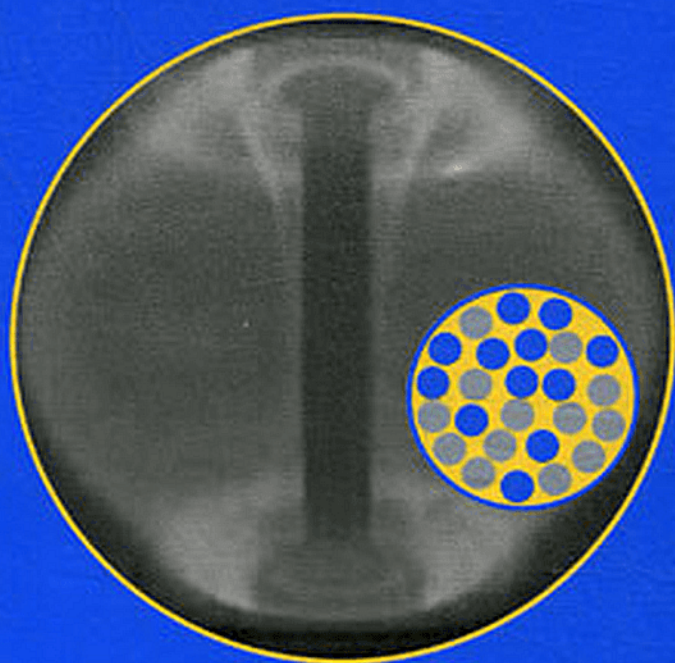


ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ и ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

В.М. ЖДАНОВ



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
ВВЕДЕНИЕ	9
Глава 1. Кинетическое уравнение	14
1.1. Функция распределения и макроскопические параметры плазмы . .	14
1.2. Кинетическое уравнение Больцмана	17
1.3. Эффективные сечения рассеяния	24
1.4. Интеграл столкновений для заряженных частиц	33
Глава 2. Уравнения переноса	37
2.1. Общее уравнение переноса	37
2.2. Уравнения сохранения	41
2.3. Уравнение баланса энтропии	45
2.4. Многотемпературные и многожидкостные модели плазмы.	49
2.5. Неравновесная термодинамика многокомпонентной плазмы.	52
2.6. Неравновесная термодинамика многожидкостной плазмы	59
Глава 3. Квазигидродинамическое приближение	62
3.1. Средняя передача импульса и энергии при столкновениях частиц	62
3.2. Обобщенный закон Ома для частично ионизованной трехкомпо- нентной плазмы.	67
3.3. Формальное решение уравнений многокомпонентной диффузии в плазме.	71
3.4. Обобщенный закон Ома для многокомпонентной плазмы	73
3.5. Диффузия в слабоионизованном газе.	77
3.6. Поперечный перенос частиц в замагниченной плазме.	82
Глава 4. Метод Грэда	86
4.1. Разложение функции распределения	86
4.2. Приближение $13N$ моментов	90
4.3. Линейные соотношения переноса	96
4.4. Однотемпературная плазма	97
4.5. Двухтемпературная плазма	102
4.6. Высшие приближения метода моментов	105
4.7. Связь с результатами метода Чепмена–Энскога.	112

Глава 5. Явления переноса в многокомпонентной газовой смеси . . .	117
5.1. Исходная система уравнений	117
5.2. Тензор вязких напряжений и поток тепла	120
5.3. Диффузия в многокомпонентной смеси	127
5.4. Бародиффузия в вязком потоке.	130
5.5. Производство энтропии. Обобщенная неравновесная термодинамика газовой смеси	133
Глава 6. Явления переноса в многосортной плазме	138
6.1. Многосортная неизотермическая плазма в магнитном поле	138
6.2. Отделение уравнений для электронов и тяжелых частиц. Электронные свойства переноса	142
6.3. Учет высших приближений при расчете электронных свойств переноса.	149
Глава 7. Двухтемпературный частично ионизованный газ	156
7.1. Тензор вязких напряжений	156
7.2. Потоки тепла	161
7.3. Диффузионные потоки	165
Глава 8. Многосортная полностью ионизованная плазма	170
8.1. Исходные уравнения.	170
8.2. Явления переноса в простой плазме	174
8.3. Поперечные свойства переноса в замагниченной плазме	181
8.4. Продольные составляющие сил трения и потоков тепла. Продольная вязкость	185
8.5. Диффузия и перенос тепла в тороидальных системах в режиме Пфирша–Шлютера	191
Глава 9. Некоторые практические приложения	201
9.1. Электропроводность плазмы МГД-генератора	201
9.2. Разделение компонентов смеси во вращающейся плазме.	206
9.3. Температурное экранирование примесей в полностью ионизованной многосортной плазме	210
9.4. Радиальный перенос частиц и тепла примесей в режиме Пфирша–Шлютера	213
Глава 10. Явления переноса при учете внутренних степеней свободы молекул.	218
10.1. Общие замечания	218
10.2. Макроскопические параметры и уравнения сохранения для многоатомной газовой смеси	220

10.3. Разложение функции распределения и уравнения переноса	224
10.4. Явления переноса и релаксации в простом многоатомном газе. . . .	229
10.5. Двухтемпературное приближение. Уравнение релаксации внутренней энергии	233
10.6. Оценки вклада неупругих столкновений в кинетические коэффициенты	237
10.7. Теплопроводность молекулярных газов	240
10.8. Явления переноса в многоатомных газовых смесях	242
10.9. Релаксация энергии и объемная вязкость смеси	249
 Приложение I. Общая система уравнений моментов	 254
Приложение II. Значения парциальных интегральных скобок, выраженные через интегралы $\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r}$	262
Приложение III. Выражения для элементов q^{nk} и p^{nk}	265
 Список литературы	 268

Предисловие

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена классической кинетической теории процессов переноса в многокомпонентной плазме. Термин «процессы переноса» относится, как известно, к описанию переноса массы, импульса и энергии в среде под влиянием ее пространственной неоднородности (градиентов плотности, скорости и температуры), а также внешних полей (например, гравитационного или электрического и магнитного). Классическое описание этих явлений в разреженном газе и плазме тесно связано с концепцией парных взаимодействий частиц, что определяет существенную роль интеграла столкновений в используемых в теории кинетических уравнениях, независимо от того записывается ли он в обычной форме Больцмана, как в случае газа нейтральных частиц, или в форме Ландау для кулоновского взаимодействия заряженных частиц. Результаты, получаемые в рамках классической теории, относятся главным образом к таким неравновесным состояниям системы, когда макроскопические параметры газа или плазмы слабо меняются на расстояниях и за времена порядка средней длины свободного пробега и времени между столкновениями частиц. При этом считается, как правило, что плазма помещена в однородное и прямолинейное электрическое и магнитное поля. Вместе с тем, в присутствии неоднородного и изогнутого магнитного поля (такого, например, которое используется в тороидальных системах магнитного удержания плазмы), становится возможным нетривиальное обобщение результатов классической теории, позволяющее описывать специфический перенос частиц и энергии в таких системах («неоклассическая теория процессов переноса»). Разумеется, вне сферы действия классической теории остаются при этом различные виды аномального переноса в плазме, обусловленные коллективными эффектами (такими как неустойчивость и турбулентность).

Настоящая книга представляет собой существенно переработанное и дополненное издание монографии автора «Явления переноса в многокомпонентной плазме», которое вышло в свет в 1982 году в издательстве Энергоиздат [1]. В 2002 году этот новый вариант книги был опубликован издательством Taylor & Francis на английском языке [2]. Предлагаемое издание книги на русском языке по своему основному содержанию мало отличается от английского издания, лишь в некоторых его разделах сделаны небольшие дополнения.

Как известно, реальная плазма, применяемая в ряде экспериментальных и технических устройств, так же как и плазма естественного происхождения (например, ионосферная), практически всегда ока-

зываются многокомпонентными. Так, даже в сравнительно «чистой» водородной плазме установок термоядерного синтеза заметная роль принадлежит примесям, поступающим со стенок разрядной камеры, которые существенно определяют излучение, электропроводность и другие параметры плазмы. С многокомпонентностью состава приходится считаться при исследовании плазмы продуктов сгорания, используемой в канале магнитогидродинамических генераторов энергии, при рассмотрении газоразрядной плазмы и во многих других случаях.

Насколько известно автору, за прошедшие 25 лет со дня первого издания книги не было опубликовано новых монографий, посвященных собственнo многокомпонентной плазме, что делает вполне своевременным появление расширенного варианта книги, учитывающего в том числе и последние результаты в этой области. В новом издании автор стремился дать более подробное рассмотрение ряда традиционных вопросов, позволяющее приблизить изложение в некоторых главах к тексту, который может оказаться полезным в качестве учебного пособия для студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей. В отдельные главы выделен материал, относящийся к явлениям переноса в многокомпонентной смеси нейтральных атомов и молекул, а также к практическим применениям теории многокомпонентных ионизованных газов. Появились новые разделы, посвященные неравновесной термодинамике многокомпонентной плазмы. Все это заметно увеличило объем книги по сравнению с изданием 1982 года.

Отметим некоторые особенности настоящей книги, отличающие ее от известных монографий по кинетической теории газа и плазмы. В большинстве из них в качестве основных методов рассмотрения процессов переноса используются, как правило, или традиционный метод Чепмена–Энскога, или метод разложения функции распределения частиц по тензорным сферическим гармоникам. В настоящей книге, как и в ее первом издании, при анализе явлений переноса систематически применяется предложенный Грэдом в 1949 году метод моментов. Обобщение этого метода на случай многокомпонентной газовой смеси и неизотермической многосортной плазмы было выполнено в целом ряде работ, начиная с 1960-х годов. С самого начала своей научной деятельности автор являлся убежденным сторонником последовательного применения этого метода при рассмотрении процессов переноса в газах и плазме, что нашло отражение в ряде соответствующих публикаций. Эффективность метода Грэда (метода эрмитовых моментов) была затем продемонстрирована в известном обзоре Хиршмана и Сигмара [3], посвященном неоклассической теории процессов переноса в полностью ионизованной плазме, и позднее в вышедшей в 1988 г. двухтомной монографии Раду Балеску [4] по классической и неоклассической теориям процессов переноса в двухкомпонентной полностью ионизованной плазме. Вместе с тем, преимущества этого метода особенно наглядно проявляются при применении его в случае именно многокомпонентных систем, образованных из произвольного числа сортов заряженных

и нейтральных частиц (в том числе молекул, обладающих внутренними степенями свободы).

Другая особенность книги состоит в том, что наряду с анализом электронных свойств переноса, чему уделяется часто основное внимание в монографиях по физике плазмы, в настоящем издании значительное место отведено рассмотрению явлений переноса, связанных с тяжелыми частицами (ионами и атомами либо молекулами). Помимо частично ионизованной газовой смеси, свойства которой важны при анализе процессов в магнитогидродинамических устройствах и газоразрядных приборах, а также в ионосферной плазме, заметный интерес представляет исследование явлений переноса в полностью ионизованной плазме с несколькими сортами ионов, что имеет непосредственное отношение к проблеме диффузии примесей поперек магнитного поля в различных системах магнитного удержания плазмы. В последние годы обнаружилось важное практическое применение этих результатов также в проблеме описания процессов, происходящих в пристеночной плазме токамаков (Edge plasma).

В некоторых разделах книги использованы результаты, полученные автором совместно с М.Я. Алиевским, В.А. Полянским и П.Н. Юшмановым, которым автор выражает свою искреннюю признательность. Автор благодарен Ю.Л. Климонтовичу, А.А. Рухадзе и Вернеру Эбелингу, ознакомившихся с рукописью еще перед ее изданием за рубежом, за ряд полезных замечаний по содержанию книги. Я хочу также выразить сердечную благодарность моей жене Галине за понимание и терпение, проявленные ею в период моей работы над рукописью книги.

Литература

1. *Жданов В.М.* Явления переноса в многокомпонентной плазме. М.: Энергоиздат, 1982.
2. *Zhdanov V.M.* Transport processes in multicomponent plasma. New York-London: Taylor & Francis, 2002.
3. *Hirshman S.P., Sigmar D.T.* // Nucl. Fusion. 1981. V. 21. P. 1079.
4. *Balescu R.* Transport processes in plasmas. V. 1, 2. North Holland. Amsterdam, 1988.

ВВЕДЕНИЕ

Под термином «многокомпонентная плазма», принятым в настоящей книге, подразумевается частично или полностью ионизованная газовая смесь, образованная из произвольного числа сортов заряженных и нейтральных частиц и удовлетворяющая условию квазинейтральности.

Особенности коллективного кулоновского взаимодействия между заряженными частицами, а также присутствие электрического и магнитного полей приводят к большему разнообразию явлений в ионизованных газах по сравнению с обычной газовой смесью, однако, общие кинетические методы анализа, развитые для газов, находят широкое применение и в случае плазмы. Это относится, в первую очередь, к явлениям электропроводности, диффузии, вязкости и теплопроводности плазмы, объединяемым под общим названием «явления переноса».

Исходным при рассмотрении процессов переноса в газах является обычно классическое кинетическое уравнение Больцмана. Именно на базе этого уравнения создана сравнительно законченная теория процессов переноса для разреженных одноатомных газов и газовых смесей, в рамках которой обосновывается вывод гидродинамических уравнений переноса и получены выражения, позволяющие рассчитывать все необходимые кинетические коэффициенты (коэффициенты переноса). Основные результаты, относящиеся к этой области, достаточно хорошо известны и отражены в книгах [1–4].

Затруднения в теории, возникающие из-за присутствия в газе заряженных частиц, связаны, как известно, с расходимостью некоторых интегралов, через которые выражается эффективное сечение столкновений для кулоновского потенциала. На практике эти затруднения устраняют использованием экранированного кулоновского потенциала либо с помощью формального обрезания параметра столкновений (прицельного расстояния) на длине порядка радиуса Дебая. Строгая теория плазмы, развитая в 1960–70-х годах и основанная на выводе кинетического уравнения из уравнения Лиувилля, позволила дать более последовательный учет влияния многих частиц на процесс столкновения заряженных частиц в плазме [5–8]. При этом, с одной стороны, определяются границы применимости интегралов столкновений Больцмана и Ландау, использование которых существенно связано с концепцией экранирования кулоновского поля зарядов, а с другой — возникает возможность рассматривать более общие кинетические уравнения, учитывающие динамическую поляризацию среды, что оказывается существенным при рассмотрении сильно неравновесных состояний плазмы. Новые эффекты проявляются и при учете вклада в интеграл

столкновений крупномасштабных флуктуаций [8], что сказывается, в частности, на значениях кинетических коэффициентов плазмы, находящейся в турбулентном состоянии.

В вопросах, обсуждаемых в настоящей книге, эти эффекты не играют заметной роли, поскольку при рассмотрении явлений переноса мы предполагаем, что отклонения плазмы от состояний локального термодинамического равновесия оказываются, как правило, малыми. По этой причине к ее описанию вполне применимы обычные методы, основанные на решении кинетического уравнения Больцмана с использованием концепции дебаевского экранирования поля заряженных частиц. При таком подходе кинетическая теория явлений переноса в плазме оказывается простым обобщением теории, развиваемой для газовой смеси, в которой электроны и ионы рассматриваются наряду с атомами (или молекулами) как независимые компоненты смеси и, вместе с тем, учитываются особенности поведения заряженных частиц во внешних электрическом и магнитном полях [1, 3, 9–11].

При статистическом описании плазмы на уровне одночастичного приближения ее состояние полностью определяется заданием функции распределения $f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$, которая представляет собой плотность числа частиц сорта α в шестимерном фазовом пространстве с координатами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы, $\mathbf{r}$ — ее координата, t — время. В дальнейшем нас будет интересовать, главным образом, макроскопическое поведение плазмы. Макроскопические параметры компонентов плазмы определяются при этом как некоторые моменты по скоростям от функции распределения. Цепочка уравнений для моментов вытекает непосредственно из кинетического уравнения, которому удовлетворяет f_α , если умножить последнее на некоторую последовательность ортогональных тензорных полиномов от скорости частиц и проинтегрировать по пространству скоростей. По той же бесконечной последовательности полиномов можно разложить и саму функцию распределения, выбрав в качестве нулевого приближения (весовой функции) распределение, соответствующее какому-либо известному состоянию газа. В обычном методе Грэда [12–14] в качестве нулевого приближения выбирается локальное максвелловское распределение, а в качестве полиномов используются тензорные полиномы Эрмита от безразмерной скорости частиц. Коэффициенты разложения в силу условий ортогональности для полиномов оказываются при этом выраженными через соответствующие моменты функции распределения. Ограничиваясь в разложении конечным числом членов, мы получаем возможность выразить моменты более высокого порядка через совокупность моментов, оставленных в разложении, и тем самым сделать систему уравнений моментов замкнутой. В этом и состоит существо метода моментов, обобщение которого на случай многокомпонентной плазмы и молекулярного газа будет использоваться нами в последующем изложении.

Уравнения моментов или уравнения переноса заметно упрощаются, если использовать определенные условия макроскопичности плазмы,

отвечающие предположению о слабом изменении параметров плазмы на расстояниях и за времена порядка средней длины свободного пробега и среднего времени между столкновениями частиц. Мы приходим при этом к линейным соотношениям переноса, связывающим значения неравновесных макроскопических параметров плазмы с градиентами основных гидродинамических переменных, а также с внешними силами, действующими на частицы. Коэффициенты пропорциональности в этих соотношениях соответствуют так называемым кинетическим коэффициентам или коэффициентам переноса, вычисление которых составляет одну из задач настоящей книги.

Наиболее часто используемым приближением метода Грэда является приближение 13 моментов [12–16]. В разложении функции распределения оказываются оставленными при этом только те моменты, которые имеют явный физический смысл. С использованием этого приближения в ряде работ была развита кинетическая теория явлений переноса в частично ионизованной плазме [17–21]. В применении к слабо неравновесным и медленно меняющимся состояниям плазмы приближение 13 моментов дает все необходимые линейные соотношения переноса, однако в некоторых случаях не обеспечивает достаточной точности при расчете кинетических коэффициентов. По-видимому, именно это обстоятельство послужило причиной, из-за которой метод моментов получил заметно меньшее применение в кинетической теории плазмы по сравнению с известным методом Чепмена–Энскога [1–3] или методом разложения по сферическим гармоникам [9–11]. В настоящей книге показано, что использование линейаризованных моментов более высокого порядка позволяет и в рамках метода Грэда вычислять кинетические коэффициенты практически с той же степенью точности, которая дается другими методами, при сохранении всех остальных преимуществ моментного метода решения кинетического уравнения.

Остановимся кратко на основном содержании книги.

Первые три главы являются вводными. В главе 1 рассматривается вывод кинетического уравнения Больцмана для многокомпонентной газовой смеси и плазмы и обобщение этого уравнения с учетом внутренних степеней свободы молекул. Детально обсуждаются эффективные сечения упругого рассеяния частиц в плазме, проблема устранения расхождений в сечениях кулоновского взаимодействия частиц, интеграл столкновений заряженных частиц.

Глава 2 посвящена выводу общего уравнения переноса для многокомпонентной плазмы, уравнениям сохранения, а также обоснованию многотемпературных и многожидкостных моделей плазмы. Специальный раздел главы отводится обсуждению неравновесной термодинамики многокомпонентной плазмы.

Многие важные особенности макроскопического поведения плазмы во внешних полях могут быть поняты на основе так называемого квазигидродинамического приближения, которое рассматривается в гл. 3. Это приближение используется для вывода уравнений

диффузии и обобщенного закона Ома в случае произвольной многокомпонентной плазмы, а также при анализе диффузии в слабо ионизованной плазме и поперечного переноса частиц в замагниченной, полностью ионизованной плазме.

Глава 4 посвящена систематическому изложению существа метода моментов Грэда и его применению для получения системы макроскопических уравнений переноса в неизотермической многокомпонентной плазме и следующих из них линейных соотношений переноса. Здесь же подробно обсуждаются приближения однотемпературной и двухтемпературной плазмы. На основе линеаризованного кинетического уравнения Больцмана демонстрируется возможность использования более высоких приближений метода моментов при расчете кинетических коэффициентов плазмы и связь получаемых выражений с известными результатами метода Чепмена–Энскога.

В главе 5 рассматриваются явления переноса в однотемпературной многокомпонентной газовой смеси в отсутствие магнитного поля. Приведенные здесь соотношения, особенно те, которые имеют отношение к переносу тепла, диффузии, баро- и термодиффузии в многокомпонентной смеси, а также более простая структура выражений для ряда кинетических коэффициентов смеси, имеют ряд преимуществ по сравнению с результатами, получаемыми в рамках традиционного метода Чепмена–Энскога.

Главы 6–8 посвящены процессам переноса в неизотермической многосортной плазме в присутствии магнитного поля. Наряду с получением общих выражений для тензора вязких напряжений, потока тепла и диффузионных потоков компонентов в гл. 6 обосновывается способ отделения уравнений переноса для электронов от уравнений для тяжелых частиц, что позволяет рассчитывать электронные свойства переноса независимо от других свойств в любом приближении метода. В главах 7 и 8 детально анализируются процессы переноса в двухтемпературном частично ионизованном газе и в многосортной полностью ионизованной плазме, состоящей из электронов и нескольких сортов ионов, каждый из которых может находиться в различных зарядовых состояниях. При этом используется приближение к функции распределения частиц плазмы, соответствующее по точности расчету кинетических коэффициентов известным результатам Брагинского для простой плазмы. Отдельный параграф посвящен применению полученных результатов к анализу диффузии и переноса тепла в тороидальных системах магнитного удержания плазмы для так называемого режима Пфирша–Шлютера.

В главе 9 рассматриваются некоторые примеры практического применения полученных в предыдущих главах результатов: электропроводность и эффект Холла в МГД-генераторах, явления переноса во вращающейся плазме, неоклассический перенос частиц и тепла тяжелых примесей в тороидальных системах. Выбор примеров в значительной степени произволен и призван продемонстрировать различные

аспекты приложения результатов кинетической теории многокомпонентной плазмы к конкретным задачам.

Последняя десятая глава книги посвящена явлениям переноса в газовых смесях при учете внутренних степеней свободы молекул. Основное внимание уделяется здесь выводу уравнений переноса и выражений для кинетических коэффициентов, связанных с вращательным и колебательным возбуждением тяжелых частиц. Применимость полученных результатов ограничена при этом случаем слабоионизованной молекулярной газовой смеси, в которой процессы неупругих взаимодействий, связанные с электронным возбуждением, ионизацией, рекомбинацией и т. д. могут еще не приниматься во внимание.

В данной книге используется Международная система единиц измерений СИ. Температура измеряется в кельвинах.

Глава 1

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

1.1. Функция распределения и макроскопические параметры плазмы

Состояние плазмы может быть описано с помощью одночастичной функции распределения $f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$. Последняя определяется таким образом, что $f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} d\mathbf{r}$ представляет собой среднее число частиц сорта α , которые находятся в момент времени t в окрестности точки $\mathbf{r}$ элемента объема $d\mathbf{r} = dx dy dz$ и обладают скоростью около значения $\mathbf{v}$ из интервала $d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$.

Основные макроскопические параметры компонентов плазмы — числовая плотность n_α , массовая плотность ρ_α , средняя скорость $\mathbf{u}_\alpha$ и температура T_α вводятся с помощью соотношений

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \int f_\alpha d\mathbf{v}, & \rho_\alpha &= m_\alpha n_\alpha = \int m_\alpha f_\alpha d\mathbf{v}, \\ n_\alpha \mathbf{u}_\alpha &= \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v}, & \frac{3}{2} n_\alpha k T_\alpha &= \frac{1}{2} m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f_\alpha d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Здесь m_α — масса частицы сорта α , k — постоянная Больцмана.

Параметры плазмы в целом — концентрация n , плотность ρ , среднemasовая скорость $\mathbf{u}$ и температура T находятся соответствующим суммированием по α , так что

$$n = \sum_\alpha n_\alpha, \quad \rho = \sum_\alpha \rho_\alpha, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \quad nT = \sum_\alpha n_\alpha T_\alpha. \quad (1.1.2)$$

Используем в качестве новой переменной собственную скорость частицы, $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$.

Тогда, вводя определение диффузионной скорости, $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}$, имеем

$$\mathbf{J}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha = m_\alpha \int \mathbf{c} f_\alpha d\mathbf{v}, \quad (1.1.3)$$

где $\mathbf{J}_\alpha$ — массовый диффузионный поток частиц сорта α . Из определения среднемассовой скорости $\mathbf{u}$ при этом следует, что

$$\sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0. \quad (1.1.4)$$

Введем теперь определения для парциального и полного тензоров давлений:

$$P_{\alpha rs} = m_\alpha \int c_r c_s f_\alpha d\mathbf{v}, \quad P_{rs} = \sum_\alpha P_{\alpha rs}. \quad (1.1.5)$$

По физическому смыслу $P_{\alpha rs}$ (1.1.5) представляет собой плотность потока импульса частиц сорта α . Выделяя диагональную часть тензора, представим его в виде

$$P_{\alpha rs} = p_\alpha \delta_{rs} + \pi_{\alpha rs}, \quad (1.1.6)$$

где

$$p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha = \frac{m_\alpha}{3} \int c^2 f_\alpha d\mathbf{v}, \quad \pi_{\alpha rs} = m_\alpha \int \left(c_r c_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} c^2 \right) f_\alpha d\mathbf{v}. \quad (1.1.7)$$

Величина p_α имеет смысл парциального давления частиц сорта α в плазме, $\pi_{\alpha rs}$ соответствует парциальному тензору вязких напряжений. Для плазмы в целом

$$P_{rs} = p \delta_{rs} + \pi_{rs}, \quad p = \sum_\alpha p_\alpha = nkT, \quad \pi_{rs} = \sum_\alpha \pi_{\alpha rs}. \quad (1.1.8)$$

Введем еще вектор плотности потока кинетической энергии частиц сорта α , который называют обычно вектором потока тепла

$$\mathbf{q}_\alpha = \int \frac{mc^2}{2} \mathbf{c} f_\alpha d\mathbf{v}. \quad (1.1.9)$$

Для полного потока тепла в плазме $\mathbf{q}$ имеем

$$\mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}_\alpha = \sum_\alpha \int \frac{m_\alpha c^2}{2} \mathbf{c} f_\alpha d\mathbf{v}. \quad (1.1.10)$$

Заметим, что введенные нами макроскопические параметры представляют собой фактически первые несколько моментов функции распределения. Общее определение момента имеет вид

$$M_{\alpha r_1 \dots r_n}^{(n)} = m_\alpha \int c_{r_1} \dots c_{r_n} f_\alpha d\mathbf{v}. \quad (1.1.11)$$

При этом плотность ρ_α представляет собой момент нулевого порядка, массовый диффузионный поток $\mathbf{J}_\alpha$ — момент первого порядка, парциальный тензор давлений $P_{\alpha rs}$ — момент второго порядка и удвоенный тепловой поток $2q_{\alpha r} = M_{\alpha rss}^{(3)}$ — сокращенный момент третьего порядка.

Выше фактически предполагалось, что все частицы, составляющие плазму, являются бесструктурными. Однако в реальной многокомпонентной плазме могут присутствовать возбужденные атомы, молекулы и молекулярные ионы, которые обладают в общем случае несколькими видами внутреннего движения, соответствующего электронным, вращательным и колебательным степеням свободы. Их наличие можно формально учитывать в определении функции распределения, используя обобщенный индекс i , который в свою очередь, подразделяется на индексы $i_1, i_2, \dots$, где совокупность $\{i_\nu\}$ отвечает полному набору квантовых чисел для ν -го вида внутренних степеней свободы. При таком полуклассическом способе описания (поступательные степени свободы трактуются классически, а внутренние — квантово-механически) состояние плазмы можно характеризовать с помощью функции распределения $f_{\alpha i}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, i, t)$.

В определение всех интересующих нас макроскопических величин должно входить в этом случае суммирование по индексу i , например,

$$n_\alpha = \sum_i \int f_{\alpha i} d\mathbf{v}, \quad n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \sum_i \int \mathbf{v} f_{\alpha i} d\mathbf{v}. \quad (1.1.12)$$

Аналогично определяется парциальный тензор давлений

$$P_{\alpha rs} = \sum_i \int m_\alpha c_r c_s f_{\alpha i} d\mathbf{v}. \quad (1.1.13)$$

При этом диагональная часть тензора $P_{\alpha rs}$ уже не совпадает с обычным (гидростатическим) парциальным давлением. Как и раньше, будем использовать соответствующее разбиение тензора

$$P_{\alpha rs} = P_\alpha \delta_{rs} + \pi_{\alpha rs}, \quad (1.1.14)$$

где

$$P_\alpha = \frac{m_\alpha}{3} \sum_i \int c^2 f_{\alpha i} d\mathbf{v}, \quad (1.1.15)$$

$$\pi_{\alpha rs} = m_\alpha \sum_i \int \left(c_r c_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} c^2 \right) f_{\alpha i} d\mathbf{v}.$$

Существенные уточнения возникают при определении температуры плазмы. Строго говоря, вместо T_α целесообразно использовать понятие средней энергии частиц сорта α в единице объема плазмы, которая складывается из средних энергий, отвечающих поступательным

и внутренним степеням свободы частиц:

$$n_\alpha E_\alpha = n_\alpha E_\alpha^{\text{tr}} + n_\alpha E_\alpha^{\text{int}}, \quad (1.1.16)$$

где

$$n_\alpha E_\alpha^{\text{tr}} = \sum_i \int \frac{m_\alpha c^2}{2} f_{\alpha i} d\mathbf{v}, \quad n_\alpha E_\alpha^{\text{int}} = \sum_i \int E_{\alpha i} f_{\alpha i} d\mathbf{v}. \quad (1.1.17)$$

Здесь $E_{\alpha i}$ — внутренняя энергия частицы сорта α , находящейся в i -м квантовом состоянии. Легко заметить, что

$$P_\alpha = \frac{2}{3} n_\alpha E_\alpha^{\text{tr}}. \quad (1.1.18)$$

Полная средняя энергия единицы объема плазмы определяется тогда, как

$$nE = \sum_\alpha n_\alpha E_\alpha = \sum_\alpha \sum_i \int \left(\frac{m_\alpha c^2}{2} + E_{\alpha i} \right) f_{\alpha i} d\mathbf{v}. \quad (1.1.19)$$

Именно этой величиной, как мы увидим (см. гл. 2 и 10), определяется полная температура молекулярной плазмы T для слабо-неравновесных состояний.

Наконец, при определении вектора потока тепла частиц сорта α необходимо учитывать потоки энергии, связанные с переносом как поступательной, так и внутренней энергии частиц. При этом

$$\mathbf{q}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha^{\text{tr}} + \mathbf{q}_\alpha^{\text{int}}, \quad (1.1.20)$$

где

$$\mathbf{q}_\alpha^{\text{tr}} = \sum_i \int \frac{m_\alpha c^2}{2} \mathbf{c} f_{\alpha i} d\mathbf{v}, \quad \mathbf{q}_\alpha^{\text{int}} = \sum_i \int E_{\alpha i} \mathbf{c} f_{\alpha i} d\mathbf{v}. \quad (1.1.21)$$

Для полного потока тепла имеем

$$\mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}_\alpha = \sum_\alpha \sum_i \int \left(\frac{m_\alpha c^2}{2} + E_{\alpha i} \right) \mathbf{c} f_{\alpha i} d\mathbf{v}. \quad (1.1.22)$$

1.2. Кинетическое уравнение Больцмана

Эволюция одночастичной функции распределения $f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ в пространстве и времени описывается с помощью так называемого кинетического уравнения. Если рассматривать плазму просто как многокомпонентную газовую смесь нейтральных и заряженных частиц, помещенную во внешнее силовое поле, то в основу анализа неравновесных

явлений в ней может быть положено известное кинетическое уравнение Больцмана [1, 2], которое записывается в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = J_\alpha, \quad (1.2.1)$$

где ∇ и $\nabla_{\mathbf{v}}$ — соответственно операторы градиентов по переменным $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_\alpha$ — внешняя сила, действующая на частицу сорта α .

Левая часть (1.2.1) фактически представляет собой полную производную по времени Df_α/Dt при дифференцировании вдоль траектории частицы в шестимерном фазовом пространстве. В отсутствие столкновений, в соответствии с теоремой Лиувилля, $Df_\alpha/Dt = 0$. Наличие столкновений приводит к нарушению этого условия, так как в результате каждого столкновения (рассматриваемого как точечное) частица резко меняет свою скорость, т.е. исчезает в одной точке фазового пространства скоростей и появляется в другой. Это обстоятельство учитывается в правой части уравнения (1.2.1) введением интеграла столкновений J_α .

Больцмановский интеграл столкновений учитывает лишь парные столкновения частиц, иными словами, при его выводе полностью пренебрегается возможными взаимодействиями трех частиц одновременно, а также и более сложных комплексов. Напомним основные соображения, используемые при получении выражения для J_α .

Заметим, прежде всего, что при учете различных пар взаимодействующих частиц в многокомпонентной плазме

$$J_\alpha = \sum_{\beta} J_{\alpha\beta}, \quad (1.2.2)$$

где $J_{\alpha\beta}$ — интеграл столкновений частиц сортов α и β .

Будем учитывать только упругие столкновения частиц. В этом случае последние рассматриваются как классические точечные центры сил. Считается, кроме того, что любые внешние силы, действующие на частицы, очень малы по сравнению с силами межчастичного взаимодействия, т.е. их влиянием на динамику столкновения можно пренебречь.

Для столкновения двух частиц с массами m_α и m_β могут быть записаны законы сохранения импульса и энергии,

$$m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_{1\beta} = m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha + m_\beta \mathbf{v}'_{1\beta}, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\beta v_{1\beta}^2 = \frac{1}{2} m_\alpha v'^2_\alpha + \frac{1}{2} m_\beta v'^2_{1\beta}, \quad (1.2.4)$$

где штрихом отмечены значения скоростей после столкновения, а индекс «1» вводится, чтобы отличить сталкивающиеся частицы при $\alpha = \beta$. Понятия «до» и «после» столкновения соответствуют начальному

и конечному этапу свободного движения частиц, когда влияние взаимодействия частиц на их движение оказывается несущественным.

Удобно ввести скорость центра масс пары частиц, которая не изменяется в процессе столкновения,

$$\mathbf{G} = \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta}{m_\alpha + m_\beta} = \frac{m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha + m_\beta \mathbf{v}'_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, \quad (1.2.5)$$

и относительные скорости частиц до и после столкновения:

$$\mathbf{g} = \mathbf{v}_{1\beta} - \mathbf{v}_\alpha, \quad \mathbf{g}' = \mathbf{v}'_{1\beta} - \mathbf{v}'_\alpha. \quad (1.2.6)$$

В этих переменных

$$\begin{aligned} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha &= m_\alpha \mathbf{G} - \mu_{\alpha\beta} \mathbf{g}, & m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha &= m_\alpha \mathbf{G} - \mu_{\alpha\beta} \mathbf{g}', \\ m_\beta \mathbf{v}_{1\beta} &= m_\beta \mathbf{G} + \mu_{\alpha\beta} \mathbf{g}, & m_\beta \mathbf{v}'_{1\beta} &= m_\beta \mathbf{G} + \mu_{\alpha\beta} \mathbf{g}'. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Здесь

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}$$

— приведенная масса частиц, участвующих в столкновении.

Подстановка (1.2.7) в уравнение (1.2.4) с учетом определения $\mathbf{G}$ (1.2.5) приводит к условию

$$g = g', \quad (1.2.8)$$

т. е. в результате столкновения вектор относительной скорости $\mathbf{g}$ поворачивается и переходит в $\mathbf{g}'$, но модули этих векторов $g = |\mathbf{g}|$ остаются неизменными.

Изменение направления $\mathbf{g}'$ относительно $\mathbf{g}$ задается полярными и азимутальными углами χ и φ (рис. 1.1). При этом

$$\mathbf{g}' = g\mathbf{i} \cos \chi + g\mathbf{j} \sin \chi \cos \varphi + g\mathbf{k} \sin \chi \sin \varphi, \quad (1.2.9)$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы, причем вектор $\mathbf{g}$ направлен вдоль $\mathbf{i}$.

Из уравнений (1.2.5)–(1.2.7) следует, что обратные преобразования скоростей получаются простой перестановкой штрихованных и нештрихованных величин. Это свойство, а также линейность уравнений обеспечивают равенство якобианов прямого и обратного преобразований. Легко показать, что в этом случае оказываются справедливыми следующие соотношения [1]:

$$d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_{1\beta} = d\mathbf{G} d\mathbf{g}, \quad d\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_{1\beta} = d\mathbf{G} d\mathbf{g}', \quad (1.2.10)$$

а также

$$d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_{1\beta} = d\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_{1\beta}. \quad (1.2.11)$$

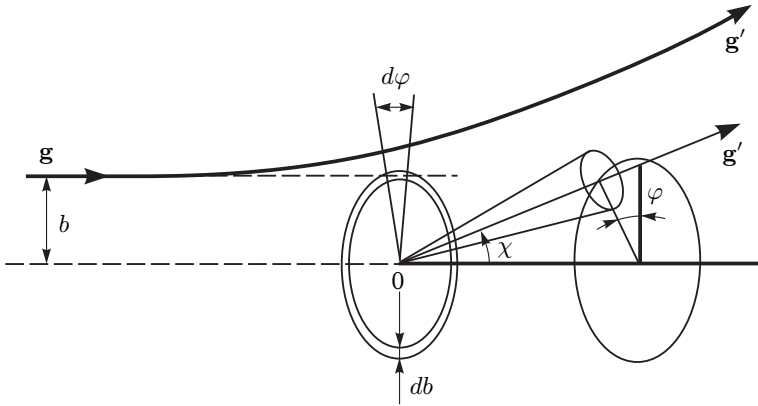


Рис. 1.1. Геометрия парного столкновения. Начало системы отсчета совмещено с положением первой частицы, которая считается покоящейся

Для дальнейшего обсуждения полезно ввести понятие дифференциального сечения рассеяния. Рассмотрим однородный пучок частиц, налетающих на силовой центр с начальной скоростью $\mathbf{g}$ и имеющих все возможные значения прицельного параметра b (рис. 1.1). Число частиц, рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega = \sin \chi d\chi d\varphi$ пропорционально плотности потока частиц в пучке I_0 и величине $d\Omega$. Тогда дифференциальное сечение рассеяния $\sigma(g, \Omega)$ определяется таким образом, что $I_0 \sigma d\Omega$ равно числу частиц, рассеиваемых за 1 с в элемент телесного угла $d\Omega$. Из рис. 1.1 видно, что такое же число частиц проходит через элемент кольца $b db d\varphi$, поэтому

$$I_0 \sigma(g, \Omega) d\Omega = I_0 b db d\varphi,$$

откуда следует, что

$$\sigma(g, \chi, \varphi) = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|, \quad (1.2.12)$$

где значение производной $db/d\chi$ берется по модулю, поскольку сечение рассеяния σ должно быть положительной величиной.

Заметим, что для частиц, рассматриваемых как точечные центры сил, из-за сферической симметрии потенциала взаимодействия частиц сечение рассеяния оказывается функцией только модуля относительной скорости частиц g и угла рассеяния χ (не зависит от φ).

Получим теперь явное выражение для интеграла столкновений $J_{\alpha\beta}$ частиц сортов α и β . Пусть $K_{\alpha\beta}^+ d\mathbf{v} d\mathbf{r} dt$ есть среднее число столкновений за промежуток времени dt , в результате которых конечное состояние одной частицы из пары сталкивающихся частиц попадает в элемент фазового объема $d\mathbf{v} d\mathbf{r}$ вблизи точки $(\mathbf{v}, \mathbf{r})$. В свою очередь,

$K_{\alpha\beta}^- d\mathbf{v} d\mathbf{r} dt$ есть среднее число столкновений за тот же промежуток времени, в которых начальное состояние одной из сталкивающихся частиц находится в том же элементе объема. Поскольку полное изменение числа частиц в элементе объема $d\mathbf{v} d\mathbf{r}$ за время dt , не связанное со столкновениями, равно $(Df_\alpha/Dt) d\mathbf{v} d\mathbf{r} dt$, при наличии столкновений мы должны приравнять его выражению $\sum_\beta (K_{\alpha\beta}^+ - K_{\alpha\beta}^-) d\mathbf{v} d\mathbf{r} dt$, откуда следует

$$J_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}^+ - K_{\alpha\beta}^-. \quad (1.2.13)$$

Далее при вычислении среднего числа столкновений будем предполагать, что корреляция между положением и скоростью двух сталкивающихся частиц отсутствует (гипотеза о молекулярном хаосе). Интервал времени dt считается при этом малым по сравнению с характерным временным масштабом изменения макроскопических величин, но достаточно большим по сравнению с длительностью столкновения.

Рассмотрим столкновение между частицей сорта β и частицей сорта α , центр которой совмещен с началом координат (рис. 1.1). Пусть прицельный параметр, соответствующий такому столкновению, лежит в интервале между b и $b + db$, а азимутальный угол — в интервале между φ и $\varphi + d\varphi$. Для того чтобы это столкновение осуществилось за промежуток времени dt , в начале этого промежутка t центр частицы сорта β , движущейся со скоростью $\mathbf{g}$, должен лежать внутри цилиндра с площадью основания $b db d\varphi$ и образующей, равной $g dt$. Полное среднее число частиц сорта β , имеющих скорости в интервале между $\mathbf{v}_{1\beta}$ и $\mathbf{v}_{1\beta} + d\mathbf{v}_{1\beta}$, которые находятся в «цилиндре столкновений», есть $f_{1\beta}(\mathbf{v}_{1\beta}, \mathbf{r}, t) g b db d\varphi d\mathbf{v}_{1\beta} dt$.

Предполагая положения и скорости частиц сортов α и β статистически независимыми, с каждым таким цилиндром можно связать каждую из частиц сорта α , среднее число которых в соответствующем интервале $d\mathbf{v}_\alpha$ и объеме $d\mathbf{r}$ есть $f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{r}$. В результате полное среднее число столкновений между частицами сортов α и β за время dt в объеме $d\mathbf{r}$ определяется как

$$f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t) f_{1\beta}(\mathbf{v}_{1\beta}, \mathbf{r}, t) g b db d\varphi d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_{1\beta} d\mathbf{r} dt. \quad (1.2.14)$$

Это выражение может быть использовано для вычисления $K_{\alpha\beta}^-$, поскольку каждое столкновение частицы сорта α с частицами сорта β приводит к изменению ее скорости и означает, следовательно, потерю одной частицы, принадлежащей к данной совокупности. Полная скорость $K_{\alpha\beta}^- d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{r} dt$, соответствующая убыли числа частиц сорта α в результате их столкновений с частицами сорта β , получается в результате интегрирования выражения (1.2.14) по всем значениям скоростей $\mathbf{v}_{1\beta}$, прицельного параметра b и угла φ .

В результате $K_{\alpha\beta}^- = \int \int \int f_{\alpha} f_{1\beta} g b db d\varphi d\mathbf{v}_{1\beta}$, или с учетом (1.2.12),

$$K_{\alpha\beta}^- = \int \int f_{\alpha} f_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta}(g, \chi) d\Omega d\mathbf{v}_{1\beta}, \quad (1.2.15)$$

где введены сокращения $f_{\alpha} = f_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{r}, t)$ и $f_{1\beta} = f_{1\beta}(\mathbf{v}_{1\beta}, \mathbf{r}, t)$.

Аналогичным образом можно вычислить $K_{\alpha\beta}^+$, рассматривая столкновения, в результате которых частицы, обладающие первоначально скоростями вне интервала $d\mathbf{v}_{\alpha}$, попадают в этот интервал. В результате

$$K_{\alpha\beta}^+ = \int \int f'_{\alpha} f'_{1\beta} g' \sigma'_{\alpha\beta}(g', \chi) d\Omega d\mathbf{v}_{1\beta}, \quad (1.2.16)$$

где $f'_{\alpha} = f_{\alpha}(\mathbf{v}'_{\alpha}, \mathbf{r}, t)$ и $f'_{1\beta} = f_{1\beta}(\mathbf{v}'_{1\beta}, \mathbf{r}, t)$. Для приведения интеграла столкновений к окончательному виду используем соотношение взаимности для прямых и обратных столкновений, следующее из симметрии процесса упругого рассеяния [1]:

$$g \sigma_{\alpha\beta}(g, \chi) d\Omega d\mathbf{v}_{\alpha} d\mathbf{v}_{1\beta} = g' \sigma'_{\alpha\beta}(g', \chi) d\Omega d\mathbf{v}'_{\alpha} d\mathbf{v}'_{1\beta}. \quad (1.2.17)$$

Объединяя (1.2.15) и (1.2.16) с учетом (1.2.17) в выражении (1.2.13), получаем

$$J_{\alpha\beta} = \int \int (f'_{\alpha} f'_{1\beta} - f_{\alpha} f_{1\beta}) g \sigma_{\alpha\beta}(g, \chi) d\Omega d\mathbf{v}_{1\beta}. \quad (1.2.18)$$

Кинетическое уравнение Больцмана записывается, таким образом, в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha} + \frac{1}{m_{\alpha}} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} = \\ = \sum_{\beta} \int \int (f'_{\alpha} f'_{1\beta} - f_{\alpha} f_{1\beta}) g \sigma_{\alpha\beta}(g, \chi) d\Omega d\mathbf{v}_{1\beta}. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

При этом сила $\mathbf{F}_{\alpha}$, действующая на частицу сорта α , записывается в общем случае как

$$\mathbf{F}_{\alpha} = e_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B}) + \mathbf{X}_{\alpha}, \quad (1.2.20)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — электрическое и магнитное поля, e_{α} — заряд частицы, $\mathbf{X}_{\alpha}$ — силы неэлектромагнитной природы, которые для простоты предполагаются не зависящими от $\mathbf{v}_{\alpha}$.

Обобщенное кинетическое уравнение больцмановского типа может быть записано и в случае, когда частицы газовой смеси (плазмы) обладают внутренними степенями свободы. Это уравнение называется кинетическим уравнением Ванг Чанга и Уленбека [3, 4]. Процедура его вывода мало чем отличается от приведенного выше, существенно

лишь, что при столкновениях частиц происходит не только их переход из одного интервала скоростей в другой, но и изменение их внутренних состояний $i, j \rightarrow k, \ell$. При окончательной записи интеграла столкновений существенно используется соотношение симметрии между прямыми и обратными столкновениями [4]:

$$g\sigma_{\alpha\beta}(i, j | k, \ell, g, \chi) d\Omega d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_{1\beta} = \\ = g'\sigma'_{\alpha\beta}(k, \ell | i, j, g', \chi) d\Omega d\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_{1\beta}. \quad (1.2.21)$$

Здесь $\sigma_{\alpha\beta}(i, j | k, \ell, g, \chi)$ — сечение прямого столкновения, соответствующего переходу $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}'$ и $i, j \rightarrow k, \ell$, а $\sigma'_{\alpha\beta}(k, \ell | i, j, g', \chi)$ — сечение обратного столкновения, соответствующего переходу $\mathbf{g}' \rightarrow \mathbf{g}$ и $k, \ell \rightarrow i, j$. При этом из законов сохранения импульса и энергии для неупругого столкновения следует, что

$$g'^2 = g^2 - \frac{2}{\mu_{\alpha\beta}} \Delta E_{\alpha\beta}, \quad (1.2.22)$$

где

$$\Delta E_{\alpha\beta} = E_{\alpha k} + E_{1\beta \ell} - E_{\alpha i} - E_{1\beta j}. \quad (1.2.23)$$

Связь между векторами $\mathbf{g}$ и $\mathbf{g}'$ по-прежнему определяется соотношением (1.2.9) с заменой g на g' в правой части.

Заметим, что соотношение (1.2.21) выполняется, строго говоря, лишь для невырожденных состояний внутреннего движения частиц, т.е. может оказаться некорректным, например, для молекул с вращательными степенями свободы. В этом случае применяется более обоснованный квантовомеханический вывод кинетического уравнения, которое называется уравнением Вальдмана–Снайдера [5, 6]. Однако, как было показано Вальдманом [7], это уравнение фактически переходит в уравнение Ванг–Чанга и Уленбека, если сделать предположение об изотропной ориентации момента импульса молекулы в пространстве и осуществить суммирование по этим ориентациям. При этом необходимо лишь изменить нормировку функции распределения с учетом статистических весов соответствующих вращательных состояний молекул и ввести эффективное усредненное сечение рассеяния по вырожденным состояниям [5, 7].

В результате кинетическое уравнение для газовой смеси (плазмы) с внутренними степенями свободы частиц может быть представлено в виде

$$\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha i} + \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha i} = \\ = \sum_\beta \sum_{j k \ell} \int \int (f'_{\alpha k} f'_{1\beta \ell} - f_{\alpha i} f_{1\beta j}) g \sigma_{\alpha\beta}(i, j | k, \ell, g, \chi) d\Omega d\mathbf{v}_{1\beta}. \quad (1.2.24)$$

1.3. Эффективные сечения рассеяния

Проблема определения дифференциальных сечений упругого и неупругого взаимодействия частиц представляет собой самостоятельную задачу, которая должна решаться в общем случае методами квантовой механики. На самом деле при конкретных расчетах кинетических коэффициентов (коэффициентов переноса) нас будут интересовать эффективные сечения, проинтегрированные по углам рассеяния. К их числу относится, например, транспортное сечение $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(g)$, которое иногда называют диффузионным сечением или «сечением с передачей импульса»:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta}^{(1)}(g) &= \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}(g, \chi) (1 - \cos \chi) d\Omega = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \sigma_{\alpha\beta}(g, \chi) (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

В общем случае в получаемых ниже выражениях будут встречаться транспортные сечения произвольного ℓ -го порядка (ℓ — целое положительное число):

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta}^{(\ell)}(g) g &= \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}(g, \chi) (1 - \cos^{\ell} \chi) d\Omega = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \sigma_{\alpha\beta}(g, \chi) (1 - \cos^{\ell} \chi) \sin \chi d\chi. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Для классического упругого столкновения частиц зависимость угла рассеяния χ от прицельного параметра b для произвольных значений g , а следовательно и зависимость $\sigma(g, \chi)$, можно найти, как известно, в рамках классического рассмотрения задачи рассеяния частицы приведенной массы $\mu_{\alpha\beta}$ в поле неподвижного силового центра с известным потенциалом $U_{\alpha\beta}(r)$ [8]. При этом

$$\chi = |\pi - 2\theta_0|, \quad (1.3.3)$$

где θ_0 — угол, соответствующий точке наибольшего сближения частиц r_0 и определяемый выражением

$$\theta_0 = b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2} \right]^{-1/2}. \quad (1.3.4)$$

Величина r_0 находится из условия

$$r_0^2 - b^2 - r_0^2 \frac{2U(r_0)}{\mu g^2} = 0. \quad (1.3.5)$$

Дифференциальное сечение $\sigma(g, \chi)$ можно найти тогда при заданном $U(r)$ по вычисленной зависимости $\chi(b)$ с помощью соотношения (1.2.12).

В случае простейшего примера взаимодействия частиц — столкновения двух твердых упругих сфер с диаметрами d_α и d_β — решением, следующим из выражений (1.3.3)–(1.3.5), оказывается соотношение [9]:

$$\cos \frac{\chi}{2} = \frac{b}{d_{\alpha\beta}}, \quad b \leq d_{\alpha\beta}, \quad (1.3.6)$$

которое может быть получено, вообще говоря, и с помощью элементарных геометрических соображений. Здесь $d_{\alpha\beta} = (d_\alpha + d_\beta)/2$.

При этом $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} d_{\alpha\beta}^2$, $Q_{\alpha\beta}^{(1)} = \pi d_{\alpha\beta}^2$,

$$Q_{\alpha\beta}^{(\ell)} = \pi d_{\alpha\beta}^2 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1 + (-1)^\ell}{1 + \ell} \right]. \quad (1.3.7)$$

В качестве модельного потенциала для упругого взаимодействия частиц, полезного при практических оценках, нередко используется обратно-степенной закон взаимодействия

$$U_{\alpha\beta}(r) = \left(\frac{\kappa_{\alpha\beta}}{r} \right)^\nu, \quad (1.3.8)$$

где ν называется показателем отталкивания (при $\nu \rightarrow \infty$ эта модель превращается в модель твердой сферы). В этом случае выражение для эффективного сечения $Q_{\alpha\beta}^{(\ell)}(g)$ принимает вид [9]

$$Q_{\alpha\beta}^{(\ell)}(g) = 2\pi \kappa_{\alpha\beta}^2 \left(\frac{\mu_{\alpha\beta} g^2}{2\nu} \right)^{-2/\nu} \int_0^\infty [1 - \cos^\ell \chi(z, \nu)] z dz.$$

Величина $\chi(z, \nu)$ определяется из соотношения

$$\chi = \pi - 2 \int_0^{y_0} \left[1 - y^2 - \nu^{-1} \left(\frac{y}{z} \right)^\nu \right]^{-1/2} dy,$$

а y_0 удовлетворяет уравнению $1 - y_0^2 - \nu^{-1} \left(\frac{y_0}{z} \right)^\nu = 0$.

В результате

$$Q_{\alpha\beta}^{(\ell)}(g) = 2\pi \kappa_{\alpha\beta}^2 \left(\frac{\mu_{\alpha\beta} g^2}{2\nu} \right)^{-2/\nu} A_\ell(\nu), \quad (1.3.9)$$

где $A_\ell(\nu)$ — интеграл, значение которого зависит только от ν [9].

Некоторые значения $A_\ell(\nu)$ для $\ell = 1, 2$ приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Значения $A_\ell(\nu)$ для обратно-степенного закона отталкивания

ν	$A_1(\nu)$	$A_2(\nu)$
4	0,298	0,308
6	0,306	0,283
8	0,321	0,279
10	0,333	0,278
12	0,346	0,279
14	0,356	0,280
20	—	0,286
24	—	0,289
∞	0,500	0,333

Отметим, что из выражения (1.3.9) следует, что $Q_{\alpha\beta}^{(\ell)}(g) \sim g^{-4/\nu}$. Такой характер зависимости сохраняет свой вид и для потенциалов, описывающих притяжение между частицами.

Один из видов взаимодействия между заряженными частицами (электронами, ионами) и нейтральными атомами (молекулами) соответствует так называемому поляризационному взаимодействию. Оно связано с появлением у атомов электрического дипольного момента под влиянием кулоновского поля пролетающей заряженной частицы. Потенциальная энергия взаимодействия индуцированного дипольного момента атома с электроном равна

$$U(r) = \frac{\alpha_d e^2}{8\pi\epsilon_0 r^4}, \quad (1.3.10)$$

где α_d — поляризуемость атома. Это соответствует случаю $gQ_{\alpha\beta}^{(1)} = \text{const}$. Такая зависимость $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(g)$ согласуется с экспериментальными значениями упругого сечения рассеяния электронов при больших энергиях для ряда атомов и молекул (H, He, H₂) [10, 11]. Для легких атомов при низких энергиях оказывается существенным эффект обменного взаимодействия между электронами, который может быть рассчитан только методами квантовой механики. Ряд особенностей в поведении сечений возникает при рассеянии электронов на атомах тяжелых инертных газов. Это проявляется в резком уменьшении сечения рассеяния при малых энергиях электронов и наличии глубокого минимума (эффект Рамзауэра) с последующим возрастанием сечения

при средних энергиях [12, 13]. Фактически для количественного учета вклада электрон-атомных взаимодействий в коэффициенты переноса часто приходится аппроксимировать теоретически вычисленные или экспериментальные зависимости эффективных сечений от скорости простыми степенными соотношениями. Очевидно, что для разных атомов и молекул, а также для разных областей энергии электронов подобные аппроксимации могут быть весьма различными. Значительную часть информации по эффективным сечениям упругих столкновений электронов с атомами и молекулами можно найти в работах [14, 15].

Закон поляризационного взаимодействия (1.3.10) оказывается применимым и при описании упругого столкновения ионов с атомами и молекулами. Это относится, однако, к рассеянию ионов на атомах других газов. При рассеянии ионов в собственном газе оказывается существенным эффект резонансной перезарядки, который приводит к заметному возрастанию сечений. Теоретический анализ показывает [16], что диффузионное сечение рассеяния $Q^{(1)}(g)$ в этом случае приближенно равно удвоенному сечению перезарядки:

$$Q^{(1)}(g) \approx 2Q_{res}(g). \quad (1.3.11)$$

Последнее может быть определено из экспериментов по рассеянию ионных пучков. В достаточно широком интервале энергий зависимость $Q_{res}(g)$ с хорошей точностью аппроксимируется выражением [17]

$$Q_{res}^{1/2}(E) = a_1 - a_2 \ln E, \quad E = \frac{1}{2} \mu g^2. \quad (1.3.12)$$

Наконец, что касается атом-атомных или атом-молекулярных столкновений между нейтральными частицами, то наиболее часто используемым в этом случае модельным потенциалом взаимодействия, пригодным для вычисления эффективных сечений $Q_{\alpha\beta}^{(\ell)}(g)$ оказывается потенциал Леннард-Джонса [18]:

$$U(r) = 4\varepsilon_{\alpha\beta} \left[\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{r} \right)^6 \right], \quad (1.3.13)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ — расстояние, при котором потенциальная функция меняет свой знак, а $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — минимальное значение потенциала. Заметим, что если σ и ε определены экспериментально (по температурным зависимостям коэффициентов переноса для чистых газов), то в случае взаимодействия различных пар частиц используются эмпирические комбинационные правила:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta), \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = (\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta)^{1/2}. \quad (1.3.14)$$

Иногда для более реального описания области отталкивания, где потенциал Леннард-Джонса возрастает недостаточно круто, вместо степенной вводится экспоненциальная зависимость $U(r)$

на малых расстояниях. Это характерно, например, для модифицированной модели потенциала (6-эпр) Бакингэма. Такой потенциал, однако, более сложен для вычислений, хотя и дает в ряде случаев лучшее совпадение с экспериментом при исследовании температурной зависимости коэффициентов переноса [19].

Модели (12-6) и (6-эпр) пригодны в основном для описания свойств переноса в области температур $T = 100-1500$ К. При $T = 2000-3000$ К они могут давать ошибку в расчетах усредненных эффективных сечений порядка 30-50 %. В области высоких температур более употребительными являются экспоненциальные потенциалы типа потенциала Борна-Майера [20]: $U(r) = U_0 \exp(-ar)$.

Значения параметров U_0 и a определяются из эксперимента. Комбинационные правила для взаимодействия различных пар частиц записываются в этом случае в виде

$$a(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [a(\alpha, \alpha) + a(\beta, \beta)],$$

$$U_0(\alpha, \beta) = [U_0(\alpha, \alpha) U_0(\beta, \beta)]^{1/2}.$$

Мы не касаемся здесь вопроса об эффективных сечениях неупругого столкновения частиц в газах и плазме, отсылая заинтересованного читателя к соответствующей литературе [21]. Некоторые модели неупругого взаимодействия молекул с вращательными степенями свободы обсуждаются в гл. 10.

Обратимся теперь к взаимодействию заряженных частиц между собой. Для кулоновского потенциала

$$U_{\alpha\beta} = \frac{e_\alpha e_\beta}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.3.15)$$

вычисления с использованием (1.3.3)–(1.3.5) дают

$$tg(\chi/2) = (b/b_0), \quad b_0 = \frac{|e_\alpha e_\beta|}{4\pi\epsilon_0 \mu_{\alpha\beta} g^2}. \quad (1.3.16)$$

Для дифференциального сечения рассеяния приходим в этом случае к известной формуле Резерфорда:

$$\sigma(g, \chi) = \frac{(b_0/2)^2}{\sin^4(\chi/2)} = \left(\frac{e_\alpha e_\beta}{8\pi\epsilon_0 \mu_{\alpha\beta} g^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi/2)}. \quad (1.3.17)$$

Интересно, что точно такой же результат дают квантовомеханические расчеты.

Заметим, что подстановка (1.3.17) в выражение для транспортно-го сечения рассеяния (1.3.1) приводит к тому, что при малых значениях χ подынтегральное выражение будет изменяться как χ^{-1} и, следовательно, на нижнем пределе интеграл расходится. Указанная

расходимость связана с дальнедействующим характером кулоновского взаимодействия. Для формального устранения расходимости можно воспользоваться тем обстоятельством, что любая заряженная частица в плазме создает вокруг себя перераспределение пространственного заряда, которое как бы компенсирует электрическое поле, создаваемое этой частицей. Фактически речь идет о том, что на определенном расстоянии, называемом радиусом Дебая r_D , электрическое поле выделенной заряженной частицы уже перестает действовать на другие заряженные частицы. В этом случае уместно говорить об экранированном кулоновском потенциале заряженных частиц, который имеет вид

$$U_{\alpha\beta} = \frac{e_\alpha e_\beta}{4\pi\epsilon_0 r} \exp[-(r/r_D)]. \quad (1.3.18)$$

Решение уравнения Пуассона для этого случая показывает, что для многокомпонентной плазмы [15, 22]

$$r_D^{-2} = \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} e_{\alpha}^2}{\epsilon_0 k T_{\alpha}}. \quad (1.3.19)$$

Вычисление дифференциального сечения рассеяния $\sigma_{\alpha\beta}(g, \chi)$ для потенциала вида (1.3.18) представляет собой хотя и сложную, но в принципе решаемую задачу [23]. При определении эффективных сечений рассеяния (1.3.2) фактически тот же результат можно получить, если вместо (1.3.18) использовать кулоновский потенциал, обрезанный на расстояниях порядка радиуса Дебая:

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta}(r) &= \frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \leq r_D, \\ U_{\alpha\beta}(r) &= 0, & r > r_D. \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

Это означает, что для $b \leq b_{\max} = r_D$ сечение рассеяния дается формулой (1.3.15), а для столкновений с $b > r_D$ рассеяние не имеет места. Минимальный угол рассеяния $\chi_{\min}$, соответствующий максимальному значению прицельного параметра $b_{\max} = r_D$, определяется выражением

$$tg(\chi_{\min}/2) = (b_0/r_D). \quad (1.3.21)$$

Для потенциала (1.3.20) диффузионное сечение столкновений $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(g)$ рассчитывается тогда как

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(g) = 2\pi \int_{\chi_{\min}}^{\pi} (1 - \cos \chi) \frac{\left(\frac{b_0}{2}\right)^2}{\sin^4\left(\frac{\chi}{2}\right)} \sin \chi d\chi = 4\pi b_0^2 \ln \frac{1}{\sin\left(\frac{\chi_{\min}}{2}\right)},$$

или, с учетом (1.3.21),

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(g) = 2\pi b_0^2 \ln \left[1 + \left(\frac{r_D}{b_0} \right)^2 \right].$$

Использование аналогичной процедуры расчета при вычислении $Q_{\alpha\beta}^{(2)}(g)$ приводит к результату

$$Q_{\alpha\beta}^{(2)}(g) = 4\pi b_0^2 \left\{ \ln \left[1 + \left(\frac{r_D}{b_0} \right)^2 \right] - \frac{\left(\frac{r_D}{b_0} \right)^2}{1 + \left(\frac{r_D}{b_0} \right)^2} \right\}.$$

Заметим, что рассматриваемое нами приближение справедливо при условии, когда $\chi_{\min} \ll 1$ или $b_0/r_D \ll 1$. В этом случае приближенно имеем

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(g) \approx 4\pi b_0^2 \ln \left(\frac{r_D}{b_0} \right). \quad (1.3.22)$$

На практике из-за более слабой зависимости от b_0 (или g) под знаком логарифма в выражении (1.3.22) используется усреднение, так что

$$\overline{Q}_{\alpha\beta}^{(1)}(g) = 4\pi b_0^2 \ln \Lambda_{\alpha\beta}, \quad (1.3.23)$$

где $\ln \Lambda_{\alpha\beta}$ — так называемый кулоновский логарифм. При этом

$$\Lambda_{\alpha\beta} = r_D \left(\frac{\overline{I}}{b_0} \right) = \frac{4\pi\epsilon_0}{|e_\alpha e_\beta|} \mu_{\alpha\beta} r_D \langle g_{\alpha\beta}^2 \rangle. \quad (1.3.24)$$

Если $\ln \Lambda \gg 1$, то мы можем пренебречь членом пропорциональным $x^2/(1+x^2)$, где $x = r_D/b_0$, в выражении для $Q_{\alpha\beta}^{(2)}(g)$.

Тогда

$$\overline{Q}_{\alpha\beta}^{(2)} = 8\pi b_0^2 \ln \Lambda. \quad (1.3.25)$$

Любопытно отметить, что при непосредственном использовании экранированного кулоновского потенциала в форме (1.3.18) расчет величин $Q^\ell(g)$ для $\ell = 1, 2$ приводит к следующим результатам [23]:

$$\overline{Q}_{\alpha\beta}^{(1)}(g) = 4\pi b_0^2 \left(\ln \Lambda - \ln 2 - \frac{1}{2} - \gamma \right), \quad (1.3.26)$$

$$\overline{Q}_{\alpha\beta}^{(2)}(g) = 8\pi b_0^2 (\ln \Lambda + \ln 2 - 1 - \gamma),$$

где $\gamma = 0,5772$ — константа Эйлера. Для случая $\ln \Lambda \gg 1$ мы можем пренебречь постоянными величинами в этих выражениях по сравнению с $\ln \Lambda$ и получаем результат, полностью совпадающий с выражениями

(1.3.23) и (1.3.24). При записи выражений (1.3.25)–(1.3.27) мы опустили для простоты зависимость значений кулоновского логарифма от сорта взаимодействующих частиц.

Далее при вычислении кинетических коэффициентов в плазме в общем случае будет использоваться усреднение эффективных сечений рассеяния с использованием в качестве весовой функции максвелловских распределений по скоростям, определяемых при температуре соответствующего компонента плазмы,

$$f_{\alpha}^{(0)} = n_{\alpha} \left(\frac{\gamma_{\alpha}}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\gamma_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2} \right), \quad \gamma_{\alpha} = m_{\alpha}/kT_{\alpha}. \quad (1.3.27)$$

Аналогичным образом можно вычислять и средние значения произвольной функции модуля относительной скорости. В частности

$$\begin{aligned} n_{\alpha} n_{\beta} \langle F(g) \rangle &= \\ &= \int \int F(|\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{1\beta}|) f_{\alpha}^{(0)}(v_{\alpha}^2) f_{\beta}^{(0)}(v_{1\beta}^2) d\mathbf{v}_{\alpha} d\mathbf{v}_{1\beta}. \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

Переходя к переменным в системе центра масс, имеем

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^{(0)}(v_{\alpha}^2) f_{\beta}^{(0)}(v_{1\beta}^2) &= n_{\alpha} n_{\beta} \frac{(\gamma_{\alpha} \gamma_{\beta})^{3/2}}{(2\pi)^3} \exp \left(-\frac{\gamma_{\alpha}}{2} v_{\alpha}^2 - \frac{\gamma_{\beta}}{2} v_{1\beta}^2 \right) = \\ &= n_{\alpha} n_{\beta} \left(\frac{\gamma_{\alpha} + \gamma_{\beta}}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{(\gamma_{\alpha} + \gamma_{\beta})}{2} G^2 \right) \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2} g^2 \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha} + \gamma_{\beta}}.$$

Используя также соотношение (1.3.28) и интегрируя по G , находим

$$\langle F(g) \rangle = 4\pi \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2\pi} \right)^{3/2} \int F(g) g^2 \exp \left(-\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2} g^2 \right) dg. \quad (1.3.29)$$

В частности

$$\langle g_{\alpha\beta} \rangle = \left(\frac{8}{\pi \gamma_{\alpha\beta}} \right)^{1/2}, \quad \langle g_{\alpha\beta}^2 \rangle = \frac{3}{\gamma_{\alpha\beta}}. \quad (1.3.30)$$

Подставляя $\langle g_{\alpha\beta}^2 \rangle$ в (1.3.24), находим

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{12\pi\epsilon_0}{|e_{\alpha}e_{\beta}|} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{\gamma_{\alpha\beta}} r_D, \quad (1.3.31)$$

где r_D определяется выражением (1.3.19).

Если $T_\alpha = T_\beta = T$, то имеем

$$\langle g_{\alpha\beta} \rangle = \left(\frac{8kT}{\pi\mu_{\alpha\beta}} \right)^{1/2}, \quad \langle g_{\alpha\beta}^2 \rangle = \frac{3kT}{\mu_{\alpha\beta}}, \quad (1.3.32)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{12kT\pi\epsilon_0}{|e_\alpha e_\beta|} r_D.$$

Для полностью ионизованной плазмы, образованной из электронов ($e_e = -1$) и ионов, ($e_i = Ze$), где Z — кратность ионизации, при $T_e = T_i = T$, радиус Дебая определяется как

$$r_D = \left(\frac{\epsilon_0 kT}{n_e^2 e^2 (1 + Z)} \right)^{1/2}. \quad (1.3.33)$$

Приведем простую формулу для расчета Λ для электрон-ионной плазмы при $Z = 1$, выраженную в единицах СИ,

$$\Lambda = 1,24 \cdot 10^7 \left(\frac{T^3}{n_e} \right)^{1/2}. \quad (1.3.34)$$

Значения $\ln \Lambda$ при $Z = 1$ приведены в табл. 1.2. Для температур, превышающих $T = 4,2 \cdot 10^5$ К, табличные значения скорректированы с учетом квантовых поправок [15].

Таблица 1.2. Значения $\ln \Lambda$

T, К	Плотность электронов n_e , м ⁻³							
	10 ¹²	10 ¹⁵	10 ¹⁸	10 ¹⁹	10 ²⁰	10 ²²	10 ²⁴	10 ²⁷
10 ²	9,43	5,97	2,52	1,37	—	—	—	—
10 ³	12,8	9,43	5,97	4,82	3,67	1,37	—	—
10 ³	13,9	10,5	7,01	5,86	4,71	2,40	—	—
10 ³	14,5	11,1	7,62	6,47	5,32	3,02	—	—
10 ⁴	16,3	12,8	9,43	8,28	7,12	4,82	2,52	—
10 ⁵	19,7	16,3	12,8	11,7	10,6	8,28	5,97	2,52
10 ⁶	22,8	19,3	15,9	14,8	13,6	11,3	8,96	5,54
10 ⁷	25,1	21,6	18,1	17,0	15,9	13,6	11,2	7,85
10 ⁸	27,4	24,0	20,5	19,4	18,2	15,9	13,6	10,1

1.4. Интеграл столкновений для заряженных частиц

Особенностью кулоновского взаимодействия между заряженными частицами является медленное уменьшение силы взаимодействия с увеличением расстояния между ними, т.е. кулоновский потенциал является дальнодействующим. Фактически это означает, что на движение частицы заметное влияние оказывают далекие коллективные взаимодействия. Относительно большие значения кулоновского логарифма, соответствующие условию $b_0/r_D \ll 1$, показывают, что основной вклад в диффузионное сечение столкновений дают столкновения с большими прицельными параметрами или малыми углами рассеяния ($\chi \ll \pi/2$). Легко показать, что условие $b_0 \ll r_D$ соответствует требованию, чтобы число заряженных частиц в сфере Дебая, окружающих выделенный заряд, было достаточно большим. Это означает, что каждая заряженная частица взаимодействует одновременно со многими электронами и ионами. Небольшая величина отклонения при каждом далеком столкновении позволяет считать их аддитивными, т.е. рассматривать как одновременные малые возмущения. Суммарный эффект таких отклонений оказывается гораздо более важным, чем отдельные близкие столкновения, сопровождающиеся рассеянием на большие углы. Хотя только близкие столкновения являются обычными парными столкновениями, влияние их мало существенно. Вместе с тем, поскольку полный результат рассеяния при далеких столкновениях можно представить в виде суммы отклонений, возникающих при взаимодействии заряженной частицы с каждой из остальных частиц, такой процесс можно приближенно свести как бы к «одному отклонению за некоторый промежуток времени», т.е. также к своего рода «парному столкновению».

При выводе выражения для интеграла столкновений в подобной ситуации естественно воспользоваться чисто вероятностным подходом в предположении марковского характера процесса рассеяния. При этом мы приходим к известному уравнению Фоккера–Планка, которое описывает изменение функции распределения заряженных частиц в результате почти непрерывных и накладывающихся друг на друга слабых соударений этих частиц. Такой процесс можно представить как некоторую диффузию в пространстве скоростей частиц. Вывод соответствующего уравнения можно найти в ряде монографий по физике плазмы [24–26].

Общее выражение для интеграла столкновений $J_{\alpha\beta}$ имеет при этом вид

$$J_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial v_{\alpha r}} \left(D_{\alpha rs}^{\beta} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_{\alpha s}} \right) - \frac{\partial}{\partial v_{\alpha r}} (A_{\alpha r}^{\beta} f_{\alpha}). \quad (1.4.1)$$

Коэффициент $D_{\alpha rs}^{\beta}$ называют коэффициентом диффузии в пространстве импульсов, а коэффициент $A_{\alpha r}^{\beta}$ — силой трения. Явный вид этих коэффициентов можно установить, применяя другой часто

используемый способ вывод выражения для $J_{\alpha\beta}$ [27, 15], в основе которого лежит больцмановская форма оператора столкновений (1.2.18).

Поскольку рассеяние на малые углы приводит к незначительному изменению скоростей (импульсов) взаимодействующих частиц, можно произвести разложение в подынтегральном выражении (1.2.18) величин $f'_{\alpha} = f_{\alpha}(\mathbf{v}'_{\alpha})$ и $f'_{1\beta} = f_{1\beta}(\mathbf{v}'_{1\beta})$ в ряд Тейлора вблизи значений $f_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha})$ и $f_{1\beta}(\mathbf{v}_{1\beta})$, так что

$$f_{\alpha}(\mathbf{v}'_{\alpha}) = f_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}) + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_{\alpha r}} (v'_{\alpha r} - v_{\alpha r}) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial v_{\alpha r} \partial v_{\alpha s}} (v'_{\alpha r} - v_{\alpha r})(v'_{\alpha s} - v_{\alpha s}) + \dots \quad (1.4.2)$$

Аналогичное разложение записывается и для $f_{1\beta}(\mathbf{v}'_{1\beta})$.

Сохраняя в разложениях члены до второго порядка включительно и производя соответствующее интегрирование по углам рассеяния, мы приходим к дифференциальному оператору второго порядка, совпадающему по форме с оператором Фоккера–Планка (1.4.1). Расходимость появляющихся в процессе вывода интегралов по прицельному параметру (или углу рассеяния) устраняется с помощью уже описанной выше процедуры обрезания на радиусе Дебая, т.е. в качестве нижнего предела при малых углах рассеяния используется значение $\chi_{\min}$, определяемое соотношением (1.3.21). Расходимость возникает, вообще говоря, и на верхнем пределе из-за используемого предположения о малости передаваемого при столкновениях импульса. Это предположение нарушается при $b \approx b_0$. Тогда в соответствии с (1.3.16) можно без большой погрешности положить $\chi_{\max} = \pi$, поскольку вклад в эффективное сечение от столкновений с отклонением на большие углы пренебрежимо мал, если $b_0/r_D \ll 1$. В результате для коэффициентов $D_{\alpha rs}^{\beta}$ и $A_{\alpha r}^{\beta}$ приходим к выражениям [27]

$$D_{\alpha rs}^{\beta} = \frac{2\pi}{m_{\alpha}^2} \left(\frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \ln \Lambda \int U_{\alpha rs}^{\beta} f_{1\beta}(\mathbf{v}_{1\beta}) d\mathbf{v}_{1\beta}, \\ A_{\alpha r}^{\beta} = \frac{2\pi}{m_{\beta}^2} \left(\frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \ln \Lambda \int U_{\alpha rs}^{\beta} \frac{\partial f_{1\beta}(\mathbf{v}_{1\beta})}{\partial v_{\beta s}} d\mathbf{v}_{1\beta}. \quad (1.4.3)$$

Здесь

$$U_{\alpha rs} = \frac{g_{\alpha\beta}^2 \delta_{rs} - g_{\alpha\beta r} g_{\alpha\beta s}}{g_{\alpha\beta}^3} = \frac{\partial^2 |g_{\alpha\beta}|}{\partial g_{\alpha\beta r} \partial g_{\alpha\beta s}}.$$

Другая форма записи интеграла столкновений для заряженных частиц соответствует представлению, полученному впервые Ландау

для простой электрон-электронной плазмы [28]. В этом случае, используя выражения для $D_{\alpha rs}^\beta$ и $A_{\alpha r}^\beta$ (1.4.3), имеем

$$J_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{m_\alpha} \left(\frac{e_\alpha e_\beta}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \ln \Lambda \frac{\partial}{\partial v_{\alpha r}} \times \\ \times \int U_{\alpha rs}^\beta \left[\frac{f_{1\beta}(\mathbf{v}_{1\beta})}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial v_{\alpha s}} - \frac{f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)}{m_\beta} \frac{\partial f_{1\beta}(\mathbf{v}_{1\beta})}{\partial v_{1\beta s}} \right] d\mathbf{v}_{1\beta}. \quad (1.4.4)$$

В таком виде интеграл столкновений $J_{\alpha\beta}$ известен под названием интеграла столкновений Ландау. Границы применимости интеграла столкновений в форме Ландау могут быть установлены, разумеется, лишь в рамках общей теории, позволяющей более последовательно учитывать влияние многих частиц на процесс столкновений заряженных частиц в плазме. Такая теория, основанная на приближенных методах решения уравнения Лиувилля (метод цепочек ББКИ [29, 27], диаграммный метод Пригожина и Балеску [30]) использует существование в реальной плазме малого параметра — отношения средней энергии кулоновского взаимодействия к средней кинетической энергии относительного движения частиц. Учет динамической поляризации плазмы приводит при этом к записи интеграла столкновений, близкого по структуре к интегралу Ландау, но учитывающему явно в подынтегральном выражении диэлектрическую проницаемость среды и ее зависимость от волнового числа (интеграл столкновений Балеску–Ленарда [30]).

Анализ подынтегральной функции для малых волновых чисел (больших прицельных расстояний) показывает, что для состояний, не сильно отклоняющихся от термодинамически равновесного, интеграл столкновений оказывается сходящимся, причем эффективный параметр обрезания определяется именно радиусом Дебая. Можно показать также, что для сильно неравновесной плазмы использование интеграла столкновений Балеску–Ленарда приводит к качественно новым эффектам благодаря тому, что он фактически описывает явление взаимодействия частиц плазмы с волнами, которые могут в ней распространяться. Эти эффекты, как было впервые показано Силиным [31], могут существенно проявиться в случае неизотермической плазмы, температура электронов которой заметно превышает температуру ионов ($T_e \gg T_i$). В такой плазме существуют ионно-звуковые волны, взаимодействие которых с частицами вносит ощутимый вклад в интеграл столкновений и, как показали дальнейшие расчеты [32], заметно влияет на величину электронных кинетических коэффициентов. Модифицированные интегралы столкновений возникают и тогда, когда рассматриваются быстропеременные процессы или когда плазма находится в достаточно сильных полях, влияющих на сам акт соударений частиц [27]. Новые эффекты проявляются и при учете вклада в интеграл столкновений

крупномасштабных флуктуаций [33], что сказывается, в частности, на значениях кинетических коэффициентов плазмы, находящейся в турбулентном состоянии.

В настоящей книге эти эффекты рассматриваться не будут, поэтому взаимодействие заряженных частиц в кинетическом уравнении вполне может быть описано с помощью интеграла столкновений в форме Ландау (1.4.4). Более того, непосредственные вычисления таких величин как средняя передача импульса и энергии при кулоновских столкновениях, показывает, что прямой расчет на основе больцмановского интеграла столкновений с использованием формального обрезания прицельного параметра на длине Дебая приводит фактически к тем же результатам, что и расчет на основе интеграла Ландау. Этот вывод остается справедливым применительно к любым другим расчетам кинетических коэффициентов в плазме, поэтому на практике нами будет всюду использоваться больцмановское представление интеграла столкновений.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

2.1. Общее уравнение переноса

Уравнения для макроскопических параметров плазмы (уравнения переноса) могут быть получены непосредственно из кинетического уравнения (1.2.19) умножением его на некоторую динамическую переменную $\psi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t)$ и интегрированием по пространству скоростей частиц:

$$\int \psi_\alpha \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha \right] d\mathbf{v} = \sum_\beta \int \psi_\alpha J_{\alpha\beta} d\mathbf{v}. \quad (2.1.1)$$

Определим операцию усреднения произвольной величины $\varphi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t)$ с помощью функции распределения $f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t)$:

$$n_\alpha \langle \varphi_\alpha \rangle = \int \varphi_\alpha f_\alpha d\mathbf{v}. \quad (2.1.2)$$

Левую часть (2.1.1) можно преобразовать, используя соотношения

$$\begin{aligned} \int \psi_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d\mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial t} \int \psi_\alpha f_\alpha d\mathbf{v} - \int \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} f_\alpha d\mathbf{v} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} n_\alpha \langle \psi_\alpha \rangle - n_\alpha \left\langle \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

$$\begin{aligned} \int \psi_\alpha v_\alpha \cdot \nabla f_\alpha d\mathbf{v} &= \int \nabla \cdot (\psi_\alpha \mathbf{v}_\alpha f_\alpha) d\mathbf{v} - \int (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \psi_\alpha) f_\alpha d\mathbf{v} = \\ &= \nabla \cdot n_\alpha \langle \psi_\alpha \mathbf{v}_\alpha \rangle - n_\alpha \langle (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi_\alpha) \rangle, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$$\int \psi_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_x} d\mathbf{v} = \iint [\psi_\alpha f_\alpha]_{v_x \rightarrow -\infty}^{v_x \rightarrow \infty} dv_y dv_z - \int \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial v_x} f_\alpha d\mathbf{v} = -n_\alpha \left\langle \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial v_x} \right\rangle. \quad (2.1.5)$$

Последнее равенство записывается лишь для одной из декартовых компонент. В (2.1.5) первый член, возникающий при интегрировании по частям, обращается в нуль, поскольку предполагается, что $\psi_\alpha f_\alpha \rightarrow 0$ при $v_x \rightarrow \infty$ и $v_x \rightarrow -\infty$. Кроме того, принято во внимание, что для внешней силы вида (1.2.20) выполняется условие $\partial F_{\alpha l} / \partial v_l = 0$. Для любой из составляющих той части силы $\mathbf{F}_\alpha$, которая зависит от скорости частицы, (т. е. силы Лоренца), это оказывается справедливым благодаря тому, что декартова ℓ -компонента векторного произведения не включает ℓ -компоненту скорости частицы.

В результате приходим к уравнению переноса вида

$$\frac{\partial}{\partial t} n_\alpha \langle \psi_\alpha \rangle + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \psi_\alpha \mathbf{v}_\alpha \rangle) - n_\alpha \left[\left\langle \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} \right\rangle + \langle \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \psi_\alpha \rangle + \frac{1}{m_\alpha} \langle \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_v \psi_\alpha \rangle \right] = \sum_\beta \int \psi_\alpha J_{\alpha\beta} d\mathbf{v}. \quad (2.1.6)$$

Если ψ_α оказывается функцией только скорости частицы $\mathbf{v}_\alpha$ и не зависит от времени или координат, первые два члена в квадратных скобках выражения (2.1.6) обращаются в нуль.

Заметим, что многие из интересующих нас моментов функции распределения (1.1.11) определены с помощью переменной $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}$, а не $\mathbf{v}_\alpha$. По этой причине полезно дать еще один вариант записи уравнения переноса, используемый в тех случаях, когда ψ_α является функцией собственной скорости частиц, т. е. $\psi_\alpha = \psi_\alpha(\mathbf{c}_\alpha, \mathbf{r}, t)$. Тогда в качестве исходного целесообразно использовать кинетическое уравнение, записанное в переменных $\mathbf{c}_\alpha$, т. е. справедливое в системе отсчета, где полная скорость плазмы равна нулю. При этом оператор ∂_v заменяется оператором ∇_c , а вместо $\partial f_\alpha / \partial t$ имеем

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{c}_\alpha}{\partial t} \cdot \nabla_c f_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \nabla_c f_\alpha.$$

Заменим также $\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha$ с помощью преобразования

$$\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha + \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_\alpha} v_{\alpha s} \frac{\partial c_{\alpha r}}{\partial x_s} = (\mathbf{c}_\alpha + \mathbf{u}) \cdot \nabla f_\alpha - \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_{\alpha r}} (c_{\alpha s} + u_s) \frac{\partial u_r}{\partial x_s}.$$

Здесь индексы r и s соответствуют компонентам по осям декартовых координат; по повторяющимся латинским индексам везде в дальнейшем

подразумевается суммирование. В результате кинетическое уравнение в переменной $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}$ принимает вид

$$\frac{df_\alpha}{dt} + \mathbf{c}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{F}_\alpha^* \cdot \nabla_c f_\alpha - c_{\alpha s} \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_{\alpha s}} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} = \sum_\beta J_{\alpha\beta}. \quad (2.1.7)$$

Здесь $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, а $\mathbf{F}_\alpha^*$ определено соотношением

$$n_\alpha \mathbf{F}_\alpha^* = n_\alpha \mathbf{F}_\alpha - \rho_\alpha \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (2.1.8)$$

Умножая (2.1.7) слева и справа на $\psi_\alpha(\mathbf{c}_\alpha, \mathbf{r}, t)$ и интегрируя по скоростям, после использования соотношений, аналогичных (2.1.3)–(2.1.5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_\alpha \langle \psi_\alpha \rangle + n_\alpha \langle \psi_\alpha \rangle \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \psi_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle) - n_\alpha \left[\left\langle \frac{d\psi_\alpha}{dt} \right\rangle + \right. \\ \left. + \langle c_{\alpha s} \cdot \nabla \psi_\alpha \rangle + \frac{1}{m_\alpha} \langle F_\alpha^* \cdot \nabla_c \psi_\alpha \rangle - \left\langle c_{\alpha s} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial c_{\alpha s}} \right\rangle \frac{\partial u_r}{\partial x_s} \right] = R_\alpha. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Здесь усреднение производится с помощью функции распределения $f_\alpha(\mathbf{c}_\alpha, \mathbf{r}, t)$, а правая часть определяется выражением

$$R_\alpha = \sum_\beta \int \psi_\alpha J_{\alpha\beta} d\mathbf{c}. \quad (2.1.10)$$

Если ψ_α зависит только от переменной $\mathbf{c}_\alpha$, то первые два члена в квадратных скобках левой части обращаются в нуль.

Уравнение переноса (2.1.9) является главным для всего последующего рассмотрения.

Правую часть уравнения (2.1.9) можно интерпретировать как скорость изменения среднего значения физической величины $\psi_\alpha(\mathbf{c}_\alpha, \mathbf{r}, t)$ в результате столкновений частиц. Рассмотрим один из вариантов записи правой части, который получается при использовании соотношения взаимности для прямых и обратных столкновений (1.2.17).

По определению имеем

$$R_\alpha = \sum_\beta \iiint \psi_\alpha (f'_\alpha f'_{1\beta} - f_\alpha f_{1\beta}) g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}. \quad (2.1.11)$$

Рассмотрим первую часть выражения под знаком суммы,

$$\iiint \psi_\alpha f'_\alpha f'_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}.$$

Поменяв местами штрихованные и не штрихованные величины и воспользовавшись (1.2.16), убеждаемся в том, что это выражение эквивалентно следующему:

$$\iiint \psi'_\alpha f_\alpha f_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}.$$

В результате

$$R_\alpha = \sum_\beta \iiint (\psi'_\alpha - \psi_\alpha) f_\alpha f_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}. \quad (2.1.12)$$

Ниже будут рассматриваться также уравнения переноса для плазмы в целом, получаемые суммированием (2.1.9) по α .

Найдем два полезных соотношения для правой части общего уравнения переноса в этом случае. Просуммируем (2.1.12) по α :

$$\sum_\alpha R_\alpha = \sum_\alpha \sum_\beta \iiint (\psi'_\alpha - \psi_\alpha) f_\alpha f_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}. \quad (2.1.13)$$

Перестановка индексов α и β и перемена местами $\mathbf{c}_\alpha$ и $\mathbf{c}_{1\beta}$, а также $\mathbf{c}'_\alpha$ и $\mathbf{c}'_{1\beta}$ не должны изменить значение этой величины. Поэтому наряду с (2.1.12) имеем

$$\sum_\alpha R_\alpha = \sum_\alpha \sum_\beta \iiint (\psi'_{1\beta} - \psi_{1\beta}) f_\alpha f_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}. \quad (2.1.14)$$

Суммирование двух последних соотношений приводит к результату

$$\sum_\alpha R_\alpha = \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta \iiint (\psi'_\alpha + \psi'_{1\beta} - \psi_\alpha - \psi_{1\beta}) f_\alpha f_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}. \quad (2.1.15)$$

Наконец, если поменять местами штрихованные и не штрихованные величины и опять воспользоваться соотношением взаимности, получим

$$\sum_\alpha R_\alpha = -\frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta \iiint (\psi'_\alpha + \psi'_{1\beta} - \psi_\alpha - \psi_{1\beta}) f'_\alpha f'_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}. \quad (2.1.16)$$

Полусумма выражений (2.1.15) и (2.1.16) дает

$$\begin{aligned} \sum_\alpha R_\alpha = \frac{1}{4} \sum_\alpha \sum_\beta \iiint (\psi'_\alpha + \psi'_{1\beta} - \psi_\alpha - \psi_{1\beta}) \times \\ \times (f_\alpha f_{1\beta} - f'_\alpha f'_{1\beta}) g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

2.2. Уравнения сохранения

Наиболее очевидным следствием общих уравнений переноса (2.1.6) или (2.1.9) являются уравнения сохранения массы, импульса и энергии для компонента α смеси. Полагая $\psi_\alpha = m_\alpha$ в уравнении (2.1.6), находим

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha = 0. \quad (2.2.1)$$

Это уравнение носит название уравнения непрерывности для отдельного компонента смеси. Правая его часть тождественно равна нулю в силу условия (2.1.12) благодаря сохранению массы частиц в упругом парном столкновении частиц сортов α и β .

Уравнение непрерывности для компонента α плазмы может быть представлено также в форме уравнения сохранения числа частиц сорта α , которое в общем случае имеет вид

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot n_\alpha (\mathbf{u} + \mathbf{w}_\alpha) = \dot{n}_\alpha, \quad (2.2.2)$$

где $\dot{n}_\alpha$ — скорость образования частиц сорта α в единице объема. В случае электронов и ионов правая часть (2.2.2) отлична от нуля при учете процессов ионизации и рекомбинации в плазме; для нейтральных атомов и молекул, а также молекулярных ионов источником образования и ухода частиц данного сорта могут служить различные химические реакции. Для столкновений, не сопровождающихся реакцией, $\dot{n}_\alpha = 0$, и уравнение (2.2.2) фактически совпадает с (2.2.1), которое отличается от него лишь множителем m_α .

Положим теперь $\psi_\alpha = m_\alpha \mathbf{c}_\alpha$ и $\psi_\alpha = m_\alpha c_\alpha^2/2$, соответственно, в уравнении (2.1.9). В результате

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_\alpha w_{\alpha r} + \rho_\alpha w_{\alpha r} \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho_\alpha w_{\alpha s} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \\ + \frac{\partial P_{\alpha rs}}{\partial x_s} - n_\alpha \langle F_{\alpha r} \rangle = R_{\alpha r}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{dp_\alpha}{dt} + p_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + P_{\alpha rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha - n_\alpha \langle \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha^* \rangle = Q_\alpha, \quad (2.2.4)$$

где в соответствии с (2.1.12)

$$R_{\alpha r} = \sum_\beta \iiint m_\alpha (c'_{\alpha r} - c'_{\beta r}) f_\alpha f_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}, \quad (2.2.5)$$

$$Q_\alpha = \sum_\beta \iiint \frac{m_\alpha}{2} (c'^2_\alpha - c^2_\alpha) f_\alpha f_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}. \quad (2.2.6)$$

При этом

$$n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha^* \rangle = n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha \rangle - \rho_\alpha \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (2.2.7)$$

а усредненная внешняя сила, действующая на частицы сорта α , определяется выражением

$$\langle \mathbf{F}_\alpha \rangle = e_\alpha (\mathbf{E} + [\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}]) + \mathbf{X}_\alpha. \quad (2.2.8)$$

Для получения уравнений сохранения импульса и энергии для плазмы в целом воспользуемся тем обстоятельством, что значения $m_\alpha \mathbf{c}_\alpha$ и $m_\alpha c_\alpha^2/2$ являются сумматорными инвариантами упругих столкновений частиц, что следует из законов сохранения (1.2.3)–(1.2.4). Тогда благодаря условиям (2.1.15) или (2.1.17), имеем

$$\sum_\alpha R_{\alpha r} = 0, \quad \sum_\alpha Q_\alpha = 0. \quad (2.2.9)$$

В результате после суммирования уравнений (2.2.1) и (2.2.3)–(2.2.4) по α приходим к уравнениям гидродинамики смеси (уравнениям непрерывности, движения и энергии для плазмы в целом):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2.10)$$

$$\rho \frac{du_r}{dt} + \frac{\partial P_{rs}}{\partial x_s} - \sum_\alpha n_\alpha \langle F_{\alpha r} \rangle = 0, \quad (2.2.11)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{dp}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + P_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \sum_\alpha n_\alpha \langle \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha \rangle = 0. \quad (2.2.12)$$

При записи этих уравнений существенно используется условие (1.1.4).

Заметим, что уравнение непрерывности для полного числа частиц в плазме при условии, что $\sum_\alpha \dot{n}_\alpha = 0$, может быть с использованием выражения (2.2.2) представлено в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \mathbf{u} + \sum_\alpha \nabla \cdot n_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0. \quad (2.2.13)$$

Введем определение для плотности тока проводимости,

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha \mathbf{w}_\alpha. \quad (2.2.14)$$

Тогда члены, зависящие от внешних сил $\mathbf{F}_\alpha$, можно представить в виде

$$\sum_\alpha n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha \rangle = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] + \rho_e \mathbf{E}' + \sum_\alpha n_\alpha \mathbf{X}_\alpha, \quad (2.2.15)$$

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} \langle \mathbf{c}_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha} \rangle = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' + \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{X}_{\alpha}, \quad (2.2.16)$$

где $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]$ — электрическое поле в системе отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{u}$, а $\rho_e = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha}$ — плотность объемного электрического заряда плазмы. Ниже мы будем предполагать плазму квазинейтральной, что соответствует условию $\rho_e = 0$.

С учетом определений (1.1.7) и (2.2.15) уравнение движения плазмы приводится к известному виду:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p + \nabla \hat{\pi} - \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} - [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = 0, \quad (2.2.17)$$

где $(\nabla \hat{\pi})_r = \partial \pi_{rs} / \partial x_s$ соответствует силе вязкого трения, действующей на единицу объема плазмы.

Что касается уравнения энергии, то возможны различные формы его записи. Учитывая, что $p = nkT$, и исключая производные от n с помощью уравнения (2.2.13), можно представить (2.2.12) в виде

$$\begin{aligned} nc_V \frac{dT}{dt} + nkT \nabla \cdot \mathbf{u} + \pi_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \\ - \frac{3}{2} kT \sum_{\alpha} \nabla \cdot n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} - \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{X}_{\alpha} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' = 0, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

где $c_V = (3/2)k$.

В некоторых случаях удобно пользоваться уравнением баланса полной энергии плазмы, которое получается, если умножить (2.2.17) на $\mathbf{u}$ и сложить его с уравнением энергии в форме (2.2.12). В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} p \right) + \frac{\partial}{\partial x_r} \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{5}{2} p \right) u_r + \pi_{rs} u_s + q_r \right] = \\ = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{X}_{\alpha} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Напомним, что рассматриваемые нами уравнения переноса справедливы, вообще говоря, для смеси частиц, не обладающих внутренними степенями свободы, так что $(3/2)p = nE^{\text{tr}}$ представляет собой тепловую энергию частиц плазмы на единицу объема, обусловленную кинетической энергией их поступательного движения $E^{\text{tr}} = (3/2)kT$. Для молекулярной плазмы, молекулы и молекулярные ионы которой обладают внутренними степенями свободы, величины $(3/2)p$ и $(5/2)p$ в уравнении (2.2.19) следует заменить на nE и $nE + p$, где $E = E^{\text{tr}} + E^{\text{int}}$, причем $nE^{\text{int}} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} E_{\alpha}^{\text{int}}$ есть полная энергия смеси на единицу

объема, связанная с наличием у частиц внутренних энергетических состояний. Более подробно вопрос об учете внутренних степеней свободы и неупругих столкновений частиц в молекулярной плазме будет рассмотрен в гл. 10.

