}{Q'_1 + q'_1}, \quad 1 - F'_{1.2} = \frac{1}{Q'_1 - q'_1}$$

и проведением прямых, параллельных осям V'_1 и U'_1 . Масштаб: 0.02 в 1 см (до уменьшения клише).

Затем строим вектор $\vec{T}_{2.2} = -u'_{1.2}\vec{\alpha}_2 - v'_{1.2}\vec{\beta}_2 = +0.216 + +0.083$ в виде полигона $2-B-T_{2.2}$.

Поворачиваем $T_{2.2}$ на 90° против движения часовой стрелки и откладывая на нем отрезки

$$\overrightarrow{2-E_{2.2}} = \frac{T_{2.2}}{Q_2 + q_2}, \quad \overrightarrow{2-F_{2.2}} = \frac{T_{2.2}}{Q_2 - q_2}.$$

После проведения через $E_{2.2}$ и $F_{2.2}$ прямых, параллельных V_2 и U_2 , получаем в их пересечении точку $K_{2.2}$ с координатами в системе X_2, Y_2 :

$$x_2 = [\beta\gamma] = +0.003, \quad y_2 = [\beta\delta] = 0.0265.$$

Масштаб подлинника 0.005 в 1 см. Остается еще построить $[\gamma\gamma]$, $[\gamma\delta]$ и $[\delta\delta]$. Для этого следовало бы использовать третью и четвертую системы уравнений типа (18.25). Полное и

использование даст вторичные значения величин $[\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$, $[\alpha\delta]$ и $[\beta\delta]$. Но чтобы не загромождать фиг. 53, ограничимся только определением $[\gamma\gamma]$, $[\gamma\delta]$ и $[\delta\delta]$, что можно сделать на основании уже полученных величин, помещенных в табл. 10. Отложив по оси $\perp X$ от точки 2 отрезки

$$2 - E_{2.3} = \frac{1}{Q_2 + q_2}, \quad 2 - F_{2.3} = \frac{1}{Q_2 - q_2}$$

и проведя прямые, параллельные V_2 и U_2 , обычным построением найдем точку $K_{2.3}$, координаты которой в системе X_2, Y_2 будут: $x_2 = [\gamma\gamma] = 0.050$ и $y_2 = [\gamma\delta] = \perp 0.009$. Масштаб подлинника: 0.02 в 1 см.

Далее по оси $\perp Y_2$ откладываем

$$\overrightarrow{2 - E_{2.4}} = \frac{1}{Q_2 + q_2}, \quad \overrightarrow{2 - F_{2.4}} = \frac{1}{Q_2 - q_2},$$

проводим прямые, параллельные V_2 и U_2 , и получаем точку $K_{2.4}$ с координатами $x_2 = [\delta\gamma] = 0.009$ и $y_2 = [\delta\delta] = 0.0875$ (см. табл. 10).

п. 8. Определение весов функций. Согласно формулам (19.5) и (19.6), определим веса направления и расстояния между вставленными точками 1 и 2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_\alpha} &= g_{1.2}^2 ([\beta\beta] - 2[\beta\delta] + [\delta\delta]) = \\ &= 3.80 (0.053 - 0.053 + 0.0875) = 0.3325. \end{aligned}$$

В курсе И. М. Бахурина аналитически получилось $\frac{1}{P_\alpha} = 0.333$.

$$\frac{1}{P_s} = [\alpha\alpha] - 2[\alpha\gamma] + [\gamma\gamma] = 0.107 + 0.0026 + 0.050 = 0.1596.$$

У Бахурина $\frac{1}{P_s} = 0.160$.

Для определения весов координат вставленных точек в геодезической системе координат X и Y применим формулы (19.3) с углами φ_1 и φ_2 , образованными осями U_1 и U_2 с осью X . Эти углы замерены на фиг. 53. Они оказались равными: $\varphi_1 = 271^\circ$; $\varphi_2 = 25^\circ$.

По этим углам и величинам

$$R_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q_1 - q_1} + \frac{1}{Q_1 + q_1} \right) = \frac{1}{2} (0.126 + 0.035) = 0.0805;$$

$$r_1 = \frac{1}{2} (0.126 - 0.035) = 0.0455;$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q_2 - q_2} + \frac{1}{Q_2 + q_2} \right) = \frac{1}{2} (0.091 + 0.048) = 0.0695;$$

$$r_2 = \frac{1}{2} (0.091 - 0.048) = 0.0215.$$

По формулам (19.3) получаем:

$$\frac{1}{P_{x.1}} = [\alpha\alpha]_x = 0.126; \quad \frac{1}{P_{y.1}} = [\beta\beta]_x = 0.0348;$$

$$\frac{1}{P_{x.2}} = [\gamma\gamma]_x = 0.0505; \quad \frac{1}{P_{y.2}} = [\delta\delta]_x = 0.0881.$$

У Бахурина соответственно находим:

$$0.126; 0.0346; 0.0883 \cdot \frac{11.60}{20.34} = 0.0504; 0.0883.$$

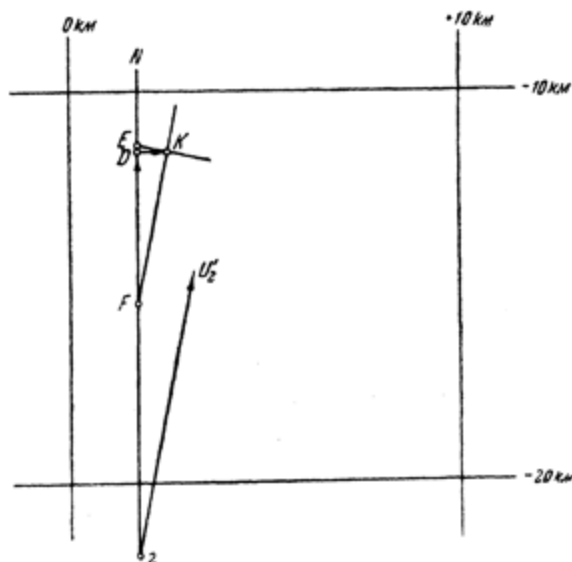
Вместо применения формул (19.3) проще было бы построить $[\alpha\alpha]_x$, $[\beta\beta]_x$, $[\gamma\gamma]_x$ и $[\delta\delta]_x$ на геодезических осях X и Y , как мы строили их при условной оси X , совмещенной с направлением 1—2 на фиг. 53. Но нам было желательно проверить формулы (19.3).

п. 9. Построение нормальных коэффициентов. На фиг. 54 произведено построение для примера нормальных коэффициентов $[cc]$ и $[cd]$, согласно указаниям в конце § 18.

На прямой 2— N , параллельной геодезической оси абсцисс, отложены отрезки $\overrightarrow{2-E} = Q'_2 + q'_2 = 21.03$ и $\overrightarrow{2-F} = 13.03 = Q'_2 - q'_2$ в масштабе 2.00 в 1 см в подлиннике, и через точку E проведена прямая, параллельная оси V'_2 , а через F — параллельная оси U'_2 . Пересечение этих прямых

в точке K определяет координаты $2 - \overrightarrow{D} = x = [cc] = +20.64$ и $\overrightarrow{D - K} = y = [cd] = +1.50$.

Если обратимся к нормальным уравнениям в курсе И. М. Бахурина, то найдем (стр. 214 и 215), что $[psc] = 20.78$, $[pcd] = +1.47$. Расхождение незначительное, если учесть точность нахождения нами градиентов по чертежу в мелком масштабе: 1 : 100 000 в подлиннике.



Фиг. 54

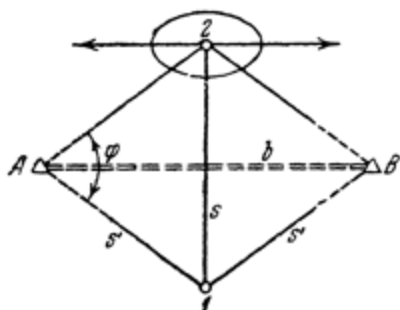
§ 21. ЗАДАЧА ГАНЗЕНА

п. 1. Общие соображения и обозначения. Приложим приемы графического уравнивания совместной вставки двух точек к анализу известной „задачи Ганзена“. Эта задача не имеет избыточных измерений, но это не мешает определению весов.

При выяснении вопроса о наиболее выгодном расположении вставляемых точек по отношению к твердым, очевидно, приходится останавливаться на симметричных формах, поскольку нет никаких оснований отдавать предпочтение ни одной из точек.

Поэтому возьмем ромб (фиг. 55) $A-1-B-2$ с твердыми точками A и B , вставляемыми точками 1 и 2 , с измерением при них направлений, согласно обозначениям на фиг. 55.

Обозначим углы ромба $2-A-1$ и $2-B-1$ через φ стороны его — через s' , диагональ $2-1$ — через s и твердую диагональ $\overline{AB}$ — через b . Соответственно градиенты направлений стороны s' обозначим через g' , стороны s — через g и условный градиент стороны b — через g_b .



Фиг. 55

п. 2. Вывод выражений для t и q' . Вследствие симметричности элементы обеих точек 1 и 2 одинаковы. Поэтому будем писать их без индексов.

