

Елизарова Татьяна Геннадьевна

ЛЕКЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
В ДИНАМИКЕ ГАЗА И ЖИДКОСТИ

Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и  
квазигидродинамических уравнений

Москва  
Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова  
2005

УДК 519.633:533.5

**Елизарова Т.Г. Лекции Математические модели и численные методы в динамике жидкости и газа. Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений.** - М.: Физический факультет МГУ, 2005. - 224 с.

Лекции посвящены математическим моделям и основанными на них численным методам решения задач динамики газа и жидкости.

Приведен способ построения двух систем уравнений для описания течений вязкого сжимаемого газа — квазигазодинамической и квазигидродинамической (КГД) систем уравнений. Обе системы тесно связаны между собой и с классической системой уравнений Навье-Стокса. КГД модели могут рассматриваться как обобщение уравнений Навье-Стокса и сводятся к ним при стремлении малого параметра к нулю. Новые модели позволяют расширить возможности классического подхода для численного моделирования течений жидкости и газа. Приведено описание конечно-разностных численных алгоритмов, основанных на КГД уравнениях и примеры численных расчетов.

©Елизарова Т.Г., 2005

©Физический факультет МГУ, 2005

# Оглавление

Введение	6
<b>1 Построение уравнений газовой динамики на основе законов сохранения</b>	<b>10</b>
1.1 Процедура осреднения . . . . .	10
1.2 Интегральные законы сохранения . . . . .	16
1.3 Переход к дифференциальным уравнениям . . . . .	19
1.4 Уравнения Эйлера и Навье–Стокса . . . . .	20
1.5 Квазигазодинамические и квазигидродинамические уравнения . . . . .	24
Историческая справка . . . . .	31
<b>2 Элементы кинетической теории газов</b>	<b>33</b>
2.1 Уравнение Больцмана . . . . .	33
2.2 Равновесная функция распределения и уравнения Эйлера	35
2.3 Уравнения Навье–Стокса . . . . .	36
2.4 Уравнение Бхатнагара–Гросса–Крука . . . . .	37
2.5 Численное моделирование течений разреженного газа . . . .	38
2.6 Метод Монте-Карло . . . . .	40
<b>3 Квазигазодинамические уравнения</b>	<b>43</b>
3.1 Модельное кинетическое уравнение . . . . .	43
3.2 Кинетический вывод КГД уравнений . . . . .	46
3.3 Представление КГД уравнений в виде законов сохранения	48
3.4 Коэффициенты диссипации . . . . .	54
3.5 Уравнения Навье–Стокса как асимптотика КГД системы .	58
<b>4 КГД уравнения и системы координат</b>	<b>62</b>
4.1 Запись КГД уравнений в произвольной системе координат	62
4.2 КГД уравнения в декартовой системе координат . . . . .	66
4.3 КГД уравнения в цилиндрической системе координат . . . .	69

<b>5</b>	<b>Численные алгоритмы решения нестационарных задач газовой динамики</b>	<b>73</b>
5.1	Система уравнений для плоских двумерных течений . . . . .	73
5.2	Система уравнений в цилиндрической геометрии . . . . .	76
5.3	Граничные условия . . . . .	77
5.4	Безразмерный вид уравнений . . . . .	79
5.5	Разностная аппроксимация . . . . .	81
5.6	Введение искусственной диссипации . . . . .	84
5.7	Задача о распаде сильного разрыва . . . . .	86
5.8	Задача о течении в окрестности цилиндра . . . . .	91
5.9	Задача о течении в плоском канале с уступом . . . . .	96
5.10	Численный алгоритм расчета дозвуковых течений . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Алгоритмы решения КГД уравнений на неструктурированных сетках</b>	<b>106</b>
6.1	Сетка и построение контрольного объема . . . . .	106
6.2	Аппроксимация КГД уравнений . . . . .	108
6.3	Аппроксимация частных производных и разностная схема	110
6.4	Аппроксимация граничных условий . . . . .	118
<b>7</b>	<b>Квазигидродинамические уравнения для течений вязкой несжимаемой жидкости</b>	<b>121</b>
7.1	Квазигидродинамическая система уравнений . . . . .	121
7.2	Вычислительный алгоритм . . . . .	124
7.3	Отрывное течение за обратным уступом . . . . .	127
7.4	Тепловая конвекция в квадратной области . . . . .	132
7.5	Тепловая конвекция при низких числах Прандтля . . . . .	136
7.6	Конвекция Марангони в невесомости . . . . .	143
7.7	Течение в кубической каверне с подвижной крышкой . . . . .	146
<b>8</b>	<b>КГДР уравнения для описания течений неравновесного газа</b>	<b>153</b>
8.1	Молекулярная модель и функции распределения . . . . .	153
8.2	Используемые системы координат и некоторые интегралы	155
8.3	Построение моментных уравнений . . . . .	158
8.4	Вычисление обменных членов . . . . .	163
8.5	КГДР уравнения для газа с двумя и тремя вращательными степенями свободы . . . . .	164

8.6	Результаты численного моделирования . . . . .	167
<b>9</b>	<b>КГДМ уравнения для бинарной смеси газов</b>	<b>171</b>
9.1	Исходная кинетическая модель . . . . .	172
9.2	Построение моментных уравнений . . . . .	174
9.3	Вычисление обменных членов . . . . .	178
9.4	Определение частот столкновений . . . . .	179
9.5	Квазигазодинамические уравнения для смеси газов . . . . .	180
9.6	Одножидкостные приближения . . . . .	182
9.7	КГДМ система для одномерного плоско-параллельного течения . . . . .	186
9.8	Структура ударной волны в смеси гелия и ксенона . . . . .	189
9.9	Задача диффузии аргона и гелия . . . . .	198
9.10	Заключение . . . . .	202
	<b>Заключительные замечания</b>	<b>204</b>
	<b>Приложение. Построение КГД уравнений для плоского одномерного течения</b>	<b>206</b>
	Уравнение неразрывности . . . . .	206
	Уравнение импульса . . . . .	207
	Уравнение энергии . . . . .	208
	<b>Список литературы</b>	<b>211</b>

## Введение

Предлагаемый курс лекций посвящен дальнейшему развитию современных методов математического моделирования течений газа и жидкости. Приведены новые модели описания таких течений, названные квазигазодинамическими и квазигидродинамическими (КГД) уравнениями. Демонстрируются эффективные численные алгоритмы их реализации, на основе которых приводятся примеры математического моделирования ряда типичных задач течения газа и жидкости.

Процесс математического моделирования, следуя предложенной А.А. Самарским классификации, состоит из трех взаимосвязанных этапов — модель — алгоритм — программа. Первый этап — это формулировка математической модели, включающей в себя основные математические и физические идеи, положенные в ее основу. Сюда же относится строгое обоснование выбранной модели, которое связано с математическими аспектами доказательств ее внутренней непротиворечивости. В частности, это доказательства теорем существования и единственности решения, анализ свойств выбранной системы уравнений, построение точных и автомодельных решений и их анализ. Вторым этапом является разработка методов численного исследования выбранной модели, которые включают в себя построение вычислительного алгоритма, оценки его точности, устойчивости и сходимости. Последним, третьим этапом представляется написание программных комплексов, их отладка на тестовых задачах, решение конкретных прямых и обратных физических задач и уточнение исходной модели, если это оказывается необходимым.

Все эти три основных этапа отражены в предлагаемом читателю курсе лекций. Излагаются основные идеи, положенные в основу двух новых моделей описания газодинамических течений, которые были названы их авторами квазигазодинамическими и квазигидродинамическими (КГД) уравнениями. Обоснование предложенных математических моделей детально не рассматривается, и здесь автор в основном ограничивается ссылками на результаты других работ. Основное внимание уделено второму этапу — описаны методы численной реализации полученных систем дифференциальных уравнений, которые позволяют проводить математическое моделирование широкого круга течений жидкости и газа. Достаточно подробно затронут и последний, третий этап — приведены

примеры решения конкретных задач, на которых демонстрируется эффективность описанного подхода.

Описание течений газа и жидкости на основе уравнений Навье-Стокса имеет богатую историю. В настоящее время созданы и успешно применяются коммерческие пакеты прикладных программ, реализующие численные алгоритмы решения уравнений Навье-Стокса. Эти программы позволяют моделировать разнообразные прикладные задачи, в частности, рассчитывать двух и трехмерные стационарные и нестационарные течения в областях сложной формы, моделировать течения смесей и химические реакции между их компонентами, в различных приближениях рассчитывать турбулентные течения, ставить разнообразные условия на границах. Однако используемые в них численные алгоритмы нельзя считать совершенными.

В разное время предпринимались многочисленные попытки расширить возможности описания течений, заложенные в системе Навье-Стокса. В частности, было построено следующее по числу Кнудсена приближение для уравнений гидродинамики — уравнения Барнетта. Эти уравнения оказались существенно сложнее системы Навье-Стокса и практически не пригодными для расчетов реальных течений.

Система квазигазодинамических уравнений, расширяющая возможности модели Навье-Стокса, впервые появилась в ходе исследований, выполненных в восьмидесятых годах небольшой группой сотрудников Института прикладной математики АН СССР им. М.В.Келдыша под руководством профессора, а ныне члена-корреспондента Российской Академии Наук, Б.Н.Четверушкина. В самом начале этих исследований в 1982 г. автору посчастливилось включиться в работу, и с его непосредственным участием был выписан первый вариант КГД уравнений. Эти уравнения отличались от классических уравнений динамики газа дополнительными слагаемыми, имеющими вид вторых пространственных производных. Новые модели сразу позволили построить эффективные численные алгоритмы решения задач газовой динамики в рамках уравнений Эйлера, а впоследствии и уравнений Навье-Стокса.

Позднее в работах Ю.В.Шеретова была предложена запись квазигазодинамических уравнений в виде законов сохранения, и построение на основе этих законов родственных им квазигидродинамических уравнений. При этом выводе принципиальным и существенным отличием от теории Навье-Стокса явилось использование процедуры пространствен-

но-временного осреднения для определения основных газодинамических величин - плотности, скорости и температуры. Дополнительное сглаживание по времени привело к появлению в уравнениях дополнительных диссипативных слагаемых, которые формально отличают КГД систему от системы Навье-Стокса.

В области применимости уравнений Навье-Стокса дополнительная диссипация, присутствующая в КГД уравнениях, слабо влияет на решение и обеспечивает устойчивость численного алгоритма. Для течений умеренно-разреженного газа КГД уравнения в ряде случаев позволяют получить решение, которое лучше, чем модель Навье-Стокса, описывает данные эксперимента. Преимущества КГД уравнений были продемонстрированы при численном моделировании нестационарных течений. Алгоритмы для моделирования течений несжимаемой жидкости, построенные на основе КГД модели, оказываются во многих отношениях проще и эффективнее алгоритмов, основанных на уравнениях Навье-Стокса.

В первой главе предлагаемого курса сформулированы общие физические идеи, позволяющие наряду с классической системой уравнений газовой динамики — системой уравнений Навье-Стокса — построить две новые математические модели для описания вязких течений — квазигазодинамическую и квазигидродинамическую (КГД) системы уравнений. Во второй главе приведены некоторые элементы кинетической теории, необходимые для дальнейшего изложения. В третьей главе, которая имеет ключевой характер, приведен способ построения квазигазодинамических уравнений, основанный на использовании кинетической модели специального вида. Здесь же изложен способ записи полученных уравнений в виде законов сохранения и прослежена связь КГД системы с уравнениями Навье-Стокса. Одним из результатов этой главы является получение приближенной формулы для вычисления коэффициента объемной вязкости. В четвертой главе КГД уравнения выписаны для произвольной ортогональной системы координат. Пятая, самая объемная глава, посвящена построению эффективных конечно-разностных алгоритмов решения КГД уравнений для численного моделирования газодинамических течений с использованием ортогональных сеток. Здесь же приведены примеры расчетов сверхзвуковых и дозвуковых нестационарных течений. В шестой главе предложенные алгоритмы обобщаются на случай неструктурированных двумерных пространственных сеток. Седьмая глава посвящена исключительно второй КГД системе — системе

квазигидродинамических уравнений. На основе этих уравнений построены новые алгоритмы для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости и приведены примеры их использования для моделирования двумерных и трехмерных нестационарных течений. В восьмой и девятой главах построены обобщения квазигазодинамических уравнений для расчетов течений газа с неравновесностью между поступательной и вращательной степенями свободы, и уравнения для описания бинарной смеси не реагирующих между собой газов. Эти обобщения строятся на основе специальных кинетических моделей. В приложении в качестве примера приведен детальный вывод квазигазодинамической системы уравнений для плоского одномерного течения.

Данная книга основана на курсе лекций, прочитанных для аспирантов кафедры математики Физического факультета МГУ в осеннем семестре 2004 года. Публикации, послужившие основой данных лекций, приведены в списке литературы.

В проведенных исследованиях в разное время принимали участие Андрей Николаевич Павлов, [Александр Николаевич Антонов], Максим Александрович Антонов, [Андрей Васильевич Лукшин], Ирина Александровна Граур, Ирина Станиславовна Калачинская, Евгений Владимирович Шильников, Семен Викторович Цынков, Леонид Витальевич Косарев, Илья Владимирович Абалакин, Людвиг Вацлавович Дородницын, Дмитрий Борисович Гуров, Аскар Есимкулович Дуйсекулов, Анна Викторовна Ключникова, Иван Анатольевич Широков, Мария Евгеньевна Соколова, Вадим Валерьевич Серегин, Татьяна Алексеевна Кудряшова, Ольга Юрьевна Милюкова, Жан-Клод Ленгран, Амер Шпун, Сальвадор Монтеро, Регина Вебер, которым я глубоко благодарна за сотрудничество.

Я глубоко благодарна Борису Николаевичу Четверушкину, идеи которого послужили основой КГД подхода, и Шеретову Юрию Владимировичу, который предложил теоретическое обоснование и внес определяющий вклад в развитие КГД моделей. Я благодарю Широкова Ивана Анатольевича и Асоцкого Данилу Ивановича за помощь при подготовке данного издания.

Я признательна Александру Андреевичу Самарскому и Алексею Георгиевичу Свешникову за постоянную поддержку этого научного направления.

# Глава 1

## Построение уравнений газовой динамики на основе законов сохранения

В этой главе излагаются физические принципы, положенные в основу вывода уравнений классической газовой динамики и новых КГД уравнений - квазигазодинамической и квазигидродинамической систем. КГД уравнения, также как и уравнения Навье-Стокса, являются следствием интегральных законов сохранения, являются диссипативными и могут быть получены из общей системы уравнений сохранения в дифференциальном виде. Принципиальным и существенным отличием КГД уравнений от уравнений Навье-Стокса является использование процедуры пространственно-временного осреднения для определения основных гидродинамических величин — плотности, скорости и температуры. Использование пространственных средних приводит к системе уравнений Навье-Стокса. Для пространственно-временных средних предложено два варианта замыкания общей системы уравнений, которые приводят к двум КГД системам. Выражения для векторов плотности потока массы, потока тепла и тензора вязких напряжений для КГД систем в этой главе приведены без вывода. Способ построения этих величин для первой КГД системы дается в третьей главе. Обсуждается физический смысл вектора плотности потока массы. Изложение этой главы в основном основано на материалах [7], [8], [26], [29].

### 1.1 Процедура осреднения

Рассмотрим одноатомный газ, состоящий из достаточно большого числа  $N$  атомов-шариков радиуса  $r_0$  и массы  $m_0$ . В евклидовом пространстве  $R^3$  выберем декартову систему координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и время  $t$ .

Движение каждого атома может быть описано уравнениями механики Ньютона. Однако такой подход к моделированию задач газовой динамики оказывается очень далеким от практики, поскольку  $N$  очень велико. Кроме того, возникают проблемы с определением начальных условий задачи и с последующим осреднением получающихся величин, которое

необходимо для вычисления измеряемых величин — плотности, скорости и температуры среды.

В классической гидродинамике используется другой подход, основанный на переходе от большого числа отдельных частиц к сплошной среде с помощью процедур осреднения. Эти процедуры могут быть выбраны по-разному [5], [34].

### 1.1.1 Пространственные средние

В теории Навье–Стокса используются так называемые мгновенные пространственные средние, которые определяются следующим образом.

Пусть  $\Delta V$  — шар радиуса  $R_V$  с центром в точке  $\vec{x}$  (рис. 1.1). Пусть атом находится в шаре, если его центр принадлежит этому шару. Пусть  $N_{\Delta V}(t)$  — число молекул в объеме  $\Delta V$  в момент времени  $t$ . Определим плотность, средний импульс и среднюю энергию единицы объема как

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{m_0}{\Delta V} N_{\Delta V}(t), \quad (1.1.1)$$

$$\vec{I}(\vec{x}, t) = \rho \vec{u} = \frac{m_0}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N_{\Delta V}(t)} \vec{\xi}_i(t), \quad (1.1.2)$$

$$E(\vec{x}, t) = \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) = \frac{m_0}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N_{\Delta V}(t)} \frac{\vec{\xi}_i^2(t)}{2}, \quad (1.1.3)$$

где  $\vec{\xi}_i(t)$  — скорость  $i$ -той частицы в момент времени  $t$ . В приведенных выражениях  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия. Введем температуру  $T$ , которая определяется из выражения

$$\varepsilon = c_v T, \quad (1.1.4)$$

где  $c_v = c_p - \mathcal{R}$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\mathcal{R} = k_B/m_0$  — газовая постоянная,  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16}$  эрг/К — постоянная Больцмана,  $\gamma = c_p/c_v = 5/3$  — показатель адиабаты одноатомного газа.

При изменении  $\Delta V$  значения средних могут изменяться. Примем гипотезу о наличии двух масштабов  $R_{max}$  и  $R_{min}$  таких, что  $R_{max} \gg R_{min}$ , и при фиксированных  $\vec{x}$  и  $t$  при любом  $R_{max} > R_V > R_{min}$  значения указанных средних практически постоянны. Тогда соответствующие средние назовем газодинамическими величинами — плотностью, импульсом

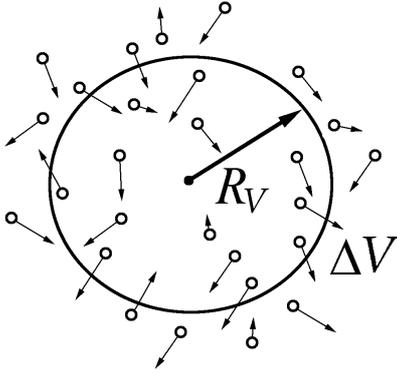


Рис. 1.1: К определению средних величин

и полной энергией. Предположим также, все эти функции являются достаточно гладкими, то есть непрерывно дифференцируемыми столько раз, сколько это потребуется.

### 1.1.2 Пространственно-временные средние

Определим пространственно-временные средние, которые отличаются от определений (1.1.1)–(1.1.3) дополнительным сглаживанием по времени. Для этого введем дополнительно некоторый интервал времени  $\Delta t$  и определим плотность, импульс и энергию единицы объема как

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{m_0}{\Delta V} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} N_{\Delta V}(t') dt', \quad (1.1.5)$$

$$\vec{I}(\vec{x}, t) = \rho \vec{u} = \frac{m_0}{\Delta V} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left( \sum_{i=1}^{N_{\Delta V}(t')} \vec{\xi}_i(t') \right) dt', \quad (1.1.6)$$

$$E(\vec{x}, t) = \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) = \frac{m_0}{\Delta V} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left( \sum_{i=1}^{N_{\Delta V}(t')} \frac{\xi_i^2(t')}{2} \right) dt'. \quad (1.1.7)$$

Предположим далее, что помимо двух пространственных масштабов  $R_{max}$  и  $R_{min}$ , существуют также два временных масштаба  $\Delta t_{max} \gg \Delta t_{min}$ , таких, что при любом  $\Delta t_{max} > \Delta t > \Delta t_{min}$  значения указанных средних практически постоянны. Тогда соответствующие средние можно рассматривать как газодинамические величины — плотность, импульс

и полную энергию. Предположим также, что эти функции достаточно гладкие.

Характерные масштабы сглаживания по пространству и времени определяются средней длиной свободного пробега частиц  $\lambda$  и средним временем между столкновениями частиц  $\tau$ . Например для воздуха при нормальных условиях эти величины составляют  $\lambda \sim 10^{-7}$  см,  $\tau \sim 2.45 \cdot 10^{-10}$  сек. Эти величины связаны между собой через характерную скорость частиц, которая по величине близка к скорости звука  $c_s$ .

Введение дополнительного сглаживания по времени представляется естественным по многим причинам. Действительно, в эксперименте, например, измерение всех газодинамических величин делается за конечное время, что автоматически приводит к сглаживанию по некоторому временному интервалу. Число частиц в малом объеме  $\Delta V$  с прозрачными границами естественным образом меняется на временах порядка  $\tau$  за счет частиц, хаотическим образом пересекающих его границу.

В дальнейшем мы не будем отождествлять мгновенные пространственные и пространственно-временные средние, сохраняя при этом привычные обозначения для всех газодинамических величин. При необходимости будем обозначать мгновенные пространственные средние индексом  $s$ , а пространственно-временные средние индексом  $st$ .

### 1.1.3 Преобразование Галилея

Рассмотрим две системы координат. Пусть  $K^*$  — система координат, движущаяся относительно исходной инерциальной системы координат  $K$  с постоянной скоростью  $\vec{U}$  (рис. 1.2). Тогда координаты материальной точки  $\vec{x}^*$  и время  $t^*$  в  $K^*$  связаны с координатами  $x$  и  $t$  в системе  $K$  соотношениями

$$\vec{x}^* = \vec{x} - \vec{U}(t - t_0), \quad (1.1.8)$$

$$t^* = t. \quad (1.1.9)$$

В момент  $t_0$  обе системы совпадают. Формулы (1.1.8)–(1.1.9) были названы Ф.Франком "преобразованиями Галилея"[9]. Преобразование Галилея сначала было выписано для материальной точки в классической механике Ньютона. При этом существенно использовалась гипотеза (1.1.9) об абсолютности времени.

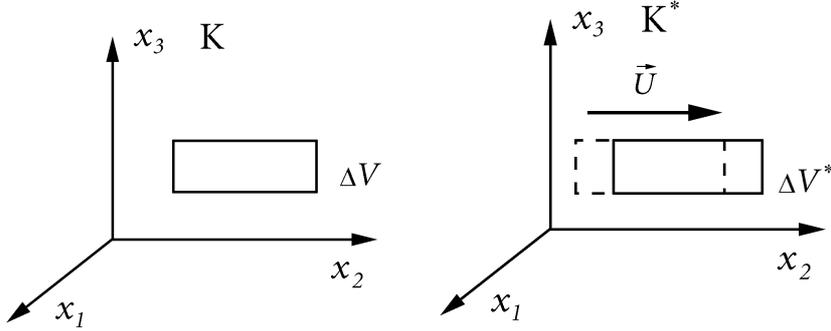


Рис. 1.2: Пространственно–временные средние и преобразование Галилея

Однако для того, чтобы исследовать инвариантность уравнений гидродинамики, формул (1.1.8)–(1.1.9) недостаточно. Необходимо знать еще, как изменяются при переходе от  $K$  к  $K^*$  макроскопические параметры — плотность  $\rho$ , гидродинамическая скорость  $\vec{u}$  и температура  $T$ . Ответ на последний вопрос зависит от используемой процедуры осреднения при определении этих макропараметров.

При использовании мгновенных пространственных средних имеют место равенства

$$\rho_s^* = \rho_s, \quad \vec{u}_s^* = \vec{u}_s - \vec{U}, \quad T_s^* = T_s. \quad (1.1.10)$$

Инвариантность уравнений Навье–Стокса, которые строятся на основе пространственных средних, по отношению к преобразованиям (1.1.8)–(1.1.9) проверяется непосредственно.

Для пространственно-временных средних объемы, по которому проводится осреднение в неподвижной  $\Delta V$  и движущейся  $\Delta V^*$  системах координат, будут различаться. Поэтому равенства (1.1.10) выполняются не точно, а лишь приближенно.

$$\rho_{st}^* \approx \rho_{st}, \quad \vec{u}_{st}^* \approx \vec{u}_{st} - \vec{U}, \quad T_{st}^* \approx T_{st}. \quad (1.1.11)$$

Таким образом, плотность, скорость и температура оказываются относительными и инвариантность по отношению к преобразованиям Галилея нарушается.

Сходная ситуация возникает в релятивистской гидродинамике, где несправедлива гипотеза (1.1.9) об абсолютности времени. Поэтому уравнения релятивистской гидродинамики также не инвариантны относительно преобразования Галилея.

Для существования инвариантности в уравнениях гидродинамики необходимо выполнение двух условий:

- гидродинамических величины определяются как пространственные средние (то есть в неподвижной и подвижной системах координат используется один и тот же объем осреднения, что дает  $\rho = \rho^*$ ),
- абсолютность времени (время одинаково в неподвижной и движущейся системах координат, следовательно  $t = t^*$ ).

Инвариантность нарушается, если не выполняется хотя бы одно из этих двух условий. Для уравнений Навье–Стокса выполнены оба условия. Для уравнений релятивистской механики не выполнено второе условие. Для уравнений, которые строятся на основе пространственно-временных средних, не выполняется первое условие. Обсуждению справедливости преобразования Галилея для уравнений гидродинамики посвящена работа Ю.В. Шеретова [28].

#### 1.1.4 Уравнение неразрывности

В основу гидродинамики положен принцип сохранения массы, или уравнение баланса массы, которое записывается как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0, \quad (1.1.12)$$

где  $\vec{j}_m$  — вектор плотности потока массы. Это уравнение носит название уравнения неразрывности.

Для пространственных средних было показано ([1], [7]), что плотность потока массы равна импульсу единицы объема

$$\vec{j}_{ms} = \rho_s \vec{u}_s,$$

и уравнение (1.1.12) для пространственных средних имеет вид

$$\frac{\partial \rho_s(\vec{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}_s(\vec{x}, t) \rho_s(\vec{x}, t)) = 0. \quad (1.1.13)$$

Покажем, что для пространственно-временных средних уравнение (1.1.13) не выполняется. Действительно, пусть уравнение неразрывности для пространственно-временных средних имеет вид

$$\frac{\partial \rho_{st}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}_{st}(\vec{x}, t) \rho_{st}(\vec{x}, t)) = 0. \quad (1.1.14)$$

Выразим пространственно-временные средние через мгновенные пространственные средние. Используя определения (1.1.1)–(1.1.2), (1.1.5)–(1.1.6) и теорему о среднем, запишем плотность и компоненты импульса  $I$  в виде

$$\rho_{st}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \rho_s(\vec{x}, t') dt' = \rho_s(\vec{x}, t + \theta_1 \Delta t),$$

$$I_{st}^i(x_i, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} I_s^i(x_i, t') dt' = I_s^i(x_i, t + \theta_2^i \Delta t).$$

Здесь  $i = 1, 2, 3$ . Значения чисел  $\theta_1$  и  $\theta_2^i$  принадлежат интервалу  $(0, 1)$  и, вообще говоря, различны. Поскольку  $\vec{I} = \rho \vec{u}$ , то выполнение уравнения (1.1.14) противоречит уравнению (1.1.13).

Отсюда следует, что для пространственно-временных средних плотность потока массы  $\vec{j}_{mst}$  не совпадает с импульсом единицы объема  $\rho_{st} \vec{u}_{st}$ . Это отражает тот факт, что даже за малое время  $\Delta t$  мгновенные значения плотности и импульса единицы объема успевают измениться.

## 1.2 Интегральные законы сохранения

В евклидовом пространстве  $R^3$  выберем инерциальную декартову систему координат  $(x_1, x_2, x_3)$ . Пусть  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  — соответствующий ей ортонормированный базис единичных векторов,  $t$  — время. Будем использовать следующие стандартные обозначения для величин, характеризующих течения сжимаемой вязкой теплопроводной среды:  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$  — плотность среды,  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  — скорость,  $p = p(\vec{x}, t)$  — давление,  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}, t)$  — удельная внутренняя энергия,  $T = T(\vec{x}, t)$  — температура,  $s = s(\vec{x}, t)$  — удельная энтропия.

Предположим, что среда является двухпараметрической, то есть среди пяти термодинамических параметров  $\rho, p, \varepsilon, T, s$  независимы лишь два. При этом заданы уравнения состояния

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T), \quad s = s(\rho, T). \quad (1.2.1)$$

Пусть  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, t)$  — массовая плотность внешних сил. Например, для жидкости, находящейся в гравитационном поле Земли,  $\vec{F} = \vec{g}$ , где  $\vec{g}$  — ускорение свободного падения.

Выделим в области течения ограниченный движущийся материальный объем  $V = V(t)$  с гладкой поверхностью  $\Sigma = \Sigma(t)$ , ориентированной полем внешних единичных нормалей  $\vec{n}$  (рис. 1.3). Будем считать, что объем  $V(t)$  возникает из объема  $V_0 = V(t_0)$ , где  $t_0$  — начальный момент времени, путем непрерывной деформации, обусловленной перемещением частиц  $V_0$  вдоль траекторий, определяемых векторным полем  $\vec{u}$ . Запишем известное тождество Эйлера–Лиувилля [1]:

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi dV = \int_V [D\varphi + \varphi \operatorname{div} \vec{u}] dV = \int_V \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \vec{u}) \right] dV, \quad (1.2.2)$$

в котором  $D = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$  — дифференциальный оператор,  $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$  — некоторое непрерывно дифференцируемое скалярное или векторное поле,  $dV$  — элемент объема в  $R^3$ .

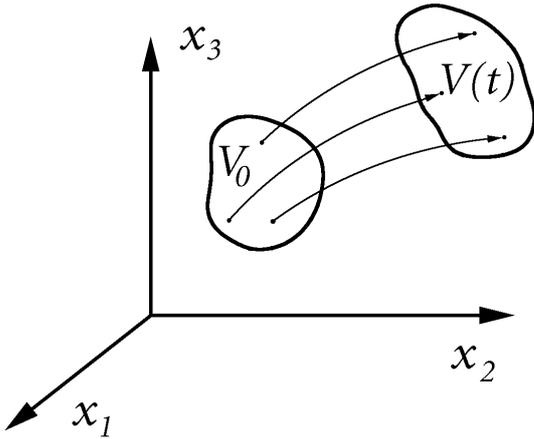


Рис. 1.3: К выводу уравнений сохранения

Пусть в каждой точке  $\vec{x}$  области течения в момент времени  $t$  определен вектор  $\vec{j}_m = \vec{j}_m(\vec{x}, t)$ , называемый плотностью потока массы. Пусть перемещение частиц  $V_0$  вдоль траекторий определяется векторным полем  $\vec{j}_m/\rho$ . Тогда тождество Эйлера–Лиувилля примет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi dV = \int_V \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \vec{j}_m/\rho) \right] dV. \quad (1.2.3)$$

Приведем постулаты, на основе которых будем строить уравнения газовой динамики.

В качестве первого постулата примем закон сохранения массы в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (1.2.4)$$

Вторым постулатом будет служить закон сохранения импульса

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \vec{u}) dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \int \int_{\Sigma} (\vec{n} \cdot P) d\Sigma, \quad (1.2.5)$$

где  $d\Sigma$  — элемент площади поверхности  $\Sigma$  около единичного вектора  $\vec{n}$ . Скорость изменения импульса в объеме  $V$  равна сумме приложенных к нему сил. Первый интеграл в правой части (1.2.5) есть объемная сила, действующая со стороны внешнего поля; второй определяет силы давления и внутреннего вязкого трения, приложенные к поверхности  $\Sigma$ . Величину  $P = P(\vec{x}, t)$  назовем тензором внутренних напряжений. Символ  $(\vec{n} \cdot P)$  обозначает свертку (скалярное произведение) вектора  $\vec{n}$  и тензора второго ранга  $P$ , осуществляемую по первому индексу тензора  $P$ . Соответственно, запись  $(P \cdot \vec{n})$  означает, что свертка  $P$  и  $\vec{n}$  идет с участием второго индекса  $P$ . В случае симметричного тензора  $P$  имеем  $(\vec{n} \cdot P) = (P \cdot \vec{n})$ .

Третьим постулатом является закон сохранения полной энергии

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) dV = \int_V (\vec{j}_m \cdot \vec{F}) dV + \int \int_{\Sigma} (\vec{A} \cdot \vec{n}) d\Sigma - \int \int_{\Sigma} (\vec{q} \cdot \vec{n}) d\Sigma. \quad (1.2.6)$$

Первый интеграл в правой части (1.2.6) равен мощности внешних массовых сил, приложенных к объему  $V$ ; второй интерпретируется как мощность поверхностных сил давления и внутреннего вязкого трения. Последний член в (1.2.6) описывает приток энергии в единицу времени через поверхность  $\Sigma$  за счет процессов теплопроводности. Конкретные выражения для векторных полей  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t)$  и  $\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}, t)$  будут приведены ниже.

Следующий постулат выражает закон сохранения момента импульса:

$$\frac{d}{dt} \int_V [\vec{x} \times (\rho \vec{u})] dV = \int_V [\vec{x} \times \rho \vec{F}] dV + \int \int_{\Sigma} [\vec{x} \times (\vec{n} \cdot P)] d\Sigma. \quad (1.2.7)$$

Он представлен в классической форме. Внутренние моменты, а также распределенные массовые и поверхностные пары не учитываются. Символ  $\times$  используется для обозначения векторного произведения двух векторов.

Второй закон термодинамики, являющийся нашим пятым постулатом, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho s) dV = - \int \int_{\Sigma} \frac{(\vec{q} \cdot \vec{n})}{T} d\Sigma + \int_V X dV. \quad (1.2.8)$$

Поверхностный интеграл в правой части (1.2.8) определяет скорость изменения энтропии в объеме  $V$  за счет теплового потока. Он может быть как положительным, так и отрицательным. Последний интеграл всегда неотрицателен и дает производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов. Величина  $X$  называется производством энтропии.

### 1.3 Переход к дифференциальным уравнениям

Чтобы перейти от интегральных соотношений (1.2.4)–(1.2.8) к соответствующим дифференциальным уравнениям, воспользуемся формулой Эйлера-Лиувилля (1.2.3) о дифференцировании интеграла, взятого по движущемуся материальному объему. При этом будем считать, что все основные макроскопические параметры среды являются достаточно гладкими функциями пространственных координат и времени.

Полагая последовательно  $\varphi = \rho$ ,  $\rho\vec{u}$ ,  $\rho(\vec{u}^2/2 + \varepsilon)$ ,  $[\vec{x} \times \rho\vec{u}]$  и  $\rho s$ , и учитывая произвольность  $V$ , получим дифференциальные уравнения баланса массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0, \quad (1.3.1)$$

импульса

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}_m \otimes \vec{u}) = \rho\vec{F} + \operatorname{div} P, \quad (1.3.2)$$

полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \vec{j}_m \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] = (\vec{j}_m \cdot \vec{F}) + \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \vec{q}, \quad (1.3.3)$$

момента импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{x} \times \rho\vec{u}] + \operatorname{div}(\vec{j}_m \otimes [\vec{x} \times \vec{u}]) = [\vec{x} \times \rho\vec{F}] + \frac{\partial}{\partial x_i} [\vec{x} \times P_{ij}\vec{e}_j] \quad (1.3.4)$$

и энтропии

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}_m s) = -\operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) + X. \quad (1.3.5)$$

Здесь  $(\vec{j}_m \otimes \vec{u})$  – тензор второго ранга, полученный в результате прямого произведения векторов  $\vec{j}_m$  и  $\vec{u}$ . При вычислении дивергенции от тензора второго ранга свертка осуществляется по его первому индексу. В уравнении (1.3.4) символом  $P_{ij}$  обозначен портрет тензора  $P$  в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . По дважды повторяющимся индексам  $i$  и  $j$  идет суммирование.

Покажем, что полученная система уравнений (1.3.1)–(1.3.3) является диссипативной. Предположим, что течение газа происходит в замкнутом сосуде  $V_0$  с непроводящей тепло твердой стенкой  $\Sigma_0$ . Добавим к системе (1.3.1)–(1.3.3) начальные условия

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0, \quad T|_{t=0} = T_0, \quad \vec{x} \in V_0, \quad (1.3.6)$$

а также граничные условия

$$\vec{u}|_{\Sigma_0} = 0, \quad (\vec{j}_m \cdot \vec{n})|_{\Sigma_0} = 0, \quad (\vec{q} \cdot \vec{n})|_{\Sigma_0} = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.3.7)$$

Здесь  $\rho_0 = \rho_0(\vec{x}) > 0$ ,  $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ ,  $T_0 = T_0(\vec{x}) > 0$  — заданные значения плотности, скорости и температуры в момент времени  $t = 0$ . Первое из условий (1.3.7) означает, что газ прилипает к стенкам сосуда; второе — обеспечивает отсутствие потока массы через границу; третье — влечет равенство нулю на  $\Sigma_0$  нормальной составляющей теплового потока. Интегрируя (1.3.5) по объему  $V_0$  и принимая во внимание (1.3.6), (1.3.7), приходим к неравенству

$$\frac{dS(t)}{dt} \geq 0 \quad (1.3.8)$$

для полной термодинамической энтропии  $S(t) = \int_{V_0} \rho s d\vec{x}$ . Из (1.3.8) следует, что величина  $S(t)$  является неубывающей функцией времени.

Система (1.3.1)–(1.3.5) не является замкнутой. Необходимо представить величины  $\vec{j}_m$ ,  $P$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{A}$ ,  $X$  как функции макроскопических параметров среды и их производных. Проблема замыкания может быть решена различными способами.

## 1.4 Уравнения Эйлера и Навье–Стокса

Изложим сначала классический подход, в котором для определения гидродинамических величин используются мгновенные пространственные средние [1], [2], [3]. В этом случае вектор плотности потока массы  $\vec{j}_m$  в любой точке  $(\vec{x}, t)$  совпадает со средним импульсом единицы объема  $\rho \vec{u}$  и первое замыкающее соотношение имеет вид

$$\vec{j}_m = \rho \vec{u}. \quad (1.4.1)$$

Далее вводится представление о силах давления и внутреннего вязкого трения, мгновенно действующих на поверхность материального объема.

Закон движения последнего выбирают таким же, как и в механике твердого тела. Это допущение называют принципом отвердевания. Уравнение баланса момента импульса (1.3.4) является следствием закона сохранения импульса (1.3.2) при условии симметричности тензора напряжений  $P$ . В теории ньютоновских сред для  $P = P_{NS}$  используется выражение

$$P_{NS} = \Pi_{NS} - pI, \quad (1.4.2)$$

где

$$\Pi_{NS} = \eta[(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T - (2/3)I \operatorname{div} \vec{u}] + \zeta I \operatorname{div} \vec{u} \quad (1.4.3)$$

— тензор второго ранга, называемый навье–стоксовским тензором вязких напряжений,  $I$  — единичный тензор-инвариант второго ранга. Верхним индексом  $T$  обозначена операция транспонирования.

Тепловой поток  $\vec{q} = \vec{q}_{NS}$  задается в соответствии с законом Фурье

$$\vec{q} = -\alpha \vec{\nabla} T. \quad (1.4.4)$$

Для идеальных одноатомных газов при малых числах Кнудсена гипотезы (1.4.3), (1.4.4) подтверждаются кинетическим расчетом.

Работу в единицу времени поверхностных сил давления и внутреннего вязкого трения вычисляют по той же формуле, что и в механике твердого тела, а именно

$$\vec{A} = (P_{NS} \cdot \vec{u}). \quad (1.4.5)$$

Считают, что удельная термодинамическая энтропия подчиняется дифференциальному тождеству Гиббса

$$T ds = d\varepsilon + pd(1/\rho). \quad (1.4.6)$$

Уравнение баланса энтропии (1.3.5) может быть получено как следствие законов сохранения массы, импульса и энергии (1.3.2)–(1.3.3), если выбрать величину  $X = X_{NS}$  в виде

$$X = \alpha \left( \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right)^2 + \frac{(\Pi_{NS} : \Pi_{NS})}{2\eta T}, \quad (1.4.7)$$

где  $(\Pi_{NS} : \Pi_{NS}) = \sum_{i,j=1}^3 (\Pi_{NS})_{ij} (\Pi_{NS})_{ij}$  — двойное скалярное произведение двух одинаковых тензоров. Заметим, что правая часть равенства (1.4.7) неотрицательна. Подстановка выражений (1.4.1)–(1.4.5) в уравнения (1.3.1)–(1.3.3) дает классическую систему Навье–Стокса для вязкой сжимаемой теплопроводной среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0, \quad (1.4.8)$$

импульса

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \Pi_{NS}, \quad (1.4.9)$$

полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \rho \vec{u} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \operatorname{div} \vec{q}_{NS} = (\rho \vec{u} \cdot \vec{F}) + \operatorname{div}(\Pi_{NS} \cdot \vec{u}), \quad (1.4.10)$$

Первое соотношение (1.4.8) называется уравнением баланса массы или уравнением неразрывности. Равенства (1.4.9) и (1.4.10) выражают законы сохранения импульса и полной энергии, соответственно.

Система становится замкнутой, если ее дополнить граничными и начальными условиями и уравнениями состояния

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T), \quad (1.4.11)$$

а также выражениями для вычисления положительных коэффициентов динамической вязкости  $\eta$ , второй вязкости  $\zeta$  и теплопроводности  $\varkappa$ .

Для случая идеального политропного газа, состоящего из упругих шариков, зависимости (1.4.11) выбираются в виде

$$p = \rho \mathcal{R} T, \quad \varepsilon = c_v T. \quad (1.4.12)$$

Первое соотношение (1.4.12) называется уравнением Менделеева–Клапейрона, или уравнением состояния идеального газа. Второе соотношение характеризует газ как политропный. В этом случае удельная термодинамическая энтропия выражается формулой

$$s = c_v \ln \left( \frac{\mathcal{R} T}{\rho^{(\gamma-1)}} \right) + \operatorname{const}. \quad (1.4.13)$$

Зависимости  $\eta = \eta(\rho, T)$  и  $\varkappa = \varkappa(\rho, T)$  могут быть найдены либо экспериментально, либо методами кинетической теории газов. Для идеального политропного газа вязкость и теплопроводность зависят только от температуры и могут быть аппроксимированы функциями

$$\eta = \eta_1 \left( \frac{T}{T_1} \right)^\omega, \quad \varkappa = \frac{c_p \eta}{Pr}, \quad (1.4.14)$$

в которых  $\eta_1$  — известное значение коэффициента динамической вязкости при температуре  $T_1$ ,  $\omega$  — заданный показатель температурной зависимости из промежутка  $[0.5, 1]$ ,  $\text{Pr} = 2/3$  — число Прандтля. В простейших случаях коэффициент второй вязкости можно аппроксимировать формулой

$$\zeta = \eta \left( \frac{5}{3} - \gamma \right) \geq 0.$$

Этот коэффициент всегда положителен и связан с наличием внутренних степеней свободы молекулы. Для одноатомного газа  $\gamma = 5/3$  и  $\zeta = 0$ . В противном случае  $5/3 > \gamma > 1$ , и  $\zeta > 0$ . Указанная формула была получена на основе кинетической теории в [6] для газа с вращательными степенями свободы. Эта же формула получается на основе анализа КГД уравнений для произвольного  $\gamma$  (см. с. 50).

Для других сред (например, газа Ван-дер-Ваальса) зависимости (1.4.12) и (1.4.14) могут видоизменяться.

Уравнения (1.4.8)–(1.4.10) являются инвариантными относительно преобразований Галилея. Это соответствует принципу относительности Галилея об одинаковом виде законов движения в различных инерциальных системах отсчета.

Выписанная система уравнений удовлетворяет закону сохранения момента импульса и уравнению баланса энтропии в виде

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} s) = \text{div} \left( \varkappa \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right) + \varkappa \left( \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right)^2 + \frac{\Phi}{T}, \quad (1.4.15)$$

где диссипативная функция

$$\Phi = \frac{(\Pi_{NS} : \Pi_{NS})}{2\eta}. \quad (1.4.16)$$

Вытекающий отсюда закон неубывания полной энтропии в замкнутом адиабатически изолированном объеме указывает на необратимый (диссипативный) характер системы Навье–Стокса.

Производство энтропии связано с диссипативной функцией как

$$X = \varkappa \left( \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right)^2 + \frac{\Phi}{T}.$$

Если в уравнениях (1.4.8)–(1.4.10) пренебречь эффектами вязкости и теплопроводности, то придем к классической системе уравнений Эйлера.

## 1.5 Квазигазодинамические и квазигидродинамические уравнения

Для мгновенных пространственных средних справедливо равенство (1.4.1). Для пространственно–временных средних это равенство в общем случае не выполняется (см. раздел 1.1.4). Возможный выбор величин  $\vec{j}_m$ ,  $P$ ,  $\vec{A}$ ,  $\vec{q}$ ,  $X$  в предположении, что  $\vec{j}_m$ , вообще говоря, не равен  $\rho\vec{u}$ , приведен далее.

Для пространственно-временных средних было предложено два варианта замыкания общей системы уравнений (1.3.1)–(1.3.5). Получающиеся в результате этого системы были названы квазигазодинамической и квазигидродинамической системами уравнений. Сокращенно обе системы именуются одинаково — КГД системы. Присутствующие в КГД уравнениях добавки, пропорциональные малому параметру  $\tau$ , связаны с дополнительным осреднением (сглаживанием) по времени при определении газодинамических параметров.

Первая система описывает поведение идеального политропного газа. Первый вариант этой системы был получен на основе кинетической модели в 80-е годы [30], [60], [80]. Позднее эта система была представлена в виде законов сохранения [7], [26]. Вторая система была получена позднее Ю.В. Шеретовым на основе анализа уравнений сохранения в дифференциальном виде [83], [26]. Эта система описывает течение газа с более общим уравнением состояния, и может использоваться для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости.

Там, где это не приводит к путанице, будем использовать аббревиатуру КГД. В специальных случаях будем называть эти системы полностью.

### 1.5.1 Квазигазодинамическая система

Пусть за некоторое физически бесконечно малое время мгновенные значения средней плотности, среднего импульса и энергии единицы объема успевают измениться. Для идеального политропного газа, то есть для газа с уравнением состояния

$$p = \rho \mathcal{R} T, \quad \varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

был построен способ замыкания общей системы (1.3.1)–(1.3.5), который приводит к квазигазодинамической системе уравнений. Вариант постро-

ения этой системы на основе кинетической модели будет изложен в главе 3. Здесь приведем сразу замыкающие соотношения, которые имеют вид

$$\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w}), \quad (1.5.1)$$

$$P = -pI + \Pi = -pI + \Pi_{NS} + \tau\vec{u} \otimes \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p - \rho\vec{F} \right] + \tau I \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right], \quad (1.5.2)$$

$$\vec{q} = -\varkappa\vec{\nabla}T - \tau\rho\vec{u} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\varepsilon + p(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] = -\varkappa\vec{\nabla}T - \tau\rho T\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})s, \quad (1.5.3)$$

где

$$\vec{w} = \vec{w}_{QGD} = \frac{\tau}{\rho} [\operatorname{div}(\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla}p - \rho\vec{F}]. \quad (1.5.4)$$

Вектор  $A$  и неотрицательная величина производства энтропии  $X$  записываются в виде

$$\vec{A} = (\Pi_{NS} \cdot \vec{u}) - p(\vec{u} - \vec{w}) + \tau\vec{u} \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p \right] + \tau\vec{u} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right], \quad (1.5.5)$$

$$X = \varkappa \left( \frac{\vec{\nabla}T}{T} \right)^2 + \frac{(\Pi_{NS} : \Pi_{NS})}{2\eta T} + \frac{p\tau}{\rho^2 T} \left[ \operatorname{div}(\rho\vec{u}) \right]^2 + \frac{\tau}{\rho T} \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p - \rho\vec{F} \right]^2 + \frac{\tau}{\rho\varepsilon T} \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\varepsilon + p \operatorname{div} \vec{u} \right]^2. \quad (1.5.6)$$

Заметим, что производство энтропии для КГД системы представляет собой производство энтропии для уравнений Навье–Стокса с дополнительными членами, которые являются квадратами левых частей классических уравнений Эйлера в стационарном случае с положительными коэффициентами. Таким образом, для КГД уравнений производство энтропии является неотрицательной величиной.

Подставляя выписанные выше значения векторов и тензора вязких напряжений в общую систему уравнений (1.3.1)–(1.3.5) получим квазигазодинамическую систему в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0, \quad (1.5.7)$$

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}_m \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla}p = \rho_*\vec{F} + \operatorname{div}\Pi, \quad (1.5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \vec{j}_m \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \operatorname{div}\vec{q} = \\ = (\vec{j}_m \cdot \vec{F}) + \operatorname{div}(\Pi \cdot \vec{u}). \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Здесь  $\rho_* = \rho - \tau \operatorname{div}(\rho\vec{u})$  — приближенное значение плотности в точке  $(\vec{x}, t + \tau)$ .

Уравнение баланса энтропии может быть получено на основе неди-вергентного вида КГД системы в форме

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}_m s) = -\operatorname{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) + X. \quad (1.5.10)$$

Это уравнение было получено в [27].

### 1.5.2 Квазигидродинамическая система

Второй способ решение проблемы замыкания системы (1.3.1)–(1.3.5) был предложен Ю.В.Шеретовым в работах [7], [26].

Пусть за любое физически бесконечно малое время успеваает измениться только мгновенное значение среднего импульса единицы объема, а изменениями мгновенных значений плотности и температуры можно пренебречь. В этом случае для газа с уравнениями состояния (1.2.1) и удовлетворяющему тождеству Гиббса (1.4.6) величины  $\vec{j}_m$ ,  $P$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{A}$  и  $X$  были построены в виде:

$$\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w}), \quad (1.5.11)$$

$$P = -pI + \Pi = -pI + \Pi_{NS} + \rho\vec{u} \otimes \vec{w}, \quad (1.5.12)$$

$$\vec{q} = -\varkappa\vec{\nabla}T, \quad (1.5.13)$$

$$\vec{A} = (\Pi_{NS} \cdot \vec{u}) + \rho\vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u}) - p(\vec{u} - \vec{w}), \quad (1.5.14)$$

$$X = \varkappa \left( \frac{\vec{\nabla}T}{T} \right)^2 + \frac{(\Pi_{NS} : \Pi_{NS})}{2\eta T} + \frac{\rho\vec{w}^2}{\tau T}, \quad (1.5.15)$$

причем

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho} [\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p - \rho\vec{F}]. \quad (1.5.16)$$

Подставив выражения (1.5.11), (1.5.12) и (1.5.14) вместо величин  $\vec{j}_m$ ,  $P$  и  $\vec{A}$  в (1.3.1)–(1.3.3), получим квазигидродинамическую систему уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0, \quad (1.5.17)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}_m \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \Pi, \quad (1.5.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \vec{j}_m \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \operatorname{div} \vec{q} = \\ = (\vec{j}_m \cdot \vec{F}) + \operatorname{div}(\Pi \cdot \vec{u}). \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

КГД система (1.5.17)–(1.5.19) становится замкнутой, если дополнить ее уравнениями состояния (1.2.1), а коэффициенты  $\eta$ ,  $\varkappa$  и  $\tau$  представить как функции макроскопических параметров среды.

Подстановка выражений (1.5.11), (1.5.13) и (1.5.15) в (1.3.5) дает уравнение баланса энтропии

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u} s) = \operatorname{div}(\rho \vec{w} s) + \operatorname{div} \left( \varkappa \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right) + \varkappa \left( \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right)^2 + \frac{\Psi_{QHD}}{T}, \quad (1.5.20)$$

в котором

$$\Psi_{QHD} = \frac{(\Pi_{NS} : \Pi_{NS})}{2\eta} + \frac{\rho \vec{w}^2}{\tau}$$

— неотрицательная диссипативная функция.

### 1.5.3 Вектор плотности потока массы и параметр $\tau$

Формально во всех уравнениях КГД системы присутствуют дополнительные по сравнению с системой Навье–Стокса диссипативные слагаемые, представляющие собой вторые пространственные производные от плотности, скорости и давления, перед которыми стоит численный коэффициент  $\tau$ .

Коэффициент  $\tau = \tau(\rho, T)$  характеризует масштаб временного осреднения. Такое дополнительное осреднение позволяет учесть влияние малых флуктуаций числа частиц в объеме  $\Delta V$ , которым в классической гидродинамике пренебрегается. Величина параметра сглаживания может изменяться в широких пределах в зависимости от типа течения и используемых для его описания средних величин.

Для определения величины параметра  $\tau$  рассмотрим структуру вектора плотности потока массы. Для определенности остановимся на квазигазодинамической системе уравнений для идеального политропного газа. В этом случае плотность потока массы вычисляется согласно (1.5.1),

(1.5.4)

$$\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w}) = \rho\vec{u} - \tau[\operatorname{div}(\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla}p - \rho\vec{F}]. \quad (1.5.21)$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\vec{j}_m = \rho\vec{u} + \tau\rho\vec{F} - \tau\mathcal{R}T\vec{\nabla}\rho - \tau\mathcal{R}\rho\vec{\nabla}T - \tau\operatorname{div}(\rho\vec{u} \otimes \vec{u}). \quad (1.5.22)$$

Первый член в правой части описывает плотность потока массы, связанную с конвективным движением газа. Второе слагаемое — поток, определяемый движением частиц во внешнем поле. Третье слагаемое — поток массы за счет самодиффузии. Четвертое слагаемое — так называемый термодиффузионный поток. Последнее слагаемое — вклад в поток массы за счет градиента скорости. В реальных течениях эти потоки тесно связаны между собой и не могут быть разделены.

Остановимся более подробно на третьем слагаемом. Плотность потока массы за счет самодиффузии имеет вид

$$\vec{j}_\rho = -D\vec{\nabla}\rho.$$

Коэффициент самодиффузии  $D$  для многих сред хорошо известен из экспериментов с изотопами. Согласно, например, [12] и [16], в простом газе коэффициент самодиффузии связан с коэффициентом вязкости как

$$D = \frac{\eta}{\rho Sc}, \quad (1.5.23)$$

где  $Sc$  — число Шмидта. Согласно [12] число Шмидта в газе близко к единице и приближенно может быть вычислено как

$$Sc = \frac{5}{7 - \omega}. \quad (1.5.24)$$

Сравнивая коэффициент самодиффузии (1.5.23) и выражение для этого коэффициента в (1.5.22) получаем, что для газа с уравнением состояния  $p = \rho\mathcal{R}T$  время релаксации равно

$$\tau = \frac{\eta}{pSc}. \quad (1.5.25)$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое уравнения (1.5.22). Если рассматривать каждую молекулу как броуновскую частицу, то плотность потока массы этих частиц можно связать с массовой плотностью внешних сил соотношением

$$\vec{j}_F = \rho b m_0 \vec{F},$$

где коэффициент  $b$  называется подвижностью молекулы. Подвижность молекулы связана с коэффициентом самодиффузии соотношением Эйнштейна

$$D = bk_B T.$$

Подставляя в выражение для плотности потока массы во внешнем поле подвижность молекулы через соотношение Эйнштейна, вновь приходим в формуле (1.5.25) для коэффициента релаксации  $\tau$ .

Термодиффузионный поток, который описывается четвертым слагаемым, согласно [3], [4] представляется в виде

$$\vec{j}_T = -\rho D \frac{k_T}{T} \vec{\nabla} T,$$

где  $k_T$  — безразмерная величина, называемая термодиффузионным отношением, которое определяет связь коэффициентов термодиффузии  $D_T$  и самодиффузии  $D$  в виде  $D_T = Dk_T$ . Сопоставляя четвертое слагаемое в (1.5.22) и выражение для  $\vec{j}_T$ , опять приходим к уже полученному нами ранее выражению для параметра релаксации (1.5.25) с точностью до коэффициента  $k_T$  в виде  $\tau = k_T \eta / (pSc)$ .

Таким образом с точностью до числа Шмидта величина  $\tau$  совпадает с так называемым максвелловским временем релаксации, то есть близка к среднему времени свободного пробега частиц в газе.

В [7] для вычисления этого параметра была предложена более общая формула

$$\tau = \frac{\gamma}{Sc} \frac{\eta}{\rho c_s^2}. \quad (1.5.26)$$

Принимая во внимание формулу Лапласа  $c_s^2 = \gamma p / \rho$ , это выражение для  $\tau$  можно преобразовать к виду (1.5.25).

Для плотных газов и жидкостей выбранная таким образом величина параметра сглаживания оказывается весьма малой, и влиянием содержащих  $\tau$  членов в КГД уравнениях можно пренебречь. Например, для воздуха при температуре  $T = 20^\circ$   $\gamma = 1.4$ ,  $Sc = 0.74$ ,  $c_s = 3.4 \cdot 10^4$  см/сек,  $\nu = \eta / \rho = 0.15$  см<sup>2</sup>/сек, и  $\tau = 2.45 \cdot 10^{-10}$  сек. Для воды при аналогичных условиях  $\gamma = 1$ ,  $Sc = 1$ ,  $c_s = 1.45 \cdot 10^5$  см/сек,  $\nu = 0.01$  см<sup>2</sup>/сек, и  $\tau = 4.75 \cdot 10^{-13}$  сек.

Однако для течений разреженного газа параметр сглаживания может быть достаточно большим. При описании быстропеременных или турбулентных течений параметр сглаживания может определяться иначе,

и вклад дополнительных вязких членов также может оказаться значительным.

При проведении численных расчетов вязкие члены могут использоваться как регуляризаторы численного решения. При этом величина параметра  $\tau$  уже не будет связываться с молекулярными свойствами газа, а будет определяться шагом пространственной сетки и выбираться из условий сходимости и точности разностного решения задачи.

При  $\tau \rightarrow 0$  КГД уравнения переходят в уравнения Навье–Стокса.

Уравнение неразрывности в КГД системах включает в себя вторую производную по пространству от давления, которая входит в выражение для плотности потока массы (1.5.21). Поэтому при постановке начально-краевой задачи для КГД системы требуется дополнительное по сравнению с системой Навье–Стокса граничное условие. Это дополнительное условие может быть получено из рассмотрения поведения вектора плотности потока массы  $\vec{j}_m$  на границе (1.5.1), (1.5.11).

Предположим, что граница представляет собой непроницаемую твердую стенку, и что внешняя сила равна нулю. Тогда условие непротекания для потока массы  $(\vec{j}_m \cdot \vec{n}) = 0$  и условия непротекания для нормальной компоненты скорости  $(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0$  приводят к условию для давления на границе в виде  $\partial p / \partial n = 0$ .

Как можно видеть из формул для вычисления тензора вязких напряжений и теплового потока для обоих КГД систем (1.5.2)–(1.5.4) и (1.5.12)–(1.5.13), (1.5.16), условие непротекания для скорости  $(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0$  и равенство нулю градиента давления на границе приводит к тому, что пропорциональные  $\tau$  дополнительные слагаемые в тепловом потоке и тензоре вязких напряжений обращаются в ноль, и для обоих КГД систем на стенке выполняется условие

$$\Pi = \Pi_{NS}, \quad \vec{q} = \vec{q}_{NS}.$$

Тем самым тепловой поток и сила трения на твердой стенке для КГД уравнений совпадает с традиционными выражениями, полученными в рамках уравнений Навье–Стокса.

#### 1.5.4 Барометрическая формула

Рассмотрим задачу гидростатики о распределении давления в идеальном политропном газе, находящимся в однородном поле тяжести Земли [2], [3]. В состоянии равновесия макроскопическая скорость  $\vec{u}$  равна нулю, и

распределение параметров газа не зависит от времени. В поле тяжести Земли  $\vec{F} = \vec{g}$ , где  $g = 9.8 \cdot 10^2$  см/сек<sup>2</sup>.

В этом случае обе КГД системы существенно упрощаются, и принимают одинаковый вид

$$\operatorname{div} \left\{ \tau(\vec{\nabla}p - \rho\vec{g}) \right\} = 0, \quad (1.5.27)$$

$$\vec{\nabla}p = \rho\vec{g}, \quad (1.5.28)$$

$$\operatorname{div} \left\{ \tau(\vec{\nabla}p - \rho\vec{g}) \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right\} + \operatorname{div}(\varkappa\vec{\nabla}T) = \tau\vec{g} \cdot (\vec{\nabla}p - \rho\vec{g}). \quad (1.5.29)$$

Отсюда непосредственно следуют условия механического равновесия, вытекающие из системы уравнений Навье–Стокса

$$\vec{\nabla}p = \rho\vec{g}, \quad (1.5.30)$$

$$\operatorname{div}(\varkappa\vec{\nabla}T) = 0. \quad (1.5.31)$$

Пусть температура газа постоянна. Тогда приходим к классической формуле, определяющей распределение давления в газе

$$p = p_0 \exp\left(\frac{(\vec{g} \cdot \vec{x})}{\mathcal{R}T}\right), \quad (1.5.32)$$

где  $p_0$  — заданное значение давления в точке  $\vec{x} = 0$ . Формула (1.5.32) называется барометрической формулой, или формулой Лапласа. Таким образом формула Лапласа является точным решением уравнений Навье–Стокса и обеих КГД систем.

## Историческая справка

Отдельные экспериментальные факты течения жидкости и газа были установлены Архимедом (287–212 до н. э.), Паскалем (Etienne Pascal, 1588–1651), Торичелли (Evangelista Torricelli, 1608–1647) и Ньютоном (Isaac Newton, 1643–1727).

