

Дорогому Николаю
с любовью и
нежностью.

Л. М. ГОРБУНОВ

Горбун

12.06.90г

ВВЕДЕНИЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ ПЛАЗМЫ

Москва
Издательство Университета дружбы народов
1990

Рецензенты:

д-р. физ.-мат. наук, проф. А.А.Рухадзе,

д-р. физ.-мат. наук В.Т.Тихончук

Горбунов Л.М.

Г 67 Введение в электродинамику плазмы: Учеб. пособие. - М.:

Изд-во УДН, 1990. - 128 с.

ISBN 5-209-00321-3

Пособие посвящено систематическому изложению основ линейной и нелинейной электродинамики плазмы. Наряду с традиционными вопросами линейной электродинамики в пособии рассматриваются основные положения нелинейной электродинамики плазмы, сформулированные и развитые в последние годы (нелинейное взаимодействие волн, параметрические неустойчивости, ток ускорения, дондормоторные силы, плазменная турбулентность и др.).

Представленный в учебном пособии материал является составной частью спецкурса "Основы теории плазмы", читаемого студентами-физиками старших курсов, аспирантам и преподавателям.

Подготовлено на кафедре экспериментальной физики.

Г 1604120000 - 085

093(02) - 90

87-90

ББК 22.333.2

ISBN 5-209-00321-3

© Издательство Университета
дружбы народов, 1990 г.

ЧАСТЬ I. ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ ПЛАЗМЫ

ГЛАВА I. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕД

§1. Уравнения электромагнитного поля

Электромагнитное поле в материальной среде удовлетворяет уравнениям, которые обычно называют уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0,\end{aligned}\quad (I.1)$$

где $\vec{E}$ - вектор напряженности электрического поля; $\vec{B}$ - вектор магнитной индукции; $\vec{j}$ - плотность электрического тока; ρ - плотность электрического заряда. Все эти величины являются функциями координат и времени (см. математическое приложение №1).

Уравнения (I.1) в математической форме выражают экспериментально установленные законы, в соответствии с которыми изменяются электрические и магнитные поля в среде. Чтобы понять, какие законы соответствуют уравнениям (I.1), рассмотрим интегральные соотношения, вытекающие из этих уравнений. Для этого проинтегрируем первое уравнение по некоторой поверхности S

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} \, d\vec{S} = -\frac{1}{c} \int_S d\vec{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

где $d\vec{S}$ - элемент поверхности. Воспользовавшись формулой (П.1.3), перепишем это соотношение в виде

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} \, d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \, d\vec{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где L - контур, ограничивающий поверхность S ; $\Phi = \int_S \vec{B} \, d\vec{S}$ - поток магнитной индукции; $\mathcal{E}$ - электродвижущая сила.

Таким образом, при изменении со временем потока магнитной индукции через поверхность S возникает электродвижущая сила в контуре L , ограничивающим эту поверхность (закон индукции Фарадея).

Аналогичным образом проинтегрируем второе уравнение системы (I.1) $\oint_L \vec{B} \, d\vec{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \, d\vec{S} + 4\pi \int_S \vec{j} \, d\vec{S}$.

Циркуляция магнитной индукции по контуру определяется током смещения (первое слагаемое справа) и полным током (ток проводимости), протекающим через поверхность S (второе слагаемое справа). По существу второе уравнение в системе (I.1) является обобщенной формой закона Био и Савара.

Последние два уравнения системы (I.1) проинтегрируем по произвольному объему V . С помощью формулы (П.1.4) найдем

$$\int_V d\vec{r} \operatorname{div} \vec{E} = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho d\vec{r} = 4\pi Q,$$

$$\int_V d\vec{r} \operatorname{div} \vec{B} = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Первое из полученных соотношений является обобщением закона Кулона для распределенного в пространстве заряда. Действительно, если выбранный объем является сферой, то в сферической системе координат $d\vec{S} = r^2 d\Omega \vec{n}$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла; $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности сферы. Поэтому для точечного заряда Q , находящегося в центре сферы, напряженность поля на расстоянии r равна $E = Q/r^2$. Это и есть обычная формула для закона Кулона.

Последнее интегральное соотношение для индукции магнитного поля есть отражение того факта, что свободных магнитных зарядов не существует.

Входящие в уравнения (I.1) плотности тока $\vec{j}$ и заряда ρ не являются независимыми и связаны между собой. Чтобы установить эту связь, вычислим дивергенцию от второго уравнения системы (I.1). С помощью формулы (П.1.1) найдем

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right).$$

Таким образом, величины $\vec{j}$ и ρ связаны соотношением, которое называется уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (I.2)$$

Физический смысл соотношения (I.2) легко понять, если его проинтегрировать по некоторому объему V . Используя формулу

(П.1.4), получим $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\vec{r} = \frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_S \vec{j} d\vec{S}$. Изменение заряда в объеме со временем определяется током, протекающим через ограничивающую объем поверхность.

Часто вместо (I.1) используют другую форму записи уравнений электромагнитного поля в среде. Для этого разделяют величины $\vec{j}$ и ρ на два слагаемых

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}', \quad \rho = \rho_0 + \rho',$$

где $\vec{j}_0$, ρ_0 — внешние (сторонние) токи и заряды, которые являются заданными функциями координат и времени и не зависят от полей; $\vec{j}'$, ρ' — индуцированные (связанные) токи и заряды, которые возникают в среде под действием полей и через них выражаются. Вместо индуцированных зарядов и токов вводят величину $\vec{D}$, которую называют вектором электрической индукции

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \vec{j}'(\vec{r}, t'). \quad (I.3)$$

В результате исключения величин $\vec{j}'$ и ρ' из уравнений (I.1) их представляют в виде

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0, \quad (I.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho_0,$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Для того чтобы система уравнений (I.1) (или (I.4)) была замкнута, нужно установить связь между индуцированными в среде токами (или электрической индукцией) и напряженностью электрического поля

$$\vec{j}' = \vec{j}'(\vec{E}), \quad \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}). \quad (I.5)$$

Соотношения (I.5) называются материальными уравнениями и их вид зависит от свойств конкретной среды, от модели, которая используется для ее описания. Заметим, что достаточно установить связь $\vec{j}'$ (или $\vec{D}$) с напряженностью электрического поля $\vec{E}$, ибо магнитная индукция сама выражается через это поле. Помимо этого не нужно отдельного соотношения для индуцированных зарядов, поскольку последние связаны с плотностью тока $\vec{j}'$ уравнением непрерывности.

§2. Линейная электродинамика

Достаточно широкий круг вопросов можно рассмотреть, не привлекая модели конкретной среды, а используя общие соображения о виде материальных уравнений. Простейшее соображение такого рода состоит в том, что связь между индуцированным током (или индукцией) и напряженностью электрического поля является линейной. Электродинамика, базирующаяся на таких материальных уравнениях, называется линейной электродинамикой.

Наиболее простыми являются линейные материальные уравнения вида

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (2.1)$$

Для простоты записи штрих у плотности тока опущен. Величина σ называется коэффициентом электропроводности (или проводимостью); ϵ — диэлектрической постоянной (или проницаемостью). Величины σ и ϵ считаются постоянными. Из соотношений (2.1) следует, что векторы $\vec{j}$ и $\vec{B}$ направлены так же, как и вектор $\vec{E}$. Это значит, что рассматриваемая среда не имеет никаких выделенных направлений, связанных с ее структурой. Такие среды, у которых свойства не зависят от направления, называются изотропными.

Несколько более сложный вид имеет материальное уравнение в анизотропных средах, свойства которых различны в разных направлениях. В анизотропной среде направления индуцируемого поля тока (а также вектор индукции) не обязательно совпадает с направлением поля $\vec{E}$. В этом случае связь между векторами $\vec{j}$ (или $\vec{B}$) и $\vec{E}$ выражается через тензоры

$$j_i(\vec{r}, t) = \sigma_{ij} E_j(\vec{r}, t), \quad B_i(\vec{r}, t) = \epsilon_{ij} E_j(\vec{r}, t). \quad (2.2)$$

где σ_{ij} , ϵ_{ij} — соответственно тензоры электропроводности и диэлектрической проницаемости. Смысл соотношений (2.2) заключается в том, что направления векторов $\vec{j}$ и $\vec{B}$ в общем случае не совпадают с направлением вектора $\vec{E}$. Так, например, компонента поля E_x может вызывать ток не только в направлении Ox , но и в направлениях Oy и Oz (рис. 1).

Следующим шагом в обобщении линейного материального уравнения является учет запаздывания во времени реакции среды на действие электрического поля. Очевидно, что мгновенное измене-

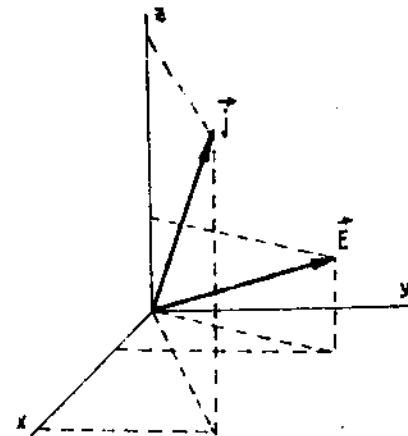


Рис. 1

ние поля со временем не может сопровождаться мгновенным током или индукцией. Инерция зарядов, создающих ток, приводит к запаздыванию тока. Эту инерционность можно учесть, введя интегральную связь поля и тока (индукции),

$$j_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \sigma_{ij}(t-t', \vec{r}) E_j(t', \vec{r}), \quad B_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \epsilon_{ij}(t-t', \vec{r}) E_j(t', \vec{r}). \quad (2.3)$$

Запаздывание свойств среды называется временной (или частотной) дисперсией. Нижний предел в выражениях (2.3) выбран из принципа причинности — вклад в ток (или индукцию) могут давать только моменты времени, предшествующие данному. Разностная зависимость ядер интегральных соотношений (2.3) является следствием неизменности свойств среды во времени (стационарная среда). Поэтому вклад более ранних моментов времени в значение тока, который имеется в данный момент времени, зависит лишь от того, на сколько эти моменты отстоят от данного момента t , но не зависит явно от t . Тем самым никакой момент времени ничем не выделен и вклад предыдущих моментов времени зависит только от времени запаздывания, но не зависит от самого значения t . И, наконец, возможна нелокальность свойств среды, когда

значение тока (или индукции) зависит от напряженности поля не только в данной точке, но и в других точках. Это свойство называется пространственной дисперсией, и соответствующие материальные уравнения имеют вид

$$j_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \epsilon_{ij}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') E_j(t', \vec{r}'), \quad (2.4)$$

$$D_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \epsilon_{ij}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') E_j(t', \vec{r}').$$

Разностная зависимость от координат в ядрах интегральных соотношений (2.4) связана с независимостью свойств среды от координат (однородная среда). В этом случае вклад соседних точек в значение тока (индукции) в данной точке зависит только от расстояния до данной точки, но не зависит от положения этой точки.

Для перехода от общих выражений (2.4) к формулам (2.1), в которых не учитывается дисперсия, следует положить

$$\epsilon_{ij}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') = \epsilon \delta_{ij} \delta(t-t') \delta(\vec{r}-\vec{r}'), \quad \epsilon_{ij}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') = \epsilon \delta_{ij} \delta(t-t') \delta(\vec{r}-\vec{r}').$$

§3. Тензор комплексной диэлектрической проницаемости

Рассмотрим материальные уравнения (2.4) для случая, когда поле $\vec{E}$ является полем плоской монохроматической волны. Останемся коротко на формах записи такого поля.

Наиболее очевидной является форма записи через гармонические функции

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi)}, \quad (3.1)$$

где $\vec{E}_0$ — амплитуда поля; φ — начальная фаза, $\vec{k}$ — волновой вектор; ω — круговая частота. Аргумент функции в формуле (3.1) называется фазой. Поверхность постоянной фазы в пространстве определяет волновой фронт. В данном случае эта поверхность является плоскостью (плоская волна). Если направление вектора одинаково во всем пространстве, то говорят, что волна имеет линейную поляризацию.

Формулу (3.1) удобно записать в более компактном виде, учтя соотношение $\cos \varphi = \operatorname{Re}(e^{i\varphi})$ и введя комплексную амплитуду $\vec{E}(\omega, \vec{k}) = \vec{E}_0 e^{i\varphi}$. Тогда, опустив знак Re , поле волны представим в форме

$$\vec{E} = \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (3.2)$$

Именно эта форма записи является наиболее употребимой. Используя ее, следует помнить, что амплитуда является комплексной и содержит информацию о начальной фазе волны (о фазе, которую имела волна в момент времени $t=0$ в точке $\vec{r}=0$).

Подставим поле (3.2) в выражение для индукции (2.4). Введем новые переменные интегрирования $\tau = t - t'$, $\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$. В результате найдем

$$D_i(\vec{r}, t) = E_j(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}),$$

где использовано обозначение

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \int_0^\infty d\tau \int d\vec{r} \epsilon_{ij}(\tau, \vec{r}) e^{i\omega\tau - i\vec{k}\vec{r}} \quad (3.3)$$

Выражение (3.3) называют тензором комплексной диэлектрической проницаемости. Если ввести комплексную амплитуду вектора электрической индукции

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}},$$

то связь между комплексными амплитудами электрического поля и индукции оказывается весьма простой

$$D_i(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}). \quad (3.4)$$

В изотропной среде и в пренебрежении пространственной дисперсией $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \epsilon(\omega) \delta_{ij}$. Используя это выражение, получим

$$\vec{D}(\omega, \vec{k}) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega, \vec{k}).$$

Если бы величина $\epsilon(\omega)$ была действительна, то начальная фаза вектора индукции совпадала с начальной фазой вектора напряженности электрического поля. Наличие мнимой части у величины

$\epsilon(\omega)$ приводит к тому, что начальные фазы этих векторов не совпадают. Таким образом, мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ определяет сдвиг фазы между вектором напряженности электрического поля и вектором индукции.

Аналогичное рассмотрение первого материального уравнения в формуле (2.4) приводит к соотношению

$$j_i(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}), \quad (3.5)$$

где $\hat{b}_{ij}(\omega, \vec{k})$ — комплексный тензор электропроводности.

Между тензорами ϵ_{ij} и $\hat{b}_{ij}$ имеется простая связь, которая следует из определения (I.3). Если в эту формулу подставить электрическое поле (3.2) и использовать соотношения (3.4) и (3.5), то получим

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \hat{b}_{ij}(\omega, \vec{k}). \quad (3.6)$$

При выводе этого соотношения предполагается, что поле волны отсутствовало при $t \rightarrow -\infty$.

Из определения комплексной диэлектрической проницаемости (3.3) следует ряд свойств:

$$\epsilon_{ij}^*(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}(-\omega, -\vec{k}), \quad \epsilon_{ij}'(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}'(-\omega, -\vec{k}), \quad \epsilon_{ij}''(\omega, \vec{k}) = -\epsilon_{ij}''(-\omega, -\vec{k}),$$

где ϵ_{ij}' и ϵ_{ij}'' — соответственно действительная и мнимая части тензора.

§4. Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн

Рассмотрим уравнения электромагнитного поля в форме (I.4), считая, что внешних токов и зарядов нет. Очевидно, что тогда эти уравнения описывают такие поля, которые могут существовать в среде и не поддерживаться внешними источниками. Любое поле можно представить как набор волн (разложение Фурье) (см. приложение № 2). В рамках линейной электродинамики эти волны распространяются независимо друг от друга (принцип суперпозиции). Поэтому рассмотрим поле в виде одной волны.

Из первых двух уравнений системы (I.4) следует

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.1)$$

Рассмотрим напряженность электрического поля в виде плоской монохроматической волны $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$, когда индукция связана с полем соотношением (3.4). Проведем операцию дифференцирования, из уравнения (4.1) получаем

$$[\vec{k} [\vec{k} \vec{E}_0]] + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_0 = 0.$$

Используя известную формулу для двойного векторного произведения $[\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{a} \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \vec{b})$, перепишем это выражение в виде

$$k_i (\vec{k} \vec{E}_0)_i - k^2 E_{0i} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_{0j} = 0.$$

Стоящее в фигурной скобке выражение легко преобразовать к форме, когда величина E_{0j} является общим множителем

$$\left(k_i k_j - k^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \right) E_{0j} = 0. \quad (4.2)$$

Формула (4.2) соответствует сокращенной форме записи системы линейных однородных алгебраических уравнений для комплексной амплитуды $\vec{E}_0$. Условием существования у такой системы не нулевых решений является равенство нулю определителя (детерминанта) из коэффициентов этой системы

$$\left\| \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \right\| = 0. \quad (4.3)$$

Зная явное выражение для тензора ϵ_{ij} и вычисля определитель (4.3), получим уравнение, связывающее частоту волны ω с волновым вектором $\vec{k}$. Это уравнение называется дисперсионным уравнением. Решение уравнения $\omega(\vec{k})$ называется законом дисперсии для волны или дисперсионным соотношением. Если имеется несколько решений дисперсионного уравнения, то говорят, что имеется несколько ветвей волн.

Таким образом, в любой среде могут существовать волны, не поддерживаемые внешними источниками, которые часто называют собственными волнами. Для этих волн частота, характеризующая изменение электромагнитного поля со временем, связана с длиной волны, определяющей изменение поля волны в пространстве. При свободном распространении волн изменения их полей в пространстве и во времени происходят не независимо. Они связаны между собой дисперсионным уравнением.

Рассмотрим еще несколько форм записи уравнения (4.3).

Введем вектор поляризации волны (единичный вектор, направленный вдоль вектора напряженности электрического поля)

$$\vec{e} = \vec{E}_0 / (E_0 e^{i\omega t}) \quad e_i = E_{0i} / (E_0 e^{i\omega t}) \quad (4.4)$$

Умножим векторное уравнение (4.2) на e_i . В результате получим еще одну форму записи дисперсионного уравнения

$$\mathfrak{D}(\omega, \vec{k}) = (\vec{k} \vec{e})^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (e_i \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) e_j) = 0. \quad (4.5)$$

§5. Электромагнитные волны в изотропной среде

Для исследования различных типов электромагнитных волн в материальной среде необходимо знать тензор комплексной диэлектрической проницаемости. Вид этого тензора в общем случае определяется свойствами среды. Однако в случае изотропных сред можно сделать достаточно общие заключения о типах возможных электромагнитных волн без использования конкретного выражения для тензора ϵ_{ij} .

В изотропной среде все направления эквивалентны и ни одно из них не выделено по отношению к другому. Если не учитывать пространственной дисперсии (нелокальности свойств среды), то тензор комплексной диэлектрической проницаемости не зависит от волнового вектора $\vec{k}$. Следовательно, в изотропной среде и в пренебрежении пространственной дисперсией тензор комплексной диэлектрической проницаемости можно записать в виде $\epsilon_{ij} = \epsilon(\omega) \delta_{ij}$, где $\epsilon(\omega)$ — комплексная скалярная величина. Это единственно возможный вид тензора второго ранга, который не зависит ни от каких векторов.

Если среда изотропная, но учитывается пространственная дисперсия, то для образования тензора второго ранга можно использовать также компоненты вектора $\vec{k}$. Наиболее общий вид тензора второго ранга, построенного из компонент вектора $\vec{k}$, следующий:

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = a(\omega, k) \frac{k_i k_j}{k^2} + b(\omega, k) \delta_{ij},$$

где a, b — скалярные комплексные функции, зависящие от длины вектора $\vec{k}$, но не от его направления. Обычно вместо постоянных a и b используют другие коэффициенты, записывая тензор в виде

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon^{tt}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon^l(\omega, k), \quad (5.1)$$

где функции ϵ^{tt} и ϵ^l называют соответственно поперечной и продольной диэлектрической проницаемостью. Такие две постоянные возникают только при учете пространственной дисперсии. Если ее не учитывать, то продольная и поперечная проницаемости равны друг другу и $\epsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij} \epsilon^{tt} = \delta_{ij} \epsilon^l$.

Подставляя формулу (5.1) в дисперсионное уравнение (4.5), получим

$$\left(\epsilon^{tt} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{e})^2}{k^2} \right) + \frac{(\vec{k} \vec{e})^2}{k^2} \epsilon^l = 0.$$

Рассмотрим поперечные электромагнитные волны. В этом случае вектор поляризации $\vec{e}$ перпендикулярен вектору $\vec{k}$, направление которого в изотропной среде совпадает с направлением распространения волны. Для этих волн $(\vec{k} \vec{e})^2 = 0$ и из приведенной выше формулы получаем

$$\epsilon^{tt}(\omega, k) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2}. \quad (5.2)$$

Соотношение (5.2) определяет закон дисперсии для поперечных волн в изотропной среде. В этих волнах помимо электрического имеется магнитное поле. Его величина, согласно первому из уравнений (1.4), выражается через напряженность электрического поля $\vec{B} = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \vec{E}]$. Отсюда видно, что магнитное поле направлено перпендикулярно как к электрическому полю, так и к волновому вектору.

Рассмотрим теперь продольные волны, в которых вектор напряженности электрического поля параллелен вектору $\vec{k}$ и направлен вдоль распространения волны. Для этих волн $(\vec{k} \vec{e})^2 = k^2$ и закон дисперсии имеет вид

$$\epsilon^l(\omega, k) = 0. \quad (5.3)$$

Очевидно, что в продольных волнах нет магнитного поля. Это следует из приведенного выше выражения для $\vec{B}$. Часто при изучении этих волн используют не вектор напряженности электрического поля, а скалярный потенциал ϕ . Поскольку $\text{rot} \vec{E} = 0$, то согласно формуле (П.1.1) вектор напряженности электрического поля можно представить в виде $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$. Поэтому эти волны часто называют потенциальными.

Заметим, что дисперсионное уравнение для продольных волн можно получить, используя не полную систему уравнений электромагнитного поля, а лишь одно из них $\text{div} \vec{D} = 0$. Действительно, для плоской волны в изотропной среде из этого уравнения следует $\vec{k} \vec{D} = k_i \epsilon_{ij} E_j = \epsilon^l E_0 = 0$. Поскольку амплитуда волны предполагается отличной от нуля ($E_0 \neq 0$), то $\epsilon^l = 0$.

§6. Начальная и граничная задачи в электродинамике

Дисперсионное уравнение устанавливает связь между пространственными и временными масштабами изменения полей в элект-

ромагнитных волнах. При этом можно искать решение уравнения относительно частоты $\omega = \omega(\vec{k})$, считая независимой переменной волновой вектор $\vec{k}$. А можно, наоборот, считать независимой переменной частоту ω и искать $\vec{k}(\omega)$. Таким двум возможностям соответствуют постановки двух различных физических задач.

Обсудим сначала такую постановку, когда задан волновой вектор $\vec{k}$, и из дисперсионного уравнения определяется соответствующая частота $\omega(\vec{k})$. Этой математической постановке соответствует предположение о том, что в начальный момент времени $t=0$ во всем пространстве задано электромагнитное поле с пространственным периодом $\lambda = 2\pi/k$. Решение дисперсионного уравнения дает ответ на вопрос о том, как это поле будет изменяться со временем. Естественно называть такую постановку задачей начальной.

Поскольку в дисперсионном уравнении тензор диэлектрической проницаемости является комплексным, то можно думать, что и решения уравнения также будут комплексными ($\omega = \omega' + i\omega''$). Это значит, что со временем поле в волне изменяется по закону $\exp(i\omega t) = e^{-\omega'' t} e^{i\omega' t}$. Действительная часть частоты определяет периодическое во времени изменение поля, а мнимая часть — характеризует монотонное изменение поля. Если $\omega'' < 0$, то со временем ($t \rightarrow +\infty$) поле с данным волновым вектором исчезнет и начальная волна затухнет. Принято говорить, что в этом случае среда устойчива по отношению к рассматриваемому начальному возмущению. Если же $\omega'' > 0$, то с ростом t начальное поле волны нарастает и говорят, что среда неустойчива по отношению к начальному возмущению с данным волновым вектором.

Если затухание или нарастание волны медленное ($\omega'' \ll \omega'$), то можно решить дисперсионное уравнение и найти ω'' в достаточно общем виде. Покажем это на примере изотропной среды. Начнем с дисперсионного уравнения для поперечных волн (5.2). Представим поперечную диэлектрическую проницаемость в виде $\epsilon^{tt} = \epsilon^{tt'} + i\epsilon^{tt''}$ ($\Re \epsilon^{tt} = \epsilon^{tt'}$, $\Im \epsilon^{tt} = \epsilon^{tt''}$) и $\omega = \omega' + i\omega''$. Подставим эти соотношения в уравнение (5.2)

$$c^2 k^2 = (\omega' + i\omega'')^2 \left[\epsilon^{tt'}(\omega' + i\omega'', k) + i\epsilon^{tt''}(\omega' + i\omega'', k) \right].$$

Поскольку $\omega'' \ll \omega'$, то можно разложить все входящие в это равенство величины в ряд Тейлора и ограничиться первыми членами разложения

$$c^2 k^2 \approx (\omega'^2 + 2i\omega'\omega'') \left[\epsilon^{tt'}(\omega', k) + i\omega'' \frac{\partial \epsilon^{tt'}}{\partial \omega'} + i\epsilon^{tt''}(\omega', k) - \omega'' \frac{\partial \epsilon^{tt''}}{\partial \omega'} \right]$$

Величина $\epsilon^{tt''}$ определяет затухание (нарастание) волны. Будем считать ее малой в смысле $\epsilon^{tt''} \ll \epsilon^{tt'}$ и пренебрежем последним слагаемым в квадратной скобке справа. Приравнявая действительные и мнимые части в оставшемся выражении, найдем

$$c^2 k^2 \approx \omega'^2 \epsilon^{tt'}(\omega', k), \quad (6.1)$$

$$0 \approx 2\omega'\omega'' \epsilon^{tt'}(\omega', k) + \omega'^2 \omega'' \frac{\partial \epsilon^{tt'}}{\partial \omega'} + \omega'^2 \epsilon^{tt''}(\omega', k).$$

Первое из этих соотношений является уравнением для определения действительной части частоты ω' . Второе равенство определяет величину ω'' , для которой часто используют обозначение

$$\omega'' = \gamma = - \frac{\omega'^2 \epsilon^{tt''}(\omega', k)}{\frac{\partial}{\partial \omega'} [\omega'^2 \epsilon^{tt'}(\omega', k)]}. \quad (6.2)$$

Если $\gamma < 0$ и начальное возмущение со временем затухает, то величины γ называют декрементом. Если $\gamma > 0$ и начальное возмущение нарастает со временем, то величины γ называют инкрементом.

Аналогичные соотношения можно получить и для продольных волн. Действительная часть частоты определяется уравнением

$$\epsilon^{ll'}(\omega', k) = 0, \quad (6.3)$$

а декремент (инкремент) равен

$$\omega'' = \gamma = - \frac{\epsilon^{ll''}(\omega', k)}{\partial \epsilon^{ll'}/\partial \omega'}. \quad (6.4)$$

Зачастую электромагнитные поля в среде создаются локализованными в пространстве источниками. Наиболее наглядным примером такого источника является граница, на которую падает электромагнитная волна. Задача состоит в том, чтобы по заданному на границе полю найти поле внутри среды, где источники отсутствуют (граничная задача). При этом в рамках линейной электродинамики справедлив принцип суперпозиции и каждая из волн распространяется независимо от других волн. Поэтому достаточно рассматривать распространение от границы лишь одной волны с заданной частотой ω .

При решении граничной задачи в дисперсионном уравнении следует считать частоту ω действительной известной величиной

и определять волновой вектор $\vec{k}$. При этом из одного уравнения можно найти всего лишь одну компоненту вектора $\vec{k}$, а остальные компоненты также следует считать заданными. Ответ на вопрос о том, какие компоненты волнового вектора заданы, а какую нужно найти из дисперсионного уравнения, зависит от конкретных граничных условий.

Рассмотрим наиболее характерный пример. Пусть на плоскую границу среды наклонно падает из вакуума электромагнитная волна (рис. 2). Поле волны внутри среды изменяется по закону $\exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y)$. Из условия непрерывности поля на границе

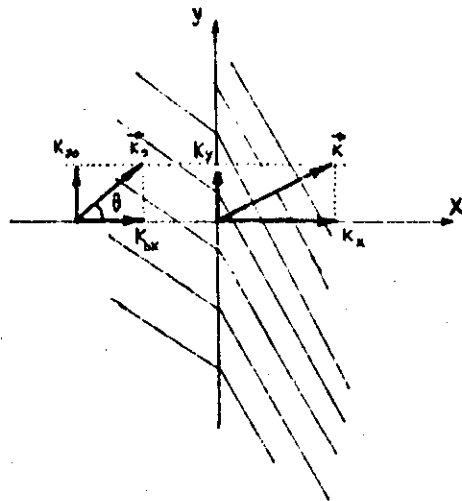


Рис. 2

следует, что периодичность его изменения вдоль оси OY, характеризуемая компонентой k_y , одинакова как в среде, так и вне ее. Поэтому величину k_y следует считать равной k_{y0} , где $\vec{k}_0$ — волновой вектор в вакууме. Эту компоненту легко выразить через частоту ω и угол падения θ . Согласно уравнению (5.2) в вакууме ($\epsilon^{tt} = 1$) справедливо соотношение $k_0 = \omega/c$. Следовательно, $k_{y0} = k_0 \sin \theta = \frac{\omega}{c} \sin \theta = k_y$.

Для определения величины k_x , характеризующей изменение поля волны в среде в перпендикулярном к границе направлении, используем уравнение (5.2). Как и в случае начальной задачи, будем считать затухание волны слабым ($\epsilon^{tt''} \ll \epsilon^{tt'}$). Представим компоненту k_x в виде $k_x = k'_x + ik''_x$, где $k''_x \ll k'_x$. Как и в случае начальной задачи, разложим входящие в дисперсионное соотношение величины в ряд и ограничимся линейными по малым величинам слагаемыми. В результате для определения действительной части компоненты k'_x получим

$$c^2(k_y^2 + k_x'^2) \approx \omega^2 \epsilon^{tt'}(\omega, k_y, k'_x) \quad (6.5)$$

Величина k'_x определяет периодическое изменение поля вдоль оси OX. Мнимая часть компоненты k''_x характеризует монотонную зависимость поля от координаты X и определяется соотношением

$$k''_x = \chi = - \frac{\epsilon^{tt''}}{\frac{\partial}{\partial k'_x} \left(\epsilon^{tt'} - \frac{c^2 k_x'^2}{\omega^2} \right)} \quad (6.6)$$

Если $\chi > 0$, то амплитуда волны уменьшается по мере проникновения ее в среду ($e^{i(k'_x + ik''_x)x} = e^{ik'_x x} e^{-\chi x}$). В этом случае величину χ называют коэффициентом затухания. Если $\chi < 0$, то при удалении от границы амплитуда волны возрастает и величину χ называют коэффициентом усиления. Среда, в которой имеет место усиление волн, называют активной.

Соотношения, подобные (6.5) и (6.6), легко вывести и для продольных волн

$$\epsilon^{ll'}(\omega, k_y, k'_x) = 0, \quad k''_x = - \frac{\epsilon^{ll''}}{\frac{\partial \epsilon^{ll'}}{\partial k'_x}} \quad (6.7)$$

Между величиной χ , определяющей медленное затухание (нарастание) волн во времени, и величиной χ , характеризующей изменение амплитуды волны в пространстве, имеется простая связь. Рассмотрим ее на примере поперечных волн. Формула (6.5) в неявном виде устанавливает связь между ω' и k'_x . Используя правило дифференцирования функций, заданных в неявном виде, из (6.5) получим

$$\frac{d\omega}{dk'_x} = - \frac{\frac{\partial}{\partial k'_x} \left(\epsilon^{tt'} - \frac{c^2 k_x'^2}{\omega^2} \right)}{\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\omega^2 \epsilon^{tt'} \right)}$$

Из сравнения полученного выражения для χ с формулой (6.2) следует

$$\chi = - \frac{\gamma}{d\omega/dk_1} \quad (6.8)$$

Вектор с компонентами $d\omega/dk_i$ называется групповой скоростью и записывается сокращенно в виде

$$\vec{v}(r) = \frac{d\omega}{d\vec{k}} \quad (6.9)$$

Таким образом, в соотношение (6.8) в качестве коэффициента связи между величинами χ и γ входит компонента групповой скорости в направлении оси OX и $\chi = -\gamma \cdot v_x(r)$.

В изотропной среде в пренебрежении временной и пространственной дисперсией ($\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$) из формулы (4.5) следует $\Phi = (\vec{k} \vec{e})^2 - k^2 + \frac{\omega}{c^2} \epsilon = 0$. Отсюда согласно определению (6.9) получаем выражение для групповой скорости

$$\vec{v}(r) = - \frac{\partial \Phi / \partial \vec{k}}{\partial \Phi / \partial \omega} = \frac{\omega (\vec{k} - \vec{e} (\vec{k} \vec{e}))}{k^2 - (\vec{k} \vec{e})^2} \quad (6.10)$$

В более общем случае выражение для групповой скорости рассмотрено ниже.

§7. Закон сохранения энергии (среда без дисперсии).

Закон сохранения энергии является одним из фундаментальных законов физики. Он имеет место и для электромагнитного поля. Наиболее просто этот закон вывести и проанализировать, если не учитывать временную и пространственную дисперсию в материальном уравнении.

Рассмотрим систему уравнений (1.4) в отсутствие сторонних токов и зарядов ($\rho_0=0$, $\vec{j}_0=0$). Умножим первое уравнение на $\vec{E}$, второе - на $\vec{B}$ и вычтем из второго первое. В результате получим

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{1}{c} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Используем известное соотношение

$$-\operatorname{div} [\vec{a} \vec{b}] = \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b} - \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a}$$

и перепишем полученное выражение в следующем виде:

$$\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\vec{E} \vec{B}] + \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (7.1)$$

Если пренебречь дисперсией и считать среду изотропной, то можно использовать материальное уравнение (2.1). Формула (7.1) преобразуется к виду

$$\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\vec{E} \vec{B}] + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (B^2 + \epsilon E^2) = 0. \quad (7.2)$$

Это соотношение и представляет закон сохранения энергии в среде без дисперсии. Величина $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{B}]$ называется плотностью потока энергии или вектором Умова-Фойнтинга, $W = \frac{1}{8\pi} (B^2 + \epsilon E^2)$ - плотность энергии. С помощью таких обозначений формула (7.2) записывается в виде

$$\operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (7.2')$$

Чтобы понять смысл закона сохранения энергии и введенных при его формулировке названий, проинтегрируем соотношение (7.2') по некоторому объему V и используем формулу (П.1.4)

$$\frac{c}{4\pi} \oint_S d\vec{s} [\vec{E} \vec{B}] = \oint_S d\vec{s} \vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V d\vec{r} W.$$

Такая интегральная форма записи закона сохранения показывает, что изменение полной энергии в объеме V со временем связано с притоком (или оттоком) этой энергии через поверхность, ограничивающую объем. Очевидно, что величина $\vec{S}$ определяет поток энергии.

Рассмотрим закон сохранения энергии для электромагнитной волны, когда поле имеет вид (3.2). Согласно первому уравнению системы (1.4) такому электрическому полю соответствует вектор магнитной индукции $\vec{B} = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \vec{E}] \exp(-i\omega t + i\vec{k} \vec{r})$. Поскольку электрическое и магнитное поля в каждой точке среды периодически изменяются со временем, то имеет смысл рассматривать закон сохранения энергии для величин, усредненных по периоду. Процедура усреднения обозначается скобками $\langle \dots \rangle$ и предполагает выполнение следующей операции: $\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \dots$. Средний вектор плотности потока энергии равен $\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle [\operatorname{Re}(\vec{E} \vec{e}^{-i\omega t + i\vec{k} \vec{r}}) \cdot \operatorname{Re}(\frac{c}{\omega} [\vec{k} \vec{E}] e^{i\omega t + i\vec{k} \vec{r}})] \rangle = \frac{c^2}{8\pi\omega} [\vec{E} [\vec{k} \vec{E}]]$. Если раскрыть двойное векторное произведение и использовать вектор поляризации волны, то получим

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c^2}{8\pi\omega} (\vec{k} - \vec{e} (\vec{k} \vec{e})) |E|^2 \quad (7.3)$$

Аналогично вычисляется средняя плотность энергии

$$\langle W \rangle = \frac{1}{16\pi} (\epsilon |E|^2 + |B|^2) = \frac{1}{16\pi} \left(\epsilon + \frac{c^2}{\omega^2} [\vec{k}\vec{E}]^2 \right) |E|^2$$

В этом выражении первое слагаемое определяет плотность энергии электрического поля, а второе — магнитного; их можно объединить с помощью закона дисперсии (4.5) для волн в изотропной среде ($\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$). В результате оказывается, что для поперечных волн плотность энергии электрического поля равна плотности энергии магнитного поля, так что

$$\langle W \rangle = \frac{\epsilon}{8\pi} |E|^2 \quad (7.4)$$

Между величинами $\langle \vec{S} \rangle$ и $\langle W \rangle$ имеется простая связь. Используем выражения (7.3), (7.4) и формулу (6.10). В результате получим

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c^2}{8\pi\omega} \frac{\vec{k} - \vec{e}(\vec{k}\vec{e})}{\epsilon\omega/c^2} \frac{\epsilon\omega}{c^2} |E|^2 = \vec{v}^{(r)} \langle W \rangle. \quad (7.5)$$

Это соотношение показывает, что энергия волны переносится в пространстве с групповой скоростью. Используя формулу (7.5), перепишем уравнение (7.2') в виде

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} + (\vec{v}^{(r)} \vec{\nabla}) \langle W \rangle = 0. \quad (7.6)$$

Таким образом, в среде без дисперсии, где нет поглощения энергии, закон сохранения энергии устанавливает, что изменение энергии в объеме со временем происходит только за счет втекания или вытекания энергии через поверхность, ограничивающую этот объем.

