

629

Г-194

Ф.Р. ГАНТМАХЕР и А.М. ЛЕВИН

ТЕОРИЯ ПОЛЕТА
НЕУПРАВЛЯЕМЫХ
РАКЕТ

Ф. Р. ГАНТМАХЕР и Л. М. ЛЕВИН

629

Г194

ТЕОРИЯ ПОЛЕТА НЕУПРАВЛЯЕМЫХ РАКЕТ

УДК 62-50



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1959

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Основные определения и обозначения	9
Глава I. Уравнения движения ракеты	11
§ 1. Ракета — система переменного состава	11
§ 2. Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента для системы переменного состава	12
§ 3. Системы переменного состава с твердой оболочкой. Ракеты	16
§ 4. Принцип загродевания для ракеты	19
§ 5. Уравнения движения центра инерции ракеты	20
§ 6. Уравнения вращательного движения ракеты	21
Глава II. Расчет траектории ракеты	24
§ 7. Постановка задачи	24
§ 8. Реактивная сила	25
§ 9. Уравнения движения центра тяжести ракеты на активном участке траектории	28
§ 10. Формула Циолковского	30
§ 11. Изменение величины скорости ракеты на активном участке траектории. Определение дуги траектории	34
§ 12. Направление скорости ракеты на активном участке траектории	39
§ 13. Учет влияния лобового сопротивления и силы веса на величину скорости	42
§ 14. Расчет траектории ракеты	61
Задачи	62
Глава III. Основы теории рассеивания ракет	67
§ 15. Введение	67
§ 16. Факторы, вызывающие боковое рассеивание	68
§ 17. Непрерывные случайные величины	70
§ 18. Роль активного и пассивного участков траектории в боковом рассеивании ракет	75
§ 19. Угловое отклонение в конце активного участка траектории и его горизонтальная и вертикальная проекции	77
§ 20. Случайные векторы	81
§ 21. Угловой разброс и его связь с боковым, рассеиванием	83
§ 22. Рассеивание по дальности	84
Глава IV. Рассеивание оперенных ракет	87
§ 23. Введение	87
§ 24. Постановка задачи	87
§ 25. Уравнения движения	89
§ 26. Интегрирование уравнений движения	92

§ 27. Интегрирование уравнений движения при неполной системе сил и моментов	94
§ 28. Доминирующая роль несимметрии реактивной силы в угловом разбросе оперенных ракет	98
§ 29. Расчет рассеивания конкретных типов ракет	99
§ 30. Упрощение основных формул	103
§ 31. Критический участок траектории	105
§ 32. Формулы для угла атаки δ и углового отклонения ψ	107
§ 33. Графический метод расчета. Спираль Корию	110
§ 34. Основная расчетная формула	114
§ 35. Зависимость углового разброса от конструктивных параметров ракеты и длины направляющей	117
§ 36. Эффективная длина направляющей	120
§ 37. Ступенчатая диаграмма реактивного ускорения. Активно-реактивные мины. Составные ракеты	122
§ 38. Стрельба ракетами с самолета	126
§ 39. Угловой разброс, вызванный начальными возмущениями	127
§ 40. Пути уменьшения рассеивания оперенных ракет	130
§ 41. Интегрирование основного дифференциального уравнения при полной системе сил и моментов	130
§ 42. Формулы для углов δ и ψ при полной системе сил и моментов	132
§ 43. Исследование полученных формул. Основные и второстепенные силы и моменты	134
§ 44. Кориолисова сила и кориолисов момент	139
§ 45. Влияние кориолисовой силы и кориолисова момента на угловое отклонение оперенной ракеты	143
Задачи	145
 Глава V. Рассеивание проворачивающихся оперенных ракет	151
§ 46. Введение	151
§ 47. Постановка задачи	153
§ 48. Вращающие реактивные моменты	155
§ 49. Уравнение вращательного движения	159
§ 50. Интегрирование уравнения вращения	160
§ 51. Анализ характера вращения	165
§ 52. Определение углового отклонения проворачивающихся оперенных ракет	168
§ 53. Вычисление углового отклонения при помощи ядра $R(s, \varepsilon)$	170
§ 54. Анализ углового отклонения проворачивающихся оперенных ракет	175
§ 55. Роль эксцентриситета реактивной силы в боковом разбросе оперенных ракет	178
§ 56. Случай произвольного движения на направляющей. Стрельба с самолета	182
 Глава VI. Рассеивание противотанковых оперенных ракет	184
§ 57. Введение	184
§ 58. Основные особенности баллистики противотанковых ракет	185
§ 59. Влияние аэродинамических сил и моментов на угловое отклонение противотанковых ракет	188
§ 60. Интегрирование уравнений движения	191
§ 61. Расчет углового отклонения	194
§ 62. Дальность прямого выстрела	198
§ 63. Анализ углового и бокового разброса противотанковых ракет	199
§ 64. Рассеивание противотанковых ракет по высоте	204

§ 65. Расчет углового отклонения для некоторых видов диаграммы $a(t)$	206
§ 66. Влияние кориолисовой силы и кориолисова момента на рассеивание противотанковых ракет	211
Глава VII. Общая (пространственная) задача о движении ракет	215
§ 67. Введение	215
§ 68. Уравнения движения центра тяжести ракеты	215
§ 69. Уравнения вращательного движения ракеты	218
§ 70. Силы и моменты, действующие на ракету	221
§ 71. Линеаризация уравнений движения	223
§ 72. Интегрирование уравнений движения	228
§ 73. Вращающиеся ракеты	232
§ 74. Невращающиеся оперенные ракеты	233
§ 75. Проворачивающиеся оперенные ракеты	234
Глава VIII. Вращающиеся ракеты	237
§ 76. Критерии правильности полета вращающихся ракет на пассивном участке	237
§ 77. Условие устойчивости полета на активном участке	245
§ 78. Расчет углового отклонения вращающихся ракет на активном участке	246
Глава IX. О влиянии ветра на полет ракет	254
§ 79. Введение	254
§ 80. Физическая картина явления	255
§ 81. Угловое отклонение оперенной ракеты на активном участке траектории	257
§ 82. Вызванные ветром поправки к координатам точки падения оперенной ракеты	261
§ 83. О возможном влиянии ветра на рассеивание ракет	263
§ 84. Общий случай движения ракеты на активном участке при наличии ветра	265
§ 85. Невращающиеся оперенные ракеты	271
§ 86. Проворачивающиеся оперенные ракеты	273
§ 87. Вращающиеся ракеты	274
Приложение I. Формулы для дополнительных сил в уравнениях движения ракеты	277
§ 1. Вторая форма уравнений количеств движения и кинетического момента для тела S	277
§ 2. Формулы для количества движения, кориолисовой силы и кориолисова момента	281
§ 3. О перемещении центра инерции относительно корпуса ракеты	284
Приложение II. Краткие сведения по аэродинамике снаряда	285
§ 1. Введение	285
§ 2. Элементы теории подобных явлений	286
§ 3. Методы описания аэродинамических сил и моментов	289
§ 4. Лобовое сопротивление	292
§ 5. Подъемная сила	296
§ 6. Экваториальный аэродинамический момент	299
§ 7. Экваториальный демпфирующий момент	304
§ 8. Аксиальные аэродинамические моменты	306
§ 9. О влиянии аэродинамических характеристик на полет снаряда	309

Т а б л и ц ы

I. Таблица функций $c_{\infty}(M)$ для законов сопротивления Сиагчи, 1930 г. и 1943 г.	313
II. Таблица функции $H(Y)$	314
IIIa. Таблица функций $K(\lambda)$	315
IIIб. Таблица функций $K_1(\lambda), K_2(\lambda)$	315
IV. Таблица функций $F(v), L_1(v), L_2(v), L_3(v), L_4(v), L_5(v), M(v), N(v)$ для закона сопротивления 1930 г.	317
V. Таблица функций $z_{кр}(z_0), F(z_0), \mathcal{T}(z_0)$	325
VI. Таблица функций Бесселя и интегралов Френеля	327
VII. Таблица функций $I(x), \Phi_1(x), \Phi(x), H(x)$	349
VIIIa. Таблица функций для прямоугольной диаграммы	353
VIIIб. Таблица функций для треугольной диаграммы	354
VIIIв. Таблица функции $(Aa_1\lambda)$	355
Литература	357
Предметный указатель	358

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой систематический курс *внешней баллистики* неуправляемых ракет и посвящена теории полета ракеты вдоль ее траектории. Книга не содержит исследования процессов, происходящих в камере ракеты и связанных с горением ракетного заряда. Изучение этих процессов составляет предмет *внутренней баллистики* ракет.

В книге рассматриваются две проблемы: проблема расчета траектории и проблема кучности. Основной проблемой внешней баллистики неуправляемых ракет является проблема кучности, т. е. исследование рассеивания ракет и изыскание методов его уменьшения. Изучение этой проблемы составляет основной стержень книги.

Первые систематические исследования рассеивания ракет были проведены в СССР при создании пороховых ракет М-8 и М-13. Во время Великой Отечественной войны (1941—1945 гг.) под руководством акад. С. А. Христиановича был проведен большой цикл экспериментальных и теоретических исследований, который привел к созданию ракет улучшенной кучности М-13УК и М-31УК. В указанный цикл работ вошли теоретические исследования авторов по рассеиванию неуправляемых ракет. Эти исследования, а также курсы лекций, прочитанные авторами для студентов в послевоенные годы, легли в основу настоящей книги¹⁾.

Глава I посвящена выводу общих уравнений движения ракеты. В этой главе устанавливается основное положение («принцип затвердевания»), согласно которому уравнения движения ракеты можно записывать в виде обычных уравнений движения твердого тела с учетом дополнительных реактивных и кориолисовых сил.

В главе II излагаются различные методы расчета траектории. Читатель, интересующийся только проблемой кучности, может пропустить эту главу.

В главе III приводятся общие сведения о рассеивании ракет.

¹⁾ В книге не отражены работы по баллистике неуправляемых ракет, которые были проведены в США, Англии и Франции и опубликованы в монографиях Д. Россера, Р. Ньютона и Г. Гросса [9], Р. А. Ренкина [10] и П. Карьера [11]. Эти зарубежные работы отличаются от советских методик исследования и методами расчетов, но существенно новых выводов по сравнению с советскими работами не содержат.

Глава IV посвящена рассеиванию оперенных (невращающихся) ракет. В этих главах выявляются основные факторы, вызывающие рассеивание ракет, и устанавливается (для случая оперенных ракет) количественная зависимость между величиной этих факторов, величиной вызываемого ими рассеивания и основными параметрами ракеты и пускового станка. На основе этого дается анализ влияния различных параметров на кучность оперенных ракет и рассматриваются различные методы повышения кучности.

В главе V рассматриваются проворачивающиеся оперенные ракеты.

Глава VI посвящена ракетам ближнего боя — противотанковым ракетам. В этой главе даются простые математические формулы для определения рассеивания противотанковых ракет и исследуется влияние различных параметров на кучность этих ракет.

В главе VII рассматривается общая пространственная задача о движении ракеты как оперенной, так и вращающейся.

На результаты главы VII опирается глава VIII, посвященная вращающимся ракетам. Здесь устанавливается условие устойчивости вращающейся ракеты и даются математические пути для исследования рассеивания вращающихся ракет.

В главе IX исследуется влияние ветра на полет ракеты.

В Приложении I устанавливаются формулы для результирующей кориолисовой силы и кориолисова момента ракеты. В Приложении II излагаются краткие сведения по аэродинамике снаряда (как артиллерийского, так и оперенного).

Авторы стремились сделать изложение материала возможно более доступным, предполагая у читателей знакомство с курсами высшей математики и теоретической механики только в объеме программы втуза. Материал, выходящий за пределы этой программы, излагается в тексте книги. Несколько более трудными для понимания являются главы I и VII. Однако читатель, интересующийся в основном баллистическим материалом, может пропустить главу I, приняв без доказательства принцип затвердевания, на основе которого сразу выписываются уравнения движения ракеты.

Числа в квадратных скобках относятся к списку литературы, приведенному в конце книги на стр. 357.

При цитировании уравнений в пределах рассматриваемой главы номер главы и параграфа не указывается.

Авторы выражают благодарность Ю. И. Коростелеву за ценные замечания и советы, внесенные при чтении рукописи.

Авторы

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В предлагаемой книге приняты следующие определения и обозначения.

О п р е д е л е н и я:

Ракеты подразделяются

1) по роду двигателей: а) на пороховые ракеты, б) на ракеты с жидкостным реактивным двигателем (ЖРД) и в) на ракеты с воздушно-реактивным двигателем (ВРД),

2) по способу стабилизации: а) на оперенные ракеты и б) на вращающиеся ракеты¹⁾,

3) по управляемости: а) на неуправляемые и б) на управляемые ракеты.

Траектория ракеты разделяется на два участка: *активный* и *пассивный*. На активном участке происходит сгорание ракетного топлива (заряда). Остальная часть траектории называется пассивным участком.

Под *точкой вылета* ракеты понимается положение центра тяжести ракеты в момент схода ракеты с пускового станка.

Дульной скоростью называется скорость центра тяжести ракеты в момент схода ракеты с пускового станка.

Плоскостью бросания называется вертикальная плоскость, проходящая через точку вылета и вектор дульной скорости.

О б о з н а ч е н и я:

q — вес ракеты,

ω — вес ракетного топлива (заряда)²⁾,

τ — полное время горения ракетного заряда,

P — реактивная тяга,

j — импульс реактивной силы,

j_1 — единичный импульс реактивной силы,

u_e — эффективная скорость истечения,

a — ускорение, вызываемое реактивной тягой,

d — эксцентриситет реактивной силы,

M — экваториальный реактивный момент.

¹⁾ В артиллерийской литературе эти ракеты называются турбореактивными снарядами (ТРС).

²⁾ Буквой ω обозначается также модуль угловой скорости корпуса ракеты.

- M^* — аксиальный реактивный момент,
 Q — лобовое сопротивление,
 Y — аэродинамическая «подъемная сила»,
 M_z, M_1 — аэродинамический экваториальный момент,
 M_x, M_1^* — аэродинамический аксиальный момент,
 I — экваториальный момент инерции,
 I_1 — аксиальный момент инерции,
 χ — угол поворота (угол между осью пускового станка и осью ракеты),
 ψ — угловое отклонение (угол между осью пускового станка и направлением скорости центра тяжести ракеты),
 δ — угол атаки (угол между направлением скорости центра тяжести и осью ракеты)¹⁾,
 θ — угол наклона касательной траектории к горизонту,
 θ_0 — угол бросания (значение угла θ в момент схода ракеты с пускового станка, т. е. угол, образованный осью пускового станка с горизонтом).

Индексом «н» обозначаются все величины, относящиеся к моменту начала горения ракетного заряда, индексом «0» — к моменту схода ракеты со станка, индексом «а» — к концу активного участка, индексом «п» — к пассивному участку.

Например: v_n — дульная скорость ракеты, v_a — скорость ракеты в конце активного участка траектории, q_a или q_n — пассивный вес ракеты, q_n — полный вес ракеты и т. д.

Все остальные обозначения будут приведены в тексте.

Система единиц — техническая (кг, м, сек).

¹⁾ Буква δ иногда используется как символ погрешности.

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

§ 1. Ракета — система переменного состава

Рассматривая движение ракеты, мы в каждый момент времени будем включать в ее состав только те материальные частицы, которые в этот момент находятся внутри «контрольной» поверхности, проходящей через наружную поверхность корпуса ракеты и выходное сечение сопла. При горении ракетного заряда из ракеты непрерывно выделяются частицы газа и масса ракеты уменьшается. Таким образом, переменность массы ракеты обусловлена тем, что ракета есть *система переменного состава*. Поскольку ракета не является системой определенных материальных частиц, к ней непосредственно не применимы классические теоремы динамики. Поэтому мы переходим к исследованию движения систем переменного состава.

Рассмотрим произвольный, но фиксированный момент времени t . Обозначим через S фиктивное твердое тело, которое получилось бы, если бы наша система переменного состава (ракета) в момент t затвердела и перестала выделять из себя частицы. Твердое тело S не будет однородным: в одних своих частях оно будет иметь плотность металла, в других — плотность газа и т. д. Фиктивное твердое тело S неизменно связано с корпусом ракеты и, начиная с момента t (момента затвердевания), движется вместе с ракетой.

В §§ 3 и 4 мы определим изменение по времени количества движения и кинетического момента твердого тела S . А пока отметим, что уравнения движения твердого тела S в момент t могут быть написаны по обычным правилам механики, если считать, что на тело S , помимо внешних сил, в действительности приложенных к ракете, действуют еще дополнительные силы: реактивные силы и кориолисовы силы инерции¹⁾. Поскольку движение фиктивного

¹⁾ В дальнейшем покажем, что из этих дополнительных сил практически нужно учитывать только реактивные силы, поскольку кориолисовы инерционные силы для подавляющего большинства ракет пренебрежимо малы.

твердого тела совпадает с движением корпуса ракеты¹⁾, мы приходим, таким образом, к «принципу затвердевания» для ракеты, сформулированному в § 4. Этот принцип дает нам возможность записать уравнения движения ракеты в виде уравнений движения обычного твердого тела путем введения дополнительных фиктивных сил. Заметим еще, что в § 3 приведена более общая формулировка принципа затвердевания для произвольной системы переменного состава с твердой оболочкой²⁾.

§ 2. Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента для системы переменного состава

В сплошной среде, состоящей из разнообразных (твердых, жидких, газообразных) частиц, рассмотрим замкнутую поверхность F , ограничивающую некоторый объем W . Будем предполагать, что точки среды движутся относительно исходной системы координат $Oxuz$, а замкнутая поверхность F в общем случае перемещается относительно $Oxuz$ и деформируется.

Совокупность материальных частиц данной среды, заключенных в объеме W , является *системой переменного состава*, так как с течением времени некоторые частицы среды выходят из объема W , а другие, наоборот, входят в него. Обозначим эту систему через Σ . Замкнутую поверхность F будем называть *оболочкой* системы переменного состава Σ . Количество движения и кинетический момент (главный момент количеств движения частиц) системы Σ относительно точки O обозначим через Q и G_O .

Теперь мы зафиксируем момент времени t и через Σ^* обозначим *систему постоянного состава, состоящую из тех и только тех материальных частиц, которые в момент времени t заполняли объем W* . Количество движения и кинетический момент системы Σ^* обозначим через Q^* и G_O^* . Поскольку системы Σ и Σ^* совпадают в момент времени t , то в этот момент

$$Q = Q^*, \quad G_O = G_O^*. \quad (1)$$

однако производные $\frac{dQ}{dt}$ и $\frac{dQ^*}{dt}$, $\frac{dG_O}{dt}$ и $\frac{dG_O^*}{dt}$ в момент t уже не совпадают. Установим связь между этими производными.

Легко видеть (рис. 1), что в момент $t_1 = t + \Delta t$

$$Q_1^* = Q_1 + Q_V - Q_U. \quad (2)$$

¹⁾ Меняя момент затвердевания t , мы получаем различные твердые тела S , которые совпадают с одной и той же неизменной средой, связанной с корпусом ракеты, и отличаются друг от друга только распределением масс.

²⁾ Под твердой оболочкой мы понимаем недеформирующуюся поверхность.

где Q_1^* и Q_1 — количества движения систем Σ^* и Σ в момент t_1 , а Q_U , Q_V — количества движения в момент t_1 частиц среды, вошедших (соответственно вышедших) за время Δt из объема W . На рис. 1 эти частицы заполняют соответственно объемы U и V , поскольку жирной линией намечено положение поверхности F в момент t_1 , а пунктирной — поверхности, ограничивающей объем, заполненный в тот же момент t_1 теми частицами среды, которые в момент t заполняют объем W , т. е. частицами системы Σ^* .

Совершенно аналогично

$$G_{O1}^* = G_{O1} + G_{VO} - G_{UO}. \quad (2')$$

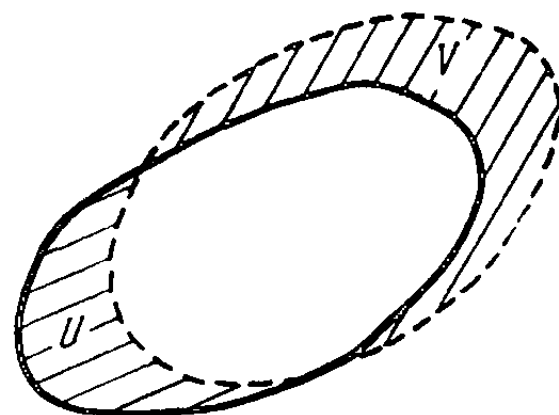


Рис. 1.

Вычитая почленно из (2) и (2') соответствующие равенства (1), деля результаты на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$\frac{dQ^*}{dt} = \frac{dQ}{dt} + k, \quad \frac{dG_O^*}{dt} = \frac{dG_O}{dt} + l_O, \quad (3)$$

где

$$k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_V - Q_U}{\Delta t}, \quad l_O = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{G_{VO} - G_{UO}}{\Delta t} \quad (3')$$

— секундные расходы количества движения и кинетического момента через поверхность F в момент времени t .

Соотношения (3) имеют кинематический характер и справедливы для любой (инерциальной или неинерциальной) системы координат $Oxuz$ и для любой подвижной и деформирующейся поверхности F .

Пусть теперь $Oxuz$ — инерциальная система координат. Обозначим через R и L_O главный вектор и главный момент всех внешних сил (поверхностных и объемных), действующих на систему Σ (а следовательно, и на систему Σ^*) в момент времени t . Поскольку Σ^* — система постоянного состава, то для нее справедливы теоремы классической динамики об изменении количества движения и кинетического момента. Поэтому в рассматриваемый фиксированный момент времени t

$$\frac{dQ^*}{dt} = R, \quad \frac{dG_O^*}{dt} = L_O. \quad (4)$$

В силу (3) отсюда получаем:

$$\frac{dQ}{dt} = R - k, \quad \frac{dG_O}{dt} = L_O - l_O. \quad (5)$$

Формулы (5) определяют изменение количества движения и кинетического момента произвольной системы переменного состава относительно инерциальной системы координат.

Выведем еще интересную формулу для количества движения Q произвольной системы переменного состава Σ .

Рассмотрим статический момент системы Σ :

$$Z = \int \int \int_W \rho r dW, \quad (6)$$

где ρ — плотность, r — радиус-вектор точки объема W , проведенный из начала O , а dW — элемент объема W . Для Z можно повторить те рассуждения, которые были проведены для Q и G_O при выводе формул (3), и получить аналогичное равенство:

$$\frac{dZ^*}{dt} = \frac{dZ}{dt} + f, \quad (7)$$

где f — секундный расход статического момента через поверхность F в момент t .

Для системы постоянного состава Σ^* в момент t

$$\frac{dZ^*}{dt} = Q^* = Q. \quad (8)$$

Вычислим величину f . Обозначим через m массу системы Σ , а через m_U и m_V — массы, заполнившие объемы U и V в момент t_1 . Тогда

$$\frac{dm}{dt} = \mu_1 - \mu_2, \quad (9)$$

где

$$\mu_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_U}{\Delta t}, \quad \mu_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_V}{\Delta t}. \quad (9')$$

Величины μ_1 и μ_2 назовем соответственно абсолютным секундным приходом и расходом массы через поверхность F в момент t .

Обозначим через r_U и r_V радиус-векторы центров масс m_U и m_V . Предельное положение (при $\Delta t \rightarrow 0$) этих центров будем называть соответственно центром входа и центром выхода масс из объема W и будем обозначать через C_1 и C_2 (с радиус-векторами r_1 и r_2). При этом

$$r_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} r_U, \quad r_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} r_V, \\ f = \mu_2 r_2 - \mu_1 r_1. \quad (10)$$

Поэтому из формул (7) и (8) следует

$$Q = \mu_2 r_2 - \mu_1 r_1 + \frac{d}{dt} \int \int \int_W \rho r dW. \quad (11)$$

Формула (11) определяет количество движения системы переменного состава Σ и носит совершенно общий характер. Она справедлива [как и формулы (3)] для произвольной системы переменного состава по отношению к произвольной системе координат.

Рассмотрим сначала частный случай, когда оболочка системы Σ , т. е. поверхность F , является твердой и неподвижной относительно системы координат $Oxuz$. Относительное количество движения, т. е. количество дви-

жения относительно твердой оболочки, обозначим через Q^r ¹⁾. Кроме того, предположим, что плотность ρ непрерывна в объеме W . При этих предположениях дифференцирование в формуле (11) можно выполнить под знаком интеграла и формуле (11) придать вид ²⁾:

$$Q^r = \mu_2 r_2 - \mu_1 r_1 + \int_W \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r dW. \quad (12)$$

Если $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (например, в случае жидкости или при стационарном движении газа), то $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и формула (12) принимает простой вид

$$Q^r = \mu (r_2 - r_1) = \mu C_1 C_2. \quad (13)$$

Вернемся теперь к общему случаю произвольной системы переменного состава и допустим сначала, что плотность ρ непрерывна в объеме W . Тогда, используя правило дифференцирования интеграла, взятого по переменному объему, получим вместо (11):

$$Q = \mu_2 r_2 - \mu_1 r_1 + \int_W \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r dW + \int_F \int \rho r V_n dF, \quad (14)$$

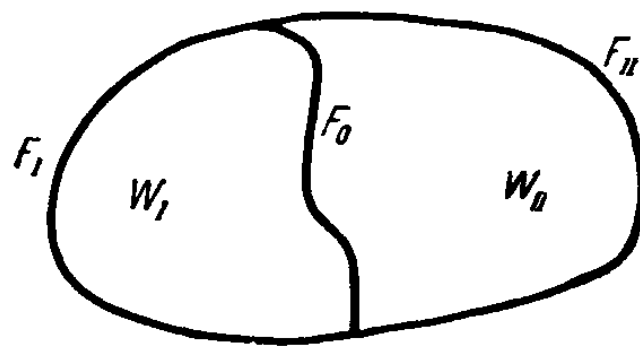


Рис. 2.

где второй интеграл берется по замкнутой оболочке F , причем V_n — проекция на внешнюю нормаль скорости перемещения элемента поверхности dF ³⁾.

Пусть теперь в объеме W имеется (в общем случае подвижная и деформирующаяся) поверхность F_0 — поверхность разрыва для плотности ρ . Без нарушения общности можем считать, что поверхность F_0 разбивает объем W на две части: W_I и W_{II} , а поверхность F — на части F_I и F_{II} (рис. 2). Применим формулу (12) [в которой вместо $(\mu_2 r_2 - \mu_1 r_1)$ напомним f] к каждому объему W_I и W_{II} в отдельности. Считая, что для поверхности F_0 буква n обозначает направление нормали в сторону объема W_{II} , получим:

$$Q_I = f_I + f_{0I} + \int_{W_I} \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r dW + \int_{F_I} \int \rho r V_n dF_I + \int_{F_0} \int \rho_I r V_n dF_0,$$

$$Q_{II} = f_{II} + f_{0II} + \int_{W_{II}} \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r dW + \int_{F_{II}} \int \rho r V_n dF_{II} - \int_{F_0} \int \rho_{II} r V_n dF_0$$

¹⁾ Здесь и в дальнейшем индексом r будем обозначать относительные скорости, относительные количества движения и другие величины, вычисленные по отношению к твердой оболочке (корпусу ракеты).

²⁾ Плотность ρ есть функция от координат точки объема W и времени: $\rho = \rho(x, y, z, t)$; $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ — частная производная этой функции.

³⁾ Если поверхность F определяется уравнением $F(x, y, z, t) = 0$, то

$$V_n = -\frac{\partial F}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Заметим, что секундные расходы статического момента через F_0 со стороны объемов W_I и W_{II} отличаются знаком, т. е. $f_{0I} + f_{0II} = 0$. С другой стороны, $f_I + f_{II} = f = \mu_2 r_2 - \mu_1 r_1$. Поэтому, почленно складывая формулы для Q_I и Q_{II} , получим

$$Q = \mu_2 r_2 - \mu_1 r_1 + \int_W \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r dW + \int_F \int \rho r V_n dF - \int_{F_0} \int \Delta \rho r V_n dF_0, \quad (15)$$

где $\Delta \rho = \rho_{II} - \rho_I$ — скачок плотности ρ в направлении нормали n . Эта формула, конечно, непосредственно распространяется на любое конечное число поверхностей разрыва F_0 .

§ 3. Системы переменного состава с твердой оболочкой. Ракеты

Рассмотрим подробнее частный случай, когда оболочка F системы переменного состава является твердой¹⁾. С твердой оболочкой F свяжем неизменно некоторую систему осей координат $A; \gamma_i^r$. Эта система осей координат, вообще говоря, не является инерциальной. Она движется вместе с оболочкой относительно инерциальной системы осей координат $Oxyz$. Определим теперь изменение количества движения Q^r и кинетического момента G_A^r относительно системы осей $A; \gamma_i^r$.

Соответствующие производные обозначим через $\frac{\delta Q^r}{dt}$ и $\frac{\delta G_A^r}{dt}$. Для того чтобы применить формулы (5) к неинерциальной системе координат $A; \gamma_i^r$, нужно в правых частях к внешним силам добавить переносные и кориолисовы силы инерции. Обозначим главный вектор и главный момент переносных сил инерции через R^e и L_A^e , а кориолисовых — через J и H_A . Тогда вместо (5) будем иметь:

$$\frac{\delta Q^r}{dt} = R + R^e + J - k_r, \quad (16)$$

$$\frac{\delta G_A^r}{dt} = L_A + L_A^e + H_A - l_{rA}, \quad (16')$$

где k_r и l_{rA} — относительный секундный расход количества движения и кинетического момента через поверхность F в момент времени t . Здесь A — любая точка, неизменно связанная с твердой оболочкой системы.

Рассмотрим теперь твердое тело S , которое получилось бы, если бы данная система переменного состава Σ затвердела в той конфигурации, которую она имела в момент времени t . Твердое тело S неизменно связано с твердой оболочкой и, начиная с момента времени t , движется вместе с нею. Центр инерции твердого тела S обозначим через C . Поскольку и точка C неизменно связана с обо-

¹⁾ См. сноску ²⁾ на стр. 12. В случае ракеты твердой оболочкой является контрольная поверхность, проходящая через поверхность ракеты и выходное сечение сопла.

лочкой, то эту точку можно принять за начало A системы координат $A\xi\eta\zeta$ и вместо (16') написать

$$\frac{\delta G_C^r}{dt} = L_C + L_C^e + H_C - l_{rC}. \quad (16'')$$

Обозначим через Q^S и G_C^S количество движения и кинетический момент твердого тела S . Тогда, как известно,

$$-\frac{dQ^S}{dt} \quad \text{и} \quad -\frac{dG_C^S}{dt}$$

равны соответственно главному вектору и главному моменту всех сил инерции тела S . Но этими силами инерции будут переносные силы инерции для системы Σ . Поэтому

$$R^e = -\frac{dQ^S}{dt}, \quad L_C^e = -\frac{dG_C^S}{dt}. \quad (17)$$

Из (16), (16'') и (17) сразу получаем для момента времени t :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ^S}{dt} &= R - k_r + J - \frac{\delta Q^r}{dt}, \\ \frac{dG_C^S}{dt} &= L_C - l_{rC} + H_C - \frac{\delta G_C^r}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Формулы (18) характеризуют изменение количества движения и кинетического момента фиктивного твердого тела S .

Рассмотрим элемент dF поверхности F в момент времени t . Пусть $v dF$ — секундный расход массы через элемент dF ; φ_r — относительная скорость (т. е. скорость относительно оболочки) точки этого элемента. Тогда элементарной реактивной силой будем называть следующую векторную величину, имеющую размерность силы.

$$-v\varphi_r dF.$$

Главный вектор элементарных реактивных сил (т. е. геометрическая сумма этих сил) будет равен $(-k_r)$, а главный момент этих сил (т. е. геометрическая сумма моментов) относительно полюса C будет равен $(-l_{rC})$ ¹⁾.

Далее, если движение среды стационарное, т. е. в каждом неподвижном относительно оболочки элементе не меняются с течением времени плотность среды ρ и скорость точки среды φ_r , то система переменного состава имеет постоянную массу, постоянное количество

1) Если m — масса ракеты, $\mu = -\frac{dm}{dt}$ — секундный расход массы газа через выходное сечение сопла, u — средняя (по этому сечению) скорость частиц газа относительно корпуса ракеты, то $k_r = \mu u$.

движения Q^r и постоянный кинетический момент G_C^r относительно системы координат $C\xi\eta\zeta$. Поэтому в данном случае

$$\frac{\delta Q^r}{dt} = 0, \quad \frac{\delta G_C^r}{dt} = 0.$$

В общем же случае эти равенства не имеют места. Силы, главный вектор и главный момент которых соответственно равны $-\frac{\delta Q^r}{dt}$, $-\frac{\delta G_C^r}{dt}$, будем называть *вариационными силами*. Эти силы возникают из-за нестационарности движения среды и связаны с изменениями (вариациями) количества движения и кинетического момента относительно твердой оболочки¹⁾.

Уравнения (18) представляют собой запись теоремы количества движения и теоремы о кинетическом моменте для затвердевшей системы переменного состава. Вникнем в смысл этих уравнений.

Твердое тело S получается, если представить себе, что в момент t данная система переменного состава затвердела и застыла. Мы условились считать фиктивное твердое тело S неизменно связанным с твердой оболочкой F системы. Приписав, таким образом, фиктивному твердому телу S движение, совпадающее с движением твердой оболочки F , мы для производных по времени от его количества движения Q^S и кинетического момента G_C^S получим формулы (18). С другой стороны, для движущегося реального твердого тела эти производные должны быть соответственно равны сумме внешних сил и сумме моментов этих сил. Равенства (18) показывают, что для определения движения тела S и, следовательно, движения твердой оболочки F к числу внешних сил следует отнести внешние силы, действующие на систему Σ , реактивные силы, силы Кориолиса и вариационные силы.

Из сказанного вытекает следующий принцип:

Принцип затвердевания для системы переменного состава с твердой оболочкой. Уравнения движения твердой оболочки системы переменного состава Σ в произвольный момент времени t могут быть записаны в виде уравнений движения твердого тела (постоянного состава), если представить себе, что система переменного состава Σ затвердела в момент t и что к полученному таким образом фиктивному твердому телу приложены: 1) внешние силы, действующие на систему Σ , 2) реактивные силы, 3) силы Кориолиса и 4) вариационные силы.

¹⁾ Для ракеты $\frac{dm}{dt} \neq 0$, но вариационные силы $\left(-\frac{\delta Q^r}{dt}, -\frac{\delta G_C^r}{dt}\right)$, возникающие при движении газа в камере ракеты, пренебрежимо малы по сравнению с реактивными силами. Такое движение газа мы часто тоже будем называть *стационарным* (точнее, *квазистационарным*).

§ 4. Принцип затвердевания для ракеты

Сформулированный в предыдущем параграфе принцип затвердевания, конечно, применим к ракете, поскольку ракета представляет собой частный случай системы переменного состава с твердой оболочкой. Однако для ракеты формулировка этого принципа может быть несколько упрощена.

В случае ракеты часто в систему реактивных сил включают и некоторые внешние силы, а именно: силы, возникающие вследствие атмосферного давления на корпус ракеты и вследствие давления вышедшей части газа на часть, оставшуюся в ракете, а также вариационные силы, вызванные нестационарностью процесса горения, т. е. нестационарностью движения газа и жидкого топлива. Объясняется это следующими соображениями.

Рассмотрим горение ракетного заряда в стендовых условиях, когда корпус ракеты закреплен неподвижно. Приборы на стенде измеряют силы давления ракеты на опоры. Главный вектор и главный момент этих сил обозначим через T и M_C .

В рассматриваемом «стендовом» случае

$$Q^S = 0, \quad G_C^S = 0, \quad J = 0, \quad H_C = 0, \\ R = -T + R^0, \quad L_C = -M_C + L_C^0,$$

где R^0 и L_C^0 — главный вектор и главный момент сил атмосферного давления и давления наружной части газа в выходном сечении сопла.

Применяя к этому частному случаю уравнения (18), получим:

$$T = -k_r + R^0 - \frac{\delta Q^r}{dt}, \quad M_C = -l_{rc} + L_C^0 - \frac{\delta G_C^r}{dt}. \quad (19)$$

При измерениях на стенде мы определяем не реактивные силы в чистом виде [с главным вектором $(-k_r)$ и главным моментом $(-l_{rc})$], а силы давления ракеты на опоры. Силы давления на опоры характеризуются главным вектором T и главным моментом M_C , которые включают в себя, помимо чисто реактивных, дополнительные силы и моменты:

$$R^0, \quad -\frac{\delta Q^r}{dt}, \quad L_C^0, \quad -\frac{\delta G_C^r}{dt}.$$

Поэтому условимся в дальнейшем объединять в одну систему реактивных сил: 1) чисто реактивные силы, 2) силы, вызванные атмосферным давлением¹⁾ и давлением наружной части газа и 3) вариационные силы, возникающие вследствие нестационарности

¹⁾ Под силами атмосферного давления мы понимаем здесь силы, вызванные постоянным атмосферным давлением на внешнюю поверхность ракеты в стендовых условиях.

движения газа и жидкого топлива в камере ракеты¹⁾. Полученная таким образом система реактивных сил эквивалентна силе T (реактивная сила или реактивная тяга) и паре с моментом M_C (реактивный момент), определяемым формулами (19).

Обычно при расчете реактивной тяги T и реактивного момента M_C третьими слагаемыми в формулах (19) пренебрегают и вместо (19) пишут²⁾:

$$T = -k_r + R^0, \quad M_C = -l_{rC} + L_C^0. \quad (20)$$

В соответствии с равенствами (19), формулы (18) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ^S}{dt} &= R + T + J, \\ \frac{dG_C^S}{dt} &= L_C + M_C + H_C. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где R и L_C — главный вектор и главный момент всех внешних сил, кроме сил атмосферного давления и давления наружной части газа.

Равенства (21) позволяют нам сформулировать следующий принцип:

Принцип затвердевания для ракеты. Уравнения движения корпуса ракеты в произвольный момент времени t можно записать в виде уравнений движения фиктивного твердого тела, получающегося в результате затвердевания ракеты в момент времени t . При этом к полученному таким образом твердому телу необходимо приложить, помимо внешних сил, действующих на ракету, еще реактивные силы и силы Кориолиса.

Конкретные расчеты (см. §§ 44, 45) показывают, что у подавляющего большинства неуправляемых ракет влияние кориолисовых сил на движение ракеты весьма мало и этими силами практически можно пренебречь. Поэтому в дальнейшем при определении движения ракеты согласно принципу затвердевания мы, помимо внешних сил, будем учитывать только реактивные силы.

§ 5. Уравнения движения центра инерции ракеты

В формуле (21) можно положить

$$Q^S = m v_C, \quad (22)$$

где m — постоянная величина, равная массе ракеты в момент t . Тогда получим

$$m w_C = R + T + J. \quad (23)$$

1) При этом мы предполагаем, что течение газа в камере и сопле для движущейся и покоящейся ракеты одинаково. Это допущение равносильно пренебрежению влиянием ускорения ракеты на относительное движение газа.

2) Сравнение величин «статических составляющих» реактивных сил, определяемых вторыми слагаемыми в формулах (20), с чисто реактивными силами [с главными вектором $(-k_r)$ и моментом $(-l_{rC})$] приведено в § 8.

Здесь v_C и w_C — соответственно скорость и ускорение центра инерции затвердевшей в момент t ракеты, т. е. тела S^1).

Однако при горении топлива центр инерции ракеты будет перемещаться относительно корпуса. Скорость и ускорение этого смещения обозначим через v_r и w_r . Рассматривая движение корпуса ракеты как переносное, а перемещение центра инерции относительно корпуса ракеты как относительное движение, мы для абсолютных скорости и ускорения центра инерции ракеты получим формулы²⁾:

$$v = v_C + v_r, \quad w = w_C + w_r + 2\omega \times v_r, \quad (24)$$

где ω — угловая скорость корпуса ракеты. Определяя отсюда w_C и подставляя в (23), найдем:

$$m\omega = R + T + J + mw_r + 2m\omega \times v_r. \quad (25)$$

Мы получили уравнение движения центра инерции ракеты в векторной форме.

В § 4 Приложения I будут выведены формулы, из которых будет видно, что для обычных ракет величины v_r и w_r пренебрежимо малы по сравнению со средними скоростями и ускорениями ракет на активном участке траектории, т. е. на участке, где происходит горение ракетного топлива. Так, например, для немецкого 82-мм реактивного снаряда скорость $v_r \approx 0,05$ м/сек, а ускорение $w_r \approx 0,02$ м/сек²; для ракеты V-2 соответственно $v_r < 0,1$ м/сек, а ускорение $w_r < 0,007$ м/сек.

Ввиду малости величин v_r и w_r из соотношений (24) вытекает:

$$v \approx v_C, \quad w \approx w_C. \quad (26)$$

Поэтому в уравнении (25) последние два члена в правой части можно отбросить и уравнение движения центра инерции записать в виде

$$m\omega = R + T + J. \quad (27)$$

§ 6. Уравнения вращательного движения ракеты

Обозначим через ξ, η, ζ направления главных центральных осей инерции ракеты, через I_1, I_2, I_3 — моменты инерции ракеты относительно этих осей, через p, q, r — проекции угловой скорости корпуса ω на эти оси.

Предположим сначала, что направления главных центральных осей инерции ξ, ζ, η остаются неизменными относительно корпуса ракеты во все время горения ракетного заряда. Это предположение

¹⁾ v_C и w_C — скорость и ускорение точки C , неизменно связанной с корпусом ракеты.

²⁾ Знаком $\times$ здесь и в дальнейшем обозначаем векторное произведение векторов.

является естественным для ракет, так как обычно принимается, что геометрическая ось ракеты все время совпадает с одной из главных осей инерции, а две другие главные оси инерции могут быть произвольно выбраны в плоскости, перпендикулярной к оси ракеты.

При сделанном предположении главные центральные оси инерции затвердевшей ракеты S будут все время параллельны ξ, η, ζ . Соответствующие моменты инерции этого твердого тела будут иметь постоянные значения, равные значениям моментов инерции I_1, I_2, I_3 ракеты в момент времени t . Из сказанного следует, что p, q, r будут проекциями угловой скорости ω твердого тела S на главные центральные оси инерции.

Поэтому, исходя из принципа затвердевания, мы можем написать уравнения вращательного движения в форме Эйлера¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{dp}{dt} + (I_3 - I_2) qr &= N_\xi, \\ I_2 \frac{dq}{dt} + (I_1 - I_3) rp &= N_\eta, \\ I_3 \frac{dr}{dt} + (I_2 - I_1) pq &= N_\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где N_ξ — сумма моментов относительно оси ξ всех внешних, реактивных и кориолисовых сил; аналогично определяются N_η и N_ζ .

Три уравнения (28) вместе с тремя скалярными уравнениями движения центра инерции ракеты²⁾ составляют систему из шести скалярных уравнений, которая и определяет движение корпуса ракеты.

Рассмотрим для полноты общий случай, хотя он и не имеет существенного практического значения. Пусть во время горения ракетного заряда главные центральные оси инерции меняют свое направление относительно корпуса ракеты. Обозначим через ξ_1, η_1, ζ_1 направления главных центральных осей инерции тела S , т. е. направления, неизменные относительно корпуса ракеты и совпадающие с направлениями ξ, η, ζ в момент t . Проекции угловой скорости ω на оси ξ_1, η_1, ζ_1 обозначим через p_1, q_1, r_1 .

Тогда, применяя принцип затвердевания, мы можем для момента времени t написать:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{dp_1}{dt} + (I_3 - I_2) q_1 r_1 &= N_{\xi_1}, \\ I_2 \frac{dq_1}{dt} + (I_1 - I_3) r_1 p_1 &= N_{\eta_1}, \\ I_3 \frac{dr_1}{dt} + (I_2 - I_1) p_1 q_1 &= N_{\zeta_1}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где N_{ξ_1} — сумма проекций на ось ξ_1 внешних, реактивных и кориолисовых сил; аналогично определяются N_{η_1} и N_{ζ_1} .

¹⁾ См., например, Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Курс теоретической механики, т. II, Гостехиздат, 1955, § 178.

²⁾ Скалярные уравнения движения центра инерции получаются из (27) почленным проектированием на оси координат.

Обозначим через Ω угловую скорость триэдра направлений ξ, η, ζ относительно корпуса ракеты. Пусть $\frac{d\omega}{dt}$ — производная от вектора ω относительно корпуса ракеты, а $\frac{\delta\omega}{dt}$ — относительно осей ξ, η, ζ . Тогда¹⁾

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta\omega}{dt} + \Omega \times \omega. \quad (30)$$

Проекции вектора $\frac{d\omega}{dt}$ на оси ξ_1, η_1, ζ_1 равны $\frac{dp_1}{dt}, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dr_1}{dt}$. Проекции вектора $\frac{\delta\omega}{dt}$ на оси ξ, η, ζ равны $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$. Поскольку в момент t направления ξ, η, ζ совпадают с направлениями ξ_1, η_1, ζ_1 , то для этого момента времени из формулы (30) следует:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{dp}{dt} + \Omega_\eta r - \Omega_\zeta q, \\ \frac{dq_1}{dt} &= \frac{dq}{dt} + \Omega_\zeta p - \Omega_\xi r, \\ \frac{dr_1}{dt} &= \frac{dr}{dt} + \Omega_\xi q - \Omega_\eta p \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

(в момент времени t : $p = p_1, q = q_1, r = r_1$).

Подставляя в уравнение (29) вместо $\frac{dp_1}{dt}, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dr_1}{dt}$ их выражения из равенств (31), мы окончательно получим (с учетом того, что в момент t имеют место равенства $N_{\xi} = N_{\xi_1}$ и т. д.):

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{dp}{dt} + (I_3 - I_2) qr + I_1 (\Omega_\eta r - \Omega_\zeta q) &= N_\xi, \\ I_2 \frac{dq}{dt} + (I_1 - I_3) rp + I_2 (\Omega_\zeta p - \Omega_\xi r) &= N_\eta, \\ I_3 \frac{dr}{dt} + (I_2 - I_1) pq + I_3 (\Omega_\xi q - \Omega_\eta p) &= N_\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где $\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ следует считать известными функциями от времени.

Уравнения (32) заменяют собой уравнения (28) в общем случае, когда главные центральные оси инерции ракеты изменяют свое направление относительно ее корпуса.

¹⁾ См., например, Лойцянский и Лурье, Курс теоретической механики, т. I, 1957, § 73.

ГЛАВА II

РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИИ РАКЕТЫ

§ 7. Постановка задачи

Внешняя баллистика обычных (нереактивных) снарядов подразделяется на так называемую *основную задачу* и *специальные задачи*.

В основной задаче внешней баллистики движение снаряда трактуется как движение материальной точки (совпадающей с центром тяжести снаряда) под действием двух сил: силы веса, направленной вертикально вниз, и силы сопротивления воздуха Q , направленной противоположно направлению скорости снаряда. При этом

- 1) земля и атмосфера считаются неподвижными,
- 2) поверхность земли считается плоской и совпадающей с плоскостью горизонта точки вылета, и
- 3) ускорение силы тяжести g считается постоянным.

В этих предположениях проводится расчет траектории снаряда и определяются ее основные элементы. Так, например, задавшись начальной скоростью v_0 , углом бросания θ_0 и баллистическим коэффициентом c , определяют дистанцию полета (горизонтальную дальность) X , скорость v_c в точке падения, угол падения θ_c и высоту траектории Y .

В основной задаче пренебрегают вращательным движением артиллерийского снаряда; аэродинамической «подъемной» силой, направленной перпендикулярно к скорости; влиянием ветра и т. д. Влияние всех этих дополнительных факторов изучается в специальных задачах в виде поправок к элементам траектории, определенным в основной задаче.

Траектория ракеты состоит из двух участков: активного и пассивного. На пассивном участке движение ракеты ничем не отличается от движения нереактивного артиллерийского снаряда или нереактивной мины. Поэтому расчет пассивного участка траектории может быть произведен обычными методами основной задачи внешней баллистики. Для этого расчета необходимы следующие исходные данные: величина скорости в начале пассивного или, что то же, в конце

активного участка v_a ¹⁾, направление вектора скорости ϑ_a , задаваемое углом θ_a между горизонтом и вектором ϑ_a , и баллистический коэффициент c .

Из изложенного следует, что расчет траектории ракеты сводится к изучению движения ракеты на активном участке траектории. Поэтому § 8 настоящей главы посвящается реактивной силе, а в § 9—13 исследуются величина и направление скорости центра тяжести ракеты на активном участке траектории и приводятся методы определения величин v_a и θ_a .

§ 8. Реактивная сила

Представим себе ракету, покоящуюся на горизонтальной подставке. На рис. 3 изображена камера ракеты с соплом; мы можем мысленно представить себе, что с камерой неизменно связана вся остальная часть корпуса ракеты. При горении ракетного заряда имеет место истечение газов через сопло влево и, следовательно, при отсутствии внешних сил сама ракета, в силу теоремы о сохранении количества движения, должна двигаться вправо.

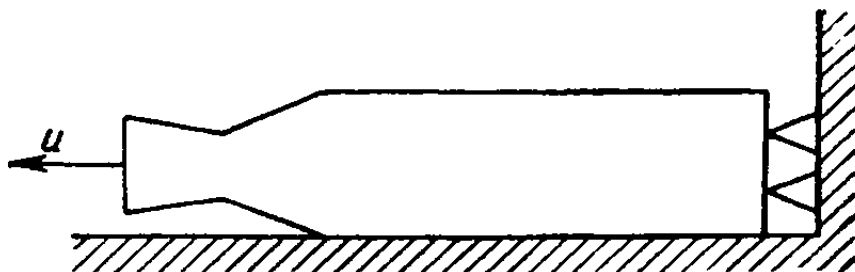


Рис. 3.

Представим себе опорную плоскость, препятствующую движению ракеты вправо. Корпус ракеты будет находиться в покое. Силу давления ракеты на опорную плоскость обозначим через P и назовем *реактивной силой*, или *реактивной тягой*. Тогда к ракете будет приложена реакция опорной плоскости, равная P и направленная влево. Величина силы P может быть измерена на стенде при помощи соответствующих приборов. В результате измерения получим диаграмму зависимости величины силы P от времени t .

Рассмотрим бесконечно малый интервал времени $(t, t + dt)$ и систему материальных частиц, состоящую из корпуса ракеты, ракетного заряда и тех частиц газа, которые в момент времени t находились в камере и сопле ракеты (контрольная поверхность, ограничивающая данную материальную систему, в момент t проходит по наружной поверхности ракеты и по выходному сечению сопла). Тогда, предполагая движение газа в камере стационарным ²⁾, мы для приращения количества движения системы за бесконечно малый интервал времени $(t, t + dt)$ получим выражение

$$\mu \cdot dt \cdot u, \quad (1)$$

¹⁾ Обычно скорость ракеты в конце активного участка траектории является максимальной.

²⁾ См. сноску на стр. 18

где μ — секундный расход массы, а u — постоянная во времени скорость истечения газов из сопла¹⁾. Приравнявая произведение (1) сумме импульсов внешних сил за тот же промежуток времени $(t, t + dt)$, получим уравнение

$$\mu u dt = P dt - (p_a - p_n) \sigma_a dt, \quad (2)$$

где p_n — атмосферное давление, p_a — среднее давление газов в выходном сечении сопла, σ_a — площадь выходного сечения сопла.

Из уравнения (2) находим выражение для величины P ²⁾:

$$P = \mu u + (p_a - p_n) \sigma_a. \quad (3)$$

Это равенство может быть записано еще так:

$$P = \mu \left(u + \frac{p_a - p_n}{\mu} \sigma_a \right).$$

Выражение, стоящее в скобках, называется *эффективной скоростью истечения* u_e :

$$u_e = u + \frac{p_a - p_n}{\mu} \sigma_a. \quad (4)$$

Обычно второе слагаемое в формуле (4) составляет не более 10% от u ³⁾.

Заметим, что u зависит только от состава пороха и конфигурации сопла и не зависит от давления в камере. Массовый же расход μ и давление p_a в выходном сечении пропорциональны давлению в камере; поэтому отношение $\frac{p_a}{\mu}$ не зависит от давления в камере. Следовательно, в обычных случаях, когда можно пренебречь членом $\frac{p_n}{\mu} \sigma_a$, эффективная скорость истечения u_e не зависит от давления в камере. Мы будем считать скорость u_e постоянной во времени. В дальнейшем мы будем иметь дело не с u , а только с эффективной скоростью истечения u_e .

Вводя в рассмотрение эффективную скорость истечения, представим выражение для реактивной силы в виде

$$P = \mu u_e. \quad (5)$$

¹⁾ Приращение количества движения нашей системы равно количеству движения тех частиц газа, которые за время dt прошли через выходное сечение сопла. Скорости истечения частиц газа в различных точках выходного сечения могут несколько отличаться друг от друга. Под u мы понимаем среднюю по выходному сечению скорость истечения газов.

²⁾ Формула (3) является частным случаем первой из формул (19) гл. I.

³⁾ Отношение второго слагаемого к первому в формуле (4) зависит от отношения диаметра d_a выходного сечения сопла к диаметру d_k критического сечения. Если $\frac{d_a}{d_k} = 2 \div 2,5$, то это отношение не превосходит 10—12%. Если $d_a \approx d_k$, то это отношение порядка 1.

Так как μ пропорционально давлению в камере, то из (5) следует, что величина реактивной силы $P(t)$ пропорциональна давлению в камере $p(t)$. Величина u_e определяется через импульс j реактивной силы P следующим образом. Обозначим через dm отрицательное приращение массы снаряда за бесконечно малый интервал времени $(t, t + dt)$. Очевидно, что

$$\mu = - \frac{dm}{dt}. \quad (6)$$

Умножая обе части равенства (5) на dt и интегрируя в пределах от 0 ($t=0$ соответствует началу горения ракетного заряда) до произвольного момента времени t , получим

$$j(t) = u_e [m(0) - m(t)], \quad (7)$$

где $j(t)$ — импульс реактивной силы за первые t секунд горения реактивного заряда:

$$j(t) = \int_0^t P dt;$$

$m(t)$ — масса ракеты в момент времени t ; $m(0) = m_n$ — начальная масса ракеты (сумма массы корпуса и массы всего ракетного заряда).

На рис. 4 представлена диаграмма зависимости реактивной силы P от времени; τ — время горения ракетного заряда. Величина $j(t)$ задается площадью $OABC$. Полный импульс

$$j = j(\tau) = \int_0^{\tau} P dt$$

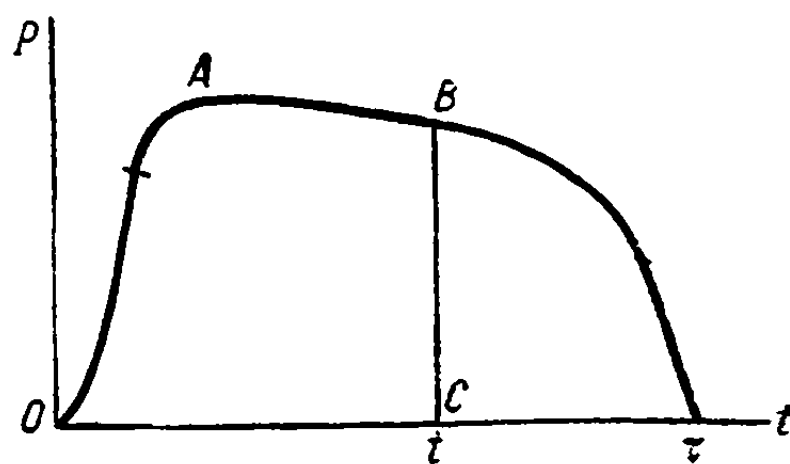


Рис. 4.

задается площадью всей диаграммы.

Обозначим через ω вес ракетного заряда. Тогда, полагая в формуле (7) $t = \tau$ и замечая, что

$$m(0) - m(\tau) = \frac{\omega}{g},$$

получим

$$u_e = \frac{jg}{\omega} = j_1 g, \quad (8)$$

где $j_1 = \frac{j}{\omega}$ — единичный импульс заряда (импульс, приходящийся на 1 кг пороха).

Величина единичного импульса j_1 зависит от свойств пороха, от условий горения ракетного заряда в камере и от конфигурации сопла. Однако обычно для порохов, а также для жидкого топлива

величина j_1 колеблется около значения 200 кг сек/кг. Поэтому согласно формуле (8) скорость u_e имеет порядок 2000 м/сек. Импульс j реактивной силы может быть измерен на стенде, например, при помощи импульсомера. Зная j , по формуле (8) находим u_e .

Заметим, что величина реактивной силы резко меняется в зависимости от первоначальной температуры ракетного заряда (т. е. от температуры заряда перед началом горения). При изменении температуры заряда от $+40$ до -40°C величина реактивной силы может уменьшиться в 2—3 раза. В то же время, как показали опыты, величина импульса реактивной силы практически не зависит от начальной температуры заряда.

§ 9. Уравнения движения центра тяжести ракеты на активном участке траектории

Разберем сначала случай прямолинейного движения ракеты (рис. 5). Применим закон количества движения к той же системе материальных частиц, что и в § 8, т. е. к системе, состоящей из корпуса ракеты, ракетного заряда и частиц газа, которые в фиксированный момент

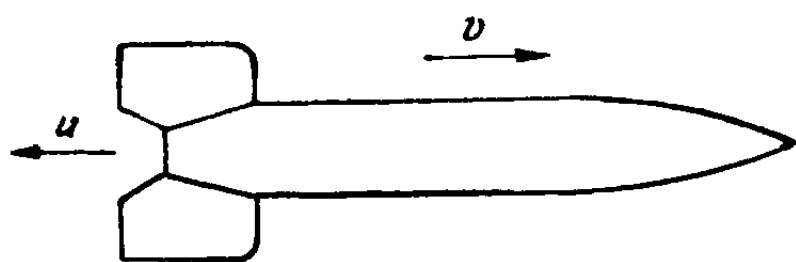


Рис. 5.

времени t находились внутри ракеты. Масса рассматриваемой системы равна массе ракеты в момент t : $m = m(t)$. Обозначим через v скорость корпуса ракеты (все скорости, направленные на рис. 5 вправо, считаются положительными, а

влево — отрицательными). Сохраняя предположение о стационарности процесса движения газа в камере и сопле и пользуясь обозначениями предыдущего параграфа, приравняем приращение количества движения нашей системы за интервал времени $(t, t + dt)$ сумме элементарных импульсов внешних сил¹⁾:

$$m dv - \rho u dt = (p_a - p_n) \sigma_a dt + X dt,$$

откуда

$$m \frac{dv}{dt} = P + X, \quad (9)$$

где P — реактивная сила, измеряемая на стенде и определяемая по формуле (3), а X — сумма внешних сил (сопротивление воздуха и др.).

¹⁾ При составлении левой части уравнения мы рассматриваем движение каждой частицы газа как составное, состоящее из переносного движения со скоростью v и относительного движения со скоростью u . Первое слагаемое $m dv$ представляет собой приращение количества движения системы частиц в переносном движении, а второе слагаемое $\rho u dt$ — в относительном.

Обращаем внимание читателя на следующее принципиальное обстоятельство. *Ракета представляет собой систему переменного состава. Однако уравнение движения (9) составляется так, что оно по внешнему виду ничем не отличается от уравнения поступательного движения твердого тела, только к числу внешних сил в правой части уравнения (9) добавляется реактивная сила P .*

Этот принцип, справедливость которого сейчас установлена для случая поступательного прямолинейного движения ракеты, будет использован ниже при составлении уравнений движения ракеты в более общих случаях ¹⁾.

Рассмотрим теперь движение центра тяжести ракеты на активном участке траектории под действием силы веса q , направленной вертикально вниз, и силы сопротивления воздуха Q , направленной противоположно направлению скорости ракеты. Траектория центра тяжести будет расположена в вертикальной плоскости, проходящей через ось пускового станка. При этом (как и в основной задаче внешней баллистики для нереактивных снарядов) принимаем, что ось ракеты во время движения совпадает с касательной к траектории.

Напишем уравнение движения в проекциях на касательную и на главную нормаль (рис. 6):

$$m \frac{dv}{dt} = P - Q - q \sin \theta, \quad (10)$$

$$m \frac{v^2}{r} = q \cos \theta, \quad (11)$$

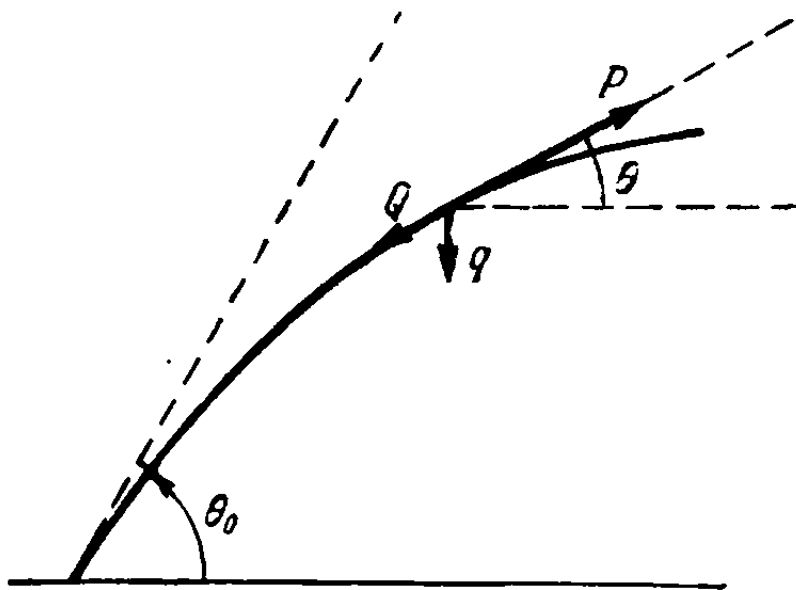


Рис. 6.

где P — реактивная сила, определяемая формулой (5), v — величина скорости, θ — угол, образованный касательной к траектории с горизонтом, r — радиус кривизны траектории. Но, как известно,

$$\frac{1}{r} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = \frac{\left| \frac{d\theta}{dt} \right|}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} = \frac{1}{v} \left| \frac{d\theta}{dt} \right|.$$

В данном случае (рис. 6) угол θ убывает с возрастанием t . Поэтому $\frac{d\theta}{dt} < 0$ и

$$\frac{v^2}{r} = -v \frac{d\theta}{dt}.$$

¹⁾ Подробное обоснование этого принципа для общего случая произвольного движения ракеты изложено в главе I, § 4. Там же указано, что при составлении уравнений движения ракеты к внешним силам, помимо реактивных сил, следует добавлять и кориолисовы силы инерции. Однако обычно эти последние силы пренебрежимо малы по сравнению с реактивными.

Подставляя это выражение для $\frac{v^2}{r}$ в (11) и деля обе части уравнений (10) и (11) на m , представим эти уравнения в следующем виде:

$$\frac{dv}{dt} = a - g \sin \theta - F, \quad (12)$$

$$v \frac{d\theta}{dt} = -g \cos \theta, \quad (13)$$

где $a = \frac{P}{m}$ — реактивное ускорение, а $F = \frac{Q}{m}$ — ускорение лобового сопротивления воздуха.

§ 10. Формула Циолковского

Для исследования величины скорости v на активном участке траектории воспользуемся уравнением (12). Рассмотрим сначала задачу в первом приближении, пренебрегая силой веса g и силой сопротивления воздуха Q по сравнению с реактивной силой P . При таких предположениях величина скорости ракеты была вычислена К. Э. Циолковским ¹⁾.

Для невесомой ракеты в безвоздушном пространстве уравнение (12) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = a, \quad (14)$$

где

$$a = \frac{P}{m} = \frac{\mu u_e}{m} = -u_e \frac{dm}{dt}.$$

Подставляя в (14) вместо a это выражение, получим

$$\frac{dv}{dt} = -u_e \frac{dm}{m}. \quad (15)$$

Интегрируя уравнение (15) при начальном условии $v = v_n$ для $t = 0$, получим

$$v = v_n + u_e \ln \frac{m_n}{m}. \quad (16)$$

Для оружейно-реактивных снарядов $v_n \neq 0$; у большинства же реактивных систем горение ракетного заряда начинается в момент.

¹⁾ См. [4]. Поправка к величине скорости, вызванная сопротивлением воздуха и силой веса, будет рассмотрена в § 13. Там же будет показано, что для ракет с относительно небольшим весом ракетного заряда эта поправка мала.

когда ракета находится в покое. В этом случае $v_n = 0$, и формула (16) принимает вид

$$v = u_e \ln \frac{m_n}{m}. \quad (17)$$

Формула (17) носит название *формулы Циолковского*. Эта формула показывает, что величина скорости v в некоторый момент времени зависит от величины массы ракеты в этот момент времени. Формула Циолковского выражает отношение скоростей $\frac{v}{u_e}$ через отношение масс $\frac{m_n}{m}$. Иногда эту формулу записывают и в таком виде:

$$\frac{m}{m_n} = e^{-\frac{v}{u_e}}. \quad (18)$$

Для определения максимальной скорости $v_a = v(\tau)$ нужно воспользоваться формулой Циолковского для момента времени τ :

$$v_a = u_e \ln \frac{m_n}{m_a}, \quad (19)$$

где $m_a = m(\tau)$ равняется пассивной массе ракеты, т. е. массе всей ракеты без ракетного заряда.

Обозначим через q_a пассивный вес снаряда, а через ω — вес ракетного заряда, так что полный вес снаряда $q_n = q_a + \omega$. Тогда

$$\frac{m_n}{m_a} = \frac{q_a + \omega}{q_a} = \frac{q_n}{q_n - \omega},$$

а потому формула (19) может быть записана так:

$$v_a = u_e \ln \left(1 + \frac{\omega}{q_a} \right) \quad (20)$$

или

$$v_a = -u_e \ln \left(1 - \frac{\omega}{q_n} \right). \quad (21)$$

Величина u_e , входящая в формулу Циолковского, определяется через единичный импульс: $u_e = j_1 g$. Таким образом, из формулы Циолковского (21) следует, что величина максимальной скорости v_a зависит только от отношения $\frac{\omega}{q_n}$ и от величины единичного импульса j_1 .

Поэтому величина максимальной скорости v_a не зависит от характера процесса горения заряда: при равномерном и неравномерном, при быстром и медленном горении величина максимальной скорости будет одной и той же. Но так как в существующих зарядах величина j_1 колеблется в сравнительно небольших пределах, то основную роль для изменения величины v_a играет отношение $\frac{\omega}{q_n}$.

Заметим, что формулу Циолковского (17) можно представить в виде

$$v = -u_e \ln(1 - \lambda), \quad (22)$$

где

$$\lambda = \frac{q_n - q}{q_n}, \quad (23)$$

т. е. λ представляет собой отношение веса сгоревшей к моменту t части пороха к полному весу ракеты q_n .

В конце активного участка

$$\lambda(\tau) = \lambda_a = \frac{\omega}{q_n}.$$

При этом значении λ формула (22) совпадает с формулой (21). В табл. III на стр. 315 приведены значения функции

$$K(\lambda) = -\ln(1 - \lambda).$$

Значения этой функции дают отношение $\frac{v}{u_e}$ в любой момент времени t ; в частности,

$$K(\lambda_a) = \frac{v_a}{u_e}.$$

Таким образом, скорость ракеты можно выразить формулой

$$v = u_e K(\lambda). \quad (24)$$

Для орудийно-реактивного снаряда (активно-реактивной мины) формула (24) примет вид

$$v = v_n + u_e K(\lambda). \quad (24')$$

Установим две приближенные формулы, которыми часто удобно пользоваться при вычислении максимальной скорости ракеты. Для этого введем вспомогательную переменную z , связанную с λ соотношением

$$1 - \lambda = \frac{1 - z}{1 + z}. \quad (25)$$

Отсюда

$$z = \frac{\lambda}{2 - \lambda}. \quad (25')$$

Так как всегда $0 < \lambda < 1$, то $0 < z < 1$. Пользуясь соотношением (25), получим:

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= -\ln(1 - \lambda) = \ln(1 + z) - \ln(1 - z) = \\ &= \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots\right) - \left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots\right) = 2z \left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \dots\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим ракеты, для которых величина $\lambda_a = \frac{\omega}{q_n} < 0,3^1)$. При $\lambda < 0,3$ величина $z < 0,176$, $\frac{z^2}{3} < 0,01$, $\frac{z^4}{5} < 0,0002$ и т. д. Таким образом, при $\lambda < 0,3$ функция

$$K(\lambda) \approx 2z = \frac{\lambda}{1 - 0,5\lambda} \quad (26)$$

с точностью примерно до 1%, и, следовательно,

$$v_a \approx \frac{u_e \lambda_a}{1 - 0,5\lambda_a} = \frac{u_e \omega}{q_n - \frac{\omega}{2}}. \quad (27)$$

Но согласно (8)

$$u_e \omega = jg, \quad \text{а} \quad q_n - \frac{\omega}{2} = q_{cp} = m_{cp} g^2).$$

Поэтому

$$v_a \approx \frac{j}{m_{cp}}. \quad (28)$$

Для оценки погрешности формулы (26) и, следовательно, формул (27) и (28) при различных значениях λ обратимся к следующей таблице:

λ	$K(\lambda) = -\ln(1 - \lambda)$	$2z = \frac{\lambda}{1 - 0,5\lambda}$	δ %	v_a (при $u_e = 2000$ м/сек) ³⁾
0,1	0,1054	0,1053	— 0,09	211
0,2	0,2231	0,2222	— 0,40	446
0,3	0,3567	0,3529	— 1,06	713
0,4	0,5108	0,5000	— 2,11	1021
0,5	0,6931	0,6667	— 3,81	1386

Из этой таблицы видно, что при $\lambda < 0,3$ относительная ошибка δ приближенной формулы (28) не превышает 1%, и даже при $\lambda < 0,4$ (т. е. при скоростях ракеты до 1000 м/сек) ошибка формулы (28) не превышает 2%.

1) При этом $\frac{v_a}{u_e} = K(\lambda_a) < 0,36$, т. е. в случае, когда $u_e = 2000$ м/сек, максимальная скорость не превышает 700 м/сек. Таким образом, интервал $0 < \lambda_a < 0,3$ охватывает ракеты с максимальной скоростью (по Циолковскому) до 700 м/сек.

2) Под q_{cp} и m_{cp} мы понимаем соответственно средние арифметические значения весов и масс ракеты в начале и в конце горения ракетного заряда.

3) Приведенное значение v_a вычислено по формуле Циолковского, т. е. без учета сопротивления воздуха и силы тяжести.

Формулу (28) можно представить в ином виде. Рассмотрим среднее значение реактивной силы

$$P_{\text{ср}} = \frac{j}{\tau}$$

и положим

$$a_{\text{ср}} = \frac{P_{\text{ср}}}{m_{\text{ср}}}.$$

Тогда, согласно (28),

$$v_a \approx a_{\text{ср}} \tau. \quad (29)$$

§ 11. Изменение величины скорости ракеты на активном участке траектории. Определение дуги траектории

Для определения максимальной скорости v_a достаточно было знать отношение $\frac{\omega}{q_n} = \lambda_a$ и единичный импульс j_1 . Для определения величины скорости в произвольной точке активного участка траектории, т. е. для определения v как функции от t , необходимо знать $\lambda(t)$ и, следовательно, вес заряда, сгоревшего к моменту времени t . Другими словами, диаграмма зависимости v от t связана с характером процесса горения. Одной формулы Циолковского здесь недостаточно. Поэтому мы будем исходить из заданной диаграммы зависимости от времени реактивной тяги P , измеренной на стенде (рис. 4).

Зная функцию $P(t)$, мы определим зависимость массы от времени t на основании формул (5) и (6), из которых следует:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{u_e} P(t).$$

Отсюда, интегрируя, получим

$$m(t) = m(0) - \frac{1}{u_e} \int_0^t P(t) dt = m_n - \frac{1}{u_e} j(t). \quad (30)$$

Таким образом, определение $m(t)$ сводится к нахождению импульса $j(t)$. Деля $P(t)$ на $m(t)$, получим реактивное ускорение

$$a(t) = \frac{P(t)}{m(t)}.$$

Интегрируя уравнение $\frac{dv}{dt} = a$, находим

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt.$$

Величина $v(t)$ определяется площадью $OA_1B_1C_1$ (рис. 7), а максимальная скорость $v_a = v(\tau)$ — площадью всей диаграммы $a(t)$.

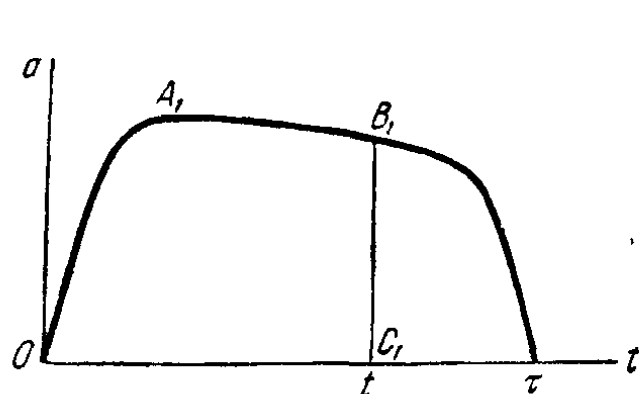


Рис. 7.

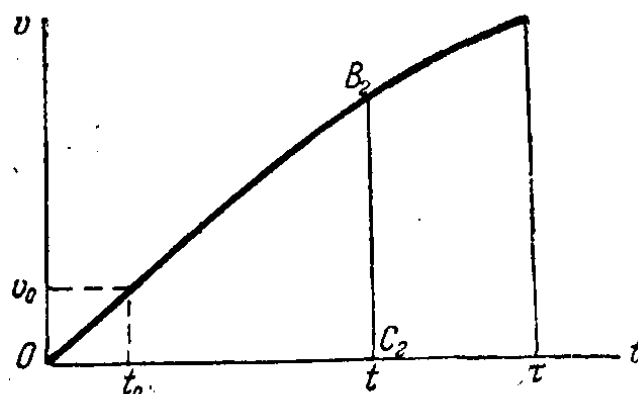


Рис. 8.

Для нахождения пройденного ракетой пути $s(t)$ проинтегрируем $v(t)$:

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt.$$

Величина $s(t)$ определяется площадью OB_2C_2 (рис. 8). Длина активного участка траектории $s_a = s(\tau)$ численно равна площади всей диаграммы $v = v(t)$.

В частности, зная длину направляющей s_0 , определяем t_0 (время движения на направляющей) из соотношения (рис. 9)

$$s(t_0) = s_0.$$

Зная t_0 , находим дульную скорость v_0 (рис. 8):

$$v_0 = v(t_0).$$

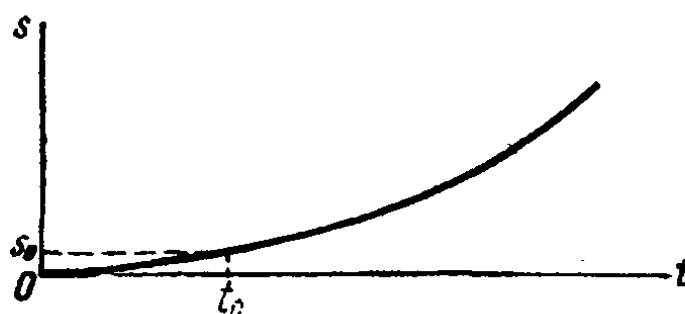


Рис. 9.

Рассмотрим сначала частный случай, когда диаграмма реактивной силы имеет прямоугольную форму, т. е. когда $P = \text{const}$. В этом случае

$$\frac{dm}{dt} = -\mu = -\frac{P}{u_e} = \text{const},$$

и, следовательно, масса ракеты является линейной функцией от времени:

$$m = m_n - \mu t, \quad (31)$$

где $\mu = \frac{w}{g\tau}$.

Далее, ускорение $a(t)$ определяется формулой

$$a(t) = \frac{P}{m(t)} = \frac{P}{m_n - \mu t} = \frac{a_n}{1 - \lambda}, \quad (32)$$

где a_n (ускорение ракеты при $t=0$) и величина λ определяются из формул:

$$a_n = \frac{P}{m_n} = \frac{\omega u_e}{q_n \tau}, \quad (33)$$

$$\lambda = \frac{\mu t}{m_n} = \frac{\omega t}{q_n \tau}. \quad (34)$$

Скорость ракеты определяется формулой Циолковского

$$v(t) = -u_e \ln(1 - \lambda).$$

Интегрируя $v(t)$, находим $s(t)$:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t v(t) dt = -u_e \int_0^t \ln[1 - \lambda(t)] dt = \\ &= \frac{u_e q_n \tau}{\omega} \int_1^x \ln x dx = \frac{u_e^2}{a_n} \int_1^x \ln x dx, \end{aligned}$$

где $x = 1 - \lambda$. Интегрируя по частям, получим:

$$s = \frac{u_e^2}{a_n} [(1 - \lambda) \ln(1 - \lambda) + \lambda] = \frac{u_e^2}{a_n} K_1(\lambda), \quad (35)$$

где ¹⁾

$$K_1(\lambda) = (1 - \lambda) \ln(1 - \lambda) + \lambda. \quad (36)$$

Для нахождения дульной скорости v_0 и соответствующего ей пути s_0 приходится рассматривать значение функций $K(\lambda)$ и $K_1(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$. Так как λ_0 малая величина, то с достаточной степенью точности можно в $K(\lambda)$ ограничиться первым, а в $K_1(\lambda)$ — первыми двумя членами разложения

$$-\ln(1 - \lambda) = \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} + \dots$$

Тогда

$$v_0 = u_e \lambda_0, \quad K_1(\lambda_0) = \frac{\lambda_0^2}{2} \quad \text{и} \quad s_0 = \frac{u_e^2}{a_n} \frac{\lambda_0^2}{2}$$

с точностью до бесконечно малых высшего порядка.

¹⁾ Таблица значений функции $K_1(\lambda)$ приведена на стр. 316. В случае орудийно-реактивного снаряда формула (35) заменяется формулой

$$s = s_n + v_n t + \frac{u_e^2}{a_n} K_1(\lambda) \quad (36a)$$

или

$$s = s_n + \frac{v_n q_n \tau}{\omega} \lambda + \frac{u_e^2}{a_n} K_1(\lambda). \quad (36b)$$

Отсюда легко заключить, что

$$v_0 = \sqrt{2a_n s_0}. \quad (37)$$

Если учесть следующие члены разложения, то легко показать, что относительная ошибка формулы (37) будет по порядку величины равна $\frac{2\lambda_0}{3}$.

Следовательно, при $\lambda_0 < 0,04$ эта ошибка будет меньше 3%. Таким образом, формула (37) показывает, что при вычислении дульной скорости v_0 в случае $P = \text{const}$ можно считать движение на направляющей равноускоренным, с ускорением, равным начальному ускорению a_n , вычисляемому по формуле (33).

Рассмотрим другой частный случай зависимости реактивной силы от времени, когда ускорение постоянно: $a = \text{const}$, т. е. движение на активном участке равноускоренно. В этом случае мы получаем следующие простые аналитические формулы:

$$\left. \begin{aligned} v &= at; & s &= \frac{1}{2} at^2; & v &= \sqrt{2as}; \\ v_a &= a\tau; & s_a &= \frac{1}{2} a\tau^2 = \frac{v_a^2}{2a}; & v_a &= \sqrt{2as_a}; \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{2s_0}{a}}; \quad v_0 = \sqrt{2as_0}. \quad (39)$$

При этом мы считали, что $a = \text{const}$ во все время горения ракетного заряда, т. е. при изменении t от 0 до τ .

Однако для получения простых аналитических формул движения ракеты вне пускового станка нет необходимости предполагать $a = \text{const}$ или $P = \text{const}$ с момента начала горения заряда. Достаточно предположить, что $a = \text{const}$ или $P = \text{const}$ после схода ракеты с направляющей.

Действительно, пусть диаграмма $a(t)$ имеет вид, показанный на рис. 10. Дульную скорость v будем считать известной. Ее можно определить из диаграммы рис. 10 ($v_0 = \text{пл. } OA_0B_0C_0$) либо путем специальных отстрелов. Мы-

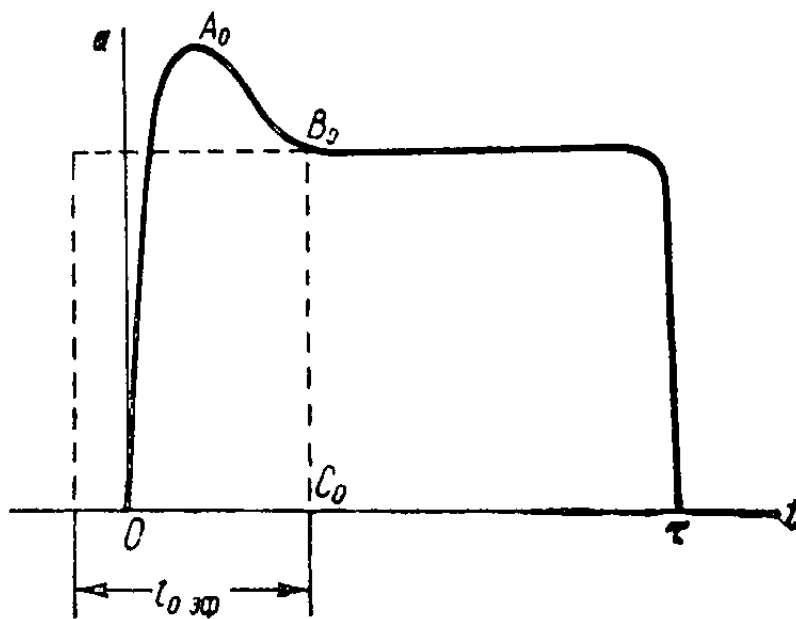


Рис. 10.

сленно заменим движение на направляющей равноускоренным движением с тем же ускорением a и с той же дульной скоростью v_0 ¹⁾; при этом t_0 заменится на $t_{0\text{эф}} = \frac{v_0}{a}$

¹⁾ Такого рода замена никак не отразится на движении ракеты после схода с направляющей.

и s_0 на $s_{0\text{эф}} = \frac{v_0^2}{2a}$. Тогда мы можем пользоваться прежними формулами $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$, $v^2 = 2as$, помня при этом, что изменилось начало

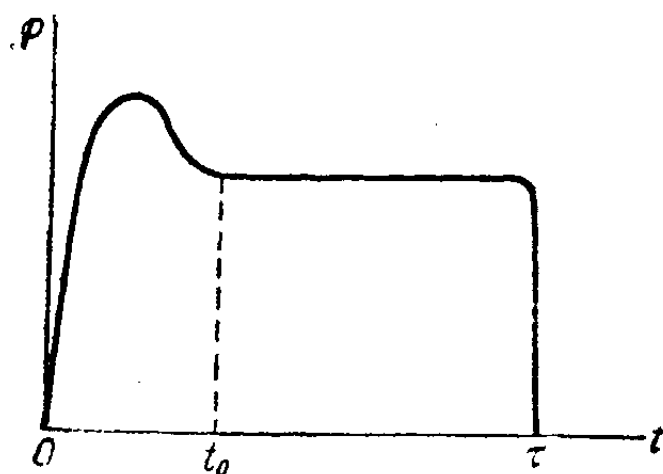


Рис. 11.

отсчета времени t и начало отсчета пути s .

Пусть диаграмма реактивной тяги $P(t)$ имеет вид, показанный на рис. 11. Если известна дульная скорость v_0 , то можно заменить движение на направляющей движением *фиктивной ракеты* при постоянной тяге, равной тяге вне пускового станка, но с этой же дульной скоростью v_0 . При этом из формулы

$$v_0 = u_e K (\lambda_{0\text{эф}}) \quad (40a)$$

мы определим величину $\lambda_{0\text{эф}}$.

Так же как и ранее, введем $\lambda_{\text{эф}}$ и $q_{\text{н.эф}}$ по формулам:

$$\lambda_{\text{эф}} = \frac{q_{\text{н.эф}} - q}{q_{\text{н.эф}}}, \quad (40б)$$

$$q_{\text{н.эф}} = \frac{q_0}{1 - \lambda_{0\text{эф}}}, \quad (40в)$$

где q_0 — вес ракеты в момент схода со станка.

Аналогично

$$a_{\text{н.эф}} = \frac{Pg}{q_{\text{н.эф}}} = \frac{Pg}{q_0} (1 - \lambda_{0\text{эф}}). \quad (40г)$$

Таким образом, мы и в этом случае можем воспользоваться всеми формулами предыдущих параграфов, относящихся к движению при $P = \text{const}$ на всем активном участке, заменив в них $q_{\text{н}}$, λ , $a_{\text{н}}$ на $q_{\text{н.эф}}$, $\lambda_{\text{эф}}$, $a_{\text{н.эф}}$ [согласно формулам (40)], не забывая при этом, что изменилось начало отсчета для t и начало отсчета для s .

В частности, движение орудийно-реактивных снарядов при $P = \text{const}$ можно рассматривать как движение фиктивной ракеты (обычной, не орудийно-реактивной!) с той же тягой P . При этом мы считаем, что фиктивная ракета двигалась по направляющей до начального момента и в этот момент имела скорость, равную заданной величине $v_{\text{н}}$:

$$v_{0\text{эф}} = v_{\text{н}} = u_e K (\lambda_{0\text{эф}}). \quad (41)$$

Найдя отсюда $\lambda_{0\text{эф}}$, а затем $q_{\text{н.эф}} = \frac{q_{\text{н}}}{1 - \lambda_{0\text{эф}}}$ и $a_{0\text{эф}}$, мы сможем далее найти все параметры траектории.

Пример. Вычислим максимальную скорость, длину активного участка и дульную скорость ракеты, считая, что а) $P = \text{const}$, б) $a = \text{const}$,

если известно, что для этой ракеты: $q_n = 10$ кг, $\omega = 1,5$ кг, $\tau = 0,6$ сек (при температуре заряда $+15^\circ \text{C}$), $u_e = 2000$ м/сек и $s_0 = 2$ м.

Для такой ракеты $\lambda_a = \frac{\omega}{q_n} = \frac{1,5}{10} = 0,15$ и поэтому можно пользоваться формулой (27). Из нее получим

$$v_a = \frac{\omega u_e}{q_{ep}} = \frac{1,5 \cdot 2000}{9,25} = 324 \text{ м/сек.}$$

Пользуясь установленными формулами, находим:

а) $P = \text{const}$	б) $a = \text{const}$
$a_n = \frac{\omega u_e}{q_n \tau} = \frac{1,5 \cdot 2000}{10 \cdot 0,6} = 500 \text{ м/сек}^2;$	$a = \frac{v_a}{\tau} = \frac{324}{0,6} = 540 \text{ м/сек}^2;$
$s_a = \frac{u_e^2}{a_n} K_1(\lambda_a) = \frac{2000^2}{500} 0,0119 = 95,2 \text{ м};$	$s_a = \frac{v_a \tau}{2} = \frac{324 \cdot 0,6}{2} = 97,2 \text{ м};$
$v_0 = \sqrt{2a_n s_0} = \sqrt{2 \cdot 500 \cdot 2} = 44,7 \text{ м/сек};$	$v_0 = \sqrt{2as_0} = \sqrt{2 \cdot 540 \cdot 2} = 46,5 \text{ м/сек};$
$\lambda_0 = \frac{v_0}{u_e} = \frac{44,7}{2000} = 0,0224;$	$t_0 = \frac{v_0}{a} = \frac{46,5}{540} = 0,086 \text{ сек.}$
$t_0 = \lambda_0 \frac{q_n \tau}{\omega} = \frac{v_0}{a_n} = \frac{44,7}{500} = 0,089 \text{ сек.}$	

Приведенный пример является типичным для большинства полевых ракет. Для них обе гипотезы $a = \text{const}$ и $P = \text{const}$ дают практически одни и те же результаты. Это объясняется тем, что отношение веса ракетного заряда ω к полному весу ракеты для них не велико. Поэтому прямоугольной диаграмме P соответствует близкая к прямоугольной форме диаграмма $a(t)$, и наоборот.

Измерения, производимые на стенде, показывают, что для полевых ракет диаграммы $a(t)$ и $P(t)$ близки к прямоугольной форме, причем более точным является допущение $a = \text{const}$. Так как получаемые при этом формулы (38) и (39) являются более простыми, то мы для полевых ракет будем считать реактивное ускорение постоянным.

В случае, когда $\frac{\omega}{q_n}$ велико, для предварительной оценки элементов активного участка траектории лучше исходить из допущения $P = \text{const}$.

§ 12. Направление скорости ракеты на активном участке траектории

Скорость центра тяжести ракеты направлена по касательной к траектории и образует угол θ с горизонтом. Для определения зависимости угла θ от t , т. е. для определения изменения наклона касательной на активном участке траектории, воспользуемся уравнением (13).

которое перепишем следующим образом:

$$\frac{d\theta}{\cos \theta} = -g \frac{dt}{v}.$$

Интегрируя обе части этого уравнения в пределах от $t = t_0$ (момент схода с направляющей) до произвольного момента t , получим:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos \theta} = -g \int_{t_0}^t \frac{dt}{v}. \quad (42)$$

Здесь θ_0 — значение θ при $t = t_0$, т. е. угол возвышения пускового станка.

Вычисляя интеграл в левой части (42), найдем:

$$\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_0}{2} \right) = g \int_{t_0}^t \frac{dt}{v}; \quad (43)$$

заменяя в этом равенстве натуральные логарифмы десятичными, получим:

$$\lg \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_0}{2} \right)} = \frac{g}{2,303} \int_{t_0}^t \frac{dt}{v}. \quad (43')$$

Задавшись значением t и найдя численное значение интеграла $\int_{t_0}^t \frac{dt}{v}$, мы по формулам (43) определим соответствующее значение θ . При $t = \tau$ получим $\theta = \theta_a$.

Для получения аналитических формул для интеграла $\int_{t_0}^t \frac{dt}{v}$ будем снова исходить из допущений: $P = \text{const}$ или $a = \text{const}$. Если $P = \text{const}$, то $v = -u_e \ln(1 - \lambda)$, где $\lambda = \frac{\omega t}{q_n \tau}$. Поэтому

$$\int_{t_0}^t \frac{dt}{v} = -\frac{q_n \tau}{u_e \omega} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\ln(1 - \lambda)} = \frac{1}{a_n} [K_2(\lambda) - K_2(\lambda_0)],$$

где

$$K_2(\lambda) = - \int_{0,01}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\ln(1 - \lambda)}. \quad (44)$$

Таблица значений функций $K_2(\lambda)$ приведена на стр. 316¹⁾.
Таким образом, окончательно получим:

$$\lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) - \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_0}{2} \right) = \frac{g}{2,303 a_{\pi}} [K_2(\lambda) - K_2(\lambda_0)]. \quad (45)$$

Для вычисления понижения касательной на активном участке орудийно-реактивного снаряда, как указывалось в конце § 11, следует найти $\lambda_{0\text{эф}}$, $q_{\pi\text{эф}}$, $a_{\pi\text{эф}}$ и $\lambda_{a\text{эф}}$, а затем уже получить угол θ по формуле (45), заменив λ_0 , λ и a_{π} на $\lambda_{0\text{эф}}$, $\lambda_{a\text{эф}}$ и $a_{\pi\text{эф}}$.

Рассмотрим теперь случай постоянного ускорения $a = \text{const}$. В этом случае

$$\int_t^t \frac{dt}{v} = \frac{1}{a} \int_{t_0}^t \frac{a dt}{v} = \frac{1}{a} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \frac{1}{a} \ln \frac{v}{v_0},$$

и формула (43') примет вид

$$\lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) - \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_0}{2} \right) = \frac{g}{a} \lg \frac{v}{v_0} = \frac{g}{2a} \lg \frac{s}{s_0}. \quad (46a)$$

Освобождаясь от логарифмов, получим²⁾:

$$\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_0}{2} \right)} = \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\frac{g}{a}} = \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\frac{g}{2a}}. \quad (46b)$$

Формулы (46) показывают, что «искривление» $|\Delta\theta| = \theta_0 - \theta$ дуги активного участка траектории для данного угла возвышения пускового станка θ_0 зависит от двух отношений: от отношения скоростей в конце и в начале дуги $\frac{v}{v_0}$ и отношения ускорений $\frac{g}{a}$.

Для получения искривления всего активного участка траектории $\theta_0 - \theta_a$ надо в формулах (45) и (46) положить

$$t = \tau; \quad \theta = \theta_a; \quad v = v_a; \quad \lambda = \lambda_a; \quad s = s_a.$$

Приведем еще одну приближенную формулу, выявляющую зависимость величины $|\Delta\theta|$ от θ_0 . Для этого, пользуясь интегральной теоремой о среднем

¹⁾ Функция $K_2(\lambda)$, так же как и функция $K_1(\lambda)$, была введена впервые Я. М. Шапиро. Заметим, что при малых λ , встречающихся при вычислении $K_2(\lambda_0)$, функция $K_2(\lambda)$ хорошо аппроксимируется выражением

$$K_2(\lambda) \approx \ln \frac{\lambda}{0,01}.$$

²⁾ Если ускорение равно $a = \text{const}$ лишь вне пускового станка, то в формулах (46) вместо s и s_0 нужно подставить $s_{\text{эф}} = \frac{v^2}{2a}$ и $s_{0\text{эф}} = \frac{v_0^2}{2a}$.