Из фиг. 55 мы усматриваем, что

$$b = 2s' \cos \frac{1}{2} \varphi, \quad s = 2s' \sin \frac{1}{2} \varphi.$$

В связи с этим

$$g' = 2g \sin \frac{1}{2} \varphi; \quad g' = 2g_b \cos \frac{1}{2} \varphi; \quad g = g_b \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varphi. \quad (21.1)$$

Предположим, что на точках 1 и 2 измерены направления. Находим поэтому ориентирный вектор t . Как легко сообразить,

$$\begin{aligned} t &= g'_A + g'_B + g = 2g' \sin \frac{1}{2} \varphi + g = 4g \sin^2 \frac{1}{2} \varphi + g = \\ &= g[1 + 2(1 - \cos \varphi)], \end{aligned}$$

или

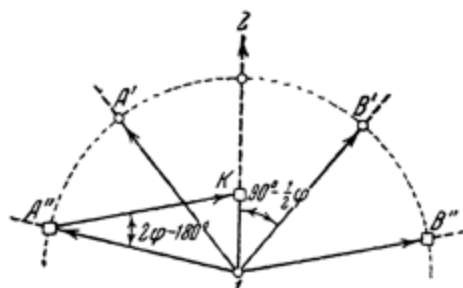
$$t = g(3 - 2 \cos \varphi) \quad (21.2)$$

и направлено по $\overleftrightarrow{1-2}$.

Найдем теперь q' , построив квадратичный полигон при исходном начальном направлении $\overleftrightarrow{1-2}$ (фиг. 56).

Векторы $\overrightarrow{I-A'}$ и $\overrightarrow{I-B'}$ направлены по сторонам ромба. Угол $K-I-A'$ равен углу $A'-I-A''=90^\circ-\frac{1}{2}\varphi$. Также после удвоения угол $B''-I-B'$ равен углу $B'-I-K=90^\circ-\frac{1}{2}\varphi$; $\overrightarrow{A''K}$ параллельно и равно $\overrightarrow{I-B''}$, которое равно $\overrightarrow{I-A''}$. Значит, точка K приходится на диагонали $I-2$. Отрезок $\overrightarrow{I-K}=\frac{1}{2}\overleftrightarrow{g'^2}+\frac{1}{2}\overleftrightarrow{g'^2}=g'^2\sin(\varphi-90^\circ)$;
 $\overrightarrow{q_1}=\frac{1}{2}\overleftrightarrow{g'^2}+\frac{1}{2}\overleftrightarrow{g'^2}+\frac{5}{6}\overleftrightarrow{g^2}-\frac{1}{6}\overleftrightarrow{t^2}$.

Коэффициенты $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{6}$ весовых элементов взяты применительно к формулам (18.9) в п. 2 § 18:



Фиг. 56

$$\frac{1}{2}=\sigma_{1.5}; \quad \frac{5}{6}=\sigma_{1.6}=\frac{2n_2-1}{2n_2} \quad \text{при } n_2=3;$$

$$-\frac{1}{6}=\sigma_{1.7}=-\frac{1}{2n_1} \quad \text{при } n_1=3.$$

Так как $\overrightarrow{I-K}, \overleftrightarrow{g^2}$ и $\overleftrightarrow{t_2}$ направлены по диагонали $\overleftrightarrow{I-2}$, то q' получается в результате алгебраического сложения $q'=g'^2\sin(\varphi-90^\circ)+\frac{5}{6}g^2-\frac{1}{6}t^2$ или, учитывая равенства (21.1) и (21.2), получаем, что

$$q'=4g^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\sin(\varphi-90^\circ)+\frac{5}{6}g^2-\\ -\frac{1}{6}g^2(9-12\cos\varphi+4\cos^2\varphi).$$

Это, после замены $2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi$ через $1 - \cos \varphi$ и $\sin(\varphi - 90^\circ)$ через $-\cos \varphi$, дает

$$q' = \frac{2}{3} g^2 (2 \cos^2 \varphi - 1). \quad (21.3)$$

В зависимости от величины угла φ элемент q' может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Так, при $\varphi < 45^\circ$ элемент q' положителен и направлен по $\overleftrightarrow{I-2}$, при $\varphi = 45^\circ$ элемент $q' = 0$, при $\varphi > 45^\circ$ элемент q' отрицателен и направлен параллельно „твердой“ диагонали $\overleftrightarrow{AB}$.

Для общих выводов будем считать, что q' положительное, и как таковое направлено по диагонали $\overleftrightarrow{I-2}$, как и ось V' .

п. 3. Определение связующих векторов и элементов q и Q . Для определения связующих векторов α и β обратимся к формулам (20.1) и (18.15)

$$\vec{\tau} = 2\vec{g} - \frac{1}{3}t.$$

Вычитание можно сделать алгебраически, поскольку направления g и t совпадают.

Учтя равенство (21.2), имеем:

$$\tau = g \left(1 + \frac{2}{3} \cos \varphi \right) \quad (21.4)$$

и направлено по $\overleftrightarrow{I-2}$.

Благодаря тому, что V' направлено по $I-2$, $g_{1,2,u} = g_u$ и t_u равны нулю и градиентов g' и g'' нет [см. равенства (20.1)], связующий вектор β будет равен нулю, а вектор α представится в таком виде:

$$\vec{\alpha} = +\tau g - \frac{1}{3}gt = g^2 \left(1 + \frac{2}{3} \cos \varphi \right) - g^2 \left(1 - \frac{2}{3} \cos \varphi \right),$$

или

$$\alpha = \frac{4}{3} g^2 \cos \varphi; \quad \frac{1}{2} \alpha^2 = \frac{8}{9} g^4 \cos^2 \varphi \quad \text{при} \quad \beta = 0; \quad (21.5)$$

$$Q' = \frac{1}{2} g'^2 + \frac{1}{2} g'^2 + \frac{5}{6} g^2 - \frac{1}{6} t^2 =$$

$$= 4g^2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi + \frac{5}{6} g^2 - \frac{1}{6} g^2 (9 - 12 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi),$$

или

$$Q' = \frac{2}{3} g^2 (2 - \cos^2 \varphi). \quad (21.6)$$

Далее, согласно равенствам (18.20), при векторе $\beta=0$ получаем:

$$Q = Q' - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{Q' + q'} = \frac{2}{3} g^2 \frac{2 - \cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi},$$

или

$$Q = \frac{2}{3} g^2 \frac{(2 + \cos^2 \varphi)(1 - \cos^2 \varphi)}{1 + \cos^2 \varphi}. \quad (21.7)$$

Поскольку a направлено также по $\overleftrightarrow{1-2}$, то и q мы получаем алгебраическим сложением:

$$q = q' - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{Q' + q'} = \frac{2}{3} g^2 \frac{2 \cos^4 \varphi - \cos^2 \varphi - 1}{1 + \cos^2 \varphi},$$

или

$$q = -\frac{2}{3} g^2 \frac{(1 + 2 \cos^2 \varphi)(1 - \cos^2 \varphi)}{1 + \cos^2 \varphi}. \quad (21.8)$$

Как видим, q получилось отрицательное; это значит, что в отличие от q' , которое могло быть и отрицательным и положительным, т. е. направлено по $\overleftrightarrow{AB}$ или перпендикулярно к нему, элемент q направлен неизменно по $\overleftrightarrow{AB}$, и тогда его следует взять со знаком плюс по формуле (21.8). Отсюда

$$\left. \begin{aligned} Q + q &= 2g^2(1 - \cos^2 \varphi) = 2g^2 \sin^2 \varphi, \\ Q - q &= \frac{2}{3} g^2 \frac{(1 - \cos^2 \varphi)^2}{1 + \cos^2 \varphi} = \frac{2}{3} g^2 \frac{\sin^4 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (21.9)$$

По формуле (21.1)

$$g^2 = g_b^2 \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi} = g_b^2 \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}.$$

$$\left. \begin{aligned} Q + q &= 2g_b^2(1 + \cos \varphi)^2, \\ Q - q &= \frac{2}{3} g_b^2 \frac{(1 - \cos^2 \varphi)(1 + \cos \varphi)^2}{1 + \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (21.10)$$

Большая ось эллипса погрешности всегда направлена параллельно $\overleftrightarrow{AB}$, каков бы ни был угол φ . Значит, по $\overleftrightarrow{AB}$ направлена ось V .

п. 4. Определение весовых коэффициентов. Для определения весовых коэффициентов направим ось X по диагонали $\overleftrightarrow{1-2}$ (фиг. 55), т. е. по оси U . При выводах, как и в предыдущем параграфе, будем обозначать величины, получающиеся из первой системы уравнений (18.24), индексом 1 дополнительно к индексу, обозначающему номер точки, а из второй системы (18.25) — индексом 2. Так, например, $T_{1,1}$ относится к точке 1 в первой системе, $u'_{2,2}$ — относится к точке 2 во второй системе, и т. д.

Для первой системы уравнений:

$$\begin{aligned} T'_{1,x} = T'_{1,1} = T_{1,1} = 1; \quad T'_{1,y} = 0; \\ T_{2,1} = -\alpha_2 u'_{1,1}, \quad \text{поскольку} \quad T'_{1,y} \text{ и } \beta_2 = 0. \end{aligned}$$

По формулам (18.23)

$$u'_{1,1} = \frac{T'_{1,x}}{Q'_1 + q'_1} = \frac{T'_{1,y}}{Q'_1 + q'_1} = 0,$$

так как ось V' принята параллельной $1-2$ или оси X . Значит, $T_{2,1} = 0$ и $x_2 = [\alpha\gamma] = 0$, $y_2 = [\alpha\delta] = 0$.