§8. Потери энергии электромагнитного поля в среде

Временная дисперсия связана с запаздыванием тока (или индукции) при изменении электрического поля в среде. Для электромагнитной волны это запаздывание выражается в том, что между полем и током (индукцией) имеется сдвиг фазы, который в изотропной среде (см. § 3) определяется мнимой частью диэлектрической проницаемости ϵ'' . Но именно мнимая часть диэлектрической проницаемости в изотропной среде определяет и затухание волн (см. § 6). Таким образом, из-за запаздывания реакции среды электромагнитное поле совершает работу и возникает потеря его энергии.

Чтобы найти работу, которую совершает поле волны в единицу времени в единице объема, рассмотрим в формуле (7.1) среднее

значение от слагаемого

$$Q = \frac{1}{4\pi} \left\langle \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\rangle.$$

Используем выражения для поля и индукции в действительной форме ($\vec{E} = Re \vec{E} e^{i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$, $\vec{D} = Re \vec{D} e^{i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$) и после усреднения получим

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi} (\vec{E} \vec{D}^* - \vec{E}^* \vec{D}).$$

Подставляя материальное уравнение (3.4) и производя замену индексов в первом слагаемом, найдем для потерь энергии электромагнитной волны в единице объема среды в единицу времени следующее выражение:

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi} (E_i \epsilon_{ij}^* E_j^* - E_i^* \epsilon_{ij} E_j) = - \frac{i\omega}{8\pi} E_i^* \epsilon_{ij}^A E_j, \quad (8.1)$$

где ϵ_{ij}^A — антиэрмитова часть тензора комплексной диэлектрической проницаемости (см. приложение 3)

$$\epsilon_{ij}^A = \frac{1}{2} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}^*). \quad (8.2)$$

С помощью вектора поляризации соотношение (8.1) можно переписать в виде

$$Q = - \frac{i\omega (\epsilon_i \epsilon_{ij}^A \epsilon_j)}{8\pi} |E|^2 \quad (8.3)$$

Если не учитывать дисперсию ($\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$, $\epsilon'' = 0$), то потери в среде равны нулю.

§9. Уравнения для медленно изменяющихся амплитуд

Затухание (или нарастание) волны приводит к тому, что комплексная амплитуда не постоянна и изменяется во времени и пространстве. При этом поле волны не является монохроматическим, и уже нельзя утверждать, что оно изменяется строго на одной частоте. При разложении в интеграл Фурье поля затухающей (нарастающей) волны возникает не одна гармоника, а целый спектр. Однако, если нарастание или затухание волны происходит медленно во времени или пространстве, то можно ее поле рассматривать в виде (3.2), где комплексная амплитуда $\vec{E}$ является медленной функцией времени и координат в том смысле, что $\frac{1}{\omega} (\partial \vec{E} / \partial t) \ll \vec{E}$ и $(\partial \vec{E} / \partial x_i) \ll k_i \vec{E}$. Такую волну называют квазимонохроматической.

Для описания квазимонохроматических волн можно использовать упрощенную систему уравнений Максвелла — так называемые уравнения для медленно изменяющихся амплитуд, или укороченные уравнения поля. С помощью таких уравнений легко вывести также закон сохранения энергии, в котором последовательно учитывается дисперсия. Изложение этого круга вопросов начнем с вывода соответствующего материального уравнения. Рассмотрим формулу (2.4) для квазимонохроматической волны

$$D_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \varepsilon_{ij}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') E_j(t', \vec{r}') e^{-i\omega t' + i\vec{k}\vec{r}'} \quad (9.1)$$

Произведем замену переменных $\tau = t - t'$, $\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$

$$D_i(\vec{r}, t) = \left\{ \int_0^{\infty} d\tau \int d\vec{r} \varepsilon_{ij}(\tau, \vec{r}) e^{i\omega\tau - i\vec{k}\vec{r}} E_j(t-\tau, \vec{r}-\vec{r}) \right\} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}.$$

Функция ε_{ij} зависит от времени τ , характеризующего запаздывание реакции среды на действие поля, и от расстояния $\vec{r}$, на котором проявляются нелокальные свойства среды. Если запаздывание и нелокальность малы, так что амплитуда волны мало изменяется за время τ и на расстоянии $\vec{r}$, то можно использовать разложение в ряд

$$E_j(t-\tau, \vec{r}-\vec{r}) \approx E_j(t, \vec{r}) - \tau \frac{\partial E_j}{\partial t} - \vec{r} \frac{\partial E_j}{\partial \vec{r}}.$$

Подставим это выражение в материальное уравнение и воспользуемся соотношениями, вытекающими из определения (3.3),

$$i \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})}{\partial \omega} = i \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^{\infty} d\tau \int d\vec{r} \varepsilon_{ij}(\tau, \vec{r}) e^{i\omega\tau - i\vec{k}\vec{r}} = - \int_0^{\infty} \tau d\tau \int d\vec{r} \varepsilon_{ij}(\tau, \vec{r}) e^{i\omega\tau - i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \vec{k}} = \int_0^{\infty} d\tau \int d\vec{r} (-i\vec{r}) \varepsilon_{ij}(\tau, \vec{r}) e^{i\omega\tau - i\vec{k}\vec{r}}.$$

В результате получаем

$$D_i(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} D_i = e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \left\{ \varepsilon_{ij} E_j + i \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_j}{\partial t} - i \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \vec{k}} \frac{\partial E_j}{\partial \vec{r}} \right\}. \quad (9.2)$$

Это и есть материальное уравнение для квазимонохроматической электромагнитной волны, у которой амплитуда изменится медленно со временем и в пространстве.

Из уравнения поля в отсутствие источников следует одно дифференциальное уравнение второго порядка (4.1) для напряжен-

ности электрического поля. Покажем, что в случае квазимонохроматической волны из этого уравнения следует более простое уравнение первого порядка, описывающее изменение амплитуды волны во времени и в пространстве.

Используем формулу для поля квазимонохроматической волны и вычислим производные в формуле (4.1). При этом ограничимся учетом слагаемых, содержащих только первые производные от медленно изменяющейся амплитуды

$$\text{rot } \vec{E} = \{ (\text{rot } \vec{E}) + i [\vec{k} \vec{E}] \} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\text{rot rot } \vec{E} \approx \{ \Delta i [\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{E}] - [\vec{k} [\vec{k} \vec{E}]] \} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial t} \approx -i\omega D_i + \varepsilon_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial t} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}},$$

$$\frac{\partial^2 D_i}{\partial t^2} \approx e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \left\{ -\omega^2 \varepsilon_{ij} E_j - i\omega^2 \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_j}{\partial t} + i\omega^2 \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \vec{k}} \frac{\partial E_j}{\partial \vec{r}} - 2i\omega \varepsilon_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial t} \right\}.$$

Подставляя эти соотношения в исходное уравнение, запишем его в виде

$$i \left\{ \frac{\partial E_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon_{ij}) - \omega^2 \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial k_i} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} - 2c^2 [\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{E}]_i \right\} + c^2 [\vec{k} [\vec{k} \vec{E}]]_i + \omega^2 \varepsilon_{ij} E_j = 0.$$

Ранее было показано, что затухание электромагнитной волны определяется антиэрмитовской частью тензора комплексной диэлектрической проницаемости (см. §8). Поэтому разобьем тензор ε_{ij} на эрмитовскую и антиэрмитовскую части и, учитывая, что затухание волны мало, в слагаемых, пропорциональных производным от амплитуды, оставим только эрмитовскую часть. Тогда, используя вектор поляризации $\vec{e}$, получим

$$i \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon_i \varepsilon_j^* e_j) \frac{\partial E}{\partial t} - \left[\omega^2 \frac{\partial (\varepsilon_i \varepsilon_j^* e_j)}{\partial k_i} + 2c^2 (\varepsilon_i k_i \varepsilon_j - k_i) \right] \frac{\partial E}{\partial x_i} \right\} + \omega^2 \varepsilon_i \varepsilon_j^* e_j E + \{ c^2 [(\vec{k} \vec{e})^2 - k^2] + \omega^2 \varepsilon_i \varepsilon_j^* e_j \} E = 0.$$

Если бы не было затухания волны и амплитуда ее была постоянна, то все слагаемые в полученном выражении, кроме последнего, были бы равны нулю. Последнее же слагаемое определяло закон дисперсии волны

$$\nabla^2 = [(\vec{k} \vec{e})^2 - k^2] + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_i \epsilon_j^* (\omega, \vec{k}) e_j = 0. \quad (9.3)$$

Будем считать, что и в случае, когда есть затухание, закон дисперсии (9.3) выполняется. Тогда равенство нулю оставшихся слагаемых определит уравнение для медленно изменяющейся во времени и пространстве амплитуды волны. Это уравнение удобно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{2(\vec{k} \vec{e}) e_i - 2k_i + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial (\epsilon_i \epsilon_j^* e_j)}{\partial k_i}}{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_i \epsilon_j^* e_j)} \frac{\partial E}{\partial x_i} - i \frac{e_i \epsilon_j^* e_j}{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_i \epsilon_j^* e_j)} E = 0.$$

Входящие в уравнение величины имеют определенный физический смысл. Чтобы понять этот смысл, вычислим с помощью формулы (9.3) групповую скорость

$$\frac{d\omega}{d\vec{r}} = - \frac{\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \vec{r}^2}}{\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \omega^2}} = - \frac{2\vec{e}(\vec{k} \vec{e}) - 2\vec{k} + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial \vec{k}} (\epsilon_i \epsilon_j^* e_j)}{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_i \epsilon_j^* e_j)}. \quad (9.4)$$

Видно, что коэффициент перед производной от амплитуды по координате есть соответствующая компонента групповой скорости. Величина

$$\gamma = i \frac{e_i \epsilon_j^* e_j}{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_i \epsilon_j^* e_j)} \quad (9.5)$$

является декрементом (инкрементом), характеризующим затухание волны. В случае изотропной среды из формулы (9.5) с помощью выражения (5.1) легко получить соотношения (6.2) и (6.4).

Таким образом, уравнение для медленно изменяющейся амплитуды имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{v}^{(g)} \frac{\partial E}{\partial \vec{r}} - \gamma E = 0. \quad (9.6)$$

Из уравнения (9.6) следуют результаты, полученные в §6 при рассмотрении начальной и граничной задачи в электродинамике. Если амплитуда волны не зависит от координат, как это

предполагалось при рассмотрении начальной задачи, то уравнение $(\partial E / \partial t) = \gamma E$ имеет решение $E(t) = E(0) \exp(\gamma t)$. В случае граничной задачи амплитуда не зависит от времени. Если помимо этого она изменяется только вдоль оси OX, то из уравнения (9.6) получим $E(x) = E(0) \exp(-\gamma x)$, где $\gamma = -\gamma / v_x^{(g)}$.

§10. Закон сохранения энергии (среда с дисперсией)

Из уравнения (9.6) следует закон сохранения энергии волн в среде при учете как временной, так и пространственной дисперсии. Чтобы вывести этот закон, умножим уравнение (9.6) на E^* и полученный результат сложим с комплексно сопряженным. После простых преобразований запишем

$$\frac{\partial |E|^2}{\partial t} + (\vec{v}^{(g)} \vec{\nabla}) |E|^2 = 2\gamma |E|^2. \quad (10.1)$$

Умножим формулу (10.1) на $(1/16\pi\omega) \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_i \epsilon_j^* e_j)$. В результате получим

$$\frac{1}{16\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_i \epsilon_j^* e_j) \left(\frac{\partial |E|^2}{\partial t} + (\vec{v}^{(g)} \vec{\nabla}) |E|^2 \right) = 2i\omega \epsilon_i \epsilon_j^* e_j \frac{|E|^2}{16\pi}.$$

Сравнивая стоящее справа выражение с формулой (8.3), видим, что с точностью до знака эта величина определяет потери энергии электромагнитной волны в единице объема в единицу времени. Поэтому слагаемые слева определяют тоже изменение энергии в единице объема (плотности энергии) в единицу времени. Отсюда вытекает, что плотность энергии в среде с дисперсией равна

$$\langle W \rangle = \frac{1}{16\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_i \epsilon_j^* e_j) |E|^2. \quad (10.2)$$

В этих обозначениях закон сохранения энергии в среде с дисперсией принимает вид

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} + (\vec{v}^{(g)} \vec{\nabla}) \langle W \rangle = -Q. \quad (10.3)$$

Из определений (8.3), (9.5) и (10.2) следует, что стоящую в правой стороне формулы (10.3) величину можно записать в виде $Q = -2\gamma \langle W \rangle$ и представить формулу (10.3) в другой форме

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} + (\vec{v}^{(g)} \vec{\nabla}) \langle W \rangle = 2\gamma \langle W \rangle. \quad (10.4)$$

Прежде всего проверим, что из формулы (10.4) следует закон сохранения энергии в среде без дисперсии. Для этого положим, что нет поглощения ($\epsilon''_{ij} = 0$) и ϵ''_{ij} не зависит от частоты. Из определения (10.2) получаем при $\epsilon''_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$ формулу (7.4), а из (10.4) следует (7.6).

Отметим, что при учете дисперсии средняя энергия волны (10.2) зависит от частоты и для разных частот различна даже при одной и той же амплитуде.

§II. Уравнения электродинамики в неоднородной среде

Обычно плазма является неоднородной и концентрация частиц, температура, скорость течения и другие ее параметры зависят от координат. Распространение электромагнитных волн в неоднородных средах и, в частности, в плазме имеет свои особенности, зачастую очень существенные для практических целей.

При рассмотрении неоднородной среды пренебрежем пространственной дисперсией, но учтем временную дисперсию. Помимо этого будем считать среду изотропной. Материальное уравнение тогда имеет вид (см. (2.3))

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \epsilon(t-t', \vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t') \quad (II.1)$$

Пренебрежение пространственной дисперсией справедливо для быстрых электромагнитных волн в среде, когда перенос заряда за период изменения поля практически не успевает происходить. При этом зависимость диэлектрической проницаемости ϵ от координат связана только с неоднородностью среды.

Рассмотрим уравнение (4.1), которое справедливо и для неоднородной среды. Будем считать поле периодической функцией времени и искать решение этого уравнения в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Подчеркнем, что в этом выражении для поля зависимость от времени определена, в то время как зависимость поля от координат нужно найти из уравнения (4.1). Иными словами, поле является монохроматическим во времени и задача состоит в определении его пространственного изменения при условии, что свойства неоднородной среды известны.

Рассмотрим сначала материальное уравнение (II.1). Подставим в него приведенное выше выражение для поля и введем комплексную диэлектрическую проницаемость неоднородной среды.

$$\epsilon(\omega, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \epsilon(\tau, \vec{r}) e^{i\omega\tau} \quad (II.2)$$

Тогда материальное уравнение принимает простой вид

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon(\omega, \vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Анализ уравнений поля начнем с уравнения $\text{div } \vec{D} = 0$. Подставив в него выражение для вектора индукции, получим

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = - \vec{E} \frac{\vec{\nabla} \epsilon}{\epsilon} \quad (II.3)$$

Обратимся теперь к уравнению (4.1). Используем формулу (II.3) и соотношение (П.1.2). В результате получим уравнение, определяющее пространственную зависимость поля

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \left(\vec{E} \frac{\vec{\nabla} \epsilon}{\epsilon} \right) = 0. \quad (II.4)$$

В пределе однородной среды ($\vec{\nabla} \epsilon = 0$) из уравнения (II.4) следует решение $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, где $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon$. Последнее соотношение является законом дисперсии для поперечных волн в изотропной среде (5.2).

Часто при изучении распространения электромагнитных волн в неоднородной среде более удобно исследовать уравнение для магнитной индукции $\vec{B}$. Чтобы получить это уравнение, сделаем ряд преобразований с уравнениями (1.4). Из второго уравнения ($\vec{j}_0 = 0$) получим

$$\text{rot rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{D}$$

Если считать, что все поля зависят от времени по закону $e^{-i\omega t}$, то получим $\text{rot rot } \vec{B} = -\frac{i\omega}{c} \text{rot } \vec{D} = -i \frac{\omega}{c} \text{rot} (\epsilon \vec{E}) = -i \frac{\omega}{c} \{ [\vec{\nabla} \epsilon \cdot \vec{E}] + \epsilon \text{rot } \vec{E} \}$. Но из первого уравнения (1.4) следует, что $\text{rot } \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \vec{B}$, а из второго уравнения $-\text{rot } \vec{B} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E}$. Используя эти соотношения, получим

$$\Delta \vec{B} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{B} + \left[\frac{\vec{\nabla} \epsilon}{\epsilon} \cdot \text{rot } \vec{B} \right] = 0. \quad (II.5)$$

Видно, что уравнения (II.4) и (II.5) подобны по своей структуре.

§12. Распространение электромагнитных волн в неоднородной среде

Рассмотрим среду, свойства которой изменяются только в одном направлении и диэлектрическая проницаемость зависит от одной пространственной переменной x . Будем считать, что в такой среде (часто ее называют плоскостной) распространяется электромагнитная волна, поляризованная вдоль оси OY ($E_x = E_z = 0$). Тогда уравнение (II.4) преобразуется к виду ($E_y = E$)

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(x) E = 0.$$

Решение такого уравнения существенно зависит от вида функции $\epsilon(x)$. Без конкретизации этой функции можно построить лишь приближенное решение для сред, свойства которых меняются медленно (приближение геометрической оптики). В этом случае решение уравнения идет в виде $E = E_0(x) \exp(i\varphi(x))$, где E_0 и φ — действительные функции, определяющие амплитуду и фазу волны. (Величину φ называют эйконалом.) Подставляя решение в таком виде в уравнение, получаем

$$\frac{d^2 E_0}{dx^2} + 2i \frac{d\varphi}{dx} \frac{dE_0}{dx} + i \frac{d^2 \varphi}{dx^2} E_0 - \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 E_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(x) E_0 = 0.$$

Отделяем в этом выражении действительную часть и отбрасываем слагаемое $d^2 E_0 / dx^2$, полагая, что амплитуда волны E_0 изменяется медленно, так что вторая производная от нее мала. В результате получаем уравнение для φ (уравнение эйконала)

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(x). \quad (12.1)$$

Решение этого уравнения очевидно: $\varphi(x) = \pm \frac{\omega}{c} \int dx \sqrt{\epsilon(x)}$. Часто величину $d\varphi/dx$ обозначают $k(x)$ и называют волновым числом, зависящим от координат. В пределе однородной среды эта величина постоянна и действительно является волновым числом, а уравнение эйконала переходит в дисперсионное уравнение (5.2).

Приравняв нулю мнимую часть уравнения, получим $\frac{d}{dx} \left(E_0^2 k \right) = 0$ и, следовательно, $E_0^2 k = \text{const}$. Для определения постоянной нужно знать волновое число и амплитуду в какой-либо точке среды. Если среда ограничена и волна падает на нее из вакуума, где $\epsilon = 1$ и

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad \text{то} \quad E_0(x) = E_0 / \sqrt{\epsilon(x)}.$$

Здесь E_0 — амплитуда падающей волны на границе. Тогда поле волны внутри среды в приближении геометрической оптики имеет вид

$$E(x) = \frac{E_0}{\sqrt{\epsilon(x)}} e^{-i\omega t} \left(e^{i \frac{\omega}{c} \int dx \sqrt{\epsilon(x)}} + e^{-i \frac{\omega}{c} \int dx \sqrt{\epsilon(x)}} \right). \quad (12.2)$$

При выводе выражения (12.2) было отброшено слагаемое $d^2 E_0 / dx^2$. Такое отбрасывание оправдано, если это слагаемое мало по сравнению с $\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(x) E_0$. В окрестности точки, где $\epsilon(x_0) = 0$, приближение геометрической оптики не пригодно. Это видно также из того, что в точке x_0 амплитуда волны обращается в бесконечность. Реально точка $\epsilon(x_0) = 0$ является той точкой, от которой волна отражается. Эту точку называют еще точкой поворота.

В решении (12.2) первое слагаемое определяет волну, идущую слева направо, а второе — волну, идущую в обратном направлении. На рис. 3 показана структура поля в среде для волны, падающей из вакуума нормально на неоднородную среду и отражающейся от нее. В отсутствие поглощения полное поле является полем стоячей волны.

Вопрос о распространении в неоднородной среде электромагнитной волны, падающей на нее из вакуума, представляет большой практический интерес и поэтому остановимся на нем более подробно. Рассмотрим наклонное падение, когда направление распространения падающей волны не совпадает с направлением неоднородности. При этом возможны два варианта. Если вектор поляризации лежит в плоскости падения, то говорят, что волна имеет p-поляризацию. Если вектор поляризации перпендикулярен плоскости падения, то говорят, что волна s-поляризована. Рассмотрим сначала более простой, второй случай.

Как было установлено выше, поле волны в среде в приближении геометрической оптики можно представить в виде

$$E = E_0(x) e^{i \int k_x(x) dx + i k_y y},$$

где E_0 — напряженность электрического поля, направленного по оси OZ ; $k_x(x) = \frac{d\varphi}{dx}$; k_y — компонента волнового вектора вдоль оси OY . В этом направлении среда однородна. Уравнение эйконала определяет величину $k_x(x)$ и формально совпадает с дисперсионным уравнением для поперечных волн

$$k_x^2(x) + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(x). \quad (12.3)$$

Если ввести угол падения θ и учесть, что компонента k_y неизменна и поэтому такая же, как и в вакууме ($k_y = \frac{\omega}{c} \sin \theta$), то получим

$$k_x^2(x) = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon(x) - \sin^2 \theta)$$

Величина k_x обращается в ноль в точке x_0 , где $\epsilon(x_0) = \sin^2 \theta$. Именно от этой точки и отражается S-поляризованная волна при наклонном падении ее на неоднородную среду. Структура поля вдоль оси OX схожа со структурой поля при нормальном падении, но точка отражения смещена в сторону больших значений ϵ (рис.4).

При р-поляризации падающей волны имеются две компоненты у вектора напряженности электрического поля (E_x и E_y), а магнитная индукция имеет только компоненту B_z . Из уравнения $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ следует связь между этими величинами. Полагая, что все поля во времени изменяются с частотой ω , получим

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon(x) E_x.$$

Поскольку в направлении оси OY среда однородна, то можно принять зависимость всех полей от переменной y в виде $e^{ik_y y}$. Тогда получим

$$\epsilon E_x = -B_z \sin \theta. \quad (12.4)$$

Таким образом, компонента E_x выражается через B_z . Для определения B_z используем уравнение (11.5). Если в нем положить $B = B_z$ и зависимость от y рассматривать в виде $\exp[i \frac{\omega}{c} y \sin \theta]$, то получим

$$\frac{d^2 B_z}{dx^2} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dx} \frac{dB_z}{dx} + \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon - \sin^2 \theta) B_z = 0.$$

В окрестности точки x_0 , где $\epsilon(x_0) = 0$, решение уравнения не имеет особенностей и при $x \rightarrow x_0$ магнитное поле стремится к постоянному значению. Тогда в соответствии с формулой (12.4) направленная вдоль неоднородности компонента электрического поля E_x обращается в бесконечность при $x \rightarrow x_0$. Фактически, конечно, эта компонента не бесконечна, но может быть достаточно велика. Такое возрастание продольной (направленной вдоль направления неоднородности) компоненты поля называется линейной трансформацией поперечной волны в продольную (рис.5). Эту терминологию легко понять, если вспомнить, что согласно

(5.3) закон дисперсии продольных волн есть $\epsilon^l = 0$ и в случае среды без пространственной дисперсии $\epsilon^l = \epsilon^{tr} = \epsilon$. Физически это явление линейной трансформации связано с тем, что р-поляризованная падающая поперечная волна имеет компоненту электрического поля вдоль оси OX. В окрестности точки, где $\epsilon = 0$, эта компонента играет роль вынуждающей силы и резонансно возбуждает продольные волны. При этом поперечная волна трансформируется в продольную. В других точках неоднородной среды равенство $\epsilon(x, \omega) = 0$ также может выполняться. Но определяемая этим равенством частота не совпадает с частотой падающей поперечной волны и никакого резонанса не возникает.

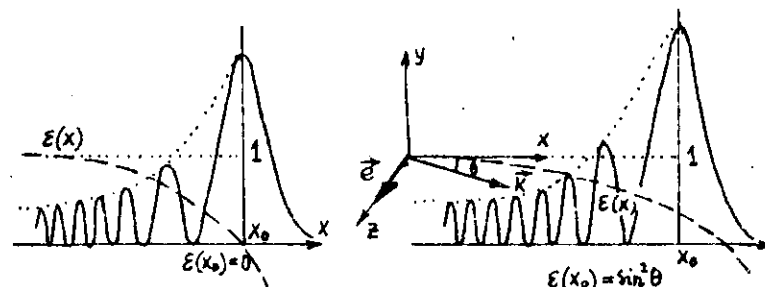


Рис.3

Рис.4

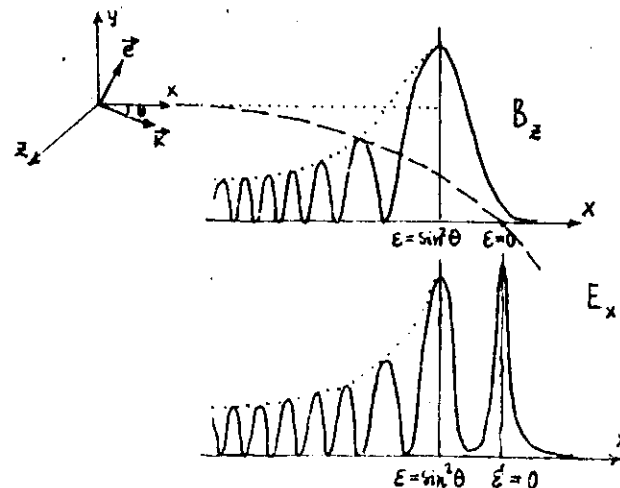


Рис.5

§13. Модель "холодной" плазмы (одночастичная модель)

В одночастичной модели использован ряд упрощающих предположений относительно движения частиц плазмы в электромагнитном поле волны. Во-первых, предполагается, что под действием поля смещаются только электроны плазмы как наиболее легкие частицы. Во-вторых, действие магнитного поля волны не учитывается. Основанием для этого является малость силы, действующей на электрон со стороны магнитного поля по сравнению с силой действия электрического поля. Действительно, уравнение движения электрона имеет вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \quad (13.1)$$

Если напряженность полей даже одного порядка ($|\vec{B}| \sim |\vec{E}|$), то при скорости движения электрона, малой по сравнению со скоростью света ($v \ll c$), второе слагаемое в правой части формулы (13.1) мало по сравнению с первым слагаемым. При этом естественно движение электрона считается не релятивистским. В-третьих, предполагается, что в отсутствие электрического поля электрон покоится и скорость его равна нулю. Это соответствует предположению о тепловом движении. Поэтому эта модель и называется моделью холодной плазмы. В-четвертых, в одночастичной модели использовано предположение о том, что скорость движения электрона намного меньше, чем фазовая скорость волны. Именно это последнее предположение дает возможность решить уравнение движения электрона и выразить его скорость и координату через напряженность электрического поля.

Для того чтобы показать, как строится одночастичная модель рассмотрим движение электрона в поле волны вида (3.2). Отбросим в уравнении (13.1) силу, связанную с магнитным полем, и запишем

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e\vec{E} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$$

Это уравнение определяет траекторию электрона $\vec{r}(t)$. При решении его используем теорию возмущений $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1$, где $\vec{r}_0$ — положение электрона в отсутствие поля; $\vec{r}_1$ — линейное по полю смещение электрона. Если поле изменяется в пространстве достаточно плавно, а смещение электрона из начального положения мало, то

при вычислениях $\vec{r}_1(t)$ можно брать поле в точке $\vec{r}_0$. В результате найдем

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = i \frac{e\vec{E}}{m\omega} e^{i(\vec{k}\vec{r}_0 - \omega t)} = i\vec{v}_E e^{i(\vec{k}\vec{r}_0 - \omega t)} \\ \vec{r} &= -\frac{e\vec{E}}{m\omega^2} e^{i(\vec{k}\vec{r}_0 - \omega t)} = -\vec{r}_E e^{i(\vec{k}\vec{r}_0 - \omega t)}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Еще раз подчеркнем, что замена в выражении для поля волны реального положения электрона $\vec{r}(t)$ на его начальное положение $\vec{r}_0$ оправдана только при условии, что электрическое поле мало изменяется на амплитуде колебаний электрона. Поскольку изменение поля характеризуется длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, а максимальное смещение электрона равно r_E , то условие пригодности одночастичной модели означает выполнение неравенства $r_E \ll \lambda$.

Учтя соотношение $r_E = V_E/\omega$, перепишем это неравенство иначе

$$V_E \ll \frac{\omega}{k} = v \quad (13.3)$$

Это неравенство утверждает, что фазовая скорость волны намного превышает скорость движения электрона.

Зная скорость осцилляций электрона, легко рассчитать плотность электронного тока, возникающего в поле волны. Для этого нужно концентрацию электронов N_e умножить на заряд и скорость $\vec{v}$. В результате получим

$$\vec{j} = eN_e\vec{v} = i \frac{e^2 N_e}{m\omega} \vec{E} e^{i(\vec{k}\vec{r}_0 - \omega t)} = i \frac{e^2 N_e}{m\omega} \vec{E}(\vec{r}, t).$$

Сравнивая это выражение с формулой (3.5), заключаем, что в одночастичной модели тензор электропроводности равен

$$\sigma_{ij} = i \frac{e^2 N_e}{m\omega} \delta_{ij}. \quad (13.4)$$

Зная тензор σ_{ij} , с помощью формулы (3.6) легко найти тензор комплексной диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}, \quad \epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (13.5)$$

Величину, стоящую в формуле (13.5), часто называют плазменной, или ленгмювской частотой

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi N_e e^2}{m}. \quad (13.6)$$

Из формулы (13.5) можно найти продольную и поперечную диэлектрические проницаемости. Для этого обратимся к формуле (5.1). Сравнивая ее с формулой (13.5), получим

$$\varepsilon^{*}(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega) = \varepsilon. \quad (I3.7)$$

Таким образом, в рассматриваемой модели нет разницы между продольной и поперечной диэлектрическими проницаемостями.

До сих пор предполагалось, что электроны, двигаясь в электрическом поле волны, не сталкиваются с другими частицами. В действительности при своем осцилляторном движении электроны приближаются к неподвижным ионам и удаляются от них. Поле ионов действует на электроны, изменяет их скорость движения. Наиболее просто учесть взаимодействие электронов с ионами, введя силу трения, которая действует на движущийся электрон,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} - m\nu\vec{v}, \quad (I3.8)$$

где величину ν называют частотой столкновений. Смысл этого названия легко понять. Если бы электрического поля не было, то электрон, имевший в момент времени $t=0$ скорость $\vec{v}(0)$, тормозился бы по закону $\vec{v}(t) = \vec{v}(0)e^{-\nu t}$. Можно сказать, что величина $1/\nu$ определяет время свободного пробега, а обратная величина ν характеризует частоту столкновений.

Подставим в уравнение (I3.8) поле плоской волны (3.2), которое берется в точке $\vec{r}_0$. Будем искать решение в виде $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\omega t + i\vec{k}\vec{r}_0}$. В результате получим

$$\vec{v} = i \frac{e\vec{E}}{m(\omega + i\nu)}.$$

Отсюда найдем плотность тока $\vec{j} = e\vec{v}N_e$ и затем тензор электропроводности $\sigma_{ij} = i \frac{e^2 N_e}{m(\omega + i\nu)} \delta_{ij}$. Согласно формуле (3.6) тензор комплексной диэлектрической проницаемости при этом имеет вид $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$, где

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu)}. \quad (I3.9)$$

Если частота столкновений мала по сравнению с частотой изменения поля волны ($\nu \ll \omega$), то полученное выражение упрощается

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + i \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{\omega^3}. \quad (I3.10)$$

Как видно из формул (I3.9), (I3.10) при учете диссипативных эффектов тензор диэлектрической проницаемости является комплексным.

§14. Продольные и поперечные волны в холодной плазме

Ранее в §5 было показано, что в изотропной среде могут распространяться поперечные и продольные волны. При этом они удовлетворяют законам дисперсии соответственно (5.2) и (5.3). Рассмотрим, какие следствия вытекают из этих формул в случае модели холодной плазмы.

Начнем анализ формулы (5.2), пренебрегая сначала столкновениями электронов. Используя соотношения (I3.5) и (I3.7), найдем закон дисперсии для поперечных волн

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2. \quad (I4.1)$$

На рис.6 показана зависимость $\omega(k)$ (дисперсионная кривая). Из нее видно, что с увеличением длины волны и, следовательно, с уменьшением волнового числа частота волны стремится к постоянному значению ω_{pe} . Наоборот с уменьшением длины волны наличие плазмы все меньше сказывается на ее распространении. Волна распространяется почти так же, как в вакууме и закон дисперсии (I4.1) переходит в $\omega \approx kc$.

Скорость распространения поверхности, на которой постоянна фаза волны, называется фазовой скоростью. Постоянство фазы означает постоянство величины $\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{const}$. Если выбрать направление вектора $\vec{k}$ вдоль оси OX, то получим $kx - \omega t = \text{const}$. Это соотношение определяет зависимость координаты поверхности постоянной фазы от времени $x = \frac{1}{k}(\omega t + \text{const})$. Дифференцируя его, найдем

$$\dot{x} = v^{(f)} = \frac{\omega}{k}. \quad (I4.2)$$

В случае поперечных волн из формул (I4.1) и (I4.2) получаем

$$v^{(f)} = \frac{\sqrt{k^2 c^2 + \omega_{pe}^2}}{k}. \quad (I4.3)$$

График функции $v^{(f)}$ показан на рис. 7. Из него видно, что при всех длинах волн фазовая скорость больше скорости света и в пределе $k \rightarrow 0$ $v^{(f)} \rightarrow \infty$.

В отличие от фазовой групповая скорость поперечной волны, определяемая формулами (6.9), (I4.1), всегда меньше скорости света (см. рис.7) и равна

$$v^{(g)} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\sqrt{k^2 c^2 + \omega_{pe}^2}}. \quad (I4.4)$$

Учет столкновений электронов привел к тому, что у диэлектрической проницаемости появилась мнимая часть, которая определяет затухание волн (см. § 6). При решении начальной задачи это затухание характеризуется декрементом (6.2). Используя эту формулу и выражение (13.10), получим ($\omega'^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2$)

$$\gamma = -\frac{\nu \omega_{pe}^2}{2(k^2 c^2 + \omega_{pe}^2)} \quad (14.5)$$

На рис. 8 показана функция $\gamma(k)$. Видно, что с уменьшением длины волны декремент уменьшается. Такого результата следовало ожидать, поскольку с уменьшением длины волны плазма все менее влияет на распространение поперечных волн.

Закон дисперсии для продольных волн (6.3) в пренебрежении столкновениями определяет частоту, которая не зависит от длины волны

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \quad (14.6)$$

В рамках модели холодной плазмы продольная волна с различными длинами имеет одну и ту же частоту. Поэтому часто говорят не о волнах, а о продольных колебаниях электронов (ленгмювские колебания). Такие волны имеют нулевую групповую скорость и не переносят энергии. На рис. 6 показан закон дисперсии для продольных волн.

Декремент затухания продольных волн определяется формулой (6.4) и согласно (13.10) равен

$$\gamma = -\nu/2. \quad (14.7)$$

Как и частота, декремент не зависит от длины волны.

§15. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле

Для вывода тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле (часто используют термин замagnetизованная или магнитоактивная плазма) нужно решить уравнение движения электрона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}_0],$$

где $\vec{B}_0$ — вектор индукции внешнего магнитного поля; для упрощенных расчетов диссипация не учитывается.