значении, представим интеграл $\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos \theta}$ в следующем виде:

$$\int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \frac{\Delta\theta}{\cos \theta'} \approx \frac{\Delta\theta}{\cos \theta_0}, \quad (47)$$

где $\theta_0 > \theta' > \theta$ и $\Delta\theta = \theta - \theta_0$.

Относительную ошибку δ в последнем приближенном равенстве можно оценить следующим образом. Так как $\theta' = \theta_0 + (\theta' - \theta_0)$, то, разлагая $\cos \theta'$ в ряд Тейлора по степеням $\theta' - \theta_0$ и сохраняя в этом ряде первые два члена, получим:

$$\cos \theta' \approx \cos \theta_0 - (\theta' - \theta_0) \sin \theta_0 + \dots$$

и, следовательно,

$$\delta = \frac{\cos \theta'}{\cos \theta_0} - 1 \approx \frac{\cos \theta_0 - (\theta' - \theta_0) \sin \theta_0}{\cos \theta_0} - 1 < |\Delta\theta| \operatorname{tg} \theta_0. \quad (48)$$

Для полевых ракет величина $|\Delta\theta|$ обычно не превышает $2-3^\circ$. Поэтому для них формула (47) дает достаточно хорошее приближение.

Пользуясь приближенным равенством (47), запишем формулы (42), (45) и (46) в следующем виде:

$$\Delta\theta \approx -g \cos \theta_0 \int_{t_0}^t \frac{dt}{v}; \quad (49a)$$

$$\Delta\theta \approx -\frac{g \cos \theta_0}{a_n} [K_2(\lambda) - K_2(\lambda_0)]; \quad (49b)$$

$$\Delta\theta \approx -2,303 \cos \theta_0 \frac{g}{a} \lg \frac{v}{v_0} = -1,151 \cos \theta_0 \frac{g}{a} \lg \frac{s}{s_0}. \quad (49b)$$

В первом приближении можно считать, что $\Delta\theta$ пропорционально $\cos \theta_0$.

Пример. Найти понижение касательной $\Delta\theta$ при $\theta_0 = 45^\circ$ для ракеты, рассмотренной в примере на стр. 38.

а) $P = \text{const}$

б) $a = \text{const}$

$$\Delta\theta \approx -\frac{g \cos \theta_0}{a_n} [K_2(\lambda_a) - K_2(\lambda_0)] =$$

$$\Delta\theta = -1,15 \frac{g \cos \theta_0}{a} \lg \frac{s_a}{s_0} =$$

$$= -\frac{9,8 \cdot 0,707}{500} [2,639 - 0,800] = -0,0253 =$$

$$= -1,45^\circ.$$

$$= -1,15 \frac{9,8 \cdot 0,707}{540} \lg \frac{97,2}{2} =$$

$$= -0,0249 = -1,43^\circ.$$

В обеих формулах согласно (48) относительная ошибка $\delta < |\Delta\theta| \operatorname{tg} \theta_0 \approx 2,5\%$. Так как сама величина мала, то такая погрешность вполне допустима. Различие в $\Delta\theta$ при $a = \text{const}$ и $P = \text{const}$ практически отсутствует.

§ 13. Учет влияния лобового сопротивления и силы веса на величину скорости

В предыдущих параграфах мы определили основные элементы активного участка траектории, не учитывая силу лобового сопротивления воздуха и силу веса. Если мы хотим учесть и эти силы, то нужно вернуться к системе уравнений (12), (13) и ее интегрировать.

Обычно интегрирование системы уравнений (12), (13) осуществляется методом последовательных приближений. При определении величины скорости ракеты, в качестве первого приближения принимают значение скорости, вычисленное по формуле Циолковского, и выводят формулы для второго приближения, учитывающие поправку к величине скорости, вызванную влиянием лобового сопротивления воздуха и силой тяжести. Для случая постоянной реактивной тяги второе приближение выражается через затабулированные функции, что дает удобный и простой способ для вычисления первой поправки к скорости ракеты по Циолковскому.

В настоящем параграфе для случая постоянной реактивной тяги приводится выражение для величины скорости через затабулированные функции для второго, третьего и четвертого приближений. Для второго приближения наш способ вычисления представляет собой некоторое видоизменение известных методов.

При этом мы ограничимся рассмотрением ракет, у которых ускорение реактивной силы превышает $20 g$, а время горения τ не превышает 4–5 сек. Прежде всего примем, что $P = \text{const}^1$). Уравнение (12) запишем в следующем виде:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{m} - \frac{Q}{m} - g_1. \quad (50)$$

Здесь Q — сила лобового сопротивления, а $g_1 = g \sin \theta_{\text{ср}}$ — проекция ускорения силы тяжести на касательную к траектории. При этом изменение угла θ на активном участке учитываем, положив в уравнении (12) $\theta = \theta_{\text{ср}} = 0,5(\theta_0 + \theta_a)$. Величину Q представим в виде

$$Q = \alpha F(v), \quad (51)$$

где $F(v)$ — функция сопротивления, а

$$\alpha = \frac{ld^2}{g} 10^3 H(y) \quad (52)$$

(здесь l — коэффициент формы, d — калибр снаряда, $H(y)$ — функция, учитывающая изменение плотности воздуха по высоте). На рассматриваемых нами активных участках функция $H(y)$ изменяется слабо. Здесь можно положить $H(y) = H(y_{\text{ср}})$ и, следовательно, $\alpha = \text{const}^2$).

¹⁾ Мы видели (§ 11), что для ракет с небольшой скоростью ($v_a < 400$ м/сек) предположения $a = \text{const}$ или $P = \text{const}$ приводят к практически эквивалентным результатам. Для больших значений скоростей v_a (больших относительных весов ракетных зарядов) предположение $P = \text{const}$ является более оправданным, чем предположение $a = \text{const}$, так как у этих ракет на активном участке происходит значительное изменение массы, а секундный расход ракетного заряда меняется слабо.

²⁾ Величину $y_{\text{ср}}$ можно оценить по первому приближению s_a , найденному в § 11, положив $y_{\text{ср}} \approx 0,5s_a \sin \theta_{\text{ср}}$.

Определенную в предыдущих параграфах величину скорости по Циолковскому будем рассматривать как первое приближение и обозначать через $v_1 = v_1(t)$. Тогда

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{P}{m}. \quad (53)$$

Следующее приближение $v = v_2$ мы получим по методу последовательных приближений. Полагая в правой части уравнения (50) $v = v_1$ и интегрируя, найдем:

$$v_2 = v_1 - \alpha \int_0^t F(v_1) \frac{dt}{m} - g_1 t. \quad (54)$$

Здесь $\alpha \int_0^t F(v_1) \frac{dt}{m}$ — поправка к величине скорости, вызванная сопротивлением воздуха, а $g_1 t$ — поправка, вызванная силой веса.

Выберем в качестве переменной интегрирования скорость v_1 . Тогда, пользуясь уравнением (53), запишем выражение (54) для v_2 :

$$v_2 = v_1 - \frac{\alpha}{P} \int_0^{v_1} F(v_1) dv_1 - g_1 t.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$L_1(v) = \int_0^v F(v) dv. \quad (55)$$

Таблица значений этой функции приведена на стр. 317. Окончательно получим:

$$v_2 = v_1 - \frac{\alpha}{P} L_1(v_1) - g_1 t. \quad (56)$$

Таким образом получено второе приближение для скорости. Вычислим следующие приближения. Для этого в правой части дифференциального уравнения (50) положим $v = v_2$:

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{P}{m} - \frac{\alpha F(v_2)}{m} - g_1. \quad (57)$$

Для вычисления v_3 выразим $F(v_2)$ через $F(v_1)$, пользуясь первыми двумя членами разложения функции $F(v)$ в ряд Тейлора¹⁾:

$$F(v_2) \approx F(v_1) + (v_2 - v_1) F'(v_1). \quad (58)$$

¹⁾ Здесь $F'(v_1) = \left(\frac{dF}{dv} \right)_{v=v_1}$.

Возможность такого приближения для функции $F(v_2)$ в данном случае оправдывается следующими соображениями. При малых значениях v_1 скорость v_2 мало отличается от v_1 и потому приближение (58) вполне допустимо. При больших значениях v_1 ($v_1 > 400$ м/сек) функция $F(v)$, как известно, очень близка к линейной функции для

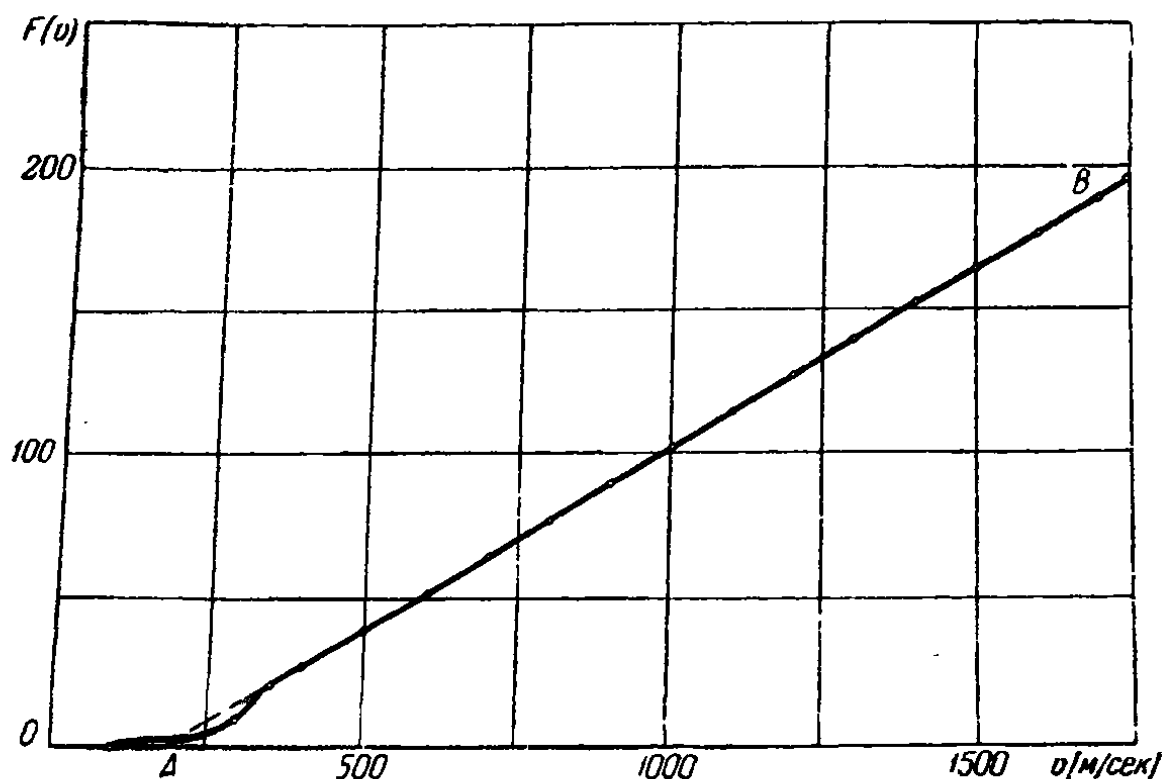


Рис. 12.

всех употребляемых в баллистике законов сопротивления¹⁾ (см., например, рис. 12, на котором представлен график $F(v)$ для «закона 1930 г.»²⁾). Поэтому и для больших значений v_1 выражение (58) дает хорошее приближение для функции $F(v_2)$.

Подставляя в равенство (57) выражение $F(v_2)$ из (58) и учитывая (54) и (56), получим:

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{dv_2}{dt} + \frac{a}{m} F'(v_1) \left[\frac{a}{p} L_1(v_1) + g_1 t \right]. \quad (59)$$

¹⁾ Относительно баллистических законов сопротивления см. Приложение II, § 4.

²⁾ Для «закона 1930 г.» функция $F(v)$ хорошо аппроксимируется ломаной OAB:

$$F(v) = 0 \quad \text{при} \quad v < 184 \text{ м/сек}$$

и

$$F(v) = 0,125(v - 184) \quad \text{при} \quad v > 184 \text{ м/сек.}$$

Отсюда, с помощью интегрирования по частям, получаем¹⁾:

$$v_3 = v_2 + \frac{a^2}{P^2} M(v_1) + \frac{ag_1}{P} \left[tF(v_1) - \int_0^{v_1} F(v_1) \frac{m}{P} dv_1 \right], \quad (60)$$

где

$$M(v_1) = F(v_1) L_1(v_1) - L_2(v_1), \quad (61a)$$

$$L_2(v) = \int_0^v F^2(v) dv. \quad (61b)$$

Расчеты показывают, что последний член в правой части (60) имеет небольшой удельный вес. Поэтому в последнем интеграле выражения (60) можно воспользоваться грубым приближением $m \approx m_{cp}$ и вынести m_{cp} за знак интегрирования. Окончательно получим:

$$v_3 = v_2 + \frac{a^2}{P^2} M(v_1) + \frac{ag_1}{P} tF(v_1) - \frac{am_{cp}}{P^2} g_1 L_1(v_1). \quad (62)$$

Аналогичным образом, подставляя в правую часть уравнения (50) вместо v его третье приближение v_3 и полагая

$$F(v_3) = F(v_1) + (v_3 - v_1) F'(v_1) = F(v_1) + (v_2 - v_1) F'(v_1) + \\ + (v_3 - v_2) F'(v_1) = F(v_2) + (v_3 - v_2) F'(v_1),$$

получим

$$\frac{dv_4}{dt} = \frac{dv_3}{dt} - \frac{a}{m} F'(v_1) \left[\frac{a^2}{P^2} M(v_1) + \frac{ag_1}{P} tF(v_1) - \frac{am_{cp}}{P^2} g_1 L_1(v_1) \right]$$

и, следовательно,

$$v_4 = v_3 - \frac{a^3}{2P^3} \{ F(v_1) [M(v_1) - L_2(v_1)] + L_3(v_1) \} - \\ - \frac{a^2 g_1}{2P^2} tF^2(v_1) + \frac{a^2 m_{cp} g_1}{P^3} [M(v_1) + 0.5L_2(v_1)], \quad (63)$$

где

$$L_3(v) = \int_0^v F^3(v) dv. \quad (64)$$

¹⁾ При интегрировании по частям необходимо учесть, что

$$\frac{dL_1(v_1)}{dv_1} = F(v_1).$$

Таким же методом можно было бы выразить и следующие приближения для v . Однако практически в большинстве случаев можно ограничиться приближением v_2 , а в случае пороховых полевых ракет со скоростями, не превосходящими 350—400 м/сек, очень часто можно ограничиться и формулой Циолковского (см. пример на стр. 48).

Для определения поправок к величине пути проинтегрируем обе части равенства (56):

$$s_2 = s_1 - \frac{a}{P} \int_0^t L_1(v_1) dt - \frac{g_1 t^2}{2}. \quad (65)$$

Здесь s_1 — первое приближение, определяемое формулой (35), а s_2 — второе, учитывающее сопротивление воздуха и силу тяжести. Преобразуем интеграл, стоящий в формуле (65), используя формулу Циолковского (18):

$$\begin{aligned} \int_0^t L_1(v_1) dt &= \int_0^{v_1} L_1(v_1) \frac{m}{P} dv_1 = \\ &= \frac{m_{\pi}}{P} \int_0^{v_1} L_1(v_1) e^{-\frac{v_1}{u_e}} dv_1 = \frac{1}{a_{\pi}} N(v_1, u_e), \end{aligned}$$

где

$$N(v_1, u_e) = \int_0^{v_1} L_1(v) e^{-\frac{v}{u_e}} dv. \quad (66)$$

При этом формула (65) примет вид:

$$s_2 = s_1 - \frac{a}{Pa_{\pi}} N(v_1, u_e) - \frac{g_1 t^2}{2}. \quad (67)$$

Поскольку при вычислении поправки к длине дуги активного участка не требуется большой точности, то можно положить в формуле (67) $u_e = 2000$ м/сек:

$$s_2 = s_1 - \frac{a}{Pa_{\pi}} N(v_1) - \frac{g_1 t^2}{2} \quad [N(v) = N(v, 2000)]. \quad (67')$$

Для рассматриваемого класса ракет изменение $\Delta\theta$ угла θ на активном участке мало. Поэтому обычно поправкой к величине $\Delta\theta$, вносимой учетом сопротивления воздуха, можно пренебречь.

Легко показать, что для снарядов, имеющих $v_n \neq 0$, формулы (56), (62), (63) и (67) принимают вид:

$$v_2 = v_1 - \frac{a}{P} [L_1(v_1) - L_1(v_n)] - g_1 t; \quad (68)$$

$$v_3 = v_2 + \frac{a^2}{P^2} \{F(v_1) [L_1(v_1) - L_1(v_n)] - [L_2(v_1) - L_2(v_n)]\} + \\ + \frac{a g_1}{P} \left\{ t F(v_1) - \frac{m_{cp}}{P} [L_1(v_1) - L_1(v_n)] \right\}; \quad (69)$$

$$v_4 = v_3 - \frac{a^3}{2P^3} \{F^2(v_1) [L_1(v_1) - L_1(v_n)] - 2F(v_1) [L_2(v_1) - L_2(v_n)] + \\ + [L_3(v_1) - L_3(v_n)]\} - \frac{a^2 g_1}{2P^2} F^2(v_1) t + \frac{a^2 g_1 m_{cp}}{P^3} \times \\ \times \{F(v_1) [L_1(v_1) - L_1(v_n)] - 0,5 [L_2(v_1) - L_2(v_n)]\}; \quad (70)$$

$$s_2 = s_1 - \frac{a}{P a_n} [N(v_1) - N(v_n)] + \frac{a}{P} L_1(v_n) t - \frac{g_1 t^2}{2}. \quad (71)$$

Фигурирующие в формулах (68) — (71) величины v_1 и s_1 определяются равенствами:

$$v_1 = v_n + u_e \ln \frac{m_n}{m} = v_n + u_e K(\lambda),$$

$$s_1 = v_n t + \frac{u_e^2}{a_n} K_1(\lambda) + s_n.$$

Значения функций $L_1(v)$, $L_2(v)$, $L_3(v)$, $N(v)$ и $M(v)$ затабулированы нами. Таблицы этих функций, а также функций $F(v)$ помещены в конце книги на стр. 317.

Пример 1. Вычислим v_a и s_a для ракеты, рассмотренной в примере на стр. 38 (в предположении $P = \text{const}$) с учетом сопротивления воздуха и силы тяжести. Пусть коэффициент формы ракеты (по «закону 1930 г.») равен $l = 1,6$, а диаметр $d = 90$ мм. Угол возвышения пускового станка $\theta_0 = 45^\circ$. Приняв $H(y_{cp}) = 1$ (так как $s_a \approx 90$ м), получим:

$$a = \frac{l d^2}{g} 10^8 H(y_{cp}) = \frac{1,6 \cdot 0,09^2}{9,8} 10^8 = 1,30;$$

$$P = \frac{\omega u_e}{\tau g} = \frac{1,5 \cdot 2000}{0,60 \cdot 9,8} = 510 \text{ кг};$$

$$g_1 = g \sin \theta_0 = 9,8 \cdot 0,707 = 6,93 \text{ м/сек}^2.$$

Следовательно,

$$v_{a2} = v_{a1} - \frac{a}{P} L_1(v_{a1}) - g_1 \tau = 324 - \frac{1,30}{510} \cdot 1041 - 6,93 \cdot 0,6 = \\ = 324 - 2,6 - 4,3 = 317,1 \text{ м/сек};$$

$$\begin{aligned}
 v_{a3} &= v_{a2} + \frac{a^2}{P^2} M(v_{a1}) + \frac{a g_1}{P} \tau F(v_{a1}) - \frac{a m_{cp}}{P^2} g_1 L_1(v_{a1}) = \\
 &= 317,1 + \left(\frac{1,3}{510}\right)^2 \cdot 69 \cdot 10^2 + \frac{1,3 \cdot 6,93}{510} 0,6 \cdot 13 - \frac{1,3 \cdot 0,945}{510^2} 6,93 \cdot 1041 = \\
 &= 317,1 + 0,045 + 0,138 - 0,032 = 317,25 \text{ м/сек}, \\
 s_{a2} &= s_{a1} - \frac{a}{P a_n} N(v_{a1}) - \frac{g_1 \tau^2}{2} = 95,2 - \frac{1,3}{510 \cdot 500} 71 \cdot 10^3 - \frac{6,93 \cdot 0,36}{2} = \\
 &= 95,2 - 0,36 - 1,65 = 93,6 \text{ м};
 \end{aligned}$$

Пример 2. Найдем величины v_a , $\Delta\theta_a$, s_a , v_0 для немецкой ракеты типа «Тайфун» при следующих данных:

$$d = 100 \text{ мм}; \quad q_n = 25 \text{ кг}; \quad \omega = 12 \text{ кг}; \quad \tau = 1,2 \text{ сек};$$

$$u_e = 2000 \text{ м/сек}; \quad l = 2,75 \text{ (по «закону 1930 г.»)}; \quad \theta_0 = 45^\circ; \quad s_0 = 4 \text{ м}.$$

$$\text{Так как } \lambda_a = \frac{12}{25} = 0,48, \text{ то}$$

$$v_{a1} = u_e K(\lambda_a) = 2000 \cdot 0,654 = 1308 \text{ м/сек}.$$

Начальное ускорение

$$a_n = \frac{\omega u_e}{q_n \tau} = \frac{12 \cdot 2000}{25 \cdot 1,2} = 800 \text{ м/сек}^2.$$

Тяга

$$P = m_n a_a = \frac{25}{9,8} 800 = 2040 \text{ кг}.$$

Дульная скорость

$$v_0 \approx \sqrt{2 a_n s_0} = \sqrt{2 \cdot 800 \cdot 4} = 80 \text{ м/сек}.$$

Соответственно

$$\lambda_0 \approx \frac{v_0}{u_e} = \frac{80}{2000} = 0,04.$$

Длина активного участка (в первом приближении без учета силы тяжести и сопротивления воздуха) равна

$$s_{a1} = \frac{u_e^2}{a_n} K_1(\lambda_a) = \frac{4 \cdot 10^6}{800} 0,14 = 700 \text{ м}.$$

Понижение касательной

$$\Delta\theta = - \frac{g \cos \theta_0}{a_n} [K_2(\lambda_a) - K_2(\lambda_0)] = - \frac{9,8 \cdot 0,707}{800} [3,627 - 1,372] = -1,12^\circ.$$

Следовательно,

$$\theta_{cp} \approx 45^\circ - \frac{1,12^\circ}{2} = 44,44^\circ, \quad y_{cp} \approx \frac{1}{2} s_{a1} \sin \theta_{cp} = 245, \quad H(y_{cp}) = 0,974,$$

$$a = \frac{l d^2 \cdot 10^3}{g} H(y_{cp}) = \frac{2,75 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3}{9,8} 0,975 = 2,74,$$

$$g_1 = g \sin \theta_{cp} = 9,8 \cdot 0,699 = 6,86 \text{ м/сек}^2.$$

Найдем второе приближение для v_a :

$$v_{a2} = v_{a1} - \frac{a}{P} L_1(v_1) - g_1 \tau = 1308 - 105,5 - 8,2 = 1194,3 \text{ м/сек.}$$

Найдем третье приближение:

$$\begin{aligned} v_{a3} &= v_{a2} + \frac{a^2}{P^2} M(v_1) + \frac{a g_1}{P} \tau F(v_1) - \frac{a m_{cp}}{P^2} g_1 L_1(v_1) = \\ &= 1194,2 + 6,6 + 1,6 - 0,7 = 1201,7 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} v_{a4} &= v_{a3} - \frac{a^2}{2P^2} \{ F(v_1) [M(v_1) - L_2(v_2)] + L_3(v_1) \} - \\ &- \frac{a^2 g_1}{2P^2} \tau F^2(v_1) + \frac{a^2 m_{cp} g_1}{P^3} [M(v_1) + 0,5 L_2(v_1)] = \\ &= 1201,8 - 0,31 - 0,15 + 0,09 = 1201,5 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

Найдем второе приближение для длины активного участка:

$$s_{a2} = s_{a1} - \frac{a}{P a_n} N(v_1) - \frac{g_1 t^2}{2} = 700 - 30 - 5 = 665 \text{ м.}$$

Пример 3. Вычислим величины v_a , $\Delta\theta_a$, s_a и v_0 для ракеты типа «Тайфун» при следующих данных:

$$\begin{aligned} d &= 100 \text{ мм; } u_p = 2000 \text{ м/сек;} \\ q_n &= 25,5 \text{ кг; } l = 2,75 \text{ (по «закону 1930 г.»);} \\ \omega &= 12,5 \text{ кг; } \theta_0 = 55^\circ; \\ \tau &= 5,2 \text{ сек; } s_0 = 4 \text{ м.} \end{aligned}$$

Поступая так же, как и в предыдущем примере, найдем:

$$\begin{aligned} v_{a1} &= 1346,6 \text{ м/сек, } s_{a1} = 3119 \text{ м, } y_{a1} = 2448 \text{ м,} \\ v_{a2} &= 885,0 \text{ м/сек,} \\ v_{a3} &= 1003,1 \text{ м/сек,} \\ v_{a4} &= 980,4 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

Из приведенных результатов видно, что сходимость последовательных приближений недостаточно удовлетворительна. Кроме того, следует отметить, что ввиду большой высоты активного участка замена функции $H(y)$ одним значением для всей траектории может привести к значительным ошибкам.

Поэтому проведем требуемые вычисления, разбив активный участок на две части, из которых первая часть соответствует промежутку времени от 0 до $t = 3,2 \text{ сек.}$

Проведя для первого участка вычисления таким же образом, как и в примере 2, получим для момента $t = 3,2 \text{ сек}$ следующие значения элементов траектории:

$$\begin{aligned} v_1 &= 718,3 \text{ м/сек, } s_1 = 1081 \text{ м, } y_1 = 860 \text{ м, } \Delta\theta = -4,45^\circ, \\ v_2 &= 597,9 \text{ м/сек, } s_2 = 974,3 \text{ м, } y_2 = 776 \text{ м,} \\ v_3 &= 615,3 \text{ м/сек,} \\ v_4 &= 614,8 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

Вес ракеты в момент $t = 3,2$ сек равен $q = 17,8$ кг, а оставшийся ракетный заряд весит 4,8 кг.

Расчет второго участка проведем по формулам (68) — (71), полагая

$$\begin{aligned} v_n &= 614,8 \text{ м/сек}; & y_n &= 776 \text{ м}; & \theta_n &= 50,55^\circ; \\ q_n &= 17,8 \text{ кг}; & \omega &= 4,8 \text{ кг}; & \tau &= 2 \text{ сек}. \end{aligned}$$

Найдем сначала

$$\lambda_a = \frac{48}{17,8} = 0,27;$$

$$v_1 = v_n + u_e K(\lambda_a) = 614,8 + 2000 \cdot 0,3147 = 1244,2 \text{ м/сек}$$

и начальное ускорение

$$a_n = \frac{P}{m} = 270 \text{ м/сек}^2.$$

Длина второго участка в первом приближении равна

$$s_1 = v_n \tau + \frac{u_e^2}{a_n} K_1(\lambda_a) = 614,8 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 10^6}{270} 402 \cdot 10^{-4} = 1825 \text{ м}.$$

Для определения понижения касательной к траектории найдем $\lambda_{0\text{эф}}$, $q_{\text{н.эф}}$ и $a_{\text{н.эф}}$ (см. §§ 11 и 12):

$$K(\lambda_{0\text{эф}}) = \frac{v_n}{u_e} = \frac{614,8}{2000} = 0,3074; \quad \lambda_{0\text{эф}} = 0,2646;$$

$$q_{\text{н.эф}} = \frac{q_n}{1 - \lambda_{0\text{эф}}} = \frac{17,8}{1 - 0,2646} = 24,2 \text{ кг};$$

$$\omega_{\text{эф}} = q_{\text{н.эф}} - q_a = 24,2 - 13 = 11,2 \text{ кг};$$

$$a_{\text{н.эф}} = \frac{Pg}{q_{\text{н.эф}}} = \frac{490 \cdot 9,8}{24,2} = 199 \text{ м/сек}^2; \quad \lambda_{\text{а.эф}} = \frac{11,2}{24,2} = 0,462;$$

$$\Delta\theta = - \frac{g \cos \theta_n}{a_{\text{н.эф}}} [K_2(\lambda_{\text{а.эф}}) - K_2(\lambda_{0\text{эф}})] = -0,8^\circ;$$

$$\theta_{\text{ср}} = 51,55 - \frac{0,8}{2} = 51,15^\circ;$$

$$y_{\text{ср}} = y_n + 0,5s_1 \sin \theta_{\text{ср}} = 776 + 0,5 \cdot 1825 \cdot 0,78 = 1488 \text{ м};$$

$$H(y_{\text{ср}}) = 0,85; \quad g_1 = g \sin \theta_{\text{ср}} = 7,65 \text{ м/сек}^2.$$

$$\text{Параметр } a = \frac{2,75 \cdot 10^{-2}}{9,8} 10^3 \cdot 0,85 = 2,38.$$

По формулам (68) — (70) находим:

$$v_2 = v_1 - \frac{a}{P} [L_1(v_1) - L_1(v_n)] - g_1 \tau = 1244,2 - 286 - 15,3 = 942,9 \text{ м/сек};$$

$$v_3 = 993,9 \text{ м/сек};$$

$$v_4 = 988,2 \text{ м/сек}.$$

Наконец, $s_2 = 1680$ м, а полная высота всего активного участка

$$y_a = y_n + s_2 \sin \theta_{cp} = 2114 \text{ м.}$$

Расчет траектории рассматриваемой ракеты, проведенный численным интегрированием, показал, что

$$v_a = 988,8 \text{ м/сек; } y_a = 1970 \text{ м и } \theta_a = 49^\circ.$$

Наш же приближенный метод дал следующие значения:

$$v_a = 988,2 \text{ м/сек; } y_a = 2114 \text{ м и } \theta_a = 49,75^\circ.$$

Сравнение приближенных результатов с точными (полученными численным интегрированием) показывает их хорошее совпадение для скорости v_a и удовлетворительное — для высоты y_a и угла θ_a .

В первом примере при вычислении максимальной скорости и длины активного участка вполне можно ограничиться первым приближением, не учитывая лобового сопротивления и силы тяжести.

Второй пример показывает, что для ракет с большой максимальной скоростью необходимо учесть сопротивление воздуха и силу тяжести, причем в случае малых значений τ можно ограничиться первой поправкой (вторым приближением).

Третий пример показывает, что в случае, когда ракета обладает большой максимальной скоростью и большим временем горения ракетного заряда, целесообразно разбивать активный участок на 2—3 участка.

Для первого из этих участков расчет проводится обычным способом, а для последующих — путем использования формул (68) — (71). В пределах каждого участка функция $H(y)$ сравнительно слабо меняется и потому может быть заменена своим средним (на этом участке) значением.

В этом параграфе мы рассмотрим еще два известных метода определения скорости ракет с начальным реактивным ускорением $a_n \geq 20g$ и произвольным временем горения.

Сущность первого метода заключается в том, что уравнение (12) преобразуют к новой независимой переменной. После преобразования оказывается возможным понизить число параметров, входящих в уравнение, и при известных ограничениях получить приближенное уравнение, решение которого сводится к квадратурам. Однако такой вид решения нельзя считать окончательным, так как подынтегральные функции не аналитические и содержат большое число параметров. Поэтому конечный вид решения получается только после разложения подынтегральных функций в ряды с последующим интегрированием этих рядов. В результате интегрирования оказывается возможным составить таблицы для функций, входящих в решение уравнения, с малым количеством входов (один или два) и представить решение через затабулированные функции.

Как и ранее, примем $P = \text{const}$. Перепишем уравнение (50) в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} - c_n F(v) H(y) \frac{m_n}{m} - g \sin \theta. \quad (72)$$

С другой стороны,

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{P}{m} = \frac{a_n m_n}{m} = a_n e^{\frac{v_1}{u_e}}. \quad (73)$$

Разделив почленно (72) на (73), получим:

$$\frac{dv}{dv_1} = 1 - \frac{c_n}{a_n} F(v) H(y) - \frac{g}{a_n} e^{-\frac{v_1}{u_e}} \sin \theta, \quad (74)$$

где c_n — начальное значение баллистического коэффициента:

$$c_n = \frac{ld^2}{q_n} 10^3.$$

Заменяем уравнение (74) приближенным уравнением

$$\frac{dv}{dv_1} = 1 - \frac{c_n H(y_{op})}{a_n} F(v) - \frac{g e^{-\frac{v_1 \text{ ср}}{u_e}} \sin \theta_{ср}}{a_n} \quad (74')$$

и перепишем его следующим образом:

$$\frac{dv}{dv_1} = \sigma_0 - \sigma_1 F(v), \quad (75)$$

где

$$\sigma_0 = 1 - \frac{g e^{-\frac{v_1 \text{ ср}}{u_e}} \sin \theta_{ср}}{a_n},$$

$$\sigma_1 = \frac{c_n}{a_n} H(y_{ср}).$$

После разделения переменных в уравнении (75) получим:

$$v_1 = \int_0^v \frac{dv}{\sigma_0 - \sigma_1 F(v)}. \quad (76)$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд

$$\frac{1}{\sigma_0 - \sigma_1 F(v)} = \frac{1}{\sigma_0} \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} F(v) + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} F^2(v) + \dots + \frac{\sigma_1^n}{\sigma_0^n} F^n(v) + \dots \right).$$

Интегрируя почленно, получаем формулу для определения v_1 :

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_0} \left(v + \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_1^k}{\sigma_0^k} L_k(v) \right), \quad (77)$$

где

$$L_k(v) = \int_0^v F^k(v) dv. \quad (78)$$

В бесконечной сумме, стоящей в правой части равенства (77), сохраним первые n членов. Тогда получим расчетную формулу

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_0} \left(v + \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_1^k}{\sigma_0^k} L_k(v) \right). \quad (79)$$

Число n определим так, чтобы относительная погрешность при определении v_1 по формуле (79) была достаточно мала. Обозначим для удобства скорость v_1 , вычисленную по формуле (79), через v_{1n} ; тогда относительная погрешность будет равна

$$\delta = \left| \frac{v_1 - v_{1n}}{v_1} \right| = \frac{r_n}{v_1},$$

где r_n — остаточный член ряда (77).

Рассмотрим r_n и оценим его:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{\sigma_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^k L_k(v) = \\ &= \int_0^v \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^{n+1} F^{n+1}(v) \frac{1}{\sigma_0} \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} F(v) + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} F^2(v) + \dots \right) dv = \\ &= \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^{n+1} \int_0^v \frac{F^{n+1}(v)}{\sigma_0 - \sigma_1 F(v)} dv. \end{aligned}$$

В силу уравнения (75)

$$r_n = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^{n+1} \int_0^v F^{n+1}(v) dv_1 \leq \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^{n+1} \int_0^{v_1} F^{n+1}(v_1) dv_1. \quad (80)$$

Функцию сопротивления $F(v)$ будем аппроксимировать ломаной $F_*(v)$, имеющей вид:

$$F_*(v) = \begin{cases} 0 & (0 \leq v \leq \frac{h}{f}), \\ fv - h & (v \geq \frac{h}{f}), \end{cases} \quad (81)$$

где f и h — коэффициенты линейной функции.

Заметим, что для употребляемых в баллистике законов сопротивления — «закона 1930 г.» и «закона Сиацчи» — погрешности в скорости от такой аппроксимации функции $F(v)$ будут иметь место в области малых скоростей ($0 \leq v \leq 400$ м/сек). Но при этих значениях скорости поправка на силу сопротивления воздуха пренебрежимо мала по сравнению с v_1 .

Подставив $F_*(v)$ в (80), получим:

$$r_n \leq \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^{n+1} \int_{\frac{h}{f}}^{v_1} (fv_1 - h)^{n+1} dv_1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^{n+1} \frac{(fv_1 - h)^{n+2}}{f(n+2)}.$$

Следовательно,

$$\delta \leq \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^{n+1} \frac{1}{n+2} \frac{(fv_1 - h)^{n+2}}{fv_1} < \frac{v^{n+1}}{n+2}, \quad (82)$$

где

$$v = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} (fv_1 - h) = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} F_*(v_1).$$

Задавая величину погрешности $|\delta| = 0,01$ и зная v из первого приближения, составим таблицу значений n , при которых погрешность не превышает 0,01.

Таблица А

$v \leq$	0,17	0,34	0,47	0,57	0,644
$n =$	1	2	3	4	5

Из таблицы видно, что расчет v_1 для пороховых ракет в большинстве случаев может производиться по более простой формуле, соответствующей формуле (79) при $n = 1$:

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_0} \left(v + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} L_1(v) \right).$$

Выясним, для каких значений начального реактивного ускорения a_0 мы имеем право заменять уравнение (74) приближенным уравнением (74').

Из (74) следует:

$$v = (1 - \chi - \zeta) v_1,$$

где

$$\chi = \frac{c_n}{a_n} \frac{1}{v_1} \int_0^{v_1} F(v) H(y) dv_1, \quad (83a)$$

$$\zeta = \frac{g}{a_n} \frac{1}{v_1} \int_0^{v_1} e^{-\frac{v_1}{u_e}} \sin \theta dv_1. \quad (83b)$$

Оценим теперь величину ζ . Применяя теорему о среднем к интегралу (83b), получим:

$$\zeta = \frac{g}{a_n} \frac{\sin(\theta_0 - \chi \cdot \Delta\theta)}{v_1} \int_0^{v_1} e^{-\frac{v_1}{u_e}} dv_1 = \frac{g}{a_n} \sin(\theta_0 - \chi \cdot \Delta\theta) \varphi\left(\frac{v_1}{u_e}\right), \quad (84a)$$

где $0 < \kappa < 1$, $\Delta\theta$ — понижение касательной к траектории на активном участке, и

$$\varphi\left(\frac{v_1}{u_e}\right) = e^{-\frac{v_1}{2u_e}} \frac{\operatorname{sh} \frac{v_1}{2u_e}}{v_1/2u_e}. \quad (84б)$$

Так как $\varphi\left(\frac{v_1}{u_e}\right) < 1$ при любом положительном значении $\frac{v_1}{u_e}$, то

$$\zeta < \frac{g}{a_n} \sin \theta_0 < \frac{g}{a_n}.$$

Это означает, что при $a_n \geq 10g$ величина ζ во всяком случае меньше 0,1.

Если же ограничиться значениями $\theta_0 < 60^\circ$ и $v_1 > 500 \text{ м/сек}$ ($\frac{v_1}{u_e} > 0,25$), то величина

$$\zeta < \frac{g}{a_n} \sin 60^\circ \cdot \varphi(0,25) = 0,764 \frac{g}{a_n}.$$

Следовательно, при этих ограничениях $\zeta < 0,075$ при $a_n \geq 10g$.

Обозначим через ζ_1 величину ζ , вычисляемую из уравнения (74'). Тогда

$$\zeta_1 = 1 - \sigma_0 = \frac{g}{a_n} \sin \theta_{cp} \cdot e^{-\frac{v_1 \text{ ср}}{u_e}}.$$

Разделив ζ из (84а) на это значение ζ_1 , получим:

$$\frac{\zeta}{\zeta_1} = \frac{\sin(\theta_0 - \kappa \cdot \Delta\theta)}{\sin(\theta_0 - 0,5 \Delta\theta)} \frac{\operatorname{sh} \frac{v_1}{2u_e}}{v_1/2u_e} e^{-\frac{v_1 - 2v_1 \text{ ср}}{2u_e}}. \quad (85)$$

Величина $\Delta\theta$ обычно не превышает $5-6^\circ$. Поэтому отношение синусов

в формуле (85) близко к 1. Величина же $\frac{\operatorname{sh} \frac{v_1}{2u_e}}{v_1/2u_e}$ даже при $v_1 = 2000 \text{ м/сек}$ не превышает 1,05. Следовательно, усреднение третьего члена в правой части уравнения (74) не должно приводить к ошибке в определении скорости более чем 0,4%, если $a_n \geq 10g_n$ и $v_1 \text{ ср} \approx \frac{v_1}{2}$.

Более подробное исследование точности уравнения (74') приводит к следующим результатам. Для усредненных значений функций $H(y_{cp})$, $e^{-v_1 \text{ ср}/u_e}$, $\sin \theta_{cp}$ следует принять выражения:

$$\left. \begin{aligned} H(y_{cp}) &= \frac{H(y_0) + 3H(y)}{4}; & e^{-\frac{v_1 \text{ ср}}{u_e}} &= \frac{1 + 3e^{-\frac{v_1}{u_e}}}{4}; \\ \sin \theta_{cp} &= \frac{\sin \theta_0 + \sin \theta}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

При использовании выражений (86) решение приближенного уравнения (74') не отличается от решения точного уравнения (74) более чем на 1%, если скорости v_1 по Циолковскому лежат ниже границ, указанных в таблице А.

Таблица Б

$a_n \backslash c_n$	0,1	0,2	0,4
20 g	3000	2200	1700
25 g	3500	2500	1800
50 g	3500	3500	3000

Таким образом, по уравнению (74') можно считать с относительной ошибкой в 1% траектории снарядов, у которых $a_n \geq 20g$, а v_{1n} не больше тех значений, которые указаны в таблице А.

Второй известный метод для определения скорости заключается в том, что уравнение (74') заменяется приближенным, линейным относительно v дифференциальным уравнением, которое затем решается точно. При этом скорость v непосредственно выражается через v_1 .

Аппроксимируем функцию $F(v)$ функцией $F_*(v)$, определяемой формулой (81). Подставив $F_*(v)$ в уравнение (75), получим:

$$\frac{dv}{dv_1} = \sigma_0 - \sigma_1 F_*(v). \quad (87)$$

Введя обозначения

$$k_1 = \sigma_1 f, \quad k_2 = \sigma_0 + \sigma_1 h, \quad \zeta = \frac{h}{f}, \quad (88)$$

получим линейные уравнения¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dv_1} &= 1 - \frac{g \sin \theta_{cp}}{a_n} e^{-\frac{v_1}{u_e}} & (0 \leq v \leq \zeta), \\ \frac{dv}{dv_1} + k_1 v &= k_2 & (v \geq \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$v = v_1 - \frac{g \sin \theta_{cp}}{a_n} \left(1 - e^{-\frac{v_1}{u_e}} \right) u_e + v_0 \quad (0 \leq v \leq \zeta), \quad (90a)$$

$$v = e^{-k_1(v_1 - v_{1\zeta})} \left[\zeta + k_2 \int_{v_{1\zeta}}^{v_1} e^{k_1(v_1 - v_{1\zeta})} dv_1 \right] \quad (v \geq \zeta). \quad (90b)$$

Значение $v_{1\zeta}$ определяется из формулы (90a) при $v = \zeta$:

$$\zeta = v_{1\zeta} - \frac{g \sin \theta_{cp} u_e}{a_n} \left(1 - e^{-\frac{v_{1\zeta}}{u_e}} \right) + v_0.$$

¹⁾ Отметим, что в первом из уравнений (89) мы не усредняем величину v_1 .

Таким образом, для расчета скорости получаем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_1 - \frac{g \sin \theta_{cp} u_e}{a_n} \left(1 - e^{-\frac{v_{1z}}{u_e}} \right) + v_0 & (0 \leq v \leq \zeta), \\ v &= k_3 - k_4 e^{-\varphi} & (v \geq \zeta), \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

где

$$k_3 = \frac{k_2}{k_1}, \quad k_4 = k_3 - \zeta, \quad \varphi = k_1 (v_1 - v_{1z}). \quad (92)$$

Пример 1. Вычислить v_a для ракеты типа «Тайфун» (пороховой) (см. пример 2 на стр. 49).

Решение. Пользуясь данными, приведенными на стр. 49, найдем последовательно:

$$a_n = 800 \text{ м/сек}^2; \quad c_n = \frac{ld^2}{q_n} 10^3 = \frac{2,75 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3}{25} = 1,1;$$

$$v_{1a} = 1308 \text{ м/сек}; \quad \exp(-v_{1op}/u_e) = 0,25 [1 + 3 \exp(-v_{1a}/u_e)] = 0,6400;$$

$$\sin \theta_{cp} = \sin 45^\circ = 0,7071;$$

$$y = \frac{u_e^2 \sin \theta_{cp}}{a_n} \left[1 - \left(1 + \frac{v_{1a}}{u_e} \right) \exp\left(-\frac{v_{1a}}{u_e}\right) \right] = 490,0 \text{ м};$$

$$H(y) = 0,9485; \quad H(y_{cp}) = 0,25 [1 + 3H(y)] = 0,9614;$$

$$\sigma_1 = \frac{c_n}{a_n} H(y_{cp}) = 0,001322; \quad \sigma_0 = 1 - \frac{g}{a_n} \sin \theta_{op} \exp\left(-\frac{v_{1cp}}{u_e}\right) = 0,99445.$$

Учитывая, что по «закону 1930 г.» $f = 0,125$, $h = 0,125 \cdot 184 = 23$ (см. сноску 2 на стр. 45), получим:

$$k_1 = \sigma_1 f = 0,001322 \cdot 0,125 = 0,00016525;$$

$$k_2 = \sigma_0 + \sigma_1 h = 0,99445 + 0,001322 \cdot 23 = 1,0249;$$

$$k_3 = \frac{k_2}{k_1} = 6201,9;$$

$$k_4 = k_3 - 184 = 6017,9;$$

$$\varphi = k_1 (v_{1a} - v_{1z}) = 0,00016525 (1308 - 184) = 0,18574;$$

$$v = k_3 - k_4 e^{-\varphi} = 1204,1 \text{ м/сек}.$$

Значение скорости v_a , полученное численным интегрированием, равно 1201,2 м/сек. Таким образом, относительная ошибка при определении скорости v_a в конце активного участка по формуле (91) равна в данном случае

$$\delta = \frac{1204,1 - 1201,2}{1201,2} = 0,0024 < 1\%.$$

Пример 2. Вычислить скорость ракеты типа «Тайфун» вдоль активного участка траектории по данным, приведенным на стр. 50.

решение. Последовательно находим:

$$a_n = \frac{\omega u_e}{\tau q_n} = \frac{12,5 \cdot 2000}{5,2 \cdot 25,5} = 188,54 \text{ м/сек}^2;$$

$$c_n = \frac{l d^2}{q_n} 10^8 = \frac{2,75 \cdot 10^{-2} \cdot 10^8}{25,5} = 1,0784;$$

$$v_{1a} = 1346,8 \text{ м/сек};$$

$$y_a = \frac{u_e^2}{a_n} \left[1 - \left(1 + \frac{v_{1a}}{u_e} \right) \exp \left(- \frac{v_{1a}}{u_e} \right) \right] = 3110 \text{ м};$$

$$H(y_a) = 0,7073; \quad H(y_{cp}) = 0,25 [1 + 3H(y_a)] = 0,7048;$$

$$\exp \left(- \frac{v_{1cp}}{u_e} \right) = 0,25 \left[1 + 3 \exp \left(- \frac{v_{1a}}{u_e} \right) \right] = 0,63248;$$

$$\sigma_0 = 1 - \frac{g}{a_n} \sin \theta_{cp} \cdot \exp \left(- \frac{v_{1cp}}{u_e} \right) = 0,97409;$$

$$\sigma_1 = \frac{c_n}{a_n} H(y_{cp}) = 0,0044641;$$

$$\nu = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} F_*(v_{1a}) = 0,67.$$

Таким образом, для всего активного участка ракеты «Тайфун» $\lambda > 0,64$. Для того чтобы можно было применить для расчета скорости формулу (79) со значением $n \leq 5$, разобьем весь активный участок на две части:

1-й участок: $0 \leq v_1 \leq 718,3 \text{ м/сек}$ ($0 \leq t \leq 3,2 \text{ сек}$),

2-й участок: $718,3 \text{ м/сек} \leq v_1 \leq 1346,8 \text{ м/сек}$ ($3,2 \text{ сек} \leq t \leq 5,2 \text{ сек}$).

Найдем λ для первого участка. Для этого вычислим

$$\exp \left(- \frac{v_{1cp}}{u_e} \right) = 0,25 \left[1 + 3 \exp \left(- \frac{718,3}{2000} \right) \right] = 0,77368;$$

$$y_1 = \frac{u_e^2 \sin \theta_{cp}}{a_n} \left[1 - \left(1 + \frac{718,3}{2000} \right) \exp \left(- \frac{718,3}{2000} \right) \right] = 855,5 \text{ м};$$

$$H(y_1) = 0,91145; \quad H(y_{cp}) = 0,25 [1 + 3H(y_1)] = 0,93359;$$

$$\sigma_0 = 0,96816; \quad \sigma_1 = 0,00534;$$

$$\nu = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} F_*(718,3) = 0,35.$$

Из табл. А следует, что в формуле (79) нужно взять для 1-го участка три члена. Расчет по формуле (79) при $n = 3$ приведем в табл. В.

Таблица В

$v \text{ м/сек}$	$v_1 \text{ м/сек}$	$v \text{ м/сек}$	$v_1 \text{ м/сек}$
0	0	400	430,0
100	103,4	500	556,4
200	207,9	600	693,3
300	314,5	620	722,9

Интерполяцией значений из таблицы В получим для $v_1 = 718,3$ м/сек величину $v = 616,9$ м/сек.

Для 2-го участка:

$$q_n = 17,8 \text{ кг}; \quad v_{1a} = 1346,8 - 718,3 = 628,5 \text{ м/сек}; \quad y_n = 855,5 \text{ м};$$

$$\omega = 4,8 \text{ кг}; \quad v_n = 616,9 \text{ м/сек}.$$

Следовательно, для этого участка:

$$a_n = 270 \text{ м/сек}^2; \quad c_n = 1,545;$$

$$\exp\left(-\frac{v_{1 \text{ ср}}}{u_e}\right) = 0,25 \left[1 + 3 \exp\left(-\frac{628,5}{2000}\right)\right] = 0,79775;$$

$$y_a = \frac{u_e \sin \theta_{\text{ср}}}{a_n} \left[1 - \left(1 + \frac{628,5}{2000}\right) \exp\left(-\frac{628,5}{2000}\right)\right] + 855,5 = 1293,2 \text{ м};$$

$$H(y_a) = 0,86868; \quad H(y_{\text{ср}}) = 0,87936;$$

$$\sigma_0 = 0,9787; \quad \sigma_1 = 0,005032.$$

В данном случае (при наличии начальной скорости v_n) таблица А уже не может дать нам сведения о необходимом числе членов в следующей формуле [аналогичной формуле (79)]:

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ v - v_n + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^k [L_k(v) - L_k(v_n)] \right\} + v_{1n}. \quad (79')$$

Необходимое количество членов n в формуле (79') легко определить во время самого расчета, который для рассматриваемой ракеты дает таблицу Г значений v_1 для соответствующих значений v .

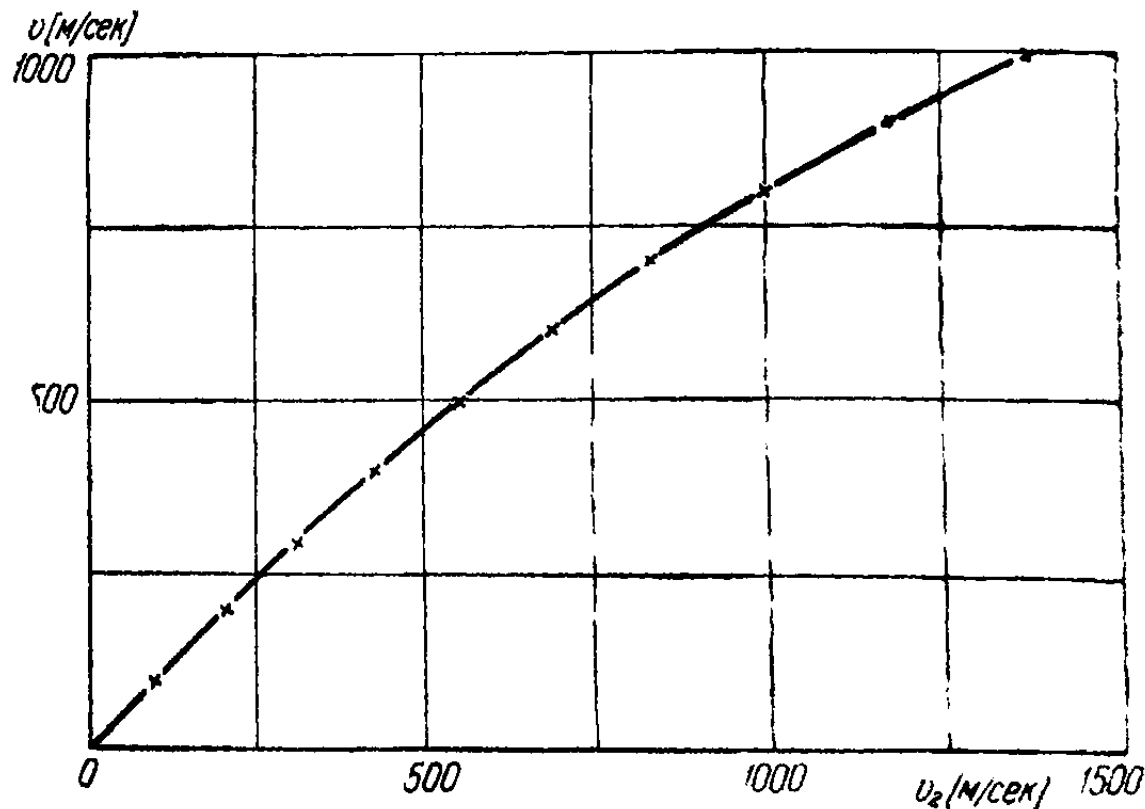


Рис. 13.

Интерполяция значений из таблицы Г дает $v_a = 985,0$ м/сек ($v_{1a} = 1346,8$ м/сек). Расчет траектории рассматриваемой ракеты, проведенный численным интегрированием, показал, что $v_a = 988,8$ м/сек.

Т а б л и ц а Г

v	v_1	v	v_1
616,9	718,3	900	1178,1
700	839,6	1000	1376,6
800	1000,4		

На рис. 13 построен график скорости, который был получен точным расчетом с помощью метода последовательных приближений. Крестиками отмечены точки, построенные на основании таблиц В и Г. Они практически совпадают с соответствующими точками графика.

§ 14. Расчет траектории ракеты

На рис. 14 изображена траектория ракеты. Здесь O — точка вылета, A — конец активного участка, C — точка падения. Проведем через точку A горизонтальную прямую до пересечения с траекторией во второй точке B . Эта прямая разбивает траекторию на три участка: OA , AB и BC .

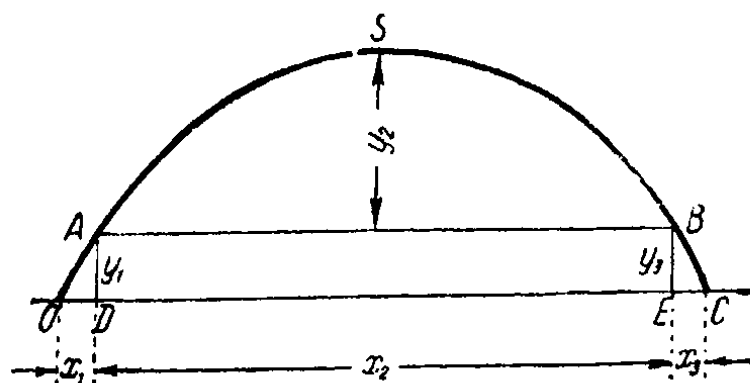


Рис. 14.

Для рассматриваемого класса ракет изменение угла θ на активном участке малое. Поэтому для определения координат конца активного участка мы будем считать $\theta \approx \theta_{cp}$.

Тогда

$$x_1 = x_a = s_a \cos \theta_{cp}; \quad y_1 = y_a = s_a \sin \theta_{cp}.$$

В предыдущих параграфах было показано, как определяются величины s_a , v_a и θ_a . Величины s_a и $\theta_{cp} = 0,5(\theta_0 + \theta_a)$ нам нужны для определения x_1 и y_1 . Величины v_a и θ_a служат исходными данными для решения основной задачи внешней баллистики на участке AB . Применяя для участка AB обычные методы внешней баллистики, мы определяем величины: $x_2 = DE$, y_2 , угол θ_B , время полета T_2 и скорость v_B ¹⁾.

¹⁾ Если мы хотим использовать баллистические таблицы, нужно учесть высоту конца активного участка, приняв для баллистического коэффициента выражение

$$c = \frac{ld^2}{q} 10^3 H(y_a).$$

После этого переходим к третьему участку, который также будем считать прямолинейным. Тогда

$$x_3 = EC = y_1 \operatorname{ctg} \theta_B = s_a \sin \theta_{cp} \operatorname{ctg} \theta_B;$$

$$y_3 = y_1; \quad \theta_C \approx \theta_B; \quad T_3 = \frac{y_3}{v_B \sin \theta_B}.$$

Дистанцию полета X , высоту всей траектории Y , угол θ_C , время полета T и скорость падения v_C определим по формулам:

$$X = x_1 + x_2 + x_3, \quad Y = y_1 + y_2,$$

$$\theta_C \approx \theta_B; \quad T = \tau + T_2 + T_3; \quad v_C \approx v_B.$$

ЗАДАЧИ¹⁾

Задача 1. Артиллерийский снаряд весом $q = 47,0$ кг вылетает из ствола орудия со скоростью $v = 391$ м/сек. Вес полного порохового заряда, сообщającego снаряду эту скорость, равен 2,125 кг. Найти вес порохового заряда ω , который сообщает такую же скорость $v_a = 391$ м/сек ракете с пассивным весом, равным весу указанного артиллерийского снаряда. Объяснить качественно, почему во втором случае необходимо значительно большее количество пороха. Единичный импульс пороха принять равным $j_1 = 200 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{кг}}$.

$$\text{Ответ: } \omega \approx \frac{vq}{j_1 g - \frac{v}{2}} = 10,3 \text{ кг.}$$

Задача 2. Найти максимальную скорость v_a ракеты, состоящей из двух частей: основной и стартовой, отпадающей в полете в момент начала горения основного ракетного заряда, если даны:

вес основной ракеты (без заряда)	$q_1 = 400$ кг.
вес отпадающей стартовой камеры (без заряда)	$q_2 = 560$ кг.
вес основного заряда	$\omega_1 = 245$ кг.
вес стартового заряда	$\omega_2 = 140$ кг.
эффективная скорость истечения газов	$u_e = 2000$ м/сек.

Сопротивлением воздуха и силой тяжести пренебречь. Сравнить эту скорость со скоростью v'_a , которую получила бы обычная ракета весом $q = q_1 + \omega_1 + q_2 + \omega_2$, имеющая заряд весом $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Ответ:

$$v_a = u_e \ln \frac{(q_1 + q_2 + \omega_1 + \omega_2)(q_1 + \omega_1)}{(q_1 + q_2 + \omega_1)q_1} = 1175 \text{ м/сек.}$$

$$v'_a = v_a - u_e \ln \left(1 + \frac{\omega_1 q_2}{q_1 (q_1 + \omega_1 + q_2)} \right) = 674 \text{ м/сек.}$$

Задача 3. Найти закон изменения массы по времени для ракеты, движущейся на активном участке траектории с постоянным ускорением. Считать, что движение происходит в пустоте при отсутствии силы тяжести

¹⁾ Во всех задачах, где нет специальной огонорки, предполагается, что при определении величины скорости и длины активного участка мы пренебрегаем сопротивлением воздуха и силой веса.

Ответ: $m(t) = m_n e^{-\frac{at}{u_e}}$, где m_n — начальное значение массы, a — постоянное ускорение снаряда, u_e — эффективная скорость истечения.

Задача 4. Пассивный вес ракеты равен 30 кг, вес порохового заряда равен 20 кг, эффективная скорость истечения газов равна 2000 м/сек. Двигаясь равноускоренно в пустоте при отсутствии силы тяжести, ракета через 0,6 сек после начала горения получила увеличение скорости на 300 м/сек.

Найти вес порохового заряда через 0,4 сек после начала горения, полное время сгорания реактивного заряда и величину реактивной силы в момент $t = 0,8$ сек, если известно, что ракета двигалась в течение всего времени горения заряда равноускоренно.

Указание: см. решение предыдущей задачи.

Ответ: 1) $\omega = 10,5$ кг при $t = 0,4$ сек; 2) $\tau = 0,89$ сек; 3) $P = 4540$ кг при $t = 0,8$ сек.

Задача 5. Найти закон изменения реактивной тяги во времени, если ускорение ракеты выражается формулой

$$a(t) = a_n \left(1 - \frac{t}{\tau}\right).$$

Решение:

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = a_n t \left(1 - \frac{t}{2\tau}\right) = u_e \ln \frac{m_n}{m};$$

$$m = m_n e^{-\frac{a_n t}{u_e} \left(1 - \frac{t}{2\tau}\right)}; \quad P = ma = P_n \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{a_n t}{u_e} \left(1 - \frac{t}{2\tau}\right)}.$$

Задача 6. На рис. 15 представлена диаграмма ускорения ракеты, имеющей полный вес 98 кг и эффективную скорость истечения $u_e = 2000$ м/сек.

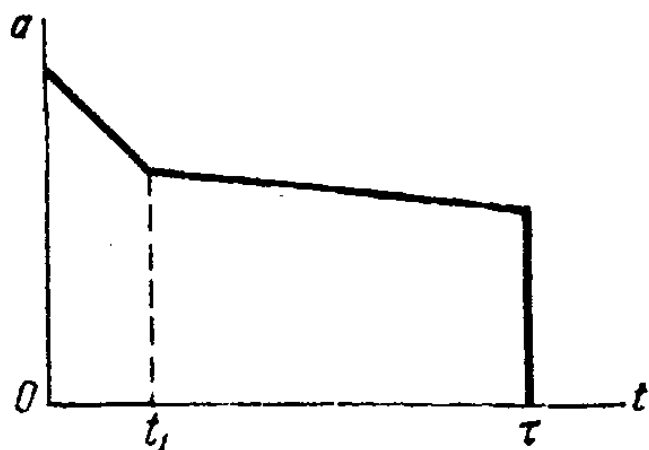


Рис. 15.

На этой диаграмме $a_n = 700$ м/сек² при $t = 0$, $a_1 = 560$ м/сек² при $t = t_1 = 0,1$ сек, $a_2 = 380$ м/сек² при $t = \tau = 1$ сек. Найти зависимость реактивной тяги от времени, а также величину тяги в момент t и τ . Найти вес порохового заряда.

Решение. На участке $0 \div t_1$:

$$a = a_n \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) + a_1 \frac{t}{t_1} = 760 - 2000t; \quad v = 760t - 1000t^2;$$

$$P = m_n a e^{-\frac{v}{u_e}} = 10 (760 - 2000t) e^{-\frac{1000t^2 - 760t}{2000}}.$$

При $t = t_1$: $v_1 = 66$ м/сек, $P = 5420$ кг.

На участке $t_1 \div \tau$: $a = a_1 - \frac{a_1 - a_\tau}{\tau - t_1} (t - t_1) = 580 - 200t$;

$$v = v_1 + \int_{t_1}^t (580 - 200t) dt = 9 + 580t - 100t^2;$$

$$P = m_n a e^{-\frac{v}{u_e}} = 10 (580 - 200t) e^{\frac{100t^2 - 580t - 9}{u_e}}.$$

При $t = \tau$: $v_a = 489$ м/сек, $P = 2980$ кг.

$$\text{Вес заряда } \omega = q_n \left(1 - e^{-\frac{v_a}{u_e}} \right) = 21,2 \text{ кг.}$$

Задача 7. Зенитный орудийно-реактивный снаряд выстреливается из артиллерийской системы вертикально вверх. На какой высоте должна начаться работа реактивного двигателя для того, чтобы снаряд поднялся на максимальную высоту? Начальная скорость снаряда при вылете из дула орудия равна v_0 и время работы реактивного двигателя снаряда равно τ . Считать, что на активном участке траектории ускорение реактивной силы постоянно по величине и равно a ; сопротивлением воздуха пренебречь.

Найти максимальную высоту подъема снаряда $y_{\max}$ при следующих данных:

$$v_0 = 260 \text{ м/сек}; \quad a = 35 \text{ м/сек}^2; \quad \tau = 1 \text{ сек}; \quad g = 9,8 \text{ м/сек}^2.$$

Решение. Если реактивный двигатель начинает работать через t_1 сек после вылета снаряда из артиллерийской системы, то высота подъема снаряда и ее производная равны:

$$y = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} + v_1 \tau + \frac{(a - g)\tau^2}{2} + \frac{[v_1 + (a - g)\tau]^2}{2g}, \quad \frac{dy}{dt_1} = -a\tau,$$

где

$$v_1 = v_0 - gt_1,$$

следовательно, $y(t_1)$ — убывающая функция, максимальное значение которой достигается при $t_1 = 0$. Поэтому искомая оптимальная высота $y_{\text{опт}} = 0$, а соответствующая ей высота

$$y_{\max} = \frac{(v_0 - a\tau)^2 - ag\tau^2}{2g}.$$

Для условий данной задачи $y_{\max} = 19540$ м.

Задача 8. Подсчитать к. п. д. ракеты, имеющей следующие данные: полный вес $q_n = 6,6$ кг; вес заряда $\omega = 1,1$ кг; калорийность пороха $Q = 870$ кал/кг; единичный импульс $j_1 = 200$ кг сек/кг; механический эквивалент тепла $J = 427$ кгм/кал.

Указание: под к. п. д. понимать отношение кинетической энергии ракеты в конце активного участка к внутренней энергии заряда.

$$\text{Ответ: к. п. д. равен } \frac{q_a v_a^2}{2g\omega Q J} = 8,8\%.$$

Задача 9. Найти к. п. д. немецкой ракеты «Оркан», у которой полный вес $q_n = 4,15$ кг; вес заряда $\omega = 1,9$ кг; калорийность пороха $Q = 870$ кал/кг; единичный импульс $j_1 = 200$ кг сек/кг.

Объяснить качественно, почему к. п. д. этой ракеты выше, чем к. п. д. ракеты предыдущей задачи.

Ответ: к. п. д. = 23,5%.

Задача 10. Найти угол наклона касательной к траектории ракеты в конце активного участка полета для случая, когда ракета снабжена дополнительной камерой, так что осуществляется диаграмма ускорения $a(t)$, приведенная на рис. 16.

Ускорение на направляющей $a_1 = 860$ м/сек²; ускорение вне направляющей $a_2 = 575$ м/сек²; полное время горения заряда $\tau = 1,2$ сек; время горения дополнительного заряда $t_1 = 0,1$ сек равно времени движения ракеты по направляющей; угол возвышения пускового станка $\theta_0 = 45^\circ$.

Ответ: $\theta_a = \theta_0 - \frac{g}{a} \cos \theta_0 \ln \frac{v_a}{v_0} = 43^\circ 32'$.

Задача 11. Найти решение предыдущей задачи, если $a_1 = 860$ м/сек²; $a_2 = 400$ м/сек²; $t_1 = 0,2$ сек; $\tau = 0,8$ сек, а длина пускового станка $s_0 = 5$ м.

Решение:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= -\frac{g \cos \theta_0}{a_1} \ln \frac{v_1}{v_0} - \frac{g \cos \theta_0}{a_2} \ln \frac{v_a}{v_1} = \\ &= -g \cos \theta_0 \left\{ \frac{1}{860} \ln \frac{172}{93} + \frac{1}{400} \ln \frac{412}{172} \right\} = -1,15^\circ = -1^\circ 09', \end{aligned}$$

так как

$$v_0 = \sqrt{2a_1 s_0} = 93 \text{ м/сек}, \quad v_1 = a_1 t_1 = 172 \text{ м/сек},$$

$$v_a = a_1 t_1 + a_2 (\tau - t_1) = 412 \text{ м/сек}.$$

Окончательно:

$$\theta_a = \theta_0 + \Delta\theta = 43^\circ 51'.$$

Задача 12. На рис. 17 представлена зависимость ускорения a от времени для ракеты, имеющей полный вес 90 кг и вес порохового заряда $\omega = 10$ кг. Единичный импульс заряда $j_1 = 200$ кг сек/кг.

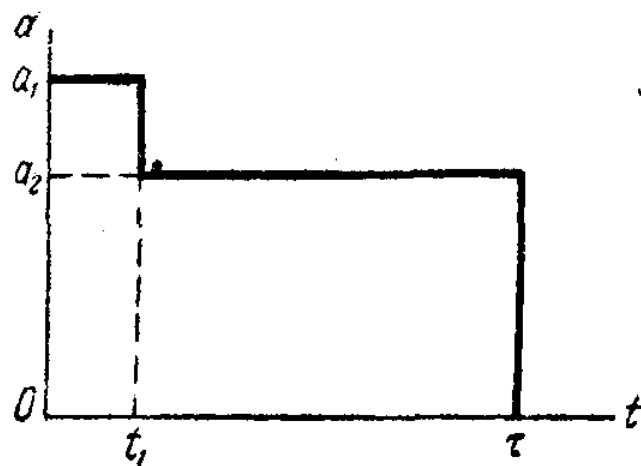


Рис. 16.

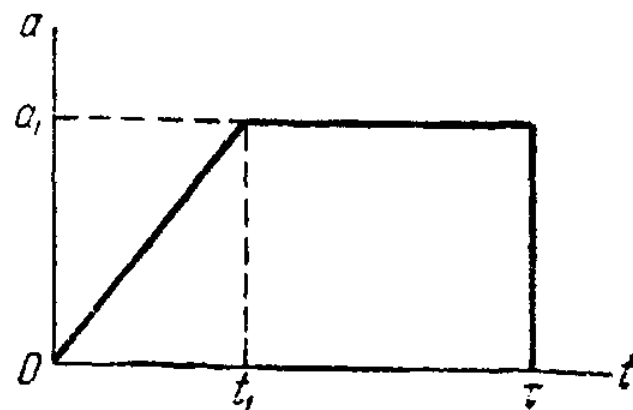


Рис. 17.

Найти угол возвышения траектории в конце активного участка, если длина направляющей $s_0 = 2$ м; $\theta_0 = 45^\circ$; $t_1 = 0,1$ сек; $\tau = 1$ сек.

Решение:

$$v_a = \frac{j_1 g \omega}{q_n - \frac{\omega}{2}} = 231 \text{ м/сек}.$$

Из рис. 17 находим:

$$v_a = 0,5a_1t_1 + a_1(\tau - t_1) = 0,95a_1,$$

откуда

$$a_1 = \frac{231}{0,95} = 243 \text{ м/сек}^2.$$

В момент t_1 скорость

$$v_1 = \frac{243 \cdot 0,1}{2} = 12,15 \text{ м/сек},$$

а путь

$$s_1 = \frac{1}{6} a_1 t_1^2 = 0,405 \text{ м}.$$

Следовательно, в момент t_1 ракета находится на станке. Заменяем движение нашей ракеты движением фиктивной ракеты с постоянным ускорением, равным a_1 . Такая ракета получит скорость $v_1 = 12,15 \text{ м/сек}$, пройдя путь

$$s_{1\text{эф}} = \frac{v_1^2}{2a_1} = 0,304 \text{ м}.$$

Так как $s_1 - s_{1\text{эф}} = 0,405 - 0,304 = 0,1 \text{ м}$, то и $s_0 - s_{0\text{эф}} = 0,1 \text{ м}$. Отсюда получим, что $s_{0\text{эф}} = s_0 - 0,1 \text{ м} = 1,9 \text{ м}$ и $v_0 = \sqrt{2a_1 s_{0\text{эф}}} = 30,4 \text{ м/сек}$.

Следовательно,

$$\Delta\theta = -\frac{g \cos \theta_0}{a_0} \ln \frac{v_a}{v_0} = -3,3^\circ; \quad \theta_a = 41,7^\circ.$$

Задача 13. Ракета калибра 200 мм весит 100 кг при весе ракетного заряда 16 кг. Время сгорания заряда $\tau = 1 \text{ сек}$. Считать движение ракеты на всем активном участке (включая и направляющую) равноускоренным. Найти длину активного участка, дульную скорость, угол наклона касательной к траектории к горизонту в конце горения, если единичный импульс $j_1 = 190 \text{ кг сек/кг}$, длина пускового станка равна 5 м, а угол возвышения пускового станка равен: 1) 45° ; 2) 25° .

Вычислить при помощи баллистических таблиц дальность, время полета, максимальную высоту траектории, окончательную скорость и угол падения в этих двух случаях, если известно, что коэффициент формы ракеты по «закону 1930 г.» равен 1,5. Атмосферные условия считать нормальными.

О т в е т:

	θ_a	$X \text{ м}$	$T \text{ сек}$	$v_c \text{ м/сек}$	θ_c	$Y \text{ м}$
$\theta_0 = 45^\circ$	$42^\circ 52'$	7703	41,49	232	$51^\circ 08'$	2057
$\theta_0 = 25^\circ$	$22^\circ 16'$	5986	24,75	234	$27^\circ 24'$	716

ГЛАВА III

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАССЕЙВАНИЯ РАКЕТ

§ 15. Введение

В основной задаче внешней баллистики речь идет об определении траектории центра тяжести снаряда при известных упрощающих предположениях относительно условий полета и сил, действующих на снаряд. Для ракет с небольшим активным участком траектории эта задача, после вычисления элементов активного участка, быстро сводится к соответствующей задаче для обычных снарядов. Поэтому задача о нахождении траектории центра тяжести ракеты не занимает центрального места в курсе внешней баллистики неуправляемых ракет. Центральное место в этом курсе отводится изучению рассеивания ракет.

Известно, что ракетам свойственно большое рассеивание. Отношение $\frac{B_6}{X}$ [вероятное боковое отклонение в долях дистанции ¹⁾] для различных типов ракет, применявшихся в полевой артиллерии в период второй мировой войны 1939—1945 гг., колебалось в пределах 1/15—1/100, в то время как это же отношение для обычных артиллерийских снарядов, выстреливаемых из нарезных орудий, имеет величину порядка 1/1500—1/3000, а для мин (нереактивных) 1/150—1/200. Что же касается рассеивания по дальности, то и оно для ракет имеет большую величину, однако здесь разница не столь велика. Отношение $\frac{B_d}{X}$ [вероятное отклонение по дальности в долях дистанции ¹⁾] для полевой реактивной артиллерии колеблется в пределах 1/30—1/100. Для обычных артиллерийских снарядов эта величина имеет порядок 1/200—1/300, а для мин (нереактивных) 1/60—1/150 ²⁾.

¹⁾ В § 17 будут даны определения вероятного бокового отклонения и вероятного отклонения по дальности для снаряда (ракеты).

²⁾ Средние данные о боковом рассеивании и рассеивании по дальности, приведенные в этом параграфе, относятся к случаю стрельбы на максимальную дистанцию.

Представляют интерес сведения о кучности русских ракет в середине XIX века, когда уровень боевой ракетной техники в России был очень высок. К этому периоду относятся выдающиеся работы генерала К. И. Константинова, возглавлявшего в 1847 г. Петербургское ракетное заведение. Константин [1, 2] много сделал для усовершенствования технологии и повышения кучности боевых ракет. В статье Константинова [1] приведены данные стрельб, проведенных 30 июня — 12 июля 1852 г. Стрельба велась на дистанцию от 177 до 200 сажен при углах возвышения от 16 до 45° по квадрату со стороны 30 сажен. Константинов, присутствовавший при стрельбе, указывает, что небольшое количество выпущенных ракет не долетело или перелетело через квадрат, но ни одна из них не отклонилась от направления стрельбы в ту или другую сторону больше, чем на 15 сажен. Обработка материалов этих стрельб показывает, что вероятное боковое отклонение ракет составляло примерно $1/40$ дистанции, а вероятное отклонение по дальности — $1/80$ дистанции.

Для изыскания путей уменьшения рассеивания или, что то же, повышения кучности ракет необходимо знать факторы, вызывающие рассеивание, а также количественную связь между этими факторами, величиной рассеивания и параметрами ракеты и пускового станка. Этим вопросам и посвящаются настоящая и все последующие главы данной книги.

§ 16. Факторы, вызывающие боковое рассеивание

При отсутствии возмущающих факторов, вызывающих боковое рассеивание, траектория ракеты должна лежать в плоскости стрельбы. В действительности же (ввиду наличия этих факторов) траектория ракеты выходит из плоскости стрельбы. Расстояние точки падения ракеты от плоскости стрельбы называется *боковым отклонением* ракеты.

При стрельбе однотипными ракетами различные ракеты имеют различные боковые отклонения. Это явление и носит название *бокового рассеивания* или *бокового разброса* ракет.

Рассмотрим сначала активный участок траектории. При наличии возмущающих факторов ось ракеты отклоняется от касательной к траектории центра тяжести ракеты, образуя с касательной некоторый угол δ , носящий название *угла атаки*. Так

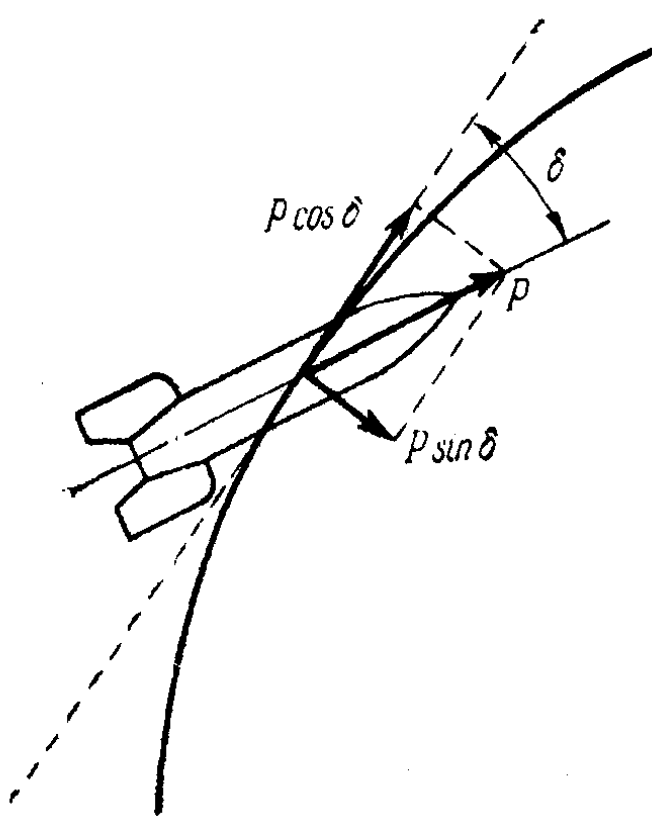


Рис. 18.

как реактивная тяга P направлена по оси ракеты, то возникновение угла атаки вызывает появление составляющей реактивной тяги $P \sin \delta$, направленной по нормали к траектории (рис. 18). Эта слагающая и

случае говорят о *газодинамическом*, во втором — о *геометрическом эксцентриситете*.

Начальные возмущения, которые получает ракета при сходе с пускового станка, характеризуются начальным углом поворота χ_0 и начальной экваториальной угловой скоростью $\dot{\chi}_0$ ¹⁾. Начальные возмущения возникают как из-за зазоров в пусковом устройстве, так и из-за толчков при сходе ракеты с пускового станка.

При стрельбе однотипными ракетами величины M , P_1 , χ_0 и $\dot{\chi}_0$, характеризующие в основном факторы, «возмущающие» полет ракеты на активном участке траектории, меняются от ракеты к ракете и являются случайными величинами.

Далее будет выяснено, что основная роль в боковом разбросе ракеты принадлежит активному участку траектории. Поэтому на факторах, вызывающих боковое рассеивание ракет и действующих на пассивном участке траектории, мы подробно останавливаться не будем²⁾.

Дальнейшему изложению материала предположим некоторые сведения о случайных величинах.

§ 17. Непрерывные случайные величины

В теории вероятностей изучаются случайные скалярные величины двух основных типов: дискретные и непрерывные.

Дискретная случайная величина N может принимать отдельные изолированные значения $N_1, N_2, N_3, \dots$. Обозначим через p_1 вероятность, с которой случайная величина N может принять значение N_1 . Аналогично введем обозначения p_2, p_3 и т. д. Каждое из чисел p_k положительно и меньше 1. Сумма $p_1 + p_2 + p_3 + \dots$, очевидно, равна 1. Считается, что случайная величина N определена, если известны вероятности $p_1, p_2, p_3, \dots$, с которыми она принимает отдельные свои значения.

В качестве примера дискретной случайной величины можно взять сумму очков, получающуюся при одновременном бросании двух игральных костей. Так как количества очков на гранях одной кости выражаются числами 1, 2, 3, 4, 5 и 6, то интересующая нас сумма очков может принимать значения

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. \quad (1)$$

Считая выпадание различных граней равновероятным, мы легко определяем вероятности, соответствующие значениям (1):

$$1/36, 1/18, 1/12, 1/9, 5/36, 1/6, 5/36, 1/9, 1/12, 1/18, 1/36. \quad (2)$$

¹⁾ χ_0 — угол, образованный осью ракеты с осью пускового станка в момент схода ракеты; $\dot{\chi}_0$ — производная по времени от угла поворота в момент схода.

²⁾ К числу таких факторов в первую очередь следует отнести несимметрию аэродинамических сил.

Сумма всех чисел (2) равна 1.

Непрерывная случайная величина x может принимать любые значения на числовой оси. Примером такой величины может служить боковое отклонение снаряда. Для непрерывной случайной величины не имеет смысла говорить о вероятности, с которой она принимает то или другое отдельное значение. Вместо этого рассматривают вероятность попадания значения величины в тот или другой интервал числовой оси. Непрерывная случайная величина x считается заданной, если для любого интервала (a, b) числовой оси известна вероятность попадания данной случайной величины в этот интервал: $B_{(a, b)}$.

Рассмотрим на числовой оси элементарный интервал $(x, x + dx)$. Примем, что вероятность попадания в этот интервал пропорциональна длине интервала

$$B_{(x, x+dx)} = p dx. \quad (3)$$

Так как величина этой вероятности зависит от месторасположения интервала на оси x , то множитель пропорциональности p есть функция от x . Отношение

$$p = \frac{B_{(x, x+dx)}}{dx}$$

называется *плотностью вероятности* в точке x , а кривая $y = p(x)$ (рис. 20) называется *законом распределения плотности вероятности*. На рис. 20 величина $B_{(x, x+dx)}$ изображается площадью заштрихованной полоски, ограниченной двумя ординатами, кривой $y = p(x)$ и основанием dx .

Разбивая произвольный интервал (a, b) на элементарные интервалы и учитывая, что вероятность попадания в сумму интервалов равна сумме вероятностей попадания в слагаемые интервалы, легко заключаем, что $B_{(a, b)}$ равно площади AA_1CB_1B , ограниченной кривой $y = p(x)$, осью x и двумя ординатами в точках $x = a$ и $x = b$. Таким образом, закон распределения $y = p(x)$ вполне определяет случайную величину x .

Какими свойствами должна обладать кривая $y = p(x)$? Прежде всего заметим, что площадь, ограниченная этой кривой и осью x , должна равняться 1, поскольку эта площадь изображает $B_{(-\infty, +\infty)}$. Отсюда следует, что левая и правая ветви кривой должны асимптотически приближаться к оси x (в противном случае площадь, ограниченная кривой и осью, была бы бесконечной).

Точку числовой оси $x = \mu$, в которой ордината делит всю площадь на две равные части, назовем *средним значением* или *медианой* случайной величины. Другими словами, медиана μ равна тому

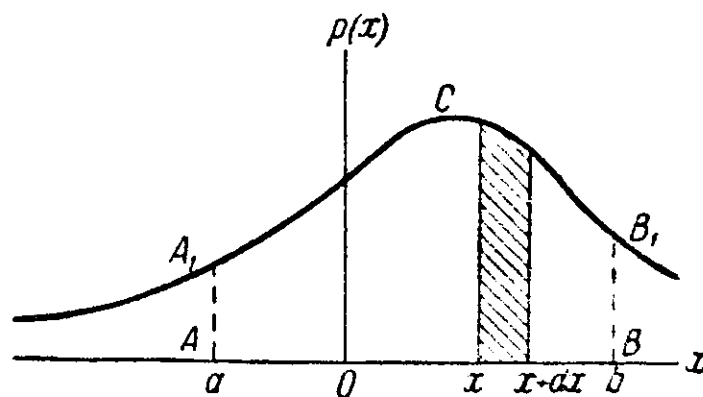


Рис. 20.

значению величины x , для которого одинаково вероятно, что $x < \mu$ и что $x > \mu$. В дальнейшем будем предполагать $\mu = 0$. Это не нарушает общности рассуждений, поскольку всегда можно вместо случайной величины x рассматривать ее отклонение от среднего значения $x_1 = x - \mu$. Таким образом, ось y будет делить пополам всю площадь, ограниченную кривой $y = p(x)$ и осью x .

Далее, положительные и отрицательные отклонения с одной и той же абсолютной величиной будем считать равновероятными. График $y = p(x)$ будет симметричен относительно оси ординат.

Однако перечисленные свойства кривой $y = p(x)$ далеко не определяют эту кривую. Существует бесчисленное множество самых разнообразных кривых $y = p(x)$, обладающих перечисленными свойствами.

В теории стрельбы принимают, что случайные отклонения снарядов подчиняются закону распределения Гаусса (рис. 21):

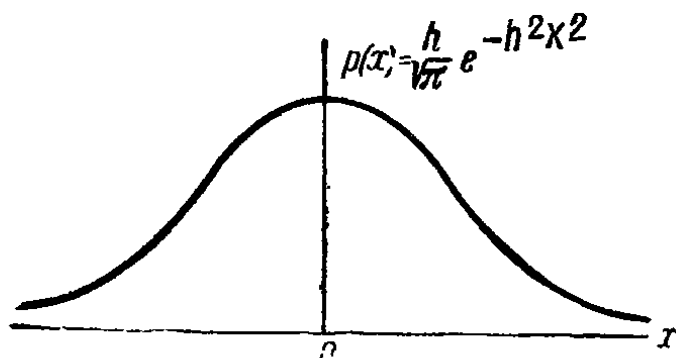


Рис. 21.

$$p(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}. \quad (4)$$

где h — некоторая постоянная. Давая h различные значения, получим различные гауссовы законы распределения.

В теории ошибок принимают, что случайные ошибки при наблюдении физических величин также подчиняются закону распределения Гаусса.

Таким образом, закон распределения Гаусса имеет универсальный характер. Универсальность закона распределения Гаусса объясняется следующими двумя обстоятельствами.

1. Теоретически доказано, что сумма большого числа независимых случайных величин с произвольными законами распределения всегда имеет закон распределения, близкий к закону Гаусса¹⁾.

Это соображение применимо к случайным отклонениям снарядов или к случайным ошибкам наблюдений, поскольку те и другие возникают в результате воздействия очень большого числа случайных независимых факторов.

2. Имеются экспериментальные подтверждения закона Гаусса. Разобьем всю числовую ось на небольшие интервалы (a, b) . Будем производить большое число отстрелов и измерять, например, боковые отклонения снарядов. Обозначим через n число всех выстрелов, а через $n(a, b)$ — число тех выстрелов, при которых боковое отклонение снарядов попало в интервал (a, b) . Построим график, от-

¹⁾ Эта формулировка нуждается в некотором уточнении, которое читатель найдет в курсах теории вероятностей.

кладывая над каждой точкой интервала в качестве ординаты отношение

$$\frac{n(a, b)}{n}.$$

Получим ломаную линию (рис. 22).

В силу закона больших чисел эта ломаная линия при $n \rightarrow \infty$ и при неограниченном уменьшении длин интервалов подразделения должна стремиться к кривой распределения $y = p(x)$. Опыт показывает, что эта ломаная при больших n и малых длинах интервалов (a, b) приближается по своей форме к кривой Гаусса (рис. 22).

Рассмотрим теперь подробнее кривые Гаусса

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}. \quad (5)$$

Возьмем сначала одну из этих кривых ($h = 1$):

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (6)$$

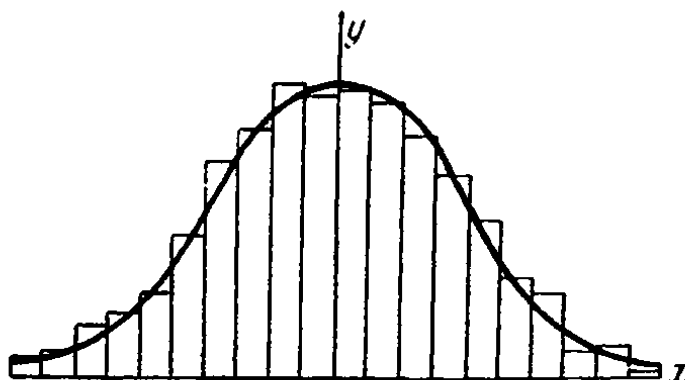


Рис. 22.

Множитель $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ в уравнении (6) поставлен для того, чтобы площадь, ограниченная кривой и осью x , равнялась 1, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Сожмем кривую (6) вдоль оси x в h раз. Для этого в уравнение (6) вместо x подставим hx . Для того чтобы не изменилась площадь, мы все ординаты увеличим в h раз. Тогда из кривой (6) получим кривую (5). Таким образом, все кривые Гаусса (5) получаются из одной путем изменения масштабов вдоль осей x и y .

Чем больше h , тем более пикообразную форму имеет кривая и тем менее вероятны большие отклонения. Поэтому величина h называется *мерой точности* закона Гаусса.

Часто, однако, закон Гаусса характеризуют не мерой точности h , а так называемым *вероятным (срединным) отклонением* E , которое определяется из равенства

$$B_{(-E, +E)} = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Равенство (7) показывает, что вероятность попадания значения величины x в интервал $(-E, +E)$ равна $\frac{1}{2}$ или, иначе, неравенства $|x| < E$, $|x| > E$ являются равновероятными.

Для вычисления вероятностей при гауссовом законе распределения (5) вводят в рассмотрение так называемую функцию Лапласа¹⁾

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

где $\Phi(x)$ — удвоенная площадь, ограниченная гауссовой кривой (6), осью абсцисс и двумя ординатами в точках 0 и x . Пользуясь функцией $\Phi(x)$, находим²⁾:

$$B_{(a, b)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2 x^2} d(hx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{ha}^{hb} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} [\Phi(hb) - \Phi(ha)]. \quad (8)$$

В частности, поскольку $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, то

$$B_{(-E, +E)} = \Phi(hE).$$

Сопоставляя это равенство с равенством (7), получаем $\Phi(hE) = \frac{1}{2}$.

Из таблиц находим, что $\Phi(0,477) = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$E = \frac{0,477}{h}. \quad (9)$$

Вероятное отклонение обратно пропорционально мере точности h . Из таблицы значений $\Phi(x)$ следует, что

$$B_{(E, 2E)} = \frac{1}{2} [\Phi(2hE) - \Phi(hE)] = 0,161;$$

$$B_{(2E, 3E)} = 0,067; \quad B_{(3E, 4E)} = 0,018.$$

Полученные результаты представлены на рис. 23. Числа выражают площади, ограниченные соответствующими частями гауссовой кривой, в процентах от всей площади. Таким образом, площадь, ограниченная гауссовой кривой и ординатами в точках $x = -4E$ и $x = +4E$, составляет 99,3% всей площади. Иначе $B_{(-4E, +4E)} = 0,993$. Это означает, что при большом числе отстрелов 99,3% всех снарядов попадет в интервал $(-4E, +4E)$. Интервал $(-4E, +4E)$ называют *интервалом разброса*, а его длину $8E$ — величиной *максимального разброса*.

В теории вероятностей устанавливается, что сумма $x = x_1 + x_2$ двух независимых случайных величин x_1 и x_2 , подчиняющихся закону

¹⁾ Иногда эту функцию называют *функцией Крампа*.

²⁾ Таблицы функции Лапласа $\Phi(x)$ широко распространены. В нашем курсе они приведены на стр. 349.

Гаусса, есть снова случайная величина с гауссовым законом распределения и при этом вероятные отклонения величин E , E_1 и E_2 связаны между собой формулой

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2. \quad (10)$$

Очевидно, что это свойство суммы независимых случайных величин распространяется на любое число слагаемых.

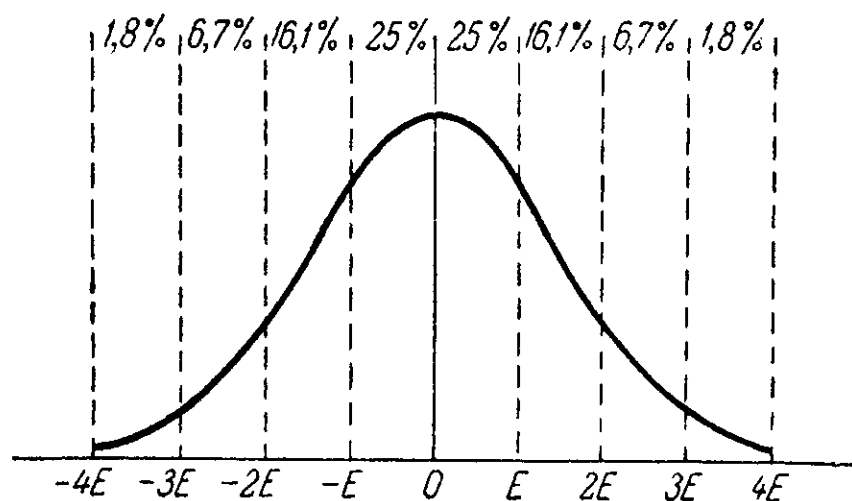


Рис. 23.