На оси $+X_1$ нужно отложить отрезки $\frac{1}{Q+q}$ и $\frac{1}{Q-q}$ и через первую точку провести прямую, параллельную оси V или Y_1 , а через конец вектора $\frac{1}{Q-q}$ — прямую, параллельную оси X_1 . Значит, в конце $\frac{1}{Q+q}$ и получится искомая точка $K_{1,1}$ (см. фиг. 53), координаты которой будут: $x_1 = \frac{1}{Q+q} = [\alpha\alpha]$ и $y_1 = 0 = [\alpha\beta]$.

Благодаря симметрии для точки 2 имеем:

$$[\gamma\gamma] = \frac{1}{Q+q}, \quad [\gamma\delta] = 0.$$

Для второй системы уравнений:

$$T'_{1,x} = 0; \quad T'_{1,y} = T'_{1,2} = T_{1,2} = 1:$$

Это значит, что на оси Y_1 , параллельной V , получится совпадающая с $F_{2,1}$ точка $K_{1,2}$, (см. фиг. 53) с координатами

$$y_1 = \frac{1}{Q-q} = [\beta\beta], \quad x_1 = [\alpha\beta] = 0,$$

$$u'_{1,2} = \frac{T'_{1,u}}{Q'_1 + q'_1} = \frac{T_{1,y}}{Q'_1 + q'_1} = \frac{1}{Q'_1 + q'_1},$$

$$T_{2,2} = -\alpha_2 u'_{1,2} = -\frac{4}{3} g^2 \cos \varphi \frac{1}{Q'_1 + q'_1} = -\frac{2 \cos \varphi}{1 + \cos^2 \varphi},$$

так как

$$\begin{aligned} Q'_1 + q'_1 &= \frac{2}{3} g^2 (2 - \cos^2 \varphi) + \frac{2}{3} g^2 (2 \cos^2 \varphi - 1) = \\ &= \frac{2}{3} g^2 (1 + \cos^2 \varphi). \end{aligned} \quad (21.11)$$

$T_{2,2}$ направлен в сторону, обратную вектору α_2 , т. е. по отрицательному направлению оси X . Поэтому после поворота на 90° против движения часовой стрелки он пойдет по положительному направлению оси Y и по оси V . Значит на ней должна отсечь отрезок $\frac{T_{2,2}}{Q-q}$ ось U , т. е. $y_2 = [\beta\delta] = \frac{T_{2,2}}{Q-q}$ и $x_2 = [\beta\gamma] = 0$.

В общем для данного „ганзена“ имеем:

$$\left. \begin{aligned} [\alpha\alpha] &= [\gamma\gamma] = \frac{1}{Q+q} = \frac{1}{2g^2 \sin^2 \varphi}, \\ [\beta\beta] &= [\delta\delta] = \frac{1}{Q-q} = \frac{3}{2g^2} \cdot \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\sin^4 \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (21.12)$$

$$\left. \begin{aligned} [\alpha\beta] &= [\gamma\delta] = [\alpha\gamma] = [\alpha\delta] = [\beta\gamma] = 0, \\ [\beta\delta] &= \frac{-3 \cos \varphi}{g^2 \sin^4 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (21.13)$$

п. 5. Веса функций и ошибки. Вес направления $\overleftrightarrow{I-2}$:

$$\frac{1}{P_\alpha} = g^2 ([\beta\beta] - 2[\beta\delta] + [\delta\delta]) = \frac{3(1 + \cos^2 \varphi)}{\sin^4 \varphi} + \frac{6 \cos \varphi}{\sin^4 \varphi},$$

или

$$\frac{1}{P_\alpha} = \frac{3(1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi)}{\sin^4 \varphi} = \frac{3(1 + \cos \varphi)^2}{\sin^4 \varphi}. \quad (21.14)$$

Вес расстояния $I-2$:

$$\frac{1}{P_s} = [\alpha\alpha] - 2[\alpha\gamma] + [\gamma\gamma] = \frac{1}{g^2 \sin^2 \varphi}. \quad (21.15)$$

Ошибка расстояния $I-2$:

$$M_s^2 = \frac{m^2}{g^2 \sin^2 \varphi} = \frac{m^2 s^2}{\rho^2 \sin^2 \varphi}, \quad \lambda = \frac{M_s}{s} = \frac{m''}{\rho'' \sin \varphi}; \quad (21.16)$$

$$\lambda_{\min} = \frac{m''}{\rho''} \quad \text{при } \varphi = 90^\circ. \quad (21.17)$$

Минимальное значение $\frac{1}{P_\alpha}$, как следует непосредственно из формулы (21.14), будет при $\varphi = 90^\circ$. При этом

$$\frac{1}{P_\alpha} = 3$$

и

$$M_{\alpha \min} = m \sqrt{3} = 1.732 m. \quad (21.18)$$

п. 6. Сравнительный анализ. Для сравнения с другими случаями „ганзена“ заменим в выражениях для весовых элементов переменный градиент g постоянным условным градиентом g_b , отвечающим базису $AB=b$.

По формулам (21.1)

$$g^2 = g_b^2 \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi} = g_b^2 \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}.$$

Подставляя эти значения g^2 в предыдущие выражения и принимая при этом g_b^2 за единицу, получаем:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{2}{3} \frac{(2 + \cos^2 \varphi)(1 + \cos \varphi)^2}{1 + \cos^2 \varphi}, \\ q &= \frac{2}{3} \frac{(1 + 2 \cos^2 \varphi)(1 + \cos \varphi)^2}{1 + \cos^2 \varphi}; \end{aligned} \right\} \quad (21.19)$$

$$\left. \begin{aligned} Q + q &= 2(1 + \cos \varphi)^2, \\ Q - q &= \frac{2}{3} \frac{(1 - \cos^2 \varphi)(1 + \cos \varphi)^2}{1 + \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (21.20)$$

Найдем некоторые частные значения угла φ (фиг. 55) и других величин, при которых выполняется то или иное условие.

1. Когда $\Pi = (Q + q)(Q - q)$ наибольшее,

$$\varphi = 55^\circ 15'; \quad Q = 2.88; \quad q = 2.05 \quad \text{при } g_b = 1.$$

2. Когда $Q + q$ наибольшее,

$$\varphi = 0.$$

3. Когда $Q - q$ наибольшее,

$$\varphi = 68^\circ 50'; \quad Q = 2.40; \quad q = 1.42; \quad Q + q = 3.82; \quad Q - q = 0.98.$$

4. Когда эллипс погрешности наиболее или наименее вытянут,

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{Q + q}{Q - q} \quad \text{min. max.}$$

$$\text{При } \varphi = 90^\circ \quad \frac{a^2}{b^2} = 3 = \text{min}; \quad \alpha = \beta = 0.$$

$$\text{При } \varphi = 0 \quad \frac{a^2}{b^2} = \infty = \text{max} - \text{эллипс превращается в прямую.}$$

Дадим в табл. 11 значения элементов при различных уже отмеченных φ и дополненных некоторыми другими. При $\varphi = 0$ эллипс погрешности превращается в линию поло-

жения с весом $8g_b^2$. Погрешность в направлении базиса AB равна $\infty^{1/2}$, т. е. вдоль базиса точки 1 и 2 могут перемещаться сколько угодно. AB в этом случае является „порочным“ геометрическим местом точек 1 и 2.

Таблица 11

φ	Элементы						Примечание
	Q	q	$Q+q$	$Q-q$	Π	$\frac{a^2}{b^2}$	
0°	4	4	8	0	0	—	Максимум $Q+q$ линии положения
30°	3.67	3.33	7.0	0.33	2.30	21	Максимум Π
$55^\circ 15'$	2.88	2.05	4.93	0.84	4.14	6	
60°	2.7	1.8	4.5	0.9	4.05	5	
$68^\circ 50'$	2.40	1.42	3.82	0.98	3.74	4	Максимум $Q-q$
90°	1.33	0.67	2.0	0.67	1.33	3	Минимальная ошибка расстояния и направления; наименее вытянутый эллипс
							$\lambda_{\min} = \frac{m''}{\rho''}$;
							$M_{\alpha \min} = m\sqrt{3}$
120°	0.3	0.2	0.5	0.1	0.05	5	Эллипс бесконечных размеров
180°	∞^{-2}	∞^{-2}	∞^{-2}	∞^{-3}	∞^{-5}	—	

п. 7. Задача Ганзена в случае квадрата. Рассмотрение случая одностороннего „ганзена“, когда точки 1 и 2 и базис AB представляют противоположные стороны квадрата, показывает, что

$$\left. \begin{aligned} q &= 0.1503, \quad Q = 0.20; \\ Q + q &= 0.3586 = \frac{1}{2.8}; \quad Q - q = 0.0580 = \frac{1}{17.2}; \end{aligned} \right\} \quad (21.21)$$

$$\frac{1}{Q+q} + \frac{1}{Q-q} = 20; \quad a^2 : b^2 = 6; \quad \Pi = 0.0208. \quad (21.22)$$

По сравнению с ромбическим „ганзеном“ с углом $\varphi = 90^\circ$ квадрат оказался значительно менее выгодным.