Рассмотрим еще некоторые варианты записи уравнений движения и энергии для отдельного компонента плазмы. С помощью несложных преобразований (с использованием уравнения непрерывности (2.2.1)) уравнение (2.2.3) можно привести к виду, аналогичному по структуре уравнению движения (2.2.17), но записанному для компонента α плазмы,

$$\rho_\alpha \frac{d_\alpha u_{\alpha r}}{dt} + \frac{\partial P_{\alpha rs}^*}{\partial x_s} - n_\alpha \langle F_{\alpha r} \rangle = R_{\alpha r}. \quad (2.2.20)$$

Здесь $P_{\alpha rs}^* = P_{\alpha rs} - \rho_\alpha w_{\alpha r} w_{\alpha s}$ и использовано сокращение $d_\alpha/dt = \partial/\partial t + u_{\alpha s} \partial/\partial x_s$.

В свою очередь, уравнение энергии (2.2.4), исключая из него производную dn_α/dt с помощью (2.2.2) (при $\dot{n}_\alpha = 0$), можно записать в виде

$$n_\alpha c_V \frac{dT_\alpha}{dt} + n_\alpha k T_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + \pi_{\alpha rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha - \frac{3}{2} k T_\alpha \nabla \cdot n_\alpha \mathbf{w}_\alpha - n_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \langle \mathbf{F}_\alpha^* \rangle = Q_\alpha. \quad (2.2.21)$$

Величины $\mathbf{R}_\alpha$ и Q_α определены выражениями (2.2.5) и (2.2.6) и представляют собой соответственно среднее изменение импульса и энергии частиц сорта α при их столкновениях.

Уравнения сохранения (2.2.1)–(2.2.4), как и полные уравнения сохранения (2.2.10)–(2.2.12), не образуют замкнутой системы, поскольку помимо обычных гидродинамических переменных ρ_α , $\mathbf{u}_\alpha$ и p_α (или T_α) в них присутствуют моменты более высокого порядка: тензор вязких напряжений $\pi_{\alpha rs}$ и вектор потока тепла $\mathbf{q}_\alpha$. В соответствующих уравнениях переноса, которые могут быть записаны для этих переменных, в свою очередь, появляются два момента более высокого порядка. Сведение этих моментов к тем переменным, для которых уже образованы уравнения переноса, как и вычисление правых частей уравнений (так называемых моментов относительно интегралов столкновений), возможно лишь при использовании определенного приближения к функции распределения. Одно из простейших приближений, соответствующих так называемому квазигидродинамическому приближению в плазме, будет рассмотрено в следующей главе. Более полное описание процессов переноса в многокомпонентной плазме основывается на использовании разложения функции распределения частиц плазмы в ряд по неприводимым тензорным полиномам Эрмита с весовой функцией, соответствующей выбору в качестве нулевого приближения локального максвелловского распределения (метод моментов Грэда). Применению этого метода будут посвящены последующие главы. Однако, прежде чем перейти к непосредственной реализации этих подходов,

рассмотрим еще одно общее соотношение, которое вытекает из кинетического уравнения и описывает эволюцию во времени и в пространстве такой важной статистической величины как энтропия газа.

2.3. Уравнение баланса энтропии

В кинетической теории локальная плотность энтропии (энтропия единицы объема плазмы) определяется выражением [1, 2]

$$ns = -k \sum_{\alpha} \int (\ln f_{\alpha} - 1) d\mathbf{v} = -k \sum_{\alpha} n_{\alpha} \langle \ln f_{\alpha} - 1 \rangle. \quad (2.3.1)$$

Уравнение баланса энтропии может быть получено непосредственно из уравнения переноса (2.1.6), если в качестве динамической переменной использовать величину $\psi_{\alpha} = \ln f_{\alpha} - 1$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_{\alpha} \langle \ln f_{\alpha} - 1 \rangle + \nabla \cdot n_{\alpha} \langle \mathbf{v} (\ln f_{\alpha} - 1) \rangle - \\ - \int \left[\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + (v_{\alpha} \cdot \nabla) f_{\alpha} + \frac{1}{m_{\alpha}} (F_{\alpha} \cdot \nabla) f_{\alpha} \right] d\mathbf{v} = \sum_{\beta} \int (\ln f_{\alpha}) J_{\alpha\beta} d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Третий член слева в (2.3.2) соответствует левой части кинетического уравнения (1.2.1), проинтегрированной по пространству скоростей, т. е. фактически левой части уравнения непрерывности (2.2.1), которая при отсутствии химических реакций тождественно равна нулю. Умножая (2.3.2) на $(-k)$ и суммируя по α , приходим с учетом определения (2.3.1) к уравнению

$$\frac{\partial ns}{\partial t} + \nabla \cdot (ns\mathbf{u} + \mathbf{J}_s) = \sigma. \quad (2.3.3)$$

Здесь

$$\mathbf{J}_s = -k \sum_{\alpha} \int \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha} (\ln f_{\alpha} - 1) d\mathbf{c}_{\alpha} \quad (2.3.4)$$

представляет собой плотность потока энтропии, а

$$\sigma = -k \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \int \ln f_{\alpha} J_{\alpha\beta} d\mathbf{c}_{\alpha} \quad (2.3.5)$$

— локальное производство энтропии.

Уравнение (2.3.3) и есть интересующее нас уравнение баланса энтропии.

Используя (2.1.17), нетрудно преобразовать выражение для производства энтропии (2.3.5) к виду

$$\sigma = \frac{k}{4} \sum \sum \iiint (f'_\alpha f'_{1\beta} - f_\alpha f_{1\beta}) \ln \frac{f'_\alpha f'_{1\beta}}{f_\alpha f_{1\beta}} g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}. \quad (2.3.6)$$

Заметим, что подынтегральное выражение в (2.3.6) включает выражение вида $(x - y) \ln(x/y)$, где $x = f'_\alpha f'_{1\beta}$ и $y = f_\alpha f_{1\beta}$. Функция подобного вида всегда положительна или обращается в нуль (при $x = y$), поэтому

$$\sigma \geq 0. \quad (2.3.7)$$

Уравнение баланса энтропии в форме (2.3.3) вместе с условием (2.3.7) соответствует локальной формулировке второго закона термодинамики [2]. Интегрируя его по некоторому объему, занимаемому плазмой, находим

$$\frac{dS}{dt} + \int_{\Omega} (nsu + J_s) d\Omega = \int_V \sigma dr,$$

где $S = \int_V ns dr$ — полная энтропия системы, Ω — поверхность, окружающая выделенный объем V .

Для изолированной системы (не обменивающейся с окружающей средой тепловой энергией и веществом) интеграл по поверхности в левой части обращается в нуль. Тогда

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \sigma dr \geq 0. \quad (2.3.8)$$

Неравенство (2.3.9) известно в кинетической теории газов под названием H -теоремы Больцмана и соответствует интегральной формулировке второго начала термодинамики [2].

Условие (2.3.8) означает, что энтропия замкнутой системы может только увеличиваться с течением времени и при $t \rightarrow \infty$ стремится к некоторому пределу. При этом $dH/dt = 0$, что возможно лишь в том случае, когда интегралы в выражении для σ (2.3.6) обращаются в нуль. Последнее соответствует выполнению условия

$$f'_\alpha f'_{1\beta} = f_\alpha f_{1\beta} \quad (2.3.9)$$

или

$$\ln f'_\alpha + \ln f'_{1\beta} = \ln f_\alpha + \ln f_{1\beta}, \quad (2.3.9')$$

т. е. логарифм функции распределения является аддитивным инвариантом.

Заметим, что с учетом соотношения взаимности (1.2.16) условие (2.3.9) можно переписать в виде

$$f_{\alpha} f_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_{\alpha} d\mathbf{c}_{1\beta} = f'_{\alpha} f'_{1\beta} g' \sigma'_{\alpha\beta} d\Omega' d\mathbf{c}'_{\alpha} d\mathbf{c}'_{1\beta}, \quad (2.3.10)$$

выражающем принцип детального баланса, согласно которому в равновесном состоянии число столкновений с переходом $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}'$ в точности равно числу столкновений с переходом $\mathbf{g}' \rightarrow \mathbf{g}$.

Поскольку $\ln f_{\alpha}$ оказывается аддитивным инвариантом, эту величину можно представить в виде линейной комбинации известных аддитивных инвариантов столкновений:

$$\ln f_{\alpha} = a_{\alpha}^{(1)} m_{\alpha} + \mathbf{a}^{(2)} \cdot m_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} + a^{(3)} m_{\alpha} c_{\alpha}^2 / 2. \quad (2.3.11)$$

Постоянные $a_{\alpha}^{(1)}$ могут быть различными для каждого сорта частиц, поскольку величина m_{α} сама по себе сохраняется в каждом столкновении. Наоборот, постоянные $\mathbf{a}^{(2)}$ и $a^{(3)}$ должны быть одинаковы для всех сортов частиц, так как только полный импульс и энергия пары частиц сохраняются при их столкновении.

Значения этих постоянных можно выразить через величины n_{α} , $\mathbf{u}$ и T (температуры всех компонентов плазмы в равновесии предполагаются одинаковыми), используя определения макроскопических параметров плазмы с помощью функции распределения. В результате из выражения (2.3.11) следует равновесное максвелловское распределение для компонента α газовой смеси, движущегося со среднemasсовой скоростью $\mathbf{u}$,

$$f_{\alpha}^{(0)} = n_{\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_{\alpha} (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{u})^2}{2kT} \right). \quad (2.3.12)$$

Рассмотрим теперь случай, когда частицы какого-либо из компонентов плазмы обладают внутренними степенями свободы. При этом в основу вывода уравнения баланса энтропии может быть положено обобщенное кинетическое уравнение в форме (1.2.21). Определяя плотность энтропии и плотность потока энтропии с помощью выражений, аналогичных (2.3.1) и (2.3.4), но с учетом суммирования по внутренним состояниям, приходим к уравнению баланса энтропии, полностью совпадающему по форме с уравнением (2.3.3). В равновесии производство энтропии обращается в нуль, что соответствует выполнению условия

$$f'_{\alpha i} f'_{1\beta j} = f_{\alpha k} f_{1\beta l}. \quad (2.3.13)$$

Как и в рассмотренном выше случае, $\ln f_{\alpha i}$ оказывается аддитивным инвариантом, т. е. может быть представлен в виде

$$\ln f_{\alpha i} = a_{\alpha}^{(1)} m_{\alpha} + \mathbf{a}^{(2)} \cdot m_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} + a^{(3)} \left(m_{\alpha} c_{\alpha}^2 / 2 + E_{\alpha i} \right). \quad (2.3.14)$$

Условие (2.3.13) имеет место для всех i, j, k, ℓ , поэтому постоянные $a_{\alpha}^{(1)}$, $a_{\alpha}^{(2)}$ и $a_{\alpha}^{(3)}$ не зависят от индекса i и их можно выразить через основные макроскопические параметры смеси, используя соотношения (1.1.13), (1.1.19) и определение (1.1.2) (с учетом суммирования по i). В результате приходим к равновесной функции распределения Максвелла–Больцмана

$$f_{\alpha}^{(0)} = n_{\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi kT} \right)^{3/2} Q_{\alpha}^{-1} \exp \left(-\frac{m_{\alpha} c_{\alpha}^2}{2kT} - \varepsilon_{\alpha i} \right), \quad (2.3.15)$$

где

$$Q_{\alpha} = \sum_i \exp(-\varepsilon_{\alpha i}), \quad \varepsilon_{\alpha i} = \frac{E_{\alpha i}}{kT}. \quad (2.3.16)$$

Выражение (2.3.15) получено в предположении $a^{(3)} = (kT)^{-1}$, что приводит к согласованию с обычным термодинамическим определением температуры, поскольку полная средняя энергия единицы объема плазмы определяется в этом случае как

$$nE = \sum_{\alpha} (n_{\alpha} E_{\alpha}^{\text{tr}} + n_{\alpha} E_{\alpha}^{\text{int}}) = \frac{3}{2} nkT + \sum_{\alpha} n_{\alpha} kT \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle, \quad (2.3.17)$$

где

$$\langle \varepsilon_{\alpha} \rangle = Q_{\alpha}^{-1} \sum_i \varepsilon_{\alpha i} \exp(-\varepsilon_{\alpha i}). \quad (2.3.18)$$

Функция Q_{α} играет при этом роль статистической суммы по внутренним состояниям частиц сорта α [3]. Условие (2.3.17) служит по существу определением температуры для плазмы с возбужденными внутренними степенями свободы частиц.

H-теорема Больцмана доказывается обычно для однородных состояний газовой смеси. В этом случае параметры максвелловского или максвелл–больцмановского распределений не зависят от времени и координат, что соответствует состоянию полного термодинамического равновесия. Вместе с тем, в соответствии с локальной формулировкой второго начала термодинамики достаточным условием обращения в нуль локального производства энтропии является выполнение условий (2.3.9) или (2.3.13). Из этих условий также вытекают распределения вида (2.3.12) или (2.3.15), но с параметрами n_{α} , $\mathbf{u}$ и T , которые в общем случае зависят от времени и координат. Такие распределения называются локально-равновесными.

Возможность реализации локально-равновесных состояний связана обычно с существованием, по крайней мере, двух характерных временных масштабов: времени установления равновесия в системе, зависящего от ее объема, и значительно меньшего времени релаксации, характеризующего установление равновесия в макроскопически малом объеме и уже не зависящего от объема всей системы. Этим требованиям удовлетворяет, например, разреженная газовая смесь, в которой

любое характерное время среднего пробега частиц между столкновениями заметно превышает время соударения, но значительно меньше характерного времени задачи, за которое происходит существенное изменение макроскопических параметров газа. В случае пространственно неоднородных состояний в роли малого параметра выступает фактически отношение характерной средней длины свободного пробега частиц ℓ к характерному масштабу пространственной неоднородности макроскопических параметров L , или так называемое число Кнудсена $Kn = \ell/L \ll 1$.

Возможность введения локально-равновесных распределений Максвелла–Больцмана в нулевом приближении, применение теории возмущений по числу Кнудсена составляют, как известно, одну из главных особенностей метода Чепмена–Энскога [4, 5], широко применяемого в кинетической теории неоднородных газов. Использование локально-равновесных распределений в качестве весовой функции разложения по тензорным полиномам Эрмита оказывается весьма удобным и при использовании метода моментов Грэда [6]. При этом сохраняется большая свобода в выборе параметров таких распределений. Так, в отличие от обычной газовой смеси, в случае плазмы, содержащей легкую по массе составляющую — электроны, представляется возможным использование максвелловских распределений с отличающимися температурами компонентов и скоростями частиц, сдвинутыми относительно собственных макроскопических скоростей компонентов. Этому соответствуют так называемые многотемпературные и многожидкостные модели плазмы, на которых мы остановимся в следующем параграфе [7, 8].

2.4. Многотемпературные и многожидкостные модели плазмы

Существенной особенностью плазмы по сравнению с обычной газовой смесью является наличие в ней электронов, масса которых существенно меньше массы ионов и нейтральных частиц плазмы. Передача энергии при столкновении легких частиц с тяжелыми оказывается пропорциональной малому отношению (m_e/m_β) (см. гл. 3). Слабый обмен энергии между подсистемами электронов и тяжелых частиц в плазме приводит к тому, что установление равновесия в каждой из подсистем происходит значительно быстрее чем достижение полного равновесия между ними. Это означает, что в течение достаточно длительного промежутка времени, которое может оказаться сравнимым с характерным макроскопическим временем задачи, в плазме будет сохраняться состояние некоторого квазиравновесия, характеризующегося различными температурами компонентов ($T_e \neq T_\beta$). Процесс релаксации к состоянию полного термодинамического равновесия описывается при этом уравнением релаксации для T_α , которое рассматривается

в следующих главах. В рассматриваемой ситуации $\ln f_\alpha$ может быть представлен в виде

$$\ln f_\alpha = a_\alpha^{(1)} m_\alpha + \mathbf{a}^{(2)} \cdot m_\alpha \mathbf{c}_\alpha + a_\alpha^{(3)} m_\alpha c_\alpha^2 / 2, \quad (2.4.1)$$

где постоянная $a_\alpha^{(3)}$ находится не из определения общей температуры смеси T , как в предыдущем случае, а из определения температуры каждого из компонентов T_α . В результате локально-равновесная максвелловская функция распределения принимает вид

$$f_\alpha^{(0)} = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_\alpha}{2k T_\alpha} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u})^2 \right), \quad (2.4.2)$$

что соответствует так называемой многотемпературной модели плазмы. Если в подсистеме тяжелых компонентов можно выделить частицы с существенно меньшей массой, чем массы остальных частиц, то введение для них индивидуальной температуры оказывается столь же естественным как и в случае электронного компонента. На практике, для тех тяжелых компонентов плазмы, в которых обмен энергией происходит с достаточной интенсивностью из-за не слишком больших различий масс компонентов, их температуры можно полагать приближенно одинаковыми. Однако, в целях удобства можно считать температуры всех компонентов формально различающимися. Малые различия некоторых из них выявятся затем в процессе анализа соответствующих уравнений релаксации. Хотя температуры компонентов плазмы считаются в общем случае различающимися, использование максвелловских распределений, сдвинутых относительно средне-массовой скорости смеси $\mathbf{u}$, а также переменных $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}$ при определении основных макроскопических параметров плазмы (моментов функции распределения) соответствует так называемой одножидкостной модели плазмы. Наряду с этим, в теории плазмы находят применение так называемые многожидкостные модели. Обоснование возможности использования двухжидкостной модели для полностью ионизованной плазмы с одним сортом ионов рассматривалось впервые в работе [7]. При этом существенным оказалось то обстоятельство, что благодаря малости отношения (m_e/m_β) можно заметно упростить перекрестные интегралы столкновений $J_{e\beta}$ и $J_{\beta e}$ в кинетических уравнениях для электронов и ионов и перегруппировать члены в них так, чтобы исключить влияние малых членов на выбор нулевого приближения. В результате кинетические уравнения для электронов формально отделяются от уравнений для ионов. С аналогичной ситуацией мы встречаемся, когда масса частиц одного из тяжелых компонентов оказывается существенно меньшей масс остальных атомов и ионов. Во всех этих случаях H -теорема может быть приближенно использована для каждого из расцепленных уравнений. Тогда $\ln f_\alpha$ оказывается аддитивным

инвариантом вида

$$\ln f_\alpha = a_\alpha^{(1)} m_\alpha + \mathbf{a}_\alpha^{(2)} \cdot m_\alpha \mathbf{c}_\alpha^* + a_\alpha^{(3)} m_\alpha c_\alpha^{*2} / 2, \quad (2.4.3)$$

где $\mathbf{c}_\alpha^* = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha$, а все коэффициенты $a_\alpha^{(1)}$, $\mathbf{a}_\alpha^{(2)}$ и $a_\alpha^{(3)}$ зависят от индекса α и приближенно определяются через макроскопические параметры n_α , $\mathbf{u}_\alpha$ и T_α^* , относящиеся к каждому из компонентов в отдельности. Здесь

$$\frac{3}{2} n_\alpha k T_\alpha^* = \int \frac{m_\alpha c_\alpha^{*2}}{2} f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha. \quad (2.4.4)$$

В результате для каждого из компонентов плазмы локально-равновесные максвелловские распределения принимают вид

$$f_\alpha^{(0)} = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha^*} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_\alpha}{2k T_\alpha^*} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha)^2 \right). \quad (2.4.5)$$

Характерная особенность многожидкостной модели плазмы как раз и заключается в использовании в качестве исходных величин переменных n_α , $\mathbf{u}_\alpha$ и T_α^* вместо обычных переменных n_α , $\mathbf{u}$ и T_α , а также переменных $\pi_{\alpha rs}^*$ и $\mathbf{q}_\alpha^*$ вместо $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{q}_\alpha$. При этом макроскопические параметры компонентов p_α^* , $\pi_{\alpha rs}^*$ и $\mathbf{q}_\alpha^*$ определяются как

$$\begin{aligned} p_\alpha^* &= n_\alpha k T_\alpha^*, \quad \pi_{\alpha rs}^* = m_\alpha \int (c_{\alpha r}^* c_{\alpha s}^* - \frac{1}{3} \delta_{rs} c_\alpha^{*2}) f_\alpha d\mathbf{v}, \\ \mathbf{q}_\alpha^* &= \frac{1}{2} m_\alpha \int \mathbf{c}_\alpha^* c_\alpha^{*2} f_\alpha d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Аналогично, с помощью переменной $\mathbf{c}_\alpha^* = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha$ вместо $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}$ можно представить и любые другие моменты функции распределения. Легко показать, что новые переменные p_α^* , $\pi_{\alpha rs}^*$ и $\mathbf{q}_\alpha^*$ связаны с прежними переменными p_α , $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{q}_\alpha$ соотношениями [7]

$$\begin{aligned} p_\alpha^* &= p_\alpha - \frac{1}{3} \rho_\alpha w_\alpha^2, \quad \pi_{\alpha rs}^* = \pi_{\alpha rs} - \rho_\alpha \left(w_{\alpha r} w_{\alpha s} - \frac{1}{3} \delta_{rs} w_\alpha^2 \right), \\ q_{\alpha r}^* &= q_{\alpha r} - \frac{5}{2} p_\alpha w_{\alpha r} - \pi_{\alpha rs} w_{\alpha s} + \rho_\alpha w_{\alpha r} w_\alpha^2. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Уравнения сохранения импульса и энергии для отдельных компонентов плазмы записываются в новых переменных как [7]

$$\begin{aligned} \rho_\alpha \frac{d_\alpha u_{\alpha r}}{dt} + \frac{\partial P_{\alpha rs}^*}{\partial x_s} - n_\alpha \langle F_{\alpha r} \rangle &= R_{\alpha r}, \\ n_\alpha c_V \frac{d_\alpha T_\alpha^*}{dt} + n_\alpha k T_\alpha^* \nabla \cdot \mathbf{u} + \pi_{\alpha rs}^* \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha^* &= Q_\alpha^*, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

где

$$Q_\alpha^* = Q_\alpha - \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\alpha.$$

В дальнейшем будут рассматриваться состояния плазмы, в которых квадратичными по моментам $\rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{q}_\alpha$ членами можно пренебречь по сравнению с линейными.

Легко убедиться, что в этом приближении использование новых и прежних уравнений переноса приводит к совершенно идентичным результатам. Разумеется, при этом необходимо установить вид правых частей уравнений (2.20) и (2.21).

В главе 3 они рассчитываются исходя из простейшего приближения к функции распределения. Более последовательный расчет будет осуществлен в рамках метода моментов в последующих главах.

2.5. Неравновесная термодинамика многокомпонентной плазмы

Уравнения непрерывности и энергии, выведенные в предыдущих параграфах, можно использовать для получения явных выражений для плотности потока энтропии и локального производства энтропии в уравнении баланса энтропии (2.3.3). Это приводит нас к формулировке ряда соотношений, используемых в неравновесной термодинамике [2], результаты которой оказываются полезным дополнением к выводам кинетической теории. Исходным пунктом неравновесной термодинамики является, как известно, предположение о том, что локальная энтропия (энтропия, отнесенная к единице объема) в случае слабого отклонения системы от равновесия является той же самой функцией исходных термодинамических параметров: плотности энергии, удельного объема и концентрации частиц, как и в случае полного термодинамического равновесия системы. Это означает, что обычные термодинамические соотношения равновесной термодинамики, представленные в локальной формулировке, остаются справедливыми и при слабой неравновесности системы.[2].

Для получения важного исходного соотношения, связывающего изменение плотности энтропии с изменением основных термодинамических переменных, можно воспользоваться кинетическим выражением для плотности энтропии (2.3.1), в которое подставляется локальная максвелловская функция распределения вида (2.3.12). Очевидно, что в случае полного статистического равновесия, которому соответствует максвелловское распределение с независимыми от времени и координат термодинамическими параметрами, статистическое и кинетическое выражение для плотности энтропии должны полностью соответствовать друг другу. Использование локального максвелловского распределения должно приводить к аналогичному соотношению для плотности энтропии n_s , но с локальными переменными, которые меняются от точки к точке и во времени. Можно показать [2], что такое выражение справедливо с точностью до линейных членов относительно малых отклонений функции распределения от локального равновесия.

Ниже для простоты мы ограничимся рассмотрением изотермической плазмы с равными температурами компонентов ($T_\alpha = T$). Частный случай двухжидкостной и двухтемпературной полностью ионизованной плазмы будет рассмотрен в следующем параграфе.

Локальное максвелловское распределение можно представить в несколько другой форме, вводя определение химического потенциала частиц сорта α для идеального газа [3]:

$$\mu_\alpha = kT \ln \left[\frac{p_\alpha}{(kT)^{5/2}} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m_\alpha} \right)^{3/2} \right] = kT \ln \frac{n_\alpha}{(kT)^{3/2}} + \text{const}. \quad (2.5.1)$$

Тогда выражение для $f_\alpha^{(0)}$ (2.3.12) с точностью до константы переписывается как

$$f_\alpha^{(0)} = \exp \left[\frac{\mu_\alpha}{kT} - \frac{m_\alpha}{2kT} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u})^2 \right]. \quad (2.5.2)$$

Подставляя (2.5.2) в выражение для плотности энтропии (2.3.1), имеем

$$ns = -k \sum_\alpha \int f_\alpha^{(0)} \left[\frac{\mu_\alpha}{kT} - \frac{m_\alpha}{2kT} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u})^2 \right] d\mathbf{v} + kn. \quad (2.5.3)$$

Используя обычные определения для плотности числа частиц n_α и плотности кинетической энергии (энергии на единицу объема плазмы) $nE = (3/2)nkT$, выраженные с помощью интегрирования по максвелловской функции распределения, можно представить (2.5.3) в виде

$$ns = -\frac{1}{T} \left(\sum_\alpha n_\alpha \mu_\alpha - nE - p \right). \quad (2.5.4)$$

Введем новые термодинамические переменные: удельный объем $v = 1/n$ и относительную молярную концентрацию $y_\alpha = n_\alpha/n$. Тогда соотношение (2.5.4) можно переписать как

$$Ts = E + pv - \sum_\alpha y_\alpha \mu_\alpha. \quad (2.5.5)$$

Дифференцируя это соотношение и используя известное термодинамическое тождество [3]

$$sdT = -vdp - \sum_\alpha y_\alpha d\mu_\alpha,$$

приходим к соотношению Гиббса [2]

$$Tds = dE + pdv - \sum_\alpha \mu dy_\alpha. \quad (2.5.6)$$

Учитывая, что $E = (3/2) kT$, перепишем (2.5.6) в виде

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2} \frac{k}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{k}{n} \frac{dn}{dt} - \frac{1}{T} \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \frac{dy_{\alpha}}{dt}. \quad (2.5.7)$$

Преобразуем теперь уравнение баланса энтропии (2.3.3). Используя уравнение сохранения полного числа частиц в плазме (2.2.13), можно представить (2.3.3) в виде

$$n \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s - s \nabla \cdot \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = \sigma. \quad (2.5.8)$$

Заметим, что появление третьего члена слева в уравнении (2.5.8) связано с принятыми нами выше определениями плотности энтропии и других аддитивных термодинамических переменных в расчете на одну частицу, а не на ее массу, как это обычно делается [2, 9]. Это, однако, не сказывается на последующем определении таких интересующих нас величин как плотность потока энтропии и производство энтропии.

Воспользуемся теперь уравнениями сохранения для плотности числа частиц сорта α (2.2.2) и энергии (2.2.18). Преобразуя (2.2.2) с помощью (2.2.13), имеем

$$n \frac{dy_{\alpha}}{dt} = y_{\alpha} \nabla \cdot \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} - \nabla \cdot n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}. \quad (2.5.9)$$

Подставляя dT/dt из (2.2.18), dn/dt из (2.2.13) и dy_{α}/dt из (2.5.9) в выражение для ds/dt (2.5.7), после ряда несложных преобразований находим

$$\begin{aligned} n \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q} - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}}{T} \right) - s \nabla \cdot \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = -\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T - \\ - \frac{1}{T} \pi_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} - \frac{1}{T} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \left[T \nabla \left(\frac{\mu_{\alpha}}{T} \right) - \mathbf{X}_{\alpha} \right] + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}'. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Сравнение с уравнением баланса энтропии (2.5.8) дает

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{T} \left(\mathbf{q} - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \right), \quad (2.5.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma = -\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \pi_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} - \\ - \frac{1}{T} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \left[T \nabla \left(\frac{\mu_{\alpha}}{T} \right) - \mathbf{X}_{\alpha} \right] + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}'. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Выражение для σ (2.5.12) можно представить также в другом виде, вводя приведенный поток тепла [2]:

$$\mathbf{J}_q = \mathbf{q} - \sum_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}, \quad (2.5.13)$$

где h_{α} — парциальная энтальпия единицы объема плазмы. Объединяя два последних члена в правой части (2.5.12), с учетом определения плотности тока проводимости $\mathbf{j}$ (2.2.14), имеем

$$\begin{aligned} \sigma = & -\frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \pi_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} - \\ & - \frac{1}{T} \sum_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \{ n_{\alpha} [(\nabla \mu_{\alpha})_T - \mathbf{X}_{\alpha} + e_{\alpha} \mathbf{E}'] \}. \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

Здесь индекс T при градиенте химического потенциала указывает на то, что градиент берется при постоянной температуре.

Как известно, одним из постулатов неравновесной термодинамики является утверждение о том, что при слабом отклонении системы от равновесия потоки можно представить в виде линейных функций обобщенных сил [2]

$$\mathbf{J}_m = \sum_n L_{mn} \mathbf{X}_n. \quad (2.5.15)$$

В общем случае обобщенные потоки и силы могут быть скалярными, векторными и тензорными величинами. Величины L_{mn} называются феноменологическими коэффициентами. При этом диагональные коэффициенты L_{mm} представляют собой величины, описывающие прямые эффекты, недиагональные коэффициенты L_{mn} ($m \neq n$) являются феноменологическими коэффициентами перекрестных эффектов. Обычно эти коэффициенты являются скалярами, однако для систем с выраженной анизотропией или при наличии магнитного поля они оказываются тензорными величинами.

Еще одним важным положением неравновесной термодинамики является утверждение о том, что изменение энтропии во времени для изолированной системы можно представить в виде билинейной комбинации обобщенных сил и потоков. Если рассматривать уравнение баланса энтропии в локальной формулировке (2.5.8), то это утверждение относится к структуре выражения для локального производства энтропии.

Вычисление производства энтропии дает фактически определенный рецепт правильного выбора обобщенных потоков и сил, входящих в линейные феноменологические соотношения (2.5.15). Именно при таком выборе потоков и сил для перекрестных коэффициентов оказываются справедливыми соотношения взаимности Онзагера:

$$L_{mn} = L_{nm}. \quad (2.5.16)$$

Напомним, что при наличии магнитного поля соотношения взаимности несколько усложняются и принимают вид

$$L_{mn}(\mathbf{B}) = L_{nm}(-\mathbf{B}),$$

справедливый в том случае, если обе силы $\mathbf{X}_m$ и $\mathbf{X}_n$ — четные функции скоростей частиц, или

$$L_{mn}(\mathbf{B}) = -L_{nm}(-\mathbf{B}),$$

если одна из сил — четная, а другая — нечетная.

Конкретные выражения для локального производства энтропии в форме (2.5.12) и (2.5.14) представляют собой достаточную основу для выбора соответствующих обобщенных сил и потоков. При этом на основе (2.5.12) с использованием (2.5.15) можно записать линейные соотношения для «потоков» $\mathbf{q}$, π_{rs} , $\mathbf{w}_\alpha$ и $\mathbf{j}$, связывающие их с соответствующими «термодинамическими силами». Линейные соотношения, следующие из представления (2.5.14), записываются для потоков $\mathbf{J}_q$, π_{rs} и $\mathbf{w}_\alpha$, т.е. уже не включают соотношения для плотности тока проводимости $\mathbf{j}$, поскольку эта величина вычисляется независимо через диффузионные скорости компонентов с помощью определения (2.2.14). При этом электрическое поле $\mathbf{E}'$ вошло в определение соответствующей термодинамической силы, сопряженной с потоком $\mathbf{w}_\alpha$. Далее мы будем использовать представление для σ в виде (2.5.14).

Полезно выполнить еще одно небольшое преобразование этого выражения, которое позволит более наглядно проследить связь линейных соотношений неравновесной термодинамики с результатами кинетической теории разреженных газовых смесей, которые будут рассмотрены в гл. 5. Воспользуемся тем обстоятельством, что благодаря выполнению условия $\sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0$ к выражению в круглых скобках в последнем члене правой части (2.5.14) может быть добавлена любая постоянная величина, пропорциональная ρ_α . Удобно выбрать это дополнительное слагаемое так, чтобы выполнялось известное соотношение Гиббса–Дюгема [2]

$$\sum_\alpha n_\alpha (\nabla \mu_\alpha)_T = \nabla p. \quad (2.5.17)$$

В результате выражение (2.5.14) можно представить в виде

$$\sigma = -\frac{1}{T} \left(\mathbf{J}_q \cdot \nabla \ln T + \pi_{rs} \varepsilon_{rs} + p \sum_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha \right), \quad (2.5.18)$$

где

$$\varepsilon_{rs} = \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial x_s} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right) - \frac{1}{3} \delta_{rs} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}, \quad (2.5.19)$$

$$\mathbf{d}_\alpha = \nabla y_\alpha + \left(y_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \right) \nabla \ln p - \frac{1}{p} \left(n_\alpha \mathbf{X}_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \sum_{n_\alpha \mathbf{X}_\alpha} \right) - \frac{1}{p} n_\alpha e_\alpha \mathbf{E}', \quad (2.5.20)$$

причем

$$\sum_{\alpha} \mathbf{d}_\alpha = 0. \quad (2.5.21)$$

В литературе по кинетической теории газов [4, 5, 9] величину $\mathbf{d}_\alpha$ часто называют «термодинамической силой диффузии». Структура третьего члена выражения для σ (2.5.18) указывает на то, что такое название оказывается более подходящим для величины $p\mathbf{d}_\alpha$, которая оказывается сопряженной «потoku» $\mathbf{w}_\alpha$.

Преобразуем последний член в (2.5.18), учитывая, что из всех диффузионных скоростей компонентов лишь $N - 1$ являются независимыми. Используя условие (2.5.21), находим

$$\sigma = -\frac{1}{T} \left[\mathbf{J}_q \cdot \nabla \ln T + \pi_{rs} \varepsilon_{rs} + p \sum_{\alpha=1}^{N-1} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_N) \cdot \mathbf{d}_\alpha \right]. \quad (2.5.22)$$

Легко заметить, что произведение σT представляет собой билинейную комбинацию «потоков» (приведенного потока тепла $\mathbf{J}_q$, недиагональной части тензора потока импульса или тензора вязких напряжений π_{rs} и разности диффузионных скоростей $\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_N$), с одной стороны, и «термодинамических сил» ($-\nabla \ln T$, $-\varepsilon_{rs}$, $-p\mathbf{d}_\alpha$), действие которых вызывает эти потоки, — с другой.

Соответствующие этому представлению линейные феноменологические соотношения записываются в виде

$$\mathbf{J}_q = -L_{00} \nabla \ln T - \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{0\beta} p \mathbf{d}_\beta, \quad (2.5.23)$$

$$\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_N = -L_{\alpha 0} \nabla \ln T - \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\alpha\beta} p \mathbf{d}_\beta, \quad (2.5.24)$$

$$\pi_{rs} = -K_{11} \varepsilon_{rs}. \quad (2.5.25)$$

В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}=0$) соотношения взаимности Онзагера (2.5.18) отвечают при этом условиям $L_{0\alpha} = L_{\alpha 0}$ и $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$.

Заметим, что если обратиться к кинетической теории газовых смесей и плазмы, то запись линейных соотношений переноса в виде (2.5.23)–(2.5.25) соответствует известным результатам стандартного метода Чепмена–Энскога [4, 5, 9].

Воспользуемся тем обстоятельством, что структура выражения для σ (2.5.22) допускает и другое представление линейных соотношений переноса, в котором сопряженные «потоки» и «силы» как бы меняются местами. При этом оказывается возможным, в частности, записать уравнения переноса массы компонентов в виде, разрешенном относительно «термодинамической силы диффузии» через разности диффузионных скоростей компонентов и приведенный поток тепла. Затем эти уравнения легко преобразуются к виду, так называемых уравнений Стефана–Максвелла [9]. В том же представлении, т. е. в виде, разрешенном относительно градиента температуры через приведенный поток тепла и разности диффузионных скоростей компонентов, может быть записано и уравнение переноса тепла. Как мы увидим далее, именно такому представлению соответствуют результаты кинетической теории, основанные на применении метода моментов Грэда, используемого в настоящей книге.

В предлагаемом для этого случая выборе переменных, основанном на выражении для σ (2.5.22), в качестве «потоков» формально выступают величины $(-p\mathbf{d}_\alpha)$ и $(-\nabla \ln T)$, а в качестве «сил» — величины $\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_N$ и $\mathbf{J}_q$. Соответствующие линейные соотношения переноса принимают при этом вид

$$-p\mathbf{d}_\alpha = \Omega_{\alpha q} \mathbf{J}_q + \sum_{\beta=1}^{N-1} \Omega_{\alpha\beta} (\mathbf{w}_\beta - \mathbf{w}_N), \quad (2.5.26)$$

$$-\frac{1}{T} \nabla T = \Omega_{qq} \mathbf{J}_q + \sum_{\beta=1}^{N-1} \Omega_{q\beta} (\mathbf{w}_\beta - \mathbf{w}_N), \quad (2.5.27)$$

при выполнении соотношений симметрии

$$\Omega_{\alpha q} = \Omega_{q\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N;$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_{\beta\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N-1). \quad (2.5.28)$$

Выразим величину $\mathbf{J}_q$ из уравнения (2.5.27) и подставим ее в уравнение (2.5.26). Получаемые в этом случае линейные соотношения записываются как [10]

$$-p\mathbf{d}_\alpha = \Lambda_{\alpha q} \frac{1}{T} \nabla T + \sum_{\beta=1}^{N-1} \Lambda_{\alpha\beta} (\mathbf{w}_\beta - \mathbf{w}_N), \quad (2.5.29)$$

$$\mathbf{J}_q = -\Lambda_{qq} \frac{1}{T} \nabla T + \sum_{\beta=1}^{N-1} \Lambda_{q\beta} (\mathbf{w}_\beta - \mathbf{w}_N). \quad (2.5.30)$$

При этом

$$\Lambda_{qq} = \frac{1}{\Omega_{qq}}, \quad \Lambda_{\alpha q} = -\frac{\Omega_{\alpha q}}{\Omega_{qq}}, \quad \Lambda_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} - \frac{\Omega_{\alpha q} \Omega_{q\beta}}{\Omega_{qq}}. \quad (2.5.31)$$

Соотношения симметрии выполняются для коэффициентов Λ в той же форме, что и соотношения для коэффициентов Ω (2.5.28).

Полезно преобразовать уравнения (2.5.29) к виду, когда соотношения для определения диффузионных скоростей принимают форму, известную под названием «уравнения Стефана–Максвелла». Из условия (2.5.21) следует, что

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^N \Lambda_{q\beta} (\mathbf{w}_\beta - \mathbf{w}_N) = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^N \Lambda_{\alpha q} = 0. \quad (2.5.32)$$

Выполнение первого из условий (2.5.32) возможно, если

$$\sum_{\alpha=1}^N \Lambda_{\alpha\beta} = \sum_{\beta=1}^N \Lambda_{\beta\alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \Lambda_{\alpha\alpha} = - \sum_{\beta \neq \alpha}^N \Lambda_{\beta\alpha}.$$

В результате вместо соотношения (2.5.29) имеем уравнения

$$-p\mathbf{d}_\alpha = \Lambda_{\alpha q} \frac{1}{T} \nabla T + \sum_{\beta \neq \alpha}^N \Lambda_{\alpha\beta} (\mathbf{w}_\beta - \mathbf{w}_\alpha), \quad (2.5.33)$$

которые и называются уравнениями Стефана–Максвелла.

Неравновесная термодинамика, будучи феноменологической теорией, позволяет установить лишь общую структуру уравнений, описывающих неравновесные явления, а также некоторые взаимосвязи (соотношения симметрии) между коэффициентами этих уравнений. Независимое подтверждение этих соотношений, а также непосредственное вычисление кинетических (транспортных) коэффициентов является прерогативой кинетической теории. Мы еще вернемся к обсуждению взаимосвязи между результатами неравновесной термодинамики и кинетической теории в последующих главах, когда будем располагать соответствующими выражениями для потоков и кинетических коэффициентов, вычисленных на основе метода моментов. При этом будет показана возможность некоторого обобщения результатов обычной линейной неравновесной термодинамики, связанного с учетом в линейных уравнениях моментов временных и пространственных производных от диффузионных потоков, потока тепла и тензора вязких напряжений.

2.6. Неравновесная термодинамика многожидкостной плазмы

В модели многожидкостной плазмы уравнение баланса энтропии может быть записано для каждого из компонентов плазмы (например, отдельно для электронов и ионов в случае полностью ионизованной плазмы) в виде [7, 8]

$$\frac{\partial n_\alpha s_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha s_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{J}_{s\alpha}) = \sigma_\alpha, \quad (2.6.1)$$

или, после использования уравнения непрерывности (2.4.8), как

$$n_\alpha \frac{d_\alpha s_\alpha}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{s\alpha} = \sigma_\alpha. \quad (2.6.2)$$

Используя локальное распределение Максвелла в форме (2.4.5), нетрудно убедиться, что плотность энтропии (на одну частицу) для частиц сорта α может быть представлена с точностью до константы выражением

$$s_\alpha = \frac{3}{2} k \ln T_\alpha^* - k \ln n_\alpha. \quad (2.6.3)$$

Вычисляя $d_\alpha s_\alpha/dt$ и исключая из полученного выражения $d_\alpha n_\alpha/dt$ и $d_\alpha T_\alpha^*/dt$ с помощью (2.4.8) и (2.4.10), приходим к уравнению баланса энтропии в форме (2.6.2), в котором плотность потока энтропии и производство энтропии частиц сорта α определены выражениями

$$\mathbf{J}_{s\alpha} = \frac{\mathbf{q}_\alpha^*}{T_\alpha^*}, \quad (2.6.4)$$

$$\sigma_\alpha = -\frac{1}{T_\alpha^*} (\mathbf{q}_\alpha^* \cdot \nabla \ln T_\alpha^* + \pi_{\alpha rs}^* \varepsilon_{\alpha rs}^*) + \frac{1}{T_\alpha^*} Q_\alpha^*, \quad (2.6.5)$$

где $\varepsilon_{\alpha rs}^* = \{\partial u_{\alpha r}/\partial x_s\}$.

Рассмотрим частный случай двухкомпонентной полностью ионизованной плазмы ($\alpha = e, i$). Величина Q_e^* , соответствующая теплу, получаемому электронами в результате столкновений, связана с Q_i^* для ионов соотношением [7, 8]

$$Q_e^* = -(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{R}_e - Q_i^* = \frac{1}{n_e e} \mathbf{j} \cdot \mathbf{R}_e - Q_i^*. \quad (2.6.6)$$

Тогда локальное производство энтропии для электронов и ионов плазмы можно представить в виде

$$\sigma_e = -\frac{1}{T_e^*} \left(\mathbf{q}_e^* \cdot \nabla \ln T_e^* + \pi_{ers}^* \varepsilon_{ers}^* - \frac{1}{n_e e} \mathbf{j} \cdot \mathbf{R}_e + Q_i^* \right), \quad (2.6.7)$$

$$\sigma_i = -\frac{1}{T_i^*} (\mathbf{q}_i^* \cdot \nabla \ln T_i^* + \pi_{irs}^* \varepsilon_{irs}^* - Q_i^*). \quad (2.6.8)$$

Уравнения баланса энтропии для электронов и ионов вместе образуют полное уравнение баланса энтропии для плазмы

$$\frac{\partial n s}{\partial t} + \sum_\alpha \nabla \cdot \left(n_\alpha s_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \frac{\mathbf{q}_\alpha^*}{T_\alpha^*} \right) = \sigma, \quad \alpha = e, i, \quad (2.6.9)$$

где

$$\sigma = - \sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}^*} (\mathbf{q}_{\alpha}^* \cdot \nabla \ln T_{\alpha}^* + \pi_{\alpha rs}^* \varepsilon_{\alpha rs}^*) + \\ + \frac{1}{n_e e T_e^*} \mathbf{j} \cdot \mathbf{R}_e + Q_i^* \left(\frac{1}{T_i^*} - \frac{1}{T_e^*} \right). \quad (2.6.10)$$

Из выражения (2.6.7) следует что сопряженными величинами, между которыми могут быть установлены линейные феноменологические соотношения для электронных свойств переноса, являются обобщенные потоки $\mathbf{q}_e^*$, π_{ers}^* и $\mathbf{R}_e$ и обобщенные силы $\nabla \ln T_e^*$, ε_{ers} и $\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i = -\mathbf{j}/n_e e$. Использование (2.6.7) позволяет исходя из принципа Онзагера получить ряд нетривиальных соотношений симметрии между различными электронными кинетическими коэффициентами для неизотермической плазмы в магнитном поле [7]. Для тяжелых частиц (ионов) выводы, следующие из соответствующего выражения для производства энтропии (2.6.8), носят обычный характер, проанализированный выше для случая многокомпонентной смеси. Вместе с тем, для двухтемпературной плазмы, как это следует из (2.6.10), появляется новое дополнительное феноменологическое соотношение между обобщенным потоком Q_i^* и обобщенной силой вида $(T_e^* - T_i^*)/T_e^* T_i^*$ [7].

Глава 3

КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

3.1. Средняя передача импульса и энергии при столкновениях частиц

Рассмотрим вопрос о вычислении правых частей уравнений движения и энергии для отдельного компонента плазмы, которые соответствуют средней передаче импульса и энергии при столкновениях частиц. Будем предполагать, что функция распределения частиц сорта α может быть задана в виде локального максвелловского распределения, сдвинутого относительно собственной макроскопической скорости компоненты $\mathbf{u}_\alpha$ (формула (2.4.5)). Поскольку в дальнейшем будут рассматриваться состояния плазмы, в которых квадратичными по моментам членами можно пренебречь по сравнению с линейными, в выражении (2.4.5) вместо T_α^* можно использовать T_α (см. соответствующее обсуждение в п. 4.2).

Полагая диффузионные скорости компонентов плазмы малыми по сравнению с их средней тепловой скоростью,

$$|\mathbf{w}_\alpha| \ll \left(\frac{2kT_\alpha}{m_\alpha} \right)^{1/2}, \quad (3.1.1)$$

и разлагая (2.4.5) в ряд Тейлора, после пренебрежения квадратичными по $\mathbf{w}_\alpha$ членами можно представить (2.4.5) в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} (1 + \gamma_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha), \quad \gamma_\alpha = \frac{m_\alpha}{kT_\alpha}, \quad (3.1.2)$$

где $f_\alpha^{(0)}$ соответствует локальному максвелловскому распределению (2.4.2), сдвинутому относительно средне-массовой скорости $\mathbf{u}$

и определяемому при температуре T_α . Заметим, что в рассматриваемом приближении

$$\pi_{\alpha rs} = 0, \quad \mathbf{q}_\alpha = \frac{5}{2} p_\alpha \mathbf{w}_\alpha. \quad (3.1.3)$$

Вычислим теперь правые части уравнений (2.2.20) и (2.2.21), используя приближение (3.1.2). В выражениях (2.2.5) и (2.2.6) можно произвести интегрирование по углам, если ввести переменные в системе центра масс сталкивающихся частиц (1.2.4) и (1.2.5). На основе соотношений (1.2.6) имеем

$$\begin{aligned} m_\alpha (\mathbf{c}'_\alpha - \mathbf{c}_\alpha) &= -\mu_{\alpha\beta} (\mathbf{g}' - \mathbf{g}), \\ \frac{m_\alpha}{2} (c'^2_\alpha - c^2_\alpha) &= -\mu_{\alpha\beta} \mathbf{U} \cdot (\mathbf{g}' - \mathbf{g}), \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{G} - \mathbf{u}$.

Используя связь между $\mathbf{g}'$ и $\mathbf{g}$ (1.2.8), после интегрирования по φ находим

$$\mathbf{R}_\alpha = \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \iint \mathbf{g} g Q_{\alpha\beta}^{(1)}(g) f_\alpha f_\beta d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_\beta, \quad (3.1.5)$$

$$Q_\alpha = \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \iint (\mathbf{g} \cdot \mathbf{U}) g Q_{\alpha\beta}^{(1)}(g) f_\alpha f_\beta d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_\beta, \quad (3.1.6)$$

где $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(g)$ — сечение столкновений с передачей импульса, или диффузионное сечение рассеяния, определяемое выражением (1.3.1).

Используя (3.1.2) и оставляя в произведении $f_\alpha f_\beta$ линейные относительно $\mathbf{w}_\alpha$ и $\mathbf{w}_\beta$ члены, имеем

$$\begin{aligned} f_\alpha f_\beta &= n_\alpha n_\beta \left(\frac{\gamma_\alpha \gamma_\beta}{4\pi^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\gamma_\alpha}{2} c_\alpha^2 - \frac{\gamma_\beta}{2} c_\beta^2 \right) \times \\ &\quad \times (1 + \gamma_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha + \gamma_\beta \mathbf{w}_\beta \cdot \mathbf{c}_\beta). \end{aligned}$$

Далее удобно перейти от переменной $\mathbf{U}$ к переменной $\mathbf{X}$ с помощью соотношения

$$\mathbf{X} = \frac{\gamma_\alpha \mathbf{c}_\alpha + \gamma_\beta \mathbf{c}_\beta}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta} = \mathbf{U} - \frac{\mu_{\alpha\beta}}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta} \left(\frac{\gamma_\alpha}{m_\alpha} - \frac{\gamma_\beta}{m_\beta} \right) \mathbf{g}. \quad (3.1.7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_\alpha f_\beta &= n_\alpha n_\beta \left(\frac{\gamma_\alpha + \gamma_\beta}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\gamma_\alpha + \gamma_\beta}{2} X^2 \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2} g^2 \right) [1 + (\gamma_\alpha \mathbf{w}_\alpha + \gamma_\beta \mathbf{w}_\beta) \cdot \mathbf{X} - \gamma_{\alpha\beta} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) \cdot \mathbf{g}], \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

где

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_\alpha \gamma_\beta}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta}. \quad (3.1.9)$$

Подставляя (3.1.8) в (3.1.5) и (3.1.6) и учитывая, что $d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta} = d\mathbf{X} d\mathbf{g}$, можно произвести интегрирование соответствующих выражений по $\mathbf{X}$. При этом часть интегралов обращается в нуль из-за нечетности подынтегральных выражений по $\mathbf{X}$, а оставшиеся интегралы дают

$$\mathbf{R}_\alpha = - \sum_\beta n_\alpha \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta), \quad (3.1.10)$$

$$Q_\alpha = - \sum_\beta 3kn_\alpha \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta} \right) \tau_{\alpha\beta}^{-1} (T_\alpha - T_\beta). \quad (3.1.11)$$

Фигурирующая в этих выражениях эффективная частота столкновений частиц сортов α и β $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ определяется как

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{4}{3} n_\beta \langle v_{\alpha\beta} \rangle \overline{Q}_{\alpha\beta}, \quad (3.1.12)$$

Здесь $\langle v_{\alpha\beta} \rangle = (8/\pi\gamma_{\alpha\beta})^{1/2}$ — средняя относительная скорость частиц и $\overline{Q}_{\alpha\beta}$ — эффективное сечение столкновений с передачей импульса, определяемое как

$$\overline{Q}_{\alpha\beta} = \int_0^\infty \zeta^5 \exp(-\zeta^2) Q_{\alpha\beta}^{(1)}(g) d\zeta. \quad (3.1.13)$$

При этом $\zeta = (\gamma_{\alpha\beta})^{1/2} g$.

Для электрон-атомных столкновений, если $\gamma_e \ll \gamma_\beta$ ($\beta \neq e$), величина $\tau_{e\beta}^{-1}$ совпадает с обычно используемой в кинетике плазмы эффективной частотой столкновений электрона [1, 2]:

$$\nu_{\text{ef}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \gamma_e^{5/2} \int_0^\infty \nu_{e\beta}(v) v^4 \exp\left(-\frac{\gamma_e v^2}{2}\right) dv. \quad (3.1.14)$$

Здесь

$$\nu_{e\beta}(v) = n_\beta v \int_\Omega \sigma_{e\beta}(v, \chi) (1 - \cos \chi) d\Omega \quad (3.1.15)$$

— частота столкновений электронов с передачей импульса, которая в общем случае зависит от скорости.

В случае, когда температуры всех компонентов плазмы одинаковы, эффективная частота столкновений $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ связана с интегралом $\Omega_{\alpha\beta}^{11}$,

являющимся частным случаем известных интегралов Чепмена–Каулинга ($\Omega_{\alpha\beta}^{lr}$ -интегралов [3]), простым соотношением

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{16}{3} n_{\beta} \Omega_{\alpha\beta}^{11}. \quad (3.1.16)$$

При этом для столкновений тяжелых частиц (ионов с атомами и атомов между собой) удобно выразить $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ через коэффициент бинарной диффузии $[D_{\alpha\beta}]_1$ частиц сорта α и β (первое приближение Чепмена–Каулинга [3]),

$$\mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{n_{\beta} kT}{n [D_{\alpha\beta}]_1}, \quad [D_{\alpha\beta}]_1 = \frac{3kT}{16n \mu_{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta}^{11}}. \quad (3.1.17)$$

Особый случай представляет взаимодействие иона с атомом того же сорта, для которого основным процессом оказывается резонансная перезарядка иона на атоме. При этом в отличие от чисто упругого соударения, когда средняя передача импульса в столкновении пропорциональна $\mu_{\alpha\beta} \mathbf{g} (1 - \cos \chi)$, при перезарядке происходит практически полная передача импульса, пропорциональная массе иона (или атома) m_i , а не $\mu_{ia} = m_i/2$. Фактически для сохранения прежней структуры выражений для $\mathbf{R}_{\alpha}$ и Q_{α} с $\mu_{ia} = m_i/2$ достаточно заменить $\overline{Q}_{\alpha\beta}$ в выражении для $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ (3.1.12) на $\overline{Q}'_{\alpha\beta} = \overline{Q}_{\alpha\beta} + 2Q_{\alpha\beta}^*$, где $Q_{\alpha\beta}^*$ — полное эффективное сечение резонансной перезарядки.

В случае кулоновских взаимодействий частиц, используя выражение для диффузионного сечения (1.3.23), полученное с учетом обрезания прицельного параметра на расстоянии порядка экранирующей длины Дебая, имеем

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{16\pi^{1/2}}{3} n_{\beta} \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2} \right)^{3/2} \left(\frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{4\pi\epsilon_0 \mu_{\alpha\beta}} \right)^2 \ln \Lambda_{\alpha\beta}, \quad (3.1.18)$$

где $\Lambda_{\alpha\beta}$ определяется выражением (1.3.32).

Применимость выражения (3.1.18) ограничена, строго говоря, условием $\ln \Lambda \gg 1$. В рамках унифицированной теории плазмы [4, 5], в которой эффект экранирования учитывается точнее, показывается, что при более мягком условии $\Lambda \gg 1$ можно приближенно пользоваться теми же выражениями с заменой $\ln \Lambda$ на $(\ln \Lambda - 1,37)$.

С учетом (2.2.8) и (3.1.10) уравнение движения для компонента α плазмы (2.2.20) записывается в рассматриваемом приближении в виде

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha} \frac{d_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}}{dt} + \nabla p_{\alpha} - n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} - n_{\alpha} e_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}) = \\ = - \sum_{\beta} n_{\alpha} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}), \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

где пренебрегается малым различием между p_α и p_α^* . Заметим, что в инерционном члене в левой части (3.1.19) можно заменить полную производную $d_\alpha \mathbf{u}_\alpha / dt$ на $d\mathbf{u} / dt$, что соответствует пренебрежению членами порядка $d\mathbf{w}_\alpha / dt$ по сравнению с членами порядка $\tau_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{w}_\alpha$ в правых частях уравнений. Это вполне согласуется с принимаемым в дальнейшем предположением о том, что макроскопические параметры плазмы слабо меняются за время и на расстояниях порядка средних характерных времени и длины свободного пробега частиц между столкновениями. В результате вместо (3.1.19) имеем

$$\sum_{\beta} n_{\alpha} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}) = n_{\alpha} e_{\alpha} (\mathbf{E}' + \mathbf{w}_{\alpha} \times \mathbf{B}) + n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} - \mathbf{G}_{\alpha}, \quad (3.1.20)$$

где

$$\mathbf{G}_{\alpha} = \nabla p_{\alpha} + \rho_{\alpha} \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (3.1.21)$$

Если исключить теперь $d\mathbf{u} / dt$ с помощью уравнения движения для плазмы в целом (2.2.17), в котором положено $\pi_{rs} = 0$, то вместо (3.1.20) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} n_{\alpha} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}) &= n_{\alpha} e_{\alpha} (\mathbf{E}' + \mathbf{w}_{\alpha} \times \mathbf{B}) + \\ &+ (n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha}) - \left(\nabla p_{\alpha} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \nabla p \right) - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Уравнение энергии для отдельного компонента плазмы, используя (2.2.21) и исключая из него $d\mathbf{u} / dt$ с помощью уравнения движения для компонента α (3.1.19), можно в том же приближении представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} n_{\alpha} k \frac{dT_{\alpha}}{dt} + p_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} - \frac{5}{2} \nabla \cdot p_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} + \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{R}_{\alpha} &= \\ &= - \sum_{\beta} 3k n_{\alpha} \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \right) \tau_{\alpha\beta}^{-1} (T_{\alpha} - T_{\beta}). \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

В окончательном выражении опущены при этом члены, квадратичные относительно диффузионной скорости под знаком производной.

Уравнения (3.1.19) и (3.1.23) вместе с уравнением непрерывности (2.2.1) образуют замкнутую систему уравнений для определения параметров ρ_{α} , $\mathbf{u}_{\alpha}$ и T_{α} . Именно возможность описания плазмы с помощью гидродинамических переменных и на основе уравнений для компонентов плазмы, внешне напоминающих обычные уравнения гидродинамики, позволяет называть рассматриваемое приближение *квазигидродинамическим*.

Заметим, что для пространственно однородной плазмы и при отсутствии диффузионного переноса частиц ($\mathbf{w}_\alpha = 0$) уравнения (3.1.23) описывают релаксацию температуры T_α к равновесной температуре T с характерным временем релаксации энергии

$$\tau_{\alpha\beta}^E = \frac{(m_\alpha + m_\beta)^2}{2m_\alpha m_\beta} \tau_{\alpha\beta}. \quad (3.1.24)$$

Для взаимодействия электронов с тяжелыми частицами (ионами или атомами) имеем $\tau_{e\beta}^E = (m_\beta/m_e) \tau_{e\beta}$. Это время оказывается существенно большим, чем характерное время обмена энергией внутри как электронного, так и любого тяжелого компонента плазмы. Именно это обстоятельство позволяет, как уже обсуждалось выше, вводить в рассмотрение различные температуры для электронного и тяжелого компонента плазмы ($T_e \neq T_\beta$) и, если характерное время обмена энергией заметно превышает характерное макроскопическое время задачи, считать это различие приближенно постоянным во времени. Отрыв температуры электронов от температуры остальных компонентов может поддерживаться и протеканием электронного тока в плазме (точнее связанным с этим током выделением джоулева тепла). Действительно, если записать уравнение (2.2.21) для электронного компонента ($\alpha = e$), то для стационарной однородной плазмы имеем

$$\mathbf{j}_e \cdot \mathbf{E} = \frac{3}{2} k n_e \sum_{\beta} (\tau_{e\beta}^E)^{-1} (T_e - T_\beta), \quad (3.1.25)$$

где

$$\mathbf{j}_e = -n_e e \mathbf{w}_e. \quad (3.1.26)$$

3.2. Обобщенный закон Ома для частично ионизованной трехкомпонентной плазмы

Уравнения (3.1.20) или (3.1.22) могут быть разрешены относительно диффузионных скоростей компонентов с учетом условия (1.1.4). На практике уравнениями (3.1.20) удобнее пользоваться, когда $d\mathbf{u}/dt$ задано (например, в задачах с вращением плазмы в скрещенных полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$), либо когда инерционными членами вообще можно пренебречь. В общем случае целесообразно решать уравнения (3.1.22), предварительно подставив в них $\mathbf{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$. Формальное решение этих уравнений и вывод обобщенного закона Ома в случае произвольной многокомпонентной плазмы будут рассмотрены нами в следующих параграфах. Здесь мы остановимся на традиционном выводе обобщенного закона Ома в частном случае трехкомпонентного частично ионизованного газа [6, 7]. Предельный переход к случаю двухкомпонентной полностью ионизованной плазмы обеспечивается при этом, если положить плотность нейтрального компонента равной нулю.

Пусть индексы e, i, a соответствуют электронам, ионам и нейтральным частицам (атомам или молекулам), заряды электронов и ионов равны $e_e = -e$ и $e_i = Ze$ соответственно. Будем полагать также массы ионов и нейтралов одинаковыми ($m_i = m_a = m$).

Заметим, что благодаря условию квазинейтральности

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} = 0 \quad (3.2.1)$$

выражение для плотности тока (2.2.14) можно в общем случае записать как

$$\mathbf{j} = \sum_{\beta \neq k} n_{\beta} e_{\beta} (\mathbf{w}_{\beta} - \mathbf{w}_k), \quad (3.2.2)$$

где k — индекс произвольно выбранного компонента.

Для плазмы с одним сортом ионов ($n_e = Zn_i$) имеем

$$\mathbf{j} = ne(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_e). \quad (3.2.3)$$

Благодаря условию $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0$ диффузионную скорость $\mathbf{w}_{\alpha}$ можно также выразить через разность скоростей компонентов:

$$\mathbf{w}_{\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\rho_{\beta}}{\rho} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}). \quad (3.2.4)$$

Воспользуемся теперь уравнениями (3.1.22) и будем для простоты считать отсутствующими силы неэлектромагнитной природы. Уравнение для электронного компонента ($\alpha = e$) может быть упрощено благодаря наличию малого параметра $\delta = m_e/m$, при этом можно, в частности, опустить члены пропорциональные ρ_e/ρ . В результате

$$\begin{aligned} n_e m_e [\tau_{ei}^{-1} (\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i) + \tau_{ea}^{-1} (\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_a)] = \\ = -n_e e \mathbf{E}^* - n_e m_e \omega_e (\mathbf{w}_e \times \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

где

$$\omega_e = \frac{e}{m_e} |\mathbf{B}| \quad (3.2.6)$$

имеет смысл циклотронной частоты для электронов, $\mathbf{k} = \mathbf{B}/B$, а поле $\mathbf{E}^*$ определено выражением

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}' + \frac{1}{n_e e} \nabla p_e. \quad (3.2.7)$$

Вводя переменные $\mathbf{w} = \mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i$ и $\mathbf{s} = \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_a$, перепишем (3.2.5) в виде

$$n_e m_e [\tau_0^{-1} \mathbf{w} + \tau_{ea}^{-1} \mathbf{s}] = -n_e e \mathbf{E}^* - n_e m_e \omega_e (\mathbf{w}_e \times \mathbf{k}), \quad (3.2.8)$$

где τ_0^{-1} определено как

$$\tau_0^{-1} = \tau_{ei}^{-1} + \tau_{ea}^{-1}. \quad (3.2.9)$$

Введем степень ионизации плазмы $\alpha = n_i/(n_i + n_a)$. Тогда, пренебрегая членами порядка $\delta = m_e/m$, на основании соотношения (3.2.4) имеем

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w} + (1 - \alpha) \mathbf{s}. \quad (3.2.10)$$

В результате для определения с помощью (3.2.8) плотности тока $\mathbf{j} = -ne\mathbf{w}$ необходимо лишь одно соотношение, связывающее скорость проскальзывания ионов $\mathbf{s}$ и величину $\mathbf{w}$. Используем для этого уравнение (3.1.21), записанное для нейтрального компонента ($\alpha = a$). Учитывая, что $\rho_a/\rho \approx 1 - \alpha$, можно представить это уравнение в виде

$$\begin{aligned} -n_e m_e \tau_{ea}^{-1} \mathbf{w} - \left(\frac{n_i m_i}{2} \tau_{ia}^{-1} + n_e m_e \tau_{ea}^{-1} \right) \mathbf{s} = \\ = -[\nabla p_n - (1 - \alpha) \nabla p] + (1 - \alpha) n_e m_e \omega_e (\mathbf{w} \times \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Выражая отсюда $\mathbf{s}$, находим

$$\mathbf{s} = -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} [\mathbf{w} + (1 - \alpha) \omega_e \tau_{ea} (\mathbf{w}_e \times \mathbf{k})] + \frac{2\tau_{ia}}{n_i m (1 + \varepsilon)} \mathbf{P}, \quad (3.2.11)$$

где

$$\mathbf{P} = \alpha \nabla p - \nabla (p_e + p_i),$$

$$\varepsilon = 2n_e m_e \tau_{ia} / n_i m \tau_{ea} \sim Z (m_e T / m T_e)^{1/2} \ll 1.$$

Приведенная выше оценка предполагает, что $\overline{Q}_{ea} \approx \overline{Q}_{ia}$.

Подставляя $\mathbf{s}$ в (3.2.8) с учетом (3.2.10), замечаем, что в полученном выражении можно пренебречь членами, пропорциональными малой величине ε всюду, где она не умножается на ω_e , которая может принимать произвольные значения. В результате приходим к следующему выражению для обобщенного закона Ома:

$$\sigma_0 \left[\mathbf{E}^* + \frac{\delta_0}{n_e e (1 - \alpha)} (\mathbf{P} \times \mathbf{k}) \right] = \mathbf{j} + \beta_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + s [\mathbf{k} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k})], \quad (3.2.12)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_o \quad (3.2.13)$$

соответствует электропроводности плазмы в отсутствие магнитного поля, $\beta_0 = \omega_e \tau_0$ — параметр Холла для электронов и

$$s = (1 - \alpha)^2 \beta_0 \beta_i = \delta_0 \beta_0^2 \quad (3.2.14)$$

— коэффициент проскальзывания ионов относительно нейтралов.
Здесь $\beta_i = \omega_i \tau_{ia}$ — параметр Холла для ионов, где

$$\omega_i = \frac{Ze}{\mu_{ia}} |\mathbf{B}|. \quad (3.2.15)$$

Проекцию уравнения (3.2.12) на направление магнитного поля получаем, образуя скалярное произведение его левой и правой частей с вектором $\mathbf{k}$. В результате для параллельной составляющей плотности тока имеем

$$\mathbf{j}_{\parallel} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}^*, \quad \sigma_{\parallel} = \sigma_0, \quad (3.2.16)$$

где $\mathbf{E}_{\parallel}^* = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{k})$.

Полная плотность тока определяется как

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}.$$

Составляющие тока, перпендикулярные полю $\mathbf{B}$, находятся, если образовать векторное произведение уравнения (3.2.12) с вектором $\mathbf{k}$. В результате выражение для $\mathbf{j}$ принимает вид

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}^* + \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}^* + \sigma_H (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*) + \beta_{\perp} \mathbf{P}_{\perp} + \beta_H (\mathbf{k} \times \mathbf{P}). \quad (3.2.17)$$

Здесь $\mathbf{E}_{\perp}^* = \mathbf{k} \times (\mathbf{E}^* \times \mathbf{k})$, $\mathbf{P}_{\perp} = \mathbf{k} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{k})$, а поперечная и холловская электропроводность плазмы определяются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp} &= \sigma_0 \frac{1+s}{(1+s)^2 + \beta_0^2}, \\ \sigma_H &= \sigma_0 \frac{\beta_0}{(1+s)^2 + \beta_0^2}. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

В полностью ионизованной плазме $\delta_0 = 0$ и $\tau_0 = \tau_{ei}$. В этом случае

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel} = \sigma_0 &= \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_{ei}, \quad \sigma_{\perp} = \sigma_0 \frac{1}{1 + \omega_e^2 \tau_{ei}^2}, \\ \sigma_H &= \sigma_0 \frac{\omega_e \tau_{ei}}{1 + \omega_e^2 \tau_{ei}^2}. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

В соответствии с (3.1.17) при выполнении условия $\gamma_e \ll \gamma_i$ или $(m_e T_i / m_i T_e)^{1/2} \ll 1$ имеем

$$\tau_{ei}^{-1} = \frac{1}{3} \frac{Z^2 e^4}{m_e^{1/2} \varepsilon_0 (2\pi k T_e)^{3/2}} n_i \ln \Lambda_{ei}. \quad (3.2.20)$$

Формальная необходимость в учете членов с вектором $\mathbf{P}$ в (3.2.17) возникает лишь в случае частично ионизованной плазмы. При этом

$$\beta_{\perp} = \sigma_{\perp} \frac{1}{n_e e (1 - \alpha)} \frac{s}{1 + s}, \quad \beta_H = -\sigma_{\perp} \frac{s}{n_e e (1 - \alpha)}. \quad (3.2.21)$$

На практике (см. соответствующие оценки в [7]) этими членами можно пренебречь по сравнению с $\nabla p_e / n_e e$ в выражении для $\mathbf{E}^*$. Заметим, что для частично ионизованной плазмы, удовлетворяющей условию $\tau_{ea}^{-1} \geq \tau_{ei}^{-1}$, имеем

$$\delta = (1 - \alpha)^2 \frac{\beta_0}{\beta_i} \sim \varepsilon \ll 1,$$

поэтому влияние параметра проскальзывания ионов начинает сказываться на значениях $\sigma_{\perp}$ и σ_H гораздо позднее, чем влияние параметра Холла для электронов.

3.3. Формальное решение уравнений многокомпонентной диффузии в плазме

Для вывода обобщенного закона Ома в случае произвольной N -компонентной плазмы (в том числе для плазмы с несколькими сортами ионов) необходимо найти общее решение системы уравнений многокомпонентной диффузии (3.1.22). Эти уравнения линейно зависимы, поэтому фактическое число уравнений, необходимых для определения $\mathbf{w}_{\alpha}$, на единицу меньше числа компонентов.

Подставим в правую часть (3.1.22) выражение для $\mathbf{j}$ в виде (3.2.2), а в член с магнитным полем $\mathbf{w}_{\alpha} \times \mathbf{B}$ выражение для $\mathbf{w}_{\alpha}$ (3.2.4). Тогда, вводя переменную $\mathbf{x}_{\beta} = \mathbf{w}_{\beta} - \mathbf{w}_k$, можно представить уравнения (3.1.22) в виде

$$\sum_{\beta \neq k}^N c_{\alpha\beta} \mathbf{x}_{\beta} = \mathbf{e}_{\alpha} + \sum_{\beta \neq k}^N b_{\alpha\beta} (\mathbf{x}_{\beta} \times \mathbf{k}), \quad (3.3.1)$$

где

$$\mathbf{e}_{\alpha} = n_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{E}' + (n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha}) - \left(\nabla p_{\alpha} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \nabla p \right), \quad (3.3.2)$$

а коэффициенты $c_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ определены как

$$\begin{aligned} c_{\alpha\alpha} &= \sum_{\gamma \neq \alpha}^N \lambda_{\alpha\gamma}, \quad c_{\alpha\beta} = -\lambda_{\alpha\beta}, \\ b_{\alpha\alpha} &= n_{\alpha} e_{\alpha} \left(1 - \frac{2\rho_{\alpha}}{\rho} \right) |\mathbf{B}|, \\ b_{\alpha\beta} &= -\frac{n_{\alpha} n_{\beta}}{\rho} (e_{\alpha} m_{\beta} + e_{\beta} m_{\alpha}) |\mathbf{B}|. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

При этом

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha} = n_{\alpha}\mu_{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta}^{-1} = n_{\beta}\mu_{\beta\alpha}\tau_{\beta\alpha}^{-1}. \quad (3.3.4)$$

Умножая (3.3.1) слева и справа векторно на $\mathbf{k}$, получаем

$$\sum_{\beta \neq k}^N c_{\alpha\beta} (\mathbf{x}_{\beta} \times \mathbf{k}) = \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} \times \mathbf{k} + \sum_{\beta \neq k}^N b_{\alpha\beta} (\mathbf{x}_{\beta} - \mathbf{x}_{\beta\parallel}), \quad (3.3.5)$$

где $\mathbf{x}_{\beta\parallel} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_{\beta} \cdot \mathbf{k})$.

Уравнение для $\mathbf{x}_{\beta\parallel}$ получается умножением (3.3.1) дважды скалярно на $\mathbf{k}$:

$$\sum_{\beta \neq k}^N c_{\alpha\beta} \mathbf{x}_{\beta\parallel} = \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha\parallel}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha\parallel} = \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} \cdot \mathbf{k}). \quad (3.3.6)$$

Решение (3.3.6) имеет вид

$$\mathbf{x}_{\alpha\parallel} = |c'|^{-1} \sum_{\beta \neq k}^N |c'|_{\beta\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\beta\parallel}. \quad (3.3.7)$$

Здесь $|c'|$ — определитель матрицы из коэффициентов $c_{\alpha\beta}$, в которой вычеркнуты k -я строка и k -й столбец; $|c'|_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $\beta\alpha$ определителя. Разрешая (3.3.5) относительно $\mathbf{x}_{\alpha} \times \mathbf{k}$, находим

$$\mathbf{x}_{\alpha} \times \mathbf{k} = |c'|^{-1} \sum_{\beta \neq k}^N |c'|_{\beta\alpha} (\boldsymbol{\epsilon}_{\beta} \times \mathbf{k}) - \sum_{\beta, \gamma \neq k}^N |c'|_{\beta\alpha} b_{\beta\gamma} (\mathbf{x}_{\gamma} - \mathbf{x}_{\gamma\parallel}).$$

Подставляя это решение в (3.3.1), перенося члены с $\mathbf{x}_{\beta}$ в левую часть и используя выражение для $\mathbf{x}_{\alpha\parallel}$ (3.3.7), имеем

$$\sum_{\beta \neq k}^N a_{\alpha\beta} \mathbf{x}_{\beta} = \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} + \sum_{\beta \neq k}^N \varkappa_{\alpha\beta} (\boldsymbol{\epsilon}_{\beta} \times \mathbf{k})_{\text{g}} + \sum_{\beta \neq k}^N \chi_{\alpha\beta} \boldsymbol{\epsilon}_{\beta\parallel}, \quad (3.3.8)$$

где

$$a_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} + \text{g} |c'|^{-1} \sum_{\gamma, \delta \neq k}^N |c'|_{\gamma\delta} b_{\alpha\delta} b_{\gamma\beta}, \quad \varkappa_{\alpha\beta} = |c'|^{-1} \sum_{\gamma \neq k}^N |c'|_{\beta\gamma} b_{\alpha\gamma},$$

$$\chi_{\alpha\beta} = |c'|^{-2} \sum_{\gamma, \delta, \varepsilon \neq k}^N |c'|_{\gamma\varepsilon} |c'|_{\beta\delta} b_{\alpha\varepsilon} b_{\gamma\delta}. \quad (3.3.9)$$

Решение (3.3.8) записывается в виде

$$\mathbf{x}_{\alpha} = |a'|^{-1} \left(\sum_{\beta \neq k}^N |a'|_{\beta\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\beta} + \sum_{\beta, \gamma \neq k}^N \varkappa_{\beta\gamma} |a'|_{\beta\alpha} (\boldsymbol{\epsilon}_{\gamma} \times \mathbf{k}) + \sum_{\beta, \gamma \neq k}^N |a'|_{\beta\alpha} \chi_{\beta\gamma} \boldsymbol{\epsilon}_{\gamma\parallel} \right). \quad (3.3.10)$$

Используем теперь соотношение, которое следует из (3.3.8), если умножить его слева и справа дважды скалярно на $\mathbf{k}$,

$$|a'|^{-1} \left(\sum_{\beta \neq k}^N |a'|_{\beta\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\beta||} + \sum_{\beta, \gamma \neq k}^N |a'|_{\beta\alpha} \chi_{\beta\gamma} \boldsymbol{\epsilon}_{\gamma||} \right) = |c'|^{-1} \sum_{\beta \neq k}^N |c'|_{\beta\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\beta||}.$$

Тогда учитывая, что $\boldsymbol{\epsilon}_{\beta} = \boldsymbol{\epsilon}_{\beta||} + \boldsymbol{\epsilon}_{\beta\perp}$, где $\boldsymbol{\epsilon}_{\beta\perp} = \mathbf{k} \times (\boldsymbol{\epsilon}_{\beta} \times \mathbf{k})$, приходим к окончательному выражению

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\alpha} = & |c'|^{-1} \sum_{\beta \neq k}^N |c'|_{\beta\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\beta||} + |a'|^{-1} \sum_{\beta \neq k}^N |a'|_{\beta\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\beta\perp} + \\ & + |a'|^{-1} \sum_{\beta, \gamma \neq k}^N \chi_{\gamma\beta} |a'|_{\gamma\alpha} (\boldsymbol{\epsilon}_{\beta} \times \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Для определения собственно диффузионных скоростей компонентов $\mathbf{w}_{\alpha}$ можно воспользоваться соотношением (3.2.4), из которого следует

$$\mathbf{w}_{\alpha} = \mathbf{x}_{\alpha} - \sum_{\beta=1}^N \frac{\rho_{\beta}}{\rho} \mathbf{x}_{\beta}. \quad (3.3.12)$$

Мы не будем производить детальный анализ выражений для диффузионных скоростей в общем случае, а используем полученные решения лишь для вывода обобщенного закона Ома в произвольной многокомпонентной плазме. Некоторые частные задачи (диффузия в слабо ионизованном газе и диффузия поперек сильного магнитного поля в полностью ионизованной многокомпонентной плазме) будут рассмотрены в этой главе чуть позднее.

3.4. Обобщенный закон Ома для многокомпонентной плазмы

Воспользуемся тем, что в соответствии с (3.2.2)

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha \neq k}^N n_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha}. \quad (3.4.1)$$

Подставляя сюда полученные выше решения для $\mathbf{x}_{\alpha}$ (3.3.11), приходим к выражению для обобщенного закона Ома, связывающего плотность тока проводимости $\mathbf{j}$ с параллельной и перпендикулярными (относительно вектора магнитного поля $\mathbf{B}$) компонентами вектора $\boldsymbol{\epsilon}_{\alpha}$. Без учета градиентов давления компонентов ($\nabla p_{\alpha} = \nabla p = 0$) и сил

неэлектромагнитной природы, когда $\mathbf{e}_\beta = n_\beta e_\beta \mathbf{E}'$, выражение для $\mathbf{j}$ можно представить в виде

$$\mathbf{j} = \sigma_{||} \mathbf{E}'_{||} + \sigma_{\perp} \mathbf{E}'_{\perp} + \sigma_H (\mathbf{k} \times \mathbf{E}'). \quad (3.4.2)$$

Параллельная, перпендикулярная и холловская электропроводность плазмы определяются при этом как

$$\begin{aligned} \sigma_{||} &= |c'|^{-1} \sum_{\alpha, \beta \neq k}^N n_\alpha e_\alpha n_\beta e_\beta |c'|_{\beta\alpha}, \quad \sigma_{\perp} = |a'|^{-1} \sum_{\alpha, \beta \neq k}^N n_\alpha e_\alpha n_\beta e_\beta |a'|_{\beta\alpha}, \\ \sigma_H &= |a'|^{-1} \sum_{\alpha, \beta, \gamma \neq k}^N n_\alpha e_\alpha n_\beta e_\beta \kappa_{\beta\gamma} |a'|_{\gamma\alpha}. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Для двухкомпонентной полностью ионизованной плазмы ($e, i = 1, 2$) из (3.4.3) следует

$$\sigma_{||} = \sigma_0 = \frac{(n_1 e_1)^2}{c_{11}}, \quad \sigma_{\perp} = \frac{(n_1 e_1)^2}{a_{11}}, \quad \sigma_H = -\frac{(n_1 e_1)^2 \kappa_{11}}{a_{11}}. \quad (3.4.4)$$

Легко заметить, что

$$c_{11} = n_e m_e \tau_{ei}^{-1}, \quad a_{11} = c_{11} \left(1 + \omega_e^2 \tau_{ei}^2 \right), \quad \kappa_{11} = \frac{b_{11}}{c_{11}} = -\omega_e \tau_{ei},$$

и выражения для $\sigma_{||}$, $\sigma_{\perp}$ и σ_H (3.4.4) совпадают с выражениями (3.2.19), полученными ранее.

При рассмотрении плазмы более сложного состава выражения (3.4.3) могут быть несколько упрощены благодаря наличию малого параметра $\delta = m_e/m_\beta$ ($\beta \neq e$). Так, в случае частично ионизованной трехкомпонентной плазмы ($e, i, n = 1, 2, 3$, $e_1 = -e$, $e_2 = Ze$, $e_3 = 0$, $m_2 = m_3 = m$), полагая $k = 2$ и пренебрегая членами c_{13} $c_{33} \approx \delta^{1/2}$ по сравнению с единицей, приходим к полученным ранее результатам (3.2.16) и (3.2.18).

В качестве следующего конкретного примера рассмотрим случай полностью ионизованной плазмы с двумя сортами ионов ($e_1 = -e$, $e_2 = Z_2 e$, $e_3 = Z_3 e$, $m_2 \neq m_3$). С помощью упрощений, аналогичных использованным выше, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{||} &= \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_0 s, \quad \sigma_{\perp} = \sigma_0 \frac{1 + b}{(1 + a)^2 + \beta_0^2}, \\ \sigma_H &= \sigma_0 \frac{(1 + f) \beta_0}{(1 + a)^2 + \beta_0^2}, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

где

$$\tau_0^{-1} = \tau_{e2}^{-1} + \tau_{e3}^{-1}, \quad \beta_0 = \omega_e \tau_0,$$

$$a = n_e \frac{(\rho_2^2 n_3 Z_3 + \rho_3^2 n_2 Z_3) e^2 B^2}{\rho^2 c_{11} c_{33}}, \quad b = n_e \frac{(\rho_2 n_3 Z_3 - \rho_3 n_2 Z_3)^2 e^2 B^2}{\rho^2 c_{11} c_{33}},$$

$$f = \frac{n_2 Z_2 n_3 Z_3}{n_e} \frac{(\rho_2^2 n_3 Z_3 + \rho_3^2 n_2 Z_3) e^2 B^2}{\rho^2 c_{33}^2}, \quad (3.4.6)$$

$$c_{11} = n_e m_e \tau_0^{-1}, \quad c_{33} = n_3 \mu_{32} \tau_{32}^{-1} + n_e m_e \tau_e^{-1}.$$

Для $Z_2 = Z_3 = 1$ эти результаты согласуются с выражениями, полученными несколько другим способом в работах [8, 9].

В случае произвольной многокомпонентной плазмы вычисление коэффициентов электропроводности оказывается более сложным, хотя использование малости отношения $\delta = m_e/m_\beta$ и в этом случае приводит к заметным упрощениям. В частности, для продольной электропроводности, пренебрегая при вычислении определителей членами $\approx c_{e\beta}/c_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \neq e$), имеющими порядок $\delta^{1/2}$ по сравнению с единицей, в общем случае имеем

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_0, \quad \tau_0^{-1} = \sum_{\beta} \tau_{e\beta}^{-1}, \quad (3.4.7)$$

где индекс β относится к ионам либо атомам (молекулам) произвольного сорта. Из анализа полученных выше выражений (3.2.18) и (3.4.6) следует, что при выполнении условий $s \ll 1$ и $s_{ik} \ll 1$, где $s = (\rho_n/\rho)^2 \beta_e \beta_{in}$ и $s_{ik} = (\rho_k/\rho)^2 \beta_e \beta_{ik}$ ($i \neq k$ — индексы сортов ионов), значения поперечной и холловской электропроводности перестают зависеть от ион-нейтральной либо ион-ионной частоты столкновений. На практике это означает, что при этих условиях плотность тока $\mathbf{j}$ определяется лишь переносом электронов, т. е. может быть найдена из независимого уравнения (3.1.21), записанного только для электронного компонента плазмы ($\alpha = e$), в котором скорости тяжелых компонентов полагаются приближенно равными ($\mathbf{w}_\beta = 0$). Пренебрегая в правой части (3.1.21) членами, пропорциональными ρ_e/ρ , и опуская для простоты силы неэлектромагнитной природы, уравнение для электронов можно в этом случае представить в виде

$$n_e m_e \tau_0^{-1} \mathbf{w}_e = -n_e e \mathbf{E}^* - n_e m_e \omega_e (\mathbf{w}_e \times \mathbf{k}), \quad (3.4.8)$$

где $\mathbf{E}^*$ определено соотношением (3.2.7).

Поскольку $\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{w}_e$, вместо (3.4.8) имеем уравнение для $\mathbf{j}$,

$$\mathbf{j} + \beta_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = \sigma_0 \mathbf{E}^*, \quad \beta_0 = \omega_e \tau_0, \quad (3.4.9)$$

разрешая которое относительно $\mathbf{j}$, находим

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}^* + \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}^* + \sigma_H (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*), \quad (3.4.10)$$

где $\sigma_{\parallel}$, $\sigma_{\perp}$ и σ_H для произвольной многокомпонентной плазмы определяются выражениями, аналогичными случаю двухкомпонентной плазмы (формулы (3.2.19), но с заменой τ_{ei} на τ_0 , определяемую вторым соотношением (3.4.7).

Рассмотрим более подробно выражение для продольной электропроводности многокомпонентной плазмы $\sigma_{\parallel} = \sigma_0$. Если выполнено условие $\gamma_e \ll \gamma_{\beta}$ или $(m_e T_i / m_i T_e)^{1/2} \ll 1$, то для τ_0^{-1} в соответствии с (3.4.7) и (3.1.12) имеем

$$\tau_0^{-1} = \frac{16}{3} \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2} \sum_{\beta \neq e} n_{\beta} \overline{Q}_{e\beta}. \quad (3.4.11)$$

В результате выражение для σ_0 можно представить в виде

$$\sigma_0 = 0,471 \frac{n_e e^2}{(m_e k T_e)^{1/2}} \frac{1}{\sum_{\beta \neq e} n_{\beta} \overline{Q}_{e\beta}}. \quad (3.4.12)$$

Для электрон-нейтральных взаимодействий величина $\overline{Q}_{e\beta}$ определяется выражением (3.1.12) и может быть найдена, если известно дифференциальное эффективное сечение упругого рассеяния электрона на атоме (или молекуле). Для кулоновского взаимодействия электрона с ионами заряда $Z_i e$, использование (3.1.17) дает

$$\tau_0^{-1} = \frac{1}{3} \frac{e^4}{m_e^{1/2} \varepsilon_0^2 (2\pi k T_e)^{3/2}} \sum_i n_i Z_i^2 \ln \Lambda_{ei}, \quad (3.4.13)$$

где суммирование распространяется на ионные компоненты плазмы. Если заряды ионов различаются не слишком сильно, то с учетом более слабой зависимости от Z_i под знаком логарифма, можно приближенно положить $\ln \Lambda_{ei} = \ln \Lambda$, где Λ определено при некотором среднем значении $Z = Z_{ef}$. При этом

$$\Lambda = \frac{12\pi \varepsilon_0^{3/2} kT}{Z_{ef} e^2} \left[d \frac{kT}{n_e e^2 (1 + Z_{ef})} \right]^{1/2}, \quad T_e = T, \quad (3.4.14)$$

$$\Lambda = \frac{12\pi \varepsilon_0^{3/2} kT_e}{Z_{ef} e^2} \left[\frac{kT}{n_e e^2 Z_{ef}} \right]^{3/2}, \quad T_e \gg T.$$

Тогда выражение для электропроводности полностью ионизованной многокомпонентной плазмы записывается в виде

$$\sigma_0 = 0,298 \frac{(kT_e)^{3/2}}{m_e^{1/2}} \frac{(4\pi \varepsilon_0)^2}{Z_{ef} e^2 \ln \Lambda}, \quad (3.4.15)$$

где

$$Z_{\text{ef}} = \frac{\sum_i n_i Z_i^2}{\sum_i n_i Z_i} = \sum_i \frac{n_i}{n_e} Z_i^2. \quad (3.4.16)$$

Величина Z_{ef} соответствует при этом некоторому эффективному заряду ионных компонентов плазмы.

Выражения для электропроводности (3.4.12) и (3.4.15) по точности расчета согласуются с так называемым первым приближением Чепмена–Каулинга [3], соответствующим учету лишь одного полинома Сонина в разложении неравновесной поправки к функции распределения. В случае слабоионизованного газа для модели частиц — твердых упругих шаров ($\overline{Q}_{e\beta} = \text{const}$) численный коэффициент в (3.4.12) отличается от точного значения, получаемого в приближении Лоренца [3] на 13 % (0,471 вместо 0,532). Учет следующего приближения сокращает это различие до 4 %. Для полностью ионизованной плазмы первое приближение является заметно менее точным, хотя уже второе приближение, увеличивая численный коэффициент при $Z_i = 1$ почти в два раза, оказывается практически близким к точному результату [10]. В общем случае многокомпонентной плазмы при сохранении зависимости от остальных параметров более сложной оказывается и зависимость σ_0 от Z_{ef} . Соответствующие более точные выражения как для продольной, так и для поперечных компонент электропроводности плазмы будут рассмотрены в следующих главах.

3.5. Диффузия в слабоионизованном газе

Рассмотрим слабоионизованную газовую смесь, когда степень ионизации настолько мала, что мы можем пренебречь взаимодействием заряженных частиц между собой по сравнению с их взаимодействием с нейтралями. Оценку необходимого для этого уровня ионизации можно произвести, рассматривая относительный вклад взаимодействий в величину электропроводности плазмы (3.4.10). Так для обычной трехкомпонентной частично ионизованной плазмы очевидным условием слабой ионизации является требование

$$\tau_{ei}^{-1} \ll \tau_{en}^{-1} \quad \text{или} \quad n_i \overline{Q}_{ei} \ll n_n \overline{Q}_{en}. \quad (3.5.1)$$

Независимая диффузия заряженных частиц различного сорта в слабоионизованной газовой смеси может рассматриваться как процесс, по отношению к которому нейтральные компоненты выступают как среда с единой гидродинамической скоростью, приближенно совпадающей со среднемассовой скоростью смеси. Это позволяет в уравнениях диффузии (3.1.22), записываемых для заряженных частиц, считать макроскопические скорости нейтральных компонентов $\mathbf{u}_k$ равными $\mathbf{u}$ (т.е. $\mathbf{w}_k = 0$). Естественно, что в системе уравнений диффузии для

самих нейтральных компонентов относительная скорость нейтралов различного сорта должна сохраняться без всяких допущений. Будем рассматривать смесь с произвольным числом сортов ионов. С учетом сделанных выше предположений уравнения (3.1.20) для электронов и ионов ($\alpha = e, i_1, i_2, \dots, i_s$) принимают в этом случае вид

$$n_\alpha \mathbf{w}_\alpha \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} = n_\alpha e_\alpha (\mathbf{E}' + \mathbf{w}_\alpha \times \mathbf{B}) - \mathbf{G}_\alpha, \quad (3.5.2)$$

где

$$\mathbf{G}_\alpha = \nabla p_\alpha + \rho_\alpha \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla p_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} [\nabla p_- (\mathbf{j} \times \mathbf{B})], \quad (3.5.3)$$

а суммирование производится по индексам нейтральных частиц от 1 до K .

Разрешая уравнения (3.5.2) относительно $\mathbf{w}_\alpha$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\alpha = Z_\alpha (b_{\alpha\parallel} \mathbf{E}'_{\parallel} + b_{\alpha\perp} \mathbf{E}'_{\perp} + b_{\alpha H} \mathbf{E}' \times \mathbf{k}) - \\ - p_\alpha^{-1} (D_{\alpha\parallel} \mathbf{G}_{\alpha\parallel} + D_{\alpha\perp} \mathbf{G}_{\alpha\perp} + D_{\alpha H} \mathbf{G}_\alpha \times \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

где

$$b_{\alpha\parallel} = \frac{e}{\sum_{\beta=1}^K \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1}}, \quad b_{\alpha\perp} = \frac{b_{\alpha\parallel}}{1 + \beta_\alpha^2}, \quad b_{\alpha H} = \frac{b_{\alpha\parallel} \beta_\alpha}{1 + \beta_\alpha^2}. \quad (3.5.5)$$

При этом для электронного компонента ($\alpha = e$), поскольку $\mu_{e\beta} \approx m_e$, имеем

$$b_{e\parallel} = \frac{e\tau_0}{m_e}, \quad \beta_e = b_{e\parallel} |\mathbf{B}|. \quad (3.5.6)$$

Для ионных компонентов ($\alpha \neq e$)

$$\beta_\alpha = Z_\alpha b_{\alpha\parallel} |\mathbf{B}|, \quad (3.5.7)$$

где $Z_\alpha = e_\alpha/e$ — кратность заряда иона сорта α .

В отсутствие магнитного поля и для установившихся течений ($d\mathbf{u}/dt = 0$) имеем

$$\mathbf{w}_\alpha = Z_\alpha b_\alpha \mathbf{E} - D_\alpha \nabla \ln p_\alpha, \quad (3.5.8)$$

где $b_\alpha = b_{\alpha\parallel}$ (3.5.5); для электронов в этом выражении можно формально полагать $Z_e = -1$.