Вероятное боковое отклонение снаряда принято обозначать через B_6 , а вероятное отклонение по дальности — через B_d . Эллипс с полуосями B_6 и B_d называют *эллипсом рассеивания*. Вероятность попадания в этот эллипс рассеивания равна 0,203. Если рассмотреть эллипс с полуосями, равными $4B_6$ и $4B_d$, то вероятность попадания в такой эллипс равна 0,974.

Более подробные сведения о случайных величинах читатель найдет в курсах теории вероятностей (например, в книге, Е. С. Вентцель, «Теория вероятностей», 1958).

§ 18. Роль активного и пассивного участков траектории в боковом рассеивании ракет

При наличии возмущающих факторов траектория ОАС центра тяжести ракеты выходит из плоскости стрельбы и при ортогональном проектировании на горизонтальную плоскость h , проходящую через точку O , дает проекцию OA_1C (рис. 24). При этом O — начало траектории, т. е. положение центра тяжести в момент схода ракеты с пускового станка, A — конец активного участка траектории, C — точка падения, A_1 — ортогональная проекция точки A на плоскость h . Расстояние точки падения от плоскости стрельбы $Y_6 = BC$ и представляет собой боковое отклонение ракеты.

Проведем в точке A_1 касательную к кривой OA_1C до пересечения с BC в точке D . Если бы возмущающие факторы действовали только

на активном участке траектории, то пассивный участок AC лежал бы в вертикальной плоскости, проходящей через A_1D . В этом случае A_1C совпадало бы с A_1D . Следовательно, $Y_{ба} = BD$ представляет собой боковое отклонение центра тяжести в конце полета, вызванное действием возмущающих факторов на активном участке, а $Y_{бп} = DC$ — боковое отклонение, вызванное действием возмущающих факторов на пассивном участке траектории. Полное же боковое отклонение

$$Y_б = Y_{ба} + Y_{бп}. \quad (11)$$

Поскольку действие возмущающих факторов носит случайный характер (оно существенно меняется от ракеты к ракете в группе однотипных ракет), то $Y_б$, $Y_{ба}$ и $Y_{бп}$ — случайные величины. Но возмущающие факторы на активном и пассивном участках имеют различную природу. Поэтому можно считать $Y_{ба}$ и $Y_{бп}$ независимыми случайными величинами. Таким образом, согласно формуле (11), боковое отклонение $Y_б$ представляет собой сумму двух независимых случайных величин: $Y_{ба}$ и $Y_{бп}$.

Мы будем предполагать, что каждая из случайных величин $Y_{ба}$ и $Y_{бп}$ подчиняется гауссову закону распределения. Тогда и их сумма $Y_б$ подчиняется гауссову закону распределения. Введем в рассмотрение вероятные боковые отклонения $B_б$, $B_{ба}$ и $B_{бп}$. Согласно формуле (10)

$$B_б^2 = B_{ба}^2 + B_{бп}^2. \quad (12)$$

Допустим, что $B_{бп} < B_{ба}$, и введем обозначение $\lambda = \frac{B_{бп}}{B_{ба}}$. Тогда

$$B_б = B_{ба} \sqrt{1 + \lambda^2}.$$

Нижеследующая таблица дает значения $\sqrt{1 + \lambda^2}$ при различных значениях λ :

λ	1/4	1/3	1/2	3/4	1
$\sqrt{1 + \lambda^2}$	1,03	1,05	1,12	1,25	1,41

Из этой таблицы видно, например, что если $B_{бп} = \frac{1}{3} B_{ба}$, то

$$B_б \approx B_{ба} \quad (13)$$

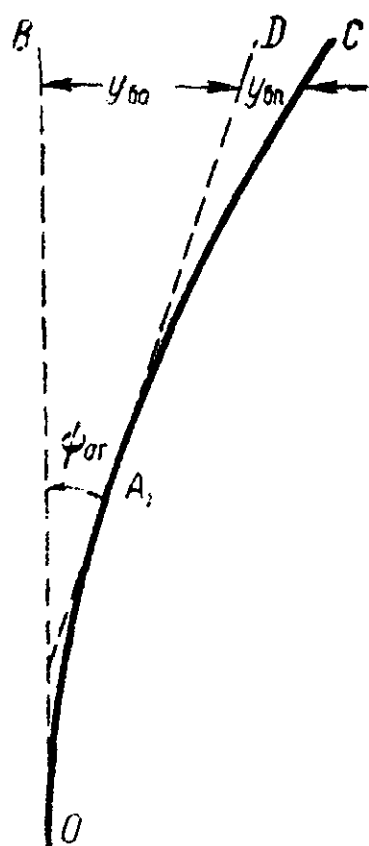


Рис. 24.

с точностью до 5%. Если даже $B_{\text{п}}$ составляет половину $B_{\text{а}}$, то относительная ошибка в приближенном равенстве (13) не будет превышать 12%. Таким образом, *если среди вероятных отклонений двух независимых случайных величин одно существенно больше другого, то это большее слагаемое практически является доминирующим*; второе слагаемое можно не принимать во внимание.

Каково же в действительности соотношение между $B_{\text{а}}$ и $B_{\text{п}}$, т. е. между боковым разбросом, образующимся на активном и на пассивном участках траектории?

Для того чтобы дать ответ на этот вопрос, обратим внимание читателя на то, что на пассивном участке траектории реактивный снаряд ничем не отличается от нереактивного. Вся специфичность ракеты проявляется на активном участке траектории при сгорании ракетного заряда. Уже тот факт, что боковое рассеивание у ракет во много раз больше, нежели у нереактивных снарядов, показывает, что факторы, вызывающие боковое рассеивание ракет, связаны в основном с активным участком траектории. Для определения количественного соотношения между $B_{\text{б}}$ и $B_{\text{а}}$ проводились специальные отстрелы по щиту, поставленному в конце активного участка траектории. Отстрелы по щиту показали, что $B_{\text{а}}$ практически мало отличается от $B_{\text{б}}$, определенного из отстрелов по местности.

Исходя из этого, мы и будем считать, что *активный участок траектории играет доминирующую роль в боковом разбросе ракет*, и будем полагать

$$B_{\text{б}} \approx B_{\text{а}}.$$

Поэтому в дальнейшем, при исследовании бокового рассеивания ракет, мы будем рассматривать исключительно активный участок траектории.

§ 19. Угловое отклонение в конце активного участка траектории и его горизонтальная и вертикальная проекции

При отсутствии возмущающих факторов вся траектория и вектор скорости $v_{\text{а}}$ в конце активного участка траектории лежат в плоскости бросания ω . Вектор $v_{\text{а}}$ образует с горизонтом угол $\theta_{\text{а}}$. При расчете траектории центра тяжести ракеты определяют величины $v_{\text{а}}$ и $\theta_{\text{а}}$ ¹⁾.

При наличии возмущающих факторов траектория ракеты уже не лежит в плоскости бросания ω . Истинный вектор скорости в конце активного участка $v'_{\text{а}}$, вообще говоря, по величине и направлению

¹⁾ При стрельбе однотипными ракетами реактивное ускорение a несколько меняется от ракеты к ракете. Поэтому несколько меняются и величины $v_{\text{а}}$ и $\theta_{\text{а}}$. В тексте мы под $v_{\text{а}}$ и $\theta_{\text{а}}$ понимаем их средние значения, определяемые при расчете траектории ракеты.

будет отличаться от φ_a . Угол ψ_a между векторами φ_a и φ'_a будем называть *угловым отклонением в конце активного участка* траектории. Проекции угла ψ_a на горизонтальную и вертикальную плоскости обозначим ψ_{ag} и ψ_{av} .

Заметим, что ψ_{ag} — угол, образованный касательной к горизонтальной проекции траектории OA_1C в точке A_1 с плоскостью бросания (рис. 24). Поэтому ввиду малости активного участка траектории по сравнению с пассивным можно положить

$$Y_{6a} \approx X \operatorname{tg} \psi_{ag}, \quad (14)$$

где X — дистанция стрельбы.

Поскольку углы ψ_a и ψ_{ag} малы, то $\operatorname{tg} \psi_{ag} \approx \psi_{ag}$ и

$$Y_{6a} \approx X \psi_{ag}. \quad (15)$$

Обозначая через $\bar{\psi}_{ag}$ вероятное значение угла ψ_{ag} , из выражений (13) и (15) получим:

$$B6 \approx X \bar{\psi}_{ag}. \quad (16)$$

Таким образом, *боковое рассеивание пропорционально разбросу углов ψ_{ag}* .

В дальнейшем мы установим связь рассеивания по дальности с разбросом углов ψ_{av} .

Выведем зависимость между углом ψ_a и его проекциями ψ_{ag} и ψ_{av} .

Установим предварительно некоторые формулы для проекций малых углов. Рассмотрим для этого двугранный угол β , образованный двумя

плоскостями f и g . В плоскости g возьмем два малых угла α и γ (рис. 25), расположенных так, что одна из сторон угла α совпадает с ребром двугранного угла, а одна из сторон угла γ перпендикулярна к этому ребру. Будем коротко говорить: плоский угол α примыкает к ребру двугранного угла β , а плоский угол γ перпендикулярен к ребру двугранного угла β .

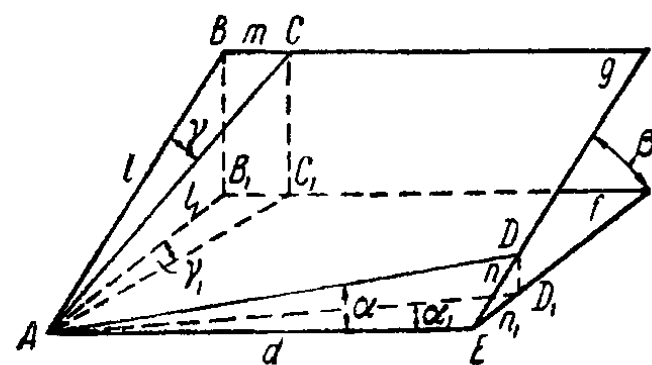


Рис. 25.

Определим проекции α_1 и γ_1 углов α и γ на плоскость f . Для этого рассмотрим треугольники ABC и DAE (рис. 25). Пусть

$$AB = l, \quad BC = m, \quad AE = d, \quad DE = n.$$

Условимся индексом 1 обозначать проекцию на плоскость f . Тогда

$$n = d \operatorname{tg} \alpha \approx d\alpha; \quad n_1 = d \operatorname{tg} \alpha_1 \approx d\alpha_1,$$

откуда

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{n_1}{n} = \cos \beta.$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = \alpha \cos \beta. \quad (17)$$

Для угла γ получим другую формулу. Для этого заметим, что

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{m}{l}; \quad \gamma_1 \approx \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{m}{l_1}.$$

Так как $l_1 = l \cos \beta$, то

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{\cos \beta}. \quad (18)$$

Таким образом, малый плоский угол, примыкающий к ребру двугранного угла, при проектировании умножается на косинус двугранного угла, а плоский угол, перпендикулярный к ребру, при проектировании делится на этот косинус.

Возвратимся теперь к углу ψ_a . Сделаем следующее построение (рис. 26). Построим векторы $\mathbf{v}_a$ и $\mathbf{v}'_a$ из точки вылета O . Проведем через $\mathbf{v}_a$ плоскость p , перпендикулярную к плоскости бросания w . Плоскость p образует с горизонтом угол θ_a . Обозначим через q плоскость, проходящую через $\mathbf{v}_a$ и $\mathbf{v}'_a$, т. е. плоскость угла ψ_a . Плоскость q образует с плоскостью p некоторый двугранный угол β .

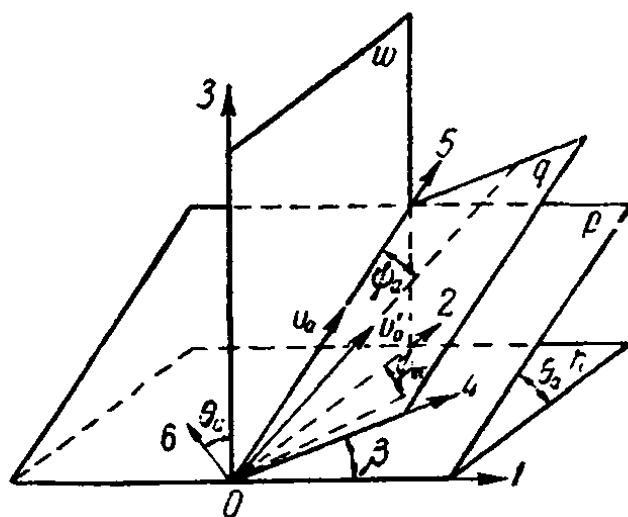


Рис. 26.

Проектирование угла ψ_a на горизонтальную плоскость h осуществим последовательно. Сначала спроектируем угол на плоскость p . Применяя формулу (17), получим величину проекции $\psi_a \cos \beta$. Эту проекцию спроектируем на плоскость h . Согласно (18) будем иметь:

$$\psi_{ar} = \frac{\psi_a \cos \beta}{\cos \theta_a}. \quad (19)$$

Применяя формулу (17), сразу получаем:

$$\psi_{av} = \psi_a \sin \beta. \quad (20)$$

Приведем более строгий (хотя менее наглядный) вывод формул (19) и (20).

Отметим на рис. 26 цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 направления осей; при этом ось 6 перпендикулярна к плоскости p . Разложим вектор $\mathbf{v}'_a$, лежащий в плоскости q , на две взаимно перпендикулярные составляющие по осям 4 и 5. При этом длину вектора $\mathbf{v}'_a$ условно принимаем за единицу. Тогда

$$\mathbf{v}'_a = \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5; \quad v_4 = \sin \psi_a; \quad v_5 = \cos \psi_a. \quad (21)$$

Векторы v_4 и v_5 в свою очередь разложим на составляющие соответственно по осям 1, 6 и 2, 3:

$$v_4 = v_1 + v_6, \quad v_5 = v_2 + v_3, \quad (22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_4 \cos \beta = \sin \psi_a \cos \beta, & v_6 &= v_4 \sin \beta = \sin \psi_a \sin \beta, \\ v_2 &= v_5 \cos \theta_a = \cos \psi_a \cos \theta_a, & v_3 &= v_5 \sin \theta_a = \cos \psi_a \sin \theta_a. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Замечая, что

$$v'_a = v_1 + v_6 + v_2 + v_3 \quad (24)$$

и проектируя вектор v'_a на плоскость h , получим горизонтальную составляющую v_{ar} вектора v'_a с двумя компонентами:

$$v_{ar} = v_1^* + v_2^*,$$

где

$$\begin{aligned} v_1^* &= v_1 = \sin \psi_a \cos \beta, \\ v_2^* &= v_2 - v_6 \sin \theta_a = \cos \psi_a \cos \theta_a - \sin \psi_a \sin \beta \sin \theta_a. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \psi_{ar} = \frac{v_1^*}{v_2^*} = \frac{\sin \psi_a \cos \beta}{\cos \psi_a \cos \theta_a - \sin \psi_a \sin \beta \sin \theta_a}$$

или

$$\operatorname{tg} \psi_{ar} = \frac{\operatorname{tg} \psi_a \cos \beta}{\cos \theta_a (1 - \operatorname{tg} \psi_a \sin \beta \operatorname{tg} \theta_a)}. \quad (25)$$

С другой стороны,

$$v'_a = v_1 + v_5 + v_6. \quad (26)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \psi_{av} = \frac{v_6}{v_5} \quad (27)$$

и, следовательно, в силу (21) и (23):

$$\operatorname{tg} \psi_{av} = \operatorname{tg} \psi_a \sin \beta. \quad (28)$$

Принимая, что углы ψ_a , ψ_{ar} и ψ_{av} малы, и полагая

$$\operatorname{tg} \psi_a \approx \psi_a, \quad 1 - \operatorname{tg} \psi_a \sin \beta \operatorname{tg} \theta_a \approx 1, \quad \operatorname{tg} \psi_{ar} \approx \psi_{ar}, \quad \operatorname{tg} \psi_{av} \approx \psi_{av},$$

получаем из (25) и (28) формулы (19) и (20)¹⁾.

¹⁾ Полагая $1 - \operatorname{tg} \psi_a \sin \beta \operatorname{tg} \theta_a \approx 1$, мы тем самым предполагаем, что $\operatorname{tg} \psi_a$ не велик (например, $\theta_a < 60^\circ$). Разлагая $(1 - \psi_a \sin \beta \operatorname{tg} \theta_a)^{-1}$ в ряд и сохраняя в этом ряде первые два члена, мы вместо (19) получим формулу с поправочным членом

$$\psi_{ar} = \frac{\psi_a \cos \beta}{\cos \theta_a} + \frac{1}{2} \psi_a^2 \frac{\sin 2\beta \sin \theta_a}{\cos^2 \theta_a}.$$

Угол ψ_a характеризуется своей величиной и положением плоскости q , в которой он лежит. Поэтому мы угол ψ_a будем изображать в виде вектора ψ_a , перпендикулярного к плоскости q ¹⁾; длина этого вектора в известном масштабе будет определять величину ψ_a , а направление будет соответствовать ориентации угла ψ_a . В группе однотипных ракет для разных ракет будут различными как величина, так и направление вектора ψ_a . Однако вектор ψ_a всегда перпендикулярен к направлению v_a и, следовательно, всегда лежит в плоскости l, b (рис. 26).

Компоненты вектора ψ_a вдоль осей b и l (рис. 27)

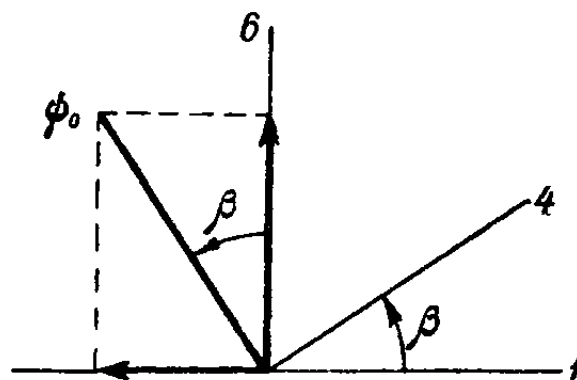


Рис. 27.

$$\psi_a \cos \beta \text{ и } -\psi_a \sin \beta$$

являются непрерывными скалярными случайными величинами, а сам вектор ψ_a представляет собой «случайный плоский вектор». Поэтому мы считаем необходимым перед дальнейшим изложением нашего материала привести некоторые сведения о случайных векторах.

§ 20. Случайные векторы

Рассмотрим систему двух случайных скалярных величин x и y , которые будем трактовать как проекции на оси прямоугольной декартовой системы координат некоторого *случайного вектора*. Этот вектор построим из начала координат. Тогда x и y будут координатами конца этого вектора. Естественным примером случайного вектора может служить радиус-вектор точки попадания при стрельбе по щиту.

Возьмем в плоскости случайного вектора произвольную точку с координатами x и y и в этой точке — прямоугольный элемент площади $dx dy$. Вероятность того, что конец случайного вектора попадет в этот элементарный прямоугольник, представим в виде

$$B_{\left(\begin{smallmatrix} x, x+dx \\ y, y+dy \end{smallmatrix}\right)} = p dx dy; \quad (29)$$

величина $p = p(x, y)$ — плотность вероятности — является функцией от x и y , так как зависит от расположения прямоугольника $dx dy$. Если мы будем откладывать p в виде третьей координаты z , то получим поверхность

$$z = p(x, y), \quad (30)$$

определяющую закон распределения плотностей вероятности для случайного вектора.

Согласно (29) $B_{\left(\begin{smallmatrix} x, x+dx \\ y, y+dy \end{smallmatrix}\right)}$ будет определяться объемом цилиндра с основанием $dx dy$, ограниченного поверхностью (30). Так как

¹⁾ Такое изображение возможно в силу малости угла ψ_a .

произвольную область D в плоскости x, y можно разбить на элементарные прямоугольники, то очевидно, что вероятность B_D попадания конца случайного вектора в область D будет определяться объемом соответствующего цилиндра с основанием D . В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только таких случайных векторов, у которых компоненты x и y — независимые друг от друга случайные величины.

Для того чтобы точка попала в прямоугольник $dx dy$, нужно, чтобы абсцисса точки находилась в интервале $(x, x + dx)$, а ордината — в интервале $(y, y + dy)$. Так как вероятность одновременного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей наступления каждого из этих событий в отдельности, то

$$B_{\left(\begin{smallmatrix} x, x+dx \\ y, y+dy \end{smallmatrix}\right)} = B_{(x, x+dx)} B_{(y, y+dy)}. \quad (31)$$

Обозначим через $p_1(x)$ и $p_2(y)$ плотности вероятности для величин x и y . Тогда $B_{(x, x+dx)} = p_1(x) dx$, $B_{(y, y+dy)} = p_2(y) dy$, и в силу (29) и (31)

$$p(x, y) = p_1(x) p_2(y). \quad (32)$$

Таким образом, если компоненты случайного вектора независимы друг от друга, то плотность вероятности для вектора равна произведению плотностей для компонентов.

Допустим, что компоненты x и y подчиняются гауссовым законам распределения

$$p_1(x) = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x^2}; \quad p_2(y) = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 y^2}. \quad (33)$$

Тогда

$$p(x, y) = \frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2 x^2 + h_2^2 y^2)}. \quad (34)$$

Рассмотрим прямоугольник, определяемый неравенствами

$$a < x < b \quad \text{и} \quad c < y < d.$$

Пользуясь функцией Лапласа $\Phi(x)$ (см. § 17), легко найдем:

$$B_{\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c, d \end{smallmatrix}\right)} = \frac{1}{4} [\Phi(h_1 b) - \Phi(h_1 a)] [\Phi(h_2 d) - \Phi(h_2 c)].$$

Пусть E_1 , E_2 — вероятные отклонения величин x , y . Тогда по формуле (9)

$$E_1 = \frac{0,477}{h_1}; \quad E_2 = \frac{0,477}{h_2}.$$

Эллипс с полуосями E_1 и E_2 является эллипсом рассеивания.

Рассмотрим частный случай, когда эллипс рассеивания представляет собой окружность: $h_1 = h_2 = h$; $E_1 = E_2 = E$. В этом случае гауссова поверхность

$$z = \frac{h^2}{\pi} e^{-h^2(x^2+y^2)} \quad (35)$$

является поверхностью вращения (рис. 28) и гауссов закон распределения обладает круговой симметрией. Поэтому если мы проведем через начало координат в плоскости x, y произвольную ось t и будем рассматривать проекцию случайного вектора на эту ось, то вероятное отклонение для проекции на ось t будет таким

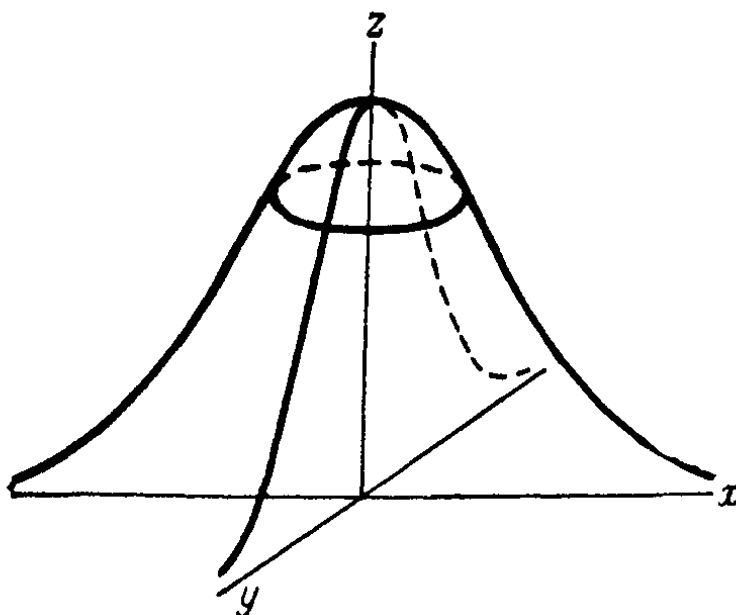


Рис. 28.

же, как и для осей x и y , т. е. будет равно E . Величина E называется *вероятным отклонением случайного вектора*.

§ 21. Угловой разброс и его связь с боковым рассеиванием

В конце § 19 мы показали, что угловое отклонение в конце активного участка траектории ψ_a можно рассматривать как случайный вектор ψ_a с компонентами $\psi_a \cos \beta$ и $-\psi_a \sin \beta$ (см. рис. 27).

Теперь предположим, что эти компоненты независимы друг от друга и подчиняются гауссову закону распределения с одним и тем же вероятным отклонением $\bar{\psi}_a$. Другими словами, для случайного вектора ψ_a мы принимаем плоский гауссов закон распределения, обладающий круговой симметрией.

Разброс углов ψ_a вызывает разброс горизонтальных и вертикальных проекций этих углов ψ_{ag} и ψ_{av} . Соответствующие вероятные отклонения обозначим через $\bar{\psi}_{ag}$ и $\bar{\psi}_{av}$. Тогда из формул (19) и (20) следует:

$$\bar{\psi}_{ag} = \frac{\bar{\psi}_a}{\cos \theta_a}; \quad \bar{\psi}_{av} = \bar{\psi}_a. \quad (36)$$

С другой стороны, $Y_{6a} = X\psi_{ag}$. Следовательно,

$$B_6 = X\bar{\psi}_{ag} = X \frac{\bar{\psi}_a}{\cos \theta_a}. \quad (37)$$

Таким образом, вероятное боковое отклонение ракеты прямо пропорционально дистанции стрельбы и вероятному угловому отклонению в конце активного участка траектории и обратно пропорционально $\cos \theta_a$ ¹⁾.

¹⁾ Так как обычно θ_a мало отличается от θ_0 , то в формуле (37) часто вместо $\cos \theta_a$ ставят $\cos \theta_0$.

§ 22. Рассеивание по дальности

При расчете дальности полета ракеты траекторию рассекают горизонтальной плоскостью на три участка (рис. 29). Первый из них — активный участок, второй же и третий составляют вместе пассивный участок. В связи с этим дистанция полета представляется в виде суммы трех слагаемых:

$$X = x_1 + x_2 + x_3. \quad (38)$$

Однако при стрельбе однотипными ракетами различные ракеты имеют различную дальность. С этой точки зрения дальность X можно

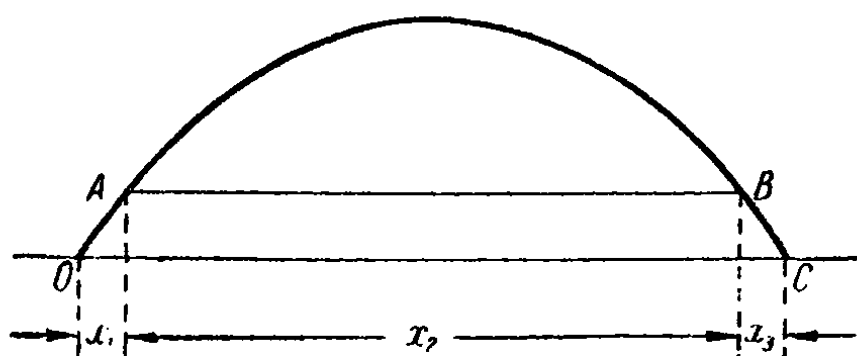


Рис. 29.

рассматривать как случайную величину, среднее значение которой как раз и определяется при расчете траектории. Отклонение дальности отдельной ракеты от этого среднего значения следует объяснить наличием случайных возмущающих факторов.

Примем несколько упрощенную трактовку, а именно — предположим, что возмущенная траектория, как и расчетная, лежит в плоскости бросания. Для снарядов с небольшим активным участком можно пренебречь отклонениями Δx_1 и Δx_3 по сравнению с отклонением Δx_2 . Поэтому

$$\Delta X \approx \Delta x_2. \quad (39)$$

Величину x_2 мы определяем как дальность полета нереактивного снаряда, имеющего начальную скорость v_a , начальный угол возвышения θ_a и баллистический коэффициент c :

$$x_2 = f(v_a, \theta_a, c). \quad (40)$$

Пользуясь баллистическими таблицами, мы в каждом отдельном случае по заданным значениям v_a , θ_a и c можем найти значение x_2 .

Обозначая через Δx_2 отклонение величины x_2 от ее среднего значения и заменяя Δx_2 в первом приближении дифференциалом dx_2 , получим:

$$\Delta X \approx \Delta x_2 \approx dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial v_a} \Delta v_a + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_a} \Delta \theta_a + \frac{\partial x_2}{\partial c} \Delta c. \quad (41)$$

Переходя в формуле (41) к вероятным отклонениям и обозначая последние чертой, получим согласно формуле (10):

$$\sigma_X = \sqrt{\left(\frac{\partial x_2}{\partial v_a}\right)^2 \overline{\Delta v_a^2} + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta_a}\right)^2 \overline{\Delta \theta_a^2} + \left(\frac{\partial x_2}{\partial c}\right)^2 \overline{\Delta c^2}}. \quad (42)$$

Исследуем сначала вероятное отклонение V_d^* , вызываемое одним только угловым разбросом в конце активного участка. Положив в формуле (42) $\overline{\Delta v_a} = 0$, $\overline{\Delta c} = 0$ и $\overline{\Delta \theta_a} = \overline{\psi_a}$, получим:

$$V_d^* = \frac{\partial x_2}{\partial \theta_a} \overline{\psi_a}^1. \quad (43)$$

Заметим, что формула (43) сохраняет свою силу в общем случае, когда траектория возмущенного движения ракеты лежит не в плоскости бросания, а в вертикальной плоскости, образующей с плоскостью бросания угол ψ_{ag} . Действительно, пользуясь геометрическим построением § 19, найдем угол $\theta'_a = \theta_a + \varepsilon$, образуемый вектором $\mathbf{v}'_a$ с горизонтом. Обозначая через v_{av} вертикальную составляющую вектора $\mathbf{v}'_a$ и полагая $v'_a = 1$, найдем:

$$\begin{aligned} \sin(\theta_a + \varepsilon) &= v_{av} = v_3 + v_6 \cos \theta_a = \\ &= \cos \psi_a \sin \theta_a + \sin \psi_a \sin \beta \cos \theta_a \approx \sin \theta_a + \psi_a \sin \beta \cos \theta_a. \end{aligned} \quad (44)$$

С другой стороны ²⁾,

$$\sin(\theta_a + \varepsilon) \approx \sin \theta_a + \varepsilon \cos \theta_a. \quad (45)$$

Сопоставляя (44) и (45), получим:

$$\varepsilon = \psi_a \sin \beta = \psi_{av}. \quad (46)$$

Здесь ε — отклонение угла θ'_a от среднего значения θ_a . Вероятное отклонение $\overline{\varepsilon}$ будет равно (см. § 21)

$$\overline{\varepsilon} = \overline{\psi_{av}} = \overline{\psi_a}. \quad (47)$$

Таким образом, и в общем случае имеем $\overline{\Delta \theta_a} = \overline{\psi_a}$. Поскольку траектория не лежит в плоскости ω , то после определения дальности с помощью таблиц нужно величину дальности еще помножить на $\cos \psi_{ag}$. Но угол ψ_{ag} мал и потому $\cos \psi_{ag} \approx 1$. Таким образом, формула (43) верна и в общем случае.

Если в формуле (40) мы зафиксируем v_a и c и будем варьировать только угол θ_a , то зависимость x_2 от θ_a будет иметь вид, представленный на рис. 30. Этот рисунок показывает,

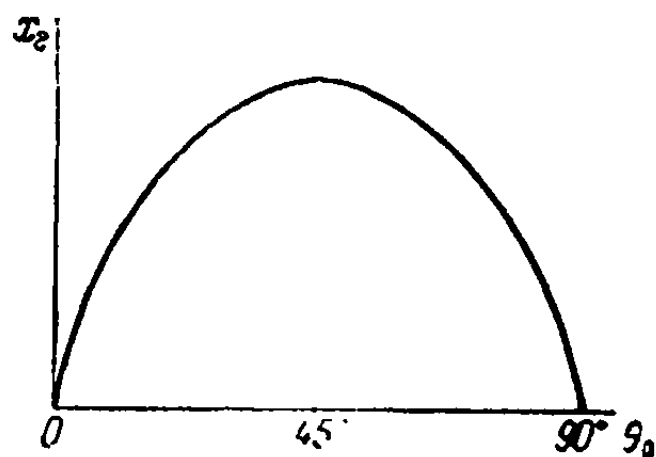


Рис. 30.

что при малых углах θ_a ($\theta_a < 20^\circ$) изменение угла θ_a влечет за собой очень резкое изменение дальности. Здесь угловой разброс должен играть существенную роль. При $\theta_a \approx 45^\circ$ величина x_2 имеет максимум. Поэтому при углах, близких к 45° , изменение угла θ_a не дает значительного

¹⁾ При этом $\Delta X \approx \frac{\partial x_2}{\partial \theta_a} \Delta \theta_a$. При $\theta_a \approx 45^\circ$ имеем $\frac{\partial x_2}{\partial \theta_a} = 0$. В этом случае в правой части формулы для ΔX вместо линейного относительно $\Delta \theta_a$ члена нужно написать следующий квадратичный член разложения.

²⁾ Ввиду малости углов ψ_a и ε мы полагаем $\cos \psi_a \approx \cos \varepsilon \approx 1$, $\sin \psi_a \approx \psi_a$, $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$.

изменения дальности. Здесь уже угловой разброс играет второстепенную роль. Эти соображения подтверждаются отстрелами, которые показывают, что при $\theta_a < 25^\circ$ имеет место соотношение $V_d \approx V_d^*$, а при углах, близких к 45° , т. е. при стрельбе на максимальную или на близкую к ней дистанцию, V_d^* существенно меньше V_d . Таким образом, при стрельбе с небольшими углами возвышения доминирующим фактором для рассеивания ракет по дальности является угловой разброс в конце активного участка траектории, и в этом случае в силу (43) и (37)

$$V_d \approx V_d^* = \frac{\partial x_2}{\partial \theta_a} \frac{V_b}{X} \cos \theta_a. \quad (48)$$

Остается открытым вопрос об основной причине рассеивания по дальности при стрельбе на максимальную дистанцию. Заметим, что

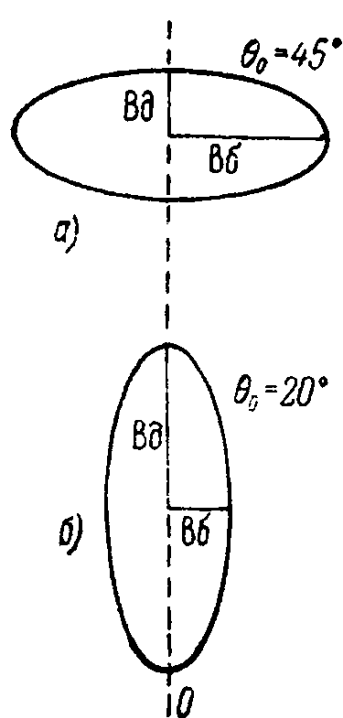


Рис. 31.

в силу формулы $v_a = \frac{j}{m_{cp}}$, где j — полный импульс, разброс скоростей v_a связан в основном с разбросом импульсов, так как разброс масс не велик. Однако стендовые испытания не обнаружили такого разброса импульсов, которым можно было бы объяснить величину рассеивания по дальности, наблюдающуюся у ракет.

Поэтому доминирующим фактором может быть либо разброс баллистических коэффициентов, либо случайный выброс пороха из летящей ракеты на конечной части активного участка.

Заметим еще, что в отличие от неактивных снарядов у ракет при углах возвышения, близких к 45° , эллипс рассеивания вытянут в боковом направлении ($V_b > V_d$; см. рис. 31, а), а при малых углах возвышения, наоборот, вытянут в направлении стрельбы ($V_b < V_d$; см. рис. 31, б).

Для ракет характерно большое рассеивание по дальности при малых углах возвышения¹⁾. Это рассеивание, как было указано выше, объясняется разбросом углов θ_a ²⁾.

¹⁾ Так, например, при углах возвышения $5-10^\circ$ некоторые ракеты имеют разброс по дальности, характеризуемый величиной

$$\frac{V_d}{X} \approx \frac{1}{6} \div \frac{1}{10}.$$

²⁾ Напомним, что при малых углах возвышения даже небольшое изменение угла θ_a вызывает значительное изменение дальности.

ГЛАВА IV

РАССЕИВАНИЕ ОПЕРЕННЫХ РАКЕТ

§ 23. Введение

Реактивная артиллерия, обладая целым рядом весьма ценных качеств (малый вес пусковых устройств и, следовательно, большая маневренность; большая мощность огневого залпа; отсутствие отдачи и т. д.), имеет в то же время существенный недостаток — низкую кучность ракет. Так, например, боковое рассеивание ракет в десятки раз больше бокового рассеивания артиллерийских снарядов тех же калибров, выстреливаемых из нарезных орудий ¹⁾. Поэтому для неуправляемых ракет главной проблемой является проблема кучности.

В настоящей главе рассматриваются факторы, вызывающие рассеивание оперенных ракет, и устанавливаются количественные зависимости между этими факторами и вызываемым ими рассеиванием. Эти зависимости дают возможность определить влияние различных параметров на кучность оперенных ракет и исследовать различные пути уменьшения рассеивания.

Кроме того, в этой главе приводятся простые аналитические и графические методы расчета бокового рассеивания оперенных ракет, позволяющие путем элементарных расчетов, без экспериментальных отстрелов, оценить рассеивание того или другого проектируемого варианта ракеты.

§ 24. Постановка задачи

У неуправляемых ракет боковое рассеивание при любых углах возвышения пускового станка и рассеивание по дальности при небольших углах возвышения станка создаются в основном на активном участке траектории и определяются угловым разбросом в конце этого участка ²⁾. Этот угловой разброс измеряется величиной $\bar{\phi}_a$ вероятного (срединного) углового отклонения ракеты в конце активного участка траектории. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем исключительно движение оперенных ракет только на активном участке траектории.

¹⁾ См. § 15.

²⁾ См. § 18 и 22.

Возмущающие факторы, вызывающие угловой разброс в конце активного участка траектории¹⁾, — боковой реактивный момент M , боковая слагающая P_1 реактивной силы, начальные возмущения χ_0 , $\dot{\chi}_0$ при сходе с пускового станка — характеризуются своими вероятными (срединными) значениями $\bar{M}$, $\bar{P}_1$, $\bar{\chi}_0$ и $\bar{\dot{\chi}}_0$. Для того чтобы выразить величину $\bar{\psi}_a$ через величины $\bar{M}$, $\bar{P}_1$, $\bar{\chi}_0$, $\bar{\dot{\chi}}_0$ и основные параметры ракеты и пускового станка, рассмотрим движение ракеты на активном участке траектории.

Ракета представляет собой систему переменного состава. Однако, как было установлено в гл. I, ее уравнения движения могут быть записаны в виде обычных уравнений движения твердого тела, если к внешним силам, действующим на ракету (сила веса и аэродинамические силы), прибавить дополнительные силы: реактивные и кориолисовы. Поэтому на активном участке траектории исследуется движение центра тяжести ракеты под действием трех основных сил: реактивной тяги P , лобового сопротивления воздуха Q и силы веса q ²⁾.

Остановимся специально на силе веса. Почти для всех неуправляемых ракет реактивная тяга P во много раз больше силы веса q . В этом случае сила веса практически не влияет на величину скорости ракеты на активном участке траектории, но несколько изменяет направление скорости. Угол наклона θ_a между касательной к траектории и горизонтом в конце активного участка меньше угла возвышения пускового станка θ_0 на величину порядка нескольких градусов. Разность $\theta_0 - \theta_a$ носит систематический характер, т. е. у всех однотипных ракет имеет одну и ту же величину.

Что же касается дополнительного угла отклонения ψ_a , т. е. угла между истинной скоростью φ'_a (при наличии возмущающих факторов) и скоростью φ_a , определяемой при расчете траектории, то мы будем считать, что этот угол определяется величиной возмущающих факторов и почти не зависит от силы веса. Поэтому в дальнейшем при определении углового отклонения будем пренебрегать силой веса и рассматривать движение оперенных ракет под действием лишь аэродинамических и реактивных сил.

Таким образом, при определении углового отклонения ракеты на активном участке мы будем исходить из схемы невесомой ракеты. При отсутствии возмущающих факторов активным участком траектории является прямолинейный отрезок, составляющий продолжение оси пускового станка. Направление этого отрезка совпадает с направлением стрельбы. При наличии возмущающих факторов активный участок траектории искривляется. Угол между касательной к траектории и осью пускового станка, в дальнейшем обозначаемый

¹⁾ См. § 16.

²⁾ Мы не рассматриваем здесь кориолисовых сил, так как их влияние на угловое рассеивание ракет весьма мало. См. § 45.

через ψ , является угловым отклонением ракеты от направления стрельбы. Значение этого угла в конце активного участка и есть интересующая нас величина ψ_a .

Далее мы будем предполагать, что на протяжении всего времени горения заряда реактивная пара с моментом $M = Pd$ (d — эксцентриситет реактивной силы) и боковая реактивная сила P_1 расположены в плоскости, проходящей через ось ракеты и неизменно связанной с корпусом ракеты ¹⁾. Тогда положение этой плоскости в момент схода ракеты с пускового станка и будет представлять собой неподвижную в пространстве плоскость, в которой будет происходить перемещение оси ракеты, если только начальные возмущения отсутствуют или расположены в этой же плоскости. Пренебрежение силой веса и допущение о неизменности плоскости несимметрии реактивной силы позволяют нам в настоящей главе трактовать движение оперенных ракет на активном участке траектории как плоскопараллельное.

Сопоставление с более общей пространственной задачей ²⁾, в которой учитывается изменение плоскости несимметрии реактивной силы, показывает, что для оперенных ракет разбираемая в этой главе плоскопараллельная задача достаточно полно охватывает все те качественные и количественные закономерности, которые играют существенную роль при определении рассеивания ракет.

Заметим, что всюду в дальнейшем, за исключением гл. VI, рассматриваются оперенные ракеты с достаточно большой длиной активного участка, превышающей длину «критического участка» (см. § 31). Полевые оперенные ракеты, у которых активный участок всегда больше $40 \div 60$ м, заведомо удовлетворяют этому условию.

§ 25. Уравнения движения

Рассматривая движение оперенной ракеты на активном участке траектории как плоскопараллельное, введем три угла (рис. 32):

1) *угловое отклонение* ракеты ψ — угол между осью пускового станка и касательной к траектории;

2) *угол атаки* δ — угол между касательной к траектории и осью ракеты;

3) *угол поворота ракеты в плоскости движения* χ — угол между осью пускового станка и осью ракеты.

Очевидно,

$$\chi = \psi + \delta.$$

¹⁾ Это допущение естественно в случае геометрического эксцентриситета. В случае же газодинамического эксцентриситета оно равносильно допущению о том, что несимметрия в расположении пороховых шашек, возникающая в процессе горения заряда, связана с определенной плоскостью, неизменной по отношению к корпусу ракеты (как бы «прилипание» шашек к стенкам камеры).

²⁾ См. гл. VII.

За положительное направление отсчета углов на рис. 32 примем направление по часовой стрелке.

Дифференциальные уравнения движения будут иметь следующий вид (расположение сил показано на рис. 33)¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= P \cos \delta - Q + P_1 \sin \delta, \\ m \frac{v^2}{r} &= P \sin \delta + Y - P_1 \cos \delta, \\ I \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= M + M_1 + M_2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где v — скорость центра тяжести ракеты; m и I — масса и экваториальный момент инерции ракеты в момент времени t ; r — радиус

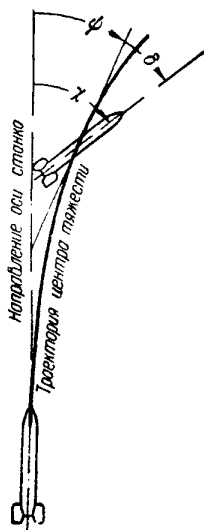


Рис. 32.

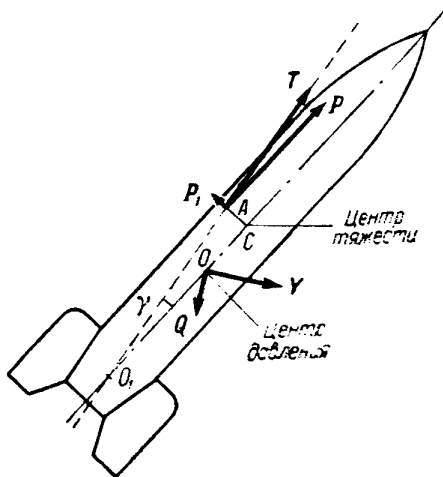


Рис. 33.

кривизны траектории; P — реактивная тяга, направленная по оси ракеты; P_1 — боковая слагающая реактивной силы, направленная перпендикулярно к оси ракеты; $Q = c_x \frac{\rho v^2}{2} S_m$ — лобовое сопротивление воздуха, направленное противоположно скорости; $Y = \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \frac{\rho v^2}{2} S_m \delta$ — подъемная сила, направленная перпендикулярно к скорости; $M = Pd$ — момент отклоняющей реактивной пары; $M_1 = \frac{\partial m_x}{\partial \delta} \frac{\rho v^2}{2} L_0 S_m \delta$ — стабилизирую-

¹⁾ Описание аэродинамических сил и моментов см. в Приложении II, а реактивных — в главах II и III.

ший экваториальный аэродинамический момент; $M_2 = m_2 \rho v L_0^2 S_m \frac{d\gamma}{dt}$ — демпфирующий экваториальный момент.

Здесь ρ — плотность воздуха, S_m — площадь мицеля ракеты, L_0 — характерная длина, а c_x , $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$, $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$, m_2 — безразмерные аэродинамические коэффициенты. Последние два коэффициента отрицательны.

Считая угол δ малым, будем полагать $\cos \delta \approx 1$, $\sin \delta \approx \delta$. Далее, для кривизны траектории имеем выражение

$$\frac{1}{r} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d\psi}{dt}.$$

Разделив обе части первых двух уравнений (1) на m , а третьего — на I , мы можем эти уравнения записать следующим образом ¹⁾:

$$\frac{dv}{dt} = a - nv^2, \quad (2a)$$

$$v \frac{d\psi}{dt} = (a + \mu v^2) \delta - b, \quad (2б)$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{M}{I} - k_1^2 v^2 \delta - k_2 v \frac{d\gamma}{dt}, \quad (2в)$$

где $a = P/m$ — ускорение реактивной тяги, $b = P_1/m$ — ускорение боковой реактивной силы,

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{c_x \rho S_m}{2m}, & \mu &= \frac{\frac{\partial c_y}{\partial \delta} \rho S_m}{2m}, \\ k_1^2 &= \frac{\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right| \rho S_m L_0}{2I}, & k_2 &= \frac{|m_2| \rho S_m L_0}{I}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В дальнейшем будем считать ²⁾, что в довольно большом диапазоне скоростей (до $v \approx 250 \div 280$ м/сек) можно принять $\frac{\partial c_y}{\partial \delta} = \text{const}$, $\frac{\partial m_z}{\partial \delta} = \text{const}$.

Что же касается коэффициента c_x , то он на протяжении активного участка существенно меняется ³⁾, поэтому и коэффициент n будет переменным. Однако в дальнейшем будет показано, что коэффициент n вообще играет весьма малую роль в расценивании оперенных

¹⁾ При этом мы членом $P_1 \sin \delta = P_1 \delta$ по сравнению с членом $P \cos \delta \approx P$ пренебрегаем, поскольку P_1 во много раз меньше P и угол δ мал.

²⁾ См. Приложение II, §§ 5 и 6.

³⁾ См. Приложение II, § 4.

ракет. Поэтому мы разрешим себе считать $c_x = \text{const.}$ заменяя его некоторым средним значением.

В выражениях (3) для коэффициентов n , μ , k_1^2 и k_2 заменим величины m , I и c_x их средними значениями и будем считать эти коэффициенты постоянными.

§ 26. Интегрирование уравнений движения

Первое из уравнений (2) рассматривалось при расчете траектории ракеты ¹⁾. Это — дифференциальное уравнение с одной неизвестной функцией v . Интегрируя это уравнение, мы определим v , которое затем подставим в уравнения (2б) и (2в). Тогда получим систему из двух линейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями. В качестве неизвестных функций можно взять любые два из углов ψ , δ и χ , выражая третий угол через эти два при помощи соотношения $\chi = \psi + \delta$.

Для интегрирования полученной системы уравнений можно поступить следующим образом. Подставим в уравнение (2в) вместо $\frac{d\chi}{dt}$ и $\frac{d^2\chi}{dt^2}$ соответственно суммы $\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\delta}{dt}$ и $\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d^2\delta}{dt^2}$. После этого исключим из уравнений (2б) и (2в) переменную ψ .

Для этого разделим (2б) почленно на v и продифференцируем. Найдем:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{a}{v} \right) + \mu(a - nv^2) \right] \delta + \left(\frac{a}{v} + \mu v \right) \frac{d\delta}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{b}{v} \right). \quad (4)$$

Подставляя в (2в) вместо $\frac{d\psi}{dt}$ и $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ их выражения из (2б) и (4), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \left[\frac{a}{v} + (k_2 + \mu)v \right] \frac{d\delta}{dt} + \\ + \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{a}{v} \right) + \mu(a - nv^2) + k_2(a + \mu v^2) + k_1^2 v^2 \right] \delta = \frac{M}{I} + k_2 b + \frac{d}{dt} \left(\frac{b}{v} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Мы получили линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно угла атаки δ с переменными коэффициентами. В эти коэффициенты входят две произвольные, но заданные функции $a(t)$ и $v(t)$, которые могут быть определены из диаграммы реактивной тяги $P = P(t)$ ²⁾. К уравнению (5) элементарные методы интегрирования непосредственно не применимы и его необходимо в каждом отдельном случае численно интегрировать.

В 1943 г. авторы настоящей книги предложили преобразование переменных в системе уравнений (2), сводящее интегрирование

¹⁾ См. главу II.

²⁾ См. § 11 и 13.

этой системы к интегрированию линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. При этом в качестве новой неизвестной функции выбирается величина $u = v\delta$, а в качестве аргумента — путь s . Проведем это преобразование.

Заменяем в уравнении (2б) угол ψ на разность $\chi - \delta$ и перенесем член $v \frac{d\delta}{dt}$ в правую часть. Тогда уравнение (2б) примет вид

$$v \frac{d\chi}{dt} = a\delta + v \frac{d\delta}{dt} + \mu v^2 \delta - b.$$

Заменяя здесь согласно (2а) ускорение a на $\frac{dv}{dt} + nv^2$, получим:

$$v \frac{d\chi}{dt} = \frac{d}{dt}(v\delta) + (\mu + n) v^2 \delta - b$$

или

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{v} \frac{d(v\delta)}{dt} + (\mu + n) v \delta - \frac{b}{v}.$$

Но

$$u = v\delta;$$

следовательно,

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{du}{ds} + (\mu + n) u - \frac{b}{v}. \quad (6)$$

Продифференцируем обе части равенства (6) по s . Замечая, что $ds = v dt$, найдем:

$$\frac{1}{v} \frac{d^2\chi}{dt^2} = \frac{d^2u}{ds^2} + (\mu + n) \frac{du}{ds} - \frac{d}{ds} \left(\frac{b}{v} \right). \quad (7)$$

Разделив обе части уравнения (2в) на v и заменив в этом уравнении $\frac{d\chi}{dt}$ и $\frac{1}{v} \frac{d^2\chi}{dt^2}$ их выражениями (6) и (7), получим:

$$\frac{d^2u}{ds^2} + 2h \frac{du}{ds} + k^2 u = D(s), \quad (8)$$

где

$$2h = \mu + n + k_2, \quad k^2 = k_1^2 + k_2(\mu + n),$$

$$D(s) = \frac{M}{Iv} + \frac{d}{ds} \left(\frac{b}{v} \right) + \frac{k_2 b}{v}.$$

Уравнение (8) представляет собой линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами и с переменной правой частью. Таким образом, интегрирование системы (2) сведено к интегрированию уравнения (8) при начальных условиях:

$$(u)_{s=s_0} = u_0, \quad \left(\frac{du}{ds} \right)_{s=s_0} = u'_0.$$

Величины u_0 и u'_0 легко выражаются через начальные данные γ_0 и $\dot{\gamma}_0$ (начальный угол поворота и начальная угловая скорость). Действительно, поскольку $\psi_0 = 0$, то $\chi_0 = \delta_0$ ¹⁾ и

$$u_0 = v_0 \delta_0 = v_0 \chi_0. \quad (9a)$$

Далее, из формулы (6) следует:

$$u'_0 = \dot{\chi}_0 - (\mu + n) v_0 \chi_0 + \frac{b_0}{v_0}. \quad (9b)$$

После того как уравнение (8) проинтегрировано и найдено u , делением на v получаем δ . Для определения ψ мы в уравнении (26) переходим к переменной s :

$$\frac{d\psi}{ds} = \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \delta - \frac{b}{v^2}. \quad (10)$$

Зная δ , из уравнения (10) квадратурой находим ψ :

$$\psi = \int_{s_0}^s \left[\left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \delta - \frac{b}{v^2} \right] ds. \quad (11)$$

§ 27. Интегрирование уравнений движения при неполной системе сил и моментов

Общее исследование уравнений движения и подробный анализ полученных решений показывают²⁾, что основную роль в угловом разбросе оперенных ракет полевой реактивной артиллерии играют следующие силы и моменты:

- 1) реактивная тяга P ,
- 2) боковой отклоняющий реактивный момент M ($M = Pd$, где d — эксцентриситет реактивной силы),
- 3) аэродинамический стабилизирующий момент M_1 .

Остальные силы и моменты, перечисленные в § 25, играют второстепенную роль³⁾.

Поэтому, для того чтобы быстрее познакомить читателя с основными закономерностями в области рассеивания оперенных ракет и с математическими методами расчета рассеивания, мы начнем с исследования уравнений движения при учете лишь основных сил и мо-

1) Здесь мы предполагаем, что направление дульной скорости v_0 совпадает с осью станка. В некоторых задачах, например при исследовании стрельбы с самолета, стрельбы при ветре и т. д., приходится рассматривать и более общий случай, когда $\psi_0 \neq 0$. Основные формулы для этого случая будут приведены в § 39.

2) См. §§ 41—45.

3) В рассеивании противотанковых оперенных ракет существенную роль играет и боковая слагающая P_1 реактивной силы (см. главу VI).

ментов: P , M и M_1 . Остальные силы и моменты в уравнениях (1) полагаем равными нулю¹⁾. Тогда в уравнениях движения (2)

$$n = \mu = k_2 = 0, \quad b = 0, \quad k_1 = k,$$

а сами уравнения принимают вид:

$$\frac{dv}{dt} = a, \quad (12a)$$

$$v \frac{d\psi}{dt} = a\delta, \quad (12б)$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = \frac{M}{I} - k^2 v^2 \delta. \quad (12в)$$

Выбором новых переменных $u = v\delta$ и s эта система уравнений сводится к уравнению (8), которое в данном случае (при $h = 0$, $b = 0$) имеет вид

$$\frac{d^2u}{ds^2} + k^2 u = \frac{M}{Iv}. \quad (13)$$

Это уравнение нужно интегрировать при начальных условиях:

$$(u)_{s=s_0} = u_0, \quad \left(\frac{du}{ds}\right)_{s=s_0} = u'_0,$$

где [см. равенства (9)]

$$u_0 = v_0 \chi_0, \quad u'_0 = \dot{\chi}_0. \quad (14)$$

Для того чтобы написать общее решение уравнения (13), воспользуемся механической аналогией. Будем рассматривать колебания материальной точки на оси x под действием возмущающей силы $F(t)$ при наличии восстанавливающей (упругой) силы, прямо пропорциональной расстоянию точки от начала координат: $-k^2x$. Если массу материальной точки мы условно примем за единицу, то дифференциальное уравнение движения запишется следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = F(t). \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что функция

$$x = x_0 \cos k(t - t_0) \quad (16)$$

представляет собой решение однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \quad (17)$$

¹⁾ Исследование полной системы сил и моментов будет проведено в §§ 41—45.

и удовлетворяет начальным условиям:

$$(x)_{t=t_0} = x_0; \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = 0. \quad (18)$$

Другими словами, формула (16) определяет свободные колебания материальной точки (возмущающая сила $F(t) = 0$), вызванные начальным отклонением x_0 при отсутствии начальной скорости.

Аналогично легко проверить, что

$$x = \frac{\dot{x}_0}{k} \sin k(t - t_0) \quad (19)$$

есть решение того же уравнения (17), удовлетворяющее начальным условиям:

$$(x)_{t=t_0} = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = \dot{x}_0, \quad (20)$$

т. е. формула (19) определяет свободные колебания, вызванные начальной скоростью $\dot{x}_0$ (начальным толчком, ударом) при отсутствии начального отклонения x_0 .

Сложив функции (16) и (19), мы получим в силу линейности дифференциального уравнения (17) свободные колебания

$$x = x_0 \cos k(t - t_0) + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin k(t - t_0), \quad (21)$$

удовлетворяющие начальным условиям:

$$(x)_{t=t_0} = x_0; \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = \dot{x}_0. \quad (22)$$

Для того чтобы получить колебания материальной точки, удовлетворяющие тем же начальным условиям при наличии силы $F(t)$, нужно к свободным колебаниям (21) прибавить частное решение уравнения (15), удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$(x)_{t=t_0} = 0; \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = 0. \quad (23)$$

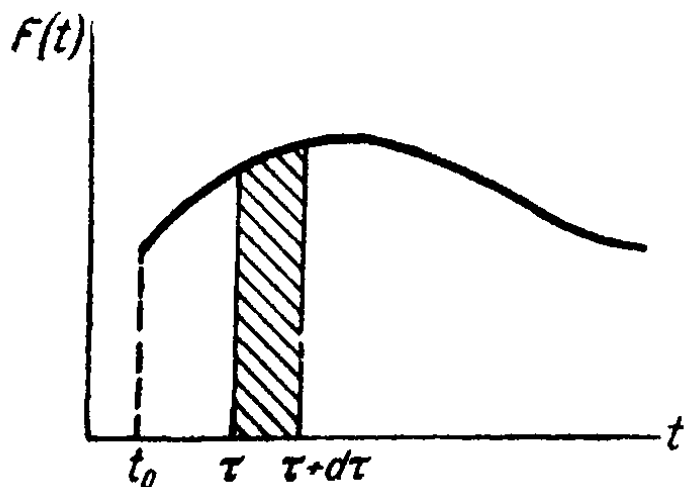


Рис. 34.

Эти дополнительные вынужденные колебания можно получить из следующих соображений. Разобьем полный импульс силы $F(t)$ (рис. 34) на элементарные импульсы $F(\tau) d\tau$.

Каждый такой импульс $F(\tau) d\tau$ за промежуток времени $(\tau, \tau + d\tau)$ сообщает материальной точке в момент $t = \tau$ скорость, равную $F(\tau) d\tau$ и, следовательно, согласно формуле (19) вызывает колебания

$$\frac{F(\tau) d\tau}{k} \sin k(t - \tau). \quad (24)$$

Для того чтобы получить интересующие нас вынужденные колебания, нужно просуммировать (точнее, проинтегрировать) элементарные колебания (24) в пределах изменения τ от $\tau = t_0$ до $\tau = t$, где t — рассматриваемый момент времени. Для вынужденных колебаний получаем следующее выражение:

$$\frac{1}{k} \int_{t_0}^t \sin k(t - \tau) F(\tau) d\tau. \quad (25)$$

Выражение (25) представляет собой вынужденные колебания материальной точки. Приведенные выше рассуждения показывают, что вынужденные колебания можно представить в виде суммы бесконечно большого числа элементарных свободных колебаний, вызываемых элементарными импульсами возмущающей силы.

Полное решение уравнения (15) получим, сложив свободные колебания (21) с вынужденными (25):

$$x = x_0 \cos k(t - t_0) + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin k(t - t_0) + \frac{1}{k} \int_{t_0}^t \sin k(t - \tau) F(\tau) d\tau. \quad (26)$$

Вернемся теперь к уравнению (13). Это уравнение отличается от уравнения (15) лишь обозначениями: вместо x , t , $F(t)$ имеем в уравнении (13) соответственно u , s , $\frac{M}{Iv}$. Поэтому по аналогии с (26) общее решение дифференциального уравнения (13) запишется следующим образом:

$$u = u_0 \cos k(s - s_0) + \frac{u'_0}{k} \sin k(s - s_0) + \frac{1}{k} \int_{s_0}^s \sin k(s - \sigma) \frac{M(\sigma)}{I(\sigma)v(\sigma)} d\sigma. \quad (27)$$

Подставляя сюда вместо u_0 и u'_0 соответственно $v_0\chi_0$ и $\dot{\chi}_0$ [см. (14)], получим:

$$u = u_M + u_{\chi_0} + u_{\dot{\chi}_0}, \quad (28a)$$

где

$$u_M = \frac{1}{k} \int_{s_0}^s \sin k(s - \sigma) \frac{M(\sigma)}{I(\sigma)v(\sigma)} d\sigma; \quad (28б)$$

$$u_{\chi_0} = \chi_0 v_0 \cos k(s - s_0); \quad (28в)$$

$$u_{\dot{\chi}_0} = \frac{\dot{\chi}_0}{k} \sin k(s - s_0). \quad (28г)$$

Здесь и в дальнейшем индексами M , χ_0 , $\dot{\chi}_0$ мы обозначаем соответственно члены, зависящие от отклоняющего реактивного момента M и начальных возмущений χ_0 , $\dot{\chi}_0$.

В соответствии с равенствами (28) в силу соотношения $u = v\delta$ и равенства (11) имеем¹⁾:

$$\delta = \delta_M + \delta_{\chi_0} + \delta_{\dot{\chi}_0}; \quad \psi = \psi_M + \psi_{\chi_0} + \psi_{\dot{\chi}_0}, \quad (29a)$$

где

$$\delta_M = \frac{u_M}{v}, \quad \psi_M = \int_{s_0}^s \frac{a}{v^2} \delta_M ds, \quad (29б)$$

$$\delta_{\chi_0} = \frac{u_{\chi_0}}{v}, \quad \psi_{\chi_0} = \int_{s_0}^s \frac{a}{v^2} \delta_{\chi_0} ds, \quad (29в)$$

$$\delta_{\dot{\chi}_0} = \frac{u_{\dot{\chi}_0}}{v}, \quad \psi_{\dot{\chi}_0} = \int_{s_0}^s \frac{a}{v^2} \delta_{\dot{\chi}_0} ds. \quad (29г)$$

§ 28. Доминирующая роль несимметрии реактивной силы в угловом разбросе оперенных ракет

Начальные возмущения (χ_0 , $\dot{\chi}_0$) и несимметрию реактивной силы (боковой момент M)²⁾ можно считать независимыми друг от друга случайными факторами. Возникает вопрос, какой из этих факторов является доминирующим?

Мы считаем, что *основной причиной углового разброса оперенных ракет является несимметрия реактивной силы*. Следующие соображения подтверждают эту гипотезу.

1) Расчеты бокового рассеивания оперенных ракет при учете лишь несимметрии реактивной силы дали величины, близкие к тем, которые получались при отстрелах (см. об этом подробнее в § 29).

2) Экспериментально установлено, что проворачиванием оперенных ракет вокруг их оси можно радикально уменьшить боковое рассеивание. Это легко объяснить, если принять, что доминирующим

¹⁾ В общем случае вместо (28а) и (29а) будем иметь:

$$u = u_M + u_{P_1} + u_{\chi_0} + u_{\dot{\chi}_0}; \quad \delta = \delta_M + \delta_{P_1} + \delta_{\chi_0} + \delta_{\dot{\chi}_0};$$

$$\psi = \psi_M + \psi_{P_1} + \psi_{\chi_0} + \psi_{\dot{\chi}_0}.$$

При рассмотрении неполной системы сил и моментов мы полагаем $P_1 = 0$ и потому члены u_{P_1} , δ_{P_1} и ψ_{P_1} , зависящие от боковой реактивной силы P_1 , пропадают.

²⁾ В общем случае несимметрия реактивной силы характеризуется, помимо M , и боковой слагающей P_1 реактивной силы.

фактором для углового, а следовательно, и для бокового рассеивания является несимметрия реактивной силы.

Действительно, если плоскость несимметрии, неизменно связанная с корпусом ракеты (см. § 24), вращается вместе с корпусом ракеты на активном участке, то отклоняющий эффект от несимметрии реактивной силы усредняется. На одной части активного участка отклоняющая реактивная пара (или боковая реактивная сила) отклоняет ракету в одну сторону, на другой части — в другую. В результате суммарное отклонение будет значительно меньше, нежели отклонение у непроворачивающейся оперенной ракеты.

В то же время никак нельзя объяснить уменьшение рассеивания при проворачивании, если исходить из гипотезы, что угловое рассеивание определяется начальными возмущениями при сходе ракеты с пускового станка. Наоборот, при проворачивании толчки при сходе ракеты могут быть более интенсивными и, следовательно, могут вызывать большие начальные возмущения.

Исходя из всего этого, мы будем считать, что для рассеивания оперенных ракет полевой реактивной артиллерии доминирующим фактором является несимметрия реактивной силы, и будем в дальнейшем исследовании полагать $\chi_0 = 0$, $\dot{\chi}_0 = 0$ и, следовательно, $\delta \approx \delta_M$; $\psi \approx \psi_M$ ¹⁾. Отсюда, согласно формулам (28б) и (29б), получаем основные формулы рассеяния:

$$\delta = \frac{1}{kv(s)} \int_{s_0}^s \sin k(s - \sigma) \frac{M(\sigma)}{I(\sigma)v(\sigma)} d\sigma; \quad (30a)$$

$$\psi = \int_{s_0}^s \frac{a}{v^2} \delta ds. \quad (30б)$$

§ 29. Расчет рассеивания конкретных типов ракет

В основные формулы (30) входят следующие величины:

$$a, v, s, I, k, s_0, M.$$

Эти величины должны быть предварительно определены для того, чтобы можно было провести расчет углов δ и ψ для конкретной ракеты.

Геометрические и весовые характеристики ракеты и длина направляющей s_0 непосредственно задаются. Диаграмма зависимости реактивной тяги P от t измеряется на стенде. Имея эту диаграмму, мы определяем функцию²⁾ $m = m(t)$ и, следовательно, функцию $a(t)$,

¹⁾ Учитывая, что для некоторых типов ракет могут играть роль и начальные возмущения, мы посвятим угловому разбросу, вызванному начальными возмущениями, отдельный параграф (§ 39).

²⁾ См. § 11.

где $a = \frac{P}{m}$. Интегрированием функции $a(t)$ находим $v(t)$ [см. уравнение (12a)]. Интегрируя $v(t)$, найдем $s(t)$. Зная зависимость s от t , мы любую функцию от времени t можем выразить как функцию от s . Зная изменение m во времени и расположение пороховых шашек, можно определить зависимость I от t и, следовательно, функцию $I(s)$.

Для определения коэффициента $k = k_1$ необходимо знать безразмерный аэродинамический коэффициент $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$, который определяется путем измерения аэродинамического момента, действующего на ракету (или ее модель) в аэродинамической трубе или на специальных баллистических трассах.

Боковой отклоняющий реактивный момент $M = Pd$, где d — эксцентриситет реактивной силы. Мы принимаем, что *эксцентриситет реактивной силы сохраняет постоянное значение* во все время горения ракетного заряда: $d = \text{const}$.

Подставляя в уравнение (30) произведение Pd вместо M и вынося постоянный множитель d за знак интеграла, мы можем представить δ и ψ в следующем виде:

$$\delta = d\delta^*(s), \quad \psi = d\psi^*(s), \quad (31)$$

где δ^* и ψ^* уже не зависят от d и имеют детерминированные (не случайные) значения¹⁾.

На рис. 35—37²⁾ приведены графики функций $\delta^*(s)$ и $\psi^*(s)$ для трех ракет, значительно отличающихся друг от друга калибром, весом, геометрическими и аэродинамическими характеристиками.

Рассмотрим подробнее эксцентриситет d . Последний изображается отрезком CA , перпендикулярным к оси снаряда и лежащим в плоскости q (см. рис. 33). Поскольку плоскостью q может быть любая плоскость, проходящая через ось ракеты, то вектор $d = CA$ имеет не только случайную величину, но и случайное направление. Так как все возможные положения вектора d лежат в плоскости, перпендикулярной к оси ракеты, то d — случайный плоский вектор. Мы принимаем, что *случайный вектор эксцентриситета d подчинен плоскому закону распределения Гаусса с круговой симметрией*³⁾. Это означает, что проекции вектора d на две взаимно перпендикулярные оси являются скалярными непрерывными случайными величинами, подчиненными одному и тому же закону Гаусса. Общее значение вероятного (срединного) отклонения для этих проекций будем называть *вероятным значением эксцентриситета d* и обозначать через $\bar{d}$.

1) δ^* и ψ^* — угол атаки и угловое отклонение при эксцентриситете $d = 1$.

2) На этих и дальнейших рисунках, а также в тексте, ракеты обозначаются соответственно через I, II, III.

3) См. § 17 и 20.

Рассмотрим теперь вероятное угловое отклонение $\bar{\psi}_a$ в конце активного участка. Согласно (31) $\psi_a = d\psi^*(s_a)$. Угол ψ_a характеризуется не только величиной, но и положением плоскости q , в которой он лежит. Исходя из этого, изобразим угол ψ_a в виде вектора,

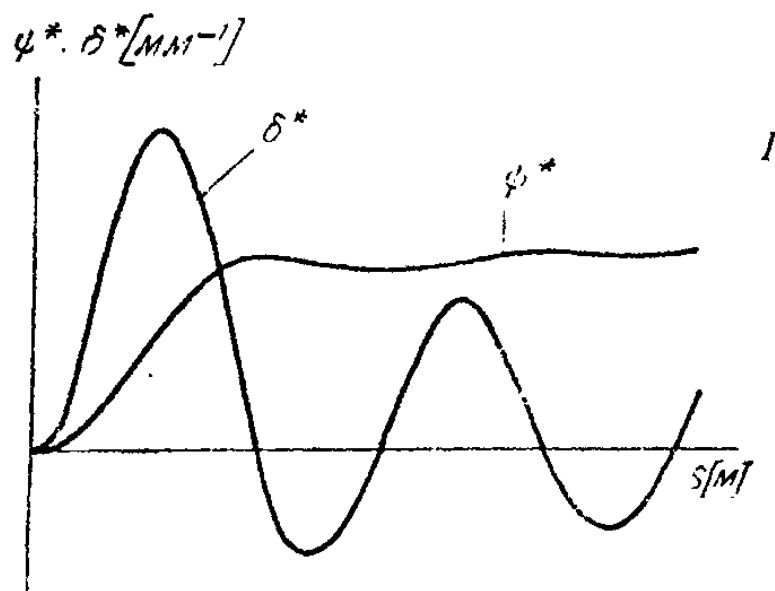


Рис. 35.

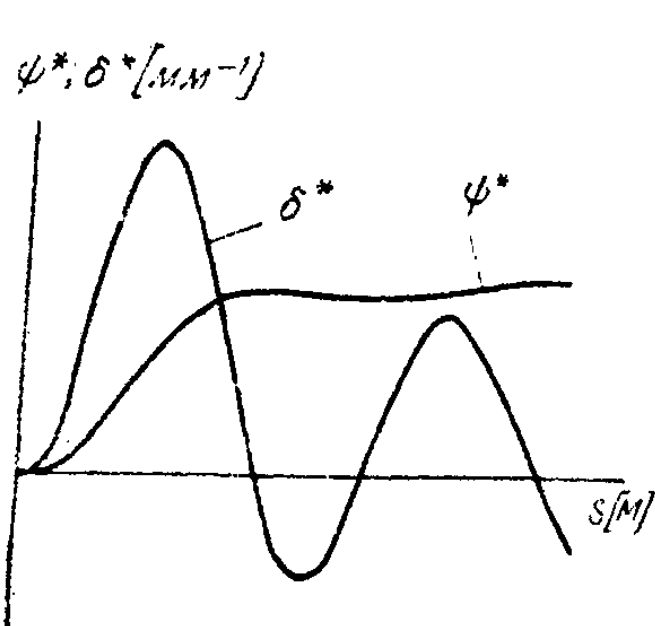


Рис. 36.

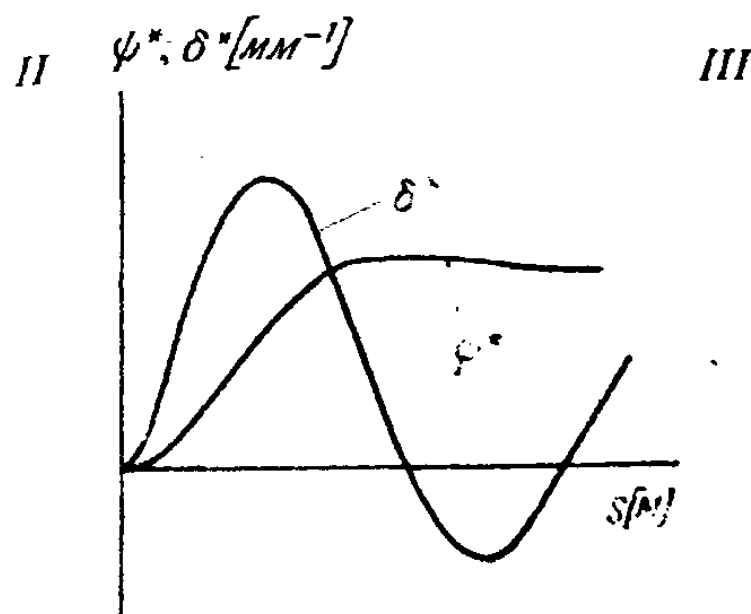


Рис. 37.

перпендикулярного к плоскости q (см. рис. 27). Вектор ψ_a — случайный плоский вектор. Он может быть получен из вектора d путем умножения величины последнего на детерминированный (не случайный) множитель $\psi^*(s_a)$ и поворота на 90° .

Поэтому случайный вектор ψ_a , как и вектор d , подчинен плоскому гауссову закону распределения с круговой симметрией¹⁾ и вероятные значения $\bar{\psi}_a$ и $\bar{d}$ связаны соотношением

$$\bar{\psi}_a = \bar{d}\psi^*(s_a). \quad (32)$$

¹⁾ См. § 20 и 21.

Величина ψ_a характеризует угловой разброс в конце активного участка траектории. Вероятное боковое отклонение связано с угловым разбросом формулой¹⁾

$$\frac{B\delta}{X} = \frac{\bar{\psi}_a}{\cos \theta_a} = \frac{\bar{d}\psi^*(s_a)}{\cos \theta_a}, \quad (33)$$

где θ_a — угол наклона траектории к горизонту в конце активного участка траектории.

Пользуясь величинами угла θ_a для ракет I, II, III при температуре $+15^\circ\text{C}$ и при угле возвышения $\theta_0 = 45^\circ$, а также соответствующими значениями $\frac{B\delta}{X}$, взятыми из таблиц отстрелов, и расчетными значениями величины $\psi^*(s_a)$, можно при помощи формулы (33) получить вероятные значения эксцентриситета $\bar{d}$ реактивной силы.

Введем плечо сопла L_c , т. е. расстояние от центра тяжести до середины сопла. Тогда отношение $\frac{\bar{d}}{L_c}$ найденной величины $\bar{d}$ к плечу сопла L_c будет равно для ракет I, II, III соответственно $1,7 \cdot 10^{-3}$; $1,2 \cdot 10^{-3}$; $1,5 \cdot 10^{-3}$. Это показывает, что отношение $\frac{\bar{d}}{L_c}$ для трех ракет имеет один и тот же порядок:

$$\frac{\bar{d}}{L_c} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}. \quad (34)$$

Таким образом, у ракет I, II, III, несмотря на различие их форм и характеристик, эксцентриситет $\bar{d}$ пропорционален плечу сопла L_c и, следовательно, боковой момент $\bar{M} = P\bar{d}$ пропорционален тяге P и плечу L_c . Это обстоятельство, вытекающее из наших расчетов, связано со следующими физическими соображениями.

Несимметрия реактивной силы в основном возникает из-за несимметрии газовой струи в сопле, вызывающей асимметрию распределения давления на стенки сопла, или из-за производственных дефектов, из которых наиболее существенным является несоосность камеры и сопла. В первом случае говорят о *газодинамическом*, во втором — о *геометрическом эксцентриситете*. Однако в обоих случаях причина несимметрии лежит в области сопла. Исходя из этого, можно принять гипотезу о том, что *линия действия реактивной силы T* (см. рис. 33) *пересекает ось ракеты в середине сопла*. Тогда

$$\frac{d}{L_c} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma,$$

где γ — так называемый *угловой эксцентриситет*, т. е. угол, образованный линией действия силы T с осью ракеты.

¹⁾ См. § 21.

Таким образом, постоянство отношения $\frac{\bar{d}}{L_0}$ для различных ракет приобретает определенный физический смысл — оно означает постоянство вероятного углового эксцентриситета $\bar{\gamma}$ для различных ракет:

$$\bar{\gamma} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}. \quad (35)$$

Заметим, что специальные отстрелы ракет с устраненным геометрическим эксцентриситетом не показали существенного уменьшения рассеивания. Отсюда можно сделать вывод о *доминирующей роли газодинамического эксцентриситета*.

В 1942 г. на специальном стенде на газодинамической модели ракеты было измерено вероятное значение газодинамического эксцентриситета. В результате измерений было получено значение $\frac{\bar{d}}{L_0} = 1,65 \cdot 10^{-3}$. В 1944 г. при измерении эксцентриситета реактивной силы ракеты при помощи баллистического маятника было получено $\frac{\bar{d}}{L_0} = 0,002$. Таким образом, расчетная величина $\frac{\bar{d}}{L_0} = 1,5 \cdot 10^{-3}$ удовлетворительно совпадает с экспериментальными измерениями.

Теоретические и экспериментальные данные можно сопоставить и в следующей форме. Если взять в качестве значения $\frac{\bar{d}}{L_0} = 1,87 \cdot 10^{-3}$, т. е. среднюю из величин, полученных в опытах, и предположить, что у различных ракет эксцентриситет прямо пропорционален плечу сопла L_0 , то на основании формул (30), (32) и (33) можно получить значения $\frac{B_0}{X}$ при $\theta_0 = 45^\circ$.

Сравнение этих вычисленных значений $\frac{B_0}{X}$ с данными отстрелов показало, что можно считать совпадение расчетных и экспериментальных данных удовлетворительным. Учитывая значительное различие весовых, геометрических, аэродинамических и баллистических характеристик ракет I, II и III, это совпадение расчетных данных с экспериментальными можно рассматривать как известное подтверждение теории и положенных в ее основу гипотез.

§ 30. Упрощение основных формул

При анализе основных формул (30) для углов δ и ψ будем исходить из рассмотрения конкретных ракет I, II и III. На рис. 38—40 показаны зависимости тяги P , реактивного ускорения a и скорости v от времени для этих ракет при температуре $+15^\circ\text{C}$. На рис. 40 мы видим, что для этих ракет график скорости $v(t)$ за время горе-

ния ракетного заряда очень близок к прямолинейному, что соответствует незначительному изменению $a = \frac{P}{m}$ на активном участке траектории.

Исходя из этого, можно с достаточной степенью точности считать движение центра тяжести на активном участке траектории равноуско-

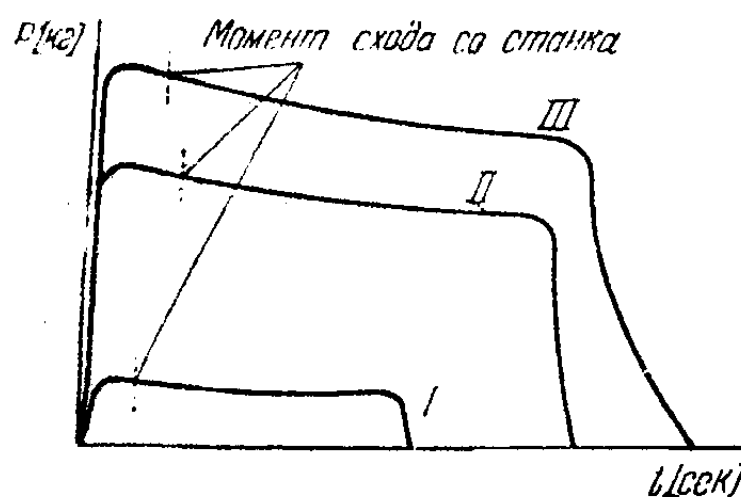


Рис. 38.

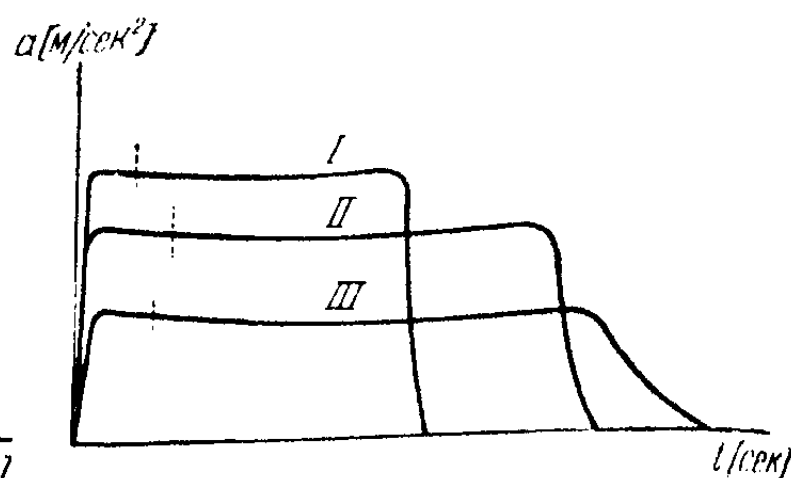


Рис. 39.

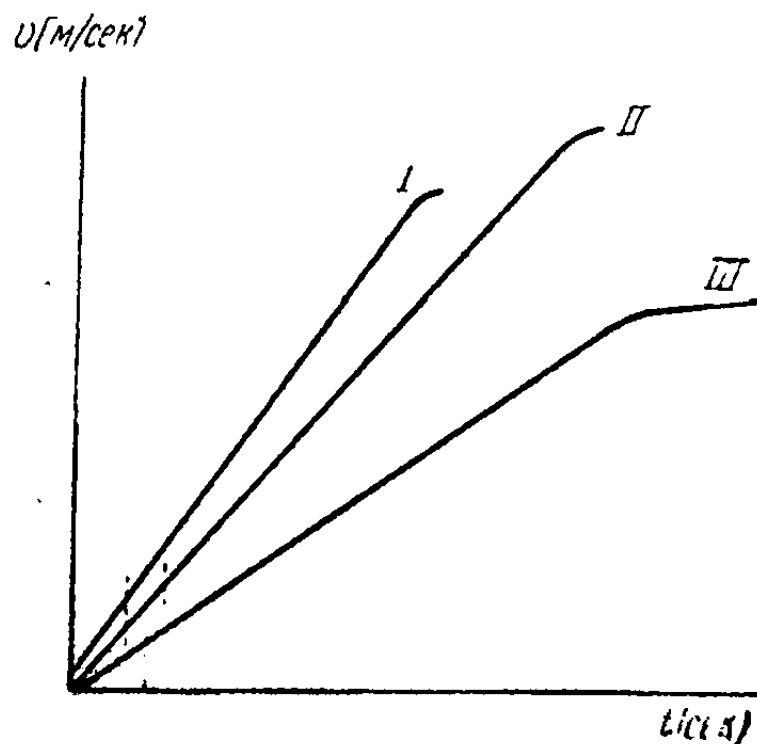


Рис. 40.

ренным и в дальнейших расчетах пользоваться формулами:

$$a = \text{const}, \quad s = \frac{1}{2} at^2, \quad v = at = \sqrt{2as}. \quad (36)$$

Время отсчитывается от момента начала горения ракетного заряда.

Пусть $I = m\chi^2$, где χ — радиус инерции ракеты относительно экваториальной оси, проходящей через центр тяжести ракеты. За время горения ракетного заряда величина χ^2 изменяется незначительно. Поэтому, полагая в дальнейшем $\chi = \chi_{\text{ср}} = \text{const}$ и, следовательно, $\frac{M}{I} = \frac{ad}{\chi^2} = \text{const}$, мы допускаем небольшую относительную ошибку.

Полагая в формулах (30) $v(s) = \sqrt{2as}$ (и, следовательно, $v(\sigma) = \sqrt{2a\sigma}$) и вынося постоянные множители за знак интеграла, получаем следующие формулы:

$$\delta = \frac{d}{4\pi^2 k} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{s_0}^s \frac{\sin k(s-\sigma)}{\sqrt{\sigma}} d\sigma, \quad (37)$$

$$\psi = \int_{s_0}^s \frac{\delta}{2s} ds = \frac{d}{4\pi^2 k} \int_s^s \frac{ds}{\sqrt{s}} \int_{s_0}^s \frac{\sin k(s-\sigma)}{\sqrt{\sigma}} d\sigma. \quad (38)$$

Формулы (37) и (38) будут положены нами в основу проводимого дальше анализа рассеивания оперенных ракет.

§ 31. Критический участок траектории

Рис. 35—37, на которых даны графики зависимости углов δ^* и ψ^* от пути s на активном участке траектории, показывают, что нарастание угла ψ происходит на некоторой начальной части активного участка, а затем угол ψ сохраняет примерно постоянное значение. Начальную часть активного участка, на которой происходит нарастание угла ψ , назовем *критическим участком* траектории. Эти же графики показывают, что критический участок простирается до той точки траектории, где в первый раз после схода ракеты с направляющей угол δ обращается в нуль. Таким образом, если значение s в конце критического участка будем обозначать через $s_{кр}$, то $\delta(s_{кр}) = 0$.

В дальнейшем будет выяснена важность понятия критического участка в теории рассеивания ракет. Поэтому мы считаем нужным объяснить сам факт существования критического участка. На начальной части активного участка под действием отклоняющего реактивного момента $M = Pd$ происходит отклонение оси ракеты от касательной к траектории. Другими словами, на начальной части активного участка появляется угол атаки δ , имеющий тот же знак, что и отклоняющий момент M .

Появление угла атаки δ дает нормальную слагающую $P\delta$ реактивной тяги, вызывающую искривление траектории. С другой стороны, в силу наличия оперения существование угла атаки вызывает появление стабилизирующего аэродинамического момента M_1 . Этот момент стремится вернуть ось ракеты к касательной, т. е. уменьшить угол δ . Наличие аэродинамического момента M_1 , пропорционального углу атаки, определяет колебательный характер изменения угла δ (рис. 35—37). Пока δ сохраняет положительное значение, траектория искривляется под действием силы $P\delta$ в одном направлении, т. е. угол ψ возрастает. Когда δ становится отрицательным, траектория начинает искривляться в противоположную сторону и угол ψ убывает.

Существование критического участка следует из формулы (38). В самом деле, на рис. 35—37 мы видим, что площадь первого положительного витка δ превосходит остальные¹⁾. Это обстоятельство усугубляется после деления ординаты δ на возрастающую величину $2s$. Поэтому величина ψ , которая получается квадратурой графика $\frac{\delta}{2s}$, определяется в основном его первой положительной частью, простирающейся от $s = s_0$ до $s = s_{кр}$.

Из приведенных на рис. 35—37 графиков следует, что для ракет I и II критический участок составляет по длине 35%, а для ракеты III — 55% от активного участка при температуре +15°C. Значение s в конце критического участка определяется из уравнения $\delta(s_{кр}) = 0$, т. е. из уравнения

$$\int_{s_0}^{s_{кр}} \frac{\sin k(s_{кр} - \sigma)}{\sqrt{\sigma}} d\sigma = 0.$$

Отсюда видно, что значение $s_{кр}$ определяется заданием длины направляющей s_0 и коэффициента k :

$$s_{кр} = f(s_0, k).$$

В частности, $s_{кр}$ не зависит от величины реактивного ускорения a . Поэтому длина критического участка не зависит от температуры заряда в отличие от длины активного участка, которая существенно меняется с изменением температуры.

Из самого факта существования критического участка вытекает следующий принципиально важный вывод: поскольку угловой разброс образуется на начальной части активного участка траектории, то бороться с рассеиванием ракет нужно на первых десятках метров их полета.

Остановимся еще на одном очень важном применении понятия критического участка. Известно, что оперенные ракеты имеют одинаковое боковое рассеивание летом и зимой. В то же время у ракет ближнего боя, у противотанковых оперенных ракет боковое рассеивание зимой может быть в несколько раз больше, нежели летом.

Объяснение этого явления заключается в следующем: формула (38) для ψ не содержит реактивного ускорения. Согласно этой формуле ψ зависит только от таких параметров, значения которых почти не изменяются при изменении температуры²⁾. Таким образом, зависи-

1) Этот факт объясняется нарастанием скорости вдоль активного участка. Напомним, что стабилизирующий аэродинамический момент, стремящийся уменьшить угол атаки, пропорционален квадрату скорости.

2) С изменением температуры воздуха меняется его плотность ρ , входящая в состав коэффициента k . В § 35 будет показано, что это изменение ρ не может вызвать заметного изменения бокового рассеивания ракет.

мость ψ от s будет одинаковой зимой и летом. Однако длина активного участка траектории s_a зависит от величины реактивной силы, пропорциональной давлению в камере. Последнее же резко зависит от температуры заряда.

Поэтому s_a летом имеет значительно меньшую величину, нежели зимой. Таким образом, летний график $\psi(s)$ получается из зимнего путем отбрасывания той части графика, которая соответствует значениям $s > s_{a, \text{лет}}$.

Но у рассматриваемых нами оперенных ракет $s_{a, \text{лет}} > s_{\text{кр}}$. Поэтому у этих ракет $\bar{\psi}_{a, \text{зим}} \approx \bar{\psi}_{\text{кр}}$ и $\bar{\psi}_{a, \text{лет}} \approx \bar{\psi}_{\text{кр}}$ и, таким образом,

$$\bar{\psi}_{a, \text{зим}} \approx \bar{\psi}_{a, \text{лет}}.$$

Не так обстоит дело с противотанковыми оперенными ракетами. Активный участок у этих ракет даже зимой имеет длину не более 6—8 м. Поэтому у *противотанковых ракет активный участок меньше критического*. Здесь уже на всем активном участке имеет место резкое нарастание углового отклонения, и уменьшение длины активного участка в летних условиях связано со значительным уменьшением углового, а следовательно, и бокового рассеивания и рассеивания по высоте.

Здесь мы имели в виду рассеивание противотанковых оперенных ракет, вызываемое действием возмущающих факторов на активном участке траектории. Однако для некоторых типов противотанковых оперенных ракет, имеющих высокую кучность, это рассеивание может быть весьма мало. Для таких ракет доминирующим будет рассеивание, вызываемое пассивным участком.

§ 32. Формулы для угла атаки δ и углового отклонения ψ

Перейдем теперь к установлению формул, выражающих углы δ и ψ через затабулированные функции. Для этого преобразуем сначала выражение (37) для δ , раскрывая синус разности под знаком интеграла:

$$\delta = \frac{d}{2\alpha^2 k} \left(\frac{\sin ks}{\sqrt{s}} \int_{s_0}^s \frac{\cos kz}{\sqrt{z}} dz - \frac{\cos ks}{\sqrt{s}} \int_{s_0}^s \frac{\sin kz}{\sqrt{z}} dz \right). \quad (39)$$

Введем новую безразмерную переменную $z = ks$. Одновременно место переменной интегриации s введем переменную $\zeta = kz$. Тогда

$$\delta = \frac{d}{2\alpha^2 k} \left(\frac{\sin \zeta}{\sqrt{\zeta}} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\cos \xi}{\sqrt{\xi}} d\xi - \frac{\cos \zeta}{\sqrt{\zeta}} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\sin \xi}{\sqrt{\xi}} d\xi \right). \quad (40)$$

Введем в рассмотрение так называемые *интегралы Френеля*:

$$C(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\cos \zeta}{\sqrt{\zeta}} d\zeta, \quad S(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\sin \zeta}{\sqrt{\zeta}} d\zeta, \quad (41)$$

и функции Бесселя:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}, \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}. \quad (42)$$

Между этими функциями существует следующая связь:

$$C(z) = \frac{1}{2} \int_0^z J_{-\frac{1}{2}}(\zeta) d\zeta, \quad S(z) = \frac{1}{2} \int_0^z J_{\frac{1}{2}}(\zeta) d\zeta. \quad (43)$$

Функции $C(z)$, $S(z)$, $J_{\frac{1}{2}}(z)$, $J_{-\frac{1}{2}}(z)$ затабулированы. Для удобства читателя таблицы этих функций приведены в конце книги.