Основоположниками теоретической гидродинамики можно считать двух выходцев из Швейцарии, работавших в том числе и в России — Леонарда Эйлера и Даниила, или Даниеля Бернулли.

Термин Гидродинамика был введен Даниэлем Бернулли (Daniel Bernoulli, 1700–1783). Даламбер (Jean le Rond D'Alembert, 1717–1783)

ввел закон сохранения массы для жидкости в виде уравнения неразрывности.

Леонард Эйлер (Leonard Euler, 1707–1783) в 1755 г. выписал уравнения движения идеальной жидкости и развил их математическую теорию. Он вывел уравнение неразрывности, выражающее свойство сохранения массы в движущемся вместе с жидкостью материальном объеме. Он же получил уравнение баланса импульса в локальной форме без учета влияния вязкости. В те времена жидкость и газ рассматривали как сплошную среду в буквальном смысле слова. Молекулярный состав вещества в рассмотрение не принимался. Плотность определялась как формальный математический предел отношения массы жидкости в момент времени  $t$  в объеме к величине этого объема при его стремлении к нулю.

Его работы продолжил Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736–1813).

Клод Луи Навье (Claude Louis Navier, 1785–1836) вывел уравнения движения вязкой жидкости пользуясь гипотезой взаимодействия молекул. История уравнений вязкой жидкости отсчитывается с того момента, когда Навье в 1822 г. сделал доклад об их простейшем варианте в несжимаемом случае. Соответствующая статья была опубликована через пять лет.

Джордж Стокс (George Gabriel Stokes, 1819–1903) получил уравнения движения вязкой жидкости на аксиоматической основе. По современным представлениям в качестве постулатов использовались интегральные законы сохранения массы, импульса и полной энергии в материальном объеме, движущемся вдоль интегральных кривых поля скорости. Его можно считать основателем современной гидродинамики.

Осборн Рейнольдс (Osborne Reynolds, 1842–1912), изучая движение вязкой жидкости, ввел понятия ламинарного и турбулентного течения и указал возможность резкого перехода от одного вида течения к другому.

Кинетическое обоснование уравнений гидродинамики было построено на основе уравнения Больцмана. Это уравнение для описания поведения функции распределения частиц одноатомного газа с бинарными столкновениями было выписано австрийским физиком Людвигом Больцманом (Ludwig Boltzmann, 1844–1906) в 1872 г. ([17], [18]).

## Глава 2

### Элементы кинетической теории газов

В этой главе кратко изложены некоторые аспекты кинетической теории, которые будут полезны в дальнейшем при выводе квазигазодинамических уравнений и построении их обобщений (главы 3, 8 и 9). Приведено схематическое описание метода Монте-Карло, который в настоящее время является основным подходом к численному моделированию течений умеренно-разреженных газов. Основой этой главы послужили работы [7], [8], [12], [15].

#### 2.1 Уравнение Больцмана

В 1872 г. Л.Больцман предложил интегро-дифференциальное кинетическое уравнение, которому суждено было стать классической моделью в теории разреженных одноатомных газов ([5], [12], [13], [14], [15]). Оно имеет вид

$$f_t + (\vec{\xi} \nabla_{\vec{x}}) f + (\vec{F} \nabla_{\vec{\xi}}) f = \mathcal{I}(f, f) \quad (2.1.1)$$

и описывает эволюцию одночастичной функции распределения  $f = f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$ . Здесь  $\vec{\xi}$  — скорость отдельной частицы, которую будем рассматривать как атом-шарик массой  $m_0$ ,  $\vec{F}$  — действующая на частицы внешняя сила, отнесенная к единице массы. Функция  $f$  нормирована так, чтобы равенство

$$m_0 dN = f(\vec{x}, \vec{\xi}, t) d\vec{x} d\vec{\xi}$$

определяло вероятное (ожидаемое) число частиц  $dN$  в элементе объема  $d\vec{x} d\vec{\xi}$  около точки  $(\vec{x}, \vec{\xi})$  фазового пространства координат и скоростей в фиксированный момент времени  $t$ .

Интеграл столкновений  $\mathcal{I}(f, f)$  есть нелинейный функционал, определяющий изменение функции распределения в результате парных столкновений. Конкретный вид этого интеграла можно найти в книгах [12], [13], [14], [15].

Важным и нужным нам в дальнейшем свойством интеграла столкновений является его ортогональность любому из так называемых столк-

новительных (сумматорных) инвариантов

$$h(\vec{\xi}) = 1, \vec{\xi}, \xi^2/2.$$

То есть можно записать

$$\int h(\vec{\xi}) \mathcal{I}(f, f) d\vec{\xi} = 0. \quad (2.1.2)$$

Это соотношение выражает законы сохранения массы, импульса и энергии частиц при их парном столкновении.

Здесь и далее интегрирование выполняется по всему пространству скоростей частиц (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ).

Зная функцию распределения  $f$ , можно определить гидродинамические величины — плотность  $\rho$ , скорость  $\vec{u}$ , давление  $p$ , температуру  $T$ , удельную внутреннюю энергию  $\varepsilon$ , тензор вязких напряжений  $\Pi$  и тепловой поток  $\vec{q}$  с помощью выражений

$$\begin{aligned} \rho &= \int f d\vec{\xi}, & \rho \vec{u} &= \int \vec{\xi} f d\vec{\xi}, & p &= \int \frac{\vec{c}^2}{3} f d\vec{\xi}, \\ \rho c_v T &= \rho \varepsilon = \int \frac{\vec{c}^2}{2} f d\vec{\xi}, & \vec{q} &= \int \frac{\vec{c}^2}{2} \vec{c} f d\vec{\xi}, \\ \Pi &= \int \left[ I \frac{\vec{c}^2}{3} - \vec{c} \otimes \vec{c} \right] f d\vec{\xi}. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Здесь  $\vec{c} = \vec{\xi} - \vec{u}$  — скорость хаотического движения частицы газа, или тепловая скорость,  $c_v = 3\mathcal{R}/2$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме для одноатомного газа.

Интегрируя (2.1.1) с весами  $1, \vec{\xi}, \xi^2/2$  и пользуясь свойством (2.1.2) получим систему уравнений для макроскопических параметров

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0, \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \Pi, \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \rho \vec{u} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \operatorname{div} \vec{q} = (\rho \vec{u} \cdot \vec{F}) + \operatorname{div}(\Pi \cdot \vec{u}), \quad (2.1.6)$$

которая, однако, не является замкнутой.

Для положительных решений  $f = f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$  уравнения (2.1.1), в предположениях, что таковые существуют, обладают необходимыми свойствами гладкости и физически осмысленным поведением при  $|\vec{\xi}| \rightarrow \infty$ , Л.Больцман доказал свою знаменитую  $H$ -теорему.

Предположим, что одноатомный газ находится в ограниченном объеме  $V_0$  с зеркально отражающей внутренней стенкой. Пусть заданы соответствующие начальные и краевые условия для функции распределения частиц в этом объеме. Тогда для функции Больцмана

$$H(t) = \int_{V_0} d\vec{x} \int f \ln f d\vec{\xi}$$

при всех  $t \geq 0$  справедливо неравенство

$$\frac{dH(t)}{dt} \leq 0. \quad (2.1.7)$$

Таким образом, рассматриваемое движение газа в сосуде сопровождается невозрастанием с течением времени величины  $H(t)$ , что указывает на его необратимый характер.

## 2.2 Равновесная функция распределения и уравнения Эйлера

Точным решением уравнения Больцмана является функция распределения, называемая локально-максвелловской равновесной функцией, которая в размерных величинах имеет вид

$$f^{(0)}(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = \frac{\rho}{(2\pi\mathcal{R}T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{u} - \vec{\xi})^2}{2\mathcal{R}T}\right), \quad (2.2.1)$$

Для функции  $f^{(0)}$  справедливо соотношение  $\mathcal{I}(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0$ , и она связана с  $f$  соотношениями

$$\begin{aligned} \rho &= \int f d\vec{\xi} = \int f^{(0)} d\vec{\xi}, \\ \rho\vec{u} &= \int \vec{\xi} f d\vec{\xi} = \int \vec{\xi} f^{(0)} d\vec{\xi}, \\ \rho c_v T &= \rho\varepsilon = \int \frac{\vec{c}^2}{2} f d\vec{\xi} = \int \frac{\vec{c}^2}{2} f^{(0)} d\vec{\xi} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что для локально-максвелловской функции распределения

$$\vec{q} = \int \frac{\vec{c}^2}{2} \vec{c} f^{(0)} d\vec{\xi} = 0, \quad \Pi = \int \left[ I \frac{\vec{c}^2}{3} - \vec{c} \otimes \vec{c} \right] f^{(0)} d\vec{\xi} = 0.$$

Функция  $f^{(0)}$  называется также локально-равновесной функцией распределения.

Интегрирование уравнения Больцмана с весами  $1, \vec{\xi}, \vec{\xi}^2/2$  в нулевом приближении, то есть когда  $f$  считается равной  $f^{(0)}$ , позволяет замкнуть систему (2.1.4)–(2.1.6) и получить классическую систему уравнений Эйлера.

### 2.3 Уравнения Навье–Стокса

В 1916–1917 годах С.Чепмен и Д.Энског предложили асимптотический метод решения уравнения Больцмана, позволяющий замкнуть систему (2.1.4)–(2.1.6) и получить систему уравнений первого приближения для описания течений вязкого теплопроводного газа — систему уравнений Навье–Стокса [14], [15], [12].

Суть метода заключается в том, что решение приведенного к безразмерному виду уравнения (2.1.1) ищется в виде формального асимптотического ряда по степеням малого положительного параметра — числа Кнудсена  $Kn$ , в виде

$$f = f^{(0)}(1 + Knf^{(1)} + Kn^2f^{(2)} + \dots),$$

где

$$Kn = \frac{\lambda}{L}. \quad (2.3.1)$$

Здесь  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега частиц в невозмущенном потоке,  $L$  — характерный размер области течения. В качестве нулевого приближения используется локально-максвелловская функция (2.2.1).

В первом приближении по числу  $Kn$  вычисления с помощью метода Чепмена–Энскаго приводят к так называемой локально-навье-стоксовской функции распределения

$$f_{NS} = f^{(0)} \left[ 1 - \frac{1}{p\mathcal{R}T} \left( 1 - \frac{\vec{c}^2}{5\mathcal{R}T} \right) (\vec{c} \cdot \vec{q}_{NS}) - \frac{1}{2p\mathcal{R}T} \Pi_{NS} : (\vec{c} \otimes \vec{c}) \right]. \quad (2.3.2)$$

Величины  $\Pi_{NS}$  и  $\vec{q}_{NS}$  были выписаны ранее (см. формулы 1.4.3, 1.4.4).

Последовательно интегрируя уравнение Больцмана с сумматорными инвариантами  $1, \vec{\xi}, \vec{\xi}^2/2$  в предположении, что  $f$  совпадает с  $f_{NS}$ , получим систему уравнений Навье–Стокса, выписанную ранее в разделе 1.4. Процедура Чепмена–Энскаго позволяет провести приближенный расчет

коэффициентов вязкости и теплопроводности. Для газа твердых сфер приближенный расчет этих коэффициентов приводит к выражениям

$$\eta = \frac{5}{64} \frac{m_0}{r_0^2} \sqrt{\frac{\mathcal{R}T}{\pi}}, \quad \varkappa = \frac{c_p \eta}{Pr}. \quad (2.3.3)$$

Число  $Pr$  в (2.3.3) оказывается равным  $2/3$ , а сами коэффициенты зависят только от температуры, что согласуется с известными экспериментальными данными.

## 2.4 Уравнение Бхатнагара–Гросса–Крука

В работе П.Бхатнагара, Е.Гросса и М.Крука в 1954 году [108] было предложено кинетическое уравнение вида

$$f_t + (\vec{\xi} \nabla_{\vec{x}}) f + (\vec{F} \nabla_{\vec{\xi}}) f = \mathcal{I}(f, f), \quad (2.4.1)$$

в котором столкновительный интеграл  $\mathcal{I}(f, f)$  аппроксимировался с помощью выражения

$$\mathcal{I}(f, f) = \frac{f^{(0)} - f}{\tau}. \quad (2.4.2)$$

В настоящее время уравнение (2.4.1) называют модельным кинетическим уравнением Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК), хотя П. Веландер опубликовал его независимо примерно в то же самое время (см. [14]). Положительный параметр  $\tau$  в правой части равенства (2.4.2) интерпретируется как характерное время релаксации функции  $f$  к локально-максвелловскому распределению  $f^{(0)}$ , определяемому формулой (2.2.1), и считается заданной функцией плотности и температуры. Величина  $\tau$  совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега молекул в газе. Макропараметры, входящие в формулу для вычисления  $\tau$ , также являются квадратурами от  $f$ .

Для модели БГК справедлив аналог  $H$ -теоремы Больцмана. То есть уравнение БГК также является диссипативным.

Применение метода Чепмена–Энскога к уравнению БГК также приводит к системе Навье–Стокса [12], [14], [15]. При этом коэффициент динамической вязкости  $\eta$  и коэффициент теплопроводности  $\varkappa$  вычисляются по формулам

$$\eta = p\tau, \quad \varkappa = c_p p\tau. \quad (2.4.3)$$

Из приведенных формул следует, что в БГК приближении число Прандтля равно единице.

В настоящее время разработаны усовершенствованные модели типа БГК приближения. В частности, предложена так называемая S-модель Шахова, которая учитывает реальное значение числа Прандтля. При этом вместо равновесной функции распределения в интеграле столкновений (2.4.2) выбирается функция распределения вида

$$f_S = f_0 \left( 1 + (1 - Pr) \psi(\vec{c}, \rho, T, \vec{u}) \right),$$

где  $\psi$  - некоторая функция (см. [10]).

Имеются обобщения БГК приближения на случай, когда характерное время релаксации зависит от скорости частиц  $\tau = \tau(\vec{\xi})$ , на случай смеси газов. Имеются варианты релаксационного уравнения, учитывающие неравновесность по внутренним степеням свободы частиц [12].

## 2.5 Численное моделирование течений разреженного газа

Численное моделирование течений разреженного газа является важной задачей современной аэродинамики. Такие течения связаны с многочисленными техническими приложениями, среди которых отметим вход летательных аппаратов в атмосферу Земли и других планет, маневрирование спутниковых систем, полеты на больших высотах. Изучение разреженных течений необходимо и для обеспечения земных технологий, таких как разработка вакуумных насосов и приборов, течений газа в тонких капиллярах и пористых средах.

Характеристикой степени разреженности газодинамического течения является число Кнудсена  $Kn = \lambda/L$ , представляющее собой отношение средней длины свободного пробега молекул  $\lambda$  к характерному линейному размеру задачи  $L$ . Обычно газ рассматривается как плотный, если  $Kn \rightarrow 0$  (на практике  $Kn < 10^{-3}$ ). Условия, при которых  $Kn \rightarrow \infty$  (на практике  $Kn > 100$ ), характерны для свободномолекулярных течений, когда столкновения между частицами практически отсутствуют. При промежуточных числах  $Kn$  газ считается разреженным. Под умеренно-разреженным газом понимают такие течения, когда число Кнудсена лежит в диапазоне порядка от 0.001 до 0.1, в зависимости от рассматриваемой задачи.

Расчеты свободномолекулярных режимов, когда столкновениями частиц между собой можно пренебречь и учитывать только взаимодействие частиц со стенками, не представляют большой сложности. Распределение частиц по скоростям с большой точностью можно считать равновесным с функцией распределения  $f^{(0)}$ . Основной проблемой является описание взаимодействия частиц со стенками. Этот процесс можно приближенно описать с помощью коэффициента аккомодации, который обозначается через  $\sigma$ . Простейшими моделями здесь являются: полная аккомодация частиц на стенке, или так называемое диффузное отражение, которое соответствует значениям  $\sigma = 1$ , и модель зеркального отражения, в которой полагается  $\sigma = 0$ .

Течения плотного газа рассчитываются с помощью уравнений Навье–Стокса.

Для расчета течений разреженного газа, когда столкновения частиц между собой нельзя не учитывать, применяются методы кинетической теории. Численный анализ течений проводится либо путем непосредственного решения уравнения Больцмана или его упрощенных вариантов, либо на основе методов прямого численного моделирования – так называемых DSMC методов.

Течения умеренно-разреженного газа представляют собой область, находящуюся на границе применимости обоих подходов. А именно, расчет таких течений методами кинетической теории требует неоправданно больших вычислительных ресурсов, что обусловлено высокой плотностью газа. В то же время уравнения Навье–Стокса, полученные в приближении  $Kn \rightarrow 0$ , теряют свою точность при анализе указанных режимов.

Для всех чисел Кнудсена, как бы малы они не были, вблизи стенки существует слой газа, толщина которого имеет порядок средней длины свободного пробега молекул – так называемый слой Кнудсена. С увеличением разреженности газа возникает необходимость учета отклонения от режима сплошной среды вблизи обтекаемой поверхности. Для того, чтобы в рамках макроскопических уравнений учесть влияние этого слоя на поле течения, вводятся специальные граничные условия, представляющие собой условия скольжения для скорости и скачка для температуры. Первый вариант таких условий был выписан Максвеллом в предположении диффузного характера отражения молекул от стенки. В настоящее время в литературе имеется много вариантов таких условий, которые

приведены, например, в книгах [4], [12], [15]. Все они имеют одинаковую структуру и отличаются между собой лишь численными коэффициентами порядка единицы. Приведем здесь условия в форме Смолуховского, где по сравнению с классическими условиями Максвелла учтено значение коэффициентов аккомодации для скорости  $\sigma_u$  и энергии  $\sigma_e$ , которые могут быть различными, а также учтено влияние градиента температуры вдоль стенки:

$$u_s = \frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \lambda \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \right)_s + \frac{4}{3} \left( \frac{\eta}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial s} \right)_s,$$

$$T_s - T_w = \frac{2 - \sigma_e}{2\sigma_e} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\lambda}{Pr} \left( \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right)_s,$$

где  $u_s$  — скорость скольжения вдоль стенки,  $T_s$  — температура газа вблизи стенки и  $T_w$  — температура стенки.

Для большинства материалов в условиях сверхзвукового обтекания коэффициенты аккомодации для скорости и энергии можно полагать одинаковыми и равными единице. В формуле для скорости скольжения второе слагаемое начинает играть заметную роль лишь при числах Кнудсена, приближающихся к единице [74].

## 2.6 Метод Монте-Карло

Метод прямого численного моделирования (DSMC — Direct Simulation Monte Carlo, или ПММК — прямое моделирование Монте-Карло) был разработан около 1970 г. и усовершенствован впоследствии австралийским ученым Г.А Бердом (G.A. Bird) ([12], [13]).

В широком смысле слова методами Монте-Карло называют основанные на моделировании случайных величин методы решения различных задач из таких областей, как статистическая физика, вычислительная математика, теория игр, математическая экономика и многие другие [36].

В газовой динамике нашел применение вариант метода Монте-Карло, основанный на моделировании реального течения газа посредством относительно небольшого числа молекул. То есть проводится численный эксперимент, в котором прослеживается история ограниченного числа частиц, каждая из которых является представителем большого числа  $W$  реальных молекул.  $W$  — число представляемых молекул — называют "весовым множителем" (weighting factor).

Для каждой из молекул запоминаются ее координаты, скорость и энергия. По этим величинам путем осреднения по всем частицам определяются газодинамические параметры течения.

Для стационарных задач расчет начинается с задания некоторого достаточно произвольного распределения частиц в расчетной области, которое с течением времени эволюционирует к своему равновесному состоянию. Далее перечислены основные этапы DSMC метода.

### 2.6.1 Дискретизация и моделирование движения частиц

Область течения разбивается на ячейки, причем такие, чтобы изменение газодинамических параметров течения в каждой ячейке было малым. Размер ячейки имеет порядок средней длины свободного пробега частицы. Для эффективности счета число частиц в каждой пространственной ячейке не должно сильно различаться и составлять около 10.

Моделирование физического движения молекул проводится посредством дискретных шагов по времени  $\Delta t$ , малых по сравнению со средним временем между столкновениями молекул  $\Delta t < \tau$ . Движение молекул и межмолекулярные столкновения на временном интервале моделируются последовательно. На каждом шаге по времени  $\Delta t$  осуществляется два этапа расчета.

- **Перемещение**

На первом этапе все молекулы перемещаются на расстояние, определяемое их скоростями  $\vec{\xi}\Delta t$ . Учитываются пересечения молекулами поверхностей твердых тел, линий и плоскостей симметрии и границ течения. При наличии потока внутрь области на соответствующих границах генерируются новые молекулы. Если молекула покидает область расчета, то она исчезает.

- **Столкновения**

На втором этапе проводятся столкновения между молекулами с последующей коррекцией молекулярных скоростей. Выбор очередной сталкивающейся пары частиц проводится в пределах одной ячейки и производится на основе данных генератора случайных чисел. Предполагается, что сталкиваются только те частицы, которые находятся в одной пространственной ячейке.

Важной частью метода прямого моделирования является вычисление числа столкновений. Частота столкновений определяется свойствами реального газа, для которого решается задача, и именно эта величина определяет диссипативные свойства течения — в конечном итоге, вязкость и теплопроводность моделируемого газа.

### 2.6.2 Расчет макроскопических характеристик

Для вычисления макроскопических параметров газа — плотности, скорости, давления, температуры — запоминаются и аккумулируются данные для всех молекул.

Затем происходит дополнительное осреднение по числу расчетов, чтобы уменьшить статистические флуктуации.

### 2.6.3 Преимущества и недостатки метода

Как показывает опыт численного моделирования течений разреженного и умеренно-разреженного газа, результаты расчетов по кинетическим моделям (с помощью решения уравнения Больцмана и на основе метода DSMC) хорошо соответствуют данным эксперимента.

Важным преимуществом DSMC метода по сравнению с решением задачи на основе уравнения Больцмана является формулировка граничных условий в терминах вероятностного описания для каждой молекулы, а не в виде функции распределения в окрестности границы.

К недостаткам метода DSMC можно отнести высокие требования к аппаратным ресурсам, сложность расчета нестационарных течений, а также большие флуктуации результатов при расчетах течений с макроскопическими скоростями, малыми по сравнению со скоростью звука. Указанные сложности возрастают с уменьшением числа Кнудсена.

Кроме того, в практических задачах обычно не требуется столь подробная информация, как знание функции распределения; интерес представляют ее моменты — газодинамические величины. Их получение связано с интегрированием в пространстве скоростей, что приводит к значительным вычислительным затратам. Связи с этим понятен интерес, проявляемый к использованию макроскопических моделей течений разреженного газа.

## Глава 3

### Квазигазодинамические уравнения

В этой главе приведен вывод квазигазодинамической системы уравнений на основе известной кинетической модели, которая представляет собой циклически-повторяющийся процесс бесстолкновительного разлета частиц и их последующих столкновений с установлением максвелловского равновесия. Детальный анализ этой модели и вариантов полученных на ее основе модельных кинетических уравнений приведен, в частности, в работах [30], [37], [60], [121] и здесь не обсуждается.

Далее изложен способ представления полученных на основе кинетической модели КГД уравнений в виде законов сохранения. Эта процедура позволяет получить конкретный вид выписанных ранее без вывода выражений для векторов плотности потока массы  $\vec{j}_m$ , тензора вязких напряжений  $\Pi$  и вектора теплового потока  $\vec{q}$ , которые представляются как соответствующие выражения для уравнений Навье-Стокса с добавками. Показано, что для стационарных течений эти дополнительные слагаемые имеют второй порядок малости по  $\tau$ . В последнем параграфе получен вид диссипативных коэффициентов и выписаны их обобщения. Изложение этих результатов приведено в соответствии с работами [7] и [19], а также работами [27], [29], [41], [80], [119].

#### 3.1 Модельное кинетическое уравнение

Численное или аналитическое решение интегро-дифференциального уравнения Больцмана является очень сложной задачей, поэтому к настоящему времени развито значительное число так называемых упрощенных кинетических моделей, которые позволяют находить приближенные решения отдельных задач. Опишем здесь одну из таких моделей, которая использовалась ранее для численного моделирования разреженных течений в рамках уравнения Больцмана, и на основе которой впервые была получена система квазигазодинамических уравнений.

Эта модель представляет движение газа как циклически повторяющийся процесс, состоящий из двух этапов: 1) бесстолкновительный разлета молекул газа и 2) последующее мгновенное установление термоди-

намического равновесия за счет столкновения частиц (этап мгновенной максвеллизации). В основе этой модели лежит идея расщепления физических процессов, или принцип суммарной аппроксимации (рис. 3.1).

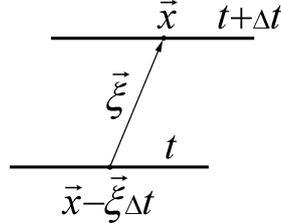


Рис. 3.1: Схема, поясняющая кинетическую модель

Пусть в некоторый момент времени  $t$  функция распределения имеет локально-максвелловский вид:

$$f^{(0)}(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = \frac{\rho}{(2\pi\mathcal{R}T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{\xi} - \vec{u})^2}{2\mathcal{R}T}\right). \quad (3.1.1)$$

Затем на интервале времени  $[t, t + \Delta t]$  происходит бесстолкновительный разлет молекул, который описывается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla})f = 0. \quad (3.1.2)$$

Это уравнение является линейным и имеет точное решение вида

$$f(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = f^{(0)}(\vec{x} - \vec{\xi}t, \vec{\xi}), \quad (3.1.3)$$

где  $f^{(0)}$  — максвелловская функция распределения.

В момент времени  $t + \Delta t$  функция распределения вновь становится локально-максвелловской, и имеет вид

$$f(\vec{x}, \vec{\xi}, t + \Delta t) = f^{(0)}(\vec{x} - \vec{\xi}\Delta t, \vec{\xi}, t). \quad (3.1.4)$$

Мгновенная максвеллизация имитирует процесс столкновения молекул, который в уравнении Больцмана описывается интегралом столкновений  $\mathcal{I}(f, f)$ . Далее процесс циклически повторяется.

Считая время бесстолкновительного разлета достаточно малым, разложим функцию распределения в момент времени  $t + \Delta t$  (3.1.4) в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка малости по  $\Delta t$ :

$$f^{(0)}(\vec{x} - \vec{\xi}\Delta t, \vec{\xi}, t) = f^{(0)} - \Delta t(\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla})f^{(0)} + \frac{\Delta t^2}{2}(\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla})f^{(0)}. \quad (3.1.5)$$

Параметр разложения  $\Delta t \vec{\xi}$  при больших  $\vec{\xi}$  нельзя считать малым, и отбрасываемые при таком разложении члены могут оказаться существенными. Однако в данном случае их вкладом при  $|\vec{\xi}| \gg \sqrt{\mathcal{R}T}$  можно пренебречь, так как сама функция распределения и все ее производные экспоненциально убывают с ростом  $\vec{\xi}$ .

Переносим все слагаемые в левую часть, делим обе части уравнения на  $\Delta t$  и заменяя разностную производную по времени на обычную производную, получим уравнение для функции распределения в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) f^{(0)} - (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\Delta t}{2} (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) f^{(0)} = \mathcal{I}(f, f). \quad (3.1.6)$$

Здесь в правую часть полученного уравнения добавлен интеграл столкновений, обеспечивающий релаксацию функции распределения на новом временном слое к максвелловскому распределению. Это модельное уравнение было предложено в работе [37].

Отождествляя временной интервал  $\Delta t/2$  со средним временем свободного пробега  $\tau$  и записывая интеграл столкновений в БГК приближении, получим окончательный вид модельного кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) f^{(0)} - (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) \tau (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) f^{(0)} = \frac{f^{(0)} - f}{\tau}. \quad (3.1.7)$$

Уравнение (3.1.7) формально можно выписать исходя из уравнения Больцмана в БГК приближении:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) f = \frac{f^{(0)} - f}{\tau}, \quad (3.1.8)$$

заменяя функцию распределения в конвективном слагаемом уравнения (3.1.8) на ее приближенное значение вида

$$f = f^{(0)} - \tau (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) f^{(0)}. \quad (3.1.9)$$

Используя соответствующий вид функции распределения можно выписать уравнения газовой динамики основываясь на уравнении (3.1.8). А именно, подставляя в конвективное слагаемое уравнения (3.1.8) локально-максвелловскую функцию распределения  $f^{(0)}$  и интегрируя полученное уравнение с сумматорными инвариантами, мы получим систему уравнений Эйлера. Формальная замена функции распределения  $f$  на функцию распределения Навье-Стокса (2.3.2) позволяет, после осреднения с сумматорными инвариантами, получить систему уравнений Навье-

Стокса для  $\gamma = 5/3$ ,  $Pr = 1$ . Заменяя функцию распределения в конвективном слагаемом уравнения (3.1.8) на ее приближенное значение вида

$$f_{QGD} = f^{(0)} - \tau(\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla})f^{(0)}, \quad (3.1.10)$$

приходим к уравнению (3.1.7), при осреднении которого, как будет показано далее, получается система КГД уравнений для  $\gamma = 5/3$ ,  $Pr = 1$ ,  $Sc = 1$ .

В [41] было показано, что соотношения (2.3.2) и (3.1.10) могут быть представлены в виде

$$f = f^{(0)}(1 + \tau \mathcal{P}^3(\xi_i)),$$

где  $\mathcal{P}^3(\xi_i)$  — полином третьей степени. При этом коэффициенты полиномов для обоих представлений функции распределения оказываются близкими.

Модельное кинетическое уравнение (3.1.7) построено здесь с использованием большого числа допущений, однако оно имеет целый ряд интересных свойств, и с его помощью удастся построить как КГД систему уравнений, так и ряд других моментных уравнений для описания слабо-неравновесных газодинамических течений.

Для стационарных течений было показано, что если функция распределения  $f$  удовлетворяет БГК уравнению (3.1.8), то она удовлетворяет и уравнению (3.1.7) с точностью  $O(\tau^2)$ . И наоборот, если функция распределения  $f$  удовлетворяет модельному кинетическому уравнению, то с точностью  $O(\tau^2)$  она удовлетворяет и стационарному уравнению БГК. Таким образом решения этих уравнений должны быть близки.

Для уравнения (3.1.7) доказан аналог Н-теоремы Больцмана [7].

## 3.2 Кинетический вывод КГД уравнений

Приведем способ построения квазигазодинамической системы уравнений на основе модельного кинетического уравнения, выписанного в предыдущем параграфе.

Модельное кинетическое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla})f^{(0)} - (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla})\tau(\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla})f^{(0)} = \frac{f^{(0)} - f}{\tau}, \quad (3.2.1)$$

где

$$f^{(0)}(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{\xi} - \vec{u})^2}{2RT}\right). \quad (3.2.2)$$

Последовательно интегрируя уравнение (3.2.1) с весами 1,  $\vec{\xi}$ ,  $\xi^2/2$  и используя выражения

$$\begin{aligned}\rho &= \int f d\vec{\xi} = \int f^{(0)} d\vec{\xi}, \\ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) &= \int \frac{\vec{\xi}^2}{2} f d\vec{\xi} = \int \frac{\vec{\xi}^2}{2} f^{(0)} d\vec{\xi}, \quad \vec{c} = \vec{\xi} - \vec{u}, \\ \frac{3}{2}\rho RT &= \int \frac{\vec{c}^2}{2} f d\vec{\xi} = \int \frac{\vec{c}^2}{2} f^{(0)} d\vec{\xi}, \quad Ip = \int (\vec{c} \otimes \vec{c}) f^{(0)} d\vec{\xi}, \\ \int \vec{c} f^{(0)} d\vec{\xi} &= 0, \quad \int (\vec{c} \otimes \vec{c} \otimes \vec{c}) f^{(0)} d\vec{\xi} = 0, \\ \int \vec{c} \vec{c}^2 f^{(0)} d\vec{\xi} &= 0, \quad \int (\vec{c} \otimes \vec{c}) \frac{\vec{c}^2}{2} f^{(0)} d\vec{\xi} = \frac{5}{2} I \frac{p^2}{\rho},\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

получим систему КГД уравнений в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = \operatorname{div} \left\{ \tau \left[ \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p \right] \right\},\tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p &= \operatorname{div} \left\{ \tau \left[ \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} \otimes \vec{u}) + \right. \right. \\ &\left. \left. + (\vec{\nabla} \otimes p \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes p \vec{u})^T \right] \right\} + \vec{\nabla} \left\{ \tau [\operatorname{div}(p \vec{u})] \right\},\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \rho \vec{u} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) + p \vec{u} \right] &= \\ = \operatorname{div} \left\{ \tau \left\{ \operatorname{div} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + 2 \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} \otimes \vec{u} \right] + \vec{\nabla} \left[ p \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] \right\} \right\}.\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

Замыкание вида (3.2.3), основанное на локально-максвелловской функции распределения, автоматически приводит к построению системы моментных уравнений для газа твердых сфер, то есть для  $\gamma = 5/3$ . Обобщение на случай произвольных молекул делается путем выделения слагаемых с удельной внутренней энергией в предположении  $\gamma = 5/3$ , и затем обобщения этого выражения на случай произвольного значения  $\gamma$ . При записи уравнения энергии в последнем слагаемом выделены

члены, не содержащие операций дивергенции от скорости, что позволит впоследствии выделить из этого слагаемого тепловой поток в форме Навье–Стокса.

Пример построения КГД уравнений для плоского одномерного течения газа детально выписан в Приложении 1, где наглядно прослежены все использованные преобразования.

Система (3.2.4)–(3.2.6), выведенная для случая произвольных криволинейных эйлеровых координат, замыкается уравнениями состояния идеального политропного газа

$$p = \rho RT, \quad \varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}. \quad (3.2.7)$$

Заметим, что в уравнения (3.2.4)–(3.2.6) не представлены в виде законов сохранения, то есть в них в явном виде не выделены тензор вязких напряжений и вектора плотности потока массы и теплового потока. Слагаемые типа Навье–Стокса также явно не присутствуют. Запись построенной выше КГД системы в виде законов сохранения приведена в следующем разделе.

### 3.3 Представление КГД уравнений в виде законов сохранения

Представим КГД систему (3.2.4)–(3.2.6) в виде законов сохранения (1.5.7)–(1.5.9), которые для случая  $\vec{F} = 0$  имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0, \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}_m \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \operatorname{div} \Pi, \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \vec{j}_m \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] = \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \vec{q}. \quad (3.3.3)$$

#### Уравнение неразрывности и вектор плотности потока массы

Сравнивая первые уравнения (3.2.4) и (3.3.1), найдем вектор плотности потока массы

$$\vec{j}_m = \rho \vec{u} - \tau \left( \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p \right). \quad (3.3.4)$$

Или, обозначив добавку к скорости через

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho} \left( \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p \right), \quad (3.3.5)$$

представим  $\vec{j}_m$  в виде

$$\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w}). \quad (3.3.6)$$

### Уравнение импульса и тензор вязких напряжений

Сопоставляя уравнения импульса (3.2.5) и (3.3.2) и найдем вид тензора  $\Pi$ . Для этого вычислим

$$\operatorname{div}(\vec{j}_m \otimes \vec{u}) = \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) - \operatorname{div}(\tau \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) \otimes \vec{u}) - \operatorname{div}(\tau \vec{\nabla} p \otimes \vec{u}). \quad (3.3.7)$$

Тогда (3.2.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}_m \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \\ = - \operatorname{div}(\tau \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) \otimes \vec{u}) - \operatorname{div}(\tau \vec{\nabla} p \otimes \vec{u}) + \operatorname{div} \left\{ \tau [\operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} \otimes \vec{u}) + \right. \\ \left. + (\vec{\nabla} \otimes p \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes p \vec{u})^T] \right\} + \operatorname{div} \{ I \tau \operatorname{div}(p \vec{u}) \}, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

где использовано тождество

$$\operatorname{div} \{ I \tau \operatorname{div}(p \vec{u}) \} = \vec{\nabla} \{ \tau \operatorname{div}(p \vec{u}) \}. \quad (3.3.9)$$

Из (3.3.8) и (3.3.2) следует, что тензор вязких напряжений  $\Pi$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi = - \tau \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) \otimes \vec{u} - \tau (\vec{\nabla} p \otimes \vec{u}) + \tau [\operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} \otimes \vec{u}) + \\ + (\vec{\nabla} \otimes p \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes p \vec{u})^T] + I \tau \operatorname{div}(p \vec{u}). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Представим этот тензор в виде суммы тензора вязких напряжений Навье–Стокса

$$\Pi_{NS} = \eta [(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T - (2/3) I \operatorname{div} \vec{u}] + \zeta I \operatorname{div} \vec{u} \quad (3.3.11)$$

и некоторой добавки.

Воспользуемся тождествами

$$(\vec{\nabla} \otimes p \vec{u}) = p(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{\nabla} p), \quad (3.3.12)$$

$$(\vec{\nabla} \otimes p \vec{u})^T = p(\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T + (\vec{\nabla} p \otimes \vec{u}), \quad (3.3.13)$$

$$\operatorname{div}(p \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) p + p \operatorname{div} \vec{u}, \quad (3.3.14)$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} \otimes \vec{u}) = \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) \otimes \vec{u} + \rho \vec{u} \otimes [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}]. \quad (3.3.15)$$

Тогда  $\Pi$  примет вид

$$\Pi = \tau p \left[ (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T \right] + \tau \vec{u} \otimes \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p \right] + \tau I \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + p \operatorname{div} \vec{u} \right]. \quad (3.3.16)$$

Преобразуем полученное выражение, прибавляя и вычитая величины  $\tau I \gamma p \operatorname{div} \vec{u}$  и  $(2/3)\tau p I \operatorname{div} \vec{u}$

$$\begin{aligned} \Pi = \tau p \left[ (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T - (2/3)I \operatorname{div} \vec{u} \right] + \\ + \tau \vec{u} \otimes \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p \right] + \tau I \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right] + \\ + \tau I p \operatorname{div} \vec{u} - \tau I \gamma p \operatorname{div} \vec{u} + (2/3)\tau p I \operatorname{div} \vec{u}. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Группируя слагаемые, получаем:

$$\begin{aligned} \Pi = \tau p \left[ (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T - (2/3)I \operatorname{div} \vec{u} \right] + \tau p I (5/3 - \gamma) \operatorname{div} \vec{u} + \\ + \tau \vec{u} \otimes \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p \right] + \tau I \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Сравнивая (3.3.18) с видом тензора Навье–Стокса (3.3.11) увидим, что

$$\eta = \tau p, \quad (3.3.19)$$

$$\zeta = \tau p \left( \frac{5}{3} - \gamma \right) \quad (3.3.20)$$

Из первого соотношения сразу следует, что  $\tau$  имеет смысл максвелловского времени релаксации [12].

Из полученной формулы для коэффициента объемной (второй) вязкости следует, что этот коэффициент неотрицателен и связан с наличием внутренних степеней свободы молекулы, что соответствует теоретическим представлениям, изложенным в [3], [4], [21], [117]. Действительно, для одноатомного газа  $\gamma = 5/3$  и  $\zeta = 0$ , в противном случае, при наличии колебательных или вращательных степеней свободы молекулы,  $\gamma < 5/3$  и  $\zeta > 0$ .

Таким образом, тензор вязких напряжений в КГД системе уравнений может быть записан в виде

$$\Pi = \Pi_{NS} + \tau \vec{u} \otimes \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p \right] + \tau I \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right], \quad (3.3.21)$$

где  $\Pi_{NS}$  имеет вид (3.3.11).

**Уравнение полной энергии и вектор теплового потока**

В заключении рассмотрим третью пару уравнений (3.2.6), (3.3.3) из которых определим вид векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{q}$ . Запишем (3.2.6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \vec{j}_m \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] = \\ = - \operatorname{div} \left[ \rho \vec{w} \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \\ + \operatorname{div} \tau \left\{ \operatorname{div} \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + 2 \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} \otimes \vec{u} \right] + \vec{\nabla} \left[ p \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

а (3.3.3) перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \vec{j}_m \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] = \operatorname{div} \left( \vec{j}_m \frac{p}{\rho} \right) + \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \vec{q}. \quad (3.3.23)$$

Сравнивая последние два выражения, найдем

$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{q} = - \vec{j}_m \frac{p}{\rho} - \left[ \tau \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p \right] \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) + \\ + \tau \operatorname{div} \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + 2 \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} \otimes \vec{u} \right] + \tau p \vec{\nabla} \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) + \\ + \tau \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \vec{\nabla} p, \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

здесь для  $\vec{w}$  использовано представление в виде (3.3.5). Приводя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{q} = - \vec{j}_m \frac{p}{\rho} - \tau \left[ \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right] \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \\ + \tau \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + 2 \frac{p}{\rho} \right) \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \tau \vec{u}(\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + 2 \frac{p}{\rho} \right) + \\ + \tau p \vec{\nabla} \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

где мы воспользовались тождеством

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + 2\frac{p}{\rho} \right) \vec{u} \otimes \vec{u} \right] = \\ = \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + 2\frac{p}{\rho} \right) \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{u}(\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + 2\frac{p}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Приведем подобные слагаемые

$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{q} = -\vec{j}_m \frac{p}{\rho} + \tau \left[ \frac{u^2}{2} + \varepsilon + 2\frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \varepsilon - \frac{p}{\rho} \right] \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \\ + \tau \vec{u}(\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + 2\frac{p}{\rho} \right) + \tau p \vec{\nabla} \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

Применяя тождество

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \vec{u} \operatorname{div}(\rho \vec{u}) + \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \rho \vec{u} \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho + \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}, \quad (3.3.28)$$

получим

$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{q} = -\vec{j}_m \frac{p}{\rho} + \tau p \vec{u} \operatorname{div} \vec{u} + \tau \frac{p}{\rho} \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho + \tau p(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \\ + \tau \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{u^2}{2} \right) + \tau \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\varepsilon + 2\tau p \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{1}{\rho} \right) + 2\tau \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + \\ + \tau p \vec{\nabla} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \tau p \vec{\nabla} \varepsilon + \tau p \vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{q} = -\vec{j}_m \frac{p}{\rho} + \tau p \left[ \vec{\nabla} \left( \frac{u^2}{2} \right) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right] + \\ + \tau \vec{u} \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{u^2}{2} \right) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p \right] + \tau \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + \\ + \tau p \vec{u} \operatorname{div} \vec{u} + \tau \frac{p}{\rho} \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho + \tau p \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{1}{\rho} \right) + \\ + \tau \rho \vec{u} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\varepsilon + p(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] + \tau p \vec{\nabla} \left[ \frac{p}{\rho} + \varepsilon \right]. \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Применив тождества

$$(\vec{\nabla} \otimes \vec{u})\vec{u} = \vec{\nabla} \left( \frac{u^2}{2} \right), \quad (3.3.31)$$

$$(\vec{\nabla} \otimes \vec{u})\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}, \quad (3.3.32)$$

придем к

$$\begin{aligned}
\vec{A} - \vec{q} = & -\vec{j}_m \frac{p}{\rho} + \tau p \left[ (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) - 2/3 I \operatorname{div} \vec{u} \right] \vec{u} + \\
& + \tau \vec{u} \left( \vec{u} \cdot \left[ \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p \right] \right) + \tau \vec{u} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) p + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right] + \\
& + \tau p \vec{u} (5/3 - \gamma) \operatorname{div} \vec{u} + \tau p \vec{\nabla} \left[ \frac{p}{\rho} + \varepsilon \right] + \\
& + \tau \rho \vec{u} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \varepsilon + p (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] + \tau \frac{p}{\rho} \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho - \tau \rho \vec{u} p \frac{1}{\rho^2} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho.
\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

Выделим тензор  $\Pi$  в виде (3.3.18),

$$\vec{A} - \vec{q} = \Pi \vec{u} - \vec{j}_m \frac{p}{\rho} + \tau p \vec{\nabla} \left[ \frac{p}{\rho} + \varepsilon \right] + \tau \rho \vec{u} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \varepsilon + p (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]. \tag{3.3.34}$$

В теории Навье–Стокса [3]

$$\vec{A}_{NS} = \Pi_{NS} \vec{u} - p \vec{u}$$

представляет собой работу поверхностных сил давления и внутреннего вязкого трения в единицу времени. По аналогии положим

$$\vec{A} = \Pi \vec{u} - p \frac{\vec{j}_m}{\rho}. \tag{3.3.35}$$

Остальные слагаемые обозначим через

$$\vec{q} = -\tau p \vec{\nabla} \left[ \frac{p}{\rho} + \varepsilon \right] - \tau \rho \vec{u} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \varepsilon + p (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]. \tag{3.3.36}$$

Выделим в тепловом потоке  $\vec{q}$  часть, связанную с потоком Навье–Стокса

$$\vec{q}_{NS} = -\varkappa \vec{\nabla} T.$$

Примем в качестве уравнения состояния — уравнения состояния идеального газа

$$p = \rho R T, \quad \varepsilon = \frac{R T}{\gamma - 1}, \tag{3.3.37}$$

откуда

$$\vec{q} = -\tau p \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \vec{\nabla} T - \tau \rho \vec{u} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \varepsilon + p (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]. \tag{3.3.38}$$

Сопоставляя формулу для  $\vec{q}$  и  $\vec{q}_{NS}$  получим, что коэффициент теплопроводности в КГД модели определяется как

$$\varkappa = \tau p \frac{\gamma R}{\gamma - 1}. \quad (3.3.39)$$

Выражение для теплового потока  $\vec{q}$  в КГД уравнениях примет вид

$$\vec{q} = \vec{q}_{NS} - \tau \rho \vec{u} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \varepsilon + p (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]. \quad (3.3.40)$$

Таким образом, полученная на основе кинетического уравнения КГД система вида (3.2.4)–(3.2.6) представлена в виде законов сохранения (3.3.1)–(3.3.3), где вектор плотности потока массы имеет вид (3.3.4). Тензор вязких напряжений представляет собой сумму тензора вязких напряжений Навье–Стокса и добавки с коэффициентом  $\tau$  (см. формулу (3.3.21)). Вектор теплового потока аналогично представляется в виде суммы и выражается формулой (3.3.40).

## 3.4 Коэффициенты диссипации

### 3.4.1 Формулы для диссипативных коэффициентов и их обобщения

На основании кинетического вывода КГД уравнений и представления их в виде законов сохранения удастся получить вид диссипативных коэффициентов  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $\varkappa$ . Эти коэффициенты оказываются связанными между собой через параметр  $\tau$  и выражаются как

$$\eta = \tau p, \quad \zeta = \tau p \left( \frac{5}{3} - \gamma \right), \quad \varkappa = \tau p \frac{\gamma R}{\gamma - 1}. \quad (3.4.1)$$

Именно в таком виде коэффициенты вязкости  $\eta$  и теплопроводности  $\varkappa$  получаются при выводе системы уравнений Навье–Стокса методами Чепмена–Энскога из уравнения БГК. Коэффициент объемной вязкости  $\zeta$  в виде (3.4.1) был получен в [6] на основе БГК приближения для мономолекулярного газа, обладающего вращательными степенями свободы. Действительно, приведенная в [6] формула для этого коэффициента имеет вид

$$\zeta = \eta \frac{2i}{3(i+3)},$$

где  $i$  — число вращательных степеней свободы. Выражая общее число степеней свободы  $n = i + 3$  через  $\gamma$  как  $n = i + 3 = 2/(\gamma - 1)$ , получим коэффициент объемной вязкости вида (3.4.1).

Вводя число Прандтля  $Pr \neq 1$ , запишем коэффициент теплопроводности в общепринятом виде как

$$\kappa = \eta \frac{\gamma \mathcal{R}}{\gamma - 1} \frac{1}{Pr}.$$

В разделе 1.5.3 с точностью до численного коэффициента совершенно другим способом была найдена связь релаксационного параметра  $\tau$  и коэффициента динамической вязкости  $\eta$  в виде

$$\tau = \frac{\eta}{\tau Sc},$$

где  $Sc$  — число Шмидта, величина которого для газов близка к единице.

Уточнение коэффициента объемной вязкости для газа, обладающего вращательными степенями свободы, приведено в следующем разделе.

### 3.4.2 Коэффициент объемной вязкости

Диссипативные эффекты, связанные с релаксацией внутренних степеней свободы в газе, могут оказывать заметное влияние на течения с ударными волнами и на быстропеременные по времени процессы. В гидродинамических моделях эти диссипативные эффекты наиболее просто описываются в терминах так называемой второй, или объемной, вязкости. Это описание является достаточно приближенным, и его использование ограничено течениями, в которых характерные времена релаксации внутренних степеней свободы малы по сравнению с характерными гидродинамическими временами задачи [3], [21].

Как уже отмечалось ранее, коэффициент объемной вязкости  $\zeta$  существенно связан с наличием внутренних степеней свободы молекул и обращается в ноль для одноатомных газов. Между тем величина этого коэффициента в ряде случаев может быть сопоставима с величиной коэффициента динамической вязкости  $\eta$ .

Способы вычисления коэффициентов второй вязкости и получающиеся при этом выражения в общем случае достаточно сложны (см., например, [4], [115], [117]). Относительно простые выражения для коэффициента второй вязкости имеются только в приближении, когда внутренние

степени свободы в газе связаны только с вращательными степенями свободы. Пример такого выражения приведен в предыдущем разделе.

Более точное выражение для коэффициента второй вязкости, зависящей от вращательных степеней свободы, предложено в [21] в виде:

$$\zeta = \frac{p\mathcal{R}}{c_V} \gamma_{rot} \tau_{rot}, \quad (3.4.2)$$

здесь  $\gamma_{rot}$  — доля внутренней энергии, содержащейся во вращательных степенях свободы.

Покажем, что это выражение отличается от полученной на основе КГД уравнений формулы для  $\zeta$  (3.4.1) только численным коэффициентом. Для этого выразим  $\gamma_{rot}$  через  $\gamma$ :

$$\gamma_{rot} = \frac{i}{n},$$

где  $i$  — число вращательных степеней свободы;  $n$  — общее число степеней свободы. Если принять во внимание, что  $n = i + 3$ , где 3 — число поступательных степеней свободы, то формулу для  $\gamma_{rot}$  можно переписать в виде

$$\gamma_{rot} = \frac{n - 3}{n}.$$

Учтем теперь связь числа степеней свободы с показателем адиабаты  $\gamma$ :

$$n = \frac{2}{\gamma - 1},$$

тогда

$$\gamma_{rot} = \frac{3}{2} \left( \frac{5}{3} - \gamma \right). \quad (3.4.3)$$

$\tau_{rot}$  — время релаксации вращательных степеней свободы, выражается следующим образом:

$$\tau_{rot} = Z_{rot} \tau_c, \quad (3.4.4)$$

где  $\tau_c$  — среднее время свободного пробега молекул;  $Z_{rot}$  — коэффициент обмена энергий между вращательными и поступательными степенями свободы, который равен среднему числу межмолекулярных столкновений, необходимых для релаксации к равновесному состоянию вращательной моды. Выражения для  $Z_{rot}$  приведены, например, в [12], [21]. Конкретные выражения для  $Z_{rot}$  использовались для расчетов неравновесных течений в струях  $CO_2$  [22] и  $N_2$  [23], а также для численного

моделирования структуры ударной волны в азоте [24]. Например, для азота

$$Z_{rot} = Z^\infty / [1 + (\pi^{3/2}/2)(T^*/T)^{1/2} + (\pi + \pi^2/4)(T^*/T)],$$

где  $Z^\infty = 23$ ,  $T^* = 91.5K$ . Температура в невозмущенном потоке составляет  $273K$  [21]. В этом случае значение  $Z_{rot}$  изменяется в пределах от 2 до 10.

Выразим  $\tau_c$  через динамическую вязкость газа  $\eta$ . Средняя длина свободного пробега частиц в газе  $\lambda$  определяется средним временем свободного пробега частиц и средней тепловой скоростью  $c'$  как

$$\lambda = \tau_c c'. \quad (3.4.5)$$

Средняя тепловая скорость частиц в равновесном газе равна  $c' = \sqrt{8\mathcal{R}T/\pi}$ . Таким образом,

$$\tau_c = \frac{\lambda}{\sqrt{8\mathcal{R}T/\pi}}. \quad (3.4.6)$$

Средняя длина свободного пробега может быть связана с вязкостью газа как

$$\lambda = A \frac{\eta}{p} \sqrt{\mathcal{R}T}, \quad (3.4.7)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

— формула Чепмена [25] или

$$A = \frac{2(7 - 2\omega)(5 - 2\omega)}{15\sqrt{2\pi}}$$

— формула Берда [12]. Здесь  $\omega$  — показатель степени в законе вязкости  $\mu \sim T^\omega$ .

Соотношения (3.4.6) и (3.4.7) позволяют выразить  $\tau_c$  через динамическую вязкость газа  $\eta$  как

$$\tau_c = A \frac{\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \quad (3.4.8)$$

Подставив выражения для  $c_v$ ,  $\gamma_{rot}$  (3.4.3) и  $\tau_c$  (3.4.8) в (3.3.20), запишем исходную формулу для второй вязкости (3.4.2) в виде

$$\zeta = \eta \left( \frac{5}{3} - \gamma \right) (\gamma - 1) A \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} Z_{rot} = \eta \left( \frac{5}{3} - \gamma \right) B. \quad (3.4.9)$$

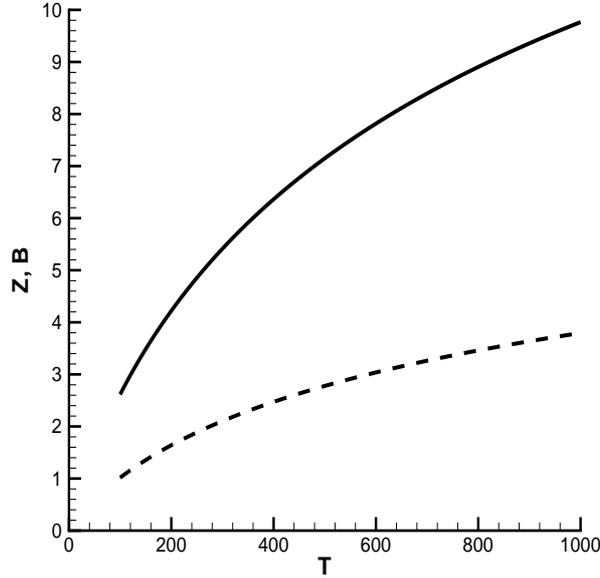


Рис. 3.2: Коэффициенты  $B$  (пунктир) и  $Z_{rot}$  (сплошная линия) для азота.

Последняя формула (3.4.9) с точностью до численного множителя

$$B = (\gamma - 1)A \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} Z_{rot}$$

совпадает с формулой для коэффициента второй вязкости, полученной ранее при анализе КГД уравнений. На рис. 3.2 приведены значения  $B$  (пунктир) и  $Z_{rot}$  (сплошная линия) в зависимости от температуры для азота. Видно, что коэффициент  $B$  изменяется в пределах от 1 до 3.

### 3.5 Уравнения Навье–Стокса как асимптотика КГД системы

КГД добавки к тензору вязких напряжений и векторам плотности потока массы и теплового потока пропорциональны коэффициенту  $\tau$ , и при достаточной гладкости соответствующих производных имеют порядок малости  $O(\tau)$ . В предыдущих разделах эти добавки были выписаны как:

$$\vec{j}_{QGD} = \tau \left[ \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p \right], \quad (3.5.1)$$

$$\Pi_{QGD} = \tau \vec{u} \otimes \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p \right] + \tau \hat{I} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) p + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right], \quad (3.5.2)$$

$$\vec{A}_{QGD} = \Pi_{QGD} \vec{u} - \frac{p}{\rho} \vec{j}_{QGD}, \quad (3.5.3)$$

$$\vec{q}_{QGD} = \tau \rho \vec{u} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \varepsilon + p (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]. \quad (3.5.4)$$

Здесь  $\hat{I}$  — единичный тензор.

Покажем, что в стационарном случае выписанные величины формально имеют второй порядок малости  $O(\tau^2)$ .

Для доказательства используем подход, изложенный в [7]. Запишем систему (3.2.4)–(3.2.6) в стационарном случае:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = M, \quad (3.5.5)$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \vec{I}, \quad (3.5.6)$$

$$\operatorname{div} \left[ \rho \vec{u} \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + p \vec{u} \right] = E. \quad (3.5.7)$$

Здесь введено обозначение для правых частей:

$$M = \operatorname{div} \left\{ \tau \left[ \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p \right] \right\}, \quad (3.5.8)$$

$$\vec{I} = \operatorname{div} \left\{ \tau \left[ \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes p \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes p \vec{u})^T \right] \right\} + \vec{\nabla} \left\{ \tau [\operatorname{div}(p \vec{u})] \right\}, \quad (3.5.9)$$

$$E = \operatorname{div} \left\{ \tau \left\{ \operatorname{div} \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + 2 \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} \otimes \vec{u} \right] + \vec{\nabla} \left[ p \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] \right\} \right\}. \quad (3.5.10)$$

Сразу заметим, что

$$M \sim o(\tau), \quad \vec{I} \sim o(\tau), \quad E \sim o(\tau). \quad (3.5.11)$$

**КГД добавка для вектора потока массы**

Из (3.5.1), (3.5.6) и (3.5.11) следует, что

$$\vec{j}_{QGD} = \tau \vec{I} \sim o(\tau^2). \quad (3.5.12)$$

**КГД добавка для тензора вязких напряжений**

Применяя тождество (3.3.28), преобразуем (3.5.6)

$$\vec{u} \operatorname{div}(\rho \vec{u}) + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{I}. \quad (3.5.13)$$

Тогда первое слагаемое в  $\Pi_{QGD}$  запишется в виде

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{I} - \vec{u} \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = \vec{I} - \vec{u}M. \quad (3.5.14)$$

Раскроем дивергенцию в (3.5.7), учитывая  $\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[ \rho\vec{u} \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + p\vec{u} \right] &= \frac{u^2}{2} \operatorname{div}(\rho\vec{u}) + \rho\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \\ &+ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + p \operatorname{div} \vec{u} \right]. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\gamma \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + p \operatorname{div} \vec{u} \right] = (\gamma - 1) \left( E - \frac{u^2}{2}M - \rho\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right).$$

Далее прибавим и вычтем  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p$

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} = (\gamma - 1) \left( E - \frac{u^2}{2}M - \rho\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p \right). \quad (3.5.15)$$

Выразим  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p$ . Для этого умножим скалярно (3.5.13) на  $\vec{u}$ . В результате получим

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p = (\vec{u} \cdot \vec{I}) - u^2M - \rho\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}. \quad (3.5.16)$$

Итак, учитывая (3.5.16), запишется (3.5.15) следующим образом

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + p \operatorname{div} \vec{u} = (\gamma - 1) \left( E - \frac{u^2}{2}M - (\vec{u} \cdot \vec{I}) \right). \quad (3.5.17)$$

Собирая слагаемые (3.5.14) и (3.5.17), окончательно получим

$$\Pi_{QGD} = \tau\vec{u} \otimes (\vec{I} - \vec{u}M) + \tau I(\gamma - 1) \left( E - \frac{u^2}{2}M - (\vec{u} \cdot \vec{I}) \right), \quad (3.5.18)$$

следовательно  $\Pi_{QGD} \sim o(\tau^2)$ .

**КГД добавка для работы сил давления и вязкого трения**

Из (3.5.3), (3.5.1) и (3.5.2) вытекает, что  $A_{QGD} \sim o(\tau^2)$ .

**КГД добавка для вектора теплового потока**

Распишем еще раз левую часть выражения (3.5.7):

$$E = \frac{u^2}{2}M + \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \varepsilon M + \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\varepsilon + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + p \operatorname{div} \vec{u}.$$

Откуда выразим

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\varepsilon + p \operatorname{div} \vec{u} = E - M \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) - \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p.$$

Из (3.5.5) выразим  $\operatorname{div} \vec{u}$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{M - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho}{\rho} = \frac{M}{\rho} + \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{1}{\rho} \right). \quad (3.5.19)$$

Учитывая (3.5.16) и (3.5.19), получим

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\varepsilon + p\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{1}{\rho} \right) = E - M \left( \varepsilon - \frac{u^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) - (\vec{u} \cdot \vec{I}). \quad (3.5.20)$$

Из (3.5.20) и (3.5.4) следует, что

$$\vec{q}_{QGD} = \tau \vec{u} \left[ E - M \left( \varepsilon - \frac{u^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) - (\vec{u} \cdot \vec{I}) \right]. \quad (3.5.21)$$

и  $\vec{q}_{QGD} \sim o(\tau^2)$ .

Это означает, что для стационарных течений КГД уравнения аппроксимируют систему уравнений Навье–Стокса с точностью  $O(\tau^2)$ . Таким образом можно полагать, что при стремлении величины  $\tau$  к нулю, решение КГД уравнений с соответствующим порядком сходится к решению системы уравнений Навье–Стокса. Заметим, что для нестационарных течений аппроксимацию второго порядка доказать не удастся.

Другой важной асимптотикой уравнений гидродинамики является приближение пограничного слоя [2], [3]. Было показано (см., например, [7], [30], [60]) что приближением пограничного слоя для КГД уравнений, так же как и для уравнений Навье–Стокса, служат уравнения Прандтля.

## Глава 4

### КГД уравнения и системы координат

В этой главе КГД уравнения выписаны в тензорно-индексном представлении в произвольных координатах. Приведенный вид уравнений позволяет не только выписать КГД систему в удобной для решения задачи системе координат, но также дает возможность строить разностные аппроксимации уравнений на ортогональных пространственных сетках в преобразованном пространстве координат [20].