Коэффициент диффузии D_α связан с коэффициентом подвижности b_α соотношением Эйнштейна

$$D_\alpha = \frac{kT_\alpha}{e} b_\alpha. \quad (3.5.9)$$

При наличии магнитного поля такие же соотношения имеют место и для поперечных коэффициентов. Используя связь (3.1.17) между $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ и коэффициентом взаимной диффузии $[D_{\alpha\beta}]_1$, коэффициент подвижности для ионов можно определить также соотношением ($T_\alpha = T$ для $\alpha \neq e$)

$$\frac{1}{b_i} = \frac{kT}{e} \sum_k \frac{y_k}{[D_{ik}]_1}, \quad (3.5.10)$$

где $y_k = n_k/n$ — относительная концентрация нейтральных компонентов в смеси. Если ввести коэффициенты подвижности ионов сорта i в каждом из чистых газов, составляющих рассматриваемую смесь, $b_{ik} = (e/kT) [D_{ik}]_1$, то из (3.5.9) следует соотношение, известное как закон Бланка [11]:

$$\frac{1}{b_i} = \sum_k \frac{y_k}{b_{ik}}. \quad (3.5.11)$$

Получим теперь выражение для плотности тока в слабоионизованной многокомпонентной плазме. Используя определение $\mathbf{j} = \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha \mathbf{w}_\alpha$, с учетом (3.5.4) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = & \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \sigma_{\perp} \mathbf{E}'_{\perp} + \sigma_H (\mathbf{k} \times \mathbf{E}') - \sum_{\alpha} Z_{\alpha} b_{\alpha\parallel} \mathbf{G}_{\alpha\parallel} - \\ & - \sum_{\alpha} Z_{\alpha} b_{\alpha\perp} \mathbf{G}_{\alpha\perp} - \sum_{\alpha} Z_{\alpha} b_{\alpha H} (\mathbf{G}_{\alpha} \times \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

где коэффициенты электропроводности определены как

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel} &= e \sum_{\alpha} n_{\alpha} Z_{\alpha}^2 b_{\alpha\parallel}, \quad \sigma_{\perp} = e \sum_{\alpha} n_{\alpha} Z_{\alpha}^2 b_{\alpha\perp}, \\ \sigma_H &= -e \sum_{\alpha} n_{\alpha} Z_{\alpha}^2 b_{\alpha H}. \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Если $\bar{Q}_{ek} \sim \bar{Q}_{ik}$, то отношение b_i/b_e имеет порядок величины $(m_e T / \mu_{ik} T_e)^{1/2}$, поэтому при вычислении продольной электропроводности вкладом подвижности ионов по сравнению с подвижностью электронов можно пренебречь. Это полностью согласуется с выводами, которые мы уже сделали в п. 3.4, и выражение для σ имеет в этом случае вид (3.4.6). Для того чтобы оценить вклад электронной и ионной составляющих в $\sigma_{\perp}$ и σ_H , заметим, что при $Z_i = 1$ и $n_e = \sum_{i=1}^s n_i$, где индекс i соответствует ионам различного сорта, выражения для поперечной и холловской электропроводности при $b_e \gg b_i$ можно представить как

$$\sigma_{\perp} = e \sum_{i=1}^s n_i \left(\frac{b_e}{1 + \beta_e^2} + \frac{b_i}{1 + \beta_i^2} \right) \approx e \sum_{i=1}^s n_i \frac{b_e (1 + \beta_0 \beta_i)}{(1 + \beta_0 \beta_i)^2 + \beta_0^2}, \quad (3.5.14)$$

$$\sigma_H = -e \sum_{i=1}^s n_i \left(\frac{b_e \beta_e}{1 + \beta_e^2} + \frac{b_i \beta_i}{1 + \beta_i^2} \right) \approx e \sum_{i=1}^s n_i \frac{b_e \beta_0}{(1 + \beta_0 \beta_i)^2 + \beta_0^2}, \quad (3.5.15)$$

где

$$b_i = \frac{e}{\sum_{\beta=1}^k \mu_{i\beta} \tau_{i\beta}^{-1}}, \quad \beta_0 = |\boldsymbol{\beta}_e| = b_e |\mathbf{B}|, \quad \beta_i = b_i |\mathbf{B}|.$$

Эти выражения применительно к слабоионизованному газу обобщают результаты, полученные ранее для трехкомпонентной плазмы с одним сортом ионов на случай нескольких сортов ионов в смеси. Заметим, что при выполнении условия $\beta_0 \beta_i \ll 1$ вкладом ионов в $\sigma_\perp$ и σ_H можно пренебречь, и мы приходим к результатам, соответствующим приближению квазидвухкомпонентной среды, когда ток определяется лишь переносом электронов. Наоборот, при условии $\beta_0 \beta_i \gg 1$ коэффициенты электропроводности $\sigma_\perp$ и σ_H определяются лишь вкладом ионных компонентов и в этом случае для них справедливы выражения (3.5.13), в которых суммирование распространяется лишь на ионные компоненты.

Рассмотрим теперь вопрос об амбиполярной диффузии в слабоионизованной плазме с несколькими сортами ионов. При диффузии заряженных частиц в поле градиентов их собственного парциального давления из-за высокой подвижности электронов по сравнению с ионами может возникать разделение зарядов. Возникающее при этом электрическое поле (поле объемного заряда) вынуждает электроны и ионы к совместной диффузии, которая и называется амбиполярной [12, 13].

В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B} = 0$) установившаяся диффузия заряженных частиц плазмы определяется выражением (3.5.8). Если ток в плазме равен нулю (что возможно, например, при отсутствии контакта плазмы с внешними проводниками), то из определения $\mathbf{j}$ следует, что

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0.$$

Подставляя сюда $\mathbf{w}_{\alpha}$ из (3.5.8), можно выразить поле объемного заряда $\mathbf{E}$ через градиенты парциального давления заряженных частиц:

$$\mathbf{E} = \sigma^{-1} \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} D_{\alpha} \nabla \ln p_{\alpha}, \quad (3.5.16)$$

где $\sigma = e \sum_{\alpha} n_{\alpha} Z_{\alpha}^2 b_{\alpha}$ — электропроводность плазмы в отсутствие магнитного поля. Исключая $\mathbf{E}$ в выражении (3.5.8), приходим к следующему выражению для плотности потока заряженных частиц сорта α :

$$n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = -n_{\alpha} D_{\alpha} \left(\nabla \ln p_{\alpha} - \frac{Z_{\alpha}}{T_{\alpha}} \frac{\sum_{\beta} n_{\beta} Z_{\beta} T_{\beta} b_{\beta} \nabla \ln p_{\beta}}{\sum_{\beta} n_{\beta} Z_{\beta}^2 b_{\beta}} \right). \quad (3.5.17)$$

В частности, для электронов ($\alpha = e$) в режиме амбиполярной диффузии, выделяя $\beta = e$ из суммирования по β , находим

$$n_e \mathbf{w}_e = -n_e D_e \frac{\nabla \ln p_e \sum_i n_i Z_i^2 b_i + \sum_i n_i Z_i b_i \frac{T_i}{T_e} \nabla \ln p_i}{n_e b_e + \sum_i n_i Z_i^2 b_i}, \quad (3.5.18)$$

где суммирование производится лишь по ионным компонентам. Отметим, что в общем случае диффузионный поток любого из компонентов зависит от всех градиентов парциального давления заряженных частиц.

Полученные выражения легко обобщить и на случай диффузии заряженных частиц поперек магнитного поля. Рассмотрим, например, цилиндрический столб плазмы, помещенный в продольное магнитное поле. Предполагая, что все градиенты и электрическое поле существуют только в радиальном направлении, для установившихся радиальных плотностей потоков заряженных частиц в соответствии с (3.5.4) имеем

$$n_\alpha w_{\alpha r} = n_\alpha Z_\alpha b_{\alpha \perp} E_r - n_\alpha D_{\alpha \perp} \frac{\partial \ln p_\alpha}{\partial r}, \quad (3.5.19)$$

где

$$D_{\alpha \perp} = \frac{k T_\alpha}{e} b_{\alpha \perp} = \frac{D_\alpha}{1 + \beta_\alpha^2}. \quad (3.5.20)$$

Выражая опять $\mathbf{E}$ с помощью условия (3.5.16), мы приходим к формуле для $n_\alpha \mathbf{w}_\alpha$, полностью совпадающей с (3.5.17), если заменить в последней D_α и b_β на $D_{\alpha \perp}$ и $b_{\beta \perp}$.

Поскольку для продольных величин считается обычно выполненным условие $b_e \gg b_i$, выражение (3.5.17) можно представить в виде

$$n_e \mathbf{w}_e = - \sum_i n_i Z_i D_i \left(Z_i \frac{T_e}{T_i} \nabla \ln p_e + \nabla \ln p_i \right), \quad (3.5.21)$$

т. е. диффузионный перенос электронов, так же как и ионов, определяется коэффициентами диффузии ионных компонентов. Для диффузии поперек магнитного поля условие $b_{e \perp} \gg b_{i \perp}$ в общем случае не выполняется. Более того, в сильном магнитном поле, когда $\beta_\alpha^2 \gg 1$, имеет место обратное условие $b_{i \perp} \gg b_{e \perp}$. Тогда

$$n_e w_{er} = -n_e D_{e \perp} \frac{\partial \ln p_e}{\partial r} + \frac{1}{\sum_i n_i Z_i b_{i \perp}} \sum_i n_i Z_i b_{i \perp} \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln p_i}{\partial r}. \quad (3.5.22)$$

Для плазмы с одним сортом ионов заряда Ze , когда $n_e = Z n_1$, и при условии $\nabla T_e = \nabla T_i = 0$, из (3.5.15) следует

$$n_e \mathbf{w}_e = Z n_i \mathbf{w}_i = -D_A \nabla n_e, \quad (3.5.23)$$

где D_A — коэффициент амбиполярной диффузии, определяемый выражением

$$D_A = D_i \frac{b_e}{b_e + Z b_i} \left(1 + Z \frac{T_e}{T_i} \right). \quad (3.5.24)$$

Соответственно для диффузии поперек магнитного поля имеем

$$n_e w_{er} = Z n_i w_{ir} = -D_{A\perp} \frac{\partial n_e}{\partial r}, \quad (3.5.25)$$

где $D_{A\perp}$ получается из D_A (3.5.24) заменой коэффициентов b_α и D_α на соответствующие поперечные коэффициенты $b_{\alpha\perp}$ и $D_{\alpha\perp}$. При этом

$$\begin{aligned} D_A &= D_i \left(1 + Z \frac{T_e}{T_i} \right) \quad \text{при} \quad b_e \gg b_i, \\ D_{A\perp} &= D_{e\perp} \left(1 + \frac{1}{Z} \frac{T_i}{T_e} \right) \quad \text{при} \quad b_{e\perp} \gg b_{i\perp}. \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

Для $Z = 1$ и $T_e = T_i$ из (3.5.26) следуют известные результаты, согласно которым коэффициент амбиполярной диффузии в отсутствие магнитного поля (или вдоль него) равен удвоенному коэффициенту диффузии ионов ($D_A = 2D_i$), а поперек сильного магнитного поля — удвоенному коэффициенту поперечной диффузии для электронов ($D_{A\perp} = 2D_{e\perp} = 2D_e/\beta_e^2$).

3.6. Поперечный перенос частиц в замагниченной плазме

Рассмотрим диффузию заряженных частиц в полностью ионизованной многокомпонентной плазме поперек сильного магнитного поля, когда для всех составляющих ее сортов частиц выполнено условие

$$|\omega_\alpha| \tau_{\alpha\beta} \gg 1, \quad (3.6.1)$$

где $\omega_\alpha = Z_\alpha e |\mathbf{B}| / m_\alpha$ — циклотронная частота вращения частиц сорта α , $\tau_{\alpha\beta}$ — эффективное время между столкновениями частиц, определяемое формулой (3.1.18). Плазму, движение частиц которой подчинено условию (3.6.1), принято называть замагниченной.

Будем исходить из системы уравнений (3.1.20) для диффузионных скоростей компонентов, которую с учетом определения ω_α представим в виде

$$\begin{aligned} \sum_\beta (\omega_\alpha \tau_{\alpha\beta})^{-1} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) = \\ = (\mathbf{w}_\alpha \times \mathbf{k}) + (\rho_\alpha \omega_\alpha)^{-1} (n_\alpha e_\alpha \mathbf{E}' + n_\alpha \mathbf{X}_\alpha - \mathbf{G}_\alpha). \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Присутствие в левой части этих уравнений малого параметра $(\omega\tau)^{-1} \ll 1$ позволяет использовать для их решения метод последовательных приближений. В нулевом приближении, полностью пренебрегая столкновениями (т.е. левой частью (3.6.2)), для скорости диффузии частиц поперек магнитного поля имеем

$$\mathbf{w}_{\alpha\perp}^{(0)} = \frac{1}{B} (\mathbf{E}' \times \mathbf{k}) + \frac{1}{\rho_{\alpha}\omega_{\alpha}} (\mathbf{k} \times \nabla p_{\alpha}) + \frac{1}{\omega_{\alpha}} \left(\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) - \frac{1}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}} (\mathbf{k} \times \mathbf{X}_{\alpha}). \quad (3.6.3)$$

Поправка первого приближения к $\mathbf{w}_{\alpha\perp}$ получается при подстановке выражения (3.6.3) в левую часть (3.6.2):

$$\mathbf{w}_{\alpha\perp}^{(1)} = -\frac{1}{m_{\alpha}^2\omega_{\alpha}^2} \sum_{\alpha} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left[\left(\frac{\nabla_{\perp} p_{\alpha}}{n_{\alpha}} - \frac{Z_{\alpha}}{Z_{\beta}} \frac{\nabla_{\perp} p_{\beta}}{n_{\beta}} \right) + \left(m_{\alpha} - \frac{Z_{\alpha}}{Z_{\beta}} m_{\beta} \right) \frac{d\mathbf{u}_{\perp}}{dt} - \left(\mathbf{X}_{\alpha\perp} - \frac{Z_{\alpha}}{Z_{\beta}} \mathbf{X}_{\beta\perp} \right) \right]. \quad (3.6.4)$$

Рассмотрим некоторые следствия из полученных формул.

Суммируя диффузионные скорости компонент $\mathbf{w}_{\alpha\perp} = \mathbf{w}_{\alpha\perp}^{(0)} + \mathbf{w}_{\alpha\perp}^{(1)}$ с весом $n_{\alpha} Z_{\alpha} e$ (для электронов $Z_e = -1$), приходим к выражению для поперечной составляющей плотности тока в плазме:

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{1}{B} \left[(\mathbf{k} \times \nabla p) + \rho \left(\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) - \left(\mathbf{k} \times \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} \right) \right]. \quad (3.6.5)$$

Заметим, что такой же результат следует из полного уравнения движения плазмы (2.2.17), если, пренебрегая силой вязкого трения, разрешить его относительно $\mathbf{j}$. Чтобы придать выражению (3.6.5) форму, близкую к обычной записи обобщенного закона Ома, можно выразить $d\mathbf{u}/dt$ через $\mathbf{E}'$, воспользовавшись очевидным условием $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha\perp} = 0$ и подставив в него значения $\mathbf{w}_{\alpha\perp}$. В результате выражение для $\mathbf{j}_{\perp}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\perp} = \frac{1}{B} \left\{ \mathbf{k} \times \nabla (p - \langle p \rangle) + \rho e \left\langle \frac{m}{Z} \right\rangle^{-1} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}') + \right. \\ \left. + \frac{1}{eB} \left\langle \frac{m}{Z} \right\rangle^{-1} \sum_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha} \mu_{\alpha\beta}}{Z_{\alpha}^2} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left[\left(\frac{\nabla_{\perp} p_{\alpha}}{n_{\alpha}} - \frac{Z_{\alpha}}{Z_{\beta}} \frac{\nabla_{\perp} p_{\beta}}{n_{\beta}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(m_{\alpha} - \frac{Z_{\alpha}}{Z_{\beta}} m_{\beta} \right) \left(\left\langle \frac{m}{Z} \right\rangle^{-1} e \mathbf{E}'_{\perp} - \frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} \langle p \rangle \right) \right] \right\}. \quad (3.6.6) \end{aligned}$$

Здесь

$$\left\langle \frac{m}{Z} \right\rangle = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{Z_{\alpha}} \frac{\rho_{\alpha}}{\rho}, \quad \langle p \rangle = \left(\frac{m}{Z} \right)^{-1} \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{Z_{\alpha}} p_{\alpha}, \quad (3.6.7)$$

при этом электроны из-за малости отношения m_e/m_{β} ($\beta \neq e$) практически не дают вклада в величины $\langle m/Z \rangle$ и $\langle p \rangle$.

Коэффициенты при $\mathbf{E}'_{\perp}$ и $(\mathbf{k} \times \mathbf{E}')$ в (3.6.6) соответствуют поперечным коэффициентам электропроводности в замагниченной плазме $\sigma_{\perp}$ и $\sigma_{\wedge}$. Легко убедиться, что в случае плазмы с двумя сортами ионов эти коэффициенты совпадают с выражениями, следующими из формул (3.4.5) и (3.4.6), если перейти в последних к пределу $\omega_e \tau_0 \gg 1$ и $\omega_1 \tau_{23} \gg 1$.

Обратимся теперь к анализу относительной диффузии компонентов плазмы поперек магнитного поля. В случае, когда инерционными членами в уравнениях движения можно пренебречь ($d\mathbf{u}/dt = 0$), равновесие плазмы как целого описывается уравнением баланса импульса

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (3.6.8)$$

В сочетании с условиями, налагаемыми на $\mathbf{B}$ уравнениями Максвелла, уравнение (3.6.8) определяет так называемые равновесные магнитогидродинамические конфигурации плазмы. Рассмотрим в этих условиях диффузию в цилиндрическом столбе плазмы, полагая магнитное поле B_z направленным по оси цилиндра. Для двухкомпонентной плазмы из электронов и одного сорта ионов из формул (3.6.3) и (3.6.4) с учетом квазинейтральности плазмы следует что перенос электронов и ионов в радиальном направлении происходит с одной и той же скоростью

$$u_{er} = u_{ir} = \frac{1}{\sigma_0 B^2} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (3.6.9)$$

называемой иногда «скоростью просачивания» плазмы [14].

Для плазмы с двумя сортами ионов оценка радиального переноса ионов по формуле (3.6.4) показывает, что их скорости оказываются в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз больше чем скорость (3.6.9) для простой плазмы. В результате за время, заметно меньшее характерного времени просачивания, в плазме устанавливается равновесное распределение плотностей ионов различного сорта по радиусу, которое можно найти, приравняв нулю радиальные составляющие скорости ионов и радиальную плотность тока.

Для радиальных скоростей ионов сортов i и I , пренебрегая вкладом электрон-ионных столкновений в выражениях (3.6.4), имеем

$$Z_i n_i w_{ir} = -Z_I n_I w_{Ir} = \frac{\mu_{iI} \tau_{iI}}{Z_i B^2} \left(\frac{\partial p_i}{\partial r} - \frac{Z_i n_i}{Z_I n_I} \frac{\partial p_I}{\partial r} \right). \quad (3.6.10)$$

Приравнивание нулю этих выражений приводит к известному результату [14, 15],

$$\frac{n_I}{n_i} = A n_i^{\frac{Z_I}{Z_i} - 1}, \quad A = \text{const}, \quad (3.6.11)$$

из которого следует, что ионы с зарядом более высокой кратности концентрируются в области большей плотности. Обобщение этого результата, учитывающее различные зарядовые состояния ионов каждого сорта и влияние радиального градиента температуры в плазме, будет дано в гл. 9.

Глава 4

МЕТОД ГРЭДА

4.1. Разложение функции распределения

Рассмотренное в предыдущей главе приближение к функции распределения f_α в виде (3.1.2) представляет собой частный случай более общего разложения функции распределения в ряд по ортогональным тензорным полиномам от скорости частиц. Использование таких разложений составляет существенную особенность так называемых моментных методов решения кинетического уравнения, в которых отыскание функции $f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t)$ или соответствующих ей моментов сводится к решению бесконечной системы уравнений для коэффициентов разложения [1–3]. Структура самого разложения и тип полиномов однозначно определяются при этом выбором весовой функции или функции распределения нулевого приближения $f_\alpha^{(0)}$ [4]. Разумеется, при практической реализации метода моментов приходится обрывать соответствующие ряды и ограничиваться конечным числом членов разложения.

При анализе слабо-неравновесных состояний газа или плазмы естественно в качестве функции распределения нулевого приближения выбирать локальное максвелловское распределение. Записывая его в декартовой системе координат и образуя затем ряд полиномов из упорядоченного полного ряда одночленов, $1, \xi_r, \xi_r \xi_s, \dots$, где $\boldsymbol{\xi} = (m/kT)^{1/2} \mathbf{c}$ — безразмерная скорость (для простоты мы пока опускаем индекс компонента смеси α), легко обнаружить [4], что применение процедуры ортогонализации к этим членам ряда с весовой функцией $\omega(|\boldsymbol{\xi}|) = (2\pi)^{-3/2} \exp(-\xi^2/2)$ приводит к появлению в разложении

тензорных полиномов Эрмита, определяемых как

$$H_{r_1 \dots r_n}^n(\xi) = (-1)^n \exp\left(\frac{\xi^2}{2}\right) \frac{\partial^n \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)}{\partial \xi_{r_1} \dots \partial \xi_{r_n}}. \quad (4.1.1)$$

Разложение функции распределения в ряд по полиномам $H_{r_1 \dots r_n}^n(\xi)$ можно тогда представить в виде

$$f(\xi, \mathbf{r}, t) = f^{(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_{r_1 \dots r_n}(\mathbf{r}, t) H_{r_1 \dots r_n}^n(\xi), \quad (4.1.2)$$

$$f^{(0)} = n \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} \omega(\xi) = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \quad (4.1.3)$$

где полиномы Эрмита удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\int \omega(\xi) H_{r_1 \dots r_n}^n(\xi) H_{s_1 \dots s_m}^m(\xi) d\xi = 0, \quad m \neq n; \quad (4.1.4)$$

$$\int \omega(\xi) H_{r_1 \dots r_n}^n(\xi) H_{s_1 \dots s_m}^m(\xi) d\xi = \delta_{rs}^{(n)}, \quad m = n.$$

Здесь $\delta_{rs}^{(1)} = \delta_{rs}$, $\delta_{rs}^{(2)} = \delta_{r_1 s_1} \delta_{r_2 s_2} + \delta_{r_1 s_2} \delta_{r_2 s_1} + \delta_{r_1 r_2} \delta_{s_1 s_2} + \dots$ и т. д.

Компоненты тензора $\delta^{(n)}$ содержат $(2n)!/2^n n!$ членов, которые представляют собой все возможные, но различные произведения единичных тензоров второго ранга (символов Кронекера), получающиеся при перестановке $2n$ индексов (каждое произведение входит один раз). Поэтому полиномы $H_{r_1 \dots r_n}^n$ и $H_{s_1 \dots s_m}^m$ ортогональны, если индексы $r_1 \dots r_n$ не являются перестановкой индексов $s_1 \dots s_m$.

Заметим, что первые несколько полиномов имеют вид

$$\begin{aligned} H^0 &= 1, \quad H_r^1 = \xi_r, \quad H_{rs}^2 = \xi_r \xi_s - \delta_{rs}, \\ H_{rst}^3 &= \xi_r \xi_s \xi_t - (\xi_r \delta_{st} + \xi_s \delta_{rt} + \xi_t \delta_{rs}). \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Используя условия ортогональности (4.1.4), легко получить соотношение, связывающее коэффициенты разложения $a_{r_1 \dots r_n}$ с моментами функции распределения,

$$n a_{r_1 \dots r_n}^n(\mathbf{r}, t) = \int H_{r_1 \dots r_n}^n(\xi) f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{c}. \quad (4.1.6)$$

Разложение f (4.1.2) по тензорным полиномам Эрмита было предложено впервые Грэдом [1, 2]. Некоторое видоизменение первоначальной

схемы Грэда, позволяющее, в частности, более наглядно проследить связь его разложений с разложениями, применяемыми в теории Чепмена–Энскога–Барнетта [5, 6], заключается в использовании вместо полиномов $H_{r_1 \dots r_n}^n(\xi)$ неприводимых полиномов Эрмита $H_{r_1 \dots r_n}^{mn}(\xi)$.

Введение этих полиномов легко обосновывается, если для функции распределения нулевого приближения использовать переменные, записываемые не в декартовой, а в сферической системе координат (ξ, θ, φ) [7]. Применение процедуры ортогонализации по отношению к ряду ξ^m , ξ^{m+2} , ξ^{m+4} ($0 \leq m \leq \infty$) с гауссовой весовой функцией относительно переменной $\xi^2/2$ приводит к появлению в разложении полиномов $L_m^n(\xi^2/2)$, которые простым образом связаны с полиномами Сонина $S_{m+1/2}^n(u^2)$, используемыми в теории Чепмена–Энскога–Барнетта [5, 6]:

$$L_m^n(\xi^2/2) = (-2)^n n! S_{m+1/2}^n(\xi^2/2),$$

где

$$S_{m+1/2}^n(u^2) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-u^2)^p (m+n+1/2)!}{p! (n-p)! (m+p+1/2)!}. \quad (4.1.7)$$

В частности, при любых m

$$S_{m+1/2}^0(u^2) = 1, \quad S_{m+1/2}^1(u^2) = m + \frac{3}{2} - u^2.$$

Ортогональность ряда на единичной сфере с весовой функцией $\sin \theta$ по θ и единичной весовой функцией по φ генерирует в разложении тензорные сферические гармоники $\Upsilon_m^k(u, \theta, \varphi)$, представляющие собой произведение u^m на обычные сферические гармоники:

$$\Upsilon_m^k(u, \theta, \varphi) = u^m (-1)^m \frac{(\sin \theta)^k}{2^m m!} \frac{d^{m+k} (\sin \theta)^{2m}}{d(\cos \theta)^{m+k}} \exp(ik\varphi).$$

Естественно, что разложения в декартовой и сферической системе координат должны быть полностью эквивалентными. Фактически это соответствует тому, что тензорный полином Эрмита любого порядка может быть представлен в виде линейной комбинации неприводимых полиномов $H_{r_1 \dots r_m}^{mn}(\xi)$, которые есть просто произведение полиномов $L_m^n(\xi^2/2)$ на неприводимые гармонические полиномы $P_{r_1 \dots r_m}^{(m)}(\xi)$ или [2, 7]

$$H^{mn}(\xi) = (-2)^n n! S_{m+1/2}^n(\xi^2/2) P^{(m)}(\xi). \quad (4.1.8)$$

Заметим, что тензор $P^{(m)}(\boldsymbol{\xi})$ эквивалентен $2m + 1$ линейно независимым функциям с одинаковыми величинами m [8]. Первые несколько гармонических полиномов имеют вид [7]

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= 1, \quad P_r^{(1)} = \xi_r, \quad P_{rs}^{(2)} = \xi_r \xi_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} \xi^2, \\ P_{rst}^{(3)} &= \xi_r \xi_s \xi_t - \frac{1}{5} \xi^2 (\xi_r \delta_{st} + \xi_s \delta_{rt} + \xi_t \delta_{rs}). \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Обратимся теперь к многокомпонентной плазме. Используем в качестве нулевого приближения локальное максвелловское распределение, записанное при температуре компонента T_α и сдвинутое относительно среднемассовой скорости $\mathbf{u}$. Тогда разложение для $f_\alpha(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \mathbf{r}, t)$ с учетом разбиения тензора на его неприводимые компоненты можно представить в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{mn} a_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\mathbf{r}, t) H_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\boldsymbol{\xi}_\alpha), \quad (4.1.10)$$

где

$$f_\alpha^{(0)} = n_\alpha \left(\frac{\gamma_\alpha}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\xi_\alpha^2}{2} \right), \quad \boldsymbol{\xi}_\alpha = \gamma_\alpha^{1/2} \mathbf{c}_\alpha, \quad \gamma_\alpha = \frac{m_\alpha}{kT_\alpha}. \quad (4.1.11)$$

Напомним, что собственная скорость частиц определена здесь как $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — средне-массовая скорость смеси. Нормировочный множитель σ_{mn} имеет вид

$$\sigma_{mn} = \frac{(2m+1)!(m+n)!}{n!(m!)^2(2m+2n+1)!}.$$

Его появление в разложении (4.1.10) связано с тем, что во внутреннее произведение $a_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn} H_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\boldsymbol{\xi}_\alpha)$ неявно входят свертки тензоров.

Коэффициенты разложения (4.1.10) в соответствии с условиями ортогональности для полиномов определяются соотношениями

$$n_\alpha a_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn} = \int H_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\boldsymbol{\xi}_\alpha) f_\alpha d\mathbf{c}. \quad (4.1.12)$$

Система уравнений для коэффициентов $n_\alpha a_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}$ строится умножением кинетического уравнения (1.2.19) на полиномы $H_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\boldsymbol{\xi}_\alpha)$ с последующим интегрированием по скоростям частиц. Фактически эти уравнения совпадают с уравнениями переноса (2.1.9), в которых вместо ψ_α должны фигурировать полиномы $H_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\boldsymbol{\xi}_\alpha)$. Уравнения для коэффициентов $n_\alpha a_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}$ образуют бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений, поскольку в каждое из уравнений

k -го порядка входят коэффициенты $k + 1$ -го и $k - 1$ -го порядков. Следующий шаг состоит в обрыве цепочки уравнений с тем, чтобы сделать любое заданное число уравнений разрешимым, т.е. чтобы число неизвестных соответствовало числу уравнений. Именно на этом этапе проявляется основное различие между результатами, получаемыми с помощью канонического метода Чепмена–Энскога и метода Грэда.

Результаты первого из них следуют из уравнений моментов, если применить по отношению к ним некоторую итерационную процедуру, использующую в качестве малого параметра так называемое число Кнудсена, равное по порядку величины отношению средней длины свободного пробега частиц λ к характерному размеру задачи L , либо отношению среднего времени между столкновениями τ к характерному времени задачи τ_L . При этом все коэффициенты (моменты) более высокого порядка выражаются как функции низших моментов ρ_α , $\mathbf{u}$, T_α и их пространственных производных.

В методе Грэда уравнения для коэффициентов обрываются с помощью допущения, что для любой данной системы уравнений k -го порядка функция распределения может быть аппроксимирована рядом, в котором коэффициенты более высокого чем k -го порядка полагаются равными нулю, что и позволяет сделать систему уравнений замкнутой. Очевидно поэтому, что различие между результатами должно исчезать, если мы рассматриваем состояние газа (плазмы), в котором макроскопические параметры слабо меняются на расстояниях порядка λ и за времена порядка τ .

Вместе с тем, для некоторых типов течений газа (плазмы) даже в этом пределе существуют особенности и различия в результатах двух этих подходов, которые будут рассмотрены нами в гл. 5.

4.2. Приближение $13N$ моментов

Уравнения сохранения, полученные в предыдущей главе, содержат помимо переменных ρ_α , $\mathbf{u}$, T_α моменты более высокого порядка $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{q}_\alpha$. Поскольку тензор $\pi_{\alpha rs}$ симметричен и след его равен нулю, он определяется пятью независимыми компонентами. Общее число переменных, определяющих состояние газовой смеси (плазмы) в этом случае равно $13N$ (N — число компонентов плазмы) [9–11].

Используя явные выражения для первых нескольких полиномов,

$$H^{00} = 1, \quad H^{01} = \xi^2 - 3,$$

$$H_r^{10} = \xi_r, \quad H_{rs}^{20} = \xi_r \xi_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} \xi^2,$$

$$H_r^{11} = \xi_r (\xi^2 - 5), \quad (4.2.1)$$

имеем разложение вида

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} \left[a_\alpha^{00} + \frac{1}{6} a_\alpha^{01} (\xi^2 - 3) + a_{\alpha r}^{10} \xi_r + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} a_{\alpha rs}^{20} \left(\xi_r \xi_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} \xi^2 \right) + \frac{1}{10} a_{\alpha r}^{11} \xi_r (\xi^2 - 5) \right]. \quad (4.2.2)$$

Выразим коэффициенты разложения через моменты функции распределения с помощью (4.1.12):

$$a_\alpha^{00} = 1, \quad a_\alpha^{01} = 0, \quad a_{\alpha r}^{10} = \gamma_\alpha^{1/2} w_{\alpha r}, \quad a_{\alpha rs}^{20} = \pi_{\alpha rs} / p_\alpha, \\ a_{\alpha r}^{11} = 2\gamma_\alpha^{1/2} h_{\alpha r} / p_\alpha, \quad (4.2.3)$$

где

$$\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha - \frac{5}{2} p_\alpha \mathbf{w}_\alpha \quad (4.2.4)$$

— приведенный поток тепла частиц сорта α .

В результате, ограничиваясь в разложении только этими коэффициентами, связанными с макроскопическими величинами, имеющими явный физический смысл, для функции распределения в приближении $13N$ моментов имеем [9–11]

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} \left[1 + \gamma_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha + \frac{1}{2} \gamma_\alpha \frac{\pi_{\alpha rs}}{p_\alpha} \left(c_{\alpha r} c_{\alpha s} - \frac{1}{3} \delta_{rs} c_\alpha^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \gamma_\alpha \frac{\mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha}{p_\alpha} \left(\gamma_\alpha c_\alpha^2 - 5 \right) \right]. \quad (4.2.5)$$

Соответствующая этому приближению замкнутая система уравнений включает уравнения для параметров ρ_α , $\mathbf{u}$, T_α , которые содержатся в функции распределения нулевого приближения (весовой функции), а также уравнения для коэффициентов a_r^{11} , a_{rs}^{20} и a_r^{11} или для величин $\mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_\alpha$. Уравнения для a_r^{11} , a_{rs}^{20} и a_r^{11} следуют из общего уравнения переноса (2.1.9), если подставить в него $\psi_\alpha = H_{\alpha r}^{10}$, $H_{\alpha rs}^{20}$ и $H_{\alpha r}^{11}$, а моменты более высокого порядка, появляющиеся в уравнениях, выразить через принятую совокупность $13N$ моментов с помощью (4.2.2).

В ряде случаев более удобно иметь дело не с уравнениями для коэффициентов a_α^{mn} , а с уравнениями для самих моментов функции распределения. Введем с этой целью полиномы $G_\alpha^{mn}(\mathbf{c}_\alpha, \gamma_\alpha)$, связанные с $H_\alpha^{mn}(\boldsymbol{\xi}_\alpha)$ соотношением

$$G_\alpha^{mn}(\mathbf{c}_\alpha, \gamma_\alpha) = 2^{-n} m_\alpha \gamma_\alpha^{-(n+\frac{m}{2})} H_\alpha^{mn}(\gamma_\alpha^{1/2} \mathbf{c}_\alpha), \quad (4.2.6)$$

а также коэффициенты $n_\alpha b_\alpha^{mn}$, определяемые как

$$n_\alpha b_\alpha^{mn} = \int G_\alpha^{mn} f_\alpha d\mathbf{c}. \quad (4.2.7)$$

В рассматриваемом нами приближении

$$\begin{aligned} G_\alpha^{00} &= m_\alpha, & G_\alpha^{10} &= m_\alpha c_{\alpha r}, & G_\alpha^{01} &= \frac{m_\alpha}{2} \left(c_\alpha^2 - \frac{3}{\gamma_\alpha} \right), \\ G_\alpha^{20} &= m_\alpha \left(c_{\alpha r} c_{\alpha s} - \frac{1}{3} \delta_{rs} c_\alpha^2 \right), & G_\alpha^{11} &= \frac{m_\alpha}{2} c_{\alpha r} \left(c_\alpha^2 - \frac{5}{\gamma_\alpha} \right) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} n_\alpha b_\alpha^{00} &= \rho_\alpha, & n_\alpha b_\alpha^{01} &= 0, & n_\alpha b_\alpha^{10} &= \rho_\alpha w_{\alpha r}, \\ n_\alpha b_\alpha^{20} &= \pi_{\alpha rs}, & n_\alpha b_\alpha^{11} &= h_{\alpha r}. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Вывод общей бесконечной системы уравнений для коэффициентов $n_\alpha b_\alpha^{mn}$, следующей из (2.1.9) при подстановке $\psi_\alpha = G_\alpha^{mn}(\mathbf{c}_\alpha, \gamma_\alpha)$, содержится в приложении 1.

Соответствующая замкнутая система уравнений в приближении $13N$ моментов, включающая наряду с уравнениями для $\mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_\alpha$ также уравнения для основных термодинамических переменных ρ_α , $\mathbf{u}$, T_α имеет следующий вид [9–13]:

$$\frac{d\rho_\alpha}{dt} + \rho_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0, \quad (4.2.10)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p + \nabla \hat{\pi} - \sum_\alpha n_\alpha \mathbf{F}_\alpha = 0, \quad (4.2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} n_\alpha k \frac{dT_\alpha}{dt} + p_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha + \pi_{\alpha rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} - \\ - \frac{3}{2} k T_\alpha \nabla \cdot n_\alpha \mathbf{w}_\alpha - n_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha^* = R_\alpha^{01}, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_\alpha w_{\alpha r}}{dt} + \rho_\alpha w_{\alpha s} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \rho_\alpha w_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial x_r} + \\ + \frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} - n_\alpha \langle F_{\alpha r}^* \rangle = R_{\alpha r}^{10}, \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_{\alpha rs}}{dt} + \pi_{\alpha rs} \nabla \cdot \mathbf{u} + 2p_{\alpha} \varepsilon_{rs} + 2 \left\{ \pi_{\alpha r\ell} \frac{\partial u_s}{\partial x_{\ell}} \right\} + \frac{4}{5} \left\{ \frac{\partial q_{\alpha r}}{\partial x_s} \right\} - \\ - 2 \{ n_{\alpha} w_{\alpha r} \langle F_{\alpha s}^* \rangle \} - 2 \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \{ [\hat{\pi}_{\alpha} \times \mathbf{B}]_{rs} \} = R_{\alpha rs}^{20}, \quad (4.2.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_{\alpha r}}{dt} + \frac{7}{5} h_{\alpha s} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{2}{5} h_{\alpha s} \frac{\partial u_s}{\partial x_r} + \frac{7}{5} h_{\alpha r} \nabla \cdot \mathbf{u} + \\ + \frac{5}{3} p_{\alpha} w_{\alpha r} \nabla \cdot \mathbf{u} + 2p_{\alpha} w_{\alpha s} \varepsilon_{rs} + \frac{kT_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} + \frac{7}{2} \frac{k}{m_{\alpha}} \pi_{\alpha rs} \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x_s} + \\ + \frac{5}{2} \frac{k}{m_{\alpha}} p_{\alpha} \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x_r} + \frac{5}{2} \frac{p_{\alpha}}{T_{\alpha}} w_{\alpha r} \frac{dT_{\alpha}}{dt} - \frac{1}{m_{\alpha}} \pi_{\alpha rs} \langle F_{\alpha s}^* \rangle - \\ - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{h}_{\alpha} \times \mathbf{B})_r = R_{\alpha r}^{11}. \quad (4.2.15) \end{aligned}$$

Здесь используются сокращения

$$\begin{aligned} \{K_r L_s\} = \frac{1}{2} (K_r L_s + K_s L_r) - \frac{1}{3} K_{\ell} L_{\ell} \delta_{rs}, \\ \varepsilon_{rs} = \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial x_s} \right\}, \quad [\hat{\pi}_{\alpha} \times \mathbf{B}]_{rs} = \pi_{\alpha \ell r} \varepsilon_{s\ell m} B_m \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

($\varepsilon_{s\ell m}$ — антисимметричный единичный тензор третьего ранга или перестановочный тензор).

Напомним, что по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В правых частях (4.2.11)–(4.2.14) фигурируют так называемые «моменты относительно интеграла столкновений»:

$$\begin{aligned} R_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn} = \sum_{\beta} \iint [G_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\mathbf{c}'_{\alpha}) - G_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\mathbf{c}_{\alpha})] \times \\ \times f_{\alpha} f_{1\beta} \sigma_{\alpha\beta}(g, \chi) d\Omega d\mathbf{c}_{\alpha} d\mathbf{c}_{1\beta}. \quad (4.2.17) \end{aligned}$$

Заметим, что (4.2.11) и (4.2.12) представляют собой фактически уравнения сохранения импульса и энергии для α -компонента смеси, уже рассматривавшиеся ранее (уравнения (2.2.3) и (2.2.4)). При этом $R_{\alpha r}^{10} = R_{\alpha r}$, $R_{\alpha}^{01} = Q_{\alpha}$.

Величины $R_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}$ можно вычислить с помощью тех же приемов, которые были использованы при расчете $R_{\alpha r}$ и Q_{α} в предыдущей главе. Переходя к переменным в системе центра масс соударяющихся частиц (1.2.7) и используя связь между относительными скоростями

до и после столкновения (1.2.9), можно произвести интегрирование по углам. Затем в (4.2.17) подставляются выражения для f_α и f_β в виде разложений (4.2.5), в которых осуществляется переход к новым переменным $\mathbf{X}$ и $\mathbf{g}$ (3.1.7). Пренебрегая при вычислении квадратичными по моментам членами, после интегрирования по $\mathbf{X}$ приходим к следующим общим выражениям [11–13]:

$$R_{\alpha r} = \sum_{\beta} G_{\alpha\beta}^{(1)} (w_{\alpha r} - w_{\beta r}) + \sum_{\beta} \gamma_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^{(2)} \left(\frac{h_{\alpha r}}{\gamma_{\alpha} p_{\alpha}} - \frac{h_{\beta r}}{\gamma_{\beta} p_{\beta}} \right), \quad (4.2.18)$$

$$R_{\alpha}^{01} = \sum_{\beta} G_{\alpha\beta}^{(1)} \frac{3k}{m_{\alpha} + m_{\beta}} (T_{\alpha} - T_{\beta}), \quad (4.2.19)$$

$$R_{\alpha rs}^{20} = \sum_{\beta} \frac{1}{\gamma_{\alpha} + \gamma_{\beta}} \left(G_{\alpha\beta}^{(3)} \frac{\pi_{\alpha rs}}{p_{\alpha}} + G_{\alpha\beta}^{(4)} \frac{\pi_{\beta rs}}{p_{\beta}} \right), \quad (4.2.20)$$

$$R_{\alpha r}^{11} = \frac{1}{\gamma_{\alpha}} \sum \left[G_{\alpha\beta}^{(5)} \frac{h_{\alpha r}}{p_{\alpha}} + G_{\alpha\beta}^{(6)} \frac{h_{\beta r}}{p_{\beta}} + \frac{5}{2} \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\gamma_{\alpha}} G_{\alpha\beta}^{(7)} (w_{\alpha r} - w_{\beta r}) + \right. \\ \left. + 5 \theta_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^{(1)} w_{\alpha r} \right]. \quad (4.2.21)$$

Коэффициенты $G_{\alpha\beta}^{(n)}$ оказываются при этом линейными комбинациями величин $\Omega_{\alpha\beta}^{lr}$, которые представляют собой обобщение известных интегралов Чепмена–Каулинга [5] на случай различных температур компонентов смеси.

Выражения для этих коэффициентов имеют следующий вид [13]:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(1)} &= B_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad G_{\alpha\beta}^{(2)} = B_{\alpha\beta}^{(21)}, \\ G_{\alpha\beta}^{(3)} &= B_{\alpha\beta}^{(3)} - \frac{\gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha}} \theta_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad G_{\alpha\beta}^{(4)} = B_{\alpha\beta}^{(4)} - \theta_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}^{(1)}, \\ G_{\alpha\beta}^{(5)} &= B_{\alpha\beta}^{(5)} + \frac{1}{2} \frac{\gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha}} \theta_{\alpha\beta} \left(C_{\alpha\beta}^{(2)} - C_{\alpha\beta}^{(3)} - 2 \frac{\gamma_{\alpha}}{\gamma_{\beta}} C_{\alpha\beta}^{(4)} \right) - \\ &\quad - \frac{\gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha}} \theta_{\alpha\beta}^2 \left(C_{\alpha\beta}^{(2)} - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}^{(3)} \right), \quad (4.2.22) \\ G_{\alpha\beta}^{(6)} &= B_{\alpha\beta}^{(6)} - \frac{1}{2} \theta_{\alpha\beta} \left(C_{\alpha\beta}^{(2)} - C_{\alpha\beta}^{(3)} + 2 C_{\alpha\beta}^{(4)} \right) + \\ &\quad + \theta_{\alpha\beta}^2 \left(C_{\alpha\beta}^{(2)} - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}^{(3)} \right), \\ G_{\alpha\beta}^{(7)} &= B_{\alpha\beta}^{(7)} + \theta_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}^{(5)} - \theta_{\alpha\beta}^2 C_{\alpha\beta}^{(6)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_{\alpha\beta}^{(1)} &= -\frac{16}{3} \mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \Omega_{\alpha\beta}^{11}, \\
 B_{\alpha\beta}^{(2)} &= -\frac{16}{3} \mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left(\frac{2}{5} \Omega_{\alpha\beta}^{12} - \Omega_{\alpha\beta}^{11} \right), \\
 B_{\alpha\beta}^{(3)} &= -\frac{16}{5} \mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left(\frac{\gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha}} \Omega_{\alpha\beta}^{12} + \frac{10}{3} \Omega_{\alpha\beta}^{11} \right), \\
 B_{\alpha\beta}^{(4)} &= -\frac{16}{5} \mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left(\Omega_{\alpha\beta}^{22} - \frac{10}{3} \Omega_{\alpha\beta}^{11} \right), \\
 B_{\alpha\beta}^{(5)} &= -\frac{64}{15} \mu_{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left[\Omega_{\alpha\beta}^{22} + \left(\frac{15}{4} \frac{\gamma_{\alpha}}{\gamma_{\beta}} + \frac{25}{8} \frac{\gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha}} \right) \Omega_{\alpha\beta}^{11} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha}} \left(5\Omega_{\alpha\beta}^{12} - \Omega_{\alpha\beta}^{13} \right) \right], \\
 B_{\alpha\beta}^{(6)} &= -\frac{64}{15} \mu_{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left[\Omega_{\alpha\beta}^{22} - \frac{55}{8} \Omega_{\alpha\beta}^{11} + \frac{1}{2} \left(5\Omega_{\alpha\beta}^{12} - \Omega_{\alpha\beta}^{13} \right) \right]; \\
 C_{\alpha\beta}^{(1)} &= -\frac{16}{5} \mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left(\Omega_{\alpha\beta}^{22} - \frac{4}{3} \Omega_{\alpha\beta}^{12} \right), \\
 C_{\alpha\beta}^{(2)} &= -\frac{64}{15} \mu_{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left(5\Omega_{\alpha\beta}^{12} - 2\Omega_{\alpha\beta}^{13} \right), \\
 C_{\alpha\beta}^{(3)} &= -\frac{64}{15} \mu_{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left(5\Omega_{\alpha\beta}^{22} - 2\Omega_{\alpha\beta}^{23} \right), \\
 C_{\alpha\beta}^{(4)} &= -\frac{64}{15} \mu_{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left(\Omega_{\alpha\beta}^{22} - \frac{11}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{12} + \frac{25}{4} \Omega_{\alpha\beta}^{11} \right), \\
 C_{\alpha\beta}^{(5)} &= -\frac{64}{15} \mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left(\Omega_{\alpha\beta}^{22} - \Omega_{\alpha\beta}^{12} - \frac{5}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{11} \right), \\
 C_{\alpha\beta}^{(5)} &= -\frac{64}{15} \mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left(\Omega_{\alpha\beta}^{22} - 2\Omega_{\alpha\beta}^{12} \right).
 \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Здесь

$$\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r} = \left(\frac{2\pi}{\gamma_{\alpha\beta}} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \zeta^{2r+3} e^{-\zeta^2} (1 - \cos^{\ell} \chi) \sigma_{\alpha\beta}(\zeta, \chi) \sin \chi d\chi d\zeta. \tag{4.2.25}$$

При этом $\zeta = (\gamma_{\alpha\beta}/2)^{1/2} g$, а величины $\varkappa_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\theta_{\alpha\beta}$ определены выражениями

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\gamma_{\alpha} + \gamma_{\beta}}, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha} + \gamma_{\beta}}, \quad \theta_{\alpha\beta} = \frac{1 - \frac{T_{\beta}}{T_{\alpha}}}{1 + \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}}}. \quad (4.2.26)$$

4.3. Линейные соотношения переноса

Уравнения предыдущего параграфа образуют систему квазилинейных (т.е. линейных относительно производных) дифференциальных уравнений первого порядка, которые в общем случае необходимо решать с учетом конкретных начальных и граничных условий. Можно, однако, существенно упростить уравнения для определения $\mathbf{w}_{\alpha}$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_{\alpha}$, если предположить, что макроскопические параметры компонентов и плазмы в целом слабо меняются на расстояниях и за времена порядка средних характерных длины и времени свободного пробега молекул, т.е.

$$\lambda/L \ll 1, \quad (4.3.1)$$

$$\tau/\tau_L \ll 1,$$

где L и τ_L — характерные линейный и временной масштабы изменения макроскопических величин. Тогда малость градиентов от основных переменных ρ_{α} , $\mathbf{u}$, T_{α} и малость величин $\gamma_{\alpha}^{1/2} w_{\alpha r}$, $p_{\alpha}^{-1} \pi_{\alpha rs}$ и $\gamma_{\alpha}^{1/2} p_{\alpha}^{-1} h_{\alpha r}$, обусловленная близостью системы к локальному равновесию, позволяют пренебречь произведениями малых (квадратичных по λ/L членов) в уравнениях (4.2.13)–(4.2.15). Заметим теперь, что коэффициенты $G_{\alpha\beta}^{(n)}$ в правых частях этих уравнений имеют тот же порядок величины, что и $G_{\alpha\beta}^{(1)} = B_{\alpha\beta}^{(1)} = -n_{\alpha} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1}$. Тогда в силу второго условия (4.3.1) можно опустить производные от соответствующих моментов по времени в левых частях уравнений по сравнению с правыми. Фактически это означает, что в рассматриваемом нами случае медленного изменения параметров во времени по истечении промежутка времени, равного нескольким временам столкновений в плазме, наступает квазиравновесие, к которому вместо уравнений (4.2.13)–(4.2.15) приближенно применима система уравнений вида [12, 13]

$$\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x_r} + \frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} - n_{\alpha} \langle F_{\alpha r}^* \rangle = R_{\alpha r}^{10}, \quad (4.3.2)$$

$$2p_{\alpha} \varepsilon_{rs} + \frac{4}{5} \left\{ \frac{\partial q_{\alpha r}}{\partial x_s} \right\} - 2 \{ n_{\alpha} w_{\alpha r} \langle F_{\alpha s}^* \rangle \} -$$

$$- 2 \{ \pi_{\alpha \ell r} \varepsilon_{s \ell m} \omega_{\alpha m} \} = R_{\alpha rs}^{20}, \quad (4.3.3)$$

$$\frac{5}{2} \frac{k}{m_\alpha} p_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_r} + \frac{k T_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} - \frac{1}{m_\alpha} \pi_{\alpha rs} \langle F_{\alpha s}^* \rangle - (\mathbf{h}_\alpha \times \boldsymbol{\omega}_\alpha)_r = R_{\alpha r}^{11}. \quad (4.3.4)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_\alpha = \omega_\alpha \mathbf{k}$, где $\omega_\alpha = (e_\alpha/m_\alpha) |\mathbf{B}|$ — циклотронная частота для заряженных частиц сорта α , $\mathbf{k} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$.

Члены вида $\partial \pi_{\alpha rs}/\partial x_s$ и $\partial q_{\alpha r}/\partial x_s$ в ряде случаев также имеют порядок $(\lambda/L)^2$. Однако необходимость в их учете может возникнуть при рассмотрении задач, в которых существенно различными оказываются продольный и поперечный масштабы изменения макроскопических параметров плазмы. Некоторые из таких примеров (в частности, вклад градиента давления в вектор потока тепла, влияние вязкого переноса импульса на диффузию компонентов при установившемся вязком течении смеси) будут рассмотрены в дальнейшем. Что касается членов, зависящих от $\langle F_{\alpha s}^* \rangle$ в уравнениях (4.3.3)–(4.3.4), то их влияние может проявиться лишь в достаточно сильных электрических полях [10]. Если отвлечься пока от этих специфических случаев и опустить соответствующие члены в левых частях (4.3.3)–(4.3.4), то окончательная упрощенная система уравнений для $\mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_\alpha$ запишется в виде

$$\begin{aligned} & \left(\nabla p_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \nabla p \right) - \left(n_\alpha X_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \sum_\alpha n_\alpha X_\alpha \right) - n_\alpha e_\alpha \mathbf{E} - \\ & - \rho_\alpha (\mathbf{w}_\alpha \times \boldsymbol{\omega}_\alpha) + \frac{\rho_\alpha}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \\ & = \sum_\beta G_{\alpha\beta}^{(1)} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) + \sum_\beta \gamma_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^{(2)} \left(\frac{\mathbf{h}_\alpha}{\gamma_\alpha p_\alpha} - \frac{\mathbf{h}_\beta}{\gamma_\beta p_\beta} \right), \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} 2p_\alpha \varepsilon_{rs} - 2 \{ \pi_{\alpha \ell r} \varepsilon_{s \ell m} \omega_{\alpha m} \} = \\ = \sum_\beta \frac{1}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta} \left(G_{\alpha\beta}^{(3)} \frac{\pi_{\alpha rs}}{p_\alpha} + G_{\alpha\beta}^{(4)} \frac{\pi_{\beta rs}}{p_\beta} \right), \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \frac{k}{m_\alpha} p_\alpha \nabla T_\alpha - (\mathbf{h}_\alpha \times \boldsymbol{\omega}_\alpha) = \frac{1}{\gamma_\alpha} \sum \left[G_{\alpha\beta}^{(5)} \frac{\mathbf{h}_\alpha}{p_\alpha} + G_{\alpha\beta}^{(6)} \frac{\mathbf{h}_\beta}{p_\beta} + \right. \\ \left. + \frac{5}{2} \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\gamma_\alpha} G_{\alpha\beta}^{(7)} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) + 5\theta_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^{(1)} \mathbf{w}_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

4.4. Однотемпературная плазма

Полезно рассмотреть случаи, когда система уравнений (4.3.5)–(4.3.7) допускает дальнейшие упрощения. Рассмотрим, в частности, изотермическую многокомпонентную плазму, в которой $T_\alpha = T$

для всех α . В этом случае благодаря условию $\theta_{\alpha\beta} = 0$ заметно упрощаются коэффициенты $G_{\alpha\beta}^{(n)}$ в правых частях этих уравнений и может быть опущен последний член в правой части (4.3.7). В результате система уравнений для определения $\mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_\alpha$ запишется в виде [11, 12]

$$\begin{aligned} p\mathbf{d}_\alpha - \rho_\alpha (\mathbf{w}_\alpha \times \boldsymbol{\omega}_\alpha) + \frac{\rho_\alpha}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \\ = \sum_\beta B_{\alpha\beta}^{(1)} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) + \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}^{(2)} \left(\frac{\mathbf{h}_\alpha}{m_\alpha p_\alpha} - \frac{\mathbf{h}_\beta}{m_\beta p_\beta} \right), \quad (4.4.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2p_\alpha \varepsilon_{rs} - 2 \{ \pi_{\alpha lr} \varepsilon_{slm} \omega_\alpha m \} = \\ = \sum_\beta \frac{kT}{m_\alpha + m_\beta} \left(B_{\alpha\beta}^{(3)} \frac{\pi_{\alpha rs}}{p_\alpha} + B_{\alpha\beta}^{(4)} \frac{\pi_{\beta rs}}{p_\beta} \right), \quad (4.4.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \frac{k}{m_\alpha} p_\alpha \nabla T_\alpha - (\mathbf{h}_\alpha \times \boldsymbol{\omega}_\alpha) = \\ = \frac{kT}{m_\alpha} \sum \left[B_{\alpha\beta}^{(5)} \frac{\mathbf{h}_\alpha}{p_\alpha} + B_{\alpha\beta}^{(6)} \frac{\mathbf{h}_\beta}{p_\beta} + \frac{5}{2} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} B_{\alpha\beta}^{(2)} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) \right]. \quad (4.4.3) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_\alpha = \nabla y_\alpha + \left(y_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \right) \nabla \ln p - \\ - \frac{1}{p} \left(n_\alpha \mathbf{X}_\alpha - \sum_\alpha n_\alpha \mathbf{X}_\alpha \right) - \frac{1}{p} n_\alpha e_\alpha \mathbf{E}', \quad (4.4.4) \end{aligned}$$

где $y_\alpha = n_\alpha/n$ — относительная концентрация частиц сорта α . В выражениях для $B_{\alpha\beta}^{(n)}$ (4.2.23) следует при этом положить $\gamma_\beta/\gamma_\alpha = m_\beta/m_\alpha$ и $\varkappa_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}/(m_\alpha + m_\beta)$.

Заметим, что предположение об изотермичности, т.е. строгом равенстве температур компонентов плазмы, при наличии возмущающих равновесное состояние градиентов термодинамических величин и полей является, строго говоря, не вполне корректным. На самом деле, при формальном описании такой смеси в рамках метода моментов в качестве нулевого приближения к функции распределения нужно использовать максвелловское распределение, записываемое при температуре T вместо T_α , где T — общая температура смеси, определяемая соотношением $nT = \sum_\alpha n_\alpha T_\alpha$.

При этом разложение функции распределения для компонента α смеси в приближении $13N$ моментов принимает вид

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)}(T) \left[1 + \frac{1}{6} a_\alpha^{01} (\xi^2 - 3) + a_{\alpha r}^{10} \xi_r + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} a_{\alpha rs}^{20} \left(\xi_r \xi_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} \xi^2 \right) + \frac{1}{10} a_{\alpha r}^{11} \xi_r (\xi^2 - 5) \right], \quad (4.4.5)$$

где все коэффициенты при векторных и тензорных полиномах автоматически определяются при температуре T . Вместе с тем, для этого случая $a_\alpha^{01} \neq 0$ и в разложении для f_α появляется дополнительный член вида $(1/6) a_\alpha^{01} (\xi^2 - 3)$, где $a_\alpha^{01} = 3(T_\alpha - T)/T$. Если рассматривать относительную разность температур, наряду с другими коэффициентами разложения, как малый возмущающий параметр, то в приближении, когда мы пренебрегаем квадратичными по моментам членами, присутствие нового члена в разложении скажется только на вычислении величины Q_α в правой части уравнения энергии для компонента плазмы. Фактически величина $Q_\alpha = R_\alpha^{01}$ сохраняет при этом свой прежний вид (4.2.19) с той лишь разницей, что $G_{\alpha\beta}^{(1)} = B_{\alpha\beta}^{(1)}$ определяется при температуре T .

Воспользуемся уравнением энергии для частиц сорта α (2.2.21) и исключим из него величину $dT/dt + (2/3) T \nabla \cdot \mathbf{u}$ с помощью уравнения энергии для плазмы в целом (2.2.18). В результате имеем

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} n_\alpha k \frac{d}{dt} (T_\alpha - T) + k n_\alpha (T_\alpha - T) \nabla \cdot \mathbf{u} + \\ & + (\nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha - \frac{n_\alpha}{n} \nabla \cdot \mathbf{q}) + (\pi_{\alpha rs} - \frac{n_\alpha}{n} \pi_{rs}) \frac{\partial u_r}{\partial x_s} - \\ & - (n_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{X}_\alpha - \frac{n_\alpha}{n} \sum_\alpha n_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{X}_\alpha) - \\ & - (n_\alpha e_\alpha \mathbf{w}_\alpha - \mathbf{j}) \cdot \mathbf{E} - \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \\ & = -\frac{3}{2} k n_\alpha \sum_\beta (\tau_{\alpha\beta}^E)^{-1} (T_\alpha - T_\beta). \quad (4.4.6) \end{aligned}$$

Для компонентов плазмы, массы частиц которых различаются не очень заметно, характерное время обмена энергией $\tau_{\alpha\beta}^E$ имеет порядок характерного среднего времени $\tau_{\alpha\beta}$. Тогда в уравнениях (4.4.5), записанных для частиц этого типа, в силу условия (4.3.1) можно опустить производную $d(T_\alpha - T)/dt$ в левой части по сравнению с правой частью уравнений. Исключая также $d\mathbf{u}/dt$ с помощью уравнения

движения (2.2.17), легко обнаружить, что в отсутствие внешних полей разности температур, определяемые из уравнений (4.4.6), оказываются пропорциональными комбинациям членов, представляющих собой произведения потоков на градиенты термодинамических величин либо дивергенции самих потоков. Поскольку эти члены имеют, как правило, порядок $(\lambda/L)^2$, то в линейном по числу Кнудсена, $Kn = \lambda/L$, приближении предположение о примерно равных температурах тяжелых компонент плазмы оказывается вполне оправданным. Разумеется, это предположение не выполняется для электронов и для частиц с легкой массой, заметно отличающейся от массы остальных атомов либо ионов, поскольку при этом $\tau_{\alpha\beta}^E \gg \tau_{\alpha\beta}$. Для того чтобы изотермическое состояние плазмы могло быть реализовано и в этом случае, необходимо выполнение более жесткого условия, чем второе условие (4.3.1), а именно $\tau_{\alpha\beta}^E \ll \tau_L$.

Использование однотемпературного приближения в теории плазмы не только упрощает вид уравнений, используемых для определения неравновесных параметров $\mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_\alpha$, но и позволяет заметно уменьшить общее число уравнений, необходимых для полного макроскопического описания плазмы. Фактически в этом случае в число определяющих уравнений достаточно включить уравнения сохранения для плазмы в целом, т.е. уравнения для ρ , $\mathbf{u}$ и p , которые можно представить в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p + \nabla \hat{\boldsymbol{\pi}} - \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} - [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = 0,$$

$$\frac{3}{2} \frac{dp}{dt} + \frac{5}{2} p \nabla \cdot \mathbf{u} + \pi_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{X}_{\alpha} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' = 0, \quad (4.4.7)$$

а также уравнения непрерывности для $N - 1$ компонентов и уравнение состояния

$$\frac{dn_{\alpha}}{dt} + n_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = \dot{n}_{\alpha}, \quad (4.4.8)$$

$$p = kT \sum_{\alpha} n_{\alpha}.$$

Входящие в эту систему уравнений диффузионная скорость $\mathbf{w}_{\alpha}$, плотность тока $\mathbf{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$, тензор вязких напряжений $\pi_{rs} = \sum_{\alpha} \pi_{\alpha rs}$ и полный поток тепла $\mathbf{q} = \sum_{\alpha} [\mathbf{h}_{\alpha} + (5/2) p_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}]$ определяются в результате решения алгебраической системы уравнений (4.4.1)–(4.4.3), которую нужно дополнить условием $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0$.

Для того чтобы полностью замкнуть приведенную систему уравнений, к ним необходимо добавить еще уравнения Максвелла, описывающие изменения электрического и магнитного полей:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.4.9)$$

При записи этих уравнений мы пренебрегаем током смещения, что справедливо при рассмотрении достаточно медленных процессов в плазме. Кроме того, поскольку используется условие квазинейтральности ($\rho^e = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} = 0$), из общей системы уравнений исключается уравнение Пуассона $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho^e$, в которое явно входит объемный заряд. Фактически это уравнение нужно только для определения отклонения плазмы от квазинейтральности (по найденному из остальных уравнений системы полю $\mathbf{E}$), которое необходимо учитывать либо вблизи границ плазмы (в слое толщиной порядка радиуса Дебая), либо при анализе высокочастотных колебаний плазмы.

Система уравнений (4.4.7) вместе с уравнениями (4.4.1)–(4.4.3) и уравнениями электродинамики (4.4.9) лежит в основе так называемого магнитогидродинамического описания плазмы [14]. Заметим, что в силу условий (4.3.1) она пригодна в основном для рассмотрения медленных течений плазмы. Возможные дальнейшие упрощения этой системы приводят к тому или иному варианту так называемой магнитной гидродинамики, используемой для описания взаимодействия движущейся плазмы с электромагнитными полями и имеющей широкий круг практических приложений [14–17]. Рассмотрим, например, случай, когда силы неэлектромагнитной природы соответствуют обычной силе тяжести ($\mathbf{X}_{\alpha} = m_{\alpha} \mathbf{g}$). Тогда система уравнений (4.4.7) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p + \nabla \hat{\pi} - \rho \mathbf{g} - (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) &= 0, \\ \frac{3}{2} \frac{dp}{dt} + \frac{5}{2} p \nabla \cdot \mathbf{u} + \pi_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q} - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}') &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Если образование и исчезновение частиц сорта α в единице объема плазмы характеризуется высокими скоростями процесса ($\tau_r \ll \tau_L$), то уравнения непрерывности (4.4.8) для компонентов смеси сведутся к условию $\dot{n}_{\alpha} = 0$. Фактически это означает, что плотности частиц данного сорта могут быть найдены из уравнений локального химического равновесия. В случае ионизации и рекомбинации частиц примером такого уравнения служит известное уравнение Саха [17].

Уравнение состояния принимает при этом вид

$$p = \rho \frac{kT}{\langle m \rangle}, \quad \langle m \rangle = \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha}, \quad (4.4.11)$$

где $\langle m \rangle$ выражается через параметры T и p с помощью уравнений химического равновесия $y_{\alpha} = f(T, p)$. Функциями этих параметров оказываются также коэффициенты $B_{\alpha\beta}^{(n)}$, входящие в правые части уравнений (4.4.1)–(4.4.3). В результате для замыкания системы уравнений (4.4.10) необходимы лишь соотношения для плотности тока $\mathbf{j}$, которое находится из обобщенного закона Ома, и соотношения для π_{rs} и $\mathbf{q}$, связывающие эти потоки с градиентами термодинамических величин и значениями электрического и магнитного полей.

Частные случаи обобщенного закона Ома уже рассматривались нами ранее. Более полная формулировка этого закона с учетом термодиффузии и поправок следующих приближений к электропроводности будет рассмотрена в следующих главах. Предметом дальнейшего обсуждения будут также выражения для тензора вязких напряжений и вектора потока тепла.

4.5. Двухтемпературная плазма

Если к плазме приложено электрическое поле, то оно воздействует, главным образом, на подвижный электронный компонент плазмы. Как уже отмечалось, при столкновении с тяжелыми частицами электроны теряют лишь незначительную долю своей энергии, что при постоянном подводе энергии со стороны поля может привести к заметному отрыву температуры электронов от температуры тяжелых частиц. Для стационарной однородной плазмы порядок величины необходимого для этого поля $\mathbf{E}$ легко оценить, используя соотношение (3.1.24), вытекающее из уравнения сохранения энергии для частиц сорта α . Подставляя в него $\mathbf{j}_e \cong \sigma_0 \mathbf{E} = (n_e e^2 \tau_0 / m_e) \mathbf{E}$, находим, что $(T_e - T)/T$ имеет порядок единицы при величине поля $E = E_p$, определяемой выражением

$$E_p^2 = \frac{3}{2} \frac{m_e kT}{e^2 \tau_0} \sum_{\beta} \delta_{\beta} \tau_{e\beta}^{-1}, \quad (4.5.1)$$

где $\tau_0^{-1} = \sum_{\beta} \tau_{e\beta}^{-1}$ и $\delta_{\beta} = 2m_e/m_{\beta}$ — средняя относительная доля энергии, передаваемая электроном при столкновении с тяжелой частицей сорта β .

При столкновении тяжелых частиц в плазме средняя доля энергии, передаваемая в отдельном столкновении, оказывается того же порядка величины, что и собственная энергия частиц. Благодаря интенсивной передаче энергии в результате столкновений величина поля $\mathbf{E}$,

необходимого для того чтобы обеспечить заметное различие температур тяжелых частиц, оказывается намного большим, чем поле E_p . Именно это обстоятельство позволяет вводить в рассмотрение модель двухтемпературной плазмы, в которой температура тяжелых частиц считается приблизительно одинаковой ($T_\beta \cong T$ при $\beta \neq e$), а температура электронов T_e может заметно отличаться от T . Естественно, что при $E \ll E_p$ температура электронов практически совпадает с общей температурой плазмы, т. е. становятся применимыми уравнения одно-температурного приближения.

Здесь представляется уместным сделать одно замечание. Приведенные выше оценки поля E_p , необходимого для заметного отрыва T_e от T , основаны на уравнении баланса энергии для электронов, правая часть которого вычисляется в предположении, что функция распределения электронов соответствует максвелловскому распределению с температурой T_e . Можно показать, что это предположение хорошо выполняется в случае сильно ионизованной плазмы, если эффективная частота электрон-электронных столкновений удовлетворяет условию [17, 18] $\tau_{ee}^{-1} \gg \sum_{\beta \neq e} \delta_\beta \tau_{e\beta}^{-1}$.

Для слабоионизованной плазмы максвелловская форма функции распределения для электронов с температурой T_e и соответствующее ему выражение для средней передачи энергии при столкновении формально сохраняются лишь в случае, когда эффективная частота столкновений электрона с нейтралом не зависит от скорости ($\nu_{e\beta}(v) = v Q_{e\beta}^{(1)}(v) = \text{const}$). При произвольной зависимости $\nu_{e\beta}(v)$ функция распределения $f_e^{(0)}$ может оказаться существенно немаксвелловской; в частности, для модели твердых упругих шариков, когда $Q_{e\beta}^{(1)}(v) = \text{const}$, при $E \gg E_p$ имеет место распределение Дрювестайна, которое при больших скоростях электронов спадает существенно быстрее, чем максвелловское распределение [18].

Второе замечание относится к случаю, когда в плазме присутствуют не только атомные, но и молекулярные компоненты. При этом средняя доля передаваемой энергии при неупругом столкновении электрона с молекулой может заметно превышать значение $\delta_\beta = 2m_e/m_\beta$, поскольку возникают потери энергии электрона на возбуждение вращательных и колебательных степеней свободы молекул. В такой плазме отрыв T_e от T оказывается при прочих равных условиях заметно меньшим, чем в случае чисто упругих столкновений.

Рассмотрим теперь, как будут выглядеть уравнения для определения $\mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_\alpha$ в случае двухтемпературной плазмы. Что касается левых частей уравнений (4.3.5)–(4.3.7), то для $\alpha \neq e$, поскольку температуры тяжелых частиц предполагаются одинаковыми, их можно записывать так же как в уравнениях однотемпературного приближения (4.4.1)–(4.4.3). Для электронного компонента ($\alpha = e$) целесообразно сохранить запись левых частей в виде (4.3.5)–(4.3.7), так как для

этого случая $T_\alpha = T_e$ и $p_\alpha = n_e k T_e$. Обращаясь к коэффициентам в правых частях уравнений, легко заметить, что если выполнены условия $\gamma_e \ll \gamma_\beta$ (или $m_e T_\beta / m_\beta T_e \ll 1$), то $\gamma_{e\beta} \cong \gamma_e$. Кроме того, в выражениях для $G_{\alpha\beta}^{(n)}$ можно пренебречь членами порядка $\theta_{e\beta} = (m_e / m_\beta) [1 - (T / T_e)]$ по сравнению с единицей, поэтому $G_{e\beta}^{(n)} \approx B_{e\beta}^{(n)}$. В результате правые части уравнений для электронов записываются в том же виде, как и в случае одинаковой температуры компонентов, но с заменой T на T_e в коэффициентах $\gamma_e = m_e / k T_e$, $\gamma_{e\beta} \approx \gamma_e$, $B_{ee}^{(n)}$ и $B_{e\beta}^{(n)}$. Правые части уравнений для тяжелых частиц записываются так же, как в уравнениях однотемпературного приближения (т. е. при температуре T), за исключением тех членов в этих уравнениях, которые входят с коэффициентами $B_{\alpha e}^{(n)}$ ($\alpha \neq e$) и должны записываться при температуре T_e . Дальнейший анализ показывает, что этими последними членами в уравнениях для тяжелых частиц можно, как правило, пренебречь.

Существенно, что отмеченные выше особенности в записи правых частей уравнений сохраняются и для уравнений более высоких приближений метода моментов. Последнее обстоятельство позволяет не производить довольно громоздких вычислений $R_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}$ в более высоких порядках для различных температур компонент, а воспользоваться тем, что эти величины могут быть представлены с помощью так называемых интегральных скобок от полиномов Сонина, которые уже неоднократно вычислялись для случая изотермической газовой смеси (см. [5, 6], а также Приложение II).

Общая система уравнений (4.4.7), пригодная для магнитогидродинамического описания плазмы, остается справедливой и в случае двухтемпературной плазмы, только уравнение состояния принимает несколько другой вид:

$$p = n_e k T_e + \sum_{\beta} n_{\beta} k T, \quad (4.5.2)$$

где T — температура тяжелых компонентов плазмы. Кроме того, к системе определяющих уравнений необходимо добавить уравнение сохранения энергии для электронов (уравнение для температуры T_e), которое следует из (2.2.21) и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{d}{dt} (n_e k T_e) + \frac{5}{2} n_e k T_e \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q}_e + \pi_{ers} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} - n_e \mathbf{w}_e \cdot \mathbf{X}_e - \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{E}' = \\ = -\frac{3}{2} k n_e \sum_{\beta} \frac{2m_e}{m_{\beta}} \tau_{e\beta}^{-1} (T_e - T_{\beta}) \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

(мы пренебрегаем в этом уравнении членом $\rho_e \mathbf{w}_e \cdot d\mathbf{u}/dt$ из-за его малости).

При учете неупругих процессов в плазме в уравнение энергии (4.5.3) следует внести некоторые изменения, учитывающие вклад

энергии ионизации ε_i [17]. При этом в левой части уравнения вместо $(3/2)p_e$ и $(5/2)p_e$, где $p_e = n_e k T_e$, следует использовать $(3/2)p_e + \varepsilon_i$ и $(5/2)p_e + \varepsilon_i$, а поток тепла электронов определять как $\mathbf{q}_e - n_e \mathbf{w}_e \varepsilon_i$.

В правую часть уравнения (4.5.3) включаются потери энергии электронов за счет неупругих столкновений с атомами, которые имеют различные уровни электронного возбуждения [17], а также потери энергии на возбуждение внутренних степеней свободы молекул в случае молекулярной плазмы. Отметим, что потери за счет неупругих столкновений с атомами можно выразить через локальную скорость потерь энергии плазмой за счет излучения, если предполагать, что атомы взаимодействуют энергетически только со свободными электронами и меняют свою энергию лишь за счет испускания и поглощения фотона [17].

4.6. Высшие приближения метода моментов

Более высокие приближения метода моментов Грэда соответствуют учету в разложении (4.1.2) большего числа полиномов, чем рассмотренная выше совокупность (4.2.1), отвечающая приближению $13N$ моментов. Новые коэффициенты $n_\alpha a_\alpha^{mn}$, соответствующие этим полиномам, связаны с моментами функции распределения, уже не имеющими явного физического смысла, однако, на каждом новом этапе приближения, когда мы ограничиваемся конечным числом членов разложения, уравнения для этих коэффициентов входят в полную замкнутую систему уравнений наряду с уравнениями для ρ_α , $\mathbf{u}$, T_α , $\mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_\alpha$. Решение такой системы позволяет найти выражения для интересующих нас макроскопических параметров плазмы и соответствующих кинетических коэффициентов с учетом вклада от членов разложения более высокого порядка.

Общая система уравнений для моментов (или коэффициентов $n_\alpha b_\alpha^{mn}$) в любом порядке приближения приводится в Приложении I. Вычисление правых частей этих уравнений в пренебрежении квадратичными по коэффициентам разложения членами позволяет записать их в виде линейных сумм коэффициентов $n_\alpha b_\alpha^{mn}$ и $n_\beta b_\beta^{mn}$:

$$R_\alpha^{mn} = - \sum_\beta \sum_k (A_{\alpha\beta}^{mnk} n_\alpha b_\alpha^{mn} + B_{\alpha\beta}^{mnk} n_\beta b_\beta^{mn}). \quad (4.6.1)$$

В свою очередь, коэффициенты при соответствующих моментах в этих суммах выражаются через интегральные скобки полиномов Сонина [5, 6, 11–13] и имеют порядок величины $n_\beta \tau_{\alpha\beta}^{-1}$. При выполнении условий (4.3.1), т.е. в случае медленного изменения параметров плазмы на характерных длинах и за времена порядка среднего пробега и времени между столкновениями частиц, левые части уравнений для $n_\alpha b_\alpha^{mn}$ можно заметно упростить с помощью тех же соображений, которые использовались в п. 4.3. Получаемая в результате этих упрощений

система линеаризованных уравнений моментов также приводится в Приложении I.

Процедура упрощения уравнений становится более наглядной, если представить коэффициенты $n_\alpha b_\alpha^{mn}$ в виде формального разложения в ряд по параметру $\varepsilon = \lambda/L$, где $\lambda \approx \langle v_{\alpha\beta} \rangle \tau_{\alpha\beta}$. Опуская в силу условий (4.3.1) производные $dn_\alpha b_\alpha^{mn}/dt$ по сравнению с правой частью уравнений (П.1.7) и приводя уравнения к безразмерному виду, легко обнаружить, что перед линейной комбинацией коэффициентов правой части появляется множитель порядка ε^{-1} ($\varepsilon \ll 1$). Это обстоятельство подсказывает использование метода последовательных приближений, в котором разложение вида $n_\alpha b_\alpha^{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k n_\alpha b_\alpha^{mn}(k)$ подставляется в исходные уравнения, а затем приравниваются члены при одинаковых степенях ε . По отношению к уже рассматривавшимся выше уравнениям приближения $13N$ моментов (4.2.12)–(4.2.14) применение такого подхода приводит в первом приближении по ε к линейным соотношениям переноса (4.3.5)–(4.3.7) для величин $\mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_\alpha$. Используя выражения, полученные в первом приближении по ε , и подставляя их в левую часть уравнений для $n_\alpha b_\alpha^{mn}$, можно получить уравнения, справедливые с точностью до членов $\sim \varepsilon^2$, которые будут включать зависимость от произведений градиентов, а также вторых производных от термодинамических параметров плазмы, что соответствует так называемому барнеттовскому приближению [5, 6].

Описываемая процедура в известной степени эквивалентна подходу, используемому в обычном методе Чепмена–Энскога, с той лишь разницей, что в этом методе разложение в ряд по ε применяется на уровне функции распределения и по отношению к самому кинетическому уравнению. Приведение этого уравнения к безразмерному виду приводит, как известно, к появлению в его правой части (перед интегралом столкновений) параметра ε^{-1} . Формальное решение кинетического уравнения ищется при этом в виде разложения $f_\alpha = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k f_\alpha^{(k)}$, подстановка которого в исходное уравнение и приравнивание соответствующих выражений при одинаковых степенях ε позволяет записать уравнения для определения $f_\alpha^{(k)}$ [5, 6, 8].

Альтернативный подход к получению линейных соотношений переноса основан на использовании в качестве исходного не полного нелинейного уравнения Больцмана (1.2.18), а кинетического уравнения, линеаризованного около локального максвелловского распределения [2, 19, 20]. При этом в общем случае получаемые линеаризованные уравнения переноса содержат не только члены, линейные по градиентам макроскопических параметров плазмы, но и члены, пропорциональные производным по координате от некоторых моментов функции распределения. В приближении $13N$ моментов, как мы уже видели, такими производными являются $\partial \pi_{\alpha rs} / \partial x_s$ и $\{\partial q_{\alpha r} / \partial x_s\}$, поэтому рассматриваемый подход приводит сразу к уравнениям (4.3.2)–(4.3.4), которые

являются более общими, чем уравнения (4.3.5)–(4.3.7), соответствующие результатам первого приближения по параметру ε в рассмотренной выше схеме. Остановимся на этом вопросе более подробно.

Представим функцию распределения f_α в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} (1 + \phi_\alpha), \quad |\phi_\alpha| \ll 1, \quad (4.6.2)$$

где $f_\alpha^{(0)}$ определено выражением (4.1.10). Линеаризованное кинетическое уравнение для малой поправки ϕ_α в пренебрежении квадратичными относительно ϕ_α членами, можно представить в виде [20]

$$D_\alpha f_\alpha^{(0)} + f_\alpha^{(0)} D_\alpha \phi_\alpha = - \sum_\beta n_\alpha n_\beta I_{\alpha\beta}(\phi), \quad (4.6.3)$$

где используется обозначение дифференциального оператора

$$D_\alpha = \frac{d}{dt} + (\mathbf{c}_\alpha \cdot \nabla) + \left(\frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \nabla_v \right), \quad (4.6.4)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla).$$

Оператор под знаком суммы в правой части уравнения (4.6.3) определен при этом выражением [6]

$$\begin{aligned} n_\alpha n_\beta I_{\alpha\beta}(\phi) &= - \left[J_{\alpha\beta} \left(f_\alpha^{(0)} \phi_\alpha, f_\beta^{(0)} \right) + J_{\alpha\beta} \left(f_\alpha^{(0)}, f_\beta^{(0)} \phi_\beta \right) \right] = \\ &= \iint f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(0)} (\phi'_\alpha + \phi'_{1\beta} - \phi_\alpha - \phi_{1\beta}) g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{v}_{1\beta}. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Первый член слева в уравнении (4.6.3) $D_\alpha f_\alpha^{(0)} = f_\alpha^{(0)} D_\alpha \ln f_\alpha^{(0)}$ преобразуется с учетом того, что

$$\ln f_\alpha^{(0)} = \ln n_\alpha - \frac{3}{2} \ln T_\alpha - \frac{1}{2} \gamma_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u})^2 + \text{const}.$$

В результате

$$\begin{aligned} D_\alpha f_\alpha^{(0)} &= f_\alpha^{(0)} \left\{ \left(\frac{1}{n_\alpha} \frac{dn_\alpha}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\gamma_\alpha c_\alpha^2 - 3 \right) \left(\frac{1}{T_\alpha} \frac{dT_\alpha}{dt} + \frac{2}{3} p_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \\ &\quad + \mathbf{c}_\alpha \cdot \left[\frac{1}{p_\alpha} (\nabla p_\alpha - n_\alpha F_\alpha^*) \right] + \gamma_\alpha \left(c_{\alpha r} c_{\alpha s} - \frac{1}{3} \delta_{rs} c_\alpha^2 \right) \varepsilon_{rs} + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\gamma_\alpha c_\alpha^2 - 5 \right) \mathbf{c}_\alpha \cdot \frac{1}{T_\alpha} \nabla T_\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Линеаризованные уравнения моментов или уравнения для коэффициентов $n_\alpha b_\alpha^{mn}$ получаются умножением левой и правой частей уравнения (4.6.3) на полиномы G_α^{mn} с последующим интегрированием по скоростям. Результирующая система линеаризованных уравнений моментов совпадает при этом с системой уравнений (П.1.8), полученной в Приложении I из общей системы уравнений моментов в результате пренебрежения всеми нелинейными членами. Там же анализируется возможность дальнейшего упрощения этих уравнений. В частности, в них может быть опущен член $dn_\alpha b_\alpha^{mn}/dt$ по сравнению с правой частью соответствующих уравнений моментов, что справедливо для состояний многокомпонентной плазмы, удовлетворяющих условиям (4.3.1). На уровне линеаризованного кинетического уравнения (4.6.3) это соответствует пренебрежению в нем производной $d\phi_\alpha/dt$. Заметим, что учет члена с $f_\alpha^{(0)}(\mathbf{c}_\alpha \cdot \nabla)\phi_\alpha$, в исходном уравнении для ϕ_α (4.6.3) соответствует оставлению в уравнениях моментов производных по координатам от коэффициентов $n_\alpha b_\alpha^{m-1,n}$ и $n_\alpha b_\alpha^{m+1,n}$ (см. соответствующие члены в уравнениях (П.1.8)). Для рассмотренного выше приближения $13N$ моментов именно этим членам соответствовали производные $\partial\pi_{\alpha rs}/\partial x_s$ и $\{\partial q_{\alpha r}/\partial x_s\}$ в уравнениях (4.3.3)–(4.3.4). Ранее нами уже отмечались те случаи, когда влияние этих членов может оказаться существенным. Их учет соответствует фактически барнеттовскому приближению метода Чепмена–Энскога, получаемому во втором приближении по малому параметру ε . Мы еще вернемся к обсуждению этих вопросов в следующей главе. Ниже при записи линеаризованного кинетического уравнения член с $f_\alpha^{(0)}(\mathbf{c}_\alpha \cdot \nabla)\phi_\alpha$ для простоты будет опущен.

По той же причине, для того чтобы не выходить за пределы линейного приближения по ε , можно несколько упростить выражение для $D_\alpha f_\alpha^{(0)}$. Это обеспечивается тем, что полные производные по времени dn_α/dt и dT_α/dt , а также $d\mathbf{u}/dt$ в выражении для $n_\alpha \mathbf{F}_\alpha^*$, можно исключить из выражения (4.6.6) в приближении, когда соответствующие уравнения сохранения записаны в приближении Эйлера (т.е. при пренебрежении всеми диссипативными членами). В результате первые две комбинации членов в круглых скобках, входящие в общее выражение (4.6.6), тождественно обращаются в нуль.

Рассмотрим, наконец, ту часть оператора $D_\alpha \phi_\alpha$, которая связана с наличием внешней силы $\mathbf{F}_\alpha$. Соответствующее выражение можно представить в виде

$$\frac{1}{m_\alpha} (e_\alpha \mathbf{E}' + \mathbf{X}_\alpha) \cdot \nabla_c \phi_\alpha + \left[\frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{c}_\alpha \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_c \right] \phi_\alpha,$$

где $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$. Роль первого члена этого выражения в уравнениях моментов может сказаться лишь при рассмотрении достаточно

сильных полей, поэтому в рассматриваемом ниже приближении его также можно опустить. Учет второго члена оказывается важным, поскольку именно с ним, как следует из предыдущего анализа уравнений в приближении $13N$ моментов, связано влияние магнитного поля (вызывающего циклотронное вращение заряженных частиц) на свойства переноса в плазме.

В результате принятых допущений линеаризованное кинетическое уравнение (4.6.3) в рассматриваемом нами приближении можно представить в виде

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^{(0)} \left[\frac{n}{n_{\alpha}} \mathbf{c}_{\alpha} \cdot \mathbf{d}_{\alpha} + \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \mathbf{c}_{\alpha} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \gamma_{\alpha} \left(c_{\alpha r} c_{\alpha s} - \frac{1}{3} \delta_{rs} c_{\alpha}^2 \right) \varepsilon_{rs} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\gamma_{\alpha} c_{\alpha}^2 - 5 \right) \mathbf{c}_{\alpha} \cdot \frac{1}{T_{\alpha}} \nabla T_{\alpha} \right] + f_{\alpha}^{(0)} [(\mathbf{c}_{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}_{\alpha}) \cdot \nabla_c] \phi_{\alpha} = \\ = - \sum_{\beta} n_{\alpha} n_{\beta} I_{\alpha\beta}(\phi). \quad (4.6.7) \end{aligned}$$

Напомним, что векторная величина $\mathbf{d}_{\alpha}$ определена для квазинейтральной плазмы выражением (4.4.4).

Легко заметить, что в левой части уравнения (4.6.7) фигурируют фактически полиномы G_{α}^{00} , $G_{\alpha r}^{10}$, G_{α}^{01} , $G_{\alpha rs}^{20}$ и $G_{\alpha r}^{11}$. Умножая уравнение (4.6.7) на G_{α}^{mn} и интегрируя по скоростям, приходим с учетом ортогональности полиномов G_{α}^{mn} и вида выражения для R_{α}^{mn} (4.6.1) к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left[p \mathbf{d}_{\alpha} + \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \right] \delta_{m1} \delta_{n0} + \frac{5}{2} \frac{k}{m_{\alpha}} p_{\alpha} \nabla T_{\alpha} \delta_{m1} \delta_{n1} + \\ + 2 p_{\alpha} \varepsilon_{rs} \delta_{m2} \delta_{n0} - \langle n_{\alpha} b_{\alpha}^{mn} \delta_r \rangle e_{rst} \omega_{\alpha t} = \\ = - \sum_{\beta} \sum_k (A_{\alpha\beta}^{mnk} n_{\alpha} b_{\alpha}^{mn} + B_{\alpha\beta}^{mnk} n_{\beta} b_{\beta}^{mn}). \quad (4.6.8) \end{aligned}$$

Общие выражения для коэффициентов $A_{\alpha\beta}^{mnk}$ и $B_{\alpha\beta}^{mnk}$, связывающие их с интегральными скобками от полиномов Сонина и тензорных сферических гармоник, приводятся в Приложении I.

Легко обнаружить, что при $m \neq 1, 2$ левая часть (4.6.8) обращается в нуль, что в силу однородности уравнений соответствует обращению в нуль всех коэффициентов $n_{\alpha} b_{\alpha}^{mn}$ при $m \neq 1, 2$. В результате система (4.6.8) распадается на две независимые системы уравнений для коэффициентов $n_{\beta} \mathbf{b}_{\beta}^{1n}$ и $n_{\beta} b_{\beta rs}^{20}$ соответственно для векторных ($m = 1$) и тензорных величин ($m = 2$).

Так, система уравнений для $n_\beta b_\beta^{1n}$ (при $T_\alpha = T$) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} \sum_{k=0}^{\xi-1} C_{\alpha\beta}^{10k} n_\beta \mathbf{b}_\beta^{1k} &= -p \mathbf{d}_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + n_\alpha \mathbf{b}_\alpha^{10} \times \boldsymbol{\omega}_\alpha, \\ \sum_{\beta} \sum_{k=0}^{\xi-1} C_{\alpha\beta}^{11k} n_\beta \mathbf{b}_\beta^{1k} &= -\frac{5}{2} \frac{k}{m_\alpha} p_\alpha \nabla T + n_\alpha \mathbf{b}_\alpha^{11} \times \boldsymbol{\omega}_\alpha, \\ \sum_{\beta} \sum_{k=0}^{\xi-1} C_{\alpha\beta}^{1nk} n_\beta \mathbf{b}_\beta^{1k} &= n_\alpha \mathbf{b}_\alpha^{1n} \times \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad 2 \leq n \leq \xi - 1. \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

Для коэффициентов $n_\beta b_{\beta rs}^{20}$ система уравнений записывается как

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} \sum_{k=0}^{\xi-1} C_{\alpha\beta}^{20k} n_\beta \mathbf{b}_\beta^{20} &= -2p_\alpha \varepsilon_{rs} + 2n_\alpha \left\{ b_{\alpha \ell r}^{20} \varepsilon_{s\ell t} \omega_\alpha t \right\}, \\ \sum_{\beta} \sum_{k=0}^{\xi-1} C_{\alpha\beta}^{2nk} n_\beta \mathbf{b}_\beta^{2k} &= -2p_\alpha \varepsilon_{rs} + 2n_\alpha \left\{ b_{\alpha \ell r}^{2n} \varepsilon_{s\ell t} \omega_\alpha t \right\}, \\ 1 \leq n \leq \xi - 1. \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Коэффициенты $C_{\alpha\beta}^{mnk}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}^{mnk} &= \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}^{mnk} + B_{\alpha\beta}^{mnk}, \\ A_{\alpha\beta}^{1nk} &= n_\alpha Q_{1nk} \gamma_\alpha^{k-n} \left[S_{3/2}^n (W^2) \mathbf{W}, S_{3/2}^k (W^2) \mathbf{W} \right]_{\alpha\beta}', \\ A_{\alpha\beta}^{2nk} &= n_\alpha Q_{2nk} \gamma_\alpha^{k-n} \times \\ &\times \left[S_{5/2}^n (W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right), S_{53/2}^k (W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right) \right]_{\alpha\beta}', \\ B_{\alpha\beta}^{1nk} &= n_\alpha Q_{1nk} \frac{\gamma_\beta^{k-1/2}}{\gamma_\alpha^{n-1/2}} \left[S_{3/2}^n (W^2) \mathbf{W}, S_{3/2}^k (W^2) \mathbf{W} \right]_{\alpha\beta}'', \\ B_{\alpha\beta}^{2nk} &= n_\alpha Q_{2nk} \frac{\gamma_\beta^k}{\gamma_\alpha^n} \times \\ &\times \left[S_{5/2}^n (W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right), S_{53/2}^k (W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right) \right]_{\alpha\beta}'', \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

где $\mathbf{W} = (m_\alpha / 2kT)^{1/2} \mathbf{c}$.

Здесь $[F, G]_{\alpha\beta}'$ и $[F, G]_{\alpha\beta}''$ — так называемые «парциальные интегральные скобки», выражения для которых, записанные через линейные комбинации от интегралов $\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r}$, можно найти, например, в работах [5, 6]. Значительная часть этих выражений, необходимых для конкретных расчетов, приведена в Приложении II.

Коэффициенты Q_{1nk} и Q_{2nk} в выражениях (4.6.11) имеют вид

$$Q_{1nk} = (-1)^{n+k} 2^{2k+1} \frac{2!n! (k+1)!}{(2k+3)!} = (-1)^n n! \left\{ 1, -\frac{2}{5}, \frac{4}{35}, \dots \right\},$$

$$Q_{2nk} = (-1)^{n+k} 2^{2k} \frac{2!n! (k+2)!}{(2k+5)!} = (-1)^n n! \frac{2}{5} \left\{ 1, -\frac{2}{7}, \frac{4}{63}, \dots \right\},$$

$$n, k = 0, 1, \dots$$

Системы векторных и тензорных линейных алгебраических уравнений (4.4.5) и (4.4.6) могут быть разрешены относительно коэффициентов $n_\gamma \mathbf{b}_\gamma^{1k}$ и $n_\gamma b_{\gamma rs}^{2k}$ для любого конечного значения ξ . В результате находятся интересующие нас выражения для коэффициентов $n_\alpha \mathbf{b}_\alpha^{10}$, $n_\alpha \mathbf{b}_\alpha^{11}$ и $n_\alpha b_{\alpha rs}^{20}$ или для величин $\rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha$, $\mathbf{h}_\alpha$ и $\pi_{\alpha rs}$, в любом порядке приближения по ξ . Заметим, что приближение $13N$ моментов соответствует использованию первых двух уравнений (4.6.4) для коэффициентов $n_\beta \mathbf{b}_\beta^{10}$ и $n_\beta \mathbf{b}_\beta^{11}$ ($\xi = 2$) и одного уравнения (4.6.5) для $n_\beta b_{\beta rs}^{20}$ ($\xi = 1$). Сравнение этих уравнений с (4.4.1)–(4.4.3) для случая однотемпературной плазмы показывает, что коэффициенты $A_{\alpha\beta}^{mnk}$ и $B_{\alpha\beta}^{mnk}$ связаны с $B_{\alpha\beta}^{(p)}$ соотношениями

$$B_{\alpha\beta}^{(1)} = -m_\alpha A_{\alpha\beta}^{100} = m_\beta B_{\alpha\beta}^{100},$$

$$B_{\alpha\beta}^{(2)} = kT \left(\frac{m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}} \right) A_{\alpha\beta}^{101} = -kT \left(\frac{m_\beta}{\mu_{\alpha\beta}} \right) B_{\alpha\beta}^{101},$$

$$B_{\alpha\beta}^{(3)} = -(m_\alpha + m_\beta) A_{\alpha\beta}^{200},$$

$$B_{\alpha\beta}^{(4)} = -(m_\alpha + m_\beta) B_{\alpha\beta}^{200},$$

$$B_{\alpha\beta}^{(5)} = -m_\alpha A_{\alpha\beta}^{111},$$

$$B_{\alpha\beta}^{(6)} = -m_\beta B_{\alpha\beta}^{111}.$$

Как следует из структуры уравнений (4.6.9)–(4.6.10), уже в приближении $13N$ моментов можно получить все необходимые линейные соотношения между моментами $\rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_\alpha$ с одной стороны

и градиентами термодинамических величин, а также полями $\langle \mathbf{F}_\alpha^* \rangle$ — с другой. Учет следующих линеаризованных уравнений моментов, которые уже не содержат неоднородных членов, пропорциональных градиентам, приводит лишь к усложнению матриц коэффициентов, через которые выражаются соответствующие коэффициенты переноса. Для случая однотемпературной многокомпонентной плазмы в отсутствие магнитного поля формальные выражения для коэффициентов переноса, получаемые в результате решения систем уравнений (4.6.9)–(4.6.10) в любом порядке приближения по ξ , будут рассмотрены нами в следующей главе (см. п. 5.6).

4.7. Связь с результатами метода Чепмена–Энскога

Покажем теперь, что результаты, получаемые на основе линеаризованного уравнения Больцмана в форме (4.6.7) или, что тоже самое, в линейном по ε приближении метода моментов, находятся в тесной связи с результатами, которые могут быть получены при использовании широко применяемого в кинетической теории газов метода Чепмена–Энскога [5, 6]. В этом методе решение кинетического уравнения для функции распределения ищется, как известно, в виде формального разложения по степеням ε ,

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} \left[1 + \varepsilon \Phi_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi_\alpha^{(2)} + \dots \right], \quad (4.7.1)$$

где поправки к функции распределения, $\Phi_\alpha^{(2)}$ и т. д. соответствуют первому, второму (барнеттовскому) и следующим приближениям метода. Для того чтобы не усложнять анализ, мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением плазмы в отсутствие магнитного поля ($\boldsymbol{\omega}_\alpha = 0$). Система интегральных уравнений для определения поправки первого порядка, принимает в этом случае вид [6]

$$\begin{aligned} f_\alpha^{(0)} \left[\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha + \gamma_\alpha \left(c_{\alpha r} c_{\alpha s} - \frac{1}{3} \delta_{rs} c_\alpha^2 \right) \varepsilon_{rs} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\gamma_\alpha c_\alpha^2 - 5 \right) \mathbf{c}_\alpha \cdot \frac{1}{T_\alpha} \nabla T_\alpha \right] = - \sum_\beta n_\alpha n_\beta I_{\alpha\beta} \left(\Phi^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Заметим, что эта система уравнений по своему виду полностью аналогична полученной выше упрощенной системе линеаризованных кинетических уравнений (4.6.7), записываемых при $\mathbf{B} = 0$.