Угол δ выражается в силу равенства (40) через затабулированные функции следующим образом:

$$\delta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{\chi^2 k} \left\{ \frac{\sin z}{\sqrt{z}} [C(z) - C(z_0)] - \frac{\cos z}{\sqrt{z}} [S(z) - S(z_0)] \right\} \quad (44)$$

или

$$\delta = \frac{\pi d}{2\chi^2 k} \left[J_{\frac{1}{2}}(z) C_{z_0}^z - J_{-\frac{1}{2}}(z) S_{z_0}^z \right]^1. \quad (45)$$

Для того чтобы получить аналогичное выражение для ψ , мы предварительно выразим угол χ через затабулированные функции, а затем определим ψ из равенства $\psi = \chi - \delta$.

Из (12) следует, что

$$v \frac{d\psi}{dt} = a\delta = \frac{dv}{dt} \delta.$$

Прибавив к первому и последнему члену этого равенства величину $v \frac{d\delta}{dt}$, получим:

$$v \frac{d\chi}{dt} = \frac{d}{dt} (v\delta).$$

¹⁾ Здесь и в дальнейшем мы будем употреблять сокращенные обозначения: $C_{z_0}^z = C(z) - C(z_0)$; $S_{z_0}^z = S(z) - S(z_0)$.

Разделив обе части полученного равенства на v^2 , найдем:

$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d}{ds} (v\delta) = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{d}{ds} (\sqrt{s} \delta).$$

Введем снова переменную $z = ks$. Тогда

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d}{dz} (\sqrt{z} \delta). \quad (46)$$

Помножим равенство (44) почленно на $\sqrt{z}$ и, дифференцируя, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\sqrt{z} \delta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{\chi^2 k} \left[\cos z C_{z_0}^z + \sin z S_{z_0}^z + \right. \\ \left. + \sin z \frac{d}{dz} C_{z_0}^z - \cos z \frac{d}{dz} S_{z_0}^z \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Но согласно (41)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} C_{z_0}^z &= C'(z) = \frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}}, \\ \frac{d}{dz} S_{z_0}^z &= S'(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Поэтому в равенстве (47) последние два члена в квадратных скобках взаимно уничтожаются и согласно (46)

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{\pi d}{\chi^2 k} \left(\frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}} C_{z_0}^z + \frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}} S_{z_0}^z \right).$$

В силу (48) это равенство можно записать так:

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{\pi d}{2\chi^2 k} \frac{d}{dz} [(C_{z_0}^z)^2 + (S_{z_0}^z)^2].$$

Интегрируя в пределах от z_0 до z и замечая, что $\chi(z_0) = \chi_0 = 0$, получим:

$$\chi = \frac{\pi d}{2\chi^2 k} [(C_{z_0}^z)^2 + (S_{z_0}^z)^2]. \quad (49)$$

Поскольку $\psi = \chi - \delta$, то из (45) и (49) находим:

$$\psi = \frac{\pi d}{2\chi^2 k} [(C_{z_0}^z)^2 + (S_{z_0}^z)^2 - J_{\frac{1}{2}}(z) C_{z_0}^z + J_{-\frac{1}{2}}(z) S_{z_0}^z]. \quad (50)$$

Формулы (45), (49) и (50) выражают углы δ , χ и ψ как функции переменной $z = ks$ при помощи затабулированных функций Бесселя $J_{\frac{1}{2}}(z)$, $J_{-\frac{1}{2}}(z)$ и интегралов Френеля $C(z)$, $S(z)$.

§ 33. Графический метод расчета. Спираль Корню

На рис. 41 представлена кривая, параметрические уравнения которой в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид:

$$x = C(z); \quad y = S(z),$$

где $C(z)$ и $S(z)$ — интегралы Френеля. Эта кривая носит название *спирали Корню*.

Если на спираль Корню нанести шкалу значений параметра z , то спиралью Корню можно пользоваться для графического определения значений интегралов Френеля $C(z)$ и $S(z)$.

Рассмотрим на спирали Корню две точки с отметками $z_0 = ks_0$ и $z = ks$. Эти точки спирали Корню соответствуют двум точкам на

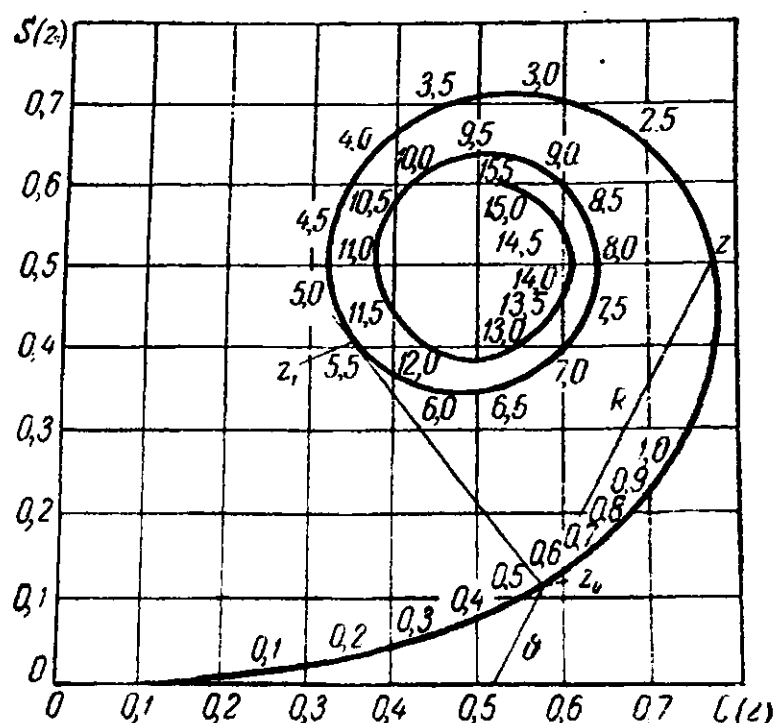


Рис. 41.

активном участке траектории: точке вылета s_0 и произвольной точке s . Проведем из точки z_0 к точке z спирали Корню радиус-вектор R . Проекции этого радиус-вектора на оси x и y равны:

$$R_x = C_{z_0}^z, \quad R_y = S_{z_0}^z,$$

откуда

$$R^2 = (C_{z_0}^z)^2 + (S_{z_0}^z)^2,$$

и формула (49) принимает вид

$$\chi = \frac{\pi d}{2\lambda^2 k} R^2. \quad (51)$$

Таким образом, измерив на спирали Корню расстояние между точками с отметками $z_0 = ks_0$ и $z = ks$, мы определим по формуле (51) значение $\chi(s)$.

Перейдем теперь к формуле (45). Обозначим через ϑ угол, образованный радиус-вектором R с осью абсцисс. Тогда

$$\vartheta = \arctg \frac{S_{z_0}^z}{C_{z_0}^z} \quad \text{и} \quad \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{1}{2} \frac{C_{z_0}^z J_{\frac{1}{2}}(z) - S_{z_0}^z J_{-\frac{1}{2}}(z)}{R^2}.$$

Формула (45) для δ может быть записана в следующем виде:

$$\delta = \frac{\pi d}{\chi^2 k} R^2 \frac{d\vartheta}{dz}. \quad (52)$$

Давая z малое приращение Δz и найдя графически соответствующее приращение $\Delta\vartheta$, мы можем приближенно определить $\frac{d\vartheta}{dz}$ из равенства $\frac{d\vartheta}{dz} \approx \frac{\Delta\vartheta}{\Delta z}$.

Пользуясь выражениями (51) и (52) для углов χ и δ , мы для угла $\psi = \chi - \delta$ получаем формулу

$$\psi = \frac{\pi d}{\chi^2 k} R^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{d\vartheta}{dz} \right). \quad (53)$$

В момент схода ракеты с направляющей точка z на спирали Корню совпадает с точкой z_0 ; затем при движении ракеты на активном участке траектории точка z перемещается по спирали Корню. При этом, как видно из рис. 41, вначале угол ϑ возрастает. После перехода через точку z_1 , в которой радиус-вектор R касается спирали, угол ϑ начинает убывать. Это убывание продолжается до второй точки касания z_2 . Между второй и третьей точками касания (z_2 и z_3) угол ϑ снова возрастает и т. д. Если угол ϑ возрастает, то $\frac{d\vartheta}{dz} > 0$ и в силу (52) также $\delta > 0$. Если же угол ϑ убывает, то на соответствующем участке $\delta < 0$. Очевидно, что в граничных точках, т. е. в точках касания, $\delta = 0$. Таким образом, первая точка касания z_1 соответствует концу критического участка:

$$z_1 = z_{кр} = k s_{кр}.$$

Обозначая значения величин в точке z_1 индексом 1 или индексом «кр», значения в точке z_2 — индексом 2 и т. д., мы можем записать следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{кр} = \psi_1 = \chi_1 - \delta_1 = \chi_1 &= \frac{\pi d}{2\chi^2 k} R_{кр}^2, \\ \psi_2 = \chi_2 &= \frac{\pi d}{2\chi^2 k} R_2^2, \\ \psi_3 = \chi_3 &= \frac{\pi d}{2\chi^2 k} R_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Обращаем внимание читателя на первую из этих формул, дающую угловое отклонение в конце критического участка. Если активный участок больше критического, то $\psi_a \approx \psi_{кр} \approx \psi_2 \approx \psi_3 \approx \dots$. В этом случае формулы (54) могут быть использованы для определения углового отклонения в конце активного участка траектории.

При $z \rightarrow \infty$ точка спирали Корню стремится к точке с координатами

$$x_\infty = C(\infty) = 0,5, \quad y_\infty = S(\infty) = 0,5;$$

при этом $R \rightarrow R_\infty$. В пределе формулы (54) дают

$$\left. \begin{aligned} \psi_\infty &= \frac{\pi d}{2\kappa^2 k} R_\infty^2, \\ R_\infty^2 &= [0,5 - C(z_0)]^2 + [0,5 - S(z_0)]^2. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

где

Остановимся еще на графическом определении угла δ для произвольной точки траектории. Для этого прежде всего преобразуем выражение (41). Используя равенства

$$C_{z_0}^z = C(z) - C(z_0) = R \cos \vartheta, \quad S_{z_0}^z = S(z) - S(z_0) = R \sin \vartheta,$$

получим:

$$\delta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{\kappa^2 k} \frac{R \sin(z - \vartheta)}{\sqrt{z}}. \quad (56)$$

Выясним теперь геометрический смысл параметра z . Для этого обозначим через ϵ угол между осью абсцисс и касательной к спирали Корню. Тогда, обозначая через λ дугу спирали Корню и отмечая штрихом дифференцирование по параметру z , будем иметь:

$$\cos \epsilon = \frac{dx}{d\lambda} = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad \sin \epsilon = \frac{dy}{d\lambda} = \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad (57)$$

где

$$x' = C'(z) = \frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad y' = S'(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}}. \quad (58)$$

Подставляя в формулы (57) вместо x' и y' выражения (58), получим

$$\cos \epsilon = \cos z, \quad \sin \epsilon = \sin z,$$

откуда

$$\epsilon = z.$$

Итак, z есть угол между осью абсцисс и касательной к спирали Корню в соответствующей точке.

Разность $z - \vartheta$, очевидно, равна углу между радиус-вектором R (проведенным из точки L_0 спирали с отметкой z_0 к точке L спирали с отметкой z) и касательной LT к спирали в точке L . Обозначим через β угол между внешней нормалью LN к спирали в точке L и радиус-вектором $R = L_0L$ (рис. 42)¹⁾. Тогда

$$\beta + z - \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

¹⁾ Здесь мы под внешней нормалью понимаем нормаль, направленную в сторону выпуклости спирали.

и потому равенство (56) может быть переписано так:

$$\delta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{x^2 k} \frac{R \cos \beta}{\sqrt{z}}$$

или

$$\delta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{x^2 k} \frac{R_N}{\sqrt{z}}, \quad (59)$$

где $R_N = L_1 L$ — ортогональная проекция радиус-вектора R на внешнюю нормаль LN .

Величину R_N можно получить следующим геометрическим построением (рис. 43).

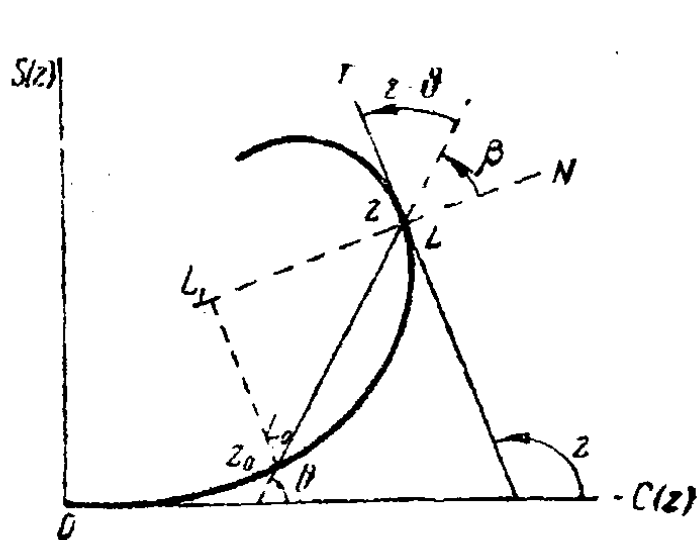


Рис. 42.

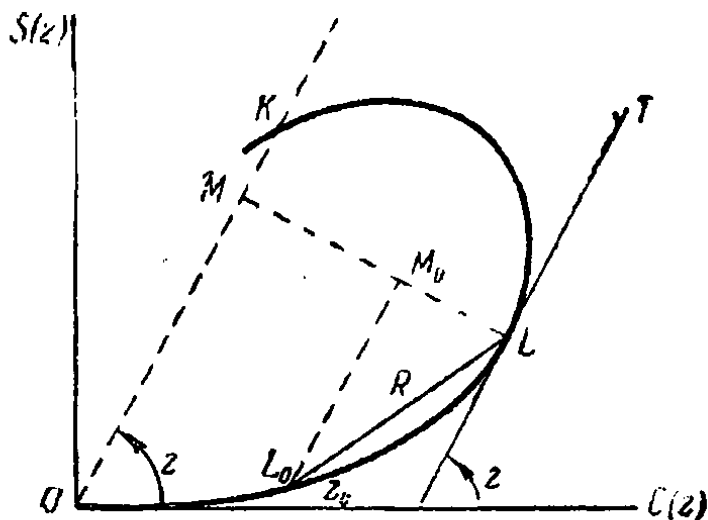


Рис. 43.

Из точки O при помощи транспортира проводим луч OK , образующий угол z с осью абсцисс. Этот луч будет параллелен касательной LT . Из точки L опустим перпендикуляр LM на OK . Этот перпендикуляр и будет внешней нормалью к спирали в точке L . Из точки L_0 опустим перпендикуляр $L_0 M_0$ на LM . Тогда $R_N = M_0 L$. Это построение легко выполняется при помощи транспортира, линейки и угольника¹⁾.

Отметим еще одно замечательное свойство спирали Корню. Обозначим снова через λ дугу спирали: $\lambda = OL$. Тогда $d\lambda^2 = dx^2 + dy^2$ и, следовательно²⁾,

$$\frac{d\lambda}{dz} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}. \quad (60)$$

Отсюда, интегрируя и учитывая, что $\lambda = 0$ при $z = 0$, находим:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}. \quad (61)$$

¹⁾ На приведенный способ графического получения величины угла δ обратил внимание авторов А. Б. Найшуль.

²⁾ Обращаем внимание читателя на то, что поскольку z есть угол, образованный касательной с осью абсцисс, то $\frac{d\lambda}{dz}$ есть радиус кривизны спирали Корню.

Обозначим через $\tilde{z}$ число, измеряющее угол между осью абсцисс и касательной, когда за единицу измерения принят прямой угол:

$$\tilde{z} = \frac{2z}{\pi}.$$

Тогда

$$\lambda = \sqrt{\tilde{z}}. \quad (61')$$

В экстремальных (правых, верхних, левых, нижних) точках спирали Корню z равно $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$. Следовательно, в этих точках $\tilde{z} = 1, 2, 3, \dots$ и $\lambda = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$

Формулу (59) можно записать следующим образом:

$$\delta = \frac{d}{\chi^2 k} \frac{R_N}{\lambda}. \quad (62)$$

Из равенств (51) и (62) находим:

$$\psi = \chi - \delta = \frac{d}{\chi^2 k} \left(\frac{\pi}{2} R^2 - \frac{R_N}{\lambda} \right). \quad (63)$$

§ 34. Основная расчетная формула

Предполагая, что $s_a > s_{кр}$, мы можем вероятное угловое отклонение $\bar{\psi}_a$ в конце активного участка определить по формуле

$$\bar{\psi}_a \approx \psi_{кр} = \frac{\pi d}{2\chi^2 k} R_{кр}^2, \quad (64)$$

где $R_{кр}^2$ есть функция от z_0 и $z_{кр}$:

$$R_{кр}^2 = [C(z_{кр}) - C(z_0)]^2 + [S(z_{кр}) - S(z_0)]^2. \quad (65)$$

Напомним, что $z_{кр}$ является первой точкой касания радиус-вектора R к спирали Корню. Поэтому $z_{кр}$ является первым (после z_0) корнем уравнения

$$\operatorname{tg} z = \frac{S(z) - S(z_0)}{C(z) - C(z_0)}. \quad (66)$$

Таким образом, $z_{кр}$ есть функция величины z_0 :

$$z_{кр} = G(z_0).$$

График этой функции изображен на рис. 44, а таблица ее значений приведена в конце книги¹⁾. Замечая, что $z_{кр} = ks_{кр}$

и $z_0 = ks_0$, мы для конца критического участка получаем соотношение

$$s_{кр} = \frac{1}{k} G(ks_0).$$

¹⁾ Зависимость $z_{кр}$ от z_0 можно определить и графически, пользуясь спиралью Корню.

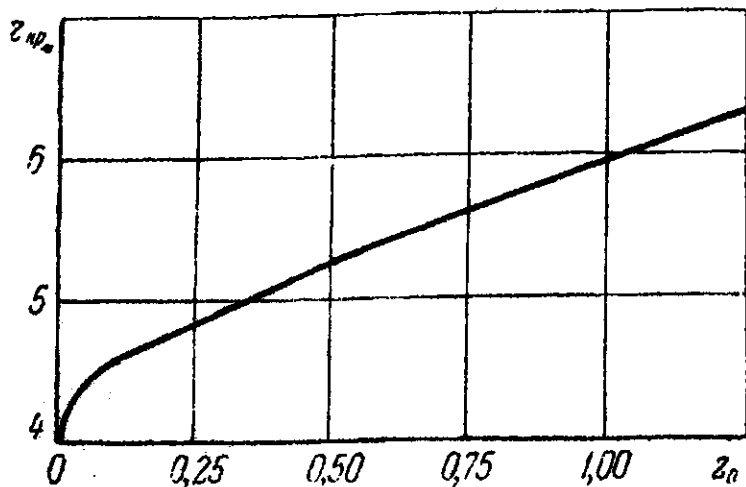


Рис. 44.

Подставляя в формулу (65) вместо $z_{кр}$ его выражение через z_0 , получим, что $R_{кр}^2$ есть функция от z_0 .

На рис. 45 представлен график функции $\tilde{\psi}(z_0) = \frac{\pi}{2} R_{кр}^2$, а на рис. 46 дана зависимость $\lg \tilde{\psi}(z_0)$ от $\lg z_0$. В качестве первого прибли-

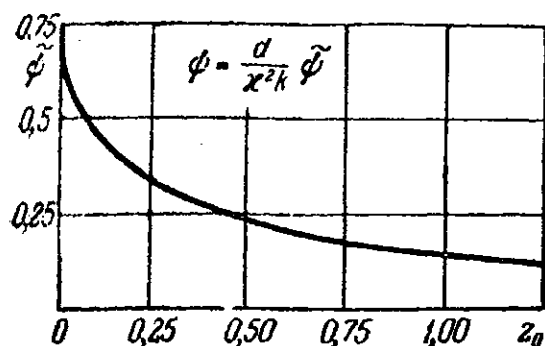


Рис. 45.

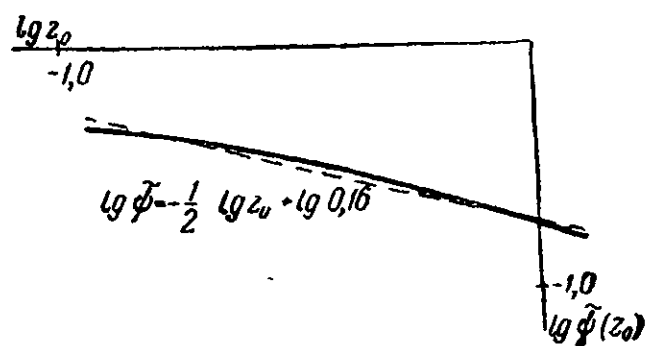


Рис. 46.

жения (в интервале $0,1 < z_0 < 1$) для $\lg \tilde{\psi}(z_0)$ можно взять прямую с угловым коэффициентом $-\frac{1}{2}$ (рис. 46):

$$\lg \tilde{\psi}(z_0) = -\frac{1}{2} \lg z_0 + \lg F.$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{2} R_{кр}^2 = \tilde{\psi}(z_0) = \frac{F}{\sqrt{z_0}}. \quad (67)$$

В действительности же величина F , определяемая по формуле (67), будет не постоянной величиной, а слабо изменяющейся (на рассматриваемом интервале) функцией от z_0 ¹⁾:

$$F(z_0) = \frac{\pi}{2} \sqrt{z_0} [(C_{z_0}^{кр})^2 + (S_{z_0}^{кр})^2]. \quad (68)$$

Здесь в правую часть вместо $z_{кр}$ надо подставить $G(z_0)$. На рис. 47 мы имеем график функции $F(z_0)$. Таблицы значений этой функции, а также функций $\tilde{\psi}(z_0)$ и $z_{кр} = G(z_0)$ приведены в конце книги.

На основании равенства (67) формула (64) принимает вид

$$\bar{\psi}_s = F(z_0) \frac{\bar{d}}{x^2 k \sqrt{z_0}} = \frac{\bar{d}}{x^2 k} \tilde{\psi}(z_0). \quad (69)$$

Это основная расчетная формула для определения углового разброса оперенных ракет.

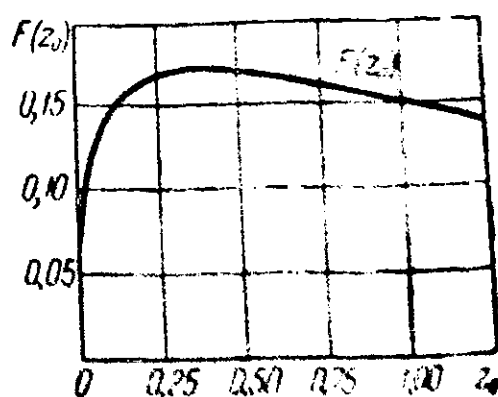


Рис. 47.

¹⁾ На интервале $0,1 < z_0 < 1$ можно положить $F(z_0) \approx 0,16$. См. подробнее об этом в следующем параграфе.

В формуле (69)

$$z_0 = ks_0, \quad k = \sqrt{\frac{\rho S_m L_0 \left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|}{2m\chi^2}},$$

где s_0 — длина направляющей, ρ — плотность воздуха, S_m — площадь миделя ракеты, $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ — безразмерный коэффициент, характеризующий аэродинамическую устойчивость, L_0 — характерная длина (при измерении $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$), m и χ — средние значения массы и радиуса инерции относительно экваториальной оси ракеты.

Напомним¹⁾, что

$$\frac{B_6}{X} = \frac{\bar{\psi}_a}{\cos \theta_a} \approx \frac{\bar{\psi}_a}{\cos \theta_0}, \quad (70)$$

где θ_0 — угол возвышения пускового станка, θ_a — угол наклона касательной к траектории в конце активного участка. Поэтому

$$\frac{B_6}{X} \approx F(z_0) \frac{\bar{d}}{\chi^2 k \sqrt{z_0} \cos \theta_0} = \frac{\bar{d}}{\chi^2 k} \frac{\tilde{\psi}(z_0)}{\cos \theta_0}. \quad (71)$$

Рассеивание по дальности при небольших углах возвышения ($\theta_0 < 20 \div 25^\circ$) может быть рассчитано по формуле

$$B_d = \left(\frac{\partial X}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_a} \bar{\psi}_a, \quad (72)$$

где $\frac{\partial X}{\partial \theta}$ — производная от функции $X(\theta)$, определяющей зависимость дистанции X ракеты (с заданным баллистическим коэффициентом c) от начального угла возвышения θ (в радианах)²⁾.

Из формул (71) и (72) находим:

$$B_d = F(z_0) \left(\frac{\partial X}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_a} \frac{\bar{d}}{\chi^2 k \sqrt{z_0}} = \left(\frac{\partial X}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_a} \frac{\bar{d}}{\chi^2 k} \tilde{\psi}(z_0). \quad (73)$$

Рассеивание по дальности при стрельбе на максимальную дистанцию в основном не зависит от углового разброса³⁾ и потому в этом случае формула (73) неприменима. Вопрос о рассеивании по даль-

¹⁾ См. § 21.

²⁾ См. § 22. Коэффициент $\frac{\partial X}{\partial \theta}$ может быть определен из баллистических таблиц. При этом можно приближенно положить $\frac{\partial X}{\partial \theta} \approx \frac{\Delta X}{\Delta \theta}$, где $\Delta \theta$ — малое приращение угла возвышения, а ΔX — соответствующее приращение дистанции.

³⁾ См. § 22.

ности при стрельбе на максимальную дистанцию требует специального исследования.

Примечание. Вывод формулы (69) опирался на предположение, что при $s > s_{кр}$ имеет место равенство $\psi \approx \psi_{кр}$. Для проверки этого соотношения мы сопоставим два ближайших максимума функции $\psi(s)$ при $s = s_1 (= s_{кр})$ и $s = s_2$. Отношение $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ является функцией параметра z_0 (см. § 33). При $z_0 < 0,5$ это отношение равно 1 с точностью до 50%, при $z_0 < 1,25$ — с точностью до 8,3%. Для обычных оперенных ракет в полевых условиях всегда выполняется неравенство $s_a > s_{кр}$, и потому для этих оперенных ракет можно пользоваться формулой (69).

Однако в дальнейшем (§ 37, 38) будет показано, что в ряде случаев (стрельба с самолета, активно-реактивные мины и т. д.) расчет ведется с помощью эффективной длины направляющей, которая может быть во много раз больше реальной. В этих случаях z_0 велико и расчет следует вести не по формуле (69), а по формуле (50), полагая в последней $z = z_a$, где $z_a = ks_a$.

§ 35. Зависимость углового разброса от конструктивных параметров ракеты и длины направляющей

Формула (69) устанавливает зависимость углового разброса в конце активного участка траектории от параметров ракеты и длины пускового станка. Из таблицы значений функции $F(z_0)$, входящей в формулу (69), видно, что на довольно большом диапазоне изменения величины z_0 можно положить $F = \text{const}$. Так, например, при изменении z_0 в пределах от 0,12 до 1¹⁾ имеет место приближенное равенство $F \approx 0,16$, в котором относительная ошибка не превышает 70%.

Поэтому в первом приближении в формуле (69) можно положить $F = \text{const}$ ($F \approx 0,16$):

$$\bar{\psi}_a = \frac{0,16\bar{d}}{\kappa^2 k^{3/2} s_0^{1/2}} = \frac{0,27\bar{d}m^{3/4}}{\kappa^{1/2} s_0^{1/2} \rho^{3/4} S_m^{3/4} \left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|^{3/4} L_0^{1/4}}. \quad (74)$$

Отсюда следует характер изменения $\bar{\psi}_a$ при сравнительно небольшом изменении параметров.

Из формулы (74), между прочим, можно получить закон изменения углового рассеивания для подобных между собой ракет. Действительно, для таких ракет²⁾ величины $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ совпадают, $m \sim L_0^3$, $\kappa \sim L_0$, $S_x \sim L_0^2$ и, следовательно, $k \sim \frac{1}{L_0}$. Так как в этом случае $\bar{d} \sim L_0$, то $\bar{\psi}_a \sim L_0^{+\frac{1}{2}} s_0^{-\frac{1}{2}}$. Если у подобных между собой ракет длины пусковых

1) Изменение z_0 в реальных случаях не выходит обычно из этого интервала.

2) Мы предполагаем, что у подобных ракет в сходственных точках плотности одинаковы. Знаком $\sim$ мы обозначаем прямую пропорциональность.

станков относятся как длины ракет, т. е. $\frac{s_0}{L_0} = \text{const}$, то значения $\bar{\psi}_a$ для таких ракет совпадают. Последний результат можно получить и из точной формулы (69), так как $k \sim L_0^{-1}$, и потому величины $z_0 = ks_0$, а следовательно, $F(z_0)$ для подобных ракет совпадают. Безразмерная же величина $\frac{\bar{d}}{x^2 k}$ при наших предположениях не зависит от размеров ракеты. Поэтому, когда $s_0 \sim L_0$, то величина $\bar{\psi}_a$ у подобных между собой ракет одинакова.

Произведем количественную оценку влияния некоторых из перечисленных параметров на рассеивание оперенных ракет.

Для оценки влияния величины аэродинамического коэффициента устойчивости $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ на разброс оперенных ракет обратимся к рис. 48,

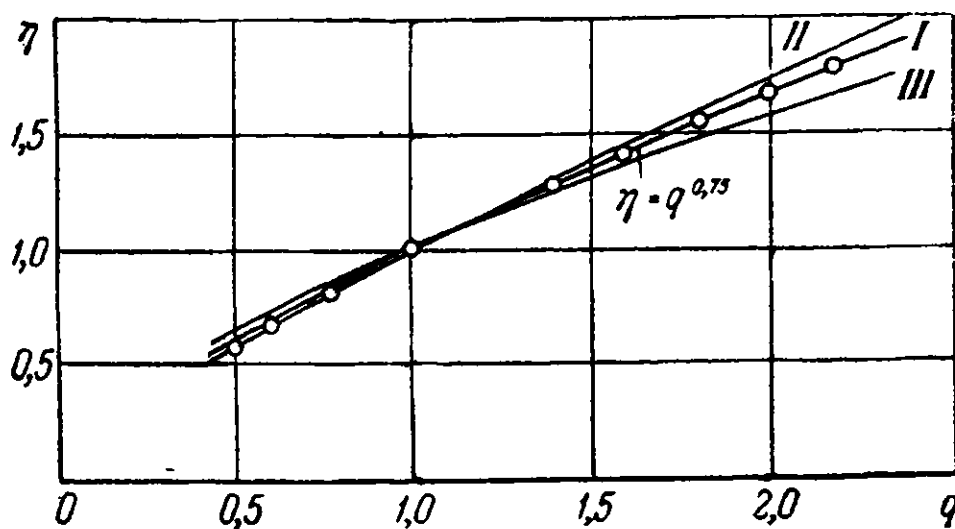


Рис. 48.

на котором изображены графики зависимости углового отклонения ракет от $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$. Графики эти были получены путем расчета по формуле (69) величины $\bar{\psi}_a$ для ракет, имеющих одинаковые с ракетами I, II, III значения параметров $\bar{d}$, m , x , S_m , L_0 , но отличающихся величиной коэффициента устойчивости $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$.

На рис. 48 вдоль оси абсцисс отложено q — отношение рассматриваемого значения $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ к $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ — значению соответственной эталонной ракеты. По оси ординат отложено η — отношение углового отклонения $\bar{\psi}_a$ эталонной ракеты к угловому отклонению рассматриваемой ракеты¹⁾. Построенные таким образом графики для ракет I, II, III почти совпадают друг с другом и очень хорошо аппроксимируются формулой

$$\eta = q^{1/4},$$

¹⁾ Отношение η при этом рассчитывалось по формуле (69).

получаемой из соотношений (74). На рис. 48 график функции $\eta = q^{1/4}$ нанесен точками.

Из рис. 48 видно, что для существенного уменьшения рассеивания ракет I, II, III, например в два раза, необходимо было бы увеличить коэффициент $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$ этих ракет в 2,5—3 раза, что практически необычайно трудно осуществить. Так, например, для того чтобы увеличить $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$ ракеты II всего лишь на 70%, необ-

ходимо увеличить размах ее оперения на 35—40%, что вызывает ряд технических трудностей в изготовлении и эксплуатации такой ракеты. Поэтому у обычной ракеты трудно достигнуть радикального уменьшения рассеивания, идя по пути увеличения коэффициента $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$, если только не использовать раскрывающееся оперение.

Для оценки влияния длины направляющей на угловое отклонение оперенных ракет рассмотрим рис. 49, на котором по оси абсцисс отложена длина пускового станка, а по оси ординат — величина $\bar{\psi}_a$ для ракет I, II, III.

На этом рисунке за единицу углового отклонения принято вероятное угловое отклонение соответствующей ракеты, имеющей эталонную длину направляющей, а за единицу длины направляющей — длина эталонной направляющей. Точками на этом ри-

сунке нанесен график функции $\left(\frac{s_0}{s_{0\text{эт}}} \right)^{-\frac{1}{2}}$, которая равна отношению $\frac{\bar{\psi}_a}{\bar{\psi}_{a.\text{эт}}}$, если имеет место соотношение (74). Из этих графиков

видно, что при изменении длины направляющей в 2—2,5 раза изменение углового отклонения хорошо следует приближенным соотношениям (74).

Рис. 49 показывает, что существенное уменьшение бокового рассеивания, например в 2 раза, может быть достигнуто увеличением длины пускового станка для ракеты I в 3 раза, для ракеты II — в 2,8 раза и для ракеты III — в 5 раз. Очевидно, что для многих ракет такой способ повышения кучности привел бы к весьма громоздким пусковым станкам.

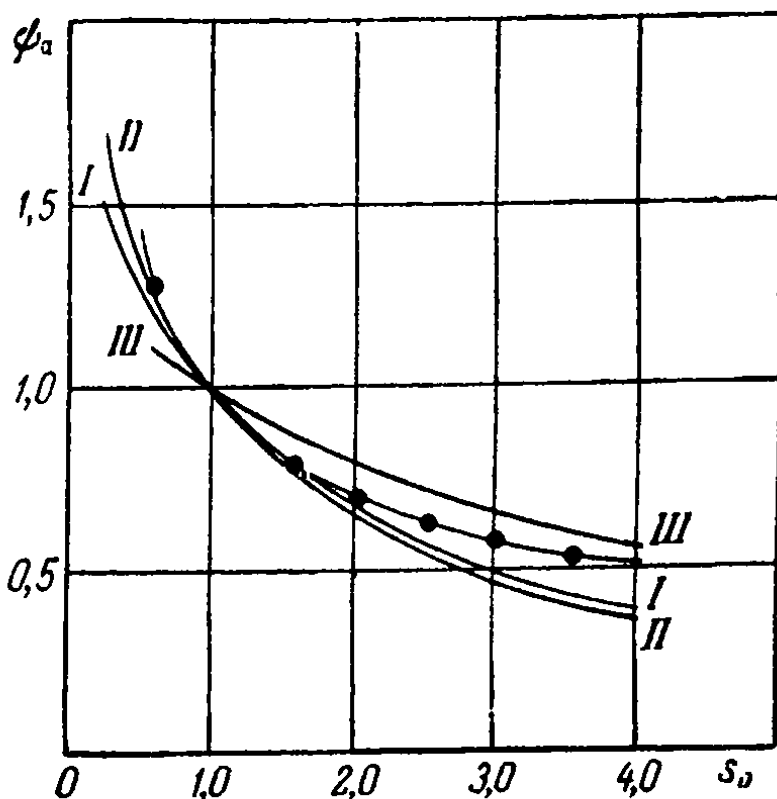


Рис. 49.

Остановимся, наконец, на влиянии изменения плотности воздуха ρ на угловое отклонение ракет. Изменение плотности воздуха происходит главным образом из-за изменения температуры. Можно считать, что плотность обратно пропорциональна абсолютной температуре T . Так как согласно (74) $\bar{\psi}_a \sim \rho^{-\frac{3}{4}}$, то отсюда следует, что

$$\bar{\psi}_a \sim T^{\frac{3}{4}}.$$

Принимая, например, $\bar{\psi}_a$ при температуре $+15^\circ\text{C}$ за единицу, получим:

$t [^\circ\text{C}]$	— 40	— 20	0	+ 15	+ 40
$\bar{\psi}_a$	0,86	0,91	0,96	1	1,06

Таким образом, влияние температурных условий на разброс оперенных ракет сравнительно невелико.

§ 36. Эффективная длина направляющей

В § 28 были выведены формулы (30), устанавливающие зависимость углового отклонения ψ и угла атаки δ от пройденного ракетой пути s . По этим формулам при любой зависимости реактивной тяги от времени, или, что то же, при любой зависимости реактивного ускорения a от времени, можно при помощи квадратур определить углы ψ и δ .

В случае же, когда ускорение a является постоянным на всем активном участке, включая и направляющую, соотношения

$$a = \text{const}, \quad v_n = 0^1), \quad v = \sqrt{2as}$$

вместе с предположением о постоянстве эксцентриситета позволяют выразить функции $\psi(s)$ и $\delta(s)$ через затабулированные функции Бесселя и интегралы Френеля, что дает возможность развить простые аналитические и графические методы расчета рассеивания ракет (см. §§ 32—34). Последние результаты, однако, можно распространить на более общий случай движения ракет, а именно — на случай, когда ускорение a постоянно лишь вне направляющей. Для этого вводится понятие эффективной длины направляющей.

¹⁾ Под v_n мы понимаем скорость ракеты в момент начала горения ракетного заряда.

Рассмотрим ракету, движущуюся по произвольному закону вдоль направляющей и имеющую вне направляющей постоянное реактивное ускорение a . Пусть длина направляющей равна s_0 , а дульная скорость ракеты, т. е. скорость при сходе с направляющей (в момент t_0), равна v_0 . На рис. 50 сплошной кривой OAB представлена зависимость скорости такой ракеты от времени на активном участке траектории.

Сравним движение рассматриваемой ракеты с движением фиктивной ракеты, имеющей то же самое постоянное ускорение a не только вне пускового станка, но и на самой направляющей. Пусть при этом в момент t_0 схода с направляющей фиктивная ракета имеет ту же дульную скорость v_0 , что и реальная. Для удовлетворения последнему требованию длина направляющей у фиктивной ракеты должна быть равна

$$s'_0 = \frac{v_0^2}{2a}.$$

На рис. 50 прямая $O'AB$ представляет зависимость $v(t)$ для этой фиктивной ракеты.

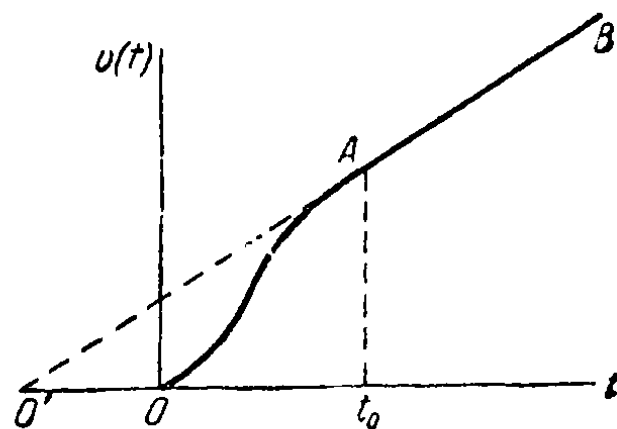


Рис. 50.

Допустим, наконец, что во всем остальном обе ракеты (реальная и фиктивная) одинаковы и что одинаковы также начальные возмущения χ_0 и χ_0 , получаемые при сходе с направляющих. Это означает, что через равные промежутки времени $t - t_0$ после схода ракет с пусковых станков они будут иметь одинаковые значения масс, моментов инерции, и на них будут действовать одинаковые реактивные силы и моменты. Так как при этом обе ракеты имеют равные скорости в любой момент движения после схода с направляющей, то аэродинамические силы и моменты, действующие на эти ракеты, будут иметь одни и те же величины.

При таких условиях совершенно очевидно, что траектории обеих ракет вне направляющей будут одинаковы. Поэтому исследование рассеивания реальной ракеты можно заменить исследованием рассеивания фиктивной ракеты, к которой непосредственно применимы методы расчета углов ψ и δ , развитые в §§ 32—34. При этом концу направляющей s_0 реальной ракеты соответствует путь, пройденный фиктивной ракетой на своей направляющей, длиной s'_0 . Эту длину направляющей мы будем называть *эффективной длиной направляющей* для данной реальной ракеты. Таким образом, эффективная длина направляющей определяется равенством

$$s_{0\text{эф}} = \frac{v_0^2}{2a}, \quad (75)$$

где a — постоянное ускорение вне направляющей.

Если совместить направляющие реальной и фиктивной ракет так, чтобы их концы совпали, то траектории обеих ракет совпадут. Так как длины направляющих s_0 и $s_{0\text{эф}}$, вообще говоря, различны, то начало движения реальной ракеты не совпадает с началом движения фиктивной. Они отстоят друг от друга на расстоянии, равном $s_{0\text{эф}} - s_0$. Отсюда следует, что путь $s_{\text{эф}}$, пройденный фиктивной ракетой к какому-либо моменту времени, и соответствующий путь s , пройденный реальной ракетой, связаны соотношением

$$s_{\text{эф}} = s + s_{0\text{эф}} - s_0. \quad (76)$$

Так как фиктивная ракета все время движется равноускоренно, то эффективная длина пути связана со скоростью ракеты формулой

$$s_{\text{эф}} = \frac{v^2}{2a} \quad ^1). \quad (77)$$

Таким образом, в силу эквивалентности траекторий реальной и фиктивной ракет мы можем вычислить углы ψ и δ для заданной ракеты по формулам §§ 30—32, в которых предполагается, что ускорение a постоянно на всем активном участке (в этих формулах нужно заменить s_0 и s соответственно на $s_{0\text{эф}}$ и $s_{\text{эф}}$). Получив, таким образом, значения углов ψ и δ как функции $s_{\text{эф}}$, мы перейдем к траектории реальной ракеты, выразив в функциях $\psi(s_{\text{эф}})$ и $\delta(s_{\text{эф}})$ величину $s_{\text{эф}}$ через s по формуле (76). В частности, если нас интересует значение угла лишь в конце активного участка и если длина активного участка больше длины критического ($s_{\text{а.эф}} > s_{\text{кр.эф}}$), то значение $\bar{\psi}_a$ найдем по формуле (69), заменив в ней z_0 на $z_{0\text{эф}} = ks_{0\text{эф}}$.

Приложение понятия эффективной длины направляющей к частным видам движения ракет с постоянным вне направляющей ускорением будет рассмотрено в следующих параграфах. В частности, в § 38, посвященном стрельбе ракетами с самолета, будет рассмотрен случай движения ракет при движущейся направляющей.

§ 37. Ступенчатая диаграмма реактивного ускорения.

Активно-реактивные мины. Составные ракеты

Как уже указывалось раньше, искривление активного участка траектории вызывается нормальной слагающей $P \sin \delta$ реактивной тяги, которая появляется при наличии угла атаки, возникающего под влиянием возмущающих факторов. Это искривление тем больше, чем больше величина угла атаки δ , и тем меньше, чем больше скорость ракеты. Таким образом, на первый взгляд кажется, что увеличение

¹⁾ Легко проверить, что соотношения (76) и (77) получаются друг из друга, так как для реальной ракеты

$$v = v_0 + a(t - t_0) \quad \text{и} \quad s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2.$$

дульной скорости всегда должно приводить к уменьшению углового разброса и, следовательно, к уменьшению бокового рассеивания и рассеивания по дальности при небольших углах возвышения. Однако это неверно.

Не всегда увеличение дульной скорости приводит к уменьшению рассеивания. Так, например, оперенные ракеты из-за изменения температуры ракетного заряда летом имеют значительно большую дульную скорость, нежели зимой, и в то же время эти ракеты летом и зимой имеют одну и ту же кучность. В этом вопросе мы легко разберемся, если вспомним содержание § 31. Пусть ускорение a на всем активном участке постоянно, тогда $v_0 = \sqrt{2as_0}$. В § 31 было установлено, что угловой разброс в конце активного участка не зависит от величины этого ускорения, если только длина активного участка остается больше длины критического. Поэтому изменение ускорения a и связанное с этим изменение дульной скорости v_0 не приводит к уменьшению рассеивания оперенных ракет, у которых активный участок больше критического.

Экспериментальным подтверждением данного вывода из теории является то, что рассеивание указанных ракет не зависит от температурных условий стрельбы. Этот факт может быть качественно объяснен тем, что с увеличением ускорения увеличивается не только дульная скорость, равная $\sqrt{2as_0}$, но и отклоняющий боковой момент реактивной силы $M = mad$. Оба момента — реактивный момент M и стабилизирующий аэродинамический момент M_1 , пропорциональный $v^2 = 2as$, — растут пропорционально ускорению.

Заметим, что при увеличении длины направляющей дульная скорость увеличивается при неизменном ускорении и, следовательно, при неизменном значении отклоняющего момента M . Поэтому увеличение длины направляющей приводит к уменьшению разброса. Однако, как указывалось в § 35, этот путь повышения кучности мало приемлем из-за конструктивных соображений.

Высказанные соображения наталкивают на мысль об уменьшении углового разброса оперенной ракеты путем увеличения дульной скорости без увеличения ускорения вне направляющей и без увеличения длины самой направляющей, но за счет увеличения реактивной тяги P (и, следовательно, ускорения a) только на самой направляющей. С теоретической точки зрения осуществить это можно разнообразными способами: при помощи, например, стартовых камер; посредством дополнительного заряда, сгорающего при движении на направляющей, и т. д. Угловой разброс таких ракет можно вычислить, используя понятие эффективной длины направляющей. Остановимся здесь лишь на частном типе ракет, имеющих на направляющей постоянное ускорение a_1 , отличное от постоянного ускорения a_2 вне направляющей. Диаграмма зависимости ускорения от дуги для такой ракеты дана на рис. 51. В рассматриваемом случае дульная скорость

ракеты $v_0 = \sqrt{2as_0}$ и, следовательно, эффективная длина направляющей равна

$$s_{0 \text{ эф}} = \frac{v_0^2}{2a_2} = \frac{2a_1s_0}{2a_2} = \frac{a_1}{a_2} s_0. \quad (78)$$

Таким образом, при ступенчатой диаграмме рис. 51 эффективная длина направляющей во столько раз больше реальной длины s_0 , во

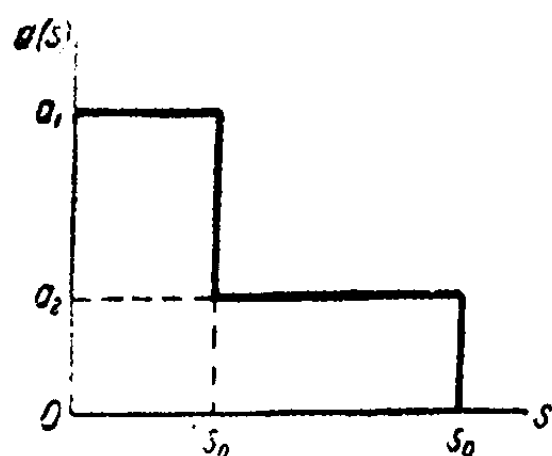


Рис. 51.

сколько раз ускорение a_1 на направляющей больше ускорения a_2 вне направляющей. Это означает, что с точки зрения уменьшения рассеивания увеличение в n раз ускорения на направляющей эквивалентно увеличению в n раз длины направляющей. Совершенно очевидно, что технически первый способ уменьшения рассеивания более приемлем, нежели второй.

Если добавочный заряд не сгорает полностью на направляющей (рис. 52) или ступенчатая диаграмма $a(s)$ имеет большее число ступенек (рис. 53), то вычисление разброса нужно проводить в несколько этапов (по числу ступенек). Определив скорость v , углы ψ и δ и их

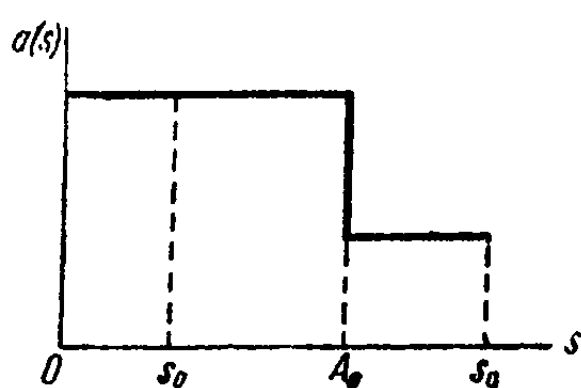


Рис. 52.

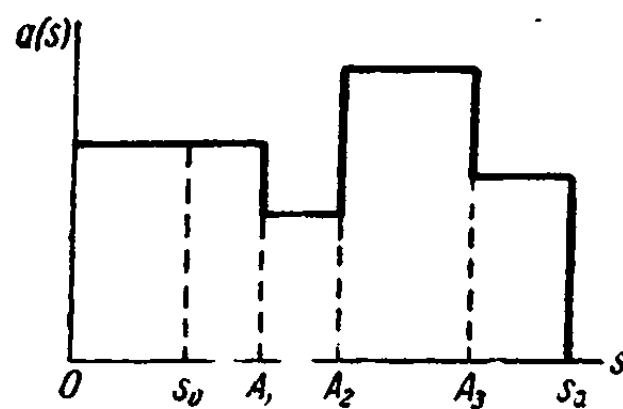


Рис. 53.

производные $\dot{\psi}$ и $\dot{\delta}$ в точке A_1 (рис. 53), продолжим расчет на участке A_1A_2 , исходя из начальных условий:

$$\psi_0 = \psi_{A_1}, \quad \chi_0 = \delta_{A_1} + \psi_{A_1}, \quad \dot{\chi}_0 = \dot{\delta}_{A_1} + \dot{\psi}_{A_1}$$

и

$$s_{0 \text{ эф}} = \frac{v_{A_1}^2}{2a_{A_1A_2}},$$

где $a_{A_1A_2}$ — ускорение на участке A_1A_2 . Найдя v , δ , ψ , $\dot{\delta}$, $\dot{\psi}$ в точке A_2 , переходим таким же образом к расчету на участке A_2A_3 и т. д.¹⁾

¹⁾ См. § 39, а также решение задачи № 13 (стр. 147).

Покажем теперь, что то же понятие эффективной длины направляющей позволяет легко вычислить угловой разброс на активном участке для активно-реактивных мин и составных ракет. Активно-реактивная мина вылетает из ствола миномета с некоторой начальной скоростью v_0 . Благодаря замедлителю заряд начинает гореть лишь на некотором расстоянии от ствола, когда скорость мины будет иметь некоторую величину v_n . Если при этом реактивное ускорение постоянно на всем активном участке, то угловое отклонение на этом участке вычисляется описанным в предыдущих параграфах способом в предположении, что

$$s_{0 \text{ эф}} = \frac{v_n^2}{2a}.$$

При очень больших значениях величины $s_{0 \text{ эф}}$ разброс на активном участке, вызванный эксцентриситетом реактивной силы, становится значительно меньшим, нежели разброс на пассивном участке. С другой стороны, начальные возмущения χ_n и $\dot{\chi}_n$ у активно-реактивных мин¹⁾ могут быть значительно большими, нежели у обычных ракет, и потому именно эти начальные возмущения (а не эксцентриситет реактивной силы) могут быть доминирующим фактором, определяющим рассеивание на активном участке траектории.

Составные ракеты имеют несколько ракетных камер. После сгорания первого заряда ракета летит некоторое время как обычная мина, затем загорается второй ракетный заряд и одновременно отбрасывается первая ракетная камера и т. д. Примером такой ракеты является немецкая дальнобойная ракета Рейнботе.

Если реактивное ускорение постоянно на каждом из активных участков, начиная со второго, то расчет угловых отклонений на этих участках ничем по идее не отличается от расчета углового отклонения активно-реактивной мины²⁾. Как и в случае активно-реактивной мины, нам представляется, что для составных ракет основной причиной углового разброса на втором, третьем и т. д. активных участках являются начальные возмущения, причем главной причиной этих возмущений являются толчки, получаемые ракетой при отбрасывании камер.

Заметим, наконец, что эффективная длина направляющих для активно-реактивных мин и составных ракет будет увеличиваться с уменьшением реактивного ускорения a , т. е. в зимних условиях будет большей, чем в летних.

¹⁾ То есть значения χ и $\dot{\chi}$ в момент начала горения ракетного заряда.

²⁾ Отметим, что угловые отклонения составной ракеты на различных активных участках ее траектории представляют собой независимые случайные величины. Заметим еще, что для вычисления бокового рассеивания этих ракет нужно принять во внимание различие углов возвышения траектории в начале различных активных участков.

Рассмотрим угловое рассеивание оперенных ракет при стрельбе с самолета. Предположим, что стрельба производится в направлении движения самолета. Точнее говоря, мы предположим, что во время движения ракеты по направляющей самолет (а следовательно, и пусковое устройство, неизменно связанное с самолетом) движется поступательно и ось направляющей параллельна скорости самолета. Так как ускорение самолета мало по сравнению с ускорением реактивной силы, то без ограничения общности задачи мы можем считать скорость самолета за время движения ракеты по станку постоянной величиной. Тогда абсолютная дульная скорость ракеты, т. е. скорость ракеты относительно земли в момент схода с направляющей, равна $V + v_0$, где V — скорость самолета, а v_0 — дульная скорость в земных условиях, которая практически равна дульной скорости относительно станка при стрельбе с самолета. Поэтому если реактивное ускорение a вне направляющей постоянно, то расчет углового разброса при стрельбе с самолета можно провести указанным в § 36 способом, полагая

$$s_{0 \text{ эф}} = \frac{(V + v_0)^2}{2a}. \quad (79)$$

В земных условиях эффективная длина направляющей нашей ракеты равна $\frac{v_0^2}{2a}$. Поэтому при стрельбе с самолета эффективная длина направляющей увеличивается в $(n + 1)^2$ раз, где $n = \frac{V}{v_0}$. Это приводит к уменьшению углового разброса в конце активного участка при стрельбе ракетами с самолета по сравнению со стрельбой (теми же ракетами и с той же направляющей) в земных условиях¹⁾.

Так как скорость самолета V может быть в несколько раз больше v_0 , то указанное уменьшение рассеивания может быть очень значительным. Оно тем больше, чем больше скорость самолета.

В следующей таблице приведены значения $\bar{\psi}_a$ при стрельбе с самолета ракетами // при длине направляющей, равной 2 м, и температуре $+15^\circ\text{C}$ ($v_0 = 42$ м/сек). В качестве единицы углового рассеивания принимаем величину $\bar{\psi}_a = \psi_{a0}$ в земных условиях (при $s_0 = 2$ м)²⁾. Плотность атмосферы предполагается равной ее наземному значению.

¹⁾ При этом не учитывается изменение плотности атмосферы с высотой. Учет этого фактора приводит к изменению величины коэффициента k .

²⁾ В случае стрельбы с горизонтально летящего самолета $\bar{\psi}_a$ (в радианах) совпадает с $\frac{B\delta}{X}$. Здесь $B\delta$ — вероятное отклонение, вызванное эксцентриситетом реактивной силы. Заметим, что при стрельбе с самолета возможно появление значительных начальных возмущений, вызванных нестационарностью движения самолета.

V км/час	0	150	200	250	300	400	500
$s_{0 \text{ эф}} \cdot \mu$	2	7,9	10,8	14,1	17,8	26,6	37,2
$\frac{\dot{\psi}_{\lambda 0}}{\dot{\psi}_\lambda}$	1	1,9	2,6	3,1	3,8	6,3	8,5

Значительное уменьшение углового рассеивания на активном участке при стрельбе ракетами с самолета позволяет в этом случае применять направляющую нулевой длины. Тогда

$$s_{0 \text{ эф}} = \frac{V^2}{2a}.$$

§ 39. Угловой разброс, вызванный начальными возмущениями

В § 28 было выяснено, что в угловом разбросе непроворачивающихся оперенных ракет доминирующую роль играет несимметрия реактивной силы. Исходя из этого, в предыдущих параграфах при анализе рассеивания ракет мы полагали $\psi \approx \psi_M$. Однако в некоторых случаях (например, при ступенчатой диаграмме, при исследовании составных ракет) приходится иметь дело и с угловым отклонением, вызванным начальными возмущениями. Кроме того, в отдельных случаях, когда угловой разброс, вызванный несимметрией реактивной силы, очень мал, доминирующая роль переходит к начальным возмущениям. В настоящем параграфе мы подробно остановимся на угловом разбросе, вызываемом начальными возмущениями χ_0 и $\dot{\chi}_0$.

Из формул (27) следует, что¹⁾

$$u_{\chi_0} = u_0 \cos k(s - s_0) = v_0 (\chi_0 - \dot{\psi}_0) \cos k(s - s_0);$$

$$u_{\dot{\chi}_0} = \frac{u'_0}{k} \sin k(s - s_0) = \frac{\dot{\chi}_0}{k} \sin k(s - s_0).$$

Положив $a = \text{const}$ и разделив почленно эти равенства на $v = \sqrt{2as}$, получим (полагая $z = ks$):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\chi_0} = \frac{u_{\chi_0}}{v} &= (\chi_0 - \dot{\psi}_0) \sqrt{s_0} \frac{\cos k(s - s_0)}{\sqrt{s}} = (\chi_0 - \dot{\psi}_0) \sqrt{z_0} \frac{\cos(z - z_0)}{\sqrt{z}}; \\ \delta_{\dot{\chi}_0} = \frac{u_{\dot{\chi}_0}}{v} &= \frac{\dot{\chi}_0}{k \sqrt{2a}} \frac{\sin k(s - s_0)}{\sqrt{s}} = \frac{\dot{\chi}_0}{\sqrt{2ak}} \frac{\sin(z - z_0)}{\sqrt{z}}. \end{aligned} \right\} (80)$$

¹⁾ Заметим, что выражение для u_{χ_0} содержит в качестве множителя не χ_0 , а разность $\chi_0 - \dot{\psi}_0 = \delta_0$. Поэтому u_{χ_0} и, следовательно, δ_{χ_0} , $\dot{\psi}_{\chi_0}$ [см. (80) и (81)] могут быть отличными от нуля, когда $\chi_0 = 0$, но $\delta_0 = -\dot{\psi}_0 \neq 0$. Такой случай разобран, например, в главе IX.

Пользуясь формулой (46), найдем:

$$\frac{d\chi_{\chi_0}}{dz} = -(\chi_0 - \psi_0) \sqrt{z_0} \frac{\sin(z - z_0)}{\sqrt{z}}; \quad \frac{d\dot{\chi}_{\dot{\chi}_0}}{dz} = \frac{\dot{\chi}_0}{\sqrt{2ak}} \frac{\cos(z - z_0)}{\sqrt{z}}.$$

Интегрируя почленно в пределах от z_0 до z и заменяя χ на $\psi + \delta$, мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\chi_0} &= -\delta_{\chi_0} - (\chi_0 - \psi_0) \sqrt{z_0} \int_{z_0}^z \frac{\sin(z - z_0)}{\sqrt{z}} dz + \chi_0, \\ \dot{\psi}_{\dot{\chi}_0} &= -\dot{\delta}_{\dot{\chi}_0} + \frac{\dot{\chi}_0}{\sqrt{2ak}} \int_{z_0}^z \frac{\cos(z - z_0)}{\sqrt{z}} dz. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Выражая правые части равенств (80) и (81) через затабулированные функции Бесселя и интегралы Френеля (см. § 32), получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\chi_0} &= \frac{\pi(\chi_0 - \psi_0)z_0}{2} \left[J_{-\frac{1}{2}}(z) J_{-\frac{1}{2}}(z_0) + J_{\frac{1}{2}}(z) J_{\frac{1}{2}}(z_0) \right], \\ \dot{\delta}_{\dot{\chi}_0} &= \dot{\chi}_0 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{s_0}{2a}} \left[J_{\frac{1}{2}}(z) J_{-\frac{1}{2}}(z_0) - J_{-\frac{1}{2}}(z) J_{\frac{1}{2}}(z_0) \right], \\ \psi_{\chi_0} &= -\delta_{\chi_0} + \chi_0 + \pi(\chi_0 - \psi_0)z_0 \left\{ J_{\frac{1}{2}}(z_0) C_{z_0}^z - J_{-\frac{1}{2}}(z_0) S_{z_0}^z \right\}, \\ \dot{\psi}_{\dot{\chi}_0} &= -\dot{\delta}_{\dot{\chi}_0} + \dot{\chi}_0 \pi \sqrt{\frac{s_0}{2a}} \left\{ J_{-\frac{1}{2}}(z_0) C_{z_0}^z + J_{\frac{1}{2}}(z_0) S_{z_0}^z \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

На рис. 54—59 даны расчетные значения δ_{χ_0}/χ_0 , ψ_{χ_0}/χ_0 , $\dot{\delta}_{\dot{\chi}_0}/\dot{\chi}_0$ и $\dot{\psi}_{\dot{\chi}_0}/\dot{\chi}_0$ для ракет I, II, III. Как видно из этих рисунков, для угловых отклонений $\psi_{\chi_0}(s)$ и $\dot{\psi}_{\dot{\chi}_0}(s)$, так же как и для $\psi_M(s)$, существует критический участок, на котором и происходит основное нарастание ψ . При $s > s_{кр}$ угловые отклонения ψ_{χ_0} и $\dot{\psi}_{\dot{\chi}_0}$ меняются уже в слабой степени.

Для рассеивания, вызванного наличием начального угла $\chi_0 = \delta_0$, критический участок кончается в той точке активного участка $s_{кр\chi_0}$, где угол атаки δ впервые становится равным нулю. На основании первого уравнения (80) для конца критического участка $s_{кр\chi_0}$ мы будем иметь уравнение

$$s_{кр\chi_0} = s_0 + \frac{\pi}{2k}.$$

Для рассеивания, вызванного наличием начальной угловой скорости $\dot{\chi}_0$, критический участок также кончается в той точке $s_{кр\dot{\chi}_0}$ активного участка, где угол атаки δ впервые после схода ракеты со станка обращается в нуль. Для $s_{кр\dot{\chi}_0}$ имеем уравнение

$$s_{кр\dot{\chi}_0} = s_0 + \frac{\pi}{b}.$$

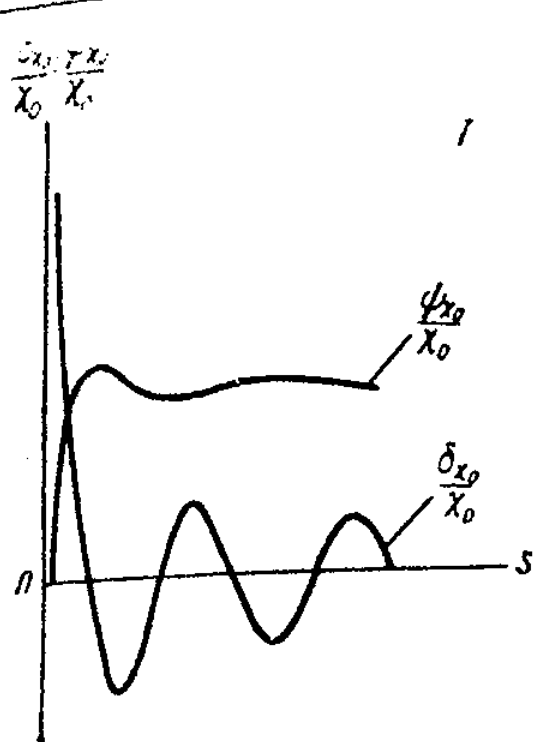


Рис. 54.

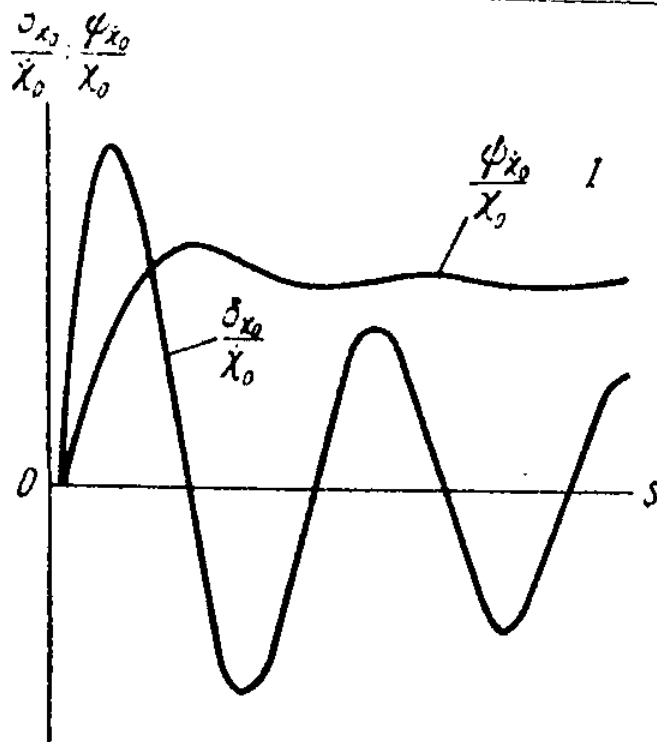


Рис. 55.

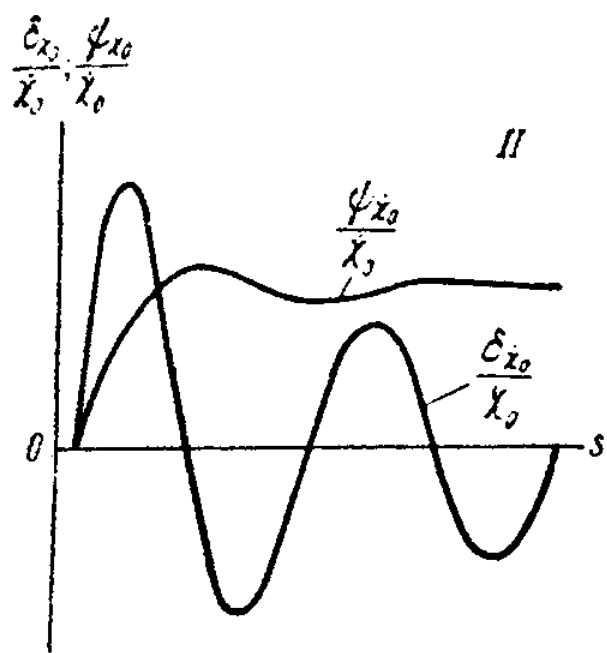


Рис. 56.

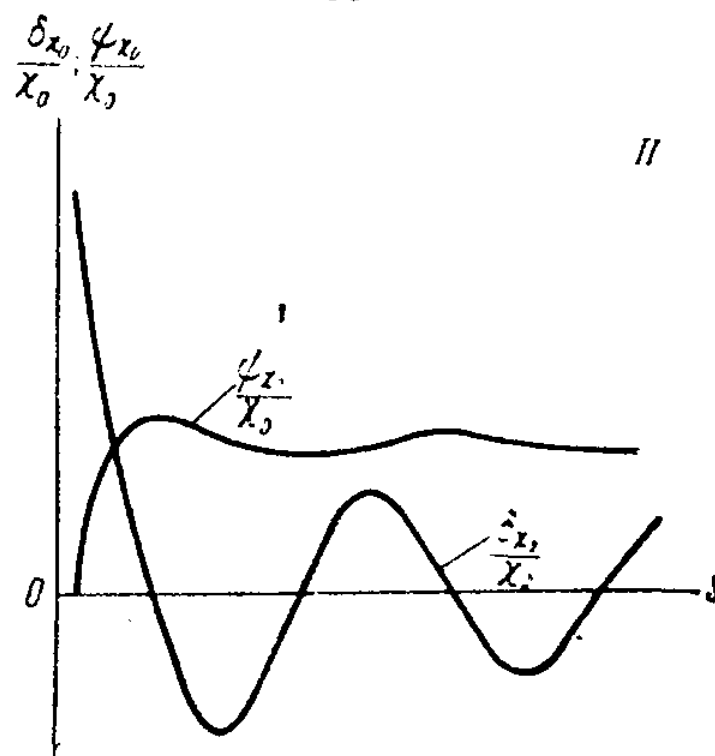


Рис. 57.

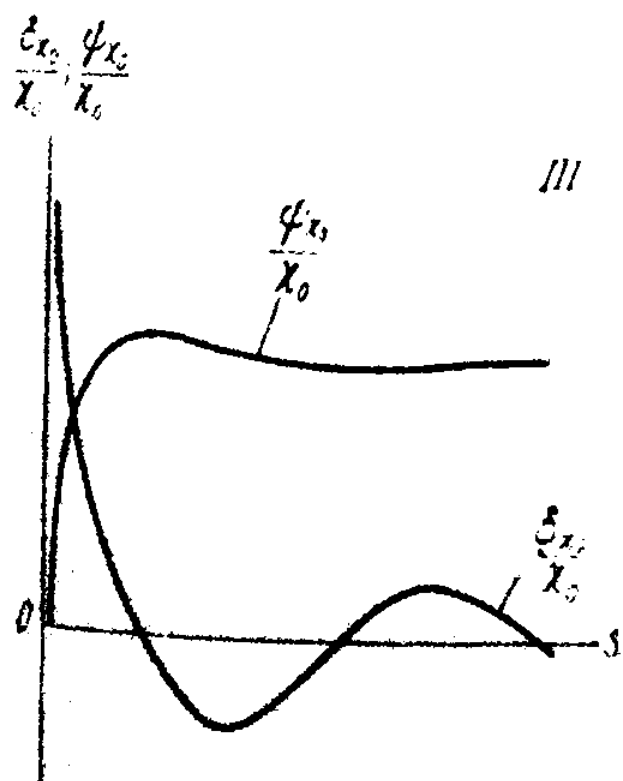


Рис. 58.

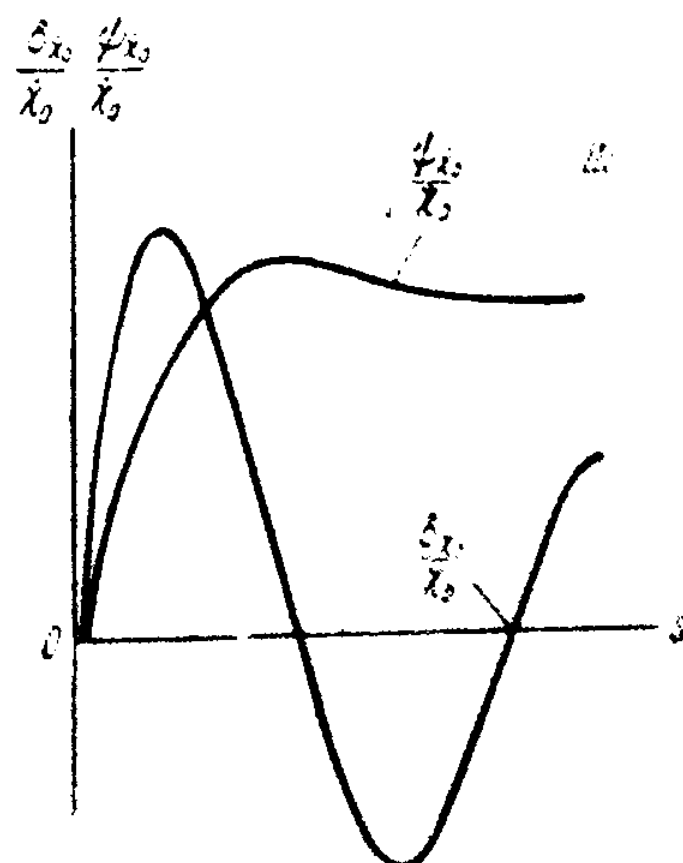


Рис. 59.

§ 40. Пути уменьшения рассеивания оперенных ракет

Из проведенного выше исследования вытекают следующие теоретические возможности уменьшения углового рассеивания¹⁾:

1. Уменьшение газодинамического эксцентриситета.
2. Увеличение длины пускового станка, вызывающее увеличение скорости схода с направляющей при неизменном боковом моменте M (см. § 35).
3. Увеличение коэффициента аэродинамической устойчивости ракеты $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$, вызывающее (при прочих равных условиях) уменьшение углов атаки, появляющихся из-за эксцентриситета реактивной силы (см. § 35).
4. Применение специальных приспособлений, придающих диаграмме реактивной силы ступенчатый вид, позволяющих, как и при увеличении длины направляющей, значительно повысить скорость схода ракеты со станка, не увеличивая бокового момента M вне направляющей (см. § 37).
5. Резкое уменьшение длины активного участка до длины значительно меньшей, чем длина критического участка (см. § 31).

Следует обратить внимание еще на один эффективный метод уменьшения рассеивания, заключающийся в придании оперенной ракете вращения вокруг оси. Исследования, связанные с этим способом уменьшения рассеивания, читатель найдет в следующей главе.

§ 41. Интегрирование основного дифференциального уравнения при полной системе сил и моментов

Вернемся к рассмотрению полной системы сил, действующих на оперенную ракету на активном участке траектории. В §§ 24—26 были составлены уравнения движения (2) оперенных ракет под действием такой системы сил и было показано, что интегрирование системы уравнений движения может быть сведено к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + 2h \frac{du}{ds} + k^2 u = D(s), \quad (83)$$

где $u = v^2$, а коэффициенты h , k и правая часть уравнения $D(s)$ определяются формулами (8).

¹⁾ Следовательно, и бокового рассеивания, а также рассеивания по дальности при небольших углах возвышения.

Для интегрирования этого уравнения воспользуемся подстановкой

$$u = e^{-h(s-s_0)} w, \quad (84a)$$

где w — новая неизвестная функция.

Дифференцируя почленно (84a), находим:

$$\frac{du}{ds} = e^{-h(s-s_0)} \left(\frac{dw}{ds} - hw \right), \quad (84b)$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} = e^{-h(s-s_0)} \left(\frac{d^2w}{ds^2} - 2h \frac{dw}{ds} + h^2 w \right). \quad (84b)$$

Подставляя выражения (84) в (83), после элементарных преобразований получим:

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \bar{k}^2 w = D_1(s), \quad (85)$$

где

$$\bar{k}^2 = k^2 - h^2 \quad \text{и} \quad D_1(s) = e^{h(s-s_0)} D(s). \quad (85')$$

Уравнение (85) лишь обозначением коэффициентов и переменных отличается от уравнения (13), общий интеграл которого определен в § 27 формулой (27).

Поэтому, аналогично равенству (27), имеем:

$$w = \frac{1}{\bar{k}} \int_{s_0}^s \sin \bar{k}(s-\sigma) D_1(\sigma) d\sigma + w_0 \cos \bar{k}(s-s_0) + \frac{w'_0}{\bar{k}} \sin \bar{k}(s-s_0), \quad (86)$$

где

$$w_0 = (w)_{s=s_0} \quad \text{и} \quad w'_0 = \left(\frac{dw}{ds} \right)_{s=s_0}.$$

Для того чтобы получить общее выражение для u , выразим w_0 и w'_0 через u_0 и u'_0 при помощи равенств (84):

$$w_0 = u_0, \quad w'_0 = u'_0 + hu_0.$$

Замечая, что $u = e^{-h(s-s_0)} w$ и $D_1(\sigma) = e^{h(\sigma-s_0)} D(\sigma)$, из равенства (86) получим:

$$u = \frac{1}{\bar{k}} \int_{s_0}^s e^{-h(s-\sigma)} \sin \bar{k}(s-\sigma) D(\sigma) d\sigma + e^{-h(s-s_0)} \left[u_0 \cos \bar{k}(s-s_0) + \frac{u'_0 + hu_0}{\bar{k}} \sin \bar{k}(s-s_0) \right]. \quad (87)$$

Это и есть решение дифференциального уравнения (83), удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$(u)_{s=s_0} = u_0; \quad \left(\frac{du}{ds} \right)_{s=s_0} = u'_0.$$

§ 42. Формулы для углов δ и ψ при полной системе сил и моментов

В § 26 мы уже выразили величины u_0 и u'_0 через начальный угол поворота ракеты γ_0 и начальную экваториальную угловую скорость $\dot{\gamma}_0$ [см. (9)]. Подставляя эти выражения в (87) и используя выражение для $D(s)$ из (8), получим:

$$u = u_M + u_{P_1} + u_{\gamma_0} + u_{\dot{\gamma}_0}, \quad (88a)$$

(12-1)

$$u_M = \frac{1}{k} \int_{s_0}^s e^{-h(s-\sigma)} \sin \bar{k}(s-\sigma) \frac{M(\sigma)}{I(\sigma)v(\sigma)} d\sigma; \quad (88b)$$

$$u_{P_1} = \frac{b_0}{kv_0} e^{-h(s-s_0)} \sin \bar{k}(s-s_0) + \\ + \frac{1}{k} \int_{s_0}^s e^{-h(s-\sigma)} \sin k(s-\sigma) \left\{ \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{b(\sigma)}{v(\sigma)} \right] + \frac{k_0 b(\sigma)}{v(\sigma)} \right\} d\sigma; \quad (88b)$$

$$u_{\gamma_0} = \gamma_0 v_0 e^{-h(s-s_0)} \left[\cos k(s-s_0) + \frac{h}{k} \frac{2-n}{k} \sin k(s-s_0) \right]; \quad (88r)$$

$$u_{\dot{\gamma}_0} = \frac{\dot{\gamma}_0}{k} e^{-h(s-s_0)} \sin \bar{k}(s-s_0). \quad (88d)$$

Здесь и в дальнейшем мы индексами M , P_1 , γ_0 и $\dot{\gamma}_0$ отмечаем члены, зависящие от бокового реактивного момента M , боковой слагающей реактивной силы P_1 и начальных возмущений γ_0 и $\dot{\gamma}_0$.

Заметим, что выражение для u_{P_1} путем интегрирования по частям легко привести к виду

$$u_{P_1} = \int_{s_0}^s e^{-h(s-\sigma)} \left[\cos \bar{k}(s-\sigma) + \frac{k_0 - h}{\bar{k}} \sin \bar{k}(s-\sigma) \right] \frac{b(\sigma)}{v(\sigma)} d\sigma. \quad (89)$$

Используя формулы (10) и (11), получим:

$$\delta = \delta_M + \delta_{P_1} + \delta_{\gamma_0} + \delta_{\dot{\gamma}_0}, \quad \psi = \psi_M + \psi_{P_1} + \psi_{\gamma_0} + \psi_{\dot{\gamma}_0}, \quad (90a)$$

¹⁾ При выводе выражений u_{P_1} и u_{γ_0} необходимо воспользоваться выражениями для u'_0 и $D(s)$ из формул (8) и (96).

где

$$\delta_M = \frac{u_M}{v}, \quad \psi_M = \int_{s_1}^s \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \delta_M ds; \quad (90б)$$

$$\delta_{P_1} = \frac{u_{P_1}}{v}, \quad \psi_{P_1} = \int_{s_0}^s \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \delta_{P_1} ds - \int_{s_0}^s \frac{b}{v^2} ds; \quad (90в)$$

$$\delta_{\gamma_0} = \frac{u_{\gamma_0}}{v}, \quad \psi_{\gamma_0} = \int_{s_1}^s \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \delta_{\gamma_0} ds; \quad (90г)$$

$$\delta_{\dot{\gamma}_0} = \frac{u_{\dot{\gamma}_0}}{v}, \quad \psi_{\dot{\gamma}_0} = \int_{s_1}^s \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \delta_{\dot{\gamma}_0} ds. \quad (90д)$$

Величины M и P_1 характеризуют несимметрию реактивной силы, а величины γ_0 , $\dot{\gamma}_0$ — начальные возмущения, которые получает ракета при сходе с пускового станка.

Несимметрия реактивной силы и начальные возмущения являются независимыми друг от друга случайными факторами, причем, как было выяснено в § 28, несимметрия реактивной силы является доминирующим фактором при рассеивании оперенных ракет полевой артиллерии. Поэтому мы полагаем в дальнейшем $\gamma_0 = 0$; $\dot{\gamma}_0 = 0$ и, следовательно,

$$\delta \approx \delta_M + \delta_{P_1}; \quad \psi \approx \psi_M + \psi_{P_1}. \quad (91)$$

Боковая слагающая P_1 реактивной силы является случайной величиной. Значение этой величины существенно меняется от ракеты к ракете в группе однотипных ракет. Мы принимаем, что эта случайная величина подчинена закону Гаусса.

Для определения меры точности или вероятного среднего отклонения в законе Гаусса необходимо иметь для каждого типа ракет достаточно большой экспериментальный статистический материал. Ввиду отсутствия нужных экспериментальных исследований мы вынуждены для оценки порядка величины отношения $\frac{P_1}{P}$ пользоваться следующими соображениями.

Несимметрия реактивной силы может быть газодинамической или геометрической природы. В первом случае основной причиной несимметрии реактивной силы является несимметрия газового потока, выходящего через выходное сечение сопла; во втором случае такой причиной является несоосность (несовпадение осей) сопла и ракеты. Поскольку в обоих случаях несимметрия возникает в области сопла, то принимаем гипотезу о том, что точка приложения полной реактивной

силы T лежит на оси ракеты в среднем сечении сопла ¹⁾. Тогда (рис. 33)

$$\frac{P_1}{P} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{d}{L_c}, \quad (92)$$

где γ — угол, образованный реактивной силой T с осью ракеты, а $L_c = CO_1$ — так называемое плечо сопла (расстояние от середины сопла до центра тяжести ракеты).

Согласно равенству (92) случайная величина P_1 пропорциональна случайной величине d . Из соотношения (92) находим:

$$b = \frac{a}{L_c} d. \quad (93)$$

Как и в § 29, принимаем гипотезу о постоянстве эксцентриситета d . Тогда в выражениях для δ и ψ можно постоянный множитель d вынести за знак интеграла и написать:

$$\delta = d\delta^*(s), \quad \psi = d\psi^*(s),$$

где δ^* и ψ^* уже не зависят от d .

Функции $\delta^*(s)$ и $\psi^*(s)$ могут быть вычислены с помощью квадратур при произвольной диаграмме реактивной тяги $P = P(t)$, если известны геометрические, механические и аэродинамические характеристики ракеты.

§ 43. Исследование полученных формул. Основные и второстепенные силы и моменты

Рассмотрим прежде всего коэффициенты k и h , фигурирующие в левой части уравнения (83). Расчеты, выполненные для разнообразных оперенных ракет, показывают, что всегда

$$n \ll k_2 + \mu; \quad k_2(\mu + n) \ll k_1^2,$$

и, следовательно, в пределах точности экспериментальных данных,

$$\left. \begin{aligned} 2h &= k_2 + \mu + n \approx k_2 + \mu, \\ k^2 &= k_1^2 + k_2(\mu + n) \approx k_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Кроме того,

$$h \ll k_1 \approx k,$$

и потому

$$\bar{k} = \sqrt{k^2 - h^2} \approx k. \quad (95)$$

¹⁾ В § 29 были приведены основанные на конкретных расчетах физические соображения в пользу этой гипотезы.

Для определения скорости воспользуемся уравнением (2а):

$$\frac{dv}{dt} = a - nv^2.$$

При расчете траектории ракеты определяют поправку ($-nv^2$) к величине скорости, обусловленную сопротивлением воздуха. Для полевых оперенных ракет эта поправка мала. Для ракет I, II, III даже в конце активного участка она не превышает 1,5% от величины скорости. Поэтому в уравнении (2а) мы можем отбросить член ($-nv^2$) и определить v из уравнения $\frac{dv}{dt} = a$.

В § 30 уже было показано, что для оперенных ракет можно с большой степенью точности положить

$$a = \text{const}, \quad v = at, \quad s = \frac{1}{2} at^2$$

и, следовательно,

$$v = \sqrt{2as}.$$

Тогда из формулы (93) следует, что и

$$b = \frac{a}{L_c} d = \text{const}.$$

Величина $\frac{M}{Iv}$, стоящая под знаком интеграла в выражении (88б) для μ_M , может быть записана следующим образом:

$$\frac{M(\tau)}{I(\tau)v(\tau)} = \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{d}{x^2} \frac{1}{\sqrt{s}}. \quad (96)$$

Полагая, как и в § 30,

$$x = x_{cp} = \text{const},$$

мы можем в силу (88), (90) и (95) представить выражение для δ_M в виде

$$\delta_M = \frac{d}{2kx^2} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_s^s \frac{e^{-h(s-\tau)} \sin k(s-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau. \quad (97)$$

Конкретные расчеты показывают, что δ_P пренебрежимо мало по сравнению с δ_M . Это следует из рис. 60—62, где даны графики величин δ_M и $20 \cdot \delta_P$ для ракет I, II, III.

На основе изложенного в этом параграфе мы из равенств (91) и (97) получаем для углов $\delta(s)$ и $\psi(s)$ следующие формулы:

$$\delta \approx \delta_M = \frac{d}{2\chi^2 k} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{s_1}^s \frac{e^{-h(s-\sigma)} \sin k(s-\sigma)}{\sqrt{\sigma}} d\sigma, \quad (98a)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 - \psi_3, \quad (98b)$$

где

$$\psi_1 = \int_{s_1}^s \frac{\delta}{2s} ds; \quad \psi_2 = \mu \int_{s_1}^s \delta ds; \quad \psi_3 = \frac{b}{2a} \int_{s_0}^s \frac{ds}{s} = \frac{b}{2a} \ln \frac{s}{s_0}. \quad (98b)$$

Численные расчеты показывают, что в конце активного участка траектории каждый из членов ψ_2 и ψ_3 достигает примерно 15—20%

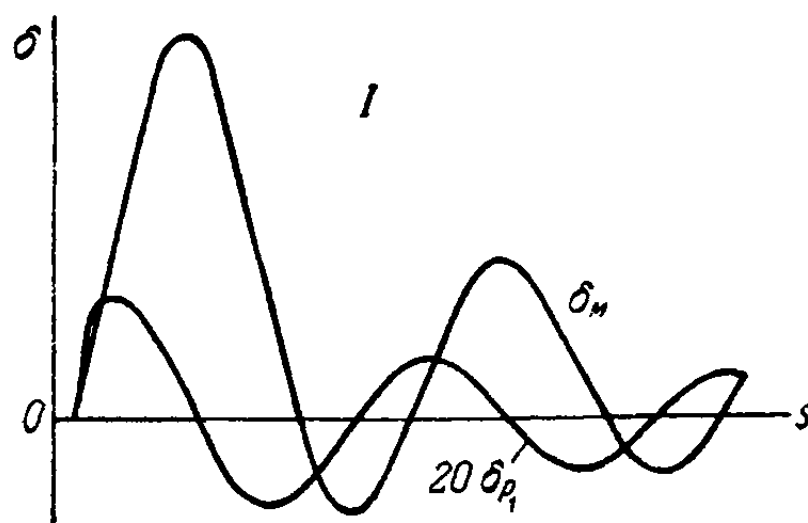


Рис. 60.

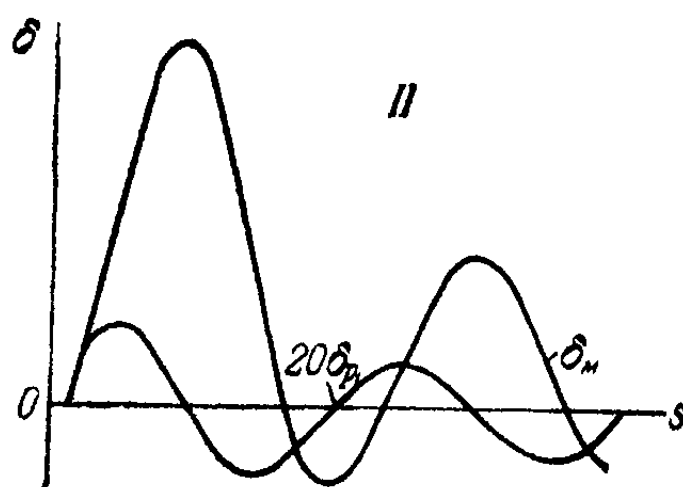


Рис. 61.

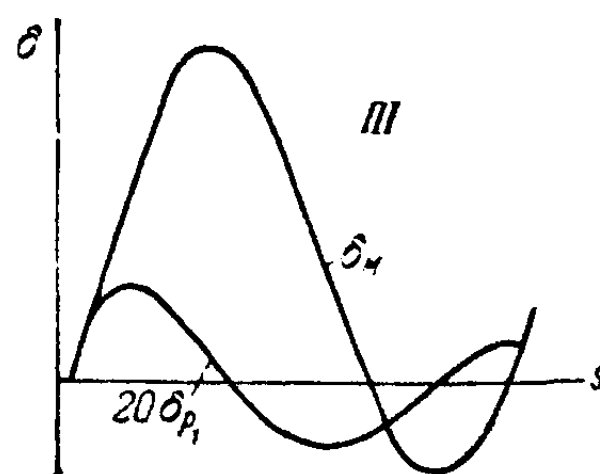


Рис. 62.

от ψ_1 для ракет I, II и 5—8% — для ракеты III (см. рис. 63—65).

Однако разность $\psi_2 - \psi_3$ для всех трех ракет на всем активном участке не превышает 4% от ψ_1 . Таким образом, из формулы (98b) получаем:

$$\psi \approx \psi_1 = \int_{s_1}^s \frac{\delta}{2s} ds = \frac{d}{4\chi^2 k} \int_{s_1}^s \frac{ds}{s^{3/2}} \int_{s_0}^s \frac{e^{-h(s-\sigma)} \sin k(s-\sigma)}{\sqrt{\sigma}} d\sigma. \quad (99)$$

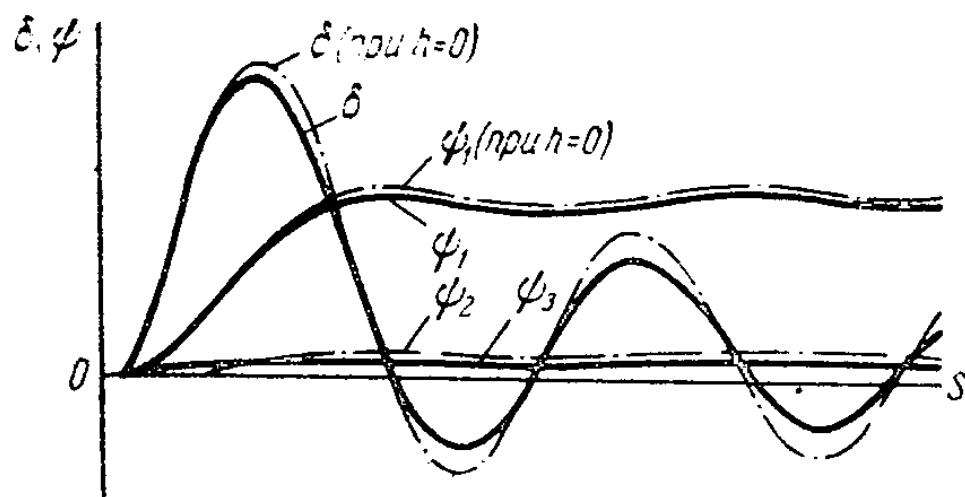


Рис. 63.

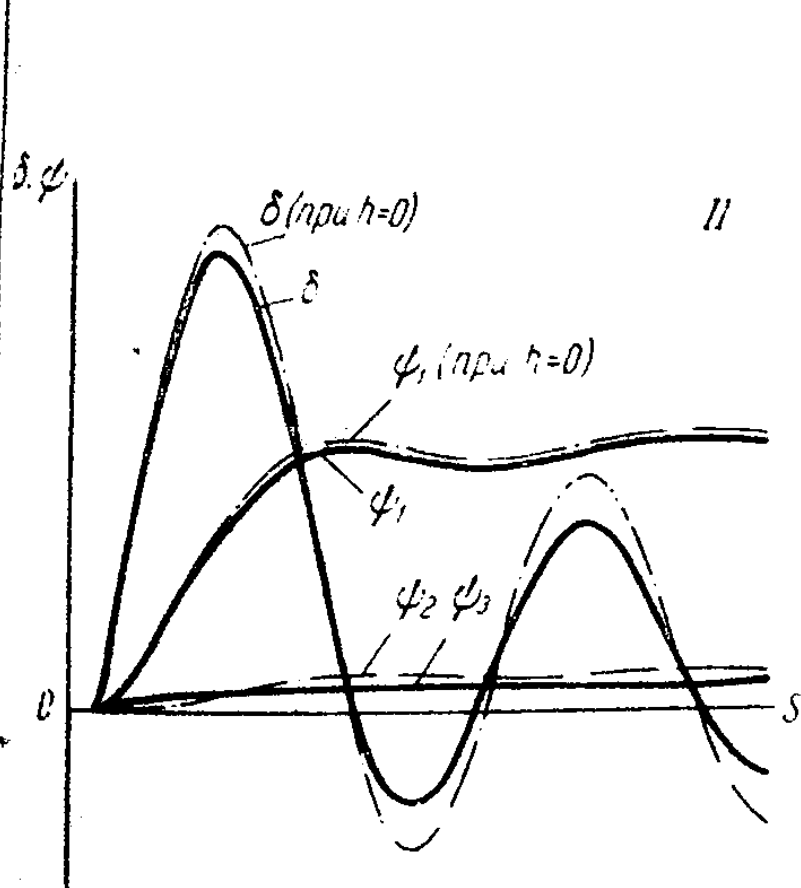


Рис. 64.