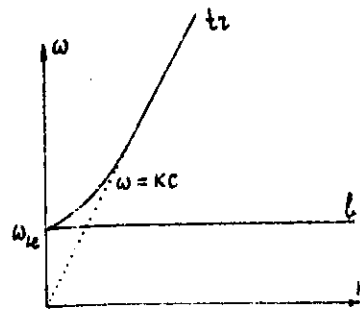


Рис. 6

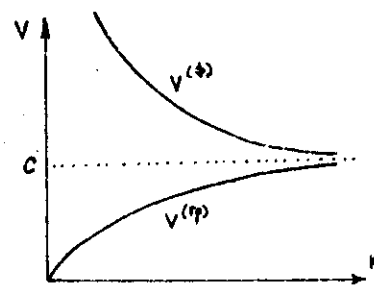


Рис. 7

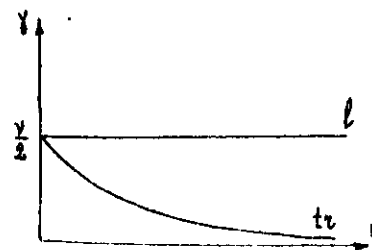


Рис. 8

Введем систему координат (рис. 9) с осью Oz в направлении магнитного поля. Векторное уравнение движения запишем по компонентам

$$m \frac{dv_x}{dt} = eE_x + \frac{e}{c} v_y B_0,$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = eE_y - \frac{e}{c} v_x B_0,$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = eE_z.$$

Как и в §13, будем считать, что электрическое поле изменяется по закону $\vec{E} \exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r})$, где $\vec{r}$ — начальная координата электрона (индекс "0" опущен).

Из уравнений движения видно, что в направлении магнитного поля движение частицы определяется таким же уравнением, как и в отсутствие магнитного поля. Поэтому (см. (13.2))

$$v_z = i \frac{eE_z}{m\omega}.$$

Уравнения для поперечных по отношению к направлению магнитного поля компонент скорости электрона v_x и v_y связаны между собой. Чтобы найти v_x и v_y , введем новые искомые величины $v_{\pm} = v_x \pm i v_y$. Уравнения для этих величин следуют из исходных уравнений движения. Для этого умножим уравнение для v_y

на i и сложим (вычтем) с уравнением для v_x . В результате получим

$$\frac{dv_+}{dt} = \frac{e}{m} (E_x + iE_y) - i\Omega_e v_+,$$

$$\frac{dv_-}{dt} = \frac{e}{m} (E_x - iE_y) + i\Omega_e v_-,$$

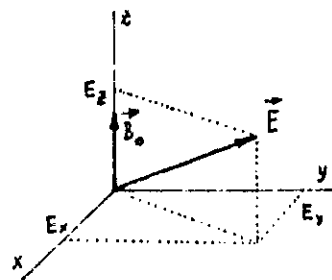


Рис. 9

где $\Omega_e = \frac{eB_0}{mc}$ - циклотронная частота (гирочастота) электрона. Она определяет частоту вращения электрона в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Особенность полученных уравнений состоит в том, что каждое из них является уравнением лишь для одной из величин (либо V_+ , либо V_-). Будем искать решение в виде $V_{\pm} = W_{\pm} \exp(\pm i\Omega_e t)$, где

$W_{\pm}$ - новая искомая величина. После подстановки в уравнение получим

$$\frac{dW_{\pm}}{dt} = \frac{e}{m} (E_x \pm iE_y) e^{\pm i\Omega_e t}$$

Решение этих уравнений легко найти. В результате получим $W_{\pm}$ и затем $V_{\pm}$. Искомые компоненты скорости электрона V_x и V_y выражаются через $V_{\pm}$ и равны

$$V_x = \frac{1}{2}(V_+ + V_-) = \frac{ie(\omega E_x + i\Omega_e E_y)}{m(\omega^2 - \Omega_e^2)}, \quad V_y = \frac{V_+ - V_-}{2i} = \frac{e(\Omega_e E_x + i\omega E_y)}{m(\omega^2 - \Omega_e^2)}$$

Если известны все компоненты скорости, с которой движется электрон, то можно рассчитать компоненты плотности тока ($\vec{j} = e\vec{v}N_e$)

$$\begin{aligned} j_x &= eN_e V_x = \frac{ie^2 N_e}{m(\omega^2 - \Omega_e^2)} (\omega E_x + i\Omega_e E_y) \\ j_y &= eN_e V_y = \frac{e^2 N_e}{m(\omega^2 - \Omega_e^2)} (\Omega_e E_x + i\omega E_y) \\ j_z &= eN_e V_z = \frac{ie^2 N_e}{m\omega} E_z \end{aligned}$$

Сравнивая полученные выражения для плотности тока с определением (3.5), найдем тензор электропроводности для замагниченной холодной плазмы

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{ie^2 N_e \omega}{m(\omega^2 - \Omega_e^2)} & -\frac{e^2 N_e \Omega_e}{m(\omega^2 - \Omega_e^2)} & 0 \\ \frac{e^2 N_e \Omega_e}{m(\omega^2 - \Omega_e^2)} & \frac{i\omega e^2 N_e}{m(\omega^2 - \Omega_e^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ie^2 N_e}{m\omega} \end{pmatrix} \quad (15.1)$$

Если магнитное поле отсутствует ($\Omega_e = 0$), то у тензора (15.1) отличны от нуля только компоненты на главной диагонали. Такой тензор можно записать в виде $\hat{\sigma}_{ij} = i \frac{e^2 N_e}{m\omega} \delta_{ij}$, совпадающим с формулой (13.4).

Тензор диэлектрической проницаемости выражается через тензор электропроводности с помощью формулы (3.6) и для замагниченной холодной плазмы имеет вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_n \end{pmatrix}, \quad (15.2)$$

где введены следующие сокращенные обозначения:

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \quad \epsilon_n = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad g = -\frac{\omega_p^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)}. \quad (15.3)$$

В отличие от изотропной плазмы тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле (15.2) является комплексным даже в пренебрежении столкновениями частиц. Однако эта комплексность не связана с затуханием волн. Чтобы в этом убедиться, рассчитаем антиэрмитовскую часть этого тензора $\hat{\epsilon}_{ij}^A$, которая и определяет потери энергии волны (см. §8). Используя формулу (15.2) и определение (8.2), легко проверить, что $\hat{\epsilon}_{ij}^A = 0$. Таким образом, тензор (15.2) является эрмитовским.

Следует заметить, что в магнитном поле имеется еще одно ограничение на применимость модели холодной плазмы. Из-за теплового движения в перпендикулярной к направлению магнитного поля плоскости электроны движутся по окружностям. Средний радиус таких окружностей равен $\rho_e = v_{Te} / \Omega_e$ (ларморовский радиус), где v_{Te} - тепловая скорость электронов. Пренебрежение тепловым электронным движением оправдано, если величина ρ_e мала по сравнению с масштабом, на котором изменяется электрическое поле в указанной плоскости.

§16. Распределение волн вдоль магнитного поля

Волны, распространяющиеся в магнитном поле, в общем случае не являются ни продольными, ни поперечными. Однако имеются два направления распространения (вдоль и поперек магнитного поля), когда можно выделить волны с продольной и поперечной поляризацией. Рассмотрим сначала распространение волн вдоль магнитного поля.

Общее дисперсионное уравнение (4.3) при использовании тензора (15.2) сводится к равенству нулю определителя

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{k_x^2}{k^2} - 1\right) \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \varepsilon_1 & \frac{k_x k_y}{\omega^2} c^2 + ig & \frac{c^2 k_x k_z}{\omega^2} \\ \frac{k_x k_y}{\omega^2} c^2 - ig & \left(\frac{k_y^2}{k^2} - 1\right) \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \varepsilon_1 & \frac{c^2 k_y k_z}{\omega^2} \\ \frac{c^2 k_x k_z}{\omega^2} & \frac{c^2 k_y k_z}{\omega^2} & \left(\frac{k_z^2}{k^2} - 1\right) \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \varepsilon_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (16.1)$$

Если волна распространяется вдоль магнитного поля, то $k_x = k_y = 0$, $k_z = k$ и общее выражение (16.1) существенно упрощается. Введем величину, определяющую отношение скорости света к фазовой скорости волны и называемую показателем преломления.

$$N = \frac{ck}{\omega} = \frac{c}{v(\varphi)}. \quad (16.2)$$

Тогда дисперсионное уравнение принимает вид

$$\varepsilon_1 \left[(\varepsilon_1 - N^2) - g^2 \right] = 0.$$

Имеются две возможности для обращения в ноль полученного выражения. Равенство нулю величины ε_1 определяет закон дисперсии для продольных волн. Действительно, из этого равенства следует, что $\omega^2 = \omega_{pe}^2$. Этот результат совпадает с формулой (14.6). В продольных волнах электроны смещаются вдоль вектора $\vec{k}$ и, следовательно, вдоль магнитного поля $\vec{B}_0$. На такое движение электронов магнитное поле не влияет и в рассматриваемом случае продольные волны ничем не отличаются от случая изотропной плазмы.

Вторая возможность обращения в ноль полученного выражения приводит к дисперсионному уравнению для двух типов поперечных волн

$$N^2 = \varepsilon_1 \pm g. \quad (16.3)$$

В отличие от изотропной плазмы, где поперечные волны были линейно поляризованы, в замагниченной плазме поперечные волны имеют циркулярную (круговую) поляризацию. Знаку плюс в формуле (16.3) соответствует левое направление вращения плоскости поляризации, а знаку минус — правое. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим структуру поля в волне с правым направлением вращения вектора поляризации. Согласно формуле (4.2) между ком-

понентами электрического поля в волне имеется определенная связь. Полагая индекс i равным x и используя тензор (15.2), в интересующем нас случае распространения волны вдоль магнитного поля получим

$$\left(\varepsilon_1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right) E_x = -ig E_y.$$

Но согласно закону дисперсии (16.3) выражение в круглой скобке равно $-g$ и, следовательно, $E_x = -iE_y$. Аналогично для волны с другим направлением вращения вектора поляризации $E_x = iE_y$.

Такая связь компонент напряженности электрического поля в волне как раз и определяет ее циркулярную поляризацию. Действительно, введем единичные орты $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ в направлении осей Ox и Oy и запишем поле волны в действительном виде

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{Re} \left\{ \vec{e}_x E_{0x} e^{-i\omega t + ikz} + \vec{e}_y E_{0y} e^{-i\omega t + ikz} \right\} = \text{Re} \left\{ \vec{e}_x E_{0x} e^{-i\omega t + ikz} - \vec{e}_y i E_{0x} e^{-i\omega t + ikz} \right\} \\ &= E_{0x} \left\{ \vec{e}_x \cos(kz - \omega t) + \vec{e}_y \sin(kz - \omega t) \right\}. \end{aligned}$$

На рис.10 показано поле в правополяризованной волне в точке $x = 0$. Полный вектор напряженности поля вращается со временем с частотой ω по часовой стрелке. Если зафиксировать время, то получим, что в пространстве концы вектора напряженности поля лежат на спирали (рис.11). Поэтому такие волны называют еще спиральными. Для левополяризованной волны в

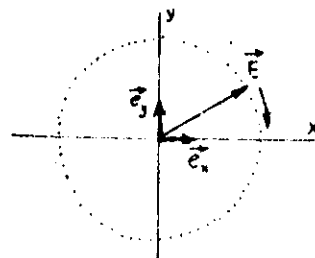


Рис.10

каждой данной точке вектор напряженности поля вращается против часовой стрелки, а в пространстве концы вектора напряженности поля лежат на спирали с левым вращением.

Рассмотрим теперь более детально дисперсионные уравнения (16.3). Для волны с правым направлением вращения поляризации согласно определениям (15.3) и (15.5) получим

$$N^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \Omega_e)}. \quad (16.4)$$

На рис.12 показана функция $N^2(\omega)$; для сравнения пунктиром указана соответствующая кривая при $B_0 = 0$. Если $N^2 < 0$, то волновой

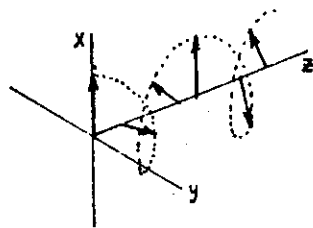


Рис. II

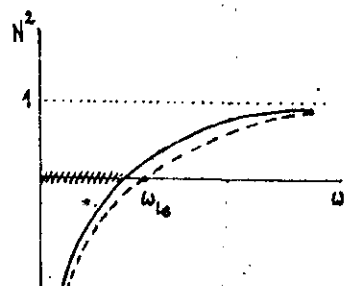


Рис. I2

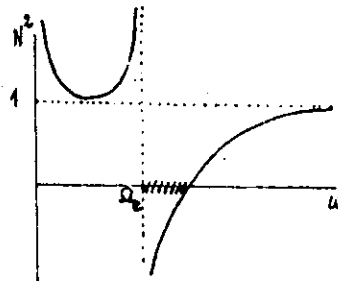


Рис. I3

ных электромагнитных волн. Закон дисперсии для этих волн особенно прост при $\omega < \Omega_c$, где $N^2 \approx 1 + \omega_{pe}^2/\omega\Omega_c \approx \omega_{pe}^2/\omega\Omega_c$ и, следовательно,

$$k = \sqrt{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \sqrt{\omega/\Omega_c}. \quad (I6.6)$$

Чем меньше длина волны, тем больше фазовая скорость таких волн ($\partial \omega/\partial k \sim k \sim \sqrt{\omega}$). Левополяризованные волны в области низких частот ($\omega < \Omega_c$) называются сенситивными атмосфериками (свистами), или свистами.

вектор $\vec{k}$ является мнимым и волна не может распространяться в плазме. Для того чтобы распространение волны было возможно, необходимо, чтобы волновое число было действительным и $N^2 > 0$. Из формулы (I6.4) следует, что правополяризованные волны существуют только при условии, что их частота превышает значение ω_0 , где $\omega_0 = -\frac{\Omega_c}{2} + \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega_c^2/4}$. Частота ω_0 называется частотой отсечки и волны с частотами ниже ω_0 в плазме не распространяются.

Перейдем к левополяризованной волне. Из формул (I5.3) и (I6.3) следует

$$N^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \Omega_c)}. \quad (I6.5)$$

График функции (I6.5) показан на рис. I3. Видно, что дисперсионная кривая для левополяризованной волны значительно отличается от кривой для волны с правым направлением вращения вектора поляризации. Во-первых, при низких частотах имеется интервал, где $N^2 > 0$ и, следовательно, возможно распространение в плазме низкочастот-

ных волн. Во-вторых, в области более высоких частот ($\omega_0 > \omega > \Omega_c$) левополяризованные волны не распространяются. Их распространение возможно, начиная с $\omega > \omega_0$, где ω_0 — частота отсечки ($\omega_0 = \frac{\Omega_c}{2} + \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega_c^2/4}$).

Такое отличие между право- и левополяризованными волнами связано с тем, что у последних направление вращения плоскости поляризации совпадает с направлением вращения электрона в магнитном поле. Если при этом совпадают и частоты вращения, то имеет место так называемый циклотронный резонанс ($N^2 \rightarrow \infty$). В окрестности резонанса необходимо учитывать такие эффекты, которые не включены в рассматриваемую модель (поглощение, релактивизм и т.д.).

Возможность распространения в замагниченной плазме двух типов поперечных волн с различными направлениями вращения плоскости поляризации приводит к интересному и широко используемому физическому явлению — вращению плоскости поляризации линейно поляризованной волны (Фарадсего вращение, эффект Фарадея). Представим себе, что на слой замагниченной плазмы падает линейно поляризованная волна (рис. I4). Поле в такой волне можно представить как сумму полей двух циркулярно поляризованных волн с одинаковыми амплитудами. В плазме эти волны при одной и той же частоте имеют разные длины и соответственно волновые числа k_{np} и k_{lp} . Суммарное поле при этом равно

$$\vec{E} = \vec{E}_{np} + \vec{E}_{lp} = E_0 \left[\vec{e}_x (e^{ik_{np}z} + e^{ik_{lp}z}) + \vec{e}_y e^{i\frac{\pi}{2}} (e^{ik_{np}z} - e^{ik_{lp}z}) \right] e^{-i\omega t}$$

В точке, отстоящей от границы слоя на расстояние z , отношение компонент поля есть

$$\frac{E_x}{E_y} = -i \frac{e^{ik_{np}z} + e^{ik_{lp}z}}{e^{ik_{np}z} - e^{ik_{lp}z}} = \operatorname{ctg} \frac{\Delta k \cdot z}{2},$$

где $\Delta k = k_{np} - k_{lp}$. Если, скажем, в точке $z=0$ компонента E_y равна нулю и отношение компонент бесконечно, то, пройдя плазменный слой с толщиной L , отношение станет равно $\operatorname{ctg} \alpha$, где

$$\alpha = \frac{L}{2} (k_{np} - k_{lp}). \quad (I6.7)$$

В относительно слабом магнитном поле ($\omega > \Omega_c$) из формул (I6.4) и (I6.5) легко получить приближенные выражения для волновых чисел и угла поворота вектора поляризации

$$\alpha = \frac{L \omega_e^2}{4 \omega c} \frac{\Omega_e}{\sqrt{\omega^2 - \omega_e^2}}.$$

Видно, что угол поворота пропорционален напряженности магнитного поля. Измеряя его, можно судить о величине магнитного поля в плазме.

§17. Распространение волн поперек магнитного поля

Рассмотрим теперь распространение электромагнитных волн в поперечном по отношению к магнитному полю направлении ($k_x \neq 0$, $k_y = k_z = 0$). Из формулы (16.1) получим дисперсионное уравнение

$$(\epsilon_1 - N^2) [\epsilon_1 (\epsilon_1 - N^2) - g^2] = 0. \quad (17.1)$$

Обращение в ноль первого сомножителя приводит к закону дисперсии для поперечных волн, полученному ранее для изотропной плазмы,

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = N^2 = \epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}.$$

В этих линейно поляризованных волнах электрическое поле направлено вдоль магнитного. Поэтому последнее не влияет на осцилляторное движение электронов и такие волны принято называть обыкновенными.

Обращение в ноль второго сомножителя в формуле (17.1) позволяет найти закон дисперсии так называемой необыкновенной волны

$$N^2 = \frac{\epsilon_1 - g^2}{\epsilon_1} = \frac{(1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2})^2 - \frac{\omega_e^2 \Omega_e^2}{\omega^2 (\omega^2 - \Omega_e^2)}}{1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}}.$$

График функции $N^2(\omega)$ показан на рис.15. Есть одно значение частоты, при котором $N^2 \rightarrow \infty$

$$\omega = \sqrt{\omega_e^2 + \Omega_e^2}. \quad (17.2)$$

Частоту (17.2) называют верхнегибридной. При этой частоте имеет место резонанс и рассмотрение его требует уточнения модели плазмы.

Для необыкновенных волн вектор поляризации перпендикулярен к магнитному полю. Но в общем случае нельзя сказать, что волна является поперечной или продольной. Однако при определенных частотах соотношения между компонентами напряженности электрического поля в волне E_x и E_y таковы, что приближенно можно говорить о продольных и поперечных волнах. Так, в области

высоких частот ($\omega \gg \Omega_e$), $E_y \gg E_x$ и волна имеет поляризацию, близкую к поперечной. Если же частота близка к верхнегибридной ($\omega \sim \sqrt{\omega_e^2 + \Omega_e^2}$), то $E_x \gg E_y$ и волна является квазипродольной.

§18. Одножидкостная модель плазмы

Другой моделью, используемой для описания плазмы, является модель электронной жидкости. Как и в одночастичной модели, ионы плазмы предполагаются неподвижными, а электроны рассматриваются как заряженная жидкая среда. Состояние ее характеризуется заданием ряда параметров - концентрации $N_e(\vec{r}, t)$, плотности $m N_e(\vec{r}, t) = \rho_e(\vec{r}, t)$, скорости течения жидкости $\vec{V}_e(\vec{r}, t)$, температуры T_e . Электронная жидкость взаимодействует с ионами через коллективные электрические

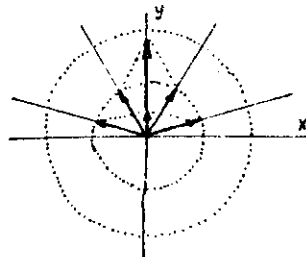


Рис.14

($\vec{E}(\vec{r}, t)$) и магнитные ($\vec{B}(\vec{r}, t)$) поля. Все эти величины зависят от координат и времени.

Уравнения гидродинамики устанавливают связь между изменением указанных величин. Скорость и плотность связаны уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div}(\rho_e \vec{V}_e) = 0.$$

Это уравнение учитывает, что изменение плотности электронной жидкости в данной точке со временем возникает из-за того, что электронная жидкость втекает (вытекает) в

данную точку. Возникновение электронов из-за ионизации или исчезновение из-за рекомбинации при этом не учитывается. Вместо уравнения для плотности обычно пишут уравнение для концентрации

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \text{div}(N_e \vec{V}_e) = 0. \quad (18.1)$$

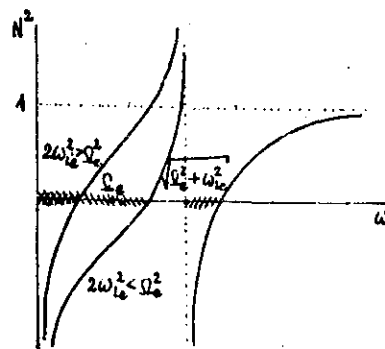


Рис.15

Второе уравнение гидродинамики определяет, как изменяется скорость течения электронной жидкости в данной точке со временем под действием различных факторов (eN_e — есть плотность заряда)

$$\rho_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = eN_e \vec{E} + \frac{eN_e}{c} [\vec{v}_e \vec{B}] - \vec{\nabla} p_e - \rho_e (\vec{v}_e \vec{\nabla}) \vec{v}_e.$$

Изменение импульса единицы объема жидкости связано с действием сил электрического поля (первое слагаемое справа), сил магнитного поля (второе слагаемое), сил теплового давления (третье слагаемое), перетеканием жидкости из соседних точек в данную (последнее слагаемое).

Реально, конечно, электроны не являются жидкостью, а представляют собой идеальный газ. Но уравнения гидродинамики сохраняют силу и в случае газа. При этом для уравнения состояния справедливо соотношение $p_e = N_e T_e$.

Обычно уравнение движения записывают в виде

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \vec{\nabla}) \vec{v}_e = \frac{e}{m} \vec{E} + \frac{e}{mc} [\vec{v}_e \vec{B}] - \frac{T_e}{m} \vec{\nabla} \ln N_e. \quad (18.2)$$

Температура электронов при этом принята постоянной и не зависит от координат. С одной стороны, это допущение представляется достаточно разумным, поскольку столкновения не учитываются и длина свободного пробега электронов бесконечна. С другой стороны, само введение температуры предполагает наличие столкновений. В этом месте имеется определенная непоследовательность данной модели и поэтому часто ее называют не гидродинамической, а квазигидродинамической.

Для того чтобы рассмотреть вопрос о том, какие волны могут распространяться в электронной жидкости, нужно определить сначала то состояние, в котором находится плазма в отсутствие волн. Это состояние называют основным (или невозбужденным) состоянием. Будем считать, что в основном состоянии в плазме нет электрических и магнитных полей, концентрация электронов постоянна и однородна (N_{e0}) и электронная жидкость неподвижна. Кроме этого, примем, что в каждой точке отсутствует электрический заряд (плазма нейтральна) и выполнено условие $eN_{e0} + e_i N_{i0} = 0$ (e_i — заряд одного иона, N_{i0} — концентрация ионов). Если $e = -|e|$, $e_i = +|e|$ (Z — зарядовое число), то из условия нейтральности следует

$$N_{e0} = Z N_{i0} \quad (18.3)$$

Рассмотрим малые отклонения от основного состояния (возбуждения, возмущения). Пусть эти отклонения сопровождаются изменением концентрации электронов $\delta N_e(\vec{r}, t)$, появлением скорости течения $\delta \vec{v}_e$ и электрических и магнитных полей ($\delta \vec{E}$, $\delta \vec{B}$). Температуру будем считать постоянной. Подставим все величины в уравнения (18.1) и (18.2). Считая все отклонения от основного состояния малыми, учтем только линейные по этим возмущениям слагаемые, а квадратичные отбросим. В оставшейся системе уравнений примем, что все величины зависят от координат и времени по закону $\exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$. Как уже обсуждалось ранее (§3), закон изменения соответствует бегущей в электронной жидкости волне. В результате дифференцирования получим

$$-i\omega \delta N_e + i\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_e N_{e0} = 0,$$

$$-i\omega \delta \vec{v}_e = \frac{e}{m} \delta \vec{E} - \frac{v_{Te}^2}{N_{e0}} i\vec{k} \delta N_e,$$

где введено обозначение $v_{Te}^2 = T_e/m$. Величину v_{Te} принято называть тепловой скоростью электронов. Исключим из двух уравнений величину δN_e и получим для определения компонент вектора $\delta \vec{v}_e$ уравнение

$$T_{ij} \delta v_{e,j} = \frac{ie}{m\omega} \delta E_i,$$

где

$$T_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2}.$$

Если не учитывать теплового давления ($v_{Te}^2 = 0$), то $\delta \vec{v}_e \parallel \delta \vec{E}$ и движение электронной жидкости происходит в направлении электрического поля. Учет теплового давления ведет к тому, что появляется дополнительное смещение у жидкости, направленное не вдоль поля, а вдоль волнового вектора $\vec{k}$, характеризующего направление неоднородности концентрации электронов.

Для того чтобы определить компоненты скорости $\delta \vec{v}_e$, надо найти обратный тензор T_{ij}^{-1} (см. приложение № 3). Используя формулу (П.3.4), получим

$$T_{ii}^{-1} = \delta_{ii} + \frac{k_i k_i}{k^2} \frac{k^2 v_{Te}^2 / \omega^2}{1 - (k^2 v_{Te}^2 / \omega^2)}.$$

В результате для плотности электронного тока, связанного в линейном приближении со скоростью течения жидкости соотношением

$$\vec{j} = e N_{e0} \delta \vec{v}_e, \quad \text{имеем}$$

Вто
скорость
нем под
ряда)

Рс?

Изменен
сил оло
ного по
слагает
(послед

Ре

ставляе
хранят
справе

Ос

$\frac{\partial v}{\partial t}$

Темпер
щей от
достат
длина
ромы,
вений.
данно
а ква:

распр
чала
волн.
стоян
элект

стоян
Кром
чески
+ e
Если
нейт

$$\delta j_i = \frac{ie^2 N_{e0}}{m\omega} T_{ii}^{-1} \delta E_i = G_{ii} \delta E_i$$

Для определения тензора диэлектрической проницаемости используем формулу (3.6)

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\omega_{ie}^2}{\omega^2} T_{ij}^{-1} = \delta_{ij} \left(1 - \frac{\omega_{ie}^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_{ie}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2 - k^2 v_{Te}^2} \cdot \frac{k_i k_j}{k^2}$$

Если сравнить этот тензор с общим выражением (3.1), справедливым в любой изотропной среде, то получим

$$\epsilon^L = 1 - \frac{\omega_{ie}^2}{\omega^2 - k^2 v_{Te}^2}, \quad \epsilon^T = 1 - \frac{\omega_{ie}^2}{\omega^2}$$

Воспользуемся выражениями (18.4) для исследования дисперсии волн. Поскольку выражение для ϵ^T совпадает с полученным в одночастичной модели (сравни с (13.5)), то для перпендикулярных волн сохраняются старые результаты.

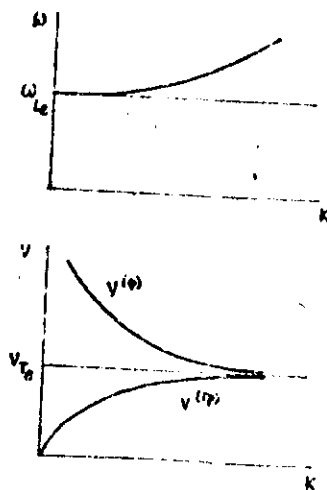


Рис.16

Фазовые скорости ленгмювских волн больше, чем тепловые скорости частиц, а групповые - меньше.

§19. Двухжидкостная гидродинамика. Ионный звук. Токовая неустойчивость

До сих пор ионы плазмы считались неподвижными. Это предположение кажется достаточно естественным в связи с большой массой ионов. Однако при медленных движениях в низкочастотных волнах произойдет и смещение ионов. Это смещение можно учесть, считая, что плазма представляет смесь двух жидкостей - электронной и ионной. Каждая жидкость движется со своей скоростью и имеет свою плотность, а взаимодействие между ними осуществляется через коллективные электрические и магнитные поля.

Уравнения двухжидкостной гидродинамики содержат помимо уравнений для электронной жидкости (18.1) и (18.2) аналогичные уравнения и для ионной жидкости

$$\text{div}(N_i \vec{v}_i) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i = \frac{e_i}{m_i} \vec{E} + \frac{e_i}{m_i c} [\vec{v}_i \vec{B}] - \frac{v_{Ti}^2}{N_i} \nabla N_i \quad (19.1)$$

Здесь N_i - концентрация ионов; $\vec{v}_i$ - скорость течения ионной жидкости; $v_{Ti} = \sqrt{T_i/m_i}$; T_i - температура ионов; v_{Ti} - тепловая скорость ионов. Следует отметить, что в плазме часто выполняется условие $T_e \gg T_i$ (неизотермическая плазма). Это связано с тем, что обычно нагреваются более эффективно электроны, а обмен энергией между ними и ионами происходит весьма медленно из-за большой разницы в массах.

Основное отличие от результатов (14.6) состоит в том, что частота ω зависит от волнового числа k (рис.16). При этом групповая скорость для ленгмювских волн отлична от нуля. Как видно из предыдущего параграфа, основные отличия между результатами одночастичной модели и модели жидкости возникают для продольных волн. Поэтому рассмотрим на базе двухжидкостной гидродинамики только продольные волны. Как известно (см. §5), для получения закона дисперсии продольных волн можно воспользоваться потенциальностью их поля ($\vec{E} = -\nabla \varphi$) и уравнением Пуассона $\nabla^2 \varphi = 4\pi(eN_e + e_i N_i)$.

Рассмотрим снова вопрос о малых возмущениях основного состояния нейтральной плазмы, в которой справедливо соотношение $N_e = N_i$. Будем характеризовать возмущение величинами δN_e , δv_e и δE . Из уравнений двухжидкостной гидродинамики в линейном приближении получим

$$\frac{\partial \delta N_e}{\partial t} + \text{div}(N_{e0} \delta \vec{v}_e) = 0, \quad \frac{\partial \delta \vec{v}_e}{\partial t} = \frac{e}{m} \delta \vec{E} - \frac{v_{Te}^2}{N_{e0}} \nabla \delta N_e$$

$$\frac{\partial \delta N_i}{\partial t} + \text{div}(N_{i0} \delta \vec{v}_i) = 0, \quad \frac{\partial \delta \vec{v}_i}{\partial t} = \frac{e_i}{m_i} \delta \vec{E} - \frac{v_{Ti}^2}{N_{i0}} \nabla \delta N_i$$

Эти, казалось бы, две независимые системы уравнений связаны через общее электрическое поле $\delta \vec{E}$, для которого имеет уравнение

$$\operatorname{div} \delta \vec{E} = 4\pi (e \delta N_e + e_i \delta N_i).$$

Положим, что возмущение распространяется в плазме в виде и все величины пропорциональны $\exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{z})$. Кроме того вместо поля используем потенциал $\delta \varphi$ ($\delta \vec{E} = -\vec{\nabla} \delta \varphi$). В результате получим для возмущений плотности (концентрации)

$$\delta N_e = \frac{k^2 e N_{e0} \delta \varphi}{m (\omega^2 - k^2 v_{Te}^2)}, \quad \delta N_i = \frac{k^2 e_i N_{i0} \delta \varphi}{m_i (\omega^2 - k^2 v_{Ti}^2)}.$$

Подставив эти выражения в уравнение для поля, найдем закон дисперсии продольных волн в электронно-ионной жидкости

$$\epsilon^l = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - k^2 v_{Ti}^2}.$$

Видно, что вклад электронов и ионов входит в диэлектрическую проницаемость аддитивно. При $m_i \rightarrow \infty$ вклад от ионов не учитывается и из (19.2) получаем результат (18.4) ($\omega_{pi}^2 = 4\pi e_i^2 N_{i0}$).

Уравнение (19.2) является биквадратным и допускает точное решение. Однако мы рассмотрим его решение в разных пределах скоростей волн. Это позволяет нам более наглядно и просто получить результаты.

Начнем с быстрых волн, фазовая скорость которых намного больше тепловых скоростей ионов и электронов ($\omega > kv_{Te} > kv_{Ti}$). В этом пределе из (19.2) получаем $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$. Это есть частота ленгмювских колебаний, в выражении для которой присутствует не только ранее учитывавшийся вклад от электронов и малый вклад от ионов. Результат этот находится в соответствии с результатом одночастичной модели.

Рассмотрим более медленные волны с фазовыми скоростями, превышающими ионные тепловые скорости, но малыми по сравнению с электронными тепловыми скоростями ($kv_{Te} > \omega > kv_{Ti}$). В этом случае уравнение (19.2) имеет вид

$$\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + (k r_{De})^2},$$

где $r_{De} = v_{Te}/\omega_{pe}$ — дебаевский радиус электронов. Эти волны связаны с движением ионов и в пределе $m_i \rightarrow \infty$ они исчезают.

Такие волны называют ионно-звуковыми. Такое название имеет под собой определенное основание. Дело в том, что для обычного звука в газах дисперсия подобна закону дисперсии (19.3) в пределе длин волн ($\lambda > r_{De}$) $\omega \approx kv_s$, где величину

$$v_s = v_{Te} \omega_{pe} = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi N_{e0} e^2}} \sqrt{\frac{4\pi e_i^2 N_{i0}}{m_i}} = \sqrt{\frac{z T_e}{m_i}} \quad (19.4)$$

называют ионно-звуковой скоростью. Закон дисперсии ионно-звуковых волн показан на рис. 17.

Обсудим вопрос о том, когда могут существовать ионно-звуковые волны. Для этого вернемся к условию $kv_{Te} > \omega > kv_{Ti}$. Если длины ионно-звуковых волн достаточно большие ($k r_{De} < 1$), то отсюда получим $\frac{m_i}{m} T_e > z T_i > T_i$. Обычно зарядовое число ионов z составляет единицу.

Для существования ионно-звуковых волн необходима неизотермическая плазма ($T_e > T_i$). Для коротких длин волн ($k r_{De} > 1$) эта близка к ионной ленгмювской частоте ($\omega \approx \omega_{pi}$). При условии $\omega > kv_{Ti}$ сводится к $k r_{Di} < 1$. Совместно с требованием $k r_{De} > 1$ это приводит к условию $r_{De} > r_{Di}$, которое выполняется только при $z T_e > T_i$. Таким образом, и в этом случае плазма неизотермическая.

Рассмотрим вопрос об относительной величине возмущений электронной и ионной концентраций в ионно-звуковых волнах. Используя приведенные выше выражения для δN_e и δN_i , запишем отношение

$$\frac{\delta N_e}{\delta N_i} = \frac{e m_i N_{e0}}{e_i m N_{i0}} \frac{\omega^2 - k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2 - k^2 v_{Te}^2} \approx \frac{m_i \omega^2}{m k^2 v_{Te}^2}.$$

Для длинноволновых ($\omega \approx kv_s$), то $\delta N_e/\delta N_i \approx z$. При $z=1$ возмущения концентраций электронов и ионов одного порядка. Для коротковолновых ($\omega \approx \omega_{pi}$), то $(\delta N_e/\delta N_i) \approx \frac{z \omega_{pi}^2}{k^2 v_{Te}^2} = z (k r_{De})^2 < 1$. В этом случае возмущения ионной концентрации намного превышают возмущения концентрации электронов. Для лучшего понимания причин, по которым оказываются возмущения ионно-звуковые волны в плазме, рассмотрим рис. 18. Если

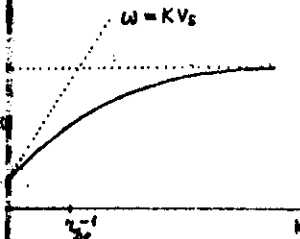


Рис. 17

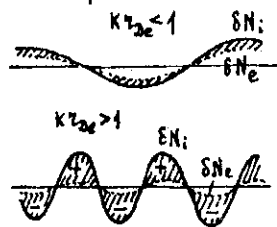


Рис. 18

своей плотности, не перераспределив ионы. Возникает волна, в которой силы электронного давления действуют на ионы. В случае больших длин волн и низких частот обе жидкости движутся почти вместе (см. рис. 18). При коротких волнах электроны возмущаются слабо и поле разделения зарядов значительно больше.