Структура левой части уравнений (4.7.2) подсказывает поиск решения для $\Phi_\alpha^{(1)}$ в форме

$$\Phi_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{n} \mathbf{A}_\alpha \cdot \nabla \ln T_\alpha - \frac{1}{n} B_{\alpha rs} \varepsilon_{rs} - \frac{1}{n} \sum_\beta \mathbf{D}_\alpha^\beta \cdot \mathbf{d}_\beta. \quad (4.7.3)$$

Подстановка (4.7.3) в (4.7.2) приводит к раздельным системам интегральных уравнений для коэффициентов $\mathbf{A}_\alpha$, $B_{\alpha rs}$, $\mathbf{D}_\alpha^\beta$:

$$\begin{aligned}\sum_{\beta} \frac{n_{\alpha} n_{\beta}}{n^2} I_{\alpha\beta}(\mathbf{A}_{\alpha}) &= \frac{1}{n} f_{\alpha}^{(0)} \left(\frac{m_{\alpha} c_{\alpha}^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{c}_{\alpha}, \\ \sum_{\beta} \frac{n_{\alpha} n_{\beta}}{n^2} I_{\alpha\beta}(B_{\alpha rs}) &= \frac{1}{n} \frac{m_{\alpha}}{kT_{\alpha}} f_{\alpha}^{(0)} \left(c_{\alpha r} c_{\alpha s} - \frac{1}{3} \delta_{rs} c_{\alpha}^2 \right), \\ \sum_{\beta} \frac{n_{\alpha} n_{\beta}}{n^2} I_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_{\alpha}^{\gamma}) &= \frac{1}{n} f_{\alpha}^{(0)} \left(\delta_{\alpha\gamma} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \right) \mathbf{c}_{\alpha}, \\ \alpha, \gamma &= 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{4.7.4}$$

Сами коэффициенты разлагаются затем в бесконечные ряды по полиномам Сонина [5, 6, 8]:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\alpha} &= - \left(\frac{m_{\alpha}}{2kT} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\alpha,k} S_{3/2}^k(W_{\alpha}^2) \mathbf{W}_{\alpha}, \\ B_{\alpha rs} &= - \sum_{k=0}^{\infty} b_{\alpha,k} S_{5/2}^k(W_{\alpha}^2) \left(W_{\alpha s} W_{\alpha r} - \frac{1}{3} \delta_{rs} W_{\alpha}^2 \right), \\ \mathbf{D}_{\alpha}^{\beta} &= \left(\frac{m_{\alpha}}{2kT} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} d_{\alpha,k}^{\beta} S_{3/2}^k(W_{\alpha}^2) \mathbf{W}_{\alpha}.\end{aligned}\tag{4.7.5}$$

Легко заметить, что разложение неравновесной поправки первого приближения к функции распределения в методе Чепмена–Энскога производится, по существу, по той же системе базисных функций (полиномы $\mathbf{G}_{\alpha}^{1k}$ и $G_{\alpha rs}^{2k}$), что и в линейном приближении метода моментов Грэда, рассмотренном выше. Выбор такой системы функций тесно связан со структурой $Df_{\alpha}^{(0)}$ в исходном уравнении (4.7.2), которое включает в себя линейную зависимость от полиномов $\mathbf{G}_{\alpha}^{10}$, $G_{\alpha rs}^{20}$ и $\mathbf{G}_{\alpha}^{11}$, что и приводит в силу ортогональности неприводимых полиномов Эрмита к обращению в нуль всех коэффициентов разложения функции распределения в уравнениях (4.6.8), кроме b_{α}^{1k} и $b_{\alpha rs}^{2k}$.

С методической точки зрения различие между двумя рассматриваемыми способами состоит в следующем. В методе Чепмена–Энскога [5, 6] интересующие нас неравновесные макроскопические параметры $\mathbf{J}_{\alpha} = \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_{\alpha}$ (4.7.4) можно непосредственно представить в виде линейных зависимостей от градиентов термодинамических параметров и поля $\mathbf{E}'$. С этой целью используются явные определения этих величин через функции распределения частиц сорта α , т. е. выражения (1.2.3), (1.1.7), (1.1.9) и (4.2.4). Учитывая, что в нулевом приближении

по ε (т.е. при использовании локального максвелловского распределения) соответствующие неравновесные параметры обращаются в нуль, выражения для них можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\alpha &= m_\alpha \int \mathbf{c} f_\alpha^{(0)} \Phi_\alpha^{(1)} d\mathbf{c}, \\ \pi_{\alpha rs} &= m_\alpha \int \left(c_r c_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} c^2 \right) f_\alpha^{(0)} \Phi_\alpha^{(1)} d\mathbf{c}, \\ \mathbf{h}_\alpha &= kT_\alpha \int \mathbf{c} \left(\frac{mc^2}{2kT_\alpha} - \frac{5}{2} \right) f_\alpha^{(0)} \Phi_\alpha^{(1)} d\mathbf{c}. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Подставляя в эти выражения поправку первого приближения $\Phi_\alpha^{(1)}$ в форме (4.7.3), приходим к соотношениям [6, 8]:

$$\mathbf{J}_\alpha = -\rho_\alpha \sum_\beta D_{\alpha\beta} \mathbf{d}_\beta - \rho_\alpha D_\alpha^T \nabla \ln T, \quad (4.7.7)$$

$$\mathbf{q} = -\lambda' \nabla T - p \sum_\alpha D_\alpha^T \mathbf{d}_\alpha + \frac{5}{2} \sum_\alpha p_\alpha \mathbf{w}_\alpha, \quad \pi_{rs} = -2\eta \varepsilon_{rs}. \quad (4.7.8)$$

Здесь $D_{\alpha\beta}$ и D_α^T — коэффициенты диффузии и термодиффузии многокомпонентной смеси, η и λ' — коэффициент вязкости и частный коэффициент теплопроводности смеси. Вопрос о связи последнего коэффициента с истинным коэффициентом теплопроводности смеси λ будет обсуждаться в гл. 5. Заметим, что коэффициент диффузии $D_{\alpha\beta}$ симметричен относительно перестановки индексов, кроме того, $D_{\alpha\alpha} > 0$.

Коэффициенты пропорциональности в соотношениях (4.7.7)–(4.7.8) или коэффициенты переноса выражаются через так называемые интегральные скобки от параметров A_α , $B_{\alpha rs}$ и D_α^β . Использование разложений (4.7.5) и ортогональность полиномов Сонина позволяет затем выразить коэффициенты переноса с помощью коэффициентов разложения $a_{\alpha,k}$, $b_{\alpha,k}$ и $d_{\alpha,k}^\beta$ низкого порядка ($k = 0$ или $k = 1$):

$$\begin{aligned} [D_{\alpha\beta}]_\xi &= \frac{1}{2n} d_{\alpha,0}^\beta(\xi), & [D_\alpha^T]_\xi &= -\frac{1}{2} a_{\alpha,0}(\xi), \\ [\lambda']_\xi &= \frac{5}{4} k \sum_{\alpha=1}^N \frac{n_\alpha}{n} a_{\alpha,1}(\xi), & [\eta]_\xi &= \frac{1}{2} kT \sum_{\alpha=1}^N \frac{n_\alpha}{n} b_{\alpha,0}(\xi). \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

Полная алгебраическая система уравнений, из которых определяются эти коэффициенты, получается подстановкой разложений (4.7.6) в соответствующие интегральные уравнения (4.7.5), которые умножаются затем на полиномы $\mathbf{G}_\alpha^{1k}$ и $G_{\alpha rs}$ и интегрируются по скоростям.

В методе моментов Грэда (точнее, в его линеаризованном варианте, основанном на уравнении (4.6.7)) система линейных векторных и тензорных уравнений получается непосредственно для самих интересующих нас величин $\rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$ и $\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha - (5/2) p_\alpha \mathbf{w}_\alpha$, а также конечного числа (в зависимости от принятого порядка приближения по ξ) остальных коэффициентов разложения. Линейные соотношения переноса, получаемые из решения отдельных систем уравнений для векторных и тензорных величин, записываются сначала для парциальных потоков $\mathbf{h}_\alpha$ и $\pi_{\alpha rs}$ и лишь затем при суммировании по всем компонентам смеси получаются соотношения, справедливые для смеси в целом. При этом, как будет видно из результатов следующей главы, выражение для потока тепла записывается сразу с «истинным» коэффициентом теплопроводности. Уравнения для диффузионных скоростей $\mathbf{w}_\alpha$ (или для диффузионных потоков $\mathbf{J}_\alpha$) получаются при этом в форме так называемых обобщенных уравнений Стефана–Максвелла. В результате решения систем уравнений коэффициенты переноса могут быть представлены в виде отношения соответствующих определителей, элементы которых, так же как и соответствующие коэффициенты в методе Чепмена–Энскога, линейно выражаются через интегральные скобки полиномов Сонина.

С формальной точки зрения на уровне линейного по ε приближения результаты, получаемые с помощью метода Грэда, полностью эквивалентны результатам метода Чепмена–Энскога. Однако, использование уравнений, записываемых непосредственно для интересующих нас макроскопических потоков, оказывается во многих случаях более удобным. Особенно важным при этом становится заметное упрощение выражений для коэффициентов теплопроводности и термодиффузии смеси (уменьшение порядка определителей, через отношение которых записываются эти коэффициенты [11, 21]). Существенно облегчается, в частности, анализ многокомпонентной диффузии в плазме и вывод соответствующего обобщенного закона Ома. Наличие в смеси компонентов с заметно различающимися массами частиц (например, электронов или легких ионов в плазме) позволяет произвести необходимые упрощения (с использованием соответствующего параметра малости) на уровне исходных уравнений переноса и выделить, в частности, уравнения для легких частиц из общей системы уравнений. Сравнение получаемых при этом результатов с точными решениями, следующими из полной системы, позволяют более тщательно обосновать процедуру отделения уравнений для электронов от уравнений для тяжелых частиц, чем в случае, когда это осуществляется, например, на уровне системы кинетических уравнений для плазмы [22].

Некоторые новые возможности открываются при выходе за пределы линейного по ε приближения метода Грэда, т.е. при использовании нелинейной системы уравнений для коэффициентов $n_\alpha b_\alpha^{mn}$. Фактически, уже из уравнений моментов, полученных на основе линеаризованного кинетического уравнения (4.6.3) при сохранении в нем

члена с $f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{c}_{\alpha} \cdot \nabla)\phi_{\alpha}$, следуют некоторые новые эффекты, связанные с учетом в уравнениях переноса членов с производными потоков по поперечной координате. Это проявляется, в частности, при рассмотрении неоднородных задач с резко различающимися масштабами неоднородности $a \ll L$, когда такие члены могут иметь тот же первый порядок малости по $\varepsilon = \lambda/L$, что и основные члены. Некоторые из таких примеров, относящихся к медленным вязким течениям газа, рассматриваются в следующей главе. Другой пример относится к теории градиентных неустойчивостей в неоднородной плазме [23], когда поперечная скорость компонента α плазмы $\mathbf{u}_{\alpha\perp}$ считается имеющей тот же порядок величины, что и поперечная составляющая парциального потока тепла $\mathbf{q}_{\alpha\perp}$, поэтому в выражениях для тензора вязких напряжений необходимо наряду с производными $\partial u_r/\partial x_s$ сохранять также производные $\partial q_{\alpha r}/\partial x_s$. Можно, по-видимому, указать еще несколько случаев, в которых учет подобных членов оказывается важным, однако анализ этих случаев выходит за рамки настоящей книги.

Глава 5

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

5.1. Исходная система уравнений

Общий анализ явлений переноса в неизотермической многосортной плазме в присутствии магнитного поля будет отложен нами до следующей главы. Здесь мы рассмотрим более простой случай изотермической (однотемпературной) плазмы в отсутствие магнитного поля. Фактически речь идет об описании явлений переноса в многокомпонентной газовой смеси, возникающих под действием градиентов локальных термодинамических параметров газа и внешних полей, в число которых явным образом входит и электрическое поле $\mathbf{E}$. Разумеется, влияние электрического поля сказывается лишь в том случае, когда в смеси наряду с нейтральными присутствуют заряженные частицы.

В основу последующего анализа будут положены в основном уравнения (4.4.1)–(4.4.3), соответствующие приближению $13N$ моментов, в которых надо положить $\mathbf{V} = 0$. Вместе с тем, в конце главы будут обсуждаться некоторые результаты, соответствующие использованию более высоких приближений метода моментов.

Уравнения (4.4.1)–(4.4.3) при $\mathbf{V} = 0$ удобно представить в виде [1]

$$\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_{\alpha} n_{\beta} kT}{n [D_{\alpha\beta}]_1} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}) = -p \mathbf{d}_{\alpha} + \sum_{\beta} \xi_{\alpha\beta} \left(\frac{\mathbf{h}_{\beta}}{m_{\beta} n_{\beta}} - \frac{\mathbf{h}_{\alpha}}{m_{\alpha} n_{\alpha}} \right), \quad (5.1.1)$$

$$p^2 \sum_{\beta=1}^N H_{\alpha\beta} \frac{\pi_{\beta rs}}{p_{\beta}} = -2p_{\alpha} \varepsilon_{rs}, \quad (5.1.2)$$

$$\frac{p^2}{T} \sum_{\beta=1}^N \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\mathbf{h}_{\beta}}{p_{\beta}} = -\frac{p_{\alpha}}{T} \nabla T - \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{kT}{m_{\alpha}} \xi_{\alpha\beta} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}). \quad (5.1.3)$$

Напомним, что

$$\mathbf{d}_\alpha = \nabla y_\alpha + \left(y_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \right) \nabla \ln p - \frac{1}{p} \left(n_\alpha \mathbf{X}_\alpha - \sum_\alpha n_\alpha \mathbf{X}_\alpha \right) - \frac{1}{p} n_\alpha e_\alpha \mathbf{E}', \quad (5.1.4)$$

где $y_\alpha = n_\alpha/n$ — молярная концентрация частиц сорта α в смеси, а ε_{rs} определено выражением

$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right) - \frac{1}{3} \delta_{rs} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell}. \quad (5.1.5)$$

Коэффициенты $H_{\alpha\beta}$, $\Lambda_{\alpha\beta}$ и $\xi_{\alpha\beta}$ с учетом значений $B_{\alpha\beta}^{(p)}$ (4.2.18) записываются как

$$H_{\alpha\alpha} = \frac{y_\alpha}{[\eta_{\alpha\alpha}]_1} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{2y_\alpha y_\beta}{(m_\alpha + m_\beta) n [D_{\alpha\beta}]_1} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{m_\beta}{m_\alpha} A_{\alpha\beta}^* \right), \quad (5.1.6)$$

$$H_{\alpha\beta} = - \frac{2y_\alpha y_\beta}{(m_\alpha + m_\beta) n [D_{\alpha\beta}]_1} \left(1 - \frac{3}{5} A_{\alpha\beta}^* \right), \quad \beta \neq \alpha;$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\alpha} = & \frac{y_\alpha^2}{[\lambda_{\alpha\alpha}]_1} + \frac{4}{25} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{y_\alpha y_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2 k n [D_{\alpha\beta}]_1} \times \\ & \times \left(\frac{15}{2} m_\alpha^2 + \frac{25}{4} m_\beta^2 - 3m_\beta^2 B_{\alpha\beta}^* + 4m_\alpha m_\beta A_{\alpha\beta}^* \right), \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta} = & - \frac{4}{25} \frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2 k n [D_{\alpha\beta}]_1} \left(\frac{55}{4} - 3B_{\alpha\beta}^* - 4A_{\alpha\beta}^* \right), \\ & \beta \neq \alpha; \end{aligned}$$

$$\xi_{\alpha\beta} = \frac{n_\alpha n_\beta}{n [D_{\alpha\beta}]_1} \mu_{\alpha\beta} \left(\frac{6}{5} C_{\alpha\beta}^* - 1 \right), \quad \mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}. \quad (5.1.8)$$

При этом величина

$$[D_{\alpha\beta}]_1 = \frac{3kT}{16n\mu_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}^{11}} \quad (5.1.9)$$

соответствует значению коэффициента бинарной диффузии частиц сортов α и β , рассчитанного в первом приближении Чепмена–Каулинга (по числу полиномов Сонина в разложении [2]). Величины

$$[\eta_{\alpha\alpha}]_1 = \frac{5}{8} \frac{kT}{\Omega_{\alpha\alpha}^{22}}, \quad [\lambda_{\alpha\alpha}]_1 = \frac{15}{4} \frac{k}{m_\alpha} [\eta_{\alpha\alpha}]_1 \quad (5.1.10)$$

совпадают с вычисленными в том же приближении значениями вязкости и теплопроводности простого газа, состоящего из частиц сорта α .

Для так называемых Ω -интегралов, входящих в выражения (5.1.9) и (5.1.10), имеет место формула (4.2.20), в которой надо положить $\gamma_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}/kT$, так что

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r} &= \left(\frac{kT}{2\pi\mu_{\alpha\beta}} \right)^{1/2} \int_0^\infty \int_0^\pi \zeta^{2r+3} e^{-\zeta^2} Q_{\alpha\beta}^{(\ell)}(g) d\zeta = \\ &= \left(\frac{2\pi kT}{\mu_{\alpha\beta}} \right)^{1/2} \int_0^\infty \int_0^\pi \zeta^{2r+3} e^{-\zeta^2} (1 - \cos^\ell \chi) \sigma_{\alpha\beta}(\zeta, \chi) \sin \chi d\chi d\zeta. \quad (5.1.11)\end{aligned}$$

Коэффициенты $A_{\alpha\beta}^*$, $B_{\alpha\beta}^*$ и $C_{\alpha\beta}^*$ представляют собой отношения Ω -интегралов вида

$$A_{\alpha\beta}^* = \frac{\Omega_{\alpha\beta}^{22}}{2\Omega_{\alpha\beta}^{11}}, \quad B_{\alpha\beta}^* = \frac{5\Omega_{\alpha\beta}^{12} - \Omega_{\alpha\beta}^{13}}{3\Omega_{\alpha\beta}^{11}}, \quad C_{\alpha\beta}^* = \frac{\Omega_{\alpha\beta}^{12}}{3\Omega_{\alpha\beta}^{11}}. \quad (5.1.12)$$

Напомним, что Ω -интегралы довольно просто вычисляются для модели твердых упругих сфер [2]. Используя в этом случае определение $Q_{\alpha\beta}^{(\ell)}$ (1.3.7), находим

$$[\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r}]_{h, sph} = \left(\frac{kT}{2\pi\mu_{\alpha\beta}} \right)^{1/2} \frac{1}{2} (r+1)! \left[1 - \frac{1+(-1)^\ell}{2(\ell+1)} \right] \pi d_{\alpha\beta}^2.$$

Ранее мы уже встречались с использованием модели твердых упругих сфер при оценке электропроводности в случае слабо ионизованного газа. В дальнейшем эта модель окажется полезной и при оценках других коэффициентов переноса, а также для проверки сходимости приближений к кинетическим коэффициентам при использовании разложений по полиномам Сонина. В кинетической теории газовых смесей вводятся также так называемые приведенные Ω^* -интегралы, представляющие собой отношение обычных Ω -интегралов к $[\Omega]_{h, sph}$ -интегралам, вычисленным для модели твердых упругих сфер [3]:

$$\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r*} = \frac{\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r}}{[\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r}]_{h, sph}}.$$

Для реальных потенциалов взаимодействия нейтральных частиц эти интегралы слабо зависят от температуры. Определяя с их помощью величины $A_{\alpha\beta}^*$, $B_{\alpha\beta}^*$ и $C_{\alpha\beta}^*$, имеем

$$A_{\alpha\beta}^* = \frac{\Omega_{\alpha\beta}^{22*}}{\Omega_{\alpha\beta}^{11*}}, \quad B_{\alpha\beta}^* = \frac{5\Omega_{\alpha\beta}^{12*} - 4\Omega_{\alpha\beta}^{13*}}{\Omega_{\alpha\beta}^{11*}}, \quad C_{\alpha\beta}^* = \frac{\Omega_{\alpha\beta}^{12*}}{\Omega_{\alpha\beta}^{11*}}. \quad (5.1.13)$$

Очевидно, что для модели твердых упругих шаров

$$A_{\alpha\beta}^* = B_{\alpha\beta}^* = C_{\alpha\beta}^* = 1,$$

для случая кулоновского взаимодействия частиц

$$A_{\alpha\beta}^* = B_{\alpha\beta}^* = 1, \quad C_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{3}.$$

5.2. Тензор вязких напряжений и поток тепла

Разрешая уравнения (5.1.2) относительно величин $\pi_{\gamma rs}/p_{\gamma}$, приходим к выражению для парциального тензора вязких напряжений

$$\pi_{\alpha rs} = -2\eta_{\alpha}\varepsilon_{rs}, \quad (5.2.1)$$

где

$$\eta_{\alpha} = y_{\alpha} \sum_{\beta=1}^N y_{\beta} \frac{|H|_{\beta\alpha}}{|H|} \quad (5.2.2)$$

— парциальная вязкость частиц сорта α . Обозначение $|A|$ соответствует определителю, составленному из элементов $A_{\alpha\beta}$, а $|A|_{\beta\alpha}$ представляет собой алгебраическое дополнение элемента $\beta\alpha$ определителя.

Суммирование (5.2.1) по α дает соотношение для полного тензора вязких напряжений

$$\pi_{rs} = -2\eta\varepsilon_{rs}, \quad (5.2.3)$$

где вязкость смеси η определена выражением

$$\eta = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} y_{\alpha} y_{\beta} \frac{|H|_{\beta\alpha}}{|H|}. \quad (5.2.4)$$

Это выражение можно представить в виде отношения двух определителей $(N+1)$ -го и N -го порядков [3]:

$$\eta = -\frac{1}{|H|} \begin{vmatrix} H_{11} & \dots & H_{1N} & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1} & \dots & H_{NN} & y_N \\ y_1 & \dots & y_N & 0 \end{vmatrix}, \quad (5.2.4')$$

где $|H|$ — определитель, составленный из элементов $H_{\alpha\beta}$.

Вязкость чистого газа ($N=1$) определяется при этом как

$$[\eta]_1 = \frac{1}{H_{11}} = \frac{5}{16} \frac{(\pi m k T)^{1/2}}{\pi d^2 \Omega^{22*}}. \quad (5.2.5)$$

Индекс «1» при квадратной скобке означает, что коэффициент вязкости определен в приближении, соответствующем учету лишь одного коэффициента a^{20} в разложении по полиномам Сонина, что отвечает первому приближению Чепмена–Каулинга [2].

Полезно привести также выражение для вязкости двухкомпонентной газовой смеси [2, 3], следующее из (5.2.4):

$$[\eta]_1 = \frac{1 + Z_\eta}{X_\eta + Y_\eta}, \quad (5.2.6)$$

где

$$\begin{aligned} X_\eta &= \frac{y_1^2}{[\eta_{11}]_1} + \frac{2y_1y_2}{[\eta_{12}]_1} + \frac{y_2^2}{[\eta_{22}]_1}, \\ Y_\eta &= \frac{3}{5} A_{12}^* \times \\ &\times \left\{ \frac{y_1^2}{[\eta_{11}]} \frac{m_1}{m_2} + \frac{2y_1y_2}{[\eta_{12}]} \frac{(m_1 + m_2)}{4m_1m_2} \frac{[\eta_{12}]_1^2}{[\eta_{11}]_1 [\eta_{22}]_1} + \frac{y_2^2}{[\eta_{22}]} \frac{m_2}{m_1} \right\}, \\ Z_\eta &= \frac{3}{5} A_{12}^* \left\{ y_1^2 \frac{m_1}{m_2} + \right. \\ &\left. + 2y_1y_2 \left[\frac{(m_1 + m_2)^2}{4m_1m_2} \left(\frac{[\eta_{12}]_1}{[\eta_{11}]_1} + \frac{[\eta_{12}]_1}{[\eta_{22}]_2} - 1 \right) \right] + y_2^2 \frac{m_2}{m_1} \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Здесь $[\eta_{11}]_1$ и $[\eta_{22}]_1$ — вязкости чистых компонентов 1-го и 2-го сортов, определяемые выражением (5.2.5) и

$$[\eta_{12}]_1 = \frac{5}{3} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \frac{n [D_{12}]_1}{A_{12}^*}. \quad (5.2.8)$$

Как показывает дальнейший анализ (см. гл. 7), в случае изотермической ионизованной газовой смеси вкладом электронного компонента в вязкость можно пренебречь. Тогда выражение (5.2.6) может быть использовано, в частности, для приближенного вычисления вязкости трехкомпонентной частично ионизованной плазмы в отсутствие магнитного поля, если рассматривать ее как двухкомпонентную смесь ионов и атомов одинаковой массы.

Рассмотрим теперь выражения для потоков тепла. Разрешая уравнения (5.1.3) относительно величин $\mathbf{h}_\gamma/p_\gamma$, находим

$$\mathbf{h}_\alpha = -\lambda_\alpha \nabla T - \frac{kT^2}{p} \sum_{\beta=1}^N \sum_{\gamma=1}^N \frac{y_\alpha}{m_\beta} \xi_{\beta\gamma} \frac{|\Lambda|_{\beta\alpha}}{\Lambda} (\mathbf{w}_\beta - \mathbf{w}_\gamma), \quad (5.2.9)$$

где

$$\lambda_\alpha = y_\alpha \sum_{\beta=1}^N y_\beta \frac{|\Lambda|_{\beta\alpha}}{|\Lambda|} \quad (5.2.10)$$

— парциальная теплопроводность частиц сорта α .

Для теплопроводности чистого газа ($N = 1$) имеем

$$[\lambda]_1 = \frac{1}{\Lambda_{11}} = \frac{75}{64} \left(\frac{\pi kT}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d^2 \Omega^{22*}}. \quad (5.2.11)$$

Суммирование (5.2.9) по α дает

$$\mathbf{h} = \sum_\alpha \mathbf{h}_\alpha = -\lambda \nabla T - \frac{kT^2}{p} \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \frac{y_\alpha}{m_\beta} \xi_{\beta\gamma} \frac{|\Lambda|_{\beta\alpha}}{|\Lambda|} (\mathbf{w}_\beta - \mathbf{w}_\gamma). \quad (5.2.12)$$

Здесь

$$\lambda = \sum_\alpha \lambda_\alpha = \sum_\alpha \sum_\beta y_\alpha y_\beta \frac{|\Lambda|_{\beta\alpha}}{|\Lambda|} \quad (5.2.13)$$

— теплопроводность газовой смеси.

Второй член справа в (5.2.12) можно преобразовать, переставив порядок суммирования и поменяв индексы γ и α :

$$\begin{aligned} & -\frac{kT^2}{p} \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \frac{y_\alpha}{m_\beta} \xi_{\beta\gamma} \frac{|\Lambda|_{\beta\alpha}}{|\Lambda|} (\mathbf{w}_\beta - \mathbf{w}_\gamma) = \\ & = -\frac{kT^2}{p} \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\xi_{\beta\alpha}}{m_\beta} (\mathbf{w}_\beta - \mathbf{w}_\alpha) \sum_\gamma y_\gamma \frac{|\Lambda|_{\beta\gamma}}{|\Lambda|} = \\ & = -T \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\xi_{\beta\alpha}}{m_\beta n_\beta} \lambda_\beta (\mathbf{w}_\beta - \mathbf{w}_\alpha) = -T \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\xi_{\alpha\beta}}{m_\alpha n_\alpha} \lambda_\beta (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta). \end{aligned}$$

Для полного потока тепла в газовой смеси на основе (5.2.11) и с учетом определения $\mathbf{h}_\alpha$ (4.2.4) получаем

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \frac{5}{2} \sum_\alpha p_\alpha \mathbf{w}_\alpha + \sum_\alpha \sum_\beta \frac{n_\alpha n_\beta kT}{n [D_{\alpha\beta}]_1} \frac{D_{\alpha\beta}^T}{n_\alpha m_\alpha} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta), \quad (5.2.14)$$

где

$$D_{\alpha\beta}^T = -\mu_{\alpha\beta} \left(\frac{6}{5} C_{\alpha\beta}^* - 1 \right) \frac{\lambda_\alpha}{k}. \quad (5.2.15)$$

При записи (5.2.14)–(5.2.15) использовано явное выражение для параметра $\xi_{\alpha\beta}$ (5.1.8).

Заметим, что коэффициент теплопроводности смеси λ (5.2.13) представляет собой отношение определителей $(N+1)$ -го и N -го порядков

$$\lambda = -\frac{1}{|\Lambda|} \begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \dots & \Lambda_{1N} & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{N1} & \dots & \Lambda_{NN} & y_N \\ y_1 & \dots & y_N & 0 \end{vmatrix}, \quad (5.2.13')$$

где $|\Lambda|$ — определитель, составленный из элементов $\Lambda_{\alpha\beta}$.

Проведем еще небольшое преобразование в третьем члене справа в выражении (5.2.12) рассматривая в виде отдельных членов двойные суммы с $\mathbf{w}_\alpha$ и $\mathbf{w}_\beta$, поменяем местами индексы α и β и переставим порядок суммирования во втором из этих членов.

В результате имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{n_{\alpha} n_{\beta} k T}{n [D_{\alpha\beta}]_1} \frac{D_{\alpha\beta}^T}{n_{\alpha} m_{\alpha}} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}) = \\ = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{n_{\alpha} n_{\beta} k T}{n [D_{\alpha\beta}]_1} \left(\frac{D_{\alpha\beta}^T}{m_{\alpha} n_{\alpha}} - \frac{D_{\beta\alpha}^T}{n_{\beta} m_{\beta}} \right) \mathbf{w}_{\alpha}. \end{aligned}$$

Введем теперь величину $k_{T\alpha}$, которая называется термодиффузионным отношением компонента α и может быть представлена как

$$k_{T\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} y_{\alpha} y_{\beta} \alpha_{\alpha\beta}^T, \quad (5.2.16)$$

где $\alpha_{\alpha\beta}^T$ — термодиффузионный фактор для компонентов α и β , который определяется из соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha\beta}^T [D_{\alpha\beta}]_1 = \frac{D_{\alpha\beta}^T}{m_{\alpha} n_{\alpha}} - \frac{D_{\beta\alpha}^T}{m_{\beta} n_{\beta}} = \\ = \frac{1}{k} \left(\frac{6}{5} C_{\alpha\beta}^* - 1 \right) \mu_{\alpha\beta} \left(\frac{\lambda_{\beta}}{m_{\beta} n_{\beta}} - \frac{\lambda_{\alpha}}{m_{\alpha} n_{\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Тогда выражение для полного потока тепла (5.2.12) можно представить в виде

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \frac{5}{2} \sum_{\alpha} p_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} + p \sum_{\alpha} k_{T\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}. \quad (5.2.18)$$

Заметим, что коэффициенты $k_{T\alpha}$ не являются независимыми, они связаны дополнительным условием

$$\sum_{\alpha} k_{T\alpha} = 0. \quad (5.2.19)$$

Выражения для λ и $D_{\alpha\beta}^T$ (или $k_{T\alpha}$) соответствуют результатам полного второго приближения (в разложении по полиномам Сонина) в методе Чепмена–Энскога. Эти выражения отличаются от выражений, приведенных, например, в известной монографии [3], более простым видом, поскольку соответствующие кинетические коэффициенты записываются при этом через отношение определителей порядка $N + 1$ и N вместо $2N + 1$ и $2N$ в формулах, представленных в работе [3]. Последнее связано с тем обстоятельством, что при вычислении кинетических коэффициентов [3] использовались лишь те члены разложения по полиномам Сонина, которые дают первый неисчезающий вклад в соответствующие кинетические коэффициенты. В частности, для получения ненулевого результата для коэффициента взаимной диффузии достаточно учесть лишь один член, который в нашей схеме расчета соответствует коэффициенту a_{α}^{10} в разложении (4.2.2). Вычисление λ и $D_{\alpha\beta}^T$ связано, однако, с учетом двух коэффициентов разложения (a_{α}^{10} и a_{α}^{11} в нашей схеме). Последовательное использование второго приближения в рамках подхода Чепмена–Каулинга [4, 5] приводит, как было показано впервые [4], к выражению для теплопроводности смеси, совпадающему с приведенным выше более простым результатом (5.2.13'). Ниже мы увидим, что в приближении $13N$ -моментов, соответствующим по точности вычисления коэффициентов переноса полному второму приближению Чепмена–Каулинга, некоторые дополнительные члены возникают также в уравнениях многокомпонентной диффузии в смеси.

Рассмотрим частный случай бинарной смеси газов. Выражение для полного потока тепла в такой смеси можно представить в виде

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \frac{5}{2} kT (n_1 \mathbf{w}_1 + n_2 \mathbf{w}_2) + p kT (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2). \quad (5.2.20)$$

Коэффициент теплопроводности бинарной смеси, следующий из (5.2.13), по своей структуре напоминает выражение для коэффициента вязкости (5.2.6), а именно [3]

$$[\lambda]_1 = \frac{1 + Z_{\lambda}}{X_{\lambda} + Y_{\lambda}}, \quad (5.2.21)$$

где

$$X_{\lambda} = \frac{y_1^2}{[\lambda_{11}]_1} + \frac{2y_1 y_2}{[\lambda_{12}]_1} + \frac{y_2^2}{[\lambda_{22}]_1},$$

$$Y_{\lambda} = \frac{y_1^2}{[\lambda_{11}]_1} U^{(1)} + \frac{2y_1 y_2}{[\lambda_{12}]_1} U^{(Y)} + \frac{y_2^2}{[\lambda_{22}]_1} U^{(2)}, \quad (5.2.22)$$

$$Z_{\lambda} = y_1^2 U^{(1)} + 2y_1 y_2 U^{(Y)} + y_2^2 U^{(2)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 U^{(1)} &= \frac{4}{15} A_{12}^* - \frac{1}{12} \left(\frac{12}{5} B_{12}^* + 1 \right) \frac{m_1}{m_2} + \frac{1}{2} \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 m_2}, \\
 U^{(2)} &= \frac{4}{15} A_{12}^* - \frac{1}{12} \left(\frac{12}{5} B_{12}^* + 1 \right) \frac{m_2}{m_1} + \frac{1}{2} \frac{(m_2 - m_1)^2}{m_1 m_2}, \\
 U^{(Y)} &= \frac{4}{15} A_{12}^* \frac{(m_1 + m_2)}{4m_1 m_2} \frac{[\lambda_{12}]_1^2}{[\lambda_{11}]_1 [\lambda_{22}]_1} - \frac{1}{12} \left(\frac{12}{5} B_{12}^* + 1 \right) - \\
 &\quad - \frac{5}{32 A_{12}^*} \left(\frac{12}{5} B_{12}^* - 5 \right) \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 m_2}, \\
 U^{(Z)} &= \frac{4}{15} A_{12}^* \left[\frac{(m_1 + m_2)}{4m_1 m_2} \left(\frac{[\lambda_{12}]_1}{[\lambda_{11}]_1} + \frac{[\lambda_{12}]_1}{[\lambda_{22}]_1} - 1 \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{12} \left(\frac{12}{5} B_{12}^* + 5 \right). \tag{5.2.23}
 \end{aligned}$$

Величины $[\lambda_{11}]_1$ и $[\lambda_{22}]_1$ есть теплопроводности чистых компонентов молекул сортов 1 и 2 соответственно, определяемые в первом приближении Чепмена–Каулинга формулой (5.2.11), а $[\lambda_{12}]_1$ выражается как

$$[\lambda_{12}]_1 = \frac{15}{4} k \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} [\eta_{12}]_1, \tag{5.2.24}$$

где $[\eta_{12}]_1$ находится из (5.2.8).

Коэффициент k_T (термодиффузионное отношение) в выражении (5.2.20) определен как

$$k_T = y_1 y_2 \alpha_T. \tag{5.2.25}$$

Здесь α_T — термодиффузионный фактор бинарной смеси, который находится из соотношения

$$\alpha_T [D_{12}]_1 = \frac{D_{12}^T}{m_1 n_1} - \frac{D_{21}^T}{m_2 n_2}. \tag{5.2.26}$$

При этом $D_{\alpha\beta}^T$ вычисляется по формуле (5.2.14). Заметим, что $D_{12}^T \neq D_{21}^T$. Более подробно мы обсудим выражение для α_T в следующем параграфе при рассмотрении диффузии и термодиффузии в бинарной смеси.

Отметим, что второй член справа в (5.2.20) обращается в нуль, если определить полный поток тепла в системе отсчета, движущейся со средней молярной скоростью $\mathbf{u}_m = n^{-1} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}$. Это связано с тем,

что по физическому смыслу член $(5/2) kT (n_1 \mathbf{w}_1 + n_2 \mathbf{w}_2)$ представляет собой поток энтальпии, который обусловлен диффузией компонентов смеси в системе отсчета, где равна нулю средне-массовая скорость газа $\mathbf{u}$. Полный поток тепла в системе отсчета, где $\mathbf{u}_m = 0$, определяется тогда как [5]

$$\mathbf{q}_m = -\lambda \nabla T + kT \alpha_T \mathbf{J}_{1m}, \quad (5.2.27)$$

где

$$\mathbf{J}_{1m} = n_1 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_m) = n y_1 y_2 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \quad (5.2.28)$$

представляет собой диффузионный поток частиц компонента 1 в системе отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{u}_m$.

Рассмотрим теперь вклады в выражения для тензора вязких напряжений и потока тепла, связанные с пространственными производными от потоков. В этом случае мы должны оставить в левых частях уравнений (4.3.3) и (4.3.4) члены, пропорциональные $\{\partial q_{\alpha r} / \partial x_s\}$ и $\partial \pi_{\alpha rs} / \partial x_s$. Сохраняя соответствующий член в уравнениях (5.1.2) и разрешая их относительно $\pi_{\gamma rs} / p_\gamma$, мы приходим после суммирования по всем компонентам к выражению вида

$$\begin{aligned} \pi_{rs} &= -2\eta \varepsilon_{rs} - \frac{4}{5p} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} y_{\alpha} \frac{|H|_{\beta\alpha}}{|H|} \left\{ \frac{\partial q_{\beta r}}{\partial x_s} \right\} = \\ &= -2\eta \varepsilon_{rs} - \frac{4}{5p} \sum_{\alpha} \frac{\eta_{\alpha}}{y_{\alpha}} \left\{ \frac{\partial q_{\alpha r}}{\partial x_s} \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

Подобная же процедура в отношении уравнений (5.1.3) приводит к тому, что в правой части выражении для полного потока тепла (5.2.18) появляется дополнительный член, так что выражение для $\mathbf{q}$ принимает вид

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \frac{5}{2} \sum_{\alpha} p_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} + p \sum_{\alpha} k_{T\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} - \frac{2}{5} \frac{T}{p} \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}}{y_{\alpha}} \nabla \pi_{\alpha}. \quad (5.2.30)$$

В частности, для тензора вязких напряжений и потока тепла в простом газе имеем

$$\pi_{rs} = -2\eta \left(\varepsilon_{rs} + \frac{2}{5} \frac{1}{p} \left\{ \frac{\partial q_r}{\partial x_s} \right\} \right), \quad (5.2.31)$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \left(\nabla T + \frac{2}{5} \frac{T}{p} \nabla \pi \right). \quad (5.2.32)$$

Полученные выражения выходят за рамки стандартных линейных соотношений, соответствующих результатам первого (небарнеттовского) приближения метода Чепмена–Энскога, а также обычных

соотношений классической неравновесной термодинамики [6], рассмотренных в п. 2.5. Если считать дополнительные члены имеющими второй порядок малости по числу Кнудсена, то можно применить к этим соотношениям итерационную процедуру, используя для потоков, находящихся под знаком производных, их значения, полученные в первом приближении, когда эти производные не учитываются. В результате

$$\pi_{rs} = -2\eta \left(\varepsilon_{rs} - \frac{2\lambda}{5p} \{ \nabla \nabla \} T \right), \quad (5.2.31')$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \left(\nabla T - \frac{2T}{5p} \eta \nabla^2 \mathbf{u} \right). \quad (5.2.32')$$

Подчеркнем, что выражения (5.2.32) являются более общими чем (5.2.32'). Это легко обнаруживается, если рассмотреть в качестве примера случай установившегося вязкого течения газа в канале, когда из общего уравнения движения (2.3.3) следует, что $\nabla \pi = -\nabla p$. Выражение для потока тепла принимает тогда вид

$$\mathbf{q} = -\lambda \left(\nabla T - \frac{2T}{5p} \nabla p \right), \quad (5.2.33)$$

откуда следует, что дополнительный член, описывающий перенос тепла за счет градиента давления, который наблюдается, например, в узких капиллярных каналах имеет тот же первый порядок величины (по числу Кнудсена), что и основной член, связанный с переносом тепла благодаря градиенту температуры. В последнем разделе настоящей главы будет показано, что присутствие дополнительных членов в выражениях для тензора вязких напряжений и потока тепла, также как и в уравнениях для диффузионных скоростей компонентов, не находится в противоречии с соотношениями переноса, получаемыми в рамках так называемой обобщенной или расширенной неравновесной термодинамики [7–9].

5.3. Диффузия в многокомпонентной смеси

Обратимся к уравнениям (5.1.1). Подставляя в них выражения для парциальных приведенных потоков тепла (5.2.9), приходим к следующей системе уравнений диффузии в многокомпонентной газовой смеси [1]:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_{\alpha} n_{\beta} k T}{n [D_{\alpha\beta}]_1} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}) + \frac{k^2 T^3}{p^2} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \frac{\omega_{\alpha\beta\gamma}}{m_{\gamma}} \xi_{\gamma\delta} \xi_{\alpha\beta} (\mathbf{w}_{\gamma} - \mathbf{w}_{\delta}) = \\ = -p \mathbf{d}_{\alpha} - \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_{\alpha} n_{\beta} k T}{n [D_{\alpha\beta}]_1} \left(\frac{D_{\alpha\beta}^T}{m_{\alpha} n_{\alpha}} - \frac{D_{\beta\alpha}^T}{m_{\beta} n_{\beta}} \right) \nabla \ln T, \quad (5.3.1) \end{aligned}$$

где

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{m_\beta} \frac{|\Lambda|_{\gamma\beta}}{|\Lambda|} - \frac{1}{m_\alpha} \frac{|\Lambda|_{\gamma\alpha}}{|\Lambda|}. \quad (5.3.2)$$

В работах [10, 11] было показано, что вместо первого и второго члена в левой части (5.3.1) может быть записан один объединяющий их член вида

$$\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_\alpha n_\beta kT}{n [D_{\alpha\beta}]_1} (1 - \Delta_{\alpha\beta}) (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta),$$

где $\Delta_{\alpha\beta}$ — поправка второго приближения к бинарному коэффициенту диффузии. Такое представление оказывается справедливым и в более высоких приближениях метода моментов [11, 12], при этом $\Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha\beta}^{(2)}$ заменяется на $\Delta_{\alpha\beta}^{(n)}$ при $n = 3, 4, \dots$. Выражения для $\Delta_{\alpha\beta}^{(n)}$ оказываются в общем случае достаточно сложными [11] и здесь не приводятся.

С учетом введенного в предыдущем параграфе определения для термодиффузионного отношения $k_{T\alpha}$ (5.2.15) уравнения диффузии (5.3.1) могут быть тогда представлены в виде

$$\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{y_\alpha y_\beta}{[D_{\alpha\beta}]_1} (1 - \Delta_{\alpha\beta}) (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) = -\mathbf{d}_\alpha - k_\alpha^T \nabla \ln T. \quad (5.3.3)$$

Эти уравнения согласуются с известным представлением уравнений многокомпонентной диффузии в форме Стефана–Максвелла [3, 11, 12]. Мы уже обсуждали подобную форму уравнений в п. 2.5, посвященном неравновесной термодинамике многокомпонентной плазмы. Сравнение уравнений (5.3.3) с (2.5.29) показывает, что фигурирующие там феноменологические коэффициенты $\Lambda_{\alpha q}$ и $\Lambda_{\alpha\beta}$ связаны с кинетическими коэффициентами в выражении (5.3.3) соотношениями

$$\Lambda_{\alpha q} = p k_\alpha^T, \quad \Lambda_{\alpha\beta} = \frac{p y_\alpha y_\beta}{[D_{\alpha\beta}]_1} (1 - \Delta_{\alpha\beta}). \quad (5.3.4)$$

Уравнения (5.3.3) вместе с дополнительным условием $\sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0$ могут быть разрешены относительно диффузионных скоростей или диффузионных потоков компонентов, выраженных через диффузионную термодинамическую силу $p \mathbf{d}_\gamma$ и градиент температуры. Подобное представление в рамках неравновесной термодинамики также рассматривалось в п. 2.5. Оно соответствует результатам метода Чепмена–Энскога [3, 5], которые кратко анализировались в п. 4.7. В частности для диффузионного потока $\mathbf{J}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha$ имеем [5]

$$\mathbf{J}_\alpha = -\rho_\alpha \sum_\beta D_{\alpha\beta} \mathbf{d}_\beta - \rho_\alpha D_\alpha^T \nabla \ln T, \quad (5.3.5)$$

где $D_{\alpha\beta}$ и D_{α}^T — коэффициенты многокомпонентной диффузии и термодиффузии, соответственно. Как было показано [13, 14], коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}$ при $\alpha \neq \beta$ являются симметричными ($D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$), а диагональные коэффициенты — положительными ($D_{\alpha\alpha} > 0$).

Выражения для коэффициентов многокомпонентной диффузии можно получить, решая уравнения (5.3.3) с использованием условия $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0$. Система уравнений для определения $D_{\alpha\beta}$ принимает в этом случае вид [14]

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} D_{\alpha\beta} = 0,$$

$$\sum_{\beta} \frac{y_{\alpha} y_{\beta}}{[D_{\alpha\beta}]_1} (1 - \Delta_{\alpha\beta}) (D_{\alpha\gamma} - D_{\beta\gamma}) = \delta_{\alpha\gamma} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho}.$$

Два ряда этих уравнений можно объединить в систему уравнений вида

$$\sum_{\beta \neq \alpha} \left[\frac{y_{\alpha} y_{\beta}}{[D_{\alpha\beta}]_1} (1 - \Delta_{\alpha\beta}) + \sum_{\delta \neq \alpha} \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}} \frac{y_{\delta} y_{\beta}}{[D_{\alpha\beta}]_1} (1 - \Delta_{\alpha\delta}) \right] D_{\beta\gamma} = \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} - \delta_{\alpha\gamma}.$$

Система уравнений для определения коэффициентов D_{α}^T может быть получена аналогичным образом.

Заметим, что в литературе встречаются самые различные определения коэффициентов многокомпонентной диффузии и термодиффузии [3, 5, 13, 14]. Принятые здесь определения согласуются с соотношениями симметрии Онзагара в неравновесной термодинамике [6] и выглядят более предпочтительными, чем определения, используемые, например, в [3].

Рассмотрим теперь случай двухкомпонентной (бинарной) смеси газов. Определим диффузионный поток компонента 1 в системе отсчета, где равна нулю средне-молярная скорость смеси ($\mathbf{u}_m = 0$). С учетом определения $\mathbf{J}_{1m}$ (5.2.27), используя (5.3.3) находим

$$\mathbf{J}_{1m} = -n [D_{12}]_2 (\nabla y_1 + \alpha_p y_1 y_2 \nabla \ln p + [\alpha_T]_1 y_1 y_2 \nabla \ln T). \quad (5.3.6)$$

Здесь $[D_{12}]_2 = [D_{12}]_1 / (1 - \Delta_{12})$ соответствует коэффициенту бинарной диффузии во втором приближении, а α_p и α_T называются постоянными бародиффузии и термодиффузии, соответственно ¹⁾. При этом

$$\alpha_p = \frac{m_2 - m_1}{m_1 y_1 + m_2 y_2}, \quad (5.3.7)$$

¹⁾ Индекс «1» при постоянной термодиффузии α_T означает на самом деле первое не исчезающее приближение в расчете этого коэффициента, поскольку вклад коэффициента разложения a_{α}^{10} в термодиффузию равен нулю. Напротив при расчете коэффициента бинарной диффузии второго приближения $[D_{12}]_2$ имеет значение учет как коэффициента a_{α}^{10} так и коэффициента a_{α}^{11} .

$$[\alpha_T]_1 = \frac{5}{2} (a_2 y_2 - a_1 y_1), \quad (5.3.8)$$

$$\Delta_{12} = \frac{5}{2} \mu_{12} \left(\frac{6}{5} C_{12}^* - 1 \right) \left(\frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} \right), \quad (5.3.9)$$

где

$$a_1 = \frac{2}{5} \frac{T}{pn} \xi_{12} \left(\frac{\Lambda_{22}}{m_1} + \frac{\Lambda_{21}}{m_2} \right) \frac{1}{|\Lambda|}, \quad (5.3.10)$$

$$a_2 = \frac{2}{5} \frac{T}{pn} \xi_{12} \left(\frac{\Lambda_{12}}{m_1} + \frac{\Lambda_{11}}{m_2} \right) \frac{1}{|\Lambda|};$$

$$|\Lambda| = \Lambda_{11} \Lambda_{22} - \Lambda_{12}^2.$$

Подставляя в (5.3.10) значения $\Lambda_{\alpha\alpha}$ и $\Lambda_{\alpha\beta}$, можно привести выражения для $[\alpha_T]_1$ и Δ_{12} к виду, известному из литературы [2, 3, 5]:

$$[\alpha_T]_1 = \frac{1}{30} \frac{1}{[\lambda_{12}]_1} \frac{S^{(1)} y_1 - S^{(2)} y_2}{X_\lambda + Y_\lambda} (6C_{12}^* - 5), \quad (5.3.11)$$

$$\Delta_{12} = \frac{W}{X_\lambda + Y_\lambda} \frac{(6C_{12}^* - 5)^2}{60}, \quad (5.3.12)$$

где

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= \frac{m_1 + m_2}{2m_2} \frac{[\lambda_{12}]_1}{[\lambda_{11}]_1} - \frac{15}{4A_{12}^*} \frac{m_2 - m_1}{2m_1} - 1, \\ S^{(2)} &= \frac{m_1 + m_2}{2m_1} \frac{[\lambda_{12}]_1}{[\lambda_{22}]_1} - \frac{15}{4A_{12}^*} \frac{m_1 - m_2}{2m_2} - 1, \\ W &= \frac{y_1^2}{[\lambda_{11}]_1} \frac{m_1}{m_2} + \frac{2y_1 y_2}{[\lambda_{12}]_1} \left[1 + d \frac{15}{8A_{12}^*} \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 m_2} \right] + \\ &\quad + \frac{y_2^2}{[\lambda_{22}]_1} \frac{m_2}{m_1}, \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

а коэффициенты X_λ и Y_λ определены выражениями (5.2.21).

5.4. Бародиффузия в вязком потоке

До сих пор при анализе явлений переноса в смеси мы опирались на уравнения (5.1.1)–(5.1.3). Выше уже отмечалось, что в некоторых случаях может оказаться существенным учет членов, пропорциональных пространственным производным от потоков, которые были оставлены в уравнениях (4.3.2)–(4.3.4). Рассмотрим, например, установившееся

вязкое течение газовой смеси в канале. В этом случае $d\mathbf{u}/dt = 0$ и из уравнения движения для смеси (2.2.17) следует

$$\frac{\partial p}{\partial x_r} = -\frac{\partial \pi_{rs}}{\partial x_s} + \sum_{\alpha} n_{\alpha} X_{\alpha r}. \quad (5.4.1)$$

В этом случае уравнение движения для отдельного компонента смеси (4.3.2) принимает вид

$$\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x_r} + \frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} - n_{\alpha} (X_{\alpha r} + e_{\alpha} E_r) = R_{\alpha r}. \quad (5.4.2)$$

Используя линейное соотношение (5.2.1), имеем

$$\frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} = -2\eta_{\alpha} \frac{\partial \varepsilon_{rs}}{\partial x_s}. \quad (5.4.3)$$

На первый взгляд эта величина, пропорциональная второй производной от скорости, имеет порядок $(\lambda/L)^2$ и может быть поэтому опущена. Однако, из (5.4.1) следует, что

$$2\eta \frac{\partial \varepsilon_{rs}}{\partial x_s} = \frac{\partial p}{\partial x_r} - \sum_{\alpha} n_{\alpha} X_{\alpha r}. \quad (5.4.4)$$

Последнее означает, что для установившихся вязких течений эта величина может иметь первый порядок малости, в отсутствие внешних сил фактически определяемый значением градиента давления. Тогда, исключая $\partial \varepsilon_{rs}/\partial x_s$ в уравнении (5.4.2) с помощью (5.4.3) и (5.4.4), уравнение (5.4.2) можно представить в виде

$$\left(\nabla p_{\alpha} - \frac{\eta_{\alpha}}{\eta} \nabla p \right) - \left(n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} - \frac{\eta_{\alpha}}{\eta} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} \right) - n_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{E} = \mathbf{R}_{\alpha}. \quad (5.4.5)$$

Если учесть теперь вклад $\partial \pi_{\alpha rs}/\partial x_s$ также и в уравнениях для введенных тепловых потоков $\mathbf{h}_{\gamma}$ в соответствии с уравнениями (4.3.4) и подставить получающиеся решения для $\mathbf{h}_{\alpha}$ и в $\mathbf{R}_{\alpha}$ (правая часть уравнения (5.1.1)), то приходим к следующей окончательной системе уравнений диффузии в вязком потоке смеси [1]:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{y_{\alpha} y_{\beta}}{[D_{\alpha\beta}]_1} (1 - \Delta_{\alpha\beta}) (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}) = & -\nabla y_{\alpha} - \left(y_{\alpha} - \frac{\eta_{\alpha} + \omega_{\alpha}}{\eta} \right) \nabla \ln p + \\ & + \left(n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} - \frac{\eta_{\alpha} + \omega_{\alpha}}{\eta} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} \right) + n_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{E} - k_{\alpha}^T \nabla \ln T. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Здесь коэффициент η_α определяется выражением (5.2.2), а для поправки ω_α имеем

$$\omega_\alpha = \frac{2}{5} k \left(\frac{T}{p} \right)^2 \sum_\beta \sum_\gamma \xi_{\alpha\beta} \eta_\gamma \omega_{\alpha\beta\gamma}, \quad (5.4.7)$$

где коэффициент $\omega_{\alpha\beta\gamma}$ определен формулой (5.3.2).

В случае двухкомпонентной смеси из (5.4.6) следует, что

$$\mathbf{J}_{1m} = -n [D_{12}]_2 \left(\nabla y_1 + [\alpha_p^v]_2 y_1 y_2 \nabla \ln p + [\alpha_T]_1 y_1 y_2 \nabla \ln T \right). \quad (5.4.8)$$

При этом постоянная бародиффузии в вязком потоке α_p^v , рассчитанная во втором приближении, оказывается существенно кинетической величиной и определяется выражением [1]

$$[\alpha_p^v]_2 = [\alpha_p^v]_1 (1 - \Delta_p) - \frac{2}{5} [\alpha_T]_1, \quad (5.4.9)$$

где

$$[\alpha_p^v]_1 = \frac{1}{[\eta]_1} \left(\frac{[\eta_2]_1}{y_2} - \frac{[\eta_1]_1}{y_1} \right) \quad (5.4.10)$$

— постоянная бародиффузии, рассчитанная в первом приближении. Поправка второго приближения Δ_p записывается как

$$\Delta_p = a_1 + a_2 =$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{m_2 - m_1}{(m)_y} y_1 y_2 [\alpha_T]_1 + \frac{m_1 + m_2}{(m)_y} \frac{\Delta_{12}}{(6/5)(C_{12}^* - 1)} \right), \quad (5.4.11)$$

где $[\alpha_T]_1$ и Δ_{12} определены выражениями (5.3.11)–(5.3.12).

Заметим, что используя выражения (5.2.2) для $[\eta_\alpha]_1$ и значения $H_{\alpha\alpha}$ и $H_{\alpha\beta}$ (5.1.6), можно представить $[\alpha_p^v]_1$ в виде

$$[\alpha_p^v]_1 = \frac{3}{5} A_{12}^* \frac{(m_1 + m_2)^2}{2m_1 m_2} \frac{K^{(1)} y_1 - K^{(2)} y_2}{1 + Z_\eta}, \quad (5.4.12)$$

где

$$K^{(1)} = \frac{[\eta_{12}]_1}{[\eta_{11}]_1} - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}, \quad K^{(2)} = \frac{[\eta_{12}]_1}{[\eta_{22}]_1} - \frac{2m_2}{m_1 + m_2},$$

а величина Z_η определена выражением (5.2.7).

Постоянная бародиффузии (5.4.9) заметно отличается от соответствующего значения для невязких течений. Наиболее существенное отличие (5.4.9) от (5.3.3) состоит в том, что постоянная бародиффузии в вязком потоке зависит от характера взаимодействия частиц смеси и, также как постоянная термодиффузии, может иметь в общем случае

любой знак. Это особенно наглядно проявляется, если рассмотреть случай малого относительного различия масс и эффективных сечений рассеяния частиц. В частности, для модели частиц — твердых упругих сфер с диаметрами d_1 и d_2 , разлагая соответствующие выражения в ряд по малым величинам, находим

$$[\alpha_p^v]_1 = 1,13 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} - 1,50 \frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1}. \quad (5.4.13)$$

Учет поправок второго приближения изменяет значения коэффициентов в этом выражении на 1,41 и 1,26, соответственно [1].

5.5. Производство энтропии. Обобщенная неравновесная термодинамика газовой смеси

В п. 2.5 рассматривался вывод выражений для плотности потока энтропии и производства энтропии с использованием термодинамического тождества Гиббса и уравнений сохранения. Аналогичные результаты могут быть получены и непосредственно, исходя из кинетических выражений для этих величин с использованием линеаризованного уравнения Больцмана и разложения функции распределения в ряд по системе ортогональных полиномов. При этом появляется возможность некоторого обобщения традиционных результатов неравновесной термодинамики, связанная с учетом в выражении для производства энтропии дополнительных членов, пропорциональных произведениям потоков на пространственные производные от потоков (моментов) другой тензорности. Существенно, что несмотря на формальное усложнение вида обобщенных термодинамических сил за счет новых членов выражение для производства энтропии по-прежнему сохраняет вид билинейной комбинации обобщенных термодинамических сил и потоков. При этом линейные феноменологические соотношения обобщенной неравновесной термодинамики находятся в полном соответствии с соотношениями кинетической теории, следующими из линеаризованных уравнений моментов. Благодаря этому рассмотренные выше эффекты, связанные с учетом пространственных производных от потока тепла и тензора вязких напряжений в линеаризованных уравнениях моментов, органичным образом входят в схему обобщенной неравновесной термодинамики.

Представим функцию распределения f_α в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} (1 + \phi_\alpha), \quad |\phi_\alpha| \ll 1. \quad (5.5.1)$$

Поправка ϕ_α , как мы уже видели, удовлетворяет линеаризованному кинетическому уравнению (4.6.7). Рассмотрим для простоты стационарное состояние газовой смеси в и опустим пока член $f_\alpha^{(0)} D_\alpha \phi_\alpha$ в уравнении (4.6.3). Линеаризованное кинетическое уравнение

принимает тогда форму уравнения (4.6.7), в котором мы опустим для простоты члены, зависящие от магнитного поля:

$$f_{\alpha}^{(0)} \left[\frac{n}{n_{\alpha}} \mathbf{c}_{\alpha} \cdot \mathbf{d}_{\alpha} + \gamma_{\alpha} \left(c_{\alpha r} c_{\alpha s} - \frac{1}{3} \delta_{rs} c_{\alpha}^2 \right) \varepsilon_{rs} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\gamma_{\alpha} c_{\alpha}^2 - 5 \right) \mathbf{c}_{\alpha} \cdot \frac{1}{T_{\alpha}} \nabla T_{\alpha} \right] = - \sum_{\beta} n_{\alpha} n_{\beta} I_{\alpha\beta}(\phi). \quad (5.5.2)$$

Нетрудно показать, что в линейном приближении по ϕ_{α} выражение для локального производства энтропии σ (2.3.5) в уравнении баланса энтропии (2.3.3) может быть представлено как

$$\sigma = k \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N n_{\alpha} n_{\beta} \int \phi_{\alpha} I_{\alpha\beta}(\phi) d\mathbf{v}_{\alpha}. \quad (5.5.3)$$

Подставляя в него вместо интегрального оператора столкновений левую часть линеаризованного кинетического уравнения (5.5.2), интегрируя по скоростям и используя определения для потоков $\mathbf{h}$, π_{rs} и диффузионных скоростей $\mathbf{w}_{\alpha}$, находим

$$\sigma = -\frac{1}{T} \left[(\mathbf{h} \cdot \nabla \ln T + \pi_{rs} \varepsilon_{rs} + p \sum_{\alpha=1}^{N-1} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_N) \cdot \mathbf{d}_{\alpha}) \right]. \quad (5.5.4)$$

При выводе (5.5.4) использовано условие $\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{d}_{\alpha} = 0$.

Полученный результат находится в полном согласии с выражением для производства энтропии (2.5.22), найденным ранее в рамках обычных приемов неравновесной термодинамики. (Напомним что для приведенного потока тепла в кинетической теории мы используем теперь обозначение $\mathbf{h}$ вместо $\mathbf{J}_q$). Линейные соотношения переноса (2.5.23)–(2.5.25), соответствующие представлению (5.5.4), также согласуются с выражениями, получаемыми в кинетической теории.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как согласуется с выводами неравновесной термодинамики учет члена вида $f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{c}_{\alpha} \cdot \nabla) \phi_{\alpha}$ в линеаризованном кинетическом уравнении (4.6.3). Ранее мы уже установили, что в уравнениях моментов, получаемых с помощью (4.6.3), использование этих членов приводит к появлению в линейных соотношениях переноса пространственных производных от потоков, которые в некоторых случаях имеют тот же порядок величины, что и основные линейные члены. Как видно из структуры общего линеаризованного уравнения для моментов функции распределения или для коэффициентов $n_{\alpha} b_{\alpha}^{mn}$, приведенного в Приложении 1, под знаком пространственной производной фигурируют в этом случае тензорные величины (моменты) только $(m-1)$ -го и $(m+1)$ -го ранга. Прямой расчет показывает [8, 9],

что и в выражении для производства энтропии (5.5.3) после подстановки вместо интегрального оператора левой части кинетического уравнения (с учетом дополнительных членов) и интегрирования по скоростям возникают билинейные комбинации тензорных моментов ранга m и пространственных производных от моментов $(m-1)$ -го и $(m+1)$ -го ранга.

Мы не будем здесь выписывать получающихся при этом общих выражений [8, 9], а ограничимся лишь приближением $13N$ моментов. Полное выражение для производства энтропии принимает в этом случае вид [9]

$$\begin{aligned} \sigma = & -\frac{1}{T} \sum_{\alpha} \left[h_{\alpha r} \left(\frac{\partial \ln T}{\partial x_r} + \frac{2}{5} \frac{1}{p_{\alpha}} \frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{T} \sum_{\alpha} \left[\pi_{\alpha rs} \left(\varepsilon_{rs} + \frac{2}{5} \frac{1}{p_{\alpha}} \left\{ \frac{\partial q_{\alpha r}}{\partial x_s} \right\} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{T} \sum_{\alpha=1}^{N-1} (w_{\alpha r} - w_{Nr}) \cdot p \mathbf{d}_{\alpha}^*. \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Здесь

$$p \mathbf{d}_{\alpha r}^* = p d_{\alpha r} + \left(\frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \frac{\partial \pi_{rs}}{\partial x_s} \right). \quad (5.5.6)$$

Отвечающие представлению (5.5.5) линейные феноменологические соотношения неравновесной термодинамики могут быть записаны в том же виде, что и обычные соотношения (5.5.4), но с заменой термодинамических сил $\nabla \ln T$, ε_{rs} и $p \mathbf{d}_{\alpha}$ на обобщенные термодинамические силы, фигурирующие в круглых скобках в выражении для производства энтропии (5.5.5), которые включают дополнительные члены, пропорциональные пространственным производным от соответствующих потоков.

Вклад дополнительных членов в уравнения диффузии, связанный с заменой $p \mathbf{d}_{\alpha}$ на $p \mathbf{d}_{\alpha}^*$, уже обсуждался нами в п. 5.4 в связи с проблемой бародиффузии в вязком потоке смеси. В уравнениях для тензоров вязких напряжений и потоков тепла появление дополнительных членов приводит к возрастанию числа соотношений симметрии между коэффициентами матрицы Онзагера. В частности, для π_{rs} и $\pi_{\alpha rs}$ имеем

$$\begin{aligned} \pi_{rs} &= -K_{00} \varepsilon_{rs} + \sum_{\beta=1}^N K_{0\beta} \frac{2}{5} \frac{1}{p_{\beta}} \left\{ \frac{\partial q_{\beta r}}{\partial x_s} \right\}, \\ \pi_{\alpha rs} &= -K_{\alpha 0} \varepsilon_{rs} + \sum_{\beta=1}^N K_{\alpha \beta} \frac{2}{5} \frac{1}{p_{\beta}} \left\{ \frac{\partial q_{\beta r}}{\partial x_s} \right\}. \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

При этом $K_{\alpha 0} = K_{0\alpha}$. Подобные же соотношения для перекрестных коэффициентов могут быть получены при записи соответствующих выражений для $\mathbf{h}$ и $\mathbf{h}_\alpha$.

Рассмотрим случай чистого газа ($N = 1$). Соотношения для π_{rs} и q_r принимают в этом случае вид

$$\begin{aligned}\pi_{rs} &= -K_{00} \left(\varepsilon_{rs} + \frac{2}{5} \frac{1}{p} \left\{ \frac{\partial q_r}{\partial x_s} \right\} \right), \\ q_r &= -L_{00} \left(\frac{\partial T}{\partial x_r} + \frac{2}{5} \frac{1}{p} \frac{\partial \pi_{rs}}{\partial x_s} \right).\end{aligned}\tag{5.5.8}$$

Полученные соотношения полностью согласуются с выражениями (5.2.31), (5.2.32), следующими из непосредственного решения уравнений моментов для простого газа в приближении 13 моментов. При этом $K_{oo} = 2[\eta]_1$, $L_{00} = [\lambda]_1 T$.

Отметим, что усложнение вида термодинамических сил за счет производных от потоков не вызвало необходимости в ревизии значений коэффициентов K_{oo} и L_{00} , которые по-прежнему определяются значениями обычной вязкости и теплопроводности. Более того, как и в обычной классической схеме [6], производство энтропии оказывается линейной комбинацией квадратичных относительно потоков членов:

$$\sigma = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{K_{00}} \pi_{rs} \pi_{rs} + \frac{1}{L_{00}} q_r q_r \right).\tag{5.5.9}$$

Положительность производства энтропии гарантируется при этом положительностью коэффициентов K_{oo} и L_{00} или очевидными условиями $\eta > 0$ и $\lambda > 0$.

Анализ показывает, что аналогичная ситуация имеет место и в случае многокомпонентной газовой смеси.

Вообще говоря, системы уравнений (5.5.7) для потоков требуют самосогласованного решения, поскольку термодинамические силы содержат производные от потоков другой тензорности. Эта ситуация несколько отличается от привычного представления феноменологических уравнений неравновесной термодинамики, в которых слева фигурируют потоки, а справа — градиенты обычных термодинамических переменных. Можно представить полученные соотношения также в каноническом виде, если использовать некоторую итерационную процедуру, когда в качестве малого параметра используется число Кнудсена. Это соответствует тому, что во втором приближении по числу Кнудсена в выражения для пространственных производных от потоков подставляются обычные линейные соотношения первого приближения. Аналогичные результаты получаются в линеаризованном барнеттовском приближении метода Чепмена–Энскога.

Последовательное применение результатов барнеттовского приближения приводит к появлению в выражении для производства энтропии

некоторых дополнительных нефизических потоков той же тензорности, что и основные потоки. Соответственно расширяется система линейных феноменологических уравнений. Помимо обычных соотношений симметрии, характерных для векторных потоков, в полной системе уравнений появляются новые взаимосвязи между коэффициентами в уравнениях одной и той же тензорности, обеспечивающие выполнение соотношений Онзагера [15, 16]. Аналогичные результаты можно получить и с помощью метода моментов, если использовать большее число моментных уравнений, чем в приближении $13N$ моментов. Детальный анализ соответствующих выражений можно найти в работах [8, 9].

Глава 6

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В МНОГОСОРТНОЙ ПЛАЗМЕ

6.1. Многосортная неізотермическая плазма в магнитном поле

Мы вернемся теперь к общей системе уравнений (4.3.5)–(4.3.7) для неізотермической многосортной плазмы. Напомним, что $G_{\alpha\beta}^{(1)} = -n_\alpha \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1}$, где $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ — характерная частота столкновений частиц сортов α и β , определяемая выражением (3.1.12), и введем ряд новых коэффициентов $A_{\alpha\beta}^{(n)} = G_{\alpha\beta}^{(n)} / G_{\alpha\beta}^{(1)}$. Пренебрегая для простоты действием сил неэлектромагнитной природы, можно переписать систему уравнений (4.3.5)–(4.3.7) в виде [1, 2]

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} n_{\alpha} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left[\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta} + \frac{\gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha} + \gamma_{\beta}} A_{\alpha\beta}^{(2)} \left(\frac{\mathbf{h}_{\alpha}}{\gamma_{\alpha} p_{\alpha}} - \frac{\mathbf{h}_{\beta}}{\gamma_{\beta} p_{\beta}} \right) \right] = \\ = - \left(\nabla p_{\alpha} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \nabla p \right) + n_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{E}' + \rho_{\alpha} (\mathbf{w}_{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}_{\alpha}) - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \quad (6.1.1) \end{aligned}$$

$$\sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \pi_{\beta rs} = -\bar{\eta}_{\alpha} W_{rs} + \frac{1}{2} (\pi_{\alpha tr} e_{s\ell m} \omega_{\alpha m} + \pi_{\alpha \ell s} e_{r\ell m} \omega_{\alpha m}) \tau_{\alpha}, \quad (6.1.2)$$

$$\sum_{\beta} b_{\alpha\beta} \mathbf{h}_{\beta} = -\bar{\lambda}_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha} + (\mathbf{h}_{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}_{\alpha}) \tau_{\alpha}^*. \quad (6.1.3)$$

Здесь

$$W_{rs} = 2\varepsilon_{rs} = \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} - \frac{2}{3} \delta_{rs} \frac{\partial u_{\ell}}{\partial x_{\ell}}, \quad (6.1.4)$$

$$\mathbf{N}_\alpha = \nabla T_\alpha + \frac{1}{k} \sum_{\beta \neq \alpha} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \times \left[\frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta} A_{\alpha\beta}^{(7)} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) + 2\theta_{\alpha\beta} \mathbf{w}_\alpha \right]. \quad (6.1.5)$$

Коэффициенты уравнений (6.1.1)–(6.1.3) определены выражениями

$$\begin{aligned} a_{\alpha\alpha} &= b_{\alpha\alpha} = 1, \\ a_{\alpha\beta} &= \frac{2}{3} \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \frac{p_\alpha}{p_\beta} \left(1 + \frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha} \right)^{-1} \tau_\alpha \tau_{\alpha\beta}^{-1} A_{\alpha\beta}^{(4)}, \\ b_{\alpha\beta} &= \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \frac{p_\alpha}{p_\beta} \tau_\alpha^* \tau_{\alpha\beta}^{-1} A_{\alpha\beta}^{(6)}, \\ \bar{\eta}_\alpha &= \frac{1}{2} p_\alpha \tau_\alpha, \quad \bar{\lambda}_\alpha = \frac{5}{2} \frac{k}{m_\alpha} p_\alpha \tau_\alpha^*, \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

где вводятся эффективные частоты (обратные времена) для частиц сорта α

$$\tau_\alpha^{-1} = \frac{1}{8} (A_{\alpha\alpha}^{(3)} + A_{\alpha\alpha}^{(4)}) \tau_{\alpha\alpha}^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \left(1 + \frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha} \right)^{-1} A_{\alpha\beta}^{(3)} \tau_{\alpha\beta}^{-1}, \quad (6.1.7)$$

$$(\tau_\alpha^*)^{-1} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\alpha}^{(5)} + A_{\alpha\alpha}^{(6)}) \tau_{\alpha\alpha}^{-1} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \left(1 + \frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha} \right)^{-1} A_{\alpha\beta}^{(5)} \tau_{\alpha\beta}^{-1}. \quad (6.1.8)$$

Заметим, что в случае изотермической плазмы ($T_\alpha = T$) имеем

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \frac{y_\alpha H_{\alpha\beta}}{y_\beta H_{\alpha\alpha}}, \quad b_{\alpha\beta} = \frac{y_\alpha \Lambda_{\alpha\beta}}{y_\beta \Lambda_{\alpha\alpha}}, \\ \tau_\alpha^{-1} &= \frac{p}{2y_\alpha} H_{\alpha\alpha}, \quad (\tau_\alpha^*)^{-1} = \frac{5}{2} \frac{kT}{m_\alpha} \frac{p}{y_\alpha} \Lambda_{\alpha\alpha}, \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

где коэффициенты $H_{\alpha\alpha}$, $H_{\alpha\beta}$, $\Lambda_{\alpha\alpha}$, $\Lambda_{\alpha\beta}$ определены выражениями (5.1.5), (5.1.6)

В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B} = 0$) общие решения уравнений (6.1.2) и (6.1.3) записываются очевидным образом:

$$\pi_{\alpha rs} = - \sum_\beta \frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|} \bar{\eta}_\beta W_{rs}, \quad \mathbf{h}_\alpha = - \sum_\beta \frac{|b|_{\beta\alpha}}{|b|} \bar{\lambda}_\beta \mathbf{N}_\beta. \quad (6.1.10)$$

При $T_\alpha = T$ с учетом соотношений (6.1.9) для коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ выражения (6.1.10) полностью согласуются с результатами (5.2.1) и (5.2.10), полученными в предыдущей главе.

Для решения систем уравнений (6.1.2) и (6.1.3) при наличии произвольно ориентированного магнитного поля образуем на основе (6.1.2) последовательность уравнений для свертки тензора $\pi_{\alpha rs}$ с тензором $e_{lrk}\omega_{\alpha s}$, вектором $\omega_{\alpha s}$, тензорами $e_{lrk}\omega_{\alpha k}\omega_{\alpha s}$ и $\omega_{\alpha k}\omega_{\alpha s}$, а на основе (6.1.3) уравнения для $h_{\alpha r}e_{lrk}\omega_{\alpha k}$ и $h_{\alpha r}\omega_{\alpha r}$. Используя затем свойства антисимметричного единичного тензора $e_{rs\ell}$, после громоздких, но несложных преобразований приходим к выражению для $\pi_{\alpha rs}$, записанному с помощью пяти коэффициентов вязкости [3]:

$$\pi_{\alpha rs} = -\eta_{\alpha}^{(0)}W_{rs}^{(0)} - \eta_{\alpha}^{(1)}W_{rs}^{(1)} - \eta_{\alpha}^{(2)}W_{rs}^{(2)} + \\ + \eta_{\alpha}^{(3)}W_{rs}^{(3)} + \eta_{\alpha}^{(4)}W_{rs}^{(4)}, \quad (6.1.11)$$

где [2]

$$\eta_{\alpha}^{(0)} = \sum_{\beta} \frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|} \bar{\eta}_{\beta}, \quad \eta_{\alpha}^{(1)} = \sum_{\beta} \frac{|a^*|_{\beta\alpha}}{|a^*|} \bar{\eta}_{\beta}, \\ \eta_{\alpha}^{(2)} = \sum_{\beta} \frac{|a^{**}|_{\beta\alpha}}{|a^{**}|} \bar{\eta}_{\beta}, \quad (6.1.12) \\ \eta_{\alpha}^{(3)} = \sum_{\beta} \omega_{\beta}\tau_{\beta} \frac{|a^*|_{\beta\alpha}}{|a^*|} \eta_{\beta}^{(0)}, \quad \eta_{\alpha}^{(4)} = \frac{1}{2} \sum_{\beta} \omega_{\beta}\tau_{\beta} \frac{|a^{**}|_{\beta\alpha}}{|a^{**}|} \eta_{\beta}^{(0)}.$$

Аналогичным образом находим выражения для $\mathbf{h}_{\alpha}$, которые удобно представить, вводя компоненты вектора $\mathbf{N}_{\alpha}$, соответственно параллельную и перпендикулярную магнитному полю [2]:

$$\mathbf{h}_{\alpha} = - \sum_{\beta} \frac{|b|_{\beta\alpha}}{|b|} \bar{\lambda}_{\beta} \mathbf{N}_{\beta||} - \\ - \sum_{\beta} \frac{|b^*|_{\beta\alpha}}{|b^*|} \left[\bar{\lambda}_{\beta} \mathbf{N}_{\beta\perp} + \omega_{\beta}\tau_{\beta}^* \sum_{\gamma} \frac{|b|_{\gamma\beta}}{|b|} \bar{\lambda}_{\gamma} (\mathbf{N}_{\gamma} \times \mathbf{k}) \right]. \quad (6.1.13)$$

Здесь

$$\mathbf{N}_{\beta||} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}_{\beta}), \quad \mathbf{N}_{\beta\perp} = \mathbf{k} \times (\mathbf{N}_{\beta} \times \mathbf{k}).$$

Элементы определителей, помеченные одной и двумя звездочками, связаны с коэффициентами $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$a_{\alpha\beta}^* = a_{\alpha\beta} + \frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|} \omega_{\alpha}\tau_{\alpha}\omega_{\beta}\tau_{\beta}, \quad a_{\alpha\beta}^{**} = a_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|} \omega_{\alpha}\tau_{\alpha}\omega_{\beta}\tau_{\beta}, \\ b_{\alpha\beta}^* = b_{\alpha\beta} + \frac{|b|_{\beta\alpha}}{|b|} \omega_{\alpha}\tau_{\alpha}^*\omega_{\beta}\tau_{\beta}^*. \quad (6.1.14)$$

Выражения для тензоров $W_{rs}^{(p)}$, фигурирующие в (6.1.11) и представляющие собой различные свертки тензора $W_{k\ell}$ с тензорными величинами типа

$$k_r k_s k_k k_\ell, \quad \delta_{rs} k_k k_\ell, \quad e_{rmk} k_s k_m k_\ell \quad \text{и} \quad e_{rmk} \delta_{ls} k_m,$$

можно найти, например, в работе [3]. Вид тензоров $W_{rs}^{(p)}$ заметно упрощается в специально выбранной декартовой системе координат, где ось x направлена вдоль магнитного поля. Для компонент тензора $\pi_{\alpha rs}$ в этой системе координат имеем

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha xx} &= -\eta_\alpha^{(0)} W_{xx}, \\ \pi_{\alpha yy} &= -\frac{1}{2} \eta_\alpha^{(0)} (W_{yy} + W_{zz}) - \frac{1}{2} \eta_\alpha^{(1)} (W_{yy} - W_{zz}) - \eta_\alpha^{(3)} W_{yz}, \\ \pi_{\alpha zz} &= -\frac{1}{2} \eta_\alpha^{(0)} (W_{zz} + W_{yy}) - \frac{1}{2} \eta_\alpha^{(1)} (W_{zz} - W_{yy}) + \eta_\alpha^{(3)} W_{yz}, \\ \pi_{\alpha yz} &= \pi_{\alpha zy} = -\eta_\alpha^{(1)} W_{yz} + \frac{1}{2} \eta_\alpha^{(3)} (W_{yy} - W_{zz}), \\ \pi_{\alpha xy} &= \pi_{\alpha yx} = -\eta_\alpha^{(2)} W_{xy} - \eta_\alpha^{(4)} W_{xz}, \\ \pi_{\alpha xz} &= \pi_{\alpha zx} = -\eta_\alpha^{(2)} W_{xz} + \eta_\alpha^{(4)} W_{xy}. \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

В выражении для приведенного парциального потока тепла $\mathbf{h}_\alpha$ (6.1.13) можно выделить ту его часть $\mathbf{h}_\alpha^T$, которая зависит от градиентов температуры. Рассмотрим, для примера частный случай изотермической плазмы ($T_\alpha = T$). Тогда

$$\mathbf{h}_\alpha^T = -\lambda_{\alpha\parallel} \nabla_\parallel T - \lambda_{\alpha\perp} \nabla_\perp T - \lambda_{\alpha\wedge} (\mathbf{k} \times \nabla T), \tag{6.1.16}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\parallel} &= \sum_\beta \frac{|b|_{\beta\alpha}}{|b|} \bar{\lambda}_\beta, \quad \lambda_{\alpha\perp} = \sum_\beta \frac{|b^*|_{\beta\alpha}}{|b^*|} \bar{\lambda}_\beta, \\ \lambda_{\alpha\wedge} &= \sum_\beta \frac{|b^*|_{\beta\alpha}}{|b^*|} \omega_\beta \tau_\beta^* \sum_\gamma \frac{|b|_{\gamma\beta}}{|b|} \bar{\lambda}_\gamma \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

— параллельная, перпендикулярная и холловская теплопроводности компонента α , соответственно. Другая часть $\mathbf{h}_\alpha$, зависящая от диффузионных скоростей компонентов, имеет более сложную структуру и здесь отдельно не выписывается.

Выражения (6.1.11) и (6.1.13) позволяют определить тензор вязких напряжений и приведенный поток тепла для любого из компонентов

неизотермической многосортной плазмы. Тензор вязких напряжений для плазмы в целом π_{rs} и полный поток тепла $\mathbf{q}$ находятся в результате суммирования соответствующих парциальных величин:

$$\pi_{rs} = \sum_{\alpha} \pi_{\alpha rs}, \quad \mathbf{q} = \sum_{\alpha} \mathbf{h}_{\alpha} + \frac{5}{2} \sum_{\alpha} p_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}. \quad (6.1.18)$$

Рассмотрим теперь систему уравнений (6.1.1), которая после подстановки в нее решений для $\mathbf{h}_{\alpha}$ и $\mathbf{h}_{\beta}$ в соответствии с (6.1.13) и использования дополнительного соотношения $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0$ позволяет определять диффузионные скорости компонентов плазмы. Заметим, что если пренебречь в (6.1.1) вкладом приведенных потоков тепла, система уравнений для определения диффузионных скоростей полностью совпадает с системой уравнений квазигидродинамического приближения, решения которой подробно рассматривались в п. 3.3. Учет $\mathbf{h}_{\alpha}$ и $\mathbf{h}_{\beta}$ приводит к усложнению соответствующих коэффициентов в окончательном результате (формула (3.3.10)), что обусловлено наличием в выражении для $\mathbf{N}_{\alpha}$ (6.1.5) членов, пропорциональных диффузионным скоростям компонентов. Кроме того, в уравнениях возникают новые члены, связанные с градиентами температуры компонентов, описывающие термодиффузию [4, 5]. Формальное решение полученной таким образом системы уравнений выглядит очень громоздко, поэтому мы не будем приводить эти решения в общем виде, а ограничимся в дальнейшем анализом ряда конкретных случаев, представляющих практический интерес.

6.2. Отделение уравнений для электронов и тяжелых частиц. Электронные свойства переноса

Общая система уравнений (6.1.1)–(6.1.3) может быть несколько упрощена благодаря наличию малого параметра — отношению массы электрона m_e к массе тяжелых частиц (ионов и атомов) m_{β} ($\beta \neq e$). В частности, если выполнено условие $\gamma_e \ll \gamma_{\beta}$ (или $m_e T_{\beta} / m_{\beta} T_e \ll \ll 1$), то в уравнениях (6.1.1) для электронов ($\alpha = e$) можно пренебречь членами, пропорциональными $\mathbf{h}_{\beta}$, а в правой части опустить члены порядка ρ_e / ρ . В результате эти уравнения принимают вид

$$\sum_{\beta \neq e} \tau_{e\beta}^{-1} \left(\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_{\beta} + \xi_{e\beta} \frac{\mathbf{h}_e}{p_e} \right) = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}^* - \omega_e (\mathbf{w}_e \times \mathbf{k}), \quad (6.2.1)$$

где

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{\nabla p_e}{n_e e}, \quad \omega_e = \frac{e |\mathbf{B}|}{m_e}, \quad \xi_{e\beta} = \frac{6}{5} C_{e\beta}^* - 1. \quad (6.2.2)$$

Оценивая при тех же условиях порядок величины коэффициентов $a_{e\beta}$ и $b_{e\beta}$ ($\beta \neq e$) в уравнениях (6.1.2) и (6.1.3), находим

$$a_{e\beta} \approx \frac{n_e m_e \tau_e}{n_\beta m_\beta \tau_{e\beta}} \ll 1, \quad b_{e\beta} \approx \frac{n_e m_e \tau_e^*}{n_\beta m_\beta \tau_{e\beta}} \ll 1.$$

Тогда, если опустить в уравнениях (6.1.2) и (6.1.3) перекрестные члены, тензор вязких напряжений и поток тепла электронов определяются независимо от других компонентов плазмы из уравнений вида

$$\pi_{e\,rs} = -\bar{\eta}_e W_{rs} - \frac{1}{2} (\pi_{e\,lr} e_{s\,lm} k_m + \pi_{e\,ls} e_{r\,lm} k_m) \omega_e \tau_e, \quad (6.2.3)$$

$$\mathbf{h}_e = -\bar{\lambda}_e \mathbf{N}_e - (\mathbf{h}_e \times \mathbf{k}) \omega_e \tau_e^*, \quad (6.2.4)$$

где

$$\mathbf{N}_e = \nabla T_e + \frac{m_e}{k} \sum_{\beta \neq e} \tau_{e\beta}^{-1} \xi_{e\beta} (\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_\beta). \quad (6.2.5)$$

Решение уравнений (6.2.3) можно представить в виде (6.1.11), в котором соответствующие коэффициенты электронной вязкости записываются как

$$\begin{aligned} \eta_e^{(0)} &= \frac{1}{2} p_e \tau_e, \quad \eta_e^{(1)} = \frac{\eta_e^{(0)}}{1 + \beta_e^2}, \quad \eta_e^{(2)} = \frac{\eta_e^{(0)}}{1 + (\beta_e/2)^2}, \\ \eta_e^{(3)} &= \beta_e \eta_e^{(1)}, \quad \eta_e^{(4)} = \frac{\beta_e}{2} \eta_e^{(2)}, \quad \beta_e = \omega_e \tau_e. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Для потока тепла электронов, разрешая уравнение (6.2.4) относительно $\mathbf{h}_e$, имеем

$$\mathbf{h}_e = -\lambda_{e\parallel} \mathbf{N}_{e\parallel} - \lambda_{e\perp} \mathbf{N}_{e\perp} - \lambda_{e\wedge} (\mathbf{k} \times \mathbf{N}_e) \quad (6.2.7)$$

с коэффициентами теплопроводности вида

$$\lambda_{e\parallel} = \bar{\lambda}_e = \frac{5}{2} \frac{k}{m_e} p_e \tau_e^*, \quad \lambda_{e\perp} = \frac{\lambda_{e\parallel}}{1 + \beta_e^{*2}}, \quad \lambda_{e\wedge} = \beta_e^* \lambda_{e\perp}. \quad (6.2.8)$$

При этом $\beta_e^* = \omega_e \tau_e^*$, а характерные времена τ_e и τ_e^* определены выражениями

$$\begin{aligned} \tau_e^{-1} &= 0,3 \tau_{ee}^{-1} + 0,6 \sum_{\beta \neq e} A_{e\beta}^* \tau_{e\beta}^{-1}, \\ (\tau_e^*)^{-1} &= 0,4 \tau_{ee}^{-1} + \sum_{\beta \neq e} (2,5 - 1,2 B_{e\beta}^*) \tau_{e\beta}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Коэффициенты $A_{e\beta}^*$, $B_{e\beta}^*$ (так же как и $C_{e\beta}^*$ в выражении для $\xi_{e\beta}$) определяются формулами (5.1.12) при $\alpha = e$, в которых величины $\Omega_{e\beta}$

находятся по формулам (4.2.25), если положить в них $\gamma_{e\beta} = \gamma_e = m_e/kT_e$. Заметим, что для кулоновских взаимодействий электронов и ионов (с точностью до членов порядка $(\ln \Lambda)^{-1}$ по сравнению с единицей) имеем: $A_{e\beta}^* = B_{e\beta}^* = 1$ и $C_{e\beta}^* = 1/3$ или $\xi_{e\beta} = -0,6$. Для электрон-атомных взаимодействий при $Q_{e\beta}^{(1)} = \text{const}$ (модель твердых упругих шаров) $A_{e\beta}^* = B_{e\beta}^* = C_{e\beta}^* = 1$ и $\xi_{e\beta} = 0,2$.

Заметим, что выражения (6.2.6) и (6.2.8) для электронных коэффициентов переноса можно получить и непосредственно из общих выражений (6.1.12) и (6.1.13), если использовать малость величин $a_{e\beta}$ и $b_{e\beta}$ и произвести разложение по малому параметру в самих определителях. Мы воспользуемся этим способом в гл. 7 при определении электронных свойств переноса в случае неизотермической трехкомпонентной плазмы ($T_i = T_a = T$, $T_e \neq T$). Соответствующий анализ показывает, что единственное исключение, когда используемое выше отделение уравнений для электронов от уравнений для тяжелых частиц оказывается некорректным, относится к определению коэффициентов $\eta_e^{(1)}$ и $\eta_e^{(2)}$ при $\omega_i \tau_i \geq 1$. В главе 7 этот случай будет подробно рассмотрен на примере двухкомпонентной полностью ионизованной плазмы.

Обратимся теперь к уравнениям для тяжелых частиц. Анализ выражений для коэффициентов $a_{\alpha e}$ и $b_{\alpha e}$ ($\alpha \neq e$) показывает, что они имеют порядок величины $(m_e/m_\alpha)^{1/2}$, поэтому члены с $\pi_{e\alpha}$ и $\mathbf{h}_e$ в соответствующих уравнениях можно опустить. В результате тензоры вязких напряжений и потоки тепла тяжелых частиц определяются из систем уравнений, независимых от уравнений для электронов. Это означает, что коэффициенты вязкости и теплопроводности ионов и атомов определяются соотношениями (6.1.12) и (6.1.15), в которых при суммировании по β надо исключить члены, связанные с электронным компонентом. Если температуры ионов и атомов полагаются одинаковыми, величины $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, τ_α и τ_α^* , входящие в эти выражения, связаны соотношениями (6.1.9) с коэффициентами $H_{\alpha\beta}$ и $\Lambda_{\alpha\beta}$, использованными в п. 5.1. Для продольных коэффициентов переноса в этом случае справедливы результаты, полученные для изотермической многокомпонентной смеси в отсутствие магнитного поля (см. формулы (6.1.10)).

Рассмотрим теперь систему уравнений (6.1.1). После подстановки в них выражений для $\mathbf{h}_e$ (6.2.7) они могут быть использованы для определения диффузионных скоростей компонентов. Строго говоря, уравнение для определения диффузионной скорости электронов $\mathbf{w}_e$ в этом случае нельзя отделить от уравнений для тяжелых частиц, поскольку в него входят диффузионные скорости $\mathbf{w}_\beta$ ($\beta \neq e$). Проведенный ранее анализ решений уравнений диффузии, записанных в квазигидродинамическом приближении (см. гл. 3) показывает, что при определении $\mathbf{w}_e$ необходимость в учете $\mathbf{w}_\beta$ в уравнениях (6.2.1) возникает лишь при вычислении поперечных компонент диффузионной скорости электронов для случая, когда $\beta_i = \omega_i \tau_{i\beta} \geq 1$. В дальнейшем этот случай будет

проанализирован в гл. 7 при выводе обобщенного закона Ома для частично-ионизованной многокомпонентной смеси с учетом так называемого «проскальзывания» ионов относительно атомов. В настоящем параграфе используется модель «квазидвухкомпонентной среды», справедливая, как мы видели, (см. гл. 3) при выполнении условия $\beta_e \beta_i \ll \ll 1$. В этом случае в уравнениях (6.1.1) можно приближенно считать макроскопические скорости тяжелых частиц одинаковыми и равными среднемассовой скорости плазмы, т. е. положить $\mathbf{w}_\beta = 0$. Если интересоваться получением выражения для тока проводимости, который в этом случае определяется выражением $\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{w}_e$, то уравнения для определения $\mathbf{j}$ и $\mathbf{h}_e$ принимают вид [1, 2]

$$\mathbf{j} + \omega_0 \tau_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = \sigma_0 \mathbf{E}^* + \frac{e}{kT_e} \nu_0 \tau_0 \mathbf{h}_e, \quad (6.2.10)$$

$$\mathbf{h}_e + \omega_e \tau_e^* (\mathbf{h}_e \times \mathbf{k}) = -\bar{\lambda}_e \nabla T_e + \frac{kT_e}{e} \alpha_T \mathbf{j}. \quad (6.2.11)$$

Здесь

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_0, \quad \tau_0^{-1} = \sum_{\beta \neq e} \tau_{e\beta}^{-1}, \quad (6.2.12)$$

$$\nu_0 = \sum_{\beta \neq e} \xi_{e\beta} \tau_{e\beta}^{-1}, \quad \alpha_T = \frac{5}{2} \nu_0 \tau_e^*,$$

где $\bar{\lambda}_e$ и τ_e^* определены выражениями (6.2.8) и (6.2.9).

Решение уравнения (6.2.9) относительно $\mathbf{h}_e$ приводит к результату

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_e = & -\lambda_{e\parallel} \nabla T_{e\parallel} - \lambda_{e\perp} \nabla T_{e\perp} - \lambda_{e\wedge} (\mathbf{k} \times \nabla T_e) + \\ & + \chi_{e\parallel} \mathbf{j}_{\parallel} + \chi_{e\perp} \mathbf{j}_{\perp} + \chi_{e\wedge} (\mathbf{k} \times \mathbf{j}), \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

где коэффициенты теплопроводности рассчитываются по формулам (6.2.8), а коэффициенты χ_e определены как

$$\chi_{e\parallel} = \frac{kT_e}{e} \alpha_T, \quad \chi_{e\perp} = \frac{\chi_{e\parallel}}{1 + \beta_e^{*2}}, \quad \chi_{e\wedge} = \beta_e^* \chi_{e\perp}. \quad (6.2.14)$$

Для плотности тока проводимости $\mathbf{j}$ из (6.2.10) с учетом (6.2.13) следует выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = & \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}^* + \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}^* + \sigma_{\wedge} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*) + \\ & + \varphi_{\parallel} \nabla T_{e\parallel} + \varphi_{\perp} \nabla T_{e\perp} + \varphi_{\wedge} (\mathbf{k} \times \nabla T_e). \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

При этом

$$\sigma_{\parallel} = \frac{\sigma_0}{1 - \Delta_0}, \quad \sigma_{\perp} = \frac{\sigma_0 A}{A^2 + B^2 \omega_e^2 \tau_0^2}, \quad \sigma_{\wedge} = \frac{\sigma_0 B \omega_e \tau_0}{A^2 + B^2 \omega_e^2 \tau_0^2}, \quad (6.2.16)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\parallel} &= -\frac{k}{e} \alpha_T \sigma_{\parallel}, \quad \varphi_{\perp} = -\frac{k}{e} \alpha_T \frac{(\sigma_{\perp} - \beta_e^* \sigma_{\wedge})}{1 + \beta_e^{*2}}, \\ \varphi_{\wedge} &= -\frac{k}{e} \alpha_T \frac{(\beta_e^* \sigma_{\perp} + \sigma_{\wedge})}{1 + \beta_e^{*2}},\end{aligned}\tag{6.2.17}$$

где

$$\begin{aligned}A &= 1 - \frac{\Delta_0}{1 + \beta_e^{*2}}, \quad B = 1 + \frac{\gamma \Delta_0}{1 + \beta_e^{*2}}, \\ \Delta_0 &= \nu_0 \tau_0 \alpha_T, \quad \gamma = \tau_0^{-1} \tau_e^*.\end{aligned}\tag{6.2.18}$$

Заметим, что приведенный электронный поток тепла $\mathbf{h}_e$ удобно представлять иногда, так же как и $\mathbf{j}$, в виде линейного соотношения, связывающего его с компонентами поля $\mathbf{E}^*$ и градиентами температуры. Для этого достаточно подставить в (6.2.13) соответствующие компоненты $\mathbf{j}$ из соотношения (6.2.15). В результате имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_e &= -\lambda'_{e\parallel} \nabla T_{e\parallel} - \lambda'_{e\perp} \nabla T_{e\perp} - \lambda'_{e\wedge} (\mathbf{k} \times \nabla T_e) - \\ &\quad - \psi_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}^* - \psi_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}^* - \psi_{\wedge} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*),\end{aligned}\tag{6.2.19}$$

где

$$\begin{aligned}\lambda'_{e\parallel} &= \lambda_{e\parallel} - \varphi_{\parallel} \chi_{e\parallel}, \quad \lambda'_{e\perp} = \lambda_{e\perp} - (\varphi_{\perp} \chi_{e\perp} - \varphi_{\wedge} \chi_{e\wedge}), \\ \lambda'_{e\wedge} &= \lambda_{e\wedge} + (\varphi_{\wedge} \chi_{e\perp} + \varphi_{\perp} \chi_{e\wedge}),\end{aligned}\tag{6.2.20}$$

$$\psi_{\parallel} = \varphi_{\parallel} T_e, \quad \psi_{\perp} = \varphi_{\perp} T_e, \quad \psi_{\wedge} = \varphi_{\wedge} T_e.$$

Связь между коэффициентами ψ и φ обеспечивает при этом выполнение соотношений взаимности Онзагера.