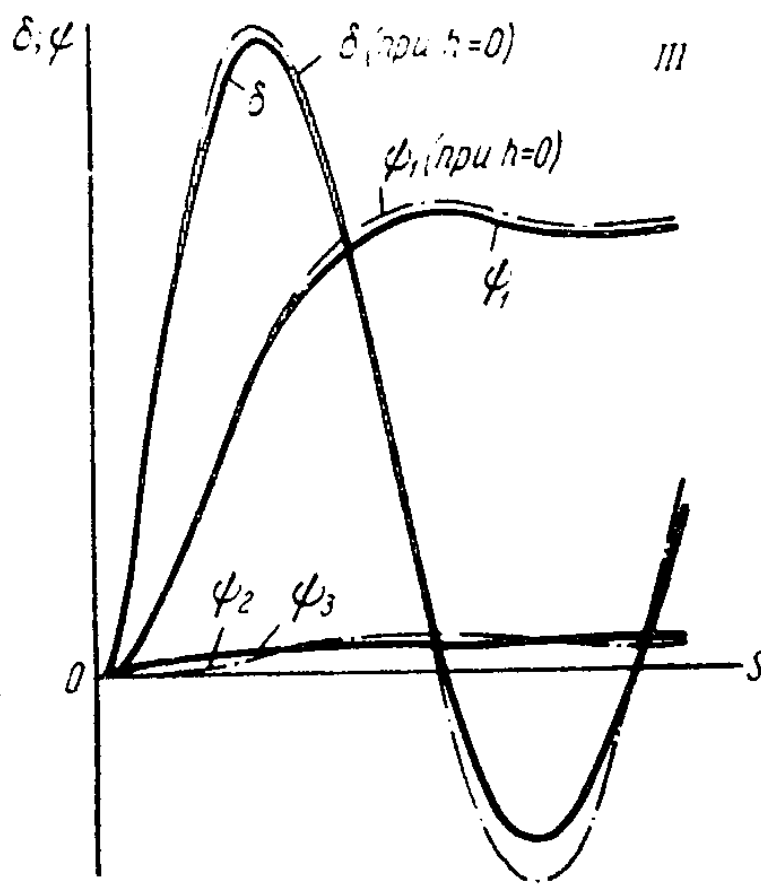


Рис. 65.

Заметим, что формулы (37) и (38) для углов δ и ψ , установленные в § 30 при учете неполной системы сил — реактивной тяги, аэродинамического (стабилизирующего) и реактивного (отклоняющего) моментов, получаются из формул (98a) и (99), если в последних положить $h = 0$.

Допустимость приближения $h \approx 0$ оправдывается следующими обстоятельствами. Рассмотрим сначала выражение для угла ψ . Из формулы (99) следует, что

$$\psi = \frac{d}{4\alpha^2 k} \int_{s_0}^s \frac{e^{-hs}}{s^{1/2}} ds \int_{s_0}^s \frac{e^{h\sigma} \sin k(s-\sigma)}{\sigma^{1/2}} d\sigma.$$

Входящие в подынтегральные функции множители e^{-hs} и $e^{h\sigma}$ близки к единице на тех участках интегрирования, где s и σ малы. Поэтому на этих участках интегрирования вполне закономерно принять приближение $h \approx 0$. На тех же участках интегрирования, где s и σ велики, подынтегральные выражения малы в силу больших значений знаменателей $s^{1/2}$ и $\sigma^{1/2}$. Хотя для этих участков интегрирования замена h нулем дает значительную относительную ошибку для величины подынтегральной функции, тем не менее на величине ψ эта ошибка мало сказывается, так как соответствующие слагаемые интегральной суммы составляют незначительную часть от всего интеграла, определяющего ψ .

Перейдем теперь к углу атаки δ . Выражение (98a) можно представить в виде

$$\delta = \frac{d}{2\alpha^2 k} \frac{e^{-hs}}{\sqrt{s}} \int_{s_0}^s \frac{e^{h\sigma} \sin k(s-\sigma)}{\sqrt{\sigma}} d\sigma.$$

Приведенные выше соображения показывают, что и здесь можно положить $e^{h\sigma} \approx 1$. Что же касается множителя e^{-hs} , стоящего перед интегралом, то его можно положить равным 1 при малых s (например, на критическом участке). При больших же s приближение $e^{-hs} \approx 1$ может дать значительную ошибку. На рис. 63—65 приведены графики зависимости δ и ψ от s при $h \neq 0$ (жирные линии) и при $h = 0$ (пунктирные линии) для ракет I, II, III. Мы видим, что ошибка, вызванная допущением $h = 0$, не превышает 4—5°, для ψ на всем активном участке, а для δ — только на критическом.

Резюмируя все указанное, можно утверждать, что приближение $h \approx 0$ является вполне удовлетворительным для нахождения угла ψ на всем активном участке и удовлетворительным для определения угла δ на критическом участке. Этим самым показано, что формулы (37) и (38) для углов δ и ψ , полученные при учете неполной системы сил и моментов, достаточно хорошо охватывают качественные и количественные закономерности для оперенных ракет полевой артиллерии. Отсюда и вытекает, что при исследовании рассеивания оперенных

ракет основными силами и моментами являются реактивная тяга, аэродинамический стабилизирующий и реактивный отклоняющий моменты. Все же остальные силы и моменты играют второстепенную роль.

В приведенном исследовании не учитывались кориолисова сила и кориолисов момент. Выяснению роли этой силы и этого момента посвящаются два следующих параграфа настоящей главы.

§ 44. Кориолисова сила и кориолисов момент

Кориолисова сила и кориолисов момент возникают (при наличии угловой скорости ракеты) вследствие движения пороховых газов по камере и соплу.

Найдем выражения для кориолисовых силы и момента при плоскопараллельном движении ракеты. Расчет проведем в предположении, что расход газов через поперечное сечение камеры есть линейная функция расстояния этого сечения от дна камеры А (рис. 66). При квазистационарном истечении газов это предположение соответствует условию равномерного сгорания пороха по всей длине пороховых шашек, так как при этом массовый расход газов в некотором сечении пропорционален поверхности той части пороховых шашек, которая лежит между дном камеры и этим сечением.

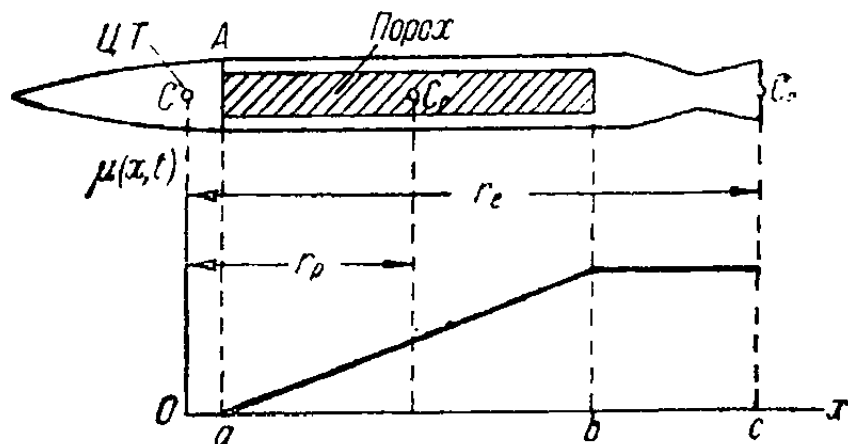


Рис. 66.

Сила Кориолиса, создаваемая элементарным объемом газа, ограниченным стенкой камеры и сечениями x и $x + dx$, перпендикулярна к оси ракеты ¹⁾ и равна

$$dJ = 2 \frac{d\gamma}{dt} u dm = 2 \frac{d\gamma}{dt} \rho \sigma u dx = 2 \frac{d\gamma}{dt} \mu(x, t) dx, \quad (100)$$

где ρ — плотность газов в этом объеме, σ — свободная от пороха площадь сечения (с координатой x) камеры или сопла, u — относительная скорость газов в сечении x , $\omega = \frac{d\gamma}{dt}$ — угловая экваториальная скорость ракеты в рассматриваемый момент времени, $\mu(x, t) = \rho \sigma u$ — расход массы газов в сечении x .

Элементарный кориолисов момент относительно центра тяжести C , порожденный тем же объемом газа, равен

$$dH_C = -2 \frac{d\gamma}{dt} \mu(x, t) x dx, \quad (101)$$

¹⁾ При этом три взаимно перпендикулярных направления u , ω и dJ составляют правую систему.

где x — координата сечения, отсчитываемая от центра тяжести ракеты. Заметим, что направление оси x выбрано так, что оно совпадает с направлением потока газов по камере.

При нашем предположении расход массы газов $\mu(x, t)$ через сечение камеры определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \mu(x, t) &= 0 && \text{при } x \leq a, \\ \mu(x, t) &= \mu_e(t) \frac{x-a}{b-a} && \text{при } a \leq x \leq b, \\ \mu(x, t) &= \mu_e(t) && \text{при } b \leq x \leq c, \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

где $\mu_e(t)$ — массовый расход газов через выходное сечение сопла.

Очевидно, что $\mu_e(t)$ связано с реактивной тягой $P(t)$ соотношением ¹⁾

$$P(t) = u_e \mu_e(t).$$

Исходя из равенств (100) и (102), получим следующее выражение для кориолисовой силы:

$$J = \int_a^c dJ = f P(t) \frac{d\chi}{dt}, \quad (103)$$

где

$$f = \frac{2}{u_e} \left[c - \frac{a+b}{2} \right] = \frac{2C_p C_e}{u_e},$$

C_p — середина шашек, C_e — центр выходного сечения сопла.

Аналогично из (101) и (102) получим выражение для кориолисова момента:

$$H_C = \int_0^c dH_C = -\lambda P(t) \frac{d\chi}{dt}, \quad (104)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{u_e} \left\{ c^2 - \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \right\}.$$

Выражения (103) и (104) для кориолисовой силы J и кориолисова момента H_C могут быть получены и другим путем. В Приложении I показано, что в случае квазистационарного истечения газов и плоскопараллельного движения ракеты величины J и H_C можно выразить через параметры ракеты следующим образом:

$$J = 2\mu \frac{d\chi}{dt} (r_e - r_p) \quad (105)$$

и

$$H_C = -\left(\mu r_e^2 + \frac{dI}{dt} \right) \frac{d\chi}{dt}, \quad (106)$$

где $r_e = CC_e$, $r_p = CC_p$ (см. рис. 66).

¹⁾ В случае, когда вместо центрального сопла имеется коллектор сопел, наклоненных под углом γ к оси, имеет место равенство $P(t) = u_e \cos \gamma \mu_e(t)$ (см. § 48).

В нашем случае (рис. 66) центр тяжести сгоревшей за время dt массы пороха лежит на оси ракеты на середине длины пороховых шашек. Поэтому

$$r_e - r_p = C_p C_e = c - \frac{a+b}{2}$$

и

$$J = 2\mu \frac{d\chi}{dt} \left(c - \frac{a+b}{2} \right).$$

Далее, пороховой заряд в первом приближении можно представить в виде линии, у которой масса единицы длины равна ν . Тогда для такого заряда

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^b \nu x^2 dx = \frac{d\nu}{dt} \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Но

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d\nu}{dt} (b - a);$$

поэтому

$$\frac{dI}{dt} = -\mu \frac{b^2 + ab + a^2}{3},$$

а

$$H_C = -\mu \left(c^2 - \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \right) \frac{d\chi}{dt}.$$

Легко видеть, что найденные выражения для J и H_C совпадают с полученными ранее другим путем выражениями (103) и (104).

При написании точных уравнений движения центра тяжести ракеты нужно, помимо силы Кориолиса, учесть еще две силы, связанные с перемещением за время горения заряда центра тяжести ракеты относительно корпуса. Эти добавочные силы выражаются через скорость v_r и ускорение w_r центра тяжести относительно корпуса ракеты следующим образом ¹⁾:

$$R_1 = m w_r = 2 \frac{\mu^2}{m} r_p \quad (107)$$

и

$$R_2 = 2m v_r \frac{d\chi}{dt} = 2\mu \frac{d\chi}{dt} r_p. \quad (108)$$

Первая из этих сил направлена по оси ракеты, поэтому величину этой силы нужно сравнивать с величиной реактивной тяги. Расчет отношения R_1 к тяге P , проведенный для ряда конкретных ракет, показывает, что оно не превышает нескольких тысячных долей процента. Поэтому силой R_1 всегда можно пренебречь. Что же касается силы R_2 , то она, так же как и кориолисова сила J , перпендикулярна

¹⁾ См. Приложение 1, § 3.

к оси ракеты. Силы R_2 и J — одного порядка [см. формулы (105) и (108)], так как r_p и $(r_e - r_p)$ для обычных ракет — величины одного и того же порядка.

Сумму кориолисовой силы J и силы R_2 можно представить в виде

$$J + R_2 = f_1 P(t) \frac{d\chi}{dt}, \quad (109)$$

где

$$f_1 = \frac{2}{u_e} c.$$

В следующей таблице представлены значения коэффициентов f , f_1 , λ , $\frac{f}{L}$ и $\frac{\lambda}{\chi^2}$ для различных ракет (L — длина ракеты без оперения, χ — экваториальный радиус инерции).

Название ракеты	$\frac{f}{L} \cdot 10^4$ сек/м	$\frac{\lambda}{\chi^2} \cdot 10^3$ сек/м
I	4	1,4
II	4	1,9
III	4,05	1,7
«Базука»	2,5	1,2
«Панцершрек»	2,6	1,4

Из таблицы видно, что самые разнообразные по величине и форме ракеты имеют примерно одинаковые величины $\frac{f}{L}$ и $\frac{\lambda}{\chi^2}$. Это обстоятельство вытекает из того, что безразмерные величины $u_e \frac{f}{L}$ и $u_e \frac{\lambda}{\chi^2}$ зависят не от величины ракеты, а от конфигурации головки, камеры и сопла.

Остановимся, наконец, на рассмотрении характера воздействия кориолисова момента на колебательное движение ракеты. Выражение (104) для H_G показывает, что в случае, когда коэффициент $\lambda > 0$,

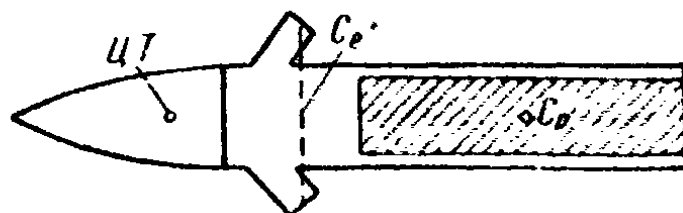


Рис. 67.

кориолисов момент всегда стремится уменьшить угловую скорость оси снаряда $\frac{d\chi}{dt}$, т. е. кориолисов момент в этом случае является демпфирующим моментом. И наоборот, когда $\lambda < 0$, кориолисов момент стремится увеличить угловую скорость ракеты. В обычных схемах ракет $|c| > |b| > |a|$; следовательно, $\lambda > 0$. Однако бывают

случай, например у ракеты, схема которой изображена на рис. 67, когда коэффициент $\lambda < 0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать обычную схему оперенных ракет, при которой кориолисов момент является демпфирующим моментом.

§ 45. Влияние кориолисовой силы и кориолисова момента на угловое отклонение оперенной ракеты

Воспользовавшись выражениями (103) и (104) для кориолисовой силы и кориолисова момента, полученными в предыдущем параграфе, мы можем уравнения плоскопараллельного движения оперенной ракеты на активном участке полета записать в следующем виде:

$$\frac{dv}{dt} = a - nv^2 \quad (110a)$$

$$v \frac{d\psi}{dt} = (a + \mu v^2) \delta - b + f_1 a \frac{d\chi}{dt}, \quad (110б)$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = \frac{M}{I} - \left(k_2 v + \frac{\lambda a}{\chi^2} \right) \frac{d\chi}{dt} - k_1^2 v^2 \delta. \quad (110в)$$

Как и прежде, можно, используя соотношение $\psi = \chi - \delta$, представить уравнение (110б) в виде

$$v \frac{d\chi}{dt} = \frac{d(v\delta)}{dt} + (\mu + n) v^2 \delta - b + f_1 a \frac{d\chi}{dt}.$$

Отсюда следует, что

$$(v - f_1 a) \frac{d\chi}{dt} = \frac{d(v\delta)}{dt} + (\mu + n) v^2 \delta - b. \quad (111)$$

Величина $f_1 a$ мала по сравнению с v . Для оценки отношения $\frac{f_1 a}{v}$ обратимся к следующей таблице, в которой дана величина этого отношения для ракет I, II, III в момент схода ракеты со станка, т. е. в момент, когда это отношение имеет наибольшее значение:

Ракета	$\frac{f_1 a}{v_0} = f_1 \frac{v_0}{2s_0}$	$\lambda \frac{a}{\chi^2 v_0}$	$2h$
I	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$1,75 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$
II	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$0,54 \cdot 10^{-2}$
III	$8,0 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$0,44 \cdot 10^{-2}$

Из этой таблицы видно, что отношение $\frac{f_1 a}{v}$ для этих ракет не превышает 0,8%. Поэтому в уравнении (111) членом $f_1 a$ по сравнению

1) В этом уравнении мы силой R_1 пренебрегли. См. § 44.

с v можно пренебречь. Следовательно, и при наличии кориолисовой силы получаем выражение для $\frac{d\gamma}{dt}$:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{ds} + (\mu + n)u - \frac{b}{v}. \quad (112)$$

Определяя из последнего уравнения дифференцированием $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$, подставляя полученное выражение в (110в) и заменяя $\frac{d\gamma}{dt}$ его выражением из (112), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} + \left(2h + \frac{\lambda a}{x^2 v}\right) \frac{du}{ds} + \left[k_1^2 + \left(\frac{\lambda a}{x^2 v} + k_2\right)(\mu + n)\right] u = \\ = \frac{M}{Iv} + \left(\frac{\lambda a}{x^2 v} + k_2\right) \frac{b}{v} + \frac{d}{ds} \left(\frac{b}{v}\right), \end{aligned} \quad (113)$$

где $2h = k_2 + \mu + n$.

Расчеты, проведенные для разнообразных оперенных ракет, показывают, что обычно¹⁾

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda a}{x^2 v} + k_2\right)(\mu + n) &\ll k_1^2; \\ \left(\frac{\lambda a}{x^2 v} + k_2\right) \frac{b}{v} &\ll \frac{M}{Iv}. \end{aligned}$$

Поэтому кориолисов момент можно учесть, интегрируя уравнение

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \left(2h + \frac{\lambda a}{x^2 v}\right) \frac{du}{ds} + k_1^2 u = \frac{M}{Iv} + \frac{d}{ds} \left(\frac{b}{v}\right). \quad (114)$$

Определив отсюда u , найдем $\delta = \frac{u}{v}$. Для определения углового отклонения ψ преобразуем уравнение (110б) к виду

$$\frac{d\psi}{ds} = \left(\frac{a}{v^2} + \mu\right) \delta - \frac{b}{v^2} + \frac{f_1 a}{v} \frac{d\gamma}{ds}. \quad (115)$$

Уравнения (114) и (115) показывают, что учет силы Кориолиса изменяет лишь выражение для ψ и не меняет величин u и δ . Воздействие же кориолисова момента аналогично влиянию на полет оперенной ракеты демпфирующего аэродинамического момента.

Для оценки влияния кориолисова момента для ракет I, II и III были проведены расчеты углового отклонения ψ , при которых полагалось $\mu = k_2 = n = b = h = 0$ (но $\lambda \neq 0$). Расчеты показали, что кориолисов момент уменьшает угловое отклонение этих ракет не более чем на 20%. Отсюда можно заключить, что влиянием кориолисова момента на угловое отклонение оперенных ракет можно пренебречь.

¹⁾ Величины $\frac{\lambda a}{x^2 v}$ и $2h$ — одного порядка (см. таблицу на стр. 143).

В выражении для ψ , полученном из уравнения (115), добавочный член, возникающий из-за силы Кориолиса, можно представить в виде

$$\Delta\psi_{\text{кор}} = f_1 a \int_{s_0}^s \frac{d\chi}{ds} \frac{ds}{v} \quad (116)$$

причем ввиду слабого влияния кориолисова момента на величину χ можно в уравнение (116) вместо $\frac{d\chi}{ds}$ подставить величину, получаемую из расчета, при котором учитывается лишь основная система сил и моментов.

Интегрируя уравнение (116) по частям и учитывая, что $\frac{dv}{ds} = \frac{a}{v}$, получим:

$$\Delta\psi_{\text{кор}} = f_1 a \left\{ \frac{\chi}{v} + \int_{s_0}^s \frac{\chi a}{v^3} ds \right\}. \quad (117)$$

Подставляя в уравнение (117) вместо $\chi(s)$ величины, полученные в § 27, мы определим величину $\Delta\psi_{\text{кор}}$.

Расчеты, проведенные таким образом, показали, что сила Кориолиса увеличивает угловое отклонение ракет I, II, III не более чем на 0,6%. Поэтому и влиянием силы Кориолиса на угловое отклонение оперенных ракет можно пренебречь.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Оперенная ракета калибра 250 мм имеет полный вес ракетного заряда 20 кг. Время сгорания ракетного заряда $\tau = 1$ сек. Найти Вб этой ракеты при стрельбе с пускового станка длиной 5 м на дистанцию 7000 м ($\theta_0 = 30^\circ$), если известно, что $j_1 = 200 \frac{\text{кг сек}}{\text{кг}}$; $\frac{\partial m_z}{\partial \delta} = -0,09$ (на градус); $L_0 = 1,45$ м; $L_c = 0,7$ м и $x = 0,4$ м. Считать, что движение ракеты на всем активном участке (включая пусковой станок) равноускоренно.

О т в е т: Вб = 88 м.

Задача 2. Во сколько раз изменится Вб ракеты из предыдущей задачи, если уменьшить длину пускового станка до 4 м.

О т в е т: Увеличится в 1,14 раза.

Задача 3. Оперенная ракета калибра 100 мм имеет длину 1,26 м, полный вес 15 кг и вес ракетного заряда 2,5 кг. Коэффициент $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ ракеты (отношенный к площади миделя и длине ракеты) равен (-0,04) (на градус). Единичный импульс ракетного заряда $j_1 = 200 \frac{\text{кг сек}}{\text{кг}}$. Найти $\frac{\text{Вб}}{X}$ этой ракеты при стрельбе со станка длиной 2,5 м при углах возвышения станка $\theta_0 = 30, 45$ и 60° , если известно, что ускорение ракеты на всем активном участке постоянно, а заряд сгорает за 0,8 сек. Плечо сопла $L_c = 0,55$ м, а средний экваториальный радиус инерции $x = 0,32$ м.

О т в е т: $\frac{\text{Вб}}{X} = \frac{1}{32}; \frac{1}{26}; \frac{1}{19}$.

Задача 4. Во сколько раз изменится $\frac{B_6}{X}$ ракеты из предыдущей задачи, если заменить у нее оперение таким образом, чтобы коэффициент $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ стал равным $(-3,5)$ (на радиан).

О т в е т: Уменьшится в 1,35 раза.

Задача 5. При стрельбе на дистанцию 7000 м ($\theta_0 = 45^\circ$) оперенная ракета имеет $B_6 = 140$ м. Найти вероятное значение компонента эксцентриситета реактивной силы, если известно, что длина активного участка $s_a = 100$ м, длина пускового станка $s_0 = 5$ м, $k = 0,1$ м⁻¹, $\chi = 0,5$ м.

О т в е т: $\bar{d} = 1,49$ мм.

Задача 6. Оперенная ракета имеет полный вес 45 кг и вес ракетного заряда 6 кг. Коэффициент k ракеты равен 0,05 м⁻¹. Найти $\frac{B_6}{X}$ ракеты при стрельбе на дистанцию максимальной дальности со станка длиной 5 м. Ускорение ракеты на всем активном участке считать постоянным. Заряд сгорает за 0,4 сек. Единичный импульс ракетного заряда равен $j_1 = 200 \frac{\text{кг сек}}{\text{кг}}$, $\bar{d} = 0,61$ мм, $\chi = 0,4$ м.

О т в е т: $\frac{B_6}{X} = \frac{1}{38}$.

Задача 7. Найти $\frac{B_6}{X}$ оперенной ракеты при стрельбе с пускового станка длиной 3 м на дистанцию 3000 м ($\theta_0 = 20^\circ$) при $+15^\circ \text{Ц}$ и -40°Ц . Максимальная скорость ракеты равна 250 м/сек. Ускорение ракеты в летних и зимних условиях стрельбы постоянно на всем активном участке; при $+15^\circ \text{Ц}$ время сгорания ракетного заряда $\tau = 0,4$ сек, при -40°Ц $\tau = 0,7$ сек. Коэффициент k при $+15^\circ \text{Ц}$ равен 0,07 м⁻¹, $\bar{d} = 0,9$ мм и $\chi = 0,4$ м.

О т в е т: при $+15^\circ \text{Ц}$ $\frac{B_6}{X} = \frac{1}{38}$;
при -40°Ц $\frac{B_6}{X} = \frac{1}{35}$.

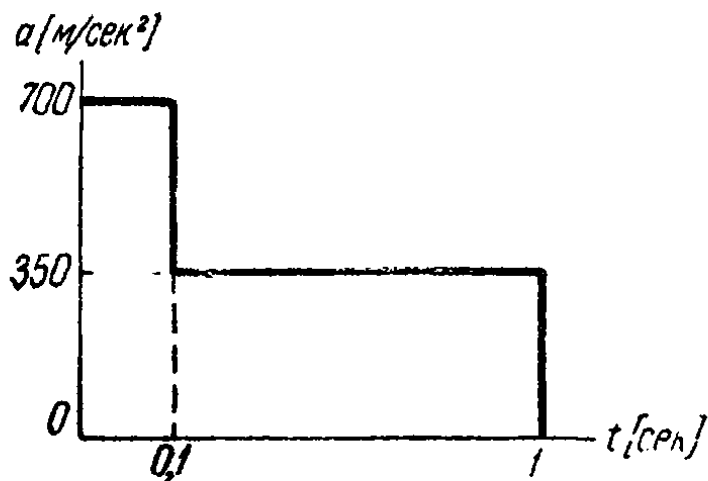


Рис. 68.

Задача 8. График зависимости ускорения оперенной ракеты от времени представлен на рис. 68. Найти B_6 этой ракеты при стрельбе с пускового станка длиной 3,5 м на дистанцию 5000 м ($\theta_0 = 25^\circ$), если известно, что $k = 0,1$ м⁻¹, $\chi = 0,4$ м, $\bar{d} = 1$ мм.

О т в е т: $B_6 = 65,5$ м.

Задача 9. Найти для ракеты предыдущей задачи вероятное отклонение по дальности B_d , вызванное угловым рассеиванием на активном участке, если известно, что при изменении угла возвышения станка с 25 до 26° дистанция стрельбы увеличивается с 5000 до 5150 м.

О т в е т: $B_d = 103,5$ м.

Задача 10. Найти B_6 ракеты из задачи № 8 при длине пускового станка, равной 5 м.

О т в е т: $B_6 = 57$ м.

Задача 11. Оперенная ракета движется на всем активном участке (включая направляющую) равноускоренно. При стрельбе в полевых условиях $s_a = 80$ м и $v_a = 320$ м/сек. Найти вероятное угловое отклонение ракеты в конце активного участка при стрельбе с самолета (по направлению ско-

рости самолета), имеющего скорость 576 км/час. если известно, что длина пускового станка равна 1,25 м, $k = 0,08 \text{ м}^{-1}$, $\bar{d} = 1 \text{ мм}$, $\chi = 0,4 \text{ м}$. Сравнить полученное значение $\bar{\psi}_a$ с величиной $\bar{\psi}_a$ при стрельбе этой же ракетой в полевых условиях с того же станка.

Ответ: $\bar{\psi}_a = \frac{1}{175}$. Во втором случае $\bar{\psi}_a$ будет в 6,2 раза больше, чем в первом.

Задача 12. Активно-реактивная мина к началу горения ракетного заряда имеет скорость 200 м/сек. Полный вес мины 15 кг. Вес ракетного заряда, сгорающего за 0,6 сек, равен 2 кг. Найти вероятное угловое отклонение $\bar{\psi}_a$ мины, вызванное эксцентриситетом реактивной силы, если известно, что $k = 0,08 \text{ м}^{-1}$, $\chi = 0,28 \text{ м}$, $\bar{d} = 0,6 \text{ мм}$, $j_1 = 200 \frac{\text{кг сек}}{\text{кг}}$. Ускорение мины на всем активном участке постоянно.

Ответ: $\bar{\psi}_a = \frac{1}{184}$.

Задача 13. График зависимости ускорения оперенной ракеты от времени представлен на рис. 69. Найти $\frac{B_6}{X}$ для этой ракеты при стрельбе с пускового станка длиной 5 м, если известно, что $\theta_0 = 30^\circ$, $k = 0,08 \text{ м}^{-1}$, $\chi = 0,5 \text{ м}$ и $\bar{d} = 1 \text{ мм}$.

Указание: см. стр. 124.

Ответ: $\frac{B_6}{X} = \frac{1}{81}$.

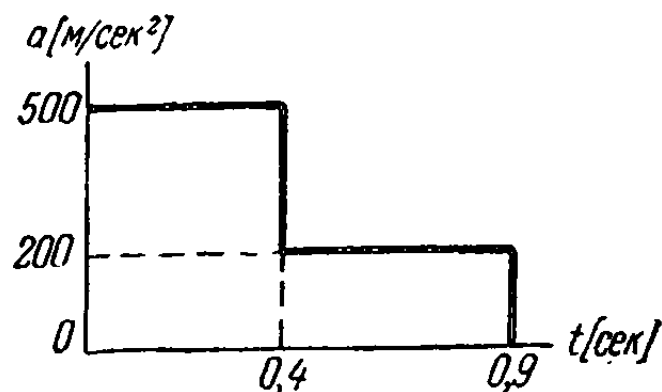


Рис. 69.

Решение. Для нахождения $\bar{\psi}_a$ разбиваем активный участок на две части: первая часть кончается в точке s_1 ($t_1 = 0,4 \text{ сек}$), вторая часть начинается в точке s_1 и кончается в точке s_a ($t = \tau = 0,9 \text{ сек}$). Отклонение на первом участке $\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_M(s_1)$ находим обычным путем по формуле:

$$\psi_1 = \frac{\pi \bar{d}}{2 \chi^2 k} \left\{ [C_{z_0}^2] + [S_{z_0}^2] - J_{\frac{1}{2}}(z_1) C_{z_0}^2 + J_{\frac{1}{2}}(z_1) S_{z_0}^2 \right\},$$

где

$$z_0 = k s_0 = 0,08 \cdot 5 = 0,4 \quad \text{и} \quad z_1 = k s_1 = 0,08 \cdot 40 = 3,2.$$

Для получения отклонения в конце активного участка найдем добавочное отклонение, возникающее на втором участке ($s_1 \div s_a$), рассматривая движение ракеты при

$$s_{0 \text{ эф}} = \frac{v_1^2}{2a_2} [v_1 = v(s_1)]; \quad s_{a \text{ эф}} = \frac{v_a^2}{2a_2};$$

$$\psi_{0 \text{ эф}} = \psi_1; \quad \dot{\chi}_{0 \text{ эф}} = \dot{\chi}_1; \quad \delta_{0 \text{ эф}} = \delta_1.$$

Тогда

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2 + \psi_{\gamma_{0 \text{ эф}}} + \psi_{\chi_{\text{эф}}},$$

где $\psi_2 = \psi_M$ на участке ($s_1 \div s_a$), а последние два члена представляют собой отклонения, вызванные «начальными» возмущениями $\dot{\chi}_{0 \text{ эф}}$ и $\chi_{0 \text{ эф}} = \psi_{0 \text{ эф}} + \delta_{0 \text{ эф}}$.

В силу того, что в начальный для второго участка момент времени t_1 величина $\psi_{0 \text{ эф}} = \psi_1 \neq 0$, в третью формулу (82) для $\psi_{\chi_{\text{эф}}}$ нужно вместо $\chi_{0 \text{ эф}} = \psi_{0 \text{ эф}}$ подставить значение $\delta_{0 \text{ эф}} = \delta_1$.

Введя $z_{0\text{эф}} = ks_{0\text{эф}}$ и $z_{a.\text{эф}} = ks_{a.\text{эф}}$, получим:

$$\bar{\Psi}_2 = \frac{\pi \bar{d}}{2\chi^2 k} \left\{ \left[C_{z_{0\text{эф}}}^{z_{a.\text{эф}}} \right]^2 + \left[S_{z_{0\text{эф}}}^{z_{a.\text{эф}}} \right]^2 - J_{\frac{1}{2}}(z_{a.\text{эф}}) C_{z_{0\text{эф}}}^{z_{a.\text{эф}}} + \right. \\ \left. + J_{-\frac{1}{2}}(z_{a.\text{эф}}) S_{z_{0\text{эф}}}^{z_{a.\text{эф}}} \right\},$$

$$\bar{\Psi}_{\gamma_{0\text{эф}}} = \bar{\gamma}_{0\text{эф}} \pi \sqrt{\frac{s_{0\text{эф}}}{2a_2}} \left\{ J_{-\frac{1}{2}}(z_{0\text{эф}}) C_{z_{0\text{эф}}}^{z_{a.\text{эф}}} + J_{\frac{1}{2}}(z_{0\text{эф}}) S_{z_{0\text{эф}}}^{z_{a.\text{эф}}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[J_{\frac{1}{2}}(z_{a.\text{эф}}) J_{-\frac{1}{2}}(z_{0\text{эф}}) - J_{-\frac{1}{2}}(z_{a.\text{эф}}) J_{\frac{1}{2}}(z_{0\text{эф}}) \right] \right\},$$

$$\bar{\Psi}_{\gamma_{0\text{эф}}} = \bar{\delta}_{0\text{эф}} \left\{ 1 + \pi z_{0\text{эф}} \left[J_{\frac{1}{2}}(z_{0\text{эф}}) C_{z_{0\text{эф}}}^{z_{a.\text{эф}}} - J_{-\frac{1}{2}}(z_{0\text{эф}}) S_{z_{0\text{эф}}}^{z_{a.\text{эф}}} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[J_{-\frac{1}{2}}(z_{a.\text{эф}}) J_{-\frac{1}{2}}(z_{0\text{эф}}) + J_{\frac{1}{2}}(z_{a.\text{эф}}) J_{\frac{1}{2}}(z_{0\text{эф}}) \right] \right\},$$

где

$$\bar{\delta}_{0\text{эф}} = \bar{\delta}_1 = \frac{\pi \bar{d}}{2\chi^2 k} \left\{ J_{\frac{1}{2}}(z_1) C_{z_0}^{z_1} - J_{-\frac{1}{2}}(z_1) S_{z_0}^{z_1} \right\},$$

$$\bar{\gamma}_{0\text{эф}} = \bar{\gamma}_1 = \left(\frac{d\chi}{dz} \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dt} \right)_{s=s_1} = \frac{\pi \bar{d} v_1}{2\chi^2} \left\{ J_{-\frac{1}{2}}(z_1) C_{z_0}^{z_1} + J_{\frac{1}{2}}(z_1) S_{z_0}^{z_1} \right\}.$$

Для нашей задачи

$$v_1 = 200 \text{ м/сек}, \quad v_a = 300 \text{ м/сек}, \quad s_{0\text{эф}} = \frac{200^2}{2 \cdot 200} = 100 \text{ м},$$

$$s_{a.\text{эф}} = \frac{300^2}{2 \cdot 200} = 225 \text{ м}, \quad z_{0\text{эф}} = 8 \text{ м} \quad \text{и} \quad z_{a.\text{эф}} = 18 \text{ м}.$$

Поэтому для $\bar{\Psi}_a$ по приведенным выше формулам получим значение:

$$\bar{\Psi}_a = \bar{\Psi}_1 + \bar{\Psi}_2 + \bar{\Psi}_{\gamma_{0\text{эф}}} + \bar{\Psi}_{\gamma_{0\text{эф}}} = 10,2 \cdot 10^{-3} + 0,87 \cdot 10^{-3} - \\ - 0,88 \cdot 10^{-3} + 0,68 \cdot 10^{-3} = 10,9 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{92}.$$

Для нахождения $\frac{B_6}{X}$ необходимо найти еще θ_a , но

$$\Delta\theta = \theta_a - \theta_0 \approx -g \cos \theta_0 \int_{t_0}^{\tau} \frac{dt}{v(t)} = -\frac{g \cos \theta_0}{a_1} \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} - \frac{g \cos \theta_0}{a_2} \int_{v_1}^{v_a} \frac{dv}{v} = \\ = -g \cos \theta_0 \left\{ \frac{1}{a_1} \ln \frac{v_1}{v_0} + \frac{1}{a_2} \ln \frac{v_a}{v_1} \right\} = -2^\circ.$$

Следовательно,

$$\frac{B_6}{X} = \frac{\bar{\Psi}_a}{\cos \theta_a} = \frac{1}{92 \cos 28^\circ} = \frac{1}{81}.$$

Задача 14. Оперенная ракета имеет две камеры. В первой из них находится толстосводный заряд весом $\omega_1 = 10$ кг, а во второй — тонкосводный заряд весом $\omega_2 = 2,5$ кг. Оба заряда загораются одновременно. Для обоих типов порохов $j_1 = 200 \frac{\text{кг сек}}{\text{кг}}$. Полный вес ракеты равен 80 кг.

Найти $\frac{B_6}{X}$ в летних и зимних условиях при стрельбе такой ракетой с пускового станка длиной 4 м при угле возвышения станка $\theta_0 = 45^\circ$.

Диаграмма ускорения $a(t)$ этой ракеты и летом и зимой имеет ступенчатый вид, изображенный на рис. 70. Летом $t_1 = 0,08$ сек, $\tau = 0,8$ сек, а зимой $t_1 = 0,2$ сек, $\tau = 1,0$ сек.

Вероятное значение эксцентриситета первой камеры $\bar{d}_1 = 1$ мм, а второй $\bar{d}_2 = 0,8$ мм. Коэффициент k ракеты равен $0,1 \text{ м}^{-1}$, $\chi = 0,4$ м.

Примечание. Считать, что за время t_1 сгорает $\frac{t_1}{\tau} \omega_1$ кг толстосводного заряда, а часть ускорения ракеты, вызванная тонкосводным зарядом, постоянна и равна $(a_1 - a_2)$.

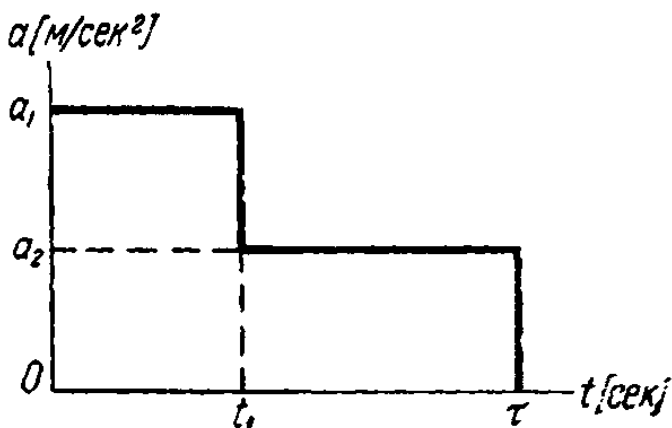


Рис. 70.

Ответ: летом $\frac{B_6}{X} = 1/82$, зимой $\frac{B_6}{X} = 1/158$.

Решение. Летом за время $t_1 = 0,08$ сек сгорает 1 кг толстосводного пороха. Поэтому скорость ракеты в момент t_1 равна

$$v_1 = \frac{200(1 + 2,5) \cdot 9,8}{80 - 0,5(1 + 2,5)} = 87,6 \text{ м/сек},$$

а путь, пройденный ракетой за время t_1 , равен: $s_1 = \frac{v_1 t_1}{2} = 3,5$ м.

Таким образом, летом тонкосводный заряд сгорает при движении ракеты на направляющей.

Ускорение ракеты при $t < t_1$ равно: $a_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{87,6}{0,08} = 1095 \text{ м/сек}^2$.

Максимальная скорость ракеты в конце активного участка и летом и зимой равна: $v_a = \frac{200 \cdot 12,5 \cdot 9,8}{73,75} = 332 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ (мы пренебрегаем при этом влиянием лобового сопротивления и силы тяжести на величину скорости ракеты).

Ускорение a_2 летом равно: $a_2 = \frac{v'_a - v_1}{\tau - t_1} = \frac{332 - 87,6}{0,8 - 0,08} = 340 \text{ м/сек}^2$. От-

сюда легко найдем, что летом $s_{0 \text{эф}} - s_0 = s_{1 \text{эф}} - s_1 = s_1 \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) = 7,77$ м.

Следовательно, $s_{0 \text{эф}} = 4 + 7,77 = 11,77$ м. Далее расчет проводится обычным способом.

Зимой за время $t_1 = 0,2$ сек сгорает 2 кг толстосводного заряда, $v_1 = 114$ м/сек, $s_1 = 11,4$ м, $a_1 = 570$ м/сек² и $a_2 = 273$ м/сек².

Таким образом, зимой конец горения тонкосводного заряда наступает уже вне направляющей и, следовательно, часть полета ракеты вне направляющей (первые $11,4 - 4 = 7,4$ м) происходит под влиянием суммарной реактивной силы, создаваемой обоими зарядами. Расчет ψ_a при этом должен вестись совершенно аналогично тому, как это показано в решении предыдущей задачи. Отличие будет заключаться лишь в том, что вероятное значение компонента эксцентриситета $\bar{d}_1$ на первой части полета ($t < t_1$) отличается

от $\bar{d}_{II} = \bar{d}_I$ на второй части полета ($t > t_1$). Действительно, компонент отклоняющего момента M при $t < t_1$ равен

$$M = ma_1 d_1 = ma_2 d_1 + m(a_1 - a_2) d_2,$$

так как полная реактивная тяга равна ma_1 , тяга первого заряда равна ma_2 , а второго заряда $m(a_1 - a_2)$. Поэтому $a_1 \bar{d}_1 = \sqrt{(a_2 \bar{d}_1)^2 + [(a_1 - a_2) \bar{d}_2]^2}$; $\bar{d}_1 = 0,635$ мм.

Кроме того, отметим, что в отличие от случая, рассмотренного в предыдущей задаче, ввиду независимости d_I и d_{II} , отклонение $\bar{\psi}_a = \sqrt{\bar{\psi}_1^2 + [\bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_{\lambda_{0\text{эф}}} + \bar{\psi}_{\lambda_{0\text{эф}}}]^2}$, где $\psi_1, \psi_2, \psi_{\lambda_{0\text{эф}}}$ и $\psi_{\lambda_{0\text{эф}}}$ обозначают то же, что и в предыдущей задаче.

Задача 15. Найти графический метод нахождения при помощи спирали Корню величины $\dot{\lambda}_M(s)$.

О т в е т: $\dot{\lambda}_M(s) = d \frac{\sqrt{\pi a k}}{\chi^2} R_T$, где R_T — проекция радиус-вектора R_1 , проведенного из точки z_0 в точке z , на касательную к спирали Корню в точке z . Касательную считаем направленной в сторону возрастания параметра z .

Задача 16. Найти графический метод нахождения при помощи спирали Корню величины $\psi_2 = \mu \int_{s_0}^s \delta_M ds$ (величина ψ_2 представляет собой угловое отклонение, вызванное аэродинамической подъемной силой Y , см. § 43).

$$\text{О т в е т: } \psi_2 = \frac{\pi d \mu}{k^2 \chi^2} \int_{z_0}^z \{C_{z_0}^z d[S_{z_0}^z] - S_{z_0}^z d[C_{z_0}^z]\} = \frac{2\pi d \mu}{k^2 \chi^2} F(z_0, z),$$

где $F(z_0, z)$ — площадь сектора, описанная радиус-вектором $R(z_0, z)$ при скольжении его конца по спирали Корню от точки z_0 до точки z .

ГЛАВА V

РАССЕИВАНИЕ ПРОВОРАЧИВАЮЩИХСЯ ОПЕРЕННЫХ РАКЕТ

§ 46. Введение

В настоящей главе мы рассмотрим способ уменьшения рассеивания оперенных ракет, при котором ракетам сообщается вращательное движение вокруг оси симметрии на активном участке полета¹⁾.

Основная идея этого способа заключается в следующем.

Как было выяснено в главах III и IV, доминирующую роль в рассеивании оперенных ракет играет боковой момент M , вызванный эксцентриситетом реактивной силы. При полете невращающейся оперенной ракеты момент M не меняет своего направления в пространстве и отклоняет ось ракеты от направления стрельбы все время в неизменной плоскости отклоняющей пары (см. § 24). Возникающие при этом углы атаки и угловое отклонение лежат в плоскости этой пары и значительны по величине. Если же заставить оперенную ракету вращаться вокруг своей оси симметрии, то вместе с корпусом ракеты будет вращаться и плоскость отклоняющей пары. Если вначале, например, момент M поворачивал

1) Указание о целесообразности проворачивания оперенных ракет с целью улучшения верности стрельбы можно найти еще в книге К. И. Константинова, изданной в 1856 г. [2]. Константинов пишет: «С самого начала введения ракет были произведены изыскания для увеличения верности полета ракет через сообщение им вращательного движения около их продольной оси. Изыскания эти производились над ракетами с хвостами и над ракетами без хвостов. Вращательное движение помогали производить следующими способами:

1. Сопротивлением воздуха через расположение наклонных перьев на внешней поверхности ракетного снаряда, гильзы и хвоста.

2. Помощью спускных труб, на внутренней поверхности которых расположены винтовые нарезки, в кои проникают выступы, имеющиеся на внешней поверхности ракет.

3. Действием газов, приводящих ракету в движение и вытекающих по винтовым каналам, которые располагают в ракетном поддоне, или ударом газов, истекающих из ракеты, о косые плоскости, прикрепляемые к ракетной гильзе».

ось ракеты вправо от плоскости стрельбы, то после поворота ракеты вокруг ее оси на 180° этот момент M будет стремиться повернуть ось ракеты влево и т. д. Это должно привести к значительному уменьшению углового отклонения в конце активного участка траектории и, следовательно, к уменьшению рассеивания ракет.

Для того чтобы вращение дало эффективный результат, необходимо, чтобы на начальной части активного участка, т. е. на критическом участке, где и возникает угловое отклонение (см. § 31), ракета сделала несколько оборотов вокруг своей оси. Это соображение приводит к мысли, что необходимая для этого угловая скорость вращения может быть сравнительно невелика. Легко подсчитать, что она будет в десятки раз меньше угловой скорости, сообщаемой артиллерийскому снаряду или неоперенной ракете с целью стабилизации полета¹⁾. Поэтому гироскопическим эффектом вращения оперенной ракеты можно пренебречь. Это последнее обстоятельство подтверждается расчетами, проведенными при рассмотрении пространственной задачи с учетом гироскопического эффекта (см. гл. VII).

Вращение вокруг оси симметрии, придаваемое оперенным ракетам для уменьшения рассеивания, будем называть *проворотом*, а ракеты с таким вращением — *проворачивающимися*. *Вращающимися ракетами* будем в дальнейшем называть только неоперенные ракеты, у которых вращение имеет значительно большую угловую скорость и служит для гироскопической стабилизации ракеты.

Проворот оперенной ракеты на активном участке может быть достигнут разными способами, сводящимися к трем принципиально различным хорошо известным методам придания ракете вращения:

а) с помощью специального устройства в камере, которое создает реактивный момент относительно оси симметрии ракеты;

б) установкой косо поставленного оперения, благодаря которому возникает аэродинамический аксиальный момент M_x , закручивающий ракету вокруг оси;

в) при помощи самой направляющей, имеющей вид спирали.

В настоящей главе рассматривается влияние проворачивания на угловое отклонение ракеты, вызванное эксцентриситетом реактивной силы, дан метод расчета углового отклонения проворачивающихся оперенных ракет и приведен сравнительный анализ влияния различных способов проворачивания на кучность оперенных ракет. В заключение выясняется относительная роль начальных возмущений и эксцентриситета реактивной силы в рассеивании оперенных ракет.

¹⁾ Так, например, если ракета проходит критический участок за 0,3—0,4 сек и делает на критическом участке 2—3 оборота, то средняя угловая скорость будет при этом не больше 600 об/мин. Для артиллерийских снарядов скорость вращения имеет порядок 10 000—20 000 об/мин.

В предыдущей главе было рассмотрено движение оперенных ракет на активном участке траектории под влиянием бокового отклоняющего момента M , возникающего из-за эксцентриситета реактивной силы. Там же детально был рассмотрен случай движения оперенной ракеты при постоянном по величине и направлению эксцентриситете d .

При этом движение оси ракеты происходило в плоскости пары с моментом M (плоскость q ; см. § 19), наклоненной под углом β к плоскости p , т. е. к плоскости, проходящей через ось пускового станка и перпендикулярной к плоскости бросания w (см. рис. 71).

Под влиянием бокового момента M траектория ракеты искривляется, и угловое отклонение ракеты характеризуется углом ψ между направлением оси пускового станка и касательной к траектории¹⁾.

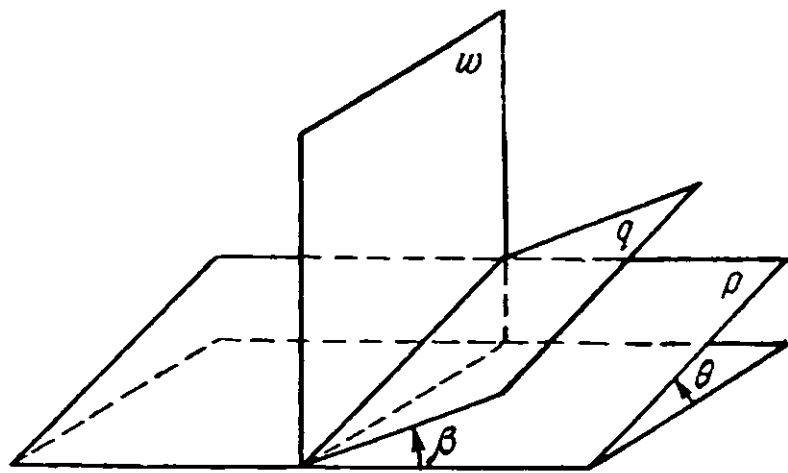


Рис. 71.

Если рассматривать не траекторию центра тяжести ракеты, лежащую в плоскости q , а ее проекции на плоскости p и w , то в силу малости угла ψ угловые отклонения проекций траектории от направления оси станка равны $\psi_p = \psi \cos \beta$ и $\psi_w = \psi \sin \beta$ (см. § 19). Ту же самую величину $\psi \cos \beta$ мы получили бы для углового отклонения проекции траектории на плоскость p , если бы рассматривали движение той же ракеты в плоскости p под влиянием отклоняющего момента $M \cos \beta$, вызванного эксцентриситетом $d \cos \beta$.

Действительно, при проектировании на плоскость p малые углы ψ и δ , характеризующие движение, проектируются как векторы (см. § 19). Поэтому и проекции аэродинамических сил и моментов, пропорциональные углу атаки δ , сохраняют формально свой вид. Так, например, проекция подъемной силы $Y = \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \frac{\rho v^2}{2} S_m \delta$ на плоскость p равна:

$$Y_p = \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \frac{\rho v^2}{2} S_m \delta \cos \beta = \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \frac{\rho v^2}{2} S_m \delta_p.$$

¹⁾ Напомним читателю, что при исследовании рассеивания мы не учитываем силы тяжести. Поэтому при отсутствии отклоняющего бокового момента траектория ракеты совпадала бы с продолжением оси пускового станка.

Ясно, что при проектировании движения, происходящего в плоскости q , на плоскость p уравнения движения сохраняют свой вид, только вместо момента M в них будет фигурировать момент $M \cos \beta$ (и, следовательно, вместо эксцентриситета d — величина $d \cos \beta$). Все сказанное здесь можно повторить и для проекции траектории на ω -плоскость, заменив в рассуждении $\cos \beta$ на $\sin \beta$.

При рассмотрении движения проворачивающихся оперенных ракет мы будем предполагать, что эксцентриситет d остается постоянным по величине, а плоскость отклоняющей пары вращается вместе с корпусом ракеты. Как уже было отмечено в § 24, это предположение совершенно естественно для геометрического эксцентриситета реактивной силы, так как он вызван геометрической несимметрией ракеты. В случае же газодинамического эксцентриситета это предположение соответствует гипотезе, согласно которой конфигурация пороховых шашек, дающая определенную асимметрию газового потока, неизменна по отношению к корпусу ракеты и вращается вместе с ним.

Если проектировать движение такой проворачивающейся ракеты на плоскость p , то при пренебрежении слабым гироскопическим эффектом мы получим для проекции траектории те же по виду уравнения движения, что и для невращающихся оперенных ракет. Отличие состоит только в том, что вместо постоянного эксцентриситета d теперь фигурирует переменный эксцентриситет $d \cos(\varphi + \beta)$ ¹⁾, где φ — угол поворота ракеты за время её полета вне пускового станка, а β — угол между плоскостью p и плоскостью отклоняющей пары в момент схода ракеты с направляющей. Поэтому проекция траектории ракеты на плоскость p будет описываться уравнениями²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a, \\ v \frac{d\psi_p}{dt} &= a\delta_p, \\ \frac{d^2(\psi_p + \delta_p)}{dt^2} + k_1^2 v^2 \delta_p &= \frac{M \cos(\varphi + \beta)}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где v и a — величины скорости и ускорения ракеты, совпадающие с большой точностью с проекциями скорости и ускорения на p -плоскость, ψ_p — угол между осью станка и касательной к проекции траектории на p -плоскость, δ_p — угол между касательной к проекции траектории и проекцией оси ракеты на p -плоскость.

¹⁾ Соответственно вместо момента M — момент $M \cos(\varphi + \beta)$.

²⁾ Здесь мы не рассматриваем боковую слагающую реактивной силы P_1 , лобовое сопротивление Q , подъемную силу Y и демпфирующий экваториальный момент M_2 , так как они мало влияют на рассеивание оперенных ракет (см. § 43).

Уравнения (1) формально совпадают с уравнениями, описывающими плоскопараллельное движение невращающейся оперенной ракеты, и потому к решению этих уравнений можно применить методы, изложенные в § 27. К тому же уравнения (1) показывают, что проворачивание оперенных ракет не сказывается на угловом разбросе, вызванном начальными возмущениями, так как при $M = 0$ угол поворота φ не входит в уравнения движения¹⁾.

Приведенные здесь соображения об уравнениях движения проворачивающихся оперенных ракет базируются в основном на возможности пренебрежения слабым гироскопическим эффектом таких ракет и носят все же скорее качественный характер. Эти уравнения будут математически строго обоснованы в главе VII, посвященной пространственной задаче движения ракет на активном участке траектории.

Таким образом, при наличии проворачивания вместо бокового отклоняющего момента M в уравнениях движения оперенных ракет появляется момент $M \cos(\varphi + \beta)$, который на одних участках полета стремится отклонить ракету в одну сторону, а на других — в противоположную. В результате этого угловое отклонение проворачивающейся оперенной ракеты в плоскостях p и w должно быть значительно меньше углового отклонения той же оперенной ракеты при отсутствии вращения. Таким образом, проворачивание приводит к значительному уменьшению бокового разброса, а при малых углах возвышения θ_0 — и к уменьшению разброса по дальности, так как (см. § 21 и 22)

$$\frac{B_6}{X} = \frac{\bar{\Psi}_p}{\cos \theta_0} \quad \text{и} \quad B_d^* = \frac{\partial X}{\partial \theta_0} \bar{\Psi}_w.$$

Итак, исследование рассеивания проворачивающихся оперенных ракет сводится к интегрированию системы уравнений (1), для чего необходимо знать, как изменяется угол поворота снаряда φ со временем. Поэтому ближайшей задачей является определение характера изменения угла поворота снаряда φ при движении оперенной ракеты на активном участке траектории.

§ 48. Вращающие реактивные моменты

Рассмотрим сначала реактивные силы и моменты, действующие на проворачивающуюся оперенную ракету.

Реактивный момент M^* , вращающий ракету вокруг оси, может быть получен разнообразными способами. Перечислим главные из них.

1. Реактивный вращающий момент M^* создается заменой единственного центрального сопла Лавалья коллектором, состоящим из n

¹⁾ Предполагаем, что проворот не меняет величины начальных возмущений. Подробнее об этом см. § 55.

наклонных сопел Лавала. Реактивную силу, действующую на такую ракету, можно представить в виде суммы «реактивных сил», соответствующих отдельным соплам. Разлагая «реактивную силу» каждого из сопел на компонент P_{il} , параллельный оси ракеты, и P_{it} , перпендикулярный к оси, мы получим величину реактивной тяги в виде

$$P = \sum_{i=1}^n P_{il},$$

а величину реактивного момента — в виде

$$M^* = \sum_{i=1}^n P_{it} r_i,$$

где r_i — плечо компонента P_{it} относительно оси ракеты. Величины P_i зависят от геометрии стенок сопел (профиля стенок сопел) и пропорциональны давлению p в камере. Поэтому реактивную тягу можно представить в виде

$$P = p\Gamma,$$

а реактивный момент M^* — в виде

$$M^* = p\Gamma^*,$$

где Γ и Γ^* зависят лишь от геометрического расположения сопел и профиля их стенок.

Поэтому для данной камеры при изменении давления в ней, реактивный момент M^* остается пропорциональным реактивной тяге P , причем множитель пропорциональности зависит лишь от геометрической структуры камеры:

$$M^* = \mu_1 P. \quad (2a)$$

Вычислим множитель μ_1 для наиболее распространенной конструктивной схемы, а именно — для камеры, имеющей коллектор, состоящий из n одинаковых сопел Лавала, оси которых лежат в параллельных оси ракеты плоскостях, отстоящих на одинаковом расстоянии r от оси ракеты.

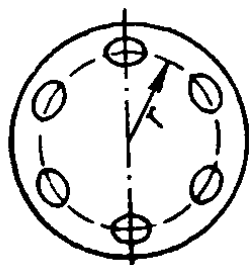


Рис. 72.

Пусть оси сопел наклонены к оси ракеты под одинаковым углом γ так, что при повороте ракеты вокруг оси на угол $\frac{360^\circ}{n}$ достигается совмещение каждого из сопел с положением, которое до поворота занимало соседнее из сопел. Пусть, далее, выходные сечения сопел лежат в плоскостях, перпендикулярных к оси ракеты (см. рис. 72). Тогда тяга

$$P = n [\mu u \cos \gamma + \sigma_a (p_a - p_n)] = n \mu \cos \gamma \left[u + \frac{\sigma_a (p_a - p_n)}{\mu \cos \gamma} \right],$$

где μ — массовый расход через каждое из сопел, имеющих выходное сечение с площадью σ_a . Выражение, стоящее в квадратных скобках, с большой точностью совпадает с эффективной скоростью истечения

$$u_e = u + \frac{\sigma_a (p_a - p_n)}{\mu}, \text{ определенной в § 8. Поэтому}$$

$$P = n \mu u_e \cos \gamma.$$

Для реактивного же момента имеем выражение

$$M^* = n r \mu u \sin \gamma,$$

так как добавочный статический член тяги $(p_a - p_n) \sigma_a$ параллелен оси ракеты. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\mu_1 = \frac{u}{u_e} r \operatorname{tg} \gamma. \quad (26)$$

2. Момент M^* создается тем, что часть газов из реактивной камеры вытекает через насадки или тангенциальные каналы, расположенные на цилиндрической части камеры (рис. 73).

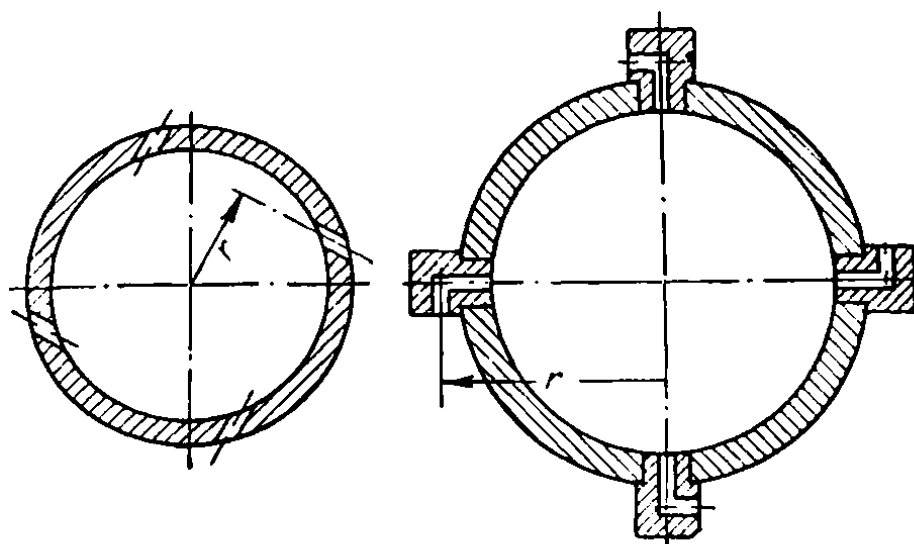


Рис. 73.

При этом расход через каждый из этих насадков (каналов) будет составлять N_i % от общего массового расхода газа $\left| \frac{dm}{dt} \right|$, вытекающего из камеры¹⁾.

Реактивный момент M^* будет равен в этом случае:

$$M^* = \sum_{i=1}^n r_i \frac{N_i}{100} \left| \frac{dm}{dt} \right| u_{ei}, \quad (2в)$$

где u_{ei} — эффективная скорость истечения из i -го насадка, а r_i — расстояние от оси ракеты до оси вытекающей из насадка струи.

¹⁾ Как известно, расход газа через сопло пропорционален давлению в камере и обратно пропорционален корню квадратному из абсолютной температуры газов в камере. Множитель же пропорциональности зависит от геометрии сопла. Таким образом, N_i не зависит от давления и температуры газов в камере.

Реактивная же тяга равна:

$$P = \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{100} \right) \left| \frac{dm}{dt} \right| u_e,$$

где u_e — эффективная скорость истечения из центрального тягового сопла.

Поэтому для данной камеры момент M^* будет пропорционален реактивной тяге P :

$$M^* = \mu_1 P,$$

причем в случае, когда все насадки одинаковы.

$$\mu_1 = \varepsilon \frac{Nr}{100 - N}, \quad (2r)$$

где $N = \sum_{i=1}^n N_i$ — относительный (в процентах) расход газов через все насадки, а

$$\varepsilon = \frac{u_{ei}}{u_e}. \quad (3a)$$

В случае каналов в формуле (2в) вместо u_{ei} нужно взять величину u_i — скорость истечения из канала (неэффективную), потому что статическая составляющая тяги и в этом случае не дает аксиального момента. Поэтому и в окончательной формуле (2г) в случае каналов

$$\varepsilon = \frac{u_i}{u_e}. \quad (3б)$$

3. Момент M^* может быть создан путем установки косо поставленных лопастей в центральном сопле или установкой перед центральным соплом диафрагмы с косо пропиленными щелями, наклоненными к плоскости диафрагмы под некоторым углом. При этом из сопла вытекает вращающаяся газовая струя. Подробное рассмотрение этого явления выходит из рамок настоящей книги; отметим лишь, что и в этом случае реактивный момент M^* пропорционален реактивной тяге P .

Итак, при всех рассмотренных нами способах создания реактивного момента M^* соблюдается соотношение $M^* = \mu_1 P$.

Отметим, что соотношения (2) и (3) верны лишь для однокамерной ракеты. В случае же многокамерной ракеты эти соотношения верны для каждой камеры в отдельности, и они могут быть положены в основу расчета общего момента M^* .

При рассмотрении аэродинамических сил и моментов, действующих на проворачивающуюся оперенную ракету, будем исходить из предположения, что медленное вращение этих ракет не влияет на лобовое сопротивление Q , подъемную силу Y и стабилизирующий момент M_1 . Иными словами, будем считать, что проворачивающаяся оперенная ра-

кета будет обладать такими же аэродинамическими характеристиками $c_{x\delta}$, $\frac{\partial c_H}{\partial \delta}$ и $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$, как и невращающаяся. Что же касается аэродинамических коэффициентов m_x и m_ω , соответствующих аксиальным аэродинамическим моментам M_x ¹⁾ и M_ω , то будем считать их независимыми от угла атаки δ (см. Приложение II, § 8). При этом предположении мы сможем рассматривать вращательное движение ракеты относительно оси симметрии независимо от колебательного движения относительно экваториальной оси, полагая при определении вращательного движения угол атаки δ равным нулю²⁾.

§ 49. Уравнение вращательного движения

При составлении уравнения вращательного движения оперенной ракеты воспользуемся правилом, согласно которому уравнения движения ракеты имеют такой же вид, что и обычные уравнения движения твердых тел, если в число внешних сил и моментов включить реактивные силы и моменты, измеренные при статических исследованиях ракеты на стенде, а также кориолисовы силы и моменты (см. гл. I).

Напишем уравнение вращательного движения оперенной ракеты в следующем виде³⁾:

$$I_1 \frac{d\omega}{dt} = M^* + M_x + M_\omega, \quad (4)$$

где I_1 — полярный момент инерции ракеты, ω — угловая скорость ракеты вокруг оси симметрии, $M^* = \mu_1 P = \mu_1 m a$ — реактивный момент относительно оси симметрии, $M_x = m_x \frac{\rho v^2}{2} S_n L_0$ — аэродинамический аксиальный момент, вызванный наличием косо поставленного оперения, $M_\omega = m_\omega \rho v \omega S_n L_0^2$ — демпфирующий аксиальный аэродинамический момент, возникающий как при прямом, так и при косо поставленном оперении⁴⁾.

Разделив почленно уравнение (4) на I_1 , можно представить его в виде

$$\frac{d\omega}{dt} + A\omega v = Bv^2 + Ca, \quad (5)$$

где

$$A = -\frac{m_\omega \rho S_n L_0^2}{I_1}; \quad B = \frac{m_x \rho S_n L_0}{2I_1}; \quad C = \frac{M}{aI_1} = \frac{\mu_1 m}{I_1}. \quad (5')$$

1) Момент M_x возникает при установке косо поставленного оперения.

2) Возможность такого отдельного рассмотрения этих двух видов вращательного движения следует из уравнений движения общей пространственной задачи, которой посвящается гл. VII.

3) При этом кориолисовым моментом мы пренебрегаем.

4) Более подробно относительно косо поставленного оперения и аксиальных моментов M_x и M_ω см. Приложение II, § 8.

Коэффициенты A , B и C будем считать постоянными в силу слабой зависимости аэродинамических коэффициентов m_ω и m_ω от скорости ракеты и в силу незначительности изменений величин I_1 и $\frac{m}{I_1}$ за время горения ракетного заряда [в формулах (5') принимаем величину I_1 равной $(I_1)_{\text{ор}}$ и величину $\frac{m}{I_1}$ равной $\left(\frac{m}{I_1}\right)_{\text{ор}}$]. Коэффициент A положителен в силу того, что коэффициент аэродинамического демпфирующего аксиального момента m_ω всегда отрицателен.

Введем в качестве независимого переменного путь, пройденный ракетой. Тогда уравнение (5) примет вид

$$\frac{d\omega}{ds} + A\omega = D_1(s), \quad (6)$$

где

$$D_1(s) = Bv(s) + \frac{Ca(s)}{v(s)}. \quad (6')$$

Таким образом, для искомой угловой скорости ω получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами и переменной правой частью¹⁾.

Угол поворота ракеты φ определяется из уравнения $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$. Очевидно, что угол поворота φ при движении ракеты вне пускового станка равен:

$$\varphi = \int_{t_0}^t \omega dt = \int_{s_0}^s \frac{\omega}{v} ds, \quad (6'')$$

где t_0 — момент схода ракеты с направляющей, длина которой равна s_0 .

При интегрировании уравнения (6) нужно удовлетворить начальному условию $\omega = \omega_0$ при $s = s_0$, причем величина ω_0 находится из конкретных условий задачи, определяющих характер движения оперенной ракеты на пусковом станке.

§ 50. Интегрирование уравнения вращения

Интегрирование линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами, как известно, сводится к квадратурам. Введем в уравнение (6) вместо ω новую переменную

$$u_1 = e^{As} \omega;$$

тогда

$$\omega = u_1 e^{-As}, \quad \frac{d\omega}{ds} = -Au_1 e^{-As} + e^{-As} \frac{du_1}{ds},$$

¹⁾ Заметим, что, решая уравнение $\frac{dv}{dt} = a$, мы определим скорость v и ускорение a как функции пути s (см. § 11). Таким образом, в правой части уравнения (6) стоят известные нам величины B , C , $v(s)$ и $a(s)$.

и уравнение (6) для новой переменной u_1 принимает вид

$$\frac{du_1}{ds} = D_1(s)e^{As}.$$

Отсюда следует, что

$$u_1 = \int_{s_0}^s D_1(\sigma) e^{A\sigma} d\sigma + u_{10},$$

где

$$u_{10} = u_1(s_0) = e^{As_0} \omega_0.$$

Возвращаясь снова к переменной ω , получим:

$$\omega = u_1 e^{-As} = e^{-As} \int_{s_0}^s D_1(\sigma) e^{A\sigma} d\sigma + u_{10} e^{-As}$$

или

$$\omega = e^{-As} \int_{s_0}^s D_1(\sigma) e^{A\sigma} d\sigma + \omega_0 e^{-A(s-s_0)}. \quad (7)$$

Формулы (7) и (6'') дают возможность найти искомые функции ω и φ при помощи квадратур.

В случае равноускоренного движения на всем активном участке, включая направляющую, при $v_n = 0$ интегралы (7) и (6'') можно выразить через затабулированные функции¹⁾. В этом случае $a = \text{const}$, $v = \sqrt{2as}$ и выражение для $D_1(s)$ принимает вид

$$D_1(s) = B \sqrt{2a} \sqrt{s} + C \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{s}}. \quad (8)$$

Для того чтобы в случае равноускоренного движения выразить интегралы (7) и (6'') через затабулированные функции, рассмотрим сначала следующие частные случаи вращательного движения.

1. Реактивное вращение. В этом случае $M_x = B = 0$ и

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{M^*}{I_1 \sqrt{2a}} e^{-As} \int_{s_0}^s \frac{e^{A\sigma} d\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \omega_0 e^{-A(s-s_0)}; \\ \varphi &= \int_{s_0}^s \frac{\omega}{\sqrt{2as}} ds = \frac{M^*}{2aI_1} \int_{s_0}^s \frac{e^{-As}}{\sqrt{s}} ds \int_{s_0}^s \frac{e^{A\sigma} d\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\omega_0 e^{As_0}}{\sqrt{2a}} \int_{s_0}^s \frac{e^{-A\sigma} d\sigma}{\sqrt{\sigma}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

¹⁾ Случай, когда движение равноускоренно только вне пускового станка и $v_n \neq 0$, будет рассмотрен в § 56. Через v_n обозначаем скорость ракеты в момент начала горения ракетного заряда.

Если мы в интегралах (9) произведем замену независимой переменной

$$x = \sqrt{As} \text{ (и соответственно } \xi = \sqrt{A\sigma}). \quad (10)$$

то после элементарных преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= F\Phi_1(x) [I(x) - I(x_0)] + \omega_0 \frac{\Phi_1(x)}{\Phi_1(x_0)}, \\ \varphi &= \int_s^x \frac{\omega(s)}{\sqrt{2as}} ds = \sqrt{\frac{2}{aA}} \int_{x_0}^x \omega(x) dx = \\ &= L \{ H(x) - H(x_0) - I(x_0) [\Phi(x) - \Phi(x_0)] \} + \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{aA}} \frac{\omega_0}{\Phi_1(x_0)} [\Phi(x) - \Phi(x_0)], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где F и L — постоянные коэффициенты:

$$F = \frac{\sqrt{\pi} M^*}{I_1 \sqrt{2aA}}, \quad L = \frac{\sqrt{\pi} M^*}{I_1 aA}, \quad (11')$$

а функции $\Phi(x)$, $I(x)$, $\Phi_1(x)$ и $H(x)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad \Phi_1(x) = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \\ I(x) &= \int_0^x e^{\xi^2} d\xi, \quad H(x) = \int_0^x \Phi_1(\xi) I(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Таблица значений функций $I(x)$, $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$ и $H(x)$ приведена в конце книги¹⁾.

Вычислим теперь ω_0 . Заметим, что $\omega_0 \neq 0$ лишь при вращении ракеты на пусковом станке. В этом случае на пусковом станке, помимо вращающего реактивного момента M^* , на снаряд действует еще отрицательный момент сил трения M_T .

Если принять, что момент M_T постоянен, то на направляющей на ракету будет действовать постоянный вращающий момент²⁾ $M^* - M_T$. Следовательно, уравнение вращательного движения ракеты на направляющей будет иметь тот же вид (6), что и вне направляющей, только вместо момента M^* в правой части будет стоять разность $M^* - M_T$. Поэтому величину угловой скорости в конце направляющей ω_0 можно получить из первой формулы (9), положив в ней

¹⁾ Функция $H(x)$ затабулирована нами.

²⁾ Момент M^* можно считать постоянным в силу слабого изменения массы ракеты: $M^* = m\mu_1$.

$s_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ и подставив в нее вместо s , ω и M^* соответственно s_0 , ω_0 и $M^* - M_T$. Для ω_0 при этом получим выражение

$$\omega_0 = \frac{M^* (1 - \nu)}{I_1 \sqrt{2a}} e^{-As_0} \int_0^{s_0} \frac{e^{A\sigma} d\sigma}{\sqrt{\sigma}}, \quad (13)$$

где ν — отношение постоянного момента трения на пусковом станке к постоянному реактивному моменту M^* :

$$\nu = \frac{M_T}{M^*}. \quad (14)$$

Если подставить выражение (13) в формулы (11), то для нашего частного случая выражения для ω и φ примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= F \Phi_1(x) [I(x) - \nu I(x_0)], \\ \varphi &= L \{H(x) - H(x_0) - \nu I(x_0) [\Phi(x) - \Phi(x_0)]\}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{\sqrt{\pi} M^*}{I_1 \sqrt{2aA}}, \quad L = \frac{\sqrt{\pi} M^*}{I_1 a A}, \\ x &= \sqrt{As}, \quad x_0 = \sqrt{As_0}. \end{aligned} \right\} \quad (15')$$

Если ракета не вращается на пусковом станке, то в формулах (15) следует положить $\nu = 1$. При идеальном вращении на пусковом станке (без трения) момент трения $M_T = 0$ и, следовательно, $\nu = 0$. В общем же случае величина ν заключена между нулем и единицей.

2. Косо поставленное оперение. В этом случае $C = M^* = 0$ и

$$\omega = B_1 e^{-As} \int_{s_0}^s e^{A\sigma} \sqrt{\sigma} d\sigma + \omega_0 e^{-A(s-s_0)} \quad (B_1 = B \sqrt{2a}).$$

Переходя к переменной $x = \sqrt{As}$ ($\xi = \sqrt{A\sigma}$), получим:

$$\omega = \frac{B_1 \sqrt{\pi}}{A^{\frac{3}{2}}} \Phi_1(x) \int_{x_0}^x \xi^2 e^{\xi^2} d\xi + \omega_0 \frac{\Phi_1(x)}{\Phi_1(x_0)}.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_{x_0}^x \xi^2 e^{\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \xi d(e^{\xi^2}) = \frac{1}{2} \{x e^{x^2} - x_0 e^{x_0^2} - I(x) + I(x_0)\};$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \omega &= D \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} x - \Phi_1(x) [I(x) - G(x_0)] \right\} + \omega_0 \frac{\Phi_1(x)}{\Phi_1(x_0)}, \\ \varphi &= \sqrt{\frac{2}{aA}} \int_{x_0}^x \omega(x) dx = E \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} (x^2 - x_0^2) - [H(x) - H(x_0)] + \right. \\ &\quad \left. + G(x_0) [\Phi(x) - \Phi(x_0)] \right\} + \sqrt{\frac{2}{aA}} \frac{\omega_0}{\Phi_1(x_0)} [\Phi(x) - \Phi(x_0)], \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{B}{A^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi a}{2}}, \\ E &= \frac{B \sqrt{\pi}}{A^2}; \\ G(x_0) &= I(x_0) - \frac{2x_0}{\sqrt{\pi} \Phi_1(x_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (16')$$

Аэродинамический момент M_x пропорционален квадрату скорости и потому при стрельбе в полевых условиях ($v_n = 0$) момент M_x при движении ракеты на направляющей мал и безусловно меньше момента трения M_T . Поэтому следует считать, что ракета с косо поставленным оперением при стрельбе в полевых условиях не вращается на пусковом станке, т. е. в этом случае $\omega_0 = 0$. Угловая скорость ω_0 может, однако, отличаться от нуля при стрельбе такими ракетами с самолета.

3. Спиральная направляющая. Рассмотрим, наконец, случай стрельбы оперенными ракетами, которые вращаются при полете вокруг оси симметрии благодаря специальному устройству пускового станка, имеющего вид спирали. В этом случае вне направляющей на ракету не действуют ни реактивный вращающий момент M^* , ни аэродинамический момент M_x , т. е. в этом случае $B = C = 0$. Поэтому угловая скорость такой ракеты согласно формуле (7) равна

$$\omega = \omega_0 e^{-A(s-s_0)}. \quad (17)$$

Переходя к переменной $x = \sqrt{As}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 \frac{\Phi_1(x)}{\Phi_1(x_0)}, \\ \varphi &= \sqrt{\frac{2}{aA}} \int_{x_0}^x \omega(x) dx = \sqrt{\frac{2}{aA}} \frac{\omega_0}{\Phi_1(x_0)} [\Phi(x) - \Phi(x_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Если шаг спирали направляющей в ее конце (шаг винта направляющей, вообще говоря, может быть переменным вдоль пускового

станка) равен h_0 м, то начальная угловая скорость, которую будет иметь оперенная ракета, сошедшая с такой направляющей, будет равна

$$\omega_0 = 2\pi \frac{v_{00}}{h_0} \frac{1}{\text{сек}}, \quad (18')$$

где v_{00} — скорость ракеты относительно станка в момент схода (в м/сек).

Если ускорение постоянно на всем активном участке (включая направляющую) и $v_n = 0$, то $v = \sqrt{2as}$ и $v_{00} = \sqrt{2as_0}$. Отсюда получаем:

$$\omega_0 = 2\pi \frac{\sqrt{2as_0}}{h_0} = \frac{2\pi}{h_0} \sqrt{\frac{2a}{A}} x_0.$$

Следовательно, в этом случае

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{h_0} \sqrt{\frac{2a}{A}} \frac{x_0}{\Phi_1(x_0)} \Phi_1(x), \\ \varphi &= \frac{4\pi}{Ah_0} \frac{x_0}{\Phi_1(x_0)} [\Phi(x) - \Phi(x_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Ввиду того что угловая скорость проворачивающихся оперенных ракет линейно зависит от величин B , C и ω_0 [см. формулу (7)], для ракет, имеющих комбинированное вращение (например, реактивное вращение плюс вращение из-за спиральной направляющей и т. д.), угловая скорость ω и угол поворота φ получаются суммированием соответствующих угловых скоростей и углов поворотов, определяемых приведенными выше формулами (11) [или (15)], (16) и (18) [или (19)]. При этом нужно иметь в виду, что если в комбинацию причин, вызывающих вращение, входит спиральная направляющая, то нужно положить в формулах (11) и (16) $\omega_0 = 0$, а в формулах (15) $\nu = 1$.

§ 51. Анализ характера вращения

Для анализа характера вращения, вызванного различными причинами, рассмотрим движение оперенных ракет с постоянным ускорением на всем активном участке (включая пусковой станок). На этом частном случае (охватывающем, впрочем, с большой степенью точности многие полевые ракеты) мы постараемся выяснить основные особенности вращательных движений оперенных ракет, вызванных реактивным моментом, косо поставленным оперением и спиральной направляющей.

Обратим внимание читателя на некоторые особенности формул (15), (16) и (19). Рассмотрим сначала случай реактивного вращения оперенной ракеты, не вращающейся на пусковом станке ($\nu = 1$) или вращающейся на станке без трения ($\nu = 0$). Множитель L , стоящий перед скобками во второй

формуле (15), равен

$$L = \frac{\sqrt{\pi} M^*}{I_1 a A} = \frac{\sqrt{\pi} m a \mu_1}{I_1 a A} = \frac{\sqrt{\pi} \mu_1 m}{I_1 A} \quad (20)$$

Так как коэффициент μ_1 не зависит от давления в камере (см. § 48), то функция $\varphi(s)$ [или, что то же, $\varphi(x)$] в рассматриваемых случаях не зависит от давления в камере или от величины реактивной тяги. В то же время множитель F в первой формуле (15) равен:

$$F = \frac{\sqrt{\pi} M^*}{I_1 \sqrt{2aA}} = \frac{\sqrt{\pi} \mu_1 m}{I_1 \sqrt{2A}} \sqrt{a}. \quad (21)$$

Отсюда следует, что угловая скорость в данном месте (при данном значении s) в рассматриваемых случаях увеличивается при увеличении давления в камере или увеличении тяги (пропорционально корню квадратному из ускорения). К такому же точно выводу приходим и для случаев движения ракеты с косо поставленным оперением при $\omega_0 = 0$ и оперенной ракеты, вращающейся благодаря спиральной направляющей [см. формулы (16) и (19)].

Таким образом, во всех этих случаях характер проворачивания (вернее, зависимость угла поворота φ от s) не зависит от величины давления в (ракетной) камере оперенной ракеты, а следовательно, от величины реактивной тяги и температуры ракетного заряда, а угловая скорость ω зависит от этих величин, так как она пропорциональна $\sqrt{a}$.

Если реактивно-вращающаяся ракета вращается на пусковом станке с трением, то при изменении давления в камере или изменении реактивной тяги изменяется коэффициент γ , входящий в формулы (15). С увеличением давления в камере увеличивается реактивный момент M^* и уменьшается коэффициент γ , что приводит к увеличению угла поворота φ для данного значения s , и наоборот, с уменьшением давления в камере угол φ для данного значения s уменьшается. Более подробная оценка влияния трения на пусковом станке на характер вращения реактивно-вращающейся ракеты будет дана ниже. Здесь же заметим, что с точки зрения вращательного движения ракеты увеличение момента трения на пусковом станке в n раз эквивалентно n -кратному уменьшению давления в камере. В обоих случаях функции $\varphi(s)$ будут одинаковы.

Для определения характера вращательного движения оперенной ракеты на рис. 74 и 75 представлены графики угловой скорости ω и угла поворота φ для рассмотренной в главе IV ракеты II, которой придается вращение всеми перечисленными выше способами²⁾.

Кривые I представляют собой функции $\omega(s)$ и $\varphi(s)$ для реактивно-вращающейся ракеты, у которой $\mu_1 = 3,5 \cdot 10^{-3}$, а $\gamma = 1$ (т. е. ракета не вращается на пусковом станке).

Кривые II представляют собой функции $\omega(s)$ и $\varphi(s)$ для той же реактивно-вращающейся ракеты с $\mu_1 = 3,5 \cdot 10^{-3}$, но при $\gamma = 0$ (т. е. ракета вращается на пусковом станке без трения).

¹⁾ Мы видим отсюда, что угол поворота $\varphi(s)$ зависит не от момента M^* , а от «условного момента» μ_1 .

²⁾ Точнее говоря, здесь речь идет о модифицированной ракете II, отличающейся от эталонной ракеты II лишь вращением.

Кривые *III* характеризуют вращательное движение ракеты с косо поставленным оперением, у которой $B = 0,0102$.

Наконец, кривые *IV* характеризуют вращательное движение эталонной ракеты, имеющей спиральную направляющую.

Все кривые *I—IV* для ω и φ рассчитаны для эталонной длины пускового станка, а кривые $\omega(s)$ на рис. 74 рассчитаны при реактивной тяге, соответствующей температуре ракетного заряда, равной $+15^\circ\text{C}$.

Как видно из рис. 75, углы поворота ракеты в конце активного участка для случаев *I*, *III* и *IV* одного и того же порядка, но на

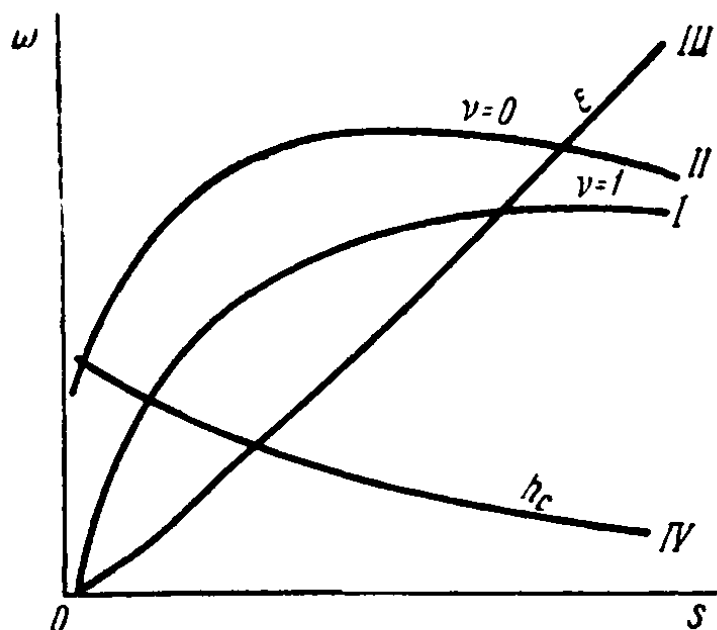


Рис. 74.

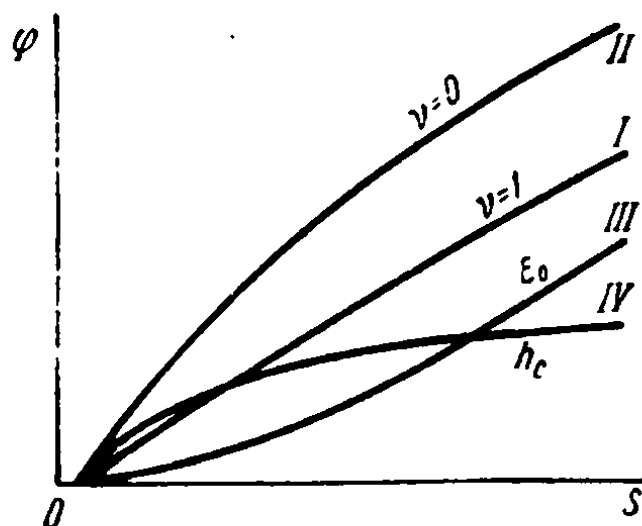


Рис. 75.

начальной части активного участка эти ракеты проворачиваются совершенно по-разному.

Меньше всего проворачивается вначале ракета с косо поставленным оперением. Так, например, на критическом участке при косо поставленном оперении ракета делает 1,7 оборота, а при реактивном вращении ($\nu = 1$) 4,5 оборота, т. е. в 2,5 раза больше; на начальной части критического участка, т. е. в самом начале полета, это отношение еще больше. Это обстоятельство объясняется тем, что вращающий аэродинамический момент M_x растет пропорционально квадрату скорости и потому на начальной части траектории этот момент мал. Соответственно этому очень медленно растет и угловая скорость ракеты, снабженной косо поставленным оперением¹⁾.

На рис. 74 видно, что только после критического участка угловая скорость ракеты с косо поставленным оперением сравнима с угловой скоростью ракеты с реактивным вращением ($\nu = 1$). Таким образом, на самой важной части траектории, где в основном возникает рассеивание оперенных ракет, т. е. на критическом участке, угол поворота ракеты с косо поставленным оперением во много раз

¹⁾ Напомним, что в нашем случае вращающий реактивный момент M_r в отличие от M_x постоянен на всем активном участке.

меньше угла поворота ракеты, которой вращение придано каким-нибудь другим способом.

Из рассмотрения тех же рис. 74 и 75 можно сделать вывод, что поворот ракеты в самом начале критического участка еще более возрастает (по сравнению с поворотом при реактивном вращении с $\nu = 1$), если угловая скорость ракеты при сходе с пускового станка отлична от нуля (сравни кривые II и IV с кривыми I).

Этот последний вывод имеет совершенно естественное объяснение, заключающееся в том, что реактивно-вращающаяся ракета, не вращающаяся на направляющей ($\nu = 1$), сходит с пускового станка с угловой скоростью, равной нулю. И хотя уже в середине критического участка угловая скорость такой ракеты сравнима с угловой скоростью такой же ракеты, но вращающейся без трения на пусковом станке ($\nu = 0$), и даже больше угловой скорости ракеты, сошедшей со спиральной направляющей, однако за этот промежуток времени две последние ракеты успевают повернуться на значительный угол, так что поворот этих ракет на первой половине критического участка примерно в два раза больше, чем у первой ракеты (при $\nu = 1$). В начале полета это отношение еще больше.

§ 52. Определение углового отклонения проворачивающихся оперенных ракет

Для нахождения проекции углового отклонения проворачивающейся оперенной ракеты на p -плоскость, как было уже показано в § 47, необходимо найти решение системы уравнений:

$$\frac{dv}{dt} = a, \quad v \frac{d\psi_p}{dt} = a\delta_p,$$

$$\frac{d^2(\psi_p + \delta_p)}{dt^2} + k_1^2 v^2 \delta_p = \frac{ma d \cos[\beta + \varphi(s)]}{I},$$

где угол поворота $\varphi(s)$ находится методами, изложенными в § 50, а d — величина эксцентриситета реактивной силы.

Эти уравнения движения проворачивающихся оперенных ракет, как уже указывалось выше, формально совпадают с уравнениями плоскопараллельного движения невращающейся оперенной ракеты с переменным эксцентриситетом реактивной силы, равным $d \cos(\beta + \varphi)$. Поэтому мы сразу можем написать решение для ψ_p в виде¹⁾

$$\psi_p = \frac{1}{x^2 k} \int_s^s \frac{a(s) ds}{v^3(s)} \int_{s_0}^s \frac{a(\sigma) d \cos[\beta + \varphi(\sigma)] \sin k(s - \sigma)}{v(\sigma)} d\sigma. \quad (22)$$

¹⁾ См. § 28.

Если ускорение a постоянно на всем активном участке, то выражение (22) примет вид

$$\psi_p = \frac{d}{4\pi^2 k} \int_{s_0}^s \frac{d\rho}{\rho^{3/2}} \int_{s_0}^{\rho} \frac{\cos [\beta + \varphi(\sigma)] \sin k(\rho - \sigma)}{\sqrt{\sigma}} d\sigma. \quad (23)$$

Раскрывая выражение $\cos [\beta + \varphi(\sigma)] = \cos \beta \cos \varphi(\sigma) - \sin \beta \sin \varphi(\sigma)$ и подставляя его в формулу (23), получим:

$$\psi_p = d\psi_I \cos \beta - d\psi_{II} \sin \beta, \quad (24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_I &= \frac{1}{4\pi^2 k} \int_{s_0}^s \frac{d\rho}{\rho^{3/2}} \int_{s_0}^{\rho} \frac{\cos \varphi(\sigma) \sin k(\rho - \sigma)}{\sqrt{\sigma}} d\sigma, \\ \psi_{II} &= \frac{1}{4\pi^2 k} \int_{s_0}^s \frac{d\rho}{\rho^{3/2}} \int_{s_0}^{\rho} \frac{\sin \varphi(\sigma) \sin k(\rho - \sigma)}{\sqrt{\sigma}} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (24')$$

Совершенно аналогичные рассуждения, которые мы предлагаем провести читателю, приводят к выводу, что проекция ψ_w углового отклонения проворачивающейся оперенной ракеты на w -плоскость может быть представлена в виде

$$\psi_w = \psi_I d \sin \beta + \psi_{II} d \cos \beta, \quad (25)$$

где ψ_I и ψ_{II} определяются теми же формулами (24')¹⁾.

Формулы (24) и (25) дают значения углового отклонения в p - и w -плоскостях для данного конкретного выстрела, характеризуемого определенной величиной эксцентриситета реактивной силы d и определенным значением угла β между p -плоскостью и плоскостью отклоняющей пары, в момент схода ракеты с пускового станка.

При стрельбе одними и теми же проворачивающимися оперенными ракетами в одних и тех же условиях эти величины d и β меняются от выстрела к выстрелу, т. е. они являются случайными величинами. В то же время величина $\varphi(\sigma)$, а следовательно, и ψ_I и ψ_{II} остаются при этом неизменными. В силу того что d и β

¹⁾ Легко видеть, что в случае переменного ускорения

$$\begin{aligned} \psi_I &= \frac{1}{\pi^2 k} \int_{s_0}^s \frac{a(\rho) d\rho}{v^3(\rho)} \int_{s_0}^{\rho} \frac{a(\sigma) \cos \varphi(\sigma) \sin k(\rho - \sigma)}{v(\sigma)} d\sigma, \\ \psi_{II} &= \frac{1}{\pi^2 k} \int_{s_0}^s \frac{a(\rho) d\rho}{v^3(\rho)} \int_{s_0}^{\rho} \frac{a(\sigma) \sin \varphi(\sigma) \sin k(\rho - \sigma)}{v(\sigma)} d\sigma. \end{aligned}$$

являются случайными величинами, случайными же величинами являются и углы ψ_p и ψ_w .