В табл. 11 при $\varphi=90^\circ$ сумма

$$\frac{1}{Q+q} + \frac{1}{Q-q} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2,$$

т. е. в 10 раз меньше квадратного одностороннего „ганзена“.

Большая ось эллипса погрешности последнего составляет угол, равный $28^\circ 09'$ с базисом AB или стороной 1—2.

Выводы графическим методом были проверены аналитически путем решения нормальных уравнений, полученных из следующих начальных уравнений, взятых без свободных членов для указанного квадрата:

Начальные уравнения погрешности	Редуцированные уравнения погрешности
1) $z_1 - y_1$	1) $-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{3}x_2$
2) $z_1 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1$	2) $+\frac{1}{3}x_2$
3) $z_1 + x_1 - x_2$	3) $+\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{2}{3}x_2$
4) $z_2 + x_1 - x_2$	4) $+\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2$
5) $z_2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2$	5) $-\frac{1}{3}x_1$
6) $z_2 - y_2$	6) $-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2$

Редуцированные уравнения получились вычитанием $\frac{1}{3}$ суммы первых трех из каждого из них и также $\frac{1}{3}$ суммы последних трех из каждого из них.

Нормальные уравнения

$$1) +\frac{7}{6}x_1 + \frac{1}{2}y_1 - x_2 + \frac{1}{2}y_2,$$

$$2) +\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}x_2 + 0,$$

$$3) -x_1 - \frac{1}{2}y_1 + \frac{7}{6}x_2 - \frac{1}{2}y_2,$$

$$4) + \frac{1}{2}x_1 + 0 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2.$$

Двухкратное решение этих уравнений по схеме Гаусса дало:

$$[cc \cdot 2] = + \frac{7}{24}; [cd \cdot 2] = - \frac{1}{8}; [dd \cdot 2] = + \frac{1}{8};$$

$$[dd \cdot 3] = + \frac{1}{14};$$

$$Q_{y \cdot 2} = \frac{1}{14}; Q_{x \cdot 2} = Q_{y \cdot 2} \frac{[cc \cdot 2]}{[dd \cdot 2]} = \frac{1}{14} \cdot \frac{7}{24} \cdot 8 = \frac{1}{6};$$

$$[bb \cdot 2] = + \frac{1}{8}; [ba \cdot 2] = + \frac{1}{8};$$

$$[aa \cdot 2] = \frac{7}{24}; [aa \cdot 3] = \frac{1}{6};$$

$$Q_{x \cdot 1} = \frac{1}{6}; Q_{y \cdot 1} = Q_{x \cdot 1} \frac{[bb \cdot 2]}{[aa \cdot 2]} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{24} = \frac{1}{14};$$

$$\frac{1}{Q_{x \cdot 1}} + \frac{1}{Q_{y \cdot 1}} = \frac{1}{Q_{x \cdot 2}} + \frac{1}{Q_{y \cdot 2}} = 14 + 6 = 20,$$

т. е. то же, что $\frac{1}{Q+q} + \frac{1}{Q-q}$ при графическом решении.

Но графическое решение дает сразу же непосредственно веса по большой и малой осям эллипса погрешности.

Графическое построение дало и весовые коэффициенты:

$$[\beta\delta] = -2.20, [\beta\beta] = [\delta\delta] = 6.16.$$

Отсюда

$$\frac{1}{Q_*} = [\beta\beta] - 2[\beta\delta] + [\delta\delta] = 12.32 + 4.40 = 16.72, \quad (21.23)$$

$$M_x = 4.1m. \quad (21.24)$$

Сравнивая величину M_x , выраженную равенством (21.18) и являющуюся вообще минимальной во всех мыслимых

„ганзенах“, с полученной здесь величиной M_x , находим, что

$$\frac{M_x \text{ квадратичного „ганзена“}}{M_x \min} = \frac{4.1}{1.73} = 2.4. \quad (21.25)$$

Таким образом мы вывели, что путем решения задачи Ганзена нельзя получить ошибки направления между вставляемыми точками менее чем $1.32m$, где m — ошибка измерения отдельного направления на вставляемых точках. Это — без учета ошибок редукции и центрировки. Данное обстоятельство необходимо учитывать при ориентировке шахт решением задачи Ганзена.

§ 22. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ К СОВМЕСТНОЙ ВСТАВКЕ ДВУХ ТОЧЕК

п. 1. Особый случай. Рассмотрим случай, когда у обеих совместно вставляемых точек векторы $t_1 = t_2 = 0$ и $q'_1 = q'_2 = 0$.

При этом Q'_1 должно равняться Q'_2 . Направление осей V'_1 и V'_2 произвольное, поскольку q'_1 и q'_2 равны 0. В связи с этим векторы α_2 и β_2 получают выражения: $\alpha_2 = 2g_{2.1}^2 \sin \varphi$ и $\beta_2 = 2g_{2.1}^2 \cos \varphi$, где φ может быть взято каким угодно. Возьмем $\varphi = 90^\circ$. Это, согласно выражениям (20. 1), для α и β значит, что ось V'_1 направлена по прямой $I-2$, где I и 2 — совместно вставляемые точки. Какое бы φ мы не взяли, результат получится тот же самый. При $\varphi = 90^\circ$ вектор $\alpha_2 = 2g_{2.1}^2$; $\beta_2 = 0$; $q = -\frac{2g_{2.1}^4}{Q'_1}$, согласно формулам (18.22).

Вместо отрицательного значения q можно взять положительное, направив q перпендикулярно к прямой $I-2$. Итак,

$$q = +\frac{2g_{1.2}^4}{Q'} \text{ и направлено } \perp \text{ к } I-2. \quad (22.1)$$

Как и в п. 4 § 21, по первой системе уравнений (18.24), совмещая ось X с направлением $I-2$, имеем:

$T'_{1.x} = T'_{1.1} = T_{1.1} = 1$, $T'_{1.y} = 0$, $T_{2.1} = -\alpha_2 u'_{1.1}$, поскольку $T_{1.y} = \beta_2 = 0$, $u'_{1.1} = \frac{T'_{1.x}}{Q'} = \frac{T'_{1.y}}{Q} = 0$, так как ось V'_1 направлена по $I-2$ или по оси X .

Значит, $T_{2.1} = 0$ и $x_2 = [\alpha\gamma] = y_2 = [\alpha\delta] = 0$.

По второй системе (18.25)

$u_{1.2} = -\frac{4}{Q'}$; $v_{1.2} = 0$; $\vec{T}_{2.2} = +\frac{2g_{2.1}^2}{Q'}$, т. е. направлена по $2 \rightarrow 1$ в отрицательном направлении оси X . После поворота ее на 90° против движения часовой стрелки она совпадает с положительным направлением оси Y и будет параллельна оси V_2 (вектору q). Значит, $x_2 = [\beta\gamma]$ будет равно нулю, и

$$y_2 = [\beta\delta] = \frac{T_{2.2}}{Q - q} = \frac{2g_{2.1}^2}{Q'(Q' - 2q)},$$

или

$$[\beta\delta] = \frac{2g_{1.2}^2}{Q^2 - 4g_{1.2}^4}, \quad (22.2)$$

так как по равенствам (18.22)

$$Q = Q' - q; \quad Q + q = Q'; \quad Q - q = Q' - 2q. \quad (22.3)$$

Далее, по п. 4 § 21 легко вывести, что

$$[\alpha\alpha] = [\gamma\gamma] = \frac{1}{Q + q} = \frac{1}{Q'}, \quad (22.4)$$

$$[\beta\beta] = [\delta\delta] = \frac{1}{Q - q} = \frac{Q'}{Q'^2 - 4g_{1.2}^4}, \quad (22.5)$$

$$[\alpha\beta] = [\alpha\gamma] = [\alpha\delta] = [\beta\gamma] = [\gamma\delta] = 0. \quad (22.6)$$

Отсюда по формулам (19.5) и (19.6) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_\alpha} &= g_{1.2}^2([\beta\beta] - 2[\beta\delta] + [\delta\delta]) = \frac{(2Q' - 4g_{1.2}^2)g_{1.2}^2}{Q'^2 - 4g_{1.2}^4} = \\ &= \frac{2g_{1.2}^2}{Q + 2g_{1.2}^2}, \end{aligned} \quad (22.7)$$

$$\frac{1}{P_\alpha} = [\alpha\alpha] - 2[\alpha\gamma] + [\gamma\gamma] = \frac{2}{Q'}. \quad (22.8)$$

п. 2. Примеры особого случая. На фиг. 57—59 представлены случаи, дающие $t_1 = t_2 = 0$ и $q'_1 = q'_2 = 0$. На фиг. 59 точки 4, 6, 7; 3, 5, 2; 1, 9, 11; 8, 10, 12 образуют равносторонние треугольники.