При известном $\mathbf{h}_e$ легко определяется и полный электронный поток тепла

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{h}_e - \frac{5}{2} \frac{k T_e}{e} \mathbf{j},\tag{6.2.21}$$

где в зависимости от представления $\mathbf{h}_e$ в виде (6.2.13) или (6.2.19) величина $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}$ сохраняется в уравнениях в явном виде, либо выражается с помощью (6.2.15).

Подчеркнем, что истинной электронной теплопроводности в плазме соответствует именно коэффициент λ_e , а не λ'_e , поскольку экспериментально коэффициент теплопроводности определяют обычно в стационарных условиях, когда диффузионный перенос отсутствует, т.е. при $\mathbf{j} = 0$. Выражения для компонент λ_e имеют соответственно и более простой вид, чем для λ'_e , причем эта особенность сохраняется и в более высоких приближениях метода моментов (см. следующий пункт). При вычислении электронных коэффициентов теплопроводности другими

методами [6, 7] выражения для потоков тепла пишут обычно сразу в виде (6.2.19), а лишь затем приводят к виду (6.2.13), что в общем случае связано с довольно громоздкими преобразованиями. Мы уже обсуждали эту проблему в гл. 5 применительно к определению теплопроводности многокомпонентной газовой смеси в отсутствие магнитного поля.

Полученные выше выражения для электронных коэффициентов переноса в выражениях для $\mathbf{j}$ и $\mathbf{h}_e$ соответствуют по точности расчета полному второму приближению (в разложении по полиномам Сонина) метода Чепмена–Каулинга [8]. Вклад второго приближения в коэффициенты электропроводности определяется при этом значением поправки Δ_0 . С ростом замагниченности плазмы ($\beta_e^* \gg 1$) влияние поправок второго приближения на поперечные коэффициенты электропроводности резко уменьшается.

Полезно оценить вклад Δ_0 в продольную электропроводность плазмы для некоторых практически интересных случаев. Так, в пределе слабоионизованного газа, когда взаимодействием заряженных частиц между собой можно пренебречь, выражение для τ_0^{-1} можно представить в виде (3.1.12)

$$\tau_0^{-1} = \frac{16}{3} \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2} \sum_{\beta=1}^K n_\beta \bar{Q}_{e\beta},$$

где $\bar{Q}_{e\beta}$ — эффективное сечение рассеяния электрона на атомах сорта β (K — число сортов нейтральных частиц). Для этого случая имеем также

$$\alpha_T = \frac{\sum \xi_{e\beta} n_\beta \bar{Q}_{e\beta}}{\sum (1 - 0,48 B_{e\beta}^*) n_\beta \bar{Q}_{e\beta}}, \quad \Delta_0 = \frac{\sum \xi_{e\beta} n_\beta \bar{Q}_{e\beta}}{\sum n_\beta \bar{Q}_{e\beta}} \alpha_T. \quad (6.2.22)$$

Для рассеяния электронов на атомах, соответствующего модели твердых упругих шаров, когда $Q_{e\beta}^{(1)}(v) = \text{const}$, имеем $\xi_{e\beta} = 0,2$, $B_{e\beta}^* = 1$ и $\alpha_T = 0,385$, $\Delta_0 = 0,077$. Выражение для продольной электропроводности (6.2.16) принимает при этом вид

$$[\sigma]_2 = 1,08 [\sigma]_1 = 0,510 \frac{n_e e^2}{(m_e k T_e)^{1/2}} \frac{1}{\sum_{\beta=1}^K n_\beta \bar{Q}_{e\beta}}, \quad (6.2.23)$$

где $[\sigma]_1 = \sigma_0$ соответствует первому приближению Чепмена–Каулинга (3.4.7). Этот результат лишь на 4% отличается от точного лорентцевского значения $\sigma_{||}$ для принятой модели взаимодействия частиц [8].

Более существенным оказывается учет Δ_0 в другом предельном случае, когда плазма полностью ионизована. Для этого случая

величина τ_{ei}^{-1} определена выражением (3.2.19). При $Z = 1$ имеем: $\tau_{ee}^{-1} = \sqrt{2} \tau_{ei}^{-1}$, $\xi_{ei} = -0,6$, $B_{ei}^* = 1$ и $\alpha_T = -0,802$, $\Delta_0 = 0,481$.

Выражение для $\sigma_{\parallel}$ принимает вид

$$[\sigma]_2 = 1,93 [\sigma]_1 = 0,578 (4\pi\varepsilon_0)^2 \frac{(kT_e)^{3/2}}{e^2 m_e^{1/2} \ln \Lambda}, \quad (6.2.24)$$

что оказывается довольно близким к точному результату Спитцера–Хэрма [9] полученному в результате численного решения интегрального уравнения метода Чепмена–Энскога (коэффициент 0,591 вместо 0,578).

Полезно привести сводку выражений и для остальных электронных свойств переноса в пределе слабой и полной ионизации.

В случае слабоионизованного газа для модели $Q_{e\beta}^{(1)}(v) = \text{const}$ имеем

$$\begin{aligned} [\eta_e]_1 &= \frac{5}{6} p_e \tau_0 = 0,392 n_e m_e^{1/2} (kT_e)^{1/2} \left(\sum_{\beta} n_{\beta} \bar{Q}_{e\beta} \right)^{-1}, \\ [\lambda_e]_2 &= \frac{25}{13} \frac{k}{m_e} p_e \tau_0 = \\ &= 0,905 n_e k m_e^{-1/2} (kT_e)^{1/2} \left(\sum_{\beta} n_{\beta} \bar{Q}_{e\beta} \right)^{-1}, \\ [\varphi_e]_2 &= -0,385 \frac{k}{e} [\sigma]_2 = \\ &= -0,196 n_e e k m_e^{-1/2} (kT_e)^{-1/2} \left(\sum_{\beta} n_{\beta} \bar{Q}_{e\beta} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

Для полностью ионизованной плазмы ($Z = 1$)

$$\begin{aligned} [\eta_e]_1 &= 0,488 p_e \tau_{ei} = 0,146 (4\pi\varepsilon_0)^2 m_e^{1/2} (kT_e)^{5/2} \frac{1}{e^4 \ln \Lambda}, \\ [\lambda_e]_2 &= 1,34 \frac{k}{m_e} p_e \tau_{ei} = 0,399 (4\pi\varepsilon_0)^2 k m_e^{-1/2} (kT_e)^{5/2} \frac{1}{e^4 \ln \Lambda}, \\ [\varphi]_2 &= 0,802 \frac{k}{e} [\sigma]_2 = 0,463 (4\pi\varepsilon_0)^2 k m_e^{-1/2} (kT_e)^{3/2} \frac{1}{e^3 \ln \Lambda}. \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

Индексы «1» и «2» соответствуют уровню приближения (по числу полиномов Сонина в разложении), принятого при их расчете. Заметим, что для λ_e и φ второе приближение есть по существу первое не исчезающее приближение в разложении по полиномам.

В конце этого параграфа сделаем несколько замечаний о решении уравнений диффузии, записываемых для ионных и нейтральных компонентов. В принципе, в этих уравнениях также возможны некоторые упрощения, связанные, например, с малостью силы ион-электронного трения $\mathbf{R}_{ie} \approx m_e n_e \tau_{ie}^{-1} (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_e)$ по сравнению с силой трения тяжелых частиц относительно друг друга. По той же причине в уравнениях можно опустить и члены, содержащие электронный поток тепла $\mathbf{h}_e$. Анализ показывает, что такое пренебрежение оказывается оправданным, если достаточна концентрация нейтральных частиц (в случае частично ионизованной плазмы) или ионов другого сорта (в случае многосортной полностью ионизованной плазмы), обеспечивающих интенсивный обмен импульсом между тяжелыми частицами. Заметим, что при $|\mathbf{w}_\beta| \ll |\mathbf{w}_e|$ величины $\mathbf{R}_{ie}$ и $\mathbf{h}_e$ можно найти из независимых уравнений для электронов. Поэтому в том случае, когда учет их необходим, возможно формальное включение соответствующих членов в число внешних сил, действующих на тяжелые частицы [10]. Поскольку выражение для $\mathbf{j}$ в этом случае также известно, подставляя его в член $(\rho_\alpha/\rho)(\mathbf{j} \times \mathbf{B})$, приходим к системе уравнений для ионов и атомов, которые могут быть разрешены относительно диффузионных скоростей тяжелых частиц. Метод решения подобных уравнений, записанных в квазигидродинамическом приближении, уже рассматривался ранее в п. 3.3. Некоторые частные случаи, представляющие практический интерес, будут рассмотрены также в следующих главах.

6.3. Учет высших приближений при расчете электронных свойств переноса

До сих пор мы ограничивались анализом уравнений переноса, записанных в приближении $13N$ моментов. Конкретные расчеты кинетических коэффициентов показывают, что это приближение не обеспечивает в некоторых случаях достаточной точности. В первую очередь это относится к полностью ионизованной кулоновской плазме, в которой для получения удовлетворительных результатов для коэффициентов вязкости, теплопроводности и термодиффузии необходимо использовать по крайней мере еще по одному полиному в разложении функции распределения для векторных и тензорных величин. При рассмотрении электрон-атомных взаимодействий в случаях, когда сечения столкновений не зависят от скорости (модель твердых упругих шаров) или не слишком резко спадают с увеличением скорости, приближение $13N$ моментов для расчета электронных свойств переноса оказывается, как правило, вполне приемлемым. То же самое относится и к расчету обычных свойств переноса в газовых смесях с использованием, например, потенциала Леннард-Джонса, хотя в некоторых случаях, например, при вычислении термодиффузии, может оказаться полезным учет более высоких приближений [6, 8]. Если, однако,

сечения рассеяния электронов на атомах меняются с изменением их энергии немонотонно (например, в области рамзауэровского минимума) и особенно если наблюдается рост сечений с увеличением скорости, то для получения удовлетворительного результата становится необходимым учет все большего числа полиномов в разложении функции распределения электронов [7, 11, 12].

Явления переноса в полностью ионизованной плазме с несколькими сортами ионов при учете более высокого приближения, чем приближение $13N$ моментов, будут рассмотрены в гл. 8. Ниже мы остановимся лишь на уточнении результатов для электронных свойств переноса в многокомпонентной плазме с произвольной степенью ионизации.

Оценки порядка величины перекрестных коэффициентов в уравнениях (4.6.9)–(4.6.10) показывают, что отделение уравнений для электронов от уравнений для тяжелых частиц может быть выполнено и во всех следующих приближениях метода. Как мы уже отмечали, необходимый в некоторых случаях учет перекрестных членов при определении электронных свойств переноса проявляется лишь при определении поперечных коэффициентов вязкости при выполнении условия $\beta_i \geq 1$. Поскольку при этом $\beta_e \gg 1$, вклад следующих приближений в поперечные электронные кинетические коэффициенты становится пренебрежимо малым. Таким образом, перекрестные члены в уравнениях более высокого порядка всегда могут быть опущены. Это означает, что уравнения для электронного компонента во всех приближениях оказываются полностью независимыми, и соответствующие системы уравнений для коэффициентов b_{er}^{1k} и b_{ers}^{2k} , следующие из (4.6.9) и (4.6.10), принимают вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\xi-1} C_{ee}^{10k} \mathbf{b}_e^{1k} &= -n_e e \mathbf{E}^* - n_e (\mathbf{b}_e^{10} \times \mathbf{k}) \omega_e, \\ \sum_{k=0}^{\xi-1} C_{ee}^{11k} \mathbf{b}_e^{1k} &= -\frac{5}{2} \frac{k}{m_e} p_e \nabla T_e - n_e (\mathbf{b}_e^{11} \times \mathbf{k}) \omega_e, \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\xi-1} C_{ee}^{1nk} \mathbf{b}_e^{1k} = -n_e (\mathbf{b}_e^{1n} \times \mathbf{k}) \omega_e, \quad 1 < n < \xi - 1;$$

$$\sum_{k=0}^{\xi-1} C_{ee}^{20k} b_{ers}^{21k} = -p_e W_{rs} - 2n_e b_{ers}^{20} e_{slm} k_m \omega_e,$$

$$\sum_{k=0}^{\xi-1} C_{ee}^{2nk} b_{ers}^{21k} = -2n_e b_{ers}^{2n} e_{slm} k_m \omega_e, \quad 0 < n < \xi - 1. \quad (6.3.2)$$

При записи соответствующих решений этих уравнений и для сравнения с имеющимися в литературе результатами оказывается более

удобным использовать вместо коэффициентов C_{ee}^{1nk} и C_{ee}^{2nk} коэффициенты q^{nk} и p^{nk} , предложенные в работах Девото [11–13]. В отличие от C_{ee}^{mnk} эти коэффициенты оказываются симметричными относительно перестановки индексов n и k :

$$\begin{aligned}
 q^{nk} &= \left(\frac{2\pi m_e}{kT_e} \right)^{1/2} \left\{ n_e^2 \left[S_{3/2}^n(W^2) \mathbf{W}, S_{3/2}^k(W^2) \mathbf{W} \right]_e + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\beta \neq e} n_e n_\beta \left[S_{3/2}^n(W^2) \mathbf{W}, S_{3/2}^k(W^2) \mathbf{W} \right]_{e\beta}' \right\}, \\
 p^{nk} &= \left(\frac{2\pi m_e}{kT_e} \right)^{1/2} \left\{ n_e^2 \left[S_{5/2}^n(W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. S_{3/2}^k(W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right) \right]_e \right\} + \\
 &\quad + \left(\frac{2\pi m_e}{kT_e} \right)^{1/2} \left\{ \sum_{\beta \neq e} n_e n_\beta \left[S_{5/2}^n(W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. S_{3/2}^k(W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right) \right]_{e\beta}' \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Здесь $\mathbf{W} = (m_e/kT_e)^{1/2} \mathbf{c}$, а интегральная скобка $[F, G]_e$ определена как

$$[F, G]_e = [F, G]_{ee}' + [F, G]_{ee}''.$$

Коэффициенты C_{ee}^{1nk} и C_{ee}^{2nk} связаны с коэффициентами q^{nk} и p^{nk} соотношениями

$$\begin{aligned}
 C_{ee}^{1nk} &= (2\pi)^{-1/2} Q_{1nk} \left(\frac{m_e}{kT_e} \right)^{k-n-1/2} q^{nk}, \\
 C_{ee}^{2nk} &= (2\pi)^{-1/2} Q_{2nk} \left(\frac{m_e}{kT_e} \right)^{k-n-1/2} p^{nk}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала соотношения переноса и выражения для электронных кинетических коэффициентов для случая, когда магнитное поле отсутствует. Положим $\omega_e = 0$ в уравнениях (6.3.3)–(6.3.23) и учтем, что интересующие нас величины связаны с коэффициентами $n_e \mathbf{b}_e^{mn}$ соотношениями

$$\rho_e \mathbf{w}_e = n_e \mathbf{b}_e^{10}, \quad \mathbf{h}_e = n_e \mathbf{b}_e^{11}, \quad \pi_{ers} = b_{ers}^{20}.$$

Разрешая уравнения (6.3.3)–(6.3.2) относительно этих коэффициентов, находим

$$\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{w}_e = \sigma \mathbf{E}^* + \varphi \nabla T_e,$$

$$\mathbf{h}_e = -\lambda'_e \nabla T_e - \psi \mathbf{E}^*, \quad \pi_{ers} = -\eta_e W_{rs}. \quad (6.3.4)$$

Переходя от коэффициентов C_{ee}^{mnk} к коэффициентам q^{nk} и p^{nk} , получаем следующие выражения для электронных коэффициентов переноса:

$$\sigma = \frac{3}{2} n_e^2 e^2 \left(\frac{2\pi}{m_e k T_e} \right)^{1/2} \frac{1}{|q|} \begin{vmatrix} q^{11} & q^{12} & \dots & q^{1n} \\ q^{21} & q^{22} & \dots & q^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q^{n1} & q^{n2} & \dots & q^{nn} \end{vmatrix}, \quad (6.3.5)$$

$$\lambda'_e = \frac{75}{8} n_e^2 k^2 T_e \left(\frac{2\pi}{m_e k T_e} \right)^{1/2} \frac{1}{|q|} \begin{vmatrix} q^{00} & q^{02} & \dots & q^{0n} \\ q^{20} & q^{22} & \dots & q^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q^{n0} & q^{n2} & \dots & q^{nn} \end{vmatrix}, \quad (6.3.6)$$

$$\varphi = \frac{\psi}{T_e} = \frac{15}{4} n_e^2 e k \left(\frac{2\pi}{m_e k T_e} \right)^{1/2} \frac{1}{|q|} \begin{vmatrix} q^{00} & q^{02} & \dots & q^{0n} \\ q^{20} & q^{22} & \dots & q^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q^{n0} & q^{n2} & \dots & q^{nn} \end{vmatrix}, \quad (6.3.7)$$

$$\eta_e = \frac{5}{2} n_e^2 (2\pi m_e k T_e)^{1/2} \frac{1}{|p|} \begin{vmatrix} p^{11} & p^{12} & \dots & p^{1n} \\ p^{21} & p^{22} & \dots & p^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{n1} & p^{n2} & \dots & p^{nn} \end{vmatrix}, \quad (6.3.8)$$

Здесь $|q|$ и $|p|$ — определители матриц из элементов q^{nk} и p^{nk} соответственно ($n, k = 0, \dots, \xi - 1$).

Если выразить $\mathbf{E}^*$ через $\mathbf{j}$ с помощью первого из соотношений (6.3.4) и использовать определение $\mathbf{q}_e$ (6.2.21), то для полного электронного потока тепла получаем

$$\mathbf{q}_e = -\lambda_e \nabla T_e - \alpha \mathbf{j}, \quad (6.3.9)$$

$$\lambda_e = \lambda'_e - \frac{\varphi^2 T_e}{\sigma}, \quad \alpha = \left(\frac{5}{2} \frac{k}{e} + \frac{\varphi}{\sigma} \right) T_e.$$

Выражение для коэффициента λ_e может быть найдено и непосредственно из решения системы уравнений (6.3.2), если формально положить в них $\mathbf{b}_e^{10} = 0$ и не принимать в расчет первое из уравнений этой системы. Определяя затем величину $\mathbf{b}_e^{11}$, приходим к результату

$$\lambda_e = \frac{75}{8} n_e^2 k^2 T_e \left(\frac{2\pi}{m_e k T_e} \right)^{1/2} \frac{1}{|q'|} \begin{vmatrix} q^{22} & q^{23} & \dots & q^{2n} \\ q^{32} & q^{33} & \dots & q^{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q^{n2} & q^{n3} & \dots & q^{nn} \end{vmatrix}, \quad (6.3.10)$$

где $|q'|$ — это определитель $|q|$, в котором вычеркнуты строка и столбец элементов q^{nk} с $n = 0$ и $k = 0$. При таком определении выражение для λ_e в первом исчезающем приближении ($n = k = 2$) согласуется с результатом для $\lambda_{e\parallel}$, полученным в приближении 13 моментов (см. формулу (6.2.7)).

Заметим, что в присутствии магнитного поля ($\omega_e \neq 0$) все полученные выше выражения для электронных кинетических коэффициентов справедливы для параметров электронного переноса вдоль магнитного поля. Для получения соответствующих результатов, описывающих перенос поперек магнитного поля, например для определения поперечных компонент векторов плотности тока или потока тепла электронов, удобно решать уравнения (6.3.3) и (6.3.2), предварительно заменив в них векторные произведения их представлением в комплексных переменных. Тогда выражения для поперечных коэффициентов переноса могут быть найдены с использованием уже полученных выше формул (6.3.5)–(6.3.7) и (6.3.9), если заменить в соответствующих определителях элементы q^{nk} на элементы вида [13]

$$q^{nk} - i n_e \omega_e \left(\frac{2\pi m_e}{k T_e} \right)^{1/2} \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{(k + 3/2)!}{k!} \delta_{nk}.$$

Полученные выше выражения для векторных электронных коэффициентов переноса полностью согласуются с результатами работы Девото [13], где они вычислялись на основе метода Чепмена–Энскога после предварительного отделения системы уравнений для электронов от уравнений для тяжелых частиц. Выражения для элементов q^{nk} при $n, k = 0, 1, 2, 3$ приведены в работе [13] и даются в Приложении III. Использование этих величин дает возможность рассчитывать значения коэффициентов электропроводности, теплопроводности и термодиффузии вплоть до четвертого приближения ($\xi = 3$). Коэффициенты p^{nk} для $n, k = 0, 1$, которые можно использовать при расчете электронной вязкости, включая второе приближение, также приводятся в Приложении III.

Таблица 6.1. Поправки к электронным коэффициентам переноса для слабо ионизованного газа

f	$\xi = 2$	$\xi = 3$	Точный расчет
f_σ	1,08	1,11	1,130
f_λ	1,00	1,10	1,180
f_φ	1,00	1,19	1,360
f_η	1,06	–	1,083

Таблица 6.2. Поправки к электронным коэффициентам переноса для полностью ионизованного газа

f	$\xi = 2$	$\xi = 3$	Точный расчет
f_σ	1,93	1,950	1,975
f_λ	1,00	2,360	2,400
f_φ	1,00	0,895	0,900
f_η	1,50	–	–

Сходимость последовательных приближений при расчете электронных свойств переноса иллюстрируется на примере продольных кинетических коэффициентов для электронов данными табл. 6.1 и 6.2 для слабо ионизованного газа ($Q_{e\beta}(v) = \text{const}$) и для двухкомпонентной полностью ионизованной плазмы ($Z = 1$). Коэффициенты переноса в ξ -м приближении определяются с помощью соотношений

$$[\sigma]_\xi = [\sigma]_1 f_\sigma^{(\xi)}, \quad [\eta_e]_\xi = [\eta_e]_1 f_\eta^{(\xi)},$$

$$[\lambda_e]_\xi = [\lambda_e]_2 f_\lambda^{(\xi)}, \quad [\varphi]_\xi = [\varphi]_2 f_\varphi^{(\xi)},$$

где $[\sigma]_1 = \sigma_0$, $[\eta_e]_1$, $[\lambda_e]_2$ и $[\varphi]_2$ определены выражениями (3.4.11) и (6.2.25) для случая слабоионизованного газа, а также (3.4.14) и (6.2.26) для полностью ионизованной плазмы.

Сравнение с точными результатами, полученными для лорентцевского приближения в случае слабоионизованного газа [7, 8] и с помощью численного метода для полностью ионизованной плазмы [9] показывает, что для достижения необходимой точности расчета третье приближение ($\xi = 3$) оказывается вполне достаточным. Электропроводность плазмы может быть рассчитана с достаточной точностью уже во втором приближении.

Как показывает анализ [12], необходимость в учете более высоких приближений при расчете электронных свойств переноса возникает в тех случаях, когда зависимость эффективного транспортного

сечения электронов $Q_{e\beta}^{(1)}(v)$ на атомах или молекулах от скорости имеет вид: $Q_{e\beta}^{(1)}(v) \approx v^{m-1}$ при $m > 1$. Слабая сходимость приближений наблюдается также, когда эта зависимость имеет выраженный (рамзауэровский) минимум (например, для плазмы, одним из компонентов которой являются атомы аргона или других тяжелых инертных газов). Скорость сходимости приближений для электронных коэффициентов переноса вплоть до двенадцатого приближения была подробно изучена в [12] на примере плазмы аргона при давлении $p = 1$ атм. и для температур, не превышающих 20000 К.

Глава 7

ДВУХТЕМПЕРАТУРНЫЙ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННЫЙ ГАЗ

7.1. Тензор вязких напряжений

Воспользуемся результатами, полученными в предыдущей главе, для более детального анализа коэффициентов переноса в случае трехкомпонентной плазмы или частично ионизованного газа, состоящего из электронов, ионов и атомов ($m_i = m_a = m$). При этом температура ионов и атомов предполагается одинаковой ($T_i = T_a = T$), а температура электронов в общем случае предполагается отличающейся от температуры тяжелых частиц ($T_e \neq T$). При получении соответствующих выражений мы не будем теперь использовать расщепление исходных уравнений для электронов и тяжелых частиц, а воспользуемся формальными общими решениями, записанными в виде отношения определителей. Такой подход позволяет, кроме всего прочего, обосновать пределы применимости использованного выше способа расщепления уравнений.

Рассмотрим сначала вопрос о тензоре вязких напряжений в двухтемпературном частично ионизованном газе [1–3]. При упрощении определителей, с помощью которых записаны интересующие нас кинетические коэффициенты, будут существенно использованы следующие параметры малости:

$$\delta = m_e/m \ll 1, \quad \delta\theta^{-1} \ll 1, \quad \delta\theta \ll 1, \quad (\theta = T_e/T). \quad (7.1.1)$$

При выполнении этих условий для коэффициентов, входящих в уравнение для определения парциальных тензоров вязких напряжений (6.1.6), имеем [3]:

$$a_{ee} = a_{ii} = a_{aa} = 1,$$

$$a_{ei} = -0,4\delta\tau_e\tau_{ie}^{-1}, \quad a_{ie} = -0,2\delta(3\theta - 1)\tau_e\tau_{ei}^{-1},$$

$$a_{ea} = -4\delta f_{ea}\tau_e\tau_{ae}^{-1}, \quad a_{ea} = -4\delta [f_{ea} + 0,25\xi_{ea}(1-\theta)]\tau_e\tau_{ea}^{-1}, \quad (7.1.2)$$

$$a_{ia} = -f_{ia}\tau_i\tau_{ai}^{-1}, \quad a_{ai} = -f_{ai}\tau_i\tau_{ia}^{-1}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \tau_e^{-1} &= 0,3\tau_{ee}^{-1} + 0,6\tau_{ei}^{-1} + 0,6A_{ea}\tau_{ea}^{-1}, \\ \tau_i^{-1} &= 0,3\tau_{ii}^{-1} + f'_{ia}\tau_{ei}^{-1} + \delta\tau_{ie}^{-1}, \\ \tau_a^{-1} &= 0,3A_{aa}^*\tau_{aa}^{-1} + f'_{ia}\tau_{ai}^{-1} + \delta\tau_{ae}^{-1}, \\ f_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \left(1 - 0,6A_{\alpha\beta}^*\right), \quad f'_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \left(1 + 0,6A_{\alpha\beta}^*\right), \\ \xi_{\alpha\beta} &= \frac{6}{5} C_{\alpha\beta}^* - 1. \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

С точностью до величин порядка $(\delta\theta)^{3/2}$ по отношению к членам, оставленным в разложении, определители $|a|$, $|a^*|$ и $|a^{**}|$ в выражениях для коэффициентов вязкости (6.1.12) равны

$$\begin{aligned} |a| &= \Delta_\eta = 1 - a_{ia}a_{ai}, \\ |a^*| &= \Delta_\eta (1 + \beta_e^2) (1 + \Delta_\eta^{-2}\beta_i^2), \\ |a^{**}| &= \Delta_\eta \left(1 + \frac{1}{4}\beta_e^2\right) \left(1 + \frac{1}{4}\Delta_\eta^{-2}\beta_i^2\right). \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Здесь

$$\beta_e = \omega_e\tau_e, \quad \beta_i = \omega_i\tau_i, \quad \omega_e = \frac{e}{m_e} |\mathbf{B}|, \quad \omega_i = \frac{Ze}{m_i} |\mathbf{B}|. \quad (7.1.5)$$

Используя (7.1.2)–(7.1.4), легко обнаружить, что при выполнении условия $\beta_i^2 \ll 1$ с точностью до членов порядка $\delta^{1/2}\theta^{5/2}$ по отношению к оставленным членам коэффициенты вязкости для электронов определяются выражениями (6.2.6), которые были получены ранее из уравнений (6.2.3), записанных для электронного компонента в пренебрежении перекрестными членами, или

$$\begin{aligned} \eta_e^{(0)} &= \frac{1}{2} p_e\tau_e, \quad \eta_e^{(1)} = \frac{\eta_e^{(0)}}{1 + \beta_e^2}, \quad \eta_e^{(2)} = \frac{\eta_e^{(0)}}{1 + (\beta_e/2)^2}, \\ \eta_e^{(3)} &= \beta_e\eta_e^{(1)}, \quad \eta_e^{(4)} = \frac{\beta_e}{2} \eta_e^{(2)}. \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

Анализ общих решений показывает, однако, что учет перекрестных членов может оказаться существенным при определении коэффициентов $\eta_e^{(1)}$ и $\eta_e^{(2)}$, если выполнены условия $\beta_e \gg 1$ и $\beta_i \geq 1$. Рассмотрим этот случай более подробно на примере двухкомпонентной полностью ионизованной плазмы. Используя (6.1.12) и (7.1.4), находим, что с точностью до членов порядка $\delta^{1/2}\theta^{-1/2}$ по сравнению с единицей выражения для этих коэффициентов принимают вид

$$\eta_e^{(1)} = \frac{\eta_e^{(0)}}{\beta_e^2} \left(1 - \frac{\beta_i^2}{1 + \beta_i^2} a_{ei} \frac{\bar{\eta}_i \beta_e}{\bar{\eta}_e \beta_i} \right) = \frac{p_e}{2\omega_e^2 \tau_e} \left[1 + q(Z) \theta \frac{\beta_i^2}{1 + \beta_i^2} \right],$$

$$\eta_e^{(2)} = \frac{2p_e}{\omega_e^2 \tau_e} \left[1 + q(Z) \theta \frac{(\beta_i/2)^2}{1 + (\beta_i/2)^2} \right], \quad (7.1.7)$$

где $q(Z) = 0,4Z\tau_e\tau_{ei}^{-1} \cong (1,5Z + 0,11)^{-1}$.

Для случая, когда $\beta_i^2 \gg 1$ и $Z = 1$ имеем

$$\eta_e^{(1)} = \frac{p_e}{2\omega_e^2 \tau_e} (1 + 0,39\theta), \quad \eta_e^{(2)} = 4\eta_e^{(1)}. \quad (7.1.8)$$

Эти выражения отличаются от хорошо известных результатов для замагниченной полностью ионизованной плазмы [4, 5] дополнительным членом в круглых скобках, ¹⁾ который дает особенно заметный вклад в поперечные коэффициенты вязкости при $\theta = T_e/T_i \gg 1$.

Коэффициенты вязкости $\eta_i^{(p)}$ и $\eta_a^{(p)}$ для ионов и атомов, следующие из общих выражений (6.1.12), можно представить в виде [3]

$$\eta_i^{(0)} = \frac{1}{2} p_i \tau_i \xi_i \Delta_\eta^{-1}, \quad \eta_i^{(1)} = \frac{\eta_i^{(0)}}{1 + \Delta_\eta^{-2} \beta_i^2}, \quad \eta_i^{(3)} = \beta_i \Delta_\eta^{-1} \eta_i^{(1)},$$

$$\eta_i^{(2)} = \eta_i^{(1)} \left[\frac{\beta_i}{2} \right], \quad \eta_i^{(4)} = \eta_i^{(3)} \left[\frac{\beta_i}{2} \right],$$

$$\eta_a^{(0)} = \frac{1}{2} p_a \tau_a \xi_a \Delta_\eta^{-1}, \quad \eta_a^{(1)} = \eta_a^{(0)} \frac{1 + \xi_a^{-1} \Delta_\eta^{-1} \beta_i^2}{1 + \Delta_\eta^{-2} \beta_i^2}, \quad (7.1.9)$$

$$\eta_a^{(3)} = \Delta_\eta^{-1} \beta_i \eta_a^{(0)} \frac{1 - \xi_a^{-1} \Delta_\eta}{1 + \Delta_\eta^{-2} \beta_i^2}, \quad \eta_a^{(2)} = \eta_a^{(1)} \left[\frac{\beta_i}{2} \right], \quad \eta_a^{(4)} = \eta_a^{(3)} \left[\frac{\beta_i}{2} \right],$$

¹⁾ Расхождение с работой [4] вызвано тем, что коэффициенты переноса для каждого компонента в ней определялись из решения системы «развязанных» кинетических уравнений для электронов и ионов. В работе [5] перекрестные члены отбрасывались уже в самих уравнениях переноса, как мы это делали в п. 6.2.

$$\xi_i = 1 + f_{ia}\tau_a\tau_{ia}^{-1}, \quad \xi_a = 1 + f_{ia}\tau_i\tau_{ai}^{-1}.$$

В выражениях (7.1.9) опущены члены, максимальный порядок которых есть $\delta\theta^{-1}$ по отношению к оставленным членам. Таким образом, полученные выражения справедливы, если выполнено условие $T_e m_e / T m \ll 1$.

Для того чтобы определить относительный вклад каждого из компонентов плазмы в полный коэффициент вязкости $\eta = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}$ в зависимости от степени ионизации $\alpha = n_i / (n_i + n_a)$, степени неизотермичности $\theta = T_e / T$ и величин β_e и β_i , характеризующих степень замагниченности плазмы, необходимы оценки отношений различных частот столкновений между частицами $\tau_{\alpha\beta}^{-1} / \tau_{\delta\gamma}^{-1}$. Для этих оценок мы воспользуемся представлением $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ в виде (3.1.12). Тогда для взаимодействий тяжелых частиц ($T_{\alpha} = T_{\beta} = T$) имеем

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{16}{3} n_{\beta} \left(\frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \overline{Q}_{\alpha\beta}(T), \quad (7.1.10)$$

а для взаимодействий электрон-электрон и электрон-тяжелая частица (ион или атом)

$$\begin{aligned} \tau_{ee}^{-1} &= \frac{16}{3} n_e \left(\frac{kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} \overline{Q}_{ee}(T_e), \\ \tau_{e\beta}^{-1} &= \frac{16}{3} n_e \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2} \overline{Q}_{e\beta}(T_e). \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

Для усредненных диффузионных сечений (или сечений с передачей импульса) $\overline{Q}_{\alpha\beta}$ в случае электрон-, ион- и атом-атомных столкновений можно воспользоваться теоретическими и экспериментальными данными, приведенными в ряде работ [6–8]. Исходя из самых грубых оценок, можно положить

$$\overline{Q}_{ea} / \overline{Q}_{aa} \approx 1 - 10, \quad \overline{Q}_{ia} / \overline{Q}_{aa} \approx 1 - 10.$$

Для кулоновских взаимодействий имеем

$$\overline{Q}_{ee} / \overline{Q}_{ii} \approx Z^{-4} \theta^2, \quad \overline{Q}_{ei} / \overline{Q}_{ii} \approx Z^{-2} \theta^2,$$

$$\overline{Q}_{ii} = \frac{\pi}{2} \frac{Z^4 e^4}{(4\pi\epsilon_0 kT)^2} \ln \Lambda.$$

При оценке $\overline{Q}_{ii}$ следует иметь в виду, что для характерного в случае частично ионизованной плазмы диапазона температур и в интервале значений плотности заряженных частиц $10^9 \leq n_i \leq 10^{15} \text{ см}^{-3}$ значения кулоновского логарифма $\ln \Lambda$ заключены в пределах от 5 до 13.

Тогда, используя результаты [8] для $\overline{Q}_{aa}$ приходим к приближенной оценке

$$\gamma = \overline{Q}_{aa} / \overline{Q}_{ii} \approx 10^{-2} - 10^{-5}.$$

Относительный вклад каждого компонента в полную вязкость плазмы удобно оценивать, вводя значения приведенных парциальных коэффициентов вязкости, определяемых как

$$\eta_{\alpha}^{(p)*} = \frac{\eta_{\alpha}^{(p)} \overline{Q}_{aa}}{(mkT)^{1/2}}.$$

Учитывая, что значения ξ_i , ξ_a и Δ_{η} близки к единице, и используя приведенные выше оценки в выражениях (7.1.6) и (7.1.9), имеем

$$\begin{aligned} \eta_e^{(0)*} &\approx \frac{\delta^{1/2} \theta^{-5/2} \alpha \gamma}{[\alpha + (1 - \alpha) \gamma \theta^{-2}]}, \\ \eta_i^{(0)*} &\approx \frac{\alpha \gamma}{[\alpha + (1 - \alpha) \gamma]}, \quad \eta_a^{(0)*} \approx \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}. \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

Как видно, относительный вклад электронной вязкости в полную продольную вязкость плазмы (или вязкость в отсутствие магнитного поля) пренебрежимо мал при $\theta = 1$, но может оказаться сравнимым с вкладом от вязкости ионов уже при $\theta \sim \delta^{1/5}$, т. е. при $T_e/T \approx 5-10$.

Относительная роль ионной вязкости становится существенной лишь при высоких степенях ионизации $\alpha \geq 1 - \gamma$. При выполнении условия $\alpha \ll 1 - \gamma$ основной вклад вносится коэффициентом вязкости атомов $\eta_a^{(0)}$.

В тех случаях, когда вкладом электронной вязкости можно пренебречь, вязкость частично ионизованного газа в отсутствие магнитного поля определяется выражением

$$\eta = \frac{1}{2} (p_a \tau_a \xi_a + p_i \tau_i \xi_i) \Delta_{\eta}^{-1}, \quad (7.1.13)$$

которое включает зависимость от параметров лишь атом-атомных, ион-атомных и ион-ионных взаимодействий. Использование этого выражения приводит к тем же результатам, что и расчет по формулам для вязкости двухкомпонентной смеси, следующим из общих результатов п. 5.2, если положить в них $m_a = m_i$. Заметим, что при высоких степенях ионизации, когда вязкость начинает определяться ион-ионным взаимодействием частиц, точность расчета, даваемая формулой (7.1.13), соответствующей первому приближению в разложении по полиномам Сонина, несколько уменьшается. Сравнение с соответствующим результатом для полностью ионизованного газа, вычисленным в приближении двух полиномов (см. гл. 8), показывает, что приближения первого и второго порядков отличаются примерно на 15%.

Для анализа относительного вклада компонентов плазмы в поперечные коэффициенты вязкости $\eta_\alpha^{(1)}$ и $\eta_\alpha^{(3)}$ помимо оценок (7.1.12) необходимы дополнительные оценки:

$$\frac{\beta_i}{\beta_e} \approx \delta^{1/2} \theta^{-1/2} \frac{\alpha \theta^2 + (1 - \alpha) \gamma}{\alpha + (1 - \alpha) \gamma}, \quad \xi_a - \Delta_\eta \approx \frac{\alpha \gamma}{\alpha + (1 - \alpha) \gamma}.$$

Сравнивая выражения для приведенных коэффициентов вязкости, находим, что вклады отдельных компонентов плазмы в $\eta^{(1)}$ ведут себя подобно вкладам в $\eta^{(0)}$ с той лишь разницей, что при $\beta_i \gg 1$ роль ионной вязкости сказывается при еще более высоких степенях ионизации $\alpha \approx 1 - \gamma/\beta_i$.

Вклад в $\eta^{(3)}$ всех компонентов оказывается примерно одинаковым в слабом магнитном поле ($\beta_e \leq 1$) при низкой степени ионизации ($\alpha \ll 1$). С увеличением α уменьшается вклад вязкости атомов, а с увеличением магнитного поля — вклад электронов, так что при $\beta_i \gg 1$ имеем $\eta_e^{(3)} \ll \eta_a^{(3)}, \eta_i^{(3)}$. Что касается коэффициентов $\eta^{(2)}$ и $\eta^{(4)}$, то для них справедливы выводы, сделанные при анализе поведения $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(3)}$.

7.2. Потоки тепла

Обратимся теперь к анализу выражений для приведенных парциальных потоков тепла $\mathbf{h}_\alpha$ (6.1.13). Напомним, что после того как они определены, нетрудно найти и полный поток тепла в плазме, который определяется выражением

$$\mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{h}_\alpha + \frac{5}{2} \sum_\alpha p_\alpha \mathbf{w}_\alpha. \quad (7.2.1)$$

Как и при анализе выражений для парциальных тензоров вязких напряжений, воспользуемся условиями малости (6.2.1) для упрощения коэффициентов $b_{\alpha\beta}$ (6.1.6) и определителей в выражениях для $\mathbf{h}_\alpha$ (6.1.13). В результате имеем [3]

$$\begin{aligned} b_{ee} &= b_{ii} = b_{aa} = 1, \\ b_{ei} &= -2,7 \delta \tau_e^* \tau_{ie}^{-1}, \quad b_{ea} = -8 \delta g_{ea} \tau_e^* \tau_{ea}^{-1}, \\ b_{ia} &= -g_{ia} \tau_i^* \tau_{ai}^{-1}, \quad b_{ai} = -g_{ai} \tau_i^* \tau_{ia}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} (\tau_e^*)^{-1} &= 0,4 \tau_{ee}^{-1} + 1,3 \tau_{ei}^{-1} + (2,5 - 1,2 B_{ia}^*) \tau_{ea}^{-1}, \\ (\tau_i^*)^{-1} &= 0,4 \tau_{ii}^{-1} + g'_{ia} \tau_{ei}^{-1} + 3 \delta \tau_{ie}^{-1}, \\ (\tau_a^*)^{-1} &= 0,4 A_{aa}^* \tau_{aa}^{-1} + g'_{ia} \tau_{ai}^{-1} + 3 \delta \tau_{ae}^{-1}, \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

$$g_{ia} = \frac{11}{16} - 0,2A_{ia}^* - 0,15B_{ia}^*, \quad g'_{ia} = \frac{11}{16} + 0,2A_{ia}^* - 0,15B_{ia}^*.$$

Коэффициенты b_{ie} и b_{ae} имеют порядок величины δ^2 и здесь не приводятся.

Вычисление определителей $|b|$ и $|b^*|$ с точностью до величин порядка $\delta^{5/2}\theta^{3/2}$ дает

$$|b| = \Delta\lambda = 1 - b_{ia}b_{ai}, \quad |b^*| = \Delta\lambda (1 + \beta_e^{*2}) \left(1 + \Delta\lambda^{-2}\beta_i^{*2}\right), \quad (7.2.4)$$

$$\beta_e^* = \omega_e\tau_e^*, \quad \beta_i^* = \omega_i\tau_i^*.$$

В соответствии со структурой вектора $\mathbf{N}_\alpha$ (6.1.5) приведенный поток тепла каждого компонента плазмы складывается из нескольких независимых частей. Рассмотрим сначала ту его часть, которая определяется градиентом температуры компонентов. Анализ общего решения (6.1.13) показывает, что основной вклад в $\mathbf{h}_e^T$ дают члены, зависящие от градиента электронной температуры ∇T_e . Выражение для $\mathbf{h}_e^T$ можно в этом случае представить в виде

$$\mathbf{h}_e^T = -\lambda_{e\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \lambda_{e\perp} \nabla_{\perp} T_e - \lambda_{e\wedge} (\mathbf{k} \times \nabla T_e). \quad (7.2.5)$$

Соответствующие коэффициенты электронной теплопроводности определены как

$$\lambda_{e\parallel} = \bar{\lambda}_e = \frac{5}{2} \frac{k}{m_e} p_e \tau_e^*, \quad \lambda_{e\perp} = \frac{\lambda_{e\parallel}}{1 + \beta_e^{*2}}, \quad \lambda_{e\wedge} = \beta_e^* \lambda_{e\perp}. \quad (7.2.6)$$

При записи соотношений (7.2.5)–(7.2.6) опущены члены, порядок которых есть $\delta^{3/2}\theta^{5/2} |\nabla_{\parallel} T| / |\nabla_{\parallel} T_e|$ и $\delta\theta |\nabla_{\perp} T| / |\nabla_{\perp} T_e|$ по отношению к оставленным членам. Заметим, что при указанных условиях выражения (7.2.6) полностью совпадают с выражениями (6.2.8), полученными в пренебрежении перекрестными членами в уравнениях для электронных потоков тепла.

Аналогичные оценки в выражениях для $\mathbf{h}_i^T$ и $\mathbf{h}_a^T$ позволяют опустить в них члены, пропорциональные ∇T_e . Тогда приведенные парциальные потоки ионов и атомов принимают вид [3]

$$\mathbf{h}_{i,a}^T = -\lambda_{i,a\parallel} \nabla_{\parallel} T - \lambda_{i,a\perp} \nabla_{\perp} T - \lambda_{i,a\wedge} (\mathbf{k} \times \nabla T), \quad (7.2.7)$$

где

$$\lambda_{i\parallel} = \frac{5}{2} \frac{k}{m} p_i \tau_i^* \xi_i^* \Delta\lambda^{-1}, \quad \lambda_{i\perp} = \frac{\lambda_{i\parallel}}{1 + \Delta\lambda^{-2}\beta_i^{*2}}, \quad \lambda_{i\wedge} = \beta_i^* \Delta\lambda^{-1} \lambda_{i\perp},$$

$$\lambda_{a\parallel} = \frac{5}{2} \frac{k}{m} p_a \tau_a^* \xi_a^* \Delta\lambda^{-1}, \quad \lambda_{a\perp} = \lambda_{a\parallel} \frac{1 + (\xi_a^*)^{-1} \Delta\lambda^{-1} \beta_i^{*2}}{1 + \Delta\lambda^{-2}\beta_i^{*2}}, \quad (7.2.8)$$

$$\lambda_{a\wedge} = \beta_i^* \Delta_{\lambda}^{-1} \lambda_{a\parallel} \frac{1 - (\xi_a^*)^{-1} \Delta_{\lambda}}{1 + \Delta_{\lambda}^{-2} \beta_i^{*2}},$$

$$\xi_i^* = 1 + g_{ia} \tau_a^* (\tau_{ia}^*)^{-1}, \quad \xi_a^* = 1 + g_{ia} \tau_i^* (\tau_{ai}^*)^{-1}.$$

В уравнениях (7.2.7) и (7.2.8) опущены члены, максимальный порядок которых есть $\delta |\nabla T_e| / |\nabla T|$ и $\delta \theta^{-1} (5 \ln \Lambda)^{-1} |\nabla T_e| / |\nabla T|$ по отношению к оставленным. При $|\nabla T_e| \approx |\nabla T|$ это приводит к условию $T_e/T \ll 5 (m/m_e) \ln \Lambda$. Так как $\ln \Lambda \approx 10$, это условие оказывается менее жестким, чем условие $T_e/T \ll m/m_e$. Если $|\nabla T_e| / |\nabla T| \approx T_e/T$, то ограничение на величину T_e/T оказывается, наоборот, несколько более жестким, а именно $(T_e/T)^2 \ll 5 (m/m_e) \ln \Lambda$.

Для анализа вклада каждого из компонентов плазмы в полный тепловой поток (7.2.1) воспользуемся тем, что для величин τ_{α}^* , ξ_{α}^* и Δ_{λ} справедливы те же оценки, что и для τ_{α} , ξ_{α} и Δ_{η} . Введем вместо λ_{α} приведенные коэффициенты теплопроводности

$$\lambda_{\alpha}^* = \frac{\lambda_{\alpha} \bar{Q}_{aa}}{k} \left(\frac{m}{kT} \right)^{1/2}.$$

Тогда для коэффициентов теплопроводности вдоль магнитного поля имеем

$$\lambda_{e\parallel}^* \approx \frac{\delta^{-1/2} \theta^{-5/2} \alpha \gamma}{[\alpha + (1 - \alpha) \gamma \theta^{-2}]}, \quad \lambda_{i\parallel}^* \approx \frac{\alpha \gamma}{[\alpha + (1 - \alpha) \gamma]}, \quad \lambda_{a\parallel}^* \approx \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

Использование приведенных оценок показывает, что полный поток тепла вдоль магнитного поля за счет градиентов температуры определяется в основном значениями $\mathbf{h}_{e\parallel}^T$ и $\mathbf{h}_{a\parallel}^T$, а вклад ионов пренебрежимо мал, причем неизотермичность (рост отношения T_e/T) лишь усиливает это. С увеличением степени ионизации быстро возрастает вклад электронного потока тепла и уже при $\alpha \sim \delta^{1/2} \theta^{3/2}$ потоки $\mathbf{h}_{e\parallel}^T$ и $\mathbf{h}_{a\parallel}^T$ становятся сравнимыми. Рост магнитного поля заметно ограничивает электронный поток тепла поперек магнитного поля, поэтому при $\beta_e^2 \gg 1$ основной вклад в поперечный перенос тепла вносят $\mathbf{h}_{a\perp}^T$ и $\mathbf{h}_{i\perp}^T$. При этом вклад ионов становится существенным лишь при высоких степенях ионизации. Холловский поток тепла, перпендикулярный как магнитному полю, так и градиенту температуры, при $\beta_e^* \leq 1$ определяется в основном электронным переносом. С возрастанием поля вклад $\mathbf{h}_{a\wedge}^T$ и $\mathbf{h}_{i\wedge}^T$ увеличивается и становится сравнимым с $\mathbf{h}_{e\wedge}^T$ при $\beta_i \geq 1$. Изотермичность лишь усиливает относительную роль переноса тепла электронами.

Рассмотрим теперь ту часть потока тепла, которая пропорциональна относительной скорости компонентов плазмы. В рассматриваемом

нами случае трехкомпонентной частично ионизованной плазмы соответствующую часть вектора $\mathbf{N}_\alpha$ удобно выразить через плотность тока проводимости плазмы $\mathbf{j} = -n_e e (\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i)$ и «скорость проскальзывания» ионов $\mathbf{s} = \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_a$. Тогда в выражении для приведенного потока тепла $\mathbf{h}_\alpha$, помимо рассмотренного выше вклада $\mathbf{h}_\alpha^T$, можно выделить члены вида $\mathbf{h}_\alpha^j$ и $\mathbf{h}_\alpha^s$.

Электронная часть приведенного потока тепла определяется как

$$\mathbf{h}_e^j = \chi_{e||} \mathbf{j}_{||} + \chi_{e\perp} \mathbf{j}_\perp + \chi_{e\wedge} (\mathbf{k} \times \mathbf{j}), \quad (7.2.9)$$

$$\mathbf{h}_e^s = -\mu_{e||} \mathbf{s}_{||} - \mu_{e\perp} \mathbf{s}_\perp - \mu_{e\wedge} (\mathbf{k} \times \mathbf{s}).$$

Коэффициенты χ_e с точностью до членов порядка $\delta^{5/2}\theta^{-1/2}$ определяются полученными ранее выражениями (6.2.14) или

$$\chi_{e||} = \frac{kT_e}{e} \alpha_T, \quad \chi_{e\perp} = \frac{\chi_{e||}}{1 + \beta_e^{*2}}, \quad \chi_{e\wedge} = \beta_e^* \chi_{e\perp}, \quad (7.2.10)$$

$$\alpha_T = \frac{5}{2} \tau_e^* (\xi_{ea} \tau_{ea}^{-1} + \xi_{ei} \tau_{ei}^{-1}).$$

Для коэффициентов μ_e имеем

$$\mu_{e||} = p_e d_e^s, \quad \mu_{e\perp} = \frac{\mu_{e||}}{1 + \beta_e^{*2}}, \quad \mu_{e\wedge} = \beta_e^* \mu_{e\perp}. \quad (7.2.11)$$

Выражения, аналогичные по структуре выражениям (7.2.9), могут быть записаны для $\mathbf{h}_\alpha^j$ и $\mathbf{h}_\alpha^s$ ($\alpha = i, a$). Оценки коэффициентов χ_i и χ_a показывают [2], что они имеют порядок $\delta^{3/2}\theta^{5/2}$ и $\delta^{3/2}\theta^{-1/2}$ по сравнению с χ_e , поэтому их относительным вкладом в полные приведенные потоки $\mathbf{h}^j$ можно пренебречь. Что касается коэффициентов μ_α , то связанный с ними вклад в полные коэффициенты при проекциях вектора $\mathbf{s}$ в выражении для $\mathbf{h}^s$ оказывается одного порядка для всех компонентов. Не выписывая конкретных выражений для каждого из этих коэффициентов, приведем сразу выражения для полного потока тепла $\mathbf{q}$, в котором помимо вкладов от $\mathbf{h}^j$ и $\mathbf{h}^s$ необходимо учесть дополнительный вклад от диффузионных скоростей, возникающий из-за последнего члена в выражении (6.2.1). В результате получаем [3]

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^T + \mathbf{q}^j + \mathbf{q}^s, \quad \mathbf{q}^T = \sum_\alpha \mathbf{h}_\alpha^T, \quad (7.2.12)$$

$$\mathbf{q}^j = \varkappa_{||} \mathbf{j}_{||} + \varkappa_\perp \mathbf{j}_\perp + \varkappa_\wedge (\mathbf{k} \times \mathbf{j}),$$

$$\mathbf{q}^s = -\mu_{||} \mathbf{s}_{||} - \mu_\perp \mathbf{s}_\perp - \mu_\wedge (\mathbf{k} \times \mathbf{s}).$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \varkappa_{\parallel} &= \frac{kT}{e} \left(\alpha_T - \frac{5}{2} \right), \quad \varkappa_{\perp} = \frac{kT_e}{e} \left(\frac{\alpha_T}{1 + \beta_e^{*2}} - \frac{5}{2} \right), \\
 \varkappa_{\wedge} &= \frac{kT_e}{e} \frac{\beta_e^*}{1 + \beta_e^{*2}} \alpha_T, \\
 \mu_{\parallel} &= \left[d_e^s - \frac{5}{2} (1 - \alpha) \right] p_e + \Delta_{\lambda}^{-1} (d_i^s p_i \xi_i^* + d_a^s p_a \xi_a^*), \\
 \mu_{\perp} &= \left[\frac{d_e^s}{1 + \beta_e^{*2}} - \frac{5}{2} (1 - \alpha) \right] p_e + \\
 &\quad + \frac{\Delta_{\lambda}^{-1} \left[d_i^s p_i \xi_i^* + d_a^s p_a (\xi_a^* + \Delta_{\lambda}^{-1} \beta_i^{*2}) \right]}{1 + \Delta_{\lambda}^{-2} \beta_i^{*2}}, \\
 \mu_{\wedge} &= d_e^s p_e \frac{\beta_e^*}{1 + \beta_e^{*2}} + \beta_i^* \frac{\Delta_{\lambda}^{-1} \left[d_i^s p_i \xi_i^* + d_a^s p_a (\xi_a^* - \Delta_{\lambda}^{-1}) \right]}{1 + \Delta_{\lambda}^{-2} \beta_i^{*2}}.
 \end{aligned} \tag{7.2.13}$$

При этом

$$\begin{aligned}
 d_i^s &= \frac{5}{2} \tau_i^* \left[\frac{1}{4} \xi_{ia} \tau_{ia}^{-1} - 2\delta (1 - \alpha) \frac{1 - \theta}{\theta} \tau_{ie}^{-1} \right], \\
 d_a^s &= -\frac{5}{2} \tau_a^* \left[\frac{1}{4} \xi_{ia} \tau_{ai}^{-1} - 2\delta \alpha \frac{1 - \theta}{\theta} \tau_{ae}^{-1} \right],
 \end{aligned}$$

а коэффициенты Δ_{λ} , ξ_i^* и ξ_a^* определены выше.

Заметим в заключение этого параграфа, что при необходимости повышения точности расчета электронных кинетических коэффициентов можно воспользоваться результатами, вытекающими из следующих приближений в разложении по полиномам Сонина, которые обсуждались в предыдущей главе. Более точные выражения для коэффициентов теплопроводности электронов и ионов в случае полностью ионизованной плазмы будут рассматриваться в следующей главе.

7.3. Диффузионные потоки

Решение уравнений диффузии для трехкомпонентного частично ионизованного газа уже рассматривалось в главе 3 для случая, когда эти уравнения записываются в *квазигидродинамическом* приближении. Уравнения диффузии в приближении $13N$ моментов отличаются от них дополнительными членами, связанными с приведенными

потоками тепла компонентов [1]. После подстановки в уравнения диффузии выражений для парциальных потоков тепла методы их решения в принципе ничем не отличаются от использованных ранее. Используем переменные $\mathbf{w} = \mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i$ и $\mathbf{s} = \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_a$, а также соотношение

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w} + (1 - \alpha) \mathbf{s}, \quad (7.3.1)$$

которое следует из условия $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0$.

Представим уравнение (6.2.1) для электронного компонента плазмы в виде

$$\tau_0^{-1} \mathbf{w} + \tau_{ea}^{-1} \mathbf{s} + \nu_0 \frac{\mathbf{h}_e}{p_e} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}^* - \omega_e (\mathbf{w}_e \times \mathbf{k}). \quad (7.3.2)$$

Приведенный поток тепла электронов $\mathbf{h}_e$ определяется полученным ранее выражением (6.2.3) и его также удобно разбить на члены, содержащие $\mathbf{w}$, $\mathbf{s}$ и ∇T_e .

Уравнение для определения величины $\mathbf{s}$ следует из уравнения диффузии, записываемого для нейтрального компонента. Повторяя процедуру, использованную в п. 3.2, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = & -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \left[\mathbf{w} + \xi_{ea} \frac{\mathbf{h}_e}{p_e} + (1 - \alpha) \omega_e \tau_{ea} (\mathbf{w}_e \times \mathbf{k}) \right] + \\ & + \frac{2\tau_{ia}}{n_i m (1 + \varepsilon)} [\alpha \nabla p - \nabla (p_e + p_i)] - \frac{1}{2(1 + \varepsilon)} \xi_{ia} \left(\frac{\mathbf{h}_i}{p_i} - \frac{\mathbf{h}_a}{p_a} \right). \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{2n_e m_e \tau_{ea}^{-1}}{n_i m \tau_{ia}^{-1}} \approx \left(Z \frac{m_e T}{m T_e} \right)^{1/2} \ll 1.$$

Уравнения (7.3.2)–(7.3.3) вместе с (7.3.1) после подстановки в них выражений для $\mathbf{h}_e$, $\mathbf{h}_i$ и $\mathbf{h}_a$ образуют замкнутую систему уравнений для определения диффузионных скоростей (потоков) каждого из компонентов плазмы. Мы не будем рассматривать выражения для этих потоков в общем виде. Остановимся лишь на вопросе о том, какие изменения вносит учет относительных потоков тепла в выражение для обобщенного закона Ома, и проанализируем также вклад термодиффузии в диффузионные потоки в случае слабо ионизованной плазмы.

Анализ показывает (см. [1]), что дополнительный вклад в обобщенный закон Ома связан главным образом с учетом приведенного потока тепла электронов $\mathbf{h}_e$ в уравнении для электронной компоненты (7.3.2). Поправки к величине $\mathbf{s}$ за счет $\mathbf{h}_i$ и $\mathbf{h}_a$ в уравнении (7.3.3) пропорциональны ξ_{ea}^2 и ξ_{ia}^2 и составляют (по оценкам для модели твердых упругих шаров) не более 2%. Несколько больший вклад могут вносить члены, пропорциональные градиенту температуры, однако в окончательном

выражении для плотности тока возникающие поправки имеют порядок малой величины ε и их также можно опустить.

Подставляя $\mathbf{s}$ в (7.3.2) с учетом (7.3.1) и используя выражения для $\mathbf{h}_e$ (7.2.5) и (7.2.9), замечаем, что в получаемом соотношении можно пренебречь членами, пропорциональными малой величине ε всюду, где она не умножается на ω_e . В результате приходим к следующему выражению для обобщенного закона Ома [1]:

$$A \mathbf{j} + B \beta_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - C \beta_0^2 \mathbf{j} \cdot (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) = \sigma_0 \mathbf{E}_{\text{ef}}, \quad (7.3.4)$$

Здесь

$$A = 1 - \frac{\Delta_0}{1 + \beta_e^{*2}} + \delta_0 \beta_0^2, \quad B = 1 + \gamma \frac{\Delta_0}{1 + \beta_e^{*2}},$$

$$C = \delta_0 + \gamma^2 \frac{\Delta_0}{1 + \beta_e^{*2}}, \quad (7.3.5)$$

$$\mathbf{E}_{\text{ef}} = \mathbf{E}^* - \frac{k}{e} \alpha_T \left[\nabla_{\parallel} T_e + \frac{1}{1 + \beta_e^{*2}} (\nabla_{\perp} T_e + \beta_e^* \mathbf{k} \times \nabla T_e) \right] +$$

$$+ \frac{\delta_0}{n_e e (1 - \alpha)} (\mathbf{P} \times \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{P} = \alpha \nabla p - \nabla (p_e + p_i).$$

При этом

$$\beta_0 = \omega_e \tau_0, \quad \beta_e^* = \omega_e \tau_e^*, \quad \gamma = \tau_0^{-1} \tau_e^*,$$

$$\Delta_0 = \nu_0 \tau_0 \alpha_T = \frac{5}{2} \nu_0^2 \tau_0 \tau_e^*, \quad \nu_0 = (\xi_{ea} \tau_{ea}^{-1} + \xi_{ei} \tau_{ei}^{-1}), \quad (7.3.6)$$

$$\delta_0 = (1 - \alpha)^2 \varepsilon \tau_{ea} \tau_0^{-1} = 2 (1 - \alpha)^2 Z \left(\frac{m_e}{m} \right) \tau_{ia} \tau_0^{-1},$$

а величина α_T определена выражением (7.2.10).

Разрешая (7.3.4) относительно $\mathbf{j}$, можно представить выражение для плотности тока в виде

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}^* + \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}^* + \sigma_H (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*) +$$

$$+ \varphi_{\parallel} \nabla T_{e\parallel} + \varphi_{\perp} \nabla T_{e\perp} + \varphi_H (\mathbf{k} \times \nabla T_e) + \beta_{\perp} \mathbf{P}_{\perp} + \beta_H (\mathbf{k} \times \mathbf{P}). \quad (7.3.7)$$

Коэффициенты σ и φ определяются при этом выражениями (6.2.16) и (6.2.17), в которых коэффициент B сохраняет прежний вид, а в коэффициенте A в соответствии с (7.3.5) появляется дополнительный член $s = \delta_0 \beta_0^2$, целиком связанный с учетом «эффекта проскальзывания»

ионов относительно атомов. Новые коэффициенты $\beta_{\perp}$ и $\beta_{\parallel}$ определены как

$$\beta_{\perp} = \sigma_{\perp} \frac{B}{A} \frac{\delta_0 \beta_0^2}{n_e e (1 - \alpha)}, \quad \beta_{\parallel} = -\sigma_{\parallel} \frac{\delta_0 \beta_0}{n_e e (1 - \alpha)}. \quad (7.3.8)$$

Заметим, что при $s \ll 1$ и при пренебрежении членами, зависящими от $\mathbf{P}$, полученные результаты полностью согласуются с выражениями (6.2.15)–(6.2.18), представленными в предыдущей главе. Там же оценивался вклад второго приближения в продольную электропроводность плазмы. Что касается поперечных коэффициентов электропроводности, то, как уже отмечалось ранее, с ростом замагниченности плазмы ($\beta_0 \gg \gg 1$) влияние поправок второго приближения становится для них несущественным. При этом, однако, может оказаться важным учет проскальзывания ионов, связанный с членом $s = \delta_0 \beta_0^2$ в коэффициенте A .

Рассмотрим теперь вопрос о роли термодиффузии в случае слабо ионизованной газовой смеси. Напомним, что при этом справедливы уравнения диффузии (3.5.2), в правую часть которых необходимо до-бавить член следующего вида

$$-n_{\alpha} \sum_{\beta} \mu_{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left(\frac{\mathbf{h}_{\alpha}}{m_{\alpha} p_{\alpha}} - \frac{\mathbf{h}_{\beta}}{m_{\beta} p_{\beta}} \right). \quad (7.3.9)$$

Если не рассматривать возникающие от учета относительных потоков тепла поправки второго приближения к коэффициентам диффузии, которые в случае слабой ионизации смеси, как правило, малы, то соответствующие термодиффузионные члены в уравнениях диффузии возникают, если подставить в выражение (7.3.9) те части потоков тепла компонент, которые зависят от градиента температуры, т. е. $\mathbf{h}_{\alpha}^T$ и $\mathbf{h}_{\beta}^T$, вычисленные в пределе слабой ионизации газа.

При записи уравнения диффузии для электронов это соответствует учету лишь приведенного потока тепла электронов $\mathbf{h}_e^T$, для которого можно использовать выражение (6.2.13). В результате выражение для электронного диффузионного потока $n_e \mathbf{w}_e$ в отсутствие магнитного поля можно представить в виде

$$n_e \mathbf{w}_e = -D_e \nabla n_e - n_e b_e \mathbf{E} - n_e D_e (1 - \alpha_T^e) \nabla \ln T_e, \quad (7.3.10)$$

где $\alpha_T^e = (5/2) \nu_0 \tau_e^*$ — постоянная термодиффузии для электронов в слабо ионизованной плазме. Для ионной компоненты плазмы при $T_i = T_a = T$ вклад термодиффузии в отсутствие магнитного поля можно найти, используя выражения, полученные выше для случая изотермической многокомпонентной газовой смеси (см. п. 5.3). В частности, если в смеси присутствует лишь один сорт нейтралов, получаем

$$n_i \mathbf{w}_i = -D_i \nabla n_i + n_i Z_i b_i \mathbf{E} - n_i D_i (1 + \alpha_T^i) \nabla \ln T, \quad (7.3.11)$$

где α_T^i — постоянная термодиффузии смеси, определяемая выражением (5.3.12).

Заметим, что в полученных выражениях для диффузионных потоков коэффициент при градиенте температуры образован из собственно термодиффузионного вклада, пропорционального α_T , и вклада, возникающего при выделении члена с градиентом температуры из $\nabla \ln p_\alpha$ в силу соотношения $\nabla \ln p_\alpha = \nabla \ln n_\alpha + \nabla \ln T_\alpha$. В литературе по физике плазмы коэффициентом термодиффузии нередко называют весь множитель при $\nabla \ln T_\alpha$, в то время как в выражениях кинетической теории под ним подразумевается лишь та часть, которая пропорциональна α_T . Как правило α_T заметно меньше единицы. В частности, для электронов $\alpha_T = 0$, если эффективная частота столкновений с передачей импульса $\nu_{e\beta}(v)$ не зависит от скорости. Для ионов этот случай соответствует поляризационному взаимодействию иона с атомом ($U = \alpha/r^4$), которое оказывается доминирующим при низких энергиях. Для более сложных моделей потенциала взаимодействия, учитывающих наряду с дальнедействующим поляризационным притяжением отталкивание частиц на близких расстояниях с потенциалом $U = \alpha/r^n$ ($n > 0$) постоянная термодиффузии α_T может иметь любой знак в зависимости от величины (kT/ε) , где ε — глубина минимума кривой потенциальной энергии.

Выражения (7.3.10) и (7.3.11) позволяют рассмотреть вопрос и об амбиполярной диффузии при учете градиентов температуры. Используя условие $\sum n_\alpha e_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0$ (см. п. 3.5) и исключая с его помощью поле $\mathbf{E}$ в этих выражениях, для случая плазмы с одним сортом ионов заряда Ze при условии, что $b_e > b_i$, получаем

$$n_e w_e = Z n_i w_i = -D_A \nabla n_e - n_e D_{TA}^e \nabla \ln T_e - n_e D_{TA}^i \nabla \ln T, \quad (7.3.12)$$

где D_A определяется выражениями (3.5.21), а для амбиполярных коэффициентов термодиффузии имеем

$$D_{TA}^e = Z \frac{T_e}{T} D_i (1 - \alpha_T^e), \quad D_{TA}^i = D_i (1 + \alpha_T^i). \quad (7.3.13)$$

Глава 8

МНОГОСОРТНАЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННАЯ ПЛАЗМА

8.1. Исходные уравнения

В настоящей главе рассматриваются явления переноса в много-сортной полностью ионизованной плазме, состоящей из электронов и нескольких сортов ионов, каждый из которых может находиться, вообще говоря, в различных зарядовых состояниях. В соответствии с этим будем относить индексы α и β к различным сортам частиц, а индексами Z и ζ будем отмечать их зарядовые состояния (для электронов можно формально полагать $Z = -1$ или использовать один индекс $\alpha = e$). Поскольку, как уже отмечалось ранее, в случае кулоновских взаимодействий частиц приближение $13N$ моментов при расчете кинетических коэффициентов не обеспечивает достаточной точности, мы используем приближение, в котором в разложении функции распределения добавляется еще по одному полиному как для векторных, так и для тензорных величин. Соответствующее выражение для функции распределения частиц сорта α , находящихся в зарядовом состоянии Z , принимает в этом случае следующий вид:

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha z} = f_{\alpha z}^{(0)} & \left[1 + \gamma_{\alpha z} \mathbf{w}_{\alpha z} \cdot \mathbf{c} + \frac{1}{5} \gamma_{\alpha z}^2 p_{\alpha z}^{-1} \mathbf{h}_{\alpha z} \cdot \mathbf{c} \left(c^2 - 5\gamma_{\alpha z}^{-1} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{70} \gamma_{\alpha z}^4 p_{\alpha z}^{-1} \mathbf{r}_{\alpha z} \cdot \mathbf{c} \left(c^4 - 14\gamma_{\alpha z}^{-1} + 35\gamma_{\alpha z}^{-2} \right) \Big] + \\
 & + f_{\alpha z}^{(0)} \left[\frac{1}{2} \gamma_{\alpha z} p_{\alpha z}^{-1} \pi_{\alpha z rs} \left(c_r c_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} c^2 \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{14} \gamma_{\alpha z}^3 p_{\alpha z}^{-1} \sigma_{\alpha z rs} \left(c_r c_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} c^2 \right) \left(c^2 - 7\gamma_{\alpha z}^{-1} \right) \Big]. \quad (8.1.1)
 \end{aligned}$$

Новые моменты функции распределения, фигурирующие в (8.1.1) определены выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha z} &= \frac{m_\alpha}{4} \int \left(c^4 - 14\gamma_{\alpha z}^{-1} c^2 + 35\gamma_{\alpha z}^{-2} \right) \mathbf{c} f_{\alpha z} d\mathbf{c}, \\ \sigma_{\alpha zrs} &= \frac{m_\alpha}{2} \int \left(c^2 - 7\gamma_{\alpha z}^{-1} \right) \left(c_r c_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} c^2 \right) f_{\alpha z} d\mathbf{c}. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Общее число независимых моментов равно 21 для каждого компонента плазмы, поэтому представление $f_{\alpha z}$ в виде (8.1.1) соответствует приближению $21N$ моментов.

Системы уравнений моментов, используемых для расчета скоростей диффузии, потоков тепла и тензоров вязких напряжений компонентов плазмы, будем записывать сразу в приближении, когда в них можно пренебречь производными по времени и всеми нелинейными членами (т.е. в линейном по ε приближении метода моментов). Для того чтобы упростить представление правых частей уравнений (или моментов относительно интегралов столкновений), будем предполагать выполненным условие $|T_{\alpha z} - T_{\beta z}| \ll T_{\alpha z}$ для тяжелых частиц плазмы. Это ограничение не относится, однако к легким частицам, в частности к электронам, для которых, как уже было показано при анализе приближения $13N$ моментов, оказываются справедливыми те же выражения для правых частей уравнений с заменой в них T на T_e (для этого необходимо выполнение условия $(T_e/T_\beta) \gg (m_e/m_\beta)$). Заметим, что условие приближенного равенства температур тяжелых частиц плазмы не накладывает никаких ограничений на градиенты температур компонентов. Поэтому в левых частях уравнений как для электронов, так и для ионов различного сорта мы сохраняем различие температур под знаками пространственных производных. С учетом этих замечаний система уравнений для определения векторных параметров: диффузионных скоростей $\mathbf{w}_{\alpha z}$, приведенных парциальных потоков тепла $\mathbf{h}_{\alpha z}$ и вспомогательных переменных $\mathbf{r}_{\alpha z}$ в многосортной полностью ионизованной плазме записывается в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} -\rho_{\alpha z} \omega_{\alpha z} (\mathbf{w}_{\alpha z} \times \mathbf{k}) + \nabla p_{\alpha z} - \rho_{\alpha z} \left(\frac{\mathbf{F}_{\alpha z}}{m_\alpha} - \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) &= \mathbf{R}_{\alpha z} \equiv \\ &\equiv \sum_{\beta, \zeta} \left[G_{\alpha z \beta \zeta}^{(1)} (\mathbf{w}_{\alpha z} - \mathbf{w}_{\beta \zeta}) + \frac{\mu_{\alpha \beta}}{kT} G_{\alpha z \beta \zeta}^{(2)} \left(\frac{\mathbf{h}_{\alpha z}}{\rho_{\alpha z}} - \frac{\mathbf{h}_{\beta \zeta}}{\rho_{\beta \zeta}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_{\alpha \beta}^2}{(kT)^2} G_{\alpha z \beta \zeta}^{(8)} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha z}}{\rho_{\alpha z}} - \frac{\mathbf{r}_{\beta \zeta}}{\rho_{\beta \zeta}} \right) \right]; \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

$$\begin{aligned}
& -\omega_{\alpha z} (\mathbf{h}_{\alpha z} \times \mathbf{k}) + \frac{5}{2} \frac{k p_{\alpha z}}{m_{\alpha}} \nabla T_{\alpha z} = \\
& = \frac{kT}{m_{\alpha}} \sum_{\beta, \zeta} \left[\frac{5}{2} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} G_{\alpha z \beta \zeta}^{(2)} (\mathbf{w}_{\alpha z} - \mathbf{w}_{\beta \zeta}) + G_{\alpha z \beta \zeta}^{(5)} \frac{\mathbf{h}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} + G_{\alpha z \beta \zeta}^{(6)} \frac{\mathbf{h}_{\beta \zeta}}{p_{\beta \zeta}} \right] + \\
& + \frac{kT}{m_{\alpha}} \sum_{\beta \zeta} \left[\frac{\mu_{\alpha\beta}}{kT} \left(G_{\alpha z \beta \zeta}^{(9)} \frac{\mathbf{r}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} + G_{\alpha z \beta \zeta}^{(10)} \frac{\mathbf{r}_{\beta \zeta}}{p_{\beta \zeta}} \right) \right], \quad (8.1.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega_{\alpha z} (\mathbf{r}_{\alpha z} \times \mathbf{k}) = \left(\frac{kT}{m_{\alpha}} \right)^2 \sum_{\beta \zeta} \left[\frac{35}{2} \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \right)^2 G_{\alpha z \beta \zeta}^{(8)} (\mathbf{w}_{\alpha z} - \mathbf{w}_{\beta \zeta}) + \right. \\
& + 7 \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} (G_{\alpha z \beta \zeta}^{(9)} \frac{\mathbf{h}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} + G_{\alpha z \beta \zeta}^{(10)} \frac{\mathbf{h}_{\beta \zeta}}{p_{\beta \zeta}}) \left. \right] + \\
& + \left(\frac{kT}{m_{\alpha}} \right)^2 \sum_{\beta \zeta} \left[\frac{m_{\alpha}}{kT} G_{\alpha z \beta \zeta}^{(11)} \frac{\mathbf{r}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} + \frac{m_{\beta}}{kT} G_{\alpha z \beta \zeta}^{(12)} \frac{\mathbf{r}_{\beta \zeta}}{p_{\beta \zeta}} \right]. \quad (8.1.5)
\end{aligned}$$

Коэффициенты $G_{\alpha z \beta \zeta}^{(p)}$ определены выражениями

$$\begin{aligned}
G_{\alpha z \beta \zeta}^{(1)} &= -\lambda_{\alpha z \beta \zeta}, \quad G_{\alpha z \beta \zeta}^{(2)} = \frac{3}{5} \lambda_{\alpha z \beta \zeta}, \\
G_{\alpha z \beta \zeta}^{(5)} &= -\left(\frac{13}{10} \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}} + \frac{8}{5} + 3 \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} \right) \varkappa_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha z \beta \zeta}, \\
G_{\alpha z \beta \zeta}^{(6)} &= \frac{27}{10} \varkappa_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha z \beta \zeta}, \quad G_{\alpha z \beta \zeta}^{(8)} = -\frac{3}{14} \lambda_{\alpha z \beta \zeta}, \\
G_{\alpha z \beta \zeta}^{(9)} &= \frac{3}{5} \left(\frac{23}{28} \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}} + \frac{8}{7} + 3 \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} \right) \varkappa_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha z \beta \zeta}, \\
G_{\alpha z \beta \zeta}^{(10)} &= -\frac{45}{28} \varkappa_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha z \beta \zeta}, \\
G_{\alpha z \beta \zeta}^{(11)} &= -\left(\frac{433}{280} \left(\frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}} \right)^2 + \frac{139}{35} \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}} + \frac{459}{35} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{32}{5} \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} + 5 \left(\frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} \right)^2 \right) \varkappa_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha z \beta \zeta}, \\
G_{\alpha z \beta \zeta}^{(12)} &= \frac{75}{8} \varkappa_{\alpha\beta}^2 \lambda_{\alpha z \beta \zeta}.
\end{aligned} \quad (8.1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varkappa_{\alpha\beta} &= \frac{m_\alpha m_\beta}{(m + m_\beta)^2}, \\ \lambda_{\alpha z \beta \zeta} &= \lambda_{\beta \zeta \alpha z} = \frac{1}{3} (2\pi)^{-3/2} n_{\alpha z} n_{\beta \zeta} e^4 Z^2 \zeta^2 \mu_{\alpha\beta}^{1/2} \frac{\ln \Lambda_{\alpha\beta}}{(kT)^{3/2} \varepsilon_0^2}. \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

Коэффициенты (8.1.6) рассчитаны с использованием выражений для интегральных скобок от полиномов Сонина (см. Приложение II), а также того обстоятельства, что для кулоновских взаимодействий при формальном обрезании параметра столкновений (прицельного расстояния) на расстоянии порядка радиуса Дебая выражения для $\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r}$ можно представить как

$$\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r} = \pi^{1/2} \ell (r-1)! \left(\frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{4\pi \varepsilon_0} \right)^2 \frac{\ln \Lambda_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta}^{1/2} (2kT)^{3/2}}, \quad (8.1.8)$$

где

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{12\pi \varepsilon_0^{3/2} kT}{|Z_\alpha Z_\beta| e^2} \left[\frac{kT}{n_e e^2 (1 + Z_{ei})} \right]^{1/2}.$$

Соответствующая система уравнений для определения тензорных параметров, парциальных тензоров вязких напряжений $\pi_{\alpha z rs}$ и вспомогательной величины $\sigma_{\alpha z rs}$, записывается в виде

$$\begin{aligned} -\omega_{\alpha z} \{ \pi_{\alpha z \beta \zeta} e_{s\ell m} k_m \} + p_{\alpha z} W_{rs} = \\ = \sum_{\beta \zeta} \left[\frac{kT}{m_\alpha + m_\beta} \left(G_{\alpha z \beta \zeta}^{(3)} \frac{\pi_{\alpha z rs}}{p_{\alpha z}} + G_{\alpha z \beta \zeta}^{(4)} \frac{\pi_{\beta \zeta rs}}{p_{\beta \zeta}} \right) \right] + \\ + \sum_{\beta \zeta} \left[\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta} \left(G_{\alpha z \beta \zeta}^{(13)} \frac{\sigma_{\alpha z rs}}{p_{\alpha z}} + G_{\alpha z \beta \zeta}^{(14)} \frac{\sigma_{\beta \zeta rs}}{p_{\beta \zeta}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

$$\begin{aligned} -\omega_{\alpha z} \{ \sigma_{\alpha z \beta \zeta} e_{s\ell m} k_m \} = \sum_{\beta \zeta} \frac{7}{2} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \times \\ \times \left[\frac{kT}{m_\alpha + m_\beta} \left(G_{\alpha z \beta \zeta}^{(13)} \frac{\pi_{\alpha z rs}}{p_{\alpha z}} + G_{\alpha z \beta \zeta}^{(14)} \frac{\pi_{\beta \zeta rs}}{p_{\beta \zeta}} \right) \right] + \\ + \sum_{\beta \zeta} \left[\frac{kT}{m_\alpha + m_\beta} \left(G_{\alpha z \beta \zeta}^{(15)} \frac{\sigma_{\alpha z rs}}{p_{\alpha z}} + G_{\alpha z \beta \zeta}^{(16)} \frac{\sigma_{\beta \zeta rs}}{p_{\beta \zeta}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

При этом для коэффициентов $G_{\alpha z\beta\zeta}^{(p)}$ имеем

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha z\beta\zeta}^{(3)} &= -\left(2 + \frac{6}{5} \frac{m_\beta}{m_\alpha}\right) \lambda_{\alpha z\beta\zeta}, & G_{\alpha z\beta\zeta}^{(4)} &= \frac{4}{5} \lambda_{\alpha z\beta\zeta}, \\
 G_{\alpha z\beta\zeta}^{(13)} &= \left(\frac{18}{35} \frac{m_\beta}{m_\alpha} + \frac{6}{5}\right) \lambda_{\alpha z\beta\zeta}, & G_{\alpha z\beta\zeta}^{(14)} &= -\frac{24}{35} \frac{m_\alpha}{m_\beta} \lambda_{\alpha z\beta\zeta}, \\
 G_{\alpha z\beta\zeta}^{(15)} &= -\left(\frac{51}{35} \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha}\right)^2 + \frac{37}{4} \frac{m_\beta}{m_\alpha} + \frac{22}{5} + 4 \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) \kappa_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha z\beta\zeta}, \\
 G_{\alpha z\beta\zeta}^{(16)} &= \frac{24}{7} \kappa_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha z\beta\zeta}.
 \end{aligned} \tag{8.1.11}$$

Решение систем уравнений (8.1.3)–(8.1.5) и (8.1.9)–(8.1.10) дает возможность найти все интересующие нас коэффициенты переноса для любого из компонентов плазмы при произвольном значении магнитного поля. В общем случае, однако, соответствующие результаты, выраженные через отношения определителей, выглядят очень громоздко, что практически исключает возможность их анализа. Поэтому в дальнейшем выражения для коэффициентов переноса при произвольных значениях параметра Холла $\omega_\alpha \tau_{\alpha\beta}$ анализируются лишь для простой двухкомпонентной плазмы, образованной из электронов и ионов одного сорта, что позволяет, в частности, сравнить получаемые результаты с уже известными из литературы [2, 3]. Явления переноса в плазме с несколькими сортами ионов будут детально рассмотрены в двух предельных ситуациях, когда магнитное поле отсутствует ($\omega_\alpha = 0$) и когда плазма сильно замагничена ($\omega_\alpha \tau_{\alpha\beta} \gg 1$). Это позволяет получить относительно простые выражения в практически важных случаях: а) продольных потоков для электронов и легких ионов, б) продольных потоков для нескольких сортов тяжелых ионов, находящихся в произвольных зарядовых состояниях, в) для поперечных потоков в замагниченной плазме.

8.2. Явления переноса в простой плазме

Рассмотрим явления переноса в простейшем случае полностью ионизованной плазмы, состоящей из электронов и одного сорта ионов заряда Z . В соответствии с анализом, проведенным в предыдущих главах, мы можем отделить при этом уравнения для ионов от уравнений для электронов.

Обратимся сначала к вычислению потока тепла ионов. Для этого достаточно воспользоваться уравнениями (8.1.4)–(8.1.5), записанными для ионного компонента, которые после отбрасывания малых членов,

зависящих от параметров электронного компонента, и подстановки явных выражений для $G_{ii}^{(p)}$ принимают вид

$$\begin{aligned} -\beta_i (\mathbf{h}_i \times \mathbf{k}) + \frac{5}{2} \frac{k}{m_i} p_i \tau_{ii} \nabla T_i &= -\frac{2}{5} \mathbf{h}_i + \frac{3}{35} \frac{m}{kT} \mathbf{r}_i \\ -\beta_i \frac{m_i}{kT} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{k}) &= \frac{3}{5} \mathbf{h}_i - \frac{9}{14} \frac{m_i}{kT} \mathbf{r}_i, \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

где $\beta_i = \omega_i \tau_{ii}$, $\omega_i = eZ |\mathbf{B}|/m_i$.

Разрешая систему (8.2.1) относительно $\mathbf{h}_i$, находим

$$\mathbf{h}_i = -\lambda_{i\parallel} \nabla_{\parallel} T_i - \lambda_{i\perp} \nabla_{\perp} T_i - \lambda_{iH} (\mathbf{k} \times \nabla T_i), \quad (8.2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{i\parallel} &= 7,81 \frac{k}{m_i} p_i \tau_{ii}, \quad \lambda_{i\perp} = \frac{k}{m_i} p_i \tau_{ii} \frac{\beta_i^2 + 0,33}{\Delta_i}, \\ \lambda_{iH} &= \frac{5}{2} \frac{k}{m_i} p_i \tau_{ii} \beta_i \frac{\beta_i^2 + 0,46}{\Delta_i}, \\ \Delta_i &= \beta_i^4 + 0,68 \beta_i^2 + 0,043, \\ \tau_{ii}^{-1} &= \frac{1}{6\varepsilon_0^2} n_i \left[\frac{Z^4 e^4}{m_i^{1/2} (\pi k T_i)^{3/2}} \right] \ln \Lambda. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Полученные выражения согласуются с известными результатами Брагинского [2], полученными с помощью некоторой модификации обычного метода Чепмена–Энскога, если принять во внимание различия в определении времени релаксации для ионов ($\tau_i = 2\tau_{ii}$). Аналогичные результаты, полученные с помощью метода эрмитовых моментов, представлены в монографии Балеску [3].

Рассмотрим теперь уравнения (8.1.4)–(8.1.5), записанные для электронного компонента. Сохраняя в них относительную скорость электронов и ионов $\mathbf{w} = \mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i$, пренебрегая остальными перекрестными электрон-ионными членами и используя явные выражения для $G_{ee}^{(p)}$ и $G_{ei}^{(p)}$, приходим к следующей системе уравнений для определения $\mathbf{h}_e$ и $\mathbf{r}_e$:

$$\begin{aligned} -\beta_e (\mathbf{h}_e \times \mathbf{k}) + \frac{5}{2} \frac{k}{m_e} p_e \tau_{ei} \nabla T_e - \frac{3}{5} p_e \mathbf{w} &= -\alpha_{11} \mathbf{h}_e + \alpha_{12} \frac{m_e}{kT_e} \mathbf{r}_e, \\ -\beta_e \frac{m_e}{kT_e} (\mathbf{r}_e \times \mathbf{k}) + \frac{15}{4} p_e \mathbf{w} &= \alpha_{21} \mathbf{h}_e - \alpha_{22} \frac{m_e}{kT_e} \mathbf{r}_e, \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

где $\beta_e = \omega_e \tau_{ei}$, $\omega_e = e |\mathbf{B}| / m_e$. Коэффициенты α_{mn} определены как

$$\alpha_{11} = \frac{2\sqrt{2}}{5Z} + \frac{13}{10}, \quad 7\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{3\sqrt{2}}{5Z} + \frac{69}{20}, \quad \alpha_{22} = \frac{9\sqrt{2}}{14Z} + \frac{433}{280}.$$

Разрешая уравнения (8.2.4) относительно $\mathbf{h}_e$, можно представить приведенный поток тепла электронов в виде

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h}_e^T + \mathbf{h}_e^w, \quad (8.2.5)$$

где $\mathbf{h}_e^T$ определяется продольными и поперечными компонентами градиента температуры электронов, а $\mathbf{h}_e^w$ — соответствующими компонентами относительной скорости $\mathbf{w}$. Сама величина $\mathbf{w}$ или связанная с ней плотность тока проводимости $\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{w}$ могут быть, в свою очередь, определены через поле $\mathbf{E}^*$ и градиенты температуры электронов ∇T_e . Для этого можно воспользоваться уравнением (8.1.3), которое при $\alpha = e$ и в пренебрежении малыми членами принимает вид

$$n_e e \mathbf{E}^* - \rho_e \omega_e (\mathbf{w} \times \mathbf{k}) = \mathbf{R}_{ei}, \quad (8.2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ei} &= -m_e n_e \tau_{ei}^{-1} \left[\mathbf{w}_e - \frac{3}{5} \frac{\mathbf{h}_e}{p_e} + \frac{3}{14} \frac{m_e}{k T_e} \frac{\mathbf{r}_e}{p_e} \right], \\ \mathbf{E}^* &= \mathbf{E}' + \frac{1}{n_e e} \nabla p_e. \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

После того как система уравнений (8.2.4) разрешается относительно $\mathbf{h}_e$ и $\mathbf{r}_e$, подстановка этих величин в $\mathbf{R}_{ei}$ (8.2.7) позволяет представить последнюю в виде

$$\mathbf{R}_{ei} = \mathbf{R}_{ei}^w + \mathbf{R}_{ei}^T. \quad (8.2.8)$$

Величину $\mathbf{R}_{ei}$ будем в дальнейшем называть «электрон-ионной силой трения». Заметим, что в литературе по физике плазмы [2] составляющую $\mathbf{R}_{ei}^w$, которая выражается через продольные и поперечные относительно магнитного поля компоненты $\mathbf{w}$ принято называть «диффузионной силой трения», а величину $\mathbf{R}_{ei}^T$, выраженную через соответствующие компоненты градиента температуры электронов, — «термосилой».

Ниже приводятся выражения для величин $\mathbf{R}_{ei}^w$ и $\mathbf{R}_{ei}^T$, а также для $\mathbf{h}_e^w$ и $\mathbf{h}_e^T$:

$$\mathbf{R}_{ei}^w = -m_e n_e \tau_{ei}^{-1} (\alpha_{||} \mathbf{w}_{||} + \alpha_{\perp} \mathbf{w}_{\perp} - \alpha_H (\mathbf{k} \times \mathbf{w})),$$

$$\mathbf{R}_{ei}^T = -n_e (\beta_{||} \nabla_{||} T_e + \beta_{\perp} \nabla_{\perp} T_e + \beta_H (\mathbf{k} \times \nabla T_e)),$$

$$\mathbf{h}_e^w = p_e (\beta_{||} \mathbf{w}_{||} + \beta_{\perp} \mathbf{w}_{\perp} + \beta_H (\mathbf{k} \times \mathbf{w})),$$

$$\mathbf{h}_e^T = -\frac{p_e}{m_e} \tau_{ei} (\gamma_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e + \gamma_{\perp} \nabla_{\perp} T_e + \gamma_H (\mathbf{k} \times \nabla T_e)). \quad (8.2.9)$$

Если использовать теперь выражение для $\mathbf{R}_{ei}$ в уравнении (8.2.6) и разрешить последнее относительно $\mathbf{w}$, можно получить обобщенный закон Ома для полностью ионизованной двухкомпонентной плазмы в виде

$$\mathbf{E}_{\text{ef}} = \frac{1}{\sigma_{\parallel}} \mathbf{j}_{\parallel} + \frac{1}{\sigma_{\perp}} \mathbf{j}_{\perp} + \frac{1}{n_e e} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \quad (8.2.10)$$

где вводится эффективное электрическое поле

$$\mathbf{E}_{\text{ef}} = \mathbf{E}^* - \frac{1}{n_e e} \mathbf{R}_{ei}^T, \quad \mathbf{E}^* = \mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{n_e e} \nabla p_e.$$

Соответствующее выражение для плотности тока проводимости, следующее из (8.2.10), имеет вид

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \sigma_H (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\text{ef}}).$$

При этом продольный, поперечный и холловский коэффициенты электропроводности определены как

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel} &= \frac{n_e e^2}{m_e \alpha_{\parallel}} \tau_{ei}, \quad \sigma_{\perp} = \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_{ei} \frac{\alpha_{\perp}}{\left[\alpha_{\perp}^2 + (\alpha_H + \beta_e)^2 \right]}, \\ \sigma_H &= \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_{ei} \frac{(\alpha_H + \beta_e)}{\left[\alpha_{\perp}^2 + (\alpha_H + \beta_e)^2 \right]}. \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

Приведем теперь выражения для коэффициентов α , β , γ в соотношениях (8.2.9), которые являются функциями зарядового числа иона Z и параметра Холла электронов β_e :

$$\begin{aligned} \alpha_{\parallel} &= 1 - \frac{p_1}{p_0}, \quad \alpha_{\perp} = 1 - \frac{p_0 p_1 + p_2 \beta_e^2}{\Delta_e}, \quad \alpha_H = \beta_e \frac{p_3 + 1,7 \beta_e^2}{\Delta_e}, \\ \beta_{\parallel} &= \frac{p_4}{p_0}, \quad \beta_{\perp} = \frac{p_4 p_0 + p_5 \beta_e^2}{\Delta_e}, \quad \beta_H = \beta_e \frac{p_6 + 1,5 \beta_e^2}{\Delta_e}, \\ \gamma_{\parallel} &= \frac{p_7}{p_0}, \quad \gamma_{\perp} = \frac{p_7 p_0 + p_8 \beta_e^2}{\Delta_e}, \quad \gamma_H = \beta_e \frac{p_9 + 2,5 \beta_e^2}{\Delta_e}, \\ \Delta_e &= \beta_e^4 + p_{10} \beta_e^2 + p_0^2. \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

Значения коэффициентов p_n для различных Z рассчитывались численно в [2, 3]. С хорошим приближением они могут быть

аппроксимированы следующими линейными соотношениями, записываемыми в виде разложения по обратным степеням Z :

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 0,31 + 1,20Z^{-1} + 0,41Z^{-2}, & p_1 &= 0,22 + 0,73Z^{-1}, \\
 p_2 &= 4,6 + 1,8Z^{-1}, \\
 p_3 &= 0,095 + 0,31Z^{-1} + 0,37Z^{-2}, & p_4 &= 0,47 + 0,94Z^{-1}, \\
 p_5 &= 3,8 + 1,3Z^{-1}, \\
 p_6 &= 0,88 + 1,45Z^{-1} + 0,73Z^{-2}, & p_7 &= 3,9 + 2,3Z^{-1}, \\
 p_8 &= 3,2 + 1,4Z^{-1}, \\
 p_9 &= 10,2 + 9,1Z^{-1} + 2,3Z^{-2}, & p_{10} &= 7,5 + 6,0Z^{-1} + 1,2Z^{-2}.
 \end{aligned} \tag{8.2.13}$$

При $Z = 1, 2, 3, 4$ и $Z \rightarrow \infty$ коэффициенты α , β , γ , рассчитанные по формулам (8.2.12)–(8.2.13) согласуются с табличными значениями этих величин, приведенными в [2, 3].

Отметим, что результаты, касающиеся электронных коэффициентов переноса, легко обобщаются на случай произвольного числа ионных компонентов. Действительно, поскольку уравнения для электронов отделяются от уравнений для тяжелых частиц, параметры ионных компонентов входят в выделенные уравнения для электронов лишь в виде определенных сумм ($\alpha \neq e$):

$$\sum_{\alpha, Z} n_{\alpha Z} Z_{\alpha}^2 = n_e Z_{\text{ef}}, \quad \sum_{\alpha, Z} n_{\alpha Z} Z_{\alpha}^2 \mathbf{w}_{\alpha Z} = n_e Z_{\text{ef}} \bar{\mathbf{w}}_i.$$

Это приводит к тому, что в многосортной полностью ионизованной плазме с несколькими сортами ионов полная сила электрон-ионного трения и приведенный поток тепла электронов определяются теми же выражениями, что и в рассмотренном выше случае простой плазмы с заменой в соответствующих формулах параметра Z на Z_{ef} и другим определением величины $\mathbf{w}$, которая записывается теперь как $\mathbf{w} = \mathbf{w}_e - \bar{\mathbf{w}}_i$. Обобщенный закон Ома такого простого обобщения не имеет. Однако в приближении квазидвухкомпонентной среды ($\beta_e \beta_i \ll 1$), когда можно положить $\mathbf{w} \cong \mathbf{w}_e$ и $\mathbf{j} \cong -n_e e \mathbf{w}_e$, выражения (8.2.10)–(8.2.11) оказываются справедливыми и в этом случае с заменой Z на Z_{ef} в соответствующих формулах.