Рассматриваемые до сих пор основные состояния плазмы бывают таковы, что малые возмущения распространялись в виде волн и не нарастали. Такие состояния плазмы называются устойчивыми. Если же малое отклонение от основного состояния (возмущение) растет и система (плазма) все больше отходит от начального основного состояния, то говорят о неустойчивости. Имеется разветвленная классификация неустойчивостей. Один из методов классификации — указание основной особенности неравновесного состояния плазмы (токовые, потоковые, дрейфовые, анизотропия температуры, параметрические и т. д.). Другой метод — указание характера развития возмущений со временем (апериодические, осцилляторные и т. д.). Третий метод — указание роли отдельных частиц (гидродинамические, кинетические). Четвертый метод — указание эволюции возмущения во времени и пространстве (абсолютные, конвективные).

Рассмотрим одну из наиболее широко известных и часто встречающихся неустойчивостей, так называемую токовую неустойчивость. Она была открыта в 1959 году Бунеманом (потому ее часто называют бунемановской неустойчивостью).

Пусть все электроны плазмы движутся относительно ионов с постоянной скоростью $\vec{u}$ и, следовательно, по плазме течет ток. Будем характеризовать основное состояние плазмы концентрациями частиц (N_e , N_i) и скоростью электронов $\vec{v}_e = \vec{u}$. Ра-

в плазме возникло возмущение ионной плотности, то на электроны действует поле разделения зарядов и возникнет также возмущение плотности электронов. Но электроны при $T_e > T_i$ имеют большее давление. Сила давления всегда стремится выровнять плотность электронов и сделать ее однородной. Из-за поля разделения зарядов эта сила действует и на ионы. Электроны не могут выровнять

смотрим малые отклонения от этого основного состояния. Из уравнений (19.1) и (19.2) для электронов и (19.1) для ионов получим

$$\frac{\partial \delta N_e}{\partial t} + N_{e0} \operatorname{div} \delta \vec{v}_e + \vec{u} \vec{\nabla} \delta N_e = 0, \quad \frac{\partial \delta \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\nabla}) \delta \vec{v}_e = -\frac{e}{m} \vec{\nabla} \delta \varphi - \frac{v_{Te}^2}{N_{e0}} \vec{\nabla} \delta N_e$$

$$\frac{\partial \delta N_i}{\partial t} + N_{i0} \operatorname{div} \delta \vec{v}_i = 0, \quad \frac{\partial \delta \vec{v}_i}{\partial t} = -\frac{e_i}{m_i} \vec{\nabla} \delta \varphi - \frac{v_{Ti}^2}{N_{i0}} \vec{\nabla} \delta N_i.$$

Если положить, что все возмущения зависят от координат и времени по закону $\exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r})$, то из уравнений для электронных возмущений получим

$$(-i\omega + i\vec{k} \cdot \vec{u}) \delta N_e + N_{e0} i\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_e = 0, \quad (-i\omega + i\vec{k} \cdot \vec{u}) \delta \vec{v}_e = -\frac{e}{m} i\vec{k} \delta \varphi + i\vec{k} \frac{v_{Te}^2}{N_{e0}} \delta N_e.$$

Видно, что все отличие от случая неподвижных электронов состоит в том, что в электронных уравнениях вместо ω входит величина $\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}$. Поэтому легко догадаться, что дисперсионное уравнение, в которое вклад от электронов и ионов входит аддитивно, отличается от (19.2) заменой в электронном слагаемом ω на $\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}$.

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{u})^2 - k^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - k^2 v_{Ti}^2} = 0.$$

Следует заметить, что замена ω на $(\omega - \vec{k} \cdot \vec{u})$ связана с эффектом Доплера. Если имеется волна с частотой ω и $\vec{k}$ и среда (электронный газ) смещается со скоростью $\vec{u}$, то в лабораторной системе частота волны изменится и станет $\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}$. Так, например, в случае бесконечной массы ионов ($\omega_{pi} = 0$) и в пренебрежении тепловым давлением из дисперсионного уравнения следует

$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{u} \pm \omega_{pe}.$$

Если имеется поток электронов, то поле волны, идущей в направлении потока, есть $\exp[-i(\omega_{pe} + k u)t + i k x]$ и частота волны возрастает. Если же волна идет навстречу потоку, то поле в ней изменяется по закону $\exp[i(\omega_{pe} - k u)t + i k x]$ и частота падает. При выполнении условия $\omega_{pe} = k u$ волна останавливается и ее поле относительно лабораторной системы изменяется только в пространстве, но не изменяется со временем.

Рассмотрим теперь решение дисперсионного уравнения. Будем считать, что фазовые скорости волн большие, чем собственной системе $|\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}| > k v_{Te}$, $|\omega| > k v_{Ti}$. Пренебрежем тепловым движением и тепловым давлением частиц. В результате получим

$$1 - \frac{\omega_{ie}^2}{(\omega - \vec{k}\vec{u})^2} - \frac{\omega_{ie}^2}{\omega^2} = 0. \quad (19.5)$$

Если скорость течения электронов мала ($|\vec{k}\vec{u}| < |\omega|$), то из уравнения (19.5) следует закон дисперсии ленгмювских волн. Если наоборот скорость течения большая ($|\vec{k}\vec{u}| > |\omega|$), то получим

$$\omega^2 = \frac{\omega_{ie}^2}{1 - (\omega_{ie}^2/(\vec{k}\vec{u})^2)} \approx -\frac{\omega_{ie}^2}{\omega_{ie}^2} (\vec{k}\vec{u})^2.$$

Видно, что при $|\vec{k}\vec{u}| < \omega_{ie}$ $\omega^2 < 0$ и решение для ω чисто мнимое. В этом случае возмущение нарастает со временем экспоненциально и $\text{Im}\omega = \gamma$ определяет инкремент

$$\gamma = \frac{\omega_{ie}}{\sqrt{\frac{\omega_{ie}^2}{(\vec{k}\vec{u})^2} - 1}} = \frac{\omega_{ie}}{\sqrt{(\frac{\omega_{ie}}{\vec{k}\vec{u}})^2 - 1}(\frac{\omega_{ie}}{\vec{k}\vec{u}} + 1)}$$

Поскольку $\text{Re}\omega = 0$, то говорят, что неустойчивость является апериодической.

При $|\vec{k}\vec{u}| \rightarrow \omega_{ie}$ согласно полученной формуле $\gamma \rightarrow \infty$. Но при $\vec{k}\vec{u} = \omega_{ie}$ нарушается условие $|\omega| < |\vec{k}\vec{u}|$ и решение уравнения требует уточнения. Положим, что $\vec{k}\vec{u} = \omega_{ie}$ и $|\omega| \ll \omega_{ie}$. Тогда из уравнения (19.5) найдем

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_{ie}}{2^{1/3}} \left(\frac{\omega_{ie}}{\omega_{ie}} \right)^{2/3}, \quad \omega_{\pm} = \frac{\omega_{ie}}{2^{1/3}} \left(\frac{\omega_{ie}}{\omega_{ie}} \right)^{2/3} \frac{1}{2} (1 \pm i\sqrt{3}).$$

Мнимая часть частоты, характеризующая инкремент, равна

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}\omega_{ie}}{2^{1/3}} \left(\frac{em}{m_i} \right)^{1/3} \quad (19.6)$$

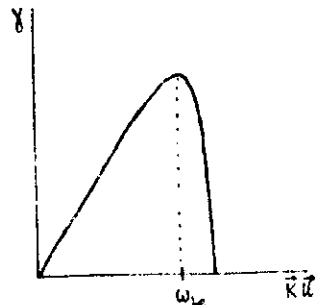


Рис.19

График для инкремента в зависимости от параметра $\vec{k}\vec{u}$ показан на рис.19. При $\omega_{ie} > \vec{k}\vec{u}$ $\gamma \sim \vec{k}\vec{u} \sqrt{em/m_i}$. При $\vec{k}\vec{u} = \omega_{ie}$ инкремент достигает максимума и равен (19.6).

Остановимся на физической причине бинемановской неустойчивости. Если электроны движутся слева направо, то бегущая им навстречу волна в лабораторной системе координат

замедляется. Как уже отмечалось, в случае $\omega_{ie} = \vec{k}\vec{u}$ частота этой волны просто равна нулю и имеется застывшее периодическое возмущение электронной концентрации. Такое стационарное поле действует на ионы и приводит к возмущению их концентрации. В свою очередь возмущение концентрации ионов позволяет увеличить возмущение концентрации электронов и этот процесс нарастает лавинообразно. В результате на однородном распределении плотности возникает периодическая структура, амплитуда которой нарастает со временем.

§20. Кинетическое уравнение Власова

Наиболее полной является кинетическая модель плазмы. В этой модели для описания плазмы используется функция распределения частиц $f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, где индекс α указывает сорт частиц ($\alpha = e$ - электроны, $\alpha = i$ - ионы); $\vec{r}$ - координата; t - время, $\vec{v}$ - скорость частиц. Величина $\int_{\alpha} d\vec{r} d\vec{v}$ определяет число частиц сорта α , находящихся в момент времени t в элементе объема $\Delta\vec{r}$ вблизи точки $\vec{r}$ и имеющих скорость в интервале $\Delta\vec{v}$ вблизи значения $\vec{v}$ (рис.20). Произведение $\Delta\vec{r} \Delta\vec{v}$ называется элементом фазового объема.

В пренебрежении столкновениями частиц изменение функции распределения определяется уравнением Власова, которое имеет вид

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{r}} + \vec{w} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (20.1)$$

где $\vec{w}$ - ускорение частицы.

Смысл уравнения Власова легче понять, рассмотрев баланс частиц в элементе фазового объема. Функция распределения определяет число частиц, находящихся в элементе фазового объема в момент времени t . Имеются две причины, по которым это число за время δt изменяется. Либо частицы из соседних точек приходят в данный элемент объема, имея при этом скорость $\vec{v}$

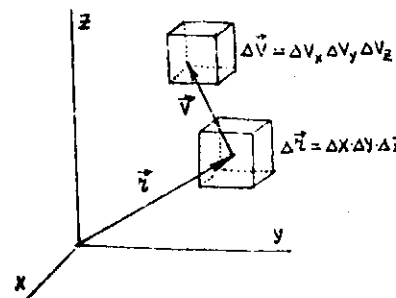


Рис.20

$$\frac{f_a(\vec{r} - \delta\vec{r}, \vec{v}, t) - f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\delta t} = - \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}},$$

либо имеющиеся в объеме $\Delta\vec{r}$ частицы изменяют свою скорость и тем самым выходят из интервала $\Delta\vec{v}$

$$\frac{f_a(\vec{r}, \vec{v} - \delta\vec{v}, t) - f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\delta t} = - \frac{\delta\vec{v}}{\delta t} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}}.$$

В результате полное изменение числа частиц в элементе фазового объема со временем равно

$$\frac{\delta f_a}{\delta t} = - \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} - \frac{\delta\vec{v}}{\delta t} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}}.$$

Переходя к пределу $\delta t \rightarrow 0$, получим уравнение Власова (20.1).

В плазме ускорение частиц определяется силой, действующей на них со стороны электрических и магнитных полей

$$\vec{w}_a = \frac{e_a}{m_a} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_a \vec{B}] \right). \quad (20.2)$$

Поля в формуле (20.2) сами зависят от движения заряженных частиц плазмы. Если считать, что сторонних источников поля в плазме нет, то поля полностью определяются движением частиц плазмы и называются самоорганизующимися. Величина их определяется из уравнений Максвелла (1.1), в которых плотность тока $\vec{j}$ и плотность заряда ρ создаются частицами плазмы и сами выражаются через функцию распределения

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_a e_a \int d\vec{v}_a f_a, \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_a e_a \int d\vec{v}_a \vec{v}_a f_a. \quad (20.3)$$

Суммирование проводится по частицам различных сортов.

Система уравнений Максвелла совместно с кинетическим уравнением Власова наиболее детально описывает коллективные поля в плазме в пренебрежении столкновениями частиц.

§21. Тензор диэлектрической проницаемости в кинетической модели

Рассмотрим выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы, которое получается с помощью уравнения Власова. Будем считать, что в отсутствие электромагнитных волн плазма однородна, стационарна и функция распределения есть $F_a(\vec{v})$

В изотропной плазме, где нет выделенных направлений, функция F_a зависит только от абсолютной величины скорости частиц и не зависит от направления скорости.

Малое отклонение от равновесного состояния приводит к изменению функции распределения на величину $\delta f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)$. При этом также могут возникать электрическое $\delta\vec{E}$ и магнитное поля. Из уравнения Власова (20.1), в котором для ускорения использована формула (20.2), получим в линейном приближении

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \delta f_a}{\partial \vec{v}} + \frac{e_a}{m_a} \left(\delta\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \cdot \delta\vec{B}] \right) \frac{\partial F_a}{\partial \vec{v}} = 0.$$

Будем считать, что возмущение представляет собой монохроматическую волну и все характеризующие его величины зависят от координат и времени по закону $e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$. Из уравнения получим возмущение функции распределения

$$\delta f_a = - \frac{ie_a}{m_a(\omega - \vec{k}\vec{v})} \left(\delta\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \cdot \delta\vec{B}] \right) \frac{\partial F_a}{\partial \vec{v}}$$

Величина возмущения функции распределения δf_a существенно зависит от скоростей частиц и обращается в бесконечность при выполнении условия

$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}. \quad (21.1)$$

Частицы, удовлетворяющие условию (21.1), называются резонансными в отличие от остальных частиц, которые называются нерезонансными, пролетными (или адиабатическими). Выделенность резонансных частиц связана с тем, что со стороны волны на них действует постоянное поле.

Рассмотрим волну, распространяющуюся с фазовой скоростью ω/k вдоль оси OX. В системе координат, движущейся вместе с волной, поля постоянны и не зависят от времени. Поэтому на частицу, движущуюся в ту же сторону, что и волна с имеющей скорость, которая совпадает с фазовой скоростью волны, действуют постоянные поля. Под действием этих полей происходит регулярное изменение скорости частицы и связанное с этим сильное возмущение функции распределения. При этом постоянные поля действуют на те частицы, которые движутся не только строго в направлении распространения волны, но и на частицы, движущиеся под углом к ее волновому фронту. Для резонансного взаимодействия нужно, чтобы проекция скорости движения частицы на направление распространения

ния волнового фронта совпадала с фазовой скоростью (рис.21). Естественно, что рассмотрение резонансных частиц возможно только в кинетической модели плазмы.

Между электрическим и магнитным полями имеется связь (см. первое уравнение в формулах (1.1)), которая в случае волны имеет вид $\delta \vec{B} = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \delta \vec{E}]$. Поэтому входящая в выражение для возмущения функции распределения величина выражается только через напряженность электрического поля

$$\delta E_i + \frac{1}{c} [\vec{v} \delta \vec{B}]_i = \delta E_i + \frac{1}{\omega} [\vec{v} [\vec{k} \delta \vec{E}]]_i = \delta E_i + \frac{1}{\omega} (k_i (\vec{v} \delta \vec{E}) - \delta E_i (k_i)) = \left\{ \delta_{ij} + \frac{1}{\omega} (k_i v_j - \delta_{ij} k \vec{v}) \right\} \delta E_j = \alpha_{ij} \delta E_j.$$

Если в волне отсутствует магнитное поле (продольная волна), то $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$.

Используя такое соотношение, запишем возмущение функции распределения в более компактном виде,

$$\delta f_\alpha = - \frac{ie_\alpha}{m_\alpha (\omega - \vec{k} \vec{v})} \alpha_{ij} \delta E_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_i}. \quad (21.2)$$

Возмущению функции распределения соответствует возмущение плотности тока. Из формулы (20.3) получим

$$\delta j_i = \sum_\alpha e_\alpha \int d\vec{v} v_i \delta f_\alpha = \sum_\alpha \int d\vec{v} \frac{-ie_\alpha^2}{m_\alpha (\omega - \vec{k} \vec{v})} v_i \left(\alpha_{ij} \delta E_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_i} \right).$$

В соответствии с общим определением (3.5) для тензора электропроводности отсюда получаем

$$\sigma_{ij} = -i \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \int d\vec{v} \frac{v_i}{\omega - \vec{k} \vec{v}} \alpha_{ij} \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_i}. \quad (21.3)$$

Далее традиционным путем, используя формулу (3.6), получим тензор диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{m_\alpha \omega^2} \int d\vec{v} v_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_i} \left(\delta_{ij} + \frac{k_i v_j}{\omega - \vec{k} \vec{v}} \right). \quad (21.4)$$

Выражение для ϵ_{ij} зависит от вида функции распределения частиц в невозмущенном состоянии F_α . В частности, для холодной плазмы скорости всех частиц в основном состоянии равны нулю и

$$F_\alpha(\vec{v}) = N_\alpha \delta(\vec{v}) = N_\alpha \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z), \quad (21.5)$$

где N_α - концентрация частиц сорта α . Легко убедиться, что

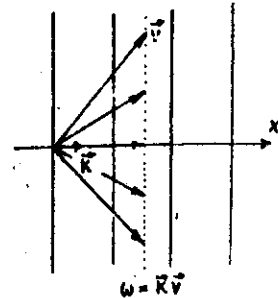


Рис.21

функция (21.5) удовлетворяет очевидному условию $\int d\vec{v} F_\alpha(v) = N_\alpha$.

В формуле (21.4) проведем сначала интегрирование по частям, а затем подставим выражение (21.5). В результате получим

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} \left(1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \right).$$

Если считать массу ионов бесконечно большой ($\omega_{pi} = 0$), то полученный результат совпадает с формулой (13.5). Таким образом, из кинетической модели в пределе холод-

ной плазмы следует результаты, полученные ранее.

Рассмотрим формулу (21.4) для случая изотропной плазмы. В этом случае можно считать, что F_α зависит от энергии частиц $\epsilon_\alpha = m_\alpha v^2/2$, и из формулы (21.4) найдем

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{\omega^2} \int d\vec{v} F'_\alpha \frac{v_i v_j}{\omega - \vec{k} \vec{v}},$$

где $F'_\alpha = dF_\alpha/d\epsilon_\alpha$.

Согласно общей формуле (5.1) в изотропной среде тензор диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} выражается через две скалярные функции ϵ^l и ϵ^{tr} . Если известен тензор ϵ_{ij} , то эти функции легко найти, используя свертку $(k_i k_j / k^2) \epsilon_{ij} = \epsilon^l$ и вычитивspur тензора $\epsilon_{ii} = 2\epsilon^{tr} + \epsilon^l$. С помощью полученного выражения ϵ_{ij} найдем продольную диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon^l = 1 + \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{\omega k^2} \int d\vec{v} \frac{(\vec{k} \vec{v})^2}{\omega - \vec{k} \vec{v}} F'_\alpha. \quad (21.6)$$

Для ϵ^l часто используется другая форма записи. Чтобы ее получить, используем тождество $\vec{k} \vec{v} / (\omega - \vec{k} \vec{v}) = [\omega / (\omega - \vec{k} \vec{v})] - 1$. Подставим его в формулу (21.6). В результате найдем

$$\epsilon^l = 1 + \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2} \int d\vec{v} \frac{(\vec{k} \vec{v})}{\omega - (\vec{k} \vec{v})} F'_\alpha. \quad (21.7)$$

Для поперечной диэлектрической проницаемости с помощью приведенных выше соотношений получаем

$$\epsilon^{tr} = \frac{\epsilon_{ii} - \epsilon^l}{2} = 1 + \frac{1}{2} \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{\omega k^2} \int d\vec{v} \frac{[\vec{k} \vec{v}]^2}{\omega - \vec{k} \vec{v}} F'_\alpha. \quad (21.8)$$

Таким образом, при кинетическом рассмотрении тензор диэлектрической проницаемости зависит от функции распределения частиц. Исследовать возможные типы волн в плазме можно только в том случае, что вид функции распределения F_α известен.

§22. Ленгмюровские волны в максвелловской плазме

Для того чтобы воспользоваться формулами кинетической теории, нужно задать функцию распределения частиц в основном состоянии. Вид этой функции зависит от способа создания плазмы. Обычно принято считать, что функция распределения является максвелловской и имеет вид

$$F_\alpha = N_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha}} = \frac{N_\alpha}{(\sqrt{2\pi} v_{T\alpha})^3} e^{-\frac{v^2}{2v_{T\alpha}^2}} \quad (22.1)$$

Плазму, функция распределения частиц в которой имеет вид (22.1), принято называть максвелловской. В этом случае производная от функции распределения F'_α выражается снова через F_α . Действительно, из (22.1) получим $F'_\alpha = -\frac{1}{T_\alpha} F_\alpha$. Используем это соотношение и запишем выражение (21.7) для продольной диэлектрической проницаемости плазмы

$$\varepsilon^l = 1 - \sum_\alpha \frac{4\pi e^2 N_\alpha}{k^2 T_\alpha} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{3/2} \int d\vec{v} \left(\frac{\omega}{\omega - \vec{k}\vec{v}} - 1 \right) e^{-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha}}$$

Как легко убедиться непосредственным интегрированием, $\left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{3/2} \int d\vec{v} \exp(-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha}) = 1$. Тогда, используя определение дебаевского радиуса, перепишем выражение для ε^l в виде

$$\varepsilon^l = 1 + \sum_\alpha \frac{1}{(k\lambda_{D\alpha})^2} (1 - J_\alpha), \quad (22.2)$$

где

$$J_\alpha = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{3/2} \int d\vec{v} \frac{\omega}{\omega - \vec{k}\vec{v}} e^{-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha}}$$

Введем декартову систему координат с осью Oz вдоль вектора $\vec{k}$ (рис.22). Воспользовавшись выражением для интеграла Пуассона, $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/\alpha$ проведем интегрирование по v_x и v_y . В результате получим

$$J_\alpha = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{\omega}{\omega - kv_z} e^{-\frac{m_\alpha v_z^2}{2T_\alpha}}$$

Используя новую безразмерную переменную интегрирования

$$x = \frac{v_z}{v_{T\alpha}} = \frac{v_z \sqrt{m_\alpha}}{\sqrt{T_\alpha}}, \text{ запишем это выражение в виде}$$

$$J_\alpha(\beta_\alpha) = \frac{\beta_\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\beta_\alpha - x} e^{-x^2/2}, \quad (22.3)$$

где $\beta_\alpha = \frac{\omega}{kv_{T\alpha}}$ - отношение фазовой скорости волны к тепловой скорости частиц плазмы сорта α .

Первоначально особенность несобственного интеграла (22.3) понималась в смысле главного значения

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\beta_\alpha - x} e^{-x^2/2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\beta_\alpha - \varepsilon} + \int_{\beta_\alpha + \varepsilon}^{\infty} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\beta_\alpha - x} e^{-x^2/2}$$

В этом случае можно построить график интеграла (22.3) в зависимости от параметра β_α (рис.23). Знание асимптотик функции J_α позволяет получить простые законы дисперсии для продольных волн в кинетическом приближении.

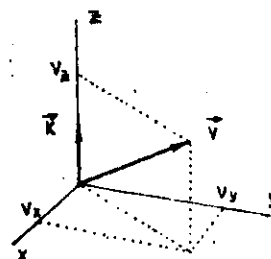


Рис.22

Рассмотрим сначала быстрые продольные волны, фазовая скорость которых превышает тепловые скорости частиц плазмы ($\frac{\omega}{k} > v_{T\alpha} > v_{Ti}$). Тогда $\beta_i > \beta_e > 1$ и согласно (22.2) имеем из условия $\varepsilon^l = 0$

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + \omega_{Li}^2$$

Однако это еще не решение дисперсионного уравнения, но поскольку

второе слагаемое в круглой скобке мало, то в нем можно положить $\omega \approx \omega_{Le}$ и записать

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 \left(1 + 3 k^2 \lambda_{De}^2 \right) + \omega_{Li}^2. \quad (22.4)$$

Полученная в гидродинамическом приближении формула (18.5) отличается от формулы (22.4) в двух отношениях - в ней не учитывается движение ионов и вместо числа 3 стоит число 1. Учет движения ионов в гидродинамике (см. § 19) привел также к появлению ионной ленгмювской частоты. Что же касается числа 3, то его появление показывает недостаток гидродинамической модели. Действительно, в гидродинамической модели использовалось уравнение состояния (см. § 18) $p_e = N_e T_e$ и считалось, что такое уравнение состояния сохраняется и для возмущений, которые происходят при постоянной температуре $\delta p_e = T_e \delta N_e$. Из уравнения

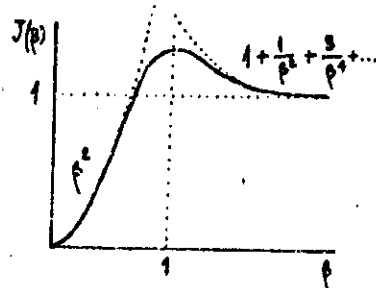


Рис. 23

в единицу времени и определяет силу, действующую на элемент объема из-за теплового движения

$$\vec{F}_T = \sum_{\alpha} \int d\vec{v} (m_{\alpha} \vec{v}) \left(\vec{v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{v}} \right).$$

При распространении ленгмювской волны существенно только тепловое движение электронов и в сумме по α следует удерживать лишь одно слагаемое. При этом $f_e = F_e + \delta f_e$. Поскольку в основном состоянии плазма однородна и F_e не зависит от координат, то сила $\vec{F}_T$ связана только с возмущением функции распределения. Для продольной волны из (21.2) найдем

$$F_T = \frac{k \vec{F}_T}{k} = - \frac{ie \delta \varphi}{k} k^2 \int d\vec{v} F_e \left(\frac{\omega^2}{(\omega - k\vec{v})^2} - 1 \right) \cdot m_e.$$

В интересующем нас случае ленгмювских волн $\omega \gg k\vec{v}$ и стоящую под интегралом функцию легко разложить в ряд. В результате интегрирования получим

$$F_T = -ie \delta \varphi 3 N_e k \frac{v_{Te}^2}{\omega^2} \cdot m_e$$

Сопоставляя это выражение с $F_T = -ik \delta p_e$, получим при $\omega = \omega_{pe}$ отличие на коэффициент 3.

§23. Затухание Ландау

Как уже отмечалось выше, в плазме имеется особая группа резонансных частиц, скорости которых удовлетворяют условию (21.1). Для этих частиц возмущения функции распределения очень велики и теория возмущений в той форме, которую мы использовали, непригодна.

Пуассона можно выразить δN_e через возмущения потенциала $\delta \varphi$ и записать $\delta p_e = T_e \frac{k^2 \delta \varphi}{4\pi e}$.

В действительности же тепловое движение частиц приводит к тому, что они, переходя из одной точки пространства в другую, переносят импульс. В результате импульс частиц в данном элементе объема может измениться. Связанное с этим изменение импульса частиц в элементе объема

В 1946 году Л.Д.Ландау обогнал эту трудность с помощью следующей модификации теории возмущений. Если представить, что поле волны возникло мгновенно в некоторый момент времени, скажем при $t = 0$, то оно не успеет так же мгновенно изменить функцию распределения. Для изменения функции распределения требуется некоторое время, в течение которого можно использовать теорию возмущений. За это время будет происходить изменение не только функции распределения, но и амплитуды волны. Поэтому поле волны следует задать в виде $\vec{E}_0 \exp[ik\vec{r} - i(\omega' + i\omega'')t]$. Множитель $e^{-\omega''t}$ учитывает затухание ($\omega'' < 0$) или нарастание амплитуды волны. В течение какого времени можно считать возмущение функции распределения малым? На этот вопрос теория Ландау ответа не дает, но заведомо имеется время, в течение которого это так и есть.

Посуществу, Ландау предложил считать частоту волны комплексной. Тогда все выводы Власова останутся справедливыми, но в формуле (22.3) для максвелловской плазмы следует заменить β_{α} на $\beta'_{\alpha} + i\beta''_{\alpha}$, где $\beta'_{\alpha} = \omega'/k v_{T\alpha}$, $\beta''_{\alpha} = \omega''/k v_{T\alpha}$.

$$J_{\alpha} = \frac{\beta'_{\alpha} + i\beta''_{\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\beta'_{\alpha} + i\beta''_{\alpha}) - x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Если амплитуда волны в момент включения очень мала, то время искажения функции распределения весьма велико, а, следовательно, велико и время изменения амплитуды, т.е. $\omega'' \rightarrow 0$. Строго говоря, вопрос о предельном переходе $\omega'' \rightarrow 0$ связан с предельным переходом $\vec{E}_0 \rightarrow 0$.

Запишем стоящую в знаменателе формулы для J_{α} величину с помощью так называемой формулы Сахоцкого - Племеля

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx F(x)}{x - x_0 + i\epsilon} = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx F(x)}{x - x_0} - i\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \delta(x - x_0) dx. \quad (23.1)$$

Используем формулу (23.1) и запишем выражение (22.2) в виде

$$\epsilon^L = 1 + \sum_{\alpha} \frac{1}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left(1 - P J_{\alpha} + i\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\beta'_{\alpha}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \delta(x - \beta'_{\alpha}) \right).$$

Таким образом, продольная диэлектрическая проницаемость помимо действительной части содержит мнимую часть

$$\epsilon'' = \sum_{\alpha} \frac{1}{k^2 v_{T\alpha}^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta'_{\alpha} e^{-\beta'^2_{\alpha}/2}$$

где $\lambda = \omega / kv_{Te}$. Если рассмотреть ленгмювские волны и считать затухание малым, то можно положить приближенно $\omega' \approx \omega_{Le}$. Тогда

$$\varepsilon^{L''} = \frac{1}{k^2 v_{Te}^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}}{kv_{Te}} e^{-\frac{\omega_{Le}^2}{2k^2 v_{Te}^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k^2 v_{Te}^2} e^{-\frac{1}{2(kv_{Te})^2}}$$

Отсюда с помощью формулы (6.4) легко найти декремент затухания ленгмювских волн (затухание Ландау)

$$\gamma = -\frac{\varepsilon^{L''}}{\partial \varepsilon^{L''} / \partial \omega'} = -\frac{\omega_{Le}}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(kv_{Te})^2} e^{-\frac{1}{2(kv_{Te})^2}} \quad (23.2)$$

На рис.24 показан график функции (23.2) в зависимости от параметра kv_{Te} . При $kv_{Te}^2 \sim 1$ $|\gamma/\omega_{Le}| \sim 1$ и такие волны в плазме распространяться не могут. Это один из важных выводов кинетической теории и связан он с тем, что для таких волн практически все частицы плазмы являются резонансными ($\omega_{Le} \sim kv_{Te}$).

Если не считать распределение частиц максвелловским, то

$$\varepsilon^{L''} = -\sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2}{m_a k^2} \left(k \frac{\partial F_a}{\partial v} \right)_{\omega = kv} \\ \varepsilon^L = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{m_a k^2} \rho \int dv \frac{k \frac{\partial F_a}{\partial v}}{\omega - kv}$$

Используя снова формулу (6.4), легко найти декремент затухания, необходимый в дальнейшем

$$\gamma = -\frac{\sum_a \frac{4\pi e_a^2}{m_a k^2} \left(k \frac{\partial F_a}{\partial v} \right)_{\omega = kv}}{\frac{\partial}{\partial \omega} \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{m_a k^2} \rho \int dv \frac{k \frac{\partial F_a}{\partial v}}{\omega - kv}} \quad (23.3)$$

Обсудим теперь физическую причину затухания Ландау. Когда включается поле волны, которую будем считать продольной, то в поле этой волны имеются резонансные частицы (рис.25), а также более медленные и более быстрые частицы. Резонансные частицы движутся все время в постоянном поле и, конечно, их энергия изменяется, хотя в линейном приближении этот эффект не учитывается. Более медленные частицы стремятся отстать от волны, но поле волны подгоняет их и при этом совершает работу. Более быстрые частицы обгоняют волну и поле волны их тормозит. В результате полное изменение энергии волны определяется тем, каких частиц больше — медленных или быстрых. Для максвелло-

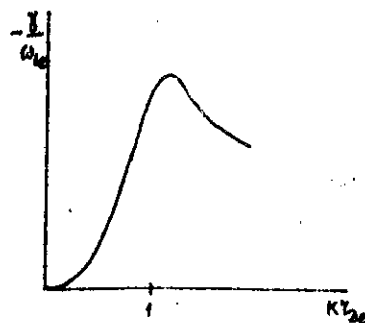


Рис.24

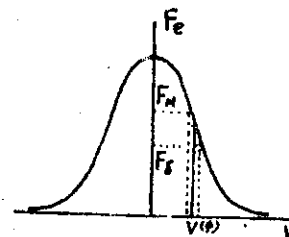


Рис.25

ет по закону $\exp(-x/\delta)$, где величина δ называется глубиной проникновения.

Глубина проникновения зависит от частоты падающего излучения. Можно выделить три области частот, в которых толщина скин-слоя определяется различными физическими механизмами.

Начнем с высоких частот ($\omega \gg \gamma$), когда для поперечных волн справедлив закон дисперсии (14.1)

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{Le}^2.$$

Ответ на вопрос о проникновении поля можно получить, решая дисперсионное уравнение относительно k (граничная задача, §6). Из приведенного выражения получается $k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{Le}^2}$ и, следовательно, при $\omega < \omega_{Le}$ волновое число является чисто мнимым. Выбирая знак таким образом, чтобы поле волны затухало вглубь плазмы, получим при $\omega < \omega_{Le}$

$$\delta^{-1} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_{Le}^2 - \omega^2} \quad (24.1)$$

ского распределения

$$\frac{F_M - F_0}{\Delta v} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial v} \bigg|_{v=\frac{\omega}{k}} < 0$$

и больше энергии теряется, чем получается. В результате имеется затухание. Еще раз подчеркнем, что в линейном приближении число медленных и быстрых частиц считается неизменным и определяется начальным распределением по скоростям.

§24. Скин-эффект

Электромагнитное поле достаточно низкой частоты, падая на плазму, глубоко в нее не проникает и отражается от нее. Поле таких волн имеется только вблизи границы плазмы в узком скин-слое. Такой эффект непроникновения волн связан с движением электронов и называется скин-эффектом. Обычно поле вглубь плазмы спада-

Формула (24.1) определяет глубину проникновения поля. Физика скин-эффекта связана с тем, что полное поле в плазме является суммой поля падающего излучения и поля, излучаемого осциллирующими электронами. Электроны имеют собственную резонансную частоту ω_{Le} . Если $\omega > \omega_{Le}$, то поле падающей волны и поле, излучаемое электронами, не гасят друг друга в плазме. Если же $\omega < \omega_{Le}$, то поля внутри плазмы взаимно гасятся. Вне плазмы излучаемое электронами поле образует отраженную волну.

Мы пренебрегли тепловым движением электронов и считали, что осциллируют все электроны на толщине δ . Если $\frac{v_{Te}}{\omega} > \delta$, то часть электронов за период изменения поля выйдет из скин-слоя и не сможет полноценно осциллировать в поле волны. При $\omega < \omega_{Le}$ это неравенство означает $\omega_{Le}(v_{Te}/c) > \omega$. Чтобы определить, как изменится закон проникновения поля в плазму при таких более низких частотах, нужно отбросить те электроны, которые за период поля успевают войти в скин-слой и выйти из него. Если электрон движется под углом α (рис.26) по отношению к нормали к поверхности со скоростью v_{Te} , то он приближается к поверхности со скоростью $v_{Te} \cos \alpha$. За период он пройдет расстояние $v_{Te} \cos \alpha / \omega$. Если этот путь больше, чем δ , то электрон не успеет про-

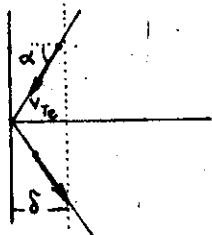


Рис.26

участие в излучении. Такому условию удовлетворяют электроны, для которых

$$\cos \alpha < \frac{\omega \delta}{v_{Te}}$$

При $\omega < \omega_{Le}$ согласно (24.1) $\delta = \frac{c}{\omega_{Le}} = \frac{c \sqrt{m}}{\sqrt{4\pi e^2 N_e}}$. Уменьшив число N в $\omega \delta / v_{Te}$ раз. Взаимодействовать с волной будет $N' = N_e(\omega \delta / v_{Te})$ электронов. Поэтому $\delta = c \sqrt{m} / \sqrt{4\pi e^2 N_e \omega \delta / v_{Te}}$ и глубина скин-слоя при этом равна

$$\delta \approx \frac{c}{\omega_{Le}} \left(\frac{v_{Te}}{c} \frac{\omega_{Le}}{\omega} \right)^{1/3} \quad (24.2)$$

В этом случае принято говорить об аномальном скин-эффекте.