В последних параграфах КГД уравнения выписаны в декартовой и цилиндрической системах координат.

#### 4.1 Запись КГД уравнений в произвольной системе координат

Для дальнейших выкладок нам понадобятся некоторые теоретические сведения [135, 136, 137].

Рассмотрим в евклидовом пространстве некоторый базис  $\vec{e}_j$ , любой вектор в котором задается координатами  $(x^1, x^2, x^3)$ . Пусть  $\vec{r}_i$  — новый базис, любой вектор в котором задается координатами  $(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$ .

Определим переход от базиса  $\vec{e}_j$  к новому базису  $\vec{r}_i$  с помощью следующего преобразования (здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам):

$$\vec{r}_i = b_i^j \vec{e}_j, \quad b_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^i}, \quad (4.1.1)$$

где  $b_i^j$  — матрица перехода от базиса  $\vec{e}_j$  к базису  $\vec{r}_i$ .

В дифференциальной геометрии и тензорном анализе вводится понятие метрического тензора, который отражает дифференциальные свойства внутренней геометрии области. Компоненты метрического тензора определяются как:

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^j}, \quad (4.1.2)$$

$g \equiv \det(g_{ij})$  — определитель метрического тензора.

Рассмотрим некоторый вектор  $\vec{U} = U^i \vec{e}_i$  в базисе  $\vec{e}_i$ , где  $U^i$  — координаты вектора в данном базисе. При переходе к новому нормированному базису ( $\hat{e}_i = \vec{r}_i / \sqrt{|g_{ii}|}$ ) координаты вектора  $\vec{U}$  преобразуются по следующей формуле:

$$\hat{U}^j = U^i \bar{b}_i^j \sqrt{|g_{jj}|}, \quad U^i = \frac{\hat{U}^j}{\sqrt{|g_{jj}|}} b_j^i, \quad (4.1.3)$$

где  $\bar{b} = b^{-1}$  — матрица обратного перехода от базиса  $\vec{r}_i$  к базису  $\vec{e}_j$ .

Координаты вектора  $\hat{U}^i$  в нормированном базисе  $\hat{e}_j$  связаны с координатами вектора  $U^i$  в базисе  $\vec{r}_i$  следующим соотношением:

$$\hat{U}^i = \sqrt{|g_{ii}|} U^i. \quad (4.1.4)$$

Аналогичная формула для компонент тензора  $\Pi^{ik}$  имеет вид:

$$\hat{\Pi}^{ik} = \sqrt{|g_{ii}| |g_{kk}|} \Pi^{ik}. \quad (4.1.5)$$

В формулах (4.1.4) и (4.1.5) суммирование по повторяющимся индексам не производится.

Теперь выпишем формулы тензорного анализа, необходимые для представления КГД системы уравнений в тензорно-индексном виде.

*Скалярное произведение векторов:*

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = g_{kl} A^k B^l. \quad (4.1.6)$$

*Ковариантная и контравариантная производная скалярной функции:*

$$\nabla_i A = \frac{\partial A}{\partial x^i}, \quad \nabla^i A = g^{ij} \nabla_j A. \quad (4.1.7)$$

*Ковариантная производная тензора первого и второго ранга:*

$$\nabla_j U^i = \frac{\partial U^i}{\partial x^j} + U^m \Gamma_{mj}^i, \quad (4.1.8)$$

$$\nabla_i A^{ij} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^i} + \Gamma_{li}^i A^{lj} + \Gamma_{mi}^j A^{im}, \quad (4.1.9)$$

где

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \quad (4.1.10)$$

— символы Кристоффеля второго рода.

Дивергенция вектора (частный случай (4.1.8) при  $i = j$ ):

$$\nabla_i A^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|} A^i)}{\partial x^i}. \quad (4.1.11)$$

В дальнейшем мы рассматриваем ортогональные системы координат, в которых элементы метрических тензоров подчиняются условию  $g_{ik} = g_{ii} \delta_k^i$ , где  $\delta_k^i$  — символ Кронекера, для которого

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases}.$$

В системе ортогональных координат для вычисления символов Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^k$  справедливы следующие соотношения:

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad (i \neq j, j \neq k, k \neq i), \quad (4.1.12)$$

$$\Gamma_{ii}^k = -\frac{1}{2g_{kk}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \quad (i \neq k), \quad (4.1.13)$$

$$\Gamma_{ik}^k = \Gamma_{ki}^k = \frac{1}{2g_{kk}} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln g_{kk})}{\partial x^i}. \quad (4.1.14)$$

Выпишем систему КГД уравнений в тензорно-индексном представлении.

Уравнение баланса массы имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} j_m^i) = 0, \quad (4.1.15)$$

где вектор плотности потока массы определяется как

$$j_m^i = \rho \left( \frac{\widehat{U}^i}{\sqrt{|g_{ii}|}} - w^i \right),$$

$$w^i = \frac{\tau}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \rho \frac{\widehat{U}^j}{\sqrt{|g_{jj}|}} \frac{\widehat{U}^i}{\sqrt{|g_{ii}|}} \right) + \Gamma_{lj}^j \rho \frac{\widehat{U}^l}{\sqrt{|g_{ll}|}} \frac{\widehat{U}^i}{\sqrt{|g_{ii}|}} \right] + \\ + \frac{\tau}{\rho} \left[ \Gamma_{mj}^i \rho \frac{\widehat{U}^m}{\sqrt{|g_{mm}|}} \frac{\widehat{U}^j}{\sqrt{|g_{jj}|}} + g^{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} \right].$$

Уравнение баланса импульса записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\widehat{U}^i}{\sqrt{|g_{ii}|}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left( j_m^j \frac{\widehat{U}^i}{\sqrt{|g_{ii}|}} \right) + \Gamma_{lj}^j \left( j_m^l \frac{\widehat{U}^i}{\sqrt{|g_{ii}|}} \right) + \\ + \Gamma_{mj}^i \left( j_m^j \frac{\widehat{U}^m}{\sqrt{|g_{mm}|}} \right) + g^{ij} \frac{\partial p}{\partial x^j} = \frac{\partial \Pi^{ji}}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^j \Pi^{li} + \Gamma_{mj}^i \Pi^{jm}, \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

а компоненты тензора вязких напряжений определяются по формулам

$$\begin{aligned} \Pi^{ji} = & \Pi_{NS}^{ji} + \\ & + \tau \frac{\widehat{U}^j}{\sqrt{|g_{jj}|}} \left\{ \rho \frac{\widehat{U}^k}{\sqrt{|g_{kk}|}} \left[ \frac{\partial(\widehat{U}^i/\sqrt{|g_{ii}|})}{\partial x^k} + \frac{\widehat{U}^m}{\sqrt{|g_{mm}|}} \Gamma_{mk}^i \right] + g^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k} \right\} + \\ & + \tau g^{ji} \left[ \frac{\widehat{U}^k}{\sqrt{|g_{kk}|}} \frac{\partial p}{\partial x^k} + \gamma p \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^m} \left( \sqrt{|g|} \frac{\widehat{U}^m}{\sqrt{|g_{mm}|}} \right) \right], \\ \Pi_{NS}^{ji} = & \eta \left\{ g^{jk} \left[ \frac{\partial(\widehat{U}^i/\sqrt{|g_{ii}|})}{\partial x^k} + \frac{\widehat{U}^m}{\sqrt{|g_{mm}|}} \Gamma_{mk}^i \right] \right\} + \\ & + \eta \left\{ g^{ik} \left[ \frac{\partial(\widehat{U}^j/\sqrt{|g_{jj}|})}{\partial x^k} + \frac{\widehat{U}^m}{\sqrt{|g_{mm}|}} \Gamma_{mk}^j \right] - \right. \\ & \left. - 2/3 g^{ji} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^m} \left( \sqrt{|g|} \frac{\widehat{U}^m}{\sqrt{|g_{mm}|}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Уравнение баланса энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sqrt{|g|} j_m^j \left( \frac{E+p}{\rho} \right) \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sqrt{|g|} q^j \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sqrt{|g|} g_{kl} \Pi^{jk} \frac{\widehat{U}^l}{\sqrt{|g_{ll}|}} \right), \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

где энергия и тепловой поток записываются как

$$\begin{aligned} E = & \rho \left( \frac{g_{kl}}{2} \frac{\widehat{U}^k}{\sqrt{|g_{kk}|}} \frac{\widehat{U}^l}{\sqrt{|g_{ll}|}} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right), \\ q^j = & - \frac{\eta}{Pr} \frac{\gamma}{\gamma-1} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \\ & - \tau \rho \frac{\widehat{U}^j}{\sqrt{|g_{jj}|}} \left[ \frac{1}{\gamma-1} \frac{\widehat{U}^k}{\sqrt{|g_{kk}|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{p}{\rho} \right) + p \frac{\widehat{U}^k}{\sqrt{|g_{kk}|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]. \end{aligned}$$

Тензорно-индексный вид (4.1.15)–(4.1.17) позволяет адаптировать КГД систему уравнений к произвольным системам координат: декартовым, цилиндрическим, сферическим, эллипсоидальным и другим.

## 4.2 КГД уравнения в декартовой системе координат

В декартовой системе координат положим

$$\hat{x}^1 = x, \quad \hat{x}^2 = y, \quad \hat{x}^3 = z.$$

Метрический тензор имеет диагональный вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \equiv \det g_{ij} = 1. \quad (4.2.1)$$

Формулы (4.1.6) — (4.1.11) принимают более простой вид:

*Скалярное произведение векторов:*

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = A^i B_i. \quad (4.2.2)$$

*Прямое тензорное произведение векторов:*

$$(\vec{A} \otimes \vec{B}) = A^i B^j. \quad (4.2.3)$$

*Производная скалярной функции (градиент):*

$$\text{grad } p = \nabla_i p = \nabla^i p = \frac{\partial p}{\partial \hat{x}^i}. \quad (4.2.4)$$

*Производная тензора первого и второго ранга:*

$$\nabla_j A^i = \frac{\partial A^i}{\partial \hat{x}^j}, \quad (4.2.5)$$

$$\nabla_j \Pi^{ij} = \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial \hat{x}^i}. \quad (4.2.6)$$

*Дивергенция:*

$$\text{div } \vec{A} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \nabla_i A^i = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (4.2.7)$$

$$\text{div } \Pi = (\vec{\nabla} \cdot \Pi) = \nabla_i \Pi^{ij}. \quad (4.2.8)$$

*Дивергенция от прямого тензорного произведения:*

$$\text{div}(\vec{A} \otimes \vec{B}) = \nabla_i (A^i B^j). \quad (4.2.9)$$

Дивергенция от скалярного произведения тензора и вектора:

$$\operatorname{div}(\Pi \cdot \vec{A}) = (\vec{\nabla} \cdot (\Pi \cdot \vec{A})) = \nabla_i(\Pi^{ij} \vec{A}_j). \quad (4.2.10)$$

Система КГД уравнений (4.1.15)–(4.1.17) запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i = 0, \quad (4.2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u^j) + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p = \nabla_i \Pi^{ij}, \quad (4.2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \nabla_i \left\{ j_m^i \left[ \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) + \frac{p}{\rho} \right] \right\} + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ij} u_j). \quad (4.2.13)$$

Здесь компоненты вектора плотности потока массы  $\vec{j}_m$  имеют вид:

$$\begin{aligned} j_{mx} &= j_m^1 = \rho u_x - \tau \left( \frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_x u_z)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \\ j_{my} &= j_m^2 = \rho u_y - \tau \left( \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_y u_z)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} \right), \\ j_{mz} &= j_m^3 = \rho u_z - \tau \left( \frac{\partial(\rho u_x u_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z^2)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

В формулах (4.2.14) первые слагаемые соответствуют вектору плотности потока массы Навье–Стокса, а последующие (с множителем  $\tau$  в качестве коэффициента) представляют собой КГД добавки.

Элементы тензора вязких напряжений  $\Pi$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= \Pi^{11}, & \Pi_{xy} &= \Pi^{12}, & \Pi_{xz} &= \Pi^{33}, \\ \Pi_{yx} &= \Pi^{21}, & \Pi_{yy} &= \Pi^{22}, & \Pi_{yz} &= \Pi^{32}, \\ \Pi_{zx} &= \Pi^{31}, & \Pi_{zy} &= \Pi^{32}, & \Pi_{zz} &= \Pi^{33}, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= \eta \left( 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \left[ \frac{2}{3} - \frac{\zeta}{\eta} \right] \operatorname{div} \vec{u} \right) + \tau \rho u_x \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \\ &+ \tau \left( 2 u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \tau \gamma p \operatorname{div} \vec{u}, \end{aligned}$$

$$\Pi_{xy} = \eta \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \tau \rho u_x \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right),$$

$$\Pi_{xz} = \eta \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \tau \rho u_x \left( u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right),$$

$$\Pi_{yx} = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \tau \rho u_y \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right),$$

$$\begin{aligned} \Pi_{yy} = \eta \left( 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \left[ \frac{2}{3} - \frac{\zeta}{\eta} \right] \operatorname{div} \vec{u} \right) + \tau \rho u_y \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \\ + \tau \left( u_x \frac{\partial p}{\partial x} + 2u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \tau \gamma p \operatorname{div} \vec{u}, \end{aligned}$$

$$\Pi_{yz} = \eta \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \tau \rho u_y \left( u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right),$$

$$\Pi_{zx} = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \tau \rho u_z \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right),$$

$$\Pi_{zy} = \eta \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \tau \rho u_z \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right),$$

$$\begin{aligned} \Pi_{zz} = \eta \left( 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \left[ \frac{2}{3} - \frac{\zeta}{\eta} \right] \operatorname{div} \vec{u} \right) + \tau \rho u_z \left( u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ + \tau \left( u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + 2u_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \tau \gamma p \operatorname{div} \vec{u}. \end{aligned}$$

В выражениях для компонент тензора вязких напряжений (4.2.15) слагаемые с множителем  $\eta$  соответствуют тензору Навье–Стокса, а слагаемые с множителем  $\tau$  представляют собой КГД добавки.

Компоненты вектора теплового потока  $\vec{q}$ .

$$\begin{aligned} q_x = q^1 = -\eta \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \\ - \tau \rho u_x \frac{1}{\gamma - 1} \left[ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\ - \tau \rho u_x p \left[ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_y = q^2 = & -\eta \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \\
& - \tau \rho u_y \frac{1}{\gamma-1} \left[ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\
& - \tau \rho u_y p \left[ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right], \\
q_z = q^3 = & -\eta \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \\
& - \tau \rho u_z \frac{1}{\gamma-1} \left[ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\
& - \tau \rho u_z p \left[ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]. \quad (4.2.16)
\end{aligned}$$

В выражениях для компонент вектора теплового потока  $\vec{q}$  (4.2.16), как и в предыдущих случаях, слагаемые с множителем  $\eta$  соответствуют системе Навье–Стокса, с множителем  $\tau$  являются КГД добавками.

### 4.3 КГД уравнения в цилиндрической системе координат

В цилиндрической системе координат положим

$$\hat{x}^1 = r, \quad \hat{x}^2 = \varphi, \quad \hat{x}^3 = z.$$

Метрический тензор имеет диагональный вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3.1)$$

а его определитель равен  $g \equiv \det g_{ij} = r^2$ .

Воспользуемся приведенными выше формулами тензорного анализа (4.1.4)–(4.1.11) и выпишем  $r, \varphi, z$ -компоненты вектора плотности потока массы  $\vec{j}_m$ , тензора вязких напряжений  $\Pi$  и вектора теплового потока  $\vec{q}$ .

Компоненты вектора плотности потока массы  $\vec{j}_m$ :

$$\begin{aligned} j_{mr} &= j_m^1 = \rho u_r - \tau \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho u_r u_z)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} \right), \\ j_{m\varphi} &= r j_m^2 = \frac{\rho u_\varphi}{r} - \tau \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u_\varphi u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\varphi u_z)}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right), \\ j_{mz} &= j_m^3 = \rho u_z - \tau \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u_z u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_z u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho u_z^2)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

В каждой из вышеприведенных формул первое слагаемое правой части соответствует вектору потока массы Навье–Стокса  $\vec{j}_m^{NS}$ , а последующие (с множителем  $\tau$  в качестве коэффициента) представляют собой КГД добавки  $\vec{j}_m^{QGD}$ .

Элементы тензора вязких напряжений  $\Pi$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{rr} = \Pi^{11} &= \eta \left( 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \left[ \frac{2}{3} - \frac{\zeta}{\eta} \right] \operatorname{div} \vec{u} \right) + \\ &+ \tau \rho u_r \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \\ &+ \tau \left( u_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r^3} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{r\varphi} = r \Pi^{12} &= \eta \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \\ &+ \tau \rho \frac{u_r}{r} \left( r u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - r^2 u_r u_\varphi + u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + r u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{rz} = \Pi^{13} &= \eta \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \\ &+ \tau \rho u_r \left( u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\varphi r} = r \Pi^{21} &= \eta \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \\ &+ \tau \rho u_\varphi \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\varphi\varphi} = r^2\Pi^{22} = & \frac{\eta}{r^2} \left( 2\frac{u_r}{r} + 2\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} - \left[ \frac{2}{3} - \zeta\frac{r^2}{\eta} \right] \operatorname{div} \vec{u} \right) + \\ & + \tau\rho\frac{u_\varphi}{r} \left( ru_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_ru_\varphi + ru_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi} \right) + \\ & + \tau \left( u_r\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r^3}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\varphi z} = r\Pi^{23} = & \eta \left( \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} \right) + \\ & + \tau\rho u_\varphi \left( u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{zr} = \Pi^{31} = & \eta \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \\ & + \tau\rho u_z \left( u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{z\varphi} = r\Pi^{32} = & \eta \left( \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} \right) + \\ & + \tau\rho\frac{u_z}{r} \left( ru_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_ru_\varphi + ru_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{zz} = \Pi^{33} = & \eta \left( 2\frac{\partial u_z}{\partial z} - \left[ \frac{2}{3} - \zeta \right] \operatorname{div} \vec{u} \right) + \\ & + \tau\rho u_z \left( u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ & + \tau \left( u_r\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right), \end{aligned}$$

В выражениях для компонент тензора вязких напряжений слагаемые с множителем  $\eta$  соответствуют тензору Навье–Стокса, а слагаемые с множителем  $\tau$  являются КГД добавками.

И, наконец, выпишем компоненты вектора теплового потока  $\vec{q}$ .

$$q_r = q^1 = -\eta \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \\ - \tau \rho u_r \frac{1}{\gamma - 1} \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\ - \tau \rho u_r p \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right],$$

$$q_\varphi = r q^2 = -\eta \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{Pr} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \\ - \tau \rho u_\varphi \frac{1}{\gamma - 1} \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\ - \tau \rho u_\varphi p \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right],$$

$$q_z = q^3 = -\eta \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \\ - \tau \rho u_z \frac{1}{\gamma - 1} \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\ - \tau \rho u_z p \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right].$$

Отметим, что по аналогии с выписанными выше компонентами  $\vec{j}_m$  и  $\Pi$  в выражениях для  $\vec{q}$  слагаемые с множителем  $\eta$  соответствуют вектору теплового потока Навье–Стокса, слагаемые с множителем  $\tau$  являются КГД добавками.

## Глава 5

### Численные алгоритмы решения нестационарных задач газовой динамики

Данная, самая объемная глава, посвящена построению эффективных конечно-разностных алгоритмов решения КГД уравнений для численного моделирования нестационарных газодинамических течений с использованием ортогональных сеток.

Разностные аппроксимации строятся в потоковой форме непосредственно для векторов плотности потока массы  $\vec{j}_m$ , вектора теплового потока  $\vec{q}$  и тензора вязких напряжений  $\Pi$ . Это соответствует записи уравнений газовой динамики в виде законов сохранения и делает алгоритм достаточно компактным и экономичным. Устойчивость разностного алгоритма обеспечивается введением искусственной диссипации, вид которой определяется КГД добавками.

Алгоритм может использоваться для расчета вязких и невязких сверхзвуковых нестационарных течений. Описана модификация численного алгоритма для расчета дозвуковых течений.

Для иллюстрации работы численных алгоритмов приведены результаты расчетов одномерной задачи о распаде сильного разрыва, и двумерных задач об осесимметричном течении в окрестности цилиндра и плоском течении в канале с прямой и обратной ступенькой.

В основу этого раздела положены материалы работ [7], [29], [42], [44], [45].

#### 5.1 Система уравнений для плоских двумерных течений

Запишем систему КГД уравнений в декартовых координатах для двумерного случая в виде, удобном для численной реализации:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} = 0, \quad (5.1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx}u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(j_{my}u_x)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y}, \quad (5.1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx}u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(j_{my}u_y)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y}, \quad (5.1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx}H)}{\partial x} + \frac{\partial(j_{my}H)}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xx}u_x + \Pi_{xy}u_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yx}u_x + \Pi_{yy}u_y), \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

где  $E$  — полная энергия единицы объема и  $H$  — полная удельная энтальпия:

$$E = \rho \frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad H = \frac{(E + p)}{\rho}, \quad p = \rho \mathcal{R}T. \quad (5.1.5)$$

Компоненты вектора плотности потока массы  $\vec{j}_m$  вычисляются по формулам:

$$j_{mx} = \rho(u_x - w_x), \quad j_{my} = \rho(u_y - w_y), \quad (5.1.6)$$

где

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{\tau}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right], \\ w_y &= \frac{\tau}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Компоненты тензора вязких напряжений  $\Pi$  определяются с помощью выражений:

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= \Pi_{xx}^{NS} + u_x w_x^* + R^*, & \Pi_{xx}^{NS} &= 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \vec{u}, \\ \Pi_{xy} &= \Pi_{xy}^{NS} + u_x w_y^*, & \Pi_{xy}^{NS} &= \Pi_{yx}^{NS} = \eta \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \\ \Pi_{yx} &= \Pi_{yx}^{NS} + u_y w_x^*, & & \\ \Pi_{yy} &= \Pi_{yy}^{NS} + u_y w_y^* + R^*, & \Pi_{yy}^{NS} &= 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \vec{u}, \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

здесь  $\Pi_{xx}^{NS}$ ,  $\Pi_{xy}^{NS}$ ,  $\Pi_{yx}^{NS}$ ,  $\Pi_{yy}^{NS}$  — компоненты навье-стоксовского тензора вязких напряжений.

Величины  $w_x^*$ ,  $w_y^*$ ,  $R^*$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} w_x^* &= \tau \left[ \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right], \\ w_y^* &= \tau \left[ \rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right], \\ R^* &= \tau \left[ u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right], \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

а дивергенция вектора скорости  $\operatorname{div} \vec{u}$  равна:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (5.1.10)$$

Компоненты вектора теплового потока  $\vec{q}$  находятся по формулам:

$$\begin{aligned} q_x &= q_x^{NS} - u_x R^q, & q_y &= q_y^{NS} - u_y R^q, \\ R^q &= \tau \rho \left[ \frac{u_x}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_y}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right) + p u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) + p u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

где навье-стоксовские слагаемые  $q_x^{NS}$  и  $q_y^{NS}$  вычисляются как:

$$q_x^{NS} = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y^{NS} = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (5.1.12)$$

Зависимость коэффициента динамической вязкости  $\eta$  от температуры выберем в следующем виде

$$\eta = \eta_\infty \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^\omega, \quad (5.1.13)$$

где  $\eta_\infty = \eta(T_\infty)$  — известное значение  $\eta$  при температуре  $T_\infty$ .

Коэффициент теплопроводности  $\varkappa$  и релаксационный параметр  $\tau$  связаны с коэффициентом динамической вязкости  $\eta$  соотношениями:

$$\varkappa = \frac{\gamma \mathcal{R}}{(\gamma - 1) Pr} \eta, \quad \tau = \frac{1}{p Sc} \eta, \quad (5.1.14)$$

где  $Pr$  — число Прандтля,  $Sc$  — число Шмидта.

## 5.2 Система уравнений в цилиндрической геометрии

В цилиндрических координатах в двумерном случае система КГД уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{mr})}{\partial r} + \frac{\partial j_{mz}}{\partial z} = 0, \quad (5.2.1)$$

$$\frac{\partial (\rho u_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{mr} u_r)}{\partial r} + \frac{\partial (j_{mz} u_r)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Pi_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_{zr}}{\partial z} - \frac{\Pi_{\phi\phi}}{r}, \quad (5.2.2)$$

$$\frac{\partial (\rho u_z)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{mr} u_z)}{\partial r} + \frac{\partial (j_{mz} u_z)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Pi_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial z}, \quad (5.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{mr} H)}{\partial r} + \frac{\partial (j_{mz} H)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r q_r)}{\partial r} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (\Pi_{rr} u_r + \Pi_{rz} u_z)] + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{zr} u_r + \Pi_{zz} u_z), \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

где  $E$  — полная энергия единицы объема и  $H$  — полная удельная энтальпия:

$$E = \rho \frac{u_r^2 + u_z^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad H = \frac{(E + p)}{\rho}, \quad p = \rho \mathcal{R} T. \quad (5.2.5)$$

Здесь  $u_r$  и  $u_z$  — проекции вектора скорости  $\vec{u}$  на оси  $r$  и  $z$ . Влияние внешних сил не учитывается.

Компоненты вектора плотности потока массы  $\vec{j}_m$  вычисляются по формулам:

$$j_{mr} = \rho(u_r - w_r), \quad j_{mz} = \rho(u_z - w_z), \quad (5.2.6)$$

где

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{\tau}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_r u_z) + \frac{\partial p}{\partial r} \right], \\ w_z &= \frac{\tau}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r u_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^2) + \frac{\partial p}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Компоненты тензора вязких напряжений  $\Pi$  выпишем в виде, удобном

для программной реализации:

$$\begin{aligned}
\Pi_{rr} &= \Pi_{rr}^{NS} + u_r w_r^* + R^*, & \Pi_{rr}^{NS} &= 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \vec{u}, \\
\Pi_{rz} &= \Pi_{rz}^{NS} + u_r w_z^*, & \Pi_{rz}^{NS} &= \Pi_{zr}^{NS} = \eta \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\
\Pi_{zr} &= \Pi_{zr}^{NS} + u_z w_r^*, & & \\
\Pi_{\phi\phi} &= \Pi_{\phi\phi}^{NS} + R^*, & \Pi_{\phi\phi}^{NS} &= 2\eta \frac{u_r}{r} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \vec{u}, \\
\Pi_{zz} &= \Pi_{zz}^{NS} + u_z w_z^* + R^*, & \Pi_{zz}^{NS} &= 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \vec{u},
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

здесь  $\Pi_{rr}^{NS}$ ,  $\Pi_{rz}^{NS}$ ,  $\Pi_{zr}^{NS}$ ,  $\Pi_{\phi\phi}^{NS}$ ,  $\Pi_{zz}^{NS}$  — компоненты навье-стоксовского тензора вязких напряжений.

Величины  $w_r^*$ ,  $w_z^*$ ,  $R^*$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
w_r^* &= \tau \left[ \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} \right], \\
w_z^* &= \tau \left[ \rho u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right], \\
R^* &= \tau \left[ u_r \frac{\partial p}{\partial r} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p \operatorname{div} \vec{u} \right],
\end{aligned}$$

а дивергенция вектора скорости  $\operatorname{div} \vec{u}$  равна:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Компоненты вектора теплового потока  $\vec{q}$  находятся по формулам:

$$q_r = q_r^{NS} - u_r R^q, \quad q_z = q_z^{NS} - u_z R^q, \tag{5.2.8}$$

$$R^q = \tau \rho \left[ \frac{u_r}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_z}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) + p u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\rho} \right) + p u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right],$$

где навье-стоксовские слагаемые  $q_r^{NS}$  и  $q_z^{NS}$  задаются формулами:

$$q_r^{NS} = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_z^{NS} = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial z}. \tag{5.2.9}$$

### 5.3 Граничные условия

Приведенные системы уравнений следует дополнить начальными и граничными условиями. Постановка этих условий определяется конкретной

решаемой задачей. Приведем пример граничных условий для задачи о течении газа в окрестности цилиндра в осесимметричной геометрии (см. например рис. 5.5).

Профиль течения на входной границе, расположенной в плоскости  $z = z_0$  (вертикальной стенке), можно задать как

$$\rho = \rho_\infty, \quad u_z = u_{z\infty}, \quad u_r = 0, \quad p = p_\infty. \quad (5.3.1)$$

На оси симметрии, совпадающей с осью  $z$ , задаются условия симметрии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad u_r = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (5.3.2)$$

На свободных границах, где предполагается, что газ вытекает из рассматриваемой области, ставятся так называемые "мягкие" граничные условия, или условия "сноса". Здесь предполагается равенство нулю нормальных производных плотности, давления и компонент скорости. Например, если граница находится в плоскости  $z = z_0$ , то такие условия запишутся как:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5.3.3)$$

Пусть одной из границ является непроницаемая твердая стенка. Разложим скорость  $\vec{u}$  вблизи границы на две компоненты: нормальную  $u_n$  и тангенциальную  $u_t$ . На твердой стенке можно поставить условия непротекания  $u_n = 0$  и прилипания  $u_t = 0$  (или скольжения  $\partial u_t / \partial n = 0$ ) для скорости, и некоторое условие для температуры.

В КГД системе уравнений вектор плотности потока массы вычисляется как

$$\vec{j}_m^{QGD} = \rho \vec{u} - \rho \vec{w} = \rho \vec{u} - \tau \left( \text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p \right). \quad (5.3.4)$$

Для того чтобы поток массы, вычисляемый по формуле (5.3.4), был равен нулю на границе, условия непротекания для скорости необходимо дополнить условием для давления вида  $\partial p / \partial n = 0$ .

Пусть у нас имеется цилиндр, расположенный вдоль оси  $z$ . На поверхности  $r = r_0$  такого цилиндра в качестве граничных условий поставим условия прилипания для скорости, зададим постоянную температуру и будем полагать, что поверхность непроницаема. Тогда граничные условия запишутся следующим образом

$$u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad T = T_0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (5.3.5)$$

Выпишем выражения для тепловой потока и силы трения на границе, для которой выполняется условия непротекания для скорости  $u_n = 0$ . Пусть граница расположена в плоскости  $z = z_0$  (торец цилиндра). Сила трения на этой границе определяется компонентой тензора вязких напряжений  $\Pi_{zr}$ , а тепловой поток равен  $q_z$ :

$$q_z = q_z^{NS} - u_z R^q,$$

$$R^q = \tau \rho \left[ \frac{u_r}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_z}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) + p u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\rho} \right) + p u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right],$$

$$\Pi_{zr} = \Pi_{zr}^{NS} + \tau u_z \left[ \rho u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} \right]. \quad (5.3.6)$$

С учетом условия непротекания на стенке ( $u_z = 0$ ), сразу получаем выражение для теплового потока и коэффициента трения на стенке в виде:

$$q_z = q_z^{NS} = -\alpha \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$\Pi_{zr} = \Pi_{zr}^{NS} = \eta \frac{\partial u_r}{\partial z}. \quad (5.3.7)$$

То есть для КГД уравнений выражения для теплового потока и силы трения на твердой стенке (5.3.7) совпадают с соответствующими величинами для уравнений Навье–Стокса.

## 5.4 Безразмерный вид уравнений

Для численного решения уравнений газовой динамики бывает удобно представить их в безразмерном виде. Это позволяет, во-первых, оперировать при расчетах с величинами порядка единицы, во-вторых, позволяет выделить численные коэффициенты в уравнениях, от которых зависит решение задачи — выделить так называемые параметры подобия.

Выберем в качестве основных размерных параметров характерный линейный размер  $R_c$  (например, радиус цилиндра), плотность набегающего потока  $\rho_\infty$  и скорость звука в набегающем невозмущенном потоке  $c_\infty$ .

Запишем соотношения между размерными и безразмерными величинами

нами (знак " $\sim$ " над переменной относится к безразмерным величинам):

$$\begin{aligned} \rho &= \tilde{\rho} \rho_\infty, & u &= \tilde{u} c_\infty, & c &= \tilde{c} c_\infty, & p &= \tilde{p} \rho_\infty c_\infty^2, \\ & & x &= \tilde{x} R_c, & t &= \tilde{t} \frac{R_c}{c_\infty}, \\ T &= \frac{p}{R\rho} = \frac{\tilde{p} \rho_\infty c_\infty^2}{R \tilde{\rho} \rho_\infty} = \frac{\tilde{p} \gamma}{\tilde{\rho} R \gamma} c_\infty^2 = \tilde{T} \frac{c_\infty^2}{\gamma R}. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Определим числа Маха и Рейнольдса:

$$Ma_\infty = \frac{u_\infty}{c_\infty}, \quad Re_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty R_c}{\mu_\infty}. \quad (5.4.2)$$

Уравнение полной энергии примет вид:

$$E = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)}, \quad \Rightarrow \quad \tilde{E} = \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{2} + \frac{\tilde{p}}{(\gamma - 1)}. \quad (5.4.3)$$

При обезразмеривании скорость звука преобразуется как

$$c = \sqrt{\gamma R T}, \quad \Rightarrow \quad \tilde{c} = \sqrt{\tilde{T}}. \quad (5.4.4)$$

Уравнение состояния:

$$p = \rho R T, \quad \tilde{p} \rho_\infty c_\infty^2 = \tilde{\rho} \rho_\infty \tilde{T} \frac{c_\infty^2}{\gamma R} \quad \Rightarrow \quad \tilde{p} = \frac{\tilde{\rho} \tilde{T}}{\gamma}. \quad (5.4.5)$$

Таким образом уравнения связи (5.4.4) и (5.4.5) после обезразмеривания изменили свой вид.

Подставляя соотношения (5.4.1) в уравнения КГД системы, можно убедиться, что приведение к безразмерному виду не меняет вида исходных уравнений. При этом безразмерные коэффициенты вязкости, теплопроводности и релаксационный параметр вычисляются как

$$\tilde{\mu} = \frac{Ma}{Re} \tilde{T}^\omega, \quad (5.4.6)$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{1}{(\gamma - 1) Pr} \frac{Ma}{Re} \tilde{T}^\omega. \quad (5.4.7)$$

$$\tilde{\tau} = \frac{Ma}{Re Sc} \frac{\tilde{T}^\omega}{\tilde{p}}. \quad (5.4.8)$$

Далее, используя безразмерные КГД уравнения и уравнения связи, знак " $\sim$ " ("тильда") будем опускать.

## 5.5 Разностная аппроксимация

Рассмотрим, для определенности, аппроксимацию уравнений в цилиндрической геометрии. Обозначим символом  $\omega_h$  множество узлов  $(i, j)$  пространственной сетки. Для простоты рассмотрим равномерную сетку, в которой обозначим шаги по пространству как  $h_z$  и  $h_r$ .

Все газодинамические величины (плотность  $\rho$ , компоненты скоростей  $u_z$  и  $u_r$ , давление  $p$ ) будем относить к узлам сетки  $\omega_h$ . Значение произвольной функции  $\psi$  из множества  $\{\rho, u_r, u_z, p\}$  в полужелтых узлах

$$(z_{i\pm 0.5}, r_j), \quad (z_i, r_{j\pm 0.5}), \quad (z_{i\pm 0.5}, r_{j\pm 0.5}) \quad (5.5.1)$$

будем вычислять как среднее арифметическое их значений в прилегающих узлах:

$$\begin{aligned} \psi_{i\pm 0.5, j} &= 0.5(\psi_{i\pm 1, j} + \psi_{i, j}), \\ \psi_{i, j\pm 0.5} &= 0.5(\psi_{i, j\pm 1} + \psi_{i, j}), \\ \psi_{i\pm 0.5, j\pm 0.5} &= 0.25(\psi_{i\pm 1, j\pm 1} + \psi_{i, j\pm 1} + \psi_{i\pm 1, j} + \psi_{i, j}). \end{aligned}$$

Для остальных функций  $f = f(\rho, u_z, u_r, p)$  положим

$$f_{ij} = f(\rho_{ij}, (u_r)_{ij}, (u_z)_{ij}, p_{ij}). \quad (5.5.2)$$

Для численного решения системы (5.2.1)–(5.2.4) используем явную по времени разностную схему. Производные по времени аппроксимируются разностями вперед с первым порядком точности. Пространственные производные аппроксимируем центральными разностями со вторым порядком точности.

Аппроксимируем дифференциальное уравнение (5.2.1) разностным:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\rho}_{ij} - \rho_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{r_j h_r} [(r j_{mr})_{i, j+0.5} - (r j_{mr})_{i, j-0.5}] + \\ + \frac{1}{h_z} [(j_{mz})_{i+0.5, j} - (j_{mz})_{i-0.5, j}] = 0, \quad (5.5.3) \end{aligned}$$

где  $\Delta t$  — шаг по времени. Величина, помеченная верхним индексом  $\widehat{\rho}_{i, j}$ , вычисляется на следующем временном слое.

Остальные уравнения системы (5.2.1)–(5.2.4) аппроксимируются аналогично.

$$\begin{aligned}
& \frac{(\widehat{\rho u_r})_{ij} - (\rho u_r)_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{r_j h_r} [(r j_{mr})_{i,j+0.5} (u_r)_{i,j+0.5} - (r j_{mr})_{i,j-0.5} (u_r)_{i,j-0.5}] + \\
& + \frac{1}{h_z} [(j_{mz} u_r)_{i+0.5,j} - (j_{mz} u_r)_{i-0.5,j}] + \frac{1}{h_r} [p_{i,j+0.5} - p_{i,j-0.5}] = \\
& = \frac{1}{r_j h_r} [(r \Pi_{rr})_{i,j+0.5} - (r \Pi_{rr})_{i,j-0.5}] + \\
& + \frac{1}{h_z} [(\Pi_{zr})_{i+0.5,j} - (\Pi_{zr})_{i-0.5,j}] - \frac{(\Pi_{\varphi\varphi})_{ij}}{r_j}, \quad (5.5.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\widehat{\rho u_z})_{ij} - (\rho u_z)_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{r_j h_r} [(r j_{mr})_{i,j+0.5} (u_z)_{i,j+0.5} - (r j_{mr})_{i,j-0.5} (u_z)_{i,j-0.5}] + \\
& + \frac{1}{h_z} [(j_{mz} u_z)_{i+0.5,j} - (j_{mz} u_z)_{i-0.5,j}] + \frac{1}{h_z} [p_{i+0.5,j} - p_{i-0.5,j}] = \\
& = \frac{1}{r_j h_r} [r_{j+0.5} (\Pi_{rz})_{i,j+0.5} - r_{j-0.5} (\Pi_{rz})_{i,j-0.5}] + \\
& + \frac{1}{h_z} [(\Pi_{zz})_{i+0.5,j} - (\Pi_{zz})_{i-0.5,j}], \quad (5.5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\widehat{E}_{ij} - E_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{r_j h_r} [(r j_{mr})_{i,j+0.5} H_{i,j+0.5} - (r j_{mr})_{i,j-0.5} H_{i,j-0.5}] + \\
& + \frac{1}{h_z} [(j_{mz} H)_{i+0.5,j} - (j_{mz} H)_{i-0.5,j}] + \\
& + \frac{1}{r_j h_r} [r_{j+0.5} (q_r)_{i,j+0.5} - r_{j-0.5} (q_r)_{i,j-0.5}] + \frac{1}{h_z} [(q_z)_{i+0.5,j} - (q_z)_{i-0.5,j}] = \\
& = \frac{1}{r_j h_r} [(r \Pi_{rr})_{i,j+0.5} (u_r)_{i,j+0.5} - (r \Pi_{rr})_{i,j-0.5} (u_r)_{i,j-0.5}] + \\
& + \frac{1}{r_j h_r} [r_{j+0.5} (\Pi_{rz} u_z)_{i,j+0.5} - r_{j-0.5} (\Pi_{rz} u_z)_{i,j-0.5}] + \\
& + \frac{1}{h_z} [(\Pi_{zr} u_r)_{i+0.5,j} - (\Pi_{zr} u_r)_{i-0.5,j}] + \\
& + \frac{1}{h_z} [(\Pi_{zz} u_z)_{i+0.5,j} - (\Pi_{zz} u_z)_{i-0.5,j}], \quad (z_i, r_j) \in \omega_h. \quad (5.5.6)
\end{aligned}$$

Далее строятся разностные аппроксимации непосредственно для компонент векторов плотности потока массы  $\vec{j}_m$ , теплового потока  $\vec{q}$  и для

компонент тензора вязких напряжений  $\Pi$ , записанных в виде (5.2.6)–(5.2.9). Эти величины аппроксимируются в полущелых точках. Например, величины, входящие в уравнение (5.5.3), аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned}(rj_{mr})_{i,j\pm 0.5} &= \rho_{i,j\pm 0.5}[r_{j\pm 0.5}(u_r)_{i,j\pm 0.5} - (rw_r)_{i,j\pm 0.5}], \\ (j_{mz})_{i\pm 0.5,j} &= \rho_{i\pm 0.5,j}[(u_z)_{i\pm 0.5,j} - (w_z)_{i\pm 0.5,j}].\end{aligned}$$

Остальные уравнения аппроксимируются аналогично.

К системе разностных уравнений (5.5.3)–(5.5.6) необходимо добавить начальные и граничные условия.

Для единообразного вычисления газодинамических величин во всех внутренних точках расчетной области, включая приграничные точки, вводится система фиктивных ячеек, примыкающих к каждой из границ. Значения плотности, компонент скорости и давления в фиктивных ячейках задаются таким образом, чтобы аппроксимировать нужное значение соответствующей величины, или ее производной, на границе, которая находится в полущелой точке.

Например, пусть на границе, расположенной в точке  $i = 1/2$ , задано значение температуры  $T_w$ . Точка  $i = 0$  является фиктивной, а точка  $i = 1$  является ближайшей прилегающей к границе внутренней точкой. Тогда значение  $T_0$  выбирается из условия

$$T_w = (T_0 + T_1)/2.$$

Если на границе задано условие на производную вида  $\partial f/\partial n = 0$ , то величина  $f_0$  в фиктивной точке выбирается в виде

$$f_0 = f_1.$$

Таким образом, алгоритм нахождения плотности, компонент скорости и давления на следующем временном слое состоит из двух этапов. Сначала заполняются фиктивные ячейки по указанному выше правилу. Затем вычисляются значения  $\hat{\rho}_{ij}$ ,  $(\hat{u}_r)_{ij}$ ,  $(\hat{u}_z)_{ij}$  и  $\hat{E}_{ij}$  на следующем временном слое.

Стационарное решение находится методом установления и считается достигнутым при выполнении следующего критерия:

$$\frac{1}{N_r N_z} \sum_{(z_i, r_j) \in \omega_h} \left| \frac{\hat{\rho}_{ij} - \rho_{ij}}{\rho_{ij} \Delta t} \right| \leq \epsilon, \quad (5.5.7)$$

в котором невязка  $\epsilon$  может варьироваться в зависимости от варианта расчета. В приведенных далее расчетах ее значение выбиралось в диапазоне от  $\epsilon = 10^{-3}$  до  $\epsilon = 10^{-7}$ . Здесь  $N_r$  и  $N_z$  — число узлов сетки по  $r$  и  $z$ .

Возможны и другие критерии установления стационарного решения, например:

$$\max_{(z_i, r_j) \in \omega_h} \left| \frac{\hat{\rho}_{ij} - \rho_{ij}}{\Delta t} \right| \leq \epsilon.$$

## 5.6 Введение искусственной диссипации

При решении задач газовой динамики могут встречаться различные особенности, например разрывы решения — ударные волны и контактные разрывы. В этих случаях попытки осуществить расчет непосредственно по разностным схемам, полученным напрямую при аппроксимации исходных уравнений, оказываются неудачными. Например, для расчета ударной волны без явного выделения на сетке ее фронта применяется метод "размывания" фронта за счет введения в систему разностных уравнений некоторых диссипативных членов, называемых псевдовязкостью или искусственной вязкостью (см, например, [122]). Они моделируют действие реальной вязкости, т. е. преобразуют кинетическую энергию в тепловую. В этом случае вводится добавка к давлению вида

$$p \rightarrow p + \omega,$$

где  $\omega$  - искусственная вязкость.

Наиболее часто рассматривается линейная вязкость

$$\omega = -\nu\rho \frac{\partial u}{\partial x},$$

или квадратичная

$$\omega = -\nu\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

При решении задач газовой динамики для политропного газа, теплопроводность которого равна нулю, используют вязкость Неймана-Рихтмайера (см., например, [49]), которую можно получить из квадратичной, положив

$$\nu = \frac{\lambda}{V} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|.$$

Таким образом, псевдовязкость есть искусственный механизм, позволяющий осуществить сквозной расчет ударных волн без явного их выделения на сетке. Под областью фронта в этом случае понимается зона резкого изменения параметров течения. Ширина ударного перехода, обусловленная действием псевдовязкости, не имеет никакого отношения к реальной ширине фронта волны, которая составляет несколько длин свободного пробега молекул.

В КГД уравнениях в качестве регуляризатора, который позволяет осуществлять сквозной расчет, выступает  $\tau$ .

Для обеспечения устойчивости численного алгоритма в формулу (5.4.8) для вычисления релаксационного параметра  $\tau$  вводится добавка, пропорциональная шагу пространственной сетки. Это добавка определяет дополнительную искусственную диссипацию. Безразмерный коэффициент  $\tau$  вычисляется как:

$$\tau = \frac{Ma}{Re} \frac{T^\omega}{p Sc} + \alpha \frac{h}{c}, \quad (5.6.1)$$

где  $\alpha$  — численный коэффициент порядка единицы, который определяется подбором,  $h = \sqrt{h_z^2 + h_r^2}$ . При этом коэффициенты динамической вязкости  $\eta$  и теплопроводности  $\varkappa$  вычисляются через релаксационный параметр  $\tau$  как :

$$\eta = \tau p Sc, \quad \varkappa = \tau \frac{p Sc}{Pr(\gamma - 1)}. \quad (5.6.2)$$

Таким образом, стабилизирующая добавка  $\alpha h/c$  включается в  $\eta$  и  $\varkappa$  а, следовательно, и в выражения для теплового потока и силы трения на границе (5.3.7).

Оценим величину искусственной диссипации, исходя из формулы (5.6.1). Искусственная вязкость меньше истинной, когда

$$\frac{\alpha h}{c} < \frac{Ma}{Re} \frac{T^\omega}{Sc p}.$$

Учитывая связь  $c = \sqrt{T}$  и пренебрегая постоянными порядка единицы, получаем условие на регуляризирующую добавку :

$$\alpha h < \frac{Ma T^{\omega+1/2}}{Re p}. \quad (5.6.3)$$

Для случая  $\omega = 1/2$  формула (5.6.3) упрощается и принимает вид

$$\alpha h < \frac{Ma}{Re} \frac{1}{\rho}. \quad (5.6.4)$$

Введение искусственной диссипации, пропорциональной шагу сетки  $h$ , делает результирующую разностную схему схемой первого порядка точности по пространству.

Таким образом, предложенная разностная схема аппроксимирует начально-краевую задачу с первым порядком точности по времени и по пространству. Схема является явной, однородной и консервативной. Дополнительные слагаемые, пропорциональные  $\alpha h$ , интерпретируются как искусственные регуляризаторы.

Как показывает практика численных расчетов и анализ устойчивости описанной выше разностной схемы ограничение на временной шаг для такого рода схем определяется условием Куранта, которое имеет вид:

$$\Delta t \leq \beta \frac{h_{min}}{\max_{(z_i, r_j) \in \omega_h} c_{ij}}, \quad (5.6.5)$$

где  $\beta = \beta(\alpha)$  – числовой коэффициент,  $h_{min} = \min\{h_z, h_r\}$ .

Для разностной схемы, построенной для плоского одномерного течения одноатомного газа ( $\gamma = 5/3$ ,  $Pr = 2/3$ ), в акустическом приближении с использованием энергетических неравенств получено, что  $\beta \sim 0.12$  [43].

## 5.7 Задача о распаде сильного разрыва

В качестве первого примера рассмотрим одномерную задачу о распаде сильного разрыва в приближении невязкого нетеплопроводного газа. То есть будем решать задачу в рамках уравнений Эйлера. Тогда параметр  $\tau$  в (5.6.1) определяет величину искусственной диссипации и вычисляется как

$$\tau = \alpha \frac{h}{c}.$$

КГД уравнения для одномерного плоского течения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (5.7.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(j_m u)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad (5.7.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(j_m H)}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial(\Pi_{xx} u)}{\partial x}. \quad (5.7.3)$$

Здесь  $E$  и  $H$  — полная энергия единицы объема и полная удельная энтальпия, которые вычисляются по формулам:  $E = \rho u^2/2 + p/(\gamma - 1)$  и  $H = (E + p)/\rho$ . Вектор плотности потока массы вычисляется как

$$j_m = \rho(u - w),$$

где

$$w = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p).$$

Компонента тензора вязких напряжений, входящая в систему уравнений (5.7.1)–(5.7.3), определяется как

$$\Pi_{xx} = \Pi = \frac{4}{3} \eta \frac{\partial u}{\partial x} + u \tau \left( \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tau \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Вектор теплового потока  $q$  вычисляется как

$$q = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x} + \tau \rho u \left[ \frac{u}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + p u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right].$$

Обезразмеривание не изменяет вида уравнений. Релаксационный параметр и коэффициенты вязкости и теплопроводности в безразмерном виде вычисляются как

$$\tau = \alpha \frac{h}{c}, \quad \eta = \tau \cdot p \cdot Sc, \quad \varkappa = \frac{\tau \cdot p \cdot Sc}{Pr(\gamma - 1)}.$$

Введем равномерную сетку по координате  $x$  с шагом  $h$ , координатами узлов  $x_i$  и значениями индекса  $i = 0 \dots N_x - 1$ , а также сетку по времени с шагом  $\Delta t$ . Значения всех газодинамических величин — скорости, плотности, давления — определяются в узлах сетки. Значения потоков определяются в полуцелых узлах. Для решения задачи (5.7.1)–(5.7.3) используем явную по времени схему следующего вида:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_i &= \rho_i - \frac{\Delta t}{h} (j_{m,i+1/2} - j_{m,i-1/2}), \\ \rho_i \hat{u}_i &= \rho_i u_i + \frac{\Delta t}{h} \left[ (\Pi_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2}) - (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) - \right. \\ &\quad \left. - (j_{m,i+1/2} u_{i+1/2} - j_{m,i-1/2} u_{i-1/2}) \right], \end{aligned}$$

N варианта	$h$	$N_x$	$\Delta t$	$N_t$	$t_0$
1	1	200	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^3$	4
2	0.5	400	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^3$	4
3	0.25	800	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^3$	4
4	0.125	1600	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^4$	4
5	0.0625	3200	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^4$	4
6	0.03125	6400	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^4$	4

Таблица 5.1: Варианты расчета задачи о распаде разрыва

$$\hat{E}_i = E_i + \frac{\Delta t}{h} \left[ (\Pi_{i+1/2} u_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2} u_{i-1/2}) - (q_{i+1/2} - q_{i-1/2}) - \left( \frac{j_{m,i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} (E_{i+1/2} + p_{i+1/2}) - \frac{j_{m,i-1/2}}{\rho_{i-1/2}} (E_{i-1/2} + p_{i-1/2}) \right) \right],$$

$$p_i = (\gamma - 1) \left( E_i - \frac{\rho_i u_i^2}{2} \right).$$

Задача решается на отрезке  $0 \leq x \leq 200$ . Начальные условия представляют собой разрыв в точке  $x = 100$ . Значения газодинамических параметров справа и слева от разрыва составляют

$$\rho|_{t=0} = \begin{cases} 8, & x \leq 99 \\ 1, & x > 99 \end{cases}, \quad p|_{t=0} = \begin{cases} 480, & x \leq 99 \\ 1, & x > 99 \end{cases}, \quad u|_{t=0} = 0.$$

Расчеты проведены для  $\gamma = 5/3$ .

Эта задача, несмотря на простоту постановки, отражает основные особенности нестационарных газодинамических течений, поскольку в области течения формируются ударная волна, контактный разрыв и волна разрежения. Задача является показательным тестом для оценки точности численных алгоритмов для моделирования сверхзвуковых невязких газодинамических течений.

Параметры проведенных расчетов систематизированы в табл. 5.1, где указан номер варианта расчета, величина пространственного шага  $h$ , число точек сетки  $N_x$ , шаг по времени  $\Delta t$ , число шагов по времени  $N_t$  и безразмерное время счета  $t_0$ . При этом  $t_0 = 4$ , что соответствует целому ряду тестов, например, приведенных в [50], [37].

Результаты расчетов представлены на рис. 5.1–5.4. Здесь построены распределения плотности, давления и скорости на момент времени  $t_0 = 4$ , проведенных на сгущающихся пространственных сетках. Там же сплошной линией приведено автоматическое решение этой задачи соглас-

но [49]. Приведены распределения газодинамических величин во всей области расчета, а также представлены фрагменты решения в зоне ударной волны. Пунктирные линии соответствуют вариантам с 1 по 6, соответственно таблице. Варианту 1 соответствует пунктирная кривая, которая больше всего сглаживает автомодельное решение. Из приведенных рисунков наглядно видна сходимость численного решения к автомодельному при сгущении пространственной сетки.

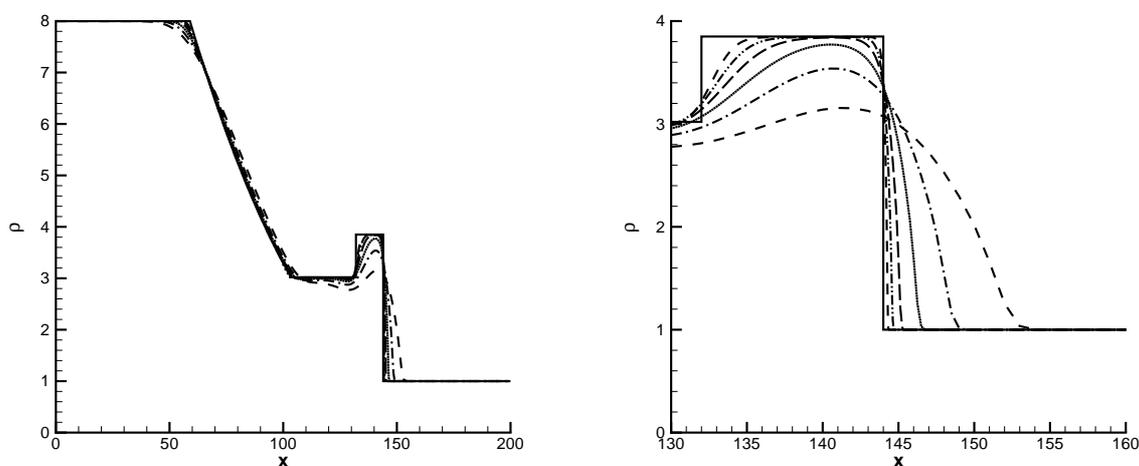


Рис. 5.1: Распределение плотности вдоль оси  $x$  (справа — в увеличенном масштабе)

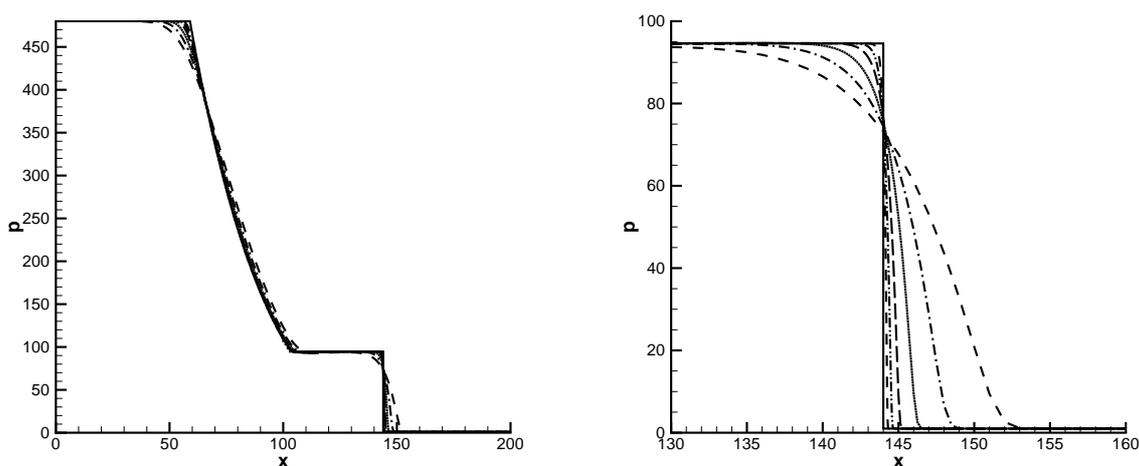


Рис. 5.2: Распределение давления вдоль оси  $x$  (справа — в увеличенном масштабе)

На рис. 5.4 показано влияние выбора коэффициента  $\alpha$ , определяющего величину параметра регуляризации, на точность численного ре-

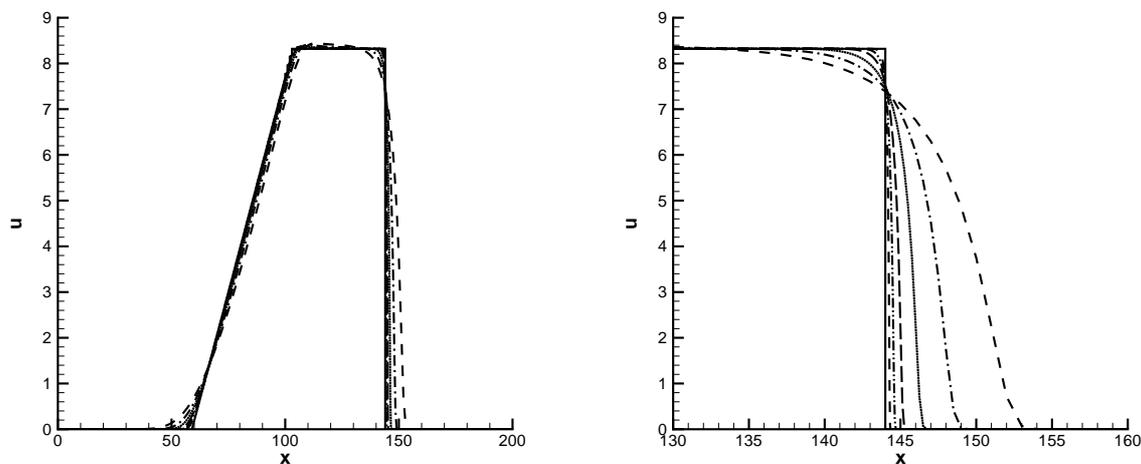


Рис. 5.3: Распределение скорости вдоль оси  $x$  (справа — в увеличенном масштабе)

шения. Видно, что с уменьшением  $\alpha$  точность численного решения возрастает. Однако при слишком маленьких значениях  $\alpha = 0.05$  и  $0.1$  в области фронта ударной волны появляются осцилляции, величина которых увеличивается при уменьшении  $\alpha$ . Подавление этой неустойчивости возможно при уменьшении шага по времени  $\Delta t$ . Оптимальное значение параметра регуляризации достигается при  $\alpha = 0.5$ .

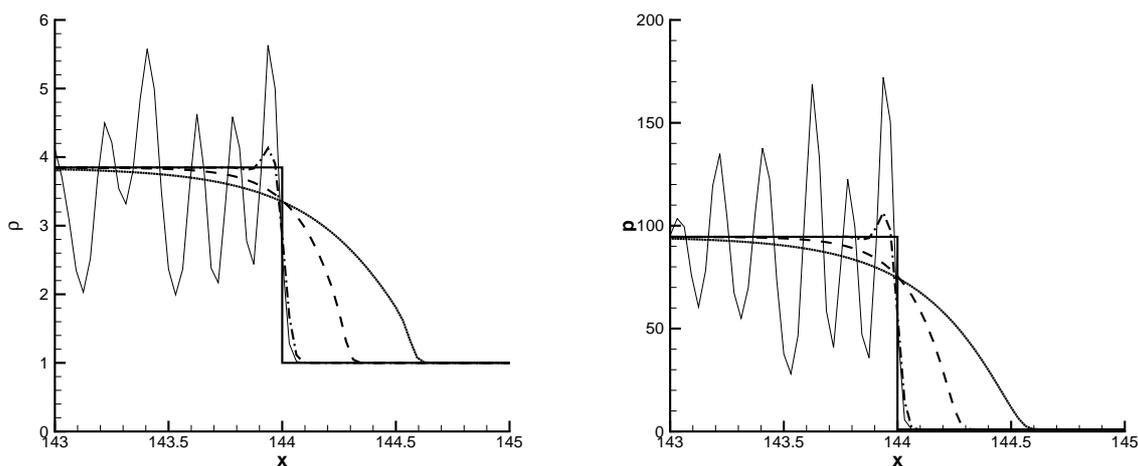


Рис. 5.4: Графики плотности (слева) и давления (справа) при  $\alpha = 0.05$  (тонкая линия),  $\alpha = 0.1$  (штрих-пунктир),  $\alpha = 0.5$  (пунктир),  $\alpha = 1$  (точки)

## 5.8 Задача о течении в окрестности цилиндра

### 5.8.1 Постановка задачи и особенности численного алгоритма

В качестве примера реализации выписанного двумерного алгоритма приведем результаты расчета задачи о течении в окрестности цилиндрического торца радиуса  $R_c$ , который помещен в однородный сверхзвуковой поток вязкого сжимаемого теплопроводного газа под нулевым углом атаки.