Обратимся теперь к вычислению коэффициентов вязкости в полностью ионизованной двухкомпонентной плазме. Общее представление тензора вязких напряжений электронов и ионов в магнитном поле с помощью пяти коэффициентов вязкости дается выражением (6.1.11). Для того чтобы получить явные выражения для этих коэффициентов в результате решения системы уравнений (8.1.9)–(8.1.10), полезно

воспользоваться тем обстоятельством, что фигурирующий в левых частях уравнений тензор $e_{r\ell m} k_m$ преобразует тензоры $W_{\ell m}^{(1)}$, $W_{\ell m}^{(2)}$ и $W_{\ell m}^{(3)}$, $W_{\ell m}^{(4)}$ друг в друга, так что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \left\{ e_{r\ell m} W_{\ell k}^{(0)} k_m \right\} &= 0, \quad \left\{ e_{r\ell m} W_{\ell k}^{(1)} k_m \right\} = -W_{kr}^{(3)}, \\ \left\{ e_{r\ell m} W_{\ell k}^{(2)} k_m \right\} &= -W_{kr}^{(4)}, \\ \left\{ e_{r\ell m} W_{\ell k}^{(3)} k_m \right\} &= 2W_{kr}^{(1)}, \quad \left\{ e_{r\ell m} W_{\ell k}^{(4)} k_m \right\} = -W_{kr}^{(2)}. \end{aligned} \quad (8.2.14)$$

С помощью этих соотношений система уравнений (8.1.9)–(8.1.10) разбивается на три независимые скалярные системы уравнений для определения коэффициентов вязкости.

Вязкость ионного компонента определяется из уравнений, которые полностью отделяются от уравнений для электронов. При этом все три системы уравнений удобно представить в едином комплексном виде:

$$\begin{aligned} p_i \tau_{ii} &= (\gamma_{11} - im\beta_i) X_i + \gamma_{12} Y_i, \\ 0 &= \gamma_{12} X_i + (\gamma_{22} - im\beta_i) Y_i, \end{aligned} \quad (8.2.15)$$

где коэффициенты γ_{mn} для плазмы с одни сортом ионов являются просто числами:

$$\gamma_{11} = \frac{3}{5}, \quad \gamma_{12} = -\frac{9}{70}, \quad \gamma_{21} = -\frac{9}{20}, \quad \gamma_{22} = \frac{41}{56}.$$

Величины m, X_i, Y_i меняют свои значения в зависимости от вычисляемого коэффициента $\eta^{(p)}$. Так, для расчета $\eta^{(0)}$ необходимо подставить $m = 0$, при этом $X_i = \eta_i^{(0)}$. Коэффициенты $\eta_i^{(2)}$ и $\eta_i^{(4)}$ можно найти, полагая $m = 1$ и $X_i = \eta_i^{(2)} + i\eta_i^{(4)}$, а коэффициенты $\eta_i^{(1)}$ и $\eta_i^{(3)}$, — подставив $m = 2$ и $X_i = \eta_i^{(1)} + i\eta_i^{(3)}$. Общее решение системы (8.2.15) записывается в виде

$$X_i = p_i \tau_{ii} \frac{0,28 + 0,6m^2\beta_i^2 + im\beta_i(0,6 + m^2\beta_i^2)}{0,146 + m^2\beta_i^2 + m^4\beta_i^4}.$$

Используя соответствующие значения m и X_i , получаем выражения для коэффициентов вязкости ионов:

$$\begin{aligned} \eta_i^{(0)} &= 1,92p_i\tau_{ii}, \quad \eta_i^{(2)} = p_i\tau_{ii} \frac{0,28 + 0,6\beta_i^2}{\delta_i}, \quad \eta_i^{(4)} = p_i\tau_{ii} \frac{0,6 + \beta_i^2}{\delta_i}, \\ \eta_i^{(1)} &= \eta_i^{(2)} [2\beta_i], \quad \eta_i^{(3)} = \eta_i^{(4)} [2\beta_i], \\ \delta_i &= 0,146 + \beta_i^2 + \beta_i^4. \end{aligned} \quad (8.2.16)$$

Коэффициенты вязкости электронов рассчитываются аналогично. Необходимо учесть, однако, что при $\beta_i \geq 1$ в уравнениях для тензоров вязких напряжений электронов оказывается существенным вклад малых перекрестных членов, связанных с ионным компонентом (см. п. 7.1), поэтому система уравнений, подобная системе (8.2.15), имеет вид

$$\begin{aligned} p_e \tau_{ei} + \frac{4}{5} \frac{\rho_e}{\rho_i} X_i &= (\gamma_{11}^e + im\beta_e) X_e + \gamma_{12}^e Y_e, \\ -\frac{12}{5} \frac{\rho_e}{\rho_i} X_i &= \gamma_{21}^e X_e + (\gamma_{22}^e + im\beta_e) Y_e, \end{aligned} \quad (8.2.17)$$

где коэффициенты γ_{mn}^e определены выражениями

$$\gamma_{11}^e = \frac{3\sqrt{2}}{5Z} + \frac{6}{5}, \quad \gamma_{21}^e = 7\gamma_{12}^e = -\frac{9\sqrt{2}}{20Z} - \frac{9}{5}, \quad \gamma_{22}^e = \frac{41\sqrt{2}}{56Z} + \frac{51}{35},$$

а в отношении m и X_e справедливы те же замечания, что и при использовании уравнений (8.2.15) для ионов. Если отвлечься пока от учета перекрестных членов, то решение уравнений (8.2.17) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_e &= p_e \tau_{ei} \frac{s_1 s_0 + s_2 m^2 \beta_e^2 - im\beta_e (s_3 + m^2 \beta_e^2)}{\delta_e^{(m)}}, \\ \delta_e^{(m)} &= s_0^2 + s_4 m^2 \beta_e^2 + m^4 \beta_e^4, \end{aligned}$$

где

$$s_0 = 0,82 + 1,82Z^{-1} + 0,72Z^{-2}, \quad s_1 = 1,46 + 1,04Z^{-1},$$

$$s_2 = 1,20 + 0,85Z^{-1},$$

$$s_3 = 3,05 + 3,70Z^{-1} + 1,17Z^{-2}, \quad s_4 = 5,32 + 6,36Z^{-1} + 2,02Z^{-2}.$$

В результате для коэффициентов вязкости электронов имеем

$$\begin{aligned} \eta_e^{(0)} &= p_e \tau_{ei} \frac{s_1}{s_0}, \quad \eta_e^{(2)} = p_e \tau_{ei} \frac{s_1 s_0 + s_2 \beta_e^2}{\delta_e}, \quad \eta_e^{(4)} = -p_e \tau_{ei} \beta_e \frac{s_3 + \beta_e^2}{\delta_e} \\ \eta_e^{(1)} &= \eta_e^{(2)} [2\beta_e], \quad \eta_e^{(3)} = \eta_e^{(4)} [2\beta_e], \end{aligned} \quad (8.2.18)$$

$$\delta_e = s_0^2 + s_4 \beta_e^2 + \beta_e^4.$$

Заметим, что при $Z = 1$ выражения (8.2.18), также как и выражения (8.2.16) для коэффициентов вязкости ионов, полностью согласуются

с результатами работ [2, 3]. Поправки к коэффициентам вязкости электронов, связанные с учетом X_i в уравнениях (8.2.17), существенны лишь по отношению к коэффициентам $\eta_e^{(1)}$ и $\eta_e^{(2)}$ при условии $\beta_i \geq 1$ или $\beta_e \geq (m_i/m_e)^{1/2}$. Общие выражения для этих поправок имеют вид

$$\Delta_\eta^{(2)} = \frac{4}{5} \frac{\rho_e}{\rho_i} \frac{\beta_e^3}{\delta_e} \eta_i^{(1)}, \quad \Delta_\eta^{(1)} = \Delta_\eta^{(2)} [2\beta_e, 2\beta_i].$$

При выполнении условий $\beta_e \gg 1$ и $\beta_i \approx 1$ поправки имеют тот же порядок величины, ($\approx p_e/\omega_e^2 \tau_{ei}$), что и сами коэффициенты $\eta_e^{(1)}$ и $\eta_e^{(2)}$. Если $\beta_i \gg 1$, то их вклад в коэффициенты вязкости электронов определяется выражениями (7.1.8), полученными ранее в гл. 7 при использовании приближения 13 моментов.

В заключение этого параграфа отметим следующее. Необходимость в использовании дополнительных уравнений для моментов $\mathbf{r}_{\alpha z}$ и $\pi_{\alpha zrs}$ при вычислении коэффициентов переноса возникает, главным образом, из-за недостаточной точности в определении продольных кинетических коэффициентов, а также и поперечных коэффициентов, если плазма не является сильно замагниченной. Если $\beta_e \gg 1$ и $\beta_i \gg 1$, то учет высших приближений при расчете коэффициентов переноса поперек магнитного поля не является необходимым. Это означает, что для определения этих коэффициентов в замагниченной плазме вполне удовлетворительным оказывается приближение 13N моментов, использованное нами в предыдущих главах. В частности для двухкомпонентной полностью ионизованной плазмы выражения, полученные в настоящем параграфе для поперечных кинетических коэффициентов, при выполнении условий $\beta_e \gg 1$ и $\beta_i \gg 1$ переходят в выражения, найденные выше для частично ионизованного газа (см. гл. 7), если записывать последние в пределе полной ионизации газа ($n_a = 0$).

8.3. Поперечные свойства переноса в замагниченной плазме

В сильно замагниченной плазме, для которой условие $\omega\tau \gg 1$ предполагается выполненным для всех сортов частиц, поперечные составляющие диффузионных скоростей, приведенных потоков тепла и тензора вязких напряжений компонентов плазмы можно определить из общих уравнений (8.1.3)–(8.1.4) и (8.1.9) с помощью разложения по параметру $(\omega\tau)^{-1}$. При этом, как уже отмечалось в конце предыдущего параграфа, учет уравнений для $\mathbf{r}_{\alpha z}$ и $\pi_{\alpha zrs}$ не является необходимым, поэтому отпадает надобность в использовании дополнительных уравнений (8.1.5) и (8.1.10).

Рассмотрим сначала вопрос о получении в этом случае выражений для $\mathbf{w}_{\alpha z\perp}$ и $\mathbf{h}_{\alpha z\perp}$. В нулевом приближении по малому параметру,

полностью пренебрегая в уравнениях (8.1.3), (8.1.4) членами, связанными со столкновениями частиц, получаем

$$\mathbf{w}_{\alpha z \perp}^{(0)} = \frac{1}{B} (\mathbf{E}' \times \mathbf{k}) + \frac{1}{\rho_{\alpha z} \omega_{\alpha z}} (\mathbf{k} \times \nabla p_{\alpha z}) + \frac{1}{\omega_{\alpha z}} \left(\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right), \quad (8.3.1)$$

$$h_{\alpha z \perp}^{(0)} = \frac{5}{2} \frac{k p_{\alpha z}}{m_{\alpha} \omega_{\alpha z}} (\mathbf{k} \times \nabla T_{\alpha z}). \quad (8.3.2)$$

Выражения для диффузионных потоков частиц и тепла в первом приближении по параметру $(\omega\tau)^{-1}$ получаются при подстановке формул (8.3.1) и (8.3.2) в правую часть уравнений (8.1.3) и (8.1.4). Чтобы избежать записи громоздких выражений, мы ограничимся рассмотрением плазмы с приблизительно равными температурами тяжелых компонентов ($T_{\beta} \approx T$, $\beta \neq e$), оставляя температуры различными под знаком градиентов, как это уже оговорено в п. 8.1. При этом при окончательной записи уравнений для электронного компонента температуру T можно всюду заменить на T_e . Пренебрегая для простоты силами неэлектромагнитной природы, для величин $\mathbf{w}_{\alpha z \perp}^{(1)}$ и $\mathbf{h}_{\alpha z \perp}^{(1)}$ в первом приближении имеем [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\alpha z \perp}^{(1)} = & -\frac{Z}{m_{\alpha}^2 \omega_{\alpha}^2} \sum_{\beta} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \times \\ & \times \left\{ \frac{\nabla_{\perp} p_{\alpha z}}{Z n_{\alpha z}} - \frac{kT}{n_{\beta} \bar{Z}_{\beta}^2} \left[\nabla_{\perp} (n_{\beta} \bar{Z}_{\beta}) + \frac{n_{\chi} \bar{Z}_{\beta}}{T} \nabla_{\perp} T_{\beta}^{(1)} \right] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{m_{\alpha}}{Z} - \frac{m_{\beta} \bar{Z}_{\beta}}{\bar{Z}_{\beta}^2} \right) \frac{d\mathbf{u}_{\perp}}{dt} - \frac{3}{2} \mu_{\alpha\beta} k \left(\frac{\nabla_{\perp} T_{\alpha z}}{Z m_{\alpha}} - \frac{\bar{Z}_{\beta}}{\bar{Z}_{\beta}^2 m_{\beta}} \nabla_{\perp} T_{\beta}^{(1)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\alpha z \perp}^{(1)} = & \frac{3}{2} \frac{Z p_{\alpha z}}{m_{\alpha}^2 \omega_{\alpha}^2} \sum_{\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left\{ \frac{\nabla_{\perp} p_{\alpha z}}{Z n_{\alpha z}} - \right. \\ & - \frac{kT}{n_{\beta} \bar{Z}_{\beta}^2} \left[\nabla_{\perp} (n_{\beta} \bar{Z}_{\beta}) + \frac{n_{\chi} \bar{Z}_{\beta}}{T} \nabla_{\perp} T_{\beta}^{(1)} \right] + \left(\frac{m_{\alpha}}{Z} - \frac{m_{\beta} \bar{Z}_{\beta}}{\bar{Z}_{\beta}^2} \right) \frac{d\mathbf{u}_{\perp}}{dt} \Big\} - \\ & - \frac{2 p_{\alpha z} k}{m_{\alpha}^2 \omega_{\alpha}^2} \sum_{\beta} \frac{\mu_{\alpha\beta}^2}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \times \\ & \times \left[\left(\frac{13}{8} \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}} + 2 + \frac{15}{2} \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} \right) \nabla_{\perp} T_{\alpha z}^{(1)} - \frac{27}{8} \frac{Z \bar{Z}_{\beta}}{\bar{Z}_{\beta}^2} \nabla_{\perp} T_{\beta}^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

Здесь $\omega = eZ|\mathbf{B}|/m_\alpha$, T — температура плазмы. Для удобства в выражениях (8.3.3) и (8.3.4) уже проведено суммирование по зарядовым состояниям ионов, поэтому встречающиеся в них суммы распространяются лишь на разные по массе сорта частиц. При суммировании введены следующие обозначения:

$$\bar{Z}_\alpha^k = \sum_Z \frac{n_{\alpha z} Z^k}{n_\alpha}, \quad n_\alpha = \sum_Z n_{\alpha z}, \quad p_\alpha = \sum_Z p_{\alpha z}, \quad \sum_\alpha p_\alpha = nkT;$$

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \sum_Z \frac{n_{\alpha z} \tau_{\alpha z \beta}^{-1}}{n_\alpha}, \quad \nabla T_\alpha^{(k)} = \sum_Z \frac{n_{\alpha z} Z^k \nabla T_{\alpha z}}{n_\alpha \bar{Z}_\alpha^k}, \quad \omega_\alpha^2 = \frac{e \bar{Z}_\alpha^2 B^2}{m_\alpha^2}.$$

Полезно привести также выражения для поперечной компоненты силы трения $\mathbf{R}_{\alpha z \perp}$, записанной через диффузионные скорости и градиент температуры:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\alpha z \perp} = & -\frac{n_{\alpha z} Z^2}{\bar{Z}_\alpha^2} \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left\{ \mathbf{w}_\alpha - \bar{\mathbf{w}}_\beta - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \frac{k \mu_{\alpha\beta}}{eB} \left[\frac{1}{Z m_\alpha} (\mathbf{k} \times \nabla_\perp T_{\alpha z}) - \frac{\bar{Z}_\beta}{m_\beta \bar{Z}_\beta^2} (\mathbf{k} \times \nabla_\perp T_\beta^{(1)}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

Здесь

$$\bar{\mathbf{w}}_\beta = \sum_Z \frac{n_{\beta z} Z^2}{n_\beta \bar{Z}_\beta^2} \mathbf{w}_{\beta z}.$$

Получим теперь выражение для поперечной компоненты плотности тока проводимости $\mathbf{j}_\perp = \sum_{\alpha, Z} n_{\alpha z} Z e \mathbf{w}_{\alpha z \perp}$ в замагниченной плазме. Сум-

мируя диффузионные скорости компонентов, $\mathbf{w}_{\alpha z \perp} = \mathbf{w}_{\alpha z \perp}^{(0)} + \mathbf{w}_{\alpha z \perp}^{(1)}$, с весом $n_{\alpha z} Z e$ (для электронов $Z = -1$), находим

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{1}{B} \left[(\mathbf{k} \times \nabla p) + \rho \left(\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \right], \quad (8.3.6)$$

где $p = \sum_\alpha p_\alpha$, $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha$.

Следуя той же схеме, которую мы использовали в п. 3.6, можно выразить $d\mathbf{u}/dt$ через $\mathbf{E}'$, воспользовавшись очевидным условием $\sum_{\alpha, Z} \rho_{\alpha z} \mathbf{w}_{\alpha z \perp} = 0$ и подставив в него $\mathbf{w}_{\alpha z \perp}$. В результате выражение для $\mathbf{j}_\perp$ принимает вид

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{1}{B} \left\{ [\mathbf{k} \times \nabla (p - \langle p \rangle)] + \rho e \left\langle \frac{m}{Z} \right\rangle^{-1} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}') \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{eB} \left\langle \frac{m}{Z} \right\rangle^{-1} \sum_{\alpha, \beta} \rho_{\alpha} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\bar{Z}_{\alpha}}{\bar{Z}_{\alpha}^2} \times \\
& \times \left\{ \frac{\nabla_{\perp} p_{\alpha}}{n_{\alpha} \bar{Z}_{\alpha}} - \frac{kT}{n_{\beta} \bar{Z}_{\beta}^2} \left[\nabla_{\perp} (n_{\beta} \bar{Z}_{\beta}) + \frac{n_{\beta} \bar{Z}_{\beta}}{T} \nabla_{\perp} T_{\beta}^{(1)} \right] + \right. \\
& + \left(\frac{m_{\alpha}}{\bar{Z}_{\alpha}} - \frac{m_{\beta} \bar{Z}_{\beta}}{\bar{Z}_{\beta}^2} \right) \left(\left\langle \frac{m}{Z} \right\rangle^{-1} \epsilon \mathbf{E}'_{\perp} - \frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} \langle p \rangle \right) - \\
& \left. - \frac{3}{2} \mu_{\alpha\beta} k \left(\frac{\nabla_{\perp} T_{\alpha}}{m_{\alpha} \bar{Z}_{\alpha}} - \frac{\bar{Z}_{\beta}}{m_{\beta} \bar{Z}_{\beta}^2} \nabla_{\perp} T_{\beta}^{(1)} \right) \right\}, \quad (8.3.7)
\end{aligned}$$

где

$$\left\langle \frac{m}{Z} \right\rangle = \sum_{\alpha, Z} \frac{\rho_{\alpha} Z}{\rho} \frac{m_{\alpha}}{Z}, \quad \langle p \rangle = \sum_{\alpha, Z} \frac{m_{\alpha}}{Z} \left\langle \frac{m}{Z} \right\rangle^{-1} p_{\alpha Z}.$$

Выражение (8.3.7) обобщает формулу (3.6.6), полученную в гл. 3, на случай различных зарядовых состояний ионов каждого сорта. Кроме того, в этом выражении учитывается влияние термодиффузии на поперечный перенос тока в плазме.

Определим теперь поперечную ионную теплопроводность для случая электрон-ионной плазмы ($Z_i = 1$) с одним сортом ионов примеси с зарядовым числом Z_I . Используя выражение (8.3.4) и полагая, что $m_I \gg m_i$ и $\nabla_{\perp} T_i = \nabla_{\perp} T$, получаем [1]

$$\lambda_{\perp} = \lambda_{i\perp} + \lambda_{I\perp} = \frac{p_i}{m_i \omega_i^2 \tau_{ii}} \left\{ 1 + \frac{n_I Z_I^2}{n_i} \left[2,3 + \frac{n_I}{n_i} \left(\frac{m_I}{m_i} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (8.3.8)$$

Коэффициент перед фигурной скобкой — это поперечная теплопроводность плазмы без примесей $\lambda_{i\perp}^{(0)}$, член, пропорциональный $(m_I/m_i)^{1/2}$, — добавка за счет теплопроводности тяжелых ионов, остальное — поправка к теплопроводности основных ионов плазмы. Удобно выразить поперечную теплопроводность через Z_{ef} :

$$\lambda_{\perp} = \lambda_{i\perp}^{(0)} \left\{ 1 + (Z_{\text{ef}} - 1) \left[2,3 + \left(\frac{m_I}{m_i} \right)^{1/2} \frac{Z_{\text{ef}} - 1}{Z_I^2} \right] \right\} \quad (8.3.8')$$

(здесь неявно предполагается, что $Z_I \gg 1$).

В заключение этого параграфа рассмотрим поведение коэффициентов вязкости в замагниченной плазме. Если, как и при решении уравнений диффузии, ограничиться первым приближением в разложении по $(\omega\tau)^{-1}$, то тензор $\sigma_{\alpha zrs}$ не будет фигурировать в расчетах

и достаточно использовать уравнения, получаемые в приближении $13N$ моментов. В нулевом приближении, полностью пренебрегая столкновениями, находим выражения для коэффициентов $\eta_{\alpha}^{(3)}$ и $\eta_{\alpha}^{(4)}$. Подставляя их в правые части уравнений (8.1.9) получаем в первом приближении выражения для $\eta_{\alpha}^{(1)}$ и $\eta_{\alpha}^{(2)}$. Коэффициенты $\eta_{\alpha}^{(3)}$ и $\eta_{\alpha}^{(4)}$ при этом не изменяются. Приведем получаемые таким образом выражения для поперечных компонент коэффициентов вязкости:

$$\eta_{\alpha z}^{(4)} = \eta_{\alpha z}^{(3)} = \frac{p_{\alpha z}}{\omega_{\alpha z}},$$

$$\eta_{\alpha z}^{(2)} = 4\eta_{\alpha z}^{(1)} = \frac{p_{\alpha z}}{\omega_{\alpha z}^2} \sum_{\beta} \kappa_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left(\frac{6}{5} \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}} + 2 - \frac{4}{5} \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}} \frac{\bar{Z}_{\beta} Z}{\bar{Z}_{\beta}^2} \right). \quad (8.3.9)$$

Заметим, что для коэффициента вязкости электронов ($Z = -1$) вклад последнего члена в круглых скобках выражений для $\eta_e^{(1)}$ и $\eta_e^{(2)}$ при $\beta \neq e$ связан с учетом влияния ионного компонента, что уже обсуждалось ранее.

8.4. Продольные составляющие сил трения и потоков тепла. Продольная вязкость

Выражения для продольных потоков частиц и тепла можно найти, решая систему уравнений (8.1.3)–(8.1.5), а продольную составляющую коэффициентов в тензоре вязких напряжений, решая систему (8.1.9)–(8.1.10), если положить в них $\omega_{\alpha z} = 0$.

Рассмотрим сначала потоки частиц и тепла отдельных компонентов. Формально для определения $\mathbf{w}_{\alpha z}$ и $\mathbf{h}_{\alpha z}$ необходимо решить полную систему уравнений, в которую входят по три уравнения для каждого из компонентов. Тогда диффузионные скорости и потоки тепла оказываются выраженными через градиенты парциальных давлений и температур, а также внешние силы (в частности, электрическое поле $\mathbf{E}'$). Более удобным оказывается, однако, способ решения этих уравнений, когда приведенные парциальные потоки тепла $\mathbf{h}_{\alpha z}$ выражаются сначала через градиенты температуры и разности диффузионных скоростей компонентов. При таком подходе для определения продольных компонент $\mathbf{h}_{\alpha z\parallel}$ и $\mathbf{r}_{\alpha z\parallel}$ достаточно использовать лишь два последних уравнения системы (8.1.3)–(8.1.5) для каждого сорта частиц плазмы, в которых надо положить $\omega_{\alpha z} = 0$. Подставляя затем найденные значения в правую часть уравнения (8.1.3), в котором магнитное поле также предполагается отсутствующим, мы определяем фактически продольную компоненту «силы трения» $\mathbf{R}_{\alpha z\parallel}$, которая в этом случае также выражается через градиенты температуры и разности диффузионных скоростей компонентов. Определение самих диффузионных скоростей компонентов

нужно производить затем на основе системы уравнений диффузии с вычисленной таким образом правой частью [1, 4]. В дальнейшем в этом параграфе мы для простоты сохраним общие обозначения для продольных векторных величин, опустив индекс параллельности магнитному полю.

Даже система уравнений (8.1.4) и (8.1.5), в которую еще не включаются уравнения диффузии, в общем случае плазмы, образованной из электронов и произвольного числа сортов ионов в различных зарядовых состояниях, оказывается очень сложной. Одно из возможных упрощений этой системы связано с отделением от нее уравнений для легких частиц (в частности, электронов). Мы вернемся к вопросу о таком упрощении несколько позже. Другая возможность упрощения (уменьшения числа уравнений) связана с равенством масс ионов одного сорта, отличающихся лишь кратностью ионизации. В этом случае исходные уравнения можно просуммировать по зарядовым состояниям частиц с использованием того обстоятельства, что для коэффициентов $G_{\alpha z \beta \zeta}^{(n)}$ справедливы соотношения

$$G_{\alpha z \beta \zeta}^{(n)} = I_{\alpha z} I_{\beta \zeta} \bar{G}_{\alpha \beta}^{(n)},$$

где

$$I_{\alpha z} = \frac{n_{\alpha z} Z^2}{n_{\alpha} \bar{Z}^2}, \quad \bar{G}_{\alpha \beta}^{(n)} = \sum G_{\alpha z \beta \zeta}^{(n)}.$$

С учетом этих соотношений уравнения (8.1.4) и (8.1.50) в рассматриваемом нами случае ($\omega_{\alpha z} = 0$) можно после суммирования по ζ представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} k n_{\alpha z} \nabla T_{\alpha z} = I_{\alpha z} \times \\ \times \sum_{\beta} \left[\frac{5}{2} \frac{\mu_{\alpha \beta}}{m_{\alpha}} \bar{G}_{\alpha \beta}^{(2)} (\mathbf{w}_{\alpha z} - \bar{\mathbf{w}}_{\beta}) + \bar{G}_{\alpha \beta}^{(5)} \frac{\mathbf{h}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} + \bar{G}_{\alpha \beta}^{(6)} \frac{\bar{\mathbf{h}}_{\beta}}{p_{\beta}} \right] + \\ + I_{\alpha z} \sum_{\beta} \left[\frac{\mu_{\alpha \beta}}{kT} \left(\bar{G}_{\alpha \beta}^{(9)} \frac{\mathbf{r}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} + \bar{G}_{\alpha \beta}^{(10)} \frac{\bar{\mathbf{r}}_{\beta}}{p_{\beta}} \right) \right], \quad (8.4.1) \end{aligned}$$

$$0 = I_{\alpha z} \times$$

$$\begin{aligned} \times \sum_{\beta \zeta} \left[\frac{35}{2} \left(\frac{\mu_{\alpha \beta}}{m_{\alpha}} \right)^2 \bar{G}_{\alpha \beta}^{(8)} (\mathbf{w}_{\alpha z} - \bar{\mathbf{w}}_{\beta}) + 7 \frac{\mu_{\alpha \beta}}{m_{\alpha}} \left(\bar{G}_{\alpha \beta}^{(9)} \frac{\mathbf{h}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} + \bar{G}_{\alpha \beta}^{(10)} \frac{\bar{\mathbf{h}}_{\beta}}{p_{\beta}} \right) \right] + \\ + I_{\alpha z} \sum_{\beta \zeta} \left[\frac{m_{\alpha}}{kT} \bar{G}_{\alpha \beta}^{(11)} \frac{\mathbf{r}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} + \frac{m_{\beta}}{kT} \bar{G}_{\alpha \beta}^{(12)} \frac{\bar{\mathbf{r}}_{\beta}}{p_{\beta}} \right]. \quad (8.4.2) \end{aligned}$$

Здесь

$$\bar{\mathbf{w}}_\beta = \sum_z I_{\beta z} \mathbf{w}_{\beta z}, \quad \bar{\mathbf{h}}_\beta = \sum_z I_{\beta z} \frac{p_\beta}{p_{\beta z}} \mathbf{h}_{\beta z}, \quad \bar{\mathbf{r}}_\beta = \sum_z I_{\beta z} \frac{p_\beta}{p_{\beta z}} \mathbf{r}_{\beta z}.$$

После суммирования уравнений (8.4.1) и (8.4.2) по Z приходим к следующей системе уравнений для величин, усредненных по зарядовым состояниям:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} kn_\alpha \nabla T_\alpha = \sum_\beta \left[\frac{5}{2} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \bar{G}_{\alpha\beta}^{(2)} (\bar{\mathbf{w}}_\alpha - \bar{\mathbf{w}}_\beta) + \bar{G}_{\alpha\beta}^{(5)} \frac{\bar{\mathbf{h}}_\alpha}{p_\alpha} + \bar{G}_{\alpha\beta}^{(6)} \frac{\bar{\mathbf{h}}_\beta}{p_\beta} \right] + \\ + \sum_\beta \left[\frac{\mu_{\alpha\beta}}{kT} \left(\bar{G}_{\alpha\beta}^{(9)} \frac{\bar{\mathbf{r}}_\alpha}{p_\alpha} + \bar{G}_{\alpha\beta}^{(10)} \frac{\bar{\mathbf{r}}_\beta}{p_\beta} \right) \right], \end{aligned} \quad (8.4.3)$$

$$\begin{aligned} 0 = \sum_\beta \left[\frac{35}{2} \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \right)^2 \bar{G}_{\alpha\beta}^{(8)} (\bar{\mathbf{w}}_\alpha - \bar{\mathbf{w}}_\beta) + 7 \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \left(\bar{G}_{\alpha\beta}^{(9)} \frac{\bar{\mathbf{h}}_\alpha}{p_\alpha} + \bar{G}_{\alpha\beta}^{(10)} \frac{\bar{\mathbf{h}}_\beta}{p_\beta} \right) \right] + \\ + \sum_\beta \left[\frac{m_\alpha}{kT} \bar{G}_{\alpha\beta}^{(11)} \frac{\bar{\mathbf{r}}_\alpha}{p_\alpha} + \frac{m_\beta}{kT} \bar{G}_{\alpha\beta}^{(12)} \frac{\bar{\mathbf{r}}_\beta}{p_\beta} \right]. \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

Уравнения (8.4.3)–(8.4.4) аналогичны уравнениям (8.4.1)–(8.4.2), но их число здесь значительно меньше, соответствуя лишь компонентам с разной массой составляющих их частиц. Формально решение этой системы уравнений позволяет выразить $\bar{\mathbf{h}}_\alpha$ и $\bar{\mathbf{r}}_\alpha$ через $\bar{\mathbf{w}}_\alpha - \bar{\mathbf{w}}_\beta$ и $\nabla_{||} T_\alpha$ и после подстановки в уравнения (8.4.1), которые надо предварительно также просуммировать по Z , получить уравнения для определения $\bar{\mathbf{w}}_\alpha$. Однако вычисление средних значений всех этих величин не является еще полным решением задачи, поскольку для описания поведения плазмы необходимо знать диффузию и перенос тепла для каждого из зарядовых состояний ионов. Чтобы получить уравнения для определения этих величин, разделим уравнения (8.4.1)–(8.4.2) на $I_{\alpha z}$ и вычтем их почленно из соответствующих уравнений системы (8.4.3)–(8.4.4). В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} kn_\alpha \left(\nabla T_\alpha - \frac{\bar{Z}_\alpha^2 Z_\alpha^2}{\nabla} T_{\alpha z} \right) = \\ = S_\alpha^{(2)} (\bar{\mathbf{w}}_\alpha - \mathbf{w}_{\alpha z}) + S_\alpha^{(3)} \left(\frac{\bar{\mathbf{h}}_\alpha}{p_\alpha} - \frac{\mathbf{h}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} \right) + \frac{m_\alpha}{kT} S_\alpha^{(9)} \left(\frac{\bar{\mathbf{r}}_\alpha}{p_\alpha} - \frac{\mathbf{r}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} \right), \\ 0 = S_\alpha^{(8)} (\bar{\mathbf{w}}_\alpha - \mathbf{w}_{\alpha z}) + 7 S_\alpha^{(9)} \left(\frac{\bar{\mathbf{h}}_\alpha}{p_\alpha} - \frac{\mathbf{h}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} \right) + \frac{m_\alpha}{kT} S_\alpha^{(11)} \left(\frac{\bar{\mathbf{r}}_\alpha}{p_\alpha} - \frac{\mathbf{r}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} \right). \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

Здесь

$$S_{\alpha}^{(5)} = \sum_{\beta} \bar{G}_{\alpha\beta}^{(5)}, \quad S_{\alpha}^{(8)} = \frac{35}{2} \sum_{\beta} \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \right)^2 \bar{G}_{\alpha\beta}^{(8)},$$

$$S_{\alpha}^{(9)} = \sum_{\beta} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \bar{G}_{\alpha\beta}^{(9)}, \quad S_{\alpha}^{(11)} = \sum_{\beta} \bar{G}_{\alpha\beta}^{(11)}.$$

Решение системы уравнений (8.4.5) относительно разности приведенных парциальных потоков тепла дает

$$\frac{\mathbf{h}_{\alpha z}}{p_{\alpha z}} - \frac{\bar{\mathbf{h}}_{\alpha}}{p_{\alpha}} = n_{\alpha} \tau_{\alpha} \tau_{\alpha\alpha}^{-1} c_{\alpha}^{(5)} \left(\frac{\bar{Z}_{\alpha}^2}{Z_{\alpha}^2} \nabla T_{\alpha z} - \nabla T_{\alpha} \right) + c_{\alpha}^{(6)} (\mathbf{w}_{\alpha z} - \mathbf{w}_{\alpha}), \quad (8.4.6)$$

где $\tau_{\alpha}^{-1} = \sum_{\beta} (\mu_{\alpha\beta}/m_{\alpha}) \tau_{\alpha\beta}^{-1}$ и

$$c_{\alpha}^{(5)} = \frac{5}{2} \frac{\tau_{\alpha} \tau_{\alpha\alpha}^{-1} S_{\alpha}^{(11)}}{D_{\alpha}}, \quad c_{\alpha}^{(6)} = \frac{S_{\alpha}^{(2)} S_{\alpha}^{(11)} - S_{\alpha}^{(8)} S_{\alpha}^{(9)}}{D_{\alpha}},$$

$$D_{\alpha} = S_{\alpha}^{(5)} S_{\alpha}^{(11)} - 7 \left(S_{\alpha}^{(9)} \right)^2.$$

Аналогично с помощью (8.4.5) выражаются и разности $(\mathbf{r}_{\alpha z}/p_{\alpha z}) - (\bar{\mathbf{r}}_{\alpha}/p_{\alpha})$.

Полученные соотношения вместе с решениями систем уравнений (8.4.3)–(8.4.4) позволяют представить $\mathbf{h}_{\alpha z}$ и $\mathbf{r}_{\alpha z}$ как функцию разности скоростей $\mathbf{w}_{\alpha z} - \bar{\mathbf{w}}_{\beta}$ и градиентов температуры. Подстановка полученных выражений в правую часть исходного уравнения диффузии (8.1.1) приводит к представлению продольной составляющей силы трения $\mathbf{R}_{\alpha z}$ как функции тех же величин. Окончательные выражения для $\mathbf{R}_{\alpha z}$ и $\mathbf{h}_{\alpha z}$ можно представить в следующем виде [1]:

$$\mathbf{R}_{\alpha z} = -\frac{n_{\alpha z} Z_{\alpha}^2}{Z_{\alpha}^2} \left\{ \sum_{\beta} \left[c_{\alpha\beta}^{(1)} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\alpha}^{-1} (\mathbf{w}_{\alpha z} - \bar{\mathbf{w}}_{\beta}) - c_{\alpha\beta}^{(2)} \tau_{\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} k \nabla T_{\beta} \right] + \frac{\bar{Z}_{\alpha}^2}{Z_{\alpha}^2} c_{\alpha}^{(5)} k \nabla T_{\alpha z} \right\} \quad (8.4.7)$$

$$\mathbf{h}_{\alpha z} = \frac{p_{\alpha z} \tau_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\{ \sum_{\beta} \left[c_{\beta\alpha}^{(2)} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\alpha}^{-1} (\mathbf{w}_{\alpha z} - \bar{\mathbf{w}}_{\beta}) - c_{\beta\alpha}^{(3)} \tau_{\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} k \nabla T_{\beta} \right] - \frac{\bar{Z}_{\alpha}^2}{Z_{\alpha}^2} c_{\alpha}^{(6)} k \nabla T_{\alpha z} \right\}. \quad (8.4.8)$$

Численные коэффициенты $c_{\alpha\beta}^{(n)}$, входящие в эти выражения, определяются в результате решения системы уравнений (8.4.3)–(8.4.4)

для средних значений потоков, а коэффициенты $c_{\alpha}^{(n)}$ уже приводились раньше. Кроме того, имеется связь между соответствующими коэффициентами:

$$c_{\alpha\beta}^{(1)} = c_{\beta\alpha}^{(1)}, \quad c_{\alpha\beta}^{(3)} = c_{\beta\alpha}^{(3)},$$

$$\sum_{\beta} c_{\alpha\beta}^{(1)} \tau_{\alpha\beta}^{-1} = c_{\alpha}^{(4)} \tau_{\alpha}^{-1}, \quad \sum c_{\alpha\beta}^{(2)} \tau_{\alpha\beta}^{-1} = c_{\alpha}^{(5)} \tau_{\alpha}^{-1},$$

где

$$c_{\alpha}^{(4)} = 1 - \frac{2}{5} \frac{\tau_{\alpha} \tau_{\alpha\alpha}^{-1}}{D_{\alpha}} \left[\left(S_{\alpha}^{(2)} \right)^2 S_{\alpha}^{(11)} - 2 S_{\alpha}^{(2)} S_{\alpha}^{(8)} S_{\alpha}^{(9)} + \frac{1}{7} \left(S_{\alpha}^{(8)} \right)^2 S_{\alpha}^{(9)} \right].$$

Таким образом, задача сводится теперь к определению коэффициентов $c_{\alpha\beta}^{(n)}$ для компонентов с различными массами частиц плазмы. Общие выражения для этих величин оказываются довольно громоздкими, хотя их и можно выразить через отношения соответствующих определителей. Если в плазме присутствует сорт частиц, масса которых существенно меньше массы остальных частиц (один из таких сортов — электроны — присутствует всегда), то явный вид коэффициентов $c_{\alpha\beta}^{(n)}$ и $c_{\alpha}^{(n)}$ можно найти с помощью разложения по малому параметру — отношению масс (m_k/m_{α}), где индекс k относится к легким частицам. При этом система для легких частиц отделяется от остальной системы уравнений, и решение ее приводит к следующим выражениям для интересующих нас коэффициентов:

$$c_{k\alpha}^{(1)} = \frac{(1 + 0,24Z_k^*)(1 + 0,93Z_k^*)}{\Delta_k}, \quad c_{k\alpha}^{(2)} = 0,$$

$$c_{\alpha k}^{(2)} = 1,56 \frac{(1 + 1,4Z_k^*)(1 + 0,52Z_k^*)}{\Delta_k}, \quad c_{\alpha k}^{(3)} = 0.$$

$$c_k^{(5)} - 0,5c_{kk}^{(2)} \tau_k \tau_{kk}^{-1} = 2,2Z_k^* \frac{1 + 0,52Z_k^*}{\Delta_k}, \quad (8.4.9)$$

$$c_k^{(6)} + 0,5c_{kk}^{(3)} \tau_k \tau_{kk}^{-1} = 3,9Z_k^* \frac{(1 + 0,52Z_k^*)(1 + 1,4Z_k^*)}{\Delta_k},$$

$$\Delta_k = (1 + 2,65Z_k^*)(1 + 0,29Z_k^*), \quad Z_k^* = \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} \bar{Z}_{\alpha}^2}{n_k \bar{Z}_k^2}.$$

Суммирование в формулах (8.4.9) производится по всем сортам частиц, для которых $m_{\alpha} \gg m_k$. При записи этих коэффициентов предполагается, что легкие частицы имеют одно единственное зарядовое состояние, поэтому $c_{kk}^{(n)}$ и $c_k^{(n)}$ входят в (8.4.7) и (8.4.8) только

в определенных комбинациях, даваемых формулами (8.4.9). В случае $k = e$ (легкие частицы-электроны) выражения (8.4.7)–(8.4.9) дают продольную электрон-ионную силу трения и продольный приведенный поток электронов в многосортной плазме, которые совпадают с выражениями (8.2.8) и (8.2.9), полученными для двухкомпонентной электрон-ионной плазмы, если опустить в них члены, связанные с влиянием магнитного поля, и положить $Z_e^* = Z_{ef}$. При этом, поскольку отделение уравнений для легких частиц справедливо и в случае $T_k \neq T$ (лишь бы выполнялось условие $T_k/m_k \gg T_\alpha/m_\alpha$), в уравнениях для них можно вместо T использовать их собственную температуру (в частности, T_e для электронов).

Коэффициенты $c_{\alpha\beta}^{(n)}$ и $c_\alpha^{(n)}$ для тяжелых частиц определяются из систем уравнений (8.4.3)–(8.4.6), записанных без легкого компонента плазмы. Его влияние может проявиться лишь при определении силы трения. Фактически помимо добавления к силе трения тяжелых частиц $\mathbf{R}_\alpha$ силы $\mathbf{R}_{\alpha k}$, учет легкого компонента незначительно изменяет коэффициент $c_{\alpha\beta}^{(1)}$:

$$c_{\alpha\beta}^{(1)} = c_{\alpha\beta}^{(1)*} + 1,8 \left(\frac{m_k}{\mu_{\alpha\beta}} \right)^{1/2} \frac{1 + 0,3Z_k^*}{\Delta_k},$$

где $c_{\alpha\beta}^{(1)*}$ — коэффициент, определяемый без учета легкого компонента.

Если после выделения уравнений для наиболее легкого компонента k в плазме еще остаются компоненты сорта i , для которых $m_i \ll \ll m_\alpha$ при $\alpha \neq i, k$ (например ионы атомарного водорода в плазме с тяжелыми примесями), то процесс выделения уравнений можно продолжить. При этом коэффициенты в величинах $\mathbf{R}_{iz}$ и $\mathbf{h}_{iz}$, определяемых выражениями (8.4.7)–(8.4.8) при $\alpha = i$, можно по-прежнему вычислять с помощью формул (8.4.9). Вычисление коэффициентов для остающихся компонентов, массы которых различаются не так сильно, оказывается достаточно трудоемким даже для двух сортов частиц. Поэтому наиболее целесообразен численный расчет этих величин.

В заключение этого параграфа рассмотрим кратко вопрос о продольной вязкости многосортной полностью ионизованной плазмы. Метод вычисления коэффициента продольной вязкости на основе уравнений (8.1.9)–(8.1.10), в которых надо положить $\omega_{\alpha z} = 0$, в точности повторяет схему, использованную при получении выражений для продольных потоков тепла компонентов плазмы. В соответствии с этим выражение для $\eta_{\alpha z}^{(0)}$ можно представить в виде

$$\eta_{\alpha z}^{(0)} = p_\alpha \tau_\alpha \sum_\beta \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \tau_\beta \tau_{\alpha\beta}^{-1} c_{\alpha\beta} + \frac{\overline{Z}_\beta^2}{Z^2} c_\alpha \right). \quad (8.4.10)$$

Мы не будем выписывать здесь общих выражений для коэффициентов $c_{\alpha\beta}$ и c_α , которые получаются в результате операций с уравнениями

(8.1.9)–(8.1.10), подобных тем, которые производились с уравнениями (8.1.4)–(8.1.5). Возможность отделения уравнений для легких сортов частиц ($k \neq \alpha$) позволяет, как и в предыдущем случае, вычислять коэффициенты для них независимо от остальных. При этом имеет место соотношение

$$\frac{\tau_k}{2\tau_{kk}} c_{kk} + c_k = 0,96 \frac{(1 + 1,4Z_k^*)^2}{(1 + 1,8Z_k^*)(1 + 0,6Z_k^*)}, \quad c_{k\alpha} = 0.$$

Если после отделения уравнений для легких частиц остаются лишь уравнения для одного тяжелого компонента, то

$$c_{\alpha\alpha} = 0,167, \quad c_{\alpha} = 0,793.$$

Для определения соответствующих коэффициентов в случае плазмы из электронов и нескольких сортов ионов с не слишком сильно различающимися массами целесообразно, как и ранее, использовать численные методы.

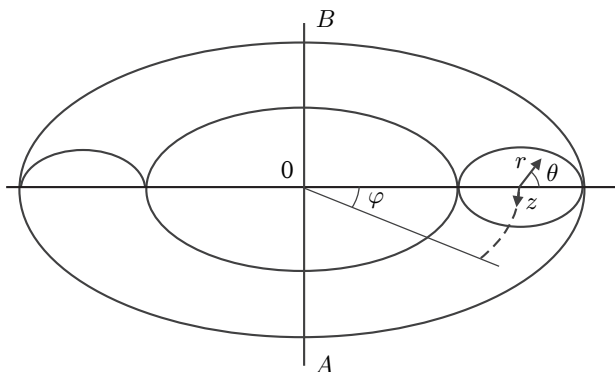
8.5. Диффузия и перенос тепла в тороидальных системах в режиме Пфирша–Шлютера

Характер переноса заряженных частиц и тепла поперек магнитного поля в тороидальных системах магнитного удержания плазмы (тороидальных ловушках) существенно отличается от классического переноса, рассмотренного в п. 8.3. Источник этого различия связан с неоднородностью магнитного поля, которое для аксиально-симметричной геометрии ловушки представляется в виде набора навитых на тор линий магнитной индукции (см. рис. 8.1). Магнитное поле в аксиально-симметричной тороидальной ловушке типа токамака может быть представлено как

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_\vartheta = \frac{B_0}{h} (\mathbf{e}_T + \Theta \mathbf{e}_\vartheta), \quad (8.5.1)$$

$$h = 1 + \varepsilon \cos \vartheta, \quad \varepsilon = \frac{r}{R} \ll 1.$$

Здесь $\mathbf{B}_T$ — тороидальная составляющая магнитного поля, направленная вокруг большой оси тора и создаваемая внешним токами, $\mathbf{B}_\vartheta$ — полоидальное поле, направленное вокруг малой оси и создаваемое собственными токами плазмы, $\Theta = B_\vartheta/B_T$ — тангенс угла между направлением вектора $\mathbf{B}$ и единичным вектором $\mathbf{e}_T$, параллельным малой оси тора, $\varepsilon = r/R$ — отношение малого и большого радиусов магнитной поверхности. Значение θ не превышает обычно 0,1, а $\varepsilon \leq 0,2$ (для типичных токамаков с круглым сечением [5]). Важным параметром магнитной ловушки является коэффициент запаса устойчивости $q = \varepsilon/\Theta$ (число оборотов линий магнитной индукции вокруг большой оси

Рис. 8.1. Система тороидальных координат (r, θ, φ)

тора при одном обороте вокруг малой оси). Для стабилизации наиболее опасных неустойчивостей в плазме тороидальной ловушки необходимо выполнение условия $q > 1$ [6, 7]. При этом, как известно, значение q близко к единице на оси плазменного шнура, где максимальна плотность тока, и растет по мере приближения к стенкам камеры, достигая значений 4–5 [5]. В современных установках типа токамака параметры плазмы таковы, что в центральных областях камеры частицы плазмы движутся практически без столкновений, т.е. средняя длина свободного пробега частиц λ значительно превышает длину линии магнитной индукции $L = qR$ (заметим, что длина линии магнитной индукции является условным понятием, поскольку линия замыкается на такой длине лишь при целочисленном значении q). Очевидно поэтому, что соотношения переноса, полученные выше в приближении $\lambda/L_0 \ll 1$ могут оказаться непригодными для описания явлений в этой области. Однако, вблизи стенки камеры существует относительно холодный слой плазмы, в котором, из-за резкого возрастания эффективного сечения кулоновских столкновений с уменьшением температуры, величина λ становится меньше чем $L = qR$. В случае примесей, поскольку средняя длина свободного пробега тяжелых многозарядных примесей оказывается значительно меньшей, чем длина пробега электронов и основных ионов плазмы, условие $\lambda \ll qR$, соответствующее так называемому режиму Пфирша–Шлютера [8], можно реализовать вплоть до центральных областей камеры.

Определение потоков частиц в режиме Пфирша–Шлютера для простой электрон-ионной плазмы было исторически первым вкладом в исследование процессов переноса в условиях тороидальной геометрии [8]. В классической работе Сагдеева и Галеева [9] было показано, что в достаточно разреженной плазме (при очень низкой частоте столкновений частиц) существуют режимы, в которых захваченные частицы, движутся по так называемым «банановым» траекториям. Учет вклада этих частиц в диффузию и перенос тепла приводит к заметному

возрастанию эффективных коэффициентов диффузии и теплопроводности плазмы. Было обнаружено также существование режимов, соответствующих промежуточным значениям частоты столкновений (режим «плато»).

Новая теория явлений переноса в тороидальных ловушках получила название «неоклассической» [9].

Ниже мы рассмотрим неоклассическую диффузию и перенос тепла в многосортной плазме тороидальных ловушек только в режиме Пфирша–Шлютера, когда становится возможным использование гидродинамических уравнений переноса, полученных в предыдущих разделах книги.

Важной особенностью явлений переноса в плазме в условиях тороидальной геометрии является то, что перенос частиц и тепла поперек магнитного поля выражается через продольные составляющие силы трения и приведенного потока тепла. Не вдаваясь в детальное обсуждение этого вопроса (см. [8–12]), приведем лишь простые качественные соображения. Дело в том, что для компенсации разделения зарядов, возникающего в неоднородном тороидальном магнитном поле за счет градиентного и центробежного дрейфа частиц плазмы [7, 11], необходимо появление продольного переноса частиц вдоль линий магнитной индукции. Существование этих потоков частиц обеспечивается благодаря наличию составляющей электрического поля $\mathbf{E}$ вдоль магнитного поля $\mathbf{B}$, которая создает силу, уравновешивающую продольную силу трения между частицами. Разность дрейфовых скоростей $(\mathbf{E} \times \mathbf{k})/B$ на внешнем и внутреннем обводе тора, возникающая из-за уменьшения поля $\mathbf{B}$ на внешнем обводе, создает при этом поток частиц поперек магнитного поля, который после усреднения по магнитной поверхности оказывается примерно в q^2 раз больше, чем поток, обусловленный классической диффузией частиц поперек поля [8–10]. Аналогичным образом объясняется возрастание в q^2 раз и потоков тепла частиц поперек магнитного поля, только в роли объемного заряда выступает в этом случае градиент температуры, который в стационарном состоянии компенсируется наличием продольных потоков тепла.

Ниже мы воспользуемся подходом [13–16], в котором исходными уравнениями для определения неоклассических потоков частиц и тепла поперек магнитного поля являются уравнения гидродинамического равновесия для каждого компонента плазмы. Эти уравнения следуют из системы (8.1.3), если положить $du/dt = 0$, и принимают для рассматриваемого случая вид

$$\nabla p_{\alpha z} - n_{\alpha z} e Z [\mathbf{E} + (\mathbf{u}_{\alpha z} \times \mathbf{B})] = \mathbf{R}_{\alpha z}. \quad (8.5.2)$$

Уравнения (8.5.2) должны быть дополнены условиями отсутствия накопления частиц и тепла, следующими из уравнений непрерывности и энергии для компонента α плазмы в зарядовом состоянии Z :

$$\nabla \cdot (n_{\alpha z} \mathbf{u}_{\alpha z}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{h}_{\alpha z} = Q_{\alpha z}, \quad (8.5.3)$$

где $Q_{\alpha z}$ — выделение тепла в компоненте α в зарядовом состоянии Z , связанное со столкновениями частиц сорта α с частицами других сортов.

Радиальный перенос частиц может быть найден из решения уравнений (8.5.2), записанных для полоидальной компоненты уравнений (8.5.2):

$$n_{\alpha z}(u_{\alpha z})_r = \frac{h}{eZB_0} \left(-R_{\alpha z\perp} + \frac{\partial p_{\alpha z}}{r\partial\vartheta} - n_{\alpha z}eZE_{\vartheta} \right). \quad (8.5.4)$$

Здесь и в дальнейшем в уравнениях сохраняются лишь члены нулевого и первого приближения по параметру $\varepsilon = r/R$.

Использование уравнения (8.5.4) и условия равновесия компонентов плазмы вдоль магнитного поля,

$$\Theta \left(\frac{\partial p_{\alpha z}}{r\partial\vartheta} - n_{\alpha z}eZE_{\vartheta} \right) = R_{\alpha z\parallel},$$

позволяет представить усредненный поток частиц поперек магнитного поля $\Gamma_{\alpha z}$ в виде [15]

$$\Gamma_{\alpha z} = \langle hn_{\alpha z}(u_{\alpha z})_r \rangle = \frac{1}{eZB_0} \left\langle h^2 \left(\frac{R_{\alpha z\parallel}}{\Theta} - R_{\alpha z\perp} \right) \right\rangle, \quad (8.5.5)$$

где $\langle A \rangle = \int A d\vartheta / 2\pi$, а множитель h^2 при усреднении возникает из-за тороиальности геометрии и наличия зависимости B от r и ϑ . Заметим, что формула (8.5.5) автоматически обеспечивает условие амбиполярности потоков ($\sum_{\alpha, Z} \Gamma_{\alpha z} = 0$, поскольку $\sum_{\alpha, Z} R_{\alpha z} = 0$).

Та часть потока частиц $\Gamma_{\alpha z}$, которая связана с поперечной компонентой силы трения $R_{\alpha z\perp}$, описывает обычный классический перенос частиц поперек магнитного поля. Эту часть потока можно вычислить с учетом выражения для $\mathbf{R}_{\alpha z\perp}$ (8.3.5), полученного выше в п. 8.3. Однако, поскольку специфический тороидальный перенос в q^2 раз больше классического, а в той области разряда, где обычно реализуется режим Пфирша–Шлютера, имеет место условие $q^2 \geq 10$, мы будем рассматривать в дальнейшем лишь ту часть потока, которая связана с $\mathbf{R}_{\alpha z\parallel}$.

В соответствии с формулой (8.4.7) величина $\mathbf{R}_{\alpha z\parallel}$ выражается через продольные компоненты скоростей частиц и градиентов температур. С помощью уравнений (8.5.3) можно выразить эти величины через соответствующие поперечные градиенты плотности и температуры. Рассмотрим, например, первое из этих уравнений, которое в тороидальных координатах можно приближенно записать как

$$\frac{1}{rh} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \{ h [n_{\alpha z}(u_{\alpha z\perp} + \Theta u_{\alpha z\parallel})] \} = 0, \quad (8.5.6)$$

где

$$u_{\alpha z \perp} = -\frac{h}{eZB_0 n_{\alpha z}} \frac{\partial p_{\alpha z}}{\partial r}.$$

Здесь вследствие азимутальной симметрии не рассматриваются члены, возникающие из-за производных по тороидальной координате, а также отброшены частные производные по радиальной координате, описывающие поперечное перетекание частиц, которое существенно лишь при $\omega\tau\Theta^2 \leq 1$. Уравнение (8.5.6) с учетом зависимости h от ϑ позволяет найти продольную составляющую скорости компонентов плазмы:

$$u_{\alpha z \parallel} = \frac{2q \cos \vartheta}{eZB_0 n_{\alpha z}} \frac{\partial p_{\alpha z}}{\partial r}. \quad (8.5.7)$$

Продольные градиенты температур определяются несколько сложнее, поскольку правая часть второго из уравнений (8.5.3) не равна нулю. Записанное в тороидальных координатах при упомянутых выше предположениях, это уравнение принимает вид

$$\frac{1}{rh} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[h \left(-\frac{5}{2} \frac{k^2 T}{eB_0} h \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial r} + \Theta h_{\alpha z \parallel} \right) \right] = Q_{\alpha z}, \quad (8.5.8)$$

где величина $h_{\alpha z \parallel}$ определена формулой (8.4.8).

Уравнение (8.5.8) удобно решать, представив температуру каждого из компонентов в виде

$$T_{\alpha z} = T(r) + T_{\alpha z}^{(1)}(r) \sin \vartheta,$$

где $T_{\alpha z}^{(1)}(r)$ — малая поправка к общей температуре плазмы $T(r)$ [16]. Тогда, после подстановки $u_{\alpha z \parallel}$ (8.5.7) в $h_{\alpha z \parallel}$ (8.4.8), вместо (8.5.8) получаем систему уравнений для $T_{\alpha z}^{(1)}(r)$. Чтобы избежать записи слишком громоздких выражений, будем сразу полагать температуру ионов данного компонента одинаковой в разных зарядовых состояниях, т.е. $T_{\alpha z}^{(1)} \equiv T_{\alpha}^{(1)}$. Фактически это можно обосновать, решив полную систему уравнений для $T_{\alpha z}^{(1)}$ и использовав равенство масс ионов одного сорта, а также условие $\lambda \ll qR$. Кроме того, будем приближенно полагать $\bar{Z}_{\alpha}^k = (\bar{Z}_{\alpha})^k$ и опустим черту усреднения над величиной Z_{α} . В результате приходим к следующей системе уравнений для поправок $T_{\alpha}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{eB_0 R} \left[\frac{5}{2} \frac{k}{\bar{Z}_{\alpha}} \frac{\partial T}{\partial r} + \right. \\ & \left. + \sum_{\beta} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \tau_{\alpha} \tau_{\alpha\beta}^{-1} c_{\beta\alpha}^{(2)} \left(\frac{1}{n_{\beta} Z_{\beta}^2} \frac{\partial p_{\beta} Z_{\beta}}{\partial r} - \frac{1}{n_{\alpha}} \frac{\partial p_{\alpha} Z_{\alpha}^{-1}}{\partial r} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\beta} \frac{\tau_{\alpha\beta}^{-1}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \left(3\mu_{\alpha\beta} \frac{T_{\beta}^{(1)} - T_{\alpha}^{(1)}}{T} - \frac{\Theta^2}{r^2} \tau_{\alpha} \tau_{\beta} c_{\alpha\beta}^{(3)} T_{\beta}^{(1)} \right) - \frac{\Theta^2}{r^2} \frac{c_{\alpha}^{(6)} \tau_{\alpha}}{m_{\alpha}} T_{\alpha}^{(1)}. \quad (8.5.9)$$

Общее решение этой системы уравнений, выраженное через отношение определителей, оказывается довольно громоздким и не поддается простому анализу. Поэтому пока мы сохраним зависимость от $T_{\alpha}^{(1)}$ вплоть до конечного результата. С учетом выражений (8.4.7), (8.5.5) и (8.5.7) для потока частиц сорта α в зарядовом состоянии Z получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha z} = & -\frac{\rho_{B\alpha}^2 q^2}{kT} Z n_{\alpha z} \times \\ & \times \left[\sum_{\beta} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \tau_{\alpha\beta}^{-1} c_{\alpha\beta}^{(1)} \left(\frac{1}{n_{\alpha z} Z} \frac{\partial p_{\alpha z}}{\partial r} - \frac{1}{n_{\beta} Z_{\beta}^2} \frac{\partial p_{\beta} Z_{\beta}}{\partial r} \right) \right] - \\ & - \frac{\rho_{B\alpha}^2 q^2}{kT} Z n_{\alpha z} \times \\ & \times \left[\sum_{\beta} \frac{keB_0}{2q^2 m_{\alpha} R} \left(\sum_{\beta} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \frac{n_{\beta}}{n_{\alpha}} \tau_{\beta} \tau_{\beta\alpha}^{-1} c_{\alpha\beta}^{(2)} T_{\beta}^{(1)} - c_{\alpha}^{(5)} T_{\alpha}^{(1)} \right) \right], \quad (8.5.10) \end{aligned}$$

где

$$\rho_{B\alpha}^2 = \frac{2kT}{m_{\alpha} \omega_{\alpha}^2}.$$

Радиальный приведенный поток тепла может быть выражен непосредственно через полоидальный градиент температуры:

$$H_{\alpha} = \frac{5}{2} \frac{kp_{\alpha}}{eB_0 Z_{\alpha}} \left\langle h^2 \frac{\partial T_{\alpha}}{r \partial \vartheta} \right\rangle = \frac{5}{2} \frac{kp_{\alpha}}{eB_0 Z_{\alpha} R} T_{\alpha}^{(1)}. \quad (8.5.11)$$

Таким образом, окончательное определение радиальных потоков частиц и тепла в режиме Пфирша–Шлютера сводится теперь к решению системы линейных алгебраических уравнений (8.5.9) для поправок к общей температуре плазмы. Поскольку в общем случае анализ этой системы сложен, мы рассмотрим лишь некоторые частные случаи, позволяющие тем не менее выявить все основные физические результаты. В первую очередь проанализируем диффузию и перенос тепла в простой плазме, состоящей из электронов и одного сорта ионов заряда Z .

Система уравнений (8.5.9) для поправок к температуре сводится в этом случае к уравнениям вида

$$\begin{aligned} \frac{2}{eB_0R} \left(-\frac{5}{2} k \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{a_1}{n_e} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \\ = -\frac{\Theta^2}{r^2} \frac{kT_e^{(1)}}{m_e} a_2 \tau_e + 3 \frac{m_e}{m_i} \tau_{ei}^{-1} \frac{T_i^{(1)} - T_e^{(1)}}{T}, \\ \frac{2}{eB_0R} \left(\frac{5}{2} k \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{\Theta^2}{r^2} \frac{kT_i^{(1)}}{m_i} a_3 \tau_i + 3 \frac{m_e}{m_i} \tau_{ie}^{-1} \frac{T_e^{(1)} - T_i^{(1)}}{T}, \quad (8.5.12) \end{aligned}$$

где $p = p_e + p_i$, а коэффициенты a_n равны

$$a_1 = \tau_e \tau_{ei}^{-1} c_{ie}^{(2)} = c_e^{(5)} - \frac{1}{2} \tau_e \tau_{ee}^{-1} c_{ee}^{(2)} = 2,2Z (1 + 0,52Z) \Delta^{-1},$$

$$a_2 = c_e^{(6)} + \tau_e \tau_{ee}^{-1} c_{ee}^{(3)} = 3,9 (1 + 1,4Z) (1 + 1,7Z) \Delta^{-1}, \quad a_3 = 3,9,$$

$$\Delta = 1 + 3Z + 0,75Z^2, \quad \tau_e = \tau_{ei}, \quad \tau_i = 2\tau_{ii}.$$

Решение системы уравнений (8.5.12) можно представить в виде [15, 16]

$$\begin{aligned} T_e^{(1)} &= \frac{1}{1+s^2} \frac{B_e}{\lambda_{e\parallel}} + \frac{s^2}{1+s^2} \frac{B_e + B_i}{\lambda_{e\parallel} + \lambda_{i\parallel}}, \\ T_i^{(1)} &= \frac{1}{1+s^2} \frac{B_i}{\lambda_{i\parallel}} + \frac{s^2}{1+s^2} \frac{B_e + B_i}{\lambda_{e\parallel} + \lambda_{i\parallel}}, \end{aligned} \quad (8.5.13)$$

где $\lambda_{e\parallel}$ и $\lambda_{i\parallel}$ — коэффициенты продольной теплопроводности электронов и ионов,

$$\lambda_{e\parallel} = a_2 \frac{k}{m_e}, \quad \lambda_{i\parallel} = a_3 \frac{k}{m_i},$$

а коэффициенты B_e и B_i соответствуют левым частям уравнений (8.5.12):

$$B_e = \frac{2q^2 k^2 T R}{m_e \omega_e} \left(-\frac{5}{2} n_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \frac{a_1}{k} \frac{\partial p}{\partial r} \right),$$

$$B_i = -\frac{2q^2 k^2 T R}{m_i \omega_i} \frac{5}{2} n_i \frac{\partial T_i}{\partial r}.$$

Параметр

$$s^2 = \frac{3m_e n_e}{m_i \tau_{ei}} \left(\frac{r}{\Theta} \right)^2 \frac{\lambda_{e\parallel} + \lambda_{i\parallel}}{\lambda_{e\parallel} \lambda_{i\parallel}}$$

характеризует при этом относительную роль теплообмена между электронами и ионами, что связано с учетом отличной от нуля правой части в уравнениях (8.5.8).

Учитывая, что $\lambda_{e\parallel} \gg \lambda_{i\parallel}$, можно выразить параметр s^2 через отношение длины линии магнитной индукции qR к средней длине свободного пробега ионов ℓ_i :

$$s^2 = 2 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{q^2 R^2}{Z \ell_i^2}.$$

В рассматриваемом нами режиме диффузии ($\ell_i \ll qR$) параметр s^2 может быть как большой, так и малой величиной. Случай слабого теплообмена ($s^2 \ll 1$) реализуется вблизи границы режима Пфирша–Шлютера, при $\ell_i \gg qR (m_e/m_i)^{1/4} Z^{1/2}$. Если $s^2 \gg 1$ (сильный теплообмен) температуры электронов и ионов можно считать практически одинаковыми.

Рассмотрим сначала случай слабого теплообмена ($s^2 \ll 1$). Подставляя $T_e^{(1)} = B_e/\lambda_{e\parallel}$ и $T_i^{(1)} = B_i/\lambda_{i\parallel}$ в выражение для H_α (8.5.11), находим

$$\begin{aligned} H_e &= -\frac{\rho_{Be}^2 q^2}{\tau_{ei}} \left(b_1 n_e k \frac{\partial T_e}{\partial r} - b_2 \frac{\partial p}{\partial r} \right), \\ H_i &= -0,8 \frac{\rho_{Bi}^2 q^2}{\tau_{ii}} n_i k \frac{\partial T_i}{\partial r}, \end{aligned} \quad (8.5.14)$$

где

$$b_1 = 1,13 \frac{1 + 3Z + 0,75Z^2}{Z(1 + 1,7Z)}, \quad b_2 = \frac{1 + 0,52Z}{1 + 1,7Z}. \quad (8.5.15)$$

Диффузионный поток поперек магнитной поверхности определяется с помощью формулы (8.5.10):

$$\Gamma_e = -Z\Gamma_i = \frac{\rho_{Be}^2 q^2}{\tau_{ei}} \frac{1}{kT} \left(b_2 n_e k \frac{\partial T_e}{\partial r} - b_3 \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (8.5.16)$$

где

$$b_3 = \frac{1 + 3,75Z + 3,1Z^2 + 0,62Z^3}{(1 + 1,7Z)(1 + 3Z + 0,75Z^2)}. \quad (8.5.17)$$

Рассмотрим, как меняются выражения для потоков с ростом параметра s^2 . Поскольку $\lambda_{e\parallel} \gg \lambda_{i\parallel}$ и $B_e \approx B_i$, то поправка к электронной температуре $T_e^{(1)}$ лишь несущественно изменится от величины $T_e^{(1)} = B_e/\lambda_{e\parallel}$ в пределе $s^2 \ll 1$ до величины $T_e^{(1)} = (B_e + B_i)/\lambda_{e\parallel}$

в случае $s^2 \gg 1$. Поэтому как поток тепла, так и поток частиц электронов будут выражаться с помощью формул (8.5.14) и (8.5.15), в которых градиент температуры электронов следует заменить на

$$\frac{\partial T_e}{\partial r} - \left(\frac{n_i}{Z n_e} \frac{s^2}{1 + s^2} \right) \frac{\partial T_i}{\partial r}.$$

Совсем иначе ведет себя с увеличением s^2 поправка $T_i^{(1)}$. При $s^2 \gg 1$ величина $T_i^{(1)}$ уменьшается обратно пропорционально s^2 , достигая значения $(B_e + B_i)/\lambda_{e\parallel}$ при $s^2 \gg (m_i/m_e)^{1/2}$. При этом имеет место условие $\ell_i \ll (m_e/m_i)^{1/4} qR$. Поток тепла ионов по порядку величины сравнивается с потоком тепла электронов и становится (строго говоря, при $q < (m_i/m_e)^{1/4}$) меньше классического потока поперек магнитного поля, так что его можно вообще не учитывать.

Обратимся теперь к случаю плазмы с двумя сортами ионов, один из которых соответствует основным ионам плазмы ($Z_i = 1$), а другой — ионам примеси, находящимся в единственно возможном зарядовом состоянии Z_I . При этом предполагается выполненным условие $m_I \gg m_i$. Поскольку сила трения ионов примеси об основные ионы плазмы значительно (в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз) превышает силу электрон-ионного трения, то электроны могут оказывать влияние на диффузию примеси лишь косвенным образом через теплообмен между частицами. Если выполнено условие $\ell_i \ll (m_e/m_i)^{1/2} qR$, то влиянием электронного компонента вообще можно пренебречь. В этом случае расчет радиального потока ионов примеси в точности повторяет описанный выше расчет диффузии поперек магнитной поверхности для простой плазмы. Даже коэффициенты $c_{\alpha\beta}^{(n)}$ и $c_\alpha^{(n)}$ из-за большого отношения масс ионов определяются теми же выражениями, но с заменой Z на $Z^* = Z_I^2 n_I / n_i$. При этом для потока ионов примеси имеем выражение [15]

$$\Gamma_I = \frac{\rho_{Bi}^2 q^2}{\tau_{iI}} \left[b_3 \left(\frac{\partial p_i}{\partial r} - \frac{n_i}{n_I Z_I} \frac{\partial p_I}{\partial r} \right) - b_2 n_i k \left(\frac{\partial T_i}{\partial r} + \frac{n_I}{n_i Z_I} \frac{s_I^2}{1 + s_I^2} \frac{\partial T_I}{\partial r} \right) \right], \quad (8.5.18)$$

где b_2 и b_3 даются полученными выше выражениями для электрон-ионной плазмы с заменой Z на Z^* . Параметр s_I^2 определяется при этом как

$$s_I^2 = 2 \left(\frac{m_i}{m_I} \right)^{1/2} \frac{q^2 R^2}{\ell_I^2 Z_I}.$$

Поскольку отношение m_i/m_I не так мало, как отношение массы электрона к массе иона, то условие $s_I^2 \ll 1$ в режиме Пфирша–Шлютера может и не выполняться, что соответствует интенсивному теплообмену между ионами. Это и приводит к некоторому отличию выражения (8.5.16) от известного результата Резерфорда [14], полученного, по существу, в приближении слабого теплообмена ($s_I^2 \ll 1$).

Некоторые практические выводы из полученных выше результатов будут рассмотрены в следующей главе для случая многосортной плазмы из электронов, однократно заряженных основных ионов и многозарядных ионов примесей.

Глава 9

НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

9.1. Электропроводность плазмы МГД-генератора

Одним из типичных энергетических устройств, где находит применение многокомпонентная плазма, является магнитогазодинамический генератор энергии. Упрощенная схема такого устройства, соответствующего так называемому фарадеевскому генератору со сплошными электродами, представлена на рис. 9.1. В МГД-генераторе вектор магнитного поля $\mathbf{B}$ направлен поперек движения электропроводящего газа, который течет по изолированному каналу со скоростью $\mathbf{u}$. На заряженные частицы газа действует при этом индуцированное электрическое поле $(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, которое вызывает электрический ток в направлении, перпендикулярном векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{B}$. Располагая по бокам канала электроды, находящиеся в контакте с проводящим газом, и замыкая их на внешнюю нагрузку, мы получаем возможность преобразовывать энергию движущейся поперек магнитного поля плазмы в электрическую энергию, выделяющуюся во внешней нагрузке [1, 2].

В качестве рабочей среды МГД-генераторов открытого цикла используется обычно частично ионизованная плазма, представляющая собой смесь газообразных продуктов сгорания минерального топлива и легко ионизируемой присадки паров щелочного металла, которая при температурах газа порядка 2500–3000 К обеспечивает необходимую степень ионизации. Рабочей средой генератора закрытого цикла является, как правило, смесь инертного газа (гелий, аргон) с присадкой цезия или калия. Для того чтобы оценивать достижимые плотности тока и величину электрической энергии, передаваемой нагрузке единицей объема газа МГД-генератора с учетом влияния эффекта Холла и «проскальзывания ионов», необходимо иметь выражение для обобщенного закона Ома, учитывающее сложный состав рабочей

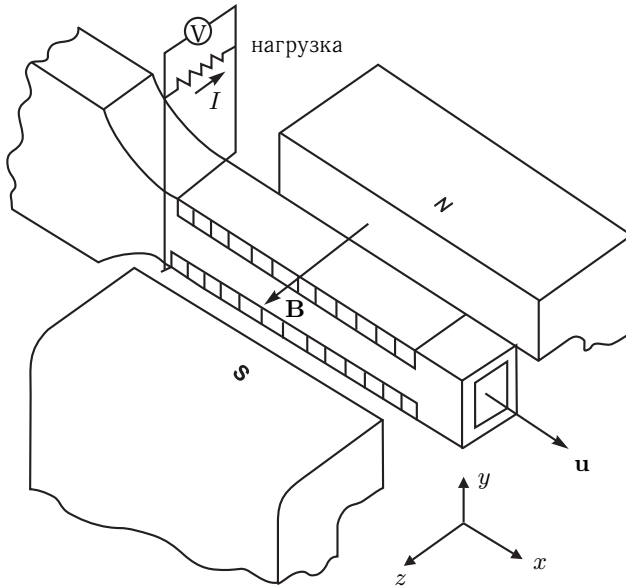


Рис. 9.1. Упрощенная схема МГД-генератора

среды. Нетрудно убедиться, что структура обобщенного закона Ома при этом сохраняется той же, что и в случае трехкомпонентного частично ионизованного газа (см. п. 7.3). Выражения для коэффициентов A и B , которыми определяются значения поперечной электропроводности плазмы в случае трехкомпонентной плазмы, образованной из электронов, ионов и нейтральных частиц того же сорта даются формулами (7.3.5)–(7.3.6). Ниже мы уточним вид этих выражений для плазмы с произвольным числом сортов нейтральных частиц, пока же рассмотрим общие соотношения для поперечных (по отношению к магнитному полю) компонент плотности тока проводимости $\mathbf{j}$.

Пусть ионизованный газ движется в направлении оси x , а магнитное поле направлено по оси z . Тогда для составляющих плотности тока j_y и j_x поперек магнитного поля имеем

$$j_y = \sigma_0 \frac{AE'_y + B\beta_0 E_x}{A^2 + B^2\beta_0^2}, \quad j_x = \sigma_0 \frac{AE_x - B\beta_0 E'_y}{A^2 + B^2\beta_0^2}. \quad (9.1.1)$$

Здесь $E'_y = E_y - uB_z = -uB_z(1 - k)$, где $k = E_y/uB_z$ — параметр нагрузки, $\beta_0 = \omega_e \tau_0$ — параметр Холла. Для фарадеевского генератора со сплошными электродами $E_x = 0$, и в этом случае

$$j_y = -\frac{\sigma_0 A}{A^2 + B^2\beta_0^2} uB_z(1 - k), \quad j_x = -\frac{B}{A} \beta_0 j_y. \quad (9.1.2)$$

Эффект Холла, приводящий к появлению тока вдоль оси x , может существенно снижать ток j_y , снимаемый с электродов, а, следовательно, и мощность, выделяемую в нагрузку. Чтобы уменьшить нежелательное воздействие этого эффекта, электроды делят на секции, так что каждая пара противоположных электродов замыкается на отдельную нагрузку. Для идеального фарадеевского генератора с секционированными электродами $j_x = 0$, благодаря чему возникает электрическое поле $E_x = (B/A) \beta_0 E'_y$. Подставляя значение этого поля в выражение для j_y (9.1.1), получаем

$$j_y = -\frac{\sigma_0}{A} u B_z (1 - k), \quad (9.1.3)$$

т. е. в этих условиях эффект Холла практически не играет роли, однако при достаточно больших значениях β_0 может сказываться влияние эффекта проскальзывания ионов (см. ниже). Если параметр Холла мал ($\beta_0 \ll 1$), то во всех случаях

$$j_y = -\sigma u B_z (1 - k),$$

где $\sigma = \sigma_0/(1 - \Delta_0)$ — электропроводность плазмы, определяемая выражениями, соответствующими второму приближению теории (см. п. 7.3).

Величина электрической энергии, передаваемая нагрузке единицей объема плазмы в единицу времени, или удельная электрическая мощность МГД-генератора равна

$$P = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (9.1.4)$$

Для фарадеевского генератора со сплошными электродами имеем

$$P = \frac{\sigma_0 A}{A^2 + B^2 \beta_0^2} u^2 B_z^2 k (1 - k), \quad (9.1.5)$$

а для идеального фарадеевского генератора с секционированными электродами

$$P = \frac{\sigma_0}{A} u^2 B_z^2 k (1 - k). \quad (9.1.6)$$

Рассмотрим теперь вопрос об обобщении соответствующих выражений для коэффициентов A и B в случае частично ионизованной плазмы с несколькими сортами нейтралов [3]. Пусть K — число нейтральных компонентов различного типа, так что общее число компонентов плазмы $N = K + 2$ (предполагаем для простоты, что ионы возникают от ионизации лишь одной легко ионизируемой присадки). Поскольку число независимых уравнений диффузии равно $N - 1$, в качестве исходных можно выбрать одно уравнение для электронов ($\alpha = e$) и K уравнений для нейтральных компонентов. Если ввести переменные $\mathbf{S}_\beta = n_e e (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_\beta)$ для $\beta = 1, 2, \dots, K$ и $\mathbf{X}_e = n_e e \mathbf{h}_e / p_e$, то уравнение

для электронов (6.2.1) с учетом определения плотности тока проводимости $\mathbf{j} = -ne(\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i)$ можно представить как

$$\mathbf{j} + \omega_e \tau_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = \sigma_0 \mathbf{E}^* + \tau_0 \sum_{\beta=1}^K \tau_{e\beta}^{-1} \mathbf{S}_\beta + \omega_e \tau_0 \sum_{\beta=1}^K \frac{\rho_\beta}{\rho} (\mathbf{S}_\beta \times \mathbf{k}) + \nu_0 \tau_0 \mathbf{X}_e. \quad (9.1.7)$$

В свою очередь $\mathbf{X}_e$ определяется из независимого уравнения для потока тепла электронов (6.2.4), которое принимает вид

$$\mathbf{X}_e + \beta_e^* (\mathbf{X}_e \times \mathbf{k}) = \frac{5}{2} \nu_0 \tau_e^* \mathbf{j} - \frac{5}{2} \tau_e^* \sum_{\beta=1}^K \xi_{e\beta} \tau_{e\beta}^{-1} \mathbf{S}_\beta. \quad (9.1.8)$$

(Для простоты мы опустили здесь члены, связанные с градиентом температуры).

Для определения $\mathbf{S}_\beta$ имеем K независимых уравнений диффузии (6.1.1) при $\alpha = 1, 2, \dots, K$. Как и раньше, пренебрегаем в них членами, содержащими потоки тепла ионов и нейтралов, и опустим для простоты члены с градиентами давления. Тогда уравнения для нейтральных компонентов записываются как

$$\sum_{\beta=1}^K c_{\alpha\beta} \mathbf{S}_\beta = -\lambda_{e\alpha} \mathbf{j} + n_e e \frac{\rho_\alpha}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \quad (9.1.9)$$

где $c_{\alpha\beta}$ и $\lambda_{e\alpha}$ определены выражениями (3.3.3) и (3.3.4).

Разрешая уравнения (9.1.9), находим

$$\mathbf{S}_\alpha = c_\alpha \mathbf{j} + f_\alpha (\mathbf{j} \times \mathbf{k}),$$

$$c_\alpha = |c|^{-1} \sum_{\beta \neq k}^N |c|_{\beta\alpha} \lambda_{e\beta}, \quad f_\alpha = \rho_e \omega_e |c|^{-1} \sum_{\beta \neq k}^N \frac{\rho_\beta}{\rho} |c|_{\beta\alpha}. \quad (9.1.10)$$

Заметим, что недиагональные элементы определителей зависят от величин, характеризующих взаимодействие лишь нейтральных частиц. Диагональные члены $c_{\alpha\alpha} = \sum_{\gamma} \lambda_{\alpha\gamma}$ содержат наряду с другими величинами $\lambda_{\alpha e}$ и $\lambda_{\alpha i}$, причем $\lambda_{\alpha e}/\lambda_{\alpha i} \approx (m_e/\mu_{ia})^{1/2} \ll 1$. Оценка коэффициентов c_α и f_α при этих условиях дает

$$c_\alpha \ll (m_e/m_k)^{1/2}, \quad f_\alpha \leq (m_e/m_k)^{1/2} \omega_e \tau_0,$$

где индекс k отнесен к наиболее легкому из нейтральных компонентов. Подставляя (9.1.10) в (9.1.7) и (9.1.8) и пренебрегая членами $\approx (m_e/m_k)^{1/2}$, приходим к уравнению для плотности тока $\mathbf{j}$,

которое по форме совпадает с выражением для обобщенного закона Ома (7.3.4), полученным в гл. 7, причем в силу принятых предположений $\mathbf{E}_{\text{ef}} = \mathbf{E}^*$. При этом коэффициенты A и B , входящие в выражения для компонент плотности тока j_y и j_x (9.1.2), могут быть, как и раньше, представлены в виде

$$A = 1 - \frac{\Delta_0}{1 + \beta_e^{*2}} + \delta_0 \beta_0^2, \quad B = 1 + \gamma \frac{\Delta_0}{1 + \beta_e^{*2}}, \quad (9.1.11)$$

где

$$\beta_e^* = \omega_e \tau_e^*, \quad \Delta_0 = \nu_0 \tau_0 \alpha_T = \frac{5}{2} \nu_0^2 \tau_0 \tau_e^*, \quad \gamma = \tau_0^{-1} \tau_e^*, \quad (9.1.12)$$

а коэффициенты τ_0 , ν_0 и τ_e^* определены как

$$\tau_0^{-1} = \sum_{\beta \neq e}^N \tau_{e\beta}^{-1}, \quad \nu_0 = \sum_{\beta \neq e}^N \xi_{e\beta} \tau_{e\beta}^{-1},$$

$$(\tau_e^*)^{-1} = 0,4 \tau_{ee}^{-1} + \sum_{\beta \neq e}^N (2,5 - 1,2 B_{e\beta}^*) \tau_{e\beta}^{-1}. \quad (9.1.13)$$

Что касается коэффициента δ_0 , с которым связан эффект «проскальзывания ионов», то в рассматриваемом случае он записывается в виде

$$\delta_0 = \rho_e \tau_0^{-1} |c|^{-1} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\rho_{\alpha} \rho_{\beta}}{\rho^2} |c|_{\beta\alpha}. \quad (9.1.14)$$

Полезно привести выражение для δ_0 в случаях, когда в смеси присутствуют один или два сорта нейтральных частиц. Так, для трехкомпонентной плазмы ($K = 1$) имеем:

$$\delta_0 = \rho_e \tau_0^{-1} \frac{\rho_1}{\rho} \lambda_{i1}^{-1} = \left(\frac{m_e}{\mu_{i1}} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^2 \frac{n_1 \overline{Q}_{e1} + n_i \overline{Q}_{ei}}{n_1 \overline{Q}_{i1}}, \quad (9.1.15)$$

а для плазмы с двумя сортами нейтралов ($K = 2$)

$$\delta_0 = \frac{\rho_e}{\rho^2} \tau_0^{-1} \frac{\rho_1^2 \lambda_{i2} + \rho_2^2 \lambda_{i1} + (\rho_1 + \rho_2)^2 \lambda_{i2}}{\lambda_{i1} \lambda_{i2} + \lambda_{i2} (\lambda_{i1} + \lambda_{i2})}. \quad (9.1.16)$$

В случае слабоионизованной плазмы ($\alpha \ll 1$) последнее выражение можно упростить:

$$\delta_0 = \frac{m_e^{1/2} (n_1 \overline{Q}_{e1} + n_2 \overline{Q}_{e2} + n_i \overline{Q}_{ei})}{\mu_{i1}^{1/2} n_1 \overline{Q}_{i1} + \mu_{i2}^{1/2} n_2 \overline{Q}_{i2}}. \quad (9.1.17)$$

9.2. Разделение компонентов смеси во вращающейся плазме

Рассмотрим плазму, помещенную в пространство между двумя коаксиальными цилиндрическими электродами. Если к плазме приложено радиальное электрическое поле E_r , то при наличии продольного (направленного вдоль оси цилиндра) магнитного поля B_z возникает, как известно, азимутальное вращение плазмы. Предполагая, что основные параметры плазмы меняются лишь в радиальном направлении, а также считая выполненным условие $\Omega/\omega_i \ll 1$, где $\Omega = u_\varphi/r$ — угловая скорость вращения плазмы, для компонент ускорения в цилиндрической системе координат (r, φ, z) имеем [4]

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \left\{ -\frac{u_\varphi^2}{r}, u_r \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \right), 0 \right\}.$$

Рассмотрим случай полностью ионизованной замагниченной плазмы. В соответствии с результатами п. 3.6 (формула (3.6.3)) можно представить выражение для азимутальной скорости компонентов плазмы в виде

$$u_{\alpha\varphi}^{(0)} = -\frac{E_r}{B} + \frac{1}{\rho_\alpha \omega_\alpha} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial r} - \frac{\rho_\alpha u_\varphi^2}{r} \right), \quad (9.2.1)$$

а для радиальных диффузионных скоростей получаем

$$w_{\alpha r}^{(1)} = -\frac{1}{m_\alpha^2 \omega_\alpha^2} \sum_\alpha \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left[\left(\frac{1}{n_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial r} - \frac{Z_\alpha}{Z_\beta n_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial r} \right) - \right. \\ \left. - \left(m_\alpha - \frac{Z_\alpha}{Z_\beta} m_\beta \right) \frac{u_\varphi^2}{r} \right] + \frac{1}{\omega_\alpha} u_r \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \right). \quad (9.2.2)$$

Последний член в этом выражении соответствует учету силы Кориолиса. При выполнении условия $\Omega/\omega_i \ll 1$ влиянием этой силы на радиальную диффузию ионных компонентов можно пренебречь [4].

Для многокомпонентной плазмы из формулы (9.2.2) вытекает возможность радиального эффекта разделения ионов различного сорта в поле центробежных сил, возникающих во вращающейся плазме [4]. В частности, для плазмы с двумя сортами ионов i и I приравняв нулю радиальных потоков частиц дает

$$\frac{dn_i}{Z_i n_i} - \frac{dn_I}{Z_I n_I} = \frac{m_i u_\varphi^2}{kT} \left(\frac{1}{Z_I} - \frac{m_I}{m_i Z_i} \right) \frac{dr}{r}. \quad (9.2.3)$$

Введем определение коэффициента разделения ионных компонентов плазмы $\alpha = (n_i/n_I)/(n_{i0}/n_{I0})$, где n_α и $n_{\alpha 0}$ — плотности частиц

сорта α на расстояниях r и r_0 соответственно. Полагая для простоты u_φ и T не зависящими от r и интегрируя (9.2.3) при условии $Z_i = Z_I = 1$, приходим к выражению

$$\ln \alpha = \frac{m_I - m_i}{kT} u_\varphi^2 \ln \frac{r_0}{r}. \quad (9.2.4)$$

Обратимся теперь к случаю слабо ионизованной плазмы, помещенной в скрещенные электрическое и магнитное поля. Вращение слабо ионизованной газовой смеси в пространстве между двумя цилиндрическими электродами приводит прежде всего к центробежному эффекту разделения смеси, аналогичному обычному разделению в газовой центрифуге. Можно показать, что наряду с этим возникает дополнительный эффект разделения, связанный с воздействием «ионного ветра» [5]. Суть этого явления состоит в том, что среднюю передачу импульса при столкновениях нейтралов и ионов, которые движутся под действием приложенного электрического поля (ионный ветер), можно рассматривать как дополнительную внешнюю силу, которая вместе с градиентами парциального давления нейтралов различного сорта определяет их относительную диффузию. Поскольку средняя скорость передачи импульса зависит от приведенной массы сталкивающихся частиц, воздействие ионного ветра будет приводить к эффекту разделения нейтральных компонентов смеси. Для анализа этого явления нам необходимы уравнения диффузии (3.1.19), записанные для нейтральных компонентов, (напомним, что при их получении мы пренебрегали термодиффузией). Пренебрегая средней передачей импульса от электронов к атомам по сравнению с ион-нейтральной силой трения, можно представить эти уравнения в виде

$$n_k \sum_i \mu_{ki} \tau_{ki}^{-1} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_i) + n_k \sum_{k' \neq k} \mu_{kk'} \tau_{kk'}^{-1} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k'}) = -\mathbf{G}_k, \quad (9.2.5)$$

где выделены взаимодействия атомов данного сорта k с ионами различных сортов i и атомами других сортов k' .

Используя выражение для диффузионной скорости ионов (3.5.4) в пределе слабой ионизации и подставляя его в (9.2.5), мы определяем фактически эффективную силу трения, действующую на нейтральные компоненты со стороны ионов. Для установившегося вращения плазмы имеем $du/dt = 0$ и $\mathbf{G}_k = \nabla p_k$. Градиент давления плазмы в радиальном направлении связан в этом случае с током Холла j_y условием равновесия

$$j_y B_z = \frac{dp}{dx}. \quad (9.2.6)$$

Для создания достаточной скорости вращения необходимо, чтобы $\beta_e^2 \gg 1$. Тогда подставляя в (9.2.6) выражение для j_y , следующее из (3.5.9) и (3.5.11), и пренебрегая градиентами парциального давления

заряженных компонентов вдоль x по сравнению с dp/dx , приходим к соотношению, связывающему градиент давления с напряженностью поля $E'_x = E_x + u_y B_z$:

$$\frac{dp}{dx} = E'_x \sum_i \frac{n_i e_i}{1 + \beta_i^2}. \quad (9.2.7)$$

Если $\beta_i^2 \ll 1$, то радиальная скорость ионов сорта k в соответствии с (3.5.4) определяется при условии $dp_i/dx \ll dp/dx$ выражением

$$(w_{i_k})_x = \frac{b_{i_k}}{n_e e} \frac{dp}{dx}. \quad (9.2.8)$$

Заметим, что когда в плазме имеется лишь один сорт ионов, выражение (9.2.8) справедливо и при произвольном β_i .

В установившемся состоянии потребуем отсутствия полного радиального потока тяжелых частиц каждого сорта:

$$(\mathbf{u}_k)_x + \gamma_k (u_{i_k}) = 0, \quad (9.2.9)$$

$$\gamma_k = \frac{n_{i_k}}{n_k} \ll 1.$$

Поскольку при $m_{i_k} = m_k$ среднемассовая скорость вдоль оси x есть $u_x \approx (\rho_e/\rho) u_e$, т. е. значительно меньше скорости ионов, то можно положить $(u_{i_k})_x = (w_{i_k})_x$ (Напомним, что индекс i_k относится к ионам сорта k).

Подставляя в уравнения диффузии для нейтральных компонентов (9.2.5) скорости ионов и нейтралов, записанные в проекциях на ось x и выраженные с помощью (9.2.8) и (9.2.9), получаем

$$\frac{dp_k}{dx} = \frac{1}{n_k} \frac{dp}{dx} \times$$

$$\times \left[\sum_{m \neq k} \left(\frac{n_{i_k} n_m a_{km}}{\sum_{\ell} n_{\ell} a_{i_k \ell}} - \frac{n_{i_m} n_k a_{km}}{\sum_{\ell} n_{\ell} a_{i_m \ell}} \right) + \sum_{i_m} \frac{n_{i_m} n_k a_{k i_m}}{\sum_{\ell} n_{\ell} a_{i_m \ell}} \right], \quad (9.2.10)$$

где коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ вводятся соотношением $n_{\beta} a_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1}$.

Интегрирование уравнений (9.2.10) дает распределение плотности нейтральных компонентов по радиусу в зависимости от градиента полного давления dp/dx или напряженности поля E'_x .

Рассмотрим в качестве иллюстрации бинарную изотопную смесь газов в присутствии добавки третьего легко ионизируемого компонента. Вместо коэффициента разделения α в теории разделения газовых смесей часто оперируют понятием коэффициента обогащения $\varepsilon = \alpha - 1$. Предполагая малыми относительную концентрацию

добавки ($n_3 \ll (n_1 + n_2)$) и относительную разницу масс изотопов ($(m_2 - m_1)/m_1 \ll 1$), в результате решения уравнений (9.2.10) приходим к следующему выражению для коэффициента обогащения:

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{c}{1-c}\right)_{R_I}}{\left(\frac{c}{1-c}\right)_{R_{II}}} - 1 = \left[\frac{a_{i_3 2} - a_{i_3 1} + a_{31} - a_{32}}{a_{i_3 2} c + a_{i_3 1} (1-c)} \right] \ln \frac{p_{R_I}}{p_{R_{II}}}, \quad (9.2.11)$$

где индексы 1 и 2 относятся к компонентам разделяемой изотопной смеси, а i_3 и 3 — к ионам и атомам добавки, $c = n_2/(n_1 + n_2)$ — концентрация тяжелого изотопа; R_I и R_{II} — радиусы внешнего и внутреннего цилиндрических электродов. Используя выражение для $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ в виде (3.1.12), можно представить коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ в виде

$$a_{\alpha\beta} = \frac{4}{3} \mu_{\alpha\beta} \langle v_{\alpha\beta} \rangle \bar{Q}_{\alpha\beta}, \quad \langle v_{\alpha\beta} \rangle = \left(\frac{8kT}{\pi \mu_{\alpha\beta}} \right)^{1/2}.$$

Подставляя эти выражения в (9.2.11) и учитывая малость относительной разности масс изотопов, получаем

$$\varepsilon = \frac{(m_2 - m_1) m_3}{2m_1 (m_1 + m_3)} \left(1 - \frac{\bar{Q}_{13}}{\bar{Q}_{1i_3}} \right) \ln \frac{p_{R_I}}{p_{R_{II}}}, \quad (9.2.12)$$

где $\bar{Q}_{13}$ и $\bar{Q}_{1i_3}$ — эффективные сечения столкновений атомов изотопов с атомами и ионами добавки соответственно. Из (9.2.12) следует, что при $\bar{Q}_{13}/\bar{Q}_{1i_3} < 1$ тяжелый изотоп концентрируется в области более высокого давления. Поэтому в общем случае при положительной полярности приложенного напряжения (внутренний цилиндр — анод) центробежный и ионный эффекты обогащения складываются, а при отрицательном — вычитаются.

Заметим, что полученные выше результаты нельзя простым образом распространить на случай, когда ток в плазме обусловлен переносом ионов самой разделяемой изотопной смеси. Поскольку при взаимодействии иона с атомом того же химического сорта доминирующим процессом является резонансная перезарядка, при которой передаваемый импульс пропорционален массе иона m_i , а не приведенной массе μ_{in} , столкновения этого типа, как показывает анализ, не приводят к эффекту разделения компонентов. В результате коэффициент ε для такой смеси зависит не только от относительной разницы масс изотопов, но оказывается пропорциональным отношению эффективных сечений упругого столкновения иона с нейтралом к сечению резонансной перезарядки. Детальный анализ этого случая содержится в работе [5].

9.3. Температурное экранирование примесей в полностью ионизованной многосортной плазме

В главе 3 уже рассматривался один из известных результатов [6], относящийся к поведению примесей в полностью ионизованной многосортной плазме. Анализ диффузионных потоков частиц поперек сильного магнитного поля в цилиндрическом столбе плазмы приводит к выводу, что по истечении некоторого времени в плазме, содержащей несколько сортов ионов, устанавливается равновесное распределение плотностей ионов по радиусу (3.6.11), из которого следует, что ионы с большим зарядом концентрируются в области большей плотности плазмы. Этот результат был получен на основе выражений для потоков диффузии частиц, найденных в квазигидродинамическом приближении (т.е. без учета термосилы в уравнениях диффузии). Полезно рассмотреть теперь более общую ситуацию, когда наряду с градиентами плотности компонентов в плазме присутствует градиент температуры.