Рассмотрим еще более низкие частоты, когда $\omega < \nu$. Согласно формуле (13.9)

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu)} \approx 1 + i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \nu}$$

Используя дисперсионное уравнение для поперечных волн $k^2 c^2 = \omega^2 \epsilon$, найдем при $\omega \nu < \omega_{Le}^2$ $k^2 = i(\omega \omega_{Le}^2 / \nu c^2)$. Отсюда для глубины скин-слоя получаем

$$\delta = \sqrt{2} \left(\frac{\nu c^2}{\omega \omega_{Le}^2} \right)^{1/2} = \sqrt{2} \frac{c}{\omega_{Le}} \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \quad (24.3)$$

В этом случае говорят о нормальном скин-эффекте. Замечу, что глубина проникновения поля тем больше, чем больше частота столкновений ν . Это связано с тем, что из-за столкновений фаза осцилляций электронов не совпадает с фазой падающей волны. Соответственно с ростом частоты столкновений растет разность фаз между полем излучения и полем падающей волны. На рис.27 представлена итоговая диаграмма, показывающая изменение функции $\delta(\omega)$.

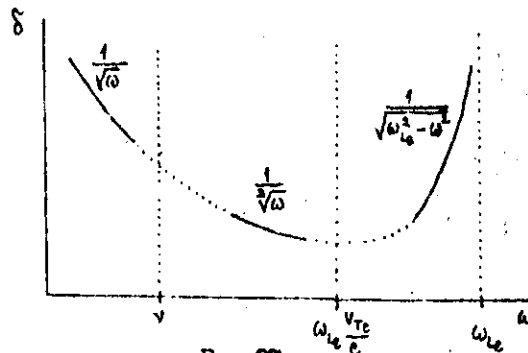


Рис.27

ЧАСТЬ II. ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ ПЛАЗМЫ

ГЛАВА III. ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕД

§25. Нелинейное материальное уравнение

В слабых электромагнитных полях можно считать, что реакция среды (индукция или ток) пропорциональна напряженности поля. На этом допущении базируется линейная электродинамика, в рамках которой для распространения волн справедлив принцип суперпозиции.

В более сильных полях линейное приближение нарушается. Это значит, что реакция (отклик) среды уже не пропорциональна напряженности поля, а зависит от него более сложно. Если нелинейность слабая, то можно ее учесть введением более высоких степеней поля в материальное уравнение, определяющее реакцию среды.

Если пренебречь дисперсией (запаздыванием и нелокальностью реакции среды) и считать среду изотропной, то такое материальное уравнение имеет наиболее простой вид

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \epsilon^{(2)} E^2 \vec{E} + \dots \quad (25.1)$$

Слагаемое, пропорциональное квадрату поля, в этом случае отсутствует. Это связано с тем, что в квадратичном приближении нельзя образовать вектор индукции с помощью единственного вектора $\vec{E}$.

В анизотропной среде, где имеются выделенные направления, материальное уравнение содержит и квадратичные по полю слагаемые

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j + \epsilon_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \epsilon_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l, \quad (25.2)$$

Нелинейные тензоры диэлектрической проницаемости должны удовлетворять определенным свойствам симметрии. Простейшие из них вытекают из самого материального уравнения (25.2) при замене индексов у компонент вектора электрического поля

$$\epsilon_{ijk}^{(2)} = \epsilon_{ikj}^{(2)}, \quad \epsilon_{ijkl}^{(3)} = \epsilon_{ikjl}^{(3)} = \epsilon_{jlik}^{(3)} = \epsilon_{iljk}^{(3)}.$$

Помимо этих соотношений в среде без диссипации имеется еще ряд подобных соотношений, выведенных в 1962 г. Клейманом. Вывод этих соотношений приводить не будем, а лишь укажем их

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kji} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{ikj}, \quad (25.3)$$

Для простоты записи в дальнейшем опустим верхние индексы у тензоров и будем называть их по числу нижних индексов — трех-индексами, четырехиндексами и т.д.

Для учета временной и пространственной дисперсии поступим так же, как и в линейной электродинамике. Будем считать диэлек-

трические проницаемости ядрами интегральных соотношений

$$D_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \epsilon_{ij}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') E_j(t', \vec{r}') + \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \int d\vec{r}'' \epsilon_{ijk}(t-t', \vec{r}-\vec{r}', t'-t'', \vec{r}-\vec{r}'') E_j(t', \vec{r}') E_k(t'', \vec{r}'') + \dots \quad (25.4)$$

Представление материального уравнения в виде ряда по степеням поля предполагает, что этот ряд сходится и члены с более высокими степенями меньше, чем члены с низкими степенями. Что же является тем физическим параметром, который определяет справедливость этого разложения? Ответ на этот вопрос по существу может быть дан уже при построении линейной электродинамики. Параметром, который считается малым, является отношение рассматриваемых полей к тем полям, которые действуют между частицами среды. Часто этот параметр записывают в виде $E_{\text{внешн.}}/E_{\text{внутр.}}$. Именно внутренние поля и определяют внутреннюю энергию среды. Поэтому приведенное соотношение можно представить в виде отношения плотности энергии поля W к плотности внутренней энергии W_0 . Для плазмы это условие означает $E^2 < NT$. В частности, для флуктуационных полей в равновесной плазме отношение E^2/NT равно $(N^{1/2})^{-1} \ll 1$ и приближение линейной электродинамики для них хорошо выполняется.

Однако при $T \rightarrow 0$ условие $(E^2/NT) < 1$ нарушается (приближение холодной плазмы), хотя материальное уравнение в виде степенного ряда остается справедливым. Как уже отмечалось, в этом случае параметром разложения является $(v_e/v^{(q)}) \ll 1$ или $E \ll m\omega^2/\epsilon k$. Приведенные здесь два параметра справедливости степенных материальных разложений для плазмы объединяются в одно $v_e \ll \max(v^{(q)}, v_T)$.

Часто используют материальное уравнение с точностью до определенной степени поля. Если учитываются только слагаемые, пропорциональные E^2 , то говорят — квадратичное приближение. Если учесть слагаемые с E^3 , то говорят — кубическое приближение.

§26. Основные нелинейные процессы

Прежде чем рассматривать уравнения нелинейной электродинамики и их решение, обсудим основные процессы (эффекты), возникающие из-за нелинейности свойств среды.

Начнем с квадратичного приближения, которое имеет место в анизотропной среде без дисперсии. Если в такой среде распространяется одна волна и электрическое поле в ней изменяется по закону $\vec{E}_1 = \frac{1}{2} \{ \vec{E}_{10} e^{i\omega_1 t + i\vec{k}_1 \vec{r}} + \text{к.с.} \}$, то из-за нелинейности материального уравнения в среде возникает индукция, изменяющаяся по другому закону. Согласно формуле (25.2) индукция наряду с линейным слагаемым содержит квадратичное

$$\vec{D}_1^{(2)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \{ E_{1j} e^{-i\omega_1 t + i\vec{k}_1 \vec{r}} + \text{к.с.} \} \frac{1}{2} \{ E_{1k} e^{-i\omega_1 t + i\vec{k}_1 \vec{r}} + \text{к.с.} \}.$$

Индукция является источником поля. Поэтому в среде помимо поля исходной волны возникает поле с пространственно-временной зависимостью $e^{2i\omega_1 t + 2i\vec{k}_1 \vec{r}}$. Иными словами, в нелинейной среде при распространении волны всегда имеется ее вторая гармоника. Помимо этого возникает слагаемое, которое не зависит от координат и времени. Это значит, что в среде появляется постоянное и однородное электрическое поле или ток.

Представим теперь, что на среду падают две волны с различными частотами

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{2} (\vec{E}_{10} e^{-i\omega_1 t + i\vec{k}_1 \vec{r}} + \text{к.с.}), \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{2} (\vec{E}_{20} e^{-i\omega_2 t + i\vec{k}_2 \vec{r}} + \text{к.с.}).$$

Ясно, что помимо тех эффектов, которые создает каждая из волн, возникнут эффекты от их взаимодействия, которые определяются полями обеих волн. В среде появляется индукция на суммарной частоте $\omega_1 + \omega_2$ и с суммарным волновым вектором $\vec{k}_1 + \vec{k}_2$. Возникнет также индукция на разностной частоте $\omega_1 - \omega_2$ и с волновым вектором $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$. Индукция или ток являются источником полей. Такие поля называют комбинационными.

Рассмотрим теперь изотропную среду, где возможна лишь кубическая нелинейность. Если на такую среду падает электромагнитная волна с частотой ω_1 и волновым вектором $\vec{k}_1$, то наряду с линейной индукцией возникает нелинейная (см. формулу (25.1))

$$\vec{D} = \frac{\varepsilon}{2} (\vec{E}_{10} e^{-i\omega_1 t + i\vec{k}_1 \vec{r}} + \text{к.с.}) + \frac{\varepsilon^{(3)}}{4} (\vec{E}_{10}^2 e^{-2i\omega_1 t + 2i\vec{k}_1 \vec{r}} + 2|\vec{E}_{10}|^2 + E_{10}^* e^{2i\omega_1 t - 2i\vec{k}_1 \vec{r}}) \frac{1}{2} (\vec{E}_{10} e^{-i\omega_1 t + i\vec{k}_1 \vec{r}} + \text{к.с.})$$

Видно, что кубическая нелинейность приводит к возникновению третьих гармоник падающей волны на частоте $3\omega_1$ и с волновым вектором $3\vec{k}_1$. Помимо этого изменяется диэлектрическая проницаемость и для самой падающей волны

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^{(3)} |\vec{E}_{10}|^2. \quad (26.1)$$

Такое изменение диэлектрической проницаемости, связанное с самой распространяющейся волной, называется самовоздействием.

Если на изотропную среду падают две волны с частотами ω_1 и ω_2 и волновыми векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$, то возникает индукция на комбинационных частотах $2\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_1 + \omega_2$ и соответственно с волновыми векторами $2\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$ и $2\vec{k}_1 + \vec{k}_2$. Помимо этого эффективная диэлектрическая проницаемость для волны на частоте оказывается зависящей не только от амплитуды этой волны, но и от амплитуды другой волны. Это явление называется кросс-модуляцией.

§27. Нелинейное укороченное уравнение

Уравнения Максвелла справедливы и в нелинейной среде. Если считать, что нет внешних источников, то эти уравнения сводятся к одному, которое имеет вид (4.1). Однако индукция в этом уравнении связана с полем нелинейным образом. Решение нелинейного уравнения второго порядка представляет значительные математические трудности и поэтому желательно это уравнение упростить. Путь для такого упрощения в линейной электродинамике нами обсуждался в §9. Он состоит в предположении, что волны являются квазимонохроматическими и их амплитуды изменяются медленно за период и на длине волны. В таком приближении медленно изменяющихся амплитуд в §9 нами было выведено укороченное уравнение (9.1).

Рассмотрим обобщение этого укороченного уравнения на случай нелинейной среды. При этом будем предполагать, что в среде имеется не одна волна, а много волн. Поле этих волн можно представить в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int d\omega d\vec{k} e^{-i\omega t + i\vec{k} \vec{r}} \vec{E}_0(\vec{r}, t; \omega, \vec{k}) + \int d\omega d\vec{k} e^{i\omega t - i\vec{k} \vec{r}} \vec{E}_0^*(\vec{r}, t; \omega, \vec{k}).$$

Эту формулу можно переписать двумя способами. Либо

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = 2\text{Re} \int d\omega d\vec{k} e^{-i\omega t + i\vec{k} \vec{r}} \vec{E}_0(\omega, \vec{k}). \quad (27.1)$$

Для простоты здесь опущены аргументы $\vec{r}$ и t в амплитуде, но они подразумеваются. Вторая форма записи возникает при замене в ранее написанном втором слагаемом $\omega \rightarrow -\omega$, $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ и преобразовании его к виду $\int d\omega d\vec{k} \tilde{E}_0^*(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$. Доопределим амплитуды волн при отрицательных аргументах следующим образом:

$$\tilde{E}_0^*(-\omega, -\vec{k}) = \tilde{E}_0(\omega, \vec{k}), \quad (27.2)$$

Таким образом, если в явном виде учитывать действительность полей волн, то нужно либо использовать запись (27.1), либо запись

$$\tilde{E}(\vec{r}, t) = \int d\omega d\vec{k} \tilde{E}_0(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}, \quad (27.3)$$

но с дополнительным условием (27.2). (Запись (27.3) по форме совпадает с разложением в интеграл Фурье).

Для того чтобы получить дискретный набор волн из представления (27.3), нужно считать отличными от нуля амплитуды волн только на соответствующих частотах. Так, например, если у нас имеется всего лишь одна волна, то нужно считать, что

$$\tilde{E}_0(\omega, \vec{k}) = \tilde{E}_0 \delta(\omega - \omega_0) \delta(\vec{k} - \vec{k}_0) + \tilde{E}_0^* \delta(\omega + \omega_0) \delta(\vec{k} + \vec{k}_0).$$

Подставляя эту формулу в (27.3), получим $\tilde{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{-i\omega_0 t + i\vec{k}_0 \vec{r}} + \text{с.с.}$

Рассмотрим теперь материальное уравнение в нелинейной среде. Для упрощения пренебрежем дисперсией и рассмотрим анизотропную среду, где имеется квадратичная нелинейность (см. (25.2)). Подставим в эту формулу поле (27.3) и в нелинейном слагаемом сделаем замену переменных интегрирования

$$\omega' + \omega'' = \omega, \quad \vec{k}' + \vec{k}'' = \vec{k}. \quad \text{В результате получим } (\omega'' = \omega - \omega', \vec{k}'' = \vec{k} - \vec{k}')$$

$$\tilde{D}_i(\vec{r}, t) = \int d\omega d\vec{k} \tilde{E}^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \left\{ \varepsilon_{ij} E_j(\omega, \vec{k}) + \varepsilon_{ijk} \int d\omega' d\vec{k}' E_j(\omega', \vec{k}') E_k(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') \right\}.$$

Это соотношение можно рассматривать как определение амплитуды нелинейной индукции на частоте ω и с волновым вектором $\vec{k}$

$$\tilde{D}_i(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ij} E_j(\omega, \vec{k}) + \varepsilon_{ijk} \int d\omega' d\vec{k}' E_j(\omega', \vec{k}') E_k(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') \quad (27.4)$$

Обратимся к исходным уравнениям для поля (4.1). Подставив в него выражение для поля (27.3) и индукцию в аналогичной форме и отбросив вторые производные от медленно изменяющихся амплитуд

волн по координатам и времени, получим

$$-[\vec{k} [\vec{k} \tilde{E}_0]] + 2i [\vec{k} \cdot \text{rot} \tilde{E}_0] - \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{D}_0 - 2i \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \tilde{D}_0}{\partial t} = 0.$$

В это уравнение подставим индукцию (27.4) и разобьем тензор ε_{ij} на эрмитовскую и антиэрмитовскую части ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^H + \varepsilon_{ij}^A$) (см. §9)

$$-k_i (\vec{k} \tilde{E}_0)_i + k^2 E_{0i} + 2i \left(k_i \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_i} - k_i \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_i} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \varepsilon_{ij}^H E_{0j} + \varepsilon_{ij}^A E_{0j} + \varepsilon_{ijk} \int d\omega' d\vec{k}' E_j(\omega', \vec{k}') E_k(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') \right\} - 2i \frac{\omega}{c^2} \left\{ \varepsilon_{ij}^H \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} + \varepsilon_{ij}^A \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial t} \dots \right\} = 0.$$

Как и в §9, примем, что в нулевом приближении амплитуда волны неизменна. Тогда для связи частоты и волнового вектора получим дисперсионное уравнение для волны без затухания. Этому приближению соответствует отбрасывание не только диссипации, но и нелинейного взаимодействия волн между собой. Если ввести вектор поляризации волны $\vec{e} = \tilde{E}_0 / E_0$, то получим дисперсионное уравнение (9.3).

Теперь учтем изменение амплитуды волны. В линейной теории это изменение было связано с переносом волны и диссипацией. В нелинейной теории добавляется еще взаимодействие между волнами. При учете этих эффектов в низшем приближении, отбросив слагаемые типа $\varepsilon_{ij}^A \frac{\partial E_0}{\partial t}$ и $\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial t}$, получим

$$2i \left(k_i \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_i} - k_i \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_i} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \varepsilon_{ij}^A E_{0j} + \varepsilon_{ijk} \int d\omega' d\vec{k}' E_j(\omega', \vec{k}') E_k(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') \right\} - 2i \frac{\omega}{c^2} \varepsilon_{ij}^H \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} = 0.$$

Для того чтобы это уравнение привести к виду, использовавшемуся в линейной теории (см. §9), нужно умножить его на вектор поляризации e_i и поделить на $\frac{i}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i \varepsilon_{ij}^H e_j) = \frac{2i\omega}{c^2} e_i \varepsilon_{ij}^H e_j$. В результате получим нелинейное укороченное уравнение, определяющее изменение амплитуды волны с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} + \vec{v}^{(r)} \frac{\partial E_0}{\partial \vec{r}} + \gamma E_0(\omega, \vec{k}) = \int d\omega' d\vec{k}' \alpha(\omega', \vec{k}') E_0(\omega', \vec{k}') E_0(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') \quad (27.5)$$

где
$$\vec{v}^{(r)} = \frac{c^2 [\vec{k} - \vec{e} (\vec{k} \vec{e})]}{\omega e_i \varepsilon_{ij}^H e_j}, \quad \gamma = -\frac{i\omega}{2} \frac{e_i \varepsilon_{ij}^A e_j}{e_i \varepsilon_{ij}^H e_j}.$$

$$a(\omega, \vec{k}) = -\frac{i\omega}{2} \frac{e_i(\omega) \varepsilon_{ij} e_j(\omega) e_i(\omega')}{e_i(\omega) \varepsilon_{ij}^* e_j(\omega)} \quad (27.6)$$

Формулы для групповой скорости и декремента затухания естественно совпадают с выражениями (9.4) и (9.5), если в последних пренебречь зависимость тензоров диэлектрической проницаемости от частоты и волнового вектора. Коэффициент a называется коэффициентом нелинейной связи волн.

При учете дисперсии материальное уравнение в нелинейной среде (25.4) содержит под интегралом ядро ε_{ijk} , зависящее от времени и координат. Это приводит к тому, что в уравнении (27.5) тензор ε_{ijk} является зависящим от частот и волновых векторов, хотя вид уравнения от этого не меняется.

$$\varepsilon_{ijk}(\omega, \vec{k}; \omega', \vec{k}') = \int d\tau \int d\vec{r} \int d\tau' \int d\vec{r}' e^{i\omega\tau - i\vec{k}\vec{r} + i\omega'\tau' - i\vec{k}'\vec{r}'} \varepsilon_{ijk}(\tau, \vec{r}; \tau', \vec{r}').$$

Смысл полученного укороченного уравнения для амплитуды волны с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$ весьма прост. В нем наряду с диссипацией и переносом учтены нелинейное взаимодействие волн. При этом с данной волной взаимодействует любая пара волн таких, что сумма их частот и сумма их волновых векторов равны соответственно частоте и волновому вектору данной волны.

§28. Взаимодействие трех волн

Будем считать, что в среде имеется только три волны с частотами $\omega_{1,2,3}$ и волновыми векторами $\vec{k}_{1,2,3}$. На этом примере мы разберем своего рода элементарный акт нелинейного взаимодействия волн.

Начнем с вывода уравнений для амплитуд волн. Положим в формуле (27.3), что отличны от нуля только амплитуды трех волн

$$E_i(\omega, \vec{k}) = \vec{E}_1 \delta(\omega - \omega_1) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1) + \vec{E}_2^* \delta(\omega + \omega_1) \delta(\vec{k} + \vec{k}_1) + \vec{E}_2 \delta(\omega - \omega_2) \delta(\vec{k} - \vec{k}_2) + \vec{E}_2^* \delta(\omega + \omega_2) \delta(\vec{k} + \vec{k}_2) + \vec{E}_3 \delta(\omega - \omega_3) \delta(\vec{k} - \vec{k}_3) + \vec{E}_3^* \delta(\omega + \omega_3) \delta(\vec{k} + \vec{k}_3).$$

Подставим такой набор слагаемых в уравнение (27.5). В результате слева и справа получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{k}} + \gamma \right) [E_1 \delta(\omega - \omega_1) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1) + \dots] = \int d\omega' d\vec{k}' a(\omega', \vec{k}') [E_1 \delta(\omega - \omega' - \omega_1) \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}_1) + \dots] [E_2 \delta(\omega' - \omega_2) \delta(\vec{k}' - \vec{k}_2) + \dots]$$

В правой стороне содержатся 36 слагаемых; различным слагаемым отвечают разные нелинейные процессы. Так, слагаемое $E_2^* \delta(\omega - \omega_1) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1)$ описывает генерацию второй гармоники первой волны. Подобные слагаемые возникнут и для других волн. Эти нелинейные процессы не связаны с взаимодействием трех волн и нас интересовать не будут. Процессам трехволнового взаимодействия соответствуют следующие слагаемые: $E_1 E_2 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$, $E_1 E_2^* \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2)$, $E_1^* E_2 \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2)$, $E_1 E_3 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_3)$ и т.д. (всего 18 слагаемых). Однако не все из этих слагаемых следует учитывать, если предположить, что $\omega_3 > \omega_1, \omega_2$. Так, например, слагаемое $E_1 E_2^* \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2)$ соответствует возбуждению волны с частотой ω_3 на разностной частоте. Но поскольку $\omega_3 > \omega_1, \omega_2$, то это слагаемое следует отбросить.

Чтобы получить уравнение для амплитуды первой волны, оставим слева только первое слагаемое, пропорциональное $\delta(\omega - \omega_1) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1)$, а справа - только слагаемые, пропорциональные амплитудам второй и третьей волн и содержащие $\delta(\omega - \omega_3 - \omega_2) \delta(\vec{k} - \vec{k}_3 + \vec{k}_1)$. Такое слагаемое является единственным и именно оно описывает процесс взаимодействия трех волн, при котором выполнены условия

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \quad (28.1)$$

В результате для амплитуды первой волны получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{k}} + \gamma \right) E_1 = a_{123} E_2^* E_3, \quad (28.2)$$

где $\vec{v}_1, \gamma_1$ - групповая скорость и декремент для первой волны, коэффициент a_{123} учитывает нелинейное взаимодействие волн 2 и 3 к равен согласно (27.6) (индексом указаны вектора поляризации волн)

$$a_{123} = -\frac{i\omega_1}{2} \frac{e_{i1} \varepsilon_{ijl} e_{j2} e_{l3}}{e_{i1} \varepsilon_{ij}^* e_{jl}}$$

Аналогично поступим со второй волной. Учтем слева только слагаемое, пропорциональное амплитуде $E_2 \delta(\omega - \omega_2) \delta(\vec{k} - \vec{k}_2)$, а

справа слагаемое с $\delta(\omega + \omega_1 - \omega_2)$. В результате получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \gamma_1\right) E_1 = a_{13} E_1^* E_3, \quad a_{13} = -\frac{i\omega_1}{2} \frac{e_{2i} \varepsilon_{ijl} e_{4j} e_{3l}}{e_{2i} \varepsilon_{ij}^* e_{2j}}. \quad (28.3)$$

Чтобы получить уравнения для третьей волны, удержим слева слагаемое с $E_3 \delta(\omega - \omega_2) \delta(\vec{r} - \vec{r}_2)$, а справа с $\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_3 \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \gamma_3\right) E_3 = a_{12} E_1 E_2, \quad a_{12} = -\frac{i\omega_2}{2} \frac{e_{3i} \varepsilon_{ijl} e_{4j} e_{2l}}{e_{3i} \varepsilon_{ij}^* e_{3j}}. \quad (28.4)$$

Система уравнений (28.2)–(28.4) описывает взаимодействие трех волн, при котором наибольшую частоту имеет волна 3 и выполнены условия (28.1). Эти условия называются распадными. Название связано с квантово-механической аналогией. Если умножить формулы (28.1) на постоянную Планка, то первая из них будет представлять закон сохранения энергии квантов, а вторая – закон сохранения импульса. С этой точки зрения можно процесс взаимодействия трех волн рассматривать как процесс распада кванта 3 на кванты 1 и 2. Очевидно, что возможен и обратный процесс. Он называется слиянием волн. В действительности процесс нелинейного взаимодействия не является локальным в пространстве и мгновенным во времени. Для того чтобы он происходил, нужны определенные области пространства и интервалы времени. При этом соотношения (28.1) имеют смысл условий фазового синхронизма волн во времени и пространстве. Иными словами, две волны взаимодействуют с третьей волной, если они создают нелинейное поле, которое в пространстве и во времени изменяется по тому же закону, что и поле этой волны.

§29. Законы сохранения при взаимодействии волн

Согласно уравнениям (28.2)–(28.4) изменение амплитуды каждой из трех волн в данной точке пространства со временем связано с выносом волн из этой точки, диссипацией и взаимодействием волн друг с другом. Если пренебречь диссипацией, то останется лишь взаимодействие между волнами и, очевидно, что в этом приближении система трех волн является замкнутой. В такой системе имеют место определенные законы сохранения.

Для нахождения этих законов перепишем уравнения (28.2)–(28.4) в виде

$$2e_{4i} \varepsilon_{ij}^* e_{4j} \left(\frac{\partial E_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial E_1}{\partial \vec{r}}\right) = -i\omega_1 e_{4i} \varepsilon_{ijl} e_{2j} e_{3l} E_1^* E_3,$$

$$2e_{4i} \varepsilon_{ij}^* e_{2j} \left(\frac{\partial E_2}{\partial t} + \vec{v}_2 \frac{\partial E_2}{\partial \vec{r}}\right) = -i\omega_2 e_{4i} \varepsilon_{ijl} e_{1j} e_{3l} E_1^* E_3,$$

$$2e_{3i} \varepsilon_{ij}^* e_{3j} \left(\frac{\partial E_3}{\partial t} + \vec{v}_3 \frac{\partial E_3}{\partial \vec{r}}\right) = -i\omega_3 e_{3i} \varepsilon_{ijl} e_{1j} e_{2l} E_1 E_2.$$

Умножим первое уравнение на E_1^* и сложим его с комплексно-сопряженным уравнением. В результате в левой стороне возникнет величина $2e_{4i} \varepsilon_{ij}^* e_{4j} (\partial |E_1|^2 / \partial t + \vec{v}_1 \partial |E_1|^2 / \partial \vec{r})$. Согласно определению (10.2) плотность энергии волны в среде равна

$$W = \langle W \rangle = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_{ij}^* e_{ij}) |E|^2 = \frac{1}{8\pi} e_{ij}^* e_{ij} |E|^2$$

Возникшая в левой стороне уравнения величина лишь численным коэффициентом $1/16\pi$ отличается от плотности энергии. Умножим на этот множитель обе стороны уравнения и в результате получим

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial W_1}{\partial \vec{r}} = -\frac{i\omega_1}{16\pi} e_{4i} \varepsilon_{ijl} e_{2j} e_{3l} (E_1^* E_2 E_3 - E_1 E_2 E_3^*). \quad (29.1)$$

При выводе формулы (29.1) предполагалось, что тензор нелинейной диэлектрической проницаемости действителен. Это справедливо только в пренебрежении диссипацией.

Аналогичным способом из уравнений (28.3) и (28.4) следует два уравнения для W_2 и W_3

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} + \vec{v}_2 \frac{\partial W_2}{\partial \vec{r}} = -\frac{i\omega_2}{16\pi} e_{4i} \varepsilon_{ijl} e_{1j} e_{3l} (E_1^* E_2^* E_3 - E_1 E_2 E_3^*), \quad (29.2)$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} + \vec{v}_3 \frac{\partial W_3}{\partial \vec{r}} = -\frac{i\omega_3}{16\pi} e_{3i} \varepsilon_{ijl} e_{1j} e_{2l} (E_1 E_2 E_3^* - E_1^* E_2^* E_3). \quad (29.3)$$

Как было указано ранее (§25 формула (25.3)), трехиндексные нелинейные тензоры обладают определенными свойствами симметрии. Воспользуемся этими свойствами и запишем

$$e_{4i} \varepsilon_{ijl} e_{2j} e_{3l} = e_{4j} \varepsilon_{jil} e_{2i} e_{3l} = e_{4j} \varepsilon_{ijl} e_{2i} e_{3i} = e_{2i} \varepsilon_{ijl} e_{4j} e_{3l}$$

$$e_{4i} \varepsilon_{ijl} e_{2j} e_{3l} = e_{4i} \varepsilon_{lji} e_{2j} e_{3i} = e_{4j} \varepsilon_{lji} e_{2l} e_{3i} = e_{3i} \varepsilon_{ijl} e_{4j} e_{2l}$$

Таким образом, в правых сторонах формул (29.1)–(29.3) стоят одинаковые множители. Поделив уравнения (29.1)–(29.3) на соответствующие частоты, получим

$$\frac{1}{\omega_1} \left(\frac{\partial W_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial W_1}{\partial \vec{r}} \right) = \frac{1}{\omega_2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial t} + \vec{v}_2 \frac{\partial W_2}{\partial \vec{r}} \right) = - \frac{1}{\omega_3} \left(\frac{\partial W_3}{\partial t} + \vec{v}_3 \frac{\partial W_3}{\partial \vec{r}} \right). \quad (29.4)$$

Соотношение (29.4) связывает между собой изменения плотности энергии трех волн из-за взаимодействия друг с другом и называется соотношением Мэнди-Роз.

Если амплитуды волн не зависят от координат, то все изменение происходит только во времени. Согласно (29.4) в этом случае выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{W_1}{\omega_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{W_2}{\omega_2} \right) = - \frac{d}{dt} \left(\frac{W_3}{\omega_3} \right). \quad (29.5)$$

Величину $(W_\alpha/\omega_\alpha) = N_\alpha$ часто называют числом квантов. Это название связано с тем, что согласно квантовой механике энергия одного элементарного возбуждения равна $\hbar\omega_\alpha$. Более соответствует плотности энергии W_α и ей можно сопоставить определенное число квантов. Конечно такое сопоставление может показаться формальным, хотя в нем скрыт глубокий смысл. Согласно формуле (29.5) уменьшение в единицу времени числа квантов с частотой ω_3 равно увеличению числа квантов с частотами ω_1 и ω_2 . Это придает еще больший смысл использованию представления о нелинейном взаимодействии волн как о распаде квантов. В результате элементарного акта распада сохраняется энергия и импульс квантов (28.1) и равны числа возникающих и исчезающих квантов.

Из формулы (29.5) следует также закон сохранения энергии для волн

$$\frac{dW_3}{dt} = - \frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{dW_1}{dt} = - \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1} \frac{dW_1}{dt} = - \frac{dW_1}{dt} - \frac{dW_2}{dt} = - \frac{d(W_1 + W_2)}{dt} \quad (29.6)$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = W = \text{const}$$

В единице объема полная плотность энергии трех волн сохраняется.

Имеет смысл и другое упрощение формулы (29.4), когда амплитуды волн не изменяются со временем, но изменяются в пространстве. В этом случае из формулы (29.4) следует

$$\frac{d}{d\vec{r}} \frac{\vec{v}_1 W_1}{\omega_1} = \frac{d}{d\vec{r}} \frac{\vec{v}_2 W_2}{\omega_2} = - \frac{d}{d\vec{r}} \frac{\vec{v}_3 W_3}{\omega_3} \quad (29.7)$$

Произведение $\vec{v}_\alpha W_\alpha$ есть плотность потока энергии волны α , а величина $\vec{v}_\alpha W_\alpha / \omega_\alpha$ определяет плотность потока квантов (число квантов, проходящих за единицу времени через единицу поверхности). Соотношение (29.7) утверждает, что уменьшение по-

тока числа квантов сорта 3 на бесконечно малой толщине равно увеличению потока числа квантов сортов 1 и 2 на этой же толщине.

Из соотношений (29.7) следует закон сохранения плотности потока энергии трех волн

$$\frac{d}{d\vec{r}} \frac{\vec{v}_3 W_3}{\omega_3} = - \frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{d}{d\vec{r}} \frac{\vec{v}_1 W_1}{\omega_1} = - \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} \frac{d}{d\vec{r}} \frac{\vec{v}_1 W_1}{\omega_1} = - \frac{d}{d\vec{r}} (\vec{v}_1 W_1 + \vec{v}_2 W_2) \quad (29.8)$$

$$\vec{I} = \vec{v}_3 W_3 + \vec{v}_1 W_1 + \vec{v}_2 W_2 = \text{const.}$$

В общем случае, когда величины $W_{1,2,3}$ зависят как от координат, так и от времени, для плотности энергии трех волн имеет место уравнение непрерывности

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } \vec{I} = 0.$$

§30. Приближение заданного поля (начальная задача)

Часто одна из волн создается внешним источником и имеет амплитуду, намного превышающую амплитуды других волн. Амплитуду этой волны можно считать постоянной (приближение заданного поля одной волны). Такая волна называется волной накачки. Наиболее интересные результаты возникают, если задается амплитуда волны с наибольшей частотой ω_3 .

Поскольку амплитуда волны E_3 задана, то можно не рассматривать уравнение (28.4), а в уравнениях (28.2) и (28.3) справа следует считать E_3 постоянной величиной

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \gamma_1 \right) E_1 = a_{13} E_1^* E_3,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_2 \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \gamma_2 \right) E_2^* = a_{13}^* E_1 E_3^*.$$

Рассмотрим сначала такой случай, когда амплитуда волны накачки и амплитуды других волн не зависят от координат и при $t=0$ они соответственно равны $E_1 = E_{10}$, $E_2 = E_{20}$ (начальная задача). В системе уравнений для E_1 и E_2 отбросим слагаемые производными по координатам и будем решать, полагая, что искомыми функциями зависят от времени по закону $e^{\gamma t}$ ($E_1 \sim e^{\gamma t}$, $E_2 \sim e^{\gamma t}$). Подставляя эти зависимости в систему уравнений, найдем характеристическое уравнение для определения величин γ

$$(\gamma + \gamma_1)(\gamma + \gamma_2) - \gamma_0^2 = 0,$$

где $\gamma_0^2 = a_{13} a_{13}^* |E_3|^2$. Решение этого уравнения определяет два значения $\gamma_{\pm}$

$$\gamma_{\pm} = -\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + 4\gamma_0^2}$$

Решение для каждой из волн является суммой функций $e^{\gamma_{\pm}t}$ и $e^{-\gamma_{\pm}t}$ с произвольными коэффициентами, которые определяются из начальных условий. В частности, для первой волны решение $E_1 = Ae^{\gamma_{+}t} + Be^{-\gamma_{+}t}$ должно удовлетворять условию $E_1(0) = E_{10}$, а также еще одному условию, которое следует из первого уравнения $\frac{dE_1}{dt}\bigg|_{t=0} = -\gamma_1 E_{10} + a_{13} E_{20}^* E_{30}$. Отсюда легко найти величины A и B и записать

$$E_1 = \frac{1}{\gamma_{+} - \gamma_{-}} \left\{ [-(\gamma_1 + \gamma_2)E_{10} + a_{13} E_{20}^* E_{30}] e^{\gamma_{+}t} + [-(\gamma_1 - \gamma_2)E_{10} + a_{13} E_{20}^* E_{30}] e^{-\gamma_{+}t} \right\}$$

Если оба значения γ отрицательны, то с течением времени амплитуда волны E_1 будет убывать. Аналогично будет вести себя и амплитуда второй волны. Если же хотя бы одно из значений γ положительно, то амплитуда будет нарастать со временем. Очевидно, что положительной может быть только величина γ_{+} при выполнении неравенства $\gamma_0^2 > \gamma_1 \gamma_2$. Это значит, что амплитуды волн $E_{1,2}$ нарастают со временем, если амплитуда волны накачки превышает определенное значение

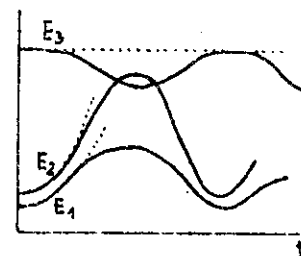
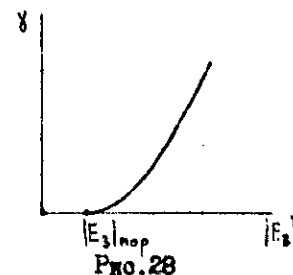
$$|E_3|_{\text{пор}} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{a_{13} a_{12}} \quad (30.1)$$

Это значение амплитуды накачки называют пороговым. При превышении порога (30.1) амплитуды $E_{1,2}$ нарастают и имеют место неустойчивость, которую принято называть распадной. Физическая причина этой неустойчивости состоит в том, что волна накачки, имеющая наибольшую частоту, передает свою энергию волнам с меньшими частотами ω_1 и ω_2 и волновыми векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$, для которых выполнены условия (28.1). Если возникающие волны теряют из-за диссипации меньше энергии, чем приобретают ее от волны накачки (для этого нужно, чтобы величина E_3 превышала пороговое значение), то их амплитуды нарастают со временем. Величина γ_{+} определяет инкремент неустойчивости

$$\gamma = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + 4\gamma_0^2} - (\gamma_1 + \gamma_2) \right\} \quad (30.2)$$

На рис. 28 показан график изменения инкремента при изменении амплитуды волны накачки $|E_3|$, которая пропорциональна величине γ_0 . Вблизи порога ($\gamma_0^2 \sim \gamma_1 \gamma_2$) $\gamma \approx (\gamma_0^2 - \gamma_1 \gamma_2) / (\gamma_1 + \gamma_2)$. Вдали от порога ($\gamma_0^2 \gg \gamma_1 \gamma_2$) $\gamma \approx \gamma_0$.