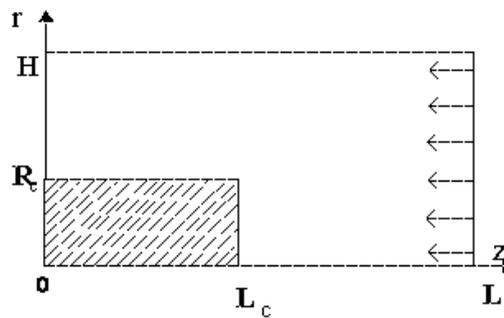


Рис. 5.5: Обтекание цилиндрического торца

Введем цилиндрическую систему координат, направив ось  $z$  вдоль оси цилиндра, а ось  $r$  вдоль поверхности торца (рис. 5.5). Размеры области расчета  $L \times H$ , размеры цилиндра  $L_c \times R_c$ , где  $R_c$  — радиус цилиндра.

Рассматриваем течение одноатомного газа твердых сфер со следующими параметрами:  $\gamma = 5/3$ ,  $Pr = 2/3$ ,  $Re = 1000$ ,  $Sc = 0.77$ ,  $\omega = 0.5$ .

В качестве начальных условий для системы (5.2.1)–(5.2.4) используем параметры набегающего потока:

$$\rho|_{t=0} = \rho_\infty, \quad u_z|_{t=0} = -U_\infty, \quad u_r|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = p_\infty. \quad (5.8.1)$$

После введения безразмерных величин, эти параметры равны  $\rho_\infty = 1$ ,  $U_\infty = -Ma$  и  $p_\infty = 1/\gamma$ .

На правой входной границе ( $z = L$ ,  $0 < r < H$ ) задаются параметры набегающего потока (5.8.1):

$$\rho = 1, \quad u_z = -Ma, \quad u_r = 0, \quad p = \frac{1}{\gamma}, \quad (5.8.2)$$

на оси симметрии ( $L_c < z < L$ ,  $r = 0$ ) — "условия симметрии":

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad u_r = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (5.8.3)$$

на торце цилиндра ( $z = L_c, 0 < r < R_c$ ) — "условия скольжения" для скорости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad u_z = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (5.8.4)$$

на боковой поверхности цилиндра ( $0 < z < L_c, r = R_c$ ) — "условия прилипания" для скорости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (5.8.5)$$

Поверхность цилиндра предполагается адиабатической.

На левой выходной и верхней свободной границах ставятся так называемые "мягкие" граничные условия, то есть предполагается равенство нулю нормальных производных плотности, давления и компонент скорости.

Выходная граница ( $z = 0, R_c < r < H$ ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (5.8.6)$$

свободная граница ( $0 < z < L, r = H$ ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (5.8.7)$$

Расчетная область для этой задачи приведена на рис. 5.6. Для того, чтобы с помощью введения фиктивных ячеек аккуратно аппроксимировать угловую точку с координатами  $L_c, R_c$ , модифицируем численный алгоритм следующим образом. Разобьем расчетную область  $L \times H$  на две подобласти  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{(z, r) : L_c < z < L, 0 < r < R\}, \\ \Pi_2 &= \{(z, r) : 0 < z < L_c, R_c < r < H\}, \end{aligned}$$

и будем искать численное решение в области  $G = \Pi_1 \cup \Pi_2$ .

Алгоритм нахождения основных газодинамических величин  $\rho, u_z, u_r, p$  на каждом временном слое включает два этапа. На первом этапе мы заполняем все фиктивные ячейки, используя граничные условия. На втором этапе вычисляем параметры течения на следующем временном слое  $\hat{\rho}, \hat{u}_z, \hat{u}_r, \hat{p}$  во всех внутренних точках области по одним и тем же формулам. Система уравнений на каждом временном шаге решается поочередно: сначала в правой области  $\Pi_1$ , а затем в левой области  $\Pi_2$  (для данной задачи, когда поток втекает справа). После этого происходит переход на следующий шаг по времени.

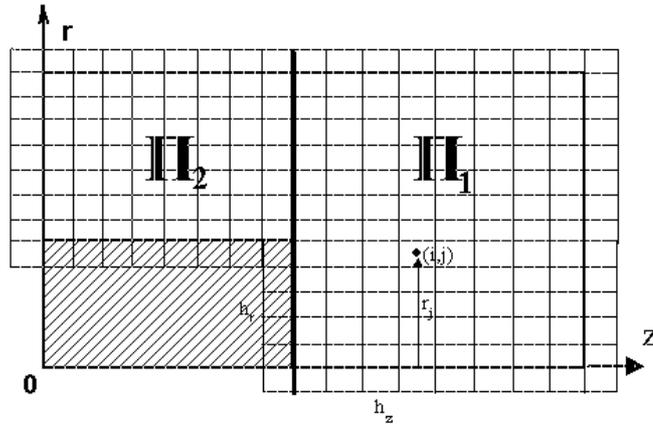


Рис. 5.6: Расчетная область и структура сетки

### 5.8.2 Результаты расчета

В данной задаче число Рейнольдса выбрано достаточно большим, и на торце цилиндра поставлены условия скольжения для скорости. Поэтому точность приведенных далее расчетов можно оценивать путем сопоставления параметров газа на торце цилиндра с параметрами торможения.

Параметры торможения — это значения плотности  $\rho_s$ , давления  $p_s$  и температуры  $T_s$  в точке торможения, вычисленные с использованием теоремы Бернулли (см, например, [3]):

$$p_s = p_2 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_{z2}^2}{c_2^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad T_s = T_2 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_{z2}^2}{c_2^2} \right), \quad \rho_s = \frac{\gamma p_s}{T_s},$$

где  $p_2$ ,  $u_{z2}$ ,  $T_2$ ,  $c_2$  — давление, скорость, температура и скорость звука за ударной волной, которые мы получаем из условий Ренкина-Гюгонио [3]:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}, \quad p_2 = p_1 \frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad (5.8.8)$$

$$u_{z2} = u_{z1} \frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}{(\gamma + 1)Ma_1^2}, \quad T_2 = \gamma \frac{p_2}{\rho_2}, \quad c_2 = \sqrt{T_2},$$

здесь  $\rho_1$ ,  $u_{z1}$ ,  $p_1$ ,  $T_1$  — известные параметры набегающего потока. Максимальное значение плотности в ударной волне, согласно (5.8.8), определяется как  $\rho_{max} = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ , и для  $\gamma = 5/3$  составляет  $\rho_{max} = 4$ .

Расстояние между ударной волной и торцом цилиндра  $S$  можно оценить на основе аппроксимационной формулы Лунева [48].

$$S = R_c \sqrt{k} (1 + 0.6 k), \quad k = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (5.8.9)$$

где  $\rho_1 = \rho_\infty$  — плотность на входной границе,  $\rho_2$  — плотность за ударной волной, рассчитанная по условиям Гюгонио (5.8.8). Положение ударной волны в расчете можно определять по положению звуковой линии, то есть линии, на которой локальное число Маха  $Ma = 1$ . Теоретические значения положения ударной волны помещены в табл. 5.2.

Ma	1.5	2	3	5	50
S	1.03	0.84	0.69	0.62	0.58

Таблица 5.2: Положение ударной волны

Расчеты проведены на равномерных пространственных сетках с шагами  $h_r = h_z = 0.05$  и  $h_r = h_z = 0.025$  для чисел Маха  $Ma = 1.5, 2, 3, 5, 50$  и различных значений параметра  $\alpha$ . В Таблице 5.3 приведены характеристики расчетов и сопоставление полученных в расчетах параметров торможения с теоретическими значениями (выделены жирным шрифтом).

Для всех чисел Маха, включая  $Ma = 50$ , полученные в расчете значения параметров торможения соответствуют теоретическим значениям, рассчитанным по формулам (5.8.8).

Распределение плотности и линии тока на момент установления стационарного течения для вариантов с числами Маха 1.5, 2, 3, 5 и 50 ( $\alpha = 0.5$  и  $\alpha = 1$ ) приведены на рис. 5.7. Там же показано изменение формы и положения ударной волны и структуры течения с ростом скорости набегающего потока (числа Маха). Полученные в расчетах значения положения ударных волн качественно совпадают с теоретическими значениями из табл. 5.2. Диапазон изменения давления значительно изменяется с ростом числа Маха, что наглядно демонстрирует формула (5.8.8). Так, для  $Ma = 1.5$  давление торможения составляет  $p_s = 2.28$ , а для  $Ma = 50$  увеличивается на три порядка до  $p_s = 2203.6$ .

На приведенных графиках видна высокая точность расчета скачков уплотнения и отсутствие осцилляций решения при больших числах  $Ma$ .

Оптимальным с точки зрения точности и эффективности алгоритма значением численного коэффициента является  $\alpha = 0.5$ . Скорость сходимости практически не зависит от параметра  $\alpha$ . При больших числах

Ma	$\alpha$	Сетка	$h_r = h_z$	$\Delta t$	Невязка $\epsilon$	Число шагов	Параметры торможения		
							$\rho_s$	$p_s$	$T_s$
Теоретические значения для $Ma = 1.5^*)$							<b>2.172</b>	<b>2.280</b>	<b>1.750</b>
1.5	1.0	$120 \times 120$	0.05	$10^{-3}$	$10^{-5}$	28 034	2.112	2.248	1.774
1.5	0.5	$120 \times 120$	0.05	$10^{-3}$	$10^{-5}$	27 363	2.156	2.280	1.763
1.5	0.5	$160 \times 120$	0.025	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	126 000	2.186	2.305	1.757
1.5	0.2	$120 \times 120$	0.05	$10^{-3}$	$10^{-5}$	27 637	2.189	2.303	1.753
Теоретические значения для $Ma = 2^*)$							<b>2.719</b>	<b>3.807</b>	<b>2.333</b>
2	1.0	$80 \times 60$	0.05	$10^{-3}$	$10^{-5}$	16 255	2.648	3.704	2.331
2	0.5	$80 \times 60$	0.05	$10^{-3}$	$10^{-5}$	15 473	2.720	3.781	2.317
2	0.2	$80 \times 60$	0.05	$10^{-3}$	$10^{-5}$	15 961	2.781	3.843	2.303
2	1.0	$160 \times 120$	0.025	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-5}$	30 903	2.717	3.777	2.317
2	0.5	$160 \times 120$	0.025	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-5}$	30 774	2.760	3.818	2.306
2	0.2	$160 \times 120$	0.025	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-5}$	31 494	2.791	3.848	2.298
Теоретические значения для $Ma = 3^*)$							<b>3.418</b>	<b>8.204</b>	<b>4.000</b>
3	1.0	$160 \times 120$	0.025	$10^{-4}$	$10^{-5}$	90 107	3.457	8.089	3.900
3	0.5	$160 \times 120$	0.025	$10^{-4}$	$10^{-5}$	91 504	3.525	8.204	3.879
Теоретические значения для $Ma = 5^*)$							<b>3.982</b>	<b>22.330</b>	<b>9.333</b>
5	1.0	$160 \times 120$	0.025	$10^{-4}$	$10^{-5}$	57 436	4.076	21.914	8.961
5	0.5	$160 \times 120$	0.025	$10^{-4}$	$10^{-5}$	57 505	4.167	22.287	8.914
Теоретические значения для $Ma = 50^*)$							<b>4.402</b>	<b>2203.6</b>	<b>834.33</b>
50	1.0	$80 \times 60$	0.05	$10^{-6}$	$10^{-4}$	125 000	4.756	2181.1	764.35
50	0.5	$80 \times 60$	0.05	$5 \cdot 10^{-6}$	$10^{-4}$	119 637	4.739	2211.8	777.87

\*) – теоретические значения рассчитаны по формулам (5.8.8)

Таблица 5.3: Расчет сверхзвукового осесимметричного течения

$Ma$  сгущение пространственной сетки приводит к увеличению точности численного решения.

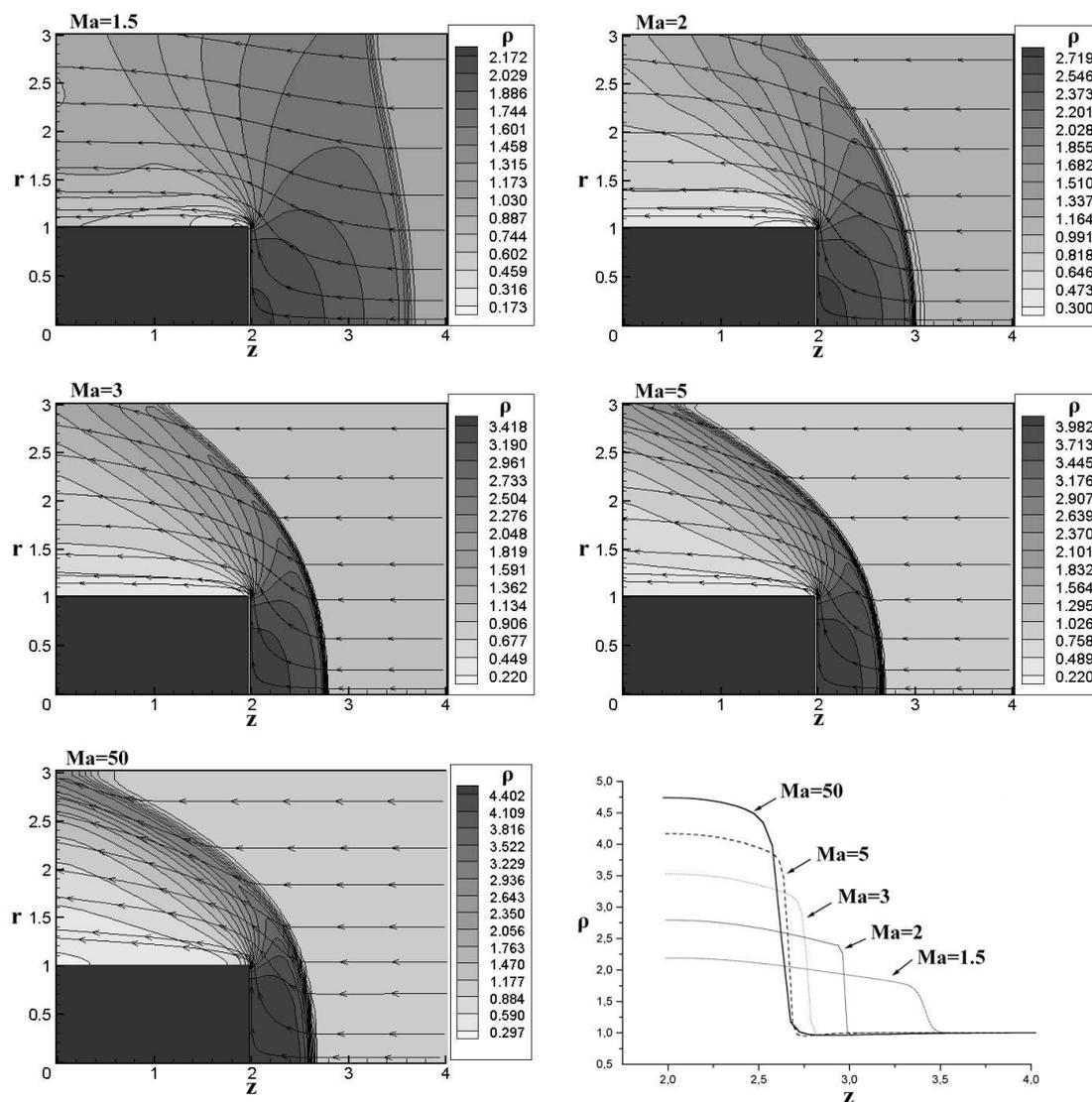


Рис. 5.7: Распределение плотности в осесимметричном течении

## 5.9 Задача о течении в плоском канале с уступом

Приведем пример расчета невязкого сверхзвукового течения в канале со ступенькой. Сложная конфигурация ударных волн, формирующихся с течением времени в канале, служит известным тестом для оценки работоспособности методов высокого порядка точности для решения уравне-

$V$	Сетка	$h_x = h_y$	$\Delta t$	Число шагов	$t$	Время	$\rho_{min}$	$\rho_{max}$
1	$120 \times 40$	0.025	0.001	4000	4	4 мин	0.551	4.464
2	$240 \times 80$	0.0125	0.0005	8000	4	40 мин	0.377	4.553
3	$480 \times 160$	0.00625	0.0001	40000	4	14 ч	0.247	4.595

Таблица 5.4: Расчет течения в канале с уступом

ний Эйлера и Навье–Стокса ([46], [47]).

Задача решается в следующей постановке: длина канала — 3, ширина — 1, высота ступеньки, расположенной на расстоянии 0.6 от начала канала, равна 0.2. Рассматривается течение невязкого нетеплопроводного газа ( $1/Re = 0$ ) с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ ,  $Ma = 3$ . Газ втекает справа (рис. 5.8).

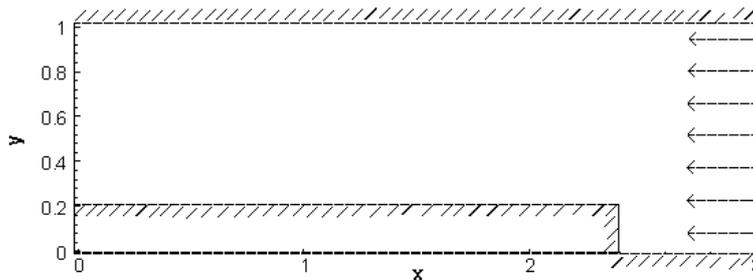


Рис. 5.8: Схема расчетной области в задаче о течении в канале с уступом

Течение описывается КГД системой, записанной в декартовой системе координат (5.1.1)–(5.1.4) в безразмерном виде. В качестве начальных условий используются параметры набегающего потока.

Граничные условия задаются следующим образом. На входной границе значения газодинамических параметров полагаются равными значениям набегающего потока, то есть  $\rho = 1$ ,  $u_x = -Ma$ ,  $u_y = 0$  и  $p = 1/\gamma$ .

На выходной границе задаются "мягкие" граничные условия  $\partial f / \partial x = 0$ , где  $f = (\rho, p, u_x, u_y)$ . На твердых стенках канала и ступеньки задаются граничные условия "симметрии":

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0, \quad u_n = 0,$$

где  $n$  — нормаль к соответствующей границе. Расчеты проведены на трех равномерных пространственных сетках. Основные параметры расчетов представлены в табл. 5.4. При вычислении релаксационного параметра  $\tau$  коэффициент  $\alpha = 0.3$ .

На рис. 5.9 приведены распределение плотности на момент времени  $t = 4$  (50 изолиний расположены эквидистантно), полученные при расчетах на последовательно сгущающихся сетках:  $120 \times 40$ ,  $240 \times 80$  и  $480 \times 160$ .

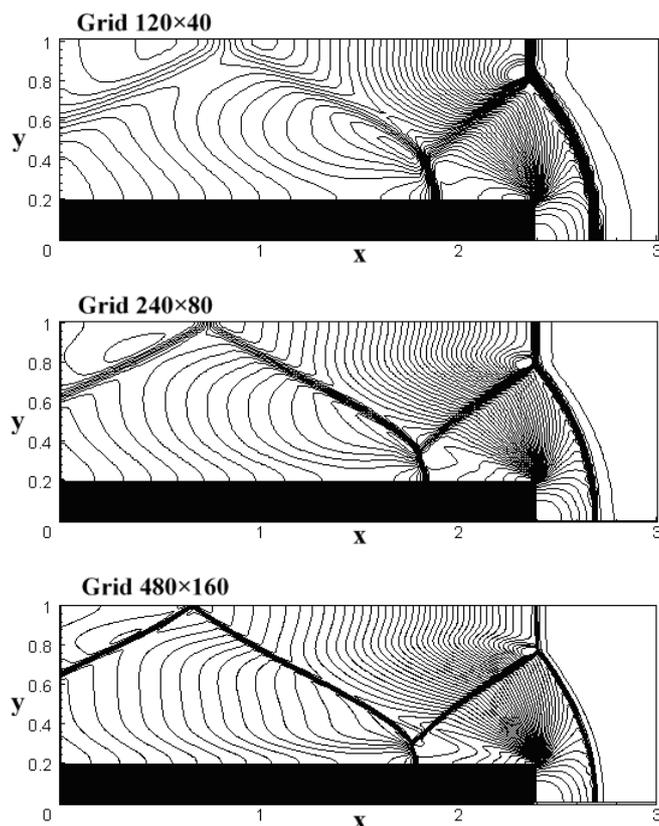


Рис. 5.9: Распределения плотности для течения в канале на момент времени  $t = 4$ . Расчеты на трех сгущающихся сетках.

Отчетливо прослеживается образование вторичных волн отражения от верхней стенки канала и верхней поверхности ступеньки. За волной разрежения над углом ступеньки плотность газа минимальна, вблизи контактного разрыва за тройной точкой над уступом плотность газа максимальна. Приведенные рисунки наглядно демонстрируют сходимость численного решения при сгущении пространственной сетки.

Картина течения, образующаяся на момент времени  $t = 4$ , соответствует данным [47], полученным с использованием кусочно-параболических схем третьего порядка точности по пространству, и ре-

зультатам [46], где применяются методы расщепления первого, второго и третьего порядка точности.

Полученные в расчетах минимальное и максимальное значения плотности на разных сетках приведены в табл. 5.4. Согласно работе [47], которая для этой задачи считается эталонной,  $\rho_{max}/\rho_{\infty} = 4.33$ ,  $\rho_{min}/\rho_{\infty} = 0.18$ . Видно, что максимальные значения плотности хорошо совпадают. При сгущении пространственной сетки величина  $\rho_{min}$  уточняется.

На рис. 5.10 приведен процесс установления течения. Изображено распределение плотности, полученное на моменты времени  $t = 0.5, 1, 2, 4, 7, 15$  на сетке  $240 \times 80$ .

## 5.10 Численный алгоритм расчета дозвуковых течений

Если скорость газа в интересующей нас задаче не превосходит скорость звука, то такие течения не сопровождаются формированием сильных ударных волн, хотя и в этих течениях могут существовать локальные сверхзвуковые зоны. Численное моделирование таких дозвуковых течений имеет свои особенности. В частности это касается способа регуляризации численного решения. В отличие от сверхзвуковых течений, дополнительная сложность здесь заключается в постановке условий на свободных границах.

В данном параграфе изложены особенности численного алгоритма расчета дозвуковых течений, отличающие этот метод от описанных выше алгоритмов расчета сверхзвуковых течений.

### 5.10.1 Безразмерный вид уравнений и введение регуляризации

При расчете дозвуковых течений, в отличие от сверхзвуковых задач, в качестве единицы скорости будем выбирать скорость набегающего потока  $u_{\infty}$ . То есть основными размерными параметрами будут плотность набегающего потока  $\rho_{\infty}$ , скорость набегающего потока  $u_{\infty}$  и характерный размер — обозначим его через  $h_0$ .

Соотношения между размерными и безразмерными величинами (знак

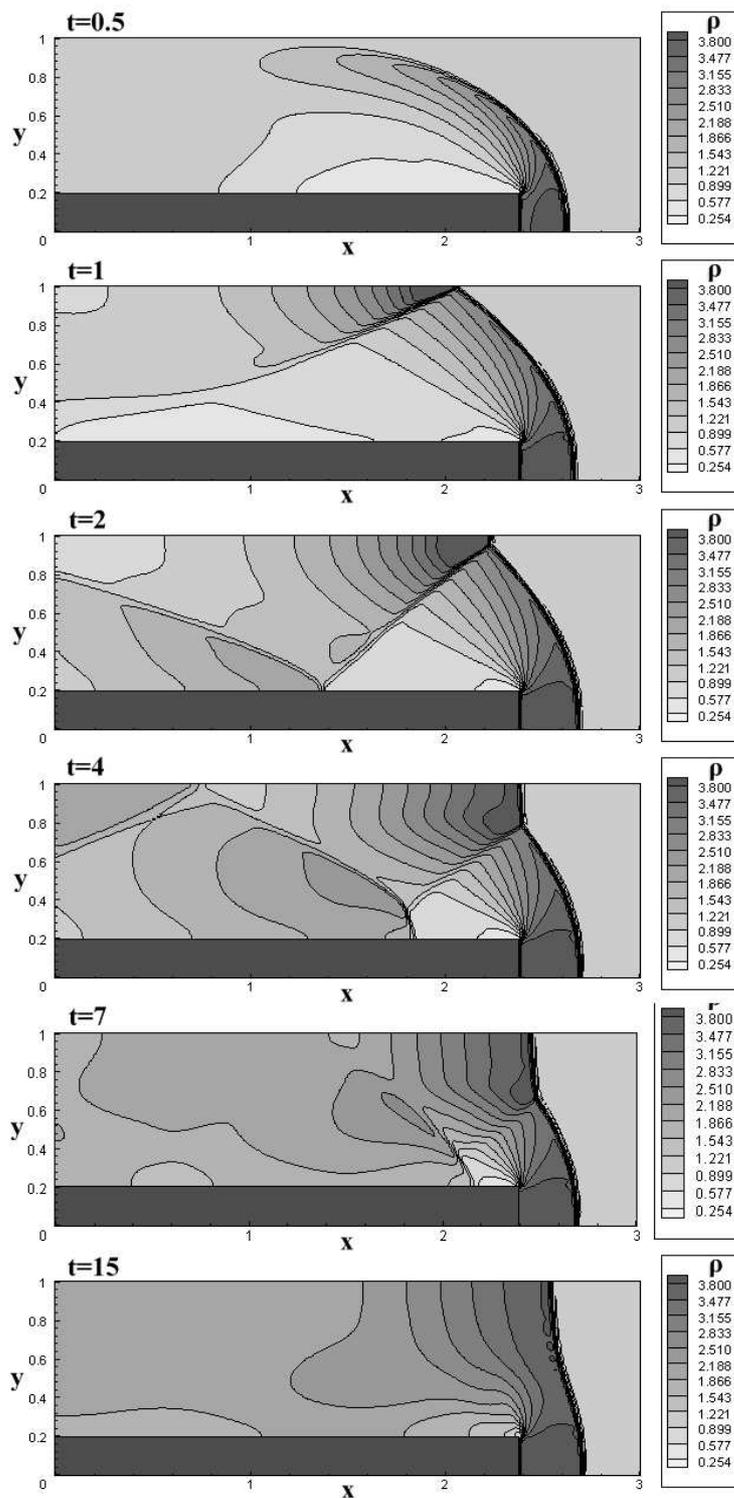


Рис. 5.10: Установление плотности в задаче о течении в канале с уступом

" $\sim$ " над переменной относится к безразмерным параметрам) имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho &= \tilde{\rho} \rho_{\infty}, & u &= \tilde{u} u_{\infty}, & p &= \tilde{p} \rho_{\infty} u_{\infty}^2, \\ x &= \tilde{x} h_0, & t &= \tilde{t} \frac{h_0}{u_{\infty}}, & T &= \tilde{T} \frac{u_{\infty}^2}{\gamma \mathcal{R}}. \end{aligned} \quad (5.10.1)$$

При этом безразмерные коэффициенты вязкости, теплопроводности и релаксации  $\tau$  вычисляются как

$$\eta = \frac{1}{Re} (Ma^2 T)^{\omega}, \quad \varkappa = \frac{\eta}{Pr(\gamma - 1)}, \quad \tau = \frac{\eta}{p Sc}. \quad (5.10.2)$$

Здесь, в отличие от алгоритма расчета сверхзвуковых течений, искусственную добавку, пропорциональную шагу пространственной сетки  $h$ , достаточно ввести только в дополнительные КГД слагаемые в виде:

$$\tau = \frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{p \cdot Sc} \cdot (Ma^2 \cdot T)^{\omega} + \frac{\alpha h}{c}, \quad (5.10.3)$$

где  $\alpha$  — численный коэффициент порядка единицы, который определяется подбором.

Безразмерные значения давления и температуры можно оценить как

$$\begin{aligned} T &\sim T_{\infty} = c_{\infty}^2 = \left( \frac{u_{\infty}}{Ma} \right)^2 = \frac{1}{Ma^2}, \\ p &\sim \frac{\rho_{\infty} \cdot T_{\infty}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma \cdot Ma^2}. \end{aligned}$$

где безразмерные параметры набегающего потока равны единице ( $\rho_{\infty} = 1$ ,  $u_{\infty} = 1$ ).

В результате оценочная формула для  $\tau$  имеет вид:

$$\tau = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\gamma \cdot Ma^2}{Sc} + \alpha \cdot h \cdot Ma.$$

Формально сеточную добавку можно считать малой, если

$$\alpha \cdot h < \frac{Ma}{Re}.$$

Подчеркнем, что здесь, в отличие от алгоритма расчета сверхзвуковых течений, дополнительные диссипативные слагаемые, пропорциональные шагу пространственной сетки  $\alpha h/c$ , не входят в выражения для коэффициентов  $\eta$  и  $\varkappa$ , а, следовательно, не входят в выражения для теплового потока и силы трения.

### 5.10.2 Постановка неотражающих граничных условий и пример расчета

В расчетах дозвуковых течений возникает проблема построения и численной реализации граничных условий на свободных границах расчетной области. Такие "неотражающие" граничные условия не должны искажать поле течения внутри расчетной области, обеспечивая поглощение или пропускание проходящих на границу возмущений, которые могут возникать внутри области расчета.

В качестве таких условий, как правило, используются граничные условия, основанные на инвариантах Римана для уравнений Эйлера — так называемые характеристические граничные условия. Эти условия применяются в расчетах как вязких, так и невязких течений с дозвуковыми скоростями на границах. Предложены многочисленные варианты постановки и численной реализации условий такого типа ([52], [53], [120] и др.). Однако их использование связано с серьезными трудностями, которые обусловлены как многочисленными вариантами их построения в дифференциальном и разностном виде, так и недостаточным математическим обоснованием этих условий для течений вязкого газа.

В рамках КГД алгоритма для постановки условий на свободных дозвуковых границах удастся использовать простые и естественные граничные условия, аналогичные условиям для течений вязкой несжимаемой жидкости [54]. Опишем постановку таких условий на примере задачи о течении вязкого сжимаемого газа в канале с внезапным расширением (рис. 5.11). Здесь  $h_0$  и  $l$  — высота и длина уступа,  $H$  и  $L$  — высота и длина канала соответственно.

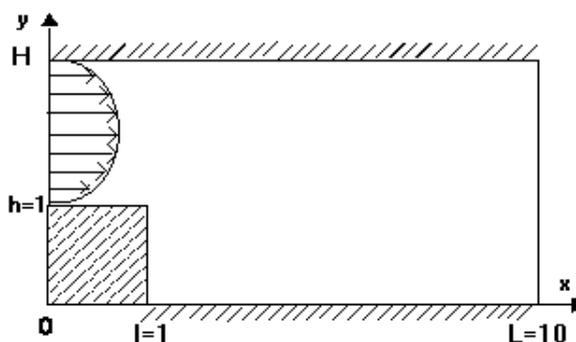


Рис. 5.11: Течение в канале с внезапным расширением

Предположим, что на входе в канал скорость течения представляет

собой параболу Пуазейля:

$$u_x(0, y) = -\frac{Re}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot (H - y) \cdot (h_0 - y), \quad u_y(0, y) = 0. \quad (5.10.4)$$

Из условия, что средняя безразмерная скорость на входе в канал равна единице

$$U_x(0) = \int_h^H u_x(y) dy = 1,$$

вычислим градиент давления на входе в канал. Для определенности положим  $H/h = 2$ . Тогда

$$u_x(y) = -6 \cdot (2 - y)(1 - y), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12}{Re}. \quad (5.10.5)$$

Граничные условия на входе (5.10.5) дополним условиями для плотности  $\rho(y) = 1$  и вертикальной компоненты скорости  $u_y(y) = 0$ .

На выходной границе также по аналогии со случаем несжимаемой жидкости [51], [54] используем так называемые "мягкие" граничные условия, за исключением давления, которое поддерживаем постоянным:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad p = \frac{1}{\gamma Ma^2}. \quad (5.10.6)$$

На твердых стенках будем задавать условия "прилипания" и "непротекания" совместно с условием адиабатичности для температуры.

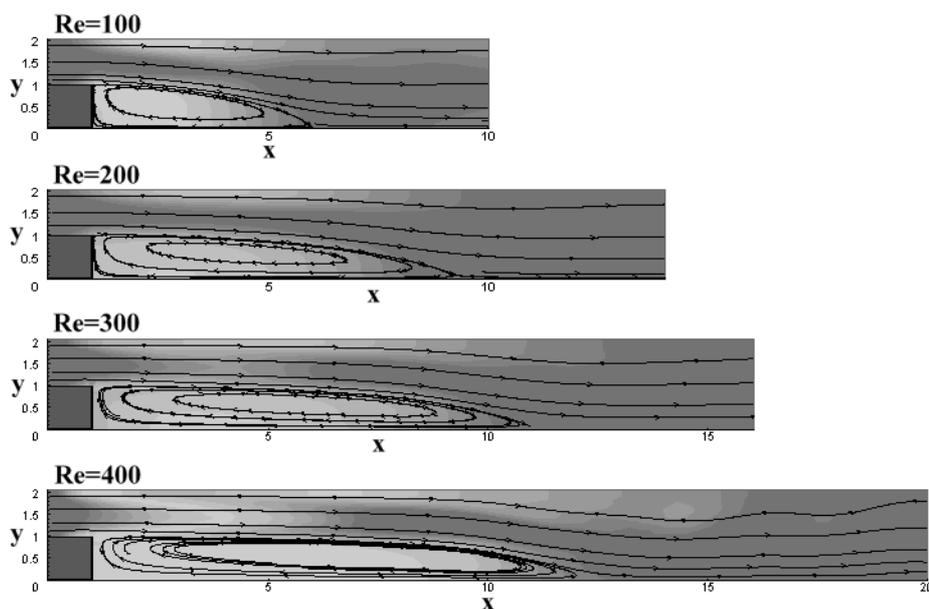
В качестве начальных условий используются параметры входного невозмущенного потока.

Описанный алгоритм использовался в расчетах течения воздушного потока при нормальном давлении. Значения молекулярных параметров для воздуха:  $\gamma = 1.4$ ,  $Pr = 0.737$ ,  $Sc = 0.737$ ,  $\omega = 0.74$ .

Расчеты проведены на равномерных пространственных сетках для чисел Рейнольдса  $Re = 100, 200, 300, 400$  и чисел Маха от  $Ma = 0.5$  до  $0.01$ . Использовались равномерные пространственные сетки с шагами  $h_x = h_y = 0.1$  и  $0.05$ . Шаги по времени  $\Delta t$  в безразмерных единицах выбирались в интервале  $10^{-3} - 10^{-4}$ . Стационарное решение находилось методом установления. Расчет прекращался при достижении невязки величины  $\sim 0.01-0.001$ .

Для рассмотренных течений градиенты плотности пропорциональны  $1/Ma^2$ , что позволяет проводить сопоставление решения с расчетами,

	эксперимент [104]	Жидкость [54]	Газ	
Re		$h_x = 0.05$	$h_x = 0.1$	$h_x = 0.05$
100	5	5	5.1	5.00
200	8.3	8.2	8.5	8.35
300	11.3	10.1	10.1	10.3
400	14.2	14.8	11.3	12.70

Таблица 5.5: Длина отрывной зоны  $L_s$  при разных числах  $Re$  и  $Ma = 0.1$ Рис. 5.12: Распределение плотности и длина отрывной зоны для разных чисел  $Re$  и  $Ma = 0.1$ .

выполненными в приближении вязкой несжимаемой жидкости [54] и данными эксперимента [104], проведенными при числах Маха  $\sim 0.01$ – $0.001$ .

Полученная в расчетах длина отрывной зоны  $L_s$  для всех вариантов хорошо соответствует эталонным результатам (рис. 5.12). При измельчении шага пространственной сетки длина отрывной зоны становится ближе к эталонному решению (табл. 5.5).

Длина отрывной зоны практически не зависит от числа Маха, когда  $0.01 < Ma < 0.5$ . При дальнейшем уменьшении ( $Ma < 0.01$ ) значительно замедляется скорость сходимости, поскольку время установления решения обратно пропорционально числу Маха.

На рис. 5.13 изображен процесс установления течения для варианта  $Re = 300$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $Ma = 0.1$ , сетка  $160 \times 120$ . На фоне распределения вертикальной составляющей скорости  $u_y$  приведены линии тока для

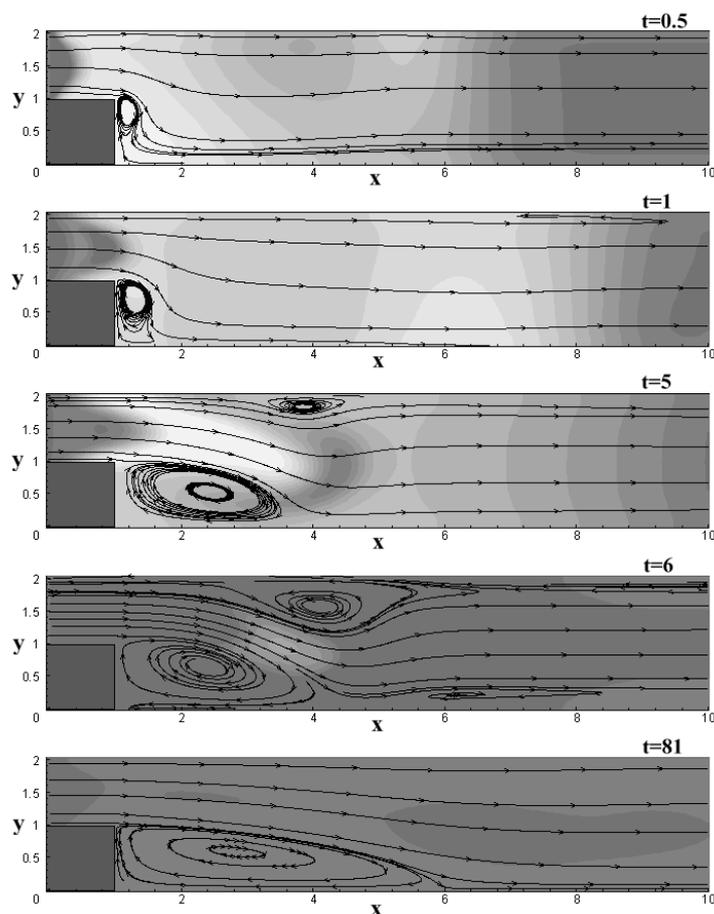


Рис. 5.13: Установление дозвукового течения в канале с внезапным расширением ( $Re = 100$ ,  $Ma = 0.1$ , распределение плотности и линии тока)

времен  $t = 1, 8, 15, 22, 238$ . Видно, что возмущения свободно пересекают выходную границу области.

Оптимальный диапазон значений для регуляризирующего параметра составляет  $0.5 < \alpha < 2$ . Этот диапазон соответствует наилучшей точности решения и минимальному числу шагов до сходимости.

С уменьшением числа Маха скорость сходимости построенного метода замедляется, что является естественным при использовании полных уравнений газовой динамики для расчета дозвуковых течений. Для численного моделирования течений с низкими числами Маха, так называемых слабосжимаемых течений, существуют специальные методы [63].

## Глава 6

# Алгоритмы решения КГД уравнений на неструктурированных сетках

В этой главе предложенные численные алгоритмы обобщаются на случай неструктурированных, или нерегулярных двумерных пространственных сеток. Топология регулярных сеток однозначно определяется индексами точек сетки. Для нерегулярных сеток такое соответствие не имеет места. Использование таких сеток представляется весьма перспективным для расчета течений в областях со сложной границей. Кроме того, свобода вычислителя в выборе расположения узлов пространственной сетки позволяет детально аппроксимировать зоны течения с сильными градиентами и уменьшает зависимость численного решения от заданного априори направления линий сетки.

Данная глава основана на работах [30], [55], [58].

### 6.1 Сетка и построение контрольного объема

При численном моделировании течений в областях со сложными границами не всегда удобно использовать прямоугольные пространственные расчетные сетки. Более общим видом сеток являются так называемые неструктурированные сетки, в которых расчетные узлы можно выбирать произвольным образом. Такие сетки позволяют, например, хорошо аппроксимировать границы области расчета, или характерные особенности течения. Далее, для простоты изложения, мы ограничимся рассмотрением двумерных расчетных областей.

Построим в области расчета разностную сетку таким образом, чтобы ее узлы попадали на границу области, и число узлов в области расчета было достаточным для описания интересующего нас течения.

В двумерном случае произвольная сетка задается совокупностью узлов  $M = \{M_i \in R^2, i = 1 \dots n\}$ . То есть сетку можно представить как систему треугольников с вершинами  $M_0, M_1, \dots, M_n$  (рис. 6.1). Пусть газодинамические величины  $\vec{u}, \rho, p, E$  заданы в узлах сетки  $M_i$ . Для построения разностной схемы будем использовать интегро-интерполяционный

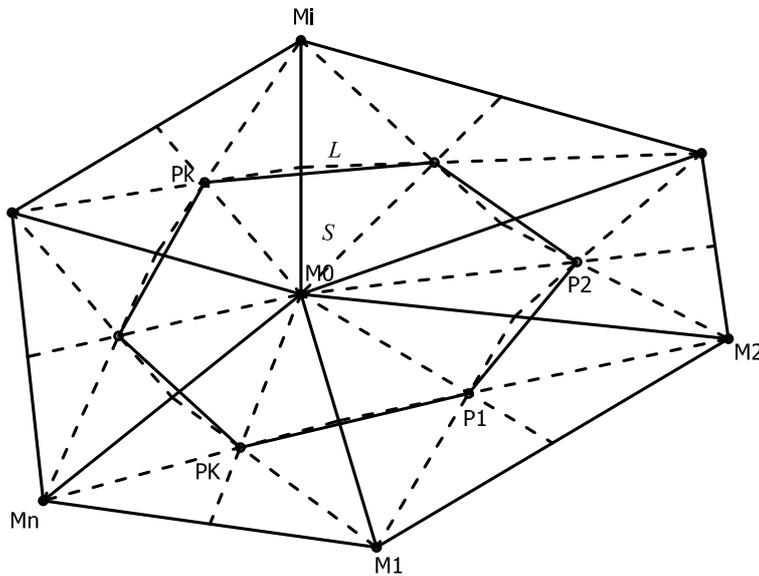


Рис. 6.1: Выбор контрольного объема

метод, или метод конечного объема [56]. При этом разностная аппроксимация уравнений строится на основе приближенного интегрирования уравнений, записанных в потоковом виде, по некоторому объему, который называется контрольным. На сетке, состоящей из треугольников, контрольный объем можно выбрать различными способами. Точность полученной разностной схемы в значительной мере определяется формой треугольников и способом выбора контрольного объема.

Приведем один из достаточно простых способов построения контрольного объема, который в то же время обеспечивает высокую точность разностной аппроксимации уравнений для достаточно регулярной треугольной сетки.

Для каждого узла  $M_i$  треугольной сетки строится контур, состоящий из точек  $P_k$  пересечения медиан треугольников, содержащий данный узел. Эти точки обозначим  $P_0, P_1, \dots, P_K$  (см. рис. 6.1). Обозначим число узлов контура  $L$  через  $K$ . Область, ограниченная этим контуром, представляет собой расчетную ячейку — контрольный объем. Напомним, что расчетная сетка является нерегулярной, поэтому число узлов контура  $K$  не фиксировано. На рис. 6.1 приведен контрольный объем с центром в точке  $M_0$  и границей  $L$ .

Выбранный выше способ построения контрольного объема накладывает ряд ограничений на структуру сетки. А именно, сетка должна быть

"достаточно хорошей", то есть узел, для которого строится контрольный объем, не должен выходить за границы контура  $L$ . Если сетка не удовлетворяет этому условию, то точность аппроксимации пространственных производных падает.

Второй вариант выбора контрольного объема, в виде так называемой ячейки Дирихле, помогает избежать данной проблемы. Ячейка Дирихле для точки  $M_0$  определяется как множество точек из области расчета, расположенных к узлу  $M_0$  ближе, чем к любому другому узлу из  $M_i$  [138]. Соседние узлы образуют шаблон точки  $M_0$ , на котором производится аппроксимация уравнений. То есть, если в приведенном выше алгоритме построения контрольного объема вместо соединения точек пересечения медиан взять точки пересечения перпендикуляров, восстановленных к серединам граней соседних треугольников, то полученный контрольный объем будет ячейкой Дирихле.

Для построения контрольного объема оказывается удобным использовать не произвольные сетки, а сетки, удовлетворяющие принципу триангуляции Делоне [55]. В таких сетках треугольники построены так, что в круг, описанный около любого треугольника, не попадает ни одного узла, отличного от вершин указанного треугольника.

Далее при построении разностного алгоритма для КГД уравнений будет использоваться контрольный объем, построенный на основе точек пересечения медиан.

## 6.2 Аппроксимация КГД уравнений

Запишем систему квазигазодинамических уравнений (3.3.1)–(3.3.3) для плоского двумерного течения в векторном виде. Введем обозначения:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ E \end{pmatrix}, \quad \vec{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix},$$

$$W_1 = -\vec{j}_m, \quad \begin{pmatrix} W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \Pi - \vec{j}_m \otimes \vec{u} - p\vec{e}, \quad W_4 = \Pi\vec{u} - \vec{q} - \frac{E + p}{\rho}\vec{j}_m.$$

Здесь  $E = \frac{\rho u^2}{2} + \varepsilon\rho$  — полная энергия. Тогда систему уравнений можно записать в виде одного векторного уравнения:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{W} = 0, \quad (6.2.1)$$

где введено обозначение

$$\operatorname{div} \vec{W} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} W_1 \\ \operatorname{div} W_2 \\ \operatorname{div} W_3 \\ \operatorname{div} W_4 \end{pmatrix}.$$

Далее все операции с  $\vec{W}$  также осуществляются покомпонентно.

В соответствии с методом конечного объема, проинтегрируем (6.2.1) по контрольному объему.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{U} dS - \oint_L (\vec{W} \cdot \vec{n}) dl = 0. \quad (6.2.2)$$

Здесь для интеграла от  $\vec{W}$  использовали формулу Остроградского–Гаусса, связывающую интеграл по объему с интегралом по поверхности (в трехмерном случае) или формулу Грина (в двумерном случае [57]).  $S$  — площадь ячейки Дирихле,  $L$  — контур ячейки,  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к контуру.

Далее к первому слагаемому в (6.2.2) применим формулу среднего значения, получим

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \frac{1}{S} \oint_L (\vec{W} \cdot \vec{n}) dl, \quad (6.2.3)$$

где  $\vec{U} = \frac{1}{S} \oint_S \vec{U} dS$  — среднее значение скорости  $\vec{U}$  в центре расчетной ячейки  $S$ . Далее обозначим  $\vec{U}$  через  $\bar{U}$ .

Аппроксимируем контурный интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} & \oint_L (\vec{W} \cdot \vec{n}) dl = \\ & = \sum_k (W_x(P_{k+1/2})n_x(P_{k+1/2}) + W_y(P_{k+1/2})n_y(P_{k+1/2})) L_k. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Здесь значения потоков  $W_x$ ,  $W_y$  и проекций нормалей  $n_x$ ,  $n_y$  вычисляются в серединах  $P_{k+1/2}$  отрезков  $L_k = L(P_k, P_{k+1})$ , составляющих контур  $L$ .

Итак, получим разностную формулу для метода конечного объема:

$$\hat{U}_i = U_i - \frac{\Delta t}{S} \sum_k (W_x(P_{k+1/2})n_x(P_{k+1/2}) + W_y(P_{k+1/2})n_y(P_{k+1/2})) \quad (6.2.5)$$

При расчете по формуле (6.2.5) потребуются значения частных производных по  $x$  и  $y$  от плотности, скорости и давления в серединах отрезков  $L_k$ . Значения газодинамических величин в серединах отрезков определяются как средние между значениями на концах.

Для аппроксимации уравнений (6.2.5) потребуются также значения газодинамических величин в центрах треугольников – точках пересечения медиан (точки  $P_0, P_1, \dots, P_K$ , рис. 6.1). Газодинамические величины в центре треугольников определяются как среднее арифметическое величин в вершинах треугольников.

### 6.3 Аппроксимация частных производных и разностная схема

Рассмотрим способы вычисления частных производных. Выпишем формулу Грина:

$$\iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial G} P dx + Q dy, \quad (6.3.1)$$

где  $P = P(x, y)$  и  $Q = Q(x, y)$  – некоторые скалярные функции, а также формулу, связывающую криволинейные интегралы второго и первого рода:

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \int_{\partial G} (P \cos \alpha + Q \cos \beta) dl. \quad (6.3.2)$$

Связь углов между касательной  $l$  и нормалью  $n$  к контуру  $\partial G$  представлена на рис. 6.2 и поясняется следующими формулами:

$$\vec{n} = \{n_x, n_y\} = \{\cos \alpha_x, \cos \alpha_y\}, \quad (6.3.3)$$

$$\frac{\partial x}{\partial l} = \cos \beta = \sin \gamma = -\cos \alpha_y = -n_y, \quad (6.3.4)$$

$$\frac{\partial y}{\partial l} = \cos \gamma = \sin \beta = \cos \alpha_x = n_x. \quad (6.3.5)$$

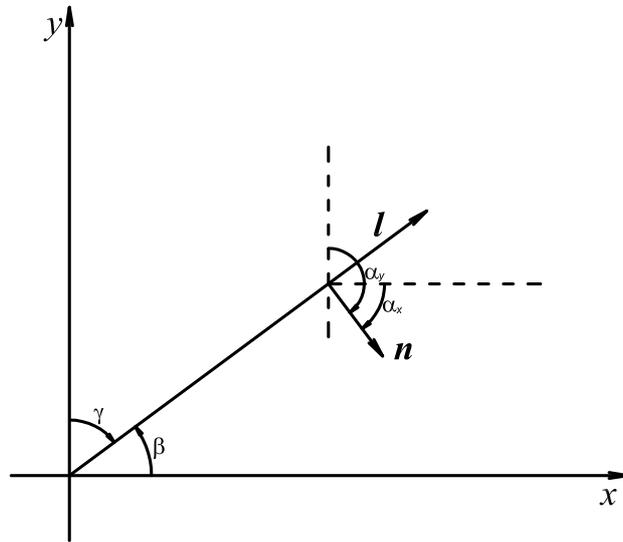


Рис. 6.2: Связь углов между касательной и нормалью

Пользуясь этими двумя формулами, найдем частные производные  $\frac{\partial P}{\partial x}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ . Для этого рассмотрим дивергенцию вектора  $\vec{A} = \{P, Q\}$ . Используя формулы (6.3.1)–(6.3.5), получим

$$\begin{aligned} \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\partial G} -Q dx + P dy = \\ &= \int_{\partial G} (-Q \cos \beta + P \cos \gamma) dl = \int_{\partial G} (Q n_y + P n_x) dl = \int_{\partial G} (\vec{A} \cdot \vec{n}) dl. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Далее

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = \int_{\partial G} P n_x dl, \quad (6.3.7)$$

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy = \int_{\partial G} Q n_y dl, \quad (6.3.8)$$

или, используя формулу о среднем, получим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{S} \int_{\partial G} P n_x dl \quad (6.3.9)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{S} \int_{\partial G} Q n_y dl, \quad (6.3.10)$$

где  $S$  — площадь области  $G$ .

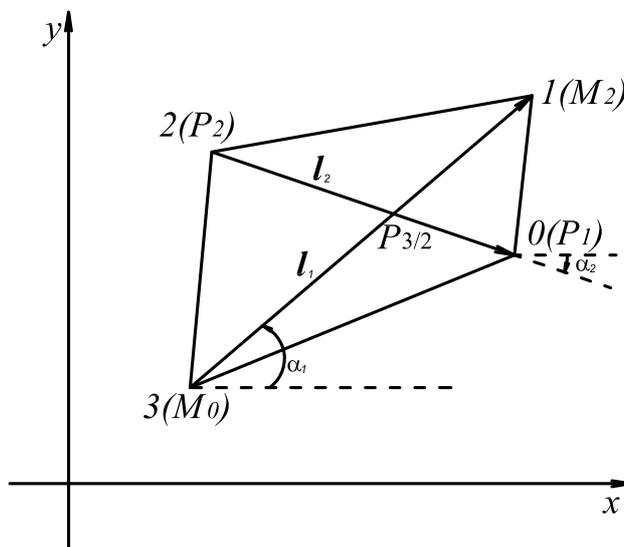


Рис. 6.3: Контур  $\partial G$  для вычисления частных производных

Рассмотрим способы для выражения производных. Обратимся к рис. 6.3 и рассмотрим, например, четырехугольник  $M_0, P_1, M_2, P_2$ , который образует область  $G$ . Рассмотрим величину  $f$ , определенную в вершинах четырехугольника, и найдем ее частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  в точке  $P_{3/2}$ .

Частные производные можно искать двумя способами: используя формулы Грина (6.3.9)–(6.3.10), т.е. через интеграл по контуру 0123:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{S} \int_{\partial G} f n_x dl, \quad (6.3.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{S} \int_{\partial G} f n_y dl, \quad (6.3.12)$$

или используя производные по направлениям  $l_1, l_2$ :

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l_1}, \quad (6.3.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_2} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l_2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l_2}. \quad (6.3.14)$$

Раскроем интегралы в формулах (6.3.11)–(6.3.12) по аналогии с (6.2.4). Компоненты единичного вектора нормали можно выразить через координаты точек следующим образом

$$\begin{aligned} \vec{n}(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \{\cos \alpha, \sin \alpha\} = \\ &= \{y_2 - y_1, x_1 - x_2\} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

а площадь

$$S = \frac{1}{2} [(x_3 - x_1)(y_0 - y_2) + (x_0 - x_2)(y_1 - y_3)]. \quad (6.3.16)$$

Далее:

$$\begin{aligned} S \frac{\partial f}{\partial x} &= \int_{0123} f n_x dl = \sum_{i=0}^3 \frac{f_{i+1} + f_i}{2} (y_{i+1} - y_i) = \\ &= \frac{f_1 + f_0}{2} (y_1 - y_0) + \frac{f_2 + f_1}{2} (y_2 - y_1) + \\ &+ \frac{f_3 + f_2}{2} (y_3 - y_2) + \frac{f_0 + f_3}{2} (y_0 - y_3) = \\ &= \frac{1}{2} [y_1(f_0 - f_2) + y_0(f_3 - f_1) + y_2(f_1 - f_3) + y_3(f_2 - f_0)] = \\ &= \frac{1}{2} [(f_2 - f_0)(y_3 - y_1) + (f_1 - f_3)(y_2 - y_0)]. \end{aligned}$$

Итак, в результате получим формулу, выражающую производную в  $P_{3/2}$  через координаты узлов контура 0123 и значения функции в этих узлах

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(f_2 - f_0)(y_3 - y_1) + (f_1 - f_3)(y_2 - y_0)}{2S}. \quad (6.3.17)$$

Аналогично

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(f_2 - f_0)(x_1 - x_3) + (f_1 - f_3)(x_0 - x_2)}{2S}. \quad (6.3.18)$$

Теперь рассмотрим второй способ, т.е. выразим частные производные через производные по направлению. Для этого решим систему (6.3.13)–

(6.3.14) относительно  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial l_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l_1} \\ \frac{\partial f}{\partial l_2} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l_2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l_2}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial l_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha_1 \\ \frac{\partial f}{\partial l_2} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha_2, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial l_1} \sin \alpha_2 - \frac{\partial f}{\partial l_2} \sin \alpha_1}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}, \quad (6.3.19)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial l_1} \cos \alpha_2 - \frac{\partial f}{\partial l_2} \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}. \quad (6.3.20)$$

Используя формулы (6.3.3)–(6.3.5), получим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial l_1} \sin \alpha_2 - \frac{\partial f}{\partial l_2} \sin \alpha_1}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}, \quad (6.3.21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial l_1} \cos \alpha_2 - \frac{\partial f}{\partial l_2} \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}. \quad (6.3.22)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial l_1} n_{2x} - \frac{\partial f}{\partial l_2} n_{1x}}{-n_{2x} n_{1y} + n_{1x} n_{2y}}, \quad (6.3.23)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial l_1} n_{2y} + \frac{\partial f}{\partial l_2} n_{1y}}{-n_{1x} n_{2y} + n_{2x} n_{1y}}. \quad (6.3.24)$$

Применяя (6.3.15), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\frac{f_1 - f_3}{L_{13}} \frac{y_0 - y_2}{L_{20}} - \frac{f_0 - f_2}{L_{20}} \frac{y_1 - y_3}{L_{13}}}{-\frac{y_0 - y_2}{L_{20}} \frac{x_3 - x_1}{L_{13}} + \frac{y_1 - y_3}{L_{13}} \frac{x_2 - x_0}{L_{20}}} = \\ &= \frac{-(f_1 - f_3)(y_2 - y_0) + (f_2 - f_0)(y_1 - y_3)}{-(y_2 - y_0)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_3)(x_2 - x_0)} = \\ &= \frac{(f_2 - f_0)(y_1 - y_3) - (f_1 - f_3)(y_2 - y_0)}{-2S}, \end{aligned}$$

что совпадает с (6.3.17). Аналогично для  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Далее, выразив компоненты вектора  $\vec{W}$  через  $\rho$ ,  $\vec{u}$ ,  $p$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$  и частные производные, можем решить систему (6.2.5) относительно  $\rho$ ,  $\vec{u}$ ,  $p$ .