Для примера, представленного на фиг. 57,

$$Q'_1 = Q'_2 = 3g^2.$$

На фиг. 58:

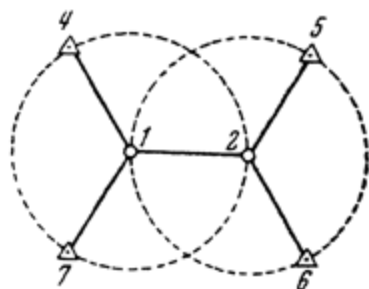
$$Q'_1 = Q'_2 = 4g^2.$$

На фиг. 59:

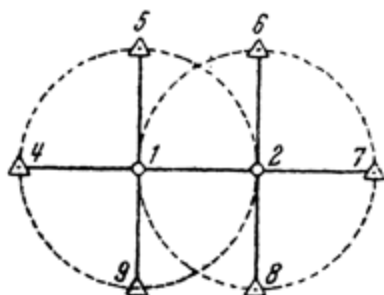
$$Q'_1 = Q'_2 = 6g^2.$$

Везде

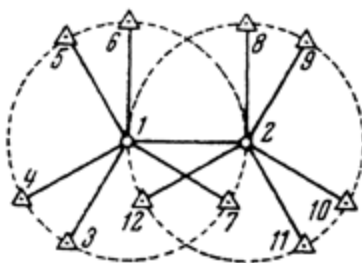
$$g = g_{1.2}.$$



Фиг. 57



Фиг. 58



Фиг. 59

Подставляя эти значения в выражения (22.7) и (22.8), получаем:

$$\left. \begin{aligned} 1) \text{ (фиг. 57)} \quad & \frac{1}{P_\alpha} = \frac{2}{5} = 0.400; \quad \frac{1}{P_s} = \frac{2}{3g^2} = 0.667 \frac{1}{g^2}, \\ 2) \text{ (фиг. 58)} \quad & \frac{1}{P_\alpha} = \frac{1}{3} = 0.333; \quad \frac{1}{P_s} = \frac{1}{2g^2} = 0.500 \frac{1}{g^2}, \\ 3) \text{ (фиг. 59)} \quad & \frac{1}{P_\alpha} = \frac{1}{4} = 0.250; \quad \frac{1}{P_s} = \frac{1}{3g^2} = 0.333 \frac{1}{g^2}. \end{aligned} \right\} (22.9)$$

Обозначив через λ_u продольную относительную ошибку между вставляемыми совместно точками 1 и 2 и через λ_v — поперечную относительную ошибку, для трех примеров особого случая по равенствам (22.9) получаем:

$$\left. \begin{aligned} 1) \lambda_v &= \pm 0.63 \text{ м}; \lambda_u = \pm 0.82 \text{ м}; \\ 2) \lambda_v &= \pm 0.58 \text{ м}; \lambda_u = \pm 0.71 \text{ м}; \\ 3) \lambda_v &= \pm 0.50 \text{ м}; \lambda_u = \pm 0.58 \text{ м}; \end{aligned} \right\} \quad (22.10)$$

где m — ошибка направления, взятая в аналитической мере.

Из равенств (22.9) вытекает, что веса P_a растут пропорционально $\frac{5}{2} : 3 : 4$, а веса P_s — пропорционально $\frac{3}{2} : 2 : 3$ или $\frac{9}{4} : 3 : \frac{9}{2}$. Причина того, что продольные ошибки больше поперечных, лежит в том, что из всех квадратичных коэффициентов в данном частном случае только один $[\beta\delta]$, входящий в выражение для P_a , оказался не равным нулю. Веса P_a с увеличением числа твердых точек растут менее заметно, чем веса P_s .

Вообще можно считать, что для веса P_a азимута направления между двумя совместно вставляемыми точками число $4 \left(\frac{1}{P_a} = \frac{1}{4} \right)$ является максимальным, т. е. повысить точность азимута между двумя совместно вставленными точками более чем в 2 раза по сравнению с точностью измерения отдельных направлений практически нельзя.

п. 3. Выводы Пинкварта. Азимутальные (поперечные) и продольные (расстояний) ошибки в отдельности рассматривались в Германии Пинквартом. Он в своей статье „*Zur Fehlertheorie die trigonometrischen Punktbestimmung*“ доказывает, что средние ошибки, вычисленные обычным путем при уравнивании тригонометрических пунктов, более или менее правильно отвечают азимутальным ошибкам, в то время как ошибки расстояний являются заниженными.

Эту статью нам не удалось видеть. Поэтому для нас остается неизвестным, какие ошибки Пинкварт принимал во внимание: ошибки ли координат или ошибки азимутов и расстояний как функций от координат.

Мы знаем статью Пинкварта, подтверждающую фактическим материалом его выводы. Интересно привести его данные по фактическому материалу. Он рассматривает Бременскую триангуляцию (*Z. f. V.*, Н. 21, 1940. стр. 481—501), которая проводилась независимо дважды двумя организациями.

Ранее ее выполнил Ландесауфнаме, а затем Кадастр. Обе работы имели общую основу в виде пунктов 1-го класса и касались одних и тех же 86 пунктов. Пинквартом для исследования взято 80 пунктов. Определения Кадастра имели в среднем значительно меньшие ошибки. Отношение квадратов ошибок в среднем было как 1 : 8.

Поэтому данные Кадастра могли считаться непогрешимыми, и отклонения от них результатов Ландесауфнаме принимались за действительные ошибки пунктов триангуляции, произведенной Ландесауфнаме.

Вектор смещений Пинкварт разлагал на составляющие вдоль и поперек сторон триангуляции, и в общем установил, что продольные составляющие больше поперечных.

Это подтверждает наши выводы в предыдущем пункте.

Близость друг к другу совместно вставляемых точек указывает правильную картину ошибок их по отношению к твердым точкам, так как градиенты взаимного направления будут подавлять своей величиной остальное. Придется выделять и отличать ошибки положения по отношению к твердым точкам от ошибок взаимного положения совместно вставляемых точек. Взаимные ошибки должны быть меньше, чтобы оправдать необходимость совместной вставки точек.

Необходимо анализировать значение дополнительных отрицательных слагаемых в выражениях элементов Q и q при совместной вставке двух и больше точек.

п. 4. Совместная и раздельная вставка двух точек. Случай, представленный на фиг. 60, аналогичен случаю, изображенному на фиг. 57, если не редуцировать внешние направления с точек 4 и 5 на фиг. 60.

Для фиг. 57 мы имели в п. 2

$$\lambda_u = \sqrt{\frac{2}{3}} m; \quad \lambda_v = \sqrt{\frac{2}{5}} m.$$

Если исходить из ошибок углов, то будем иметь для совместной вставки

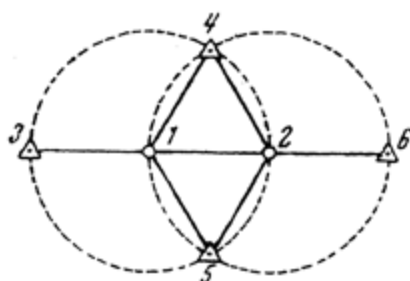
$$\lambda_u = \sqrt{\frac{1}{3}} m; \quad \lambda_v = \sqrt{\frac{1}{5}} m. \quad (22.11)$$

При раздельной вставке точек 1 и 2 и, исходя из ошибок углов, имеем

$$\lambda_u = \lambda_v = 0.52 m, \quad (22.12)$$

тогда как при совместной вставке

$$\lambda_u = \sqrt{\frac{1}{3}} m = 0.58 m, \quad \lambda_v = 0.45 m.$$



Фиг. 60

Значит, совместная вставка не уменьшила величину λ_u , а даже немного ее увеличила. Это, видимо, получилось за счет введения ориентирной поправки внутренних направлений, за счет редуцирования их коэффициентов.

Так и следовало ожидать, что совместная вставка не уменьшает продольную ошибку, так как прямая и обратная засечки по $\overrightarrow{1-2}$ совершенно не влияют на определение длины $1-2$, а только уточняют положение концов 1 и 2 в поперечном направлении, что и сказалось на том, что λ_v , определенное по формуле (22.11) и равное $0.45 m$, меньше λ_v , выраженного формулой (22.12) и равного $0.52 m$.

Интересно проследить, какова будет погрешность точки 2 при последовательной вставке сначала точки 1, а затем, опираясь на нее, точки 2.

Если бы точка 1 была безошибочна, то погрешность точки 2 по отношению к 1 (фиг. 60) выразилась бы так:

$$\lambda_u = \sqrt{\frac{1}{6}} m = 0.41 m; \quad \lambda_v = \sqrt{\frac{2}{19}} m = 0.32 m. \quad (22.13)$$

Присоединяя сюда ошибку в положении точки I по формуле

$$\lambda_u = \lambda_v = \sqrt{\frac{2}{15}} m = 0.365 m, \quad (22.14)$$

по отношению к твердым точкам получим:

$$\begin{aligned} \lambda_u &= m \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{2}{15}} = 0.55 m; \\ \lambda_v &= m \sqrt{\frac{2}{19} + \frac{2}{15}} = 0.49 m. \end{aligned} \quad (22.15)$$

Формулы (22.15) несколько преувеличивают суммарную ошибку. Как видим, по сравнению с формулой (22.12) получилось некоторое улучшение лишь для поперечной относительной погрешности.

Несколько увереннее получается дирекционный угол $2-I$.

При этом заметим, что измерять отдельно углы, а не совместно направления выгоднее и принципиально строже в отношении получаемой точности уравниваемых результатов.

Углы предварительно не уравниваются за условие фигур, за условие суммы в треугольниках, а непосредственно входят в графическое уравнивание.

Актуальным остается вопрос об изыскании способа, упрощающего нахождение разности между измеренными и вычисленными значениями угла. Это самая трудоемкая и утомительная часть работы, не имеющая последующего контроля.