Со временем амплитуды волн с частотами ω_1 и ω_2 становятся достаточно большими и необходимо учитывать их влияние на волну накачки. Если считать, что источник (генератор) для волны с частотой ω_3 отключен и диссипация всех волн мала, то из соотношений Манли-Роу следует, что полная энергия волн сохраняется. Это значит, что рост амплитуд $E_{1,2}$ приведет к уменьшению амплитуды волны E_3 и по истечении определенного времени энергия от волны $E_{1,2}$ начнет переходить к волне E_3 . Возникнут периодические изменения амплитуд волн со временем (рис. 29). Здесь пунктиром показано изменение амплитуд $E_{1,2}$ в приближении заданного поля



волны E_3 . На тех интервалах времени, когда две более низкочастотные волны создают высокочастотную, процесс слияния преобладает над процессом распада.

§31. Граничная задача в приближении заданного поля

Во многих случаях волна накачки вводится в среду через границу, и более оправданной является граничная задача. Естественно, что вблизи границы, где интенсивность падающего излучения изменялась еще мало, амплитуду волны накачки можно считать постоянной. В этой области можно снова использовать приближение заданного поля, но искать изменение амплитуд волн нужно не во времени, а в пространстве.

Будем считать, что волна накачки падает нормально на среду, занимаемую полупространством $x > 0$ (рис. 30). Уравнения для амплитуд E_1 и E_2 в данном случае имеют вид

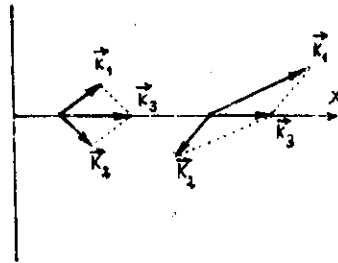


Рис.30

фактически они могут распространяться под углом друг к другу. Если v_1 и v_2 имеют различные знаки, то говорят о встречных волнах.

Рассмотрим сначала встречные волны и положим, что $v_1 > 0$, а $v_2 < 0$. Введем обозначения $\Gamma_1 = \gamma_1/v_1$, $\Gamma_2 = \gamma_2/v_2$ и запишем уравнения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x} + \Gamma_1 E_1 &= \frac{a_{13}}{v_1} E_2^* E_3, \\ -\frac{\partial E_2}{\partial x} + \Gamma_2 E_2^* &= \frac{a_{13}^*}{|v_2|} E_1 E_3^*. \end{aligned}$$

Как и в случае начальной задачи, решение этих уравнений можно искать в виде $E_1, E_2 \sim e^{\Gamma x}$. В результате получим два корня

$$\Gamma_{\pm} = \frac{1}{2}(\Gamma_2 - \Gamma_1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 - 4\Gamma_0^2},$$

где $\Gamma_0 = \gamma_0/\sqrt{v_1|v_2|}$. Анализ решений для амплитуд в общем случае не сложен, но достаточно громоздок. Поэтому мы рассмотрим два предельных случая.

Если затухание волн мало и им можно пренебречь, то $\Gamma_{\pm} = \pm i\Gamma_0$. Это значит, что фундаментальная система функций, из которых строится решение для амплитуд, имеет вид $\exp(\pm i\Gamma_0 x) = \cos \Gamma_0 x \pm i \sin \Gamma_0 x$. Амплитуды волн осциллируют в пространстве с масштабом L_0 , равным (рис.31)

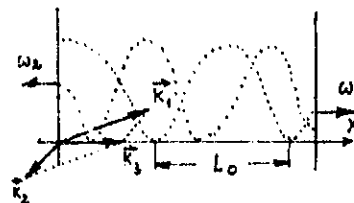
$$L_0 = \frac{1}{\Gamma_0} = \frac{\sqrt{v_1|v_2|}}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{v_1|v_2|}}{\sqrt{a_{13}a_{13}^*}} \frac{1}{|E_3|}. \quad (31.1)$$

Величину L_0 называют длиной фазового синхронизма волн. Эта длина тем меньше, чем больше амплитуда накачки.

Если затухание волн достаточно большое ($(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 > 4\Gamma_0^2$), то можно разложить выражение под радикалом и записать

$$\Gamma_{\pm} = \frac{1}{2}(\Gamma_2 - \Gamma_1) \pm \frac{1}{2}(\Gamma_2 + \Gamma_1) \left(1 - \frac{4\Gamma_0^2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}\right) = \begin{cases} -\Gamma_1 + \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \Gamma_- \\ \Gamma_2 - \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \Gamma_+ \end{cases}$$

Допустим, что затухание первой волны больше, чем затухание второй ($\Gamma_1 > \Gamma_2$). Тогда $\Gamma_- \approx -\Gamma_1 + (\Gamma_0^2/\Gamma_1) = (\Gamma_0^2 - \Gamma_1^2)/\Gamma_1 < 0$ (т.к. $\Gamma_1^2 > 4\Gamma_0^2$) $\Gamma_+ = \Gamma_2 - \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma_1} = \frac{\Gamma_2\Gamma_1 - \Gamma_0^2}{\Gamma_1}$. При $\Gamma_0^2 > \Gamma_1\Gamma_2$ величина $\Gamma_+ > 0$ и этому значению отвечает нарастающее вдоль оси ОХ решение (рис.32). Условие такого пространственного нарастания (усиления) волны совпадает с условием неустойчивости во временной задаче и возникает только при превышении порога (30.1).



* Рис.31

Существенное отличие начальной задачи от временной состоит в том, что нарастать может только одна из волн с наименьшим затуханием, в то время как другая волна не нарастает.

Обратимся теперь к случаю попутных волн ($v_1 > 0$, $v_2 > 0$). Исходная система уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x} + \Gamma_1 E_1 &= \frac{a_{13}}{v_1} E_2^* E_3, \\ \frac{\partial E_2}{\partial x} + \Gamma_2 E_2 &= \frac{a_{13}^*}{v_2} E_1 E_3^*. \end{aligned}$$

Как и в случае встречных волн, будем искать решение в виде $e^{\Gamma x}$ и для определения величины Γ получим

$$\Gamma_{\pm} = -\frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 + 4\Gamma_0^2}.$$

Решение Γ_+ может быть положительно и ему соответствуют нарастающие в пространстве амплитуды волн. Это имеет место при $\Gamma_0^2 > \Gamma_1\Gamma_2$ и, следовательно, только при превышении порогового поля (30.1). При этом величину Γ_+ называют коэффициентом усиления.

При значительном превышении порогового поля этот коэффициент усиления имеет наиболее простой вид

$$\Gamma_+ = \Gamma_0 = \frac{Y_0}{\sqrt{V_1 V_2}} \quad (31.2)$$

Часто в этом случае говорят об усилении волн (или о конвективной неустойчивости).

Рассмотренная нами картина взаимодействия волн справедлива только в той области пространства, где амплитуда падающей волны изменяется незначительно. Если же это ограничение не выполняется, то необходимо учитывать и изменение амплитуды E_z . В случае попутных волн это приводит к осцилляциям амплитуд в пространстве.

§32. Параметрические неустойчивости

В среде, находящейся во внешнем электромагнитном поле, возникает периодическая во времени и пространстве поляризация или ток. Это значит, что характеристики среды изменяются периодически во времени и пространстве. Часто среды с таким периодическим изменением своих свойств оказываются неустойчивыми и эти неустойчивости называют параметрическими.

Чтобы лучше понять, когда и почему такие неустойчивости возникают, рассмотрим сначала параметрический резонанс в механике. Представим себе маятник (осциллятор), собственная частота которого не постоянна, а периодически изменяется со временем. Уравнение движения для такого осциллятора хорошо известно

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x (1 + h \cos \omega_0 t) = 0. \quad (32.1)$$

Это уравнение называется уравнением Матвея. Будем искать решение уравнения в виде интеграла Фурье $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega x(\omega) \exp(-i\omega t)$. После подстановки в уравнение получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} x(\omega) (-\omega^2 + \omega_1^2) + \frac{h\omega_1^2}{2} \left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i\omega' t} x(\omega') = 0.$$

Сделаем замену переменной интегрирования в последнем слагаемом ($\omega' - \omega_0 = \omega$ в первом члене и $\omega_0 + \omega' = \omega$ во втором члене). В результате получим для определения фурье-компоненты уравнение в конечных разностях

$$(\omega_1^2 - \omega^2) x(\omega) + \frac{h\omega_1^2}{2} (x(\omega + \omega_0) + x(\omega - \omega_0)) = 0.$$

Чтобы найти решение этого уравнения, проведем замену $\omega \rightarrow \omega + \omega_0$ и $\omega \rightarrow \omega - \omega_0$. Тогда для определения компонент $x(\omega \pm \omega_0)$ получим

$$\begin{aligned} [\omega_1^2 - (\omega + \omega_0)^2] x(\omega + \omega_0) + \frac{h\omega_1^2}{2} (x(\omega + 2\omega_0) + x(\omega)) &= 0 \\ [\omega_1^2 - (\omega - \omega_0)^2] x(\omega - \omega_0) + \frac{h\omega_1^2}{2} (x(\omega) + x(\omega - 2\omega_0)) &= 0. \end{aligned}$$

Мы видим, что компоненты $x(\omega \pm \omega_0)$ выражаются не только через компоненту $x(\omega)$, но и через компоненты $x(\omega \pm 2\omega_0)$. Для их определения можно написать подобные уравнения. В них войдут не только компоненты $x(\omega \pm \omega_0)$, но и $x(\omega \pm 3\omega_0)$ и т.д. Существенно, что связь низших компонент с высшими всегда пропорциональна параметру h (амплитуда осцилляций длины маятника). Если этот параметр мал ($h \ll 1$), то можно оборвать цепочку уравнений. Ограничимся учетом членов, пропорциональных h^2 . Это значит, что в уравнении для $x(\omega \pm \omega_0)$ можно отбросить $x(\omega \pm 2\omega_0)$. Тогда из исходного уравнения получим

$$(\omega_1^2 - \omega^2) - \left(\frac{h\omega_1^2}{2} \right)^2 \left[\frac{1}{\omega_1^2 - (\omega + \omega_0)^2} + \frac{1}{\omega_1^2 - (\omega - \omega_0)^2} \right] = 0.$$

Полученное уравнение определяет собственную частоту колебаний маятника. Если $h = 0$, то $\omega = \pm \omega_1$. Это значит, что маятник колеблется без затухания на частоте ω_1 . Если учесть h^2 и привести выражение к общему знаменателю, то найдем

$$(\omega_1^2 - \omega^2) - \left(\frac{h\omega_1^2}{2} \right)^2 \frac{2(\omega_1^2 - \omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2 - \omega_0^2)^2 - 4\omega^2 \omega_0^2} = 0.$$

Вследствие того, что h мало, решение для ω должно мало отличаться от ω_1 . Будем искать его по теории возмущений в виде $\omega = \omega_1 + \delta\omega$. В результате подстановки и отбрасывания малых ($\sim \delta\omega^2$) слагаемых найдем

$$-\omega_1 \delta\omega \left[\omega_1^4 + 4\omega_1 \omega_0^2 \delta\omega - 4\omega_1^2 \omega_0^2 \right] + \left(\frac{h\omega_1^2}{2} \right)^2 = 0.$$

Если ω_1^2 существенно отличается от $4\omega_0^2$ (т.е. ω_0 от $1/2\omega_1$), то в квадратной скобке можно отбросить малое слагаемое и для $\delta\omega$ найдем

$$\delta\omega = - \left(\frac{h\omega_1^2}{2} \right)^2 \frac{1}{\omega_1 \omega_0^2 (\omega_0^2 - 4\omega_1^2)}.$$

Если же $\omega_0^2 = 4\omega_1^2$, то $\delta\omega^2 = -(\hbar\omega_1^2/2)^2 (1/4\omega_1^2\omega_0^2)$ и

$$\delta\omega = \pm \frac{\hbar\omega_1^2}{2} \frac{\omega_1}{2\omega_1\omega_0} = \pm \frac{\hbar}{8} \omega_1. \quad (32.2)$$

Таким образом, при $\omega_0 = 2\omega_1$ добавка к частоте является мнимой и соответствующая компоненте $\chi(\omega)$ зависимость от времени имеет вид $\exp[-i\omega_1 t - it(\pm \hbar/8\omega_1)]$. При знаке "плюс" перед $\hbar$ резонанс нарастает. В этом случае возникает параметрический резонанс или, другими словами, параметрическая неустойчивость. Она возникает не только при $\omega_0 = 2\omega_1$, но и при $\omega_0 \approx n\omega_1$, а соответствующие инкременты зависят от величины $\hbar$ в более высокой степени.

Подобного рода параметрические неустойчивости возникают и в нелинейной среде, через которую проходит электромагнитная волна. Рассмотрим закон дисперсии для малых возмущений в среде, через которую распространяется волна накачки заданной амплитуды

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{2} (\vec{E}_0 e^{-i\omega_0 t + i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} + \vec{E}_0^* e^{i\omega_0 t - i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}).$$

Нелинейное материальное уравнение в анизотропной среде без дисперсии в квадратичном приближении имеет вид (25.2)

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j + \epsilon_{ijk} E_j E_k.$$

Будем считать, что помимо поля накачки в среде имеется еще волна с малой амплитудой $\vec{E}$. Тогда в линейном приближении для этой волны получим

$$\delta D_i = \epsilon_{ij} \delta E_j + \epsilon_{ijk} (E_0 \delta E_k + \delta E_j E_0).$$

Сделаем замену индексов в последнем члене и введем тензор

$$S_{ijk} = \epsilon_{jki} + \epsilon_{ikj}, \text{ запишем эту формулу в виде}$$

$$\delta D_i = \epsilon_{ij} \delta E_j + S_{ijk} E_0 \delta E_k.$$

Подставим в это материальное уравнение поле волны накачки и сделаем фурье-преобразование. В результате найдем

$$\delta D_i(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij} \delta E_j(\omega, \vec{k}) + S_{ijl} (\epsilon_{0l} \delta E_j(\omega - \omega_0, \vec{k} - \vec{k}_0) + \epsilon_{0l}^* \delta E_j(\omega + \omega_0, \vec{k} + \vec{k}_0)). \quad (32.3)$$

Уравнение для поля $\delta \vec{E}$ имеет обычный вид (4.1). Проведя в нем разложение Фурье и используя соотношение (32.3), для ком-

понент поля получим соотношение

$$M_{ij}(\omega, \vec{k}) \delta E_j(\omega, \vec{k}) = -S_{ijl} (\epsilon_{0l} \delta E_j(\omega - \omega_0, \vec{k} - \vec{k}_0) + \epsilon_{0l}^* \delta E_j(\omega + \omega_0, \vec{k} + \vec{k}_0)),$$

где $M_{ij} = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) + \frac{c^2}{\omega^2} (k_i k_j - k^2 \delta_{ij})$. Как и в механике, это также уравнение в конечных разностях, но из-за периодичности в пространстве волны накачки помимо зависимости от частоты имеется еще зависимость от волновых векторов. Если считать связь компонент с разными частотами и волновыми векторами слабой (волна накачки имеет малую амплитуду), то как и в случае маятника можно выразить компоненты $\delta E_j(\omega \pm \omega_0, \vec{k} \pm \vec{k}_0)$ через компоненту $\delta E_j(\omega, \vec{k})$ и записать уравнение

$$\{ M_{ij}(\omega, \vec{k}) + S_{inl} \epsilon_{0n} M_{lq}^{-1}(\omega - \omega_0, \vec{k} - \vec{k}_0) S_{qs} \epsilon_{os}^* + S_{inl} \epsilon_{0n} M_{lq}^{-1}(\omega + \omega_0, \vec{k} + \vec{k}_0) S_{qs} \epsilon_{os}^* \} \delta E_j(\omega, \vec{k}) = 0.$$

Условие разрешимости этой системы линейных алгебраических уравнений является равенство нулю определителя системы

$$\| M_{ij}(\omega, \vec{k}) + S_{inl} \epsilon_{0n} M_{lq}^{-1}(\omega - \omega_0, \vec{k} - \vec{k}_0) S_{qs} \epsilon_{os}^* + (\omega \rightarrow \omega + \omega_0, \vec{k} \rightarrow \vec{k} + \vec{k}_0) \| = 0. \quad (32.4)$$

Введем единичный вектор поляризации волны накачки $\vec{e} = \vec{E}_0 / |\vec{E}_0|$ и рассмотрим изотропную среду, где $M_{ij}^{-1} = (k_i k_j / k^2) \epsilon^{-1} + (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) \epsilon^{-1} \epsilon^{-1}$. Уравнение (32.4) принимает вид ($\vec{k}_+ = \vec{k} + \vec{k}_0, \omega_+ = \omega + \omega_0$)

$$\| \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon^l(\omega, \vec{k}) + (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) (\epsilon^{+2} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}) + \epsilon_{0l}^2 \left\{ \frac{S_{inl} \epsilon_{0n} k_l k_q S_{qs} \epsilon_s}{k^2 \epsilon^l(\omega, \vec{k})} + \frac{S_{inl} \epsilon_{0n} (\delta_{lq} - \frac{k_l k_q}{k^2}) S_{qs} \epsilon_s}{\epsilon^{+2}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}} + \frac{(\omega_+ - \omega_0)}{(\vec{k}_+ - \vec{k}_0)} \right\} \| = 0.$$

Если волны накачки нет, то дисперсионное уравнение определяет обычные ветви (типы) волн в изотропной плазме. Волна накачки изменяет эти законы дисперсии. Ее влияние особенно существенно тогда, когда малы знаменатели, содержащие законы дисперсии волн на комбинационных частотах. Эта малость знаменателей накладывает условие на частоты и волновые векторы волны накачки, подобные тем, которые были в случае маятника ($\omega_0 = 2\omega_1$). В этих случаях в среде также возникает параметрический резонанс и волны нарастают (параметрическая неустойчивость).

Частным случаем параметрических неустойчивостей являются распадные неустойчивости, которые мы рассмотрели в §30. Им со-

ответствует решению дисперсионного уравнения по теории возмущений, когда в нулевом приближении выполняются законы дисперсии для взаимодействующих волн, а влияние накачки приводит лишь к малому изменению частот. Именно такие допущения были использованы при выводе укороченных уравнений поля.

§33. Нелинейное взаимодействие волн со случайными фазами

Часто и особенно в плазме возбуждается много волн с разными частотами и длинами, начальные фазы которых никак не связаны между собой и случайны. Суммарное поле этих волн является случайной функцией координат и времени. Наиболее простой и достаточно полной характеристикой такой случайной функции является корреляционная функция, которую можно найти, если известны ее фурье-компоненты или, иными словами, спектральная плотность корреляционной функции $(E^2)_{\omega, \vec{k}}$ (см. приложение # 4). Для полей, возникающих в плазме из-за излучения и поглощения их частицами, величина $(E^2)_{\omega, \vec{k}}$ выражается через функцию распределения частиц. При этом предполагается, что время установления равновесия между волнами и частицами очень мало. В действительности это может быть и не так. Может оказаться, что более быстрым и поэтому более важным является процесс обмена энергией между различными волнами, а не между волнами и частицами. Возникает задача: найти уравнение, которое учитывало бы изменение спектральной плотности корреляционной функции за счет взаимодействия волн с различными частотами и длинами.

Следует отметить, что состояние плазмы, в котором возбуждены случайные электромагнитные поля, часто называют турбулентным. Поэтому задача состоит в том, чтобы построить уравнения, которые описывают эволюцию этого турбулентного состояния из-за нелинейного взаимодействия волн.

Уравнение (27.5) описывает изменение амплитуды одной из волн с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$ за счет взаимодействия с другими волнами. Амплитуда $E_{\omega, \vec{k}}(t, \vec{r}) = \mathcal{E}_{\omega, \vec{k}}(t, \vec{r}) \exp[i\varphi_{\omega, \vec{k}}(t, \vec{r})]$ является комплексной и поэтому уравнение определяет изменение не только действительной амплитуды $\mathcal{E}_{\omega, \vec{k}}$, но и начальной фазы $\varphi_{\omega, \vec{k}}$. Фазы волн, образующих случайное поле, не определены. В этом случае обычно используют предположение о хаотических, случайных фазах и проводят по ним усреднение (см. приложение # 4). При этом усреднении спектральная плотность корреляционной функции

возникнет как результат усреднения фурье-компонент или комплексных амплитуд волн

$$\langle E(\omega_1, \vec{k}_1) E(\omega, \vec{k}) \rangle = (E^2)_{\omega, \vec{k}} \delta(\omega + \omega_1) \delta(\vec{k} + \vec{k}_1) \quad (33.1)$$

Для того чтобы получить уравнение для $(E^2)_{\omega, \vec{k}}$, умножим уравнение (27.5) на $E(\omega_1, \vec{k}_1)$ (индекс ноль для упрощения записи опустим), а уравнение для $E(\omega_1, \vec{k}_1)$ умножим на $E(\omega, \vec{k})$; сложим полученные выражения и проведем усреднение (предполагается, что изменение спектральных характеристик полей происходит медленно).

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} (E^2)_{\omega, \vec{k}} + \vec{\nabla}^{(n)} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (E^2)_{\omega, \vec{k}} + 2\delta(E^2)_{\omega, \vec{k}} \right] \delta(\omega + \omega_1) \delta(\vec{k} + \vec{k}_1) = \\ = \int d\omega' d\vec{k}' a(\omega', \vec{k}') \left[\langle E(\omega, \vec{k}) E(\omega', \vec{k}') E(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') \rangle + \right. \\ \left. + \langle E(\omega, \vec{k}) E(\omega', \vec{k}') E(\omega_1 - \omega', \vec{k}_1 - \vec{k}') \rangle \right]. \end{aligned} \quad (33.2)$$

Произведение трех случайных величин при усреднении дает ноль, если конечно эти величины являются статистически независимыми. Поэтому в линейной электродинамике, где волны не связаны между собой, в правой стороне стоит ноль. Но в нелинейной электродинамике это не так. Ограничимся квадратичным по полю приближением и запишем уравнения Максвелла (I.1) в виде

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{E}_{\text{лин}} + \vec{E}_{\text{н.лин}}) = 0.$$

Представим поле в форме разложения Фурье (27.3) и используем для фурье-компоненты вектора индукции формулу (27.4). В результате получим

$$M_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ijl} \int d\omega' d\vec{k}' E_j(\omega', \vec{k}') E_l(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}').$$

Выразим отсюда $\vec{E}(\omega, \vec{k})$ через квадратичную комбинацию полей и подставим вместо каждого сомножителя в правую сторону уравнения (33.2). В результате возникнут произведения четырех амплитуд вместо произведения трех

$$E(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{\mathcal{D}(\omega)} \int d\omega' d\vec{k}' (e_i(\omega) \epsilon_{ijl} e_j(\omega') e_l(\omega - \omega')) E_j(\omega', \vec{k}') E_l(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}'),$$

где $\mathcal{D}(\omega) = e_i M_{ij} e_j$. Произведение четырех амплитуд при усреднении представляется как квадраты парных произведений

$$\begin{aligned} \langle E(\omega, \vec{k}) E(\omega_1, \vec{k}_1) E(\omega_2, \vec{k}_2) E(\omega_3, \vec{k}_3) \rangle = \langle E(\omega, \vec{k}) E(\omega_1, \vec{k}_1) \rangle \langle E(\omega_2, \vec{k}_2) E(\omega_3, \vec{k}_3) \rangle + \\ + \langle E(\omega, \vec{k}) E(\omega_2, \vec{k}_2) \rangle \langle E(\omega_1, \vec{k}_1) E(\omega_3, \vec{k}_3) \rangle + \langle E(\omega, \vec{k}) E(\omega_3, \vec{k}_3) \rangle \langle E(\omega_1, \vec{k}_1) E(\omega_2, \vec{k}_2) \rangle. \end{aligned}$$

Для пояснения возможности такого представления рассмотрим случайную функцию времени. Возьмем произведение четырех значений функции для четырех различных моментов времени и усредним по статистическому ансамблю (см. приложение №4). Отличный от нуля результат получится в двух случаях. Во-первых, если аргументы двух произвольных пар функций окажутся настолько близки друг к другу, что их произведение всегда будет положительно. Во-вторых, если все четыре функции во всех реализациях будут иметь одинаковый знак. Последнее возможно только в том случае, когда все четыре момента времени близки друг к другу. Естественно предположить, что второй вариант менее вероятен, чем первый, и его можно не учитывать. Тогда среднее от произведения четырех случайных значений функции можно представить как произведение усредненных парных произведений.

В результате усреднения возникнет 18 слагаемых. Из них часть будет содержать ту же δ -функцию, что стоит в левой стороне уравнения. Именно они будут соответствовать учету изменения спектральной плотности именно на частоте ω и с волновым вектором $\vec{k}$.

Обычно интересуются такими случайными полями, которые образованы слабо затухающими волнами в среде. Для этих волн частота и волновой вектор не являются независимыми, а связаны между собой дисперсионным соотношением ($\mathcal{D}^* = \epsilon_i M_{ij}^* \epsilon_j = 0$). В этом случае вместо спектральной плотности корреляционной функции используют плотность энергии $W_{\vec{k}}$ волны с волновым вектором $\vec{k}$. Эта величина выражается через $(E^2)_{\omega, \vec{k}}$ следующим образом (см. §29):

$$W_{\vec{k}} = \int d\omega \frac{(E^2)_{\omega, \vec{k}}}{8\pi} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_i \epsilon_{ij}^* \epsilon_j) \delta[\mathcal{D}^*(\omega, \vec{k})]. \quad (33.3)$$

Для величины $N_{\vec{k}} = W_{\vec{k}} / \omega(\vec{k})$ получается уравнение

$$\frac{\partial N_{\vec{k}}}{\partial t} + \vec{v}(\vec{k}) \frac{\partial N_{\vec{k}}}{\partial \vec{k}} + 2\gamma N_{\vec{k}} = \int d\vec{k}' Q(\vec{k}, \vec{k}') \delta[\omega(\vec{k}) - \omega(\vec{k}') - \omega(\vec{k} - \vec{k}')] \cdot (N_{\vec{k}'} N_{\vec{k} - \vec{k}'} - N_{\vec{k}} N_{\vec{k}'} - N_{\vec{k}} N_{\vec{k} - \vec{k}}) \quad (33.4)$$

Уравнение (33.4) определяет взаимодействие волн с различными длинами (волновыми векторами) в приближении хаотических фаз. Как отмечалось раньше, величину $N_{\vec{k}}$ называют числом квантов и в этой связи уравнение (33.4) называют кинетическим уравнением.

для квантов. Стоящее справа выражение имеет смысл интеграла столкновений между квантами.

Заметим, что в состоянии равновесия нелинейное взаимодействие между волнами не должно изменять плотности их энергии. Это значит, что стоящее справа в (33.4) слагаемое должно обращаться в ноль, если распределение энергии по волновым векторам равновесное и $W_{\vec{k}} = T$, где T - температура. Убедимся в этом, подставив в правую сторону уравнения $N_{\vec{k}} = T / \omega(\vec{k})$

$$\frac{T}{\omega(\vec{k})} \frac{T}{\omega(\vec{k} - \vec{k}')} - \frac{T}{\omega(\vec{k})} \frac{T}{\omega(\vec{k}')} - \frac{T}{\omega(\vec{k}')} \frac{T}{\omega(\vec{k} - \vec{k}')} = \frac{T^2 [\omega(\vec{k}) - \omega(\vec{k} - \vec{k}')] - \omega(\vec{k}) \omega(\vec{k}') \omega(\vec{k} - \vec{k}')}{T^2 \omega(\vec{k}) \omega(\vec{k}') \omega(\vec{k} - \vec{k}')} = 0.$$

В общем случае неравновесной плазмы уравнение (33.4) описывает электромагнитную турбулентность и анализ его составляет предмет многих современных исследований.

ГЛАВА IV. ОСНОВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЛАЗМЕ

§34. Одночастичная модель плазмы в квадратичном приближении

Наиболее простой моделью для описания плазмы является одночастичная модель холодной плазмы. В §13 эта модель использовалась для расчета линейной диэлектрической проницаемости. В этом параграфе будет проанализировано движение электрона в квадратичном по полю волны приближении.

Из уравнения (13.1), представив траекторию электрона в виде ряда $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots$ и приравняв слева и справа члены одного и того же порядка, получим для определения $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ цепочку уравнений. Ограничиваясь квадратичным приближением, запишем

$$m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = e \vec{E}(\vec{r}_0, t), \quad (34.1)$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = e (\vec{r}_1, \vec{r}_1) \vec{E}(\vec{r}_0, t) + \frac{e}{c} \left[\frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{B}(\vec{r}_0, t) \right]. \quad (34.2)$$

Рассмотрим движение электрона в поле монохроматической волны, имеющей частоту ω , волновой вектор $\vec{k}$ и амплитуду $\vec{E}_0$.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} + \vec{E}_0^* e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t} \right).$$

Магнитная индукция в волне изменяется по времени и пространству по такому же закону и ее амплитуда равна $\vec{B}_0 = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \times \vec{E}_0]$. Из уравнения (34.1) находим скорость и координату электрона в линейном приближении

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{ie}{2m\omega} \left(\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} - \vec{E}_0^* e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t} \right), \quad \vec{r}_1 = -\frac{e}{2m\omega^2} \left(\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} + \vec{E}_0^* e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t} \right).$$

Индекс ноль у величины $\vec{r}$ в этих и последующих формулах опущен.

Подставим эти выражения в правую сторону уравнения (34.2). В результате найдем силу, действующую на электрон в квадратичном приближении

$$m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{ie^2}{4m\omega^2} \left\{ e^{-2i\omega t + 2i\vec{k}\vec{r}} \left(\vec{E}_0^2 - 2\vec{E}_0 (\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0) \right) - e^{2i\omega t - 2i\vec{k}\vec{r}} \cdot \left(\vec{E}_0^2 - 2\vec{E}_0^* (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) \right) + 2 \left[\vec{E}_0^* (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 (\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0^*) \right] \right\}.$$

Последнее слагаемое, как это видно при подстановке комплексной амплитуды в виде $\vec{E}_0 = \vec{E}_0 \exp(i\varphi)$, обращается в ноль. В результате получаем для $\vec{r}_1$ и $(d\vec{r}_1/dt)$ при нулевой начальной фазе

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = -\frac{e^2}{4m^2\omega^3} \left(\vec{E}_0^2 - 2\vec{E}_0 (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) \right) \cos(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t),$$

$$\vec{r}_1 = \frac{e^2}{8m^2\omega^4} \left(\vec{E}_0^2 - 2\vec{E}_0 (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) \right) \sin(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t).$$

Таким образом, в поле монохроматической волны наряду с линейным током $\vec{j}_1 = e N_e (d\vec{r}_1/dt)$, изменяющимся на той же частоте, что и поле в волне, возникает квадратичный нелинейный ток $\vec{j}_2 = e N_e (d\vec{r}_2/dt)$, изменяющийся с частотой 2ω и вектором $2\vec{k}$. (см. §26)

$$\vec{j}_2 = -\frac{e^3 N_e}{4m^2\omega^3} \left(\vec{E}_0^2 - 2\vec{E}_0 (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) \right) \cos[2(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]. \quad (34.3)$$

Ток (34.3) является источником для возбуждения второй гармоники электромагнитной волны. Величина поля во второй гармонике зависит от того, выполняется или нет закон дисперсии, связывающий между собой величины 2ω и $2\vec{k}$. Если закон дисперсии выполняется, то возбуждение поля на удвоенной частоте происходит наиболее эффективно. Если же величины 2ω и $2\vec{k}$ не удовлетворяют дисперсионному соотношению, то поле второй гармоники мало. В частности, для поперечной волны в однородной изотропной плазме, когда справедлива формула (14.1), удовлетворить соотношению $(2\omega)^2 = (2k)^2 c^2 + \omega_p^2$ нельзя и эффективность генерации второй гармоники мала.

Остановимся на физических причинах возникновения тока (34.3). Начнем со случая поперечной волны, когда $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$. Представим, что волна распространяется вдоль оси OX, а электрическое поле направлено вдоль оси OY (рис.33). В линейном приближении электрон осциллирует с частотой ω вдоль оси OY

$y_1 = -\frac{e}{m\omega^2} E_0 \cos(\omega t - kx)$. В квадратичном приближении электрон осциллирует на удвоенной частоте вдоль оси OX $x_1 = -\frac{e^2}{8m^2\omega^4} \cdot k E_0^2 \sin 2(\omega t - kx)$. Причиной этих осцилляций является действие силы Лоренца (второе слагаемое справа) в уравнении (34.2). Поднял

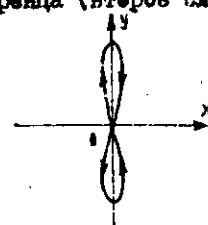


Рис.33

траектория электрона имеет вид восьмерки, вытянутой вдоль оси OY. Отношение амплитуд осцилляций по оси OX и по оси OY по порядку величины равно $(e E_0 k / m \omega^2) = v_E / v_\phi$. Это отношение предполагается малым (см. формулу (13.3)) и по его степеням строится ряд в материальном уравнении (ср. с §25).

Рассмотрим теперь предельную волну, электрическое поле в которой направлено вдоль оси OX. На линейные осцилляции электрона $x_1 = -\frac{e}{m\omega^2} E_0 \cos(\omega t - kx)$ накладываются квадратичные осцилляции $x_2 = -\frac{ke^2}{8m^2\omega^4} E_0^2 \sin 2(kx - \omega t)$. На рис.34 показано смещение электрона в зависимости от времени. Поскольку магнитное поле в продольной волне равно нулю, то нелинейность в движении электрона связана с первым слагаемым в правой стороне формулы (34.2). Осциллируя в поле волны, электрон движется либо по направлению ее распространения, либо против него. Из-за этого поле волны действует на электрон разное время и осцилляции его не симметричны. Двигаясь навстречу волне, электрон находится под действием поля волны более короткое время, а при движении по направлению распространения волны, — более длительное время.

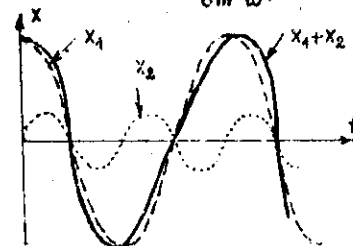


Рис.34

Двигаясь навстречу волне, электрон находится под действием поля волны более короткое время, а при движении по направлению распространения волны, — более длительное время.

§35. Ток увлечения

Распространяясь в плазме, высокочастотная волна может создавать постоянный ток, величина которого пропорциональна квадрату амплитуды волны. Такой ток принято называть током увлечения. Ток увлечения можно найти, если в линейном приближении использовать уравнение движения электрона с учетом трения (I3.8). В поле монохроматической волны из этого уравнения получим для скорости электрона выражение

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = -\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2 + \nu^2)} [\omega \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) - \nu \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)].$$

В квадратичном приближении уравнение (34.2) также должно быть дополнено слагаемым, учитывающим силу трения

$$m \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -m\nu \frac{d\vec{r}_1}{dt} + e(\vec{r}_1, \vec{\nabla})\vec{E} + \frac{e}{c} \left[\frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{B} \right]$$

Рассмотрим поперечную волну, для которой нелинейная сила определяется последним слагаемым в правой стороне этого уравнения. Подставив $\vec{B}$ и $(d\vec{r}_1/dt)$ в выражение для силы, найдем, что наряду со слагаемыми, изменяющимися на удвоенной частоте, возникает независимое от времени слагаемое $e^2 \nu \vec{k} \vec{E}_0^2 / 2m\omega(\omega^2 + \nu^2)$.