Таким образом, разностная схема примет следующий вид:

$$\hat{\rho}_i = \rho_i - \frac{\Delta t}{S} \sum_k \left( j_{m,k+1/2}^x n_{k+1/2}^x + j_{m,k+1/2}^y n_{k+1/2}^y \right) L_k,$$

$$\begin{aligned} \hat{u}^x_i &= \frac{1}{\hat{\rho}_i} \left( \rho_i u_i^x - \frac{\Delta t}{S} \sum_k \left( \left[ \Pi_{k+1/2}^{xx} - j_{m,k+1/2}^x u_{k+1/2}^x - p \right] n_{k+1/2}^x + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left[ \Pi_{k+1/2}^{xy} - j_{m,k+1/2}^x u_{k+1/2}^y \right] n_{k+1/2}^y \right) L_k \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}^y_i &= \frac{1}{\hat{\rho}_i} \left( \rho_i u_i^y - \frac{\Delta t}{S} \sum_k \left( \left[ \Pi_{k+1/2}^{yx} - j_{m,k+1/2}^y u_{k+1/2}^x \right] n_{k+1/2}^x + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left[ \Pi_{k+1/2}^{yy} - j_{m,k+1/2}^y u_{k+1/2}^y - p \right] n_{k+1/2}^y \right) L_k \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_i &= E_i + \frac{\Delta t}{S} \sum_k \left( \left[ \Pi_{k+1/2}^{xx} u_{k+1/2}^x + \Pi_{k+1/2}^{xy} u_{k+1/2}^y - q_{k+1/2}^x - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{E_{k+1/2} + p_{k+1/2}}{\rho_{k+1/2}} j_{m,k+1/2}^x \right] n_{k+1/2}^x + \left[ \Pi_{k+1/2}^{yx} u_{k+1/2}^x + \Pi_{k+1/2}^{yy} u_{k+1/2}^y - q_{k+1/2}^y - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{E_{k+1/2} + p_{k+1/2}}{\rho_{k+1/2}} j_{m,k+1/2}^y \right] n_{k+1/2}^y \right) L_k, \\ \hat{p}_i &= (\gamma - 1) \left( \hat{E}_i - \hat{\rho}_i \frac{(\hat{u}_i^x)^2 + (\hat{u}_i^y)^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Здесь индекс  $i$  — номер узла сетки,  $k$  — номер узла контура  $L$ .

$$E_{k+1/2} = \rho_{k+1/2} \frac{(u_{k+1/2}^x)^2 + (u_{k+1/2}^y)^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} p_{k+1/2},$$

$$\tau_k = \alpha \frac{\sum_{k=0}^K L_{k,k+1}}{K} \left( \gamma \frac{p_k}{\rho_k} \right)^{-1/2}, \quad \eta_k = p_k Sc \tau_k,$$

$$w_{k+1/2}^x = \frac{\tau_{k+1/2}}{\rho_{k+1/2}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho (u^x)^2 \right)_{k+1/2} + \left( \frac{\partial}{\partial y} \rho u^x u^y \right)_{k+1/2} + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{k+1/2} \right],$$

$$w_{k+1/2}^y = \frac{\tau_{k+1/2}}{\rho_{k+1/2}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho u^x u^y \right)_{k+1/2} + \left( \frac{\partial}{\partial y} \rho (u^y)^2 \right)_{k+1/2} + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{k+1/2} \right],$$

$$\vec{j}_{m,k} = \rho (\vec{u}_k - \vec{w}_k),$$

$$\Pi_{nsk+1/2}^{xx} = \eta_{k+1/2} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{\partial u^x}{\partial x} \right)_{k+1/2} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u^y}{\partial y} \right)_{k+1/2} \right],$$

$$\Pi_{nsk+1/2}^{xy} = \eta_{k+1/2} \left[ \left( \frac{\partial u^x}{\partial x} \right)_{k+1/2} + \left( \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{k+1/2} \right],$$

$$\Pi_{nsk+1/2}^{yx} = \eta_{k+1/2} \left[ \left( \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{k+1/2} + \left( \frac{\partial u^x}{\partial y} \right)_{k+1/2} \right],$$

$$\Pi_{nsk+1/2}^{yy} = \eta_{k+1/2} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{\partial u^y}{\partial y} \right)_{k+1/2} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u^x}{\partial x} \right)_{k+1/2} \right],$$

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1/2}^{xx} = & \Pi_{nsk+1/2}^{xx} + \tau_{k+1/2} \left\{ u_{k+1/2}^x \left[ \rho_{k+1/2} \left( u_{k+1/2}^x \left( \frac{\partial u^x}{\partial x} \right)_{k+1/2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + u_{k+1/2}^y \left( \frac{\partial u^x}{\partial y} \right)_{k+1/2} \right) + 2 \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{k+1/2} \right] + \right. \\ & \left. \left. + u_{k+1/2}^y \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{k+1/2} + \gamma p_{k+1/2} \left( \left( \frac{\partial u^x}{\partial x} \right)_{k+1/2} + \left( \frac{\partial u^y}{\partial y} \right)_{k+1/2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1/2}^{xy} = & \Pi_{nsk+1/2}^{xy} + \tau_{k+1/2} \left\{ u_{k+1/2}^x \left[ \rho_{k+1/2} \left( u_{k+1/2}^x \left( \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{k+1/2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + u_{k+1/2}^y \left( \frac{\partial u^y}{\partial y} \right)_{k+1/2} \right) \right] + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{k+1/2} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1/2}^{yx} = & \Pi_{nsk+1/2}^{yx} + \tau_{k+1/2} \left\{ u_{k+1/2}^y \left[ \rho_{k+1/2} \left( u_{k+1/2}^x \left( \frac{\partial u^x}{\partial x} \right)_{k+1/2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + u_{k+1/2}^y \left( \frac{\partial u^x}{\partial y} \right)_{k+1/2} \right) \right] + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{k+1/2} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1/2}^{yy} = & \Pi_{nsk+1/2}^{yy} + \tau_{k+1/2} \left\{ u_{k+1/2}^y \left[ \rho_{k+1/2} \left( u_{k+1/2}^x \left( \frac{\partial u^y}{\partial x} \right)_{k+1/2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + u_{k+1/2}^y \left( \frac{\partial u^y}{\partial y} \right)_{k+1/2} \right) + 2 \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{k+1/2} \right] + \right. \\ & \left. \left. + u_{k+1/2}^x \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{k+1/2} + \gamma p_{k+1/2} \left( \left( \frac{\partial u^x}{\partial x} \right)_{k+1/2} + \left( \frac{\partial u^y}{\partial y} \right)_{k+1/2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{k+1/2}^x &= -\frac{\eta_{k+1/2}}{Pr} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{\partial p}{\partial x \rho} \right)_{k+1/2} - \\
 &- \tau_{k+1/2} \rho_{k+1/2} u_{k+1/2}^x \left[ \frac{1}{\gamma-1} \left( u_{k+1/2}^x \left( \frac{\partial p}{\partial x \rho} \right)_{k+1/2} + u_{k+1/2}^y \left( \frac{\partial p}{\partial y \rho} \right)_{k+1/2} \right) + \right. \\
 &\left. + p_{k+1/2} \left( u_{k+1/2}^x \left( \frac{\partial 1}{\partial x \rho} \right)_{k+1/2} + u_{k+1/2}^y \left( \frac{\partial 1}{\partial y \rho} \right)_{k+1/2} \right) \right], \\
 q_{k+1/2}^y &= -\frac{\eta_{k+1/2}}{Pr} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{\partial p}{\partial y \rho} \right)_{k+1/2} - \\
 &- \tau_{k+1/2} \rho_{k+1/2} u_{k+1/2}^y \left[ \frac{1}{\gamma-1} \left( u_{k+1/2}^x \left( \frac{\partial p}{\partial x \rho} \right)_{k+1/2} + u_{k+1/2}^y \left( \frac{\partial p}{\partial y \rho} \right)_{k+1/2} \right) + \right. \\
 &\left. + p_{k+1/2} \left( u_{k+1/2}^x \left( \frac{\partial 1}{\partial x \rho} \right)_{k+1/2} + u_{k+1/2}^y \left( \frac{\partial 1}{\partial y \rho} \right)_{k+1/2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Здесь  $K$  — число узлов в контуре  $L$ ,  $Pr$  — число Прандтля,  $Sc$  — число Шмидта,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\alpha$  — регуляризатор ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

Приведенная здесь разностная аппроксимация КГД уравнений построена для плоских двумерных течений на основе записи этих уравнений в виде (5.1.1) – (5.1.4). Разностная аппроксимация уравнений в цилиндрической геометрии строится аналогичным образом на основе записи уравнений в виде (5.2.1) – (5.2.4).

## 6.4 Аппроксимация граничных условий

Для замыкания системы КГД уравнений и ее численного решения осталось рассмотреть аппроксимацию граничных условий. Для этого обратимся к рис. 6.4.

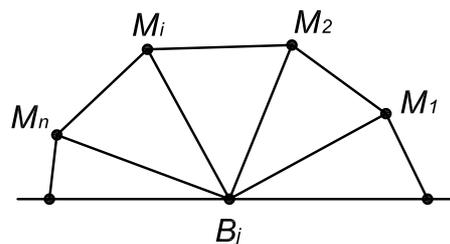


Рис. 6.4: Аппроксимация граничных условий.

Здесь  $B_j$  — граничные узлы,  $M_i$  — внутренние узлы сетки. Рассмотрим аппроксимацию граничных условий для некоторой величины  $f$  в узле  $B_j$ . Для остальных граничных узлов аппроксимация производится аналогичным образом. В результате расчета по разностной схеме (6.2.5) были определены значения величины  $f$  во внутренних узлах сетки. Будем определять значения на границе через средневзвешенные значения  $f$  во внутренних узлах, треугольники которых содержат данный граничный узел в качестве вершины. Для граничного узла  $B_j$  это будут внутренние узлы:  $M_1, M_2, \dots, M_n$ .

### Граничное условие I рода (условие Дирихле)

Запишем граничное условие Дирихле:

$$f|_{\Gamma} = f_0, \quad (6.4.1)$$

где  $\Gamma$  — граница области.

Аппроксимацию запишем следующим образом:

$$f(B_j) = f_0 \quad (6.4.2)$$

### Граничное условие II рода (условие Неймана)

Запишем граничное условие Неймана:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f_0. \quad (6.4.3)$$

Аппроксимацию запишем следующим образом:

$$f(B_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} f(M_i) + \frac{f_0}{N} \sum_{i=1}^{i=N} L(B_j, M_i). \quad (6.4.4)$$

Здесь  $L(B_j, M_i)$  — расстояние между точками  $B_j$  и  $M_i$ .

### Граничное условие III рода

Запишем граничное условие III рода:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial n} + \beta f \right] \Big|_{\Gamma} = f_0. \quad (6.4.5)$$

Аппроксимацию запишем следующим образом:

$$f(B_j) = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} f(M_i) + f_0 \sum_{i=1}^{i=N} L(B_j, M_i)}{N + \beta \sum_{i=1}^{i=N} L(B_j, M_i)}. \quad (6.4.6)$$

Здесь  $\beta$  — некоторая константа.

В заключение отметим, что приведенный выше подход естественным образом обобщается на случай  $r$ -геометрии.

## Глава 7

### Квазигидродинамические уравнения для течений вязкой несжимаемой жидкости

Эта глава целиком посвящена второй КГД системе - системе квазигидродинамических уравнений. Вид этих КГД уравнений был получен в работах Ю.В.Шеретова, среди которых укажем [7], [26], [82], [83]. Им же было проведено детальное исследование этих уравнений, выписан их вид для течения вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска и построена серия точных решений, которые были сопоставлены с соответствующими решениями уравнений Навье-Стокса. Для квазигидродинамической системы уравнений будем в этой главе вновь использовать сокращение КГД.

В данной главе построены новые алгоритмы для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости, основанные на этих КГД уравнениях, и приведены примеры их использования для двумерных и трехмерных нестационарных течений. При изложении использованы результаты работ [54], [84], [85], [88], [91], [99], [100], [123], [124].

#### 7.1 Квазигидродинамическая система уравнений

В первой главе была выписана квазигидродинамическая система уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0, \quad (7.1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}_m \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \Pi, \quad (7.1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \vec{j}_m \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \operatorname{div} \vec{q} = \\ = (\vec{j}_m \cdot \vec{F}) + \operatorname{div}(\Pi \cdot \vec{u}). \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Здесь

$$\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w}), \quad (7.1.4)$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho\vec{u} \otimes \vec{w}, \quad (7.1.5)$$

$$\vec{q} = -\alpha\vec{\nabla}T, \quad (7.1.6)$$

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}[\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p - \rho\vec{F}]. \quad (7.1.7)$$

Подставив выражения (7.1.4), (7.1.5) и (7.1.6) в (7.1.1)–(7.1.3), получим квазигидродинамическую систему уравнений в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = \operatorname{div}(\rho\vec{w}), \quad (7.1.8)$$

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla}p = \rho\vec{F} + \operatorname{div}\Pi_{NS} + \operatorname{div}[(\rho\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\rho\vec{u} \otimes \vec{w})], \quad (7.1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \rho\vec{u} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) + p\vec{u} \right] + \operatorname{div}\vec{q} = \rho\vec{F} \cdot (\vec{u} - \vec{w}) + \\ + \operatorname{div}(\Pi_{NS} \cdot \vec{u}) + \operatorname{div} \left[ \rho\vec{w} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) + p\vec{w} + \rho\vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u}) \right]. \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

Для многих гидродинамических течений изменением плотности жидкости можно пренебречь. Считая величину  $\rho$  постоянной, и учитывая ее изменение только в слагаемом с выталкивающей силой, запишем систему (7.1.8)–(7.1.10) в виде, удобном для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска

$$\operatorname{div}(\vec{u} - \vec{w}) = 0, \quad (7.1.11)$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{\nabla}\vec{u} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Pi - \beta\vec{g}T \quad (7.1.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{\nabla}T = \chi\Delta T. \quad (7.1.13)$$

Здесь  $\rho = \text{const} > 0$  — среднее значение плотности,  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  — гидродинамическая скорость,  $p = p(\vec{x}, t)$  — давление, отсчитываемое от гидростатического,  $T = T(\vec{x}, t)$  — отклонение температуры от ее среднего значения  $T_0$ .

Навье-стоксовский тензор вязких напряжений и вектор  $\vec{w}$  вычисляются как

$$\Pi_{NS} = \eta[(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T], \quad (7.1.14)$$

$$\vec{w} = \tau \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \beta \vec{g} T \right]. \quad (7.1.15)$$

В уравнениях (7.1.11)–(7.1.13), а также в выражениях (7.1.14)–(7.1.15) коэффициенты динамической вязкости  $\eta$  и температуропроводности  $\chi$ , температурный коэффициент расширения жидкости  $\beta$  и характерное время  $\tau$  считаются положительными постоянными,  $\vec{g}$  — ускорение свободного падения. Параметр  $\tau$  может быть вычислен по формуле  $\tau = \eta(\rho c_s^2)^{-1}$ , где  $c_s$  — скорость звука в жидкости при температуре  $T_0$ . Величина  $\rho \vec{u}$  интерпретируется как пространственно-временной средний импульс единицы объема жидкости.

При  $\tau \rightarrow 0$  КГД система уравнений переходит в классическую систему уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска.

Система КГД уравнений (7.1.11)–(7.1.15) была построена в [83] и детально исследована в [7], [26], [82]. В частности, было показано, что данная КГД система является диссипативной. Для нее выписано уравнение, описывающее изменение во времени кинетической энергии с неотрицательной диссипативной функцией в правой части. В [82] была построена серия точных решений КГД уравнений, совпадающих с известными решениями классической системы уравнений Навье–Стокса. В частности, это закон Архимеда, течения Куэтта и Пуазейля, решения нестационарных задач Стокса и Рэлея, решение задачи о течении в плоском вертикальном слое.

КГД система может быть приведена к эквивалентному дивергентному виду, который используется для численного решения

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \quad (7.1.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \\ & = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi_{NS} + \operatorname{div}[(\vec{w} \otimes \vec{v}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})] - \beta \vec{g} T, \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u} T) = \operatorname{div}(\vec{w} T) + \chi \nabla T. \quad (7.1.18)$$

При исследовании течений в замкнутых областях для КГД системы используются традиционные граничные условия, принятые в теории Навье–Стокса, дополненные условием непротекания массы в виде  $(\vec{j} \cdot \vec{n}) = 0$ , где  $\vec{n}$  — поле внешних единичных нормалей к поверхности.

## 7.2 Вычислительный алгоритм

КГД уравнения для описания вязких несжимаемых течений позволяют строить эффективные численные алгоритмы решения уравнений гидродинамики в переменных скорость–давление. Эти новые алгоритмы имеют целый ряд преимуществ по сравнению с традиционными численными методами, построенными на основе уравнений Навье–Стокса.

Дополнительные слагаемые, присутствующие в системе КГД уравнений, имеют диссипативный характер и могут использоваться для регуляризации численного алгоритма. В КГД системе естественным образом выписываются граничные условия для давления, необходимые для решения уравнения Пуассона. При аппроксимации КГД уравнений на пространственной сетке значения давления и компонент скорости достаточно определять в одних и тех же узлах разностной сетки. Это позволяет избежать введения так называемых разнесенных пространственных сеток, использование которых особенно затруднительно для неструктурированных или трехмерных сеток.

Приведем пример разностного алгоритма, основанного на КГД уравнениях. Для этого выпишем систему (7.1.16)–(7.1.18) в безразмерном виде для случая плоских нестационарных течений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \tau \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tau \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT \right), \quad (7.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ 2\tau \frac{\partial}{\partial x} u \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tau \frac{\partial}{\partial y} v \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \\ \tau \frac{\partial}{\partial y} u \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT \right), \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (v^2) + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ 2\tau \frac{\partial}{\partial y} v \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT \right) + \tau \frac{\partial}{\partial x} u \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT \right) + \\ \tau \frac{\partial}{\partial x} v \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + GrT, \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) &= Pr^{-1} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \\
\tau \frac{\partial}{\partial x} \left[ T \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] &+ \\
+\tau \frac{\partial}{\partial y} \left[ T \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT \right) \right]. &
\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

Здесь  $Re$ ,  $Pr$ ,  $Gr$  — числа Рейнольдса, Прандтля и Грасгофа соответственно,  $\tau$  — характерное время, также записанное в безразмерном виде. Способ обезразмеривания системы уравнений (7.1.16)–(7.1.18) и условия на границе определяются конкретной задачей и будут описаны ниже.

Для численного решения системы (7.2.1)–(7.2.4) используется метод конечных разностей, в значительной мере совпадающий с методом, построенным ранее для решений КГД уравнений для вязкого сжимаемого газа. Перечислим далее основные особенности данного численного алгоритма.

Все гидродинамические величины (компоненты скорости, давление и температура) относятся к узлам разностной сетки. Значения величин в полуцелых узлах определяются как полусуммы их значений в ближайших узлах с целыми индексами. Смешанные производные аппроксимируются с использованием значений величин в центрах ячеек, которые вычисляются как  $1/4$  суммы значений этих величин в прилегающих узлах. Пространственные производные в системе (7.2.1)–(7.2.4) аппроксимируются на неравномерной пространственной сетке центральными разностями вида

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left( \frac{f_{i+1} + f_i}{2} - \frac{f_{i-1} + f_i}{2} \right), \tag{7.2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( g \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left( g_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - g_{i-1/2} \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right) \tag{7.2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( g \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \frac{2}{h_j + h_{j+1}} \tag{7.2.7}$$

$$\left( g_{i+1/2,j} (f_{i+1/2,j+1/2} - f_{i+1/2,j-1/2}) - g_{i-1/2,j} (f_{i-1/2,j+1/2} - f_{i-1/2,j-1/2}) \right), \tag{7.2.8}$$

где  $x_{i+1} = x_i + h_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, N_1 - 1}$ ,  $y_{j+1} = y_j + h_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, N_2 - 1}$  — координаты и узлы пространственной сетки,  $g_{i\pm 1/2} = (g_i + g_{i\pm 1})$ ,  $f_{i\pm 1/2} = (f_i + f_{i\pm 1})$ .

Граница расчетной области располагается в полуцелых узлах сетки. Аппроксимация граничных условий для скорости и температуры осуществляется путем вычисления соответствующих производных со вторым порядком точности и обеспечивается введением дополнительных слоев фиктивных узлов по внешним границам расчетной области.

Производные по времени аппроксимируются разностями вперед с первым порядком. Поля скорости и температуры на следующем временном шаге определяются по явной схеме из разностных аналогов уравнений (7.2.2)–(7.2.4). Течение считается установившимся, если

$$\varepsilon_u = \max_{ij} \left| \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t} \right| \leq 0.001, \quad (7.2.9)$$

где  $n$  — номер шага по времени.

На каждом временном шаге поле давления находится по полю скорости и температуры путем решения уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - GrT \right), \quad (7.2.10)$$

которое является эквивалентным представлением (7.2.1) при  $\tau = \text{const}$  и аппроксимируется так же, как и уравнения движения. Граничные условия для давления следуют из условия непротекания и аппроксимируются со вторым порядком точности путем экстраполяции уравнения Пуассона на границу или путем введения слоя фиктивных узлов вдоль границы.

Для решения (7.2.10) могут использоваться различные методы. В частности, применялся предобусловленный обобщенный метод сопряженных градиентов, где предобуславливатель строится при помощи поточечного неполного разложения матрицы системы линейных уравнений  $A\vec{x} = \vec{B}$  [86]. Использовались также методы типа прогонки [87] и методы неполного разложения Холецкого [99]. Условие прекращения итераций имеет вид

$$\varepsilon_p = \left[ \sum_{ij} (p_{\bar{x}x,ij} + p_{\bar{y}y,ij} + f_{ij})^2 h^2 \right]^{1/2} \leq 10^{-5}, \quad (7.2.11)$$

где  $f_{ij}$  — правая часть разностного аналога уравнения (7.2.10). Скорость сходимости итераций при решении уравнения (7.2.10) определяет эффективность всего алгоритма в целом.

Функция тока  $\psi$  строится на основе векторного поля  $\vec{u} - \vec{w}$ , для которого выполнено условие  $\text{div}(\vec{u} - \vec{w}) = 0$

$$u - w_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v - w_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7.2.12)$$

где  $\vec{w} = (w_1, w_2)^T$ . При малых значениях параметра  $\tau$  векторы  $\vec{u}$  и  $\vec{u} - \vec{w}$  близки.

В следующих параграфах приведем примеры численного решения нескольких характерных задач.

### 7.3 Отрывное течение за обратным уступом

Для ламинарных течений размер отрывной зоны за уступом является чувствительной характеристикой, которая существенно зависит от скорости потока и геометрии задачи. Зависимость размера отрывной зоны от числа Рейнольдса и относительной высоты уступа приведено, например, в [103]. Длина зоны отрыва растет почти линейно с увеличением числа Рейнольдса. Ламинарные течения за обратным уступом хорошо моделируются численно, и для небольших чисел Рейнольдса результаты расчетов в двумерной постановке у различных авторов соответствуют экспериментальным данным ([103], [105]). Это позволяет использовать данную задачу в качестве теста для апробации новых численных алгоритмов.

Приведенные далее результаты основаны на работах [54] и [88].

#### 7.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим плоское двумерное движение изотермической жидкости в канале высоты  $H$  и длины  $L$ . Во входном сечении канала имеется сужение, величина которого определяется высотой уступа  $h$ . Схема расчетной области и образующегося течения приведена на рис. 7.1

Приведем КГД систему к безразмерному виду с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}h, & y &= \tilde{y}h, & u_x &= \tilde{u}_x U_0, & u_y &= \tilde{u}_y U_0, \\ p &= \tilde{p} \rho U_0^2, & t &= (\tilde{t}h)/U_0, & Re &= (U_0 h)/\nu, \end{aligned}$$

где

$$U_0 = \frac{1}{H-h} \int_h^H u_0(y) dy$$

— средняя по сечению скорость жидкости в канале,  $\nu = \eta/\rho$  — коэффициент кинематической вязкости,  $u_0(y)$  — заданный профиль скорости во входном сечении. Записанную в безразмерной форме систему дополним граничными условиями:

- нижняя твердая стенка

$$y = 0, \quad 0 < x < L, \quad u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

- верхняя твердая стенка

$$y = H, \quad 0 < x < L, \quad u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

- левая твердая стенка

$$x = 0, \quad 0 < y < h, \quad u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

- участок втекания на левой границе

$$x = 0, \quad h < y < H, \quad u_x = u_0(y), \quad u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const};$$

- правая граница

$$x = L, \quad 0 < y < H, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad p = 0.$$

Граничные условия для давления на твердых стенках следуют из условий прилипания для компонент скорости и условия непротекания потока массы. Градиент давления на входе в канал может быть задан произвольно. Один из возможных способов вычисления этой величины заключается в следующем. Зададим профиль скорости на входе в канал в виде

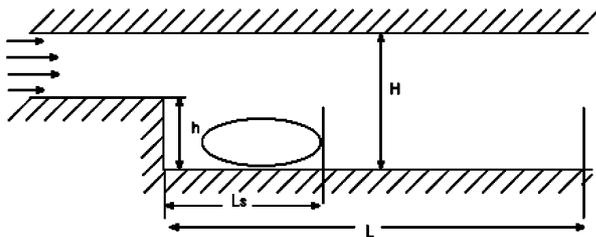


Рис. 7.1: Схема расчетной области

параболы Пуазейля ([2], [3]):

$$u_0(y) = \frac{Re}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (H - y)(h - y). \quad (7.3.1)$$

Расход жидкости во входном сечении вычисляется по формуле

$$J = \int_h^H [u_x(0, y) - w_x(0, y)] dy = -\frac{Re}{12} (H - h)^3 \frac{\partial p}{\partial x} - \tau (H - h) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7.3.2)$$

Из (7.3.2) находим величину градиента давления на входе

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12J}{Re(H - h)^3} \left[ 1 + \frac{12\tau}{Re(H - h)^2} \right]^{-1}. \quad (7.3.3)$$

В качестве начальных условий выбиралось состояние покоя:  $u_x = u_y = 0$ . Градиент давления в начальный момент считался постоянным во всем поле течения.

Для ламинарных течений безразмерный параметр сглаживания  $\tau$  вычисляется как

$$\tau = \frac{Ma}{Re_s} = \frac{Ma^2}{Re}, \quad \text{где} \quad Ma = \frac{U_0}{c_s}, \quad Re_s = \frac{c_s h}{\nu} \quad (7.3.4)$$

— число Маха и число Рейнольдса, вычисленное по скорости звука. Например, для воздуха при нормальной температуре  $c_s = 3.4 \cdot 10^4$  см/сек,  $\nu = 0.15$  см<sup>2</sup>/сек. Пусть  $h = 10$  см, тогда  $Re_s = 2 \cdot 10^6$ . Для течений несжимаемой или слабосжимаемой жидкости  $Ma \ll 1$  и параметр сглаживания оказывается малым. При необходимости для обеспечения устойчивости счета к  $\tau$  добавляется величина  $\tau_h$ , значение которой подбирается в процессе вычислений:

$$\tau \rightarrow \tau + \tau_h.$$

В частности, в [84] для двумерных пространственных сеток значение  $\tau_h$  предлагается выбирать в виде

$$\tau_h = \alpha \sqrt{h_x^2 + h_y^2},$$

где  $\alpha$  - численный коэффициент. При этом дополнительные вязкие члены в КГД уравнениях интерпретируются как искусственные регуляризаторы, обеспечивающие устойчивость численного алгоритма.

### 7.3.2 Результаты численного моделирования

Указанная задача решалась для чисел  $Re=100, 200, 300, 400$ ;  $h/H = 1/2$ . Профиль скорости во входном сечении представлял собой параболу Пуазейля (7.3.1). Безразмерная величина расхода  $J$  полагалась равной единице, что соответствовало выбору градиента давления на входе в канал в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12}{Re} \left[ 1 + \frac{12\tau}{Re} \right]^{-1}.$$

При малых  $\tau$  и больших  $Re$  можно считать, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12}{Re}.$$

Рассчитанная длина отрывной зоны за уступом сравнивалась с данными из работы [103]. Она определялась также с помощью графиков, приведенных в [104].

Полученные результаты систематизированы в табл. 7.1. Здесь  $L$  — безразмерная длина расчетной области,  $N_x, N_y$  — число расчетных точек по обоим направлениям,  $L_s$  — длина отрывной зоны,  $N_t$  — число шагов по времени до сходимости. Расчеты проведены на равномерной по обоим направлениям пространственной сетке с одинаковыми шагами  $h_x = h_y = 0.025$ . Известно, что использование одинаковых  $h_x$  и  $h_y$  улучшает точность описания отрывного течения.

Для указанных течений  $Re_s \sim 10^6$ , и значение  $\tau = \tau_h$  в формуле (7.3.4) вычислялась как  $\tau_h = 0.5/Re$ . Шаг интегрирования по времени  $\Delta t$  был одинаков для всех указанных вариантов и составлял  $10^{-4}$ .

$Re$	100	200	300	400
$L$	7.5	5.0	7.5	10
$N_x \times N_y$	$300 \times 40$	$200 \times 40$	$300 \times 40$	$400 \times 40$
$\tau$	0.005	0.0025	0.00166	0.00125
$N_t$	19800	$\sim 20000$	$\sim 60000$	$\sim 110000$
$L_s/h$ КГД расчет	5.0	8.2	10.1	14.8
$L_s/h$ расчет [103]	4.43	7.5	10.0	-
$L_s/h$ расчет [104]	5.0	8.3	8.4	7.8
$L_s/h$ эксперимент [104]	5.0	8.5	11.3	14.2

Таблица 7.1: Расчеты ламинарных течений в сравнении с экспериментом

Расчет прекращался при выполнении условия  $\delta p < 10^{-3}$ , где

$$\delta p = \max \left| \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} \right|,$$

$n$  — номер шага интегрирования по времени.

Во всех вариантах течение выходит на стационарный режим. Длина отрывной зоны  $L_s$  определялась по положению нулевой линии тока и указана с точностью порядка 0.2. Сравнение КГД расчетов с расчетами на основе системы Навье–Стокса, а также с данными эксперимента [104] показывает хорошее соответствие длины отрывной зоны и общей картины течения. В расчетах наблюдается почти линейный рост значений  $L_s$  с ростом числа  $Re$ . Видно, что для  $Re = 400$  точность КГД расчета существенно лучше, чем данные расчета [104].

Для  $Re = 100$  и  $Re = 200$  процесс установления течения представляет собой зарождение и последующий рост одного вихревого образования за уступом. Для  $Re = 300$  и  $Re = 400$  процесс установления носит колебательный характер и сопровождается зарождением и отрывом вихревых образований, но, в отличие от рассмотренных далее режимов течений при больших числах  $Re$ , этот колебательный процесс затухает, приводя к образованию одного стационарного вихря за уступом. Изолинии функции тока  $\psi$ , построенные в соответствии с (7.2.12) и иллюстрирующие процесс установления течения по времени для вариантов  $Re = 100$  и  $Re = 400$  приведены на рис. 7.2 и 7.3. Изолинии расположены эквидистантно.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса стационарное решение получить не удастся.

Для варианта  $Re = 100$  исследовалось влияние параметра регуляризации  $\tau$  и сходимость численного решения по сетке. Получено, что длина отрывной зоны и общая картина течения практически не зависит ни от величины параметра регуляризации  $\tau$ , ни от величины шага по пространству. Увеличение  $\tau$  приводит к сглаживанию картины течения и позволяет увеличить шаг интегрирования системы по времени. Уменьшение пространственного шага позволило более детально разрешить картину течения. При неизменном расходе решение мало чувствительно к выбору градиента давления во входном сечении.

Эти результаты согласуются с теоретическими оценками, согласно которым для стационарных течений дополнительные КГД слагаемые малы и решение КГД уравнений близко к решению уравнений Навье–Стокса. При этом добавочные члены выполняют роль регуляризаторов, позволяющих использовать достаточно простой, устойчивый и точный численный алгоритм.

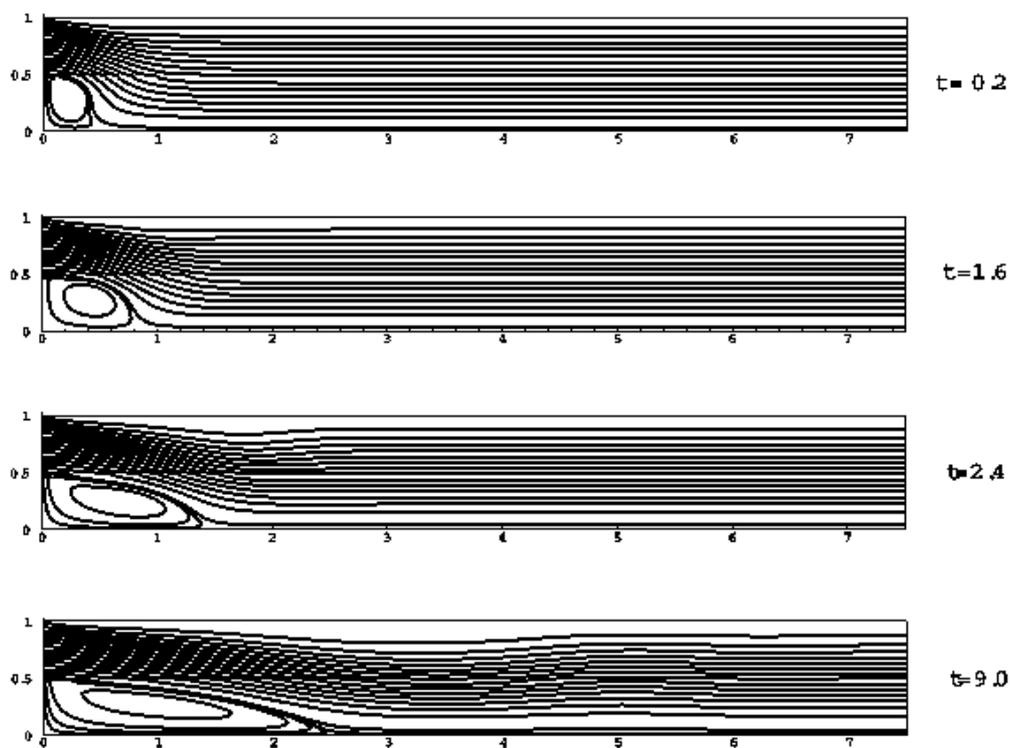


Рис. 7.2: Изолинии функции тока для  $Re=100$  при установлении течения

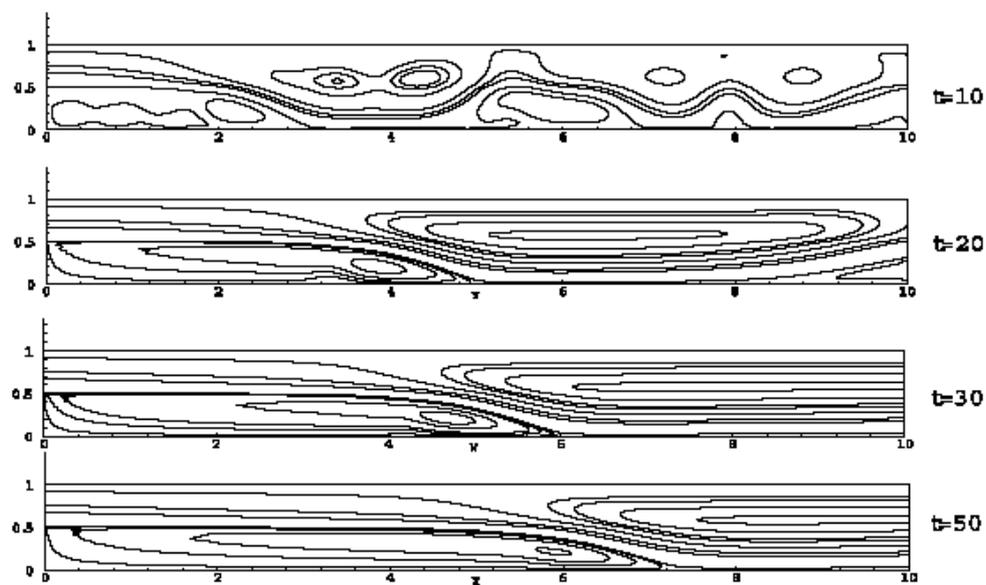


Рис. 7.3: Изолинии функции тока для  $Re=400$  при установлении течения

## 7.4 Тепловая конвекция в квадратной области

Рассматривается задача о течении теплопроводной вязкой несжимаемой жидкости в квадратной полости с двумя вертикальными изотер-

мическими стенками. Течение возникает благодаря разности температур этих стенок. Горизонтальные стенки являются адиабатическими. Течение описывается системой уравнений (7.2.1)–(7.2.4), к которой добавим следующие граничные условия:

- нижняя стенка:  $y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \partial p / \partial y = GrT, \quad \partial T / \partial y = 0;$
- верхняя стенка:  $y = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \partial p / \partial y = GrT, \quad \partial T / \partial y = 0;$
- левая боковая стенка:  $x = 0, \quad 0 < y < 1, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \partial p / \partial x = 0, \quad T = 1;$
- правая боковая стенка:  $x = 1, \quad 0 < y < 1, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \partial p / \partial x = 0, \quad T = 0.$

В качестве начального условия используется невозмущенное поле скорости и температуры. Система уравнений (7.2.1)–(7.2.4) приведена к безразмерному виду с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}H, & y &= \tilde{y}H, & u &= \tilde{u}\frac{\nu}{H}, & v &= \tilde{v}\frac{\nu}{H}, \\ t &= \tilde{t}\frac{H^2}{\nu}, & p &= \tilde{p}\rho\left(\frac{\nu}{H}\right)^2, & T &= \tilde{T}\frac{\Delta T}{A}, \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

где  $\nu = \eta/\rho$  — кинематический коэффициент вязкости,  $\Delta T = T_1 - T_2$  — разность температур между левой и правой стенкой области,  $H$  — размер полости. При выбранном обезразмеривании число Грасгофа  $Gr = \beta g \Delta T H^3 / \nu^2$ .

Безразмерный параметр  $\tau$  равен

$$\tau = \frac{\nu^2}{H^2 c_s^2}.$$

Задача о тепловой конвекции в замкнутой полости, подогреваемой слева, решается для умеренных чисел Грасгофа  $Gr = 10^4$  и  $10^5$ , числа Прандтля  $Pr = 1$  и параметра  $\tau$  в интервале  $10^{-5}$ – $10^{-2}$  на равномерных сетках  $21 \times 21$ ,  $41 \times 41$ ,  $81 \times 81$ .

Результаты расчетов представлены в табл. 7.2 и 7.3, где они сопоставлены с данными [89] и [90]. В первой работе задача о тепломассопереносе при конвекции Буссинеска рассчитывается на основе системы уравнений

Навье–Стокса в переменных "функция тока-вихрь скорости" на подробных сетках, и результаты сравниваются с данными эксперимента [90]. Результаты этих работ для умеренных чисел Грасгофа можно считать эталонными.

$\tau$	сетка	$ \psi _{max}$	$u_{max}$	$\nu_{max}$	$Nu_0$	$Nu_{max}$	$Nu_{min}$
$10^{-4}$	$21 \times 21$	5.044	15.938	19.513	2.306	3.939	0.579
		[89] 5.277	16.144	19.363	2.253	3.615	0.591
$10^{-4}$	$41 \times 41$	5.099	16.005	19.663	2.281	3.708	0.591
		[89] 5.125	16.262	19.602	2.249	3.563	0.586
$10^{-4}$	$81 \times 81$	5.113	16.070	19.663	2.275	3.649	0.581
		[89] 5.086	16.219	19.648	2.247	3.541	0.585
		[90] 5.071	16.178	19.617	2.238	3.528	0.586
$10^{-3}$	$21 \times 21$	5.195	15.587	18.565	2.431	4.318	0.529
$10^{-2}$	$21 \times 21$	6.723	13.182	11.542	3.850	9.268	0.352

Таблица 7.2: Результаты расчетов и их сравнение с данными расчета [89] и эксперимента [90],  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 1$ .

$\tau$	сетка	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	$u_{max}$	$\nu_{max}$	$Nu_0$	$Nu_{max}$	$Nu_{min}$
$10^{-5}$	$21 \times 21$	9.264	9.666	32.33	67.70	4.865	9.777	0.204
		[89] 10.259	10.860	40.30	65.07	4.532	8.123	0.762
$10^{-5}$	$41 \times 41$	9.502	9.909	33.24	70.91	4.682	8.733	0.729
		[89] 9.388	9.918	36.63	68.11	4.554	7.968	0.730
		[90] 9.111	9.612	34.73	68.59	4.509	7.717	0.729
$10^{-4}$	$21 \times 21$	9.358	9.754	32.20	66.71	4.906	9.931	-0.033
$10^{-3}$	$21 \times 21$	10.400	10.740	33.12	57.86	5.732	12.091	-0.611

Таблица 7.3: Результаты расчетов и их сравнение с данными расчета [89] и эксперимента [90],  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 1$ .

В таблицах использованы следующие обозначения:

$|\psi|_{mid}$  — абсолютная величина функции тока в центре полости,

$|\psi|_{max}$  — максимум модуля функции тока в расчетной области,

$u_{max}$  — максимум горизонтальной скорости в среднем вертикальном сечении,

$\nu_{max}$  — максимум вертикальной скорости в среднем горизонтальном сечении,

$Nu_0$  — среднее число Нуссельта на левой грани полости,

$Nu_{max}$  — максимальное значение числа Нуссельта на этой грани,

$Nu_{min}$  — минимальное значение числа Нуссельта на этой грани.

Для расчета безразмерного теплового потока на левую боковую грань (числа Нуссельта  $Nu$ ) использовалось выражение

$$Nu(y) = -\frac{\partial T(0, y)}{\partial x},$$

среднее число Нуссельта вычислялось как

$$Nu_0 = \int_0^1 Nu(y) dy.$$

Для приближенного вычисления локальных тепловых потоков используются правые разностные производные, а для среднего числа Нуссельта — квадратурная формула трапеций.

Из таблиц следует, что при малых  $\tau$  даже на сетке  $21 \times 21$  решение хорошо совпадает с эталонным, то есть малые  $\tau$  соответствуют режиму конвекции в тестовой задаче [89]. При измельчении шага пространственной сетки точность решения увеличивается, что определяется возможностью разрешения пограничных слоев.

На рис. 7.4 представлены изолинии функции тока, изотермы и изобары при числе Грасгофа  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 1$  (сетка  $41 \times 41$ ). Из представленных рисунков наглядно видно хорошее соответствие линий тока и изотерм результатам [89]. Увеличение  $\tau$  приводит к усилению нелинейного взаимодействия в среде, и как следствие — к искажению изолиний функции тока и изотерм (рис. 7.5–7.6).

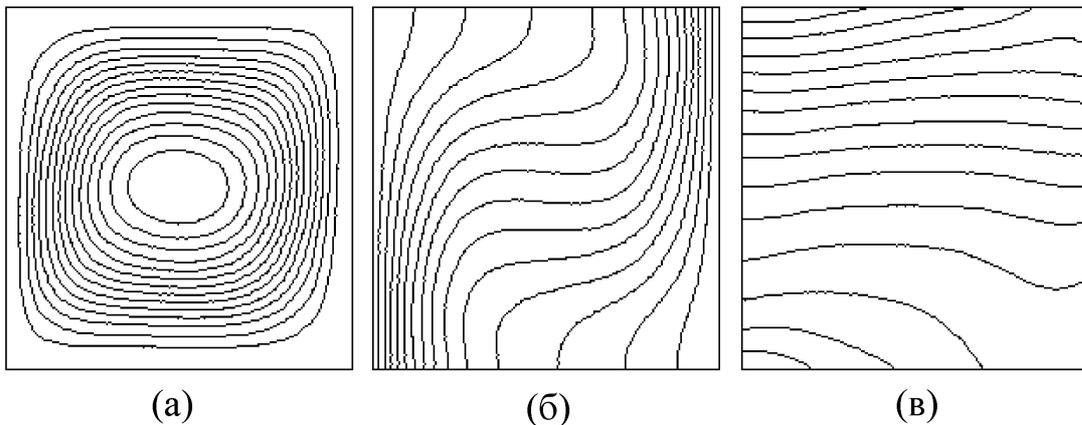
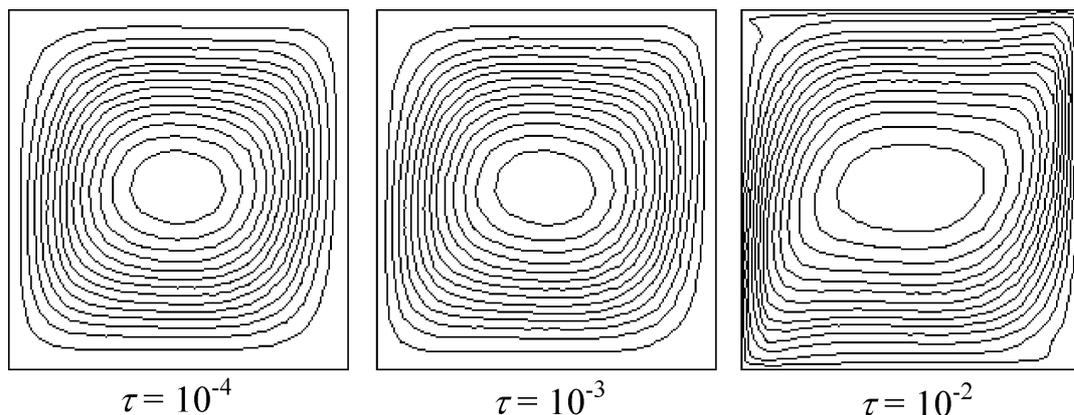
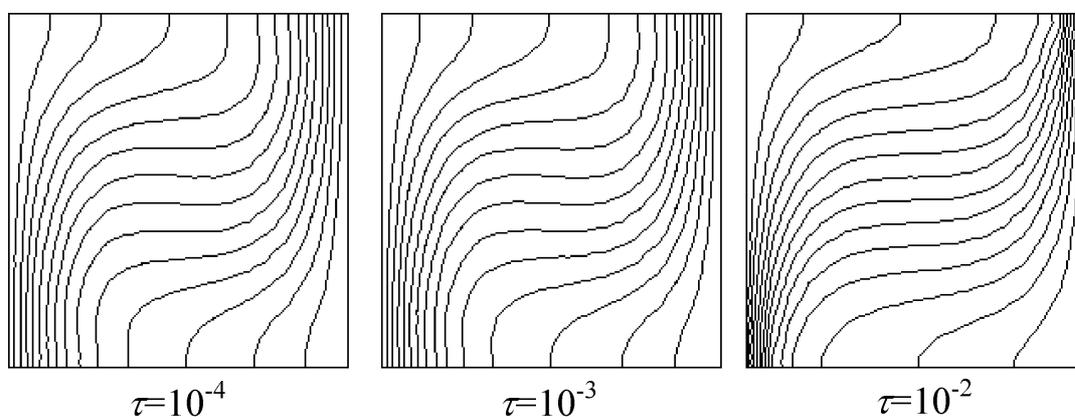


Рис. 7.4: Линии тока (а), изотермы (б) и изобары (в) для  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 1$ ,  $\tau = 10^{-4}$

При уменьшении  $\tau$  для обеспечения устойчивости счета необходимо уменьшать шаг по времени.

Рис. 7.5: Линии тока при различных значениях параметра  $\tau$  для  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 1$ Рис. 7.6: Изотермы при различных значениях параметра  $\tau$  для  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 1$ 

Из представленных результатов следует, что численные решения системы КГД уравнений хорошо совпадают с эталонными решениями системы Навье–Стокса для умеренных чисел  $Gr$  при  $\tau \leq Gr^{-1}$ . Совпадение улучшается при сгущении пространственной сетки.

## 7.5 Тепловая конвекция при низких числах Прандтля

Рассматривается задача о тепловой гравитационной конвекции несжимаемой жидкости в прямоугольной полости высоты  $H$  и длины  $L$  при низких числах  $Pr$  [91]. Эта задача представляет собой известный тест, предложенный в 1987 году для анализа численных методик расчета конвективных течений в расплавах. Практическая необходимость таких расчетов связана с тем, что периодические колебания температуры в ме-

таллических расплавах (жидкостях с малым числом Прандтля) создают серьезные проблемы при выращивании полупроводниковых кристаллов (см. [92]).

Течение описывается системой уравнений (7.2.1)–(7.2.4), которая может быть приведена к безразмерному виду с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}H, & y &= \tilde{y}H, & u &= \tilde{u}\frac{\nu}{H}, & v &= \tilde{v}\frac{\nu}{H}, \\ t &= \tilde{t}\frac{H^2}{\nu}, & p &= \tilde{p}\rho\left(\frac{\nu}{H}\right)^2, & T &= \tilde{T}\frac{\Delta T}{A}, \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

где  $A = L/H$ ,  $\Delta T = T_1 - T_2$  — разность температур между левой и правой стенками,  $\nu = \eta/\rho$  — коэффициент кинематической вязкости. При выбранном обезразмеривании имеем  $Gr = \beta g \Delta T H^4 / L \nu^2$ ,  $Re = 1$ ,  $Pr = \nu/\chi$ ,  $\tau = M^2$ , где  $M = \nu/(Hc_s)$  — число Маха.

Полость имеет твердую нижнюю стенку, а ее верхняя граница может быть либо твердой (R-R случай), либо свободной (R-F случай).

К системе уравнений (7.2.1)–(7.2.4) добавим следующие граничные условия:

- нижняя стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial y = GrT$ ,  $T(x) = A - x$ ;
- верхняя граница:  
 $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial y = GrT$ ,  $T(x) = A - x$  для R-R случая;  
 $\partial u/\partial y = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial y = GrT$ ,  $T(x) = A - x$  для R-F случая;
- левая боковая стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial y = 0$ ,  $T = A$ ;
- правая боковая стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial y = 0$ ,  $T = 0$ .

Безразмерный параметр  $\tau$  можно связать с числом Грасгофа соотношением

$$\tau = \frac{1}{Gr} \frac{\beta g \Delta T H^2}{Lc_s^2} = \alpha/Gr, \quad (7.5.2)$$

где величина  $\alpha$  весьма мала. Так, например, для тепловой конвекции воздуха при  $\Delta T = 100C$  в квадратной полости высотой  $H = 1$  м величина  $\alpha \sim 3 \cdot 10^{-5}$ . При проведении расчетов параметр  $\alpha$  следует выбирать из полуинтервала  $0 < \alpha \leq 1$ .

В большинстве расчетов  $\alpha$  выбирался равным единице. Как показали численные эксперименты, уменьшение параметра  $\alpha$  приводит к незначительному уточнению результатов расчета, но в то же время приводит к

ухудшению устойчивости численного алгоритма, что требует уменьшения временного шага интегрирования  $\Delta t$ .

Задача о тепловой конвекции в прямоугольной камере ( $A=4$ ), подогреваемой слева, решалась для умеренных чисел Грасгофа и при низком числе Прандтля  $Pr = 0.015$  на равномерной пространственной сетке  $22 \times 82$  с шагом  $h = 1/20$ . Во всех вариантах шаг по времени выбирался равным  $10^{-6}$ .

Для R-R случая при  $Gr = 4 \cdot 10^4$  в качестве начальных условий использовались поля скорости и температуры, полученные в расчете с  $Gr = 3 \cdot 10^4$ . Во всех остальных расчетах в качестве начальных условий использовались невозмущенные поля скорости и температуры.

### 7.5.1 Результаты расчетов для R-R случая.

Расчеты проведены для умеренных чисел Грасгофа:  $Gr = 2 \cdot 10^4$ ,  $3 \cdot 10^4$  и  $4 \cdot 10^4$ .

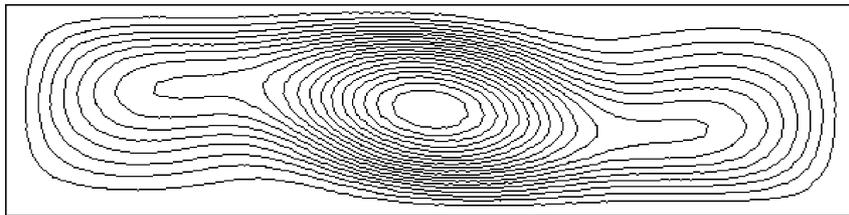


Рис. 7.7: Линии тока для  $Gr = 2 \cdot 10^4$

При  $Gr = 2 \cdot 10^4$  получен стационарный режим течения (рис. 7.7). Линии тока представляют собой один вытянутый в длину вихрь. Полученные результаты как качественно, так и количественно хорошо соответствуют данным из [92], [93], в которых расчеты проведены на очень подробных пространственных сетках ( в [93] — на сетке  $81 \times 321$ ). В табл. 7.4 характерные значения функции тока и компонент скорости даны в сравнении с аналогичными величинами из [92], причем они оказываются весьма близкими. Так как в [92] обезразмеривание скорости было иным, чем в настоящей работе, а именно:  $u = \tilde{u}\nu Gr^{0.5}/H$ ,  $v = \tilde{v}\nu Gr^{0.5}/H$ , то для сравнения с результатами [92] в табл. 7.4 приведены значения следующих величин:

$$\Psi^* = \max_{xy} |\Psi| / Gr^{0.5}, \quad U^* = \max_y |u(y)| / Gr^{0.5} \quad \text{при} \quad x = 3A/4,$$

$$V^* = \max_x |v(x)| / Gr^{0.5} \quad \text{при} \quad y = 1/2,$$

Источник	$V^*$	$U^*$	$\psi^*$
Данная работа	0.448	0.672	0.409
[92]	0.452 – 0.482	0.669 – 0.704	0.406 – 0.409

Таблица 7.4: Характерные (нормализованные) значения функции тока и компонент скорости

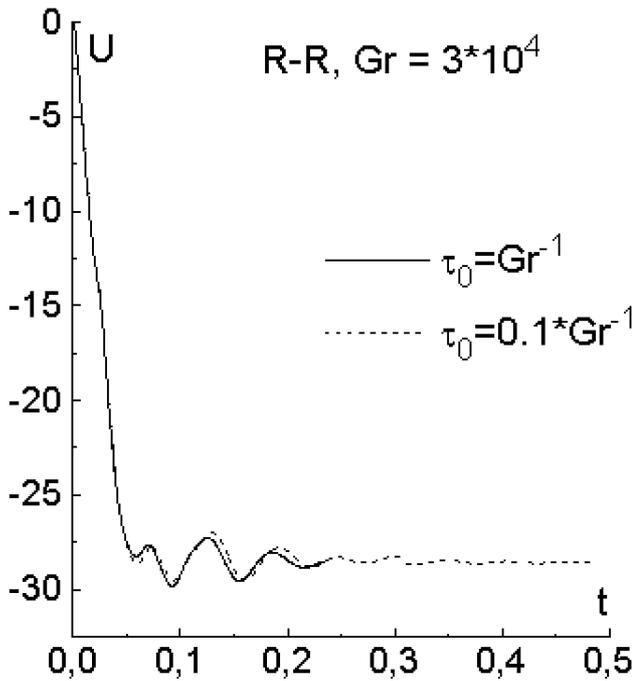
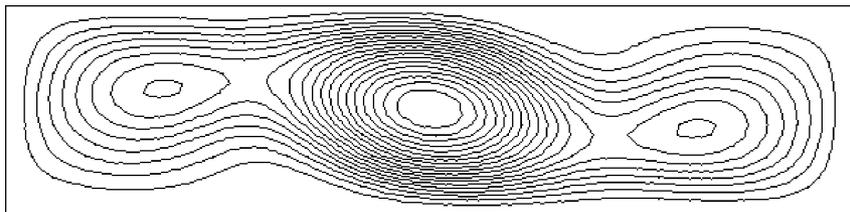
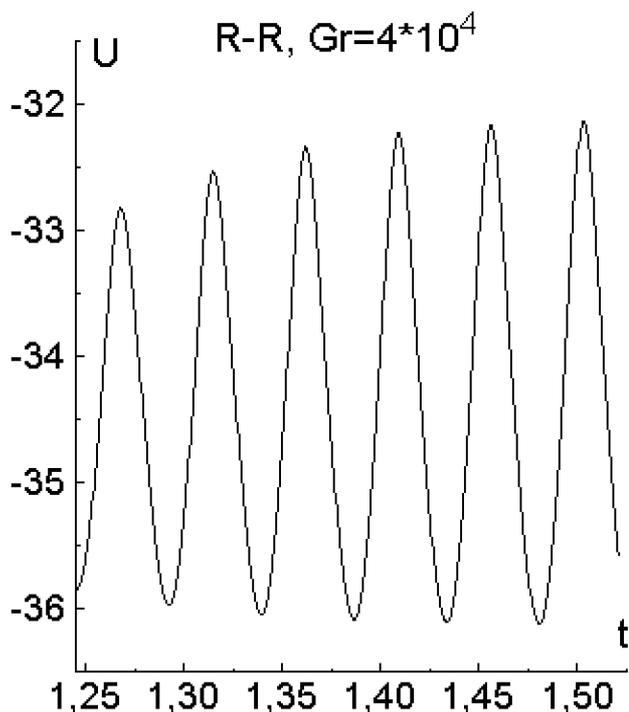


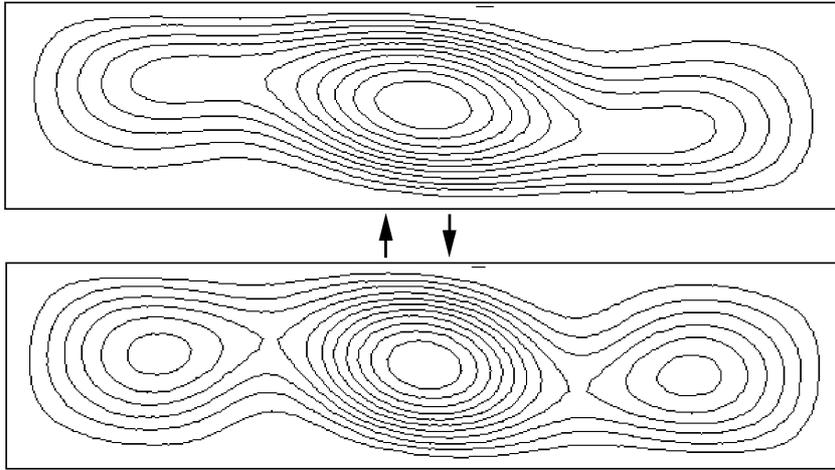
Рис. 7.8: Эволюционные кривые горизонтальной компоненты скорости в центре области для  $Gr = 3 \cdot 10^4$

При  $Gr = 3 \cdot 10^4$  получен стационарный режим течения (рис. 7.8–7.9), процесс установления которого имеет вид затухающих колебаний. На рис. 7.8 проведено сравнение эволюционных кривых горизонтальной компоненты скорости в центре области, полученных в расчетах при  $\alpha = 1$  (сплошная линия) и  $\alpha = 0.1$  (штриховая линия). Полученные кривые практически совпадают, что свидетельствует о слабой зависимости решения от параметра регуляризации в выбранной области его значений. В большинстве работ в данном случае получен колебательный режим течения, однако, как показано в [94], [95], возможен и стационарный режим. Установившееся течение представляет собой основной вихрь, расположенный вблизи центра, и два дополнительных вихря в правой и левой частях каверны. В [95] для этого случая получено стационарное решение, причем сравнение приведенных в этой работе результатов с результатами расчетов авторов показывает их хорошее соответствие. В

Рис. 7.9: Линии тока для  $Gr = 3 \cdot 10^4$ Рис. 7.10: Эволюционные кривые горизонтальной компоненты скорости в центре области для  $Gr = 4 \cdot 10^4$ 

частности, сравнивались профили горизонтальной скорости вдоль вертикального сечения, расположенного на расстоянии  $x = 3A/4$  от левой стенки, и распределения вертикальной скорости в сечении  $y = 1/2$ , а также линии тока.

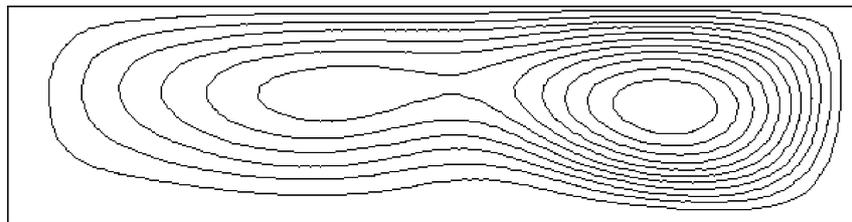
При  $Gr = 4 \cdot 10^4$  получен колебательный режим течения (рис. 7.10–7.11), период колебаний которого можно оценить как  $T_{vib} = 0.047$  (рис. 7.10), что соответствует частоте  $f_1 = 1/T_{vib} = 21.28$ . Данный результат очень близок к приведенным в [92], где суммируются данные расчетов многих авторов. Частота колебаний для данного случая составляет у различных авторов от 21.186 до 22.35. Течение в этой задаче представляет собой структуру, аналогичную предыдущему варианту, причем процесс

Рис. 7.11: Линии тока для  $Gr = 4 \cdot 10^4$ 

колебаний заключается в изменении интенсивности вихревых образований и хорошо соответствует результатам [95].

### 7.5.2 Результаты расчетов для R-F случая

В отличие от предыдущего случая в этих вариантах на верхней стенке ставится условие скольжения для тангенциальной составляющей скорости, что облегчает процесс зарождения колебаний.

Рис. 7.12: Линии тока для  $Gr = 10^4$ 

При  $Gr = 10^4$  получен стационарный режим течения (рис. 7.12) в котором образуется асимметричная структура, состоящая из двух ячеек. Большая из них располагается возле холодной стенки, другая, меньшая по величине, находится между центром полости и горячей левой стенкой. Приведенные рисунки близко соответствуют аналогичным рисункам из [96].

При  $Gr = 2 \cdot 10^4$  получен колебательный режим течения (рис. 7.13–7.14), период колебаний которого можно оценить как  $T_{vib} = 0.0646$  (рис. 7.13), что соответствует частоте  $f_1 = 15.84$ . В обзоре [92] частота колебаний в этом случае варьируется у разных авторов от 15.580 до 17.2.

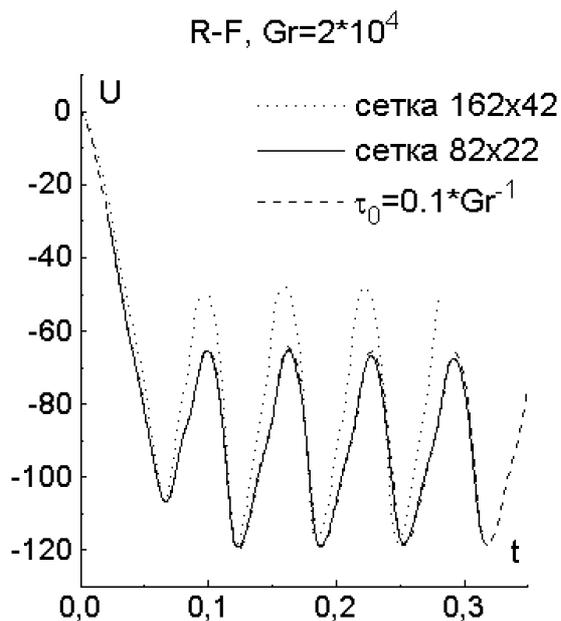
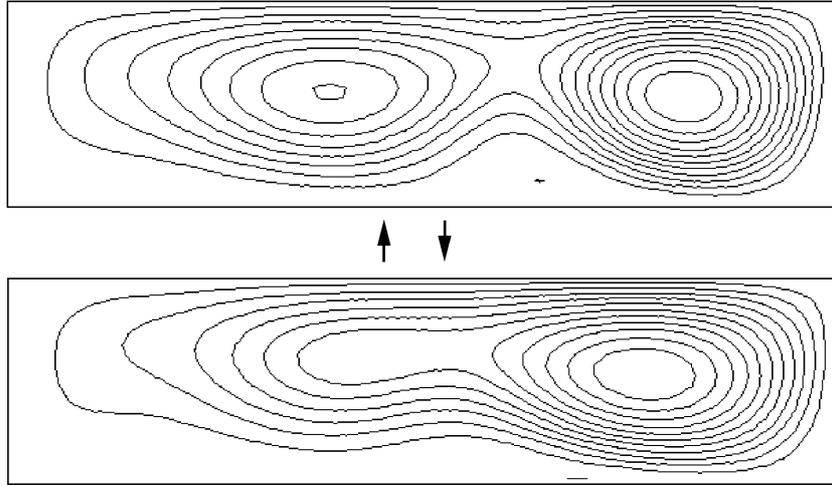


Рис. 7.13: Эволюционных кривые горизонтальной компоненты скорости в центре области для  $Gr = 2 \cdot 10^4$

Течение в этой задаче представляет собой вихрь, смещенный к правой (холодной) стенке каверны. В левой части каверны формируется второй, более слабый по интенсивности вихрь (рис. 7.14). Процесс колебаний заключается в изменении интенсивности этих образований. В этом случае явно видна временная эволюция вторичных вихрей, картина которой хорошо соответствует аналогичным фигурам, приведенным в [96].