Начальный эксцентриситет является случайной векторной величиной d , компоненты которой, $d \cos \beta$ и $d \sin \beta$, на плоскостях p и w , независимы и подчинены одному и тому же гауссову закону распределения плотности вероятности (с одной и той же мерой точности). Вероятное значение этих компонентов обозначим через $\bar{d}$ (см. § 29).

Формулы (24) и (25) представляют каждую из величин ψ_p и ψ_w в виде суммы двух независимых случайных величин. Поэтому вероятные значения этих величин $\bar{\psi}_p$ и $\bar{\psi}_w$ определяются следующим образом:

$$\bar{\psi}_p = \bar{\psi}_w = \bar{d} \sqrt{\psi_I^2 + \psi_{II}^2}. \quad (26)$$

Заметим, что угловое отклонение ψ характеризуется не только своей величиной, но и направлением плоскости угла. Если, учитывая малость угла ψ , изобразить его в виде вектора, перпендикулярного к этой плоскости, то получим «плоский» случайный вектор ψ с компонентами ψ_p и ψ_w (более подробно об этом см. § 19). Из равенства величин $\bar{\psi}_p$ и $\bar{\psi}_w$ следует, что этот случайный вектор подчиняется плоскому гауссову закону с круговой симметрией.

Под вероятным значением $\bar{\psi}$ углового отклонения ψ принято понимать вероятное значение любого из его компонентов:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_p = \bar{\psi}_w. \quad (27)$$

Поэтому вероятное угловое отклонение проворачивающейся оперенной ракеты равно

$$\bar{\psi} = \bar{d} \sqrt{\psi_I^2 + \psi_{II}^2}. \quad (28)$$

§ 53. Вычисление углового отклонения при помощи ядра $R(s, \sigma)$

В предыдущем параграфе был изложен способ нахождения углового отклонения по формулам (24) и (28). При этом для вычисления ψ_I и ψ_{II} необходимо найти двойной интеграл по некоторой области значений переменных ρ и σ от функций

$$\frac{\cos \varphi(\sigma) \sin k(\rho - \sigma)}{\sigma^{1/2} \rho^{3/2}} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \varphi(\sigma) \sin k(\rho - \sigma)}{\sigma^{1/2} \rho^{3/2}}. \quad (29)$$

Эти функции сильно осциллируют, так как угол поворота, а вместе с ним $\cos \varphi(\sigma)$ и $\sin \varphi(\sigma)$ быстро изменяются при изменении переменной σ . Если проводить сначала интегрирование по переменной σ , а затем по ρ , как это сделано в формулах (24'), то при этом нам нужно будет дважды интегрировать сильно осциллирующие функции.

В то же время из сравнения величин k и $\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{\omega}{v}$ ясно, что период

изменения функции $\sin k(\rho - \sigma)$, равный $\frac{2\pi}{k}$, значительно превосходит период функций $\cos \varphi(\sigma)$ и $\sin \varphi(\sigma)$, имеющий порядок величины $2\pi / \frac{d\varphi}{d\sigma}$.

Поэтому напрашивается более рациональный способ вычисления функций ψ_I и ψ_{II} , заключающийся в изменении принятого в формулах (24') порядка интегрирования. Именно, функции ψ_I и ψ_{II} проще вычислять, если интегрировать подынтегральные функции (29) сначала по ρ , а затем по σ . Тогда при первом интегрировании по переменной ρ нам придется интегрировать функцию $\frac{\sin k(\rho - \sigma)}{\rho^{3/2}}$, которая гораздо медленнее осциллирует, чем функции $\cos \varphi(\sigma)$ и $\sin \varphi(\sigma)$.

Для замены порядка интегрирования найдем сначала область переменных ρ и σ , по которой в формулах (24') проводится интегрирование функций (29). Первоначально в этих формулах проводится интегрирование по σ при фиксированном ρ по отрезку ab , ограниченному прямыми $\sigma = s_0$ и $\sigma = \rho$ (рис. 76).

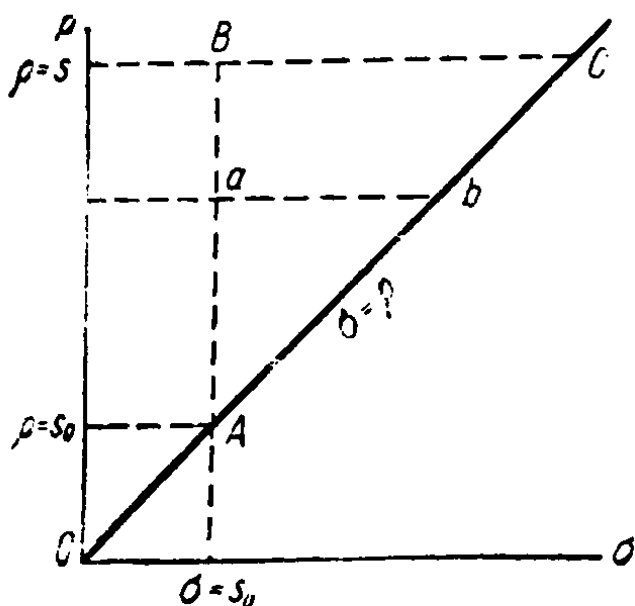


Рис. 76.

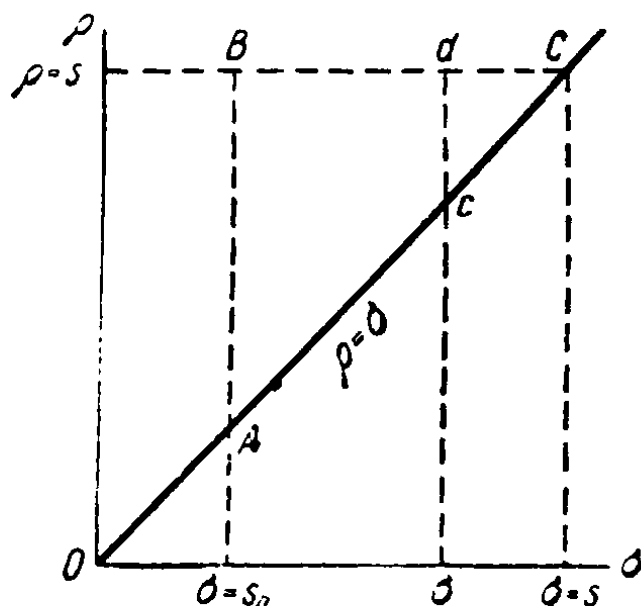


Рис. 77.

Последующее интегрирование по ρ ведется от значений $\rho = s_0$ до $\rho = s$. Таким образом, в формулах (24') мы проводим интегрирование функций (29) по области переменных ρ и σ , имеющей на плоскости (ρ, σ) вид треугольника ABC .

При перемене порядка интегрирования мы должны проводить интегрирование по той же области ABC сначала по переменной ρ , а затем по σ . Первое интегрирование по ρ проводится при фиксированном σ по отрезку cd , ограниченному прямыми $\rho = \sigma$ и $\rho = s$ (рис. 77). Последующее интегрирование по σ ведется от значений $\sigma = s_0$ до $\sigma = s$.

Таким образом, при перемене порядка интегрирования формулы (24') принимают вид:

$$\psi_I(s) = -\frac{1}{4\chi^2 k} \int_{s_0}^s \frac{\cos \varphi(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma}} \int_{\sigma}^s \frac{\sin k(\rho - \sigma) d\rho}{\rho^{3/2}},$$

$$\psi_{II}(s) = \frac{1}{4\chi^2 k} \int_{s_0}^s \frac{\sin \varphi(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma}} \int_{\sigma}^s \frac{\sin k(\rho - \sigma) d\rho}{\rho^{3/2}}.$$

Эти выражения можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \psi_I(s) &= \int_{s_0}^s \cos \varphi(\sigma) R(s, \sigma) d\sigma, \\ \psi_{II}(s) &= \int_{s_0}^s \sin \varphi(\sigma) R(s, \sigma) d\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где ядро

$$R(s, \sigma) = \frac{1}{4\chi^2 k} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int_{\sigma}^s \frac{\sin k(\rho - \sigma) d\rho}{\rho^{3/2}}. \quad (31)$$

Обратим внимание читателя на то, что в выражение (31) из всех параметров ракеты входят лишь χ и k . Значение функции $R(s, \sigma)$ не зависит от d , s_0 и угла поворота φ . Поэтому ядро $R(s, \sigma)$ одно и то же для всех оперенных ракет, имеющих одни и те же значения χ и k . Последнее обстоятельство делает удобным применение формул (30) к конструктивному расчету, при котором для данной ракеты необходимо подобрать технически удобный способ придания вращения, а также подобрать длину направляющей. Поскольку нас обычно интересует значение углового отклонения ϕ в конце активного участка полета ($s = s_a$), то при таком расчете достаточно вычислить по формуле (31) функцию $R(s_a, \sigma)$ для значений σ от минимального значения варьируемой длины направляющей до $\sigma = s_a$. После этого вероятное угловое отклонение в конце активного участка можно вычислить по формулам (30) и (28).

Заметим, что ядро $R(s, \sigma)$ можно применить и для вычисления углового отклонения невращающейся оперенной ракеты. Действительно, положив в формулах (30) угол φ равным нулю, получим:

$$\psi_I = \int_{s_0}^s R(s, \sigma) d\sigma, \quad \psi_{II} = 0$$

и, следовательно,

$$\bar{\psi}(s) = \bar{d} \int_{s_0}^s R(s, \sigma) d\sigma. \quad (32)$$

Таким образом,

$$\int_{s_0}^s R(s, \sigma) d\sigma = \frac{\bar{\psi}(s)}{\bar{d}} = \psi^*(s), \quad (33)$$

где $\psi^*(s)$ — угловое отклонение невращающегося снаряда при единичном эксцентриситете реактивной силы.

Для невращающейся оперенной ракеты очень удобно применять ядро $R(s, \sigma)$ при вычислении зависимости углового отклонения от длины направляющей s_0 , так как, вычислив $R(s_a, \sigma)$ и варьируя в формуле (32) нижний предел интегрирования s_0 , мы легко найдем $\psi(s_a)$ при различных длинах пускового станка.

Ядро $R(s, \sigma)$ можно выразить через затабулированные функции, если в формуле (31) провести замену переменных: $z = ks$; $\zeta = k\sigma$; $\tau = k\rho$. Тогда

$$\begin{aligned} R(s, \sigma) &= \frac{1}{4x^2} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_{\zeta}^z \frac{\sin(\tau - \zeta) d\tau}{\tau^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{4x^2} \left\{ \frac{\cos \zeta}{\sqrt{\zeta}} \int_{\zeta}^z \frac{\sin \tau}{\tau^{3/2}} d\tau - \frac{\sin \zeta}{\sqrt{\zeta}} \int_{\zeta}^z \frac{\cos \tau}{\tau^{3/2}} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\zeta}^z \frac{\sin \tau}{\tau^{3/2}} d\tau &= 2 \left[-\frac{\sin z}{\sqrt{z}} + \frac{\sin \zeta}{\sqrt{\zeta}} + \int_{\zeta}^z \frac{\cos \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau \right], \\ \int_{\zeta}^z \frac{\cos \tau}{\tau^{3/2}} d\tau &= 2 \left[-\frac{\cos z}{\sqrt{z}} + \frac{\cos \zeta}{\sqrt{\zeta}} - \int_{\zeta}^z \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Подставляя последние выражения в (34), найдем:

$$\begin{aligned} R(s, \sigma) &= \frac{\pi}{2x^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[-J_{\frac{1}{2}}(z) J_{-\frac{1}{2}}(\zeta) + J_{\frac{1}{2}}(\zeta) J_{-\frac{1}{2}}(z) \right] + \right. \\ &\quad \left. + J_{-\frac{1}{2}}(\zeta) [C(z) - C(\zeta)] + J_{\frac{1}{2}}(\zeta) [S(z) - S(\zeta)] \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

где $J_{\frac{1}{2}}(z)$, $J_{-\frac{1}{2}}(z)$ — функции Бесселя, а $C(z)$ и $S(z)$ — интегралы Френеля (см. § 32).

Проиллюстрируем сказанное графиками, рассчитанными для ракеты III, уже рассмотренной в главе IV. На рис. 78 дан график функции $R(s_a, \sigma)$ для этой ракеты. Площадь, ограниченная кривой $R(s_a, \sigma)$, осью абсцисс и ординатами $\sigma = s_0$ и $\sigma = s_a$, равна, согласно (33), угловому отклонению $\psi^*(s_a)$ для невращающейся ракеты III.

Интересующие нас функции ψ_I и ψ_{II} , определяющие угловое рассеивание проворачивающейся оперенной ракеты, находятся при помощи квадратур:

$R(s_a, \sigma)$

0

σ где

$$\left. \begin{aligned} \psi_I(s_a) &= \int_{s_0}^{s_a} Q_1(\sigma) d\sigma, \\ \psi_{II}(s_a) &= \int_{s_0}^{s_a} Q_2(\sigma) d\sigma, \end{aligned} \right\} (36)$$

Рис. 78.

$$\left. \begin{aligned} Q_1(\sigma) &= R(s_a, \sigma) \cos \varphi(\sigma), \\ Q_2(\sigma) &= R(s_a, \sigma) \sin \varphi(\sigma). \end{aligned} \right\} (36')$$

На рис. 79 приведены графики функций $Q_1(\sigma)$ и $Q_2(\sigma)$ для реактивно-вращающейся ракеты III, для которой $\mu_1 = 4,8 \cdot 10^{-3}$.

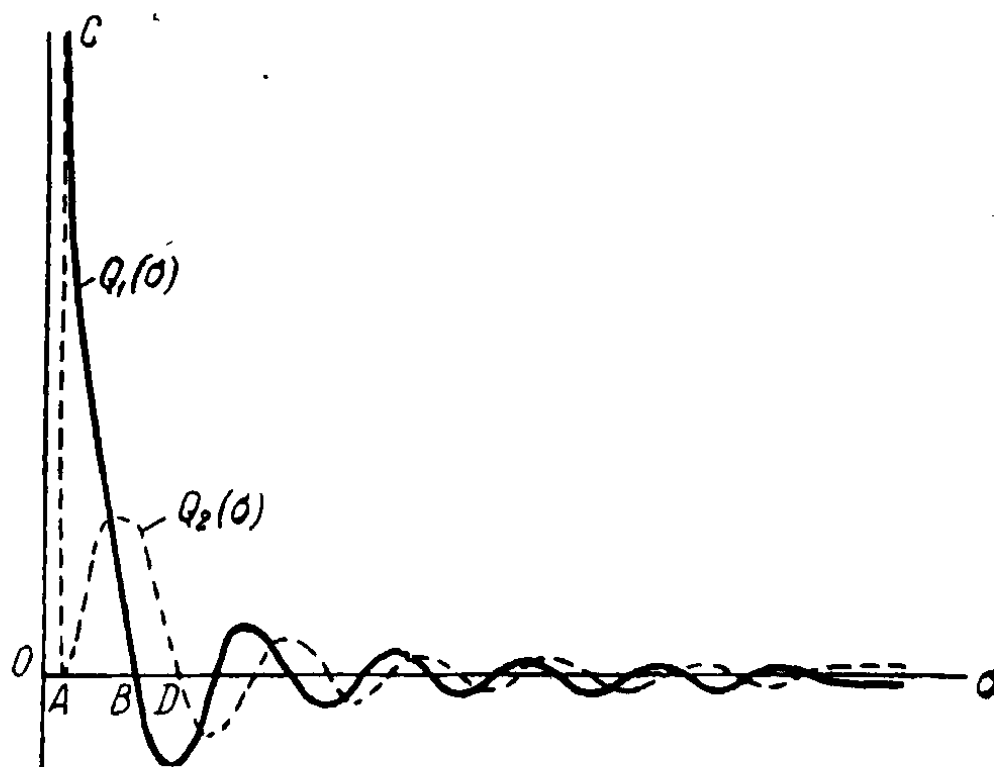


Рис. 79.

Величины ψ_I и ψ_{II} представляют собой площади, ограниченные кривыми $Q_1(\sigma)$ и $Q_2(\sigma)$, осью абсцисс и ординатами $\sigma = s_0$ и $\sigma = s_a$. Из графиков видно, что основная часть площади ψ_I определяется площадью криволинейного треугольника ABC, которая тем меньше,

чем меньше его основание AB , т. е. чем меньше участок пути, на котором ракета проворачивается на первые 90° . Аналогично, площадь ψ_{II} тем меньше, чем меньше участок AD , на котором ракета делает первые поворота.

Таким образом, для уменьшения разброса оперенных ракет необходимо заставить их быстрее проворачиваться на самых первых метрах полета.

В § 51 мы видели, что можно достигнуть примерного равенства полного числа оборотов ракеты на активном участке при всех способах придания ракете вращения. Однако при этом на первых метрах полета поворот ракеты, создаваемый косо поставленным оперением, будет очень мал. Интенсивное вращение такой оперенной ракеты на последней части активного участка не спасает положения дела и не вызывает радикального уменьшения углового отклонения ракеты.

Этим объясняется преимущество реактивного вращения и вращения, создаваемого спиральной направляющей, по сравнению с вращением, вызываемым косо поставленным оперением.

В заключение рассмотрим еще один общий вывод, вытекающий из вида формул (24). В § 51 было показано, что для реактивно-вращающейся оперенной ракеты при значениях коэффициента $\nu = 1$ (отсутствие вращения на пусковом станке) и $\nu = 0$ (вращение на пусковом станке без трения), а также для ракеты, проворачивающейся благодаря косо поставленному оперению или спиральной направляющей, функция $\varphi(s)$ не зависит от величины реактивной тяги (т. е. от давления в камере). Это вытекало из того, что в этих случаях в выражение для $\varphi(s)$ не входило реактивное ускорение a . Из формул (24) вытекает, что и функции $\psi_I(s)$ и $\psi_{II}(s)$, а следовательно, и вероятное угловое отклонение $\bar{\psi}(s)$ не зависят в этих случаях от величины реактивной тяги или давления в камере (см. аналогичные рассуждения в § 31).

Если реактивно-поворачивающаяся ракета вращается на пусковом станке с трением, то угловое отклонение $\bar{\psi}(s)$ уже будет зависеть от величины реактивной тяги, так как в этом случае от величины тяги зависит функция $\varphi(s)$ (см. § 51). Причем, как было указано в § 51, уменьшение реактивной тяги (или давления в камере) в n раз влияет на угловое отклонение ракеты так же, как увеличение момента трения M_T в n раз. Оценка влияния трения на угловое отклонение реактивно-вращающейся оперенной ракеты будет дана в следующем параграфе, где будут проанализированы конкретные расчеты углового отклонения, подтверждающие общие соображения, изложенные в настоящем параграфе.

§ 54. Анализ углового отклонения проворачивающихся оперенных ракет

Анализ влияния различных способов проворачивания на угловой разброс оперенных ракет, вызванный эксцентриситетом реактивной силы, можно провести, сравнивая величину углового отклонения проворачивающейся ракеты с угловым отклонением той же ракеты при отсутствии вращения вокруг продольной оси. Для такого сравнения введем коэффициент η , равный отношению углового отклонения

невращающейся ракеты на активном участке полета к угловому отклонению соответствующей проворачивающейся ракеты. Коэффициент η , введенный таким образом, показывает, во сколько раз из-за проворачивания ракеты уменьшается угловое отклонение, вызванное эксцентриситетом реактивной силы.

Рассмотрим сначала влияние величины условного вращающего реактивного момента μ_1 на коэффициент η . Из общих теоретических соображений, изложенных в предыдущих параграфах, ясно, что с увеличением μ_1 увеличивается скорость проворачивания и, следовательно, должен увеличиваться коэффициент η . Это замечание подтверждается графиком $\eta(\mu_1)$, изображенным пунктиром на рис. 80

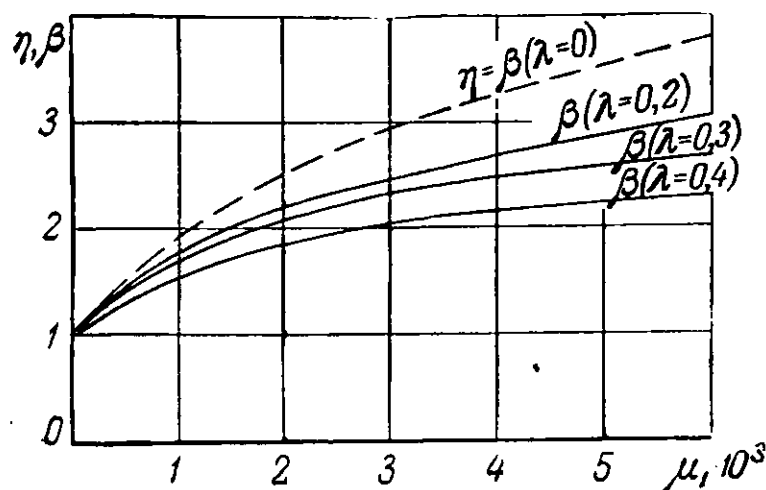


Рис. 80.

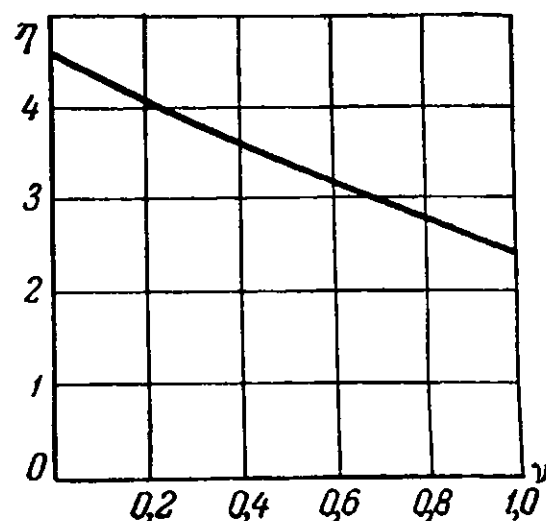


Рис. 81.

и рассчитанным для реактивно-вращающейся модификации ракеты II, движущейся на пусковом станке без вращения ($\nu = 1$). На этом рисунке видно, что η возрастает с увеличением μ_1 , причем скорость этого возрастания, характеризуемая производной $\frac{d\eta}{d\mu_1}$, уменьшается с увеличением μ_1 .

Для оценки влияния трения на пусковом станке может служить график $\eta(\nu)$ для реактивно-проворачивающегося варианта ракеты III, изображенный на рис. 81. Как видно на этом рисунке, при идеальном вращении ракеты на станке, т. е. при отсутствии трения ($\nu = 0$), коэффициент $\eta = 4,6$, а при отсутствии вращения ракеты на направляющей ($\nu = 1$) $\eta = 2,5$ ¹⁾.

Таким образом, в соответствии с общими теоретическими соображениями *вращение на пусковом станке, придающее ракете значительную начальную угловую скорость при сходе со станка, резко влияет на угловое отклонение проворачивающихся оперен-*

¹⁾ График рис. 81 рассчитан для значения условного момента $\mu_1 = 4,8 \cdot 10^{-3}$.

ных ракет. Аналогичный результат получен для реактивно-вращающегося варианта ракеты II, свободно вращающейся на пусковом станке.

В этом случае при $\mu_1 = 3,5 \cdot 10^{-3}$ и $\nu = 0$ коэффициент $\eta = 11,0$, в то время как при том же значении μ_1 и при отсутствии вращения на станке ($\nu = 1$) коэффициент $\eta = 3,2$ (см. рис. 80). Еще бо́льшие значения коэффициента η получаются при стрельбе со спиральных направляющих. Так, например, для той же ракеты II при спиральной направляющей коэффициент $\eta = 11,2$.

Для оценки влияния проворачивания с помощью косо поставленного оперения на угловой разброс оперенных ракет могут служить величины коэффициентов η для ракет II и III, рассчитанные для технически допустимых углов установки оперения. Для ракеты III с косо поставленным оперением коэффициент $\eta = 1,35$, а для ракеты II коэффициент $\eta = 1,6$. Таким образом, и здесь подтверждаются общие выводы теории о малой эффективности косо поставленного оперения.

Для ракеты III, проворачивающейся под совместным влиянием реактивного момента ($\mu_1 = 4,8 \cdot 10^{-3}$, $\nu = 1$) и момента от косо поставленного оперения, коэффициент $\eta = 2,6$. Сопоставляя это значение η со значением $\eta = 2,5$ для чисто реактивного вращения ($\mu_1 = 1,8 \cdot 10^{-3}$; $\nu = 1$; $\epsilon_0 = 0$; см. рис. 81), мы видим, что дополнительная установка косо поставленного оперения на реактивно-поворачивающуюся ракету не должна давать, согласно теоретическим расчетам, существенного дополнительного уменьшения углового разброса на активном участке полета. Это объясняется тем, что дополнительная установка косо поставленного оперения не может существенно изменить скорость проворачивания ракеты в самом начале полета.

Однако последний вывод не означает, что добавочная установка косо поставленного оперения не может оказать влияния на боковое рассеивание ракет. Косо поставленное оперение само по себе не может существенно повысить боковую кучность ракеты, так как оно не может существенно уменьшить угловой разброс, вызванный эксцентриситетом реактивной силы. Но если радикально уменьшить эксцентриситет путем реактивного проворачивания, то может оказаться, что влияние на разброс ракет явлений, происходящих на пассивном участке полета, будет уже ощутимым. Тогда добавочное косо поставленное оперение, создающее проворачивание и на пассивном участке и усредняющее, таким образом, несимметрию аэродинамических сил, может оказаться полезным.

Аналогичное замечание можно сделать относительно больших величин коэффициента η , получаемых расчетом для реактивно-поворачивающихся ракет и для ракет, проворачивающихся благодаря спиральной направляющей.

Совершенно ясно, что в случае стрельбы ракетой II со спиральной направляющей уменьшается в 11,2 раза не полный угловой

разброс на активном участке, а только угловой разброс, вызванный эксцентриситетом реактивной силы. На угловой же разброс, вызванный начальными возмущениями (так называемые «свободные колебания»), вращение не оказывает заметного влияния (см. об этом следующий параграф). Поэтому при придании ракете эффективного проворачивания, радикально уменьшающего разброс, вызванный эксцентриситетом реактивной силы, эксцентриситет может потерять свою доминирующую роль в создании углового разброса оперенных ракет и уступить ее другим факторам — начальным возмущениям и возмущениям на пассивном участке траектории.

Это обстоятельство будет рассмотрено в следующем параграфе, а здесь только заметим, что при сравнении результатов отстрелов проворачивающихся и неповорачивающихся оперенных ракет нужно ожидать совпадения теоретически полученных значений коэффициента η с результатами экспериментов лишь при малых значениях η , т. е. тогда, когда можно быть уверенным в том, что эксцентриситет реактивной силы еще играет доминирующую роль в разбросе ракет.

Если обозначить отношение $\frac{B_6}{X}$ неврашающейся оперенной ракеты к $\frac{B_6'}{X'}$ соответствующей проворачивающейся ракеты через β , т. е. ввести обозначение

$$\frac{B_6}{X} : \frac{B_6'}{X'} = \beta. \quad (37)$$

то последнее замечание означает, что мы можем ожидать совпадения экспериментально найденной величины β с рассчитанной величиной η лишь при малых значениях η и β . При больших значениях η нужно учитывать и другие факторы, вызывающие разброс оперенных ракет.

Эти соображения получили подтверждение при отстрелах, для которых наблюдалось максимальное значение коэффициента β при некотором оптимальном значении μ_1 . Анализ этого явления будет дан в следующем параграфе.

§ 55. Роль эксцентриситета реактивной силы в боковом разбросе оперенных ракет

При исследовании рассеивания оперенных ракет мы приняли гипотезу, заключающуюся в том, что эксцентриситет реактивной силы является основной причиной углового и, следовательно, бокового отклонения неврашающихся оперенных ракет (см. § 28). Основанные на этом предположении расчеты рассеивания ракет I, II, III достаточно хорошо совпали с данными отстрелов (см. § 29).

55]

Острые реактивно-проборачивающиеся оперенных ракет также подтверждают доминирующую роль эксцентриситета реактивной силы в рассеивании невращающихся оперенных ракет.

Действительно, имеющее место радикальное уменьшение бокового рассеивания при реактивном проборачивании может быть объяснено только осреднением влияния эксцентриситета реактивной силы. Так как нет никаких оснований считать, что реактивное проборачивание этих ракет на активном участке полета может сопровождать уменьшением углового разброса, вызванного значительными возмущениями при сходе ракеты с пускового станка или возмущениями на пусковом участке. Это утверждение вытекает из того, что угол поворота с ходом в уравнивании движения проборачивающихся оперенных ракет только в правой части (см. уравнение (1)) и следовательно, он не влияет на так называемые «свободные колебания» оперенных ракет на активном участке. Вызванные значительными возмущениями $\dot{\alpha}_0$ и $\dot{\beta}_0$ что касается влияния проборачивания на явление, возмущающее движение на пусковом участке, то тут можно заметить, что в уменьшении реактивного вращения в конце активного участка угла скорости оперенных ракет начинает быстро уменьшаться демпфирующего аэродинамического инерционного момента M_0 .

Исходя из этих соображений и имеющихся экспериментальных данных, можно дать количественную оценку той части $R\dot{\alpha}_0$, вероятностно бокового отклонения $R\dot{\beta}_0$ возрастающей оперенной ракет, которая вызвана эксцентрисетом реактивной силы.

Обозначим через $R\dot{\alpha}_0$ вероятное боковое отклонение, вызванное случайными причинами (начальными возмущениями и возмущениями на пусковом участке). Будем считать факторы, порождающие $R\dot{\beta}_0$ и $R\dot{\alpha}_0$, независимыми между собой.

Тогда

$$(R\dot{\alpha}_0)^2 = (R\dot{\alpha}_0)^2 + (R\dot{\beta}_0)^2 + R^2 \quad (38)$$

$$\lambda = \frac{R\dot{\alpha}_0}{R\dot{\beta}_0} \quad (39)$$

представляет собой отношение отклонения, вызванного всеми причинами, к эксцентрисету реактивной силы, в отклонении, вызванному эксцентрисетом.

Если обозначим λ для отношения вероятного бокового отклонения к действительному отклонению. Тогда

$$\lambda = \frac{R\dot{\alpha}_0}{R\dot{\beta}_0} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{R\dot{\alpha}_0}{R\dot{\beta}_0} \quad (40)$$

Итак, отношение на начальном этапе пускового участка убывает

При этом соотношения (38) и (39) примут вид:

$$r^2 = r_e^2 (1 + \lambda^2), \quad (41)$$

$$\lambda = \frac{r_0}{r_e}. \quad (42)$$

Для соответствующей реактивно-проворачивающейся оперенной ракеты введем аналогичные обозначения r'_e , r'_0 и r' , имеющие тот же смысл, что и r_e , r_0 и r . Предполагая, что проворачивание оперенной ракеты сказывается лишь на разбросе, вызванном эксцентриситетом реактивной силы, мы положим

$$r'_0 = r_0. \quad (43)$$

Так как $r_e = \frac{B\delta_e}{X} = \frac{\bar{\psi}_e}{\cos \theta_0}$, то, сравнивая отстрелы при одном и том же угле возвышения пускового станка θ_0 , мы получим:

$$\frac{r'_e}{r_e} = \frac{\bar{\psi}'_e}{\bar{\psi}_e} = \eta, \quad (44)$$

где η — коэффициент уменьшения углового рассеивания $\bar{\psi}_e$, вызванного эксцентриситетом реактивной силы (см. предыдущий параграф).

Поэтому для реактивно-вращающейся оперенной ракеты согласно (42), (43) и (44) найдем, что

$$(r')^2 = (r'_e)^2 + (r'_0)^2 = \left(\frac{r_e}{\eta}\right)^2 + r_0^2 = r_e^2 \left[\frac{1}{\eta^2} + \lambda^2\right], \quad (45)$$

в то время как из экспериментальных данных получаем соотношение [см. (37)]:

$$\beta = \frac{r}{r'}. \quad (46)$$

Разделив почленно соотношение (41) на (45), придем к формуле, связывающей коэффициенты β , η и λ :

$$\beta^2 = \frac{1 + \lambda^2}{\frac{1}{\eta^2} + \lambda^2} = \eta^2 \frac{1 + \lambda^2}{1 + \eta^2 \lambda^2}. \quad (47)$$

Формула (47), в соответствии со сказанным в конце предыдущего параграфа, показывает, что экспериментальная величина β может совпадать с расчетным коэффициентом η лишь в случае, когда $\lambda = 0$, т. е. когда рассеивание определяется только эксцентриситетом реактивной силы.

Из формулы (47) следует соотношение

$$\lambda^2 = \frac{1 - \frac{\beta^2}{\eta^2}}{\frac{\beta^2}{\eta^2} - 1}, \quad (48)$$

из которого вытекает неравенство

$$\lambda < \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}. \quad (49)$$

В последнее неравенство не входит расчетный коэффициент η . Поэтому справедливость этого неравенства не связана с гипотезами, положенными в основу теоретического расчета η , изложенного в предыдущих параграфах настоящей главы.

Оценки, проведенные на основании неравенств (49), и результаты отстрелов приводят к выводу, что $\lambda < 0,5$ и, следовательно,

$$r_0 < \frac{1}{2} r_e.$$

Это неравенство подтверждает правильность гипотезы о доминирующей роли эксцентриситета реактивной силы в рассеивании невращающихся оперенных ракет¹⁾.

Неравенство (49) дает весьма завышенную границу для λ . В связи с этим представляет известный интерес рассмотреть зависимость коэффициента β от условного момента μ_1 при различных предположениях о сравнительной роли эксцентриситета реактивной силы в разбросе невращающихся оперенных ракет (при различных λ). Для этого, зная $\eta(\mu_1)$ и задаваясь значениями λ , нужно вычислить по формуле (47) значения $\beta(\mu_1)$. На рис. 80 сплошными линиями представлены такие расчетные графики $\beta(\mu_1)$ для реактивно-поворачивающихся вариантов ракеты II. На каждой из линий отмечено то значение λ , для которого строился этот график.

Рассматривая кривые $\beta(\mu_1)$ при различных значениях λ , можно заметить, что крутизна подъема этих кривых (величина $\frac{d\beta}{d\mu_1}$) уменьшается с увеличением λ . Однако она ни при каком значении λ не может стать отрицательной, так чтобы появилось оптимальное значение μ_1 , при котором $\beta(\mu_1)$ имеет максимум²⁾. Таким образом, сделанные нами предположения не могут объяснить наличия оптимального момента μ_1 , полученного при отстрелах. Для объяснения этого заметим, что при установлении зависимости β от μ_1 при различных λ мы приняли $r'_0 = r_0$. Между тем, с ростом μ_1 (и, следовательно, с ростом вращающего момента при сходе ракеты со станка) боковое

¹⁾ Легко видеть, что из неравенства $r_0 < \frac{1}{2} r_e$ вытекает неравенство $r_e < r < 1,11 r_e$.

²⁾ Из формулы (47) легко видеть, что $\frac{d\beta}{d\mu_1} = \frac{1}{\beta \eta^3} \frac{1 + \lambda^2}{\left(\frac{1}{\eta^2} + \lambda^2\right)^2} \frac{d\eta}{d\mu_1}$. Так как $\frac{d\eta}{d\mu_1} > 0$, то и $\frac{d\beta}{d\mu_1} > 0$.

отклонение, вызываемое начальными возмущениями, может увеличиться. Это обстоятельство может объяснить немонотонный характер экспериментальной кривой и наличие некоторого оптимального диапазона значений μ_1 .

Если учесть, что у ракет с большим значением μ_1 (или сходящих со спиральной направляющей) величина r'_0 может возрастать с увеличением μ_1 из-за ухудшения условий схода со станка, то становится понятным возникновение оптимального момента μ_1 для реактивно-вращающихся ракет. Более того, можно сказать, что наличие оптимального значения μ_1 у реактивно-вращающихся ракет может свидетельствовать о том, что с увеличением μ_1 , по-видимому, настолько увеличивается роль начальных возмущений в разбросе этих ракет, что условия схода ракет с пускового станка начинают играть доминирующую роль в рассеивании быстро проворачивающихся оперенных ракет (с большим значением μ_1).

§ 56. Случай произвольного движения на направляющей. Стрельба с самолета

В настоящей главе, начиная с формулы (8), мы все время предполагали, что реактивное ускорение a постоянно на всем активном участке, включая и направляющую.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда ускорение a постоянно только вне направляющей. Этот случай легко сводится к предыдущему, если заменить реальное движение по направляющей фиктивным равноускоренным движением с тем ускорением a , которое имеет ракета вне направляющей. Это приводит к введению эффективного пути и эффективной длины направляющей, определяемых по формулам¹⁾:

$$s_{эф} = \frac{v^2}{2a} \quad \text{и} \quad s_{0эф} = \frac{v_0^2}{2a}. \quad (50)$$

Тогда в формулах (9), (10), (11), (16), (17), (18), (24), (30) и (32), дающих выражения для ω , φ , ψ и $R(s, \sigma)$, следует всюду заменить s , s_0 , x , x_0 соответственно на $s_{эф}$, $s_{0эф}$, $x = \sqrt{As_{эф}}$ и $x_0 = \sqrt{As_{0эф}}$. Не имеют места в общем случае лишь формулы (13), (15), (19), для получения которых были использованы специальные выражения для ω_0 и которые справедливы только в случае, когда реактивное ускорение на направляющей постоянно и равно ускорению вне направляющей и, кроме того, $v_n = 0$.

Для вычисления ω_0 в случае произвольного ускорения на направляющей (при $v_n = 0$) можно воспользоваться формулой (7), положив в ней $\omega_0 = 0$, $s_0 = 0$ и заменив затем ω на ω_0 , s на s_0 и $D_1(s)$ на

¹⁾ См. об этом подробнее в § 36.

разность $D_1(s) = \frac{M_T}{I_1 v(s)}$, после чего эта формула примет вид

$$\omega_0 = e^{-As_0} \int_0^{s_0} \left\{ Bv(\sigma) + \frac{Ca(\sigma)}{v(\sigma)} - \frac{M_T \sigma}{I_1 v(\sigma)} \right\} e^{A\sigma} d\sigma. \quad (51)$$

Перейдем теперь к стрельбе проворачивающимися оперенными ракетами с самолета. При этом мы будем рассматривать лишь тот случай, когда скорость самолета совпадает с направлением стрельбы и ускорение постоянно вне направляющей. Тогда, обозначая через V скорость самолета, а через v_0 — дульную скорость в земных условиях стрельбы (она практически совпадает с дульной скоростью относительно станка при стрельбе с самолета), введем эффективную длину направляющей и эффективный путь при помощи формул

$$s_{0эф} = \frac{(V + v_0)^2}{2a}, \quad s_{эф} = \frac{v^2}{2a}, \quad (52)$$

где $v = V + v_0 + a(t - t_0)$ и t_0 — момент схода ракеты со станка. После этого расчет кучности можно провести так, как было указано в начале этого параграфа. При этом в формуле (51) для ω_0 под s_0 и σ нужно понимать пути, пройденные ракетой относительно земли за время t_0 и t , а под v — скорость относительно земли.

В случае, когда ускорение постоянно на всем активном участке, включая направляющую, величину ω_0 можно выразить через затабулированные функции, сделав в формуле (51) замену переменных:

$$\sigma_{эф} = \sigma + \frac{V^2}{2a}.$$

При этом $v(\sigma) = \sqrt{2a\sigma_{эф}}$, и формула (51) принимает вид

$$\omega_0 = e^{-As_{0эф}} \int_{\frac{V^2}{2a}}^{s_{0эф}} \left\{ B\sqrt{2a\sigma_{эф}} + \frac{Ca}{\sqrt{2a\sigma_{эф}}} - \frac{M_T}{I_1 \sqrt{2a\sigma_{эф}}} \right\} e^{A\sigma_{эф}} d\sigma_{эф}. \quad (53)$$

Из этой формулы легко получить выражение для ω_0 через затабулированные функции. Так, например, при реактивном вращении ($B=0$)

$$\omega_0 = F(1 - \nu) \Phi_1(x_0) [I(x_0) - I(x_1)],$$

где

$$x_0 = \sqrt{As_{0эф}}; \quad x_1 = \sqrt{A \frac{V^2}{2a}} = V \sqrt{\frac{A}{2a}},$$

а F и ν определяются формулами (11') и (14).

ГЛАВА VI

РАСSEИВАНИЕ ПРОТИВОТАНКОВЫХ ОПЕРЕННЫХ РАКЕТ

§ 57. Введение

Одним из способов уменьшения рассеивания оперенных ракет является резкое уменьшение длины активного участка траектории, при котором активный участок становится значительно меньше критического (см. § 40).

Уменьшения длины активного участка можно добиться уменьшением толщины свода пороха, увеличением скорости сгорания его (увеличивая, например, давление в камере или изменяя рецептуру пороха) и, наконец, уменьшением веса ракетного заряда.

Все это приводит к уменьшению плотности заряжения ракетной камеры и к уменьшению максимальной скорости ракеты. Поэтому такой способ уменьшения рассеивания ракет мало перспективен для полевых ракет, имеющих значительную дистанцию стрельбы. Однако можно указать целый класс оперенных ракет, для которых кучность играет главенствующую роль и для которых можно допустить уменьшение максимальной скорости. Это — класс противотанковых оперенных ракет.

В период войны 1939—1945 гг. на вооружении иностранных армий появился ряд противотанковых оперенных ракет. Можно указать, например, на американскую 60-мм ракету «Базука», немецкую 82-мм ракету «Панцершрек» и т. д. Все они характеризуются малой длиной активного участка, сравнительно небольшой максимальной скоростью (порядка 100 м/сек) и в силу этого небольшой дистанцией прямого выстрела. Рассеивание этих ракет на дистанции 100 м имеет величину порядка $\frac{B_6}{X} \approx \frac{B_v}{X} \approx \frac{1}{300}$ ¹⁾.

¹⁾ Обращаем внимание читателя на то, что значение $\frac{B_6}{X}$ этих ракет в несколько раз меньше значений $\frac{B_6}{X}$ полевых ракет.

В настоящей главе рассмотрим зависимость рассеивания противотанковых оперенных ракет от их конструктивных параметров, а также пути увеличения кучности противотанковых ракет.

В § 59 выясняется, что на коротком активном участке противотанковых оперенных ракет аэродинамические силы и моменты весьма незначительно влияют на угловой разброс ракет в конце этого участка. Это позволяет установить для противотанковых оперенных ракет весьма простые алгебраические формулы, связывающие величину рассеивания этих ракет с их основными конструктивными параметрами.

Результаты, полученные в этой главе для противотанковых ракет, непосредственно могут быть перенесены на любые оперенные ракеты с очень малыми длинами активного участка. Поэтому в дальнейшем под противотанковыми оперенными ракетами мы будем, независимо от их назначения, понимать ракеты, имеющие длину активного участка, значительно меньшую, чем длина критического участка¹⁾.

§ 58. Основные особенности баллистики противотанковых ракет

Противотанковые оперенные ракеты характеризуются очень малой длиной активного участка, гораздо меньшей, чем длина критического участка. В силу этого обстоятельства рассеивание противотанковых ракет по сравнению с рассеиванием полевых ракет имеет ряд существенных особенностей.

Для выявления этих особенностей рассмотрим, например, графики изменения угла атаки δ и углового отклонения ψ , вызванных эксцентриситетом реактивной силы. На рис. 82 представлены эти графики для полевых оперенных ракет, имеющих активный участок более длин-

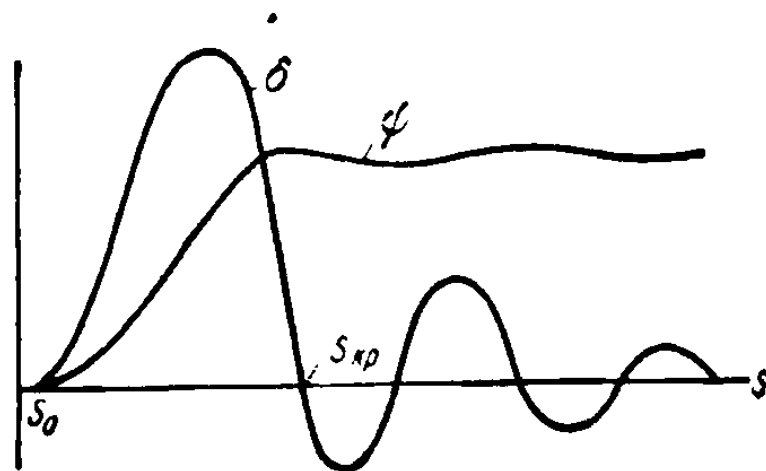


Рис. 82.

ный, чем критический участок. У таких ракет боковой момент реактивной силы M стремится повернуть ось ракеты. Этому отклонению препятствует стабилизирующий аэродинамический момент M_1 , возникающий при появлении угла атаки. В результате взаимодействия этих двух основных моментов изменение угла атаки оперенных ракет имеет осциллирующий характер. При этом, по мере нарастания скорости ракеты на активном участке амплитуда колебаний угла атаки уменьшается, так как с увеличением скорости ракеты (или пути s , пройденного ракетой) величина стабилизирующего момента при одном и том же угле атаки δ увеличивается. Это приводит к тому, что угловое отклонение ψ резко нарастает вначале, а затем после критического участка ($s > s_{кр}$) изменяется незначительно.

¹⁾ См. § 31.

Так как зависимость ψ от s не связана с величиной реактивного ускорения (см. § 31), то у полевых ракет, у которых активный участок больше критического, изменение длины активного участка, вызванное, например, изменением температуры порохового заряда, не вызывает заметного изменения разброса этих ракет (если только при таком изменении длины активного участка она не станет меньше длины критического участка).

Иначе обстоит дело с противотанковыми оперенными ракетами, у которых длина активного участка траектории и летом и зимой значительно меньше длины критического участка. У этих ракет имеет место резкая зависимость углового разброса в конце активного участка от длины этого участка. Поэтому здесь может наблюдаться резкое изменение кучности ракет при изменении температуры порохового заряда (в летних и зимних условиях стрельбы)¹⁾.

То обстоятельство, что у противотанковых оперенных ракет длина актив-

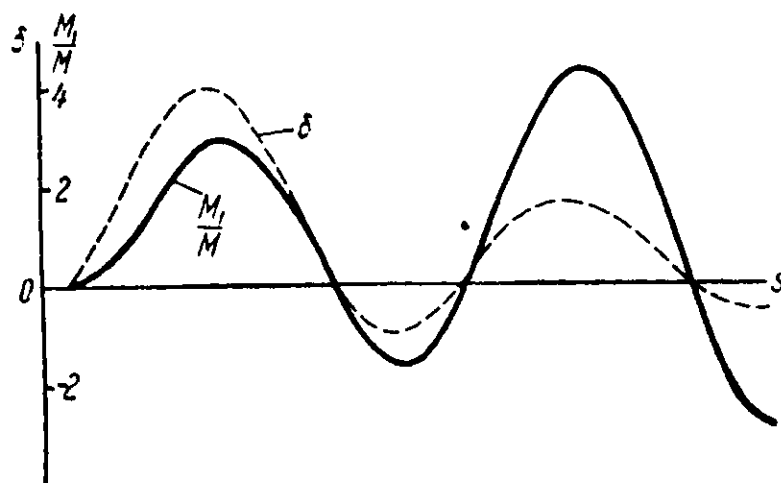


Рис. 83.

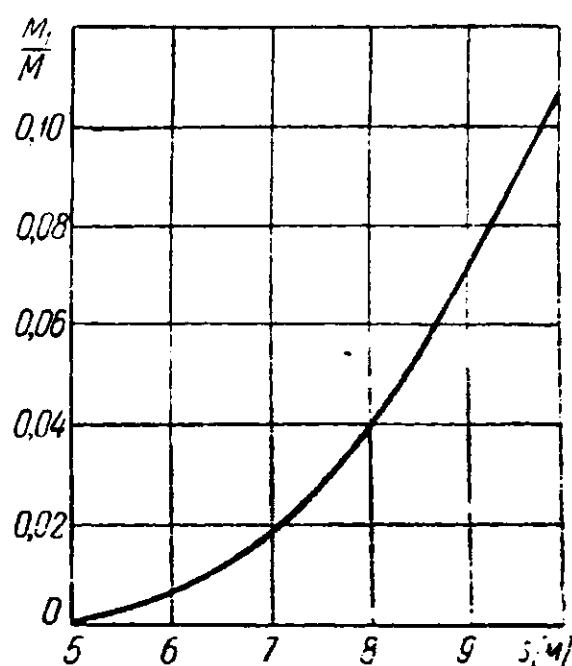


Рис. 84.

ного участка траектории во много раз меньше длины критического участка, приводит еще к одному важному свойству этих ракет. На очень коротком активном участке у противотанковых ракет не успевают возникнуть значительные по величине углы атаки. Следовательно, стабилизирующий аэродинамический момент M_1 имеет малую величину. Поэтому для противотанковых ракет моментом M_1 можно пренебречь по сравнению с отклоняющим моментом реактивной силы M . Это подтверждается рисунками 83 и 84, на которых представлены графики угла атаки и графики отношения стабилизирующего момента M_1 к отклоняющему моменту реактивной силы M для ракеты II, рассмотренной в главе IV.

¹⁾ Заметим, что у некоторых противотанковых ракет, имеющих очень высокую кучность, рассеивание, возникающее на активном участке, весьма мало. У этих ракет рассеивание определяется пассивным участком и потому не зависит от температуры заряда.

При постоянном реактивном ускорении и постоянном эксцентриситете реактивной силы отношение $\frac{M_1}{M}$ легко вычислить. Действительно, в этом случае угол атаки выражается формулой [см. § 30, формулу (37)]

$$\delta(s) = \frac{M}{2Iak\sqrt{s}} \int_{s_0}^s \frac{\sin k(s-\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma}}.$$

Величина же момента M_1 равна

$$M_1 = \frac{1}{2} \rho S_{\Sigma} \left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right| \delta v^2 L_0 = Ik^2 v^2 \delta = kM \sqrt{s} \int_{s_0}^s \frac{\sin k(s-\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{M_1}{M} = k \sqrt{s} \int_{s_0}^s \frac{\sin k(s-\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma}}.$$

Легко видеть, что это отношение не зависит от ускорения a , а следовательно, и от величины реактивной силы. Графики рис. 83 и 84 показывают, что отношение $\frac{M_1}{M}$ достигает на активном участке больших значений. Так, например, в середине критического участка (где угол атаки оперенной ракеты под влиянием момента M_1 начинает уменьшаться) момент M_1 в 3 раза больше момента M , на втором положительном гребне угла атаки момент M_1 примерно в 4 раза больше M и т. д.¹⁾ Однако на первых 4—5 метрах полета ракеты вне пускового станка (т. е. на первых 9—10 метрах активного участка) это отношение очень мало (меньше 0,1).

Поэтому можно ожидать, что пренебрежение моментом M_1 не вызовет для противотанковых оперенных ракет значительной ошибки при расчете углового отклонения ракеты, вызванного эксцентриситетом реактивной силы.

Можно также ожидать, что влияние этого момента M_1 на угловое отклонение противотанковых ракет, вызванное другими факторами (начальной угловой скоростью $\dot{\chi}_0$, начальным углом χ_0 и боковой составляющей реактивной силы P_1), будет также очень мало.

Так, например, пусть при вылете ракеты со станка угол $\chi_0 = 0$ и, кроме того, $P_1 = 0$, $M = 0$ и лишь начальная угловая скорость $\dot{\chi}_0 \neq 0$. В этом случае при сходе со станка ось ракеты начинает отклоняться от направления стрельбы с угловой скоростью $\dot{\chi}_0$. Возни-

¹⁾ Этот факт объясняет значительное влияние момента M_1 (и его коэффициента $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$) на рассеивание ракет II (см. § 35).

кающий при этом угол атаки вызывает момент M_1 . Однако за короткое время движения противотанковой ракеты на активном участке этот момент не может значительно изменить угловую скорость ракеты, и движение в этом случае также может быть описано без учета стабилизирующего момента M_1 .

Все эти качественные соображения не могут, однако, установить, при каких же длинах активного участка возможно пренебрежение моментом M_1 . Выяснению этого вопроса и посвящен следующий параграф.

§ 59. Влияние аэродинамических сил и моментов на угловое отклонение противотанковых ракет

Движение противотанковых оперенных ракет на активном участке ничем не отличается от движения обычных непроворачивающихся оперенных ракет. Поэтому уравнения, описывающие их движение, имеют вид (см. § 25):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a - \mu v^2, \\ v \frac{d\psi}{dt} &= (a + \mu v^2) \delta - b, \\ \frac{d^2\chi}{dt^2} &= \frac{M}{I} - k_1 v^2 \delta - k_2 v \frac{d\chi}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Решение этих уравнений при начальных условиях $\chi(t_0) = \chi_0$, $\psi(t_0) = \psi_0 = 0$ и $\dot{\chi}(t_0) = \dot{\chi}_0$ можно записать в следующем виде¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \delta_M + \delta_{P_1} + \delta_\chi + \delta_{\dot{\chi}_0}, \\ \psi &= \psi_M + \psi_{P_1} + \psi_{\chi_0} + \psi_{\dot{\chi}_0}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где слагаемые δ_M и ψ_M вызваны эксцентриситетом реактивной силы (моментом M), δ_{P_1} и ψ_{P_1} — боковой слагающей P_1 реактивной силы, δ_χ и ψ_{χ_0} — начальным углом χ_0 , а $\delta_{\dot{\chi}_0}$ и $\psi_{\dot{\chi}_0}$ — начальной угловой скоростью $\dot{\chi}_0$.

При исследовании движения полевых оперенных ракет было показано, что аэродинамическая подъемная сила Y (в уравнениях (1) она представлена коэффициентом μ) вызывает угловое отклонение, составляющее примерно 15% от общего углового отклонения. Для противотанковых ракет влияние подъемной силы Y на угловое отклонение значительно меньше. Действительно, в уравнениях (1) подъемная сила представлена членом μv^2 , который входит в уравнение (2) наряду с ускорением a . Как показывает статистика, у оперенных ракет величина μ имеет порядок 0,003—0,005 м⁻¹. В то же время для равноускоренного движения отношение $\frac{\mu v^2}{a}$ имеет порядок

¹⁾ См. формулы (90) в § 42.

$2\mu s$; если s_a меньше $8\div 10$ м, то это отношение не превышает $6\div 10\%$, а в начале активного участка оно еще меньше. Расчеты показывают, что пренебрежение величиной μ в уравнениях (1) вызывает ошибку менее $3\div 5\%$.

При вычислении углового отклонения ψ полевых оперенных ракет можно пренебречь демпфированием колебаний ракеты и силой лобового сопротивления¹⁾. Возникающая при таком пренебрежении ошибка в вычисленном значении ψ не превышает $3\div 4\%$ даже при длинных активных участках (порядка 100 м). Для противотанковых же оперенных ракет эта ошибка значительно меньше.

Таким образом, с большой точностью в уравнениях (1) можно положить $\mu = k_2 = n = 0$. Отсюда следует, что угол атаки δ и угловое отклонение ψ зависят лишь от одной аэродинамической характеристики ракеты — от коэффициента стабилизирующего аэродинамического момента $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$, определяющего величину $k_1 = k$.

Рассмотрим зависимость угла ψ от коэффициента k для случая равноускоренного движения оперенной ракеты при постоянной величине эксцентриситета реактивной силы d и постоянной величине бокового реактивного ускорения b .

В этом случае (см. § 42, 39)

$$\left. \begin{aligned} \psi_M &= \frac{d}{4x^2k} \int_{s_0}^s \frac{ds}{s^{3/2}} \int_{s_0}^s \frac{\sin k(s-\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma}} = \frac{d}{x^2} \hat{\psi}_M(s, s_0, k), \\ \psi_{P_1} &= \frac{b}{4a} \int_{s_0}^s \frac{ds}{s^{3/2}} \int_{s_0}^s \frac{\cos k(s-\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma}} - \frac{b}{2a} \ln \frac{s}{s_0} = \frac{b}{a} \hat{\psi}_{P_1}(s, s_0, k), \\ \dot{\psi}_{\dot{\chi}_0} &= \frac{\dot{\chi}_0}{2k\sqrt{2a}} \int_{s_0}^s \frac{\sin k(s-s_0) ds}{s^{3/2}} = \frac{\dot{\chi}_0}{\sqrt{2a}} \hat{\psi}_{\dot{\chi}_0}(s, s_0, k), \\ \psi_{\chi_0} &= \chi_0 \frac{\sqrt{s_0}}{2} \int_{s_0}^s \frac{\cos k(s-s_0) ds}{s^{3/2}} = \chi_0 \hat{\psi}_{\chi_0}(s, s_0, k). \end{aligned} \right\} (3)$$

На рис. 85—88 даны графики зависимости $\hat{\psi}_M$, $\hat{\psi}_{P_1}$, $\hat{\psi}_{\dot{\chi}_0}$ и $\hat{\psi}_{\chi_0}$ от пути s для оперенных ракет, обладающих величиной $k = 0,2$ м⁻¹, $k = 0,1$ м⁻¹ и $k = 0$ при $s_0 = 1$ м и $s_0 = 2$ м²). Из этих графиков видно, что пренебрежение стабилизирующим моментом M_1 (что

¹⁾ То есть положить $k_2 = 0$ и $n = 0$. См. § 43.

²⁾ Статистика показывает, что величина коэффициента k для оперенных ракет лежит в пределах от $0,05$ м⁻¹ до $0,2$ м⁻¹. Формулы для $\hat{\psi}$ при $k = 0$ могут быть получены из формул (3) предельным переходом при $k \rightarrow 0$. В § 60 приводится непосредственный вывод этих формул.

соответствует равенству $k=0$) вызывает ошибки в величинах $\hat{\phi}_M$, $\hat{\phi}_P$, $\hat{\phi}_i$ и $\hat{\phi}_{\lambda}$, не превосходящие 50% при $s_a < 6$ м; даже при $s \approx 10$ м ошибка не достигает 100%.

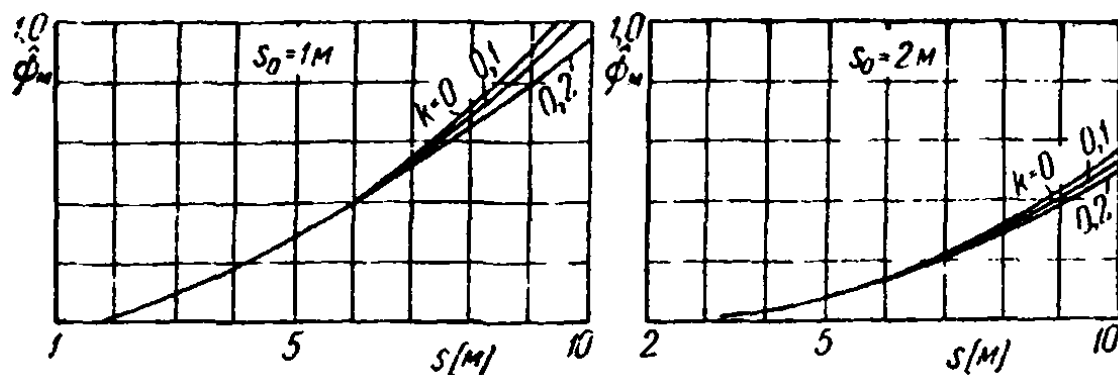


Рис. 85.

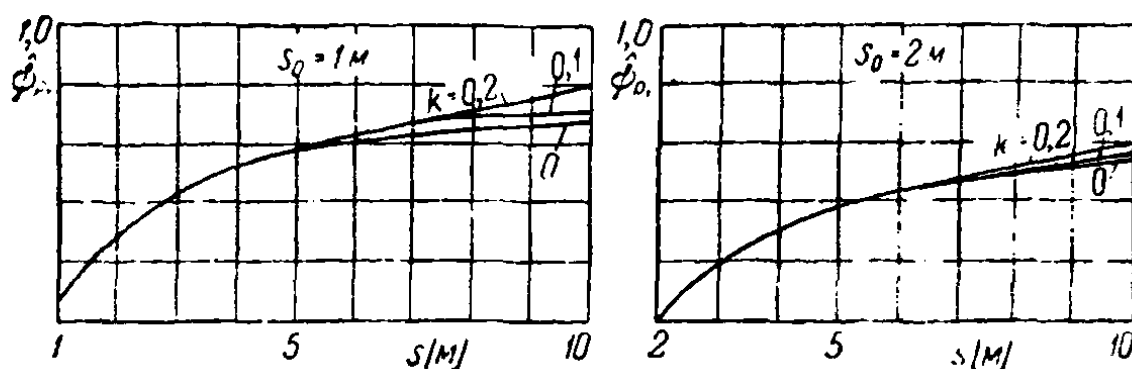


Рис. 86.

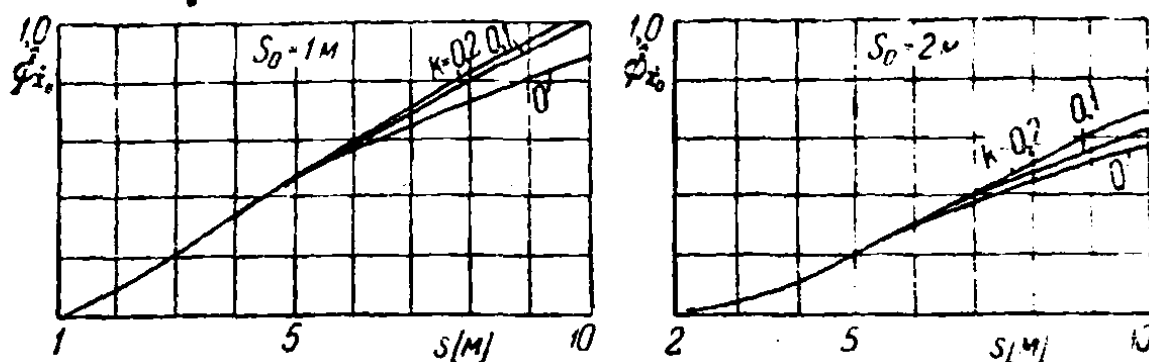


Рис. 87.

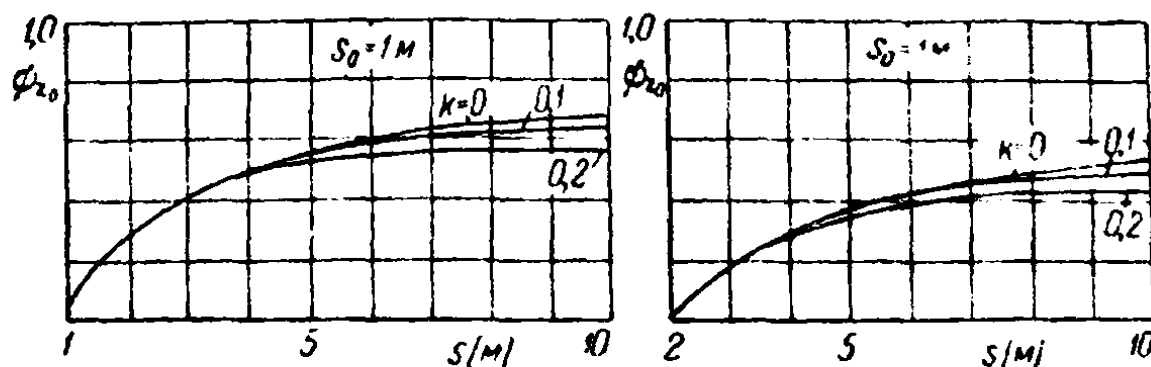


Рис. 88.

Таким образом, вычисления подтверждают общие соображения, высказанные в § 58. Поэтому в дальнейшем будем проводить исследование движения противотанковых оперенных ракет на активном

участке, предполагая, что все аэродинамические силы и моменты, действующие на ракету, равны нулю. Такое предположение эквивалентно рассмотрению движения противотанковой оперенной ракеты на активном участке траектории при отсутствии атмосферы.

§ 60. Интегрирование уравнений движения

В соответствии с тем, что при рассмотрении движения противотанковой ракеты на активном участке можно пренебречь аэродинамическими силами и моментами, действующими на ракету, будем исследовать движение этой ракеты под влиянием лишь следующих реактивных сил и моментов:

- 1) реактивной тяги P ,
- 2) боковой слагающей P_1 реактивной силы и
- 3) бокового отклоняющего момента M реактивной силы¹⁾.

Мы можем без ограничения общности результатов считать, что сила P_1 и начальный угол χ_0 лежат в произвольной плоскости, проходящей через ось станка, а момент M и вектор начальной угловой скорости $\dot{\chi}_0$ перпендикулярны к этой плоскости²⁾. Тогда движение можно рассматривать как плоскопараллельное, причем величины P_1 и $\dot{\chi}_0$ будут представлять собой проекции силы P_1 и малого угла χ_0 на рассматриваемую плоскость, а M и $\dot{\chi}_0$ — проекции момента M и угловой скорости $\dot{\chi}_0$ на нормаль к этой плоскости.

В этом случае уравнения движения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= P, \\ mv \frac{d\psi}{dt} &= P\delta - P_1, \\ I \frac{d^2\chi}{dt^2} &= M = Pd. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь P , P_1 , d , m и I являются заданными функциями времени. Нужно найти решения уравнений (4) при начальных условиях:

$$\chi = \chi_0, \quad \dot{\chi} = \dot{\chi}_0, \quad \psi = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \quad (5)$$

где t_0 — момент схода ракеты с пускового станка.

Из первого уравнения (4) найдем:

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt \quad \text{и} \quad s(t) = \int_0^t v(t) dt. \quad (6)$$

¹⁾ Влияние кориолисовой силы и кориолисова момента на движение противотанковой ракеты будет рассмотрено в § 66.

²⁾ Это объясняется тем, что при определении углового разброса мы вместо траектории по существу рассматриваем ее проекцию на плоскость, проходящую через ось станка. Подробнее об этом см. § 47, 72.

Таким образом, скорость v и путь s также можно считать заданными функциями времени.

Из последнего уравнения (4) непосредственно получаем:

$$\chi(t) = \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \frac{M(t)}{I(t)} dt + \dot{\chi}_0(t - t_0) + \chi_0. \quad (7)$$

Для определения угла ψ заметим, что $\delta = \chi - \psi$. Подставляя это значение δ во второе уравнение (4) и замечая, что $\frac{P}{m} = a = \frac{dv}{dt}$, получим:

$$v \frac{d\psi}{dt} = a(\chi - \psi) - b$$

или

$$\frac{d(\psi v)}{dt} = v \frac{d\psi}{dt} + \frac{dv}{dt} \psi = a\chi - b.$$

Следовательно,

$$\psi(t) = \frac{1}{v(t)} \int_{t_0}^t [a(t)\chi(t) - b(t)] dt. \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) дают решение уравнений движения противотанковой оперенной ракеты в квадратурах при произвольной зависимости P , P_1 , d , m и I от времени¹⁾.

Не останавливаясь более подробно на этом самом общем случае, в дальнейшем будем рассматривать движение ракеты при постоянном эксцентриситете реактивной силы d и постоянном отношении боковой слагающей P_1 реактивной силы к реактивной тяге P :

$$\frac{P_1}{P} = \frac{b}{a} = D = \text{const.}$$

В этом случае

$$\frac{M}{I} = \frac{Pd}{mx^2} = \frac{d}{x^2} a(t), \quad (9)$$

где x — экваториальный радиус инерции²⁾.

¹⁾ Обратим внимание читателя на то, что и в случае противотанковых ракет ($k = 0$) можно применить преобразование к новым переменным s , $u = v\delta$, проведенное в главе IV. Однако в этом случае предпочтительнее идти по пути, указанному в настоящем параграфе и приводящему к простым формулам (7) и (8).

²⁾ Для противотанковых ракет изменение экваториального радиуса инерции за время горения еще меньше, чем у полесых ракет (см. § 29). В дальнейшем под x мы будем понимать среднее значение x на активном участке.

Подставляя в формулу (7) вместо отношения $\frac{M}{I}$ его выражение из (9) и используя (6), получим:

$$\chi(t) = \frac{d}{\chi^2} \int_{t_0}^t (v - v_0) dt + \dot{\chi}_0(t - t_0) + \chi_0 \quad (10)$$

или

$$\chi(t) = \frac{d}{\chi^2} [s - s_0 - v_0(t - t_0)] + \dot{\chi}_0(t - t_0) + \chi_0 \quad (11)$$

Тогда согласно равенству (8)

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = \frac{1}{v} \int_{t_0}^t (a\chi - b) dt &= \frac{d}{\chi^2 v} \int_{t_0}^t a[s - s_0 - v_0(t - t_0)] dt + \\ &+ \frac{\dot{\chi}_0}{v} \int_{t_0}^t (t - t_0) a dt + \frac{\chi_0}{v} \int_{t_0}^t a dt - \frac{D}{v} \int_{t_0}^t a dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда легко находим выражения для ψ_M , ψ_{P_1} , $\psi_{\dot{\chi}_0}$ и ψ_{χ_0} ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \psi_M &= \frac{d}{\chi^2 v} \int_{t_0}^t a[s - s_0 - v_0(t - t_0)] dt, \\ \psi_{P_1} &= -D \left(1 - \frac{v_0}{v}\right), \\ \psi_{\dot{\chi}_0} &= \dot{\chi}_0 \left[t - t_0 - \frac{s - s_0}{v}\right], \\ \psi_{\chi_0} &= \chi_0 \left(1 - \frac{v_0}{v}\right). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Формулы (13) дают зависимость компонентов углового отклонения ψ от времени для данного конкретного выстрела. Для получения вероятного значения этих компонентов $\bar{\psi}_M$, $\bar{\psi}_{P_1}$, $\bar{\psi}_{\dot{\chi}_0}$ и $\bar{\psi}_{\chi_0}$ необходимо в формулы (13) вместо величин d , D , $\dot{\chi}_0$ и χ_0 подставить их вероятные значения.

При исследовании углового разброса полевых оперенных ракет было выяснено, что доминирующую роль в разбросе этих ракет играет компонент ψ_M . При этом связь между компонентами ψ_M и ψ_{P_1} определялась гипотезой, согласно которой линия действия результирующей реактивной силы пересекала ось ракеты в середине сопла (на расстоянии L_c от центра тяжести). Исходя из этой гипотезы и

¹⁾ Формула для ψ_{χ_0} получается из соответствующего члена уравнения (12) интегрированием по частям, если учесть, что $a dt = dv$.

полагая $M = Pd$, где d — эксцентриситет реактивной силы, мы установили связь между P_1 , P и M :

$$M = P_1 L_c = Pd.$$

Отсюда следовало, что

$$b = \frac{P_1}{m} = a \frac{d}{L_c}.$$

Сопоставляя теоретические расчеты с данными отстрелов ракет I, II, III, мы установили в главе IV, что для этих ракет величина $\frac{\bar{d}}{L_c}$, где $\bar{d}$ — вероятное значение компонента эксцентриситета, имеет один и тот же порядок: $\frac{\bar{d}}{L_c} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$.

Если принять для противотанковых оперенных ракет: а) упомянутую выше гипотезу и б) соотношение $\frac{\bar{d}}{L_c} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$, то оказывается, что для противотанковых ракет, в отличие от полевых ракет, величины ψ_M и ψ_{P_1} одного порядка, а в ряде случаев разность $\psi_M - \psi_{P_1}$ практически равна нулю. Поэтому ни одна из величин ψ_M и ψ_{P_1} не допускает грубой оценки. При отсутствии надежного экспериментального материала, позволяющего оценить ψ_M и ψ_{P_1} , нам представляется рискованным принятие для противотанковых оперенных ракет гипотезы, устанавливающей связь между M и P_1 .

В дальнейшем мы будем считать, что угловое отклонение ψ противотанковых ракет представляет собой сумму четырех независимых случайных величин: ψ_M , ψ_{P_1} , ψ_{χ_0} и ψ_{χ_0} . Мы не располагаем достаточным экспериментальным материалом для оценки значения каждой из этих величин в общем угловом разбросе. Поэтому вероятное значение углового отклонения противотанковой оперенной ракеты в конце активного участка $\bar{\psi}_a$ будем вычислять по формуле:

$$\bar{\psi}_a = \sqrt{\bar{\psi}_M^2 + \bar{\psi}_{P_1}^2 + \bar{\psi}_{\chi_0}^2 + \bar{\psi}_{\chi_0}^2}. \quad (14)$$

§ 61. Расчет углового отклонения

В предыдущем параграфе были получены формулы (13), выражающие компоненты углового отклонения противотанковой ракеты через функции $a(t)$, $v(t)$ и $s(t)$, причем для компонентов ψ_{P_1} , ψ_{χ_0} и ψ_{χ_0} получены формулы, выражающие эти величины в конечном виде через t , v , s и их начальные значения t_0 , v_0 , s_0 . Для компонента же ψ_M первая из формул (13) дает выражение в виде однократного интеграла от функции, зависящей от $a(t)$, $v(t)$, $s(t)$ и t_0 , v_0 , s_0 .

Таким образом, нахождение углового отклонения противотанковой ракеты сводится в конечном итоге к определению функции $a(t)$ и момента t_0 — момента схода ракеты с пускового станка. Очевидно, что для этого достаточно знать точно лишь зависимость реактивной тяги P от времени, массу ракеты и длину пускового станка s_0 .

Вместо функции $P(t)$ можно в основу расчета положить зависимость давления p в камере от времени и величину импульса реактивной тяги j , так как с большой точностью можно считать величину реактивной тяги пропорциональной давлению в камере¹⁾. Действительно, обозначив коэффициент пропорциональности между P и p через F , получим:

$$j = \int_0^{\tau} P(t) dt = F \int_0^{\tau} p(t) dt,$$

где τ — время сгорания ракетного заряда.

Следовательно,

$$F = \frac{j}{\int_0^{\tau} p(t) dt}. \quad (15)$$

Поэтому, зная $p(t)$ и j , мы по формуле (15) можем определить F , а затем и $P(t) = Fp(t)$. По величине j можно на основании формулы Циолковского определить максимальную скорость ракеты v_a . Так как для противотанковых ракет отношение веса ракетного заряда к пассивному весу ракеты не превышает $0,1 \div 0,15$, то для определения v_a с большой степенью точности можно пользоваться формулой:

$$v_a = \frac{j}{m_{\text{ср}}}, \quad (16)$$

где $m_{\text{ср}}$ — среднее арифметическое начальной и конечной массы ракеты (см. § 10).

Итак, имея в своем распоряжении экспериментально полученную функцию $P(t)$ или $p(t)$ и j , можно по формулам (13) определить величину углового отклонения противотанковой оперенной ракеты на активном участке.

В случае, когда ускорение реактивной силы постоянно на всем активном участке (т. е. когда диаграмма $a(t)$ имеет прямоугольный характер), формулы (13) принимают совсем элементарный вид. Для этого случая можно получить алгебраические формулы, выражающие компоненты углового отклонения ψ только через длины s и s_0 .

¹⁾ Это соответствует пренебрежению в формуле для реактивной тяги $P = \mu u + (p_a - p_n) \sigma_a$ малым членом $p_n \sigma_a$.

Действительно, пусть $a = \text{const}$ на всем активном участке, включая и направляющую. Тогда

$$v = at, \quad s = \frac{1}{2} at^2, \quad v = \sqrt{2as}$$

или

$$s = \frac{1}{2} a (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + s_0,$$

$$v = a (t - t_0) + v_0, \quad v_0 = \sqrt{2as_0}.$$

Пользуясь этими формулами, мы из (13) сразу получим:

$$\left. \begin{aligned} \psi_M &= \frac{d}{3\chi^2} \frac{(V\bar{s} - V\bar{s}_0)^3}{V\bar{s}}, \\ \psi_{P_1} &= -D \frac{V\bar{s} - V\bar{s}_0}{V\bar{s}}, \\ \psi_{\dot{\chi}_0} &= \frac{\dot{\chi}_0}{V\bar{2a}} \frac{(V\bar{s} - V\bar{s}_0)^2}{V\bar{s}}, \\ \psi_{\chi_0} &= \chi_0 \frac{V\bar{s} - V\bar{s}_0}{V\bar{s}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Хотя расчеты по формулам (13), а тем более по формулам (17) не вызывают сколько-нибудь существенных затруднений, нами были составлены таблицы, по которым можно (хотя бы и ориентировочно) быстро рассчитывать угловое отклонение противотанковых ракет для наиболее часто встречающихся форм диаграмм $a(t)$.

При составлении таблиц исходили из требования, чтобы при заданной типичной форме диаграммы $a(t)$ угловое отклонение в конце активного участка определялось заданием величин максимальной скорости v_a , времени сгорания ракетного заряда τ и длины пускового станка s_0 .

Покажем сначала, как можно удовлетворить этому требованию в простейшем случае прямоугольной диаграммы $a(t)$, т. е. в случае, когда $a = \text{const}$.

В этом случае $v_a = a\tau$, $s_a = \frac{a\tau^2}{2}$, следовательно,

$$s_a = \frac{v_a \tau}{2}. \quad (18)$$

Формулы (17) при $s = s_a$ можно представить в виде ¹⁾.

$$\left. \begin{aligned} \psi_M &= \frac{ds_a}{3\chi^2} (1 - V\bar{\sigma}_0)^3 = \frac{ds_a}{\chi^2} \tilde{\psi}_M(\sigma_0), \\ \psi_{P_1} &= D(1 - V\bar{\sigma}_0) = D\tilde{\psi}_{P_1}(\sigma_0), \\ \psi_{\dot{\chi}} &= \frac{\dot{\chi}_0 s_a}{v_a} (1 - V\bar{\sigma}_0)^2 = \frac{\dot{\chi}_0 s_a}{v_a} \tilde{\psi}_{\dot{\chi}_0}(\sigma_0), \\ \psi_{\chi_0} &= \chi_0(1 - V\bar{\sigma}_0) = \chi_0 \tilde{\psi}_{\chi_0}(\sigma_0), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

¹⁾ Здесь и далее в этой главе, в силу сказанного в конце § 60, мы опускаем знак минус у компонента ψ_{P_1} .

где

$$\sigma_0 = \frac{s_0}{s_a}. \quad (19')$$

Если составить таблицы функций $\tilde{\Psi}_M(\sigma_0)$, $\tilde{\Psi}_{\dot{\chi}}(\sigma_0)$ и $\tilde{\Psi}_{P_1}(\sigma_0) = \tilde{\Psi}_{\chi}(\sigma_0)$, то, зная v_a и τ , мы по формуле (18) найдем s_a , по формуле (19') вычислим σ_0 , а затем уже из таблиц найдем компоненты углового отклонения в конце активного участка. Такие таблицы приведены на стр. 353.

Для случая треугольной диаграммы, изображенной на рис. 89, имеем:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_n \left(1 - \frac{t}{\tau}\right), \quad v = a_n t \left(1 - \frac{t}{2\tau}\right), \\ s &= \frac{a_n t^2}{2} \left(1 - \frac{t}{3\tau}\right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Следовательно, при $t = \tau$ имеем:

$$v_a = \frac{a_n \tau}{2} \quad \text{и} \quad s_a = \frac{a_n \tau^2}{3}.$$

Поэтому для треугольной диаграммы

$$s_a = \frac{2}{3} v_a \tau. \quad (20')$$

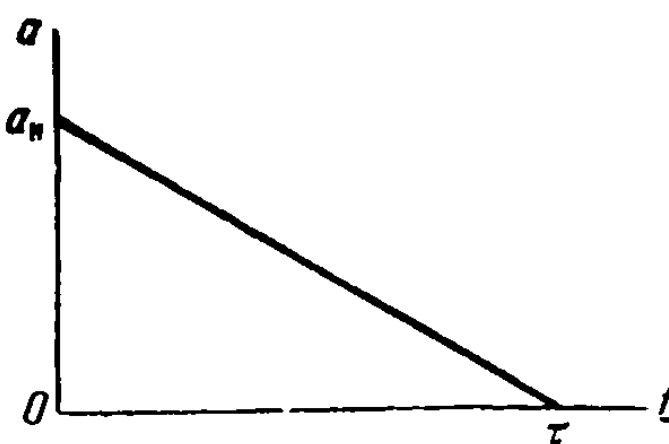


Рис. 89.

Подставляя выражения (20) в формулы (13) и интегрируя, после ряда алгебраических преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} \psi_M &= \frac{ds_a}{5\chi^2} (1 - \xi_0)^5 = \frac{ds_a}{\chi^2} \tilde{\Psi}_M, \\ \psi_{P_1} &= D (1 - \xi_0)^2 = D \tilde{\Psi}_{P_1}, \\ \psi_{\dot{\chi}} &= \frac{\dot{\chi}_0 s_a}{2v_a} (1 - \xi_0)^3 = \frac{\dot{\chi}_0 s_a}{v_a} \tilde{\Psi}_{\dot{\chi}}, \\ \psi_{\chi_0} &= \chi_0 (1 - \xi_0)^2 = \chi_0 \tilde{\Psi}_{\chi_0}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$\xi_0 = \frac{t_0}{\tau}. \quad (21')$$

Величина $\sigma_0 = \frac{s_0}{s_a}$ связана с ξ_0 соотношением

$$\sigma_0 = \frac{3}{2} \xi_0^2 \left(1 - \frac{\xi_0}{3}\right). \quad (21'')$$

Таким образом, ξ_0 есть функция от σ_0 и, следовательно, $\tilde{\Psi}_M$, $\tilde{\Psi}_{\dot{\chi}}$ и $\tilde{\Psi}_{\chi} = \tilde{\Psi}_{P_1}$ можно рассматривать как функции аргумента σ_0 . Если составить таблицы этих функций, то, зная v_a и τ для ракеты, мы, пользуясь формулами (20), (21'') и таблицами, легко найдем компоненты углового отклонения¹⁾.

¹⁾ Таблицы для треугольной диаграммы $a(t)$ помещены на стр. 354.

Из изложенных примеров ясно, что для заданной формы диаграммы можно составить таблицы, дающие возможность быстро находить угловое отклонение ракет. Очевидно также, что системой таблиц нельзя охватить произвольную форму диаграммы $a(t)$. В § 65 будут рассмотрены методы расчета углового отклонения для произвольной формы диаграммы $a(t)$.

§ 62. Дальность прямого выстрела

Прежде чем исследовать влияние различных конструктивных параметров противотанковых оперенных ракет на их рассеивание, рассмотрим понятие дальности прямого выстрела противотанковой ракеты, определяющее эффективность боевого применения этого оружия.

Стрельба противотанковыми ракетами ведется в боевых условиях в основном по движущимся танкам. Рассмотрим случай стрельбы, при котором танк движется на бойца. В этом случае для удобства пользования противотанковым оружием необходимо, чтобы высота траектории ракеты над землей не превышала высоты танка. Тогда при перемещении танка за время полета ракеты танк не будет выходить из зоны поражения, если только расстояние танка от бойца в момент выстрела не превышает дистанции стрельбы X (рис. 90)¹⁾.



Рис. 90.

На этом рисунке пунктиром изображено положение танка в момент выстрела, а сплошными линиями изображен танк в момент встречи с ракетой.

Для данной ракеты (с данной максимальной скоростью) высота траектории увеличивается с увеличением дистанции (при углах возвышения, меньших 45°). Максимальная дистанция, при которой высота траектории не превышает высоты танка, носит название *дальности прямого выстрела*. Очевидно, что для попадания в танк боец должен дождаться момента, когда танк подойдет на расстояние, равное дальности прямого выстрела, и в этот момент произвести выстрел прямой наводкой на цель (при прицеле, установленном на эту дистанцию). При стрельбе же на большие расстояния боец должен точно определить не только расстояние до танка, но и его скорость, а затем быстро найти необходимый угол возвышения ружья. Поэтому в боевых условиях весьма трудно эффективно стрелять по движущимся целям на дистанцию, превосходящую дальность прямого выстрела.

¹⁾ При условии, конечно, что боковые отклонения ракеты не превышают размера танка.

Таким образом, дальность прямого выстрела характеризует радиус действия противотанкового ружья.

Найдем связь между дальностью прямого выстрела и параметрами ракеты. Пусть высота танка равна h . Нам необходимо найти дальность траектории, высота которой будет равна h . В первом приближении ее можно определить, пренебрегая сопротивлением воздуха (по параболической теории основной задачи внешней баллистики).

Пренебрегая длиной активного участка по сравнению с дальностью прямого выстрела X_n , можно считать, что

$$X_n = \frac{v_a^2}{g} \sin 2\theta_0, \quad h = \frac{v_a^2}{2g} \sin^2 \theta_0, \quad (22)$$

где v_a — максимальная скорость ракеты (в конце активного участка), а θ_0 — угол возвышения пускового станка.

Из уравнений (22) получим:

$$X_n^2 + 16h^2 = \frac{8v_a^2 h}{g}.$$

Величиной $16h^2$ по сравнению с X_n^2 можно пренебречь. Поэтому окончательно для дальности прямого выстрела получаем соотношение

$$X_n \approx v_a \sqrt{\frac{8h}{g}}. \quad (23)$$

Таким образом, дальность прямого выстрела пропорциональна максимальной скорости ракеты и корню квадратному из высоты танка.

Положив в формуле (23) $h \approx 2 \div 3$ м, получим:

$$X_n = (1,25 \div 1,55) v_a, \quad (23')$$

где X_n выражено в м, а v_a — в м/сек.

Уравнения (23) показывают, что для увеличения радиуса эффективного действия противотанкового ружья необходимо увеличить максимальную скорость ракеты.

§ 63. Анализ углового и бокового разброса противотанковых ракет

Мы проведем анализ углового разброса противотанковых оперенных ракет при двух частных случаях диаграммы ускорения реактивной силы: прямоугольной и треугольной.

На рис. 91—93 и в таблице на стр. 200 даны зависимости величин

$$\frac{x^2}{d} \psi_M, \quad \frac{1}{D} \psi_{P_1} = \frac{1}{\chi_0} \psi_{\chi_0} \quad \text{и} \quad \frac{v_a}{\chi_0} \psi_{\chi_0}$$

от длины активного участка s_a при $s_0 = 1; 1,5$ и 2 м для прямо-
угольной и треугольной диаграммы $a = a(t)$.

$s_a, \text{ м}$	Прямоугольная диаграмма			Треугольная диаграмма			
	$\frac{x^2}{d} \psi_M$	$\frac{v_a}{\dot{\chi}_0} \psi_{\chi}$	$\frac{1}{D} \psi_{P_1} = \frac{1}{\dot{\chi}_0} \psi_{\chi_0}$	$\frac{x^2}{d} \psi_M$	$\frac{v_a}{\dot{\chi}_0} \psi_{\chi}$	$\frac{1}{D} \psi_{P_1} = \frac{1}{\dot{\chi}_0} \psi_{\chi_0}$	
3	0,006	0,101	0,184	0,0004	0,017	0,051	$s_0 = 2 \text{ м}$
4	0,034	0,344	0,293	0,0040	0,084	0,121	
5	0,083	0,676	0,368	0,0140	0,193	0,181	
6	0,152	1,075	0,423	0,0312	0,336	0,232	
7	0,235	1,52	0,465	0,0553	0,503	0,274	
8	0,334	2,00	0,500	0,086	0,694	0,311	
9	0,450	2,52	0,529	0,124	0,905	0,343	
10	0,583	3,06	0,553	0,167	1,126	0,370	
3	0,002	0,036	0,135	0,0001	0,005	0,028	$s_0 = 1,5 \text{ м}$
4	0,025	0,258	0,293	0,0030	0,063	0,121	
5	0,078	0,602	0,388	0,0142	0,178	0,199	
6	0,154	1,024	0,452	0,0343	0,334	0,261	
7	0,250	1,50	0,500	0,065	0,521	0,311	
8	0,363	2,02	0,538	0,104	0,733	0,353	
9	0,491	2,59	0,569	0,151	0,970	0,389	
10	0,621	3,15	0,591	0,201	1,206	0,416	
3	0,017	0,172	0,293	0,002	0,042	0,121	$s_0 = 1 \text{ м}$
4	0,076	0,537	0,423	0,016	0,168	0,232	
5	0,167	1,00	0,500	0,043	0,347	0,311	
6	0,282	1,53	0,553	0,083	0,563	0,370	
7	0,414	2,10	0,591	0,134	0,804	0,416	
8	0,558	2,70	0,621	0,191	1,06	0,451	
9	0,721	3,35	0,647	0,261	1,35	0,484	
10	0,890	4,00	0,667	0,334	1,64	0,510	
10	1,066	4,68	0,684	0,413	1,94	0,532	

Таблица и рис. 91—93 показывают, что все компоненты углового разброса противотанковых оперенных ракет необычайно резко зависят от длины активного участка. Поэтому для получения малого углового разброса на активном участке и, следовательно, высокой кучности необходимо стремиться к тому, чтобы длина активного участка противотанковой оперенной ракеты была возможно меньшей.

Эта же таблица позволяет оценить порядок длины активного участка, необходимой для обеспечения достаточно высокой кучности. Такую оценку можно сделать, исходя из предположения, что для противотанковых оперенных ракет, как и для полевых, отношение

$$\frac{d}{L_0} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}.$$

Статистика конструкций оперенных ракет показывает, что плечо сопла L_c составляет примерно половину длины L (т. е. что $\frac{L_c}{L} \approx 0,5$), а радиус экваториального момента инерции равен примерно одной четверти длины ракеты (т. е. $\frac{r}{L} \approx 0,25$). Если принять длину противотанковой оперенной ракеты равной 1 м, то для отношения $\frac{\bar{d}}{\chi^2}$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{\chi^2} &= \frac{\bar{d}}{L_c} \frac{L_c}{L} \frac{L^2}{\chi^2} \frac{1}{L} \approx \\ &\approx 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 16 \cdot 1 = \\ &= 1,2 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Обращаясь к таблице, мы можем заключить, что, например, при $s_0 = 2$ м компонент ψ_M будет больше $\frac{1}{500}$, если длина активного участка превышает 6,5 м (для прямоугольной диаграммы). Для треугольной диаграммы $a(t)$ компонент $\psi_M > \frac{1}{500}$ при $s_0 = 2$ м, если $s_a > 10$ м. Такая ориентировочная оценка величины активного участка показывает, что для получения высокой кучности необходимо добиваться, чтобы длина активного участка не превышала нескольких (5–6) метров.

На основании формул (16), (18) и (20') можно связать длину активного участка с величиной импульса реактивной силы j . При этом для прямоугольной диаграммы получим:

$$s_a = \frac{j\tau}{2m_{op}}, \quad (24a)$$

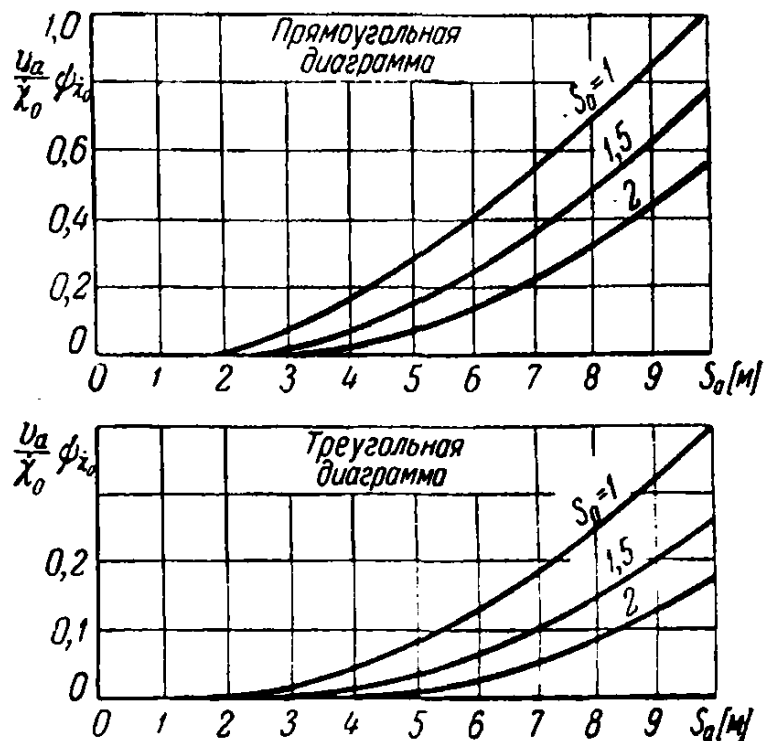


Рис. 91.