Стационарному току соответствует постоянная скорость дрейфа электронов. Приравняв силу трения постоянной нелинейной силе, найдем плотность тока увлечения

$$\vec{j} = eN_e \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{e^2 N_e \vec{k} \vec{E}_0^2}{2m^2 \omega (\omega^2 + \nu^2)} \quad (35.1)$$

Из выражения (35.1) следует, что в пределе малой частоты отклонений ($\nu \ll \omega$) ток увлечения от нее не зависит и равен

$$\vec{j} = \frac{e^2 N_e \vec{k} \vec{E}_0^2}{2m\omega^3} = \frac{e\omega_{pe}^2 \vec{k} \vec{E}_0^2}{m\omega^3 \omega \delta\pi} \quad (35.2)$$

Выражение (35.2) можно получить с помощью простых физических рассуждений, позволяющих понять механизм возникновения тока увлечения. При распространении в плазме волна затухает, теряет свою энергию и передает ее электронам плазмы. В единицу времени в единице объема согласно формуле (I0.4) теряется энергия $2\gamma \langle W \rangle$, где декремент затухания согласно формуле (I4.5) равен $\frac{\nu}{2} (\omega_{pe}^2 / \omega^2)$, а средняя плотность энергии (I0.2) в данном случае имеет вид $\vec{E}_0^2 / 8\pi$.

Вместе с энергией электронам плазмы передается и импульс волны. Связь между плотностью энергии и плотностью импульса в вакууме наиболее просто установить, пользуясь квантово-механическими представлениями. Если сопоставить волне набор квантов с плотностью N_0 , то $\langle W \rangle = \hbar \omega N_0$. Соответственно плотность импульса равна $\vec{P} = \hbar \vec{k} N_0$. Отсюда находим $\vec{P} = (\vec{k}/\omega) (\vec{E}_0^2 / 8\pi)$. Увеличение плотности импульса электронов в единицу времени равно действующей на них плотности силы $\vec{F} = d\vec{P}/dt = 2\gamma \vec{P} = 2\gamma (\vec{k}/\omega) (\vec{E}_0^2 / 8\pi)$. Постоянный ток электронов устанавливается тогда, когда действующая со стороны волны сила $\vec{F}$ равна силе трения $mN_e \nu \vec{V}$, где $\vec{V}$ — скорость дрейфа электронов. Приравняв эти силы, найдем величину $\vec{V}$ и затем плотность тока увлечения

$$\vec{j} = eN_e \vec{V} = eN_e \frac{2\gamma}{N_e m \nu} \frac{\vec{k}}{\omega} \frac{\vec{E}_0^2}{8\pi} = \frac{e}{m} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^3} \frac{\vec{k}}{\omega} \frac{\vec{E}_0^2}{8\pi}$$

Полученное выражение совпадает с формулой (35.2). Таким образом, ток увлечения возникает за счет передачи импульса волны электронам плазмы.

§36. Нелинейная диэлектрическая проницаемость для плазмы

Принцип суперпозиции, справедливый в линейной электродинамике, является следствием предположения о том, что движение частиц линейно зависит от поля. При более точном рассмотрении движение электрона зависит и от квадрата поля и, вообще говоря, от более высоких степеней поля. Поэтому принцип суперпозиции в нелинейной электродинамике не справедлив. В частности, две волны в плазме вызывают ток не только на своих частотах, но и на комбинационных частотах.

Рассмотрим две волны в плазме с частотами ω_1 и ω_2 и волновыми векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$. Электрическое и магнитное поля в этих волнах равны соответственно

$$\vec{E}_{1,2} = \vec{E}_{1,2} \cos(\omega_{1,2}t - \vec{k}_{1,2}\vec{r}), \quad \vec{B}_{1,2} = \frac{c}{\omega_{1,2}} [\vec{k}_{1,2} \vec{E}_{1,2}] \cos(\omega_{1,2}t - \vec{k}_{1,2}\vec{r})$$

Уравнение движения электрона в поле волн имеет вид

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) + \frac{e}{c} \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \right]$$

Как и в §34, будем писать решение в виде ряда $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots$. В результате в линейном относительно полей приближении получим

$$\vec{v}_1 = -\frac{e}{m} \left[\frac{\vec{E}_1}{\omega_1} \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r}_0) + \frac{\vec{E}_2}{\omega_2} \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r}_0) \right], \quad (36.1)$$

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = -\frac{e}{m} \left[\frac{\vec{E}_1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r}_0) + \frac{\vec{E}_2}{\omega_2} \sin(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r}_0) \right]. \quad (36.2)$$

В квадратичном приближении уравнение для траектории имеет вид $m(d^2\vec{r}_1/dt^2) = \vec{f}_1$, где (см. §34)

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= e(\vec{E}, \vec{v}) (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) + e \left[\frac{d\vec{v}_1}{dt} \left(\frac{[\vec{R}_1, \vec{E}_1]}{\omega_1} + \frac{[\vec{R}_1, \vec{E}_2]}{\omega_2} \right) \right] = \\ &= \frac{e^2}{m} \left\{ - \left(\left[\frac{\vec{E}_1}{\omega_1} \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r}_0) + \frac{\vec{E}_2}{\omega_2} \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r}_0) \right] \vec{v} \right) \left(\vec{E}_1 \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r}_0) + \vec{E}_2 \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r}_0) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\vec{E}_1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r}_0) + \frac{\vec{E}_2}{\omega_2} \sin(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r}_0) \right) \left(\frac{[\vec{R}_1, \vec{E}_1]}{\omega_1} \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r}_0) + \frac{[\vec{R}_1, \vec{E}_2]}{\omega_2} \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r}_0) \right) \right\}. \end{aligned}$$

В приведенном выражении для силы имеются слагаемые с различной пространственно-временной зависимостью. Так, например, имеются слагаемые, пропорциональные $\sin 2(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r}_0)$. Они определяют осцилляции электронов на удвоенных частотах и с ними связана обсуждавшаяся выше генерация гармоник. нас будет интересовать только взаимодействие между волнами. За него ответственны слагаемые следующего вида:

$$\vec{f}_1^{(\omega)} = \frac{e^2}{2m} \left\{ \vec{A}_+ \sin(\omega_+ t - \vec{k}_+ \vec{r}_0) + \vec{A}_- \sin(\omega_- t - \vec{k}_- \vec{r}_0) \right\},$$

где $\omega_{\pm} = \omega_1 \pm \omega_2$; $\vec{k}_{\pm} = \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$ — комбинационные частоты и волновые векторы

$$\vec{A}_{\pm} = \left(\frac{[\vec{E}_1, [\vec{k}_1, \vec{E}_2]]}{\omega_1 \omega_2} - \frac{\vec{E}_1(\vec{k}_1, \vec{E}_2)}{\omega_2^2} \right)_{\pm} \left(\frac{[\vec{E}_2, [\vec{k}_2, \vec{E}_1]]}{\omega_1 \omega_2} - \frac{\vec{E}_2(\vec{k}_2, \vec{E}_1)}{\omega_1^2} \right)_{\pm}$$

Выражение для величин $\vec{A}_{\pm}$ преобразуем к более симметричному виду

$$\vec{A}_{\pm} = \frac{\vec{k}_{\pm}(\vec{k}_1, \vec{E}_2)}{\omega_1 \omega_2} - \frac{\vec{E}_1(\vec{k}_1, \vec{E}_2) \omega_2}{\omega_1 \omega_2^2} - \frac{\vec{E}_2(\vec{k}_2, \vec{E}_1) \omega_1}{\omega_1^2 \omega_2}$$

В частности, если частоты волн близки ($\omega_1 \approx \omega_2$), то возникает медленно изменяющаяся со временем сила, действующая на электрон ($|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}$), приблизительно равная

$$\vec{f}_1^{(\omega)} \approx \frac{e^2 R_1(\vec{k}_1, \vec{E}_2)}{2m\omega_1^2} \sin(\omega_{\pm} t - \vec{k}_{\pm} \vec{r}_0) \quad (36.3)$$

Используя полученное выражение для силы $\vec{f}_1^{(\omega)}$, найдем скорость движения электрона и затем плотность тока $\vec{j} = eN_e(d\vec{r}_1/dt)$, которую удобно записать в виде $\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_-$, где

$$\vec{j}_{\pm}^{(+)} = \delta_{ij} \epsilon_{22} \cos(\omega_{\pm} t - \vec{k}_{\pm} \vec{r}_0). \quad (36.4)$$

$$\delta_{ij}^{(\pm)} = \frac{e^3 N_e}{2m\omega_1 \omega_2} \left(-\frac{k_{\pm i}}{\omega_{\pm}} \delta_{je} + \frac{k_{1i}}{\omega_2} \delta_{ij} + \frac{k_{2i}}{\omega_1} \delta_{ie} \right).$$

Общая формула (3.6) позволяет находить тензор диэлектрической проницаемости с помощью выражения для тензора электропроводности. Если ток квадратичный и индукция тоже квадратична, то между ними имеет место соотношение $\epsilon_{ijl} = 4\pi i \delta_{ijl} / \omega$. В результате для тензора нелинейной диэлектрической проницаемости с помощью формулы (36.4) находим

$$\epsilon_{ijl}^{\pm} = \frac{4\pi i e^3 N_e}{2m\omega_1 \omega_2 \omega_{\pm}} \left(\frac{k_{2j}}{\omega_1} \delta_{il} + \frac{k_{1j}}{\omega_2} \delta_{ij} - \frac{k_{\pm i}}{\omega_{\pm}} \delta_{jl} \right). \quad (36.5)$$

Формула (36.5) определяет нелинейный тензор диэлектрической проницаемости на комбинационных частотах. Видно, что даже в изотропной плазме, где нет никаких выделенных направлений, этот тензор отличен от нуля, хотя ранее считали, что в изотропной среде нет квадратичной по полю диэлектрической проницаемости. Дело в том, что предыдущее рассуждение было справедливо в пренебрежении пространственной дисперсией. Предполагалось, что в изотропной среде имеется единственный вектор — вектор напряженности электрического поля и из него нельзя построить в квадратичном приближении вектор. В этом рассуждении не было учтено, что при учете пространственной дисперсии имеются еще другие векторы, не связанные со средой, но связанные с волной — волновые векторы.

§37. Процессы трехволнового взаимодействия в плазме

В предыдущем параграфе был рассмотрен ток на комбинационных частотах, создаваемый двумя электромагнитными волнами в плазме. Этот ток служит источником для полей с частотами $\omega_1 \pm \omega_2$. Величина поля на комбинационных частотах зависит от того, выполняется или нет дисперсионное соотношение, связывающее между собой $\omega_1 \pm \omega_2$ и волновые векторы $\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$. Если дисперсионное соотношение не выполняется, то поле на комбинационных частотах мало. Если же величинами $\omega_1 \pm \omega_2$ и $\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$ связаны между собой

дисперсионным соотношением, то в плазме возбуждается собственная волна. В этом случае можно говорить о взаимодействии трех волн в плазме, каждая из которых является собственной волной плазмы и удовлетворяет дисперсионному соотношению. Процесс, при котором две волны с частотами ω_1 и ω_2 возбуждают волну с суммарной частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, называют процессом слияния, а обратный процесс - распадом. В частности, возникновение волны с более низкой частотой $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ отвечает процессу распада $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ (см. также §28).

Одновременное выполнение дисперсионных соотношений для трех волн, частоты и волновые векторы которых связаны между собой распадными условиями $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$, $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$, возможно отнюдь не всегда. Проиллюстрируем это на примере взаимодействия ионно-звуковой волны с ленгмювской волной. На рис. 35 показана дисперсионная кривая для ионно-звуковых волн, начинающаяся в некоторой

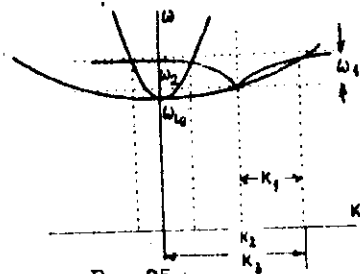


Рис. 35

точке, лежащей на дисперсионной кривой для ленгмювской волны. Взаимодействие возможно для волн, которым отвечает пересечение этой кривой с какой-либо другой дисперсионной ветвью. Из рисунка видно, что в результате взаимодействия может возникнуть либо снова ленгмювская волна, либо поперечная электромагнитная волна. На рис. 36 показаны возможные трехволновые процессы в изотропной плазме.

Волновые векторы $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ определяют направления распространения волн с частотами ω_1 и ω_2 . Необходимость выполнения закона дисперсии для волны с комбинационной частотой $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$ налагает определенные ограничения на направления ее распространения. Продемонстрируем это на примере процесса распада $t \rightarrow t' + s$. Занедем законы дисперсии для всех трех волн $\omega_1^2 = \omega_{pe}^2 + k_1^2 c^2$, $\omega_2^2 = \omega_{pe}^2 + k_2^2 c^2$, $\omega_3^2 = \omega_{pe}^2 + k_3^2 c^2$ (для простоты рассматриваем сл звуковые волны с длиной волны, превышающей дебаевский радиус электронов; см. §19). Перепишем закон дисперсии для первой волны в виде

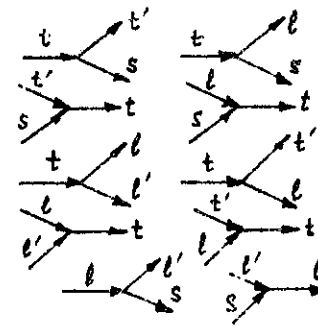


Рис. 36

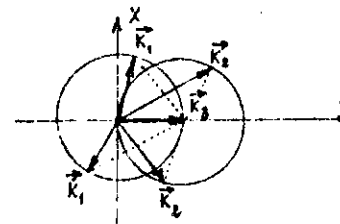


Рис. 37

$$(\omega_3 - \omega_2)^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 (\vec{k}_3 - \vec{k}_2)^2$$

Используя закон дисперсии для третьей волны и учитывая, что частота звуковой волны ω_1 намного меньше, чем частота поперечной волны ω_3 , отсюда получим $k_3^2 - 2\vec{k}_3 \cdot \vec{k}_2 + k_2^2 \approx \omega_1^2/c^2 = 0$. Последнее слагаемое мало и его можно отбросить. Если выбрать ось Ox вдоль вектора $\vec{k}_2$, то получим, что концы вектора $\vec{k}_1$ лежат на окружности с радиусом k_2 (рис. 37)

$$k_{1x}^2 + (k_{1z} - k_2)^2 = k_2^2$$

Из условия $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ следует, что и концы волновых векторов $\vec{k}_1$ также лежат на окружности, но с центром в начале координат.

В качестве другого примера рассмотрим процесс $t \rightarrow t' + s$.

Частота звуковой волны мала по сравнению с частотой ленгмювской волны. Поэтому частота поперечной волны близка к ленгмювской электронной частоте и согласно закону дисперсии волновой вектор $\vec{k}_3$ мал. В распадном условии $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ им можно пренебречь и считать, что $\vec{k}_2 \approx -\vec{k}_1$. Таким образом, ленгмювские и звуковые волны, взаимодействующие с поперечной волной, распространяются практически навстречу друг другу.

§ 38. Пондеромоторные (стрикционные) силы в плазме

До сих пор мы рассматривали движение частиц в полых плоских волнах с постоянными амплитудами. Зачастую в плазме структура полей является более сложной. В частности, часто приходится иметь дело со стоячими волнами (удержание, ускорение плазмы, воздействие лазерного излучения и т.д.). В этом случае на частицы плазмы действуют особые силы, которые равны нулю в случае плоской волны.

Рассмотрим электрическое поле в плазме следующего вида:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} (\vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r}) e^{i\omega t}) \quad (38.1)$$

Это поле является монохроматическим. Если $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}$, то формула (38.1) определяет поле бегущей волны. В этом смысле формула (38.1) является обобщением выражений, которые использовались ранее.

Из формулы (38.1) и уравнения Максвелла $\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ легко найти соответствующее магнитное поле

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{ic}{\omega} (\text{rot} \vec{E} e^{-i\omega t} - \text{rot} \vec{E}^* e^{i\omega t}) \quad (38.2)$$

Рассмотрим уравнение движения электрона (13.1) в таком электромагнитном поле. Как и раньше, будем искать решение уравнения движения по теореме возмущений, полагая, что электрон сначала покоился в точке $\vec{r} = \vec{r}_0$. Тогда в первом приближении найдем

$$m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{e}{2} (\vec{E}(\vec{r}_0) e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r}_0) e^{i\omega t}), \quad \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{ie}{2m\omega} (\vec{E}(\vec{r}_0) e^{-i\omega t} - \vec{E}^*(\vec{r}_0) e^{i\omega t}),$$

$$\vec{r}_1 = -\frac{e}{2m\omega^2} (\vec{E}(\vec{r}_0) e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r}_0) e^{i\omega t})$$

Во втором приближении на электрон действует сила

$$m \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F} = e(\vec{r}_1 \cdot \nabla) \vec{E} + \frac{e}{c} \left[\frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{B} \right] = e \left\{ -\frac{e}{2m\omega^2} \left[(\vec{E} e^{-i\omega t} + \vec{E}^* e^{i\omega t}) \cdot \nabla \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c} (\vec{E} e^{-i\omega t} + \vec{E}^* e^{i\omega t}) \cdot \frac{ie}{2m\omega} \left[(\vec{E} e^{-i\omega t} - \vec{E}^* e^{i\omega t}) \cdot \nabla \right] \right\}$$

В выражение для силы входят слагаемые, которые не зависят от времени. Именно эти слагаемые и будут нас интересовать. Выпишем их отдельно, обозначив соответствующую часть силы индексом мол .

$$\vec{F}_0 = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \left\{ (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E}^* + (\vec{E}^* \cdot \nabla) \vec{E} + [\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{E}^*] + [\vec{E}^* \cdot \text{rot} \vec{E}] \right\}$$

Используя соотношение $[\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{E}^*]_i = \epsilon_n \frac{\partial E_i^*}{\partial x_i} - (\vec{E} \cdot \nabla) E_i^*$, получим значительное упрощение этой формулы

$$\vec{F}_0 = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \nabla |\vec{E}(\vec{r})|^2 \quad (38.3)$$

В плоской волне $|\vec{E}|^2 = \text{const}$ и сила $\vec{F}_0$ равна нулю. Силу (38.3) называют подеромоторной, или стрикционной, а также часто называют силой Миллера.

В чем же причина возникновения такой силы? Для того чтобы ответить на этот вопрос, вспомним (см. §34), что заряженная частица в электромагнитном поле движется по восьмерке. Если поле неоднородное, то восьмерка имеет разную кривизну в разных участках траектории (рис. 38). Это приводит к тому, что частица через период изменения поля не возвращается в исходную точку и дрейфует в сторону более слабого поля. Такому дрейфу отвечает сила, которая всегда стремится вытолкнуть частицу из области более сильного электромагнитного поля в область более слабого поля. Сила не зависит от знака заряда, но зависит от массы частицы. На электроны эта сила действует в (m_i/m) раз сильнее (при $Z = 1$), чем на ионы.

Выражение для силы (38.3) легко получить и из качественных соображений. Помещенный в высокочастотное поле электрон имеет среднюю (за период изменения поля) энергию

$$\bar{W} = \frac{m}{2} \bar{v}^2 = \frac{2e^2}{8m\omega^2} |\vec{E}|^2 = \frac{e^2}{4m\omega^2} |\vec{E}|^2$$

Если поле $\vec{E}$ зависит от координат, то и средняя энергия электрона зависит от его положения. Естественно думать, что при этом на электрон действует сила, стремящаяся перевести его в положение с меньшей энергией, подобная силе, действующей на электрон в статическом электрическом поле с потенциалом φ . В высокочастотном поле роль потенциала играет средняя энергия $\bar{W}$. Сила же равна $\vec{F} = -\nabla \bar{W}$. Поэтому величину $\bar{W}$ часто

называют высокочастотным потенциалом.

На единицу объема плазмы действует сила (фактически только на электроны) $\vec{F} = N_e \vec{F}_0$ или

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla |\vec{E}|^2$$

Если вспомнить, что в холодной плазме $\epsilon^L = \epsilon^T = \epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$,

то это выражение для силы можно переписать в виде

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi} (\epsilon - 1) \nabla |\vec{E}|^2 \quad (38.4)$$

Эту силу часто называют также силой высокочастотного давления.

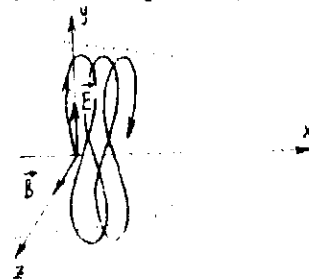


Рис. 38

§39. Параметрические неустойчивости в плазме

Среди всего разнообразия параметрических неустойчивостей в плазме имеется ряд наиболее распространенных и часто обсуждаемых. Рассмотрим эти неустойчивости на качественном уровне, используя представления о ponderomotive силах.

Начнем с так называемой осцилляторной двухпоточковой неустойчивости, которая возникает в плотной плазме, когда частота волны накачки ω_0 близка к плазменной электронной частоте. Пусть в плазме, помещенной в однородное высокочастотное поле, имеется малое возмущение плотности δN_e (рис. 39). Под действием поля электроны плазмы осциллируют и выходят из области, где

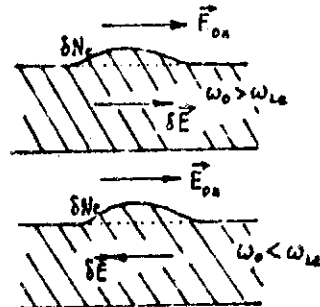


Рис. 39

где $\vec{E}_{0x}$ — проекция поля волны накачки на направление градиента плотности. Если $\omega_0 > \omega_{pe}$ и $\epsilon(\omega_0) > 0$, то в области, где $\delta N_e > 0$, поле разделения зарядов направлено в ту же сторону, что и поле накачки. Полное поле в области повышенной концентрации больше, чем вне ее и сила высокочастотного давления, пропорциональная $\nabla(\vec{E}_{0x} \delta \vec{E})/\partial x$, стремится уменьшить начальное возмущение концентрации. Если же $\omega_0 < \omega_{pe}$, то $\epsilon(\omega_0) < 0$ и поле $\delta \vec{E}$ противоположно по направлению полю $\vec{E}_{0x}$. Полное поле меньше там, где плотность плазмы больше и силы высокочастотного давления стремятся увеличить начальные возмущения. В результате они начинают нарастать и возникает неустойчивость.

Рассмотрим теперь неустойчивость в разреженной плазме ($\omega_0 \gg \omega_{pe}$), которую называют самофокусировочной, или филаментационной. В результате ее развития в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны накачки, происходит перераспределение плотности плазмы и электромагнитного поля. Возникают области пониженной плотности, но с повышенной интенсив-

ностью электромагнитного излучения, чередующиеся с областями повышенной плотности, но с пониженной интенсивностью излучения. Разделение электромагнитной волны на узкие "нити" с повышенной интенсивностью называется филаментацией. Чтобы понять физическую причину филаментации, рассмотрим волну накачки, распространяющуюся в плазме, концентрация которой в направлении, перпендикулярном $\vec{k}_0$, промодулирована (рис. 40). Все электроны плазмы при фиксированной координате z осциллируют в поле волны накачки по закону $\vec{v} = \vec{v}_E \cos \omega_0 t$, где $v_E = eE/m\omega_0$. Вариации плотности δN_e вызывают

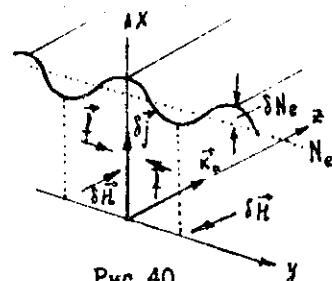


Рис. 40

$\delta \vec{j} = e \vec{v}_E \delta N_e \cos \omega_0 t$. Этот ток служит источником направленного вдоль оси Oz магнитного поля $\delta \vec{H}$, напряженность которого зависит от переменной y . Магнитное поле действует на осциллирующие в поле волны накачки электроны с силой $\vec{F} = \frac{1}{c} [\vec{j}_0 \delta \vec{H}]$, где $\vec{j}_0 = e N_e \vec{v}_E \cos \omega_0 t$. Эта сила увеличивает начальные возмущения плотности и возникает неустойчивость.

Еще одним примером параметрических неустойчивостей является так называемый процесс вынужденного рассеяния. Чтобы вскрыть его физическую причину, рассмотрим волну накачки и распространяющуюся ей навстречу слабую электромагнитную волну с близкой частотой ω_1 . Если бы частоты волн совпадали, то в суммарном их поле было бы стоячее, описывающее стоячую волну. Из-за того, что частоты отличаются, стоячая волна сравнительно медленно со скоростью $\frac{\omega_0 - \omega_1}{k_0 + k_1} \approx v_g$ перемещается по плазме. В поле такой волны действуют ponderomotive силы, которые стремятся вытолкнуть плазму из пучностей волны в ее узлы (рис. 41). Возмущения плотности оказываются наиболее значительными в

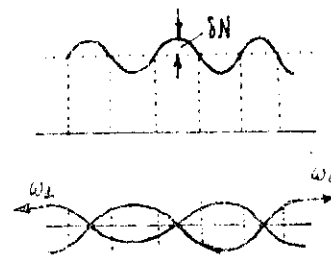


Рис. 41

условиях, когда скорость v_g совпадает со скоростью продольной волны в плазме. Если продольной волной является ленгмювская волна, то говорят о вынужденном комбинационном рассеянии. Если же продольной волной является звуковая волна, то говорят о вынужденном рассеянии Манделштама-Бриллюэна. Продольная волна, нарастая

под действием пондеромоторной силы, увеличивает амплитуду рассеянной волны с частотой ω_1 и тем самым еще больше увеличивает пондеромоторную силу. Результатом является развитие неустойчивости, при которой резко возрастает интенсивность рассеянного излучения.

§40. Плазменная турбулентность

Если плазма неустойчива, то в ней обычно нарастает не одна волна, а целый набор волн с различными частотами и направлениями распространения. Суммарное поле этих волн является случайной функцией координат и времени и, как говорят, плазма переходит в турбулентное состояние. Для характеристики такого случайного поля обычно используют спектральную плотность корреляционной функции или связанную с ней величину N_k , которую называют числом квантов (см. §33). Уравнение для N_k имеет вид

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} \frac{\partial N_k}{\partial \mathbf{r}} + 2\gamma N_k = I(\mathbf{r}),$$

где стоящая в правой стороне величина учитывает взаимодействие между квантами (связь различных фурье-компонент спектральной плотности корреляционной функции).

Рассмотрим стационарную и однородную турбулентность, когда поле есть стационарная и однородная случайная функция. Уравнение для N_k в этом случае упрощается и имеет вид $\Delta N_k = -I$. В состоянии равновесия $N_k = N_0(\mathbf{k})$ и $I = 0$, $\gamma = 0$. Если же плазма неустойчива, то $\gamma(\mathbf{k}) < 0$ в некоторой области значений волновых векторов $\mathbf{k}$ (рис. 42). Эта область называется зоной генерации. Если бы между квантами не было взаимодействия, то и в этой зоне происходило бы нарастание их числа со временем. За счет нелинейного взаимодействия (столкновений) энергия волн из зоны генерации переходит к другим волнам до тех пор пока не попадет в зону поглощения, где $\gamma > 0$. Между зонами генерации и поглощения находится так называемый инерционный интервал. В этом интервале выполняется закон сохранения потока энергии в пространстве волновых векторов.

Таким образом, для установления стационарной турбулентности нужно, чтобы была зона поглощения и нелинейное взаимодействие волн переводило энергию из зоны генерации в зону поглощения. Именно так все и происходило при развитии турбулентности в жидкости. Звуковые волны, возникающие из-за течения жидкости, гене-

рировали свои гармоники, длины волн уменьшались и вязкость становилась сильнее.

В плазме одним из наиболее характерных следствий развития неустойчивости является нарастание ленгмювских волн. К этому приводят пучковые неустойчивости, параметрические неустойчивости и многие другие. Трехволновое взаимодействие между ленгмювскими волнами невозможно. Запрет связан с тем, что суммарная частота двух волн близка к $2\omega_p$ и не может удовлетворять закону дисперсии. Однако возможен иной процесс взаимодействия ленгмювских волн — индуцированное рассеяние волн на частицах. Остановимся на этом процессе более детально.

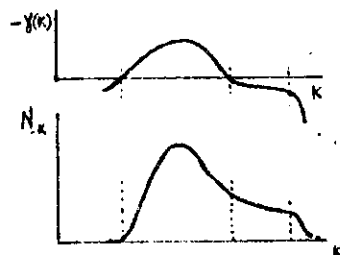


Рис. 42

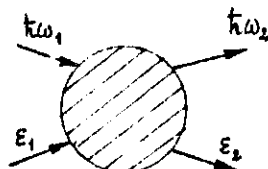


Рис. 43

Пусть в плазме распространяются две волны с частотами ω_1 и ω_2 и с волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Для простоты будем считать, что обе эти волны продольные и в них магнитное поле отсутствует. Траекторию частицы будем искать по теории возмущений, предположив, что в нулевом приближении частица движется с постоянной скоростью ($\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}t$). Тогда поправки к этой траектории могут быть найдены из следующих уравнений:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = e \left(\mathbf{E}_1 \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{v}t) + \mathbf{E}_2 \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{v}t) \right),$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = e \left(\mathbf{E}_1 \sin(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{v}t) + \mathbf{E}_2 \sin(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{v}t) \right).$$

При выполнении условий $\omega_1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{v}$ или $\omega_2 = \mathbf{k}_2 \mathbf{v}$ сила, действующая на частицу, не зависит от времени и может сильно влиять на ее траекторию. Предполагая, что такого линейного резонанса для частицы нет, найдем силу, действующую на частицу во втором приближении,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{e^2}{m} \left(\frac{\mathbf{E}_{1i}}{(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v})^2} \cos[(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v})t] + \frac{\mathbf{E}_{2i}}{(\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v})^2} \cos[(\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v})t] \right).$$

$$\cdot (k_{1i} \vec{E}_1 \sin[(\omega_1 - \vec{k}_1 \vec{v})t] + k_{2i} \vec{E}_2 \sin[(\omega_2 - \vec{k}_2 \vec{v})t]).$$

Стоящая справа сила определяет различные процессы. Так, имеются слагаемые, пропорциональные $\sin[\lambda(\omega_1 - \vec{k}_1 \vec{v})t]$. Ясно, что эти слагаемые приводят к постоянной силе при тех же условиях, что и в обычном линейном резонансе. Однако имеются еще перекрестные слагаемые с частотами $\omega_{\pm} = \omega_1 \pm \omega_2$ и волновыми векторами $\vec{k}_{\pm} = \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$

$$- \frac{e^2}{2m} \left\{ \left[\frac{\vec{E}_2(\vec{k}_2 \vec{E}_1)}{(\omega_1 - \vec{k}_1 \vec{v})^2} + \frac{\vec{E}_1(\vec{k}_1 \vec{E}_2)}{(\omega_2 - \vec{k}_2 \vec{v})^2} \right] \sin[(\omega_+ t - \vec{k}_+ \vec{v} t)] + \left[\frac{\vec{E}_1(\vec{k}_1 \vec{E}_2)}{(\omega_2 - \vec{k}_2 \vec{v})^2} - \frac{\vec{E}_2(\vec{k}_2 \vec{E}_1)}{(\omega_1 - \vec{k}_1 \vec{v})^2} \right] \sin[(\omega_- t - \vec{k}_- \vec{v} t)] \right\}.$$

Если выполнено одно из двух резонансных условий

$$\omega_1 \pm \omega_2 = (\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2) \vec{v}, \quad (40.1)$$

то на частицу действует постоянная сила. В этом случае говорят снова о резонансных частицах. Но этот резонанс является нелинейным, скорость частицы совпадает со скоростью распространения нелинейного поля на комбинационных частотах.

Основной интерес представляет нелинейный резонанс волн с частицами, когда выполнено условие $\omega_1 - \omega_2 = \vec{v}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$. Связано это с тем, что для волн, фазовые скорости которых велики, условие линейного резонанса $\omega_{1,2} = \vec{k}_{1,2} \vec{v}$ выполняется лишь для малого числа частиц, в то время как условие нелинейного резонанса выполняется для частиц с малыми скоростями, число которых велико.

Рассмотрим две ленгмювские волны в плазме с максвелловским распределением частиц по скоростям. Известно, что в этом случае энергия от волн передается частицам (затухание Ландау, §23). Аналогично и для нелинейного резонанса энергия от волн переходит частицам и $W_1 + W_2 < W_{10} + W_{20}$, где $W_{1,2}$ — плотность энергии волн в момент времени t ; W_{10}, W_{20} — плотность энергии в начальный момент. При таком взаимодействии имеет место еще закон сохранения числа квантов. Частица поглощает квант $\hbar\omega_1$ и излучает квант $\hbar\omega_2$ (рис. 43). Закон сохранения энергии $\hbar\omega_1 + \varepsilon_1 = \hbar\omega_2 + \varepsilon_2$ и закон сохранения импульса $\hbar\vec{k}_1 + \vec{p}_1 =$

$= \hbar\vec{k}_2 + \vec{p}_2$ приводит к полученному выше условию резонансного взаимодействия $\omega_1 - \omega_2 = \vec{v}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$. Условие сохранения числа квантов имеет вид $(W_1/\omega_1) + (W_2/\omega_2) = \text{const}$ или $(W_1/\omega_1) + (W_2/\omega_2) = (W_{10}/\omega_1) + (W_{20}/\omega_2)$. Отсюда получим $(W_1 + W_2)/\omega_1 + W_2(\omega_1 - \omega_2)/\omega_1\omega_2 = (W_{10} + W_{20})/\omega_1 + W_{20}(\omega_1 - \omega_2)/\omega_1\omega_2$ или при $\omega_1 > \omega_2$, $W_1 > W_{20}$. Это значит, что при таком нелинейном процессе взаимодействия волн через частицы энергия от высокочастотных волн переходит как к частицам плазмы, так и к более низкочастотным волнам. Процесс этот называется процессом индуцированного рассеяния волн на частицах.

Итак, в системе ленгмювских волн энергия переходит из-за их нелинейного взаимодействия в более низкочастотные волны. При этом длина волны увеличивается и затухание Ландау уменьшается. Из-за нелинейного взаимодействия ленгмювских волн энергия не переходит в область поглощения, а скапливается (конденсируется) в области длинных волн. Справедливая для жидкости модель установления стационарной турбулентности оказывается непригодной для ленгмювской турбулентности.

Выход был найден в том, что в возникающем состоянии с большой энергией в длинных ленгмювских волнах развивается так называемая модулированная неустойчивость. При этом нарушается однородность ионного фона и плазма становится неоднородной. Образуются области с пониженной плотностью и повышенным продольным полем (кавитоны). Со временем эти ямки углубляются и сжимаются (так называемый коллапс ленгмювских волн). При этом происходит уменьшение длин ленгмювских волн и переход их энергии в частицы плазмы.

§41. Захваченные частицы

До сих пор использовалась теория возмущений относительно величины электрического поля. Это предполагало, что электрическое поле мало изменяет траектории движения частицы или $V_{ex} \ll \ll \max(V_{Te}, V_e)$. Ясно, что это условие выполняется особенно плохо для резонансных частиц, скорость движения которых совпадает с фазовой скоростью волны. Поэтому эти частицы требуют рассмотрения без использования теории возмущений.

Рассмотрим продольную волну, распространяющуюся вдоль оси OX, поле этой волны имеет вид $E = E_0 \sin(\omega_0 t - k_0 x)$. Перейдем в систему координат, связанную с волной $x = x' + (\omega_0/k_0)t$. В этой системе координат поле является периодической функцией

координаты $E = -E_0 \sin k_0 x'$. Поскольку волна является потенциальной, то можно ввести потенциал $E = -d\Phi/dx'$, где $\Phi = -(E_0/k_0) \cos k_0 x'$ (рис. 44). Рассмотрим движение частицы в электрическом поле при условии, что начальная скорость частицы близка к фазовой скорости волны. Уравнение движения в окрестности точек $k_0 x' = \pi l$, где $l = 0, \pm 1; \pm 2, \dots$

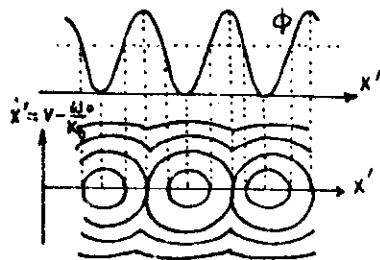


Рис. 44

Отсюда следует, что частица, двигаясь вместе с волной, осциллирует относительно точки $x' = 0$ с частотой $\Omega = \sqrt{eE_0 k_0/m}$, а период осцилляций равен

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{eE_0 k_0/m}} \quad (4I.I)$$

Амплитуда осцилляций частицы зависит от разности между скоростью частицы и фазовой скоростью волны. Если эта разность мала, то мала и амплитуда осцилляций. В этом случае говорят, что частица захвачена волной. Если же разность велика, то частица может выйти из данного минимума потенциала и начать двигаться вдоль волны. Это будет при $(mv'^2/2) > (2eE_0/k_0)$. Линия на фазовой плоскости, разделяющая захваченные частицы от незахваченных (или пролетных), называется сепаратриссой.