Для выяснения влияния параметра  $\alpha$  этот вариант был рассчитан с  $\alpha = 1$  (сплошная линия) и  $\alpha = 0.1$  (штриховая линия), а для проверки точности вариант с  $\alpha = 1$  пересчитан на вдвое более подробной сетке  $42 \times 162$  (пунктирная линия). Сравнение временной эволюции скорости для этих вариантов приведено на рис.7.13. Видно, что уменьшение  $\alpha$  не изменяет ни период, ни амплитуду колебаний, соответствующие кривые практически неразличимы. Сгущение сетки не влияет на частоту колебаний, несколько изменяя их амплитуду.

Таким образом, результаты расчета задач течения вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Прандтля на основе КГД системы полностью совпадают с аналогичными расчетами с использованием системы уравнений Навье–Стокса. При этом наряду со стационарными режимами течений удастся рассчитать и вторичные, т. е. нестационарные режимы. Показано, что период колебаний не зависит от шага сетки и параметра регуляризации.

Рис. 7.14: Линии тока для  $Gr = 2 \cdot 10^4$ 

## 7.6 Конвекция Марангони в невесомости

Ниже рассматривается задача о термокапиллярной конвекции вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии гравитации (см. [97], [98]). Данной проблеме посвящено большое количество исследований, так как во многих процессах космической технологии (направленная кристаллизация, безтигельная зонная плавка) поверхность жидкости (расплава) является свободной, и именно термокапиллярный эффект приводит к возникновению конвективного движения в расплаве.

Конвективное течение обусловлено только силами поверхностного натяжения, что записывается в виде следующего условия равновесия сил поверхностного натяжения и вязкого трения на верхней свободной границе  $\Pi_{yx} = (\partial\sigma/\partial x) \cdot (\partial T/\partial x)$ , где  $\sigma = \sigma(T)$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

В двумерном случае, согласно (7.1.5) имеем

$$\Pi = \eta \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} +$$

$$+ \tau \begin{pmatrix} u \left( \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \right) & u \left( \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\ v \left( \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \right) & v \left( \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \right) \end{pmatrix}.$$

Так как на верхней границе  $\partial p/\partial y = 0$ ,  $v = 0$ , то  $\partial v/\partial x = 0$ , и тензор  $\Pi$  упрощается:

$$\Pi = \eta \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} u \left( \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем условие на верхней границе в размерном виде:  $\eta(\partial u/\partial y) = (\partial \sigma/\partial t) \cdot (\partial T/\partial x)$ , которое совпадает с традиционным граничным условием в задаче о термокапиллярной конвекции для уравнений Навье–Стокса. Заметим, что для большинства жидкостей  $\partial \sigma/\partial t < 0$ .

Рассматривается течение в прямоугольной полости высоты  $H$  и длины  $L$ . Течение описывается системой уравнений (7.1.11)–(7.1.13), в которой внешняя сила отсутствует. Система уравнений в двумерном случае записывается в виде (7.2.1)–(7.2.4). Переход к безразмерным величинам осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} x = \tilde{x}H, \quad y = \tilde{y}H, \quad u = \tilde{u}\frac{\nu}{H}, \quad v = \tilde{v}\frac{\nu}{H}, \quad t = \tilde{t}\frac{H^2}{\nu}, \\ p = \tilde{p}\rho \left(\frac{\nu}{H}\right)^2, \quad T = \tilde{T}\frac{\Delta T}{A}, \end{aligned}$$

При выбранном обезразмеривании число Марангони  $Ma = -(\partial \sigma/\partial x) \cdot (\Delta T/A) \cdot (H/\eta\chi)$ , а также  $Re = 1$ ,  $Pr = \nu/\chi$ ,  $\tau = M^2$ ,  $M = \nu/(Hc_s)$  — число Маха, которое для рассматриваемых задач является малой величиной.

Система (7.2.1)–(7.2.4) замыкается следующими граничными условиями:

- нижняя стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial y = 0$ ,  $\partial T/\partial y = 0$ ;
- верхняя граница:  
 $\partial u/\partial y = -(Ma \cdot A/Pr) \cdot (\partial T/\partial x)$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial y = 0$ ,  $\partial T/\partial y = 0$ ;
- левая боковая стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial x = 0$ ,  $T = 1$ ;
- правая боковая стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial x = 0$ ,  $T = 0$ .

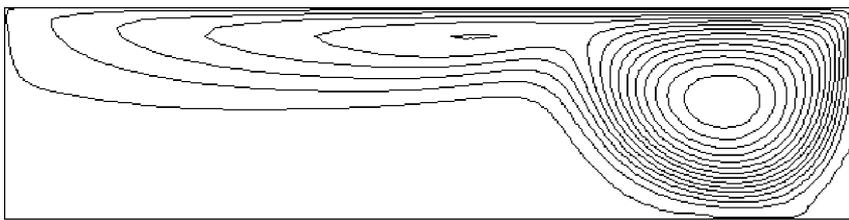
Как и в задаче о тепловой конвекции, безразмерный параметр  $\tau$  можно связать с безразмерными параметрами задачи соотношением

$$\tau = \alpha \frac{Pr}{Ma \cdot A}, \quad \text{где} \quad \alpha = \left| \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right| \Delta T \cdot \frac{1}{Hc_s^2}.$$

Величина  $\alpha$  оказывается весьма малой. Так, например, для кремния при  $\Delta T = 1000^0$  С и кюветы высотой  $H = 1$  см. имеем  $\alpha \sim 10^{-9}$ . В численных расчетах величину этого параметра следует выбирать в интервале  $0 < \alpha \leq 1$ . При проведении расчетов данной задачи параметр  $\alpha$  выбирался равным единице и, соответственно, члены с  $\tau$  рассматривались как регуляризаторы.

Задача о конвекции Марангони в прямоугольной каверне ( $A = 4$ ), подогреваемой слева, решалась для  $Ma = 5, 10, 20, 100$  и  $400$  и  $Pr = 0.015$  на равномерной пространственной сетке  $27 \times 102$ . Шаг по времени выбирался равным  $5 \cdot 10^{-6}$ . В качестве начальных условий использовались невозмущенные поля скорости и температуры.

Для  $Ma = 400$  результаты расчетов сопоставлены с данными [97], а для  $Ma \leq 400$  с данными [98].

Рис. 7.15: Линии тока для  $Ma = 5$ Рис. 7.16: Линии тока для  $Ma = 100$ 

На рис. 7.15–7.17 приведены линии тока для  $Ma = 5$ ,  $Ma = 100$  и  $Ma = 400$ . Так как числа Марангони положительны, жидкость вдоль верхней границы движется от горячей стенки к холодной. Образуется вихревое течение, центр которого смещен к правой стенке. С ростом  $Ma$  скорость движения увеличивается, и изотермы начинают искажаться. При  $Ma = 100$  появляются дополнительные вихри, вращающиеся в том же направлении, что и основной вихрь. В [98] приведены аналогичные

Рис. 7.17: Линии тока для  $Ma = 400$ 

графики для тех же чисел Марангони, причем видно их хорошее соответствие результатам настоящей работы. При  $Ma = 400$  в левой нижней части области образуется вихрь, вращающийся в противоположном направлении. Аналогичная картина имеет место в [97]. Профили горизонтальной скорости в сечении  $x = A/2$  при различных числах Марангони сравнивались с соответствующими профилями из [98]. При этом для сопоставления результатов скорость вычислялась как  $U(y) = Pr/Ma \cdot u(y)$ , что соответствует обезразмериванию, использованному в [98]. Полученные графики практически совпадают с аналогичными кривыми из указанной работы.

Таким образом, полученные результаты для  $Ma \leq 100$  хорошо соответствуют данным [98], а для  $Ma = 400$  — результатам [97].

## 7.7 Течение в кубической каверне с подвижной крышкой

Задача о течении жидкости в каверне с подвижной верхней крышкой является известным и достаточно сложным тестом для оценки эффективности численных методов. Первой задачей, на которой была проверена работоспособность КГД алгоритма для расчета вязких несжимаемых течений, был расчет двумерного течения жидкости в каверне [85]. Здесь, на основе работ [99] и [100], излагаются результаты численного моделирования трехмерного течения вязкой несжимаемой изотермической жидкости в кубической каверне с подвижной крышкой. Расчеты проведены на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью.

Для невысоких чисел Рейнольдса  $Re < 1000$  течение является ламинарным и стационарным и представляет собой практически один большой вихрь с центром вблизи центра области. Течение в плоскости симметрии каверны является практически двумерным и хорошо описывает-

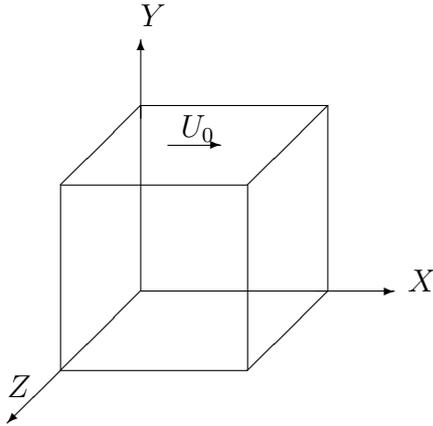


Рис. 7.18: Схема расчетной области и система координат

ся существующими двумерными моделями. В этом случае распределения скорости, полученные в расчетах по различным методикам хорошо согласуются между собой и с данными натуральных экспериментов [101]. С ростом числа Рейнольдса структура течения быстро усложняется, стратифицируется, становится нестационарным, а затем и турбулентным.

Расчет пространственных течений является трудоемкой вычислительной задачей, для реализации которой необходимо использовать мощные вычислительные комплексы. Описанный вычислительный алгоритм реализован для многопроцессорной вычислительной системы кластерного типа с распределенной памятью, в которой интерфейс обмена данными организован по принципу MPI (Message Passing Interface) [102].

Рассматривается течение изотермической жидкости в кубической каверне с ребром  $H$ . Верхняя крышка каверны движется с постоянной скоростью  $U_0$ . Схема расчетной области и используемая система координат приведена на рис. 7.18.

Введем безразмерные величины с помощью соотношений

$$x = \tilde{x}H, \quad y = \tilde{y}H, \quad z = \tilde{z}H, \quad u_x = \tilde{u}_x U_0, \quad u_y = \tilde{u}_y U_0, \quad u_z = \tilde{u}_z U_0,$$

$$p = \tilde{p} \rho U_0^2, \quad t = (\tilde{t}H)/U_0, \quad Re = (U_0 H)/\nu.$$

После приведения к безразмерному виду система КГД уравнений для плоских трехмерных изотермических течений имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \quad (7.7.1)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial(u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_x u_z)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\
& = \frac{2}{Re} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \\
& + 2 \frac{\partial(u_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_x)}{\partial y} + \frac{\partial(u_x w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_x)}{\partial z} + \frac{\partial(u_x w_z)}{\partial z}, \quad (7.7.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial(u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z u_y)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \\
& = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{2}{Re} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial(u_x w_y)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_x)}{\partial x} + 2 \frac{\partial(u_y w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_y)}{\partial z} + \frac{\partial(u_y w_z)}{\partial z}, \quad (7.7.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial(u_x u_z)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y u_z)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \\
& = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{2}{Re} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \\
& + \frac{\partial(u_x w_z)}{\partial x} + \frac{\partial(u_z w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_z)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_y)}{\partial y} + 2 \frac{\partial(u_z w_z)}{\partial z}, \quad (7.7.4)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
w_x &= \tau \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \\
w_y &= \tau \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} \right), \\
w_z &= \tau \left( u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (7.7.5)
\end{aligned}$$

Неизвестными величинами являются компоненты вектора скорости  $u_x = u_x(x, y, z, t)$ ,  $u_y = u_y(x, y, z, t)$ ,  $u_z = u_z(x, y, z, t)$  и давление  $p = p(x, y, t)$ .

Поле давления находится по уже известному полю скорости путем

решения уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (7.7.6)$$

являющегося эквивалентным представлением (7.7.1) при  $\tau = const$ .

Систему (7.7.2)–(7.7.6) дополним граничными условиями. На неподвижной твердой поверхности для скорости используются условия прилипания  $\vec{u} = 0$ . На поверхности  $y = 1$  задаются условия  $u_x = U_0, u_y = 0, u_z = 0$ . Граничные условия для давления следуют из условия непротекания и имеют вид

$$\partial p / \partial n = 0, \quad (7.7.7)$$

где  $\vec{n}$  — нормаль к поверхности. Так например, на грани  $x = 0$  имеем  $\partial p / \partial x = 0$ , на ребре  $x = 0, y = 0$  условие (7.7.7) приводит к равенствам  $\partial p / \partial x = 0, \partial p / \partial y = 0$ . В вершине  $x = 0, y = 0, z = 0$  имеем  $\partial p / \partial x = 0, \partial p / \partial y = 0, \partial p / \partial z = 0$ .

В качестве начального условия выбиралось состояние покоя  $u_x = u_y = u_z = 0$ . Давление в начальный момент считалось постоянным во всем поле течения:  $p = 0$ . Для устранения неоднозначности при вычислении давления его значение во время расчета в вершине куба поддерживалось постоянным.

Для решения трехмерного разностного уравнения для давления  $Au = f$  использовался метод сопряженных градиентов с предобуславливанием модифицированного неполного разложения Холецкого без заполнения.

В численных расчетах значение параметра  $\tau$  выбиралось исходя из условий точности и устойчивости алгоритма в виде  $\tau = 1/Re$ . Такой выбор параметра регуляризации, как показывает практика двумерных расчетов течений жидкости в каверне [85] и течений за обратным уступом, обеспечивает достаточную устойчивость и точность вычислительного алгоритма.

Задача решалась при числах Рейнольдса  $Re = 100, 1000$  и  $2000$  на равномерных пространственных сетках с одинаковым числом узлов по всем

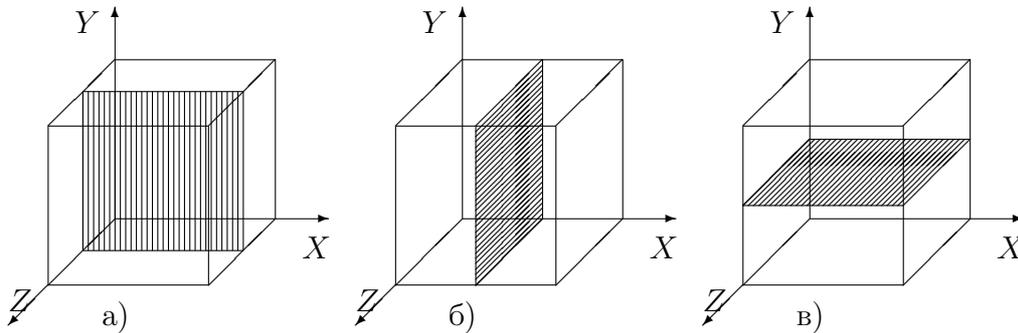


Рис. 7.19: Схема сечений расчетной области

трем направлениям  $N_h$ . При  $Re = 100$  использовались сетки с числом узлов  $N_h = 22$  и  $42$ , при  $Re = 1000$  число вычислительных узлов сетки по пространству составляло  $N_h = 42, 82$  и  $162$ . При  $Re = 2000$   $N_h = 162$ . Шаги по времени варьировались в пределах  $\Delta t = 0.02 \dots 0.001$ .

На рис. 7.20–7.22 показаны линии тока в трех центральных сечениях каверны с координатами  $z = 0.5$ ,  $x = 0.5$  и  $y = 0.5$ . Схема сечений приведена на рис. 7.19. В данной задаче сечение  $z = 0.5$  представляет собой плоскость симметрии. Показаны картины для  $Re = 100$ , сетка  $22 \times 22 \times 22$ ,  $Re = 1000$  и  $Re = 2000$ , сетки  $82 \times 82 \times 82$ . На двух последних рисунках виден существенно трехмерный характер течения, что сопровождается образованием в этих плоскостях источников и стоков. В плоскости симметрии компоненты скорости в направлении  $z$  малы, и течение здесь близко к двумерному [85].

Рис. 7.23 показывают одномерные распределения компонент скорости вдоль оси  $z$  для  $Re = 1000$  и  $Re = 2000$

На рис. 7.24–7.25 для  $Re = 1000$  представлены одномерные распределения компонент скоростей, рассчитанные на последовательности сгущающихся сеток. Линии 1 (сплошные) соответствуют расчетам с  $N_h = 162$ , линии 2 (пунктир) — расчетам с  $N_h = 82$ , линии 3 (штрих-пунктир) — расчетам с  $N_h = 42$ . Наглядно прослеживается сходимость численного решения при сгущении пространственной сетки.

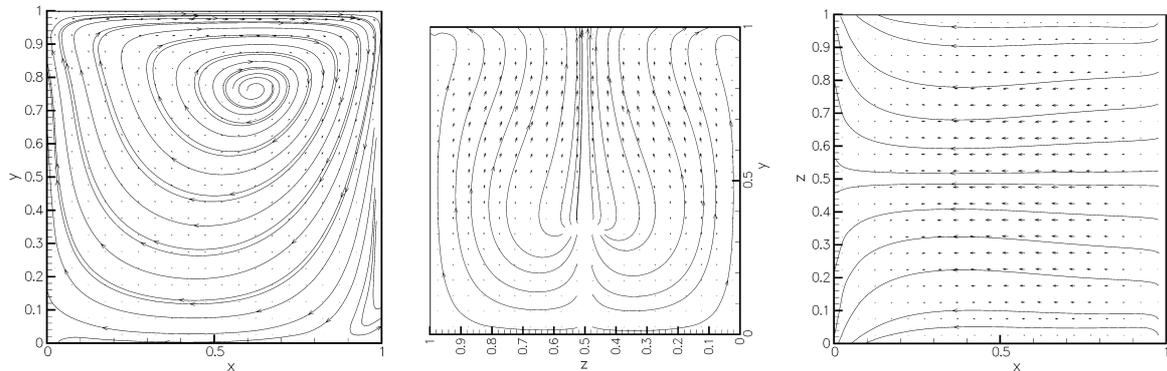


Рис. 7.20:  $Re = 100$ ; линии тока для  $u_x, u_y$  в плоскости  $z = 0.5$  (слева);  $u_y, u_z$  в плоскости  $x = 0.5$  (в центре);  $u_x, u_z$  в плоскости  $y = 0.5$  (справа)

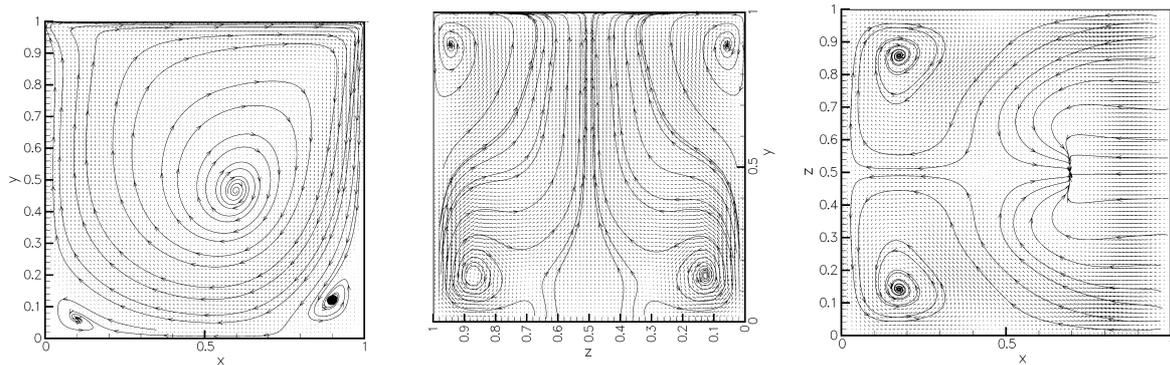


Рис. 7.21:  $Re = 1000$ ; линии тока для  $u_x, u_y$  в плоскости  $z = 0.5$  (слева);  $u_y, u_z$  в плоскости  $x = 0.5$  (в центре);  $u_x, u_z$  в плоскости  $y = 0.5$  (справа)

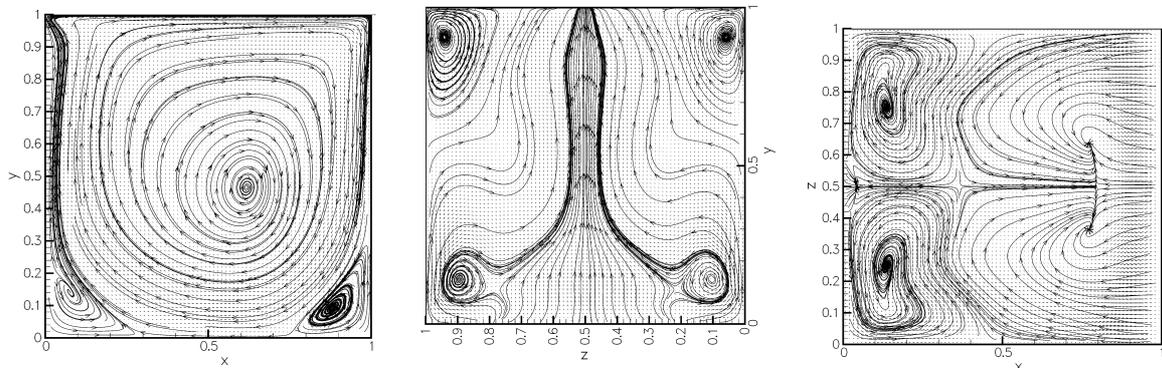


Рис. 7.22:  $Re = 2000$ ; линии тока для  $u_x, u_y$  в плоскости  $z = 0.5$  (слева);  $u_y, u_z$  в плоскости  $x = 0.5$  (в центре);  $u_x, u_z$  в плоскости  $y = 0.5$  (справа)

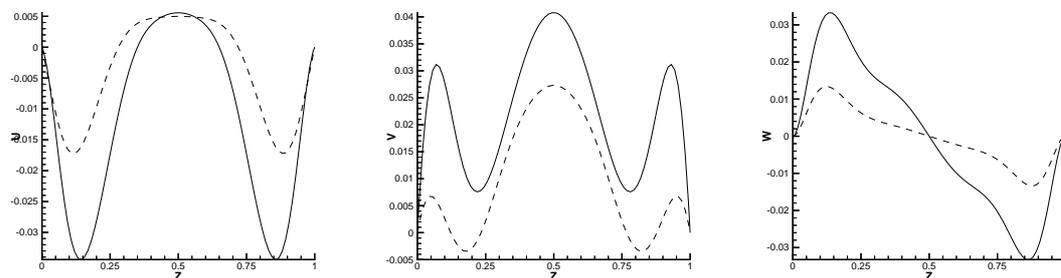


Рис. 7.23: Сплошная линия  $Re = 1000$ , пунктирная линия  $Re = 2000$ ;  $u_x(0.5, 0.5, z)$  (слева),  $u_y(0.5, 0.5, z)$  (в центре),  $u_z(0.5, 0.5, z)$  (справа)

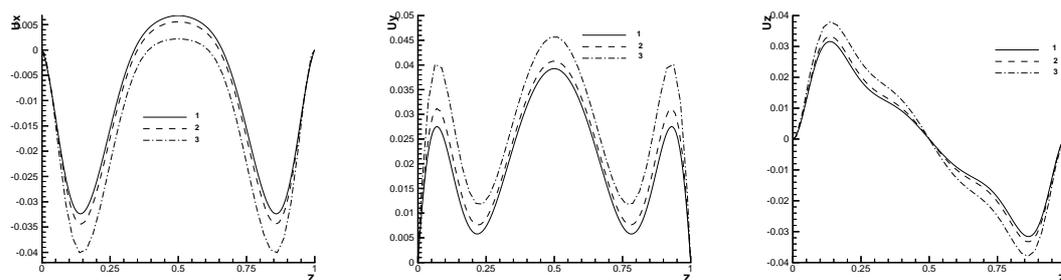


Рис. 7.24:  $Re = 1000$ ; сплошная линия  $N_h = 162$ , пунктирная линия  $N_h = 82$ , штрихпунктирная линия  $N_h = 42$ ;  $u_x(0.5, 0.5, z)$  (слева),  $u_y(0.5, 0.5, z)$  (в центре),  $u_z(0.5, 0.5, z)$  (справа)

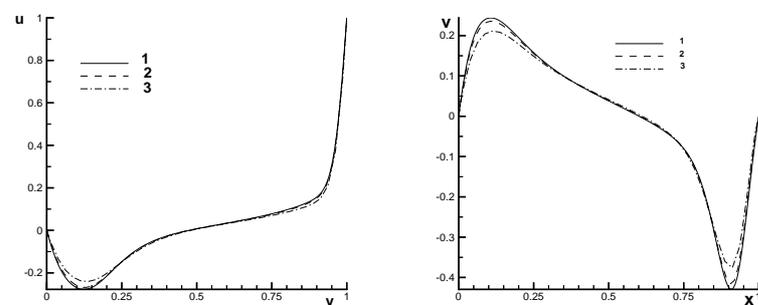


Рис. 7.25:  $Re = 1000$ ; сплошная линия  $N_h = 162$ , пунктирная линия  $N_h = 82$ , штрихпунктирная линия  $N_h = 42$ ;  $u_x(0.5, y, 0.5)$  (слева),  $u_y(x, 0.5, 0.5)$  (справа)

## Глава 8

### КГДР уравнения для описания течений неравновесного газа

В настоящей главе проводится обобщение КГД уравнений на случай газа с поступательно-вращательной температурной неравновесностью. Такая неравновесность характерна для течений разреженных газов, состоящих из двухатомных или полиатомных молекул [12], [13], [15], [21], [64], [65], [66], [67].

Молекула рассматривается как твердое тело, обладающее только трансляционными и вращательными степенями свободы. Такое описание правомочно, если температура газа не слишком высока (колебательные степени свободы не возбуждены), и не слишком низка (вращательные степени свободы могут рассматриваться классически). Для большинства молекулярных газов второе условие удовлетворяется при обычных температурах, поскольку в этом случае расстояние между вращательными уровнями  $\hbar^2/2I^0$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $I^0$  — момент инерции молекулы, мало по сравнению с  $kT$  [21], [64], [65], [66].

Материал этой главы основан на работах [59] и [77].

#### 8.1 Молекулярная модель и функции распределения

Предположим, что все молекулы одинаковы и представляют собой твердые ротаторы. В этом случае полная энергия молекулы совпадает с ее кинетической энергией и может быть записана как

$$E_m = \frac{m_0}{2} \vec{\xi}^2 + E_{rot},$$

где  $E_{rot}$  — вращательная энергия,  $m_0$  — масса молекулы,  $\vec{\xi} = \vec{u} + \vec{c}$  — скорость ее центра масс, которая представляется как сумма макроскопической скорости  $\vec{u}$  и тепловой скорости  $\vec{c}$ .

Энергия вращения для случая полиатомной молекулы равна

$$E_{rot}^{(3)} = \frac{1}{2}(I_1^0 \omega_1^2 + I_2^0 \omega_2^2 + I_3^0 \omega_3^2), \quad (8.1.1)$$

где  $I_1^0, I_2^0, I_3^0$  — главные моменты инерции молекулы и  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — угловые скорости относительно главных осей 3 ([68], с.128). В этом случае молекула имеет шесть степеней свободы — три поступательные и три вращательные (число внутренних степеней свободы  $\zeta = 3$ ). В дальнейшем при ссылках на такую систему будем использовать обозначение "3R".

В случае линейных (в частности, двухатомных) молекул, обладающих двумя вращательными степенями свободы ( $\zeta = 2$ ), вращательная энергия записывается следующим образом:

$$E_{rot}^{(2)} = \frac{I^0}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2), \quad (8.1.2)$$

где  $I^0$  — главный момент инерции относительно оси, перпендикулярной оси симметрии молекулы. При ссылках на эту модель будем использовать обозначение "2R".

Состояние газа из твердых ротаторов может быть описано одночастичной функцией распределения  $f(t, \vec{R}, \vec{\xi}, \vec{\omega})$ , зависящей от времени  $t$ , координаты  $\vec{R}$ , скорости центра масс  $\vec{\xi}$  и вектора угловых скоростей  $\vec{\omega}$ . Будем нормировать эту функцию распределения соотношением

$$d\rho = f d\vec{\xi} d\vec{\omega},$$

где  $\rho$  — массовая плотность газа.

Рассмотрим локально-равновесную двухтемпературную функцию распределения Максвелла–Больцмана ([21], с.109):

$$f_{0r} = f_0 \cdot f_r,$$

которая является произведением максвелловской функции распределения по поступательным степеням свободы

$$f_0 = \rho \left(2\pi \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_T\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\vec{c}^2}{2(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_T}\right)$$

и функции распределения Хиншельвуда (Hinshelwood) по вращательным степеням свободы ([12], с.104)

$$f_r = \mathcal{A} \exp\left(-\frac{E_{rot}}{kT_r}\right),$$

где  $\mathcal{A}$  — нормировочный множитель. Для газа с двумя вращательными степенями свободы (2R) это распределение имеет вид

$$f_r^{2R} = \left(2\pi \frac{\mathcal{R}}{I} T_r\right)^{-1} \exp\left(-\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2(\mathcal{R}/I)T_r}\right),$$

для газа с тремя вращательными степенями свободы (3R)

$$f_r^{3R} = (2\pi\mathcal{R}T_r)^{-1}(I_1I_2I_3)^{1/2} \exp\left(-\frac{\omega_1^2}{2(\mathcal{R}/I_1)T_r} - \frac{\omega_2^2}{2(\mathcal{R}/I_2)T_r} - \frac{\omega_3^2}{2(\mathcal{R}/I_3)T_r}\right).$$

Здесь  $\mathcal{R}$  — универсальная газовая постоянная,  $\mathcal{M}$  — молярная масса рассматриваемого газа,  $I = I^0 N_A$ ,  $I_\alpha = I_\alpha^0 N_A$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ,  $T_T$  — трансляционная температура, одинаковая для всех трансляционных степеней свободы молекулы,  $T_r$  — вращательная температура, одинаковая для всех вращательных степеней свободы молекулы.

Нормировочный множитель  $\mathcal{A}$  выбран из условия

$$\int f_r d\vec{\omega} = 1,$$

где интегрирование проводится по всему пространству угловых скоростей (см. следующий параграф). Такое представление для функции распределения правомерно в том случае, когда температура газа не слишком высока, и колебательные степени свободы не возбуждены, но и не слишком мала, то есть вращательные степени свободы могут рассматриваться в классическом приближении [21], [64], [65], [66].

## 8.2 Используемые системы координат и некоторые интегралы

Введем декартову систему координат в пространстве:  $(x, y, z)$ ,  $\vec{R}$  — пространственный радиус-вектор. Для векторной функции пространственных координат  $\vec{a}(\vec{R})$   $a_x$  обозначает его  $x$ -проекцию,  $a_y$  и  $a_z$  —  $y$  и  $z$ -проекции.

Другая пространственная система координат — произвольная ортонормированная криволинейная  $(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$  система координат. Для той же векторной функции  $\vec{a}(\vec{R})$   $a_i$  является ковариантной координатой:

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{R}_i, \quad \text{где } \vec{R}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta^i}.$$

Контравариантные координаты имеют вид:  $a^i = g^{ij} a_j$ , где  $g^{ij} = \vec{R}^i \cdot \vec{R}^j$  — метрический тензор.  $\vec{R}^i$  определяются из следующих уравнений:

$$\vec{R}_i \cdot \vec{R}^j = \delta_i^j; \quad \delta_i^j = 1(0), i = (\neq)j.$$

Также справедливы следующие соотношения:

$$a^i = \vec{a} \cdot \vec{R}^i; \quad a_i = g_{ij}a^j; \quad g_{ik}g^{jk} = \delta_i^j, \quad g_{ij} = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j.$$

В декартовых координатах  $a^i$  выражается как

$$a^i = \vec{a} \cdot \vec{R}^i = a_x R_x^i + a_y R_y^i + a_z R_z^i, \quad (8.2.1)$$

где  $R_x^i$  —  $x$ -проекция  $\vec{R}^i$ , и соответственно  $R_y^i$  и  $R_z^i$  —  $y$  и  $z$ -проекции этого вектора. Метрический тензор можно выразить следующим образом:

$$g^{ij} = \vec{R}^i \cdot \vec{R}^j = R_x^i R_x^j + R_y^i R_y^j + R_z^i R_z^j. \quad (8.2.2)$$

Введем в рассмотрение также два пространства скоростей — пространство линейных и пространство угловых скоростей. В пространстве линейных скоростей обозначаем радиус-вектор через  $\vec{\xi}$ . По отношению к пространственным координатам  $\vec{\xi}$  может рассматриваться как постоянное векторное поле  $\xi^i$ :

$$\nabla_j \xi^i = 0, \quad (8.2.3)$$

$\nabla_j$  — ковариантная производная. В пространстве линейных скоростей введем декартову систему координат  $(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ , направления координатных осей которой совпадают с направлениями декартовой системы координат в пространстве  $\vec{R}$ .

В пространстве угловых скоростей также введем декартову систему координат  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ . Направления координатных осей в данном случае совпадают с главными осями молекулы как твердого тела, и различаются от одной молекулы к другой.

Ниже мы будем проводить интегрирование в пространстве линейных скоростей  $\vec{\xi}$  и в пространстве угловых скоростей  $\vec{\omega}$  с использованием соответствующих декартовых систем координат. Система моментных уравнений будет строиться в криволинейной системе координат  $(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ .

Вычислим некоторые интегралы, полезные в дальнейшем. Если не указано иное, пределы интегрирования предполагаются бесконечными:

$$\int \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \dots;$$

в последующих вычислениях будем использовать (8.2.1), (8.2.2).

$$\begin{aligned}\int c^i f_0 d\vec{c} &= \int (c_x R_x^i + c_y R_y^i + c_z R_z^i) f_0 d\vec{c} \\ &= R_x^i \int \int \int c_x f_0 dc_x dc_y dc_z + \dots = 0;\end{aligned}$$

$$\int c_i f_0 d\vec{c} = g_{ik} \int c^k f_0 d\vec{c} = 0;$$

$$\begin{aligned}\int c^i c^j f_0 d\vec{c} &= \int (c_x R_x^i + c_y R_y^i + c_z R_z^i)(c_x R_x^j + c_y R_y^j + c_z R_z^j) f_0 d\vec{c} = \\ &R_x^i R_x^j \int c_x^2 f_0 d\vec{c} + R_y^i R_y^j \int c_y^2 f_0 d\vec{c} + R_z^i R_z^j \int c_z^2 f_0 d\vec{c} = (\vec{R}^i \cdot \vec{R}^j) p_T = g^{ij} p_T;\end{aligned}$$

$$\int c^i c^j c^k f_0 d\vec{c} = 0;$$

$$\int c_x^4 f_0 d\vec{c} = \int c_y^4 f_0 d\vec{c} = \int c_z^4 f_0 d\vec{c} = 3 \frac{p_T^2}{\rho};$$

$$\int c_x^2 c_y^2 f_0 d\vec{c} = \int c_x^2 c_z^2 f_0 d\vec{c} = \int c_y^2 c_z^2 f_0 d\vec{c} = \frac{p_T^2}{\rho};$$

$$\int c^i c^j c^k c^l f_0 d\vec{c} = 5 \frac{p_T^2}{\rho} g^{ij} g^{kl}.$$

Здесь  $p_T = \rho(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_T$  — трансляционное давление (см. следующий параграф). При вычислении этих интегралов были использованы равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \sqrt{\pi}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-y^2) dy = \frac{1}{2} \sqrt{\pi};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^4 \exp(-y^2) dy = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}.$$

### 8.3 Построение моментных уравнений

Поведение функции распределения  $f$  описывается уравнением Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\xi} \vec{\nabla}) f = \mathcal{I}, \quad (8.3.1)$$

где  $\mathcal{I}$  — интеграл столкновений. Для построения моментных уравнений, описывающих течения вязкого газа, традиционно используются приближения для функции  $f$  в виде разложения по малому параметру вблизи равновесного значения с последующим осреднением полученного кинетического уравнения с сумматорными инвариантами ([15], [13]).

Для построения уравнений, учитывающих поступательно-вращательную неравновесность (КГДР системы) заменим функцию распределения  $f$  ее приближенным значением  $f^{QGDR}$ , которое представляет собой разложение по малому параметру (градиентное разложение) следующего вида

$$f^{QGDR} = f_{0r} - \tau(\vec{\xi} \vec{\nabla}) f_{0r}.$$

Здесь  $\tau$  представляет собой максвелловское время релаксации  $\tau = \eta/pT$ , где  $\eta \sim T_T^\omega$  — коэффициент вязкости газа, вычисляемый на основе поступательной температуры частиц [64], величина  $\omega$  определяется законом межмолекулярного взаимодействия.

Формальная замена

$$f \rightarrow f^{QGDR}$$

в конвективном слагаемом уравнения Больцмана (8.3.1) приводит к приближенному уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\xi} \vec{\nabla}) f_{0r} - (\vec{\xi} \vec{\nabla}) \tau (\vec{\xi} \vec{\nabla}) f_{0r} = \mathcal{I}. \quad (8.3.2)$$

Приближенное уравнение аналогичного вида использовалось в главе 3 для построения КГД уравнений.

В отличие от классического кинетического уравнения Кагана–Максимова для газа с вращательными степенями свободы (полученного при сходных предположениях) в этом уравнении не учитываются ни поступательное ускорение молекулы под действием внешней силы, ни прецессия вращательного момента молекулы во внешнем магнитном или электрическом поле [21].

Макроскопические КГДР уравнения получаются посредством моментного осреднения уравнения (8.3.2) по пространствам скоростей. Процедура получения уравнений аналогична изложенным в [37] и в главе 2.

Считаем справедливыми следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \int f d\vec{\xi} d\vec{\omega} &= \int f_{0r} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \rho, & \int c^i f d\vec{\xi} d\vec{\omega} &= 0, \\ p_T &= \frac{1}{3} \int c^2 f d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \frac{1}{3} \int c^2 f_{0r} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_T. \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

В случае 2R:

$$\begin{aligned} p_r &= \int \varepsilon_\omega^{2R} f d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \int \varepsilon_\omega^{2R} f_{0r} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \rho \frac{\mathcal{R}}{M} T_r, \\ \varepsilon_\omega^{2R} &= \frac{I}{2\mathcal{M}} (\omega_1^2 + \omega_2^2). \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

В случае 3R:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{2}{3} \int \varepsilon_\omega^{3R} f d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \frac{2}{3} \int \varepsilon_\omega^{3R} f_{0r} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \rho \frac{\mathcal{R}}{M} T_r, \\ \varepsilon_\omega^{3R} &= \frac{1}{2\mathcal{M}} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2). \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

Используя (8.1.1) и (8.1.2), легко получить, что полная энергия единицы массы газа, включающая в себя энергию поступательного  $E_T$  и вращательного  $E_r$  движения, записывается в виде

$$E = E_T + E_r = \int \left( \frac{\vec{\xi}^2}{2} + \varepsilon_\omega \right) f d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \int \left( \frac{\vec{\xi}^2}{2} + \varepsilon_\omega \right) f_{0r} d\vec{\xi} d\vec{\omega},$$

где

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{1}{2} \int \vec{\xi}^2 f d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \frac{1}{2} \int \vec{\xi}^2 f_{0r} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \frac{\rho \vec{u}^2}{2} + \frac{3}{2} p_T, \\ E_r^{2R} &= \int \varepsilon_\omega^{2R} f d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \int \varepsilon_\omega^{2R} f_{0r} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = p_r, \\ E_r^{3R} &= \int \varepsilon_\omega^{3R} f d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \int \varepsilon_\omega^{3R} f_{0r} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \frac{3}{2} p_r. \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

Среднее давление вычисляется как

$$p_{av} = \frac{3p_T + \zeta p_r}{3 + \zeta}. \quad (8.3.7)$$

Для 2R газа:

$$\zeta = 2, \quad p_{av} = (3p_T + 2p_r)/5,$$

для 3R газа:

$$\zeta = 3, \quad p_{av} = (p_T + p_r)/2.$$

Средняя температура связана со средним давлением уравнением состояния  $p_{av} = \rho(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_{av}$ .

Выражение для полной энергии в обоих случаях можно записать через среднее давление:

$$E = \frac{1}{2}\rho\vec{u}^2 + \frac{p_{av}}{\gamma - 1},$$

где  $p_{av}$  определяется в (8.3.7). Здесь  $\gamma$  — показатель адиабаты. Для идеального газа [12]

$$\gamma = \frac{5 + \zeta}{3 + \zeta}. \quad (8.3.8)$$

Используя (8.2.3), перепишем уравнение (8.3.2) в индексной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i \xi^i f_{0r} - \nabla_i \tau \nabla_j \xi^i \xi^j f_{0r} = \mathcal{I}. \quad (8.3.9)$$

Интегрируя (8.3.9) с весом 1 и используя соотношения (8.3.3)–(8.3.6) и выражения из § 3.3, получим:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \frac{\partial}{\partial t} \rho;$$

$$\int \nabla_i \xi^i f_{0r} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \nabla_i \int (u^i + c^i) f_0 d\vec{c} \int f_r d\vec{\omega} = \nabla_i \rho u^i;$$

$$\begin{aligned} \int \nabla_i \tau \nabla_j \xi^i \xi^j f_{0r} d\vec{\xi} d\vec{\omega} &= \nabla_i \tau \nabla_j \int (u^i + c^i)(u^j + c^j) f_0 d\vec{c} = \\ &= \nabla_i \tau \nabla_j (\rho u^i u^j + \int c^i c^j f_0 d\vec{c}) = \nabla_i \tau \nabla_j (\rho u^i u^j + g^{ij} p_T). \end{aligned}$$

В силу свойств интеграла столкновений (единица является сумматорным инвариантом для интеграла столкновений Больцмана) интеграл от правой части обращается в нуль:

$$\int \mathcal{I} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = 0.$$

Таким образом, получаем уравнение для плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla_i \rho u^i = \nabla_i \tau \nabla_j (\rho u^i u^j + g^{ij} p_T).$$

В дальнейшем будем использовать (8.3.3)–(8.3.6), опуская соответствующие ссылки. Для получения уравнения импульса проинтегрируем (8.3.9) с весом  $\xi^k$ :

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} \xi^k d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \frac{\partial}{\partial t} \rho u^k.$$

$$\int \nabla_i \xi^i f_{0r} \xi^k d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \nabla_i (\rho u^i u^k + g^{ik} p_T).$$

$$\int \nabla_i \tau \nabla_j \xi^i \xi^j f_{0r} \xi^k d\vec{\xi} d\vec{\omega} = (\rho u^i u^j u^k + p_T (u^k g^{ij} + u^j g^{ik} + u^i g^{jk})).$$

Поскольку  $\xi^k$  является сумматорным инвариантом, то и в этом случае

$$\int \mathcal{I} \xi^k d\vec{\xi} d\vec{\omega} = 0.$$

Комбинируя полученные выражения, получаем уравнение для  $\rho u^k$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^k + \nabla_i (\rho u^i u^k + g^{ik} p_T) = \nabla_i \tau \nabla_j (\rho u^i u^j u^k + p_T (u^k g^{ij} + u^j g^{ik} + u^i g^{jk})).$$

С целью получить уравнение для поступательной энергии  $E_T$  осредним (8.3.9) с весом  $\xi^2/2$ :

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\xi^2}{2} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \frac{\partial}{\partial t} E_T.$$

$$\int \nabla_i \xi^i f_{0r} \frac{1}{2} \xi^2 d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \nabla_i \frac{1}{2} \int (u^i + c^i) f_0 \xi^2 d\vec{c} = \nabla_i u^i (E_T + p_T).$$

$$\int \nabla_i \tau \nabla_j \xi^i \xi^j f_{0r} \frac{\xi^2}{2} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \nabla_i \tau \nabla_j (u^i u^j E_T + 2u^i u^j p_T + \frac{1}{2} u_k u^k g^{ij} p_T + \frac{5}{2} \frac{p_T^2}{\rho} g^{ij}).$$

Для интеграла столкновений  $\mathcal{I}$  величина  $\xi^2/2$  уже не является сумматорным инвариантом, поскольку возможен обмен энергией между поступательными и вращательными степенями свободы, и последний интеграл не обращается в нуль. Назовем его обменным членом и обозначим:

$$\int \mathcal{I} \frac{\xi^2}{2} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = S_T.$$

Комбинируя полученные выражения и дифференцируя по частям последнее слагаемое, в которое входит квадрат давления, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_T + \nabla_i u^i (E_T + p_T) = \nabla_i \tau \nabla_j (u^i u^j E_T + 2u^i u^j p_T + \\ \frac{1}{2} u_k u^k g^{ij} p_T) + \frac{5}{2} \nabla_i \tau \frac{p_T}{\rho} \nabla_j p_T g^{ij} + \frac{5}{2} \nabla_i \tau p_T \nabla_j \frac{p_T}{\rho} g^{ij} + S_T. \end{aligned}$$

Чтобы получить уравнение для вращательной энергии  $E_r$ , необходимо осреднить (8.3.9) с весом  $\varepsilon_\omega^{2R}$  в случае 2R молекул, и с весом  $\varepsilon_\omega^{3R}$  в случае 3R молекул; эти величины определяются в (8.3.4)–(8.3.5).

Для первого варианта осреднения получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial t} \varepsilon_\omega d\xi d\vec{\omega} &= \frac{\partial}{\partial t} E_r. \\ \int \nabla_i \xi^i f_{0r} \varepsilon_\omega d\xi d\vec{\omega} &= \nabla_i \int \xi^i f_0 d\vec{c} \int \varepsilon_\omega f_r d\vec{\omega} = \nabla_i u^i E_r. \\ \int \nabla_i \tau \nabla_j \xi^i \xi^j f_{0r} \varepsilon_\omega d\xi d\vec{\omega} &= \nabla_i \tau \nabla_j (\rho u^i u^j + g^{ij} p_T) \frac{E_r}{\rho} = \nabla_i \tau \nabla_j (E_r u^i u^j + g^{ij} \frac{p_T p_r}{\rho}). \end{aligned}$$

Обменный член обозначим как

$$\int \mathcal{I} \varepsilon_\omega d\xi d\vec{\omega} = S_r.$$

Комбинируя вместе полученные выражения и дифференцируя по частям слагаемое, содержащее произведение давлений, получим уравнение для вращательной энергии 2R молекул:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_r + \nabla_i u^i E_r = \nabla_i \tau \nabla_j u^i u^j E_r + \nabla_i \tau \frac{p_r}{\rho} \nabla_j p_T g^{ij} + \nabla_i \tau p_T \nabla_j \frac{p_r}{\rho} g^{ij} + S_r.$$

Аналогично вычислим для 3R случая, при этом правая часть изменится:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_r + \nabla_i u^i E_r = \nabla_i \tau \nabla_j u^i u^j E_r + \frac{3}{2} \nabla_i \tau \frac{p_r}{\rho} \nabla_j p_T g^{ij} + \frac{3}{2} \nabla_i \tau p_T \nabla_j \frac{p_r}{\rho} g^{ij} + S_r.$$

Изложенный здесь способ получения моментных уравнений приводит к выражениям для теплового потока с числом Прандтля, равным единице. Для обобщения уравнений на случай произвольного числа Прандтля предпоследние слагаемые в уравнениях для поступательной и вращательной энергий следует домножить на величину  $Pr^{-1}$ . Для определения числа Прандтля можно воспользоваться аппроксимацией Эйкена [70]:

$$Pr = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5},$$

где  $\gamma$  определяется в (8.3.8); в случае 2R газа  $\gamma = 7/5$ ,  $Pr = 14/19$ , в случае 3R газа  $\gamma = 8/6$ ,  $Pr = 16/21$ .

## 8.4 Вычисление обменных членов

Обменные члены в правых частях полученных уравнений для энергий представляют собой моменты интеграла столкновений уравнения Больцмана (8.3.1). Для их вычисления воспользуемся релаксационной моделью интеграла столкновений в ее традиционном виде

$$\mathcal{I} = \frac{f_{0r}^0 - f}{\tau_r},$$

где  $f_{0r}^0$  представляет собой функцию распределения  $f_{0r}$  для равновесного случая, то есть для случая, когда  $T_T = T_r = T_{av}$ , соответственно  $p_T = p_r = p_{av}$ ;  $\tau_r$  — среднее время вращательной релаксации, которое обычно в несколько раз превышает максвелловское время релаксации  $\tau$ .

$$\tau_r = Z\tau_c,$$

$1/Z$  - относительная частота неупругих соударений,  $\tau_c = \tau/\Omega$  - характерное время между упругими соударениями,  $\Omega = 30/((7 - 2\omega)(5 - 2\omega))$  [12], [64].

Подставляя выражение для интеграла столкновений в определение обменного члена, имеем для случая 2R:

$$S_T = \int \frac{1}{\tau_r} (f_{0r}^0 - f) \frac{1}{2} \xi^2 d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \frac{3}{2\tau_r} (p_{av} - p_T).$$

Для второго обменного члена:

$$S_r = \int \frac{1}{\tau_r} (f_{0r}^0 - f) \varepsilon_\omega^{2R} d\vec{\xi} d\vec{\omega} = \frac{1}{\tau_r} (p_{av} - p_r).$$

Подставляя выражения для среднего давления (8.3.7), получим для 2R случая

$$S_T = \frac{3}{5\tau_r} (p_r - p_T), \quad S_r = -S_T.$$

Рассуждая аналогично, получим для 3R случая:

$$S_T = \frac{3}{4\tau_r} (p_r - p_T), \quad S_r = -S_T.$$

Заметим, что в соответствии с законом сохранения энергии:

$$S_T + S_r = 0.$$

## 8.5 КГДР уравнения для газа с двумя и тремя вращательными степенями свободы

Получим окончательный вид КГДР уравнений для двухатомных (2R) и полиатомных (3R) молекул в инвариантном относительно системы координат виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla_i \rho u^i = \nabla_i \tau (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p_T), \quad (8.5.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho u^k + \nabla_i \rho u^i u^k + \nabla^k p_T = \\ & \nabla_i \tau \nabla_j \rho u^i u^j u^k + \nabla_i \tau (\nabla^i p_T u^k + \nabla^k p_T u^i) + \nabla^k \tau \nabla_i p_T u^i, \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} E_T + \nabla_i u^i (E_T + p_T) = \nabla_i \tau (\nabla_j (E_T + 2p_T) u^i u^j + \\ & \frac{1}{2} \nabla^i u_k u^k p_T) + \frac{5}{2} \nabla_i \tau \frac{p_T}{\rho} \nabla^i p_T + Pr^{-1} \frac{5}{2} \nabla_i \tau p_T \nabla^i \frac{p_T}{\rho} + S_T. \end{aligned} \quad (8.5.3)$$

Уравнение для вращательной энергии и обменные члены в случае 2R:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} E_r + \nabla_i u^i E_r = \\ & = \nabla_i \tau \nabla_j u^i u^j E_r + \nabla_i \tau \frac{p_r}{\rho} \nabla^i p_T + Pr^{-1} \nabla_i \tau p_T \nabla^i \frac{p_r}{\rho} + S_r. \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

$$S_T = \frac{3}{5\tau_r} (p_r - p_T); \quad S_r = -S_T; \quad E_T = \frac{\rho \vec{u}^2}{2} + \frac{3p_T}{2}; \quad E_r = p_r.$$

$$\gamma = 7/5; \quad Pr = 14/19; \quad p_T = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_T; \quad p_r = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_r.$$

Уравнение для вращательной энергии и обменные члены в случае 3R:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} E_r + \nabla_i u^i E_r = \\ & = \nabla_i \tau \nabla_j u^i u^j E_r + \frac{3}{2} \nabla_i \tau \frac{p_r}{\rho} \nabla^i p_T + Pr^{-1} \frac{3}{2} \nabla_i \tau p_T \nabla^i \frac{p_r}{\rho} + S_r. \end{aligned}$$

$$S_T = \frac{3}{4\tau_r}(p_r - p_T); \quad S_r = -S_T; \quad E_T = \frac{\rho \bar{u}^2}{2} + \frac{3p_T}{2}; \quad E_r = \frac{3}{2}p_r.$$

$$\gamma = 8/6; \quad Pr = 16/21; \quad p_T = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_T; \quad p_r = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_r.$$

Уравнение для вращательной энергии  $E_r$  может быть приближено следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} T_r + u^i \nabla_i T_r = (T_{av} - T_r)/\tau_r.$$

Такая форма записи часто используется в работах по исследованию релаксационных процессов (см. [12], с. 117).

Для пространственно-одномерных течений эти уравнения упрощаются:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} r^\nu \rho u = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r^\nu \rho u^2 + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau r^\nu \frac{\partial}{\partial r} p_T.$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} r^\nu \rho u^2 + \frac{\partial}{\partial r} p_T = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r^\nu \rho u^3 +$$

$$2 \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau r^\nu \frac{\partial}{\partial r} p_T u - 2\nu \frac{\tau}{r^2} p_T u + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\tau}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} r^\nu p_T u.$$

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} r^\nu u (E_T + p_T) = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r^\nu (E_T + 2p_T) u^2 +$$

$$\frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau r^\nu \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2} u^2 p_T + \frac{5}{2} \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{p_T}{\rho} r^\nu \frac{\partial}{\partial r} p_T + Pr^{-1} \frac{5}{2} \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau p_T r^\nu \frac{\partial}{\partial r} \frac{p_T}{\rho} + S_T.$$

Для случая 2R:

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} r^\nu u E_r = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r^\nu u^2 E_r +$$

$$\frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{p_r}{\rho} r^\nu \frac{\partial}{\partial r} p_T + Pr^{-1} \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau p_T r^\nu \frac{\partial}{\partial r} \frac{p_r}{\rho} + S_r.$$

Для случая 3R:

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} r^\nu u E_r = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r^\nu u^2 E_r +$$

$$\frac{3}{2} \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{p_r}{\rho} r^\nu \frac{\partial}{\partial r} p_T + Pr^{-1} \frac{3}{2} \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \tau p_T r^\nu \frac{\partial}{\partial r} \frac{p_r}{\rho} + S_r.$$

Здесь  $\nu = 0$  соответствует плоскому случаю,  $\nu = 1$  — цилиндрической симметрии,  $\nu = 2$  — сферической.

Дополненные граничными условиями, выписанные здесь системы уравнений представляют собой замкнутую модель для расчета течений умеренно-разреженного газа с возможной неравновесностью между поступательными и вращательными степенями свободы.

В случае теплового равновесия газа по поступательным и вращательным степеням свободы, то есть в случае, когда  $T_T = T_r = T$  и  $p_T = p_r = p$ , полная энергия единицы объема равна

$$E = E_T + E_r = \frac{\rho \vec{u}^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1},$$

где  $\gamma$  определяется в соответствии с (8.3.8).

При этом вид уравнений для плотности и импульса не изменится:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i \rho u^i = \nabla_i \tau (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u^k + \nabla_i \rho u^i u^k + \nabla^k p = \nabla_i \tau \nabla_j \rho u^i u^j u^k + \\ \nabla_i \tau (\nabla^i p u^k + \nabla^k p u^i) + \nabla^k \tau \nabla_i p u^i. \end{aligned}$$

Сложим уравнения для  $E_T$  и  $E_r$  и получим уравнение для полной энергии  $E$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i u^i (E + p) = \nabla_i \tau (\nabla_j (E + 2p) u^i u^j + \frac{1}{2} \nabla^i u_k u^k p) + \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla_i \tau \frac{p}{\rho} \nabla^i p + Pr^{-1} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla_i \tau p \nabla^i \frac{p}{\rho}. \end{aligned}$$

Заметим, что приведенное выше уравнение энергии сразу может быть получено при осреднении приближенного уравнения (8.3.9) с сумматорным инвариантом  $\xi^2/2 + \varepsilon_\omega$  и обобщении полученного уравнения на случай  $Pr \neq 1$ .

Последняя система уравнений совпадает с выписанной ранее КГД системой. То есть, в равновесном случае КГДР система переходит в систему КГД с соответствующими значениями  $\gamma$  и  $Pr$ .

## 8.6 Результаты численного моделирования

На основе полученных КГДР уравнений решалась задача о течении азота, который рассматривался как 2R газ с параметрами  $Z = 5, \omega = 0.75$ , где  $\omega$  — показатель степени в законе зависимости вязкости от температуры. Полученные результаты сопоставлялись с расчетами, выполненными в рамках DSMC подхода. Рассматривались одномерные задачи о релаксации поступательной и вращательной температуры в потоке, и задача численного моделирования структуры ударной волны. Численный алгоритм представлял собой явную по времени разностную схему второго порядка точности без искусственных регуляризаторов, которая аналогична описанной в Главе 5.

### 8.6.1 Задача о релаксации.

Рассмотрим стационарное одномерное течение газа ( $Ma = 3.571$ ) с неравновесностью во входном сечении при  $x = 0$ , которое характеризуется температурами  $T_{T1} \neq T_{r1}$ , плотностью  $\rho_1$  и скоростью  $u_1$ . Вращательная и поступательная температуры эволюционируют к равновесному состоянию с ростом  $x$ .

Пусть значения  $\rho, u, T_T$  и  $T_r$  приведены к безразмерному виду на основе соответствующих значений в сечении  $x = 0$ , которые обозначены индексами (1). Эти величины выбраны равными соответствующим значениям для DSMC вычислений.  $T_1(x = 0) = T_{av}$ . Координата  $x$  нормирована на среднюю длину свободного пробега  $\lambda_1$ , где

$$\lambda_1 = \frac{\eta(T_1)}{\rho_1 \sqrt{2(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_1}} \times \frac{2(7 - \omega)(5 - \omega)}{15\sqrt{\pi}}.$$

В расчетах по методу DSMC использована модель соударений, которая приблизительно соответствует значению  $Z = 5$ . Наличие градиента температуры на входной границе расчетной области вызывает трудности при постановке граничных условий для DSMC вычислений. Условия на левой входной границе в этом алгоритме реализованы следующим образом: молекулы с равновесными температурами  $T_T$  и  $T_r$  впрыскиваются в область расчета из зоны, расположенной в точке  $x < 0$ . Значения газодинамических параметров, полученные в DSMC вычислениях в точке  $x = 0$ , задаются в качестве граничных условий для КГДР вычислений. На правой выходной границе для КГДР уравнений ставятся условия сно-

са потока, или "мягкие граничные условия". Кинетический аналог этих же условий ставится и в DSMC алгоритме. Шаг пространственной сетки выбирался равным  $h = 1$  и  $0.5$ .

Результаты, полученные по обоим методам, оказываются близкими, что характеризует точность построенной КГДР модели (рис. 8.1).

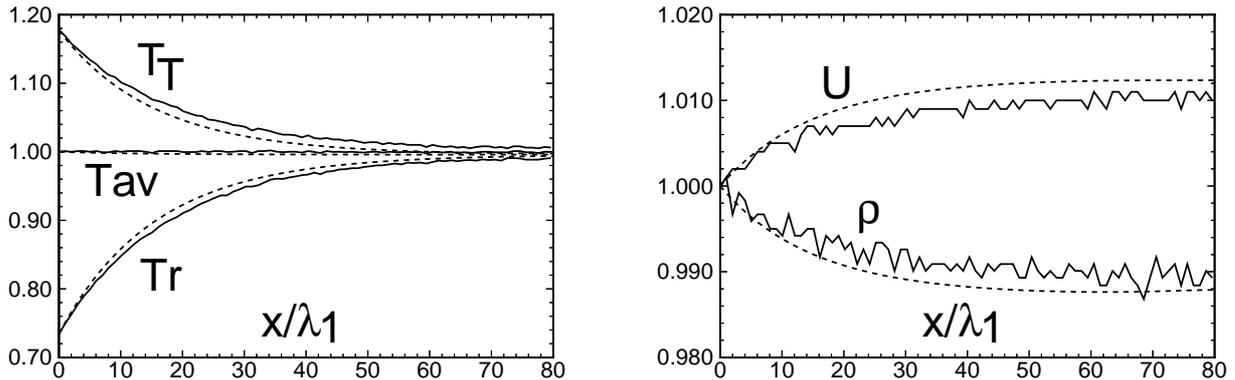


Рис. 8.1: Профили температуры, плотности и скорости в задаче о релаксации. Сплошная линия соответствует методу DSMC, пунктирная — модели КГДР

### 8.6.2 Задача о структуре неподвижной ударной волны.

Задача о структуре ударной волны решалась в следующих вариантах: число Маха набегающего потока  $Ma = 1.71$  ( $Z = 5$  и  $Z = 10$ ), что соответствует DSMC вычислениям, приведенным в [12] стр.298, и для чисел Маха  $Ma = 7$  и  $12.9$ , что соответствует DSMC расчетам [79].

Полученные в расчетах профили плотности, скорости и температур представлены на рис. 8.2–8.3, где значения координаты  $x$  нормировано на среднюю длину свободного пробега в набегающем потоке. Ординаты нормированы обычным образом с использованием соотношений Рэнкина–Гюгонио между параметрами перед ударной волной (1) и за ней (2), т. е.  $f_\rho = (\rho - \rho^{(1)})/(\rho^{(2)} - \rho^{(1)})$ , где  $f_\rho$  — значение плотности на рисунке,  $\rho^{(1)}$ ,  $\rho^{(2)}$  — значения на границах; аналогично для температуры. Для скорости  $f_u = (u - u^{(2)})/(u^{(1)} - u^{(2)})$ .