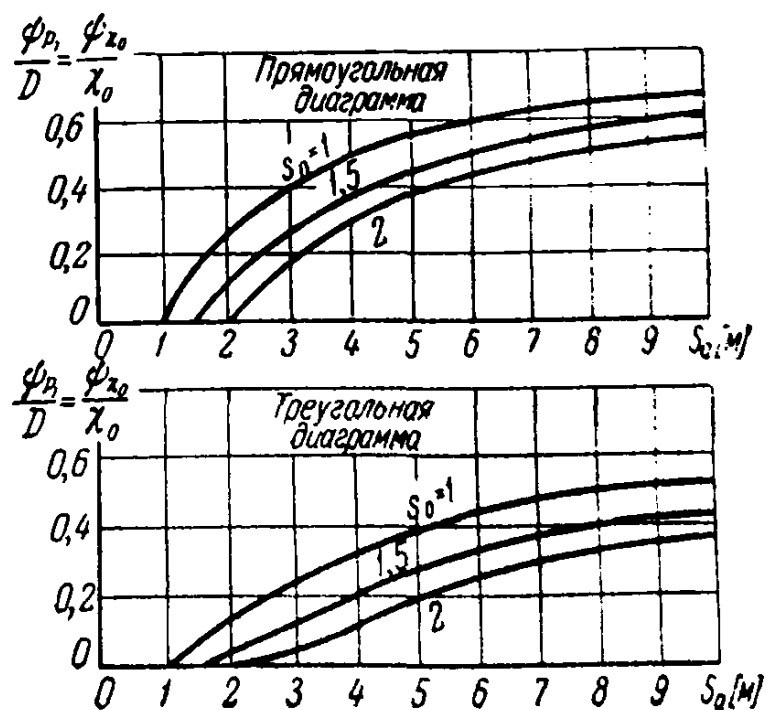


Рис. 92.

а для треугольной

$$s_a = \frac{2}{3} \frac{j\tau}{m_{cp}}. \quad (246)$$

Импульс ракетного заряда мало изменяется при изменении температуры пороха. Поэтому в силу формулы (16) и величина v_a мало изменяется (не более чем на $5 \div 8\%$) при переходе от летних условий стрельбы к зимним. Время же сгорания заряда для данной ракеты резко увеличивается с уменьшением температуры заряда. Так,

например, при изменении температуры от $+40^\circ\text{C}$ до -40°C у противотанковых ракет величина τ возрастает в $2,5 \div 3$ раза. Следовательно, согласно формулам (24) примерно в $2,5 \div 3$ раза возрастает и длина активного участка. Поэтому угловой разброс противотанковых оперенных ракет в зимних условиях стрельбы в несколько раз больше, нежели в летних.

В этом заключается одно из принципиальных отличий противотанковых ракет (с быстро сгорающими порохами, обеспечивающими

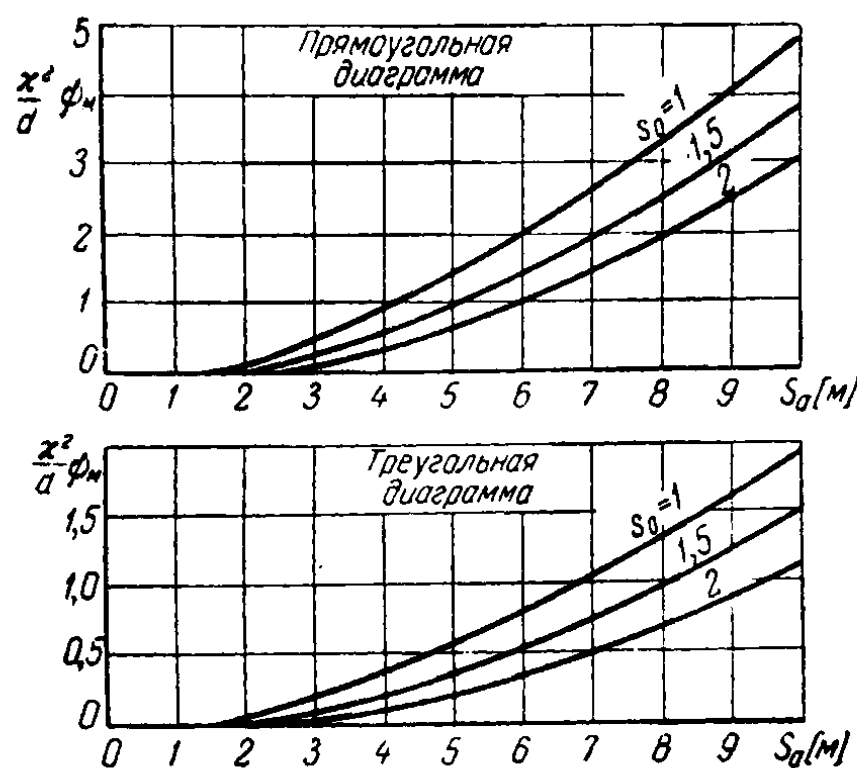


Рис. 93.

малую длину активного участка) от полевых ракет. У последних, как это уже отмечалось выше, угловой разброс (и, следовательно, рассеивание) не зависит от температурных условий стрельбы.

Время сгорания ракетного заряда связано с давлением в камере. В первом приближении можно считать, что для данного порохового заряда время τ обратно пропорционально давлению в камере. Следовательно, повышение давления в камере вызывает уменьшение τ и содействует, таким образом, увеличению кучности.

С понижением температуры заряда при неизменном диаметре критического сечения сопла давление в камере падает. Однако можно сохранить давление в камере при понижении температуры заряда, уменьшив соответствующим образом критическое сечение сопла. Таким образом, можно предотвратить сильное понижение кучности противотанковых ракет осуществлением отдельного зимнего варианта ракеты, имеющего меньшее критическое сечение сопла.

Отметим еще, что для пороха с данным химическим составом и для данного давления в камере время τ прямо пропорционально тол-

шине свода пороховых шашек. Поэтому в противотанковых оперенных ракетах употребляются тонкосводные пороха.

Дистанция прямого выстрела X_n , как мы видели в предыдущем параграфе, пропорциональна величине максимальной скорости ракеты. Там же было показано, как важно для боевого применения противотанковой ракеты, чтобы она обладала большой дистанцией прямого выстрела и, следовательно, большой максимальной скоростью. Однако формулы (24) показывают, что при данном τ увеличение v_a влечет за собой увеличение s_a и, следовательно, резкое понижение кучности.

Разрешение этого противоречия между желанием получить большую дальность прямого выстрела и необходимостью иметь высокую кучность следует искать в создании эффективных способов резкого понижения времени сгорания ракетного заряда.

Обратим еще внимание на то, что компонент углового рассеивания ψ_M обратно пропорционален квадрату экваториального радиуса инерции x . Естественнo предположить, что одни и те же толчки при сходе ракеты со станка сообщают снаряду тем меньшую экваториальную угловую скорость $\dot{\chi}_0$, чем больше экваториальный момент инерции ракеты. Поэтому при прочих равных условиях увеличение x приводит к уменьшению $\dot{\chi}_0$ и, следовательно, к уменьшению $\psi_{\dot{\chi}_0}$. Поскольку все компоненты углового рассеивания ψ_M и $\psi_{\dot{\chi}_0}$ уменьшаются с увеличением x , следует считать, что увеличение экваториального момента инерции должно благоприятно отражаться на кучности противотанковых оперенных ракет.

Остановимся, наконец, на связи углового рассеивания противотанковых оперенных ракет с боковым рассеиванием при стрельбе по танку (или вертикальному щиту), расположенному на расстоянии X от станка. Если бы не было добавочных возмущений на пассивном участке, то (поскольку активный участок значительно меньше дистанции стрельбы) можно было бы рассчитывать вероятное боковое отклонение ракеты на вертикальном щите Bb_a по формуле

$$\frac{Bb_a}{X} = \frac{\bar{\psi}_a}{\cos \theta_0},$$

где θ_0 — угол возвышения пускового станка. При этом $\cos \theta_0$ можно считать равным 1, так как угол возвышения при стрельбе противотанковыми ракетами очень мал (он не превышает $4-5^\circ$).

Однако при очень высокой кучности противотанковых ракет может оказаться, что возмущения на пассивном участке будут вызывать боковое отклонение Bb_n такого же порядка, как и Bb_a . Стрельбы оперенными ракетами, проведенные в условиях, когда активный участок не превышал длину пускового станка, показали, что для правильно

сконструированной ракеты можно добиться, чтобы величина $\frac{B\delta_n}{\lambda}$ не превышала 1/1000.

С учетом явлений на пассивном участке общее боковое рассеивание противотанковой ракеты на вертикальном щите Вб выражается формулой:

$$\frac{B\delta}{X} = \sqrt{\bar{\psi}_M^2 + \bar{\psi}_P^2 + \bar{\psi}_L^2 + \bar{\psi}_L^2 + \left(\frac{B\delta_n}{X}\right)^2}. \quad (25)$$

§ 64. Рассеивание противотанковых ракет по высоте

Прежде чем рассмотреть вопрос о рассеивании противотанковых ракет по высоте, приведем некоторые соображения по поводу расчета траектории этих ракет.

Время полета противотанковой ракеты на дистанции прямого выстрела составляет около одной секунды. Отрицательное ускорение лобового сопротивления воздуха равно $(-nv^2)$ (см. § 25). Поэтому за время полета, равное одной секунде, скорость противотанкового снаряда уменьшается на величину

$$\Delta v < nv^2.$$

Выше мы видели, что для полевых оперенных ракет коэффициент n имеет порядок 10^{-4} м^{-1} (см. § 43). Такой же порядок имеет коэффициент n и для противотанковых ракет. Поэтому относительное изменение скорости за время полета на дистанции прямого выстрела

$$\frac{\Delta v}{v} < nv \approx \frac{v}{10000}.$$

Отсюда следует, что для противотанковых ракет, имеющих $v_a < 300 \text{ м/сек}$, отношение $\frac{\Delta v}{v}$ не превышает 1—2‰ (см. пример 1 на стр. 48).

Поэтому расчет траектории противотанковых ракет в первом приближении можно проводить, пренебрегая лобовым сопротивлением воздуха и используя параболическую теорию основной задачи внешней баллистики.

Заметим также, что при стрельбе противотанковыми ракетами на дистанцию, не превышающую дальность прямого выстрела, углы возвышения пускового станка очень малы и не превышают 4—5°. Действительно, даже при стрельбе на дистанцию прямого выстрела X_n мы будем иметь соотношение [см. (22) и (23')]

$$X_n = \frac{v_a^2}{g} \sin 2\theta_0 \approx 1,4 v_a.$$

Следовательно,

$$\sin 2\theta_0 \approx \frac{1,4g}{v_a}.$$

Отсюда следует, что при $v_a > 75$ м/сек угол $\theta_0 < 5^\circ$.

Рассмотрим теперь стрельбу противотанковыми ракетами по центру щита (танка), расположенного на расстоянии X от пускового станка ($X \approx X_0$). В этом случае¹⁾ (рис. 94)

$$h = AC = BC - AB = \\ = X \lg \theta_a - \frac{gT^2}{2} \approx X\theta_a - \frac{gX^2}{2v_a^2},$$

где $T \approx \frac{X}{v_a}$ — время полета ракеты до щита. Отсюда

$$\Delta h_a = X \Delta \theta_a + \frac{gX^2}{v_a^2} \frac{\Delta v_a}{v_a},$$

где Δh_a — отклонение ракеты от центра щита, вызванное явлениями на активном участке траектории.

Разброс углов θ_a характеризуется вероятным значением $\Delta \bar{\theta}_a = \bar{\psi}_a$. Считая разброс углов θ_a и разброс скоростей независимыми между собой, получим

$$B_v = \sqrt{(X\bar{\psi}_a)^2 + \left[\frac{gX^2}{v_a^2} \frac{Bv_a}{v_a} \right]^2 + [Bv_n]^2}, \quad (26)$$

где B_v — вероятное значение разброса ракет по высоте, Bv_a — вероятное значение разброса скоростей, Bv_n — вероятное отклонение по высоте, вызванное возмущающими факторами на пассивном участке.

Разброс скоростей v_a зависит от разброса импульса реактивной силы и разброса весов ракет. Согласно формуле (16)²⁾

$$v_a = \frac{J}{m_{op}} = \frac{j_1 g \omega}{q_a + \frac{\omega}{2}} \approx \frac{j_1 g \omega}{q_a}.$$

Отсюда, логарифмируя и дифференцируя, получим:

$$\frac{\Delta v_a}{v_a} = \frac{\Delta j_1}{j_1} + \frac{\Delta \omega}{\omega} - \frac{\Delta q_a}{q_a}$$

¹⁾ Здесь мы пренебрегаем длиной активного участка по сравнению с дистанцией X .

²⁾ Мы пренебрегаем здесь величиной $\frac{\omega}{2}$ по сравнению с q_a , так как у противотанковых ракет отношение $\frac{\omega}{2q_a} \approx 0,03 \div 0,07$.

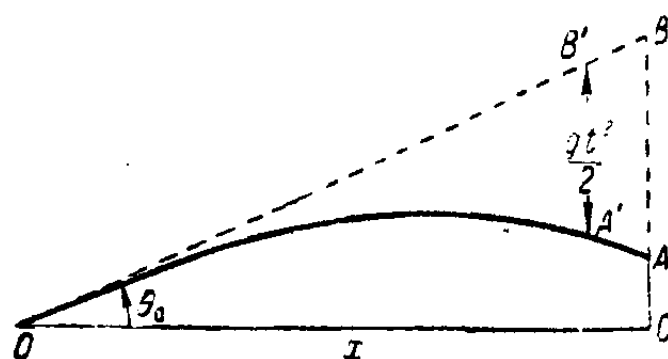


Рис. 94.

и, следовательно,

$$\frac{Bv_a}{v_a} = \sqrt{\left(\frac{Bj_1}{j_1}\right)^2 + \left(\frac{B\omega}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{Bq_a}{q_a}\right)^2}. \quad (27)$$

В подкоренном выражении (26) доминирующую роль обычно играет первый член, связанный с угловым разбросом на активном участке.

Однако разброс весов ракетных зарядов у противотанковых ракет может достигать значительной величины, так как при стрельбе с быстро сгорающими порохами часто наблюдается значительный выброс несгоревших маленьких частиц пороха. Последнее обстоятельство может у плохо сконструированной противотанковой ракеты играть существенную роль в разбросе максимальных скоростей и, следовательно, в разбросе по высоте.

§ 65. Расчет углового отклонения для некоторых видов диаграммы $a(t)$

Остановимся сначала на том, как можно охарактеризовать различные формы диаграммы зависимости $a = a(t)$.

Рассмотрим для этого диаграмму $a(t)$ самого произвольного вида. Перейдем от переменных t, v, s, a к безразмерным переменным $\xi, \varphi, \sigma, \alpha$, определяемым формулами

$$\xi = \frac{t}{\tau}, \quad \varphi = \frac{v}{v_a}, \quad \sigma = \frac{s}{s_a}, \quad \alpha = \frac{a}{a_{\text{ср}}} = \frac{a\tau}{v_a}, \quad (28)$$

где

$$a_{\text{ср}} = \frac{v_a}{\tau}.$$

Тогда

$$v = \int_0^t a(t) dt = a_{\text{ср}} \tau \int_0^{\xi} \alpha(\xi) d\xi = v_a \int_0^{\xi} \alpha(\xi) d\xi.$$

С другой стороны, $v = v_a \varphi$. Следовательно,

$$\varphi(\xi) = \int_0^{\xi} \alpha(\xi) d\xi. \quad (29)$$

Так как при $\xi = 1$ ($t = \tau$) величина $\varphi = 1$, то

$$\int_0^1 \alpha(\xi) d\xi = 1. \quad (30)$$

Путь s , пройденный ракетой, равен:

$$s = \int_0^t v(t) dt = v_a \tau \int_0^{\xi} \varphi(\xi) d\xi = s_a \sigma;$$

следовательно,

$$\sigma(\xi) = \frac{v_a \tau}{s_a} \int_0^{\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

Но при $\xi = 1$ величина $\sigma(\xi) = 1$. Поэтому

$$\int_0^1 \varphi(\xi) d\xi = \int_0^1 d\xi \int_0^{\xi} \alpha(\xi) d\xi = \frac{s_a}{v_a \tau} = A, \quad (31)$$

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{A} \int_0^{\xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad (32)$$

где A — безразмерный параметр, значения которого вполне определяются формой диаграммы безразмерного ускорения $\alpha(\xi)$.

Так, например, для прямоугольной диаграммы $\alpha(\xi) = 1$ и $A = \frac{1}{2}$, а $s_a = Av_a \tau = \frac{v_a \tau}{2}$; для треугольной диаграммы $\alpha(\xi) = 2(1 - \xi)$ и $A = \frac{2}{3}$ и т. д.

Таким образом, величины v_a , τ и функция $\alpha(\xi)$, заданная на отрезке $0 \leq \xi \leq 1$ и подчиняющаяся условию (30), вполне определяют все остальные функции $\varphi(\xi)$, $\sigma(\xi)$, необходимые для расчета углового отклонения.

Легко выразить компоненты углового отклонения в конце активного участка через вновь введенные функции¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{P_1} &= D \left(1 - \frac{v_0}{v_a} \right) = D (1 - \varphi_0), \\ \psi_{\gamma} &= \gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{v_a} \right) = \gamma_0 (1 - \varphi_0), \\ \psi_{\dot{\gamma}_0} &= \dot{\gamma}_0 \left(\tau - t_0 - \frac{s_a - s_0}{v_a} \right) = \frac{\dot{\gamma}_0 s_a}{v_a} \left[\frac{1 - \xi_0}{A} - (1 - \sigma_0) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \psi_M &= \frac{d}{\gamma^2 v_a} \int_{t_0}^{\tau} a(t) [s(t) - s_0 - v_0(t - t_0)] dt = \\ &= \frac{da_{op} s_a \tau}{\gamma^2 v_a} \int_{\xi_0}^1 \alpha(\xi) \left[\sigma(\xi) - \sigma_0 - \frac{v_a \tau}{s_a} \varphi_0 (\xi - \xi_0) \right] d\xi = \\ &= \frac{ds_a}{\gamma^2} \int_{\xi_0}^1 \alpha(\xi) \left[\sigma(\xi) - \sigma_0 - \frac{1}{A} \varphi_0 (\xi - \xi_0) \right] d\xi. \end{aligned}$$

¹⁾ Здесь φ_0 — значение функции $\varphi(\xi)$ при $\xi = \xi_0 = \frac{t_0}{\tau}$.

После несложных преобразований, в частности интегрирования по частям, получим:

$$\psi_M = \frac{ds_a}{x^2} \left\{ (1 - \sigma_0)(1 + \varphi_0) - \frac{\varphi_0(1 - \xi_0)}{A} - \frac{1}{A} \int_0^1 \varphi^2(\xi) d\xi \right\}. \quad (33')$$

Таким образом, если известна функция $\alpha(\xi)$, а следовательно, и функции $\sigma(\xi)$, $\varphi(\xi)$ и параметр формы A , то, зная v_a , τ и s_0 , мы легко найдем $s_a = Av_a\tau$, а затем уже по формулам (33) найдем и угловое отклонение.

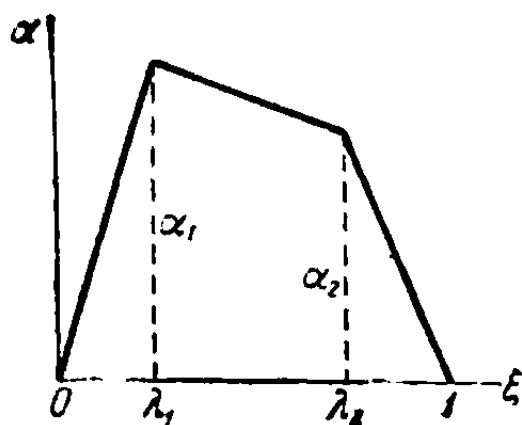


Рис. 95.

Анализируя вид диаграмм $\alpha(t)$ противотанковых оперенных ракет, получаемых на стенде, приходим к выводу, что в большинстве случаев можно заменить эти диаграммы четырехугольной диаграммой, изображенной на рис. 95¹⁾.

Легко видеть, что самый общий вид четырехугольной диаграммы, изображенной на рис. 95, характеризуется тремя параметрами, так как четыре параметра λ_1 , λ_2 , α_1 и α_2 , определяющие эту диаграмму, связаны между собой равенством (30), которое дает

$$\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2(1 - \lambda_1) = 2. \quad (34)$$

Параметры диаграммы рис. 95 можно оценить из внутрибаллистического расчета проектируемого образца. Следует заметить, что табулирование общего случая рис. 95 вряд ли целесообразно, так как в этом случае диаграмма определяется четырьмя параметрами, удовлетворяющими условию (34). Можно ожидать, что внутрибаллистические расчеты могут связать параметры α_1 , α_2 , λ_1 , λ_2 другими [независимыми от условия (34)] соотношениями. Тогда таблицы могли бы принять обобщимый вид. Для иллюстрации метода составления такого рода таблиц приведем следующий пример.

Пример 1. Найти формулы для составления таблиц углового отклонения противотанковых ракет для семейства диаграмм рис. 96.

Семейство диаграмм на рис. 96 описывается одним параметром, так как между параметрами α_1 и α_2 в силу равенства (30) имеет место соотношение

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2.$$

В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\xi) &= \alpha_1 + \xi(\alpha_2 - \alpha_1) = \alpha_1 + 2(1 - \alpha_1)\xi, \\ \varphi(\xi) &= \alpha_1\xi + (1 - \alpha_1)\xi^2, \\ \sigma(\xi) &= \frac{6}{\alpha_1 + 2} \left[\frac{\alpha_1\xi^2}{2} + \frac{(1 - \alpha_1)\xi^3}{3} \right], \\ A &= \frac{\alpha_1 + 2}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

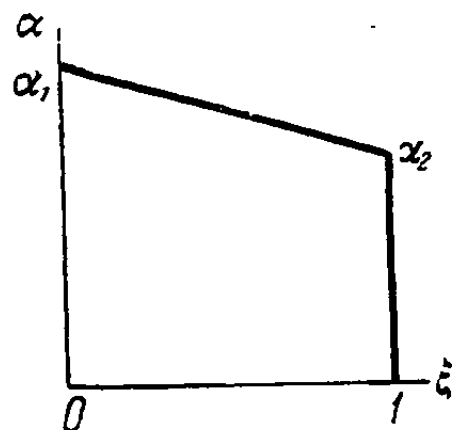


Рис. 96.

¹⁾ Частным видом этой четырехугольной диаграммы являются рассмотренные выше прямоугольная и треугольная диаграммы.

Подставляя эти выражения в формулы (33), после алгебраических преобразований получим:

$$\psi_M = \frac{ds_a}{\lambda^2} \left\{ \frac{4 + 2a_1 - a_1^2}{5(a_1 + 2)} + \frac{a_1^2 - 4a_1}{a_1 + 2} \xi_0 + \frac{-4 + 8a_1 - a_1^2}{a_1 + 2} \xi_0^2 + \frac{4 - 4a_1 - a_1^2}{a_1 + 2} \xi_0^3 - \right. \\ \left. - 2 \frac{a_1(1 - a_1)}{a_1 + 2} \xi_0^4 - \frac{4}{5} \frac{(1 - a_1)^2}{a_1 + 2} \xi_0^5 \right\} = \frac{ds_a}{\lambda^2} \tilde{\psi}_M(\tau_0), \quad (36a)$$

$$\psi_P = D [1 - a_1 \xi_0 - (1 - a_1) \xi_0^2] = D \tilde{\psi}_P(\tau_0), \quad (36b)$$

$$\psi_{\lambda} = \frac{\lambda_0 s_a}{v_a} \left[\frac{4 - a_1}{a_1 + 2} - \frac{6}{a_1 + 2} \xi_0 + \frac{3a_1}{a_1 + 2} \xi_0^2 + \frac{2(1 - a_1)}{a_1 + 2} \xi_0^3 \right] = \frac{\lambda_0 s_a}{v_a} \tilde{\psi}_{\lambda_0}(\tau_0), \quad (36в)$$

$$\psi_{\lambda} = \lambda_0 [1 - a_1 \xi_0 - (1 - a_1) \xi_0^2] = \lambda_0 \tilde{\psi}_{\lambda_0}(\tau_0). \quad (36г)$$

При $a = 1$ мы получим прямоугольную диаграмму. В этом случае $\xi_0 = \sqrt{\tau_0}$, и формулы (36) принимают вид (19).

При $a_1 = 2$ получим треугольную диаграмму, изображенную на рис. 89, и формулы (36) принимают вид (21).

Рассмотрим теперь случай, когда форма диаграммы $a(t)$ отличается от четырехугольной, но часть диаграммы, соответствующая полету ракеты вне пускового станка ($t > t_0$), состоит из двух прямолинейных отрезков (рис. 97). Если в этом случае по обычному методу найдено v_0 , т. е. скорость ракеты при сходе со станка, то расчет углового отклонения можно свести к расчету отклонения ракеты, имеющей четырехугольную диаграмму, зависящую от двух параметров.

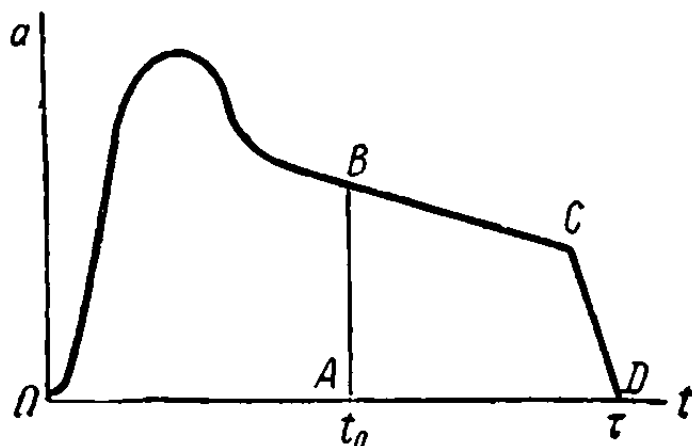


Рис. 97.

Для методики расчета рассмотрим несколько искусственную схему полета противотанковой ракеты. Полет нашей противотанковой ракеты вне пускового станка эквивалентен полету фиктивной ракеты, имеющей диаграмму реактивного ускорения $ABCD$, длину направляющей $s_0 = 0$ и начальную скорость $v_n = v_0$.

Угловое отклонение противотанковой оперенной ракеты, имеющей начальную скорость v_n , можно получить из формул (7), (8) и (9), если заметить, что при данной диаграмме $a(t)$ наличие начальной скорости v_n изме-

няет лишь множитель $\frac{1}{v(t)}$, стоящий перед интегралами в формуле (8).

Отсюда легко заключить, что угловое отклонение противотанковой оперенной ракеты, имеющей начальную скорость v_n , мы получим, вычислив угловое отклонение ракеты, имеющей ту же диаграмму $a(t)$, но $v_n = 0$, и разделив

его затем на $\frac{v_n + v_a}{v_a}$, где v_a — максимальная скорость ракеты при $v_n = 0$.

Возвращаясь к нашему случаю (рис. 97), мы получим угловое отклонение реальной ракеты, если вычислим угловое отклонение фиктивной ракеты, имеющей диаграмму $a(t)$ в форме $ABCD$, $v_n = 0$ и $s_0 = 0$, и разделим

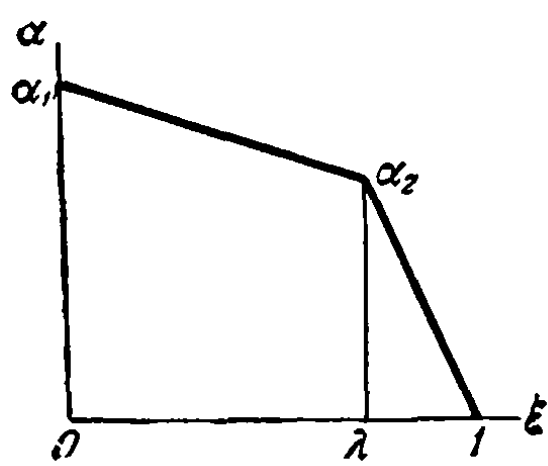
полученное угловое отклонение на величину

$$\frac{v'_a + v_0}{v'_a} = \frac{v_a}{v_a - v_0}, \quad (37)$$

где $v'_a = (v_a - v_0)$ — максимальная скорость фиктивной, а v_a — реальной ракеты.

Таким образом, задача сводится к нахождению рассеивания противотанковой ракеты, обладающей диаграммой $ABCD$, для которой $v_n = 0$ и $s_0 = 0$, и, следовательно, $\xi_0 = \varphi_0 = \sigma_0 = 0$.

В этом случае формулы (33) принимают вид:



$$\left. \begin{aligned} \psi'_M &= \frac{ds'_a}{\chi^2} \left[1 - \frac{1}{A'} \int_0^1 \varphi^2(\xi) d\xi \right], \\ \psi'_{P_1} &= D, \\ \psi'_{\chi_0} &= \frac{\dot{\chi}_0 s'_a}{v'_a} \left(\frac{1}{A'} - 1 \right) = \dot{\chi}_0 \tau' (1 - A'), \\ \psi'_{\chi_0} &= \chi_0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Рис. 98.

Вычисляя для диаграммы рис. 98 параметры A' и B , получим ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{4 - 2\lambda + \alpha_1 \lambda}{6}, \\ B &= \int_0^1 \varphi^2(\xi) d\xi = \frac{\lambda^3 (-\alpha_1^2 + 2\alpha_1) + \lambda^2 (3\alpha_1^2 - 4\alpha_1 - 4) + \lambda (8\alpha_1 - 16) + 32}{60}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Если учесть, что

$$\left. \begin{aligned} \tau' &= \tau - t_0, \\ s'_a &= A' v'_a \tau' = A' (v_a - v_0) (\tau - t_0), \\ \psi &= \psi' \frac{v'_a}{v_a} = \psi' \frac{v_a - v_0}{v_a}, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

то формулы (38) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \psi_M &= \frac{d}{\chi^2} \frac{(v_a - v_0)^2 (\tau - t_0)}{v_a} (A' - B), \\ \psi_{P_1} &= D \left(1 - \frac{v_0}{v_a} \right), \\ \psi_{\chi_0} &= \dot{\chi}_0 \frac{(v_a - v_0) (\tau - t_0)}{v_a} (1 - A'), \\ \psi_{\chi_0} &= \chi_0 \left(1 - \frac{v_0}{v_a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

¹⁾ Таблицы функций $A(\lambda, \alpha_1)$ и $B(\lambda, \alpha_1)$ даны на стр. 355.

В частности, если окончание диаграммы $a(t)$ имеет прямоугольную форму ($\lambda = 1, \alpha_1 = 1$), то $A' = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{3}$ и $v_a - v_0 = a_0(\tau - t_0)$. При треугольном окончании диаграммы ($\lambda = 1, \alpha_1 = 2$): $A' = \frac{2}{3}$, $B = \frac{8}{15}$ и $v_a - v_0 = \frac{a_0(\tau - t_0)}{2}$.

§ 66. Влияние кориолисовой силы и кориолисова момента на рассеивание противотанковых ракет

При исследовании полевых оперенных ракет было показано, что влияние кориолисовых силы и момента на угловое отклонение этих ракет очень мало (см. § 45).

Для решения этого же вопроса по отношению к противотанковым оперенным ракетам обратимся к уравнениям движения этих ракет. Эти уравнения (при учете кориолисовых силы и момента) можно получить из соответственных уравнений § 45, положив в них $n = \mu = k_2 = k_1 = h = 0$. При этом получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a, \\ v \frac{d\psi}{dt} &= a\delta - b + f_1 a \frac{d\chi}{dt}, \\ \frac{d^2\chi}{dt^2} + \frac{\lambda a}{x^2} \frac{d\chi}{dt} &= \frac{M}{I}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Из второго уравнения (42), как и в § 60, находим, что

$$\frac{d(\psi v)}{dt} = a\chi - b + f_1 a \frac{d\chi}{dt}. \quad (43)$$

Последнее из уравнений (42) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $\frac{d\chi}{dt}$. Из этого уравнения функцию $\frac{d\chi}{dt}$, а следовательно, и $\chi(t)$ можно получить с помощью квадратур. Подставив затем полученное значение $\chi(t)$ в (43), мы найдем решение для функции $\psi(t)$ также при помощи квадратур. Таким образом, решение системы уравнений (42) и (43) сводится к нахождению квадратур.

Здесь заметим, что из вида уравнений (42) и (43) сразу же можно сделать заключение о том, что кориолисова сила и кориолисов момент не влияют на компоненты ψ_{P_1} и ψ_{χ_0} углового отклонения противотанковой оперенной ракеты.

Действительно, из уравнения (43) получаем:

$$\psi_{P_1} = -\frac{1}{v} \int_{t_0}^t b(t) dt, \quad \psi_{\chi_0} = \frac{\chi_0}{v} \int_{t_0}^t a(t) dt.$$

Легко видеть, что эти уравнения совпадают с соответствующими уравнениями (13), полученными в § 60 при пренебрежении кориолисовой силой

и кориолисовым моментом ¹⁾. Поэтому при дальнейшем анализе влияния кориолисовых силы и момента на угловое отклонение противотанковых ракет мы можем положить $\gamma_0 = 0$ и $b = 0$.

Произведем оценку влияния кориолисовых силы и момента на угловое отклонение противотанковых оперенных ракет при предположениях, что диаграмма ускорения $a(t)$ имеет прямоугольный характер ($a = \text{const}$) и эксцентриситет реактивной силы постоянен ($d = \text{const}$). Тогда

$$\frac{M}{I} = \frac{da}{x^2} = \text{const} \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \frac{\lambda a}{x^2} = \text{const}.$$

При этих предположениях третье уравнение (42) имеет решение:

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= \frac{da}{x^2 \lambda_1} [1 - e^{-\lambda_1(t-t_0)}] + \dot{\gamma}_0 e^{-\lambda_1(t-t_0)}, \\ \chi &= \frac{da}{x^2 \lambda_1} \left[t - t_0 + \frac{e^{-\lambda_1(t-t_0)} - 1}{\lambda_1} \right] + \frac{\dot{\gamma}_0}{\lambda_1} [1 - e^{-\lambda_1(t-t_0)}]. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для $\frac{d\chi}{dt}$ и χ в уравнение (43), мы для компонентов ψ_M и ψ_{χ} получим:

$$\begin{aligned} \psi_M &= \frac{da^2}{x^2 \lambda_1 v} \left\{ \left[\frac{(t-t_0)^2}{2} - \frac{t-t_0}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1^2} (e^{-\lambda_1(t-t_0)} - 1) \right] + \right. \\ &\quad \left. + f_1 \left[t - t_0 + \frac{e^{-\lambda_1(t-t_0)} - 1}{\lambda_1} \right] \right\}, \\ \psi_{\chi} &= \frac{\dot{\gamma}_0 a}{\lambda_1 v} \left\{ \left[t - t_0 + \frac{e^{-\lambda_1(t-t_0)} - 1}{\lambda_1} \right] + f_1 [1 - e^{-\lambda_1(t-t_0)}] \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Разлагая правые части формулы (44) в ряды по степеням $\lambda_1(t-t_0)$ и ограничиваясь членами первого порядка малости относительно $\lambda_1(t-t_0)$ и f_1 , можно записать формулы (44) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_M &= \frac{da^2(t-t_0)^3}{6x^2v} \left\{ 1 - \frac{\lambda_1(t-t_0)}{4} + \frac{3f_1}{t-t_0} \right\}, \\ \psi_{\chi} &= \frac{\dot{\gamma}_0 a(t-t_0)^2}{2v} \left\{ 1 - \frac{\lambda_1(t-t_0)}{3} + \frac{2f_1}{t-t_0} \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Легко видеть, что в выражениях (45) множители, стоящие перед фигурными скобками, совпадают со значениями ψ_M и ψ_{χ_0} из формул (17), полученных при пренебрежении кориолисовыми силой и моментом. Поэтому в уравнениях (45) выражения, стоящие в фигурных скобках, представляют собой поправочные коэффициенты к соответствующим формулам (17). Эти коэффициенты позволяют учитывать влияние кориолисовых силы и момента на разброс противотанковых ракет.

¹⁾ Этот результат имеет простое физическое объяснение. Действительно, поскольку мы пренебрегаем действием аэродинамических сил и моментов, то под влиянием одной силы P_1 или при наличии лишь угла γ_0 противотанковая ракета должна двигаться так, что $\chi = \text{const}$ (т. е. $\dot{\chi} = 0$). Отсюда и следует, что в этих случаях не возникают ни кориолисова сила, ни кориолисов момент.

При рассмотрении коэффициентов f_1 и $\frac{\lambda}{x^2}$ у ряда конкретных опереженных ракет (см. § 44) было показано, что величина $\frac{\lambda}{x^2}$ у противотанковых ракет не превышает $1,5 \cdot 10^{-3}$ сек/м, а коэффициент f_1 меньше чем $3,5 \cdot 10^{-4}$ сек.

При нашем предположении, что $a = \text{const}$, величина

$$\lambda_1(t - t_0) = \frac{\lambda}{x^2} (v - v_0) = \frac{\lambda}{x^2} v \left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{s}}\right).$$

Если ограничиться рассмотрением противотанковых ракет, имеющих максимальную скорость $v_a < 250$ м/сек и $\frac{s_0}{s_a} > 0,3$, то для них

$$\frac{\lambda}{x^2} v \left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{s}}\right) < \frac{\lambda}{x^2} v_a \left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{s}}\right) < 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 250 \cdot 0,45 = 0,17.$$

Это означает, что для рассматриваемого класса ракет поправка, вносимая учетом кориолисова момента, равная $\frac{\lambda_1(t - t_0)}{4}$ для компонента ψ_M и $\frac{\lambda_1(t - t_0)}{3}$ для компонента ψ_{γ_0} , не превышает 40% для ψ_M и 50% для ψ_{γ_0} .

Что же касается поправки, вносимой кориолисовой силой и равной $\frac{3f_1}{t - t_0}$ для ψ_M и $\frac{2f_1}{t - t_0}$ для ψ_{γ_0} , то она становится заметной лишь при очень малых величинах разности $t - t_0$, т. е. при длинах активного участка s_a , очень малых по сравнению с длиной пускового станка.

Например, поправка к ψ_M по порядку величины равна $\frac{3 \cdot 3,5 \cdot 10^{-4}}{t - t_0}$. Она становится больше 10% при $t - t_0 < \frac{10 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 10^{-2}} = 10^{-2}$, но когда

$t - t_0 < 10^{-2}$ сек, то само угловое отклонение ψ_M становится очень малым.

Действительно, если ограничиться рассмотрением ракет, у которых $v_a > 70$ м/сек, а ускорение $a < 3500$ м/сек, то для них при $t - t_0 < 10^{-2}$ вероятное угловое отклонение

$$\bar{\psi}_M = \frac{d}{x^2} \frac{a^2 (t - t_0)^3}{6v} < \frac{10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 70} = \frac{1}{3500}^1).$$

Таким образом, поправка к величине ψ_M , вносимая учетом кориолисовой силы, становится существенной тогда, когда величина самого компонента $\psi_M < \frac{1}{3500}$, т. е. когда этот компонент заведомо меньше разброса ракет на пассивном участке.

У нас нет возможности произвести аналогичную оценку влияния кориолисовой силы на компонент ψ_{γ_0} , так как мы не имеем экспериментальных

¹⁾ Напомним, что согласно § 63 величина $\frac{\bar{a}}{x^2}$ у противотанковых ракет имеет порядок 0,01 м-1.

данных о величине $\dot{\chi}_0$. Однако можно предположить, что и для этого компонента влияние кориолисовой силы становится существенным только тогда, когда сам компонент ψ_{χ_0} становится очень малым.

Это предположение можно подтвердить следующими соображениями, которые объясняют влияние кориолисовой силы на угловое отклонение при очень малых значениях $t - t_0$. В самом деле, когда ракета сходит со станка и при этом $d = 0$, $b = 0$, $\chi_0 = 0$, но $\dot{\chi}_0 \neq 0$, то в самом начале движения ракеты вне станка ($t - t_0$ очень малó) наличие угловой скорости вызывает кориолисову силу. К этому же моменту еще не успел возникнуть скольконибудь значительный угол атаки. Поэтому, хотя сама реактивная тяга значительно больше, чем кориолисова сила, но ее нормальная слагающая $P\delta$, вызывающая появление ψ_{χ_0} , в этот момент времени может быть меньше, чем кориолисова сила. Однако через очень короткий промежуток времени $t - t_0 \approx f_1$ величина $P\delta$ становится больше кориолисовой силы и тогда отклонение $\psi_{\chi_0} = \frac{\dot{\chi}_0 a (t - t_0)^2}{2v}$, вызванное нормальной слагающей реактивной

тяги, станет больше, чем отклонение $\Delta\psi_{\chi_0} = \frac{\dot{\chi}_0 a f_1}{v} (t - t_0)$, вызванное кориолисовой силой (см. (45)).

Аналогичные рассуждения можно провести и для компонента ψ_M , замечив, что в этом случае угловая скорость $\dot{\chi}$ растет пропорционально $t - t_0$, а угол атаки δ — как $(t - t_0)^2$.

Таким образом, проведенный анализ приводит нас к выводу, что для широкого класса противотанковых оперенных ракет можно пренебречь влиянием кориолисовой силы и кориолисова момента на угловое рассеивание этих ракет.

ГЛАВА VII

ОБЩАЯ (ПРОСТРАНСТВЕННАЯ) ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ РАКЕТ

§ 67. Введение

В настоящей главе рассмотрим пространственную задачу о движении ракеты (как оперенной, так и вращающейся) на активном участке траектории.

При исследовании рассеивания оперенных ракет мы в главах IV, V и VI исходили из упрощенной схемы плоскопараллельного движения. Решение точной пространственной задачи в данной главе и сопоставление его с приближенным «плоским» решением покажет нам, что плоское решение как в случае невращающейся, так и в случае проворачивающейся оперенной ракеты дает достаточно хорошее приближение к пространственному решению. Таким образом, для оперенных ракет настоящая глава дает обоснование плоской схемы движения, применяемой в главах IV, V и VI.

Для вращающихся ракет, для которых плоская схема движения неприемлема, содержание настоящей главы дает новые математические пути решения задачи.

§ 68. Уравнения движения центра тяжести ракеты

Уравнения движения ракеты, согласно принципу затвердевания¹⁾, могут быть в любой момент времени t записаны в виде уравнений движения твердого тела, если представить себе, что ракета в момент времени t затвердела (т. е. перестала выделять частицы) и что к ней, помимо внешних сил, приложены реактивные и кориолисовы силы. Исходя из этого, мы сможем написать

$$m\omega^* = F, \quad (1)$$

где ω^* — ускорение той точки среды, неизменно связанной с корпусом ракеты, в которой в данный момент времени t находится центр тяжести C ракеты, а F — главный вектор (т. е. геометрическая сумма) всех внешних, реактивных и кориолисовых сил.

¹⁾ Подробное обоснование принципа затвердевания дано в гл. I.

Однако ω^* не является ускорением центра тяжести ракеты относительно неподвижной (инерциальной) системы координат, поскольку центр тяжести ракеты во время горения ракетного заряда не только участвует в движении корпуса ракеты, но и смещается относительно самого корпуса.

Если мы через v обозначим скорость центра тяжести C относительно неподвижной системы координат, а через v_r и ω_r — скорость и ускорение его движения относительно корпуса ракеты, то

$$\frac{dv}{dt} = \omega^* + \omega_r + 2\omega \times v_r,$$

где ω — угловая скорость корпуса ракеты ¹⁾.

Определяя отсюда ω^* и подставляя полученное выражение в уравнение (1), получим:

$$m \frac{dv}{dt} = F + m\omega_r + 2m\omega \times v_r. \quad (2)$$

Расчеты, проведенные для ряда конкретных ракет, показали, что члены уравнения $m\omega_r$ и $2m\omega \times v_r$ очень малы и их влиянием на движение ракеты можно пренебречь ²⁾. Поэтому мы можем отбросить в уравнении (2) последние два члена и написать:

$$m \frac{dv}{dt} = F. \quad (3)$$

Пусть $Oxyz$ — неподвижная (инерциальная) система осей координат. Построим из точки O вектор скорости центра тяжести ракеты v в произвольный момент времени t . Направление вектора v относительно системы осей $Oxyz$ зададим при помощи двух углов типа де Спарра: ψ_1 и ψ_2 . Для этого обозначим через v_1 проекцию вектора v на плоскость Oxy .

Тогда ψ_1 — угол между осью Ox и вектором v_1 , а ψ_2 — угол между v_1 и вектором v (рис. 99) ³⁾.

Нетрудно определить координаты вектора v в системе осей $Oxyz$. Для этого разложим вектор v на составляющие по осям Ox_1 и Oz :

$$v = v_1 + v_2, \quad (4)$$

где

$$v_1 = v \cos \psi_2, \quad v_2 = v \sin \psi_2.$$

¹⁾ Знаком $\times$ мы обозначаем векторное произведение векторов.

²⁾ См. Приложение 1, § 3.

³⁾ Положительное направление отсчета углов ψ_1 и ψ_2 указано на рис. 99.

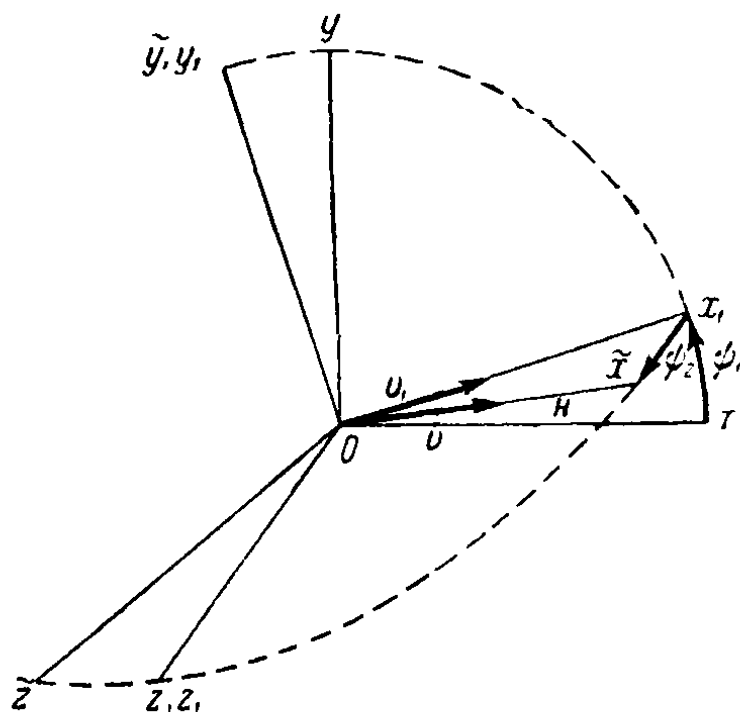


Рис. 99.

Проектируя обе части векторного равенства (4) на оси координат, найдем:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \cos \psi_1 \cos \psi_2, \\ v_y &= v \sin \psi_1 \cos \psi_2, \\ v_z &= v \sin \psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ось Ox можно перевести в положение оси $O\tilde{x}$, проходящей через вектор φ (ось $O\tilde{x}$ параллельна касательной к траектории центра тяжести в данный момент t), при помощи двух поворотов: 1) поворота системы осей $Ox_1y_1z_1$ на угол ψ_1 вокруг оси Oz (при этом $Ox_1y_1z_1$ перейдет в $Ox_2y_2z_2$; $Oz \equiv Oz_1$) и 2) поворота полученной системы осей $Ox_2y_2z_2$ вокруг отрицательной оси Oy_1 на угол ψ_2 , при этом система осей $Ox_2y_2z_2$ перейдет в $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$; $Oy_1 \equiv O\tilde{y}$; $Oz \equiv O\tilde{z}$.

При движении ракеты система осей $Ox_1y_1z_1$ вращается относительно неподвижной системы осей $Ox_2y_2z_2$ с угловой скоростью $\dot{\psi}_1$, направленной вдоль оси Oz ($Oz \equiv Oz_1$), а система $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ совершает вращение относительно $Ox_2y_2z_2$ с угловой скоростью $\dot{\psi}_2$, направленной вдоль отрицательной оси Oy_1 ($Oy_1 \equiv O\tilde{y}$).

При движении ракеты конец вектора φ (точка H) описывает криволинейную скорость. Скорость движения точки H по годографу, равная $\frac{d\varphi}{dt}$, может быть представлена в виде суммы трех компонентов:

1) скорости перемещения точки H вдоль оси $O\tilde{x}$; эта скорость равна $\frac{d\varphi}{dt}$ и направлена вдоль оси $O\tilde{x}$;

2) вращательной скорости точки H при движении осей $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ относительно $Ox_2y_2z_2$; эта скорость равна $v\dot{\psi}_2$ и направлена вдоль оси $O\tilde{z}$ и, наконец,

3) вращательной скорости точки H при движении осей $Ox_1y_1z_1$ относительно $Ox_2y_2z_2$; эта скорость равна $v \cos \psi_2 \dot{\psi}_1$ и направлена вдоль оси $O\tilde{y}$.

Итак, проектируя обе части векторного равенства (3) на оси $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, найдем:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_{\tilde{x}}, \\ mv \cos \psi_2 \frac{d\dot{\psi}_1}{dt} &= F_{\tilde{y}}, \\ mv \frac{d\dot{\psi}_2}{dt} &= F_{\tilde{z}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти уравнения входят величины v , ψ_1 и ψ_2 , характеризующие направление скорости центра тяжести ракеты. Эти

величины согласно формулам (5) связаны с координатами центра тяжести x_C, y_C, z_C следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_C}{dt} &= v \cos \psi_1 \cos \psi_2, \\ \frac{dy_C}{dt} &= v \sin \psi_1 \cos \psi_2, \\ \frac{dz_C}{dt} &= v \sin \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если бы проекции сил $F_{\tilde{x}}, F_{\tilde{y}}, F_{\tilde{z}}$ были известными нам функциями от $t, x_C, y_C, z_C, v, \psi_1, \psi_2$, т. е. от времени, положения и скорости центра тяжести, то, проинтегрировав системы уравнений (6) и (7), мы могли бы определить движение центра тяжести ракеты. В действительности же проекции $F_{\tilde{x}}, F_{\tilde{y}}, F_{\tilde{z}}$ существенным образом зависят от вращательного движения ракеты относительно центра тяжести. Поэтому для определения движения центра тяжести необходимо совместно интегрировать систему уравнений, содержащую как уравнения движения центра тяжести, так и уравнения вращательного движения корпуса ракеты. К выводу уравнений вращательного движения мы и переходим.

§ 69. Уравнения вращательного движения ракеты

Будем предполагать, что во все время движения ось ракеты является осью динамической симметрии¹⁾. Поэтому в любой момент времени t в качестве одной из главных центральных осей инерции можно выбрать ось ракеты $C\xi$, а в качестве двух других центральных главных осей инерции — любые две оси $C\eta$ и $C\zeta$, проходящие через центр тяжести ракеты и перпендикулярные к ее оси. Из сказанного следует, что мы можем оси $C\eta$ и $C\zeta$ выбрать так, чтобы их направления, как и направление оси $C\xi$, были неизменны относительно корпуса ракеты.

В дальнейшем аксиальный момент инерции ракеты (т. е. момент инерции относительно оси $C\xi$) будем обозначать через I_1 , а экваториальный (относительно оси $C\eta$ или $C\zeta$) — через I .

Мы будем считать известным в любой момент времени положение центра тяжести C ракеты относительно ее корпуса, так как это положение определяется распределением масс внутри ракеты. Поэтому положение ракеты в пространстве будет известно, если будет задано положение системы осей $C\xi\eta\zeta$ относительно исходной инерциальной системы $Oxyz$. Положение точки C задается координатами x_C, y_C, z_C . Для задания направлений ξ, η, ζ мы введем три угла χ_1, χ_2 и φ следующим образом:

¹⁾ Другими словами, центральный эллипсоид инерции ракеты является эллипсоидом вращения относительно оси ракеты.

Проведем через точку C оси Cx , Cy , Cz , соответственно параллельные и одинаково направленные с осями Ox , Oy и Oz . Для определения положения оси $C\xi$ относительно триэдра осей $Cxyz$ введем два угла типа де Спарра: χ_1 — угол между Cx и проекцией Cx' оси $C\xi$ на плоскость Cxy , и χ_2 — угол между Cx' и $C\xi$ (рис. 100)¹⁾.

Повернем систему осей $Cxyz$ на угол χ_1 вокруг оси Cz . Пусть новое положение системы осей будет $Cx'y'z'$ ($Cz \equiv Cz'$). Далее, поворотом вокруг отрицательной оси Cy' на угол χ_2 мы переведем систему $Cx'y'z'$ в положение $C\xi\eta_1\zeta_1$ ($Cy' \equiv C\eta_1$). Наконец, повернув систему осей $C\xi\eta_1\zeta_1$ вокруг оси $C\xi$ на надлежащий угол φ , мы совместим ее с системой осей $C\xi\eta\zeta$, направления которых неизменны относительно корпуса ракеты²⁾.

При движении ракеты указанные повороты будут осуществляться непрерывно. Таким образом, мы разложим вращательное движение корпуса ракеты на три чистых вращения с угловыми скоростями $\omega_1 = \dot{\chi}_1$, $\omega_2 = \dot{\chi}_2$ и $\omega_3 = \dot{\varphi}$, соответственно направленными вдоль оси Cz , отрицательной оси $C\eta_1$ и положительной оси $C\xi$.

Поэтому для угловой скорости ω корпуса ракеты имеет место равенство

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3. \quad (8)$$

Пользуясь разложением (8), мы легко найдем выражения для проекций p , q_1 , r_1 угловой скорости ω на оси ξ , η_1 и ζ_1 :

$$p = \dot{\varphi} + \dot{\chi}_1 \sin \chi_2, \quad q_1 = -\dot{\chi}_2, \quad r_1 = \dot{\chi}_1 \cos \chi_2. \quad (9)$$

Применяя принцип затвердевания, мы будем рассматривать ракету как твердое тело, неизменно связанное с корпусом.

Обозначим кинетический момент этого тела во вращательном движении относительно центра тяжести через L_C . Проекции этого кинетического момента на главные оси инерции ξ , η_1 , ζ_1 будут равны:

$$L_\xi = I_1 p, \quad L_{\eta_1} = I q_1, \quad L_{\zeta_1} = I r_1. \quad (10)$$

Применяя теорему о кинетическом моменте, получим:

$$\frac{dL_C}{dt} = G_C, \quad (11)$$

¹⁾ Положительное направление отсчета углов χ_1 и χ_2 указано на рис. 100.
²⁾ Оси $C\eta$ и $C\zeta$ на рис. 100 не указаны.

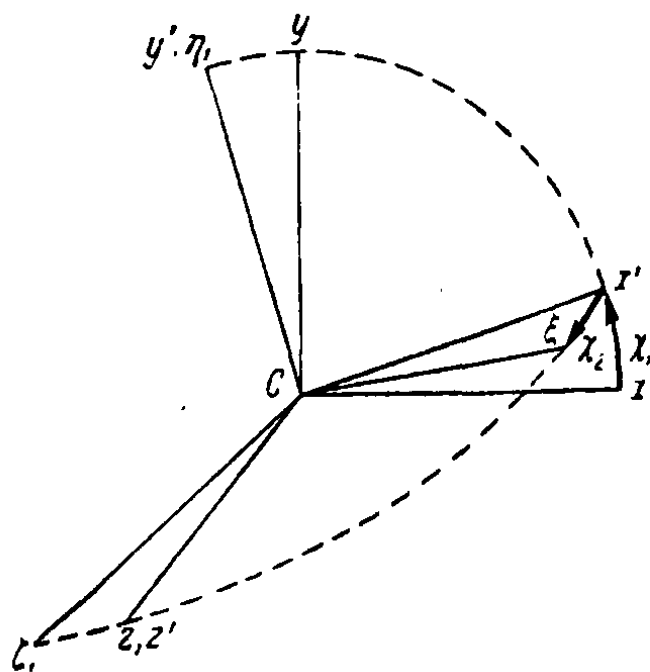


Рис. 100.

где G_C — главный момент всех внешних, реактивных и кориолисовых сил относительно полюса C , а $\frac{dL_C}{dt}$ — «абсолютная» производная по времени от вектора L_C , учитывающая изменение этого вектора относительно системы осей $Cxyz$. Обозначим через $\frac{\delta L_C}{dt}$ «относительную» производную от вектора L_C , учитывающую изменение вектора L_C относительно подвижной системы $C\xi\eta_1\zeta_1$.

Построим из точки C вектор L_C и конец этого вектора обозначим через E ; тогда $\frac{dL_C}{dt}$ — абсолютная скорость точки E (относительно $Cxyz$); $\frac{\delta L_C}{dt}$ — относительная скорость (относительно системы $C\xi\eta_1\zeta_1$), а $\omega' \times L_C$ — переносная скорость точки E . Следовательно,

$$\frac{dL_C}{dt} = \frac{\delta L_C}{dt} + \omega' \times L_C, \quad (12)$$

где ω' — угловая скорость подвижного триэдра $C\xi\eta_1\zeta_1$ относительно $Cxyz$:

$$\omega' = \omega_1 + \omega_2 = \omega - \omega_3.$$

Поэтому равенство (11) можно записать следующим образом:

$$\frac{\delta L_C}{dt} + \omega' \times L_C = G_C. \quad (13)$$

Но проекции производной $\frac{\delta L_C}{dt}$ на оси ξ , η_1 , ζ_1 соответственно равны $\frac{dL_\xi}{dt}$, $\frac{dL_{\eta_1}}{dt}$, $\frac{dL_{\zeta_1}}{dt}$, а проекции вектора ω' на эти оси равны: $p - \dot{\varphi}$, q_1 , r_1 . Проектируя обе части векторного уравнения (13) на оси ξ , η_1 , ζ_1 и используя равенства (10), получим:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{dp}{dt} &= G_\xi, \\ I \frac{dq_1}{dt} + I_1 p r_1 - I(p - \dot{\varphi}) r_1 &= G_{\eta_1}, \\ I \frac{dr_1}{dt} - I_1 p q_1 + I(p - \dot{\varphi}) q_1 &= G_{\zeta_1}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где G_ξ , G_{η_1} , G_{ζ_1} — суммы моментов внешних, реактивных и кориолисовых сил относительно осей $C\xi$, $C\eta_1$ и $C\zeta_1$.

Исходя из выражений (9) для p , q_1 и r_1 , мы можем придать уравнениям (14) следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{p} &= G_\xi; \\ -\ddot{I}_{1/2} + I_1 \dot{p}_{1/1} \cos \gamma_2 - \dot{I}_{1/1}^2 \sin \gamma_2 \cos \gamma_2 &= G_{\eta_1}; \\ \dot{I}_{1/1} \cos \gamma_2 + I_1 \dot{p}_{1/2} - 2\dot{I}_{1/1} \dot{\gamma}_2 \sin \gamma_2 &= G_{\zeta_1}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Уравнения (15) совместно с уравнениями (6) и (7) определяют движение ракеты.

§ 70. Силы и моменты, действующие на ракету

При исследовании углового разброса в конце активного участка траектории мы не будем рассматривать силу веса, так как она вызывает систематическое отклонение ракеты от направления стрельбы и не влияет существенным образом на угловой разброс в конце активного участка траектории¹⁾. Точно так же мы не будем учитывать кориолисовых силы и момента, а также силы и момента Магнуса²⁾.

Таким образом, при изучении движения ракеты на активном участке траектории мы будем считать, что на ракету действуют следующие силы и моменты³⁾:

1. *Реактивная тяга P* . Она направлена по оси ракеты и образует острый угол δ (угол атаки) со скоростью центра тяжести ракеты.

2. *Боковая реактивная сила P_1* . Она лежит в плоскости, проходящей через ось ракеты, и образует с плоскостью $C\xi\eta$ некоторый угол β_1 .

3. *Отклоняющий реактивный экваториальный момент M* . Пара с моментом M действует в некоторой плоскости, проходящей через ось ракеты $C\xi$ и образующей с плоскостью $C\xi\eta$ некоторый угол β_2 ⁴⁾. Величина реактивного момента $M = Pd$, где d — эксцентриситет реактивной силы. Вектор-момент M параллелен плоскости $C\eta\zeta$ и образует с осью η угол $\frac{\pi}{2} + \beta_2$.

В случае, когда боковая реактивная сила P_1 и пара с моментом M лежат в одной плоскости и $\beta_1 = \beta_2 + \pi$, мы имеем то расположение равнодействующей реактивной силы T , которое указано на рис. 33 (стр. 90).

4. *Аксиальный реактивный момент M^** , создаваемый истечением газа из наклонных сопел, каналов (или насадков) и т. п. Величина

¹⁾ Вычисленное в § 12 понижение касательной к траектории ракеты, вызванное силой тяжести, определялось в предположении, что угол атаки ракеты равен нулю.

В действительности же при наличии угла атаки понижение касательной будет несколько меньшим вычисленного в § 12. Это объясняется тем, что после схода ракеты с пускового станка касательная начинает понижаться под действием силы тяжести.

В то же время аэродинамический момент не может сразу заставить ось ракеты идеально следовать за касательной и появляется угол атаки. Вызванная этим углом нормальная составляющая реактивной тяги направлена вверх и замедляет понижение касательной. Для вращающихся ракет это же обстоятельство приводит к явлению типа деривации артиллерийских снарядов.

²⁾ При рассмотрении плоской схемы движения оперенных ракет было выяснено, что кориолисовы силы и моменты весьма слабо влияют на угловое рассеивание ракет в конце активного участка траектории (см. §§ 44, 45).

³⁾ Описание реактивных и аэродинамических сил и моментов дано в главах II, III и в Приложении II.

⁴⁾ В общем случае углы β_1 и β_2 могут быть функциями от времени t .

этого момента прямо пропорциональна давлению в камере и, следовательно, пропорциональна реактивной тяге P :

$$M^* = \mu_1 P,$$

где коэффициент μ_1 определяется конструкцией ракеты [см. § 48, формулу (26)]. Вектор M^* направлен по оси ракеты.

5. *Аэродинамическая сила лобового сопротивления* Q . Она направлена противоположно скорости ракеты и имеет величину

$$Q = c_x \frac{\rho v^2}{2} S_m.$$

6. *Аэродинамическая подъемная сила* R . Она лежит в плоскости угла атаки и направлена перпендикулярно к скорости ракеты. Эта сила имеет величину $R = \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \frac{\rho v^2}{2} S_m \delta$, где для большого диапазона скоростей можно положить $\frac{\partial c_y}{\partial \delta} = \text{const}$ (см. Приложение II, § 5).

7. *Аэродинамический экваториальный (стабилизирующий или опрокидывающий) момент* M_1 . Этот момент действует в плоскости угла атаки, его величина равна

$$M_1 = \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \frac{\rho v^2}{2} S_m L_0 \delta,$$

где $\frac{\partial m_z}{\partial \delta} > 0$ для вращающихся и $\frac{\partial m_z}{\partial \delta} < 0$ для оперенных ракет. В первом случае M_1 и δ имеют одинаковые знаки и пара с моментом M_1 стремится отклонить ось ракеты от касательной к траектории центра тяжести¹⁾. Во втором случае M_1 и δ имеют разные знаки и момент M_1 стремится вернуть ось ракеты к положению касательной. Для большого диапазона скоростей можно принять, что производная $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ не зависит от величины скорости (см. Приложение II, § 6).

8. *Аэродинамический аксиальный момент* M_1^* , вызванный косо поставленным оперением. Он направлен по оси ракеты и его величина равна

$$M_1^* = m_x \frac{\rho v^2}{2} S_m L_0.$$

9. *Экваториальный демпфирующий момент* M_2 . Он направлен противоположно экваториальной угловой скорости $\Omega = q_1 + r_1$. Его величина равна

$$M_2 = m_\Omega \rho v S_m L_0^2 \Omega \quad (m_\Omega < 0).$$

¹⁾ Заметим, что сама форма записи момента M_1 и силы R , приведенная выше, предполагает, что производные $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ и $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ не зависят от величины угла атаки δ .

10. *Аксиальный демпфирующий момент* M_2^* . Пара с моментом M_2^* действует в плоскости, перпендикулярной к оси ракеты, в направлении, противоположном вращению ракеты вокруг своей оси. Этот момент имеет величину

$$M_2^* = m_p r v p S_m L_0^2.$$

§ 71. Линеаризация уравнений движения

При определении углового разброса на активном участке траектории мы исходим из схемы невесомой ракеты. В этой схеме при отсутствии возмущающих факторов центр тяжести движется в направлении стрельбы.

Выберем неподвижную систему осей координат $Oxyz$ так, чтобы ось Ox совпала с осью пускового станка. Тогда при наличии возмущающих факторов траектория центра тяжести отклонится от оси Ox , а углы ψ_1 , ψ_2 , γ_1 , γ_2 и их производные будут малыми величинами. Пренебрегая в уравнениях (6) и (15) членами второго и более высокого порядка малости относительно углов ψ_1 , ψ_2 , γ_1 , γ_2 и их производных по времени, мы можем в этих уравнениях заменить косинусы малых углов единицей, а синусы — самими углами (в радианном измерении)¹⁾, и уравнения движения представить в виде

$$m\dot{v} = F_{\tilde{x}}, \quad m v \dot{\psi}_1 = F_{\tilde{y}}, \quad m v \dot{\psi}_2 = F_{\tilde{z}}, \quad (16a)$$

$$I_1 \dot{p} = G_{\tilde{x}}, \quad I_{\tilde{y}2} - I_1 p \dot{\gamma}_1 = -G_{\tilde{y}}, \quad I_{\tilde{z}1} + I_1 p \dot{\gamma}_2 = G_{\tilde{z}}. \quad (16b)$$

Интегрируя эту систему из шести дифференциальных уравнений с шестью неизвестными функциями v , ψ_1 , ψ_2 , p , γ_1 и γ_2 , мы найдем углы ψ_1 и ψ_2 , определяющие угловое отклонение ракеты от направления стрельбы.

Поскольку при вычислении проекций сил и моментов, стоящих в правых частях уравнений (16б), приходится иметь дело с углом атаки δ , мы введем в рассмотрение два угла де Спарра δ_1 и δ_2 (аналогичные углам ψ_1 , ψ_2 ; γ_1 , γ_2), определяющие положение оси ракеты относительно системы осей $\tilde{C}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, связанной с положением касательной $\tilde{C}\tilde{x}$ к траектории центра тяжести ракеты²⁾ (рис. 101). Через δ_1 обозначим угол между осью $\tilde{C}\tilde{x}$ и $\tilde{C}\tilde{x}_1$ ($\tilde{C}\tilde{x}_1$ — проекция оси $\tilde{C}\tilde{z}$ на плоскость $\tilde{C}\tilde{x}\tilde{y}$), а через δ_2 — угол между $\tilde{C}\tilde{x}_1$ и $\tilde{C}\tilde{z}$. Углы δ_1 , δ_2 и их производные также можно считать малыми величинами.

¹⁾ Легко оценить ошибку такого приближения, если вспомнить разложение функций $\cos x$ и $\sin x$ в степенные ряды: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$,

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$

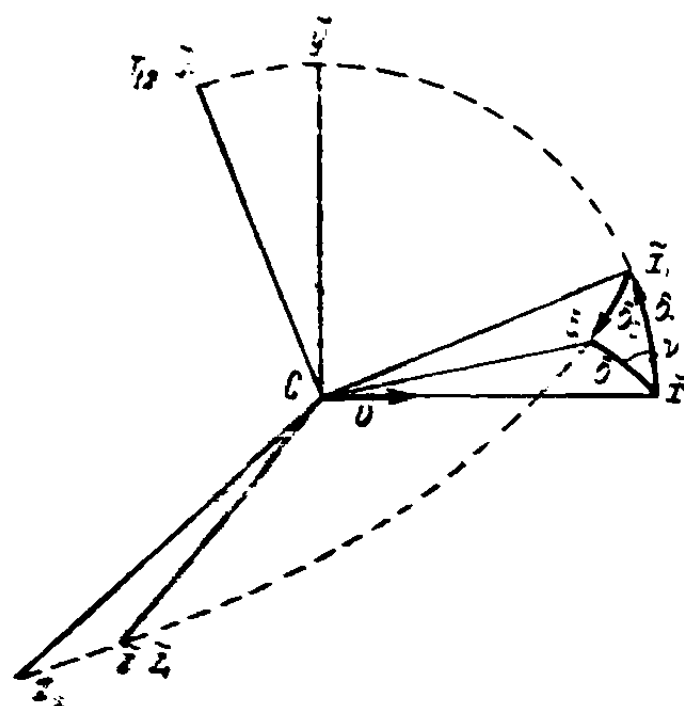
²⁾ Оси $\tilde{C}\tilde{x}$, $\tilde{C}\tilde{y}$, $\tilde{C}\tilde{z}$ параллельны и одинаково направлены с осями $O\tilde{x}$, $O\tilde{y}$, $O\tilde{z}$.

Перейдем к вычислению проекций сил P , P_1 , Q и R на оси $C\tilde{x}$, $C\tilde{y}$, $C\tilde{z}$ с точностью до членов второго порядка малости.

Реактивная тяга P направлена вдоль оси ракеты. Легко видеть, что ее проекции на оси $C\tilde{x}$, $C\tilde{y}$, $C\tilde{z}$ равны:

$$\left. \begin{aligned} P_{\tilde{x}} &= P \cos \delta_1 \cos \delta_2 \approx P, \\ P_{\tilde{y}} &= P \sin \delta_1 \cos \delta_2 \approx P \delta_1, \\ P_{\tilde{z}} &= P \sin \delta_2 \approx P \delta_2^1. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Сила P_1 входит в выражения $F_{\tilde{x}}$, $F_{\tilde{y}}$, $F_{\tilde{z}}$ наряду с силой P . Величина силы P_1 весьма мала по сравнению с величиной силы P . Поэтому при оценке отдельных членов мы будем условно считать величину силы P_1 «малой». Но проекции малой силы на два близких направления отличаются друг от друга на величину второго порядка малости²⁾. Поэтому



$$\left. \begin{aligned} P_{1\tilde{x}} &\approx P_{1\tilde{z}} = 0, \\ P_{1\tilde{y}} &\approx P_{1\tilde{z}} = P_1 \cos(\beta_1 + \varphi), \\ P_{1\tilde{z}} &\approx P_{1\tilde{y}} = P_1 \sin(\beta_1 + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Сила Q направлена противоположно оси $C\tilde{x}$. Следовательно,

$$Q_{\tilde{x}} = -Q, \quad Q_{\tilde{y}} = 0, \quad Q_{\tilde{z}} = 0. \quad (19)$$

Сила R перпендикулярна к оси $C\tilde{x}$. Если построить вектор R из точки C , то он будет лежать на линии пересечения плоскости угла атаки δ с плоскостью $C\tilde{y}\tilde{z}$. Обозначим через ν угол, образованный силой R с осью $C\tilde{y}$, или, иначе, двугранный угол между плоскостью $C\tilde{x}\tilde{y}$ и плоскостью угла атаки δ (плоскостью $C\tilde{x}\tilde{z}$; см. рис. 101). В трехгранном угле $C\tilde{x}\tilde{x}_1\tilde{z}$ двугранный угол при ребре $C\tilde{x}_1$ равен

Рис. 101.

¹⁾ Эти формулы аналогичны формулам (5) и получаются из последних путем замены в них величин x , y , z , v , ψ_1 и ψ_2 соответственно на $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, P , δ_1 и δ_2 .

²⁾ Два направления мы называем «близкими», если они образуют малый угол. Если α_1 и α_2 — углы, которые образует сила P_1 с двумя близкими направлениями, то

$$P_1 \cos \alpha_1 - P_1 \cos \alpha_2 \approx 2P_1 \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \approx P_1 (\alpha_1 - \alpha_2).$$

прямоугольному, а двугранный угол при ребре $C\tilde{x}$ равен ν . Плоские углы равны δ_1 , δ_2 и δ .

Тогда ¹⁾

$$\cos \nu = \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta} \approx \frac{\delta_1}{\delta}, \quad \sin \nu = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta} \approx \frac{\delta_2}{\delta}. \quad (20)$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} R_{\tilde{x}} &= 0, \\ R_{\tilde{y}} &= R \cos \nu \approx R \frac{\delta_1}{\delta}, \\ R_{\tilde{z}} &= R \sin \nu \approx R \frac{\delta_2}{\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Но $F = P + P_1 + Q + R$. Поэтому в силу (17), (18), (19) и (21) уравнения (16а) могут быть записаны следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= P - Q, \\ mv \frac{d\psi_1}{dt} &= \left(P + \frac{R}{\delta}\right) \delta_1 + P_1 \cos(\beta_1 + \varphi), \\ mv \frac{d\psi_2}{dt} &= \left(P + \frac{R}{\delta}\right) \delta_2 + P_1 \sin(\beta_1 + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Переходим теперь к уравнениям (16б) для вращательного движения. Правая часть G_{ξ} первого из этих уравнений равна сумме проекций на ось $C\xi$ векторов-моментов M , M_1 , M_2 и $M^* + M_1^* + M_2^*$.

Аналогично определяются величины G_{η_1} и G_{ζ_1} .

Отклоняющий боковой реактивный момент M изображается вектором, лежащим в плоскости $C\eta_1\zeta_1$ и образующим с осью $C\eta_1$ угол $\frac{\pi}{2} + \beta_2 + \varphi$.

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} M_{\xi} &= 0, \\ M_{\eta_1} &= -M \sin(\beta_2 + \varphi), \\ M_{\zeta_1} &= M \cos(\beta_2 + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Вектор аэродинамического момента M_1 перпендикулярен к плоскости угла атаки δ . Он лежит в плоскости $C\eta_2\zeta_2$ (рис. 101) и образует с осью $C\eta_2$

¹⁾ В самом деле, если A , B , C — двугранные углы в трехгранном угле, а a , b , c — соответственно противолежащие плоские углы и $A = 90^\circ$, то

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}, \quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Эти формулы (они являются основными формулами для прямоугольного сферического треугольника) могут быть непосредственно получены из элементарных геометрических соображений.

угол $\frac{\pi}{2} + \nu$ в случае вращающихся ракет ($M_1 > 0$) и угол $-\frac{\pi}{2} + \nu$ в случае оперенных ракет ($M_1 < 0$).

Следовательно¹⁾, в силу формул (20)

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 0, \\ M_{1\tau_0} &= M_{1\tau_0} - M_1 \sin \nu = -M_1 \frac{\sin \delta_0}{\sin \delta} \approx -M_1 \frac{\delta_0}{\delta}, \\ M_{1\zeta_1} &= M_{1\zeta_1} - M_1 \cos \nu = M_1 \frac{\lg \delta_1}{\lg \delta} \approx M_1 \frac{\delta_1}{\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Демпфирующий экваториальный момент M_2 направлен противоположно экваториальной угловой скорости $\Omega = q_1 + r_1$ и пропорционален величине этой угловой скорости. Можно написать²⁾:

$$M_2 = \frac{M_0}{\Omega} \Omega.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} M_{2\zeta_1} &= 0, \\ M_{2\tau_0} &= \frac{M_0}{\Omega} q_1 = -\frac{M_2}{\Omega} \dot{\chi}_2, \\ M_{2\zeta_2} &= \frac{M_0}{\Omega} r_1 = \frac{M_0}{\Omega} \dot{\chi}_1. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Переходим к аксиальным моментам. Суммарный аксиальный момент $M_{ак} = M^* + M_1^* + M_2^*$ направлен по оси ракеты и измеряется величиной $M_{ак} = M^* + M_1^* + M_2^*$ (здесь сумма является алгебраической: каждый из слагаемых моментов имеет знак, зависящий от знаков факторов, входящих в его состав; см. § 70).

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} M_{ак\zeta_1} &= M^* + M_1^* + M_2^*, \\ M_{ак\tau_0} &= 0, \\ M_{ак\zeta_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Подставляя в правые части уравнений (16б) вместо G_{ζ_1} , G_{τ_0} , G_{ζ_2} соответственно суммы $M_{\zeta_1} + M_{1\zeta_1} + M_{2\zeta_1} + M_{ак\zeta_1}$ и т. д., мы, согласно

¹⁾ Угол ϵ между осями $C\tau_0$ и $C\tau_2$ является величиной второго порядка малости. Действительно,

$$\cos(\tau_2 z) = \cos \epsilon \cos(\tau_0 z) + \sin \epsilon \cos(\zeta_1 z) = \sin \epsilon \cos \gamma_2.$$

С другой стороны,

$$\cos(\tau_2 z) = -\sin \delta_1 \cos(\tilde{x} z) + \cos \delta_1 \cos(\tilde{y} z) = -\sin \tau_1 \sin \psi_2.$$

Отсюда $\sin \epsilon = -\frac{\sin \delta_1 \sin \psi_2}{\cos \chi_2}$, т. е. $\epsilon \approx -\delta_1 \psi_2$.

²⁾ Здесь $\frac{M_0}{\Omega} < 0$.

формулам (23) — (26), представим эти уравнения в виде:

$$\left. \begin{aligned} I \frac{dp}{dt} &= M^* - M_1^* + M_2^*, \\ I \frac{d^2 \gamma_2}{dt^2} - I_1 p \frac{d\gamma_1}{dt} &= M \sin(\beta_2 + \varphi) + M_1 \frac{\delta_2}{\delta} + \frac{M_2}{L} \frac{d\gamma_2}{dt}, \\ I \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} - I_1 p \frac{d\gamma_2}{dt} &= M \cos(\beta_2 + \varphi) + M_1 \frac{\delta_1}{\delta} + \frac{M_2}{L} \frac{d\gamma_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Пользуясь выражениями для аэродинамических сил и моментов (см. § 10), запишем уравнения (22) и (27) следующим образом:

$$\frac{dv}{dt} = a - nv^2, \quad (28a)$$

$$v \frac{d\beta_1}{dt} = (a - nv^2) \delta_1 + b \cos(\beta_1 + \varphi), \quad (28b)$$

$$v \frac{d\beta_2}{dt} = (a - nv^2) \delta_2 + b \sin(\beta_1 + \varphi), \quad (28b)$$

$$\frac{dp}{dt} + Avp = Fa + Bv^2, \quad (28r)$$

$$\frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} - 2fv \frac{d\gamma_2}{dt} - k_2 v \frac{d\gamma_1}{dt} \pm k_1^2 v^2 \delta_1 = \frac{M}{I} \cos(\beta_2 + \varphi), \quad (28d)$$

$$\frac{d^2 \gamma_2}{dt^2} - 2fv \frac{d\gamma_1}{dt} - k_2 v \frac{d\gamma_2}{dt} \pm k_1^2 v^2 \delta_2 = \frac{M}{I} \sin(\beta_2 + \varphi), \quad (28e)$$

где в последних двух уравнениях в символе $\pm$ верхний знак относится к случаю оперенных ракет, а нижний — к случаю вращающихся ракет. В уравнениях (28) введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{P}{m}, \quad b = \frac{P_1}{m}, \quad n = \frac{c_x S_{\Sigma}}{2m}, \\ \mu &= \frac{\frac{\partial c_y}{\partial \beta} S_{\Sigma}}{2m}, \quad k_1^2 = \frac{\left[\frac{\partial m_z}{\partial \beta} \right] S_{\Sigma} L_0}{2I}, \\ k_2 &= \frac{[m_z] S_{\Sigma} L_0^2}{I}; \quad A = \frac{[m_p] S_{\Sigma} L_0^2}{I_1}, \\ B &= \frac{m_x S_{\Sigma} L_0}{2I_1}; \quad F = \frac{\mu_1 m}{I_1}; \quad f = \frac{I_1}{2I} \frac{P}{v}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

В силу соображений, высказанных в §§ 25 и 49, будем считать коэффициенты μ , μ_1 , k_1^2 , k_2 , A , B , F постоянными величинами, заменяя в выражениях для этих коэффициентов величины m , I , I_1 , c_x их средними значениями.

§ 72. Интегрирование уравнений движения

Для интегрирования системы уравнений (28) введем и рассмотрим комплексные «углы»:

$$\Psi = \psi_1 + i\psi_2, \quad \Delta = \delta_1 + i\delta_2, \quad X = \chi_1 + i\chi_2, \quad (30)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Сложим почленно уравнения (28б) и (28и), а также уравнения (28а) и (28е), умножив предварительно обе части уравнений (28и) и (28е) на L . Полученные уравнения в обозначениях (30) запишутся следующим образом:

$$v \frac{d\Psi}{dt} = (a + i\rho^2)\Delta + b e^{i(\varphi_1 + \varphi)}, \quad (31а)$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + (k_2 - 2If) v \frac{dX}{dt} + k_1 v^2 X = \frac{M}{L} e^{i(\varphi_1 + \varphi)}. \quad (31б)$$

На уравнениях (28а) и (28е) мы сможем определить σ и ρ как функции времени t . С другой стороны [см. (9)],

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \rho. \quad (32)$$

Интегрируя, найдем s и φ как функции от t . Считая в уравнениях (31) v , ρ , φ , a и b известными функциями от времени, мы будем иметь два уравнения с тремя неизвестными функциями: Ψ (комплексное угловое отклонение), Δ (комплексный угол атаки) и X (комплексный угол поворота). Однако между Ψ , Δ и X существует простая связь, к установлению которой мы и переходим.

Возьмем на оси ξ вектор единичной длины L ($L = 1$) и спроектируем его на оси x , y , z и $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$. Тогда, полагая в формулах (5) и (17) $\sigma = 1$ и $P = 1$, будем иметь:

$$L_x = \cos \chi_1 \cos \chi_2, \quad L_y = \sin \chi_1 \cos \chi_2, \quad L_z = \sin \chi_2, \quad (33)$$

$$L_{\tilde{x}} = \cos \delta_1 \cos \delta_2, \quad L_{\tilde{y}} = \sin \delta_1 \cos \delta_2, \quad L_{\tilde{z}} = \sin \delta_2. \quad (34)$$

Исходя из разложения

$$L = L_{\tilde{x}} + i L_{\tilde{y}} + L_{\tilde{z}}$$

и проецируя слагающие $L_{\tilde{x}}$, $L_{\tilde{y}}$, $L_{\tilde{z}}$ на оси x , y , z , получим (рис. 99):

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 - \sin \delta_1 \cos \delta_2 \sin \psi_1 - \sin \delta_2 \cos \psi_1 \sin \psi_2, \\ L_y &= \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos \psi_1 - \sin \delta_2 \sin \psi_1 \sin \psi_2, \\ L_z &= \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin \psi_2 + \sin \delta_2 \cos \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Сопоставляя формулы (33) с формулами (35), получим следующие равенства, связывающие углы χ_1, χ_2 с углами $\delta_1, \delta_2, \psi_1, \psi_2$:

$$\left. \begin{aligned} \sin \chi_1 \cos \chi_2 &= \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos \psi_1 - \\ &\quad - \sin \delta_2 \sin \psi_1 \sin \psi_2, \\ \sin \chi_2 &= \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin \psi_2 + \sin \delta_2 \cos \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Заменяя в формулах (36) косинусы единицами, а синусы — углами, получим с точностью до членов третьего порядка малости:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \psi_1 + \delta_1; \\ \chi_2 &= \psi_2 + \delta_2 \end{aligned} \quad (37)$$

или в комплексной форме

$$X = \Psi + \Delta. \quad (38)$$

Пользуясь этим соотношением, мы можем в уравнениях (31) выразить одну из неизвестных функций Ψ, Δ, X через две другие. Для интегрирования системы дифференциальных уравнений (31) воспользуемся преобразованием, которое мы уже применяли в главе IV).

За новую независимую переменную примем путь s , а за новую неизвестную функцию — величину

$$U = v\Delta. \quad (39)$$

Подставляя в уравнение (31а) вместо $\frac{d\Psi}{dt}$ разность $\frac{dX}{dt} - \frac{d\Delta}{dt}$, а вместо a — сумму $\frac{dv}{dt} + nv^2$ и деля обе части уравнения на v , найдем:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dU}{ds} + (\mu + n)U + \frac{b}{v} e^{i(\beta_1 + \varphi)}. \quad (40)$$

Продифференцируем это равенство почленно по s :

$$\frac{1}{v} \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{d^2 U}{ds^2} + (\mu + n) \frac{dU}{ds} + \frac{d}{ds} \left[\frac{b}{v} e^{i(\beta_1 + \varphi)} \right]. \quad (41)$$

Разделив обе части уравнения (31б) на v и заменив $\frac{dX}{dt}$ и $\frac{d^2 X}{dt^2}$ их выражениями из (40) и (41), получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 U}{ds^2} + 2h \frac{dU}{ds} \pm k^2 U = D(s), \quad (42)$$

где

$$2h = k_2 + \mu + n - 2if, \quad k^2 = k_1^2 \pm (k_2 - 2if)(\mu + n), \quad (43)$$

$$D(s) = \frac{M}{Iv} e^{i(\beta_1 + \varphi)} - \frac{d}{ds} \left[\frac{b}{v} e^{i(\beta_1 + \varphi)} \right] - \frac{b}{v} (k_2 - 2if) e^{i(\beta_1 + \varphi)} {}^1). \quad (44)$$

Это линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка мы должны проинтегрировать при начальных условиях:

$$(U)_{s=s_0} = U_0, \quad \left(\frac{dU}{ds} \right)_{s=s_0} = U'_0. \quad (45)$$

Величины U_0 и U'_0 легко выражаются через начальные углы и начальные угловые скорости:

$$X_0 = \chi_{10} + i\chi_{20}, \quad \Psi_0 = \psi_{10} + i\psi_{20}, \quad \dot{X}_0 = \dot{\chi}_{10} + i\dot{\chi}_{20}.$$

Действительно,

$$U_0 = v_0 \Delta_0 = v_0 (X_0 - \Psi_0); \quad (46a)$$

с другой стороны, из выражения (40) следует:

$$U'_0 = \dot{X}_0 - (\mu + n) v_0 (X_0 - \Psi_0) - \frac{b_0}{v_0} e^{i(\beta_1 + \varphi)}. \quad (46b)$$

Определив U , мы найдем $\Delta = \frac{U}{v}$, а затем Ψ из формулы

$$\frac{d\Psi}{ds} = \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \Delta + \frac{b}{v^2} e^{i(\beta_1 + \varphi)}. \quad (47)$$

Эту формулу мы получили, разделив обе части уравнения (31a) на v^2 . Таким образом, задача определения функций $\Psi(s)$ и $\Delta(s)$ свелась к интегрированию линейного дифференциального уравнения 2-го порядка (42).

Из выражения (47) находим:

$$\Psi = \int_{s_0}^s \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \Delta ds + \int_{s_1}^s \frac{b}{v^2} e^{i(\beta_1 + \varphi)} ds + \Psi_0. \quad (48)$$

Обозначая индексами M , P_1 , X_0 , $\dot{X}_0$ соответственно члены, зависящие от этих возмущающих факторов, и полагая в выражениях (46) и (48) угол $\Psi_0 = 0$, мы сможем написать в силу линейности уравнения (42) и структуры его правой части (44):

$$U = U_M + U_{P_1} + U_{X_0} + U_{\dot{X}_0}$$

¹⁾ Напомним, что в символе $\pm$ верхний знак $+$ следует брать в случае оперенной ракеты, а нижний — в случае вращающейся.

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \Delta_M + \Delta_{P_1} + \Delta_{X_0} + \Delta_{\dot{X}_0}, \\
 \Psi &= \Psi_M + \Psi_{P_1} + \Psi_{X_0} + \Psi_{\dot{X}_0}, \\
 \Delta_M &= \frac{U_M}{v}, \quad \Psi_M = \int_{s_0}^s \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \Delta_M ds, \\
 \Delta_{P_1} &= \frac{U_{P_1}}{v}, \quad \Psi_{P_1} = \int_{s_0}^s \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \Delta_{P_1} ds + \int_{s_0}^s \frac{b}{v^2} e^{i(\beta_1 + \varphi)} ds, \\
 \Delta_{X_0} &= \frac{U_{X_0}}{v}, \quad \Psi_{X_0} = \int_{s_0}^s \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \Delta_{X_0} ds, \\
 \Delta_{\dot{X}_0} &= \frac{U_{\dot{X}_0}}{v}, \quad \Psi_{\dot{X}_0} = \int_{s_0}^s \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \Delta_{\dot{X}_0} ds.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Считая Ψ_M , Ψ_{P_1} , Ψ_{X_0} , $\Psi_{\dot{X}_0}$ независимыми друг от друга случайными векторами в комплексной плоскости, подчиненными гауссовым законам распределения с круговой симметрией, и отмечая чертой вероятные значения случайных векторов, будем иметь:

$$\overline{\Psi} = \sqrt{\overline{\Psi}_M^2 + \overline{\Psi}_{P_1}^2 + \overline{\Psi}_{X_0}^2 + \overline{\Psi}_{\dot{X}_0}^2}. \tag{50}$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда во время горения заряда

$$d = \frac{M}{P} = \text{const}, \quad D = \frac{P_1}{P} = \text{const}, \quad \beta_2 = \text{const}. \tag{51}$$

Тогда

$$\Psi_M = d e^{i\beta_2} \Psi_M^*; \quad \Psi_{P_1} = D e^{i\beta_1} \Psi_{P_1}^*. \tag{52a}$$

Кроме того, всегда

$$\Psi_{X_0} = X_0 \Psi_{X_0}^*; \quad \Psi_{\dot{X}_0} = \dot{X}_0 \Psi_{\dot{X}_0}^*. \tag{52b}$$

Здесь Ψ_M^* , $\Psi_{P_1}^*$, $\Psi_{X_0}^*$ и $\Psi_{\dot{X}_0}^*$ — детерминированные (неслучайные) комплексные величины, а $d e^{i\beta_2}$, $D e^{i\beta_1}$, X_0 , $\dot{X}_0$ — комплексные случайные векторы, подчиненные гауссовым законам с круговой симметрией, с вероятными значениями $\overline{d}$, $\overline{D}$, $\overline{X}_0$, $\overline{\dot{X}_0}$ (см. § 20) ¹⁾.

¹⁾ Заметим, что $\overline{D} = \frac{\overline{P_1}}{P}$.

Первое из равенств (52a) показывает, что случайный вектор Ψ_M получается из случайного вектора $de^{i\beta}$ умножением на $|\Psi_M^*|$ и поворотом на угол, равный $\arg \Psi_M^*$. Поэтому

$$\bar{\Psi}_M = \bar{d} |\Psi_M^*|. \quad (53a)$$

Совершенно аналогично

$$\bar{\Psi}_{P_1} = \bar{D} |\Psi_{P_1}^*|, \quad \bar{\Psi}_{X_0} = \bar{X}_0 |\Psi_{X_0}^*|, \quad \bar{\Psi}_{\dot{X}_0} = \bar{\dot{X}}_0 |\Psi_{\dot{X}_0}^*|. \quad (53b)$$

Таким образом, для определения углового разброса, вызванного возмущающими факторами M , P_1 , X_0 и $\dot{X}_0$, необходимо вычислить модули комплексных величин Ψ_M^* , $\Psi_{P_1}^*$, $\Psi_{X_0}^*$ и $\Psi_{\dot{X}_0}^*$. Уравнения (49) сводят вычисления этих величин к квадратурам и к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (42).

§ 73. Вращающиеся ракеты

В случае вращающихся ракет можно пренебречь аксиальным демпфирующим моментом M_2^* по сравнению с основным аксиальным реактивным моментом M^* . Замечая, что в рассматриваемом случае и $M_1^* = 0$, мы в уравнении (28г) можем положить $A = 0$, $B = 0$, после чего уравнение примет вид

$$\frac{dp}{dt} = Fa. \quad (54)$$

Это уравнение описывает вращение ракеты вокруг своей оси на активном участке траектории после схода ракеты с направляющей. При движении ракеты по направляющей на ракету действует дополнительно момент трения. Однако величина этого момента мала по сравнению с аксиальным реактивным моментом M^* . Поэтому можно пренебречь моментом трения и считать, что уравнение (54) описывает вращение ракеты и при движении его на направляющей.

С другой стороны, в уравнении (28a) можно пренебречь членом $-nv^2$, зависящим от лобового сопротивления ¹⁾. Тогда

$$\frac{dv}{dt} = a. \quad (55)$$

Из уравнений (54) и (55) найдем $\frac{dp}{dv} = F$. Отсюда

$$p = Fv \quad (56)$$

¹⁾ Это верно для полевых ракет со сравнительно небольшим относительным весом ракетного заряда (см. § 13). Для авиационных ракет членом $-nv^2$ пренебречь нельзя из-за большой скорости современных самолетов.

и, следовательно,

$$f = \frac{I_1 F}{2I} \approx \text{const}^1). \quad (57)$$

Таким образом, можно считать, что в случае вращающихся ракет основное дифференциальное уравнение (42) имеет постоянные коэффициенты h и k .