Если волна включается (возникает) в плазме достаточно быстро (за время меньше, чем $(4I.I)$), то можно считать, что резонансные частицы не успевают сдвинуться относительно волны. При этом их число задано той функцией распределения, которая была в плазме до включения волны. На начальном этапе часть частиц начнет тормозиться (этих частиц меньше), а часть ускоряться (этих частиц больше). В целом энергия частиц будет возрастать, а энергия волны уменьшаться. Именно в это время только и можно говорить о затухании Ландау ($t \ll \tau$). Если же $t \sim \tau$, то те частицы, которые тормозились, начнут ускоряться и наоборот. Энергия от частиц начнет переходить в энергию волны. Будут наблюдаться осцилляции амплитуды волны с периодом $(4I.I)$.

Однако период осцилляций частиц, имевших относительно вол-

ны различные начальные положения и скорости, не совпадает. Частицы, осциллирующие с большой амплитудой, двигаются медленнее и имеют большой период. Частицы с меньшей амплитудой имеют период меньше. В результате синхронность осцилляций частиц нарушается или, как говорят, частицы расходятся по фазам осцилляций, возникает фазовое перемешивание. Частицы уже не могут сфазироваться и восстановить поле волны. Устанавливается стационарное состояние, в котором энергия волны неизменна, а разные частицы имеют различные произвольные фазы осцилляций. При этом в каждой точке пространства одновременно имеются частицы с различными скоростями в интервале $(mv'^2/2) = e\Phi_0$. На функции распределения образуется плато (рис. 45) и обмен энергией между частицами и волной прекращается.

§42. Нелинейные волны. Солитоны

Другим важным физическим понятием, которое возникает в

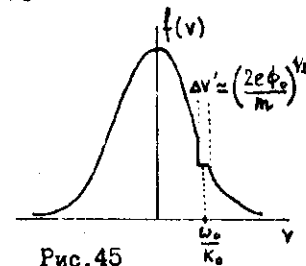


Рис. 45

сильно нелинейном режиме, является понятие об уединенных волнах (солитонах). В качестве примера рассмотрим так называемые нелинейные ионно-звуковые волны.

В §19 мы рассматривали уравнения двухжидкостной гидродинамики. При этом предполагалось, что плазма представляет смесь двух

жидкостей — электронной и ионной. Уравнения движения этих жидкостей и уравнения непрерывности имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(N_i V_i) &= 0, & \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} &= -v_{Ti}^2 \frac{\partial \ln N_i}{\partial x} - \frac{e_i}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial N_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(N_e V_e) &= 0, & \frac{\partial V_e}{\partial t} + V_e \frac{\partial V_e}{\partial x} &= -v_{Te}^2 \frac{\partial \ln N_e}{\partial x} - \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned}$$

где принято, что движение происходит только вдоль оси OX. Потенциал разделения зарядов определяется уравнением $\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho$ или $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi(eN_e + e_i N_i)$. Будем рассматривать медленные движения в плазме, связанные с ионами. При таких медленных движениях $v_{Te}^2 \gg v_{Ti}^2$ и электроны успевают так перераспределиться в пространстве, что в каждой точке сила теплового давления уравновешивается силой, действующей со стороны электрического поля

$$N_e = N_{e0} \exp(-e\varphi/T_e)$$

Наоборот ионы будем считать почти холодными ($v_{Ti} \ll v_{Ti}^*$) и пренебрежем их тепловым давлением.

Будем искать решение уравнений, предполагая, что все величины зависят от координат и времени только через комбинацию $\xi = x - ut$. Такие решения соответствуют стационарным нелинейным волнам и в частном случае гармонической зависимости от переменной ξ переходят в обычные линейные волны. Упрощенные уравнения гидродинамики преобразуются к виду

$$\frac{d}{d\xi} [N_i(v_i - u)] = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} (v_i - u)^2 = - \frac{e_i}{m_i} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

Отсюда следуют комбинации величин, которые не изменяются при изменении ξ . Из первого уравнения получаем закон сохранения потока ионов $N_i(v_i - u) = \text{const}$. Если при $N_i = N_{i0}$, $v_i = 0$, то отсюда найдем $N_i(v_i - u) = -N_{i0}u$. Из второго уравнения следует закон сохранения энергии ионов $\frac{1}{2}(v_i - u)^2 + e_i\varphi/m_i = \text{const} = C_i$. Если при $v_i = 0$, $\varphi = 0$, то $C_i = u^2/2$ и

$$N_i = \frac{N_{i0}}{\sqrt{1 - \frac{2e_i}{m_i u^2} \varphi}}$$

Теперь, выражая концентрацию ионов через потенциал, можно записать уравнение для самого потенциала. Если при этом принять, что в точке, где $\varphi = 0$, плазма нейтральна $e_i N_{i0} + e N_{e0} = 0$, то оно принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = -4\pi e N_{e0} \left(e^{-\frac{e\varphi}{T_e}} - \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{2e_i}{m_i u^2} \varphi}} \right)$$

Это существенно нелинейное уравнение, которое определяет изменение в пространстве потенциала нелинейной ионно-звуковой волны.

Уравнение не имеет аналитических решений, но есть хороший способ для качественного исследования такого рода уравнений. Для этого следует уравнение домножить на $d\varphi/d\xi$ и записать его в форме

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 + \mathcal{U}(\varphi) = E,$$

где "потенциал" $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\mathcal{U} = 4\pi e N_{e0} \left(-\frac{T_e}{e} e^{-\frac{e\varphi}{T_e}} + \frac{m_i u^2}{e_i} \sqrt{1 - \frac{2e_i}{m_i u^2} \varphi} \right)$$

Полученное соотношение имеет вид закона сохранения энергии при движении материальной точки единичной массы в потенциальном рельефе. При этом ξ имеет смысл времени, φ - смысл координаты, $\mathcal{U}$ - смысл потенциала, E - полная энергия частицы.

График для потенциального рельефа $\mathcal{U}(\varphi)$ приведен на рис.46. Если энергия частицы E мала ($E = E_1$), то она

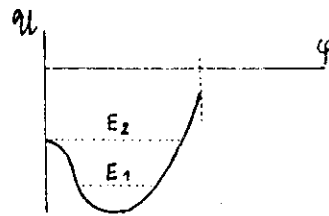


Рис.46

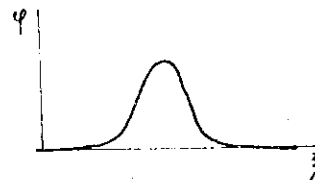


Рис.47

осциллирует и потенциал (смещение частицы) изменяется с координатой (временем) периодически. Такие периодические решения называются кноидальными волнами. Их структура существенно отличается от гармонических волн. По мере увеличения постоянной E период кноидальных волн возрастает. Если $E = E_2$, то частица бесконечно долго поднимается к точке, где $\varphi = 0$ (структура поля показана на рис.47). Это и есть солитон, или уединенная волна.

§43. Самофокусировка электромагнитных волн

Рассмотрим распространение в плазме электромагнитного пучка, у которого интенсивность излучения в центре максимальна и убывает к краям. Действующие в поперечном по отношению к распространению пучка направлении поперечные силы вытесняют плазму. Образуется канал с пониженной плотностью. В этом канале сам пучок изменяет свою форму и возможно явление сужения пучка, называемое самофокусировкой. Поперечные силы стремятся вытолкнуть электроны из области сильного поля. Силы теплового давления наоборот стремятся выровнять их концентрацию. В результате плотность электронов определяется из условия равенства этих сил и равна

$$N_e = N_{e0} \exp \left[- \frac{z e^2 |E|^2 / 4 m \omega^2 T}{e_i} \right] = N_{e0} \exp(-\Phi_{\perp}) \quad (13.1)$$

Здесь N_{e0} - концентрация электронов в той области плазмы, где отсутствует высокочастотное поле. В высокочастотном поле

линейная диэлектрическая проницаемость имеет вид (13.5). Нелинейная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_{н.л.}$ учитывает изменение концентрации электронов под действием поля.

Для простоты будем считать, что $\Phi_{вн} < T$ и в формуле (43.1) разложим экспоненту

$$\epsilon_{н.л.} \approx 1 - \frac{4\pi e^2 N_{e0}}{m\omega^2} \left(1 - \frac{x e^2 \xi^2}{4m\omega^2 T} \right) = \epsilon_\lambda + \frac{1}{2} \epsilon^{(2)} \xi^2,$$

где $\epsilon_\lambda = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$, $\epsilon^{(2)} = x e^2 \omega_{pe}^2 / 4m\omega^2 T$, поле ξ принято действительным.

Используем это выражение для нелинейной диэлектрической проницаемости в дисперсионном уравнении для поперечных волн (5.2) и запишем фазовую скорость

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{н.л.}}} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_\lambda}} \left(1 - \frac{\epsilon^{(2)}}{4} \frac{\xi^2}{\epsilon_\lambda} \right).$$

Видно, что фазовая скорость волны тем меньше, чем больше амплитуда волны. Если представить пучок как совокупность волн с различными амплитудами, то ясно, что первоначально плоский фронт по мере распространения начнет выгибаться. Центральный участок пучка будет отставать от краевых участков. При этом лучи, перпендикулярные к волновому фронту, начнут сходиться и пучок будет фокусироваться (рис. 48).

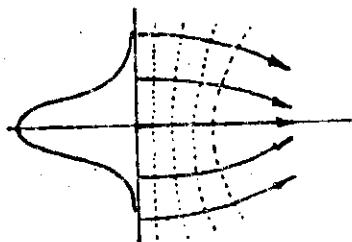


Рис. 48

Легко оценить расстояние, на котором лучи сойдутся в точку и образуется фокус (рис. 49). Рассмотрим два луча - один в центре и один на краю пучка. Лучу в центре соответствует длина волны λ_1 и фазовая скорость V_1 , а лучу на краю - соответственно λ_0 и V_0 . Если заменить для оценки изогнутую линию на прямую (см. рис. 49), то найдем $L = \sqrt{\epsilon^2 + (d/L)^2}$, где L - расстояние от входа пучка в плазму до фокуса, d - диаметр пучка. Чтобы лучи пришли в фокус одновременно, нужно, чтобы их длины были пропорциональны скоростям

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{l} \sqrt{\epsilon^2 + (d/2)^2} = \frac{V_0}{V_1} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_\lambda}} \sqrt{\epsilon_\lambda + \frac{1}{2} \epsilon^{(2)} \xi^2}$$

Отсюда при $l \gg d/2$ найдем длину самофокусировки

$$l_{cf} \approx d \left(\frac{\epsilon_\lambda}{2 \epsilon^{(2)} \xi^2} \right)^{1/2} \quad (43.2)$$

Самофокусировке пучка препятствует дифракция - расходимость пучка, связанная с его поперечным размером. Длина, на которой пучок уширится в два раза $l_{\div} \approx d^2/\lambda$. Если $l_{\div} \approx l_{cf}$, то пучок, распространяясь в плазме, не изменяет своего поперечного размера. Условием самофокусировки является неравенство

$$l_{cf} < l_{\div} \quad \text{или}$$

$$l_{cf} \approx \frac{d^2}{\lambda \sqrt{(\rho/\rho_{cr}) - 1}},$$

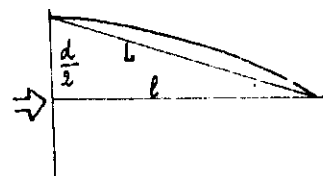


Рис. 49

где $\rho = (\epsilon^{(2)}/4\pi) (\pi d^2/4) (c/\sqrt{\epsilon_\lambda})$ - полный поток энергии в пучке (мощность), $\rho_{cr} = \pi c \epsilon_\lambda^{3/2} \lambda^2 / 8 \epsilon^{(2)}$ - критическая мощность, которую надо превзойти для того, чтобы возникла самофокусировка.

§44. Гидродинамика плазмы в высокочастотном электромагнитном поле

Введение пондеромоторной силы, действующей на электроны плазмы в высокочастотном поле и стремящейся вытолкнуть их из области сильного поля в область более слабого поля, позволяет рассмотреть многие вопросы динамики плазмы. Дело в том, что концентрацию электронов нельзя сделать существенно отличной от концентрации ионов на расстояниях, превышающих дебаевский радиус. Этому препятствует поле разделения зарядов и оно передает действие пондеромоторной силы на ионы. Поэтому, если интересоваться масштабами, превышающими дебаевский радиус, то можно считать, что пондеромоторные силы действуют непосредственно на ионы. Эти силы тогда можно включить в уравнения гидродинамики плазмы, которую нужно рассматривать как одну квазинейтральную жидкость.

В пренебрежении изменением температуры плазмы уравнения гидродинамики содержат уравнение непрерывности и уравнение движения (см. §18)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{F},$$

где $\rho = m N_e + m_i N_i \approx m_i N_i$ - плотность плазмы, $\vec{v}$ - скорость движения плазмы, $p = N_e T_e + N_i T_i$ - давление, $\vec{F}$ - ponderомоторная сила, определяемая формулой (38.4). В квазинейтральной плазме $N_i = N_e / z$ (z - зарядовое число ионов) и $\rho \approx \frac{m_i}{z} N_e$, $p = N_e (T_e + T_i / z)$. Эти соотношения позволяют записать уравнения гидродинамики для концентрации электронов и скорости движения плазмы ($T = z T_e + T_i$)

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div}(N_e \vec{v}) = 0; \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{T}{m_i} \nabla \ln N_e - \frac{ze^2 \vec{v} |\vec{E}|^2}{4\pi m_i \omega^2} \quad (44.1)$$

Входящая в формулу (44.1) напряженность электрического поля определяется уравнениями Максвелла и сама зависит от гидродинамических характеристик плазмы. Из уравнений Максвелла (I.1) после исключения вектора магнитной индукции следует

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t},$$

где плотность тока связана с высокочастотным движением электронов $\vec{j} = e N_e \vec{v}$ и $(d\vec{v}/dt) = (e/m) \vec{E}$. Отсюда находим при условии медленного изменения концентрации электронов $(\partial \vec{j} / \partial t) \approx (e^2 N_e / m) \vec{E}$. Используя выражение для высокочастотного поля (38.1) и подставляя его в приведенное выше уравнение, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega \right)^2 \vec{E} + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{4\pi e^2}{m} N_e \vec{E}. \quad (44.2)$$

В частности, для поперечного высокочастотного поля ($\operatorname{div} \vec{E} = 0$) уравнение (44.2) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega \right)^2 \vec{E} - c^2 \Delta \vec{E} = -\frac{4\pi e^2}{m} N_e \vec{E}. \quad (44.3)$$

Для продольных высокочастотных полей ($\operatorname{rot} \vec{E} = 0$) следует учитывать тепловое движение электронов. Из условия соответствия с результатами кинетической модели (§ 22) запишем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega \right)^2 \vec{E} - 3 v_{Te}^2 \Delta \vec{E} = -\frac{4\pi e^2}{m} N_e \vec{E}. \quad (44.4)$$

В пренебрежении медленным изменением величины $\vec{E}$ со временем и при условии постоянства концентрации электронов из формул (44.3) и (44.4) вытекают законы дисперсии соответственно для поперечных и ленгмювских волн, рассмотренные нами раньше. Однако в уравнениях (44.2)-(44.4) концентрация может быть не постоянной. В результате эти уравнения совместно с уравнениями (44.1) образуют систему уравнений гидродинамики плазмы, описывающую самосогласованно как высокочастотные движения электронов, так и медленные движения плазмы как целого, связанные с перемещением ионов.

Часто высокочастотными волнами в плазме являются ленгмювские волны, частота которых близка к плазменной частоте. Для этих волн даже малые отклонения концентрации электронов от резонансного значения, определяемого равенством $N_{ec} = m\omega^2 / 4\pi e^2$, приводят к большим изменениям поля. Это позволяет в уравнениях (44.1) использовать линейное приближение, положив $N_e = N_{ec} + \delta N_e$. В результате получим

$$\frac{\partial^2 \delta N_e}{\partial t^2} - \frac{T}{m_i} \Delta \delta N_e = -\frac{ze^2 N_{ec}}{4\pi m_i \omega^2} \Delta |\vec{E}|^2 = -\frac{ze^2 \Delta |\vec{E}|^2}{16\pi m_i} \quad (44.5)$$

Уравнение (44.4) после отбрасывания малой второй производной по времени от поля принимает вид

$$2i\omega \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 3v_{Te}^2 \Delta \vec{E} = \frac{4\pi e^2}{m} \delta N_e \vec{E}. \quad (44.6)$$

Система уравнений (44.5)-(44.6) составляет основу многих исследований нелинейной динамики ленгмювских волн в плазме.

Рассмотрим прямоугольную (декартову) систему координат (рис. 50). Направление осей определяется единичными ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Положение любой точки в пространстве задается радиусом-вектором $\vec{r}$, проекции которого на оси координат обозначают x, y, z или x_1, x_2, x_3 или x_i , где $i = 1, 2, 3$.

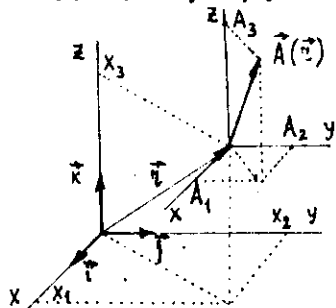


Рис. 50

$$\vec{r} = \vec{i}x_1 + \vec{j}x_2 + \vec{k}x_3.$$

Задание функции $\vec{A}(\vec{r})$ означает, что в каждой точке пространства задан вектор $\vec{A}$ и определены проекции этого вектора на оси координат A_1, A_2, A_3 или $A_i(\vec{r})$, где $i = 1, 2, 3$. Часто векторную функцию называют векторным полем.

Можно задать в каждой точке скалярную функцию $\varphi(\vec{r})$. Иными словами, функцию, характеризуемую не тремя числами, а одним числом (скалярное поле).

Зависимость функций $\vec{A}$ и φ от времени означает, что вектор $\vec{A}$ или скалярная величина φ в данной точке пространства изменяются со временем.

Рассмотрим коротко дифференциальные операции со скалярными и векторными полями.

Градиент - это вектор с компонентами $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z$, направленными соответственно по осям x, y и z .

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.$$

Компоненты (составляющие) вектора $\text{grad } \varphi$ могут быть записаны в сокращенном виде $\partial\varphi/\partial x_i$, где $i = 1, 2, 3$. Часто для более компактной формы записи вводят оператор набла

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда записывают $\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi$ и $(\vec{\nabla} \varphi)_i = \partial\varphi/\partial x_i$.

Дивергенция - операция дифференцирования векторной функции

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}.$$

Принято опускать знак суммирования, подразумевая его. Надо запомнить, что если какой-либо индекс встречается два раза, то подразумевается суммирование по этому индексу. С помощью оператора набла дивергенция записывается в виде.

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).$$

Ротор - операция дифференцирования векторной функции

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = [\vec{\nabla} \times \vec{A}].$$

Таким образом, имеются две дифференциальные операции с векторной функцией. Если величина $\text{div } \vec{A}$ характеризует, насколько вытянулся (сократился) по длине вектор $\vec{A}$ при переходе из точки $\vec{r}$ в точку $\vec{r} + d\vec{r}$, то величина $\text{rot } \vec{A}$ характеризует, на сколько этот вектор повернулся.

Часто приходится сталкиваться с двукратным дифференцированием. Некоторые свойства двукратного дифференцирования

$$\text{rot grad } \varphi = [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \varphi)] = 0; \quad \text{div rot } \vec{A} = (\vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}]) = 0, \quad (\text{П.1.1})$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}, \quad (\text{П.1.2})$$

$$\text{где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

-оператор, называемый лапласианом.

Укажем основные интегральные соотношения для векторных функций. Формула Стокса связывает

интеграл по поверхности с интегралом по контуру, ограничивающему эту поверхность

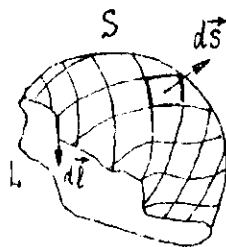


Рис. 51

$$\int_S d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{A} = \oint_L d\vec{l} \cdot \vec{A}. \quad (\text{П.1.3})$$

На рис. 51 указаны входящие в формулу (П.1.3) величины. II

Формула Остроградского-Гаусса связывает интеграл по объему, с интегралом по поверхности, ограничивающей этот объем

$$\int_V d\vec{r} \cdot \text{div} \vec{A} = \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{A} \quad (\text{П.1.4})$$

На рис.52 указаны соответствующие обозначения.

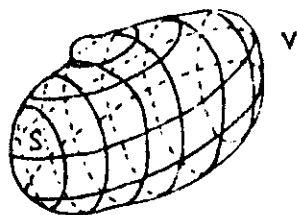


Рис.52

Приложение № 2

Широкий класс функций можно представить в виде суммы других функций. Если в качестве таковых использовать гармонические функции, то говорят о фурье-разложении.

Пусть функция $f(x)$ является периодической функцией своего аргумента с периодом L . Тогда эту функцию можно представить в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{L} \right),$$

где a_n , b_n — коэффициенты разложения, которые вычисляются в виде интегралов от функции $f(x)$.

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) \cos \frac{2\pi n x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) \sin \frac{2\pi n x}{L}.$$

Часто удобнее использовать комплексную форму записи разложения. Для этого нужно в формулы подставить $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$.

$$\sin y = (e^{iy} - e^{-iy})/2i. \quad \text{В результате получим}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi n i}{L} x}, \quad c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) e^{-i \frac{2\pi n x}{L}}$$

Если ввести обозначение $k_n = 2\pi n/L$, то эти формулы еще более упрощаются. Поскольку k_n — дискретный набор чисел

ему соответствует дискретный набор коэффициентов c_n . Часто в этом случае говорят, что спектр Фурье является дискретным.

Если функция $f(x)$ не периодическая, то в ее разложении участвует бесконечное число гармоник и спектр ее (набор коэффициентов разложения) является непрерывным. В этом случае используется разложение в интеграл Фурье

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk c(k) e^{ikx}, \quad c(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}.$$

Эти формулы определяют прямое и обратное преобразование Фурье.

Отсюда следует

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk c(k) e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} \right) e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \right)$$

Для того чтобы это равенство имело место, нужно, чтобы под интегралом справа стояла δ -функция Дирака, т.е. такая функция, которая везде равна нулю, кроме одной точки, где она обращается в бесконечность. Эта функция определена так, что имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta(x-x') = f(x).$$

Сравнивая приведенные формулы, получаем интегральное представление для δ -функции Дирака

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} = \delta(x-x'). \quad (\text{П.2.1})$$

Рассмотрим теперь скалярную функцию векторного аргумента $f(\vec{r})$. Для нее разложение Фурье имеет вид

$$f(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} f(k_x, k_y, k_z) = \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{k}).$$

Соответственно отсюда следует интегральное представление для δ -функции векторного аргумента

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z'). \quad (\text{П.2.2})$$

Если функция векторная и зависит как от радиуса-вектора, так и от времени, то для нее фурье-разложение имеет вид

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int d\vec{k} d\omega e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} \vec{A}(\vec{r}, \omega); \quad \vec{A}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r} \int dt e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (\text{П.2.3})$$

где пределы интегрирования бесконечны.

Приложение № 3

Тензор второго ранга называется симметричным, если $T_{ij} = T_{ji}$; антисимметричным, если $T_{ij} = -T_{ji}$. Тензор называется эрмитовским (самосопряженным), если $T_{ij} = T_{ji}^*$, антиэрмитовским, если $T_{ij} = -T_{ji}^*$.

Каждый тензор можно разбить на симметричную и антисимметричную части

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + A_{ij} \quad (\text{П.3.1})$$

и эрмитовскую и антиэрмитовскую части

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}^*) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}^*) = T_{ij}^H + T_{ij}^A \quad (\text{П.3.2})$$

Величина T_{ii} называется следом (или шпуром) тензора.

Обратным по отношению к тензору T_{ij} называется такой тензор T_{ij}^{-1} , который будучи свернут с исходным тензором дает диагональный единичный вектор

$$T_{ii}^{-1} T_{ij} = \delta_{ij}. \quad (\text{П.3.3})$$

Пусть тензор имеет вид $T_{ij} = a \delta_{ij} + b(k_i k_j / k^2)$. Найдем обратный ему тензор. Обратный тензор содержит те же тензорные комбинации, что и исходный

$$T_{ii}^{-1} = A \delta_{ii} + B(k_i k_i / k^2).$$

Нужно выразить величины A и B через a и b . Проведем свертку тензоров и используем определение (П.3.3)

$$\begin{aligned} T_{ii}^{-1} T_{ij} &= A a \delta_{ii} \delta_{ij} + A b \delta_{ii} (k_i k_j / k^2) + A B \delta_{ij} (k_i k_i / k^2) + \\ &+ B b (k_i k_j k_i k_j / k^4) = A a \delta_{ij} + A b (k_i k_j / k^2) + (A B + B b) \frac{k_i k_j}{k^2} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Откуда $A a = 1$, $A = \frac{1}{a}$; $B = -\frac{b}{a(a+b)}$.

$$T_{ii}^{-1} = \frac{1}{a} \delta_{ii} - \frac{k_i k_i}{k^2} \frac{b}{a(a+b)} = \frac{1}{a} \left(\delta_{ii} - \frac{b}{a+b} \frac{k_i k_i}{k^2} \right). \quad (\text{П.3.4})$$

Иногда используют другую форму записи

$$T_{ii}^{-1} = \frac{1}{a} \left(\delta_{ii} - \frac{k_i k_i}{k^2} \right) + \frac{1}{a+b} \frac{k_i k_i}{k^2}.$$

Приложение № 4

Теория случайных функций имеет дело с функциями, значения которых не подчиняются точным математическим выражениям, а происходит случайным образом. Основным понятием в теории случайных функций является понятие реализации (рис. 53). Предполагается, что есть возможность иметь множество реализаций (ансамбль реализаций). Поскольку в каждой реализации функции различаются, то говорить о точном задании функции при данном значении аргумента нельзя, но можно говорить об усредненных значениях. Простейшая процедура нахождения средних значений - усреднение по ансамблю реализаций. Если аргументом является время, то среднее значение функции $\varphi(t)$ в данный момент есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_n \varphi^{(n)}(t) = \bar{\varphi}(t) = \langle \varphi(t) \rangle.$$

Среднее значение не достаточно для полной характеристики этой функции. На рис. 54 показаны две случайные функции, имеющие одинаковое среднее значение, но существенно отличающиеся друг от друга. Наиболее просто различать такие функции с помощью автокорреляционной (или просто корреляционной) функции $\Phi(t_1, t_2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_n (\varphi^{(n)}(t_1) - \bar{\varphi}(t_1)) (\varphi^{(n)}(t_2) - \bar{\varphi}(t_2)) = \Phi(t_1, t_2),$$

где $\varphi^{(n)}(t) - \bar{\varphi}(t) = \delta \varphi^{(n)}(t)$ - отклонение функции от среднего значения в n -й реализации. При $t_1 = t_2$ корреляционная функция определяет средне-квадратичное отклонение. В общем случае корреляционная функция характеризует скорость, с которой изменяется значение случайной функции.

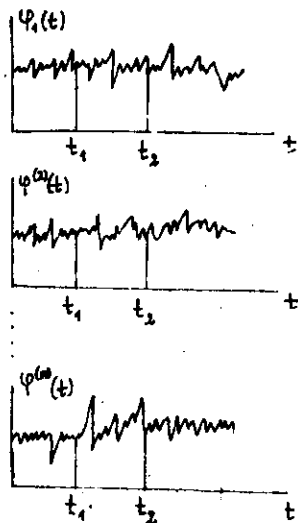


Рис. 53

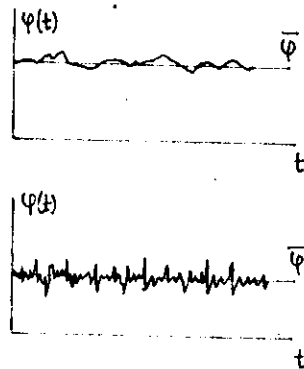


Рис. 54

Если $\bar{\varphi}(t) = \text{const}$, $\delta\varphi^2 = \text{const}$ и другие средние характеристики случайной функции не зависят от времени, то функцию называют стационарной. Для стационарной случайной функции усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по времени

$$\bar{\varphi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \varphi(t).$$

Это утверждение можно понять с помощью рис. 55. Рассматривая значения функций в разные моменты времени, получим тот же набор значений, что и для данного момента времени, но в разных реализациях. Для стационарной случайной функции корреляционная функция зависит только от разности времен t_1 и t_2

$$\Phi(t_1; t_2) = \Phi(t_1 - t_2) = \Phi(\tau).$$

Это связано с тем, что ни один момент времени не выделен по отношению к другому моменту и поэтому Φ не может зависеть от t_1 и t_2 отдельно. Очевидно, что $\Phi(\tau) = \Phi(-\tau)$. Действительно

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(t)\varphi(t+\tau)} &= \Phi(-\tau) = \\ &= \overline{\varphi(t+\tau)\varphi(t)} = \Phi(\tau). \end{aligned}$$

Для стационарных случайных функций имеется важное соотношение для усреднения фурье-компонент. Согласно определению

$$\langle \delta\varphi(t)\delta\varphi(t+\tau) \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \delta\varphi(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i\omega'(t+\tau)} \delta\varphi(\omega') \right\rangle = \Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i\omega'\tau} \Phi(\omega')$$

Для того чтобы это равенство имело место, нужно выбрать в качестве среднего от фурье-компонент случайной функции соотношение

$$\langle \delta\varphi(\omega) \delta\varphi(\omega') \rangle = \Phi(\omega) \delta(\omega + \omega') \quad (\text{П.4.1})$$

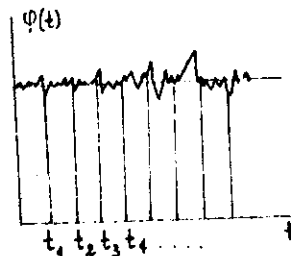


Рис. 55

Для спектральной плотности корреляционной функции $\Phi(\omega)$ часто используют обозначение $(\delta\varphi^2)_{\omega}$. Из условия $\Phi(\tau) = \Phi(-\tau)$ следует, что $\Phi(\omega) = \Phi(-\omega)$. Согласно определению средне-квадратичное значение $\langle \delta\varphi^2 \rangle$ выражается через $\Phi(\omega)$ с помощью простого соотношения

$$\langle \delta\varphi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Phi(\omega).$$

Для стационарных случайных функций часто говорят еще об усреднении по случайным фазам. Подразумевается под этим следующее. Случайная функция для n -й реализации разлагается в интеграл Фурье

$$\varphi^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \varphi^{(n)}(\omega).$$

Здесь $\varphi^{(n)}(\omega) = a^{(n)}(\omega) \exp[i\psi_n(\omega)]$ — комплексная амплитуда, $a^{(n)}(\omega)$ — действительная положительная величина, $\psi_n(\omega)$ — начальная фаза. Для каждой реализации при разложении возникает свой набор значений $a^{(n)}(\omega)$ и $\psi_n(\omega)$. Но значения $a^{(n)}(\omega)$ мало изменяются от реализации к реализации и величина $\langle a(\omega) \rangle$ называется спектром случайной функции. Что касается фаз $\psi_n(\omega)$, то предполагается, что эти значения могут иметь произвольные равновероятные значения в интервале

от 0 до 2π (гипотеза о хаотических фазах). Поэтому реализации отличаются друг от друга набором начальных фаз (начальных условий) и усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по случайным начальным фазам.

Если средние характеристики случайной функции от координат не зависят от положения точки, где они вычислены, то функция называется однородной. Для нее имеет место соотношение, подобное (П.4.1)

$$\langle \delta\varphi(\vec{r}) \delta\varphi(\vec{r}') \rangle = (\delta\varphi^2)_{\vec{r}} \delta(\vec{r} + \vec{r}') \quad (\text{П.4.2})$$

ЛИТЕРАТУРА

- Александров А.Ф., Богданкович Д.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. - М.: Высш. шк., 1978.
- Анцымович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. - М.: Атомиздат, 1979.
- Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Проблемы нелинейной оптики. - М.: ВНИИТИ, 1964.
- Галеев А.А., Сагдеев Р.З. Нелинейная теория плазмы // Вопросы теории плазмы. - М.: Атомиздат. - 1973. - Вып. 7, с. 3 - 145.
- Горбунев Л.М. Гидродинамика плазмы в сильном высокочастотном поле // Успехи физических наук. - 1973. - Т. 109. - С. 631-667.
- Кадемцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. - М.: Наука, 1976.
- Креля Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. - М.: Мир, 1975.
- Литвак А.Г. Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме // Вопросы теории плазмы. - М.: Атомиздат. - 1980. - Вып. 10, с. 164-242.
- Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. - М.: Наука, 1979.
- Силин В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. - М.: Наука, 1973.
- Цытович В.Н. Нелинейные эффекты в плазме. - М.: Наука, 1967.
- Чен Ф. Введение в физику плазмы. - М.: Мир, 1987.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Часть I. ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ ПЛАЗМЫ

Глава I. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕД

§1. Уравнения электромагнитного поля.....	3
§2. Линейная электродинамика.....	6
§3. Тензор комплексной диэлектрической проницаемости.....	8
§4. Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн.....	10
§5. Электромагнитные волны в изотропной среде	12
§6. Начальная и граничная задачи в электродинамике.....	13
§7. Закон сохранения энергии (среда без дисперсии).....	18
§8. Потери энергии электромагнитного поля в среде.....	20
§9. Уравнения для медленно изменяющихся амплитуд.....	21
§10. Закон сохранения энергии (среда с дисперсией).....	25
§11. Уравнения электродинамики в неоднородной среде.....	26
§12. Распространение электромагнитных волн в неоднородной среде.....	28

Глава II. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ

§13. Модели "холодной" плазмы (одночастичная модель).....	32
§14. Продольные и поперечные волны в "холодной" плазме.....	35
§15. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле.....	36

§16. Распространение волн вдоль магнитного поля.....	39
--	----

§17. Распространение волн поперек магнитного поля.....	44
--	----

§18. Одножидкостная модель плазмы.....	45
--	----

§19. Двухжидкостная гидродинамика. Ионный звук. Токовая неустойчивость.....	49
---	----

§20. Кинетическое уравнение Власова.....	55
--	----

§21. Тензор диэлектрической проницаемости в кинетической модели.....	56
--	----

§22. Ленгмюровские волны в максвелловской плазме.....	60
---	----

§23. Затухание Ландау.....	62
----------------------------	----

§24. Скин-эффект.....	65
-----------------------	----

Часть II. ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ ПЛАЗМЫ

Глава III. ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕД

§25. Нелинейное материальное уравнение.....	68
§26. Основные нелинейные процессы.....	69
§27. Нелинейное укороченное уравнение.....	71
§28. Взаимодействие трех волн.....	74
§29. Законы сохранения при взаимодействии волн.....	76
§30. Приближение заданного поля (начальная задача).....	79
§31. Граничная задача в приближении заданного поля.....	81
§32. Параметрические неустойчивости.....	84
§33. Нелинейное взаимодействие волн со случайными фазами.....	88

Глава IV. ОСНОВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЛАЗМЕ

§34. Одночастичная модель плазмы в квадратичном приближении.....	91
§35. Тек увлечения.....	94
§36. Нелинейная диэлектрическая проницаемость для плазмы.....	95
§37. Процессы трехволнового взаимодействия в плазме.....	97
§38. Помехомоторные (стрикционные) силы в плазме.....	99
§39. Параметрические неустойчивости в плазме.....	102
§40. Плазменная турбулентность.....	104
§41. Захваченные частицы.....	107
§42. Нелинейные волны. Солитоны.....	109
§43. Самофокусировка электромагнитных волн.....	111
§44. Гидродинамика плазмы в высокочастотном электромагнитном поле.....	113

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение I.....	116
Приложение II.....	118
Приложение III.....	120
Приложение IV.....	121

ЛИТЕРАТУРА	125
------------------	-----

Леонид Михайлович Горбунов

ВВЕДЕНИЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ ПЛАЗМЫ

Учебное пособие

Редактор Г. И. Тимошкина
Техн. редактор Е. Н. Шафорова

Тематический план 1990 г., № 87

Подписано к печати 16.01.90 г. Л-34019. Формат 60×90^{1/16}. Ротапринтная печать.
Усл. печ. л. 8,0. Усл. кр.-отт. 8,25. Уч.-изд. л. 7,68. Тираж 500 экз. Заказ 59.
Изд. № 1842. Цена 25 коп.

Издательство Университета дружбы народов
117923, ГСП-1, Москва, В-419, ул. Орджоникидзе, 3
Типография Издательства УДН. 117923, ГСП-1, Москва,
ул. Орджоникидзе, 3