На рис. 8.2 ( $Z = 5$ ) видны характерные особенности профилей в данной задаче. А именно, взаимное расположение профилей соответствует результатам Берда, где профиль поступательной температуры  $T_T$  имеет небольшой максимум ( $T_T = 1.021$ ), причем этот профиль расположен левее профиля вращательной температуры  $T_r$ , который максимума не

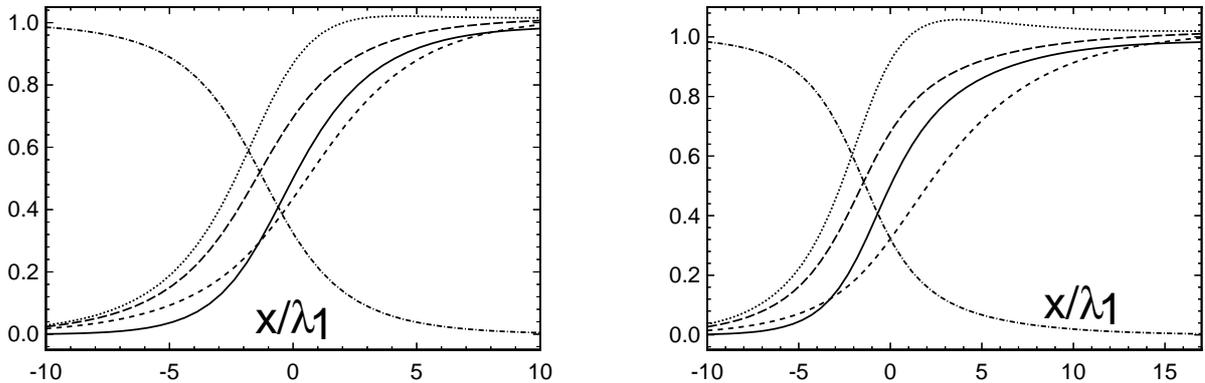


Рис. 8.2: Задача об ударной волне,  $Ma = 1.71$ ,  $Z = 5$  (слева) и  $Z = 10$  (справа). Сплошная линия соответствует  $\rho$ , пунктирная  $T_r$ , точками обозначена  $T_T$ , длинным пунктиром  $T_{av}$  и штрихпунктиром  $u$

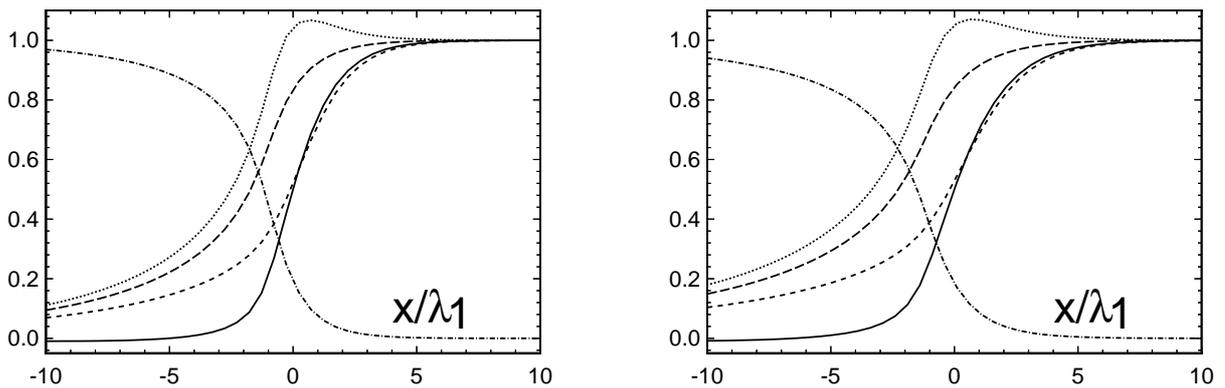


Рис. 8.3: Задача об ударной волне;  $Ma = 7.0$ ,  $Z = 5$  (слева);  $Ma = 12.9$ ,  $Z = 5$  (справа); обозначения те же, что на рис. 8.2

имеет. Обратная толщина профиля плотности ударной волны составляет  $\lambda_1/\delta = 0.152$ . С увеличением  $Z$  толщина ударной волны возрастает ( $\lambda_1/\delta = 0.136$ ), а превышение величины поступательной температуры  $T_T$  над ее значением за фронтом увеличивается примерно в два раза ( $T_T = 1.058$ ), как это и было показано в [12].

Результаты расчетов для  $Ma = 7.0$  и  $Ma = 12.9$  представлены на рис. 8.3. Они очень близки к результатам [79]. В частности, в обоих случаях профили  $\rho$  и  $T_r$  расположены очень близко. Кроме того значения максимумов  $T_T$  также находятся в хорошем соответствии с расчетами [79], где  $T_T = 1.068$  для  $Ma = 7.0$ , и  $T_T = 1.070$  для  $Ma = 12.9$ . Обратная толщина ударной волны  $\lambda_1/\delta$  для этих случаев составляет 0.297 и

0.244 соответственно. Однако в области перед ударной волной значение обеих температур  $T_T$  и  $T_r$ , рассчитанных по КГДР модели, оказываются завышенными по сравнению с данными DSMC.

Полученное соответствие численных результатов данным расчетов по кинетическому DSMC алгоритму указывает на хорошую точность предложенной КГДР модели для описания поступательно-вращательной неравновесности в газе.

Использование КГДР моделей для расчета осесимметричных струйных течений и сопоставление полученных результатов с данными экспериментов изложено в [22] и [23]. Здесь показаны преимущества учета поступательно-вращательной неравновесности при численном моделировании недорасширенных струй  $CO_2$  и  $N_2$ .

## Глава 9

### КГДМ уравнения для бинарной смеси газов

Численное моделирование течений газовых смесей представляет интерес как для теоретических, так и для практических приложений. Эффективное моделирование течений нереагирующих газов является необходимым этапом, предшествующим построению моделей течений газов с химическими реакциями, что в свою очередь имеет большую практическую направленность [12], [74].

Для расчета течений газовых смесей имеется две группы моделей. Первая — это кинетические модели, то есть модели, основанные на методах прямого численного моделирования [12], или на основе решения уравнения Больцмана в том или ином приближении [75]. Другая группа — это системы моментных уравнений, которые получены на основе уравнений Навье–Стокса (в основном феноменологически, [73], [74]).

Кинетические модели обеспечивают достаточно точное описание течения газа, но теряют свою эффективность с уменьшением числа Кнудсена. Моментные методы более экономичны в вычислительном плане, однако феноменологические способы их построения приводят к ряду проблем. В частности, большинство методов представляют собой одножидкостное приближение, предполагающее, что скорости и температуры обоих компонент смеси одинаковы ([73], [74]). Такое упрощение не позволяет анализировать поведение каждой из компонент и поэтому представляется недостаточно точным. Имеются немногочисленные примеры использования двухжидкостного (двухскоростного, двухтемпературного) приближения, которое в основном строилось для задач физики плазмы [72]. Указанные методы требуют введения целого ряда дополнительных констант, определение которых представляет собой самостоятельную задачу.

В этой главе описана макроскопическая модель для описания течений нереагирующей бинарной смеси газов, основанная на КГД уравнениях. Эта модель двухжидкостного приближения, которая представляет собой систему уравнений для плотности, импульса и энергии каждой из компонент. Предложено также одножидкостное приближение этой модели. Построенная система уравнений (КГДМ) опирается на систему кинетических уравнений в релаксационном приближении и является естествен-

ным обобщением квазигазодинамических уравнений на случай смеси газов.

Изложение материала основано на работах [106] и [107].

## 9.1 Исходная кинетическая модель

В 1954 г. Бхатнагар, Гросс и Крук [108] опубликовали свое знаменитое уравнение, представляющее собой уравнение Больцмана с интегралом столкновений в релаксационной форме. Несмотря на свой простой вид, эта модель сохраняет основные свойства исходного кинетического уравнения и поэтому она нашла широкое применение при анализе большого круга задач. Обобщение БГК модели на случай смеси газов было дано Сировичем в 1962 г. [110]. В 1964 г. Морзе, основываясь на законах сохранения, вычислил недостающие "свободные параметры" указанной модели [111]. Эта доработанная кинетическая модель используется в дальнейшем для построения моментных (КГДМ) уравнений для течения бинарной смеси. В 1970 г. Ву и Ли [112] применили указанную кинетическую модель для расчета одномерного течения бинарной смеси в ударной трубе. Следует отметить, что эти расчеты соответствуют течению с числом Прандтля  $Pr = 1$ , что определяется выбранным видом релаксационного слагаемого в исходной кинетической модели.

Приведем краткое описание указанной кинетической модели в соответствии с работой [112].

Пусть смесь состоит из газов  $a$  и  $b$  с числовыми плотностями  $n_a$  и  $n_b$  и, соответственно, массовыми плотностями  $\rho_a = m_a n_a$  и  $\rho_b = m_b n_b$ , где  $m_a$  и  $m_b$  — массы молекул для газов  $a$  и  $b$ . Пусть каждый газ характеризуется своей температурой  $T_i$  и макроскопической скоростью  $\vec{u}_i$ , где  $i = a, b$ , соответственно. Газовая постоянная равна  $R_i = k/m_i$ , где  $k$  — постоянная Больцмана.

Тогда, в соответствии с [112], кинетическая модель для газовой смеси может быть записана в виде

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) f_a = \nu_a (F_a - f_a) + \nu_{ab} (\bar{F}_a - f_a), \quad (9.1.1)$$

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) f_b = \nu_b (F_b - f_b) + \nu_{ba} (\bar{F}_b - f_b), \quad (9.1.2)$$

где  $f_i(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$  — функция распределения для  $i$ -й специ, ( $i = a, b$ ),  $\vec{\xi} = \vec{u} + \vec{c}$  — скорость молекулы,  $\vec{c}$  — ее тепловая скорость.  $\nu_a$  и  $\nu_b$  представляют собой частоты взаимных столкновений между молекулами одного сорта,  $\nu_{ab}$  — частота взаимных столкновений между молекулами сорта  $a$  с молекулами сорта  $b$ , а  $\nu_{ba}$  — частота взаимных столкновений молекул сорта  $b$  с молекулами сорта  $a$ . Полное число столкновений между молекулами  $a$  и  $b$  должно быть сбалансировано, то есть

$$n_a \nu_{ab} = n_b \nu_{ba}. \quad (9.1.3)$$

$F_a, F_b$  и  $\bar{F}_a, \bar{F}_b$  — максвелловские функции распределения, которые определяются следующим образом:

$$F_a = \frac{\rho_a}{(2\pi R_a T_a)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{\xi} - \vec{u}_a)^2}{2R_a T_a}\right), \quad (9.1.4)$$

$$F_b = \frac{\rho_b}{(2\pi R_b T_b)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{\xi} - \vec{u}_b)^2}{2R_b T_b}\right), \quad (9.1.5)$$

и

$$\bar{F}_a = \frac{\rho_a}{(2\pi R_a \bar{T}_a)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{\xi} - \vec{u}_a)^2}{2R_a \bar{T}_a}\right), \quad (9.1.6)$$

$$\bar{F}_b = \frac{\rho_b}{(2\pi R_b \bar{T}_b)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{\xi} - \vec{u}_b)^2}{2R_b \bar{T}_b}\right). \quad (9.1.7)$$

В формулы (9.1.6)–(9.1.7) входят "свободные параметры", или "параметры газа после столкновений", обозначенные чертой сверху. Эти величины, согласно [111], вычисляются через макропараметры газа следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{u}_a = \vec{u}_b &= \frac{m_a \vec{u}_a + m_b \vec{u}_b}{m_a + m_b}, \\ \bar{T}_a &= T_a + \frac{2m_a m_b}{(m_a + m_b)^2} \left( T_b - T_a + \frac{m_b}{6k} (\vec{u}_b - \vec{u}_a)^2 \right), \\ \bar{T}_b &= T_b + \frac{2m_a m_b}{(m_a + m_b)^2} \left( T_a - T_b + \frac{m_a}{6k} (\vec{u}_b - \vec{u}_a)^2 \right). \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

Выписанные функции распределения связаны между собой и определяют макропараметры газа следующим образом:

$$\int f_i d\vec{\xi} = \int F_i d\vec{\xi} = \int \bar{F}_i d\vec{\xi} = \rho_i, \quad (9.1.9)$$

$$\int \vec{\xi} f_i d\vec{\xi} = \int \vec{\xi} F_i d\vec{\xi} = \rho_i \vec{u}_i, \quad (9.1.10)$$

$$\int \vec{\xi} \bar{F}_i d\vec{\xi} = \rho_i \bar{u}_i, \quad (9.1.11)$$

$$\int \vec{c} f_i d\vec{\xi} = \int \vec{c} F_i d\vec{\xi} = \int \vec{c} \bar{F}_i d\vec{\xi} = 0, \quad (9.1.12)$$

$$\int \frac{\xi^2}{2} f_i d\vec{\xi} = \int \frac{\xi^2}{2} F_i d\vec{\xi} = \frac{\rho_i \bar{u}_i^2}{2} + \frac{3p_i}{2} = E_i, \quad (9.1.13)$$

$$\int \frac{\xi^2}{2} \bar{F}_i d\vec{\xi} = \frac{\rho_i \bar{u}_i^2}{2} + \frac{3\bar{p}_i}{2} = \bar{E}_i. \quad (9.1.14)$$

Далее на основе изложенной выше модели будет построена система макроскопических уравнений для описания течения бинарной смеси не реагирующих между собой газов.

## 9.2 Построение моментных уравнений

Для построения макроскопических, или моментных уравнений для течения газовой смеси воспользуемся тем же приемом, который применялся для построения КГД уравнений для однокомпонентного газа.

Предположим, что функции распределения частиц  $a$  и  $b$  близки к соответствующим локально-максвелловским функциям и приближенно могут быть представлены в виде разложений по малому параметру (градиентных разложений) в окрестности своих равновесных значений в виде

$$f_a \rightarrow F_a - \tau(\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) F_a, \quad (9.2.1)$$

$$f_b \rightarrow F_b - \tau(\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) F_b. \quad (9.2.2)$$

Здесь  $\tau$  — максвелловское время релаксации для смеси газов  $a$  и  $b$ , которое по величине близко к среднему времени между столкновениями для смеси и определяется как

$$\tau = \eta/p, \quad (9.2.3)$$

где  $\eta$  — вязкость смеси,  $p$  — давление смеси, представляющее собой сумму парциальных давлений, то есть

$$p = p_a + p_b, \text{ где } p_a = \rho_a R_a T_a, \quad p_b = \rho_b R_b T_b. \quad (9.2.4)$$

Последние два соотношения представляют собой парциальные уравнения состояния.

Формальная замена истинных значений функции распределения  $f_a$ ,  $f_b$  на приближенные значения (9.2.1)–(9.2.2) в конвективных слагаемых уравнений (9.1.1)–(9.1.2) приводит к приближенным уравнениям, которые в индексной форме имеют вид

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \nabla_i \xi^i F_a - \nabla_i \tau \nabla_j \xi^i \xi^j F_a = \nu_a (F_a - f_a) + \nu_{ab} (\overline{F}_a - f_a), \quad (9.2.5)$$

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \nabla_i \xi^i F_b - \nabla_i \tau \nabla_j \xi^i \xi^j F_b = \nu_b (F_b - f_b) + \nu_{ba} (\overline{F}_b - f_b). \quad (9.2.6)$$

Здесь индексы  $i, j$  соответствуют компонентам пространственных координат.

Макроскопические КГДМ уравнения получаются посредством моментного усреднения выписанных уравнений в пространстве скоростей  $\xi^i$ .

Системы уравнений для обоих газов имеют одинаковый вид, поэтому приведем процедуру построения уравнений для газа  $a$ , опуская при этом индекс  $a$ .

Вычислим некоторые интегралы, которые будут использованы в дальнейшем.

$$\int c^i c^j F d\vec{\xi} = g^{ij} p, \quad (9.2.7)$$

$$\int c^i c^j c^k F d\vec{\xi} = 0, \quad (9.2.8)$$

$$\int c_x^4 F d\vec{\xi} = \int c_y^4 F d\vec{\xi} = \int c_z^4 F d\vec{\xi} = 3 \frac{p^2}{\rho}, \quad (9.2.9)$$

$$\int c_x^2 c_y^2 F d\vec{\xi} = \int c_x^2 c_z^2 F d\vec{\xi} = \int c_y^2 c_z^2 F d\vec{\xi} = \frac{p^2}{\rho}, \quad (9.2.10)$$

$$\int c^i c^j \mathbf{c}^2 F d\vec{\xi} = 5 \frac{p^2}{\rho} g^{ij}. \quad (9.2.11)$$

$g^{ij}$  — метрический тензор. Все интегралы вычисляются в бесконечных пределах. При их вычислении были использованы равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-y^2) dy = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^4 \exp(-y^2) dy = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}.$$

Интегрируя (9.2.5) с весом 1 и используя соотношения (9.1.9), (9.1.12), (9.2.7), получаем:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \rho;$$

$$\int \nabla_i \xi^i F d\vec{\xi} = \nabla_i \int (u^i + c^i) F d\vec{c} = \nabla_i \rho u^i;$$

$$\int \nabla_i \tau \nabla_j \xi^i \xi^j F d\vec{\xi} = \nabla_i \tau \nabla_j \int (u^i + c^i)(u^j + c^j) F d\vec{c} =$$

$$= \nabla_i \tau \nabla_j (\rho u^i u^j + \int c^i c^j F d\vec{c}) = \nabla_i \tau \nabla_j (\rho u^i u^j + g^{ij} p).$$

Как будет показано ниже, интеграл от правой части (9.2.5) обращается в ноль.

Таким образом, получаем уравнение для плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i \rho u^i = \nabla_i \tau \nabla_j (\rho u^i u^j + g^{ij} p). \quad (9.2.12)$$

Для получения уравнения импульса проинтегрируем (9.2.5) с весом  $\xi^k$ , используя соотношения (9.1.10), (9.1.12), (9.2.7), (9.2.8):

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} \xi^k d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \rho u^k,$$

$$\int \nabla_i \xi^i F \xi^k d\vec{\xi} = \nabla_i (\rho u^i u^k + g^{ik} p),$$

$$\int \nabla_i \tau \nabla_j \xi^i \xi^j F \xi^k d\vec{\xi} = \rho u^i u^j u^k + p(u^k g^{ij} + u^j g^{ik} + u^i g^{jk}).$$

Для интеграла столкновений уравнения (9.2.5) величина  $\vec{\xi}$  не является сумматорным инвариантом, поскольку возможен обмен импульсом между компонентами смеси и интеграл от правой части не обращается в ноль. Назовем его обменным членом и обозначим  $S^u$ .

Комбинируя полученные выражения, получаем уравнение для  $\rho u^k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u^k + \nabla_i (\rho u^i u^k + g^{ik} p) = \\ = \nabla_i \tau \nabla_j [\rho u^i u^j u^k + p(u^k g^{ij} + u^j g^{ik} + u^i g^{jk})] + S^u. \end{aligned} \quad (9.2.13)$$

Чтобы получить уравнение для удельной энергии  $E$  усредним (9.2.5) с весом  $\xi^2/2$ , используя для этого соотношения (9.2.7)–(9.2.11):

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\xi^2}{2} d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} E,$$

$$\int \nabla_i \xi^i F \frac{1}{2} \xi^2 d\vec{\xi} = \nabla_i \frac{1}{2} \int (u^i + c^i) F \xi^2 d\vec{c} = \nabla_i u^i (E + p),$$

$$\int \nabla_i \tau \nabla_j \xi^i \xi^j F \frac{\xi^2}{2} d\vec{\xi} = \nabla_i \tau \nabla_j (u^i u^j E + 2u^i u^j p + \frac{1}{2} u_k u^k g^{ij} p + \frac{5}{2} \frac{p^2}{\rho} g^{ij}).$$

Для интеграла столкновений уравнения (9.2.5) величина  $\xi^2/2$  также не является сумматорным инвариантом, поскольку возможен обмен энергией между компонентами смеси и интеграл от правой части (9.2.5) не обращается в ноль. Назовем его обменным членом и обозначим  $S^E$ .

Комбинируя полученные выражения и дифференцируя по частям последнее слагаемое, в которое входит квадрат давления, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i u^i (E + p) = \nabla_i \tau \nabla_j (u^i u^j E + 2u^i u^j p + \\ + \frac{1}{2} u_k u^k g^{ij} p) + \frac{5}{2} \nabla_i \tau \frac{p}{\rho} \nabla_j p g^{ij} + \frac{5}{2} \nabla_i \tau p \nabla_j \frac{p}{\rho} g^{ij} + S^E. \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

Изложенный здесь способ получения моментных уравнений приводит к выражениям для теплового потока с числом Прандтля, равным единице. Для обобщения уравнений на случай произвольного числа Прандтля предпоследнее слагаемое в уравнении энергии домножим на величину  $Pr^{-1}$ . Уравнение энергии получено здесь для одноатомного газа, что соответствует  $\gamma = 5/3$ . Обобщение на случай газов с внутренними (вращательными) степенями свободы может быть получено путем формальной

замены коэффициента  $5/3$  на  $\gamma$  в выражении для полной энергии (9.1.13), (9.1.14) ( $3p/2 \rightarrow p/(\gamma - 1)$ ) и в двух последних слагаемых уравнения энергии (9.2.14) ( $5/2 \rightarrow \gamma/(\gamma - 1)$ ).

### 9.3 Вычисление обменных членов

В правые части КГДМ уравнений входят обменные члены, которые представляют собой моменты интеграла столкновений, возникающие при его осреднении по скоростям молекул. Использование релаксационной модели позволяет вычислить эти моменты и выразить их через макропараметры газа.

Убедимся, что в уравнении для плотности (9.2.12) обменные члены равны нулю. Действительно, непосредственное интегрирование дает

$$\int \nu_a(F_a - f_a)d\vec{\xi} = \nu_a\left(\int F_a d\vec{\xi} - \int f_a d\vec{\xi}\right) = \nu_a(\rho_a - \rho_a) = 0,$$

$$\int \nu_{ab}(\overline{F}_a - f_a)d\vec{\xi} = \nu_{ab}\left(\int \overline{F}_a d\vec{\xi} - \int f_a d\vec{\xi}\right) = \nu_{ab}(\rho_a - \rho_a) = 0.$$

(В релаксационной модели предполагается, что частоты столкновений не зависят от скоростей молекул.)

Интегрирование с весом  $\vec{\xi}$  позволяет вычислить обменный член в уравнении (9.2.13):

$$\int \nu_a(F_a - f_a)\vec{\xi}d\vec{\xi} = \nu_a(\rho_a\vec{u}_a - \rho_a\vec{u}_a) = 0,$$

$$\int \nu_{ab}(\overline{F}_a - f_a)\vec{\xi}d\vec{\xi} = \nu_{ab}(\rho_a\overline{\vec{u}}_a - \rho_a\vec{u}_a) = S_a^u.$$

Аналогично, путем осреднения с весом  $\xi^2/2$  вычисляются обменные члены и для уравнения энергии (9.2.14).

Соответственно, для газов  $a$  и  $b$  обменные члены имеют вид:

$$\begin{aligned} S_a^u &= \nu_{ab}\rho_a(\overline{\vec{u}}_a - \vec{u}_a), & S_b^u &= \nu_{ba}\rho_b(\overline{\vec{u}}_b - \vec{u}_b), \\ S_a^E &= \nu_{ab}(\overline{E}_a - E_a), & S_b^E &= \nu_{ba}(\overline{E}_b - E_b), \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{E}_a &= (\rho_a\overline{\vec{u}}_a^2)/2 + \overline{p}_a/(\gamma_a - 1), & \overline{p}_a &= \rho_a R_a \overline{T}_a \\ \overline{E}_b &= (\rho_b\overline{\vec{u}}_b^2)/2 + \overline{p}_b/(\gamma_b - 1), & \overline{p}_b &= \rho_b R_b \overline{T}_b. \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

Заметим, что в соответствии с законами сохранения импульса и энергии с учетом соотношения баланса (9.1.3)

$$S_a^u + S_b^u = 0, \quad S_a^E + S_b^E = 0. \quad (9.3.3)$$

Таким образом, в КГДМ модели учитывается обмен импульсом и энергией между компонентами смеси, интенсивность которого пропорциональна частотам столкновений между частицами разных газов. В уравнениях для плотности обменные члены отсутствуют, что является естественным, поскольку предполагается, что компоненты смеси не реагируют друг с другом.

## 9.4 Определение частот столкновений

Для замыкания системы КГДМ уравнений необходимо конкретизировать частоты столкновений  $\nu_{ab}$  и  $\nu_{ba}$ , а также время релаксации  $\tau$ .

Соотношения частот столкновений молекул газа  $a$  друг с другом и молекул газа  $a$  с молекулами газа  $b$  согласно [112] можно вычислить следующим образом:

$$\nu_{ab} = \nu_a \left( \frac{d_{ab}}{d_a} \right)^2 \sqrt{\frac{m_a + m_b}{2m_a m_b} \frac{n_a}{n_b}}, \quad (9.4.1)$$

здесь  $d_a$  — эффективный диаметр молекул газа  $a$ ,  $d_{ab}$  — эффективный диаметр взаимодействия, который можно определить, согласно [12], с.16, как  $d_{ab} = 0.5(d_a + d_b)$ ,  $n_a$ ,  $n_b$  — числовые плотности газов  $a$  и  $b$  соответственно. В свою очередь частоту столкновений  $\nu_a$  можно связать с вязкостью газа. В приближении VHS и VSS моделей взаимодействия частиц эта связь имеет вид ([12], с.90):

$$\nu_a = \frac{p_a}{\eta_a} \Omega(\omega_a, \alpha_a),$$

$$\Omega(\omega_a, \alpha_a) = \frac{5(\alpha_a + 1)(\alpha_a + 2)}{\alpha_a(7 - 2\omega_a)(5 - 2\omega_a)}, \quad \eta_a = \eta_{aref} \left( \frac{T_a}{T_{aref}} \right)^{\omega_a}. \quad (9.4.2)$$

В дальнейшем для проведения расчетов будет использоваться  $\alpha_a = 1$ , что соответствует модели VHS ([12], с.41). При этом

$$\Omega(\omega_a, 1) = \Omega(\omega_a) = \frac{30}{(7 - 2\omega_a)(5 - 2\omega_a)}.$$

Имеются и другие выражения для частоты столкновений между частицами различных сортов, см., например, [12], с.96.

Общее число столкновений между молекулами газов  $a$  и  $b$  должно быть сбалансировано, то есть должно выполняться соотношение (9.1.3). Однако, выражения для частот столкновений в рамках VHS модели автоматически удовлетворяют указанному балансному соотношению только для случая максвелловских молекул ( $\omega = 1$ ) при  $T_{aref} = T_{bref}$ . Поэтому, если одна из частот взаимных столкновений определяется согласно, например, (9.4.1)–(9.4.2), то другую частоту следует определять из балансного соотношения (9.1.3).

В уравнения (9.2.12)–(9.2.14) входит параметр  $\tau$ , который определяется как максвелловское время релаксации для смеси (9.2.3). Для определения вязкости бинарной смеси имеется, например, формула Уилки ([74], [114]):

$$\eta = \eta_a \left( 1 + G_{ab} \frac{\rho_b \mathcal{M}_a}{\rho_a \mathcal{M}_b} \right)^{-1} + \eta_b \left( 1 + G_{ba} \frac{\rho_a \mathcal{M}_b}{\rho_b \mathcal{M}_a} \right)^{-1},$$

$$\text{где } G_{ab} = \frac{\left( 1 + \sqrt{\eta_a / \eta_b \sqrt{\mathcal{M}_b / \mathcal{M}_a}} \right)^2}{2\sqrt{2} (1 + \mathcal{M}_a / \mathcal{M}_b)}, \quad (9.4.3)$$

здесь  $\mathcal{M}_a$  и  $\mathcal{M}_b$  — молярные массы газов  $a$  и  $b$  соответственно.  $G_{ba}$  вычисляется аналогично  $G_{ab}$  путем циклической замены индексов.

В литературе имеются и другие выражения для определения вязкости бинарной смеси, например, в [115], с. 275, и в [117]. В [118] приведены коэффициенты вязкости отдельных компонент.

## 9.5 Квазигазодинамические уравнения для смеси газов

Выпишем окончательный вид КГДМ уравнений для бинарной смеси в инвариантном относительно системы координат виде. Системы уравнений для обоих газов имеют одинаковый вид, поэтому приведем систему уравнений, описывающую газ  $a$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_a + \nabla_i \rho_a u_a^i = \nabla_i \tau (\nabla_j \rho_a u_a^i u_a^j + \nabla^i p_a), \quad (9.5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_a u_a^k + \nabla_i \rho_a u_a^i u_a^k + \nabla^k p_a = \nabla_i \tau (\nabla_j \rho_a u_a^i u_a^j u_a^k + \nabla^i p_a u_a^k + \nabla^k p_a u_a^i) \\ + \nabla^k \tau \nabla_i p_a u_a^i + S_a^u, \end{aligned} \quad (9.5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_a + \nabla_i u_a^i (E_a + p_a) = \nabla_i \tau (\nabla_j (E_a + 2p_a) u_a^i u_a^j + \frac{1}{2} \nabla^i u_{ak} u_a^k p_a) + \\ \frac{\gamma_a}{\gamma_a - 1} \nabla_i \tau \frac{p_a}{\rho_a} \nabla^i p_a + Pr_a^{-1} \frac{\gamma_a}{\gamma_a - 1} \nabla_i \tau p_a \nabla^i \frac{p_a}{\rho_a} + S_a^E, \end{aligned} \quad (9.5.3)$$

где удельная энергия газа  $a$  имеет вид

$$E_a = \rho_a u_{ai}^2 / 2 + p_a / (\gamma_a - 1). \quad (9.5.4)$$

Обменные члены вычисляются согласно (9.3.1), (9.3.2), "свободные параметры— согласно (9.1.8), а частоты столкновений и коэффициент вязкости смеси могут быть рассчитаны с помощью выражений (9.4.1)–(9.4.3). Обратим внимание на то, что в правых частях уравнений плотности, так же как и в одножидкостных моделях типа Навье–Стокса (см. например, [73]), имеются слагаемые диффузионного типа.

Дополненная граничными условиями, выписанная здесь система уравнений представляет собой замкнутую модель для расчета течений бинарной газовой смеси в двухжидкостном приближении.

Отметим, что двухжидкостная модель для смеси газов с использованием процедуры Чепмена–Энскога была выписана и проанализирована в [113]. Эта модель оказалась весьма громоздкой и не получила широкого применения в вычислительной практике.

В уравнения (9.5.1)–(9.5.4) не входят параметры смеси газов. Однако в дальнейшем эти параметры будут использоваться, поэтому укажем способ их определения. Параметры смеси (переменные без индекса) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} n = n_a + n_b, \quad \rho = \rho_a + \rho_b, \quad p = p_a + p_b, \quad u = (\rho_a u_a + \rho_b u_b) / \rho, \\ T = (n_a T_a + n_b T_b) / n, \quad m = (m_a n_a + m_b n_b) / n, \quad p = \rho R T, \\ R = (\rho_a R_a + \rho_b R_b) / \rho = k / m. \end{aligned} \quad (9.5.5)$$

В случае однокомпонентного газа система (9.5.1)–(9.5.4) совпадает с изученной ранее КГД системой.

## 9.6 Одножидкостные приближения

### 9.6.1 КГДМ модель в одножидкостном приближении

Выписанная здесь двухжидкостная система КГДМ уравнений (9.5.1)–(9.5.3) может быть упрощена и сведена к одножидкостному приближению, что соответствует течениям смеси, в которой

$$u_a^i = u_b^i = u^i, \quad T_a = T_b = T. \quad (9.6.1)$$

При этом скорости диффузии компонент  $w_a^i$  и  $w_b^i$  остаются различными. Давления отдельных компонент вычисляются как

$$p_a = \rho_a R_a T, \quad p_b = \rho_b R_b T. \quad (9.6.2)$$

Построим одножидкостное приближение для КГДМ уравнений. Предположим, что для компонент смеси  $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$  и  $Pr_a = Pr_b = Pr$ . Тогда удельная энергия смеси имеет вид

$$E = E_a + E_b = \frac{(\rho_a + \rho_b)u_i^2}{2} + \frac{p_a + p_b}{\gamma - 1} = \frac{\rho u_i^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}. \quad (9.6.3)$$

При переходе к одножидкостному приближению вид уравнений для плотности не изменится, за исключением того, что вместо скоростей  $u_a^i$  и  $u_b^i$  в них войдет скорость смеси  $u^i$ . Уравнения для импульса и удельной энергии смеси также сохраняют свой общий вид и получаются путем сложения двух соответствующих уравнений для каждой из компонент с учетом условий для обменных членов (9.3.3). Результирующая система КГДМ уравнений примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_a + \nabla_i \rho_a u^i = \nabla_i \tau (\nabla_j \rho_a u^i u^j + \nabla^i p_a), \quad (9.6.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_b + \nabla_i \rho_b u^i = \nabla_i \tau (\nabla_j \rho_b u^i u^j + \nabla^i p_b), \quad (9.6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u^k + \nabla_i \rho u^i u^k + \nabla^k p = \nabla_i \tau (\nabla_j \rho u^i u^j u^k + \nabla^i p u^k + \nabla^k p u^i) \\ + \nabla^k \tau \nabla_i p u^i, \end{aligned} \quad (9.6.6)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i u^i (E + p) &= \nabla_i \tau (\nabla_j (E + 2p) u^i u^j + \frac{1}{2} \nabla^i u_k u^k p) + \\
&+ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla_i \tau \left( \frac{p_a}{\rho_a} \nabla^i p_a + \right. \\
&\left. + \frac{p_b}{\rho_b} \nabla^i p_b \right) + \frac{\gamma}{Pr(\gamma - 1)} \nabla_i \tau \left( p_a \nabla^i \frac{p_a}{\rho_a} + p_b \nabla^i \frac{p_b}{\rho_b} \right). \quad (9.6.7)
\end{aligned}$$

Одножидкостное приближение упрощает КГДМ систему, сводя ее к четырем уравнениям — двум уравнениям для плотностей и уравнениям для импульса и энергии, в которые уже не входят обменные члены. Тем самым для замыкания системы требуется определение только коэффициента вязкости смеси  $\eta$  и не требуется определение частот взаимных столкновений  $\nu_{ab}$  и  $\nu_{ba}$  и вычисление свободных параметров (9.1.8). Однако в данной модели  $R$  уже не является константой и зависит от концентраций компонент. В том случае, если значения  $\gamma$  и  $Pr$  для компонент смеси не совпадают между собой, определение этих величин для смеси также представляет собой самостоятельную проблему.

Разностные схемы с искусственной вязкостью, дифференциальное приближение которых по своей форме сходно с одножидкостным приближением КГДМ уравнений, были выписаны и опробованы в [120] на примере течения реагирующего газа в окрестности пластины.

В следующем разделе показана связь выписанной одножидкостной КГДМ модели с традиционным приближением типа уравнений НС.

### 9.6.2 Одножидкостная модель для уравнений Навье–Стокса

Одножидкостная модель для описания течения газовой смеси без химических реакций, основанная на уравнениях НС имеет вид [74]:

$$\frac{\partial \rho c_a}{\partial t} + \nabla_i \rho c_a u^i = -\nabla_i \mathcal{J}_a^i, \quad (9.6.8)$$

$$\frac{\partial \rho c_b}{\partial t} + \nabla_i \rho c_b u^i = -\nabla_i \mathcal{J}_b^i, \quad (9.6.9)$$

$$\frac{\partial \rho u^k}{\partial t} + \nabla_i \rho u^i u^k + \nabla^k p = \nabla_i \Pi_{NS}^{ik}, \quad (9.6.10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_i u^i (E + p) = \nabla_i (\Pi_{NS}^{ik} u^k) - \nabla_i (h_a \mathcal{J}_a^i + h_b \mathcal{J}_b^i) + \nabla_i \varkappa \nabla^i T \quad (9.6.11)$$

Здесь  $c_a = \rho_a/\rho$ ,  $c_b = \rho_b/\rho$  — массовые концентрации газов  $a$  и  $b$  соответственно,  $\mathcal{J}_a^i$ ,  $\mathcal{J}_b^i$  — плотности диффузионных потоков,

$$h_a = c_{p_a} T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_a}{\rho_a}, \quad h_b = c_{p_b} T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_b}{\rho_b} \quad (9.6.12)$$

— энтальпии газов  $a$  и  $b$  соответственно. Все параметры смеси определяются согласно (9.5.5), удельная энергия равна  $E = \rho u_i^2/2 + p/(\gamma - 1)$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты для смеси.

В первом приближении выражение для диффузионных потоков в бинарной смеси может быть записано в виде [74]

$$\mathcal{J}_a^i = -\rho c_a D \left( \nabla^i \ln c_a + \frac{m_b - m_a}{m} c_b \nabla^i \ln p \right) - \rho c_a D_a^T \nabla^i \ln T, \quad (9.6.13)$$

$$\mathcal{J}_b^i = -\rho c_b D \left( \nabla^i \ln c_b + \frac{m_a - m_b}{m} c_a \nabla^i \ln p \right) - \rho c_b D_b^T \nabla^i \ln T,$$

где  $D$  — коэффициент диффузии бинарной смеси,  $D_a^T$  и  $D_b^T$  — коэффициенты термодиффузии газов  $a$  и  $b$ . В представленной модели при отсутствии массовых сил диффузия может возникать по трем причинам: под воздействием градиента концентраций (массовая диффузия, первое слагаемое в (9.6.13)), под действием градиента давлений (бародиффузия, второе слагаемое) и под действием градиента температур (термодиффузия, третье слагаемое в (9.6.13)). Для смесей легких и тяжелых компонент вклад термодиффузии в перенос массы может стать достаточно заметным. Выражение для коэффициента термодиффузии приведено, например, в [115]. Однако считается [73], что для многих течений термодиффузия является эффектом второго порядка по сравнению с массовой диффузией и ее влиянием пренебрегают.

Коэффициент диффузии связан с коэффициентом вязкости смеси соотношением [74]

$$D = \eta/(\rho S c), \quad (9.6.14)$$

где  $S c$  — число Шмидта, которое для газов близко к единице.

Величина коэффициента диффузии для бинарной смеси также может быть определена выражением [118]:

$$D = 1.8826 \cdot 10^{-22} \sqrt{\frac{T^3(\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b)}{\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b}} \frac{1}{p \sigma^2 \Omega^{(1.1)*}(T^*)}, \quad (9.6.15)$$

здесь  $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b$  — молярные массы газов,  $p$  — давление,  $\sigma = 0.5(\sigma_a + \sigma_b)$ , где  $\sigma_a, \sigma_b$  (м) — эффективные диаметры столкновений,  $T^* = kT/\varepsilon$  — характеристическая температура,  $\varepsilon/k$  — параметр потенциальной энергии молекул (К), характеризующий взаимодействие молекул сортов  $a$  и  $b$ ,  $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_a \varepsilon_b}$ ,  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$  — параметры потенциальной функции межмолекулярного взаимодействия.  $\Omega^{(1.1)*}(T^*)$  — безразмерный интеграл соударений для переноса масс, выражающий меру отклонения от модели, рассматривающей молекулы газа как твердые шары, для которой  $\Omega^{(1.1)*} = 1$ .

Коэффициент вязкости газовой смеси, как и в КГДМ модели, может быть найден различными способами, например, из соотношения (9.4.3). При этом коэффициент вязкости для каждой из компонент может быть найден согласно (9.4.2), или из других соотношений, например, согласно [118]:

$$\eta_a = 26.69 \cdot 10^{-27} \frac{\sqrt{\mathcal{M}_a T_a}}{\sigma_a^2 \Omega^{(2.2)*}(T_a^*)}, \quad (9.6.16)$$

здесь  $\Omega^{(2.2)*}(T_a^*)$  — безразмерный интеграл соударений для переноса импульса, выражающий меру отклонения от модели, рассматривающей молекулы газа как твердые шары, для которой  $\Omega^{(2.2)*} = 1$ ,  $T_a^* = kT/\varepsilon_a$  — характеристическая температура. Интегралы соударений  $\Omega^{(1.1)*}(T^*)$  и  $\Omega^{(2.2)*}(T^*)$  вычислены в [117] на основе потенциала Леннарда–Джонса и могут быть с достаточной для многих приложений точностью определены по следующим приближенным формулам

$$\Omega^{(1.1)*}(T^*) = 1.074(T^*)^{-0.1604}, \quad \Omega^{(2.2)*}(T^*) = 1.157(T^*)^{-0.1472} \quad (9.6.17)$$

### 9.6.3 Модификация одножидкостного приближения КГДМ уравнений

КГДМ система в одножидкостном приближении (9.6.4)–(9.6.7) может быть сведена к виду (9.6.8)–(9.6.11) с помощью некоторых упрощений.

Уравнение (9.6.4) представляется в виде (9.6.8), где диффузионный поток определяется выражением

$$\mathcal{J}_a^i = -\rho_a w_a^i = -\tau(\nabla_j \rho_c a^i u^j + \nabla^i p_a). \quad (9.6.18)$$

Отбрасывая в правой части член с квадратом скорости, записывая  $p_a = \rho_c a R_a T$  и затем дифференцируя полученное выражение по частям, по-

лучим соотношение, аналогичное (9.6.13) с коэффициентом термодиффузии  $D_a^T = 0$

$$\mathcal{J}_a^i = -\rho c_a D \frac{m}{m_a} (\nabla^i \ln c_a + \nabla^i \ln p), \quad (9.6.19)$$

где коэффициент  $D$  определяется как (9.6.14) при  $Sc = 1$ .

Аналогично уравнение (9.6.5) сводится к виду (9.6.9), где

$$\mathcal{J}_b^i = -\rho c_b D \frac{m}{m_b} (\nabla^i \ln c_b + \nabla^i \ln p). \quad (9.6.20)$$

Диссипативные слагаемые КГД уравнений могут быть представлены в виде суммы диссипативных членов уравнений Навье–Стокса и добавки первого порядка малости по числу Кнудсена. Отбрасывая эти добавки сразу приводим уравнение импульса (9.6.6) к виду (9.6.10).

Уравнение энергии (9.6.7) приводится к виду (9.6.11) путем выделения из правой части (9.6.7) диссипативных слагаемых и теплового потока вида  $\nabla_i (\Pi_{NS}^{ik} u^k + \varkappa \nabla^i T)$  и отбрасывания оставшихся слагаемых со степенями скоростей. При этом слагаемые с градиентами давления сохраняются и переписываются в виде

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla_i \tau \left( \frac{p_a}{\rho_a} \nabla^i p_a + \frac{p_b}{\rho_b} \nabla^i p_b \right) = -\nabla_i (h_a \mathcal{J}_a^i + h_b \mathcal{J}_b^i),$$

где  $h_a$  и  $h_b$  определяются соотношениями (9.6.12), а диффузионные потоки имеют вид (9.6.19) и (9.6.20).

Тем самым одножидкостная система КГДМ уравнений редуцируется и сводится к известному одножидкостному приближению для описания бинарной смеси, основанному на уравнениях НС.

## 9.7 КГДМ система для одномерного плоско-параллельного течения

Запишем систему квазигазодинамических уравнений, обобщенную на случай бинарной смеси газов (9.5.1)–(9.5.3) в одномерном случае для плоско-параллельного течения (индексом  $a$  обозначены параметры одного газа, индексом  $b$  — другого газа):

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_a u_a = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho_a u_a^2 + p_a), \quad (9.7.1)$$

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_b u_b = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho_b u_b^2 + p_b), \quad (9.7.2)$$

$$\frac{\partial \rho_a u_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_a u_a^2 + p_a) = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x}(\rho_a u_a^3 + 3p_a u_a) + S_a^u, \quad (9.7.3)$$

$$\frac{\partial \rho_b u_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_b u_b^2 + p_b) = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x}(\rho_b u_b^3 + 3p_b u_b) + S_b^u, \quad (9.7.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u_a (E_a + p_a) &= \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} u_a^2 (E_a + 2.5p_a) + \\ &+ \frac{\gamma_a}{\gamma_a - 1} \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{p_a}{\rho_a} \frac{\partial p_a}{\partial x} + \frac{\gamma_a}{\gamma_a - 1} \frac{1}{Pr_a} \frac{\partial}{\partial x} \tau p_a \frac{\partial p_a}{\partial x} \frac{1}{\rho_a} + S_a^E, \end{aligned} \quad (9.7.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u_b (E_b + p_b) &= \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} u_b^2 (E_b + 2.5p_b) + \\ &+ \frac{\gamma_b}{\gamma_b - 1} \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{p_b}{\rho_b} \frac{\partial p_b}{\partial x} + \frac{\gamma_b}{\gamma_b - 1} \frac{1}{Pr_b} \frac{\partial}{\partial x} \tau p_b \frac{\partial p_b}{\partial x} \frac{1}{\rho_b} + S_b^E. \end{aligned} \quad (9.7.6)$$

Удельная энергия для газов  $a$  и  $b$  записывается в виде

$$E_a = \frac{\rho_a u_a^2}{2} + \frac{p_a}{\gamma_a - 1}, \quad E_b = \frac{\rho_b u_b^2}{2} + \frac{p_b}{\gamma_b - 1}, \quad (9.7.7)$$

Обменные члены в уравнениях импульса для газов  $a$  и  $b$  согласно (9.3.1) имеют вид

$$S_a^u = \frac{\rho_a \bar{u}_a - \rho_a u_a}{\tau_{ab}^c}, \quad S_b^u = \frac{\rho_b \bar{u}_b - \rho_b u_b}{\tau_{ba}^c} \quad (9.7.8)$$

и в уравнениях энергии

$$S_a^E = \frac{\bar{E}_a - E_a}{\tau_{ab}^c}, \quad S_b^E = \frac{\bar{E}_b - E_b}{\tau_{ba}^c}, \quad (9.7.9)$$

где  $\tau_{ab}^c = 1/\nu_{ab}$ ,  $\tau_{ba}^c = 1/\nu_{ba}$ . В свою очередь  $\nu_{ab}$  вычисляется согласно (9.4.1)–(9.4.2) при  $\alpha_a = 1$ , а величина  $\nu_{ba}$  находится из балансного соотношения (9.1.3). Следовательно  $\tau_{ba}^c$  определяется как

$$\tau_{ba}^c = \tau_{ab}^c \frac{\rho_b m_a}{\rho_a m_b}. \quad (9.7.10)$$

В формулы (9.7.8)–(9.7.9) входят "свободные параметры", обозначенные чертой сверху. Согласно (9.1.8) эти параметры вычисляются как

$$\begin{aligned} \bar{u}_a = \bar{u}_b &= \frac{m_a u_a + m_b u_b}{m_a + m_b}, \\ \bar{T}_a &= T_a + \frac{2m_a m_b}{(m_a + m_b)^2} \left( T_b - T_a + \frac{m_b}{6k} (u_b - u_a)^2 \right), \\ \bar{T}_b &= T_b + \frac{2m_a m_b}{(m_a + m_b)^2} \left( T_a - T_b + \frac{m_a}{6k} (u_b - u_a)^2 \right). \end{aligned} \quad (9.7.11)$$

Удельная энергия газов, входящая в соотношения (9.7.9) равна

$$\bar{E}_a = \frac{\rho_a \bar{u}_a^2}{2} + \rho_a \frac{R_a}{\gamma_a - 1} \bar{T}_a, \quad \bar{E}_b = \frac{\rho_b \bar{u}_b^2}{2} + \rho_b \frac{R_b}{\gamma_b - 1} \bar{T}_b.$$

Параметр  $\tau$  определяется согласно (9.2.3), (9.4.3).

**Безразмерный вид.** Будем решать систему уравнений (9.7.1)–(9.7.6) в безразмерных переменных. Примем за размерные масштабы следующие характеристики газа  $a$ :  $\rho_{a_{ref}}$  — плотность,  $a_{a_{ref}} = \sqrt{\gamma_a R_a T_{a_{ref}}}$  — скорость звука при температуре  $T_{a_{ref}}$ ,  $\lambda_{a_{ref}}$  — длина свободного пробега. Длина свободного пробега молекулы может быть вычислена как [12]:

$$\lambda = \frac{4\eta}{\rho\sqrt{\mathcal{RT}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Omega(\omega, 1)} = \frac{\eta}{\rho\sqrt{RT}} \frac{2(7-2\omega)(5-2\omega)}{15\sqrt{2\pi}}. \quad (9.7.12)$$

Тогда соотношения между размерными и безразмерными характеристиками будут иметь следующий вид (все параметры газа  $b$  масштабируются по параметрам газа  $a$ ):

$$\begin{aligned} \rho &= \tilde{\rho}\rho_{a_{ref}}, & a &= \tilde{a}a_{a_{ref}}, & u &= \tilde{u}a_{a_{ref}}, & p &= \tilde{p}\rho_{a_{ref}}a_{a_{ref}}^2, & m &= \tilde{m}\rho_{a_{ref}}\lambda_{a_{ref}}^3, \\ T &= \tilde{T} \frac{a_{a_{ref}}^2}{\gamma_a R_a} = \tilde{T}T_{a_{ref}}, & x &= \tilde{x}\lambda_{a_{ref}}, & t &= \tilde{t} \frac{\lambda_{a_{ref}}}{a_{a_{ref}}}, & \tau &= \tilde{\tau} \frac{\lambda_{a_{ref}}}{a_{a_{ref}}}, \\ n &= \tilde{n} \frac{1}{\lambda_{a_{ref}}^3}, & \eta &= \tilde{\eta} \lambda_{a_{ref}} \rho_{a_{ref}} a_{a_{ref}} \frac{15\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\gamma_a}(7-2\omega_a)(5-2\omega_a)} = \tilde{\eta}\eta_{a_{ref}}. \end{aligned}$$

После обезразмеривания уравнения (9.7.1)–(9.7.6) не изменят своего вида. Запишем соотношения между параметрами газов (уравнения связи), используемые в расчетах:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_a &= \sqrt{\tilde{T}_a}, & \tilde{a}_b &= \sqrt{\frac{\gamma_b R_b}{\gamma_a R_a} \tilde{T}_b}, & \tilde{T}_a &= \frac{\gamma_a \tilde{p}_a}{\tilde{\rho}_a}, & \tilde{T}_b &= \frac{\gamma_a \tilde{p}_b R_a}{\tilde{\rho}_b R_b}, \\ \tilde{\eta}_a &= \tilde{T}_a^{\omega_a}, & \tilde{\eta}_b &= \frac{\eta_{b_{ref}}}{\eta_{a_{ref}}} \left( \frac{T_{a_{ref}}}{T_{b_{ref}}} \right)^{\omega_b} \tilde{T}_b^{\omega_b}, \end{aligned}$$

здесь  $\eta_{a_{ref}}$ ,  $T_{a_{ref}}$  и  $\eta_{b_{ref}}$ ,  $T_{b_{ref}}$  — значения коэффициентов вязкости и соответствующих температур газов  $a$  и  $b$ , используемые в законе изменения вязкости (9.4.2),

$$\tilde{\lambda}_a = \frac{(\gamma_a \tilde{p}_a)^{\omega_a - 0.5}}{\tilde{\rho}_a^{\omega_a + 0.5}},$$

$$\tilde{\lambda}_b = \frac{(\gamma_a \tilde{\rho}_b)^{\omega_b - 0.5} \eta_{bref}}{\tilde{\rho}_b^{\omega_b + 0.5} \eta_{aref}} \left( \frac{T_{aref}}{T_{bref}} \right)^{\omega_b} \frac{(7 - 2\omega_b)(5 - 2\omega_b)}{(7 - 2\omega_a)(5 - 2\omega_a)} \left( \frac{\mathcal{R}_a}{\mathcal{R}_b} \right)^{\omega_b}.$$

Длины свободного пробега непосредственно в расчете не используются, но необходимы для выбора шага пространственной сетки и графического представления результатов.

Среднее время между столкновениями для каждой из компонент вычисляется как

$$\tilde{\tau}_a = \frac{(\gamma_a \tilde{\rho}_a)^{\omega_a - 1}}{\tilde{\rho}_a^{\omega_a}} \frac{15\sqrt{2\pi\gamma_a}}{2(7 - 2\omega_a)(5 - 2\omega_a)},$$

$$\tilde{\tau}_b = \frac{\eta_{bref}}{\eta_{aref}} \left( \frac{T_{aref}}{T_{bref}} \right)^{\omega_b} \frac{(\gamma_a \tilde{\rho}_b)^{\omega_b - 1}}{\tilde{\rho}_b^{\omega_b}} \frac{15\sqrt{2\pi\gamma_a}}{2(7 - 2\omega_a)(5 - 2\omega_a)} \left( \frac{\mathcal{R}_a}{\mathcal{R}_b} \right)^{\omega_b}.$$

Безразмерный вид среднего времени  $\tilde{\tau}_{ab}^c$  записывается как

$$\tilde{\tau}_{ab}^c = \frac{\tilde{\tau}_a}{\Omega(\omega_a)} \left( \frac{2d_a}{d_a + d_b} \right)^2 \sqrt{\frac{2m_b}{m_a + m_b} \frac{\rho_a m_b}{\rho_b m_a}}.$$

Значение  $\tilde{\tau}_{ba}^c$  определяется с помощью балансного соотношения (9.7.10).

## 9.8 Структура ударной волны в смеси гелия и ксенона

### 9.8.1 Постановка задачи

В качестве первого примера использования КГДМ уравнений рассматривалась задача о структуре неподвижной ударной волны в смеси гелия ( $He$  — газ  $a$ ) и ксенона ( $Xe$  — газ  $b$ ). Профили плотности этих газов, измеренные с помощью электронной пушки и лазерного интерферометра, можно найти в работе [116]. Измерения проводились для следующих вариантов процентной концентрации газов:

- вариант V1: 98,5%  $He$  и 1,5%  $Xe$ , то есть  $n_a/n = 0.985$ ,  $n_b/n = 0.015$
- вариант V2: 97%  $He$  и 3%  $Xe$ , то есть  $n_a/n = 0.97$ ,  $n_b/n = 0.03$
- вариант V3: 94%  $He$  и 6%  $Xe$ , то есть  $n_a/n = 0.94$ ,  $n_b/n = 0.06$
- вариант V4: 91%  $He$  и 9%  $Xe$ , то есть  $n_a/n = 0.91$ ,  $n_b/n = 0.09$ .

Для второго варианта процентной концентрации (V2) имеется расчет данной задачи методом прямого моделирования Монте-Карло (ПММК) [12], результаты которого для моментных уравнений можно рассматривать как эталонные, практически совпадающие с экспериментальными данными.

Параметры смеси перед ударной волной, выбранные в соответствии с данными эксперимента [116] и расчета [12], представлены в табл. 9.1.

	V1		V2		V3		V4	
	He	Xe	He	Xe	He	Xe	He	Xe
$\rho$ (кг/м <sup>3</sup> )·10 <sup>5</sup>	5.15	2.57	5.16	2.22	4.91	10.3	4.57	14.8
$p$ (Па)	33.14	0.51	33.21	1.02	31.62	2.02	29.42	2.91
$T$ (К)	310							
$u$ (м/с)	3076.76		2882.6		2672.8		2530.3	
$Ma$	2.97	17.01	2.78	15.93	2.58	14.78	2.44	13.99

Таблица 9.1: Размерные параметры для компонент смеси, варианты V1–V4

В табл. 9.2 приведены необходимые для проведения расчета по модели КГДМ физические параметры гелия и ксенона согласно [12]. Число  $Pr$  для указанных газов постоянно и равно  $2/3$ .

	He	Xe
$m$ (кг)	$6.65 \cdot 10^{-27}$	$218 \cdot 10^{-27}$
$R$ (Дж/(кг · К))	2076.2	63.33
$M$ (кг/моль)	4.0	131.4
$d$ (м)	$2.30 \cdot 10^{-10}$	$5.65 \cdot 10^{-10}$
$\gamma$	1.66	1.66
$\omega$	0.66	0.85
$\eta_{ref}$ (н/(м · с)) при $T = 273K$	$2.03 \cdot 10^{-5}$	$2.34 \cdot 10^{-5}$

Таблица 9.2: Табличные значения для компонент смеси

Заметим, что молекулярные массы рассматриваемых газов отличаются более чем в 30 раз.

### 9.8.2 Расчет на основе двухжидкостной КГДМ модели

Расчет проводился в безразмерных переменных, все величины были обезразмерены на параметры газа а ( $He$ ) в набегающем потоке.

В табл. 9.3–9.6 приведены значения безразмерных параметров в невозмущенном газе для вариантов V1–V4.

	Газ А (He)	Газ В (Xe)	смесь
$\rho$	1.	0.499	1.499
$T$	1.	1.	1.
$a$	1.	0.175	0.823
$\lambda$	1.	11.09	1.151
$p$	0.6	0.0091	0.609
$Ma$	2.97	17.01	3.61

Таблица 9.3: Безразмерные параметры для варианта V1

	Газ А (He)	Газ В (Xe)	смесь
$\rho$	1.	1.011	2.011
$T$	1.	1.	1.
$a$	1.	0.175	0.715
$\lambda$	1.	5.485	1.134
$p$	0.6	0.0185	0.618
$Ma$	2.78	15.93	3.89

Таблица 9.4: Безразмерные параметры для варианта V2

	Газ А (He)	Газ В (Xe)	смесь
$\rho$	1.	2.095	3.095
$T$	1.	1.	1.
$a$	1.	0.175	0.587
$\lambda$	1.	2.646	1.167
$p$	0.6	0.0383	0.638
$Ma$	2.58	14.77	4.4

Таблица 9.5: Безразмерные параметры для варианта V3

	Газ А (He)	Газ В (Xe)	смесь
$\rho$	1.	3.245	4.245
$T$	1.	1.	1.
$a$	1.	0.175	0.509
$\lambda$	1.	1.708	1.064
$p$	0.6	0.0594	0.659
$Ma$	2.44	13.99	4.8

Таблица 9.6: Безразмерные параметры для варианта V4

Для построения граничных условий на правой и левой границах используются условия Ренкина–Гюгонио для неподвижной ударной волны

в смеси газов. При этом величины справа от разрыва вычисляются как

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \rho_1 \frac{(\gamma + 1)Ma^2}{2 + (\gamma - 1)Ma^2}, & p_2 &= p_1 \frac{2\gamma Ma^2 - \gamma + 1}{\gamma + 1}, \\ u_2 &= u_1 \frac{2 + (\gamma - 1)Ma^2}{(\gamma + 1)Ma^2}, & T_2 &= \frac{\gamma p_2}{\rho_2}, \end{aligned} \quad (9.8.1)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют условиям Ренкина–Гюгонио для смеси до и после ударной волны,  $Ma$  — число Маха для смеси.

Для вычисления параметров отдельных компонент будем предполагать, что их температуры и скорости перед ударной волной и за ней выравниваются, в то время как процентные концентрации компонент при переходе через ударный фронт остаются неизменными. Тогда на основе условий (9.8.1) параметры каждой из компонент смеси до и после ударной волны определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \rho_{a1} &= m_a n_a, & \rho_{b1} &= m_b n_b, & T_{a1} &= T_{b1} = T_1, & u_{a1} &= u_{b1} = u_1, \\ \rho_{a2} &= \rho_{a1} \frac{\rho_2}{\rho_1}, & \rho_{b2} &= \rho_{b1} \frac{\rho_2}{\rho_1}, & T_{a2} &= T_{b2} = T_2, & u_{a2} &= u_{b2} = u_2. \end{aligned} \quad (9.8.2)$$

Начальные условия представляют собой разрыв в точке  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \text{при } x \leq 0 & \quad \rho_a = \rho_{a1}, \quad \rho_b = \rho_{b1}, \quad T_a = T_b = T_1, \quad u_a = u_b = u_1. \\ \text{при } x \geq 0 & \quad \rho_a = \rho_{a2}, \quad \rho_b = \rho_{b2}, \quad T_a = T_b = T_2, \quad u_a = u_b = u_2. \end{aligned} \quad (9.8.3)$$

Эти же значения используются и в качестве граничных условий.

Для решения системы (9.7.1)–(9.7.6) применялась явная разностная схема установления по времени, все пространственные производные, включая конвективные слагаемые, аппроксимировались центральными разностями.

Задача решалась на равномерной пространственной сетке при выбранной точности  $\epsilon_{\rho_a} = 10^{-5}$ . При сгущении сетки в два раза отличия в результатах расчетов были чрезвычайно малы, что позволяет сделать вывод о достигнутой сходимости по сетке. В качестве примера в Таблице 9.7 приведены параметры численного расчета для варианта V2.

Профили газодинамических параметров в ударной волне (скорости, плотности и температуры) приведены в нормированном виде на основе условий Ренкина–Гюгонио вверх и вниз по потоку. При этом  $\rho \rightarrow (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$ , аналогично для температуры. Для скорости  $u \rightarrow (u - u_2)/(u_1 - u_2)$ .