Пусть плазма образована из электронов, основных однозарядных ионов i и многозарядных ионов I . Уравнение для равновесного значения плотности ионов n_I в цилиндрически симметричном случае (магнитное поле $\mathbf{B}$ направлено вдоль оси цилиндра) можно получить из общего выражения (8.3.2), приравнявая нулю радиальные составляющие потока частиц $\mathbf{\Gamma}_I = \sum_Z n_{Iz} \mathbf{w}_{Iz}$ и плотности тока ионов. Пренебрегая столкновениями с электронами и инерционными членами (последнее справедливо при рассмотрении медленных установившихся процессов в плазме), а также полагая приближенно $\overline{Z}_I^2 = Z_I^2$ (черта усреднения над Z_I в дальнейшем опускается), имеем

$$\frac{1}{n_i} \frac{\partial p_i}{\partial r} - \frac{1}{n_I Z_I^2} \frac{\partial p_I Z_I}{\partial r} - \frac{3}{2} \mu_{iI} \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_I Z_I} \right) \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial Z_I}{\partial r} = 0. \quad (9.3.1)$$

Важным следствием этих уравнений является то, что равновесие достигается только при $Z_I = \text{const}$, т.е. в тех областях, где ионы примеси ионизованы до максимального зарядового состояния, возможного при данной электронной температуре. В противном случае за счет столкновений ионов примеси разного заряда может возникнуть направленный в сторону роста Z_I поток частиц ¹⁾.

¹⁾ Заметим, что сравнительно простой вид выражения для $\mathbf{\Gamma}_I$ связан со сделанным предположением о приближенном равенстве $\overline{Z}_I^2$ и Z_I^2 . В общем случае выражение для него оказывается более сложным и при сильном различии указанных величин может оказаться, в частности, что этот поток обращается в нуль.

$$\Gamma_I = \frac{1}{4} \rho_{BI}^2 \frac{n_i}{\tau_{II} Z_I} \frac{\partial Z_I}{\partial r}, \quad \rho_{BI}^2 = \frac{2kT}{m_I \omega_I^2}. \quad (9.3.2)$$

В областях, где $Z_I = \text{const}$, если не учитывать термодиффузию ($\partial T / \partial r = 0$), условие (9.3.1) приводит к уже известному результату (3.6.11). Учет членов с градиентом температуры показывает, что при некоторых условиях возможно температурное экранирование примесей. Действительно, из (9.3.1) непосредственно следует, что

$$\frac{n_I}{n_i} = A n_i^{\frac{Z_I}{Z_i} - 1} T^{\left[\frac{3}{2} \mu_{ii} \left(\frac{1}{m_I} - \frac{Z_I}{m_i Z_i} \right) + \left(\frac{Z_I}{Z_i} - 1 \right) \right]}. \quad (9.3.3)$$

В наиболее типичном случае, когда $m_I \gg m_i$ и $Z_i = 1$ из этого соотношения вытекает, что ионы примеси не будут собираться в области максимума плотности, если плотность основных ионов плазмы растет медленнее, чем $T^{(Z_I+2)/(Z_I-1)}$. Для плазмы с ионами двух сортов равного заряда ($Z_I = Z_i = 1$) формула (9.3.3) указывает, что в области максимальной температуры должны концентрироваться ионы более легкого компонента. В частности, плотности ионов дейтерия и трития в D - T -плазме в равновесии связаны соотношением

$$\frac{n_T}{n_D} = AT^{-0.3}.$$

Рассмотрим теперь, к каким выводам приводит анализ диффузии примесей в тороидальных системах, когда выполнены условия, соответствующие так называемому режиму Пфирша–Шлютера. Воспользуемся с этой целью выражением для потока ионов примеси, полученным при условии $m_I \gg m_i$.

Если градиент температуры отсутствует, то формула (8.5.16), дает то же равновесное распределение концентрации примесей (3.6.11), что и в классическом случае, т.е. с максимумом в центре плазменного шнура. Будем считать для простоты, что выполнено условие $n_I Z_I^2 \gg n_i$. При этом $b_2 \approx 1/2$, $b_3 \approx 1/3$. Тогда поток (8.5.16) можно представить как

$$\Gamma_I = \frac{\rho_{BI}^2 q^2}{2Z \tau_{iI}} n_i \times \\ \times \left[\left(\frac{\partial \ln n_i}{\partial r} - \frac{1}{Z_I} \frac{\partial \ln n_I}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{Z_I} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{n_I}{n_i Z_I} \right) \frac{\partial \ln T}{\partial r} \right]. \quad (9.3.4)$$

В принципе температурное экранирование примесей, т.е. вынос их на периферию плазменного шнура за счет термодиффузии, возможно, если коэффициент перед $\partial \ln T / \partial r$ отрицателен. Это реализуется, если

$$\frac{n_I}{n_i} > \frac{Z_I - 3}{2}.$$

Отсюда следует, что температурное экранирование примесей становится возможным только для примесей с небольшим Z_I , фактически только при $Z_I \leq 3$ и в областях достаточно резкого спада температур. Если характерные масштабы изменения плотности и температуры одинаковы, то экранирование возможно лишь при $n_I > (2Z_I - 3)n_i$, т. е. фактически лишь для примеси с зарядовым числом $Z_I = 1$.

Любопытный эффект, связанный с экранированием примеси, проявляется при учете многозарядности ионов. Действительно, в предыдущем анализе температурного экранирования предполагалось, что ионы примеси могут находиться лишь в одном фиксированном зарядовом состоянии. Рассмотрим теперь перенос частиц поперек магнитного поля, учитывая многозарядность ионов примеси. Ограничимся для простоты случаем, когда влиянием градиента температуры можно пренебречь, что справедливо, например, при интенсивном теплообмене между ионами и легкими частицами, когда $\ell_i \ll (m_k/m_i)^{1/4} qR$.

В выражении для потока частиц сорта α , находящихся в зарядовом состоянии Z это соответствует возможности пренебрежения величинами $T_{\alpha}^{(1)}$ и $T_{\beta}^{(1)}$ с сохранением лишь первого члена в фигурных скобках. В результате полный поток частиц сорта α в многокомпонентной плазме определяется простым суммированием парциальных потоков:

$$\Gamma_{\alpha} = \sum_{\beta} \Gamma_{\alpha\beta},$$

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{\rho_{B\alpha}^2 q^2}{kT} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} c_{\alpha\beta}^{(1)} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left[\frac{n_{\alpha} Z_{\alpha}}{n_{\beta} Z_{\beta}} \frac{\partial p_{\beta}}{\partial r} - \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial r} + \frac{p_{\alpha} Z_{\alpha}}{Z_{\beta}^2} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial r} \right]. \quad (9.3.5)$$

(Напомним, что во всех выражениях мы опускаем для простоты черту усреднения над Z_{α} , Z_{β} и Z_{β}^2 .)

Из (9.3.5) следует, что каждый поток частиц, помимо обычной части, пропорциональной разности относительных градиентов парциального давления компонентов содержит часть, пропорциональную $\partial Z_{\beta}/\partial r$, обусловленную многозарядностью ионов. Связанный с этим перенос частиц всегда направлен в сторону роста температуры и препятствует поэтому температурному экранированию примесей. Вклад дополнительного потока в полный поток примеси сорта существенно связан с наличием столкновений типа примесь–примесь. Вклад этот особенно велик в областях резкого возрастания Z_{β} , т. е. в тех областях плазменного шнура, где температура соответствует более плотному расположению потенциалов ионизации для данного сорта ионов примеси. Качественно это можно объяснить следующим образом. Ионы примеси, ионизованные до зарядов Z и $Z + 1$, находящиеся в разных температурных, а, следовательно, и пространственных областях шнура, в результате взаимной диффузии начинают перемешиваться. При этом их диффузионные потоки связаны условием

амбиполярности, $Z\Gamma_{I,Z} = -(Z+1)\Gamma_{I,Z+1}$, так что поток ионов с зарядовым числом $Z+1$ несколько меньше, чем поток ионов с зарядовым числом Z , и в среднем существует диффузионный поток $\Gamma_I \approx Z^{-1}\Gamma_{I,Z}$, направленный в сторону возрастания Z_I .

9.4. Радиальный перенос частиц и тепла примесей в режиме Пфирша–Шлютера

Рассмотрим важный для приложений случай полностью ионизованной многосортной плазмы, образованной из электронов, протонов (индекс p) и двух сортов ионов примеси (индексы i и I), находящихся в произвольных зарядовых состояниях. Пусть массы тяжелых частиц плазмы удовлетворяют соотношению $m_p \ll m_i, m_I$, которое почти всегда имеет место на практике. Что касается отношения масс m_I/m_i , то оно может быть произвольным. Благодаря принятым предположениям, при определении потоков частиц и тепла в режиме Пфирша–Шлютера мы можем воспользоваться обобщением выражений для потоков, полученных в п. 8.5, на случай присутствия нескольких сортов тяжелых частиц в плазме.

Чтобы избежать выписывания слишком громоздких выражений для потоков, ограничимся рассмотрением лишь наиболее важного в практическом отношении случая, когда выполнено условие $\ell/qR \geq 1$. При этом $s_p^2 \ll 1$ и $s_{i,I}^2 \ll 1$, т. е. теплообмен между электронами и ионами, а также между протонами и ионами примеси оказывается несущественным. Это позволяет свести задачу определения потоков к решению системы уравнений (8.5.8), записываемой лишь для ионов примеси сортов i и I . Выражения для радиальных потоков частиц и тепла компонентов с наименьшей массой (электронов и протонов) являются естественным обобщением формул (8.5.13) и (8.5.15), на случай присутствия нескольких сортов тяжелых частиц в плазме:

$$\Gamma_k = \sum_{\alpha} \Gamma_{k\alpha},$$

$$\Gamma_{k\alpha} = -\frac{\rho_{Bk}^2 q^2}{kT} \times \\ \times \left[Z_k b_3 \tau_{k\alpha}^{-1} \left(\frac{\partial p_k}{\partial r} - \frac{n_k}{n_{\alpha} Z_{\alpha}^2} \frac{\partial p_{\alpha} Z_{\alpha}}{\partial r} \right) - b_5 n_k \tau_k^{-1} \frac{n_{\alpha} Z_{\alpha}^2}{\sum_{\beta} n_{\beta} Z_{\beta}^2} \frac{\partial T_k}{\partial r} \right]; \quad (9.4.1)$$

$$\mathbf{H}_k = -\rho_B^2 k q^2 \times \\ \times \left[b_2 \sum_{\alpha} \tau_{k\alpha}^{-1} \left(\frac{\partial p_k}{\partial r} - \frac{n_k}{n_{\alpha} Z_{\alpha}^2} \frac{\partial p_{\alpha} Z_{\alpha}}{\partial r} \right) + b_4 n_k \tau_k^{-1} \frac{\partial T_k}{\partial r} \right]. \quad (9.4.2)$$

Коэффициенты b_1 и b_3 определены выражениями (8.5.15) и (8.5.17), в которых величина Z заменяется на $Z_k^* = \sum_{\alpha} n_{\alpha} Z_{\alpha}^2 / n_k$, а для b_4 и b_5 имеем

$$b_4 = \frac{1 + 3Z_k^* + 0,75Z_k^{*2}}{(1 + 1,4Z_k^*)(1 + 1,7Z_k^*)}, \quad b_5 = \frac{1,4Z_k^*(1 + 0,52Z_k^*)}{(1 + 1,4Z_k^*)(1 + 1,7Z_k^*)}.$$

Следует заметить, что выражения (9.4.1) и (9.4.2) имеют для нас меньшее практическое значение, чем соответствующие выражения для потоков ионов примеси, поскольку в большинстве случаев электроны и протоны по параметру столкновений ℓ/qR находятся за пределами рассматриваемого здесь режима Пфирша–Шлютера.

Что касается потоков ионов сорта i и I , то, опуская громоздкие выкладки, окончательные выражения для них можно представить в виде

$$\Gamma_I = \Gamma_{Ie} + \Gamma_{Ip} + \Gamma_{Ii}, \quad \Gamma_i = \Gamma_{ie} + \Gamma_{ip} + \Gamma_{iI},$$

где

$$\Gamma_{Ie} = \frac{\Gamma_{eI}}{Z_I}, \quad \Gamma_{Ip} = \frac{\Gamma_{pI}}{Z_I}, \quad \Gamma_{ie} = \frac{\Gamma_{ei}}{Z_i}, \quad \Gamma_{ip} = \frac{\Gamma_{pi}}{Z_i}.$$

Значения Γ_{eI} , Γ_{ei} , Γ_{pI} , Γ_{pi} определяются формулой (9.4.1), а для Γ_{iI} имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{iI} = & -\frac{\rho_{Bi}^2 q^2}{kT} \frac{\mu_{iI}}{m_i} \tau_{iI}^{-1} \left[A_1 \left(\frac{\partial p_i}{\partial r} - \frac{n_i Z_i}{n_I Z_I} \frac{\partial p_I}{\partial r} \right) + \right. \\ & \left. + n_i Z_i k \left(A_2 \frac{\partial T}{\partial r} + A_3 T \frac{\partial Z_i^{-1}}{\partial r} + A_4 T \frac{\partial Z_I^{-1}}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1 = & c_{iI}^{(1)} + \frac{1}{A_0} \left(\frac{\tau_I}{m_I} c_{iI}^{(2)} - \frac{\tau_i}{m_i} c_{iI}^{(2)} \right)^2 \frac{m_i m_I}{\tau_i \tau_I}, \\ A_2 = & \frac{5}{2} \frac{1}{A} \left(\frac{1}{Z_i} + \frac{n_I}{n_i Z_I} \right) \left(\frac{\tau_I}{m_I} c_{iI}^{(2)} - \frac{\tau_i}{m_i} c_{iI}^{(2)} \right) \frac{m_i m_I}{\tau_i \tau_I}, \\ A_3 = & \frac{m_i}{2\mu_{iI}} \frac{\tau_{iI}}{\tau_{ii}} c_{ii}^{(1)} + \frac{1}{A_0} \left(\frac{m_I}{m_i} \frac{\tau_i}{\tau_I} c_{iI}^{(2)} - c_{iI}^{(2)} \right) \times \\ & \times \left(\frac{m_i}{\mu_{iI}} \frac{\tau_{iI}}{\tau_{ii}} c_{ii}^{(2)} + c_{iI}^{(2)} + \frac{m_i}{m_I} \frac{\tau_I}{\tau_i} c_{iI}^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (9.4.4)$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= c_{iI}^{(1)} + 1/A_0 \left(\frac{m_I}{m_i} \frac{\tau_i}{\tau_I} c_{iI}^{(2)} - c_{iI}^{(2)} \right) \times \\
&\times \left(\frac{m_i}{\mu_{iI}} \frac{\tau_{iI}}{\tau_{ii}} c_{iI}^{(2)} + \frac{\tau_{iI}}{\tau_{iI}} c_{iI}^{(2)} + \frac{m_i}{m_I} \frac{\tau_I}{\tau_i} \frac{\tau_{iI}}{\tau_{iI}} c_{iI}^{(2)} \right), \\
A_0 &= 2c_{iI}^{(3)} + \frac{m_I}{2\mu_{iI}} \frac{\tau_{iI}\tau_i}{\tau_{ii}\tau_I} c_{iI}^{(3)} + \frac{m_i}{2\mu_{iI}} \frac{\tau_{iI}\tau_I}{\tau_{iI}\tau_{ii}} c_{iI}^{(3)} + \frac{m_I}{\mu_{iI}} \frac{\tau_{iI}}{\tau_I} c_i^{(6)} + \frac{m_i}{\mu_{iI}} \frac{\tau_{iI}}{\tau_i} c_I^{(6)}.
\end{aligned}$$

Суммарный поток тепла тяжелых ионов определяется выражением

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= -\frac{5}{2} \frac{\rho_{BI}^2 q^2}{A_0} \left(\frac{n_i}{Z_i} + \frac{n_I}{Z_I} \right) \frac{m_i Z_I^2}{n_i \mu_{iI}} \frac{\tau_{iI}}{\tau_i \tau_I} \times \\
&\times \left\{ \frac{5}{2} \left(\frac{n_i}{Z_i} + \frac{n_I}{Z_I} \right) \frac{\partial T}{\partial r} - kT \left(A_5 n_i \frac{\partial Z_i^{-1}}{\partial r} - A_6 n_I \frac{\partial Z_I^{-1}}{\partial r} \right) + \right. \\
&+ n_I \left(\frac{\mu_{iI}}{m_i} \frac{\tau_i}{\tau_{iI}} c_{iI}^{(2)} - \frac{\mu_{iI}}{m_I} \frac{\tau_I}{\tau_{iI}} c_{iI}^{(2)} \right) \left(\frac{1}{n_I Z_I} \frac{\partial p_I}{\partial r} - \frac{1}{n_i Z_i} \frac{\partial p_i}{\partial r} \right) \Bigg\}. \quad (9.4.5)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A_5 &= \frac{\tau_i}{\tau_{ii}} c_{ii}^{(2)} + \frac{\mu_{iI}}{m_i} \frac{\tau_i}{\tau_{iI}} c_{iI}^{(2)} + \frac{\mu_{iI}}{m_I} \frac{\tau_I}{\tau_{iI}} c_i^{(2)}, \\
A_6 &= \frac{\tau_I}{\tau_{iI}} c_{iI}^{(2)} + \frac{\mu_{iI}}{m_i} \frac{\tau_i}{\tau_{iI}} c_{iI}^{(2)} + \frac{\mu_{iI}}{m_I} \frac{\tau_I}{\tau_{iI}} c_I^{(2)}. \quad (9.4.6)
\end{aligned}$$

Формулы (9.4.3)–(9.4.6) позволяют вычислять в явном виде значения радиальных потоков ионов примеси произвольной массы, а также радиальный поток тепла, связанный с тяжелыми частицами, если известны коэффициенты $c_{\alpha\beta}^{(n)}$ и $c_\alpha^{(n)}$. Последние могут быть рассчитаны с помощью аппроксимирующих выражений вида

$$c^{(n)} = P_1^{(n)} + \frac{P_2^{(n)}}{Z_{iI} + P_3^{(n)}}, \quad Z_{iI} = \frac{n_I \bar{Z}_I^2}{n_i \bar{Z}_i^2}. \quad (9.4.7)$$

В табл. 9.1 приводятся рассчитанные значения коэффициентов P_1, P_2, P_3 для плазмы с двумя сортами ионов примеси с характерным отношением масс частиц, соответствующим любой паре из набора химических элементов: углерод, кислород, железо, вольфрам. При этом погрешность, даваемая приближенной формулой, не превышает 2%.

Т а б л и ц а 9.1. Коэффициенты $C_{\alpha\beta}^{(n)}$ и $C_{\alpha}^{(n)}$

c	P	C-O	Fe-W	O-Fe	C-Fe	O-W	C-W
$c_{ii}^{(1)}$	P_1	0,74	0,63	0,63	0,63	0,62	0,62
	P_2	0,09	0,11	0,11	0,10	0,09	0,09
	P_3	0,86	0,53	0,53	0,49	0,45	0,45
$c_{iI}^{(1)}$	P_1	0,77	0,55	0,54	0,48	0,38	0,36
	P_2	0,10	0,27	0,27	0,29	0,30	0,31
	P_3	0,87	0,63	0,62	0,57	0,50	0,49
$c_{II}^{(1)}$	P_1	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84
	P_2	0,12	0,36	0,36	0,38	0,33	0,31
	P_3	0,88	0,65	0,63	0,58	0,49	0,48
$c_{ii}^{(2)}$	P_1	0,51	0,38	0,38	0,40 2	0,47	0,49
	P_2	0,07	0,11	0,10	0,06	0,01	0,01
	P_3	0,92	0,55	0,51	0,32	0,10	0,10
$c_{iI}^{(2)}$	P_1	0,37	-0,07	-0,08	-0,12	-0,11	-0,09
	P_2	0,07	0,27	0,27	0,27	0,18	0,14
	P_3	1,00	1,16	1,15	1,15	1,12	1,10
$c_{IIi}^{(2)}$	P_1	0,75	1,14	1,16	1,23	1,29	1,29
	P_2	0,04	0,02	0,02	0,01	0,00	0,00
	P_3	0,80	0,10	0,10	0,08	0,00	0,00
$c_{II}^{(2)}$	P_1	0,59	0,58	0,59	0,59	0,58	0,58
	P_2	0,04	-0,12	-0,45	-0,30	-0,32	-0,31
	P_3	0,86	13,00	8,00	2,90	1,40	1,20
$c_{ii}^{(3)}$	P_1	1,54	2,57	2,69	3,41	6,79	8,00
	P_2	-0,31	-4,00	-4,65	-8,80	-38,00	-52,00
	P_1	1,54	2,57	2,69	3,41	6,79	8,00
$c_{iI}^{(3)}$	P_1	1,35	0,64	0,56	0,20	-0,50	-0,55
	P_2	-0,28	-0,17	-0,07	1,20	4,00	4,50
	P_3	1,26	1,43	0,90	6,00	6,00	6,60
$c_{II}^{(3)}$	P_1	1,29	1,29	1,29	1,29	1,28	1,28
	P_2	-0,30	-1,67	-1,74	-2,02	-2,10	-1,96
	P_1	1,29	1,29	1,29	1,29	1,28	1,28

Продолжение таблицы 9.1

c	P	C-O	Fe-W	O-Fe	C-Fe	O-W	C-W
$c_i^{(5)}$	P_1	0,75	1,17	1,19	1,26	1,37	1,39
	P_2	-0,17	-0,78	-0,82	-0,95	-1,19	-1,26
	P_3	1,09	1,36	1,37	1,43	1,56	1,59
$c_I^{(5)}$	P_1	0,59	0,58	0,58	0,58	0,57	0,57
	P_2	-0,15	-0,52	-0,53	-0,56	-0,50	-0,46
	P_3	1,09	1,26	1,25	1,21	0,95	0,86
	P_3	1,09	1,26	1,25	1,21	0,95	0,86
$c_i^{(6)}$	P_1	3,17	5,32	5,49	6,30	8,85	9,55
	P_2	-0,64	-5,05	-5,53	-8,11	-19,10	-23,00
	P_3	1,16	1,87	1,93	2,20	3,10	3,31
$c_I^{(6)}$	P_1	2,61	2,61	2,61	2,61	2,60	2,60
	P_2	-0,53	-2,13	-2,21	-2,47	-2,51	-2,36
	P_3	1,15	1,63	1,65	1,70	1,53	1,41

Глава 10

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПРИ УЧЕТЕ ВНУТРЕННИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МОЛЕКУЛ

10.1. Общие замечания

Вернемся к обсуждению общей теории процессов переноса в многокомпонентной плазме. На этот раз мы обратимся к рассмотрению частично ионизованного газа, тяжелые частицы которого представляют собой двухатомные или многоатомные молекулы или молекулярные ионы. Характерной особенностью такой молекулярной плазмы является наличие неупругих соударений, приводящих к изменению вращательного и колебательного состояния сталкивающихся частиц.

Частично ионизованной плазме присуще в общем случае большое разнообразие неупругих процессов. Наряду с возбуждением вращательных и колебательных степеней свободы молекул и молекулярных ионов сюда относятся процессы диссоциации, ионизации и рекомбинации, электронного возбуждения, а также связанные с ними процессы испускания и поглощения излучения. Последняя группа процессов играет определяющую роль в установлении уровня концентрации и температуры электронов в плазме, что характеризуется важной ролью соответствующих членов, зависящих от сечений неупругих столкновений, в уравнениях непрерывности и энергии для электронного компонента.

Вопрос о выводе уравнений сохранения для электронов, а также уравнений для скоростей процессов, определяющих заселенность различных возбужденных уровней атомов при наличии неупругих процессов, рассматривался во многих работах [1–3]. В настоящей главе основное внимание будет уделено получению уравнений переноса и выражений для кинетических коэффициентов, связанных с вращательным и колебательным возбуждением тяжелых частиц, хотя формально в эту схему можно включить и электроны, взаимодействие которых

с тяжелыми частицами может также приводить к возбуждению внутренних степеней свободы молекул. По указанным причинам проводимое ниже рассмотрение в большей мере соответствует случаю слабо ионизованного молекулярного газа, в котором диссоциация молекул еще несущественна и подавляющая часть молекул находится в основном электронном состоянии.

Последовательная кинетическая теория газов с вращательными и колебательными степенями свободы может быть развита на основе квантово-механического кинетического уравнения Вальдмана–Снайдера [4–6]. Последнее записывается для одночастичных функций распределения Вигнера, соответствующих обычной функции распределения в фазовом пространстве поступательных степеней свободы молекулы и матрице плотности в пространстве квантовых чисел, характеризующих ее внутреннее состояние. Вместе с тем, еще до появления работ, посвященных строгому выводу этого уравнения, Ванг–Чанг, Уленбек и де Бур предложили формальную кинетическую теорию многоатомных газов, основанную на модифицированном кинетическом уравнении Больцмана с функцией распределения, зависящей от скорости и дискретных значений внутренней энергии молекул, что соответствует так называемому полуклассическому способу описания [7, 8]. Это уравнение уже рассматривалось нами в гл. 1 (уравнение (1.2.23)).

В традиционной схеме Ванг–Чанга и Уленбека помимо обычной зависимости функции распределения от переменных $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ учитывается ее зависимость от внутренней энергии молекулы E_i в i -м квантовом состоянии, т.е. $f_i = f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t, E_i)$. Такое задание функции распределения оказывается вполне адекватным при описании колебательно-возбужденных молекул. Однако, для газа с вращательными степенями свободы это предположение связано, строго говоря, с допущением о независимости матрицы плотности для внутренних состояний от ориентации вектора момента импульса $\mathbf{M}$. На необходимость учета зависимости функции распределения от взаимной ориентации $\mathbf{M}$ и $\mathbf{v}$ было впервые указано в работах Кагана и Афанасьева [9] и Кагана и Максимова [10]. Численные оценки влияния этого фактора на кинетические коэффициенты для некоторых моделей несферических молекул показали [11–13], что возникающие поправки, как правило, невелики. Принципиально существенным, однако, является учет этой особенности задачи при анализе явлений переноса в молекулярном газе, находящемся во внешних электрическом и магнитном полях. Разложение функции распределения должно содержать в общем случае все тензоры соответствующего ранга, составленные из компонент независимых векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{v}$. Если учесть еще зависимость несферической части потенциала взаимодействия молекул от угла между этими векторами, то это приводит к возможности объяснения целого ряда новых физических эффектов, вызванных прецессией вращательного момента молекул во внешнем поле, в частности так называемого эффекта Зентфлебена–Беенаккера [10]. В рамках настоящей книги

мы не можем входить в специальное рассмотрение этих вопросов, детальное обсуждение которых можно найти, например, в монографии [6], поэтому проводимый ниже анализ будет основан на использовании функции распределения, зависящей лишь от E_i .

Формальная кинетическая теория явлений переноса и релаксации, развитая для чистого многоатомного газа [7, 8] и обобщенная на случай многоатомных смесей [14, 15], основывается, как правило, на применении метода Чепмена–Энскога к решению обобщенного кинетического уравнения (1.2.23). Как известно, в рамках этого метода не представляется возможным описать собственно релаксационные процессы, в результате которых устанавливаются не зависящие от времени линейные соотношения между потоками и градиентами термодинамических величин. Этот недостаток метода становится особенно заметным в случае многоатомного газа, когда наряду с характерным временем релаксации τ , описывающим установление равновесия по поступательным степеням свободы в задаче фигурирует еще один параметр, а именно характерное время обмена энергией между поступательными и внутренними степенями свободы τ_E .

Фактически последовательное обобщение метода Чепмена–Энскога возможно лишь в случае, когда $\tau_E \approx \tau$, и именно этому случаю так называемого легкого обмена энергией [14, 15] соответствует появление в тензоре давлений члена с объемной вязкостью, пропорционального дивергенции скорости. В случае так называемого замедленного обмена ($\tau_E \gg \tau$), когда τ_E может иметь тот же порядок величины, что и характерное время задачи τ_L , линейное соотношение, с помощью которого вводится коэффициент объемной вязкости, теряет силу, и соответствующий член в тензоре давлений можно найти лишь из уравнений релаксации поступательной или внутренней энергии газа.

Релаксационный характер уравнений переноса, получаемых в рамках метода моментов, оказывается в этом смысле более соответствующим особенностям рассматриваемой задачи, так как позволяет описывать поведение многоатомного газа во всем диапазоне значений параметра $Z = \tau_E/\tau$, т. е. в случаях как легкого, так и замедленного обмена энергией. В соответствии с этим явления переноса и релаксации в газовой смеси с внутренними степенями свободы будут рассматриваться ниже на основе метода моментов Грэда, обобщение которого на этот случай было осуществлено в работах [16–19].

10.2. Макроскопические параметры и уравнения сохранения для многоатомной газовой смеси

В соответствии с принятыми выше допущениями будем описывать состояние частично ионизованной газовой смеси, в состав которой входят молекулы и ионы, обладающие внутренними степенями свободы,

с помощью функции распределения

$$f_{\alpha i} = f_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{r}, t, E_{\alpha i}), \quad (10.2.1)$$

где $E_{\alpha i}$ — внутренняя энергия частиц сорта α , находящихся в i -м квантовом состоянии. Обобщенное кинетическое уравнение, которому удовлетворяет функция $f_{\alpha i}$, записывается в виде (см. (1.2.23))

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha i} + \frac{1}{m_{\alpha}} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha i} = \\ = \sum_{\beta} \sum_{j k \ell} \int \int (f'_{\alpha k} f'_{1 \beta \ell} - f_{\alpha i} f_{1 \beta j}) \sigma_{\alpha \beta}(i, j | k, \ell, g, \chi) d\Omega d\mathbf{v}_{1 \beta}. \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

Макроскопические параметры компонентов и смеси в целом представляют собой некоторые моменты функции распределения $f_{\alpha i}$, определяемые помимо интегрирования по скоростям еще и суммированием по внутренним состояниям частиц (см. выражения (1.1.13)–(1.1.23)).

В качестве функции распределения нулевого приближения в методе Чепмена–Энскога или весовой функции в разложении по полиномам в обобщенном методе Грэда может использоваться локальное однотемпературное распределение Максвелла–Больцмана:

$$f_{\alpha i}^{(0)} = n_{\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi kT} \right)^{3/2} Q_{\alpha}^{-1} \exp \left(-\frac{m_{\alpha} c_{\alpha}^2}{2kT} - \varepsilon_{\alpha i} \right), \quad (10.2.3)$$

$$Q_{\alpha} = \sum_i \exp(-\varepsilon_{\alpha i}), \quad \varepsilon_{\alpha i} = \frac{E_{\alpha i}}{kT}. \quad (10.2.4)$$

Заметим, что условиями применимости того и другого метода является предположение о том, что основные термодинамические переменные: плотность числа частиц n_{α} , среднемассовая скорость $\mathbf{u}$ и полная средняя энергия единицы объема смеси nE определены одинаковым образом как на полной (неравновесной) функции распределения $f_{\alpha i}$, так и на функции $f_{\alpha i}^{(0)}$:

$$n_{\alpha} = \sum_i \int f_{\alpha i} d\mathbf{v} = \sum_i \int f_{\alpha i}^{(0)} d\mathbf{v}, \quad (10.2.5)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{\alpha} \sum_i \int m_{\alpha} \mathbf{v} f_{\alpha i} d\mathbf{v} = \sum_{\alpha} \sum_i \int m_{\alpha} \mathbf{v} f_{\alpha i}^{(0)} d\mathbf{v}, \quad (10.2.6)$$

$$nE = \sum_{\alpha} \sum_i \int \left(\frac{m_{\alpha} c^2}{2} + E_{\alpha i} \right) f_{\alpha i} d\mathbf{v} = \sum_{\alpha} \sum_i \int \left(\frac{m_{\alpha} c^2}{2} + E_{\alpha i} \right) f_{\alpha i}^{(0)} d\mathbf{v}. \quad (10.2.7)$$

Соотношения (10.2.5)–(10.2.7) являются по существу некоторыми дополнительными условиями, которые накладываются на малые отклонения функции распределения от локального распределения Максвелла–Больцмана. В методе моментов это приводит к обращению в нуль некоторых первых коэффициентов разложения функции распределения в ряд по системе обобщенных полиномов.

Заметим, что условие (10.2.7) служит фактически определением температуры T для многоатомной газовой смеси, поскольку из него следует, что

$$nE = \sum_{\alpha} (n_{\alpha} E_{\alpha}^{\text{tr}} + n_{\alpha} E_{\alpha}^{\text{int}}) = \sum_{\alpha} (n_{\alpha} E_{\alpha 0}^{\text{tr}} + n_{\alpha} E_{\alpha 0}^{\text{int}}), \quad (10.2.8)$$

где

$$\begin{aligned} E_{\alpha 0}^{\text{tr}} &= \frac{3}{2} kT, \quad E_{\alpha 0}^{\text{int}} = \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle kT, \\ \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle &= Q_{\alpha}^{-1} \sum_i \varepsilon_{\alpha i} \exp(-\varepsilon_{\alpha i}). \end{aligned} \quad (10.2.9)$$

Введем отклонения соответствующих энергий от их равновесных значений:

$$\Delta E_{\alpha}^{\text{tr}} = E_{\alpha}^{\text{tr}} - \frac{3}{2} kT, \quad \Delta E_{\alpha}^{\text{int}} = E_{\alpha}^{\text{int}} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle kT. \quad (10.2.10)$$

Тогда условие (10.2.8) можно переписать как

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} (\Delta E_{\alpha}^{\text{tr}} + \Delta E_{\alpha}^{\text{int}}) = 0. \quad (10.2.11)$$

Напомним, что парциальный тензор давлений $P_{\alpha rs}$ определяется выражением

$$P_{\alpha rs} = P_{\alpha} \delta_{rs} + \pi_{\alpha rs}, \quad (10.2.12)$$

где $\pi_{\alpha rs}$ соответствует парциальному тензору вязких напряжений, а диагональная часть тензора связана со средней поступательной энергией частиц сорта α в единице объема плазмы соотношением

$$P_{\alpha} = \frac{2}{3} n_{\alpha} E_{\alpha}^{\text{tr}}. \quad (10.2.13)$$

Поскольку равновесное значение $E_{\alpha 0}^{\text{tr}}$ соответствует парциальному гидростатическому давлению частиц сорта α , $p_{\alpha} = \frac{2}{3} n_{\alpha} E_{\alpha 0}^{\text{tr}}$, то выражение для $P_{\alpha rs}$ можно представить в виде

$$P_{\alpha rs} = \left(p_{\alpha} + \frac{2}{3} n_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{tr}} \right) \delta_{rs} + \pi_{\alpha rs}. \quad (10.2.14)$$

Для смеси в целом

$$P_{rs} = \left(p + \frac{2}{3} n_{\Delta} E^{\text{tr}} \right) \delta_{rs} + \pi_{rs}, \quad (10.2.15)$$

где $n_{\Delta} E^{\text{tr}} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}$. Принципиально важными макроскопическими параметрами являются также плотности потока энергии (потоки тепла) частиц сорта, соответствующие поступательным и внутренним степеням свободы частиц. В дальнейшем нам понадобятся выражения для приведенных парциальных потоков тепла:

$$\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{tr}} = \mathbf{q}_{\alpha}^{\text{tr}} - \frac{5}{2} p_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}, \quad (10.2.16)$$

$$\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{int}} = \mathbf{q}_{\alpha}^{\text{int}} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle kT \mathbf{w}_{\alpha}.$$

Таким образом, в число основных макроскопических параметров, определяющих состояние многоатомной газовой смеси, входят величины n_{α} , $\mathbf{u}$ и T , являющиеся параметрами локальной равновесной функции распределения, и параметры $\mathbf{w}_{\alpha}$, $\pi_{\alpha rs}$, $\Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}$, $\Delta E_{\alpha}^{\text{int}}$, $\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{tr}}$ и $\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{int}}$, которые должны определяться неравновесной частью функции распределения. Из них независимыми оказываются $17N$ величин (N — число компонентов смеси), поскольку имеют место очевидное дополнительное условие $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0$, а также соотношения (10.2.11), которые вытекают из определения (10.2.8).

Параметры n_{α} , $\mathbf{u}$ и T , как и в случае газовой смеси из одноатомных частиц, должны удовлетворять уравнениям сохранения числа частиц, импульса и энергии. Эти уравнения могут быть получены обычным способом из кинетического уравнения (10.2.2), если умножить последнее на m_{α} , $m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$ и $(m_{\alpha} c_{\alpha}^2/2) + E_{\alpha i}$ соответственно, проинтегрировать по скоростям и просуммировать по внутренним состояниям. В результате имеем

$$\frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = 0, \quad (10.2.17)$$

$$\rho \frac{du_r}{dt} + \nabla P_{rs} - \sum_{\alpha} n_{\alpha} X_{\alpha r} - [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_r = 0, \quad (10.2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(nE)}{dt} + nE \nabla \cdot \mathbf{u} + P_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \\ - \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{X}_{\alpha} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' = 0. \end{aligned} \quad (10.2.19)$$

При получении двух последних уравнений использовалось суммирование по всем компонентам смеси, при этом

$$\mathbf{q} = \sum_{\alpha} (\mathbf{q}_{\alpha}^{\text{tr}} + \mathbf{q}_{\alpha}^{\text{int}}). \quad (10.2.20)$$

Уравнение энергии (10.2.19) может быть преобразовано в уравнение для температуры T с использованием уравнения непрерывности и соотношения (10.2.8):

$$nc_V \frac{dT}{dt} + P_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q} - kT \sum_{\alpha} \left(\frac{3}{2} + \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle \right) \nabla \cdot n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} - \\ - \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{X}_{\alpha} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' = 0. \quad (10.2.21)$$

Здесь $c_V = c_V^{\text{tr}} + c_V^{\text{int}} = \frac{3}{2}k + k \sum_{\alpha} \left(\langle \varepsilon_{\alpha}^2 \rangle - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle^2 \right)$ — теплоемкость газа, включающая вклад как поступательных, так и внутренних степеней свободы.

10.3. Разложение функции распределения и уравнения переноса

Как и в случае газовой смеси, образованной из одноатомных бесструктурных частиц, мы будем использовать разложение функции распределения в ряд по обобщенным ортогональным полиномам. При этом в качестве функции распределения нулевого приближения будет использоваться однотемпературное локальное максвелл-больцмановское распределение (10.2.3), что соответствует выбору весовой функции в виде

$$\omega_{\alpha i} = (2\pi)^{-3/2} Q_{\alpha}^{-1} \exp \left(-\xi_{\alpha}^2 / 2 \right) \exp (-\varepsilon_{\alpha i}), \quad (10.3.1)$$

где $\xi_{\alpha} = (m_{\alpha}/kT)^{1/2} \mathbf{c}$, $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$.

Выбор однотемпературного приближения означает фактически, что мы не рассматриваем сильных отклонений поступательной и внутренней энергий компонентов или соответствующей им температуры от их равновесных значений, определяемых при температуре T . При переходе к газовой смеси одноатомных молекул такой подход соответствует приближению, использованному в п. 4.4.

В соответствии с соображениями, приведенными в п. 4.1, часть весовой функции, зависящая от ξ_{α} , генерирует в разложении функции распределения неприводимые полиномы Эрмита $H_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\xi_{\alpha})$. Наличие в (10.3.1) дополнительного больцмановского множителя $Q_{\alpha}^{-1} \exp(-\varepsilon_{\alpha i})$ приводит к появлению в разложении новых полиномов, вид которых легко определяется в результате ортогонализации последовательности $1, \varepsilon_{\alpha i}, \varepsilon_{\alpha i}^2, \dots$ с этой частью весовой функции.

Непосредственное применение соответствующей процедуры приводит к появлению полиномов вида

$$R_{\alpha}^{(0)} = 1, \quad R_{\alpha}^{(1)} = \varepsilon_{\alpha i} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle, \\ R_{\alpha}^{(q)} = \varepsilon_{\alpha i} R_{\alpha}^{(q-1)} - \sum_{s=0}^{q-1} \left\langle \varepsilon_{\alpha i} R_{\alpha}^{(q-1)} R_{\alpha}^{(s)} \right\rangle \frac{R_{\alpha}^{(s)}}{\langle R_{\alpha}^{(s)2} \rangle}, \quad (10.3.2)$$

где $\langle \dots \rangle$ означает операцию усреднения с больцмановским множителем $Q_{\alpha}^{-1} \exp(-\varepsilon_{\alpha i})$. Первые два полинома (10.3.2) использовались в работах Ван Чанг и Уленбека [7]. Совокупность полиномов, включающая более высокие степени q , называют иногда полиномами Вальдмана–Трубенбахера [20].

Разложение функции распределения $f_{\alpha i}$ в рассматриваемом нами случае можно представить в виде [17, 19]

$$f_{\alpha i} = f_{\alpha i}^{(0)} \sum_{mnq} \sigma_{mn} a_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mnq}(\mathbf{r}, t) H_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\boldsymbol{\xi}_{\alpha}) R_{\alpha}^{(q)}(\varepsilon_{\alpha i}). \quad (10.3.3)$$

Коэффициенты разложения в соответствии с условиями ортогональности для полиномов удовлетворяют соотношениям

$$n_{\alpha} a_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mnq} \left(R_{\alpha}^{(q)2} \right) = \sum_i \int H_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\boldsymbol{\xi}_{\alpha}) R_{\alpha}^{(q)}(\varepsilon_{\alpha i}) f_{\alpha i} d\mathbf{c}. \quad (10.3.4)$$

Как и в случае смеси одноатомных частиц, бесконечная система уравнений для коэффициентов $n_{\alpha} a_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mnq}$ и параметров n_{α} , $\mathbf{u}$ и T строится умножением кинетического уравнения (10.2.2) (где сделан предварительно переход к переменной $\mathbf{c}_{\alpha} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{u}$ вместо $\mathbf{v}_{\alpha}$) на произведения полиномов $\mathbf{H}_{\alpha}^{mn}(\boldsymbol{\xi}_{\alpha}) R_{\alpha}^{(q)}(\varepsilon_{\alpha i})$ с последующим интегрированием по скоростям и суммированием по всем значениям квантовых чисел i .

Вся дальнейшая процедура, связанная с обрывом цепочки уравнений и получением замкнутой системы уравнений для конечного числа макроскопических переменных, полностью эквивалентна процедуре, которая применялась для случая смеси одноатомных частиц в гл. 4. В частности, рассматриваемому там приближению $13N$ моментов соответствует в нашем случае приближение $17N$ моментов, определяемое выделенной выше совокупностью параметров, описывающей состояние многоатомной газовой смеси. При этом в разложении (10.3.3) должны быть оставлены члены, содержащие произведения $\mathbf{H}_{\alpha}^{mn}$ на $R_{\alpha}^{(0)} = 1$ для $m, n = 0, 1$ и $m = 2, n = 0$, а также произведения $\mathbf{H}_{\alpha}^{mn}$ на $R_{\alpha}^{(1)} = \varepsilon_{\alpha i} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle$ для $m = 0, 1$ и $n = 0$.

Соответствующие коэффициенты разложения выражаются тогда с помощью соотношения (10.3.4) через основные макроскопические параметры смеси следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{\alpha}^{000} &= 1, \quad a_{\alpha}^{010} = \frac{2\Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}}{kT}, \\ a_{\alpha}^{001} &= \frac{\Delta E_{\alpha}^{\text{int}}}{c_{\alpha}^{\text{int}}T}, \quad a_{\alpha}^{100} = \gamma_{\alpha}^{1/2} w_{\alpha r}, \\ a_{\alpha rs}^{200} &= \frac{\pi_{\alpha rs}}{p_{\alpha}}, \quad a_{\alpha r}^{110} = 2\gamma_{\alpha}^{1/2} \frac{h_{\alpha r}^{\text{tr}}}{p_{\alpha}}, \quad a_{\alpha r}^{101} = \gamma_{\alpha}^{1/2} \frac{h_{\alpha r}^{\text{int}}}{n_{\alpha} c_{\alpha}^{\text{int}}T}. \end{aligned} \quad (10.3.5)$$

Здесь $\gamma_{\alpha} = m_{\alpha}/kT_{\alpha}$, а параметры $\Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}$, $\Delta E_{\alpha}^{\text{int}}$, $\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{tr}}$, $\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{int}}$ определены выражениями (10.2.10) и (10.2.16). Парциальная теплоемкость, связанная с наличием внутренних степеней свободы молекул, определяется как

$$c_{\alpha}^{\text{int}} = \frac{\partial E_{\alpha 0}^{\text{int}}}{\partial T} = k \left(\langle \varepsilon_{\alpha}^2 \rangle - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle^2 \right). \quad (10.3.6)$$

Разложение для $f_{\alpha i}$ в приближении $17N$ моментов приобретает в результате вид [17]

$$\begin{aligned} f_{\alpha i} &= f_{\alpha i}^{(0)} \left[1 + \gamma_{\alpha}^{1/2} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\pi_{\alpha rs}}{p_{\alpha}} \left(\xi_{\alpha r} \xi_{\alpha s} - \frac{1}{3} \delta_{rs} \xi_{\alpha}^2 \right) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{n_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}}{p_{\alpha}} \left(\xi_{\alpha}^2 - 3 \right) + \frac{k}{c_{\alpha}^{\text{int}}} \frac{n_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{int}}}{p_{\alpha}} \left(\varepsilon_{\alpha i} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle \right) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \gamma_{\alpha}^{1/2} \frac{\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{tr}} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\alpha}}{p_{\alpha}} \left(\xi_{\alpha}^2 - 5 \right) + \frac{k}{c_{\alpha}^{\text{int}}} \gamma_{\alpha}^{1/2} \frac{\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{int}} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\alpha}}{p_{\alpha}} \left(\varepsilon_{\alpha i} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

Соответствующая этому приближению замкнутая система уравнений для величин ρ_{α} , $\rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$, $\Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}$, $\Delta E_{\alpha}^{\text{int}}$, $\pi_{\alpha rs}$, $\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{tr}}$, $\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{int}}$ получается в результате умножения кинетического уравнения на соответствующие полиномы, присутствующие в разложении (10.3.7), интегрирования по скоростям и суммирования по всем состояниям:

$$\frac{d\rho_{\alpha}}{dt} + \rho_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0, \quad (10.3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{\alpha} w_{\alpha r}}{dt} + \rho_{\alpha} w_{\alpha s} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \rho_{\alpha} w_{\alpha r} \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho_{\alpha} \frac{du_r}{dt} + \\ + \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x_r} + \frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_r} n_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{tr}} = R_{\alpha r}^{100}, \end{aligned} \quad (10.3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{tr}}}{dt} + \frac{5}{3} n_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{tr}} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{3}{2} \frac{p_\alpha}{T} \frac{dT}{dt} + p_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + \\ + \pi_{\alpha rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha^{\text{tr}} - E_{\alpha 0}^{\text{tr}} \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{w}_\alpha) + \rho_\alpha w_{\alpha \ell} \frac{\partial u_\ell}{\partial t} = R_\alpha^{010}, \end{aligned} \quad (10.3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{int}}}{dt} + n_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{int}} \nabla \cdot \mathbf{u} + n_\alpha c_\alpha^{\text{int}} \frac{dT}{dt} + \\ + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha^{\text{int}} - E_{\alpha 0}^{\text{int}} \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{w}_\alpha) = R_\alpha^{001}, \end{aligned} \quad (10.3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_{\alpha rs}}{dt} + \pi_{\alpha rs} \nabla \cdot \mathbf{u} + 2p_\alpha \varepsilon_{rs} + 2 \left\{ \pi_{\alpha r\ell} \frac{\partial u_s}{\partial x_\ell} \right\} + \\ + \frac{4}{5} \left\{ \frac{\partial q_{\alpha r}^{\text{tr}}}{\partial x_s} \right\} = R_{\alpha rs}^{200}, \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_{\alpha r}^{\text{tr}}}{dt} + \frac{7}{5} h_{\alpha s}^{\text{tr}} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{2}{5} h_{\alpha s}^{\text{tr}} \frac{\partial u_s}{\partial x_r} + \\ + \frac{7}{5} h_{\alpha r}^{\text{tr}} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{5}{3} p_\alpha w_{\alpha r} \nabla \cdot \mathbf{u} + 2p_\alpha w_{\alpha s} \varepsilon_{rs} + \\ + \frac{kT}{m_\alpha} \frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} + \pi_{\alpha rs} \frac{du_s}{dt} + \frac{k}{m_\alpha} \pi_{\alpha rs} \frac{\partial T}{\partial x_s} + \\ + \frac{5}{2} \frac{k}{m_\alpha} P_{\alpha rs} \frac{\partial T}{\partial x_s} + \frac{5}{2} \frac{p_\alpha}{T} w_{\alpha r} \frac{dT}{dt} + \frac{5}{3} \frac{k}{m_\alpha} n_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{tr}} \frac{\partial T}{\partial x_r} + \\ + \frac{5}{3} \frac{kT}{m_\alpha} \frac{\partial n_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{tr}}}{\partial x_r} + \frac{5}{3} n_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{tr}} \frac{du_r}{dt} = R_{\alpha r}^{110}, \end{aligned} \quad (10.3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_{\alpha r}^{\text{int}}}{dt} + h_{\alpha s}^{\text{int}} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + h_{\alpha r}^{\text{int}} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{m_\alpha} P_{\alpha rs} \frac{\partial T}{\partial x_s} + \frac{k}{m_\alpha} n_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{int}} \frac{\partial T}{\partial x_r} + \\ + \frac{kT}{m_\alpha} \frac{\partial n_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{int}}}{\partial x_r} + n_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{int}} \frac{du_r}{dt} = R_{\alpha r}^{101}. \end{aligned} \quad (10.3.14)$$

В полученных уравнениях мы опускаем для простоты члены, связанные с влиянием магнитного поля.

В правых частях уравнений (10.3.9)–(10.3.14) фигурируют моменты относительно интеграла столкновений:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mnq} = & \sum_{\beta} \sum_{ijkl} \iiint \left[G_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\mathbf{c}'_{\alpha}) T_{\alpha}^{(q)}(\varepsilon_{\alpha k}) - \right. \\
& \left. - G_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\mathbf{c}_{\alpha}) T_{\alpha}^{(q)}(\varepsilon_{\alpha i}) \right] f_{\alpha i} f_{1\beta j} \sigma_{\alpha\beta}(ij|k\ell, g, \chi) d\Omega d\mathbf{c}_{\alpha} d\mathbf{c}_{1\beta},
\end{aligned} \quad (10.3.15)$$

где полиномы $\mathbf{G}_{\alpha}^{mn}$ связаны с $\mathbf{H}_{\alpha}^{mn}$ соотношением (4.2.6), а $T_{\alpha}^{(q)} = (kT)^q R_{\alpha}^{(q)}$.

После подстановки в (10.3.15) разложений (10.3.7) величины $\mathbf{R}_{\alpha}^{mnq}$ выражаются через совокупность тех же моментов функции распределения, которые фигурируют в левых частях уравнений (10.3.9)–(10.3.14).

Как и раньше, в правых частях уравнений оставлены лишь линейные по моментам члены, что означает фактически выполнение условий

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\alpha}^{\text{tr}} &\ll \frac{3}{2} kT, \quad \Delta E_{\alpha}^{\text{int}} \ll c_{\alpha}^{\text{int}} T, \quad \pi_{\alpha rs} \ll p_{\alpha}, \quad |\mathbf{w}_{\alpha}| \ll \left(\frac{kT}{m_{\alpha}} \right)^{1/2}, \\
|\mathbf{q}_{\alpha}^{\text{tr}}| &\ll \left(\frac{kT}{m_{\alpha}} \right)^{1/2} n_{\alpha} kT, \quad |\mathbf{q}_{\alpha}^{\text{int}}| \ll \left(\frac{kT}{m_{\alpha}} \right)^{1/2} n_{\alpha} c_{\alpha}^{\text{int}} T.
\end{aligned} \quad (10.3.16)$$

Последнее означает, что рассматриваются состояния газовой смеси, не слишком сильно отличающиеся от локального равновесия.

При конкретном вычислении $\mathbf{R}_{\alpha}^{mnq}$ осуществляется переход к переменным $\mathbf{G}_{\alpha}$, $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ и $\mathbf{g}'_{\alpha\beta}$ в соответствии с соотношениями (1.2.7), при этом в отличие от (1.2.9) относительные скорости до и после столкновения связаны при наличии внутренних степеней свободы соотношением

$$\mathbf{g}' = g' \mathbf{i} \cos \chi + g' \mathbf{j} \sin \chi \cos \varphi + g' \mathbf{k} \sin \chi \sin \varphi,$$

где

$$g'^2 = g^2 - \left(\frac{2kT}{\mu_{\alpha\beta}} \right) \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha k} + \varepsilon_{1\beta \ell} - \varepsilon_{\alpha i} - \varepsilon_{1\beta j}.$$

После интегрирования по углу φ и переменной $\mathbf{G}$ коэффициенты при соответствующих безразмерных моментах в правых частях уравнений (10.3.9)–(10.3.14) оказываются выраженными через интегральные величины вида

$$\begin{aligned}
\langle F \rangle_{\alpha\beta} = & \left(\frac{kT}{2\pi\mu_{\alpha\beta}} \right)^{1/2} Q_{\alpha}^{-1} Q_{\beta}^{-1} \sum_{ijkl} \int_0^{\infty} d\zeta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \chi d\chi \times \\
& \times \left[F \zeta^3 \exp \left(-\zeta^2 - \varepsilon_{\alpha i} - \varepsilon_{1\beta j} \right) \sigma_{\alpha\beta}(ij|k\ell, \zeta, \chi) \right].
\end{aligned} \quad (10.3.17)$$

В случае, когда F является функцией только ζ и ζ' эти величины представляют собой обобщение соответствующих интегралов $\Omega_{\alpha\beta}^{lr}$, вводимых в теории одноатомных газов. Наличие внутренних степеней свободы приводит, однако, к появлению новых интегральных величин, с которыми связаны характерное время релаксации поступательной и внутренней энергий, а также поправки к коэффициентам переноса за счет неупругих столкновений.

Мы не будем здесь полностью выписывать явные выражения для $\mathbf{R}_\alpha^{mnq}$, получаемые в результате описанной выше схемы расчета. Они будут использованы ниже при конкретном анализе явлений переноса и релаксации в чистом многоатомном газе, а также при рассмотрении выражений для кинетических коэффициентов в случае многоатомной газовой смеси.

10.4. Явления переноса и релаксации в простом многоатомном газе

Характерные особенности явлений, связанных с наличием внутренних степеней свободы молекул, легче всего выявить на примере простого многоатомного газа, образованного из молекул одного сорта. Поскольку в слабоионизованном газе, если отвлечься от рассмотрения диффузии и переноса тепла электронами, а также диффузии ионов, явления переноса определяются в основном поведением его нейтральных молекул, этот случай имеет прямое отношение и к описанию молекулярной слабоионизованной плазмы.

Вычисление правых частей уравнений (10.3.10)–(10.3.14) для простого многоатомного газа приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} R^{010} &= -R^{001} = -\frac{4}{3} \frac{c_V}{c_{\text{int}}} n^2 \Omega_E \Delta E^{\text{tr}}, \quad R_{rs}^{200} = -\frac{8}{5} n \Omega_\eta \pi_{rs}, \\ \mathbf{R}^{110} &= -\frac{16}{15} n \left(\Omega_\eta + \frac{25}{4} \Omega_E \right) \mathbf{q}^{\text{tr}} + \frac{5}{3} \frac{k}{c_{\text{int}}} n \Omega_E \mathbf{q}^{\text{int}}, \\ \mathbf{R}^{101} &= \frac{2}{3} n \Omega_E \mathbf{q}^{\text{tr}} - \frac{8}{3} n \left(\Omega_D + \frac{k}{c_{\text{int}}} \Omega_E \right) \mathbf{q}^{\text{int}}, \end{aligned} \quad (10.4.1)$$

где

$$\Omega_E = \langle \Delta \varepsilon^2 \rangle_{11}, \quad \Omega_\eta = \left\langle \zeta^2 \left(\zeta^2 - \zeta'^2 \cos^2 \chi \right) - \frac{1}{6} (\Delta \varepsilon)^2 \right\rangle_{11}. \quad (10.4.2)$$

При этом

$$\boldsymbol{\zeta} = \left(\frac{m}{4kT} \right)^{1/2} \mathbf{g}, \quad \zeta'^2 = \zeta^2 - \Delta \varepsilon, \quad \Delta \varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_{1l} - \varepsilon_i - \varepsilon_{1j},$$

$$c^{\text{int}} = k \left(\langle \varepsilon^2 \rangle - \langle \varepsilon \rangle^2 \right), \quad c_V = \frac{3}{2} k + c^{\text{int}}. \quad (10.4.3)$$

Рассмотрим сначала однородное состояние многоатомного газа, в котором основные термодинамические переменные ρ , $\mathbf{u}$ и T не зависят от $\mathbf{r}$ и t , а остальные моменты оказываются функциями только от времени. Уравнения (10.3.10)–(10.3.14) сводятся тогда к следующим:

$$\frac{\partial \Delta E^{\text{tr}}}{\partial t} = -\frac{2}{3} \frac{c_V}{k} \tau_E^{-1} \Delta E^{\text{tr}}, \quad \frac{\partial \pi_{rs}}{\partial t} = -\tau_\eta^{-1} \pi_{rs}, \quad (10.4.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}^{\text{tr}}}{\partial t} = -\frac{2}{3} n \left(\tau_\eta^{-1} + \frac{5}{6} \tau_E^{-1} \right) \mathbf{q}^{\text{tr}} + \frac{5}{6} \tau_E^{-1} \mathbf{q}^{\text{int}}, \quad (10.4.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}^{\text{int}}}{\partial t} = \frac{1}{3} \frac{c^{\text{int}}}{k} \tau_E^{-1} \mathbf{q}^{\text{tr}} - \left(\tau_D^{-1} + \frac{1}{2} \tau_E^{-1} \right) \mathbf{q}^{\text{int}}.$$

Здесь

$$\tau_E^{-1} = \frac{2k}{c^{\text{int}}} n \Omega_E, \quad \tau_\eta^{-1} = \frac{8}{5} n \Omega_\eta, \quad \tau_D^{-1} = \frac{8}{3} n \Omega_D. \quad (10.4.6)$$

Для оценки порядка величины характерных времен τ_η и τ_D рассмотрим случай, когда неупругими столкновениями можно полностью пренебречь. При этом $g' = g$ и $\Delta \varepsilon = 0$. Предположим также, что сечение рассеяния не зависит от внутреннего состояния сталкивающихся молекул. Тогда

$$\begin{aligned} \Omega_\eta &= \left\langle \zeta^4 (1 - \cos^2 \chi) \right\rangle_{11} = \\ &= \left[\sum_i \exp(-\varepsilon_i) \right]^2 \sum_i \sum_j \exp(-\varepsilon_i - \varepsilon_j) \Omega^{22} = \Omega^{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c^{\text{int}}}{k} \Omega_D &= \left\langle \zeta^2 [(\varepsilon_i - \langle \varepsilon \rangle) (\varepsilon_i - \varepsilon_{1j}) (1 - \cos \chi)] \right\rangle_{11} = \\ &= \left[\sum_i \exp(-\varepsilon_i) \right]^2 \sum_i \sum_j \left(\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i \varepsilon_{1j} \right) \exp(-\varepsilon_i - \varepsilon_j) \Omega^{11} = \frac{c^{\text{int}}}{k} \Omega^{11}. \end{aligned}$$

Здесь c^{int} определяется выражением (10.4.3) и введены интегральные величины $\Omega^{\ell r}$, которые соответствуют обычным интегралам Чепмена–Каулинга [21]:

$$\Omega^{\ell r} = \left(\frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \zeta^{2r+3} \exp(-\zeta^2) \sigma(g, \chi) (1 - \cos^\ell \chi) \sin \chi \, d\zeta \, d\chi \, d\varphi. \quad (10.4.7)$$

Напомним, что для модели молекул — твердых упругих сфер

$$\Omega^{11} = \left(\frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \pi d^2, \quad \Omega^{22} = 2 \left(\frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \pi d^2.$$

Тогда

$$\tau_\eta^{-1} = \frac{4}{5} \sqrt{2} n \langle v \rangle \pi d^2, \quad \tau_D^{-1} = \frac{2}{3} \sqrt{2} n \langle v \rangle \pi d^2,$$

$$\langle v \rangle = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, величины τ_η^{-1} и τ_D^{-1} для этой модели молекул имеют порядок средней частоты упругих столкновений $\nu = \sqrt{2} n \langle v \rangle \pi d^2$. Что касается параметра τ_E или характерного времени обмена энергией между поступательными и внутренними степенями свободы молекул, то оно является характеристикой существенно неупругого взаимодействия частиц, поэтому отношение τ_E/τ_η может принимать произвольные значения.

Представим полный тензор давлений P_{rs} в виде (10.2.15). Тогда из решения уравнений (10.4.5) для ΔE^{tr} и π_{rs} следует, что недиагональные компоненты этого тензора и неравновесные поправки к диагональной части убывают со временем с декрементами, соответственно как τ_η^{-1} и $(2c_V/3k) \tau_E^{-1}$. В случае замедленного обмена энергией ($\tau_E \gg \tau_\eta$) величина π_{rs} затухает заметно быстрее, чем ΔE^{tr} .

Релаксация потока тепла $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\text{tr}} + \mathbf{q}^{\text{int}}$ описывается в общем случае линейной комбинацией экспонент с декрементами затухания, определяемыми значениями корней характеристического уравнения системы связанных уравнений (10.4.5) для $\mathbf{q}^{\text{tr}}$ и $\mathbf{q}^{\text{int}}$. При замедленном обмене энергией перекрестными членами в правых частях этих уравнений можно пренебречь, и релаксация потока тепла описывается выражением

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^{\text{tr}}(0) \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{t}{\tau_\eta}\right) + \mathbf{q}^{\text{int}}(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_D}\right).$$

Перейдем теперь к рассмотрению слабо-неоднородных и медленно меняющихся состояний газа. Описание таких состояний подразумевает, как уже отмечалось ранее, что макроскопические параметры газа мало меняются на расстоянии и за времена, соответствующие эффективной средней длине и времени свободного пробега молекул.

Поскольку $\tau_\eta \approx \tau_D \ll \tau_L$, то в левых частях уравнений для тензора вязких напряжений и потоков тепла можно опустить производные $d\pi_{rs}/dt$, $d\mathbf{q}^{\text{tr}}/dt$ и $d\mathbf{q}^{\text{int}}/dt$ по сравнению с правыми частями уравнений. В случае легкого обмена энергией имеем дополнительно $\tau_E \approx \tau_\eta$, что позволяет и в уравнении для ΔE^{tr} пренебречь производной $d\Delta E^{\text{tr}}/dt$.

Оставшиеся неоднородные части уравнений содержат ряд нелинейных членов, в том числе произведения неравновесных параметров на пространственные производные от $\mathbf{u}$ и T , которые для рассматриваемых нами слабо-неоднородных состояний и в силу условий (10.3.16) можно также опустить. В результате приходим к соотношениям вида

$$\frac{c^{\text{int}}}{c_V} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{c^{\text{int}}}{c_V} \nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{tr}} - \frac{3}{2} \frac{k}{c_V} \nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{int}} = -\frac{2}{3} \frac{c_V}{k} \tau_E^{-1} n \Delta E^{\text{tr}}, \quad (10.4.8)$$

$$2p\varepsilon_{rs} + \frac{4}{5} \left\{ \frac{\partial q_r^{\text{tr}}}{\partial x_s} \right\} = -\tau_\eta^{-1} \pi_{rs}, \quad (10.4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \frac{k}{m} p \frac{\partial T}{\partial x_r} + \frac{5}{2} \frac{p}{m} \frac{\partial \Delta E^{\text{tr}}}{\partial x_r} + \frac{kT}{m} \frac{\partial \pi_{rs}}{\partial x_s} = \\ = -\frac{2}{3} n \left(\tau_\eta^{-1} + \frac{5}{6} \tau_E^{-1} \right) \mathbf{q}^{\text{tr}} + \frac{5}{6} \tau_E^{-1} \mathbf{q}^{\text{int}}, \end{aligned} \quad (10.4.10)$$

$$\frac{c^{\text{int}}}{m} p \frac{\partial T}{\partial x_r} + \frac{p}{m} \frac{\partial \Delta E^{\text{int}}}{\partial x_r} = \frac{1}{3} \frac{c^{\text{int}}}{k} \tau_E^{-1} \mathbf{q}^{\text{tr}} - \left(\tau_D^{-1} + \frac{1}{2} \tau_E^{-1} \right) \mathbf{q}^{\text{int}}. \quad (10.4.11)$$

В левых частях (10.4.8)–(10.4.11) оставлены члены с пространственными производными от величин $\mathbf{q}^{\text{tr}}$, $\mathbf{q}^{\text{int}}$, π_{rs} и ΔE^{tr} . Как уже отмечалось ранее, некоторые из них могут иметь значение при рассмотрении существенно неоднородных задач. Учет производных от тепловых потоков в скалярном уравнении (10.4.8), как было показано [22, 23], играет некоторую роль в задаче о распространении звука в многоатомном газе. В большинстве случаев, однако, эти члены можно опустить, и уравнения (10.4.8)–(10.4.11) приводят к обычным линейным соотношениям переноса

$$\frac{2}{3} n \Delta E^{\text{tr}} = -\zeta \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \pi_{rs} = -2\eta \varepsilon_{rs}, \quad (10.4.12)$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T.$$

При этом для полного тензора давлений имеем выражение

$$P_{rs} = (p - \zeta \nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{rs} - 2\eta \varepsilon_{rs}. \quad (10.4.13)$$

Здесь η и ζ — сдвиговая и объемная вязкость, $\lambda = \lambda^{\text{tr}} + \lambda^{\text{int}}$ — теплопроводность, определяемые выражениями

$$\eta = p\tau_\eta, \quad \zeta = \frac{c^{\text{int}} k}{c_V^2} p\tau_E, \quad (10.4.14)$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^{\text{tr}} m}{\eta} &= \left[\frac{15}{4} k - \frac{5}{\pi Z} c^{\text{int}} \left(\frac{5}{2} - \frac{\rho D^{\text{int}}}{\eta} \right) \delta^{-1} \right], \\ \frac{\lambda^{\text{int}} m}{\eta} &= \frac{\rho D^{\text{int}}}{\eta} c^{\text{int}} \left[1 + \frac{2}{\pi Z} \left(\frac{5}{2} - \frac{\rho D^{\text{int}}}{\eta} \right) \delta^{-1} \right], \\ \delta &= 1 + \frac{2}{\pi Z} \left(\frac{5}{3} \frac{c^{\text{int}}}{k} + \frac{\rho D^{\text{int}}}{\eta} \right).\end{aligned}\quad (10.4.15)$$

При этом

$$Z = \frac{4}{\pi} \frac{\tau_E}{\tau_\eta}, \quad (10.4.16)$$

где Z соответствует среднему числу столкновений, необходимому для установления равновесия между поступательными и внутренними степенями свободы. Коэффициент диффузии внутренней энергии D^{int} определяется из соотношения

$$\rho D^{\text{int}} = p \tau_D = \frac{3}{8} \frac{kT}{\Omega_D}. \quad (10.4.17)$$

Выражения (10.4.14)–(10.4.15) находятся в полном соответствии с результатами, получаемыми в первом приближении метода Чепмена–Энскога [7, 8] для легкого обмена энергией.

Уравнения (10.4.8)–(10.4.11) и вытекающие из них выражения для сдвиговой вязкости η и теплопроводности λ сохраняют свое значение и в случае замедленного обмена энергией между поступательными и внутренними степенями свободы. В частности, при $Z \gg 1$ имеем

$$\lambda = \left(\frac{15}{4} k + \frac{\rho D^{\text{int}}}{\eta} c^{\text{int}} \right) \frac{\eta}{m}. \quad (10.4.18)$$

10.5. Двухтемпературное приближение. Уравнение релаксации внутренней энергии

В случае замедленного обмена энергией между поступательными и внутренними степенями свободы коэффициент объемной вязкости ζ уже нельзя ввести простым образом, поскольку при $Z \gg 1$ вместо линейного соотношения для ΔE^{tr} (10.4.8) необходимо использовать более полное уравнение релаксации для ΔE^{tr} (10.3.10). После исключения dT/dt и в пренебрежении нелинейными членами это уравнение записывается как

$$\begin{aligned}n \frac{d\Delta E^{\text{tr}}}{dt} + \frac{c^{\text{int}}}{c_V} p \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{c^{\text{int}}}{c_V} \nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{tr}} - \frac{3}{2} \frac{k}{c_V} \nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{int}} &= \\ &= -\frac{2}{3} \frac{c_V}{k} \tau_E^{-1} n \Delta E^{\text{tr}}.\end{aligned}\quad (10.5.1)$$

Покажем, что уравнение релаксации энергии в форме (10.5.1) может быть получено, если в качестве нулевого приближения используется двухтемпературная максвелл-больцмановская функция распределения вида

$$f_i^{(0)} = n \left(\frac{m}{2\pi k T^{\text{tr}}} \right)^{3/2} Q^{-1}(T^{\text{int}}) \exp \left(-\frac{mc^2}{2k T^{\text{tr}}} - \frac{E_i}{k T^{\text{int}}} \right). \quad (10.5.2)$$

Если неупругие столкновения в газе относительно редки, естественно считать, что не только полная энергия газа nE , но и порознь каждая из ее составляющих nE^{tr} и nE^{int} определены одинаковым образом как на полной функции распределения f_i , так и на функции распределения нулевого приближения (10.5.2), в силу чего

$$\begin{aligned} E^{\text{tr}} &= E_0^{\text{tr}} = \frac{3}{2} k T^{\text{tr}}, \\ E^{\text{int}} &= E_0^{\text{int}} = k T^{\text{int}} \langle \varepsilon \rangle. \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

При таком подходе интересующими нас моментами функции распределения служат величины n , $\mathbf{u}$, T^{tr} и T^{int} , которые содержатся в весовой функции, и π_{rs} , $\mathbf{q}^{\text{tr}}$, $\mathbf{q}^{\text{int}}$, появляющиеся в разложении. Соответствующие им уравнения моментов при выполнении условий $\tau \ll \tau_L$ и $\lambda \ll L$ приводят к линейным соотношениям для π_{rs} и $\mathbf{q}$, которые совпадают с соотношениями (10.4.12), если оставаться в рамках использованного выше предположения о малости отклонений поступательной и внутренней энергии от их равновесных значений при температуре T . В силу условий (10.5.3) тензор давлений, однако, определен теперь как $P_{rs} = nkT^{\text{tr}}\delta_{rs} + \pi_{rs}$ и не содержит в явном виде члена с объемной вязкостью. Вместо этого полная система уравнений включает в себя наряду с уравнением сохранения полной энергии газа уравнение релаксации для T^{tr} или T^{int} .

Интересуясь лишь релаксацией энергии, можно для простоты положить π_{rs} , $\mathbf{q}^{\text{tr}}$, $\mathbf{q}^{\text{int}}$ равными нулю. В этом случае разложение для f_i совпадает с $f_i^{(0)}$. Разлагая (10.5.2) в ряд по малым относительным разностям $(T^{\text{tr}} - T)/T$ и $(T^{\text{int}} - T)/T$ и пренебрегая квадратичными членами, находим

$$\begin{aligned} f_i^{(0)} &= n \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} Q^{-1}(T) \exp \left(-\frac{mc^2}{2k T} - \varepsilon_i \right) \times \\ &\times \left[1 + \frac{1}{2} \frac{T^{\text{tr}} - T}{T} (\xi^2 - 3) + \frac{T^{\text{int}} - T}{T} (\varepsilon_i - \langle \varepsilon \rangle) \right]. \end{aligned} \quad (10.5.4)$$

Легко заметить, что для рассматриваемых нами малых отклонений энергий приближенно справедливы следующие соотношения:

$$\Delta E^{\text{tr}} = E^{\text{tr}} - E_0^{\text{tr}} \approx \left(\frac{\partial E_0^{\text{tr}}}{\partial T^{\text{tr}}} \right)_{T^{\text{tr}}=T} (T^{\text{tr}} - T) = \frac{3}{2} k (T^{\text{tr}} - T),$$

$$\Delta E^{\text{int}} = E^{\text{int}} - E_0^{\text{int}} \approx \left(\frac{\partial E_0^{\text{int}}}{\partial T^{\text{int}}} \right)_{T^{\text{int}}=T} (T^{\text{int}} - T) = c^{\text{int}} (T^{\text{int}} - T). \quad (10.5.5)$$

Тогда разложение (10.5.4) оказывается полностью эквивалентным использованному ранее разложению (10.3.7), если записать его для случая простого газа.

В теории двухтемпературной релаксации [22] вместо уравнений для отклонений энергии используются обычно уравнения релаксации для поступательной либо для внутренней энергии. Они следуют из кинетического уравнения (1.2.23), если умножить последнее на $mc^2/2$ или E_i , соответственно, проинтегрировать по скоростям и просуммировать по внутренним состояниям,

$$\frac{dnE^{\text{tr}}}{dt} + nE^{\text{tr}} \nabla \cdot \mathbf{u} + P_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{tr}} = R^{\text{tr}}, \quad (10.5.6)$$

$$\frac{dnE^{\text{int}}}{dt} + nE^{\text{int}} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{int}} = R^{\text{int}}. \quad (10.5.7)$$

Суммирование этих уравнений приводит, очевидно, к уравнению сохранения полной энергии или к уравнению для температуры T , которое принимает вид

$$nc_V \frac{dT}{dt} + P_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (10.5.8)$$

Легко заметить, что заменив величину E^{tr} на $(3/2)kT + \Delta E^{\text{tr}}$ и подставив в уравнение (10.5.6) производную dT/dt с помощью (10.5.8), мы приходим к уже записанному ранее уравнению релаксации (10.5.1), поскольку правая часть уравнения (10.5.6) совпадает с вычисленной в предыдущем параграфе величиной R^{010} . Из условия $\Delta E^{\text{tr}} = -\Delta E^{\text{int}}$ и соотношений (10.5.5) следует $T^{\text{int}} - T = -\frac{3}{2} \frac{k}{c^{\text{int}}} (T^{\text{tr}} - T)$, поэтому выражение R^{010} (10.4.1) можно представить в виде

$$R^{010} = -nc^{\text{int}} \tau_E^{-1} (T^{\text{tr}} - T^{\text{int}}).$$

Тогда уравнение (10.5.7) с учетом уравнения непрерывности можно представить как

$$n \frac{dE^{\text{int}}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{int}} = -nc^{\text{int}} \tau_E^{-1} (T^{\text{tr}} - T^{\text{int}}), \quad (10.5.9)$$

что находится в соответствии с известным уравнением релаксации внутренней энергии газа, полученным в полуфеноменологической теории двухтемпературной релаксации [24].

До сих пор для простоты рассматривался лишь один вид степеней свободы. Если в газе одновременно возбуждены как вращательные, так и колебательные степени свободы, необходимо некоторое видоизменение рассмотренной выше схемы. Введем вместо индекса «int», соответствующие двум видам внутренней энергии молекул, новые индексы «rot» и «vib». Тогда в разложении функции распределения наряду с параметрами ΔE^{tr} , ΔE^{rot} и $\mathbf{q}^{\text{tr}}$, $\mathbf{q}^{\text{rot}}$ появляются новые переменные ΔE^{vib} , $\mathbf{q}^{\text{vib}}$, для которых записываются свои уравнения моментов. Соответственно вместо приближения 17 моментов приходим к приближению 21 момента. Существенно, что в уравнениях релаксации энергии и уравнениях для потоков тепла появляются при этом новые перекрестные члены, которые зависят, в частности, от характерных частот столкновений $(\tau_E^{-1})_{\text{rv}}$ и $(\tau_D^{-1})_{\text{rv}}$, определяемых через вероятности переходов с одновременным изменением как вращательного, так и колебательного квантовых чисел.

Анализ процессов релаксации при выполнении обычного условия $\tau_{\text{rot}} \ll \tau_{\text{vib}} \ll (\tau_E)_{\text{rv}}$ показывает [22, 23], что если рассматривать релаксацию вращательной и колебательной температур при фиксированном значении T^{tr} , то можно обосновать расщепление уравнений, описывающих независимые процессы релаксации внутренних энергий для каждой из степеней свободы к их равновесным значениям, определяемым поступательной температурой. На основе этих уравнений можно получить дисперсионное уравнение и следующие из него выражения для фазовой скорости распространения звука и коэффициента поглощения звука для случая, когда одновременно учитываются вращательные и колебательные степени свободы молекул [22, 23, 19].

Соответствующий анализ показывает, что эти выражения во всем диапазоне звуковых частот, удовлетворяющих условию $\omega\tau_\eta \ll 1$ хорошо аппроксимируются соотношениями, которые вытекают из независимой теории распространения звука, основанной на феноменологических уравнениях релаксации [24]. В частности, дисперсия фазовой скорости распространения звука описывается соотношением

$$c^2 = c_0^2 \left[1 + \frac{kc^{\text{vib}}}{c_p(c_v - c^{\text{vib}})} \frac{(\omega\tau''_{\text{vib}})^2}{1 + (\omega\tau''_{\text{vib}})^2} + \frac{2}{3\gamma} \frac{c^{\text{rot}}}{(c_v - c^{\text{vib}})} \frac{(\omega\tau'_{\text{rot}})^2}{1 + (\omega\tau'_{\text{rot}})^2} \right], \quad (10.5.10)$$

где c_0 — скорость звука без дисперсии, $\gamma = c_p/c_v$.

Для релаксационной части коэффициента поглощения α_{rel} в этом случае имеем

$$\frac{2\alpha_{\text{rel}}c_0}{\omega} = \left(\frac{c_0}{c}\right)^3 \left[1 + \frac{kc^{\text{vib}}}{c_p(c_V - c^{\text{vib}})} \frac{\omega\tau'_{\text{vib}}}{1 + (\omega\tau'_{\text{vib}})^2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3\gamma} \frac{c^{\text{rot}}}{(c_V - c^{\text{vib}})} \frac{\omega\tau'_{\text{rot}}}{1 + (\omega\tau'_{\text{rot}})^2} \right]. \quad (10.5.11)$$

Времена τ'_{rot} и τ'_{vib} связаны с обычными временами вращательной и колебательной релаксации τ_{rot} и τ_{vib} соотношениями

$$\tau'_{\text{rot}} = \frac{3}{2} \frac{k}{(c_V - c^{\text{vib}})} \tau_{\text{rot}}, \quad \tau'_{\text{vib}} = \frac{3}{2} \frac{(c_V - c^{\text{vib}})}{c_V} \tau_{\text{vib}}.$$

Экспериментальные данные по поглощению звука в молекулярных газах часто используются для определения вращательных и колебательных чисел столкновений Z_{rot} и Z_{vib} , знание которых, в свою очередь, может оказаться необходимым в теоретических оценках факторов Эйкена или теплопроводности многоатомных газов.

10.6. Оценки вклада неупругих столкновений в кинетические коэффициенты

Выражения (10.4.13)–(10.4.14) позволяют в принципе рассчитать значения всех интересующих нас кинетических коэффициентов, если известны квантово-механические сечения рассеяния $\sigma(k\ell | ij, g, \chi)$, входящие под знак интеграла в выражениях для Ω_η , Ω_E и Ω_D . В общем случае задача определения таких сечений методами квантовой механики достаточно сложна. Некоторые достижения имеются лишь в анализе сечений вращательного возбуждения наиболее простых молекул, например молекул H_2 [25, 26]. Для двухатомных и линейных многоатомных молекул выражения для матричных элементов T -матрицы рассеяния, через которые непосредственно выражается сечение неупругого рассеяния, рассматривались в работе [6]. В ряде работ был выполнен ряд квантово-механических расчетов эффективных сечений для взаимодействий атом–двухатомная молекула на примере систем $\text{He}-\text{H}_2$, $\text{He}-\text{N}_2$, $\text{He}-\text{CO}_2$, $\text{Ar}-\text{H}_2$ (см., например, обзор результатов этих расчетов [27]).

Некоторую информацию о вкладе неупругих столкновений в кинетические коэффициенты можно получить, рассматривая сравнительно простые классические модели взаимодействия молекул. Переход к классическим переменным сопровождается при этом заменой суммирования по внутренним состояниям интегрированием по классическим переменным. Рассмотрим, например, модель шероховатых сфер с диаметром d , для которой предполагается,

что при соударении относительная скорость сфер в точке их соприкосновения изменяет знак. В этом случае [19]

$$\sigma(k\ell | ij, g, \chi) = \frac{d^2}{4}, \quad \varepsilon_i = \frac{I\omega^2}{2kT}, \quad \varepsilon_{1j} = \frac{I_1\omega_1^2}{2kT}, \quad (10.6.1)$$

где I — момент инерции, ω — угловая скорость вращения. Интегральная величина $\langle F \rangle$ определяется при этом как

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= 2\pi \left(\frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} Q^{-2} \frac{d^2}{4} \int_0^\infty F \zeta^3 \exp(-\zeta^2) d\zeta \times \\ &\times \int \exp\left(-\frac{I\omega^2}{2kT}\right) d\boldsymbol{\omega} \int \exp\left(-\frac{I_1\omega_1^2}{2kT}\right) d\boldsymbol{\omega}_1 \int_0^\pi \sin \chi d\chi, \quad (10.6.2) \\ Q &= \int \exp\left(-\frac{I\omega^2}{2kT}\right) d\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{2\pi kT}{I} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Эти выражения могут быть вычислены до конца, если перейти от переменных $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_1$ к переменным

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{I\boldsymbol{\omega} + I_1\boldsymbol{\omega}_1}{I + I_1}, \quad \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1 \quad (10.6.3)$$

и выразить через эти же переменные величину F , используя соотношения из динамики столкновений шероховатых сфер. Последовательное осуществление этой процедуры (см., например, [19]) позволяет найти выражения для кинетических коэффициентов в функции безразмерного параметра $K = 4I/md^2$ (значения K меняются от нуля, когда масса молекулы сосредоточена в центре, до максимального значения $2/3$, когда масса равномерно распределена по поверхности сферы).

Рассмотрим прежде всего такую важную характеристику неупругого взаимодействия как время релаксации τ_E . Подставляя величину $F = (\Delta\varepsilon)^2$, записанную в переменных (10.6.3), в общее выражение (10.6.2) и производя интегрирование, находим

$$\langle (\Delta\varepsilon)^2 \rangle = \left(\frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{4K}{(1+K)^2} \pi d^2.$$

Для времени релаксации τ_E получаем

$$n\tau_E = \frac{3}{16} \frac{(1+K)^2}{K} \left(\frac{m}{\pi kT} \right)^{1/2} \frac{1}{d^2}. \quad (10.6.4)$$

Объемная вязкость ζ определяется тогда выражением

$$\zeta = \frac{kc^{\text{rot}}}{c_V^2} p\tau_E = \left(\frac{mkT}{\pi} \right)^{1/2} \frac{(1+K)^2}{32K} \frac{1}{d^2}, \quad (10.6.5)$$

которое совпадает с результатом, полученным в рамках строгой классической теории для модели шероховатых сфер [21].

Аналогичные расчеты коэффициента самодиффузии D_{11} и коэффициента диффузии внутренней энергии D^{int} дают

$$\begin{aligned} nD_{11} &= \frac{3}{8} \left(\frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{1+K}{1+2K} \frac{1}{d^2}, \\ nD^{\text{int}} &= \frac{3}{8} \left(\frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{(1+K)^2}{1+K+2K^2} \frac{1}{d^2}. \end{aligned} \quad (10.6.6)$$

Для отношения этих величин получаем

$$\frac{D^{\text{int}}}{D_{11}} = \frac{(1+K)(1+2K)}{1+K+2K^2}.$$

Легко заметить, что с ростом величины K от 0 до $2/3$ это отношение монотонно возрастает от значения равного единице до значения 1,52.

Выражения (10.6.6) также согласуются с результатами строгой теории шероховатых сфер [21]. Заметим, однако, что рассчитываемые аналогичным образом выражения для сдвиговой вязкости η (а, следовательно, и для теплопроводности λ) несколько отличаются от известных результатов классической теории. В частности, вычисление η показывает, что этот коэффициент не зависит от K , т.е. имеет то же значение, как и в случае обычных твердых упругих сфер. Строгая теория дает [21] величины

$$\eta = \eta_{\text{тв.сф}} (1+K)^2 \frac{1}{1 + \frac{13}{6}K}, \quad \eta_{\text{тв.сф}} = \frac{5}{16} \left(\frac{mkT}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{d^2}.$$

Максимальное отличие η и $\eta_{\text{тв.сф}}$ в интервале значений K составляет $\sim 14\%$. Наблюдаемое различие в результатах связано с тем, что в теории, основанной на квазиклассическом уравнении Ванг-Чанг и Уленбека, предполагается выполнение соотношений симметрии между прямыми и обратными столкновениями, в то время как в рамках классического рассмотрения шероховатых сфер это условие не имеет места [11]. Используя (10.6.2) и (10.6.6), можно также определить величину Z :

$$Z = \frac{4}{10\pi} \frac{6+13K}{K}.$$

Очевидно, наименьшее значение Z в модели шероховатых сфер при $K=2/3$ равно $44/5\pi \approx 2,8$ столкновений.

Модель шероховатых сфер интересна тем, что в ней наиболее ощутимо выражена особенность неупругого процесса (переход поступательной энергии во вращательную) по сравнению с другими

моделями. Более реалистичными, однако, являются модели «нагруженных сфер» [12, 28] и «сфероцилиндров» [9, 29]. В отличие от предыдущей модели, в которой не требуется никаких переменных, определяющих ориентацию молекул в пространстве, в модели нагруженных сфер, например, динамическое состояние молекулы характеризуется помимо переменных $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ еще полярным и азимутальными углами, определяющими ориентацию вектора $\boldsymbol{\xi} = \xi \mathbf{e}$, направленного от центра масс сферы, расположенного на расстоянии ξ от геометрического центра сферы, к самому центру сферы. В силу этого расчет величин $\langle F \rangle$ для указанных моделей существенно усложняется. Достоинством этих моделей является существование обратных столкновений, что позволяет гарантировать полную адекватность результатов, получаемых как в рамках классического рассмотрения, так и на основе выражений (10.4.13)–(10.4.14). В работе Сандлера [30] проведено сравнение результатов расчетов величин $\lambda^{\text{tr}} m / \eta$ и $\lambda^{\text{int}} m / \eta$ для моделей нагруженных сфер и сфероцилиндров с результатами, даваемыми выражениями (10.4.14), если использовать в последних значения Z_{rot} , получаемые в рамках тех же моделей. При этом оказалось, что уже при $Z_{\text{rot}} > 2,5$ результаты вполне удовлетворительно согласуются, если положить $D^{\text{int}} = D_{11}$. Для лучшего согласия при произвольных значениях Z_{rot} предложена [30] приближенная формула вида

$$D_{\text{rot}} = D_{11} \left(1 + \frac{0,27}{Z_{\text{rot}}} - \frac{0,44}{Z_{\text{rot}}^2} - \frac{0,90}{Z_{\text{rot}}^3} \right). \quad (10.6.7)$$

10.7. Теплопроводность молекулярных газов

Оценки предыдущего параграфа показывают, что вклад неупругих столкновений в коэффициенты сдвиговой вязкости и самодиффузии оказывается не очень значительным. Это подтверждается и расчетами для более реалистических потенциалов взаимодействия, проведенными для N_2 и CO с использованием метода классических траекторий [31, 32]. Ситуация оказывается иной в случае теплопроводности двухатомных и многоатомных газов. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Вместо выражения для теплопроводности удобно при этом пользоваться выражением для так называемого фактора Эйкена $f = m\lambda/c_V\eta$. Используя (10.4.13) и (10.4.14), получаем

$$f = \frac{15}{4} \frac{k}{c_V} + \frac{c^{\text{int}}}{c_V} \beta^{\text{int}} - \frac{2}{\pi Z} \frac{c^{\text{int}}}{c_V} \delta^{-1} \left(\frac{5}{2} - \beta^{\text{int}} \right)^2, \quad (10.7.1)$$

где

$$\delta = 1 + \frac{2}{\pi Z} \left(\frac{5}{3} \frac{c^{\text{int}}}{k} + \beta^{\text{int}} \right), \quad \beta^{\text{int}} = \frac{\rho D^{\text{int}}}{\eta}. \quad (10.7.2)$$

Если $Z > 5$, то при практических расчетах часто используется линеаризованное по параметру Z^{-1} выражение для фактора Эйкена [15, 30]

$$f = \frac{15}{4} \frac{k}{c_V} + \frac{c^{\text{int}}}{c_V} \beta^{\text{int}} - \frac{2}{\pi Z} \frac{c^{\text{int}}}{c_V} \left(\frac{5}{2} - \beta^{\text{int}} \right)^2. \quad (10.7.3)$$

При $Z \gg 1$ и $D^{\text{int}} = D_{11}$ это выражение переходит в модифицированную формулу Эйкена [21]

$$f = \frac{15}{4} \frac{k}{c_V} + \frac{c^{\text{int}}}{c_V} \frac{\rho D_{11}}{\eta}. \quad (10.7.4)$$

Существенной особенностью выражений (10.7.2) и (10.7.3) является наличие в них зависимости от числа столкновений Z и коэффициента диффузии внутренней энергии D^{int} . Как уже отмечалось, значения Z могут быть найдены либо из независимых теоретических расчетов, либо из экспериментов по поглощению звука. Дополнительная полезная информация может быть получена из измерений так называемой термомолекулярной разности давлений, возникающей при течении исследуемого газа через капилляр или пористую среду, в которых может быть непосредственно определена величина λ^{tr} [33].

Что касается отношения D^{int}/D_{11} , то для его определения можно воспользоваться формулой (10.6.7), либо при известном Z находить это отношение из сопоставления теоретических и экспериментальных значений фактора Эйкена в определенном диапазоне температур.

Используемые выше выражения для фактора Эйкена относятся к случаю, когда рассматривается лишь один вид внутренних степеней свободы (например, вращательных). Для области температур, где существенно возбуждены колебательные степени свободы молекул, необходима некоторая модернизация выражений, которая была осуществлена в работах [19, 22, 42]. Так, если обеспечены часто выполняемые условия $5 < Z_{\text{rot}} \ll Z_{\text{vib}}$, а также опущены малые члены, пропорциональные числам столкновений Z_{rv} , которые соответствуют процессам с одновременным изменением вращательного и колебательного состояния сталкивающихся молекул, то выражение для фактора Эйкена можно представить в виде

$$f = \frac{15}{4} \frac{k}{c_V} + \frac{c^{\text{rot}}}{c_V} \beta^{\text{rot}} - \frac{2}{\pi Z_{\text{rot}}} \frac{c^{\text{rot}}}{c_V} \left(\frac{5}{2} - \beta^{\text{rot}} \right)^2 + \frac{c^{\text{vib}}}{c_V} \beta^{\text{vib}}, \quad (10.7.5)$$

где

$$c_V = \frac{3}{2} k + c^{\text{rot}} + c^{\text{vib}}, \quad \beta^{\text{rot}} = \frac{\rho D^{\text{rot}}}{\eta}, \quad \beta^{\text{vib}} = \frac{\rho D^{\text{vib}}}{\eta}. \quad (10.7.6)$$

В случае многоатомных молекул, когда возбуждено несколько колебательных мод, формула (10.7.5) допускает простое обобщение. Последний член в (10.7.5) заменяется в этом случае выражением

$$f^{\text{vib}} = \sum_k \frac{\rho D^k}{\eta} \frac{c^k}{c_V}, \quad (10.7.7)$$

где c^k — колебательная теплоемкость k -й моды.