п. 5. Смещение твердой точки. Рассмотрим отдельно вставку одной второй из двух совместно вставляемых точек и предположим, что точка I_u как одна из твердых точек, после графического уравнивания получила небольшое перемещение, которое должно быть учтено.

Следствием уравнивания является то обстоятельство, что вектор T , составленный из $\vec{gl_v}$ с новыми или остаточными погрешностями I_v , равен нулю. Из этого нужно исходить при учете перемещения твердой точки. Это перемещение создает у точки 2 дополнительный вектор T_1 ,

который назовем через ΔT_2 . Наличие ΔT_2 вызовет дополнительное перемещение вставляемой точки, дополнительные поправки ее координат.

Для выражения ΔT_2 следует определить дополнительные l , вызванные перемещением твердой точки I .

Обращаясь к полученным l , мы прежде всего отмечаем поправку $\Delta l_{2.1}$ внутреннего направления со вставляемой точки 2 на переместившуюся точку I . Это влечет за собой изменение среднего ориентирного угла внутренних направлений на величину $\Delta \omega_{\text{внутр}} = \frac{1}{n_2} \Delta l_{2.1}$, где n_2 — число внутренних направлений на точке 2. Значит, на $\Delta \omega_{\text{внутр}}$ изменится каждое l внутренних направлений и при получении ΔT_2 каждый градиент нужно помножить на одну и ту же поправку $\frac{1}{n_2} \Delta l_{2.1}$, что равносильно включению одного суммарного вектора t_2 , помноженного на $\frac{1}{n_2} \Delta l_{2.1}$.

Далее отдельно учитывается поправка самого внутреннего направления на точку I , равная $\Delta l_{2.1}$. Она должна быть взята со знаком минус, так как прибавляется к ориентирному углу этого направления, а ориентирный угол вычитается из среднего значения. Это включает в ΔT_2 слагаемое, равное $-\vec{g}_{2.1} \Delta l_{2.1}$, где $\vec{g}_{2.1}$ — градиент направления с точки 2 на I . Затем нужно учесть изменение внешнего направления с точки I на 2. Оно также будет равно $\Delta l_{2.1}$, если учитывать только точку 2.

Средний ориентирный угол внешних направлений на точке I изменится на величину $\Delta \omega = \frac{1}{n_1} \Delta l_{t.1}$, где $\Delta l_{t.1} = t_1 d_{t.1}$; t_1 — суммарный вектор всех n_1 измеренных совместно на точке I направлений; $\Delta l_{t.1}$ равен сумме поправок за центрировку на точке I от ее смещения; $d_{t.1}$ — перпендикуляр, опущенный из смещенного положения точки I на вектор t_1 , проходящий через первоначальное положение точки I . Ориентирный угол направления на вставляемую точку изменится на $\Delta l_{2.1}$ и, поскольку он вычисляется из среднего ориентирного угла при получении l , мы получим общее

изменение свободного члена l на величину $\frac{1}{n_1} \Delta l_{1.1} - \Delta l_{2.1}$, которая даст для вектора ΔT_2 слагаемое в виде

$$\left(\frac{1}{n_1} \Delta l_{1.1} - \Delta l_{2.1} \right) g_{2.1}.$$

Наконец, перемещение точки l вызовет изменение средних ориентирных углов и на ту же величину $\frac{1}{k} \Delta l$ — внешних направлений на точку 2 с других твердых точек, имеющих измеренное направление и на точку l .

Согласно обозначениям, данным выше применительно к формулам (18.14), элементы направлений с таких твердых точек на точку l отмечаются одним штрихом сверху, а на точку 2 — двумя штрихами. В соответствии с этим $\frac{1}{k} \Delta l$ представляется как $\frac{1}{k} g' d'$ и дает для ΔT_2 еще сумму дополнительных слагаемых в виде $\left[\frac{1}{k} g'' g' d' \right]$, где d' — перпендикуляр, опущенный из смещенного положения на линию положения (вектор) g' .

В общем ΔT_2 выразится равенством:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta T_2} = & \left(\frac{1}{n_2} \overrightarrow{t_2} - g_{2.1} \right) \Delta l_{2.1} - \overrightarrow{g_{1.2}} \Delta l_{2.1} + \frac{1}{n_1} \Delta l_{1.1} \overrightarrow{g_{2.1}} + \\ & + \left[\frac{1}{k} \overrightarrow{g''} g' d' \right] = \left(\frac{1}{n_2} \overrightarrow{t_2} - 2 \overrightarrow{g_{2.1}} \right) \Delta l_{2.1} + \left[\frac{1}{k} g'' g' d' \right] + \\ & + \frac{1}{n_1} \Delta l_{1.1} \overrightarrow{g_{2.1}}. \end{aligned} \quad (22.16)$$

Поправки Δl получаются как произведения gd , где d длины перпендикуляров, опущенных из перемещенного положения точки l на направление g или t_1 (повернутых на 90° по движению часовой стрелки), проходящее через первоначальное положение этой точки.

Величина d получает свой знак плюс или минус в зависимости от того, увеличивается или уменьшается дирекционный угол данного направления.

Введя промежуточный вспомогательный вектор τ_2 , фигурировавший раньше при получении α_2 и β_2 и выраженный

равенством $\vec{\tau}_2 = 2\vec{g}_{2.1} - \frac{1}{n_2} \vec{t}_2$, мы вместо равенства (22.16) получим:

$$\vec{\Delta T}_2 = \left[\frac{1}{k} g' d' \vec{g}'' \right] - g_{1.2} d_{1.2} \vec{\tau}_2 + \frac{1}{n_1} t_1 d_{1.2} \vec{g}_{2.1}. \quad (22.17)$$

Этот вывод можно применить к совместной вставке двух точек.

После того как одна из точек (I) получила окончательное положение, ее можно рассматривать как твердую и учесть влияние ее перемещения из предварительного положения в окончательное на положение точки 2, для которой найдены t_2 , Q'_2 , q'_2 и T'_2 , необходимые для получения u'_2 и v'_2 , входящие в выражение для T_1 точки I .

Для точки 2 вместо связующих векторов α_2 и β_2 достаточно построить один менее сложный вектор τ_2 по формулам (18.15) и затем непосредственно построить вектор ΔT_2 по формуле (22.17), найдя предварительно d_1 , d_2 и $d_{1.1}$.

Вектор ΔT_2 является добавлением к вектору T'_2 и строится поэтому от второго приближения 2'' точки 2, при котором находились u'_2 и v'_2 . Исходя из приближения 2'', мы обычным путем с помощью отрезков $\Delta E_2 = \frac{\Delta T_2}{Q'_2 + q'_2}$ и

$\Delta F_2 = \frac{\Delta T_2}{Q_2 - q'_2}$ получаем окончательное положение точки 2, не находя Q_2 и q_2 , а также не получая α_2 и β_2 и поправок u'_1 и v'_1 для точки I .

Указанный путь позволяет установить по найденной величине ΔT_2 , насколько целесообразной была совместная, а не раздельная вставка обеих точек. При этом в качестве точки I , получающей раньше окончательное положение, лучше взять точку менее другой обеспеченную хорошими засечками. Это для анализа, а для практического решения, конечно, лучше сначала вставлять точку, более обеспеченную засечками.

Метод нахождения поправок вектора смещения ΔT можно использовать и для постепенного приближения совмест-

ной вставки не только двух, но и многих точек, стремясь к тому, чтобы ΔT обращалось в нуль; при этом можно учитывать не все слагаемые ΔT , а главные.

п. 6. Предложение о весах. Обычно при геодезических вставках требуют, чтобы $[l_v l_v] = [gd_v gd_v]$ было минимумом. Более строгим является требование, чтобы $[d_v d_v]$ было минимумом. Это, например, применимо тогда, когда непосредственно засекается прямыми засечками округлая вершина и когда можно ожидать скорее одинаковых линейных d , чем угловых l отклонений. Также целесообразно выставить требование $[d_v d_v] = \min$ в том случае, когда твердые точки имеют довольно грубые координаты и нет уверенности в их точности, а направления или углы при вставке новых точек измеряются современными теодолитами с относительно высокой точностью. При $[d_v d_v] = \min$ линии положения должны считаться имеющими одинаковые веса или веса, равные единице.

Обычное требование $[gg d_v d_v] = \min$ можно рассматривать как требование $[d_v d_v] = \min$ с введением весов, равных g^2 . Таким образом мы имеем два крайних требования

$$[d_v d_v] = \min \text{ и } [g^2 d_v d_v] = \min.$$

Естественно поэтому считать в некоторых случаях более логичным компромиссное промежуточное требование

$$[gd_v d_v] = \min. \quad (22.18)$$

Тогда для внутренних направлений мы будем иметь такие уравнения погрешности:

$$\begin{aligned} \sqrt{g_i} \bar{g}_i + \sqrt{g_i} \sin \alpha_i x - \sqrt{g_i} \cos \alpha_i y - \\ - \sqrt{g_i} d_i = \sqrt{g_i} d_{v,i}, \end{aligned} \quad (22.19)$$

если градиенты повернуты на 90° по движению часовой стрелки и совмещены с линиями положения.