	сетка 601	сетка 1201
шаг сетки $h$	0.5	0.25
шаг по времени $\Delta t$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$
число итераций $N_{iter}$	90251	360450

Таблица 9.7: Параметры расчетов варианта V2

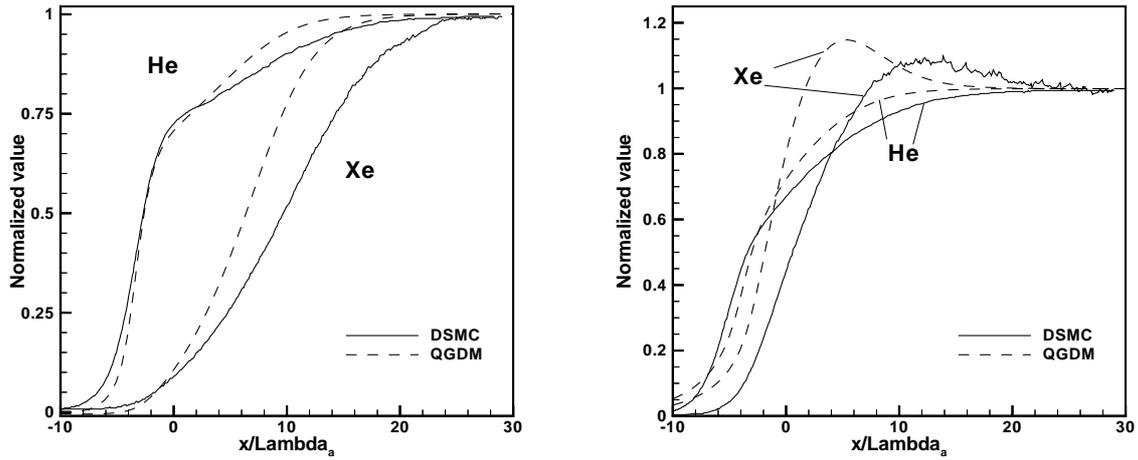


Рис. 9.1: Профили плотности (слева) и температуры (справа) в смеси He-Xe

Остановимся более детально на результатах расчета варианта V2. На рис. 9.1–9.3 представлены профили газодинамических параметров на фронте ударной волны в сравнении с соответствующими результатами, полученными в [12] на основе метода ПММК. Кривые, соответствующие расчетам по модели ПММК, наложены на данные КГДМ модели таким образом, чтобы при  $x = 0$  совпали значения средней плотности смеси.

На рис. 9.1 представлены профили плотности и температуры гелия и ксенона. На рис. 9.2 слева — распределения средней температуры и плотности смеси. Как и в модели DSMC, средняя температура смеси очень близка к температуре гелия, а температура ксенона превышает свое значение за ударной волной на  $\sim 10\%$ .

На рис. 9.2 справа построены скорости диффузии для компонент смеси, отнесенные к скорости невозмущенного потока. Скорости диффузии компонент определялись согласно [12] как

$$u_{da} = u_a - u, \quad u_{db} = u_b - u, \quad (9.8.4)$$

где  $u$  — скорость движения смеси — определяется в соответствии с (9.5.5). При этом определении скорости диффузии компонент  $u_{da}\rho_a + u_{db}\rho_b = 0$ .

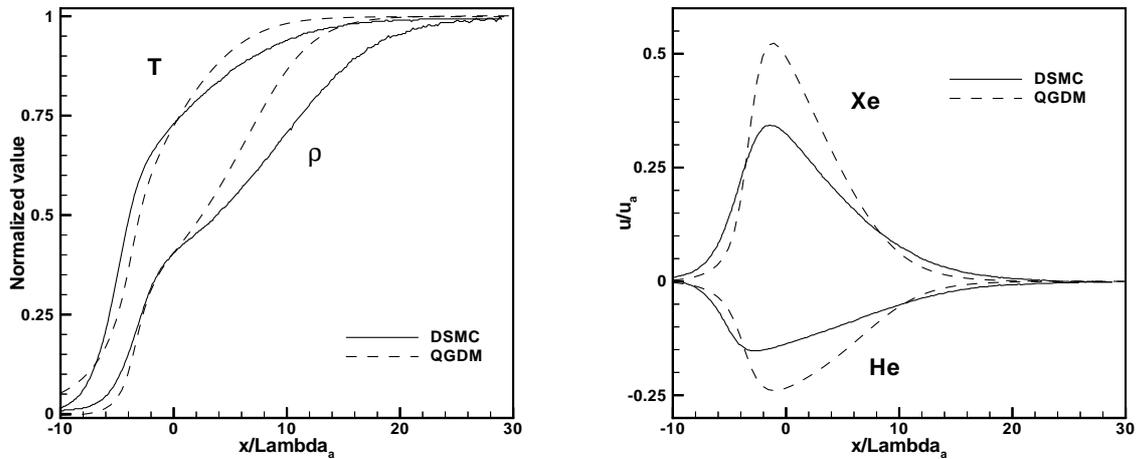


Рис. 9.2: Профили плотности и средней температуры (слева) и скоростей диффузии (справа) в смеси He-Xe

На рис. 9.3 слева представлено изменение концентрации ксенона. Видно, что значения концентрации ксенона на фронте ударной волны приблизительно в два раза меньше, чем в невозмущенной области течения.

Приведенные кривые свидетельствуют о том, что КГДМ модель как качественно, так и количественно хорошо отражает основные особенности рассматриваемого течения: взаимное расположение кривых и их форма соответствуют эталонным результатам.

На рис. 9.4 приведены профили плотности *He* и *Xe* в ударной волне для вариантов V1, V3 и V4, соответствующих экспериментам [116]. Данные результаты показывают, что при варьировании процентного состава смеси результаты численного расчета качественно соответствуют данным натурального эксперимента в пределах его точности.

На основе расчетов вариантов V1–V4 на рис. 9.3 справа приведены зависимости относительной толщины ударной волны обеих компонент  $\delta_{He}/\lambda_{He}$  и  $\delta_{Xe}/\lambda_{Xe}$  в зависимости от концентрации *Xe* в смеси перед ударной волной в сравнении с результатами [116]. При этом толщина ударной волны вычисляется как

$$\delta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\max_x(\partial\rho/\partial x)}. \quad (9.8.5)$$

Длина свободного пробега для каждой из компонент вычисляется в соответствии с (9.7.12) для параметров каждой из компонент газа перед ударной волной. Сплошной линией обозначены данные эксперимента,

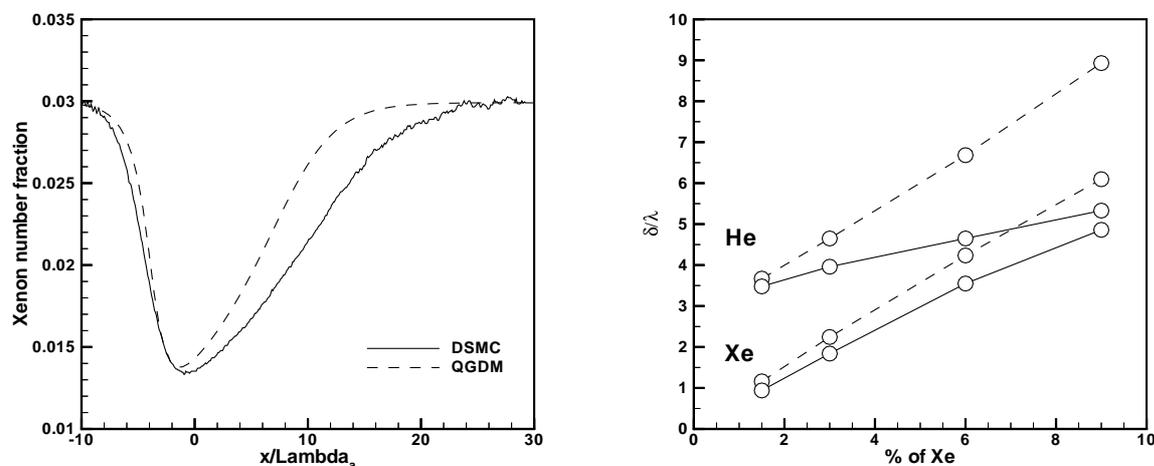


Рис. 9.3: Концентрация Хе (слева) и относительные толщины ударных волн (справа) в смеси He-Xe

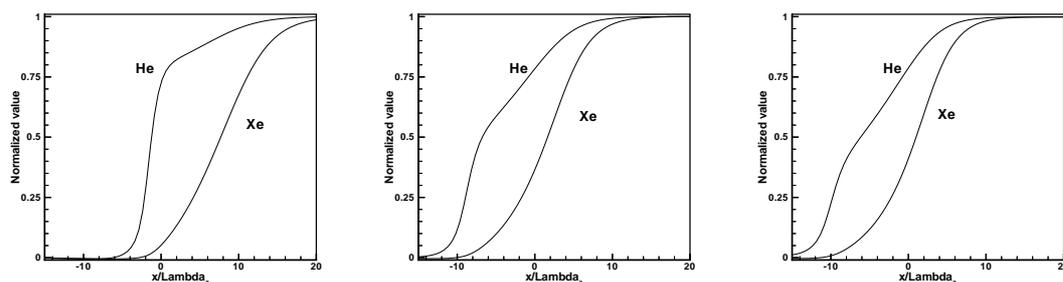


Рис. 9.4: Профили плотности в смеси He-Xe; слева 1.5%Xe, в центре 6%Xe, справа 9%Xe

пунктиром - результаты расчетов авторов. Все кривые представлены в виде, аналогичном [116]. Видно, что для варианта V1, который соответствует минимальной концентрации Хе, данные расчета и эксперимента практически совпадают. С ростом концентрации Хе полученная в расчете толщина ударной волны начинает превышать экспериментальные значения. При этом качественный характер зависимостей соответствует данным эксперимента и известным теоретическим результатам, в соответствии с которыми относительная толщина ударной волны для выбранного параметра  $\omega$  увеличивается при уменьшении числа Маха. Отметим, что толщина ударной волны является очень чувствительной характеристикой задачи и ее расчет на основе моментных уравнений для однокомпонентного газа представляет собой достаточно сложную задачу.

### 9.8.3 Расчет в одножидкостном приближении

В рамках уравнений Навье–Стокса не имеется проработанных моделей расчета смеси газов в двухжидкостном приближении. Поэтому для сравнения КГДМ уравнений с известными макроскопическими подходами было выбрано сравнение одножидкостного приближения КГДМ уравнений (9.6.4)–(9.6.7) с моделью (9.6.8)–(9.6.11) на примере численного моделирования задачи о структуре ударной волны (вариант V2). При этом КГДМ уравнения (9.6.4)–(9.6.7) были выписаны для плоского одномерного течения. Метод решения этих уравнений и определение всех необходимых констант полностью совпадает с описанным в разделе 9.8.2.

При использовании модели (9.6.8)–(9.6.11) коэффициент вязкости смеси определялся на основе соотношения (9.4.3). При этом коэффициенты вязкости отдельных компонент определялись двумя способами: соотношением (9.4.2) и (9.6.16), что практически не влияло на результаты расчетов. Для определения коэффициентов вязкости (9.6.16) и диффузии в выражениях для диффузионных потоков (9.6.13) оказывается недостаточно значений, приведенных в табл. 9.2 и необходимо дополнительно определить ряд констант. Параметры потенциала межмолекулярного взаимодействия определялись согласно [118]:  $\varepsilon_a/k = 10.22$  К,  $\varepsilon_b/k = 231.0$  К. Эффективные диаметры столкновений  $\sigma_a = 2.551 \cdot 10^{-10}$  м,  $\sigma_b = 4.047 \cdot 10^{-10}$  м приведены там же. Коэффициенты  $D_a^T$  и  $D_b^T$ , определяющие термодиффузию, полагались равными нулю.

Для численного решения системы (9.6.8)–(9.6.11), также как и в предыдущем случае, использовалась явная по времени схема с центральными разностями. Однако для обеспечения устойчивости разностного алгоритма оказалось необходимым аппроксимировать слагаемые с  $\ln p$ , входящие в выражения для диффузионных потоков (9.6.13), с помощью односторонних разностных производных вида

$$\frac{\partial \ln p}{\partial x} \sim \frac{\ln p_{i+1} - \ln p_i}{\Delta x}, \quad (9.8.6)$$

что вносит дополнительную схемную диссипацию вида  $O(h)$ . (Здесь  $i$  — координата узла расчетной сетки). Для системы уравнений (9.6.8) – (9.6.13) справедливы соотношения баланса

$$\rho c_a + \rho c_b = \rho, \quad \mathcal{J}_a + \mathcal{J}_b = 0.$$

При численном решении указанной системы величины  $\rho c_b$  и  $\mathcal{J}_b$  не вычисляются непосредственно, а находятся из указанных соотношений баланса

с использованием вычисленных значений  $\rho_{ca}$  и  $\mathcal{J}_a$ .

В качестве начальных условий используются условия (9.8.3). Это же условие использовалось и на левой границе. В отличие от КГДМ уравнений на правой границе ставились мягкие граничные условия  $\partial\psi/\partial x = 0$ , где  $\psi = (\rho_a, \rho_b, u, E)$ . Последнее дает возможность осцилляциям, возникающим в процессе численного решения задачи и распространяющимся вдоль течения, беспрепятственно покинуть расчетную область через ее правую границу. Заметим, что при использовании КГДМ уравнений такие осцилляции не возникали. Параметры расчета для этого варианта близки к приведенным в Таблице 9.7. Число временных шагов до сходимости было несколько больше, чем указано в Таблице 9.7. Например, для сетки с числом узлов 601  $N_{iter} = 140000$  при той же выбранной точности  $\epsilon_{\rho_a} = 10^{-5}$ .

Таким образом устойчивость численного алгоритма для этой модели была существенно ниже, чем для модели КГДМ, что выражалось в появлении осцилляций, для подавления которых было необходимо использовать аппроксимацию первого порядка точности вида (9.8.6) и условия сноса на правой границе.

На рис. 9.5–9.6 представлены газодинамические параметры в ударной волне, рассчитанные по двум одножидкостным моделям. Обозначения и нормировка на рисунках те же, что и в предыдущем разделе.

На рис. 9.5 (слева), аналогично рис. 9.2 (слева), представлены плотности компонент смеси, на рис. 9.5 (справа), аналогично рис. 9.3 (слева), приведены средняя температура и плотность смеси. Заметим, что данный подход не позволяет находить температуры отдельных компонент смеси. Видно, что результаты, полученные по обеим моделям, достаточно близки между собой и в то же время заметно отличаются от эталонных результатов DSMC модели по форме кривых. На рис. 9.6 (слева), аналогичном рис. 9.2 (справа), и на рис. 9.6 (справа), аналогичном рис. 9.3 (слева), представлены безразмерные профили скоростей диффузии для ксенона и гелия и концентрация ксенона на ударной волне, соответственно. Скорости диффузии для одножидкостной КГДМ модели нельзя вычислить на основе соотношения (9.8.4). Для КГДМ уравнений скорости диффузии компонент вычислялись по аналогии с моделью типа уравнений Навье–Стокса через диффузионные потоки (9.6.18) в виде

$$u_{da} = -w_a = -\frac{\tau}{\rho_a} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_a u^2 + p_a), \quad u_{db} = -w_b = -\frac{\tau}{\rho_b} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_b u^2 + p_b) \quad (9.8.7)$$

Для модели Навье–Стокса скорости диффузии компонент определялись как

$$u_{da} = \mathcal{J}_a / (\rho c_a), \quad u_{db} = \mathcal{J}_b / (\rho c_b). \quad (9.8.8)$$

Модель типа уравнений Навье–Стокса существенно завышает значения обеих скоростей диффузии, давая близкую к эталонным значениям концентрацию  $Xe$  в ударной волне, а модель КГДМ, напротив, дает более точные значения скоростей диффузии, завышая при этом концентрацию  $Xe$ .

Таким образом, из приведенного расчета следует, что обе одножидкостные модели близки между собой, хотя и оказываются заметно менее точными по сравнению с двухжидкостным КГДМ приближением и, тем более, с эталонными результатами метода DSMC.

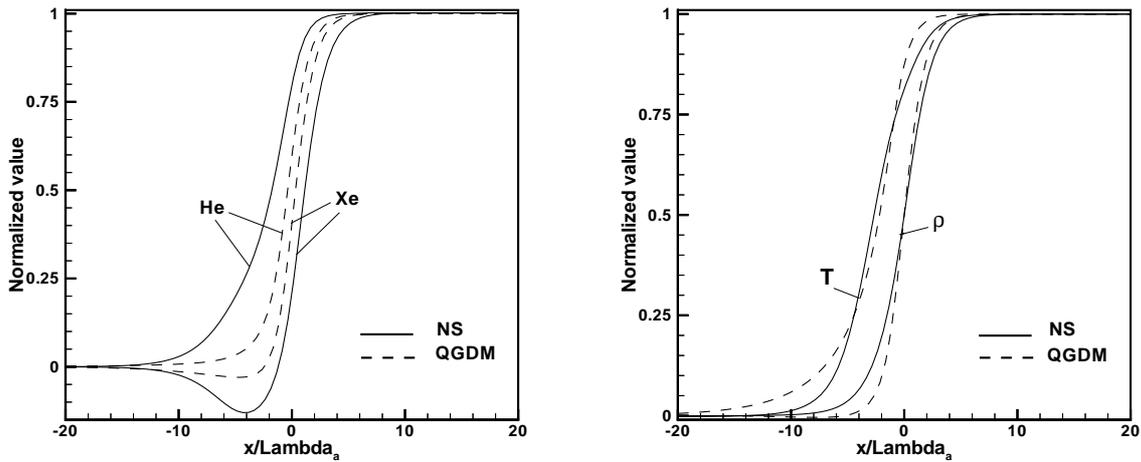


Рис. 9.5: Профили плотности компонент (слева), а также плотности и средней температуры (справа) в смеси He-Xe. Одножидкостные модели

## 9.9 Задача диффузии аргона и гелия

В качестве второго примера апробации двухжидкостных КГДМ уравнений рассматривалась задача массовой диффузии гелия и аргона в постановке, соответствующей расчету по методу ПММК [12]. Пусть на расстоянии  $L = 1$  м друг от друга расположены два резервуара, заполненные газами He (газ  $a$ , справа), и Ar (газ  $b$ , слева). Числовая плотность молекул в резервуарах поддерживается постоянной и равной

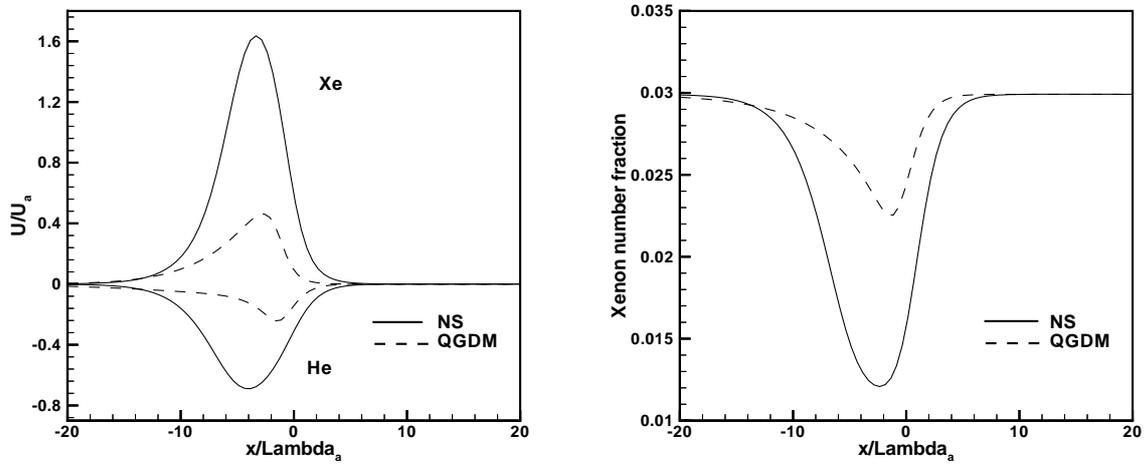


Рис. 9.6: Скорости диффузии (слева) и концентрация Хе (справа) в смеси He-Xe. Одножидкостные модели

$n = 2.8 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ . Предполагалось, что газы в резервуарах имеют одинаковую температуру  $T = 273\text{K}$  и одинаковую скорость, равную нулю.

	He	Ar
$m$ (кг )	$6.65 \cdot 10^{-27}$	$66.3 \cdot 10^{-27}$
$R$ (Дж/(кг· К))	2076.2	208.24
$M$ (кг/моль )	4.0	39.926
$d$ (м )	$2.30 \cdot 10^{-10}$	$4.17 \cdot 10^{-10}$
$\gamma$	1.66	1.66
$\omega$	0.66	0.81
$Pr$	0.666	0.666
$\eta_{ref}$ (н/(м·с)) при $T = 273\text{K}$	$1.865 \cdot 10^{-5}$	$2.117 \cdot 10^{-5}$

Таблица 9.8: Табличные значения для компонент смеси

Необходимые в расчете константы для гелия и аргона приведены в табл. 9.8 в соответствии с [12]. Заметим что в отличие от предыдущего варианта, молекулярные массы газов отличаются в 10 раз.

Используя эти константы, получим недостающие начальные данные: плотность гелия  $\rho_a = nm_a = 1.862 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^3$ , скорость звука  $a_a = \sqrt{\gamma_a R_a T_a} = 971.9 \text{ m/s}$ , длина свободного пробега, рассчитанная по формуле (9.7.12)  $\lambda_a = 1.479 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ . Плотность аргона  $\rho_b = nm_b = 1.856 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^3$ , скорость звука  $a_b = \sqrt{\gamma_b R_b T_b} = 307.81 \text{ m/s}$ , длина свободного пробега, определяемая по формуле (9.7.12), составляет  $\lambda_b = 4.63 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

Так же как и в предыдущем разделе, расчет проводился в безразмер-

ных переменных, причем все величины были нормированы на параметры газа  $a$  (гелия) в резервуаре. Соответствующие безразмерные параметры приведены в табл. 9.9.

	Газ А (He)	Газ В (Ar)
$\rho$	1.	9.969
$T$	1.	1.
$a$	1.	0.316
$\lambda$	1.	0.313
$p$	0.6	0.60

Таблица 9.9: Безразмерные параметры

Рассматривалось одномерное плоское течение, описываемое уравнениями (9.7.1)–(9.7.6). В качестве граничных условий использовались следующие безразмерные соотношения: на левой границе

$$\rho_a = 1. - 10^{-10}, \quad \rho_b = 10^{-10}, \quad T_a = T_b = 1., \quad \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_b}{\partial x} = 0,$$

на правой границе

$$\rho_b = 1. - 10^{-10}, \quad \rho_a = 10^{-10}, \quad T_a = T_b = 1., \quad \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_b}{\partial x} = 0.$$

То есть предполагалось, что в каждом из резервуаров присутствует  $\sim 10^{-10}\%$  молекул другого газа. В начальный момент времени предполагалось, что плотность компонент между резервуарами изменяется линейно:

$$\rho_a(x) = \frac{\rho_{a_{x=L}} - \rho_{a_{x=0}}}{L}x + \rho_{a_{x=0}}, \quad \rho_b(x) = \frac{\rho_{b_{x=L}} - \rho_{b_{x=0}}}{L}x + \rho_{b_{x=0}}.$$

Использовался тот же численный алгоритм, что и в предыдущем разделе при решении КГДМ уравнений. Задача решалась на равномерной пространственной сетке, состоящей из 339 точек с пространственным шагом  $h = 0.2$ , что соответствовало  $0.2\lambda_a$  и  $0.64\lambda_b$ .

На рис. 9.7 слева приведено изменение числовых плотностей Ar и He между резервуарами, отнесенных к числовой плотности в резервуарах. Скорости диффузии обоих газов показаны на рис. 9.7 справа в размерном виде. На обоих рисунках приведено сравнение с соответствующими результатами расчета из [12]. Скорости диффузии вычислялись согласно (9.8.4). Видно качественное и количественное сходство результатов, полученных по обоим методам. А именно, точка равных концентраций

смещается от середины области влево, ближе к резервуару с более тяжелым газом. Скорость диффузии гелия больше, чем аргона, качественное поведение скоростей диффузии компонент различно: скорость диффузии гелия имеет слабо выраженный минимум в середине расчетной области.

На рис. 9.8 приведены распределения давлений и скоростей компонент между резервуарами. Распределение давлений повторяет распределение числовых плотностей (рис. 9.8 слева). Скорость каждой из компонент очень мала вблизи резервуара с этой компонентой, и значительно возрастает вблизи противоположного резервуара (рис. 9.8 справа).

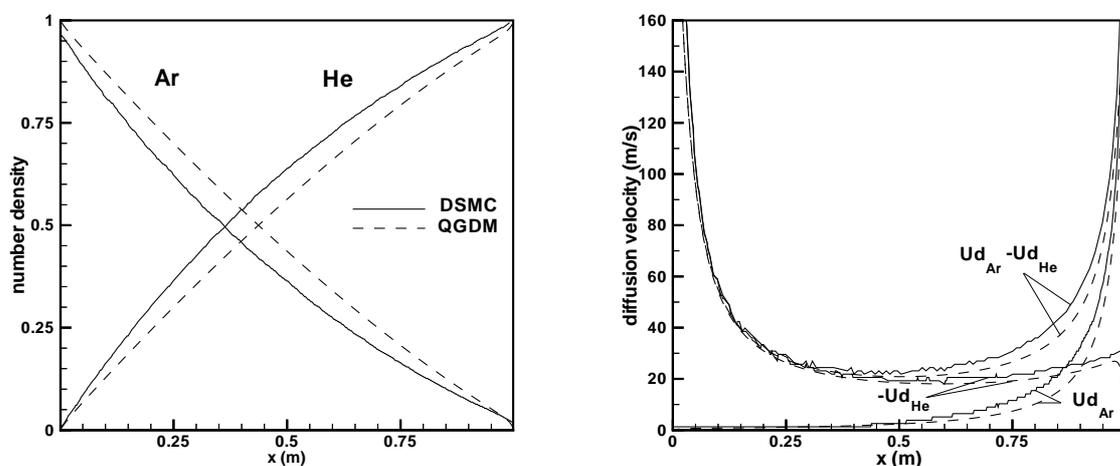


Рис. 9.7: Числовая плотность (слева) и диффузионные скорости (справа) в смеси Ar-He

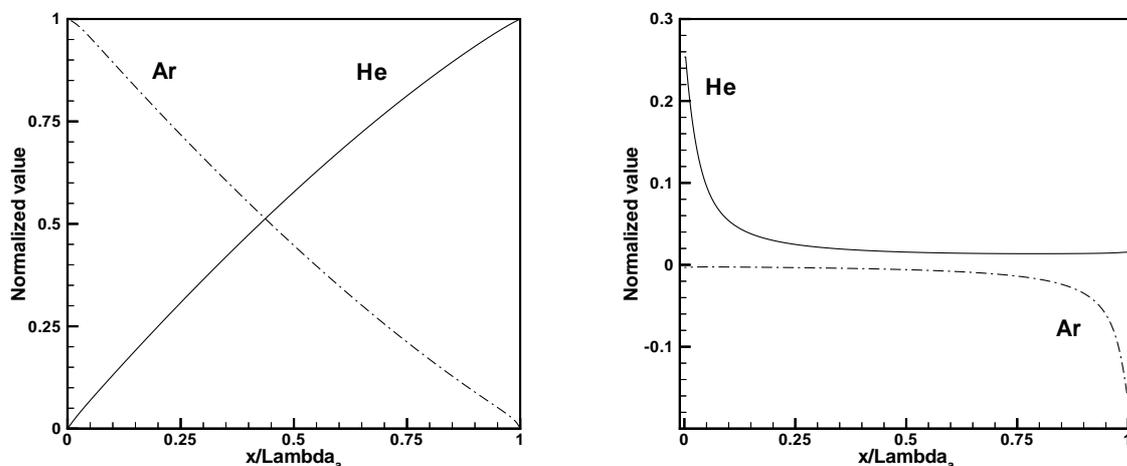


Рис. 9.8: Давления (слева) и скорости (справа) компонент в смеси Ar-He

## 9.10 Заключение

На основе системы кинетических уравнений в релаксационном приближении построена макроскопическая система КГДМ уравнений, которая описывает течение смеси нереагирующих газов. В отличие от ряда широко известных моделей, КГДМ система состоит из уравнений для плотности, импульса и энергии для каждой из компонент, то есть является двухжидкостным приближением, что позволяет детально описывать поведение каждой из компонент.

Уравнения для импульса и энергии включают в себя обменные члены, что учитывает соответствующие обмены между компонентами газовой смеси. Для вычисления этих слагаемых требуется определить частоту взаимных столкновений молекул обоих сортов. КГДМ модель включает в себя также и диффузионные процессы, для описания которых требуется знание коэффициента вязкости смеси. При этом не требуется отдельно вычислять коэффициенты термо, баро и самодиффузии, которые включают в себя традиционные модели и определение которых представляет собой самостоятельную задачу.

Выписано одножидкостное приближение для КГДМ уравнений и прослежена его связь с традиционной системой уравнений типа Навье–Стокса в этом приближении. Показано, что обе одножидкостные модели близки между собой, хотя и оказываются заметно менее точными по сравнению с двухжидкостным КГДМ приближением и, тем более, с эталонными результатами метода DSMC.

Несмотря на использование в приведенных расчетах достаточно простой модели для вязкости смеси и частоты взаимных столкновений частиц, КГДМ модель достаточно точно описывает течение даже если молекулы в смеси сильно отличаются по массе. Для дальнейшего усовершенствования КГДМ модели можно использовать более точные выражения для обоих коэффициентов переноса, входящих в КГДМ уравнения.

Система КГДМ уравнений записывается в инвариантном виде, что позволяет использовать ее для решения задач в разнообразных пространственных постановках. В вычислительном плане алгоритмы, построенные на основе КГДМ модели, оказываются более устойчивыми, чем аналогичные алгоритмы, построенные на основе традиционных уравнений сохранения типа уравнений Навье–Стокса.

Модель допускает обобщения на произвольное число компонент, так

как смесь из нескольких компонент можно представить как суперпозицию бинарных смесей. Возможно включение в модель химических реакций между компонентами.

## Заключительные замечания

Уравнения динамики газа и жидкости могут быть выписаны на основе интегральных законов сохранения массы, импульса, энергии, момента импульса и второго закона термодинамики (в форме интегрального уравнения для энтропии). Для замыкания уравнений сохранения можно использовать различные гипотезы для определения газодинамических параметров.

Если определять газодинамические параметры как пространственные средние, то приходим к системе уравнений Навье-Стокса. При построении КГД систем используется другое определение газодинамических величин. Они определяются как пространственно-временные средние. При этом вектора плотности потока массы, тепловой поток и тензор вязких напряжений для КГД уравнений отличаются от соответствующих величин для уравнений Навье-Стокса дополнительными слагаемыми с малым коэффициентом, имеющим размерность времени. Характер уравнений остается диссипативным.

Каждой из двух КГД систем соответствует свой способ решения проблемы замыкания. Квазигазодинамические уравнения следует использовать только при моделировании течений идеального политропного газа, а квазигидродинамические — при исследовании движений неидеальных газов и жидкостей. При численном моделировании вязких течений дополнительные слагаемые проявляют себя как эффективные регуляризаторы.

В стационарном случае обе КГД системы отличаются от уравнений Навье-Стокса (и друг от друга) дивергентными членами, имеющими формальные асимптотические порядки малости  $O(Kn^2)$  при  $Kn \rightarrow 0$ . Влияние добавочных членов незначительно для стационарных и квазистационарных газодинамических течений при малых числах Кнудсена. Однако для сильно нестационарных течений, а также при числах  $Kn$ , близких к единице, их вклад становится существенным. Именно в этом классе задач следует искать преимущества новых моделей.

КГД системы отличаются от других систем, которые в разное время предлагались в работах [31], [32], [33], [34], [35]. Уравнения КГД принципиально отличаются от уравнений Барнетта [11], [14]. Уравнения Барнетта представляют собой уравнения, отличающиеся от уравнений Навье-

Стокса дополнительными производными третьего порядка по пространству. Эти добавки имеют дисперсионный характер. Добавки в КГД уравнениях имеют вид вторых производных по пространству и носят диссипативный характер.

Вопрос о границах применимости КГД моделей является одним из наиболее сложных. Чтобы ответить на него, необходимы дополнительные исследования.

К настоящему времени на основе КГД уравнений проведено численное моделирование разнообразных течений газа и жидкости. Помимо задач, описанных в предыдущих главах, имеется целый ряд других решенных задач. В частности, детальное сравнение результатов, полученных на основе подходов Навье-Стокса, КГД и DSMC проводилось для задач о течении в окрестности пластины [119], диска [125] и полого цилиндра [121]. Решалась задача о течении в недорасширенной струе [22], [23], рассчитывалась структура ударной волны [24], [39], [40]. Последние результаты сопоставлялись с экспериментами [38]. Рассматривалась задача о течении газа в микроканале [61]. КГД уравнения оказались очень эффективными для расчетов нестационарных течений газа, среди которых укажем [62], [81], [126], [127]. Построены и опробованы в численном эксперименте модификации КГД уравнений для описания течений электропроводных сред [128], [129]. Предпринимаются попытки расчета турбулентных течений на основе КГД моделей [130], [131].

Эти и многие другие результаты численного моделирования, выполненные на основе КГД уравнений указывают на перспективность этих новых систем уравнений и возможность их использования для расчетов практических задач газо и гидродинамики.

## Приложение. Построение КГД уравнений для плоского одномерного течения

В качестве примера приведем детальный вывод квазигазодинамической системы уравнений для случая плоского одномерного течения вдоль оси  $x$ . При этом скорости молекул  $\vec{\xi} = (\xi_x, \xi_y, \xi_z, )$  связаны с тепловыми скоростями  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$  соотношениями

$$\xi_x = u + c_x, \quad \xi_y = c_y, \quad \xi_z = c_z,$$

где  $u$  - макроскопическая скорость течения газа вдоль оси  $x$ . В этом случае модельное кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial f_0}{\partial x} - \xi_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \xi_x \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) = \mathcal{I}. \quad (9.10.1)$$

Макроскопические уравнения строятся путем умножения уравнения (9.10.1) последовательно на сумматорные инварианты

$$h(\vec{\xi}) = 1, \xi_x, \xi^2/2$$

и осреднения по всем скоростям частиц  $\vec{\xi}$ . Законы сохранения массы, импульса и энергии в процессе столкновений выражаются следующим соотношением для интеграла столкновений

$$\int \mathcal{I} h(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = 0. \quad (9.10.2)$$

Таким образом, из результирующих уравнений исчезают слагаемые с интегралом столкновений.

### Уравнение неразрывности

Интегрируем уравнение (9.10.1) по всем скоростям частиц. При интегрировании первого слагаемого получаем

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d\vec{\xi} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Второе слагаемое преобразуется как

$$\int \frac{\partial f_0}{\partial x} \xi_x d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} \int (u + c_x) f_0 d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} \int u f_0 d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} \rho u. \quad (9.10.3)$$

Здесь использованы соотношения (3.2.3) в виде

$$\int c_x f_0 d\vec{\xi} = 0, \quad (9.10.4)$$

совместно с определением  $\rho$

$$\rho = \int f d\vec{\xi} = \int f_0 d\vec{\xi}.$$

Второе слагаемое в левой части уравнения (9.10.1) преобразуется как

$$\begin{aligned} \int \xi_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \xi_x \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) d\vec{\xi} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial}{\partial x} \int \xi_x^2 f_0 d\vec{\xi} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial}{\partial x} \int (u + c_x)^2 f_0 d\vec{\xi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p). \end{aligned} \quad (9.10.5)$$

Здесь использованы соотношения (3.2.3) и (9.10.4) совместно с определением давления  $p$  в виде

$$p = \frac{1}{3} \int \vec{c}^2 f_0 d\vec{\xi} = \frac{1}{3} \int (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) f_0 d\vec{\xi} = \int c_x^2 f_0 d\vec{\xi}. \quad (9.10.6)$$

Объединяя выражения (9.10.2), (9.10.3) и (9.10.5), получим первое уравнение КГД системы в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p). \quad (9.10.7)$$

## Уравнение импульса

Умножим уравнение (9.10.1) на  $\xi_x$  и проинтегрируем по всем скоростям  $\vec{\xi}$ .

Принимая во внимание определение плотности и (3.2.3), (9.10.4) и (9.10.6), запишем первое и второе слагаемые кинетического уравнения как

$$\int \xi_x \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \int \xi_x f d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \rho u,$$

$$\int \xi_x^2 \frac{\partial}{\partial x} f_0 d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} \int (u^2 + 2c_x u + c_x^2) f_0 d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p). \quad (9.10.8)$$

Последнее слагаемое преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int \xi_x^2 \frac{\partial}{\partial x} \tau \xi_x \frac{\partial f_0}{\partial x} d\vec{\xi} = \\
& \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} \int \xi_x^3 f_0 d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} \int (u + c_x)^3 f_0 d\vec{\xi} \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} \int (u^3 + 3u^2 c_x + 3u c_x^2 + c_x^3) f_0 d\vec{\xi} \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + 3pu). \tag{9.10.9}
\end{aligned}$$

Здесь использованы выражения (3.2.3), (9.10.4) и (9.10.6) совместно с формулой

$$\int c_x^3 f_0 d\vec{\xi} = 0. \tag{9.10.10}$$

В более общем случае вследствие симметрии справедливо соотношение

$$\int c_i c_j^2 f_0 d\vec{\xi} = 0. \tag{9.10.11}$$

Объединяя уравнения (9.10.2), (9.10.8) и (9.10.9), получим второе уравнение КГД системы в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + 3pu). \tag{9.10.12}$$

## Уравнение энергии

Осредняя уравнение (9.10.1) с весом  $\xi^2/2$  получим для первых двух слагаемых модельного кинетического уравнения

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2} f d\vec{\xi} = \frac{\partial E}{\partial t}, \\
& \int \frac{\partial}{\partial x} f_0 \xi_x \frac{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2} d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} \int u \frac{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2} f_0 d\vec{\xi} + \\
& \frac{\partial}{\partial x} \int c_x \frac{(c_x + u)^2 + c_y^2 + c_z^2}{2} f_0 d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} uE + \frac{\partial}{\partial x} up. \tag{9.10.13}
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали определения для  $\rho$  и  $p$  совместно с уравнениями (9.10.11) и определение полной энергии в виде

$$E = \frac{1}{2} \int \xi^2 f d\vec{\xi}. \quad (9.10.14)$$

Последнее слагаемое кинетического уравнения преобразуется в слагаемое диссипативного типа в уравнении для полной энергии

$$\begin{aligned} & \int \frac{\xi^2}{2} \xi_x \frac{\partial}{\partial x} \tau \xi_x \frac{\partial f_0}{\partial x} d\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\xi^2}{2} \xi_x^2 f_0 d\vec{\xi} = \\ & \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} \int (u + c_x)^2 \frac{(c_x + u)^2 + c_y^2 + c_z^2}{2} f_0 d\vec{\xi} = \\ & \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} \int u^2 \frac{(c_x + u)^2 + c_y^2 + c_z^2}{2} f_0 d\vec{\xi} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} \int 2uc_x \frac{(c_x + u)^2 + c_y^2 + c_z^2}{2} f_0 d\vec{\xi} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} \int c_x^2 \frac{(c_x + u)^2 + c_y^2 + c_z^2}{2} f_0 d\vec{\xi} \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 E + 2u^2 p + \frac{u^2 p}{2} + \int c_x^2 \frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2} f_0 d\vec{\xi} \right). \end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла сделаем замену переменных

$$x = \frac{c_x}{\sqrt{2RT}}, \quad y = \frac{c_y}{\sqrt{2RT}}, \quad z = \frac{c_z}{\sqrt{2RT}}.$$

Принимая во внимание формулы

$$\int \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}, \quad \int x^2 \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}/2,$$

$$\int x^4 \exp(-x^2) dx = 3\sqrt{\pi}/4,$$

получим

$$\int c_x^2 \frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2} f_0 dc_x dc_y dc_z = \frac{5p^2}{2\rho}. \quad (9.10.15)$$

В соответствии с полученными выше соотношениями, слагаемое диссипативного типа в уравнении энергии будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 \left( E + \frac{5}{2} p \right) + \frac{5p^2}{2\rho} \right). \quad (9.10.16)$$

Объединяя формулы (9.10.2), (9.10.13) и (9.10.16), получим последнее уравнение КГД системы в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial}{\partial x} u(E + p) = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} u^2 \left( E + \frac{5}{2} p \right) + \frac{5}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tau p \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho} \right). \quad (9.10.17)$$

## Литература

- [1] Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: 1976. т.1,2.
- [2] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [4] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Физматлит, 2002.
- [5] Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: 1982.
- [6] Vincenti W,G., Kruger Jr.C.H. Introduction to Physical Gas Dynamics. Wiley, 1965.
- [7] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000.
- [8] Шеретов Ю.В. Математические модели гидродинамики. Учебное пособие. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2004.
- [9] Паули В. Теория относительности. М.: Наука, 1983.
- [10] Шахов Е.М. Метод исследования движений разреженного газа. М.: Наука, 1974.
- [11] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
- [12] Bird G.A. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Oxford: Clarendon press,1994.
- [13] Берд Г.А. Молекулярная газовая динамика. М.: Наука, 1981.
- [14] О.Э.Ланфорд, У.Гринберг, Я.Полевчак и др. Неравновесные явления: уравнение Больцмана. М.: 1986.
- [15] Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: 1967.
- [16] Present R.D. Kinetic theory of gases. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, INC., 1958

- [17] Страйк Д.Ж. Краткий очерк истории математики. М: Наука, 1984.
- [18] Шеретов В.Г., Щербакова С.Ю. Российской математике - триста лет. Историко-математические очерки. Тверь, 2000.
- [19] Елизарова Т.Г., Серегин В.В. Квазигазодинамические уравнения и аппроксимационная формула для объемной вязкости. Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия, 2006, No 1, с.19 - 22.
- [20] Тихомиров Д.В. Тензорно-индексное представление квазигазодинамической системы и разностная аппроксимация. Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия, 2006, No 1.
- [21] Жданов В.М., Алиевский М.Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989.
- [22] Mate B., Graur I.A., Elizarova T., Chirokov I., Tejeda G., Fernandez J.M., Montero S. Experimental and numerical investigation of an axisymmetric supersonic jet. J. Fluid Mech., 2001, V.426, pp.177 - 197.
- [23] Graur I.A., Elizarova T.G., Ramos A., Tejeda G., Fernandez J.M., Montero S. A Study of shock waves in expanding flows on the basis of spectroscopic experiments and quasi-gasdynamic equations. J. Fluid Mech., 2004, V.504, pp.239 - 270.
- [24] Елизарова Т.Г., Широков И.А. Численное моделирование ударной волны в аргоне, гелии и азоте. в сб. Прикладная тематика и информатика Ред. Д.П.Костомаров, В.И.Дмитриев. МГУ, Труды факультета Вычислительной математики и кибернетики, М.: Макс Пресс, 2004, No 18, с. 66 - 82.
- [25] Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1991. т.2.
- [26] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды. В сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун.-т, 1997. С.127 -155.
- [27] Шеретов Ю.В. Некоторые свойства квазигазодинамических уравнений. В сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун.-т, 2000, с.134 - 149.

- [28] Шеретов Ю.В. Уравнения гидродинамики и преобразования Галилея. В сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун.-т, 2003, с.187 - 198.
- [29] Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. N 2. С. 239–255.
- [30] Четверушкин Б.Н. Кинетически–согласованные схемы в газовой динамике. М.: МГУ, 1999.
- [31] Слезкин Н.А. О дифференциальных уравнениях движения газа. Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. N 2. С. 205–208.
- [32] Валландер С.В. Уравнения движения вязкого газа. Докл. АН СССР. 1951. Т. 58. N 1. С. 25–27.
- [33] Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: ЯНУС, 1995.
- [34] Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.
- [35] Алексеев Б.В. Обобщенная бoльцмановская физическая кинетика. Теплофизика высоких температур. 1997. Т. 35. N 1. С. 129–146.
- [36] Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975.
- [37] Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений. Математическое моделирование: процессы в нелинейных средах. М., 1986. С. 261–278.
- [38] Alsmeyer H. Density Profiles in Argon and Nitrogen Shock Waves Measured by the Absorption of an Electron Beam. J. Fluid. Mech., 1976, V. 74, part 3, pp. 479-513.
- [39] Elizarova T.G., Chetverushkin B.N., Sheretov Yu.V. Quasi-gasdynamics equations and computer simulation of viscous gas flows. Lecture Notes in Phys., No 414. Proc. 13th Intern. Conf. on Numer. Meth. in Fluid Dynamics. Roma, Springer-Verlag, 1992, p. 421-425.

- [40] Elizarova T.G., Graur I.A., Sheretov Yu.V. Quasi-gas dynamic equations and computer simulation of rarefied gas flows. Proceedings of the 19th International Symposium on Shock Waves, Marseille, France, July 26-30, 1993, Springer v. 4, p. 45-50.
- [41] Graur I.A., Elizarova T.G., Lengrand J.C. Quasigasdynamic equations with multiple translational temperatures, Laboratoire d'A'erothermique du CNRS, Meudon (Fr), 1997, R 97-1.
- [42] Шеретов Ю.В. О разностных аппроксимациях квазигазодинамических уравнений для осесимметричных течений. В сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2001. С. 191-207.
- [43] Шеретов Ю.В. Анализ устойчивости модифицированной кинетически-согласованной схемы в акустическом приближении. В сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2004. С. 147-160.
- [44] Елизарова Т.Г., Соколова М.Е. Численный алгоритм расчета сверхзвуковых течений, основанный на квазигазодинамических уравнениях. Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия, 2004, № 1, с. 10-15.
- [45] Елизарова Т.Г., Соколова М.Е., Шеретов Ю.В. Квазигазодинамические уравнения и численное моделирование течений вязкого газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 2005, т.45, No 3. с.544 - 555.
- [46] Граур И.А. Метод квазигазодинамического расщепления для решения уравнения Эйлера. Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2001. Т. 41, N 10. С. 1583-1596.
- [47] Woodward P., Collela P.J. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shock. Comput. Phys. 1984. N 54. P.115-173.
- [48] Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
- [49] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.

- [50] Жмакин А.И., Фурсенко А.А. Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета. *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*. 1973, т.20, №4, с. 1021 - 1030.
- [51] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1970.
- [52] М.А.Ильгамов, А.Н.Гильманов. Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: Физматлит, 2003.
- [53] А.Н. Гильманов. Метод адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М.: Физматлит, 2000.
- [54] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Шеретов Ю.В., Шильников Е.В. Численное моделирование отрывных течений за обратным уступом. Сб. Прикладная тематика и информатика, Труды факультета Вычислительной математики и кибернетики. М.: Макс Пресс 2003. N 14. С. 85-118.
- [55] Попов И.В., Поляков С.В. Построение адаптивных нерегулярных треугольных сеток для двумерных многосвязных невыпуклых областей. *Матем. моделирование*. Т. 14, № 6, с. 25. 2002
- [56] Самарский А.А., Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
- [57] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. т. 2, М.: Высшая школа, 1981.
- [58] Елизарова Т.Г., Серегин В.В. Аппроксимация квазигазодинамических уравнений на треугольных сетках. *Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия*, 2005, No 4, с.15 -18.
- [59] Елизарова Т.Г., Широков И.А. Макроскопическая модель газа с поступательно-вращательной неравновесностью. *Ж. вычисл. матем. и матем.физики*, 1999, т. 39, № 1, с. 141-153.
- [60] Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Кинетический алгоритм для расчета газодинамических течений. *Ж.вычисл. матем. и матем. физики*. 1985. Т. 25, N 10. С. 1526-1533.
- [61] Elizarova T.G., Sheretov Yu.V. Analyse du probleme de l'ecoulement gazeux dans les microcanaux par les equations quasi hydrodynamiques. *Congres Societe Hydrotechnique de France (SHF) "Microfluidique"*. Toulouse. 3-5 Decembre 2002. P. 309-318. *Journal "La Houille Blanche. Revue Internationale de l'Eau"*, 2003, No 5, pp. 66 - 72.

- [62] Антонов А.Н., Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н., Шеретов Ю.В. Численное моделирование пульсационных режимов при сверхзвуковом обтекании полого цилиндра. *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*. 1990. Т. 30, N 4. С. 548-556.
- [63] Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989.
- [64] Рыков В.А. Модельное кинетическое уравнение для газа с вращательными степенями свободы. *Механика жидкости и газа*, 1975, N 6, с. 107–115.
- [65] Рыков В.А., Скобелкин В.Н. О макроскопическом описании движений газа с вращательными степенями свободы. *Механика жидкости и газа*, 1978, N 1, с. 180–183.
- [66] Ларина И.Н., Рыков В.А. Подобие гиперзвуковых течений разреженного газа около тупых тел. *Механика жидкости и газа*, 1981, N 2, с. 130–135.
- [67] Bird G.A. Breakdown of translational and rotational equilibrium in gaseous expansions. *AIAA Journal*, 1970, v.8, N11, p. 1988–2003.
- [68] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. *Механика*. М.: Наука, 1965.
- [69] Elizarova T.G., Lengrand J.C., Graur I.A. Gradient expansions for distribution functions and derivation of moment equations. 21th Intern. Symp. on RGD, Marseille, France, July 26–30, 1998. Ed. R.Brun. Toulouse, France, Cepadues, 1999, p. 119–126.
- [70] Ступоченко Е.В., Лосев С.А., Осипов А.И. Релаксационные процессы в ударных волнах. М.: Наука, 1965.
- [71] Wysong I.J., Wadsworth D.C. Assessment of rotational collision number of nitrogen at high temperatures and its possible effect on modeling of reacting shocks. 21th Intern. Symp. on RGD, Marseille, France, July 26–30, 1998. Ed. R.Brun. Toulouse, France, Cepadues, 1999.
- [72] Жданов В.М. Процессы переноса и релаксации в многокомпонентной плазме. *Transport and relaxation processes in multicomponent plasma*. М.: Мир, Энергоиздат, 1982.
- [73] Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1982.

- [74] Головачев Ю.П. Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука, Физматлит, 1996.
- [75] Kosuge S., Aoki K., Takata S. Shock-wave structure for a binary gas mixture: Finite-difference analysis of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules. Preprint of Kyoto University, 1999.
- [76] Шеретов Ю.В. Разностные схемы гидродинамики в эйлеровых и лагранжевых координатах на основе квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. В сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун.-т. 1999. С.184 – 208.
- [77] Chirokov I.A., Elizarova T.G., Lengrand J.C. Numerical Study of Shock Wave Structure Based on Quasigasdynamic Equations with Rotational Nonequilibrium, 21th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Marseille, France, July 26-30, 1998, Ed.R.Brun et al.. Cepadues, Toulouse, France, 1999, Vol.1, pp.175-182.
- [78] Elizarova T.G., Chirokov I.A. Macroscopic Model for a Gas with Translational-Rotational Nonequilibrium, J. Comp. Math. and Math. Physics, 1999, V39, N1, p.135 - 146.
- [79] Koura K. Monte Carlo Direct Simulation of Rotational Relaxation of Diatomic Molecules Using Classical Trajectory Calculations: Nitrogen Shock Wave, Phys. Fluids, 1997, V.9, No.11, pp. 3543–3549.
- [80] Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений. Докл. АН СССР. 1984. Т.279. N 1. С.80–83.
- [81] Антонов М.А., Граур И.А., Косарев Л.В., Четверушкин Б.Н. Численное моделирование пульсаций давления в трехмерных выемках. Матем. моделирование, 1996. Т.8. N 5. С.76–90.
- [82] Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамических уравнений. В сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун., 1998. С. 213–241.
- [83] Шеретов Ю.В. Об одной новой математической модели в гидродинамике. В сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун., 1996. С. 124–134.

- [84] Семенов М.В., Шеретов Ю.В. Численное моделирование течений жидкости в окрестности шара. В сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун., 2005. С. 107–123.
- [85] Гуров Д.Б., Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений. Математическое моделирование. 1996. Т. 8. N 7. С. 33–44.
- [86] Библиотека программ для решения сеточных уравнений. Ред. Е.С. Николаев, М.: Изд-во МГУ. 1984.
- [87] Широков И.А. Решение уравнения Пуассона на многопроцессорной системе в задачах моделирования течений несжимаемой жидкости. Дифф. уравнения. 2003. Т. 39. № 7, с. 993–1000.
- [88] Elizarova T.G., Kalachinskaya I.S., Sheretov Yu.V Separating Flow Behind a Back-Step. Part I. Quasi-Hydrodynamic Equations and Computation of a Laminar Flow. <http://arXiv.org/abs/math-ph/0407053>
- [89] Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование конвективных течений в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура". Препринт № 28, Москва, ИММ РАН, 1993.
- [90] De Vahl Davis G., Jones I.P. Natural convection in a square cavity: a comparison exercise. Int. J. Numer. Meth. in Fluids. 1983. N 3, pp.227 - 248.
- [91] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1998, т.38, N 10, с. 1732 - 1742.
- [92] Behnia M., Synthesis of finite difference methods, Workshop: "Numerical simulation of oscillatory convection in low-Pr fluids" Notes on Numer. Fluid Dynamic. 1990. V. 27. P. 265–272.
- [93] Behnia M., de Vahl Davis G. Fine mesh solutions using streamfunction - vorticity formulation. Там же, P. 11–18.

- [94] Ben Hadid H., Roux B. Buoyancy-driven oscillatory flows in shallow cavities filled with a low-Prandtl number fluid. Там же, P. 25–34.
- [95] Biringen S., Danabasoglu G., Eastman T.K. A finite-difference method with direct solvers for thermally-driven cavity problems. Там же, P. 35–42.
- [96] Ohshima H., Ninokata H. Numerical simulation of oscillatory convection in low Prandtl number fluids using AQUA code. Там же, P. 90-97.
- [97] Ohnishi M., Azuma H., Doi T. Computer simulation of oscillatory Marangoni flow. *Asta Astronautica*. 1992. V. 26. N 8-10. P. 685-696.
- [98] Roux B., Ben Hadid H., Laure P. Hydrodynamical regimes in metallic melts subject to a horizontal temperature gradient. *European J. Mech., B/Fluids*. 1989. V. 8. N.5. P. 375-396.
- [99] Елизарова Т.Г., Милукова О.Ю. Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне. *ЖВМиМФ*, 2003, т.43, No 3 . с.453 - 466.
- [100] T.G. Elizarova, O.Yu. Miliukova, Parallel algorithm for numerical simulation of 3D incompressible flows. *Proceedings of the PCFD 2003 Conference*, Ed. by Chetveruchkin et al,(Parallel Computational Fluid Dynamics) Moscow 2003, pp. 65 - 72.
- [101] Косефф Дж. Р., Стрит Р.П. О влиянии торцевых стенок на течение в каверне с движущейся крышкой. Пер. с англ. *Теоретические основы инж. расчетов*. 1984. т.106, № 4, с.299 - 308.
- [102] Фортвов В.Е., Левин В.К., Савин Г.И., Забродин А.В., Каратанов В.В., Елизаров Г.С., Корнеев В.В., Шабанов Б.М. Суперкомпьютер МВС - 1000М и перспективы его применения. *Информационно-аналитический журнал Наука и промышленность России*, 2001, № 11, т.55, с.49 - 52.
- [103] Sparrow E.M., Chuck W. PC solutions for heat transfer and fluid flow downstream of an abrupt, asymmetric enlargement in a channel. *Numer. Heat Transfer*. V. 12. P. 19–40, 1987.

- [104] Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. of Fluid Mech.* V. 127. P. 473–496, 1983.
- [105] Hackman L.P., Raithby G.D., Strong A.B. Numerical predictions of flows over backward-facing steps. *Intern. J. for Numer. Meth. in Fluids.* V. 4. N 8. P. 711–724, 1984.
- [106] Елизарова Т.Г., Граур И.А. Макроскопические уравнения для бинарной смеси газов. Препринт, Москва, МАКС Пресс, 2000, (ББК 22.193:22.253.3) 49 стр.
- [107] Elizarova T.G., Graur I.A., Lengrand J.-C. Two-fluid computational model for a binary gas mixture. *European Journal of Mechanics (B/Fluids)* 2001, No 3, pp.351 - 369.
- [108] Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M. Model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one component systems. *Phys.Rev.*, 1954, V.94, pp. 511 – 524.
- [109] Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Кинетический алгоритм для расчета газодинамических течений. *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*, 1985, т.25, No 10, с.1526–1533.
- [110] Sirovich L. Kinetic modeling of gas mixtures. *Phys. of Fluids*, 1962, V.5, N 8, pp.908 – 918.
- [111] Morse T.F. Kinetic model equation for gas mixture. *Phys. of Fluids.*, 1964, V.7, N 12, pp.2012 –2013.
- [112] Wu Y., Lee C.H. Kinetic theory of shock tube problems for binary mixtures. *Phys. of Fluids*, 1971, V.14, N 2, pp.313 – 322.
- [113] Goldman E., Sirovich L. Equations for gas mixtures. *Phys. of Fluids*, 1967, V.10, N 9, pp.1928 – 1940.
- [114] Wilke C.R. A viscosity equation for gas mixtures. *J. Chem. Phys.*, 1950, v. 18, N 4, pp. 517- 522.
- [115] Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд-во Иностранной литературы, Москва, 1960.
- [116] Gmurczyk A.S., Tarczyński M. and Walenta Z.A. Shock wave structure in the binary mixtures of gases with disparate molecular masses,

- Rarefied gas dynamics, Ed. by R. Compargue, CEA, Paris, v.1, 1979, pp. 333- 341.
- [117] Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей, Москва, Издательство иностранной литературы, 1961.
- [118] Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей, Ленинград, "Химия", 1982, 592 с.
- [119] Elizarova T.G., Graur I.A., Lengrand J.C., Chpoun A. Rarefied gas flow simulation based on quasigasdynamic equations. AIAA Journal. 1995. V.33. N 12. P.2316 – 2324.
- [120] Дородницын Л.В. Искусственные граничные условия при численном моделировании дозвуковых течений газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 2005, 45, No 7, 1251–1278.
- [121] Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004. - 332 с.
- [122] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., Наука, 1980.
- [123] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Использование квазигидродинамической системы уравнений для моделирования течений теплопроводной жидкости. Сборник трудов IV Международной конференции "Математика, компьютер, образование", 1997, с. 108 - 115.
- [124] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Расчет конвективных течений на основе квазигидродинамических уравнений. в сб. Проблемы математической физики. Ред. Д.П.Костомаров, В.И.Дмитриев. Москва, Диалог МГУ, 1998, с.193 - 208.
- [125] Chpoun A., Elizarova T.G., Graur I.A., Lengrand J.C. Simulation of the rarefied gas flow around a perpendicular disk, European Journal of Mechanics (B/ Fluids) 2005, Vol 24, pp.457 - 467.
- [126] Антонов А.Н., Елизарова Т.Г., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование колебательных режимов при обтека-

- нии тела с иглой. Математическое Моделирование, 1989, Т.1, № 1, с.13 – 23.
- [127] Граур И.А., Елизарова Т.Г., Четверушкин Б. Н. Численное моделирование обтекания каверн сверхзвуковым потоком вязкого сжимаемого газа, Инженерно - физический журнал, 1991, т. 61, N 4, с. 570 - 577.
- [128] Елизарова Т.Г., Жериков А.В., Калачинская И.С., Шеретов Ю.В. Численное моделирование конвективных течений электропроводной жидкости в каверне в сб. Прикладная тематика и информатика, Ред. Д.П.Костомаров, В.И.Дмитриев. МГУ, Труды факультета Вычислительной математики и кибернетики, Москва, Макс Пресс 2003, No 13, с. 63 - 81.
- [129] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Шеретов Ю.В., Широков И.А. Численное моделирование течений электропроводной жидкости во внешнем магнитном поле. Ж. радиотехника и электроника, 2005, том 50, No 2, с.245 - 251.
- [130] T. G. Elizarova, E. V. Shilnikov, R. Weber, J. Hureau, J.C. Lengrand. Experimental and Numerical Investigation of the Turbulent Flow behind a Backward-Facing Step. Int. Conference on Boundary and interior layes (BAIL) 2004, France, Toulouse, 5-7, July 2004. Proceedings CD.
- [131] Elizarova T.G., Shilnikov E.V., Weber R., Hureau J. Separated flow behind a backward-facing step. Part II. Experimental and numerical investigation of a turbulent flow. <http://arXiv.org/abs/math-ph/0410023>
- [132] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Использование квазигидродинамической системы уравнений для моделирования течений теплопроводной жидкости. Сборник трудов IV Международной конференции "Математика, компьютер, образование", 1997, с. 108 - 115.
- [133] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Расчет конвективных течений на основе квазигидродинамических уравнений. в сб. Проблемы математической физики. Ред.

- Д.П.Костомаров, В.И.Дмитриев. Москва, Диалог МГУ, 1998, с.193 - 208.
- [134] Елизарова Т.Г., Широков И.А. Макроскопическая модель газа с поступательно - вращательной неравновесностью. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1999, т.39, N 1, с. 141 - 153.
- [135] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.
- [136] Позняк Э.Г., Шишкин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [137] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Эдиториал, 1998.
- [138] Пушкина И.Г., Тишкин В.Ф. Адаптивные расчетные сетки из ячеек Дирихле для решения задач математической физики: методика построения, примеры. Матем. моделирование. Т. 12, № 3, с. 97. 2000

Учебное издание

*Елизарова Татьяна Геннадьевна*

ЛЕКЦИИ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
В ДИНАМИКЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Оригинал-макет: Елизарова Т.Г.

Подписано в печать 4.10.2005. Формат А5  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 14 п.л.

Тираж 100 экз. Зак.№

Физический факультет МГУ

119992, ГСП-92, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова

Отпечатано в отделе оперативной печати  
физического факультета МГУ