10.8. Явления переноса в многоатомных газовых смесях

Мы вернемся теперь к уравнениям (10.3.9) и (10.3.12)–(10.3.14) для определения величин $\rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha rs}$, $\mathbf{h}_\alpha^{\text{tr}}$ и $\mathbf{h}_\alpha^{\text{int}}$. Вычисление правых частей этих уравнений (моментов относительно интеграла столкновений) с использованием разложения для $f_{\alpha i}$ (10.3.7) позволяет представить их в виде линейных комбинаций моментов функции распределения, фигурирующих в левых частях этих уравнений. Анализ показывает, что порядок величины коэффициентов при соответствующих моментах в правых частях уравнений существенно определяется значениями $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$, $(c_\alpha^{\text{int}}/k) \tau_{\alpha\beta}^{-1}$ и $Z_{\alpha\beta}^{-1} \tau_{\alpha\beta}^{-1}$. Напомним, что $\tau_{\alpha\beta}$ — характерное время между столкновениями молекул сортов α и β определяется выражением

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{n_\beta kT}{\mu_{\alpha\beta} n [D_{\alpha\beta}]_1},$$

а параметр $Z_{\alpha\beta}$ характеризует отношение средней частоты неупругих столкновений молекул α и β к соответствующей частоте упругих столкновений. Рассматривая слабо неоднородные и слабо меняющиеся состояния многоатомной газовой смеси, мы можем в соответствии с условиями (4.3.1) и (10.3.16) пренебречь производными по времени от соответствующих моментов, а также нелинейными членами в левых частях уравнений моментов, как мы это уже делали ранее при анализе соответствующих уравнений для смесей одноатомных газов. Полученная в результате алгебраическая система уравнений для диффузионных скоростей, парциальных тензоров вязких напряжений и приведенных потоков тепла принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_\alpha n_\beta kT}{n [D_{\alpha\beta}]_1} (w_{\alpha r} - w_{\beta r}) = \\ = -pd_{\alpha r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial n_\alpha^\Delta E_\alpha^{\text{tr}}}{\partial x_r} - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \frac{\partial n \Delta E^{\text{tr}}}{\partial x_r} \right) - \left(\frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \frac{\partial \pi_{rs}}{\partial x_s} \right) - \\ - \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \frac{n_\alpha n_\beta kT}{n [D_{\alpha\beta}]_1} \left(\frac{6}{5} C_{\alpha\beta}^* - 1 \right) \left(\frac{h_{\alpha r}^{\text{tr}}}{m_\alpha p_\alpha} - \frac{h_{\beta r}^{\text{tr}}}{m_\beta p_\beta} \right) - \\ - \sum_\beta \frac{n_\alpha n_\beta kT}{n [D_{\alpha\beta}]_1} \left(E_{\alpha\beta}^* \frac{h_{\alpha r}^{\text{int}}}{n_\alpha c_\alpha^{\text{int}} T} - E_{\beta\alpha}^* \frac{h_{\beta r}^{\text{int}}}{n_\beta c_\beta^{\text{int}} T} \right), \quad (10.8.1) \end{aligned}$$

$$-2y_\alpha \varepsilon_{rs} - \frac{4}{5p} \left\{ \frac{\partial q_{\alpha r}^{\text{tr}}}{\partial x_s} \right\} = \sum_\beta H_{\alpha\beta} \frac{\pi_{\beta rs}}{y_\beta}, \quad (10.8.2)$$

$$\begin{aligned} & -y_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_r} - \frac{T}{p} \left(\frac{2}{3} \frac{\partial \pi_{\alpha rs}}{\partial x_s} + \frac{2}{3} \frac{\partial n_\alpha^\Delta E_\alpha^{\text{tr}}}{\partial x_r} \right) - \\ & - \frac{T}{p} \sum_\beta \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \frac{n_\alpha n_\beta kT}{n[D_{\alpha\beta}]_1} \left(\frac{6}{5} C_{\alpha\beta}^* - 1 \right) (w_{\alpha r} - w_{\beta r}) = \\ & = \sum_\beta \Lambda_{\alpha\beta} \frac{h_{\beta r}^{\text{tr}}}{y_\beta} + \sum_\beta \frac{k}{c_\beta^{\text{int}}} \Lambda'_{\alpha\beta} \frac{h_{\beta r}^{\text{int}}}{y_\beta}, \quad (10.8.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -y_\alpha \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} \frac{\partial T}{\partial x_r} - \frac{T}{p} \frac{\partial n_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{int}}}{\partial x_r} - \frac{T}{p} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_\alpha n_\beta kT}{n[D_{\alpha\beta}]_1} E_{\alpha\beta}^* (w_{\alpha r} - w_{\beta r}) = \\ & = \sum_\beta G_{\alpha\beta} \frac{h_{\beta r}^{\text{tr}}}{y_\beta} + \sum_\beta \frac{k}{c_\beta^{\text{int}}} G'_{\alpha\beta} \frac{h_{\beta r}^{\text{int}}}{y_\beta}. \quad (10.8.4) \end{aligned}$$

Коэффициенты $H_{\alpha\beta}$, $\Lambda_{\alpha\beta}$, $\Lambda'_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ и $G'_{\alpha\beta}$ определены выражениями

$$H_{\alpha\alpha} = \frac{y_\alpha}{[\eta_{\alpha\alpha}]_1} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{2y_\alpha y_\beta}{(m_\alpha + m_\beta) n [D_{\alpha\beta}]_1} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{m_\beta}{m_\alpha} A_{\alpha\beta}^* \right), \quad (10.8.5)$$

$$H_{\alpha\beta} = - \frac{2y_\alpha y_\beta}{(m_\alpha + m_\beta) n [D_{\alpha\beta}]_1} \left(1 - \frac{3}{5} A_{\alpha\beta}^* \right), \quad \beta \neq \alpha;$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\alpha} &= \frac{4}{15} \frac{m_\alpha y_\alpha^2}{k [\eta_{\alpha\alpha}]_1} + \frac{4}{25} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{y_\alpha y_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2 k n [D_{\alpha\beta}]_1} \times \\ & \times \left[\frac{15}{2} m_\alpha^2 + \left(\frac{25}{4} - 3B_{\alpha\beta}^* \right) m_\beta^2 + 4A_{\alpha\beta}^* \left(1 + \frac{5}{6} \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} Z_{\alpha\gamma}^{-1} \right) m_\alpha m_\beta \right], \\ \Lambda'_{\alpha\alpha} &= G_{\alpha\alpha} = - \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)} \frac{y_\alpha y_\beta}{k n [D_{\alpha\beta}]_1} \times \\ & \times \left[\frac{4}{5} \frac{m_\alpha}{m_\beta} \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} A_{\alpha\beta}^* \left(L_{\alpha\beta}^* + M_{\alpha\beta}^* \right) Z_{\alpha\beta}^{-1} - F_{\beta\alpha}^* \right] - \\ & - \frac{\pi}{3} \frac{m_\alpha y_\alpha^2}{k [\eta_{\alpha\alpha}]_1} \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} Z_{\alpha\alpha}^{-1}. \quad (10.8.6) \end{aligned}$$

$$\Lambda'_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha} = -\frac{m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)} \frac{y_\alpha y_\beta}{kn [D_{\alpha\beta}]_1} \times$$

$$\times \left[\frac{4}{5} \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} A_{\alpha\beta}^* \left(L_{\alpha\beta}^* + M_{\alpha\beta}^* \right) Z_{\alpha\beta}^{-1} - F_{\beta\alpha}^* \right], \quad \beta \neq \alpha, \quad (10.8.7)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta} = -\frac{4}{25} \frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} \frac{y_\alpha y_\beta}{kn [D_{\alpha\beta}]_1} \times$$

$$\times \left[\frac{55}{4} - 3B_{\alpha\beta} - 4A_{\alpha\beta}^* \left(1 + \frac{5}{6} \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} Z_{\alpha\beta}^{-1} \right) \right], \quad \beta \neq \alpha,$$

$$G'_{\alpha\alpha} = \frac{y_\alpha^2}{kn [D_{\alpha\alpha}]_1} \left(\frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} + K_{\alpha\alpha}^* - N_{\alpha\alpha}^* \right) + \frac{\pi}{2} \frac{m_\alpha y_\alpha^2}{k [\eta_{\alpha\alpha}]_1} \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} Z_{\alpha\alpha}^{-1} +$$

$$+ \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{y_\alpha y_\beta}{kn [D_{\alpha\beta}]_1} \left[\frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} + \frac{6}{5} A_{\alpha\beta}^* \frac{m_\alpha}{m_\beta} \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} L_{\alpha\beta}^* Z_{\alpha\beta}^{-1} + K_{\alpha\beta}^* \right],$$

$$G'_{\alpha\beta} = \frac{y_\alpha y_\beta}{kn [D_{\alpha\beta}]_1} \left[\frac{6}{5} \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} A_{\alpha\beta}^* M_{\alpha\beta}^* Z_{\alpha\beta}^{-1} - N_{\alpha\beta}^* \right], \quad \beta \neq \alpha. \quad (10.8.8)$$

Входящие в эти выражения коэффициенты $[\eta_{\alpha\alpha}]_1$, $[D_{\alpha\beta}]_1$, $A_{\alpha\beta}^*$, $B_{\alpha\beta}^*$ и $C_{\alpha\beta}^*$ формально определены так же, как и в гл. 5, где рассматривался случай многокомпонентной смеси одноатомных газов (формулы (5.1.9), (5.1.10) и (5.1.13)), с той лишь разницей, что величины $\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r}$, через которые они выражаются, записываются теперь в виде

$$\Omega_{\alpha\beta}^{11} = \langle \zeta^2 - \zeta\zeta' \cos \chi \rangle_{\alpha\beta}, \quad \Omega_{\alpha\beta}^{12} = \langle \zeta^2 (\zeta^2 - \zeta\zeta' \cos \chi) \rangle_{\alpha\beta},$$

$$\Omega_{\alpha\beta}^{13} = \langle \zeta^2 (\zeta^4 - \zeta\zeta'^3 \cos \chi) \rangle_{\alpha\beta}, \quad (10.8.9)$$

$$\Omega_{\alpha\beta}^{22} = \left\langle \zeta^2 (\zeta^2 - \zeta'^2 \cos^2 \chi) - \frac{1}{6} (\Delta \varepsilon_{\alpha\beta})^2 \right\rangle_{\alpha\beta}.$$

Эти величины представляют собой обобщение известных интегралов Чепмена–Каулинга [19] на случай взаимодействия молекул, обладающих внутренними степенями свободы. Остальные величины, фигурирующие в (10.8.6)–(10.8.8), существенно связаны с вкладом неупругих столкновений. Выражения для них имеют следующий вид:

$$A_{\alpha\beta}^* Z_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{5}{8} \frac{k}{c_\alpha^{\text{int}}} \frac{\langle \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle}{\Omega_{\alpha\beta}^{11}},$$

$$\begin{aligned}
E_{\alpha\beta}^* &= \frac{1}{\Omega_{\alpha\beta}^{11}} \left\langle (\varepsilon_{\alpha i} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle) (\zeta^2 - \zeta \zeta' \cos \chi) \right\rangle_{\alpha\beta}, \\
F_{\alpha\beta}^* &= \frac{1}{\Omega_{\alpha\beta}^{11}} \left\langle (\varepsilon_{\alpha i} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle) \left[\frac{2}{5} (\zeta^4 - \zeta \zeta'^3 \cos \chi) - (\zeta^2 - \zeta \zeta' \cos \chi) \right] \right\rangle_{\alpha\beta}, \\
K_{\alpha\beta}^* &= \frac{1}{\Omega_{\alpha\beta}^{11}} \left\{ \left\langle (\varepsilon_{\alpha i} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle) \left[\zeta^2 (\varepsilon_{\alpha i} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle) - \zeta \zeta' (\varepsilon_{\alpha k} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle) \cos \chi \right] \right\rangle_{\alpha\beta} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{c_{\alpha}^{\text{int}}}{k} \left\langle \zeta^2 - \zeta \zeta' \cos \chi \right\rangle_{\alpha\beta} \right\}, \\
N_{\alpha\beta}^* &= \frac{1}{\Omega_{\alpha\beta}^{11}} \left\langle (\varepsilon_{1\beta j} - \langle \varepsilon_{\beta} \rangle) \left[\zeta^2 (\varepsilon_{\alpha i} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle) - \zeta \zeta' (\varepsilon_{\alpha k} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle) \cos \chi \right] \right\rangle_{\alpha\beta}, \\
L_{\alpha\beta}^* &= \frac{\langle \Delta \varepsilon_{\alpha}^2 \rangle_{\alpha\beta}}{\langle \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle_{\alpha\beta}}, \quad M_{\alpha\beta}^* = \frac{\langle \Delta \varepsilon_{\alpha} \Delta \varepsilon_{1\beta} \rangle_{\alpha\beta}}{\langle \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle_{\alpha\beta}}. \quad (10.8.10)
\end{aligned}$$

Здесь $\Delta \varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha k} - \varepsilon_{\alpha i}$ и $\Delta \varepsilon_{1\beta} = \varepsilon_{1\beta \ell} - \varepsilon_{1\beta j}$. Заметим, что в силу условия $L_{\alpha\beta}^* + 2M_{\alpha\beta}^* + L_{\beta\alpha}^* = 1$ имеем $0 \leq L_{\alpha\beta}^* \leq 1$ и $0 \leq M_{\alpha\beta}^* \leq 1$. Коэффициенты $E_{\beta\alpha}^*$ и $F_{\beta\alpha}^*$ получаются из $E_{\alpha\beta}^*$ и $F_{\alpha\beta}^*$ заменой индексов α на β и αi на $1\beta j$.

Уравнения (10.8.1)–(10.8.4) образуют линейные соотношения переноса, описывающие диффузию, вязкость и перенос тепла в многоатомной газовой смеси, а также их взаимосвязь. Они должны быть дополнены уравнениями для величин $n_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}$ и $n_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{int}}$, в которых в соответствии с условиями (10.3.16) также можно опустить нелинейные члены. Однако, в общем случае в этих уравнениях должны быть оставлены производные $d\Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}/dt$ и $d\Delta E_{\alpha}^{\text{int}}/dt$, поскольку порядок правых частей этих уравнений определяется в основном значениями $\tau_{E\alpha\beta}^{-1} \approx Z_{\alpha\beta}^{-1} \tau_{\alpha\beta}^{-1}$ и при $Z_{\alpha\beta} \gg 1$ (замедленный обмен энергии) может оказаться, что $\tau_{E\alpha\beta} \sim \tau_L$. Уравнения релаксации энергии и вытекающие из них выражения для объемной вязкости смеси обсуждаются в следующем параграфе.

При рассмотрении векторных и тензорных свойств переноса вкладом от производных $\partial n_{\gamma} \Delta E_{\gamma}^{\text{tr}} / \partial x_r$ и $\partial n_{\gamma} \Delta E_{\gamma}^{\text{int}} / \partial x_r$, так же как и от $\partial q_{\gamma r}^{\text{tr}} / \partial x_r$ и $\partial q_{\gamma r}^{\text{int}} / \partial x_r$, в соответствующих уравнениях будем пренебрегать. Опустим также производные $\partial \pi_{\gamma rs} / \partial x_r$, учет которых может оказаться важным при учете влияния вязкого переноса импульса на диффузию смеси. Этот вопрос уже обсуждался при рассмотрении смеси одноатомных газов в гл. 5. В случае многоатомных газовых

смесей получаемые в этом случае выражения полностью эквивалентны предыдущим результатам.

Разрешая уравнения (10.8.3) и (10.8.4) относительно $\mathbf{h}_\alpha^{\text{tr}}$ и $\mathbf{h}_\alpha^{\text{int}}$ и подставляя полученные выражения в (10.8.1), приходим к уравнениям диффузии в многоатомной газовой смеси, имеющим формально тот же вид, что и уравнения (5.3.1) или (5.3.5) для смеси одноатомных газов:

$$\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{y_\alpha y_\beta}{[D_{\alpha\beta}]_1} (1 - \Delta_{\alpha\beta}) (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) = -\mathbf{d}_\alpha - k_\alpha^T \nabla \ln T, \quad (10.8.11)$$

где термодиффузионное отношение k_α^T определено как

$$k_\alpha^T = \sum_{\beta} y_\alpha y_\beta \alpha_{\alpha\beta}^T. \quad (10.8.12)$$

Отличие заключается лишь в определении коэффициентов бинарной диффузии $[D_{\alpha\beta}]_1$ и термодиффузионного фактора $\alpha_{\alpha\beta}^T$. При этом величина $[D_{\alpha\beta}]_1 = 3kT/16n\mu_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}^{11}$ отличается определением интегральной величины $\Omega_{\alpha\beta}^{11}$ (10.8.9), а для $\alpha_{\alpha\beta}^T$ имеем [17, 19, 36]

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha\beta}^T [D_{\alpha\beta}]_1 = \frac{1}{k} \left(\frac{6}{5} C_{\alpha\beta}^* - 1 \right) \mu_{\alpha\beta} \left(\frac{\lambda_\beta^{\text{tr}}}{m_\beta n_\beta} - \frac{\lambda_\alpha^{\text{tr}}}{m_\alpha n_\alpha} \right) + \\ + E_{\beta\alpha}^* \frac{\lambda_\beta^{\text{int}}}{n_\beta c_{\beta}^{\text{int}}} - E_{\alpha\beta}^* \frac{\lambda_\alpha^{\text{int}}}{n_\alpha c_{\alpha}^{\text{int}}}. \end{aligned} \quad (10.8.13)$$

Учет внутренних степеней свободы молекул приводит к появлению в выражении для термодиффузионного фактора $\alpha_{\alpha\beta}^T$ дополнительного члена, пропорционального величинам $E_{\alpha\beta}^*$ и $E_{\beta\alpha}^*$. Кроме того, усложняются выражения для парциальных коэффициентов теплопроводности $\lambda_\alpha^{\text{tr}}$ и $\lambda_\alpha^{\text{int}}$. Мы не приводим здесь достаточно сложных выражений для поправочных членов к коэффициентам бинарной диффузии $\Delta_{\alpha\beta}$, которые по сравнению со случаем смеси одноатомных газов также включают добавки, связанные с учетом внутренних степеней свободы молекул.

Выражения для парциальных коэффициентов теплопроводности имеют вид

$$\lambda_\alpha^{\text{tr}} = -y_\alpha \begin{vmatrix} \Lambda_{\beta\gamma} & \Lambda'_{\beta\gamma} & y_\beta \\ G_{\beta\gamma} & G'_{\beta\gamma} & y_\alpha \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} \\ \delta_{\alpha\gamma} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Lambda_{\beta\gamma} & \Lambda'_{\beta\gamma} \\ G_{\beta\gamma} & G'_{\beta\gamma} \end{vmatrix}^{-1}, \quad (10.8.14)$$

$$\lambda_{\alpha}^{\text{int}} = -y_{\alpha} \frac{c_{\alpha}^{\text{int}}}{k} \left| \begin{array}{ccc} \Lambda_{\beta\gamma} & \Lambda'_{\beta\gamma} & y_{\beta} \\ G_{\beta\gamma} & G'_{\beta\gamma} & y_{\alpha} \frac{c_{\alpha}^{\text{int}}}{k} \\ 0 & \delta_{\alpha\gamma} & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \Lambda_{\beta\gamma} & \Lambda'_{\beta\gamma} \\ G_{\beta\gamma} & G'_{\beta\gamma} \end{array} \right|^{-1}. \quad (10.8.15)$$

Для упрощения записи здесь под $\Lambda_{\beta\gamma}$, $\Lambda'_{\beta\gamma}$, $G_{\beta\gamma}$, $G'_{\beta\gamma}$ подразумеваются квадратные блоки порядка N , составленные из соответствующих элементов. Величинами y_{β} , $y_{\beta} \left(c_{\beta}^{\text{int}}/k \right)$ обозначаются столбцы, содержащие N элементов (N — число компонентов смеси).

Выражение для полного потока тепла в многоатомной газовой смеси в соответствии с определением (10.2.20) и решениями уравнений (10.8.3) и (10.8.4) относительно $\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{tr}}$ и $\mathbf{h}_{\alpha}^{\text{int}}$ принимает вид

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \sum_{\alpha} \left(\frac{5}{2} + \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle \right) p_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} + p \sum_{\alpha} k_{T\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}, \quad (10.8.16)$$

где

$$\lambda = \sum_{\alpha} \left(\lambda_{\alpha}^{\text{tr}} + \lambda_{\alpha}^{\text{int}} \right), \quad (10.8.17)$$

а величина $k_{T\alpha}$ определяется выражениями (10.8.12)–(10.8.13).

Что касается тензора вязких напряжений π_{rs} , то решение для него имеет тот же вид, что и для смеси одноатомных газов (5.2.1) с той лишь разницей, что коэффициенты $H_{\alpha\alpha}$ и $H_{\alpha\beta}$, с помощью которых выражается коэффициент вязкости смеси (формула (5.2.4)), записываются через интегральные величины $\Omega_{\alpha\beta}^{11}$ и $\Omega_{\alpha\beta}^{22}$, обобщенные в соответствии с определениями (10.8.9).

Заметим, что для расчета коэффициента вязкости η помимо величин $[\eta_{\alpha\alpha}]_1$ и $[D_{\alpha\beta}]_1$ необходимо знать лишь $A_{\alpha\beta}^*$. Анализ показывает, что неупругие столкновения слабо влияют на $A_{\alpha\beta}^*$, поэтому при конкретных расчетах можно использовать значения этой величины, вычисленной на основе обычных потенциалов взаимодействия для одноатомных молекул. Благодаря этому коэффициент вязкости смеси многоатомных газов, так же как постоянную бародиффузии в вязком потоке, можно в хорошем приближении вычислять с помощью выражений, справедливых для случая смеси одноатомных газов, особенно если использовать при этом экспериментальные значения коэффициента вязкости $\eta_{\alpha\alpha}$ и коэффициента бинарной диффузии $D_{\alpha\beta}$ для реальных многоатомных газов.

Несколько сложнее обстоят дела с расчетами коэффициентов теплопроводности и термодиффузии. Для малых значений параметра $Z_{\alpha\beta}^{-1}$ выражения для коэффициентов $\lambda_{\alpha}^{\text{tr}}$ и $\lambda_{\alpha}^{\text{int}}$ можно заметно упростить линеаризацией по малому параметру, подобно тому, как это делалось при переходе от выражений (10.7.1) к (10.7.3) для простого многоатомного газа. Если $Z_{\alpha\beta} \gg 1$, то можно вообще пренебречь членами

в выражениях для коэффициентов матриц $\Lambda_{\alpha\alpha}$, $\Lambda_{\alpha\beta}$ и $G'_{\alpha\alpha}$ по сравнению с оставленными членами. По-видимому, в этом случае можно считать малыми и введенные выше коэффициенты $E_{\alpha\beta}^*$, $F_{\alpha\beta}^*$, $K_{\alpha\beta}^*$ и $N_{\alpha\beta}^*$, по крайней мере вклад их, как показывают оценки для некоторых простых моделей молекул [15], также убывает с уменьшением относительной роли неупругих столкновений. Показано [15], что эти коэффициенты вообще обращаются в нуль, когда относительная скорость молекул до и после столкновения не зависит от начальных внутренних состояний сталкивающихся частиц (одинаковые дифференциальные сечения столкновений для всех каналов рассеяния). При этих условиях можно положить

$$\Lambda'_{\alpha\alpha} = \Lambda'_{\alpha\beta} = G_{\alpha\alpha} = G'_{\alpha\beta} = 0,$$

$$G'_{\alpha\alpha} = \frac{c_{\alpha}^{\text{int}}}{k} \left[\frac{y_{\alpha}^2}{kn [D_{\alpha\alpha}]_1} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{y_{\alpha} y_{\beta}}{kn [D_{\alpha\beta}]_1} \right]. \quad (10.8.18)$$

При этом $[D_{\alpha\beta}]_1$ и все оставленные в $\Lambda_{\alpha\alpha}$ и $\Lambda_{\alpha\beta}$ величины с точностью до пренебрежимо малого вклада неупругих столкновений совпадают со значениями, рассчитываемыми на основе теории одноатомных газовых смесей. С учетом принятых допущений имеем

$$\lambda_{\alpha}^{\text{tr}} = y_{\alpha} \sum_{\beta=1}^N y_{\beta} \frac{|\Lambda|_{\beta\alpha}}{|\Lambda|}, \quad \lambda_{\alpha}^{\text{int}} = \frac{c_{\alpha}^{\text{int}}}{k} \frac{y_{\alpha}^2}{G'_{\alpha\alpha}}. \quad (10.8.19)$$

Для полного коэффициента теплопроводности $\lambda_{\text{см}}$ в этом приближении получаем

$$\lambda_{\text{см}} = \lambda_{\text{одн}} + \sum_{\alpha} n [D_{\alpha\alpha}]_1 c_{\alpha}^{\text{int}} \left[1 + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{y_{\beta} [D_{\alpha\alpha}]_1}{y_{\alpha} [D_{\alpha\beta}]_1} \right]^{-1}, \quad (10.8.20)$$

где $\lambda_{\text{одн}}$ совпадает с коэффициентом теплопроводности смеси одноатомных газов (5.2.13), а дополнительный член обосновывает предложенное впервые Гиршфельдером [35] выражение для обобщенной поправки Эйкена к теплопроводности многоатомной газовой смеси.

Для рассматриваемого нами случая упрощенные выражения для $\lambda_{\alpha}^{\text{tr}}$ и $\lambda_{\alpha}^{\text{int}}$ (10.8.19) могут использоваться и при расчетах термодиффузионного фактора $\alpha_{\alpha\beta}^T$ на основе выражения (10.8.13). При этом коэффициент $C_{\alpha\beta}^*$ может приближенно определяться на основе моделей взаимодействия для одноатомных молекул. Другой способ основывается на использовании экспериментально измеренной зависимости коэффициента бинарной диффузии $D_{\alpha\beta}$ от температуры. Тогда, как показано в работе [34],

$$\frac{6}{5} C_{\alpha\beta}^* - 1 = \frac{2}{5} \left[2 - \left(\frac{\partial \ln D_{\alpha\beta}}{\partial \ln T} \right) - E_{\alpha\beta}^* - E_{\beta\alpha}^* \right].$$

Знание $E_{\alpha\beta}^*$ и $E_{\beta\alpha}^*$ оказывается существенным и при вычислении той части $\alpha_{\alpha\beta}^T$, которая связана с вкладом $\lambda_{\alpha}^{\text{int}}$ и $\lambda_{\beta}^{\text{int}}$. Для смесей с существенно отличающимися массами молекул компонентов поступательная часть термодиффузионного отношения k_{α}^T оказывается, как правило, много большей, чем та часть, которая связана с вкладами от $E_{\alpha\beta}^*$ и $E_{\beta\alpha}^*$, (если, конечно, величина $(6/5)C_{\alpha\beta}^* - 1$ не обращается в нуль, как это имеет место для так называемых «максвелловских» молекул). Этим объясняется то обстоятельство, что для большинства смесей молекулярных газов расчеты коэффициентов термодиффузии, основанные на формулах, полученных для одноатомных молекул, дают вполне удовлетворительные результаты. Однако, для ряда смесей с близкими или практически совпадающими массами молекул компонентов ($A - \text{CO}_2$, $\text{D}_2 - \text{HT}$ и др.) роль поправок, связанных с неупругими столкновениями молекул, может оказаться весьма значительной. Так в [37, 38] рассматривались расчеты коэффициента термодиффузии для смесей $\text{D}_2 - \text{HT}$, $^4\text{He} - \text{HT}$ и $^3\text{He} - \text{HD}$ с использованием для описания молекул HT и HD модели «нагруженных сфер». Для чисто упругого столкновения молекул теоретический расчет для смеси $\text{D}_2 - \text{HT}$ дает значение $\alpha_T = 2,4 \cdot 10^{-4}$ [37], которое резко расходится с экспериментальным значением $\alpha_{T \text{ эксп}} = 0,023 - 0,028$ [39, 40]. Расчеты на основе модели «нагруженных сфер» [37] показали, что основной вклад в α_T связан в этом случае с той частью выражения (10.8.13), которая определяется неупругими столкновениями молекул, что эквивалентно учету коэффициента $E_{\beta\alpha}^*$ (коэффициент $E_{\alpha\beta}^*$ для рассматриваемого случая тождественно равен нулю). При этом $\alpha_{T \text{ теор}} = 0,052$. Таким образом, учет вклада неупругих столкновений в α_T позволяет устранить расхождение с экспериментальным значением на два порядка величины. Аналогичные расчеты для смесей $^4\text{He} - \text{HT}$ и $^3\text{He} - \text{HD}$ [38] позволили оценить влияние несферичности молекул и разницы в их эффективных диаметрах (размерные эффекты), что также улучшило согласие с экспериментом.

10.9. Релаксация энергии и объемная вязкость смеси

Обратимся теперь к анализу уравнений для скалярных неравновесных параметров $n_{\alpha}\Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}$ и $n_{\alpha}\Delta E_{\alpha}^{\text{int}}$ (10.3.10)–(10.3.11). Как уже отмечалось, коэффициенты при этих параметрах в правых частях соответствующих уравнений моментов могут иметь порядок величины $\tau_{E\alpha\beta}^{-1} \approx Z_{\alpha\beta}^{-1}\tau_{\alpha\beta}^{-1}$, поэтому при $Z_{\alpha\beta} \gg 1$ (или при $\tau_{E\alpha\beta} \gg \tau_{\alpha\beta}$) мы уже не можем (как это делалось ранее в уравнениях для векторных и тензорных параметров) пренебрегать производными по времени от $n_{\alpha}\Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}$ и $n_{\alpha}\Delta E_{\alpha}^{\text{int}}$ в левых частях уравнений по сравнению с членами в правых частях. После исключения из левых частей уравнений производных dn_{α}/dt и dT/dt с помощью уравнений непрерывности и энергии и пренебрежения нелинейными членами (включая дивергенции

от диффузионных и тепловых потоков) уравнения релаксации энергии можно представить в виде

$$n_\alpha \frac{d\Delta E_\alpha^{\text{tr}}}{dt} + \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{c_V} p_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{2}{3} \sum_\beta c_{\alpha\beta} \frac{n_\beta \Delta E_\beta^{\text{tr}}}{y_\beta} + \sum_\beta \frac{k}{c_\beta^{\text{int}}} c'_{\alpha\beta} \frac{n_\beta \Delta E_\beta^{\text{int}}}{y_\beta},$$

$$n_\alpha \frac{d\Delta E_\alpha^{\text{int}}}{dt} + \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{c_V} p_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{2}{3} \sum_\beta d_{\alpha\beta} \frac{n_\beta \Delta E_\beta^{\text{tr}}}{y_\beta} + \sum_\beta \frac{k}{c_\beta^{\text{int}}} d'_{\alpha\beta} \frac{n_\beta \Delta E_\beta^{\text{int}}}{y_\beta}. \quad (10.9.1)$$

Здесь

$$c_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} y_\alpha \sum \frac{2m_\gamma^2}{(m_\alpha + m_\gamma)^2} \left[\frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} \tau_{E\alpha\gamma}^{-1} (1 + \delta_{\alpha\gamma}) + \frac{3}{2} \frac{m_\alpha}{m_\gamma} \tau_{\alpha\gamma}^{-1} (1 - \delta_{\alpha\gamma}) \right] +$$

$$+ (1 - \delta_{\alpha\beta}) y_\alpha \frac{2m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} \left(\frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} \tau_{E\alpha\beta}^{-1} - \frac{3}{2} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \right),$$

$$c'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} y_\alpha \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} \sum \frac{2m_\gamma}{(m_\alpha + m_\gamma)} (L_{\alpha\gamma}^* + M_{\alpha\gamma}^*) \tau_{E\alpha\gamma}^{-1} (1 + \delta_{\alpha\gamma}) +$$

$$+ (1 - \delta_{\alpha\beta}) \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} y_\alpha \frac{2m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)} (L_{\beta\alpha}^* + M_{\alpha\beta}^*) \tau_{E\alpha\beta}^{-1} +$$

$$+ (1 - \delta_{\alpha\beta}) \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} y_\alpha \frac{2m_\alpha}{(m_\alpha + m_\beta)} (L_{\alpha\beta}^* + M_{\alpha\beta}^*) \tau_{E\alpha\beta}^{-1},$$

$$d'_{\alpha\beta} = y_\alpha \frac{c_\alpha^{\text{int}}}{k} \left[\delta_{\alpha\beta} (\tau_{E\alpha\beta}^{-1} + \sum_\gamma 2L_{\alpha\gamma}^* \tau_{E\alpha\gamma}^{-1}) + (1 - \delta_{\alpha\beta}) 2M_{\alpha\beta}^* \tau_{E\alpha\beta}^{-1} \right]. \quad (10.9.2)$$

При этом

$$\tau_{E\alpha\beta}^{-1} = 4n_\beta \frac{k}{c_\alpha^{\text{int}}} \left\langle \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \right\rangle_{\alpha\beta} = \frac{6}{5} A_{\alpha\beta}^* Z_{\alpha\beta}^{-1} \tau_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Для случая легкого обмена энергией между поступательными и внутренними степенями свободы ($Z_{\alpha\beta} \sim 1$) можно пренебречь в уравнениях (10.9.1) производными $d\Delta E_\alpha^{\text{tr}}/dt$ и $d\Delta E_\alpha^{\text{int}}/dt$ по сравнению с членами в правых частях. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений, решение которых дает

выражения для $n_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{tr}}$ и $n_\alpha \Delta E_\alpha^{\text{int}}$. По определению полный тензор напряжений смеси равен

$$P_{rs} = \left(p + \frac{2}{3} n \Delta E^{\text{tr}} \right) \delta_{rs} + \pi_{rs},$$

причем в рассматриваемом нами случае

$$\frac{2}{3} n \Delta E^{\text{tr}} = \frac{2}{3} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{tr}} = -\zeta \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (10.9.3)$$

Здесь ζ — коэффициент объемной вязкости смеси,

$$\zeta = -\frac{p}{c_V} \begin{vmatrix} c_{\alpha\beta}^{00} & \Lambda'_{\beta\gamma} & y_{\alpha} c^{\text{int}} \\ c_{\alpha\beta}^{10} & c_{\alpha\beta}^{11} & y_{\alpha} c_{\alpha}^{\text{int}} \\ y_{\beta} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{\alpha\beta}^{00} & \Lambda'_{\beta\gamma} \\ c_{\alpha\beta}^{10} & c_{\alpha\beta}^{11} \end{vmatrix}^{-1}. \quad (10.9.4)$$

Как и раньше, для упрощения записи здесь под $c_{\alpha\beta}^{mn}$ подразумеваются квадратные блоки порядка N , составленные из соответствующих элементов. Величинами y_{β} , $y_{\beta} c^{\text{int}}$ и $y_{\beta} c_{\beta}^{\text{int}}$ обозначаются столбцы, содержащие N элементов.

Элементы определителей $c_{\alpha\beta}^{mn}$ выражаются с помощью коэффициентов (10.9.2) с точностью до произвольных слагаемых, исчезающих при конкретных вычислениях определителей:

$$c_{\alpha\beta}^{00} = c_{\alpha\beta} - y_{\beta} k_{\alpha}^{(0)}, \quad c_{\alpha\beta}^{01} = c'_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} y_{\beta} \frac{c_{\beta}^{\text{int}}}{k} k_{\alpha}^{(0)},$$

$$c_{\alpha\beta}^{00} = d_{\alpha\beta} + y_{\beta} k_{\alpha}^{(1)}, \quad d_{\alpha\beta}^{01} = d'_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} y_{\beta} \frac{c_{\beta}^{\text{int}}}{k} k_{\alpha}^{(1)}.$$

Вид этих соотношений следует из того, что система уравнений для определения $n_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}$ и $n_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{int}}$ должна быть дополнена условием (10.2.11)

Следует подчеркнуть, что линейное соотношение между $n_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}$ и $\nabla \cdot \mathbf{u}$ имеет место лишь в случае «легкого» обмена энергией между поступательными и внутренними степенями свободы, точнее при выполнении условия $\tau_{E\alpha\beta} \sim \tau_{\alpha\beta} \ll \tau_L$. При $Z_{\alpha\beta} \gg 1$ это условие нарушается, и в уравнениях (10.9.1) следует сохранить производные по времени от соответствующих величин. Заметим, что коэффициенты $c'_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$ и $d'_{\alpha\beta}$ в правых частях этих уравнений имеют порядок $\tau_{E\alpha\beta}^{-1} \approx Z_{\alpha\beta}^{-1} \tau_{\alpha\beta}^{-1}$. Коэффициент $c_{\alpha\beta}$ можно представить в виде $c_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}^D + c_{\alpha\beta}^E$, где $c_{\alpha\beta}^D$ уже не содержит членов пропорциональных $Z_{\alpha\beta}^{-1}$, что соответствует интенсивному обмену энергией между поступательными степенями свободы молекул отдельных компонентов. Поскольку,

однако, $\sum_{\alpha} c_{\alpha\beta}^D = 0$, то в правой части уравнения для $\Delta E^{\text{tr}} = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}$ остаются лишь члены $\sim Z_{\alpha\beta}^{-1} \tau_{\alpha\beta}^{-1}$, которые обеспечивают при $Z_{\alpha\beta} \gg 1$ очень медленный обмен энергией между поступательными степенями свободы смеси как целого и внутренними степенями свободы отдельных компонентов. Комбинируя уравнение для $\Delta E_{\alpha}^{\text{tr}}$ с уравнением для ΔE^{tr} и пренебрегая членами $\sim Z_{\alpha\beta}^{-1}$, приходим к уравнению

$$n_{\alpha} \frac{d(E_{\alpha}^{\text{tr}} - E^{\text{tr}})}{dt} = -\frac{2}{3} \sum_{\beta} n c_{\alpha\beta}^D (E_{\beta}^{\text{tr}} - E^{\text{tr}}).$$

Решение этого уравнения приводит к выводу, что поступательные энергии компонентов E_{α}^{tr} быстро (с характерным временем $\sim \tau_{\alpha\beta}$) релаксируют к общему значению E^{tr} . Поэтому для состояний, удовлетворяющих условию $\tau_{\alpha\beta} \ll \tau_L$, можно положить, что $E_{\alpha}^{\text{tr}} = E^{\text{tr}}$ для всех α , тогда как релаксация E^{tr} к равновесному значению, $E_0^{\text{tr}} = (3/2)kT$, и релаксация всех внутренних энергий компонентов E_{α}^{int} к $E_{\alpha 0}^{\text{int}}$ описывается системой уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta E^{\text{tr}}}{dt} + \frac{c^{\text{int}}}{c_V} kT \nabla \cdot \mathbf{u} &= \sum_{\beta} y_{\beta} \tau_{E\alpha\beta}^{-1} \left(\Delta E_{\beta}^{\text{int}} - \frac{2}{3} \frac{c_{\beta}^{\text{int}}}{k} \Delta E^{\text{tr}} \right), \\ \frac{d\Delta E_{\alpha}^{\text{int}}}{dt} - \frac{c_{\alpha}^{\text{int}}}{c_V} kT \nabla \cdot \mathbf{u} &= -\tau_{E\alpha}^{-1} \left(\Delta E_{\alpha}^{\text{int}} - \frac{2}{3} \frac{c_{\alpha}^{\text{int}}}{k} \Delta E^{\text{tr}} \right), \end{aligned} \quad (10.9.5)$$

где

$$\tau_{E\alpha}^{-1} = \sum_{\gamma} 2L_{\alpha\gamma}^* \tau_{\alpha\gamma}^{-1}.$$

При получении этих уравнений использовано дополнительное предположение, согласно которому «сложные» столкновения, сопровождающиеся переходами по внутреннему спектру для обеих сталкивающихся молекул, происходят значительно реже, чем столкновения с переходом лишь для одной частицы ($M_{\alpha\beta}^* \ll 1$).

Уравнения (10.9.5) вместе с уравнениями сохранения (10.2.17)–(10.2.19) (уравнениями гидродинамики) и линейными соотношениями переноса для диффузионных скоростей, тензора вязких напряжений и потока тепла могут служить основой для описания широкого класса слабо неравновесных состояний газовых смесей и плазмы, нейтральными компонентами которых служат газы, образованные из двухатомных или многоатомных молекул. Условие $Z_{\alpha\beta} \gg 1$ означает, что эти уравнения в большей мере соответствуют случаю колебательно возбужденных молекул. Они могут быть, например, использованы при анализе распространения звука или релаксации за фронтом ударной волны. Если

в газе возбуждены лишь вращательные степени свободы молекул, то надо применять более общие уравнения релаксации (10.9.1). Уравнения релаксационной гидродинамики при одновременном учете как вращательных, так и колебательных степеней свободы молекул можно найти в книге [19].

Приложение I

ОБЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МОМЕНТОВ

Система уравнений моментов или уравнений для коэффициентов $n_\alpha b_{\alpha\beta}^{mn}$, используемая в гл. 4, следует из общей системы уравнений переноса (2.1.9), если положить в них $\psi_\alpha = G_\alpha^{mn}(\mathbf{c}, \gamma_\alpha)$. Ортонормированные тензорные полиномы $G_\alpha^{mn}(\mathbf{c}, \gamma_\alpha)$ с учетом определений (4.2.6) и (4.1.8) можно представить в виде

$$G_\alpha^{mn}(\mathbf{c}, \gamma_\alpha) = (-1^n) n! m_\alpha \gamma_\alpha^{-\left(n + \frac{m}{2}\right)} S_{m+1/2}^n \left(\frac{\gamma_\alpha \mathbf{c}^2}{2} \right) P^{(m)} \left(\gamma_\alpha^{1/2} \mathbf{c} \right). \quad (\text{П.1.1})$$

Поскольку явная зависимость $G_\alpha^{mn}(\mathbf{c}, \gamma_\alpha)$ от координат и времени выражена через переменную $\gamma_\alpha = m_\alpha / kT_\alpha(\mathbf{r}, t)$, в уравнениях (2.1.9) удобно выделить в явной форме производные dT_α/dt и $\partial T_\alpha / \partial x_r$.

Исходная система уравнений моментов записывается тогда как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_\alpha \langle G_\alpha^{mn} \rangle + n_\alpha \langle G_\alpha^{mn} \rangle \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x_\ell} (n_\alpha \langle c_\ell G_\alpha^{mn} \rangle) - \\ - n_\alpha \left[\left\langle \frac{F_{\alpha\ell}}{m_\alpha} \frac{\partial G_\alpha}{\partial c_\ell} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial G_\alpha^{mn}}{\partial c_\ell} \right\rangle \frac{du_\ell}{dt} \right] \times \\ \times n_\alpha \left\langle c_s \frac{\partial G_\alpha^{mn}}{\partial c_r} \right\rangle \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + n_\alpha \gamma_\alpha \left\langle \frac{\partial G_\alpha^{mn}}{\partial \gamma_\alpha} \right\rangle \frac{1}{T_\alpha} \frac{dT_\alpha}{dt} + \\ + n_\alpha \gamma_\alpha \left\langle c_\ell \frac{\partial G_\alpha^{mn}}{\partial \gamma_\alpha} \right\rangle \frac{1}{T_\alpha} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_\ell} = R_\alpha^{mn}. \quad (\text{П.1.2}) \end{aligned}$$

Здесь

$$R_{\alpha}^{mn} = \sum_{\beta} \int G_{\alpha}^{mn} J_{\alpha\beta} d\mathbf{c}, \quad (\text{П.1.3})$$

а операция усреднения $\langle \dots \rangle$ означает, что

$$n_{\alpha} \langle \varphi_{\alpha} \rangle = \int \varphi_{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{c}.$$

Интересующие нас моменты функции распределения или коэффициенты $n_{\alpha} b_{\alpha}^{mn}$ определяются как

$$n_{\alpha} b_{\alpha}^{mn} = n_{\alpha} \langle G_{\alpha}^{mn} \rangle = \int G_{\alpha}^{mn} f_{\alpha} d\mathbf{c}. \quad (\text{П.1.4})$$

Используя разложение (4.1.10) и представление (П.1.1), можно записать разложение функции распределения по полиномам $G_{\alpha}^{mn}(\mathbf{c}, \gamma_{\alpha})$ в виде

$$f_{\alpha} = f_{\alpha}^{(0)} \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} m_{\alpha}^{-2} \gamma_{\alpha}^{2n+m} \sigma_{mn} b_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\mathbf{r}, t) G_{\alpha r_1 \dots r_m}^{mn}(\mathbf{c}_{\alpha}, \gamma_{\alpha}). \quad (\text{П.1.5})$$

Для того чтобы перейти от общих уравнений (П.1.2) к явной записи бесконечной цепочки уравнений для коэффициентов $n_{\alpha} b_{\alpha}^{mn}$ необходимо в левой части этого уравнения выразить функции

$$c_{\ell} G_{\alpha}^{mn}, \quad \frac{\partial G_{\alpha}^{mn}}{\partial c_{\ell}}, \quad c_s \frac{\partial G_{\alpha}^{mn}}{\partial c_r}, \quad \frac{\partial G_{\alpha}^{mn}}{\partial \gamma_{\alpha}}, \quad c_{\ell} \frac{\partial G_{\alpha}^{mn}}{\partial \gamma_{\alpha}}.$$

через линейные комбинации полного набора ортогональных полиномов $G_{\alpha}^{mn}(\mathbf{c}, \gamma_{\alpha})$, а правую часть вычислить, подставляя в формулу для R_{α}^{mn} (П.1.3) разложения для f_{α} и $f_{1\beta}$ в форме (П.1.5).

Преобразуем вначале левую часть уравнения (П.1.2)¹⁾. Это можно сделать, используя приводимые ниже свойства скалярных полиномов Сонина $S_{m+1/2}^n(x)$ и тензорных полиномов $P^{(m)}(\boldsymbol{\xi})$. В частности для полиномов Сонина имеем [1] следующее.

1. Рекуррентное соотношение и повышение порядка по k ,

$$S_k^n(x) = S_{k+1}^n(x) - S_{k+1}^{n-1}(x).$$

2. Производная

$$\frac{d}{dx} S_k^n(x) = -S_{k+1}^{n-1}(x).$$

¹⁾ Применяемый здесь способ преобразования левой части уравнения (П.1.2) принадлежит П.Н. Юшманову.

3. Умножение на аргумент и понижение порядка по k ,

$$xS_k^n(x) = (n+k)S_{k-1}^n(x) - (n+1)S_{k-1}^{n+1}(x).$$

Симметричный неприводимый полином $P^{(m)}(\xi)$ согласно работе Грэда [2] определяется как неприводимая проекция тензорного одночлена $\xi^m = \xi_{r_1}\xi_{r_2}\dots\xi_{r_m}$ и имеет следующий вид:

$$P^{(m)}(\xi) = \sum_{\ell=0}^{[m/2]} \frac{(-2)^\ell (2m-2\ell)! m!}{(2m)!(m-\ell)!} \xi^{m-2\ell} \cdot \delta^\ell \xi^{2\ell},$$

где произведение тензоров означает симметричную сумму по всем различным перестановкам индексов, в частности,

$$\xi \cdot \delta = \xi_\gamma \delta_{s\ell} + \xi_s \delta_{r\ell} + \xi_\ell \delta_{rs}, \quad \delta^2 = \delta_{rs} \delta_{tu} + \delta_{rt} \delta_{su} + \delta_{ru} \delta_{st},$$

$$\xi^2 \cdot \delta = \xi_r \xi_s \delta_{tu} + \xi_s \xi_t \delta_{su} + \xi_r \xi_u \delta_{st} + \xi_s \xi_u \delta_{rt} + \xi_t \xi_u \delta_{rs} + \xi_s \xi_t \delta_{ru}.$$

Используя неприводимость и симметрию $P^{(m)}(\xi)$, можно получить следующие соотношения, которым удовлетворяют эти полиномы.

1. Рекуррентное соотношение

$$P^{(m+1)} = \frac{1}{m+1} \xi P^{(m)} - \frac{2m\xi^2}{(m+1)(4m^2-1)} \delta P^{(m-1)}.$$

2. Свертка с ξ_r ,

$$\xi_r P_r^{(m)} = \frac{m\xi^2}{2m-1} P^{(m-1)}.$$

3. Производная

$$\frac{\partial P^{(m)}}{\partial \xi_r} = \left\{ P^{(m-1)} \delta \right\}_r \equiv \delta_r P^{(m-1)} - \frac{2}{2m-1} \delta P_r^{(m-1)}.$$

4. Умножение на ξ_r ,

$$\xi_r P^{(m)} = P^{(m+1)} + \frac{\xi^2}{2m+1} \left\{ P^{(m-1)} \delta \right\}_r.$$

5. Вторая производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P^{(m)}}{\partial \xi_r \partial \xi_s} &= \left\{ P^{(m)} \delta \delta \right\}_{rs} \equiv \frac{2m+5}{2m+3} \delta_r \delta_s P^{(m)} - \\ &\quad - \frac{2}{2m+3} \delta \delta P^{(m)} + \frac{2(2m+5)}{(2m+3)(2m+1)} \delta \delta P_{rs}^{(m)}. \end{aligned}$$

6. Умножение ξ_s на производную,

$$\xi_s \frac{\partial P^{(m)}}{\partial \xi_r} = \left\{ P_s^{(m)} \delta \right\}_r + \frac{\xi^2}{2m-1} \left\{ P^{(m-2)} \delta \delta \right\}_{rs}.$$

7. Умножение на $\xi_r \xi_s$,

$$\begin{aligned} \xi_r \xi_s P^{(m)} &= P^{(m+2)} + \frac{\xi^2}{2m+3} \delta P^{(m)} - \\ &\quad - \frac{\xi^2}{2m-1} \delta P_{rs}^{(m)} + \frac{\xi^4}{4m^2-1} \left\{ P^{(m-2)} \delta \delta \right\}_{rs}. \end{aligned}$$

Произведение тензоров с индексами означает, что индексы в перестановках и образовании симметричных сумм не участвуют, в частности

$$\xi \delta_r = \xi_s \delta_{rt} + \xi_t \delta_{rs}, \quad \delta_r \delta_s = \delta_{rt} \delta_{su} + \delta_{ru} \delta_{st} \text{ и т. д.}$$

Использование приведенных выше соотношений с учетом определения $G_\alpha^{mn}(\mathbf{c}, \gamma_\alpha)$ позволяет представить выражения, входящие в левые части уравнения (II.1.2), через линейные комбинации полиномов G_α^{mn} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_\alpha^{mn}}{\partial \gamma_\alpha} &= \frac{1}{2\gamma_\alpha^2} n(2m+2n+1) G_\alpha^{m,n-1}, \\ c_s \frac{\partial G_\alpha^{mn}}{\partial \gamma_\alpha} &= \frac{1}{2\gamma_\alpha^2} n(2m+2n+1) \left[G_\alpha^{m+1,n-1} + \frac{n-1}{\gamma_\alpha} G_\alpha^{m+1,n-2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{2m+1} \left(\frac{2m+2n+1}{2\gamma_\alpha} \{ G_\alpha^{m-1,n-1} \delta \}_s + \{ G_\alpha^{m-1,n} \delta \}_s \right) \right], \\ \frac{\partial G_\alpha^{mn}}{\partial c_s} &= n G_\alpha^{m+1,n+1} + \frac{2m+2n+1}{2m+1} \{ G_\alpha^{m-1,n} \delta \}_s, \end{aligned} \quad (\text{II.1.6})$$

$$\begin{aligned} c_s G_\alpha^{mn} &= G_\alpha^{m+1,n} + \frac{n}{\gamma_\alpha} G_\alpha^{m+1,n-1} + \\ &\quad + \frac{2}{2m+1} \left[\frac{2m+2n+1}{2\gamma_\alpha} \{ G_\alpha^{m-1,n} \delta \}_s + \{ G_\alpha^{m-1,n+1} \delta \}_s \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_s \frac{\partial G_\alpha^{mn}}{\partial c_r} &= n G_\alpha^{m+2,n-1} + \frac{n(n-1)}{\gamma_\alpha} G_\alpha^{m+2,n-2} + \\ &\quad + \frac{2n}{2m+3} \delta G_\alpha^{mn} - \frac{2n+2}{2m-1} \delta G_{\alpha rs}^{mn} - \frac{n(2m+2n+1)}{(2m-1)\gamma_\alpha} \delta G_{\alpha rs}^{m,n-1} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2m+2n+1}{4m^2-1} \left[\frac{2m+2n+1}{\gamma_\alpha} \left\{ G_\alpha^{m-2,n} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta} \right\}_{rs} + 2 \left\{ G_\alpha^{m-2,n+1} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta} \right\}_{rs} \right].$$

Получение бесконечной цепочки уравнений для моментов функции распределения (или для коэффициентов $n_\alpha b_\alpha^{mn}$) сводится теперь к тому, чтобы выразить интегралы вида $\langle c_r G_\alpha^{mn} / \partial \gamma_\alpha \rangle$ и т. д. через моменты или коэффициенты $n_\alpha b_\alpha^{mn}$ с другими индексами. Подставляя формулы (П.1.6) в исходное уравнение (П.1.2) и производя интегрирование по скоростям, получаем следующую полную систему уравнений для коэффициентов $n_\alpha b_\alpha^{mn}$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} n_\alpha b_\alpha^{mn} + n_\alpha b_\alpha^{mn} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x_r} \left[n_\alpha \left(b_{\alpha r}^{m+1,n} + \frac{n}{\gamma_\alpha} b_{\alpha r}^{m+1,n+1} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{2m+1} \left(\frac{2m+2n+1}{2\gamma_\alpha} \left\{ n_\alpha b_{\alpha r}^{m-1,n} \boldsymbol{\delta} \right\}_r + \left\{ n_\alpha b_\alpha^{m-1,n+1} \boldsymbol{\delta} \right\}_r \right) \right] - \\ & \quad - \left(n n_\alpha b_{\alpha r}^{m+1,n-1} + \frac{2m+2n+1}{2m+1} \left\{ n_\alpha b_\alpha^{m-1,n} \boldsymbol{\delta} \right\}_r \right) \left(\frac{\langle F_{\alpha r} \rangle}{m_\alpha} - \frac{du_r}{dt} \right) + \\ & \quad + \left\{ n n_\alpha b_{\alpha rs}^{m+2,n-1} + \frac{n(n-1)}{\gamma_\alpha} n_\alpha b_{\alpha rs}^{m+2,n-2} + \frac{2n}{2m+3} \boldsymbol{\delta} n_\alpha b_{\alpha rs}^{mn} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{n(2m+2n+1)}{(2m+3)\gamma_\alpha} \boldsymbol{\delta} n_\alpha b_\alpha^{m,n-1} + n_\alpha b_{\alpha s}^{mn} \delta_r - \right. \\ & \quad - \frac{2n+2}{2m-1} \boldsymbol{\delta} n_\alpha b_{\alpha rs}^{mn} - \frac{n(2m+2n+1)}{(2m-1)\gamma_\alpha} \boldsymbol{\delta} n_\alpha b_{\alpha rs}^{m,n-1} + \frac{2m+2n+1}{4m^2-1} \times \\ & \quad \times \left[\frac{2m+2n+1}{\gamma_\alpha} \left\{ n_\alpha b_\alpha^{m-2,n} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta} \right\}_{rs} + 2 \left\{ n_\alpha b_\alpha^{m-2,n+1} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta} \right\}_{rs} \right] \left. \right\} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \\ & \quad + \frac{n(2m+2n+1)}{2m_\alpha} \left\{ n_\alpha b_\alpha^{m,n-1} \frac{dT_\alpha}{dt} + \left[n_\alpha b_{\alpha r}^{m+1,n-1} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{n-1}{\gamma_\alpha} n_\alpha b_{\alpha r}^{m+1,n-2} + \frac{2}{2m+1} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left(\frac{2m+2n+1}{2\gamma_\alpha} \left\{ n_\alpha b_\alpha^{m-1,n-1} \boldsymbol{\delta} \right\}_r + \left\{ n_\alpha b_\alpha^{m-1,n} \boldsymbol{\delta} \right\}_r \right) \right] \right\} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_r} \Bigg\} = R_\alpha^{mn}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.7})$$

При этом в соответствии с приведенными выше свойствами полиномов $P^{(m)}$ имеем

$$\{b_{\alpha}^{mn} \delta\}_r = \delta_r b_{\alpha}^{mn} - \frac{2}{2m+1} \delta b_{\alpha r}^{mn},$$

$$\begin{aligned} \{b_{\alpha}^{mn} \delta \delta\}_{rs} &= \frac{2m+5}{2m+3} \delta_r \delta_s b_{\alpha r}^{mn} - \frac{2}{2m+3} \delta \delta b_{\alpha}^{mn} + \\ &+ \frac{2(2m+5)}{(2m+3)(2m+1)} \delta \delta b_{\alpha rs}^{mn}. \end{aligned}$$

Уравнения (II.1.7) могут быть заметно упрощены для случая слабо-неравновесных и состояний плазмы, когда ее параметры медленно меняются за времена и на длинах порядка характерных времен и длин среднего свободного пробега частиц между столкновениями. На практике это соответствует возможности пренебрежения в левых частях уравнений всеми нелинейными членами, включающими произведения моментов (или коэффициентов $n_{\alpha} b_{\alpha}^{mn}$) на малые градиенты соответствующих гидродинамических переменных, а также малые градиенты потенциала (слабые внешние поля). В результате упрощенная система уравнений моментов принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_{\alpha} b_{\alpha}^{mn} + n_{\alpha} b_{\alpha}^{mn} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x_r} \left[\left(n_{\alpha} b_{\alpha r}^{m+1, n} + \frac{n}{\gamma_{\alpha}} n_{\alpha} b_{\alpha r}^{m+1, n+1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{2m+1} \left(\frac{2m+2n+1}{2\gamma_{\alpha}} \{n_{\alpha} b_{\alpha r}^{m-1, n} \delta\}_r + \{n_{\alpha} b_{\alpha}^{m-1, n+1} \delta\}_r \right) \right] + \\ + \rho_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{m0} \delta_{n0} - \rho_{\alpha} \left(\frac{F_{\alpha r}}{m_{\alpha}} - \frac{du_r}{dt} \right) \delta_{m1} \delta_{n0} + \\ + 2p_{\alpha} \varepsilon_{rs} \delta_{m2} \delta_{n0} + p_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{m0} \delta_{n1} + \\ + \frac{3}{2} n_{\alpha} \frac{dT_{\alpha}}{dt} \delta_{m0} \delta_{n1} + \frac{5}{2} \frac{p_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x_r} \delta_{m1} \delta_{n1} - n_{\alpha} b_{\alpha s}^{mn} e_{rst} \omega_{\alpha t} \delta_r = R_{\alpha}^{mn}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.8})$$

При тех же предположениях правые части уравнений моментов вычисляются с сохранением линейных по моментам членами, что позволяет представить R_{α}^{mn} как

$$R_{\alpha}^{mn} = - \sum_{\beta} \sum_k (A_{\alpha\beta}^{mnk} n_{\alpha} b_{\alpha}^{mn} + B_{\alpha\beta}^{mnk} n_{\beta} b_{\beta}^{mn}). \quad (\text{II.1.9})$$

Выражения для коэффициентов $A_{\alpha\beta}^{mnk}$ и $B_{\alpha\beta}^{mnk}$ будут получены ниже.

При дальнейшем упрощении уравнений моментов в левой их части можно опустить производные $dn_\alpha b_\alpha^{mn}/dt$ по сравнению с соответствующими членами в правой части (П.1.8), а также члены с производными по координате от коэффициентов $n_\alpha b_\alpha^{mn}$. Процедура подобного упрощения уже обсуждалась в гл. 4. Там же показывается, что уравнения (П.1.8) могут быть получены также на основе кинетического уравнения, линейризованного около локального максвелловского распределения. В результате принятых упрощений линейризованная система уравнений для определения $n_\alpha b_\alpha^{mn}$ принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\rho_\alpha}{dt} + \rho_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \delta_{m0} \delta_{n0} - \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_r} - n_\alpha \langle F_{\alpha r}^* \rangle \right) \delta_{m1} \delta_{n0} + \\ & + \left(\frac{3}{2} n_\alpha \frac{dT_\alpha}{dt} + p_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \delta_{m0} \delta_{n1} + 2p_\alpha \varepsilon_{rs} \delta_{m1} \delta_{n0} + \frac{5}{2} \frac{p_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_r} \delta_{m1} \delta_{n1} - \\ & - n_\alpha b_{\alpha s}^{mn} \varepsilon_{rst} \omega_{\alpha t} \delta_r = - \sum_\beta \sum_k (A_{\alpha\beta}^{mnk} n_\alpha b_\alpha^{mn} + B_{\alpha\beta}^{mnk} n_\beta b_\beta^{mn}). \quad (\text{П.1.10}) \end{aligned}$$

Уравнения (П.1.10) с $m = 0$ соответствуют обычным уравнениям непрерывности ($n = 0$) и энергии ($n = 1$), записанным в приближении Эйлера. При $m = 1$ из (П.1.10) следует связанная система уравнений для определения диффузионных скоростей и приведенных потоков тепла компонентов, а при $m = 2$ — уравнения для определения парциальных тензоров вязких напряжений, которые рассматриваются в гл. 4

Обратимся теперь к вычислению правой части уравнений (П.1.8). Представив функцию распределения f_α как $f_\alpha = f_\alpha^{(0)}(1 + \phi_\alpha)$, $|\phi_\alpha| \ll 1$, можно записать выражение для R_α^{mn} в виде

$$R_\alpha^{mn} = \sum_\beta \int \int G_\alpha^{mn} f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(0)} (\phi'_\alpha + \phi'_{1\beta} - \phi_\alpha - \phi_{1\beta}) g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{v}_{1\beta}, \quad (\text{П.1.11})$$

где пренебрегается квадратичными по $\phi_\alpha, \phi_{1\beta}$ членами.

Подставляя в (П.1.11) значения $\phi_\alpha, \phi_{1\beta}$, получаемые из разложения (П.1.4), представим это выражение как

$$\begin{aligned} R_\alpha^{mn} = & \sum_\beta \sum_k \sum_\ell n_\alpha n_\beta 2^{2\ell} \sigma_{k\ell} \times \\ & \times \left\{ [G^{k\ell}, G^{mn}]'_{\alpha\beta} \frac{\gamma_\alpha^{2\ell+k}}{m_\alpha^2} b_\alpha^{k\ell} + [G^{k\ell}, G^{mn}]''_{\alpha\beta} \frac{\gamma_\beta^{2\ell+k}}{m_\beta^2} \right\}, \quad (\text{П.1.12}) \end{aligned}$$

где вводятся так называемые интегральные скобки от полиномов G_α^{mn} .

Общее определение интегральных скобок имеет вид

$$[F, H]_{\alpha\beta}' = \frac{1}{n_\alpha n_\beta} \int f_\alpha f_{1\beta} (F_\alpha - F_\alpha') H_\alpha g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta},$$

$$[F, H]_{\alpha\beta}'' = \frac{1}{n_\alpha n_\beta} \int f_\alpha f_{1\beta} (F_{1\beta} - F_{1\beta}') H_\alpha g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_{1\beta}.$$

Учитывая представление (П.1.1) для полиномов G_α^{mn} и используя очевидное соотношение

$$[P^{(k)}, P^{(m)}] = \frac{1}{2k+1} [P^{(k)}, P^{(k)}] \delta_{km},$$

приходим к выражению для R_α^{mn} в форме (П.1.9), в котором

$$A_{\alpha\beta}^{mnk} = n_\beta Q_{mnk} \gamma_\alpha^{k-n} \times$$

$$\times \left[S_{m+1/2}^k (W^2) P^{(m)}(\mathbf{W}), S_{m+1/2}^n (W^2) P^{(m)}(\mathbf{W}) \right]_{\alpha\beta}',$$

$$B_{\alpha\beta}^{mnk} = n_\beta Q_{mnk} \frac{m_\alpha}{m_\beta} \left(\frac{\gamma_\chi}{\gamma_\alpha} \right)^{k+m/2} \times$$

$$\times \left[S_{m+1/2}^k (W^2) P^{(m)}(\mathbf{W}), S_{m+1/2}^n (W^2) P^{(m)}(\mathbf{W}) \right]_{\alpha\beta}''.$$

(П.1.13)

Здесь $\mathbf{W} = (m_\alpha/2kT)^{1/2} \mathbf{c}$, а коэффициенты Q_{mnk} определены как

$$Q_{mnk} = \frac{(2m)!(m+k)!n!}{(m!)^2(2m+2k+1)!} 2^{2k+m} (-1)^{n+k}. \quad (\text{П.1.14})$$

Приложение II

ЗНАЧЕНИЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СКОБОК, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛЫ

$$\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r}$$

Ниже приводятся некоторые важнейшие интегральные скобки, выраженные через интегралы $\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r}$ и безразмерные отношения $\mu_\alpha = m_\alpha/(m_\alpha + m_\beta)$ и $\mu_\beta = m_\beta/(m_\alpha + m_\beta)$. Методы их вычисления в любом порядке приближения по числу полиномов Сонина в разложении функции распределения рассматриваются в работах [1, 3, 4].

1. Парциальные интегральные скобки, необходимые для вычисления векторных свойств переноса (диффузия, термодиффузия, теплопроводность)

$$\left[S_{m+1/2}^k (W^2), S_{m+1/2}^n (W^2) \right]_{\alpha\beta}' , \quad n, k = 0, 1, 2;$$

$$n = 0, \quad k = 0, \quad 8\mu_\beta \Omega_{\alpha\beta}^{11};$$

$$n = 0, \quad k = 1, \quad 8\mu_\beta^2 \left(\frac{5}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{11} - \Omega_{\alpha\beta}^{13} \right);$$

$$n = 1, \quad k = 1; \quad 8\mu_\beta \left[\frac{5}{4} \left(6\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 \right) \Omega_{\alpha\beta}^{11} - \right. \\ \left. - 5\mu_\beta^2 \Omega_{\alpha\beta}^{12} + \mu_\beta^2 \Omega_{\alpha\beta}^{13} + 2\mu_\alpha \mu_\beta \Omega_{\alpha\beta}^{22} \right];$$

$$n = 0, \quad k = 2, \quad 4\mu_\beta^3 \left(\frac{35}{4} \Omega_{\alpha\beta}^{11} - 7\Omega_{\alpha\beta}^{12} + \Omega_{\alpha\beta}^{13} \right);$$

$$n = 1, \quad k = 2, \quad 8\mu_\beta^2 \left[\frac{35}{16} \left(12\mu_\alpha^2 + 5\mu_\beta^2 \right) \Omega_{\alpha\beta}^{11} - \frac{21}{8} (4\mu_\alpha^2 + 5\mu_\beta^2) \Omega_{\alpha\beta}^{12} \right] + \\ + 8\mu_\beta^2 \left(\frac{19}{4} \mu_\beta^2 \Omega_{\alpha\beta}^{13} - \frac{1}{2} \mu_\beta^2 \Omega_{\alpha\beta}^{14} + 7\mu_\alpha \mu_\beta \Omega_{\alpha\beta}^{22} - 2\mu_\alpha \mu_\beta \Omega_{\alpha\beta}^{23} \right);$$

$$\begin{aligned}
 n = 2, \quad k = 2, \quad & 8\mu_\beta \left[\frac{35}{64} \left(40\mu_\alpha^4 + 168\mu_\alpha^2\mu_\beta^2 + 35\mu_\beta^4 \right) \Omega_{\alpha\beta}^{11} - \right. \\
 & \left. - \frac{7}{8} \mu_\beta^2 (84\mu_\alpha^2 + 35\mu_\beta^2) \Omega_{\alpha\beta}^{12} \right] + \\
 & + 8\mu_\beta \left[\frac{1}{8} \mu_\beta^2 \left(108\mu_\alpha^2 + 133\mu_\beta^2 \right) \Omega_{\alpha\beta}^{13} - \frac{7}{2} \mu_\beta^4 \Omega_{\alpha\beta}^{14} + \frac{1}{4} \mu_\beta^4 \Omega_{\alpha\beta}^{15} \right] + \\
 & + 8\mu_\beta \left[\frac{7}{2} \mu_\alpha \mu_\beta \left(4\mu_\alpha^2 + 7\mu_\beta^2 \right) \Omega_{\alpha\beta}^{22} - \right. \\
 & \left. - 14\mu_\alpha \mu_\beta^3 \Omega_{\alpha\beta}^{23} + 2\mu_\alpha \mu_\beta^3 \Omega_{\alpha\beta}^{24} + 2\mu_\alpha^2 \mu_\beta^2 \Omega_{\alpha\beta}^{33} \right];
 \end{aligned}$$

$$\left[S_{m+1/2}^k \left(W^2 \right), S_{m+1/2}^n \left(W^2 \right) \right]''_{\alpha\beta}, \quad n, k = 0, 1, 2;$$

$$n = 0, \quad k = 0, \quad -8\mu_\alpha^{1/2} \mu_\beta^{1/2} \Omega_{\alpha\beta}^{11};$$

$$n = 0, \quad k = 1, \quad -8\mu_\alpha^{3/2} \mu_\beta^{1/2} \left(\frac{5}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{11} - \Omega_{\alpha\beta}^{13} \right);$$

$$n = 1, \quad k = 1, \quad -8\mu_\alpha^{3/2} \mu_\beta^{3/2} \left(\frac{55}{4} \Omega_{\alpha\beta}^{11} - 5\Omega_{\alpha\beta}^{12} + \Omega_{\alpha\beta}^{13} - 2\Omega_{\alpha\beta}^{22} \right);$$

$$n = 0, \quad k = 2, \quad -4\mu_\alpha^{5/2} \mu_\beta^{1/2} \left(\frac{35}{4} \Omega_{\alpha\beta}^{11} - 7\Omega_{\alpha\beta}^{12} + \Omega_{\alpha\beta}^{13} \right);$$

$$\begin{aligned}
 n = 1, \quad k = 2, \quad & -8\mu_\alpha^{5/2} \mu_\beta^{3/2} \left(\frac{595}{16} \Omega_{\alpha\beta}^{11} - \frac{189}{8} \Omega_{\alpha\beta}^{12} + \frac{19}{4} \Omega_{\alpha\beta}^{13} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{14} - 7\Omega_{\alpha\beta}^{22} + 2\Omega_{\alpha\beta}^{33} \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n = 2, \quad k = 2, \quad & -8\mu_\alpha^{5/2} \mu_\beta^{5/2} \left(\frac{8505}{64} \Omega_{\alpha\beta}^{11} - \frac{833}{8} \Omega_{\alpha\beta}^{12} + \frac{241}{8} \Omega_{\alpha\beta}^{13} - \right. \\
 & \left. - \frac{7}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{14} + \frac{1}{4} \Omega_{\alpha\beta}^{15} \right) - \\
 & - 8\mu_\alpha^{5/2} \mu_\beta^{5/2} \left(-\frac{77}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{22} + 14\Omega_{\alpha\beta}^{23} - 2\Omega_{\alpha\beta}^{24} + 2\Omega_{\alpha\beta}^{33} \right);
 \end{aligned}$$

2. Парциальные интегральные скобки, необходимые для вычисления тензорных свойств переноса (вязкость)

$n, k = 0, 1,$

$$\left[S_{5/2}^n (W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right), S_{5/2}^k (W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right) \right]',$$

$$n = 0, \quad k = 0, \quad \frac{16}{3} \mu_\beta \left(5 \mu_\alpha \Omega_{\alpha\beta}^{11} + \frac{3}{2} \mu_\beta \Omega_{\alpha\beta}^{22} \right),$$

$$n = 0, \quad k = 1, \quad \frac{16}{3} \mu_\beta^2 \left[\frac{35}{2} \mu_\alpha \Omega_{\alpha\beta}^{11} - 7 \mu_\alpha \Omega_{\alpha\beta}^{12} + \frac{21}{4} \mu_\beta \Omega_{\alpha\beta}^{22} - \frac{3}{2} \mu_\beta \Omega_{\alpha\beta}^{23} \right];$$

$$\begin{aligned} n = 1, \quad k = 1, \quad & \frac{16}{3} \mu_\beta \left[\frac{1}{4} \mu_\alpha \left(140 \mu_\alpha^2 + 245 \mu_\beta^2 \right) \Omega_{\alpha\beta}^{11} - \right. \\ & - 49 \mu_\alpha \mu_\beta^2 \Omega_{\alpha\beta}^{12} + 8 \mu_\alpha \mu_\beta^2 \Omega_{\alpha\beta}^{13} \Big] + \\ & + \frac{16}{3} \mu_\beta \left[\frac{1}{8} \mu_\beta \left(154 \mu_\alpha^2 + 147 \mu_\beta^2 \right) \Omega_{\alpha\beta}^{22} - \right. \\ & \left. - \frac{21}{2} \mu_\beta^3 \Omega_{\alpha\beta}^{23} + \frac{3}{2} \mu_\beta^3 \Omega_{\alpha\beta}^{24} + 3 \mu_\alpha \mu_\beta^2 \Omega_{\alpha\beta}^{33} \right]; \end{aligned}$$

$$\left[S_{5/2}^n (W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right), S_{5/2}^k (W^2) \left(W_r W_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} W^2 \right) \right]'';$$

$$n = 0, \quad k = 0, \quad -\frac{16}{3} \mu_\alpha \mu_\beta \left(5 \Omega_{\alpha\beta}^{11} - \frac{3}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{22} \right);$$

$$n = 0, \quad k = 1, \quad \frac{16}{3} \mu_\alpha \mu_\beta \left[-\frac{35}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{11} + 7 \Omega_{\alpha\beta}^{12} + \frac{21}{4} \Omega_{\alpha\beta}^{22} - \frac{3}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{23} \right];$$

$$\begin{aligned} n = 1, \quad k = 1, \quad & -\frac{16}{3} \mu_\alpha^2 \mu_\beta^2 \left[\frac{384}{4} \Omega_{\alpha\beta}^{11} - 49 \Omega_{\alpha\beta}^{12} + 8 \Omega_{\alpha\beta}^{13} - \frac{301}{8} \Omega_{\alpha\beta}^{22} + \right. \\ & \left. + \frac{21}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{23} - \frac{3}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{24} + 3 \Omega_{\alpha\beta}^{33} \right]. \end{aligned}$$

Приложение III

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ q^{nk} И p^{nk}

Заметная часть элементов q^{nk} и p^{nk} , используемых для расчета электронных кинетических коэффициентов в главе 6, может быть вычислена с использованием выражений для парциальных интегральных скобок, которые приведены в приложении II ($n, k = 0, 1, 2$ для q^{nk} и $n, k = 0, 1$ для p^{nk}). Ниже приводятся выражения для этих элементов, включая и более высокие приближения $n, k = 3$ для q^{nk} [4], которые выражаются с помощью эффективных поперечных сечений $\overline{Q}_{\alpha\beta}^{\ell r}$. Последние связаны с интегралами $\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r}$ соотношениями

$$\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r} = \left(\frac{kT}{2\pi\mu_{\alpha\beta}} \right)^{1/2} \frac{1}{2} (r+1)! \left[1 - \frac{1+(-1)^\ell}{2(\ell+1)} \right] \overline{Q}_{\alpha\beta}^{\ell r},$$

так что $\overline{Q}_{\alpha\beta}^{11} = \pi d_{\alpha\beta}^2$ для модели твердых упругих сфер. В случае электрон-нейтральных и электрон-ионных взаимодействий можно положить $\mu_{e\beta} \approx m_1$. В приводимых ниже выражениях индекс «1» относится к электронному компоненту, а суммирование по β означает суммирование по всем сортам тяжелых компонентов плазмы (от 2 до N). Напомним, что элементы q^{nk} и p^{nk} симметричны по индексам n и k .

1. Элементы q^{nk}

$$q^{00} = 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \overline{Q}_{1\beta}^{11},$$

$$q^{00} = 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \left(\frac{5}{2} \overline{Q}_{1\beta}^{11} - 3 \overline{Q}_{1\beta}^{12} \right),$$

$$q^{11} = 8\sqrt{2} n_1^2 \overline{Q}_{11}^{22} + 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \left(\frac{25}{4} Q_{1\beta}^{11} - 15 Q_{1\beta}^{12} + 12 \overline{Q}_{1\beta}^{13} \right),$$

$$q^{02} = 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \left(\frac{35}{8} \overline{Q}_{1\beta}^{11} - \frac{21}{2} \overline{Q}_{1\beta}^{12} + 6 \overline{Q}_{1\beta}^{13} \right),$$

$$q^{12} = 8\sqrt{2} n_1^2 \left(\frac{7}{4} \overline{Q}_{11}^{22} - 2 \overline{Q}_{11}^{23} \right) +$$

$$+ 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \left(\frac{175}{16} \overline{Q}_{1\beta}^{11} - \frac{315}{8} \overline{Q}_{1\beta}^{12} + 57 \overline{Q}_{1\beta}^{13} - 30 \overline{Q}_{1\beta}^{14} \right),$$

$$q^{22} = 8\sqrt{2} n_1^2 \left(\frac{77}{16} \overline{Q}_{11}^{22} - 7 \overline{Q}_{11}^{23} + 5 \overline{Q}_{11}^{24} \right) +$$

$$+ 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \left(\frac{1225}{64} \overline{Q}_{1\beta}^{11} - \frac{735}{8} \overline{Q}_{1\beta}^{12} + \frac{399}{2} \overline{Q}_{1\beta}^{13} - 210 \overline{Q}_{1\beta}^{14} + 90 \overline{Q}_{1\beta}^{15} \right),$$

$$q^{03} = 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \left(\frac{105}{16} \overline{Q}_{1\beta}^{11} - \frac{189}{8} \overline{Q}_{1\beta}^{12} + 27 \overline{Q}_{1\beta}^{13} - 10 \overline{Q}_{1\beta}^{14} \right),$$

$$q^{13} = 8\sqrt{2} n_1^2 \left(\frac{63}{32} \overline{Q}_{11}^{22} - \frac{9}{2} \overline{Q}_{11}^{23} + \frac{5}{2} \overline{Q}_{11}^{24} \right) +$$

$$+ 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \left(\frac{525}{32} \overline{Q}_{1\beta}^{11} - \frac{315}{4} \overline{Q}_{1\beta}^{12} + 162 \overline{Q}_{1\beta}^{13} - 160 \overline{Q}_{1\beta}^{14} + 60 \overline{Q}_{1\beta}^{15} \right),$$

$$q^{23} = 8\sqrt{2} n_1^2 \left(\frac{945}{128} \overline{Q}_{11}^{22} - \frac{261}{16} \overline{Q}_{11}^{23} + \frac{125}{8} \overline{Q}_{11}^{24} - \frac{15}{2} \overline{Q}_{11}^{25} \right) +$$

$$+ 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \left(\frac{3675}{128} \overline{Q}_{1\beta}^{11} - \frac{11025}{64} \overline{Q}_{1\beta}^{12} + \frac{1953}{4} \overline{Q}_{1\beta}^{13} - \right.$$

$$\left. - \frac{1505}{2} \overline{Q}_{1\beta}^{14} + 615 \overline{Q}_{1\beta}^{15} - 2100 \overline{Q}_{1\beta}^{16} \right),$$

$$q^{33} = 8\sqrt{2} n_1^2 \left(\frac{14553}{1024} \overline{Q}_{11}^{22} - \frac{1215}{32} \overline{Q}_{11}^{23} + \frac{1565}{32} \overline{Q}_{11}^{24} - \right.$$

$$\left. - \frac{135}{4} \overline{Q}_{11}^{25} + \frac{105}{8} \overline{Q}_{1\beta}^{26} + \overline{Q}_{11}^{27} \right),$$

$$+ 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \left(\frac{11025}{256} \overline{Q}_{1\beta}^{11} - \frac{19845}{64} \overline{Q}_{1\beta}^{12} + \frac{17577}{16} \overline{Q}_{1\beta}^{13} - \right.$$

$$\left. - \frac{4515}{2} \overline{Q}_{1\beta}^{14} + \frac{5535}{2} \overline{Q}_{1\beta}^{15} - 1890 \overline{Q}_{1\beta}^{16} + 560 \overline{Q}_{1\beta}^{17} \right),$$

2. Элементы p^{nk}

$$p^{00} = 8\sqrt{2} n_1^2 \overline{Q}_{11}^{22} + 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \overline{Q}_{1\beta}^{22},$$

$$p^{01} = 8\sqrt{2} n_1^2 \left(\frac{7}{4} \overline{Q}_{11}^{22} - 2\overline{Q}_{11}^{23} \right) + 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \left(7\overline{Q}_{1\beta}^{11} - 8\overline{Q}_{1\beta}^{12} \right),$$

$$p^{11} = 8\sqrt{2} n_1^2 \left(\frac{301}{48} \overline{Q}_{11}^{22} - 7\overline{Q}_{11}^{23} + 5\overline{Q}_{1\beta}^{24} \right) +$$

$$+ 8 \sum_{\beta} n_1 n_{\beta} \left(\frac{147}{16} \overline{Q}_{1\beta}^{22} - 56\overline{Q}_{1\beta}^{23} + 40\overline{Q}_{1\beta}^{24} \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Введение

1. *Чепмен. С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностр. лит., 1960.
2. *Гиришфелдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Иностр. лит., 1962.
3. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
4. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. (*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 10. Физматлит, 2007.)
5. *Балеску Р.* Статистическая механика заряженных частиц. М.: Мир, 1967.
6. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М.: МГУ, 1964.
7. *Силин В.П.* Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971.
8. *Климонтович Ю.Л.* Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975.
9. *Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М.* Кинетика частиц плазмы. М.: Атомиздат, 1969.
10. *Хохштим А., Массель Г.* Вычисление коэффициентов переноса в ионизованных газах // Сб. Кинетические процессы в газах и плазме. с. 126 /Под. ред. А. Хохштива. М.: Атомиздат, 1972.
11. *Митчнер М., Кругер Ч.* Частично ионизованные газы. М.: Мир, 1976.
12. *Grad H.* On the kinetic theory of rarefied gases // Commun. Pure and Appl. Math. 1949. V. 2, № 4. P. 331.
13. *Грэд Г.* Кинетическая теория газов // Сб. Термодинамика газов. с. 5. М.: Машиностроение, 1970.

14. *Kolodner I.I.* Moment description of gas mixture. Report NYO-798, New York University, 1957.
15. *Herdan L., Liley B.S.* // *Rev. Mod. Phys.* 1960. V. 32. P. 731.
16. *Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А.* // *ЖЭТФ*. 1962. V. 42. P. 857.
17. *Burgers J.M.* In *Plasma Dynamics* / Ed. F. Clauser. Addison Wesley, Massachusetts, 1960.
18. *Жданов В.М.* // *ПММ*. 1962. Т. 26, Вып. 2. С. 280.
19. *Алиевский М.Я., Жданов В.М.* // *ПМТФ*. 1963. № 5. С. 11.
20. *Everett W.L.* In *Rarefied Gas Dynamics* / Ed. J.A. Laurmanm. New York: Academic Press, 1963.
21. *Suchy K.* In *Rarefied Gas Dynamics* / Ed. J.A. Laurmanm. New York: Academic Press, 1963.

Глава 1

1. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностран. лит., 1960.
2. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
3. *Wang Chang C.S. and Uhlenbeck G.E.* Transport phenomena in polyatomic gases // *Eng. Res. Rept. No. C-681.* (University of Michigan, 1951).
4. *Wang Chang C.S., Uhlenbeck G.E. and de Boer J.* In *Studies in Statistical Mechanics. V. 2.* P. 24 (North-Holland, Amsterdam, 1964) / Ed. J. de Boer and G.E. Uhlenbeck.
5. *Вальдман Л.* Явления переноса в газах при среднем давлении. Сб. Термодинамика газов. С. 169. М.: Машиностроение, 1970.
6. *Snider R.F.* // *J. Chem. Phys.* 1960. V. 32. P. 1051.
7. *Waldmann L.* In *Statistical Mechanics of Equilibrium and Nonequilibrium. V. 2* (North Holland, Amsterdam, 1964).
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1958. (*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Физматлит, 2004.)
9. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
10. *Neynaber R.H.* // *Phys. Rev.* 1961. V. 124. P. 135.
11. *Brode R.B.* // *Rev. Mod. Phys.* 1933. V. 5. P. 257.
12. *Rumsauer C.* // *Ann. Phys.* 1921. V. 64. P. 91.
13. *Golden D.E. and Bundel H.W.* // *Phys. Rev.* 1966. V. 149. P. 58.
14. *Браун С.* Элементарные процессы в плазме газового разряда. М.: Госатомиздат, 1961.
15. *Митчнер М., Кругер Ч.* Частично ионизованные газы. М.: Мир, 1976.

16. *Dalgarno A.* // Phil. Trans. Roy. Soc. (London) 1958. A250, 426.
17. *Мак-Даниэль И., Мэзон Э.* Подвижность и диффузия ионов в газах. М.: Мир, 1976.
18. *Гиришфелдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Иностран. лит., 1962.
19. *Mason E.A., Rice W.E.* // J. Chem. Phys. 1954. V. 22. P. 843.
20. *Dalgarno A.* // Plan. Space Soc. 1961. V. 3. P. 217.
21. *Мак-Даниэль И.* Процессы столкновений в ионизованных газах. М.: Мир, 1967.
22. *Кролл Н., Трайвеллнис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир, 1967.
23. *Liboff R.L.* // Phys. Fluids. 1959. V. 2. P. 40.
24. *Montgomery D.C. and Tidman D.A.* Plasma kinetic theory. New York: McGraw-Hill, 1964.
25. *Rosenbluth M., MacDonald W. and Judd D.* // Phys. Rev. 1957. 107, 1.
26. *Трубников Б.А.* Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме. В сб. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963, Вып. 1, С. 98.
27. *Силин В.П.* Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971.
28. *Landau L.D.* // Phys. Z. der Sowjetunion. 1936. V. 10. P. 154.
29. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М.: МГУ, 1964.
30. *Климонтович Ю.Л.* Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975.
31. *Schram P.* Kinetic theory of gases and plasma. Kluwer, Dordrecht, 1991.
32. *Балеску Р.* Статистическая механика заряженных частиц. М.: Мир, 1967.
33. *Silin V.P.* // Nuclear Fusion.. 1962. V. 2. P. 125.
34. *Горбунов Л.М., Силин В.П.* // ЖТФ. 1964. Т. 34. С. 385.

Глава 2

1. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. (*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 10. Физматлит, 2005.)
2. *Де Гроот С.Р., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. (*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 5. Физматлит, 2005.)

4. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностран. лит., 1960.
5. Ферцигер Дж., Канер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
6. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases // *Communs. Pure and Appl. Math.* 1949. V. 2, № 4. P. 331.
7. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. В сб. Вопросы теории плазмы // Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183.
8. Balescu R. Transport processes in plasmas. V. 1. North-Holland, Amsterdam, 1989.
9. Гиришфелдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Иностран. лит., 1962.
10. Жданов В.М., Тирский Г.А. // *ПММ.* 2007. Т. 71. № 5. С. 864.

Глава 3

1. Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М. Кинетика частиц плазмы. М.: Атомиздат, 1969.
2. Хохштим А., Массель Г. Вычисление коэффициентов переноса в ионизованных газах. В сб. Кинетические процессы в газах и плазме, с. 126 / Под. ред. А. Хохштива. М.: Атомиздат, 1972.
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностран. лит., 1960. 510 с.
4. Kihara T., Aono, Itikawa. *Journ. Phys. Soc. Japan.* 1963. V. 18. P. 1043.
5. Kihara T., Aono O. In *Kinetic equation* / Ed. R.L. Liboff, N. Rostoker (Gordon and Breach, 1971).
6. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М.: Иностран. лит., 1959.
7. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. М.: Мир, 1976.
8. Половин Р.В., Черкасова К.П. // *ЖТФ.* 1962. Т. 32. С. 649.
9. Cowling T.G. // *Proc. Roy. Soc.* 1945. 183A, 453.
10. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965.
11. Мак-Даниэль И., Мэзон Э. Подвижность и диффузия ионов в газах. М.: Мир, 1976.
12. Allis V.P. In *Handbuch der Physik*, V. 21 / Ed. S. Flugge (Springer, Berlin, 1956).
13. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1964.

14. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. В сб. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183.
15. Taylor J.B. Phys Fluids. 1964. V. 4. P. 1142.

Глава 4

1. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases // Commun. Pure and Appl. Math. 1949. V. 2, № 4. P. 331.
2. Грэд Г. Кинетическая теория газов. В сб. Термодинамика газов. М.: Машиностроение, 1970. С. 169.
3. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
4. Mintzer D. // Phys. Fluids. 1965. V. 18. P. 1076.
5. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Ферцигер Дж., Канер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
7. Grad H. Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 147.
8. Вальдман Л. Явления переноса в газах при среднем давлении. В сб. Термодинамика газов. М.: Машиностроение, 1970. С. 169.
9. Kolodner I.I. Moment description of gas mixture. Report NYO-798, New York University, (1957).
10. Herdan B.S., Liley // Rev. Mod. Phys. 1960. V. 32. P. 731.
11. Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. P. 857.
12. Жданов В.М. // ПММ. 1962. Т. 26, Вып. 2. С. 280.
13. Алиевский М.Я., Жданов В.М. // ПМТФ. 1963. № 5, 11.
14. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика, М.: Иностран. лит., 1959.
15. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика, М.: Наука, 1962.
16. Sutton G.W., Sherman A. Engineering Magnetohydrodynamics, McGraw-Hill, 1965.
17. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы М.: Мир, 1976.
18. Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М. Кинетика частиц плазмы. М.: Атомиздат. 1969.
19. Grad H. In Proceedings of the 1 RHD Symposium / Ed. F.M. Devienne, Pergamon Press, Oxford (1960).
20. Жданов В.М., Ролдугин В.И. // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. С. 789.
21. Жданов В.М., Тирский Г.А. // ПММ. 2003. Т. 67, вып. 3. С. 406.
22. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. В сб. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183.

23. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. М.: Атомиздат, 1977.

Глава 5

1. Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. Р. 857.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностран. лит., 1960.
3. Гиришфелдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Иностран. лит., 1962.
4. Muckenfuss C. and Curtiss C.F. // J. Chem. Phys. 1958. V. 29. P. 1273.
5. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
6. Де Гроот С.Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
7. Жданов В.М., Ролдугин В.И. // Успехи физических наук. 1998. Т. 168. Р. 407.
8. Жданов В.М., Ролдугин В.И. // ЖЭТФ. 1998. V. 113. Р. 2081.
9. Жданов В.М., Ролдугин В.И. // ЖЭТФ. 2002. V. 122. Р. 789.
10. Monchick L., Munn R.J., Mason E.A. // J. Chem. Phys. 1966. V. 45. P. 3051.
11. Колесников А.Ф., Тирский Г.А. В сб. Молекулярная газодинамика. М.: Наука, 1982. С. 20–44.
12. В.М.Жданов, Г.А.Тирский // ПММ. 2003. V. 67. Вып. 3, Р. 406.
13. Вальдман Л. В сб. Термодинамика газов. М.: Машиностроение, 1970. С. 169–414.
14. Curtiss C.F. // J. Chem. Phys. 1968. V. 49. P. 2917.
15. McCourt F.R.W., Beenakker J.J., Kohler W.E. and Kuscer I. Nonequilibrium Phenomena in Polyatomic Gases. V. 1. (Clarendon Press, Oxford 1990).
16. Kuscer I. // Physica. 1985. A133, 397.

Глава 6

1. Алиевский М.Я., Жданов В.М. // ПМТФ. 1963. № 5. С. 11.
2. Алиевский М.Я., Жданов В.М., Полянский В.А. // ПМТФ. 1964. № 3. С. 32.
3. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. В сб. Вопросы теории плазмы // Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183.
4. Demetriades A.T., Argyropoulos G.S. // Phys. Fluids. 1966. № 9. P. 2136.

5. Полянский В.А. // ПМТФ. 1964. № 5. Т. 11.
6. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
7. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. М.: Мир, 1976.
8. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностр. лит., 1960.
9. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965.
10. Daybelge U. // J. Appl. Phys. 1967. №. 41. P. 2130.
11. Devoto R.S. // Phys. Fluids. 1966. №. 9. P. 1230.
12. Devoto R.S. // Phys. Fluids. 1967. №. 10. P. 354.
13. Devoto R.S. // Phys. Fluids. 1967. №. 10. P. 2105.

Глава 7

1. Жданов В.М. // ПММ. 1962. Т. 26, Вып. 2. С. 280.
2. Алиевский М.Я., Жданов В.М. // ПМТФ. 1963. № 5, 11.
3. Алиевский М.Я., Жданов В.М., Полянский В.А. // ПМТФ. 1964. № 3. С. 32.
4. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. В сб. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183.
5. Herdan L., Liley B.S. // Rev. Mod. Phys. 1960. V. 32. P. 731.
6. Brown S.C. Basic Data of Plasma Physics. M.I.T. Press, 1966.
7. McDaniel E.W. Collision Phenomena in Ionized Gases. New York: John Willey & Sons, 1964.
8. Гиришфелдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Иностр. лит., 1962.

Глава 8

1. Жданов В.М., Юшманов П.Н. // ПМТФ. 1980. № 4. P. 24.
2. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. В сб. Вопросы теории плазмы. Т. 1 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183.
3. Balescu R. Transport processes in plasmas. V. 1. (North Holland, Amsterdam, 1989).
4. Hirshman S.P. // Phys. Fluids. 1977. V. 20. P. 589.
5. Арцимович Л.А. Установки Токамак. Препринт ИАЭ им. И.В. Курчатова. 1974. № 2370.
6. Crussal M. and Schwarzschild M. // Proc. Roy Soc. 1954. 223A, 3548.

7. *Шафранов В.Д.* Равновесие плазмы в магнитном поле. В сб. Вопросы теории плазмы. Т. 2 // Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 2. С. 1.
8. *Pfirsch D. and Schluter A.* Max Planck Institute Rept. 1962. MPI/PA/7/62.
9. *Галеев А.А., Сагдеев Р.З.* Неоклассическая теория диффузии. В сб. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973. Вып. 7. С. 205.
10. *Шафранов В.Д.* // Атомная энергия. 1965. Т. 19. С. 120.
11. *Hinton F.L., Hazeltin R.D.* // Rev. Mod. Phys. 1976. V. 48. P. 239.
12. *Hirshman S.P., Sigmar D.T.* // Nucl. Fusion. 1981. V. 21. P. 1079.
13. *Hazeltin R.D. and Hinton F.L.* // Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 1883.
14. *Rutherford P.H.* // Phys. Fluids. 1974. V. 17. P. 1732.
15. *Жданов В.М., Юшманов П.Н.* // Физика плазмы. 1977. V. 3. P. 1193.
16. *Engelman F. and Nocentini A.* // Nucl. Fusion. 1976. V. 16. P. 694.

Глава 9

1. *Rosa R.J.* Magnetohydrodynamic Energy Conversion. (McGraw-Hill, New York, 1968).
2. *Митчнер М., Кругер Ч.* Частично ионизованные газы. М.: Мир, 1976. 496 с.
3. *Жданов В.М.* // ПМТФ. 1965. № 4. С. 66.
4. *Vonpevier B.* // Arkiv Fys. 1966. V. 33. P. 255.
5. *Жданов В.М., Карчевский А.И., Потанин Е.П., Устинов А.Л.* // ЖТФ. 1979. Т. 49. P. 1879.
6. *Брагинский С.И.* Явления переноса в плазме. В сб. Вопросы теории плазмы. Т. 1 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183.
7. *Жданов В.М., Юшманов П.Н.* // ПМТФ. 1980. № 4. С. 24.
8. *Жданов В.М., Юшманов П.Н.* Физика плазмы. 1977. Т. 3. С. 1193.

Глава 10

1. *Bates D.R., Kingston A.E., Whirter R.V.P.* // Proc. Roy. Soc. 1962. A 267, 297; 1962. A 270, 155.
2. *Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т.* // Успехи физических наук. 1972. Т. 107. С. 353.
3. *Митчнер М., Кругер Ч.* Частично ионизованные газы. М.: Мир, 1976. 496 с.
4. *Snider R.F., Chem J.* // Phys. 1960. V. 32. P. 1051.

5. *Waldmann L.* In *Statistical Mechanics of Equilibrium and Nonequilibrium*, V. 2 (North Holland, Amsterdam, 1964).
6. *McCourt F.R.W., Beenakker J.J., Kohler W.E. and Kuscer I.* *Nonequilibrium Phenomena in Polyatomic Gases* (Clarendon Press, Oxford, V. 1. 1990; V. 2. 1991).
7. *Wang Chang C.S. and Uhlenbeck G.E.* Transport phenomena in polyatomic gases. Eng. Res. Rept. No C-681 (University of Michigan, 1951).
8. *Wang Chang C.S., Uhlenbeck G.E. and deBoer J.* In *Studies in Statistical Mechanics*, V. 2. P. 24 / Ed. J. de Boer and G.E. Uhlenbeck. (North-Holland, Amsterdam, 1964).
9. Каган Ю., Афанасьев А.М. // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 1536.
10. Каган Ю., Максимов Л.А. // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 842.
11. *Condiff D.W., Lu W.K. and Mason E.A., Chem J. // Phys.* 1965. V. 42. P. 3445.
12. *Dahler J.S. and Sather N.F.* *ibid*, 38, 2363 (1963).
13. *Sather N.F. and Dahler J.S.* *ibid*, 43, 1750 (1965).
14. *Monchick L., Yun K.S., Mason E.A., Chem J. // Phys.* 1963. V. 39. P. 654.
15. *Monchick L., Pereira A.N.G., Mason E.A.* *ibid.*, 42, 3241 (1965)
16. Жданов В.М. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 2099.
17. Алиевский М.Я., Жданов В.М. // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. С. 221.
18. *McCormack F.J. // Phys. Fluids.* 1968. V. 11. P. 2553.
19. Жданов В.М., Алиевский М.Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 336 с.
20. *Waldmann L., Trubenbacher E. // Z. Naturforsch.* 1962. 17a, 363.
21. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностр. лит., 1960. 510 с.
22. Алиевский М.Я. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 5.
23. Жданов В.М. // ТБТ. 1977. Т. 15. С. 286.
24. *Herzfeld K.F. and Litovitz T.A.* *Absorption and Dispersion of Ultrasonic Waves.* New York: Academic Press, 1959.
25. *Kohler W.E., Hess S., Waldmann L. // Z. Naturforsch.* 1970. 25a, 336.
26. *Kohler W.E., Shafer J. // J. Chem. Phys.* 1983. V. 78. P. 4682.
27. *Vesovic V., Wakeham W.A. // Int. Rev. in Phys. Chem.* 1992. V. 11. P. 161.
28. *Sandler S.I., Dahler J.S., Chem J. // Phys.* 1965. V. 43. 175j.
29. *Sandler S.I., Dahler J.S., Chem J. // Phys.* 1966. V. 44. P. 1229.
30. *Sandler S.I. // Phys. Fluids.* 1968. V. 11. P. 2546.
31. *Heck E.L., Dickinson A.S. // Molec. Phys.* 1994. V. 81. P 1335.

32. *Heck E.L., Dickinson A.S.* // *Physica* 1995. A217, 107.
33. *Мейсон Э., Малинаускас А.* Перенос в пористых средах — модель запыленного газа. М.: Мир, 1986.
34. *Ahtye W.F.* // *J. Chem. Phys.* 1972. V. 57. P. 5542.
35. *Hirschfelder J.O.* // *J. Chem. Phys.* 1957. V. 26. P. 282.
36. *Monchick L., Munn R.J., Mason E.A.* // *J. Chem. Phys.* 1966. V. 45. P. 3051.
37. *Sather N.F., Dahler J.S.* // *J. Chem. Phys.* 1967. V. 47. P. 4653.
38. *Sather N.F., Mason E.A.* // *J. Chem. Phys.* 1967. V. 47. P. 2621.
39. *Schirdewahn J., Klemm A., Waldmann L.* // *Z. Naturforsch.* 1961. 16a, 133.
40. *Sliker C.J.G.* // *Physica*. 1965. V. 31. P. 1338.

Приложения

1. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностран. лит., 1960. 510 с.
2. *Grad H.*, // *Phys. Fluids*. 1963. V. 6. P. 147.
3. *Ферцигер Дж., Канер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
4. *Devoto R.S.* // *Phys. Fluids*. 1967. V. 10. P. 2105.