При исключении z мы получаем фиктивное уравнение $[\sin \alpha]x - [\cos \alpha]y - [d] = \text{ОП с весом} = -\frac{1}{\left[\frac{1}{g}\right]} = \frac{-1}{[e]}$, где e „интервал“, равный $\frac{1}{g}; \frac{1}{\left[\frac{1}{g}\right]} = \frac{1}{[aa]}$.

Это фиктивное уравнение, так же как при введении ориентирного вектора t в п. 3 § 15, для построений может быть представлено в таком виде:

$$\frac{i}{\sqrt{[e]}} \theta_y x - \frac{i}{\sqrt{[e]}} \theta_x y + i \sqrt{[e]} \left(-\frac{[d]}{e} \right) = \text{ОП.} \quad (22.20)$$

где $i = \sqrt{-1}$,

$$\vec{\theta} = [\vec{1}], \quad (22.21)$$

т. е. θ равно геометрической сумме векторов, равных единице и параллельных градиентам (линиям положения).

Если для уравнений внешних направлений не вводить ориентирных поправок и получать их свободные члены, учитывая ориентирные углы только „твердых“ направлений, то эти уравнения при данной установке относительно весов будут иметь вид:

$$\sqrt{g_i} \sin \alpha_i x - \sqrt{g_i} \cos \alpha_i y - \sqrt{g_i} d_i = \sqrt{g_i} d_{vi}. \quad (22.22)$$

Отсюда, заменяя $[gd]$ через $[l]$ и $[d] = \left[\frac{t}{g}\right]$ через $[el]$, мы при вставке одной точки будем иметь следующие равенства, определяющие знакомые нам построения:

$$\left. \begin{aligned} 1) T &= [e] - \frac{[el]}{[e]} \vec{\theta}, \\ 2) Q &= [g''] + \left[\frac{1}{2} g'\right] + \frac{1}{2[e]} 0^2, \\ 3) \overleftrightarrow{q} &= \overleftrightarrow{[g'']} + \left[\frac{1}{2} g'\right] - \frac{1}{2[e]} \overleftrightarrow{\theta^2}, \end{aligned} \right\} \quad (22.23)$$

где g'' — градиенты двухсторонних и g' — односторонних направлений.

Перед построением T свободные члены l двухсторонних направлений алгебраически складываются.

Так как интервал e фигурирует только в добавочных относительно небольших членах, то его достаточно определять с относительной точностью не выше $1/100$.

Формулы (22.23) показывают, что, собственно говоря, линейные отклонения d и не нужно определять, а достаточно ограничиться получением l и их весового среднего для внутренних направлений с весами, равными интервалам $e = \frac{1}{g} = \frac{s}{\rho''}$ дм/и.

При этом l внутренних направлений получается рекомендованным нами путем при посредстве среднего ориентирного угла.

Строить равенства (22.21) и (22.23) проще, чем соответствующие равенства, данные выше и выведенные из требования $[l_v l_v] = \min$.

Принятые веса, равные g для линейных отклонений d или $\frac{1}{g}$ для угловых отклонений l , также применимы и при совместной вставке двух и более точек.

В дополнение к равенствам (22.23) при вставке двух точек имеем:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= \vec{\tau}_1 g_{2.1.v} - \frac{1}{[e_2]} \vec{g}_{1.2} \theta_{2.v}, \\ \vec{\beta}_1 &= -\vec{\tau}_1 g_{2.1.u} + \frac{1}{[e_2]} \vec{g}_{1.2} \theta_{2.u}, \\ \vec{\tau}_1 &= 2 \vec{g}_{1.2} - \frac{1}{[e_1]} \vec{\theta}_1. \end{aligned} \right\} \quad (22.24)$$

Так же для точки 2

$$\vec{T}_1 = T_1 - \vec{V} \vec{\alpha}_1 u_2' - \vec{V} \vec{\beta}_1 v_2'; \quad (22.25)$$

при T_1' , находимом по первой формуле (22.23),

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_1' - \frac{\alpha_1}{2(Q_1' + q_1')} - \frac{\beta_1}{2(Q_1' - q_1')}, \\ q_1 &= q_1' - \frac{\alpha_1}{2(Q_1' + q_1')} - \frac{\beta_1}{2(Q_1' - q_1')}. \end{aligned} \right\} \quad (22.26).$$

При Q_1' и q_1' , найденных по второй и третьей формулам системы (22.23),

$$\mu_1 = \frac{T_{1.u}}{Q_1 + q_1}; \quad v_1 = \frac{T_{1.v}}{Q_1 - q_1}; \quad \mu_2' = \frac{T_{2.u}'}{Q_2' + q_2'}; \quad v_2' = \frac{T_{2.v}'}{Q_2' - q_2'}$$

и т. д., как и обычно.

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 23. ОБ УЧЕТЕ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

п. 1. Постановка вопроса. В имеющихся руководствах по теории ошибок и способу наименьших квадратов (например проф. Шилова) разбирается вопрос об учете ошибок исходных данных при определении средней квадратичной ошибки функции уравниваемых элементов косвенных или условных измерений.

При выводе относящихся сюда выражений предполагается, что исходные данные независимы друг от друга или, вернее, независимыми считаются их ошибки.

Между тем при геодезических вставках всегда приходится опираться на некоторое число тесно связанных между собой точек, например совместно вставленных или уравненных. Ошибки их имеют общее выражение и обусловлены общими причинами и общими погрешностями исходных данных.

Необходимо разобраться в этом обстоятельстве и дать анализ последствий наличия такого достаточно обычного явления. В существующих учебниках этот вопрос не освещен и не затронут. Поэтому следует попытаться, хотя бы несколько в общем виде, разобраться в том, как сказываются ошибки исходных данных, в случае их зависимости друг от друга, на выражении погрешности получаемой величины (положения).

п. 2. Вывод общей формулы. Дана линейная функция

$$F = f_1 x_1 + f_2 y_1 + f_3 x_2 + f_4 y_2 \quad (23.1)$$

от неизвестных x_1, y_1, x_2 и y_2 , найденных из косвенных измерений с обычными начальными уравнениями погрешности.

Свободные члены l этих уравнений вычисляются из результатов непосредственных измерений L и некоторых исходных данных $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, например, координат „твердых“ точек.

$$l_i = \varphi_i(L_i, \alpha, \beta, \gamma, \dots). \quad (23.2)$$

Неизвестные x_1, y_1, x_2 и y_2 определяются из четырех нормальных уравнений, содержащих l . Поэтому функция F может быть представлена также линейной функцией от l или L :

$$F = E_1 l_1 + E_2 l_2 + \dots + E_n l_n = [El], \quad (23.3)$$

или

$$F = E_1 \varphi_1(L_1, \alpha, \beta, \gamma, \dots) + E_2 \varphi_2(L_2, \alpha, \beta, \gamma, \dots) + \dots \quad (23.4)$$

с полным дифференциалом

$$dF = [\lambda dl] + Ad\alpha + Bd\beta + Cd\gamma + \dots, \quad (23.5)$$

где

$$\lambda_i = \frac{\partial F}{\partial L_i} = \frac{\partial F}{\partial l_i} = E_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial l_i}.$$

С другой стороны, возьмем функцию Φ от уравненных значений измеренных величин l и от некоторых исходных данных $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ в случае наличия ошибок у последних при условных наблюдениях

$$\Phi \{(l_1 + \delta_1), (l_2 + \delta_2), \dots, (l_n + \delta_n), \alpha, \beta, \gamma, \dots\}. \quad (23.6)$$

Полный дифференциал этой функции выразится равенством:

$$d\Phi = [w'R] + Ad\alpha + Bd\beta + Cd\gamma + \dots, \quad (23.7)$$

где w' — свободные члены условных уравнений, вычисленных с привлечением данных значений $\alpha, \beta, \gamma, \dots$;

R — неопределенные множители, облегчающие выражение коэффициентов для получения веса функций от уравненных значений при неизменных $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Пусть величины $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ как в выражении (23.5), так и в (23.7) получились в результате совместного уравнивания. Тогда вторую половину правой части равенств (23.7) и (23.5) с коэффициентами $A, B, C, \dots$ можно рассматривать как полный дифференциал некоторой сложной функции Ψ :

$$d\Psi = A d\alpha + B d\beta + C d\gamma + \dots \quad (23.8)$$

Величины $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ сами являются функциями некоторого числа непосредственно измеренных величин $E_1, E_2, \dots, E_s$
 $\alpha = \varphi_\alpha(E_1, E_2, \dots, E_s); \beta = \varphi_\beta(E_1, E_2, \dots, E_s); \dots \quad (23.9)$

Обозначим частные производные функций $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \dots$ по $E_1, E_2, \dots, E_s$ через $\varphi_{\alpha.1}, \varphi_{\alpha.2}, \dots, \varphi_{\alpha.s}; \varphi_{\beta.1}, \varphi_{\beta.2}, \dots, \varphi_{\beta.s}; \varphi_{\gamma.1}, \varphi_{\gamma.2}, \dots$, а малые приращения E — через e . Значит,

$$d\alpha = \varphi_{\alpha.1} e_1 + \varphi_{\alpha.2} e_2 + \dots = [\varphi_\alpha e]; d\beta = [\varphi_\beta e]; d\gamma = [\varphi_\gamma e];$$

$$d\Psi = (A\varphi_{\alpha.1} + B\varphi_{\beta.1} + C\varphi_{\gamma.1} + \dots) e_1 +$$

$$+ (A\varphi_{\alpha.2} + B\varphi_{\beta.2} + C\varphi_{\gamma.2} + \dots) e_2 + \dots$$

Считая e как ошибки E одинаковыми и равными $m_{исх}$, можно написать, что

$$M_F^2 \text{ или } M_\Phi^2 = \frac{1}{P} m^2 + \frac{1}{P_\Psi} m_{исх}^2, \quad (23.10)$$

где член $\frac{1}{P} m^2$ представляет часть квадрата общей ошибки, зависящую от ошибок самих измерений, а $\frac{1}{P_\Psi} m_{исх}^2$ — часть, зависящую от ошибок исходных данных. При этом

$$\frac{1}{P_\Psi} = (A\varphi_{\alpha.1} + B\varphi_{\beta.1} + C\varphi_{\gamma.1} + \dots)^2 +$$

$$+ (A\varphi_{\alpha.2} + B\varphi_{\beta.2} + C\varphi_{\gamma.2} + \dots)^2 + \dots,$$

или

$$\frac{1}{P_\Psi} = A^2 [\varphi_\alpha \varphi_\alpha] + 2AB [\varphi_\alpha \varphi_\beta] + 2AC [\varphi_\alpha \varphi_\gamma] + \dots +$$

$$+ B^2 [\varphi_\beta \varphi_\beta] + 2BC [\varphi_\beta \varphi_\gamma] + \dots +$$

$$+ C^2 [\varphi_\gamma \varphi_\gamma] + \dots \quad (23.11)$$

Коэффициенты $A, B, C, \dots$ получаются сообразно имеющимся на этот счет указаниям в учебниках как для условных, так и для косвенных наблюдений.

п. 3. Случай косвенных наблюдений. Если исходные величины $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ были получены в результате уравнивания косвенных измерений, то для вычисления $\frac{1}{P_{\Psi}}$ в формуле (23.10) можно применить целиком обычные выводы веса функции уравновешенных значений величин, полученных косвенными измерениями, когда вес P функции F , выраженной равенством (23.1), не может быть определен непосредственно по отдельным весам совместно уравненных элементов x_1, y_1, x_2 и y_2 , так как эти элементы не являются независимыми друг от друга, а требуют выражения F в зависимости от непосредственно измеренных величин. Роль функции F играет здесь Φ , роль $f_1 - A_1$, роль $f_2 - B$ и т. д.; роль x_1 играет $d\alpha$; роль $y_1 - d\beta$ и т. д.; роль различных l играют e . Поэтому аналогично с выражением, даваемым для веса функции F , можно записать здесь, что

$$\frac{1}{P_{\Psi}} = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{[B \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[C \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{[D \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} + \dots, \quad (23.12)$$

где $a, b, c, d, \dots$ — обычные коэффициенты начальных уравнений, при помощи которых были уравнены $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$

п. 4. Случай условных наблюдений. Если $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ являются функциями элементов уравновешенных условных наблюдений, то P_{Ψ} можно рассматривать как вес функции от функции при уравнивании по способу условных наблюдений.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} d\alpha &= \varphi_{\alpha 1} \delta_1 + \varphi_{\alpha 2} \delta_2 + \dots + \varphi_{\alpha k} \delta_k, \\ d\beta &= \varphi_{\beta 1} \delta_1 + \varphi_{\beta 2} \delta_2 + \dots + \varphi_{\beta k} \delta_k, \\ d\gamma &= \varphi_{\gamma 1} \delta_1 + \varphi_{\gamma 2} \delta_2 + \dots + \varphi_{\gamma k} \delta_k, \end{aligned} \right\} \quad (23.13)$$

и

$$d\Psi = A d\alpha + B d\beta + C d\gamma + \dots$$

Тогда

$$\frac{1}{P_{\Psi}} = \frac{A^2}{P_{\alpha\alpha}} + \frac{2AB}{P_{\alpha\beta}} + \frac{2AC}{P_{\alpha\gamma}} + \dots + \frac{2BC}{P_{\beta\gamma}} + \dots + \frac{C^2}{P_{\gamma\gamma}}, \quad (23.14)$$

где $\frac{1}{P_{\alpha\alpha}}, \frac{1}{P_{\beta\beta}}, \frac{1}{P_{\gamma\gamma}}, \dots$ вычисляются по обычной формуле:

$$\frac{1}{P} [FF] = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cf \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \dots, \quad (23.15)$$

в которой роль P поочередно играют $P_{\alpha\alpha}, P_{\beta\beta}, P_{\gamma\gamma}, \dots$, а роль f_i поочередно $\varphi_{\alpha \cdot i}, \varphi_{\beta \cdot i}, \varphi_{\gamma \cdot i}, \dots$.

Величины $\frac{1}{P_{\alpha\beta}}, \frac{1}{P_{\alpha\gamma}}, \dots, \frac{1}{P_{\beta\gamma}}$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\alpha\beta}} = [\varphi_{\alpha} \varphi_{\beta}] - \frac{[a\varphi_{\alpha}][a\varphi_{\beta}]}{[aa]} - \frac{[b\varphi_{\alpha} \cdot 1][b\varphi_{\beta} \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \\ - \frac{[c\varphi_{\alpha} \cdot 2][c\varphi_{\beta} \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (23.16)$$

Коэффициенты этих выражений, также как и выражений для $\frac{1}{P_{\alpha\alpha}}, \frac{1}{P_{\beta\beta}}, \frac{1}{P_{\gamma\gamma}}, \dots$, получаются попутно при решении нормальных уравнений коррелат и получении поправок δ_i , от которых зависят $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, с добавлением условного фиктивного уравнения, содержащего $\varphi_{\alpha}, \varphi_{\beta}, \varphi_{\gamma}, \dots$.

п. 5. Общие замечания. Формулы (23.12) и (23.14) и связанные с ними приемы вычисления, приводимые в руководствах по теории погрешности и способу наименьших квадратов (например, в книге проф. Шилова), позволяют вместо общей формулы (23.11) конкретно подойти к выражению весов функций уравновешенных элементов с учетом ошибок исходных данных, когда эти данные получены из совместного уравнивания способом косвенных или условных наблюдений.

Основным выводом данного параграфа, заслуживающим внимания, является то, что выражение

$$M^2 = \frac{1}{P} m^2 + \left(\frac{A^2}{P_{\alpha}} + \frac{B^2}{P_{\beta}} + \frac{C^2}{P_{\gamma}} + \dots \right) m_{\text{исх}}^2 \quad (23.17)$$

не может считаться правильным, если $\frac{1}{P_{\alpha}}, \frac{1}{P_{\beta}}, \frac{1}{P_{\gamma}}, \dots$ получаются из одного и того же уравнивания косвенных или условных наблюдений.

Обращаясь к общему выражению веса (23.11), мы видим в нем неквадратичные члены, которые могут уменьшить часть общей ошибки функции, зависящей от ошибок исходных данных, т. е. слагаемое $\frac{1}{P_{\Psi}} m^2_{\text{исх}}$ в выражении (23.10) должно быть меньше второго слагаемого первой части равенства (23.17).

О Г Л А В Л Е Н И Е

Глава I

Погрешности на плоскости

§ 1. Общие соображения	3
§ 2. Векториальные погрешности	4
§ 3. Сложение вычитание и разложение направленных на плоскости погрешностей	11
§ 4. Примеры приложения графических действий с направленными погрешностями на плоскости	18
§ 5. Линии положения, градиенты и выражение погрешностей	35

Глава II

Погрешности в пространстве

§ 6. Сетка Каврайского и задачи, решаемые с ее помощью	42
§ 7. Векториальные погрешности в пространстве	47
§ 8. Примеры применения построения эллипсоида погрешности	60
§ 9. Пример построения эллипсоида рассеивания по трем снимкам мгновенных точек	71

Глава III

Графическое уравнивание положений по способу наименьших квадратов

§ 10. Общая теория уравнивания положений	89
§ 11. Погрешности и веса положений на плоскости	95
§ 12. Сложение и вычитание различных положений на плоскости и в пространстве	107
§ 13. Пример на сложение положений в пространстве	118

Глава IV

Геодезическая вставка одной точки

§ 14. Редуцирование направлений	133
§ 15. Уравнивание положения при вставке одной точки	137

§ 16. Применение линий положения для решения некоторых геодезических задач	142
§ 17. Исследования обратных засечек	150

Глава V

Совместная вставка двух точек

§ 18. Обоснование графических построений	163
§ 19. Веса и погрешности уравнированного положения двух совместно вставленных точек	176
§ 20. Пример совместной вставки двух точек	180
§ 21. Задача Ганзена	203
§ 22. Дополнительные соображения к совместной вставке двух точек	215

Глава VI

Дополнение

§ 23. Об учете ошибок исходных данных	229
---	-----

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР

*

Редактор издательства А. З. Рывкин. Технический редактор Е. Н. Симкина.

РИСО АН СССР № 3118, А-07283. Издат. № 1608. Тип. заказ № 795.

Подп. к печ. 13/IX 1948 г. Формат бум. 60×92³/₄. Печ. л. 14³/₄ + 1 вклейка.

Уч.-издат. л. Типаж 1500

2-я типография Издательства Академии Наук СССР.

Москва, Шубинский пер., д. 10