§ 74. Невращающиеся оперенные ракеты

В этом случае $M^* = M_1^* = M_2^* = 0$ и, следовательно, $p = 0$, $\varphi = 0$, $f = 0$. Поэтому уравнение (42) в силу формул (43) является линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Допустим теперь, что плоскость пары с моментом M неизменно связана с корпусом ракеты ($\beta_2 = \text{const}$). Аналогичное допущение сделаем относительно плоскости, проходящей через ось ракеты и силу P_1 ($\beta_1 = \text{const}$). Не нарушая общности окончательных выводов²⁾, мы можем считать (при вычислении вероятных отклонений), что пара с моментом M , боковая реактивная сила P_1 и начальные возмущения лежат в одной плоскости, неизменно связанной с корпусом ракеты. Эта плоскость будет неподвижной, и в ней будет лежать траектория центра тяжести ракеты. Примем эту плоскость за плоскость Oxy . Тогда

$$\psi_2 = \delta_2 = \chi_2 = 0, \quad \beta_1 = \pi, \quad \beta_2 = 0, \\ \Psi = \psi_1 = \psi, \quad \Delta = \delta_1 = \delta, \quad X = \chi_1 = \chi, \quad U = v\delta = u,$$

и уравнения (42) и (47) можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + 2h \frac{du}{ds} + k^2 u = \frac{M}{Iv} + \frac{d}{ds} \left(\frac{b}{v} \right) + \frac{k_2 b}{v} \quad (58a)$$

и

$$\frac{d\psi}{ds} = \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \delta - \frac{b}{v^2}, \quad (58b)$$

где

$$2h = k_2 + \mu + n, \quad k^2 = k_1^2 + k_2(\mu + n). \quad (59)$$

¹⁾ При этом мы предполагаем, что в момент начала горения ракетного заряда $p_n = 0$ и $v_n = 0$. Для авиационных и оружейно-реактивных вращающихся ракет $v_n \neq 0$ и вместо (56) имеем для них соотношения:

$$p = F(v - v_n) \quad \text{и} \quad f \neq \text{const}.$$

²⁾ Поскольку мы каждый из компонентов ψ_M , ψ_{P_1} , ψ_{χ_0} и ψ_{χ_0} рассматриваем в отдельности (см. § 72).

Мы пришли к уравнениям, которые были получены нами при рассмотрении плоскопараллельного движения оперенной ракеты ¹⁾.

Уравнения (42) и (47) позволяют рассмотреть и более общий случай, когда, например, плоскость отклоняющей реактивной пары не является неизменной относительно корпуса ракеты. В этом случае по-прежнему $\varphi = 0$, $f = 0$.

Пусть при этом $P_1 = 0$ и, следовательно, $b = 0$. Тогда уравнения (42) и (47) могут быть записаны в виде

$$\frac{d^2 U}{ds^2} + 2h \frac{dU}{ds} + k^2 U = \frac{ad \cdot e^{i\beta_2}}{x^2 v(s)}, \quad (60)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \Delta, \quad \Delta = \frac{U}{v}, \quad (61)$$

где $d = \frac{M}{P}$ — эксцентриситет реактивной силы.

Полагая $U = u_1 + iu_2$, где $u_1 = v\delta_1$ и $u_2 = v\delta_2$, мы заменим комплексное уравнение (60) двумя действительными:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{ds^2} + 2h \frac{du_1}{ds} + k^2 u_1 &= \frac{ad \cdot \cos \beta_2}{x^2 v(s)}, \\ \frac{d^2 u_2}{ds^2} + 2h \frac{du_2}{ds} + k^2 u_2 &= \frac{ad \cdot \sin \beta_2}{x^2 v(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Определив u_1 , u_2 , найдем δ_1 , δ_2 и ψ_1 , ψ_2 из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{u_1}{v}, & \delta_2 &= \frac{u_2}{v}, \\ \psi_1 &= \int_{s_0}^s \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \delta_1 ds, & \psi_2 &= \int_{s_0}^s \left(\frac{a}{v^2} + \mu \right) \delta_2 ds. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

В рассмотренном случае мы свели пространственную задачу к двум плоским задачам с эксцентриситетами $d \cos \beta_2$, $d \sin \beta_2$.

§ 75. Проворачивающиеся оперенные ракеты

Переходя к рассмотрению проворачивающихся оперенных ракет, будем предполагать, что отклоняющая пара, имеющая момент M , и боковая реактивная сила P_1 лежат в одной плоскости, которая неизменно связана с корпусом ракеты: $\beta_2 = \text{const}$, $\beta_1 = \beta_2 + \pi$. Кроме того, будем полагать $d = \text{const}$.

В § 43 было выяснено, что, полагая для невращающихся оперенных ракет $2h = k_2 + \mu + n \approx 0$, получаем достаточно хорошее приближение. Для проворачивающихся оперенных ракет

$$2h = k_2 + \mu + n - 2if.$$

¹⁾ См. § 25.

Зависимость коэффициента f от s определим, проинтегрировав уравнения (28а) и (28г). На рис. 102 приведен график функции $f(s)$ для одного из вариантов проворачивающихся ракет. Мы видим, что величина $2f$ того же порядка, что и $k_2 + \mu + n$.

Для оценки влияния члена $2h \frac{dU}{ds}$ на угловое отклонение проворачивающихся оперенных ракет воспользуемся методом последовательных приближений. Для этого представим уравнение (42) в виде

$$\frac{d^2 U}{ds^2} + k^2 U = D(s) - 2h \frac{dU}{ds}. \quad (64)$$

Для получения первого приближения U_I в уравнении (64) положим $h=0$. Затем в правой части уравнения (64) заменим U на U_I и в результате интегрирования полученного уравнения найдем второе приближение U_{II} .

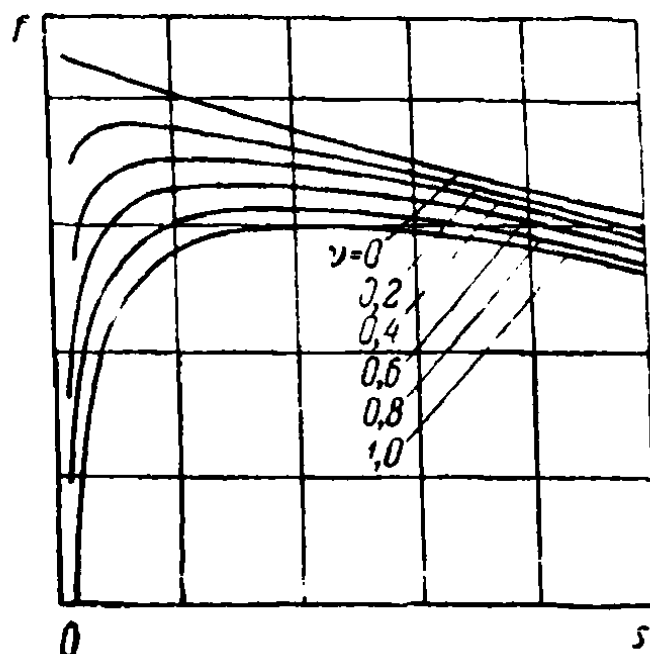


Рис. 102.

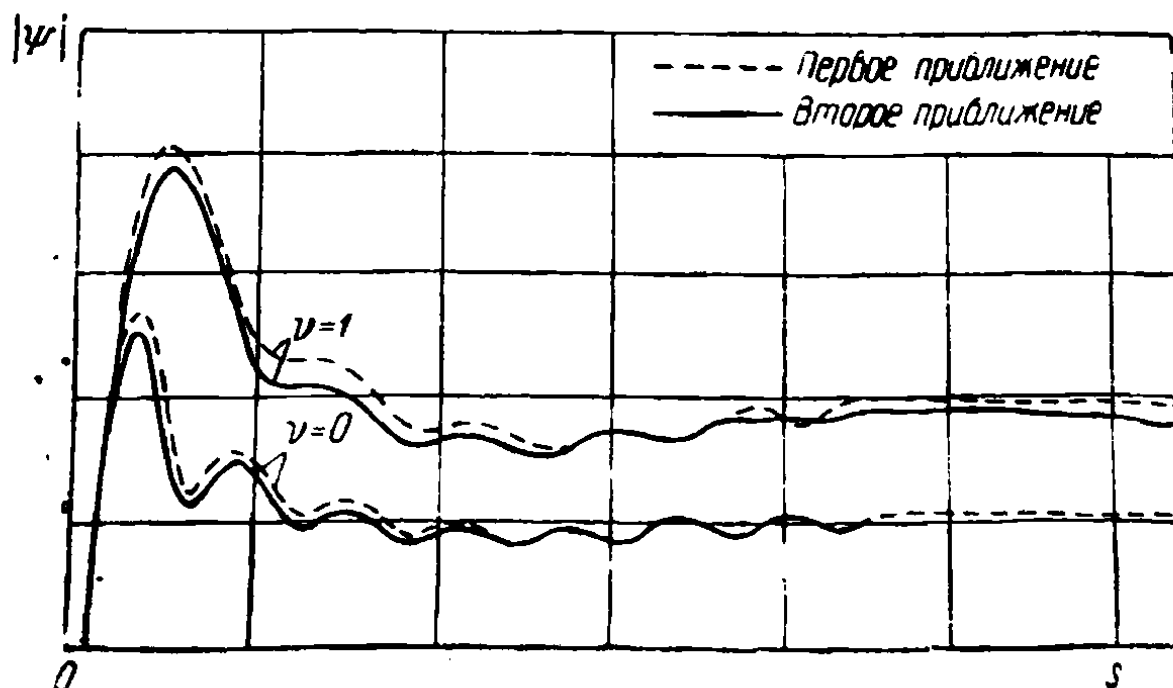


Рис. 103.

Продолжая этот процесс, мы получим следующие уравнения для определения последовательных приближений U_I , U_{II} , U_{III} :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 U_I}{ds^2} + k^2 U_I &= D(s), \\ \frac{d^2 U_{II}}{ds^2} + k^2 U_{II} &= D(s) - 2h \frac{dU_I}{ds}, \\ \frac{d^2 U_{III}}{ds^2} + k^2 U_{III} &= D(s) - 2h \frac{dU_{II}}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Были проведены расчеты величин U_I , U_{II} и связанных с ними величин Ψ_I , Ψ_{II} . Эти расчеты показали, что $|\Psi_{II}(s)|$ отличается от $|\Psi_I(s)|$ не более чем на 6% (рис. 103). Таким образом, и для проворачивающихся ракет можно в уравнении (42) положить $h = 0$ ¹⁾.

Следовательно, вычисляя угловой разброс, вызванный боковым моментом M (при $P_1 = 0$, $Q = 0$, $R = 0$), при допущении $d = \text{const}$ можно исходить из уравнений

$$\frac{d^2 U}{ds^2} + k^2 U = \frac{ade^{i(\beta_2 + \varphi)}}{v^2(s)}, \quad (66)$$

$$\Delta = \frac{U}{v(s)}, \quad \frac{d\Psi}{ds} = \frac{a}{v^2} \Delta. \quad (67)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (60) и (61) предыдущего параграфа, если в последних положить $k_2 = \mu = n = 0$ и заменить β_2 на $\beta_2 + \varphi$ [здесь $\beta_2 = \text{const}$, а φ определяется из дифференциального уравнения (28г)]. Следовательно, задача сводится к решению двух плоских задач с эксцентриситетами $d \cos(\beta_2 + \varphi)$ и $d \sin(\beta_2 + \varphi)$ (см. предыдущий параграф). Именно в такой постановке и проводилось исследование рассеивания проворачивающихся оперенных ракет в главе V. Таким образом, пренебрежение гироскопическим членом приводит нас к приближенным методам расчета, рассмотренным в главе V. Допустимость такого пренебрежения подтверждается, как было отмечено выше, конкретными расчетами и объясняется малостью величины угловой скорости вращения у проворачивающихся оперенных ракет.

¹⁾ То есть можно пренебречь в уравнении (42) демпфирующим и гироскопическим членами $(k_2 + \mu + n) \frac{dU}{ds}$ и $-2lf \frac{dU}{ds}$.

ГЛАВА VIII

ВРАЩАЮЩИЕСЯ РАКЕТЫ¹⁾

§ 76. Критерии правильности полета вращающихся ракет на пассивном участке

На пассивном участке вращающиеся ракеты ничем не отличаются от обычных вращающихся артиллерийских снарядов. Поэтому критерии правильности полета вращающихся ракет на пассивном участке совпадают с критериями правильности полета артиллерийского снаряда, которые мы и рассмотрим в настоящем параграфе.

Напомним физическую картину явлений, происходящих при движении артиллерийского снаряда. У артиллерийских снарядов центр давления расположен впереди центра тяжести снаряда (см. Приложение II, § 6). Если при движении таких снарядов возникает угол атаки, то при этом появляется экваториальный аэродинамический момент M_1 (или M_2), стремящийся опрокинуть снаряд (т. е. увеличить абсолютное значение угла атаки).

Для того чтобы предотвратить кувыркание снаряда под действием момента M_1 , снаряду придают быстрое вращение вокруг оси симметрии. Тогда снаряд не кувыркается. При соблюдении известных условий полет такого снаряда не сопровождается появлением больших углов атаки.

Способность вращающегося снаряда сопротивляться внешним силам, стремящимся изменить направление его оси, носит название *гироскопической устойчивости* снаряда. Устойчивость движения вращающегося снаряда (малые углы атаки) аналогична устойчивости движения обычного волчка, на который, подобно опрокидывающему моменту M_1 , действующему на снаряд, действует опрокидывающий момент силы тяжести (центр тяжести волчка лежит выше точки опоры, см. рис. 104).

Под влиянием этого опрокидывающего момента волчок совершает прецессионное движение, при котором вертикальная плоскость, проходящая через ось волчка, поворачивается вокруг вертикали AB ,

¹⁾ В артиллерии вращающиеся реактивные снаряды называются турбореактивными снарядами.

проходящей через точку опоры волчка. Этому явлению у снаряда соответствует прецессионное движение плоскости угла атаки, так как в этом случае вертикали AB соответствует направление касательной к траектории. Далее, чем больше для данного волчка расстояние AC между центром тяжести волчка и опорой, тем большую угловую скорость нужно придать волчку, чтобы его движение было устойчивым (чтобы он не опрокидывался). Соответственно этому, снаряду

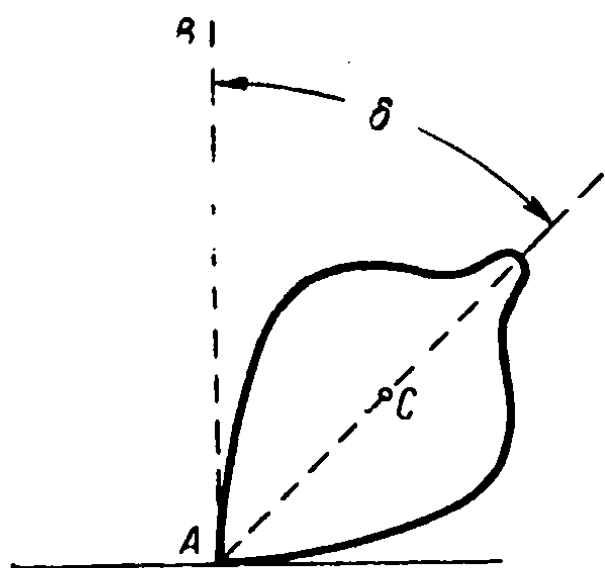


Рис. 104

нужно придать тем большую угловую скорость, чем больше скорость снаряда и чем больше коэффициент $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ (напомним, что опрокидывающий момент M_1 пропорционален $v^2 \frac{\partial m_z}{\partial \delta}$).

Для установления критерия гироскопической устойчивости артиллерийского снаряда (или вращающейся ракеты) рассмотрим частный случай его движения при стрельбе вертикально вверх. Уравнения движения такого полета мы можем получить из уравнений (28а) и (31) главы VII, положив

в них все реактивные силы и моменты равными нулю и дополнительно учитывая силу тяжести. При этом получим¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -nv^2 - g, \\ v \frac{d\psi}{dt} &= \mu v^2 \Delta, \\ \frac{d^2 X}{dt^2} - 2ifv \frac{dX}{dt} - k^2 v^2 \Delta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В рассматриваемом случае вертикальной стрельбы мы можем считать траекторию снаряда прямой линией, так как искривление траектории $\frac{d\psi}{dt}$ вызывается только подъемной силой и поэтому очень мало. Таким образом, мы можем положить $\psi \approx 0$ и, следовательно, $X \approx \Delta$. Тогда последнее уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} - 2ifv \frac{d\Delta}{dt} - k^2 v^2 \Delta = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим движение снаряда на некотором коротком участке траектории, на котором можно считать скорость v почти постоянной.

¹⁾ Во втором уравнении мы пренебрегаем искривлением траектории, вызываемым силой тяжести.

Перейдя от переменной t к переменной s ($ds = v dt$), найдем:

$$\frac{d^2\Delta}{ds^2} - 2if \frac{d\Delta}{ds} - k^2\Delta = 0, \quad (3)$$

где

$$f = \frac{1}{2} \frac{I_1 \rho}{I v}; \quad k^2 = \frac{\rho S_m \left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right| L_0}{2I}. \quad (4)$$

При этом коэффициенты f и k тоже будут постоянными, и установление критерия устойчивости движения снаряда сводится к исследованию решения линейного дифференциального уравнения (3) с постоянными коэффициентами (4). Будем искать решение этого уравнения в виде $\Delta = Ce^{\lambda s}$. Тогда λ должно удовлетворять характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - 2if\lambda - k^2 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda = if \pm \sqrt{-f^2 + k^2} = if(1 \pm \sigma), \quad (5)$$

где

$$\sigma^2 = 1 - \frac{k^2}{f^2}. \quad (6)$$

Решение уравнения (3) принимает вид

$$\Delta = C_1 e^{if(1+\sigma)s} + C_2 e^{if(1-\sigma)s}. \quad (7)$$

Это решение будет выражаться через тригонометрические функции в случае, когда σ представляет собой действительное число (т. е. когда $\sigma^2 > 0$). Если $\sigma^2 < 0$, то σ принимает чисто мнимое значение и тогда решение (7) можно записать в виде

$$\Delta = e^{ifs} [C_1 e^{f|\sigma|s} + C_2 e^{-f|\sigma|s}]. \quad (8)$$

В первом случае модуль угла Δ будет ограничен¹⁾, во втором случае первое слагаемое выражения (8), а следовательно, и модуль угла Δ будут неограниченно возрастать. Поэтому для правильного полета снаряда, при котором не возникает кувыркание, необходимо, чтобы соблюдалось неравенство

$$\sigma^2 = 1 - \frac{k^2}{f^2} > 0. \quad (9)$$

Это неравенство (9) носит название *условия гироскопической устойчивости снаряда*.

Более подробные исследования показывают, что и в общем случае (т. е. не только в случае вертикального полета) для правильности полета снаряда на всей траектории должно соблюдаться

¹⁾ Он будет равен $C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cos 2f\sigma$.

неравенство (9). Величина k , входящая в условие гироскопической устойчивости (9), обычно изменяется на траектории слабо (из-за слабого изменения $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ при изменении скорости). Точно так же не очень велико и уменьшение угловой скорости p во время полета. В то же время скорость v изменяется на траектории очень значительно. Это приводит к тому, что величина $f = \frac{1}{2} \frac{I_1 p}{I v}$ имеет свое наименьшее значение в самом начале полета снаряда, где скорость v максимальна. Соответственно этому величина σ^2 тоже имеет наименьшее значение в начале полета. Поэтому, удовлетворив условию (9) в начале полета (в начале пассивного участка вращающейся ракеты), мы тем самым удовлетворим условию гироскопической устойчивости и на всей последующей части траектории (на всем пассивном участке).

Для данного снаряда, обладающего вполне определенным значением коэффициента k , всегда можно удовлетворить неравенству (9), придавая снаряду очень большую угловую скорость p (увеличение p увеличивает f). Однако по техническим причинам не всегда возможно придать снаряду такую большую угловую скорость, при которой будет удовлетворяться соотношение (9). Это приводит к ограничению относительной длины снаряда (длины снаряда, выраженной в калибрах).

Действительно, у артиллерийских снарядов величина $\frac{k^2}{f^2} \sim$ (пропорциональна) $\frac{\partial m_z}{\partial \delta} x^2$ ¹⁾, поэтому она растет с увеличением относительной длины снаряда, так как при таком увеличении растут радиус инерции x и расстояние между центром давления и центром тяжести (у волчка это соответствует увеличению длины ножки волчка AC ; см. рис. 104). Поэтому для длинных снарядов условию (9) можно удовлетворить только при очень больших значениях угловых скоростей p , т. е. когда стволы орудий имеют очень малый шаг нарезки. Однако по условиям, связанным с вопросами прочности конструкции, невозможно понижать шаг нарезки ниже известного предела. В силу этого обстоятельства длина артиллерийских снарядов не превышает обычно 5—5,5 калибра.

Подчеркнем, что последний факт не имеет принципиального значения. Действительно, в середине прошлого века Витворту удалось сконструировать так называемые полигональные снаряды, по всей поверхности которых были нарезки, соответствующие нарезам ствола. При этом был достигнут правильный полет снарядов длиной до 10 калибров. В 1918 г. Шарбонье повторил опыты Витворта и по-

¹⁾ Напомним, что $k^2 \sim \frac{\partial m_z}{\partial \delta} x^{-2}$, а $f \sim x^{-2}$, поэтому $\frac{k^2}{f^2} \sim \frac{\partial m_z}{\partial \delta} x^2$, где x — радиус экваториального момента инерции.

лучил хорошие результаты для снарядов длиной до 9,5 калибра. Однако такие снаряды, по-видимому, из-за сложности изготовления, не привились в артиллерийской практике.

У устойчивого снаряда коэффициент σ может принимать значения от 0 до 1. Однако очень большое значение σ (близкое к 1) вредно сказывается на полете снаряда. Так, например, если бы σ было равно 1, то ось снаряда за все время полета сохраняла бы свое первоначальное направление, полученное при вылете из ствола орудия¹⁾. При этом в полете возникали бы большие углы атаки. Аналогичное явление возникает и тогда, когда величина σ близка к единице.

Исследование движения снаряда показывает, что под влиянием опрокидывающего момента M_1 ось снаряда прецессирует вокруг так называемой динамической оси²⁾.

У правильно сконструированного снаряда динамическая ось близка по своему направлению к касательной к траектории. Угол между динамической осью и касательной к траектории (δ_p) в первом приближении можно считать равным

$$\delta_p = 2 \frac{f}{k^2} \frac{g \cos \theta}{v^2}. \quad (10)$$

Равенство (10) означает, что среднее значение угла атаки (среднее за период прецессии) равно δ_p . Угол δ_p тем больше, чем больше f и чем меньше k^2 , v и θ . Отсюда вытекает, что наибольшего значения угол δ_p достигает вблизи вершины траектории, где скорость v , угол θ и $k^2 \sim \rho$ принимают наименьшее значение. При конструировании снаряда добиваются, чтобы углы δ_p и связанные с ними углы атаки были невелики.

Таким образом, при конструировании артиллерийского снаряда (и вращающейся ракеты) необходимо добиваться, чтобы в начале полета (в начале пассивного участка) выполнялось условие (9), а на

¹⁾ Такой снаряд обладал бы абсолютной гироскопической устойчивостью. Его ось при полете не меняла бы своего направления. Равенство $\sigma = 1$ выполняется в каждом из следующих трех случаев: а) бесконечно большая угловая скорость ρ ($f = \infty$); б) совпадение центра тяжести и центра давления ($\frac{\partial m_s}{\partial \delta} = k = 0$); в) движение в безвоздушном пространстве ($k = 0$).

²⁾ Плоскость, содержащая касательную и динамическую ось, почти перпендикулярна к вертикальной плоскости, проходящей через касательную к траектории. Для снарядов, имеющих правое вращение, динамическая ось лежит справа (если смотреть по полету) от плоскости полета (при левом вращении, наоборот, — ось лежит слева от плоскости полета). Это обстоятельство вызывает появление подъемной силы, направленной вправо (влево) по отношению к плоскости полета. Отклонение снаряда вправо (влево) под действием этой силы носит название *деривации*.

вершине траектории угол δ_{ps} был мал ¹⁾. Эти требования противоречивы. Если для удовлетворения первого из них нужно стремиться увеличить f (т. е. $\frac{P_a}{v_a} \frac{I_1}{I}$) и уменьшить k^2 (т. е. $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$), то для выполнения второго требования нужно уменьшать f и увеличивать k^2 .

Так как начальная скорость снаряда (v_0) или скорость вращающейся ракеты в начале пассивного участка (v_a) определяются дальностью снаряда, то в руках конструктора остается возможность изменять лишь отношение $\frac{I_1}{I}$ моментов инерции, крутизну нарезки орудия (или γ — угол наклона сопел вращающихся ракет) и, наконец, коэффициент $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$. Особенно легко конструктор может увеличивать величину $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ снаряда, навинчивая на головную часть пустотелый баллистический наконечник. Пользуясь тем, что в σ коэффициенты f и k входят в комбинации $\frac{k^2}{f^2}$, а в δ_p — в комбинации $\frac{f}{k^2}$, конструктор может путем соответствующего изменения f и k добиться удовлетворения обоих требований.

Оба критерия правильности полета артиллерийского снаряда, изложенные выше, носят все же не вполне определенный характер. Однако трудно указать более точные границы величин σ_a и δ_{ps} , так как экспериментальные данные для аэродинамических характеристик снарядов весьма скудны.

Обычно принято считать, что для правильного полета снаряда необходимо удовлетворить условиям ²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= 1 - \frac{k_a^2}{f_a^2} = 0,66, \\ \delta_{ps} &= \frac{2f_s}{k_s^2} \frac{g}{v_s^2} < 2 \div 4^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Выразим величины σ_a и δ_{ps} для вращающейся ракеты через ее конструктивные параметры.

Для вращающейся ракеты на активном участке имеет место соотношение (см. § 48 и 73):

$$p = Fv = \frac{\mu_1 m}{I_1} v = \frac{u}{u_e} \frac{r \lg \gamma}{x_1^2} v,$$

где γ — угол наклона сопел к оси ракеты, r — расстояние между осью ракеты и осями сопел коллектора, x_1 — радиус аксиального

¹⁾ Индексом s в баллистике обычно обозначают элементы траектории на вершине (например, v_s , x_s и т. д.).

²⁾ Значение $\sigma = 0,66$ соответствует принимаемому обычно значению коэффициента запаса устойчивости 0,75 (см. [7], § 124).

момента инерции, u и u_e — соответственно простая и эффективная скорости истечения газа.

Поэтому в конце активного участка

$$p_a = \frac{u}{u_e} \frac{r \operatorname{tg} \gamma}{x_1^2} v_a.$$

Далее,

$$1 - \sigma_a^2 = \frac{k_a^2}{f_a^2} = \frac{\rho_a S_M \left(\frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right)_a L_0}{2m\lambda^2} : \frac{x_1^4 p_a^2}{4x^4 v_a^2}$$

или

$$1 - \sigma_a^2 = \frac{2\rho_a S_M x^2}{m} \left(\frac{u_e}{u} \right)^2 \frac{\left(\frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right)_a L_0}{r^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}. \quad (12)$$

Аналогично

$$\delta_{ps} = \frac{2f_s g}{k_s^2 v_s^2} = \frac{2mgv_a}{\rho_s S_M v_s^3} \frac{u}{u_e} \frac{r \operatorname{tg} \gamma}{\left(\frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right)_s L_0} {}^1). \quad (13)$$

Уравнение (12) можно представить еще и в таком виде²⁾:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2x^2 k}{r \sqrt{1 - \sigma_a^2}} \frac{u_e}{u} \quad (14)$$

или

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1,38}{\sqrt{1 - \sigma_a^2}} \frac{x d}{r} \frac{u_e}{u} \sqrt{\frac{\frac{\partial m_z}{\partial \delta} L_0}{q_a}}, \quad (14')$$

где d — диаметр мишелевого сечения ракеты.

При $\sigma_a = 0,66$ формула (14') примет вид

$$\operatorname{tg} \gamma = 2,67 \frac{x^2 k}{r} \cdot \frac{u_e}{u} = 1,84 \frac{x d}{r} \frac{u_e}{u} \sqrt{\frac{\frac{\partial m_z}{\partial \delta} L_0}{q_a}}. \quad (15)$$

Для нахождения угла наклона γ , необходимого для обеспечения достаточной гироскопической устойчивости вращающейся ракеты, можно пользоваться уравнениями (14) и (15). Однако для этих вычислений необходимо знать величину коэффициента $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ ракеты. Этот коэффициент должен быть получен из испытаний ракеты в аэродинамической трубе или на специальных баллистических трассах.

¹⁾ В равенстве (13) сделано предположение, что $p_s \approx p_a$. Это допущение вытекает из того, что при полете вращающейся ракеты на пассивном участке угловая скорость p убывает очень медленно (см. [7], § 119).

²⁾ При выводе соотношения (14') было положено $\Pi_a = \Pi_{0\lambda} = 1,206 \text{ кг/м}^3$. В этом уравнении все величины должны быть выражены в технической системе единиц.

Для ракет оживальной формы можно указать формулы, позволяющие установить связь между коэффициентом $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ ракеты и ее конструктивными параметрами. Эти формулы получены в результате обработки специальных отстрелов артиллерийских снарядов по картонным щитам. Поэтому и применять эти формулы можно лишь для ракет, близких по форме к гранате калибра 76 мм (длиной около четырех калибров), для которой были получены приводимые ниже зависимости.

В баллистике принято выражать аэродинамический экваториальный момент M_1 в виде

$$M_1 = \frac{d^2 h}{g} \cdot 10^3 H(y) v^2 K_M \delta, \quad (16)$$

где h — расстояние от центра давления до центра тяжести ракеты, K_M — некоторая функция числа Маха M , характеризующая зависимость момента M_1 от числа M . Сравнивая выражение (16) с обычным в аэродинамике выражением момента M_1 ,

$$M_1 = \frac{\rho v^2}{2} S_m L_0 \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \delta,$$

получим:

$$K_M = 4,74 \cdot 10^{-4} \frac{\frac{\partial m_z}{\partial \delta}}{h} \cdot L_0 \approx 4,74 \cdot 10^{-4} \frac{\partial c_y}{\partial \delta}. \quad (17)$$

Для нахождения величины h в баллистике рекомендуется пользоваться различными эмпирическими формулами. В частности, величину h можно подсчитать по формуле:

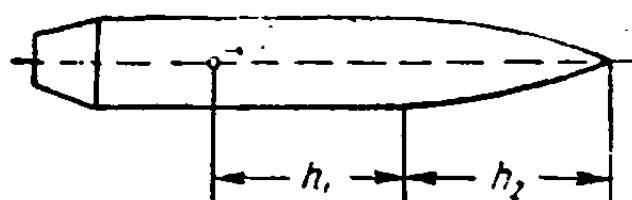


Рис. 105.

$$h = h_1 + 0,57 h_2 - 0,16 d, \quad (18)$$

где h_1 — расстояние центра тяжести от основания оживала, h_2 — высота головной части снаряда (рис. 105).

Для нахождения функции K_M можно рекомендовать помещенную ниже таблицу, составленную Д. А. Вентцелем на основании обработки результатов стрельб по щитам ([7], § 124).

v м/сек	$10^3 K_M$ кг·м	v м/сек	$10^3 K_M$ кг/м ³	v м/сек	$10^3 K_M$ кг/м ³
0—200	0,97	400	1,39	750	1,33
250	1,00	450	1,39	800	1,32
275	1,05	500	1,38	850	1,31
300	1,13	550	1,37	900	1,31
325	1,24	600	1,35	950	1,31
350	1,32	650	1,34	1000	1,30
375	1,36	700	1,33	1050	1,30
400	1,39	750	1,33	1100	1,30

При пользовании формулами (16), (18) и таблицей для $K_M(v)$ нужно в формулах (14') и (15) выразить $\frac{\partial m_z}{\partial \delta} L_0$ через h и K_M . Тогда получим вместо (14)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{63,5}{\sqrt{1-\sigma_a^2}} \frac{x}{r} \frac{d}{u} \frac{u_e}{u} \sqrt{\frac{K_M h}{q_a}}, \quad (19)$$

а для $\sigma_a = 0,66$ вместо (15) имеет место равенство

$$\operatorname{tg} \gamma = 84,5 \frac{x}{r} \frac{d}{u} \frac{u_e}{u} \sqrt{\frac{K_M h}{q_a}}. \quad (20)$$

Еще раз напомним, что формулы (19) и (20) можно применять лишь для ракет, близких по форме к снарядам, для которых получены соотношения (18) и таблица для $K_M(v)$.

§ 77. Условие устойчивости полета на активном участке

Для определения условия устойчивости полета вращающихся ракет на активном участке рассмотрим уравнения движения вращающейся ракеты на этом участке (см. § 72)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a - nv^2, \\ v \frac{d\Psi}{dt} &= (a + \mu v^2) \Delta + be^{i(\beta_1 + \varphi)}, \\ \frac{d^2 U}{ds^2} + 2h \frac{dU}{ds} - k^2 U &= D(s), \\ U &= v \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

При рассмотрении движения вращающейся ракеты полевой артиллерии на активном участке можно пренебречь подъемной силой Y и демпфирующим моментом M_2 , так как для вращающихся ракет эти сила и момент еще меньше, чем для полевых оперенных ракет. Анализ, проведенный в § 13, показал также, что на активном участке для этих вращающихся ракет можно пренебречь и лобовым сопротивлением.

При исследовании движения вращающихся ракет мы будем также пренебрегать отклоняющим реактивным моментом M и боковой реактивной силой P_1 , так как быстрое вращение ракет должно осреднить их влияние и сильно уменьшить их воздействие на полет ракеты.

В качестве факторов, возмущающих движение вращающейся ракеты на активном участке, рассмотрим лишь начальные возмущения

(X_0 и $\dot{X}_0$), возникающие при сходе ракеты со станка. При этом уравнения (21) примут вид:

$$\frac{dv}{dt} = a; \quad (22a)$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{a}{v^2} \Delta; \quad (22б)$$

$$\frac{d^2U}{ds^2} - 2if \frac{dU}{ds} - k^2U = 0; \quad (22в)$$

$$U = v\Delta. \quad (22г)$$

Очевидно, что уравнение (22в) формально совпадает с уравнением (3) (здесь только Δ заменено на U). Поэтому все рассуждения, проведенные в предыдущем параграфе относительно условий устойчивости движения вращающихся ракет на пассивном участке, можно непосредственно перенести на активный участок. Таким образом, и для активного участка можно высказать утверждение, что вращающаяся ракета будет гироскопически устойчива, если на всем активном участке

$$\sigma^2 = 1 - \frac{k^2}{f^2} > 0. \quad (23)$$

Заметим, что обычно коэффициент σ^2 почти постоянен на всем активном участке. Изменение σ происходит из-за изменения коэффициента $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$. Коэффициент же f остается постоянным, так как для вращающейся ракеты угловая скорость p на активном участке пропорциональна скорости ракеты ¹⁾. Коэффициент $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ для вращающейся ракеты остается постоянным до скоростей порядка 250—280 м/сек, а затем начинает возрастать. Наибольшего значения он достигает вблизи скорости, равной скорости звука (число Маха $M \approx 1$). Удовлетворив соотношению (23) в этой области скоростей (для полевых вращающихся ракет это соответствует обычно концу активного участка), мы можем быть уверены, что соотношение (23) будет выполняться и на всем активном участке.

§ 78. Расчет углового отклонения вращающихся ракет на активном участке

Как и в предыдущем параграфе, будем рассматривать угловое отклонение вращающихся ракет на активном участке, вызванное лишь начальными возмущениями. Будем считать, что коэффициент k (а следовательно, и σ) на активном участке постоянен.

¹⁾ См. сноску ¹⁾ на стр. 237.

Для расчета углового отклонения вращающихся ракет на активном участке необходимо решить уравнения (22) при начальных условиях:

$$X = X_0, \quad \dot{X} = \dot{X}_0, \quad \Psi = \Psi_0 \quad \text{при} \quad s = s_0. \quad (24)$$

Корни характеристического уравнения для уравнения (22в) равны:

$$\lambda_1 = if(1 + \sigma) \quad \text{и} \quad \lambda_2 = if(1 - \sigma). \quad (25)$$

Поэтому искомое решение имеет вид

$$U = C_1 e^{\lambda_1 (s-s_0)} + C_2 e^{\lambda_2 (s-s_0)}. \quad (26)$$

Так как $U = v \Delta$, а при наших предположениях ($\mu = n = b = 0$) производная $\frac{dU}{ds} = \frac{dX}{dt}$ (см. уравнение (40) в § 73), то начальные условия (24) для переменной U будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= v_0 \Delta_0 = v_0 (X_0 - \Psi_0), \\ \left(\frac{dU}{ds}\right)_0 &= \dot{X}_0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Из (26) и (27) можно заключить, что

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= v_0 (X_0 - \Psi_0), \\ C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 &= \dot{X}_0. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно получим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{v_0 (X_0 - \Psi_0) \lambda_2 - \dot{X}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ C_2 &= \frac{v_0 (X_0 - \Psi_0) \lambda_1 - \dot{X}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Подставляя (28) в (26) и разделяя U на две части: U_X , вызванную начальными углами X_0 и Ψ_0 , и $U_{\dot{X}_0}$, вызванную начальной угловой скоростью $\dot{X}_0$, получим:

$$\left. \begin{aligned} U_X &= \frac{v_0 (X_0 - \Psi_0)}{\lambda_1 - \lambda_2} [-\lambda_2 e^{\lambda_1 (s-s_0)} + \lambda_1 e^{\lambda_2 (s-s_0)}], \\ U_{\dot{X}_0} &= \frac{\dot{X}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} [e^{\lambda_1 (s-s_0)} - e^{\lambda_2 (s-s_0)}]. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Разделив U на v и учитывая выражения (25), найдем углы атаки Δ_X и $\Delta_{\dot{X}_0}$:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_X &= (X_0 - \Psi_0) \frac{v_0}{2ifv} [(1 + \sigma) e^{if(1-\sigma)(s-s_0)} - (1 - \sigma) e^{if(1+\sigma)(s-s_0)}], \\ \Delta_{\dot{X}_0} &= \frac{\dot{X}_0}{2ifv} [e^{if(1+\sigma)(s-s_0)} - e^{if(1-\sigma)(s-s_0)}]. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Наконец, из уравнений (226) и (30) следует:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{X_0} &= \Psi_0 + (X_0 - \Psi_0) \frac{v_0}{2\sigma} \int_{s_0}^s \frac{a}{v^3} [(1 + \sigma) e^{if(1-\sigma)(s-s_0)} - \\ &\quad - (1 - \sigma) e^{if(1+\sigma)(s-s_0)}] ds; \\ \Psi_{\dot{X}_0} &= \frac{\dot{X}_0}{2if\sigma} \int_{s_0}^s \frac{a}{v^3} [e^{if(1+\sigma)(s-s_0)} - e^{if(1-\sigma)(s-s_0)}] ds. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Для нахождения вероятного значения углового отклонения положим $\Psi_0 = 0$ и воспользуемся результатами, полученными в § 73. Из равенств (53) § 73 следует:

$$\bar{\Psi}_{X_0} = \bar{X}_0 |\Psi_{X_0}^*|, \quad \bar{\Psi}_{\dot{X}_0} = \bar{\dot{X}_0} |\Psi_{\dot{X}_0}^*|. \quad (32)$$

Здесь величины $\Psi_{X_0}^*$ и $\Psi_{\dot{X}_0}^*$ определяются из равенств

$$\Psi_{X_0} = X_0 \Psi_{X_0}^* \quad \text{и} \quad \Psi_{\dot{X}_0} = \dot{X}_0 \Psi_{\dot{X}_0}^*. \quad (33)$$

Перейдем теперь к нахождению выражений для Δ_{X_0} , $\Delta_{\dot{X}_0}$, Ψ_{X_0} , $\Psi_{\dot{X}_0}$ через затабулированные функции. Прежде всего формулы (30) могут быть записаны в следующем виде:

$$\Delta_{X_0} = (X_0 - \Psi_0) (A_1 + iA_2); \quad \Delta_{\dot{X}_0} = \dot{X}_0 (A_3 + iA_4), \quad (34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{v_0}{2f\sigma v} [l_1 \cos l_2 (s - s_0) - l_2 \cos l_1 (s - s_0)]; \\ A_2 &= \frac{v_0}{2f\sigma v} [l_1 \sin l_2 (s - s_0) - l_2 \sin l_1 (s - s_0)]; \\ A_3 &= \frac{1}{f\sigma v} \cos f (s - s_0) \sin f\sigma (s - s_0); \\ A_4 &= \frac{1}{f\sigma v} \sin f (s - s_0) \sin f\sigma (s - s_0); \\ l_1 &= f(1 + \sigma); \quad l_2 = f(1 - \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$(36)$$

Для нахождения углов Ψ рассмотрим случай, когда ускорение реактивной тяги a постоянно на всем активном участке. В этом случае и величины Ψ_{X_0} и $\Psi_{\dot{X}_0}$ можно выразить через затабулированные функции. Это проще всего сделать, если учесть, что $\frac{dX}{dt} = \frac{dU}{ds}$. Отсюда получим:

$$\frac{dX}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d(v \Delta)}{ds}.$$

Но при $a = \text{const}$ скорость $v = \sqrt{2as}$. Поэтому

$$\frac{dX}{ds} = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{d(\sqrt{s} \Delta)}{ds}. \quad (37)$$

Из уравнения (37) находим:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{X_0} = X_{X_0} - \Delta_{X_0} &= -\Delta_{X_0} + \int_{s_0}^s \frac{1}{V\bar{s}} \frac{d(V\bar{s} \Delta_{X_0})}{ds} ds + X_0, \\ \Psi_{\dot{X}_0} = X_{\dot{X}_0} - \Delta_{\dot{X}_0} &= -\Delta_{\dot{X}_0} + \int_{s_0}^s \frac{1}{V\bar{s}} \frac{d(V\bar{s} \Delta_{\dot{X}_0})}{ds} ds. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Из уравнений (38) и (30) получим:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{X_0} &= -\Delta_{X_0} + X_0 + (X_0 - \Psi_0) \frac{lf(1-\sigma^2) V\bar{s}_0}{2\sigma} \int_{s_0}^s \frac{e^{il_2(s-s_0)} - e^{il_1(s-s_0)}}{V\bar{s}} ds, \\ \Psi_{\dot{X}_0} &= -\Delta_{\dot{X}_0} + \frac{\dot{X}_0}{2f\sigma V\bar{2a}} \int_{s_0}^s \frac{l_1 e^{il_1(s-s_0)} - l_2 e^{il_2(s-s_0)}}{V\bar{s}} ds. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Формулы (39) легко представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{X_0} &= -\Delta_{X_0} + X_0 + (X_0 - \Psi_0)(B_1 + iB_2); \\ \Psi_{\dot{X}_0} &= -\Delta_{\dot{X}_0} + \dot{X}_0(B_3 + iB_4), \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

где ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -\frac{\pi f(1-\sigma^2) s_0}{2\sigma} \left\{ J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s_0) S_{l_2 s_0}^{l_2 s} - J_{\frac{1}{2}}(l_2 s_0) C_{l_2 s_0}^{l_2 s} - \right. \\ &\quad \left. - J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s_0) S_{l_1 s_0}^{l_1 s} + J_{\frac{1}{2}}(l_1 s_0) C_{l_1 s_0}^{l_1 s} \right\}, \\ B_2 &= \frac{\pi f(1-\sigma^2) s_0}{2\sigma} \left\{ J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s_0) C_{l_2 s_0}^{l_2 s} + J_{\frac{1}{2}}(l_2 s_0) S_{l_2 s_0}^{l_2 s} - \right. \\ &\quad \left. - J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s_0) C_{l_1 s_0}^{l_1 s} - J_{\frac{1}{2}}(l_1 s_0) S_{l_1 s_0}^{l_1 s} \right\}, \\ B_3 &= \frac{\pi V\bar{s}_0}{2f\sigma V\bar{2a}} \left\{ l_1 \left[J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s_0) C_{l_1 s_0}^{l_1 s} + J_{\frac{1}{2}}(l_1 s_0) S_{l_1 s_0}^{l_1 s} \right] - \right. \\ &\quad \left. - l_2 \left[J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s_0) C_{l_2 s_0}^{l_2 s} + J_{\frac{1}{2}}(l_2 s_0) S_{l_2 s_0}^{l_2 s} \right] \right\}, \\ B_4 &= \frac{\pi V\bar{s}_0}{2f\sigma V\bar{2a}} \left\{ l_1 \left[J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s_0) S_{l_1 s_0}^{l_1 s} - J_{\frac{1}{2}}(l_1 s_0) C_{l_1 s_0}^{l_1 s} \right] - \right. \\ &\quad \left. - l_2 \left[J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s_0) S_{l_2 s_0}^{l_2 s} - J_{\frac{1}{2}}(l_2 s_0) C_{l_2 s_0}^{l_2 s} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

¹⁾ См. сноску на стр. 109.

В формулах (40) величины $\Delta_{\dot{x}}$ и $\Delta_{\dot{x}_0}$ также удобно выразить через бесселевы функции.

При $a = \text{const}$ выражения (35) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi s_0 f (1 - \sigma^2)}{4\sigma} \left\{ J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s) J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s_0) + J_{\frac{1}{2}}(l_2 s) J_{\frac{1}{2}}(l_2 s_0) - \right. \\ &\quad \left. - J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s) J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s_0) - J_{\frac{1}{2}}(l_1 s) J_{\frac{1}{2}}(l_1 s_0) \right\}, \\ A_2 &= \frac{\pi s_0 f (1 - \sigma^2)}{4\sigma} \left\{ J_{\frac{1}{2}}(l_2 s) J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s_0) - J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s) J_{\frac{1}{2}}(l_2 s_0) - \right. \\ &\quad \left. - J_{\frac{1}{2}}(l_1 s) J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s_0) + J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s) J_{\frac{1}{2}}(l_1 s_0) \right\}, \\ A_3 &= \frac{\pi \sqrt{s_0}}{4f\sigma \sqrt{2a}} \left\{ l_1 [J_{\frac{1}{2}}(l_1 s) J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s_0) - J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s) J_{\frac{1}{2}}(l_1 s_0)] - \right. \\ &\quad \left. - l_2 [J_{\frac{1}{2}}(l_2 s) J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s_0) - J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s) J_{\frac{1}{2}}(l_2 s_0)] \right\}, \\ A_4 &= -\frac{\pi \sqrt{s_0}}{4f\sigma \sqrt{2a}} \left\{ l_1 [J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s) J_{-\frac{1}{2}}(l_1 s_0) + J_{\frac{1}{2}}(l_1 s) J_{\frac{1}{2}}(l_1 s_0)] - \right. \\ &\quad \left. - l_2 [J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s) J_{-\frac{1}{2}}(l_2 s_0) + J_{\frac{1}{2}}(l_2 s) J_{\frac{1}{2}}(l_2 s_0)] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Формулы (32) — (42) позволяют вычислить угловой разброс вращающихся ракет в конце активного участка, а значит, и боковое рассеивание, а также рассеивание по дальности (при небольших углах возвышения), если только известны вероятные значения начальных возмущений ($\bar{X}_0$ и $\bar{\dot{X}}_0$).

В заключение настоящего параграфа рассмотрим физическую картину колебательного движения вращающейся ракеты, вызванного начальным возмущением $\dot{X}_0$ ¹⁾.

Изменение угла атаки вдоль траектории, обусловленное начальным возмущением $\dot{X}_0$ и воздействием на ракету основных сил и моментов, допускает простое физическое истолкование. Используя формулу Эйлера и производя элементарные преобразования, можно представить второе из соотношений (30) в виде

$$\Delta_{\dot{x}_0} = \frac{\dot{X}_0}{vf\sigma} e^{if(s-s_0)} \sin f\sigma (s - s_0).$$

Так как при выводе уравнений движения сила тяжести не учитывалась, а направления всех учитывавшихся сил связаны только с положением оси ракеты и вектора скорости центра масс, то мы

¹⁾ Приводимым далее анализом движения вращающейся ракеты мы обязаны Ю. И. Коростелеву.

нельзя производить поворот введенных ранее систем координат. При таком повороте комплексные углы, например угол X и его проекции γ_1 и γ_2 , не изменят своей величины и лишь получат новую ориентировку в пространстве. Произведем поворот системы координат так, чтобы мнимая часть начального возмущения $\dot{\gamma}_0$ обратилась в нуль; тогда $\dot{X}_0 = \dot{\gamma}_{10} = \dot{\gamma}_0$. В этом случае

$$\Delta = \frac{\dot{\gamma}_0}{v f^2} e^{i f (s - s_0)} \sin f z (s - s_0). \quad (43)$$

здесь $\dot{\gamma}_0$ — действительное число.

Следовательно, модуль комплексного угла атаки Δ (т. е. величина угла нутации) равен

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}_0}{v f^2} \sin f z (s - s_0), \quad (44)$$

а его аргумент выражается так:

$$f (s - s_0). \quad (45)$$

Из выражения (44) следует, что вдоль траектории активного участка, по мере роста скорости ракеты, амплитуда нутационных колебаний оси (ракеты) убывает. Физический смысл этого явления становится ясным, если учесть, что

$$v f = v \cdot \frac{1}{2} \frac{I_1}{I} \frac{p}{v} = \frac{1}{2} I_1 p.$$

Отсюда видно, что вдоль траектории активного участка растет осевая составляющая кинетического момента ракеты, т. е. увеличивается ее гироскопическая жесткость, что и приводит к уменьшению угла нутации. При этом в каждой точке пути уменьшение будет тем большим, чем больше величина параметра f . С ростом этого параметра увеличивается и коэффициент гироскопической устойчивости ε , что дополнительно уменьшает амплитуду нутационных колебаний. Из выражения (45) следует, что увеличение параметров f и ε ведет также и к уменьшению длины волны этих колебаний:

$$\lambda = \frac{2\pi}{f^2}.$$

Для выяснения физического смысла выражения (45), аргумента угла Δ , заметим, что

$$\arg \Delta = \arg \operatorname{tg} \left(\frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1} \right) = \arg \operatorname{tg} (\operatorname{tg} \gamma) = \gamma.$$

Следовательно,

$$f (s - s_0) = \gamma. \quad (46)$$

Аргумент угла атаки есть не что иное, как угол прецессии оси ракеты (см. рис. 10!). Это же выражение определяет кинематический смысл параметра f как скорости изменения угла нутации вдоль пути.

Таким образом, мы видим, что нутационные колебания оси ракеты совершаются по закону синуса; амплитуда этих колебаний убывает вдоль траектории активного участка благодаря увеличению гироскопической жесткости ракеты. Величина угла прецессии оси ракеты пропорциональна пройденному пути. Увеличение параметра f приводит к дополнительному уменьшению амплитуды и длины волны нутационных колебаний и к увеличению скорости прецессии. Следовательно, для уменьшения углов атаки целесообразно добиваться больших значений параметров f и σ при неизменной величине начального возмущения χ_0 .

Однако в смысле уменьшения рассеивания такой вывод будет не вполне точен. Действительно, пусть коэффициент гироскопической устойчивости $\varepsilon = 1$, что соответствует случаю аэродинамически нейтральной ракеты или полета реальной ракеты в пустоте. В этом случае движение оси ракеты будет описывать кривую, представленную в левой части рис. 106. При этом каждый раз как путь $s = s_0$,

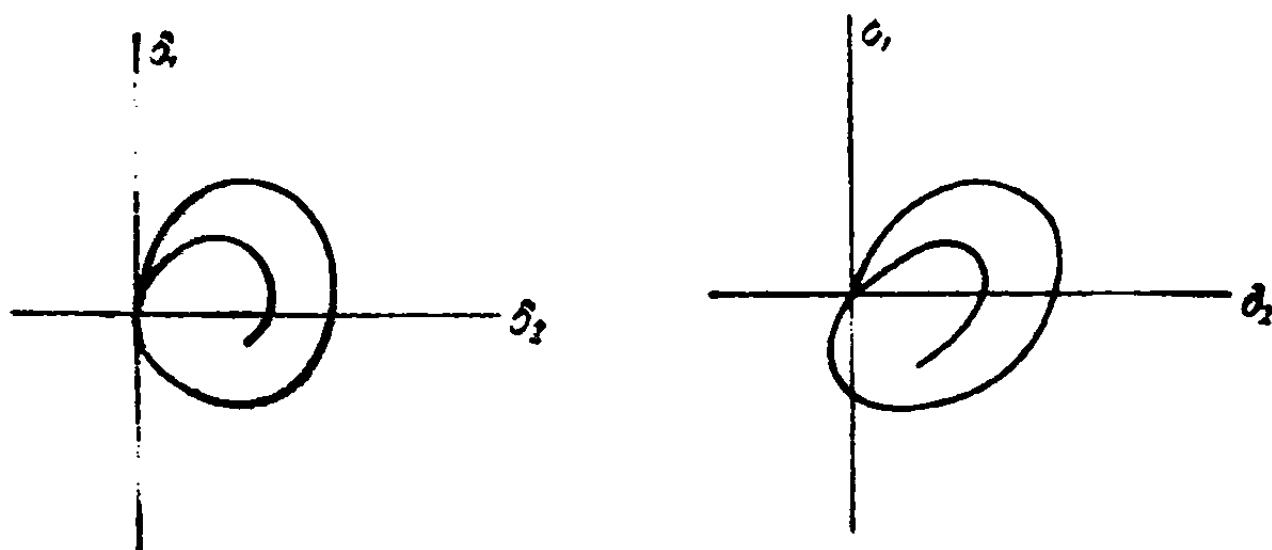


Рис. 106.

пройденный ракетой, будет кратен $\frac{\pi}{f}$, функция $\sin f(s - s_0)$ будет обращаться в нуль, т. е. ось ракеты будет совпадать с вектором скорости; за время прохождения этого же пути плоскость прецессии согласно (46) повернется на угол, кратный π . Следовательно, в течение всего этого времени движения ракеты угол δ_2 не будет менять знака. Это поведет к значительному отклонению траектории в плоскости угла δ_2 .

В реальном случае, когда $\varepsilon < 1$, ракета уже не является вполне уравновешенным гироскопом. Колебания ее оси будут определяться не только начальными условиями движения, но в известной степени и действием опрокидывающего момента. В результате амплитуда и длина волны нутационных колебаний возрастут и ось ракеты, как это следует из (44) и (45), не будет успевать закончить полное колебание и совпасть с вектором скорости к моменту поворота плоскости прецессии на угол π . В результате начнут возникать области движения с отрицательными углами δ_2 (правая часть рис. 106), что

будет способствовать уменьшению рассеивания. Расчеты показывают, что, несмотря на то, что уменьшение ε увеличивает амплитуду угла нутации, рассеивание при этом несколько убывает.

Поэтому для уменьшения рассеивания целесообразно добиваться больших значений параметра f путем достижения соответствующих соотношений как моментов инерции, так и вращательной и поступательной скоростей ракеты. Однако при этом не следует допускать излишне больших значений коэффициента гироскопической устойчивости ε . Все эти требования могут быть удовлетворены, если надлежащим образом выбрать величину параметра k_1 , связанного с аэродинамическим опрокидывающим моментом.

Заметим, что в настоящем параграфе мы исходили из второй формулы (30), т. е. из интеграла уравнений движения, не учитывающих демпфирующих факторов, входящих в виде суммы $k_2 + \mu + n$ в коэффициент при первой производной уравнения (42) гл. VII. Эффект действия этих факторов сводится к дополнительному уменьшению амплитуды колебаний оси ракеты; на активном участке траектории, особенно если последний невелик, это уменьшение незначительно. Физический смысл действия демпфирующего момента, определяемого коэффициентом k_2 , изложен в Приложении II. Механизм демпфирующего действия, возникающего благодаря наличию второго и третьего членов, т. е. подъемной силы и силы лобового сопротивления, иной. Действие этих сил также уменьшает угол атаки, но не путем уменьшения колебаний оси ракеты, а путем приближения к ней направления вектора скорости центра масс.

ГЛАВА IX

О ВЛИЯНИИ ВЕТРА НА ПОЛЕТ РАКЕТ

§ 79. Введение

В настоящей главе рассматривается влияние ветра на полет ракет и устанавливаются расчетные формулы, позволяющие вычислить поправки к координатам точки падения ракеты в зависимости от направления и силы ветра.

Влияние ветра на полет ракеты различно по своему характеру на активном и пассивном участках траектории. На пассивном участке влияние ветра на полет ракет совершенно такое же, как и для обычных (нереактивных) снарядов и мин: боковой ветер сносит ракету по ветру, попутный ветер увеличивает дистанцию полета и т. д.

На активном участке полета ветер вызывает угловое отклонение ракеты. При этом, например, для невращающихся оперенных ракет угловое отклонение, вызванное боковым ветром на активном участке, приводит к отклонению точки падения ракеты Δ_a в направлении, обратном скорости ветра.

Конкретные расчеты (см. § 82) показывают, что при одном и том же ветре в верхних и нижних слоях атмосферы отклонение Δ_a , вызванное влиянием ветра на активном участке, в несколько раз превышает отклонение Δ_n , вызванное ветром на пассивном участке. Так, например, для рассматривавшейся выше ракеты III при стрельбе на дистанцию максимальной дальности ($\theta_0 = 45^\circ$) боковые отклонения, вызванные ветром со скоростью 1 м/сек, равны $\Delta_a = -79$ м и $\Delta_n = +8,5$ м. Этот пример показывает, что поправка к координатам точки падения ракеты, вызванная ветром, может быть весьма значительной.

В приземных слоях атмосферы при скорости больше 4 м/сек ветер становится очень порывистым. Залповая же стрельба ракетами продолжается по крайней мере несколько секунд. В течение этого периода времени скорость ветра может резко изменяться как по величине, так и по направлению. Это обстоятельство в связи с ранее

изложенным может привести к заметному дополнительному разбросу ракет (см. § 83).

В § 84—87 с помощью метода Дидиона излагается общая теория влияния ветра на полет оперенных и вращающихся ракет.

§ 80. Физическая картина явления

Рассмотрим сначала вопрос о влиянии ветра на обычные (нереактивные) артиллерийские снаряды и мины. Пусть снаряд (мина) вылетает из канала ствола со скоростью v_0 , направленной вдоль оси канала. При отсутствии начальных возмущений (при $\chi_0 = 0$) направление скорости v_0 в момент вылета совпадает с осью снаряда. При этом скорость снаряда относительно воздуха $v_{0r} = v_0 - w$, где w — скорость ветра. Таким образом, в момент вылета ось снаряда образует с направлением скорости v_{0r} некоторый угол атаки δ_{0r} ¹⁾.

Рассмотрим частный случай, когда скорость ветра w перпендикулярна к плоскости бросания (случай бокового ветра). Так как величина w во много раз меньше v_0 , то $\delta_{0r} \approx \frac{w}{v_0}$. Благодаря наличию начального угла атаки δ_{0r} вращающийся снаряд начнет прецессировать относительно оси, направленной по v_{0r} , а оперенная мина начнет колебаться около оси того же направления. Подобная картина имеет место в любой момент времени, так как при наличии ветра скорость центра тяжести снаряда относительно земли v не совпадает со скоростью центра тяжести снаряда относительно воздуха ($v_r = v - w$).

При указанном прецессионном движении снаряда или при колебании мины компонент полной аэродинамической силы — перпендикулярная к v_r подъемная сила Y — на разных участках траектории будет отклонять снаряд в разные стороны и в среднем воздействие этой силы на снос снаряда будет незначительно. Второй компонент полной аэродинамической силы — лобовое сопротивление Q — направлен противоположно v_r (рис. 107). Разложим силу Q на две составляющие Q_1 и Q_2 , из которых первая параллельна, а вторая перпендикулярна

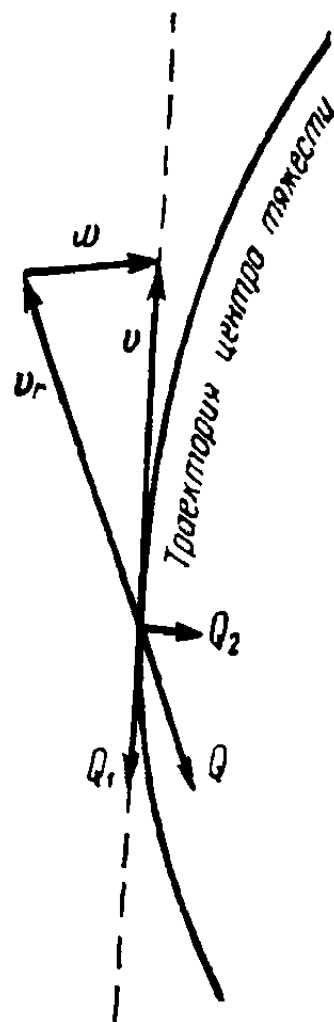


Рис. 107.

¹⁾ В этой главе под углом атаки δ_r будем понимать угол, образованный осью снаряда (ракеты) с вектором v_r (v_r — скорость центра тяжести относительно воздуха). Наряду с этим мы будем рассматривать и угол δ , введенный нами в предыдущих главах и представляющий собой угол между осью снаряда и вектором скорости его центра тяжести относительно земли. При отсутствии ветра углы δ_r и δ совпадают.

к касательной к траектории, т. е. к φ . Очевидно, что компонент Q_2 , обязанный своим происхождением наличию ветра, будет сносить снаряд по ветру.

Рассмотрим теперь оперенную невращающуюся ракету. В этом случае ось ракеты по-прежнему будет колебаться относительно направления φ . При этом вершина ракеты подавляющую часть времени будет оставаться по ту сторону касательной к траектории, откуда дует ветер¹⁾. На активном участке траектории, наряду с силой лобового сопротивления Q , на ракету действует реактивная тяга P , направленная по оси ракеты к его вершине. Эта сила P имеет компонент P_2 , перпендикулярный к касательной к траектории и направленный против ветра. Так как величина реактивной тяги во много раз превосходит лобовое сопротивление, то величина P_2 будет значительно превосходить Q_2 и, следовательно, *траектория ракеты будет на активном участке искривляться в сторону, противоположную направлению ветра*. Если бы на пассивном участке траектории не было ветра, то это искривление привело бы к боковому отклонению точки падения ракеты в сторону, противоположную направлению ветра. Однако это отклонение алгебраически складывается с отклонением, вызванным ветром на пассивном участке траектории.

На пассивном участке оперенная ракета ничем не отличается от обычной мины. Поэтому отклонение, вызванное ветром на пассивном участке, направлено в сторону ветра. Это отклонение, как показывают расчеты (см. § 82), в несколько раз меньше отклонения, вызванного ветром на активном участке траектории, если предположить, что на обоих участках скорость бокового ветра одинакова.

Аналогичные соображения используются для выяснения характера влияния продольного ветра (вектор скорости ветра ω лежит в плоскости бросания). Рассмотрим, например, влияние попутного продольного ветра. Компонент скорости этого ветра, перпендикулярный к скорости центра тяжести φ , вызовет увеличение угла возвышения траектории в конце активного участка. Для углов возвышения пускового станка $\theta_0 < 45^\circ$ это приведет к увеличению, а для $\theta_0 > 45^\circ$ — к уменьшению дальности. На пассивном участке попутный ветер всегда вызывает увеличение дальности. В случае лобового ветра картина явления будет обратной.

В последующих параграфах будут проведены количественные расчеты, подтверждающие качественные соображения, изложенные в настоящем параграфе, а также будет разобрано влияние ветра на полет проворачивающейся оперенной ракеты.

В § 87 будут даны формулы для расчета углового отклонения вращающейся ракеты, вызванного ветром на активном участке полета.

¹⁾ См. § 81.

§ 81. Угловое отклонение оперенной ракеты на активном участке траектории

Перед тем как рассмотреть общую задачу о движении ракеты (как оперенной, так и вращающейся) на активном участке полета под влиянием ветра (см. § 84), рассмотрим движение невращающейся оперенной ракеты при боковом ветре. Это позволит нам выяснить основные особенности влияния ветра на полет ракеты.

Будем считать, что на ракету действуют лишь реактивная тяга P , направленная по оси ракеты, и стабилизирующий аэродинамический момент M_1 , направленный перпендикулярно к оси ракеты и к скорости v центра тяжести ракеты относительно воздуха. Силой тяжести мы, так же как и в главе IV, будем пренебрегать, так как ее влияние на полет ракеты на активном участке сводится к систематическому угловому отклонению, не зависящему от всех других факторов, вызывающих угловое отклонение (в том числе и от ветра). Влияние остальных аэродинамических сил и моментов на движение ракеты при ветре мы рассмотрим ниже (см. § 85)¹⁾. Здесь мы также не будем учитывать опрокидывающий момент реактивной силы, боковую составляющую реактивной силы и начальные возмущения при сходе ракеты со станка, так как их действие на ракету не зависит от бокового ветра (см. § 84).

При этих предположениях ось ракеты будет двигаться в плоскости Oxz , где O — точка вылета ракеты, Ox — направление станка, а Oz — направление ветра (Oz перпендикулярно к Ox).

Плоскопараллельное движение ракеты в этом случае будет описываться уравнениями (см. § 27)²⁾

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= P, \\ mv \frac{d\psi}{dt} &= P\delta, \\ I \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= M_1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$M_1 = \frac{\rho v_r^2}{2} S_M L_0 \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \delta_r.$$

Так как скорость ветра w значительно меньше скорости v , а углы ψ и δ малы, то, проектируя векторное равенство $v = v_r + w$ на

¹⁾ Забегая вперед, заметим, что влияние подъемной силы, лобового сопротивления и демпфирующего экваториального момента на полет ракеты на активном участке при ветре весьма незначительно (см. § 84).

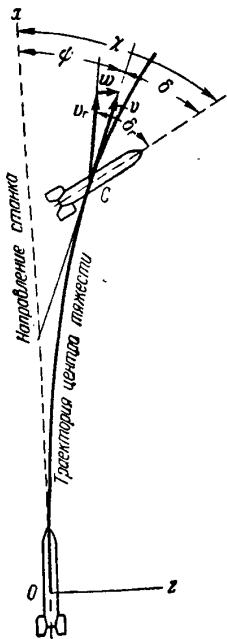
²⁾ Обозначения здесь соответствуют обозначениям главы IV. За положительное направление углов, как и раньше, принято направление по часовой стрелке (рис. 108).

оси Ox и Oz , легко получим¹⁾ (рис. 108):

$$v_r \approx v \quad \text{и} \quad \delta_r \approx \delta + \frac{w}{v}.$$

Если положить $\frac{P}{m} = a$ и $k_1^2 = \frac{\rho S_M \left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right| L_0}{2I}$, то уравнения (1) примут вид²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a, \\ v \frac{d\psi}{dt} &= a\delta, \\ \frac{d^2\chi}{dt^2} + k_1^2 v^2 \left(\delta + \frac{w}{v} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Эту систему уравнений нужно решить при начальных условиях:

$$\chi_0 = 0, \quad \dot{\chi}_0 = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad \delta_0 = 0 \quad (2') \\ (\text{при } s = s_0).$$

Система уравнений (2) отличается от системы уравнений (12) в § 27 лишь тем, что в правой части третьего уравнения вместо члена $\frac{M}{I}$ стоит $-k_1^2 w v$.

Поэтому, как и раньше, в главе IV, переходя к переменным s и $u = v\delta$, мы получим уравнение для u в виде³⁾

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + k^2 u = -k^2 w. \quad (3)$$

Решая его при начальных условиях

$$u_0 = v_0 \delta_0 = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{du}{ds} \right)_{s=s_0} = \dot{\chi}_0 = 0, \quad (4)$$

найдем:

$$u = wk \int_{s_0}^s \sin k(s-\sigma) d\sigma = -w [1 - \cos k(s-s_0)]. \quad (5)$$

¹⁾ Эти приближенные равенства получаются из точных:

$$v \cos \psi = v_r \cos (\chi - \delta_r) \quad \text{и} \quad v \sin \psi = w + v_r \sin (\chi - \delta_r).$$

²⁾ Напомним, что величину k_1 можно считать постоянной (см. § 25).

³⁾ В рассматриваемом случае (при отсутствии Q , Y и M_x) коэффициент k точно совпадает с коэффициентом k_1 (см. § 26).

откуда

$$\delta = \frac{u}{v} = -\frac{w}{v} [1 - \cos k(s - s_0)]. \quad (6)$$

Угловое отклонение ψ определим из второго уравнения (2):

$$\psi = \int_{s_0}^s \frac{a}{v^2} \delta ds = -w \int_{s_0}^s \frac{a(s)}{v^3(s)} [1 - \cos k(s - s_0)] ds. \quad (7)$$

Для полевых оперенных ракет I, II, III можно (с большой степенью точности) принять ускорение a постоянным (см. § 30). При этом $v = \sqrt{2as}$ и формула (7) примет вид¹⁾

$$\psi = -\frac{w}{2\sqrt{2a}} \int_{s_1}^s \frac{[1 - \cos k(s - s_0)]}{s^{3/2}} ds. \quad (8)$$

Из формул (7) и (8) видно, что $\psi < 0$, т. е. что траектория на активном участке искривляется в сторону, противоположную направлению ветра. Кроме того, формула (6) показывает, что на активном участке и $\delta < 0$ ²⁾. Поэтому расположение траектории относительно ракеты и линии стрельбы будет соответствовать не рис. 108, а рис. 108а, где $\psi < 0$ и $\delta < 0$.

Заметим, что интеграл в формуле (8) можно выразить через функции Бесселя и интегралы Френеля подстановкой $z = ks$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi = & -w \frac{\pi k \sqrt{s_0}}{\sqrt{2a}} \left\{ J_{-\frac{1}{2}}(z_0) \times \right. \\ & \times [S(z) - S(z_0)] - J_1(z_0) [C(z) - C(z_0)] + \\ & + \frac{1}{2} [J_{-\frac{1}{2}}(z_0) J_{-\frac{1}{2}}(z) + \\ & \left. + J_1(z_0) J_1(z)] - \frac{1}{\pi \sqrt{zz_0}} \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

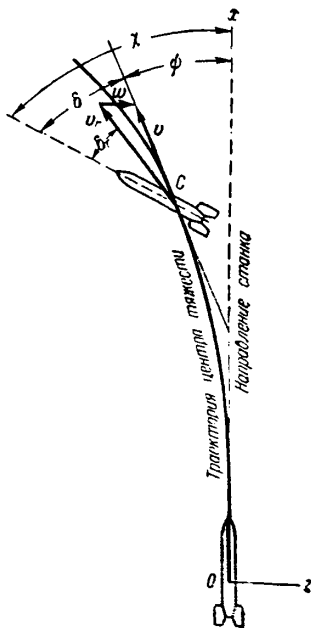


Рис. 108а.

¹⁾ Если ускорение a постоянно только вне пускового станка, то формула (8) принимает вид

$$\psi = -\frac{w}{2\sqrt{2a}} \int_{s_0 \text{ эф}}^{s_{\text{эф}}} \frac{[1 - \cos k(s - s_{0 \text{ эф}})]}{s^{3/2}} ds.$$

Заметим, что в формуле (7) не предполагается постоянство ускорения.

²⁾ Анализ формул для δ , получающихся при учете подъемной силы, показывает, что и в этом случае $\delta < 0$ на подавляющей части активного участка (см. § 84).

На рис. 109 даны графики функции $\psi(s)$ для ракет I, II, III, рассчитанные по формуле (9) при скорости бокового ветра $w = 1$ м/сек и при температуре ракетного заряда $+15^\circ\text{C}$. На всех

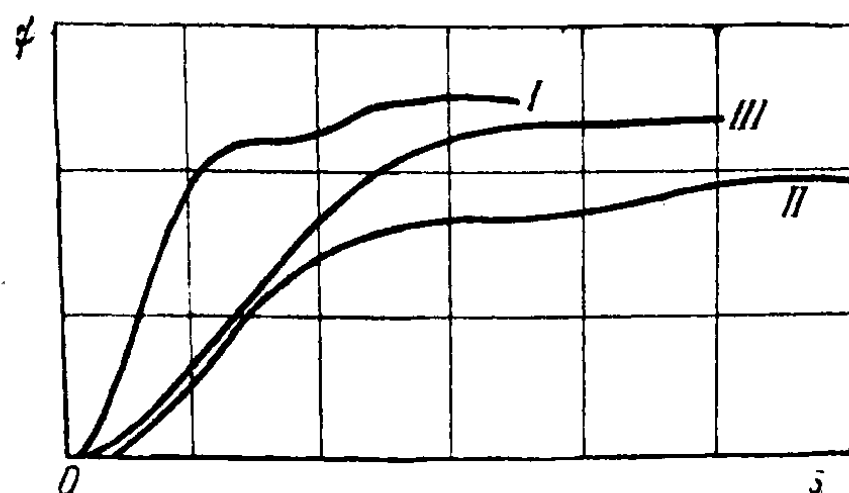


Рис. 109.

графиках виден критический участок траектории, на котором в основном и возникает угловое отклонение, вызванное ветром. Конец этого участка $s_{кр}$ совпадает с первым (после $s = s_0$) нулем подынтегральной функции в формуле (8) и определяется равенством

$$k(s_{кр} - s_0) = 2\pi.$$



Рис. 110.

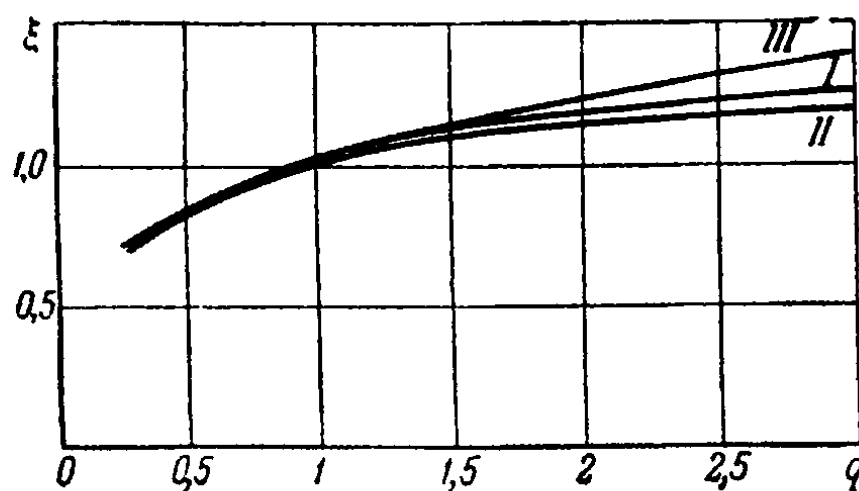


Рис. 111.

На рис. 110 даны для тех же ракет графики зависимости углового отклонения, вызванного боковым ветром на активном участке, от длины пускового станка s_0 . По оси ординат отложено отклонение при некоторой длине направляющей s_0 в предположении, что за единицу принято отклонение при эталонной длине направляющей. Здесь интересно отметить сравнительно слабую зависимость углового отклонения, вызванного ветром, от длины пускового станка.

На рис. 111 представлены графики зависимости углового отклонения, вызванного боковым ветром на активном участке траектории,

от коэффициента $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$, характеризующего устойчивость ракеты. Расчет проводился для ракет, получающихся из ракет I, II, III изменением коэффициента $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$. По оси абсцисс отложено q — отношение коэффициента $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ у измененной таким образом ракеты к $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ соответствующей эталонной ракеты, а по оси ординат отложено

§ — отношение соответствующих угловых отклонений, вызванных ветром. Таким образом, эталонные ракеты соответствуют точкам ($q = 1$, $\xi = 1$). Графики показывают увеличение углового отклонения, вызванного ветром, при увеличении коэффициента $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$.

Мы рассмотрели случай бокового ветра. При произвольном же направлении ветра разложим вектор скорости ветра на три компонента, из которых первый w_1 идет вдоль направления оси станка, второй w_2 лежит в плоскости бросания и перпендикулярен к направлению стрельбы, третий w_3 направлен перпендикулярно к плоскости бросания.

Влияние третьего компонента, т. е. бокового ветра, было уже нами рассмотрено. Оно приводит к отклонению траектории ракеты от направления стрельбы, причем угол отклонения выражается формулой (9) и лежит в p -плоскости, проходящей через направление стрельбы перпендикулярно к плоскости бросания.

При пренебрежении силой веса на активном участке траектории влияние второго компонента скорости ветра w_2 можно вычислить по той же формуле (9). Однако искривление траектории, вызванное этим компонентом, будет происходить в плоскости бросания и приведет к некоторому изменению угла возвышения траектории в конце активного участка.

Что же касается первого компонента w_1 , то он изменяет величину скорости ракеты относительно воздуха и потому влияние этого компонента не может быть рассмотрено отдельно от других факторов. Предвосхищая результаты § 84, можно здесь указать, что первый компонент w_1 сам по себе не вызывает отклонения ракеты, а приводит лишь к изменению разброса ракет, вызванного другими факторами.

§ 82. Вызванные ветром поправки к координатам точки падения оперенной ракеты

Для рассмотрения поправок, вносимых ветром, введем следующие оси координат: ось OX направим в сторону движения ракеты по линии пересечения плоскости бросания с горизонтом, ось OY направим по вертикали вверх, а OZ — перпендикулярно к OX и OY так, чтобы система $OXYZ$ была правой.

Компоненты скорости ветра w_1 , w_2 и w_3 , рассмотренные в конце предыдущего параграфа, связаны с компонентами w'_1 , w'_2 , w'_3 скорости ветра в системе $OXYZ$ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= w'_1 \cos \theta_0 + w'_2 \sin \theta_0, \\ w_2 &= -w'_1 \sin \theta_0 + w'_2 \cos \theta_0, \\ w_3 &= w'_3. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где θ_0 — угол возвышения пускового станка.

Из формулы (8) найдем, что угловое отклонение траектории ракеты в p -плоскости в конце активного участка равно

$$\psi_p = -\frac{w'_3}{2\sqrt{2a}} \int_{s_0}^{s_a} \frac{1 - \cos k(s - s_0)}{s^{1/2}} ds, \quad (11)$$

а в плоскости бросания (w -плоскости) равно

$$\psi_w = \frac{w'_1 \sin \theta_0 - w'_2 \cos \theta_0}{2\sqrt{2a}} \int_{s_0}^{s_a} \frac{1 - \cos k(s - s_0)}{s^{1/2}} ds. \quad (12)$$

Рассматривая угловые отклонения в конце активного участка как начальные данные для пассивного участка, мы будем иметь на пассивном участке поворот плоскости бросания на угол $\frac{\psi_p}{\cos \theta_0}$ и изменение угла возвышения на величину ψ_w ¹⁾. При отсутствии ветра на пассивном участке это привело бы к следующим отклонениям координат точки падения X и Z , вызванным действием ветра на активном участке:

$$\Delta_a Z = \frac{\psi_p}{\cos \theta_0} X; \quad (13)$$

$$\Delta_a X = \frac{\partial X}{\partial \theta_0} \psi_w. \quad (14)$$

К этим отклонениям нужно прибавить отклонения, вызванные ветром на пассивном участке траектории, вычисленные по способу, применяемому обычно во внешней баллистике неактивных снарядов. Эти отклонения определяются формулами:

$$\Delta_{\text{п}} Z = w_z \left(T - \frac{X}{v_a \cos \theta_0} \right), \quad (15)$$

$$\Delta_{\text{п}} X = w_x \left(T - \frac{\partial X}{\partial v_a} \cos \theta_0 + \frac{\partial X}{\partial \theta_0} \frac{\sin \theta_0}{v_a} \right), \quad (16)$$

где T — время полета на пассивном участке, а v_a — скорость ракеты в конце активного участка²⁾.

В таблице на стр. 263 приведены для ракет I, II, III значения отклонений, вызванных ветром на активном участке траектории ($\Delta_a X$ и $\Delta_a Z$) и на пассивном участке траектории ($\Delta_{\text{п}} X$ и $\Delta_{\text{п}} Z$), вычисленные для углов возвышения пускового станка $\theta_0 = 45^\circ$, 25° и 15° . Значения отклонений, приведенные в таблице, относятся к боковому или продольному ветру со скоростью 1 м.сек.

¹⁾ См. § 19.

²⁾ См., например, [7], § 102 и 103.

Разные ракеты	$\Delta_a Z$ м	$\Delta_n Z$ м	$\Delta_a X$ м	$\Delta_n X$ м	Угол
I	— 71	12,9	0	25,1	} $\theta_0 = 45^\circ$
II	— 84	10,5	0	27,2	
III	— 51	6,0	0	11,5	
I	— 46	9,5	17	13,8	} $\theta_0 = 25^\circ$
II	— 53	5,5	31	2,2	
III	— 32	2,7	16	4,8	
I	— 34	3,3	22	9,4	} $\theta_0 = 15^\circ$
II	— 33	2,4	28	13,4	
III	— 21	1,2	14	2,6	

Таблица показывает, что при одном и том же боковом ветре в верхних и нижних слоях атмосферы отклонение $\Delta_a Z$, вызванное влиянием ветра на активном участке, в несколько раз превышает отклонение $\Delta_n Z$, вызванное действием ветра на пассивном участке траектории. При малых углах возвышения (до 25°) отклонение $\Delta_a X$ превышает $\Delta_n X$.

Указанные расчеты показывают, что поправка, вызванная боковым ветром, весьма значительна и что эту поправку, а также поправку, вызванную продольным ветром при малых углах возвышения, следует учитывать при составлении таблиц стрельбы.

Остановимся, наконец, на влиянии ветра на полет проворачивающихся оперенных ракет. В § 75 было показано, что при пренебрежении слабым гироскопическим эффектом этих ракет уравнения движения для них можно представить в том же виде, как и для плоскопараллельного движения. Отличие этих уравнений от уравнений невращающихся оперенных ракет заключается лишь в том, что вместо опрокидывающего момента реактивной силы M в них фигурирует момент $M \cos(\varphi + \beta)$. В соответствии с этим можно сделать заключение, что при пренебрежении гироскопическим эффектом проворачивающихся оперенных ракет угловое отклонение этих ракет на активном участке, вызванное влиянием ветра, определяется теми же формулами (11)—(14), как и для невращающихся ракет. Этот вывод будет подтвержден ниже в § 86.

§ 83. О возможном влиянии ветра на рассеивание ракет

У полетных оперенных ракет активный участок траектории лежит в приземном слое атмосферы высотой в 50—100 м. В этом слое, как уже указывалось в начале главы, ветер со скоростью больше 4 м/сек отличается большой порывистостью: в течение короткого интервала времени, порядка 1—2 сек, наблюдаются резкие

изменения в направлении и величине скорости ветра. Это обстоятельство наглядно видно из рис. 112 и 113, на которых даны зависимости величины скорости ветра от времени, и из рис. 114, на котором изображен годограф вектора скорости ветра. Промежуток

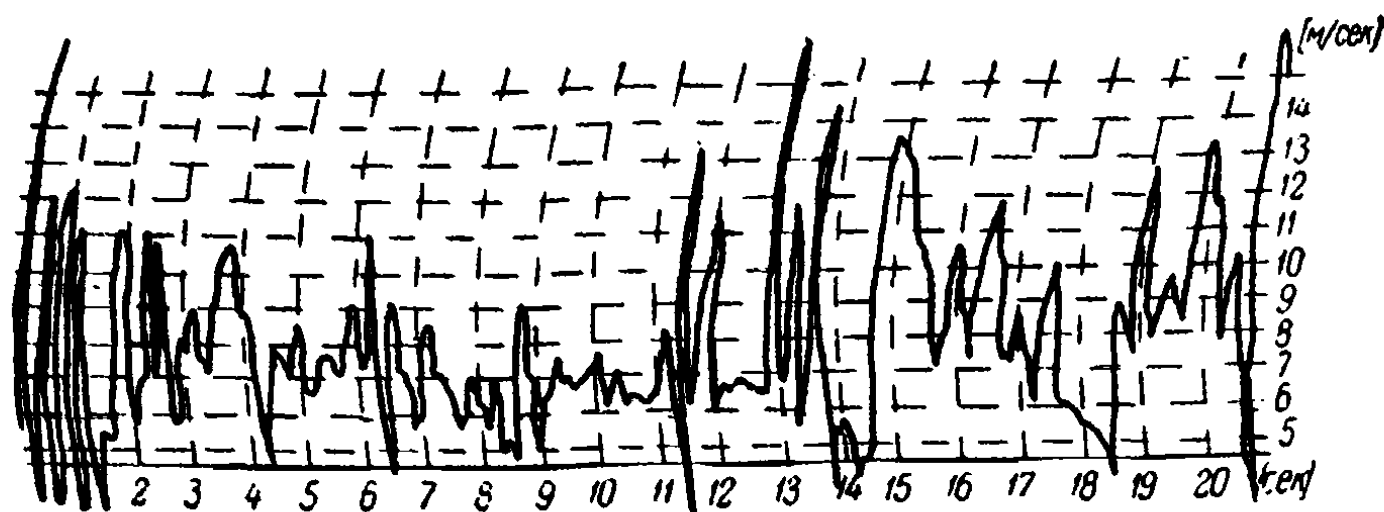


Рис. 112.

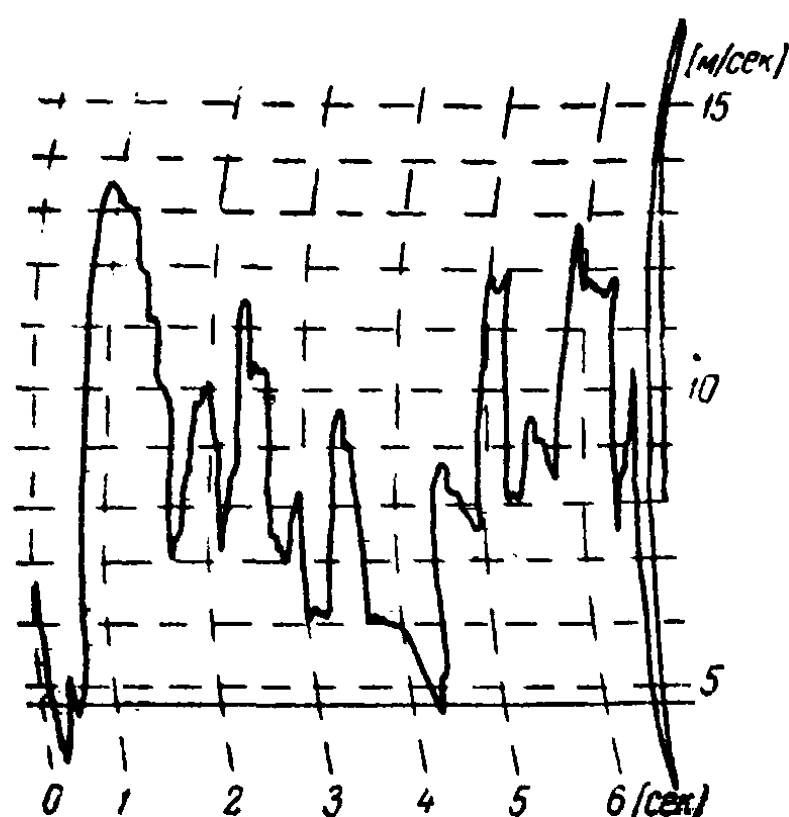


Рис. 113.

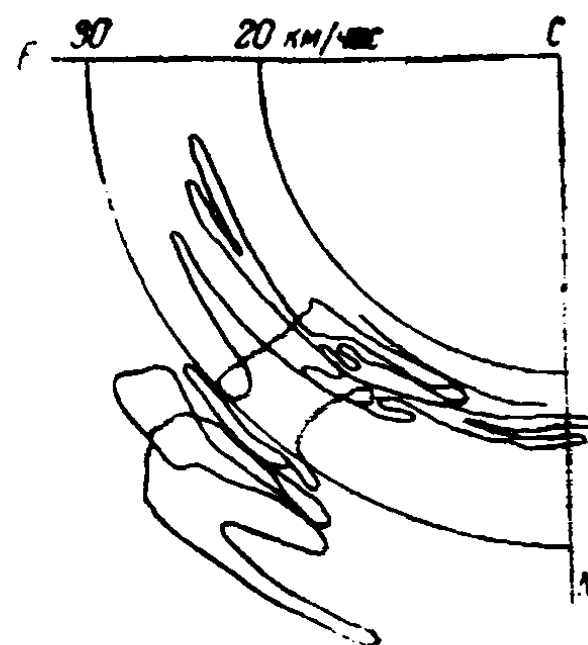


Рис. 114.

времени, за который конец вектора скорости описывает всю запутанную кривую рис. 114, равен примерно одной минуте¹⁾.

При залповой стрельбе ракеты часто выпускаются из одной машины с интервалами в 1 сек и больше. Так как продолжительность полета на активном участке составляет 0,5÷1 сек, то ветер, действующий на активном участке на одну ракету, может значительно

¹⁾ Приведенные на рис. 112—113 диаграммы взяты нами из книги П. Л. Молчанова «Аэрология», 1938.

отличаться по величине и направлению от ветра, действующего на другую ракету. С этой точки зрения компоненты скорости ветра могут быть рассмотрены как случайные величины. Если в формулы (11) — (14) подставить вместо w'_1, w'_2, w'_3 вероятные значения Bw'_1, Bw'_2, Bw'_3 отклонений этих компонентов от их средних значений, то этими формулами определятся вероятные отклонения координат точек падения из-за порывистости приземного ветра.

Мы не имеем в своем распоряжении достаточного статистического материала о структуре приземного ветра, на основании которого можно было бы оценить Bw'_1, Bw'_2, Bw'_3 . Однако приведенные диаграммы (если они являются типичными) показывают, что эти вероятные значения могут достигать величины до 1—2 м/сек. На основании таблицы § 82 (стр. 263) можно заключить, что при $Bw'_3 = 1$ м/сек вероятное боковое отклонение Bb_w , вызванное ветром, при стрельбе на максимальную дистанцию имеет величину:

$$\begin{aligned} Bb_w &= 71 \text{ м} — \text{для ракеты I,} \\ Bb_w &= 84 \text{ м} — \text{для ракеты II,} \\ Bb_w &= 51 \text{ м} — \text{для ракеты III.} \end{aligned}$$

Эти соотношения показывают, что порывистость ветра может являться существенным фактором, вызывающим рассеивание ракет, особенно для ракет, у которых уменьшено рассеивание, вызванное другими факторами. Может быть, порывистость ветра является одной из причин наличия потолка для кучности проворачивающихся оперенных ракет, о котором шла речь в § 54 и 55.

§ 84. Общий случай движения ракеты на активном участке при наличии ветра

В этом параграфе мы рассмотрим общий случай движения ракеты (оперенной невращающейся, оперенной проворачивающейся и неоперенной вращающейся) на активном участке траектории под влиянием ветра. При этом, так же как и в главе VII, мы будем считать, что на активном участке траектории на ракету действуют следующие силы и моменты (относительно центра тяжести)¹⁾:

- 1) реактивная тяга P ,
- 2) боковая реактивная сила P_1 ,
- 3) сила лобового сопротивления Q ,
- 4) «подъемная» сила Y ,
- 5) экваториальный отклоняющий реактивный момент M ,

¹⁾ Силой тяжести, кориолисовыми силой и моментом мы будем пренебрегать по причинам, изложенным в главе VII.

- 6) аксиальный реактивный момент M^* ,
- 7) аэродинамический стабилизирующий или опрокидывающий момент M_1 ,
- 8) аэродинамический экваториальный демпфирующий момент M_2 ,
- 9) аэродинамический аксиальный момент M_1^* и
- 10) аэродинамический аксиальный демпфирующий момент M_2^* .

На различные типы ракет будут действовать те или другие из перечисленных сил и моментов (так, например, на невращающуюся оперенную ракету не действуют моменты M^* , M_1^* , M_2^* и т. д.). Однако, составив уравнения движения с учетом всех перечисленных сил и моментов и проинтегрировав их, мы охватим все типы ракет. Полагая в найденном решении некоторые силы и моменты равными нулю, получим решения для частных типов ракет.

При отсутствии ветра уравнения движения ракет под влиянием указанных сил и моментов имеют вид (см. § 72):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a - nv^2, \\ v \frac{d\psi}{dt} &= (a + \mu v^2) \Delta + be^{i(\beta_1 + \varphi)}, \\ \frac{dp}{dt} + Avp &= Fa + Bv^2, \\ \frac{d^2X}{dt^2} + (k_2 - 2if)v \frac{dX}{dt} \pm k_1^2 v^2 \Delta &= \frac{M}{I} e^{i(\beta_2 + \varphi)}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Здесь и в дальнейшем все обозначения соответствуют обозначениям главы VII. При наличии ветра уравнения (17) изменяются за счет того, что скорость ракеты v_r относительно воздуха не равна скорости ракеты v относительно земли. Поэтому для получения уравнений движения ракеты при наличии ветра в уравнениях (17) всюду, где речь идет о скорости ракеты относительно воздуха (т. е. в членах nv^2 , $\mu v^2 \Delta$, Avp , Bv^2 , $k_2 v \frac{dX}{dt}$ и $k_1^2 v^2 \Delta$), нужно заменить v на v_r и Δ на Δ_r . Начальные же условия, при которых нужно искать решения уравнений (17) как в случае наличия ветра, так и при отсутствии ветра, будут одинаковы, а именно:

$$\text{при } t = t_0 \text{ (или } s = s_0): \quad X = X_0, \quad \dot{X} = \dot{X}_0 \text{ и } \psi = \psi_0 = 0.$$

Исследование движения ракет на активном участке при наличии ветра можно было бы провести так же, как и в § 80, выразив v_r , Δ_r через v , Δ и скорость ветра w . Однако в рассматриваемом общем случае это приводит к довольно сложным математическим выкладкам. Математически проще задача решается при помощи искусственного приема, введенного Дидионом и применяемого при

решении аналогичной задачи для обычных (нереактивных) снарядов и мин.

Для этого введем в рассмотрение две системы координат. Первая из них $Oxyz$ неизменно связана с землей. В ней ось Ox совпадает с направлением станка, ось Oy перпендикулярна к оси Ox и лежит в плоскости бросания (ω -плоскости), составляя с вертикалью угол θ_0 , а ось Oz перпендикулярна к осям Ox и Oy и составляет с ними правую систему координат. Оси второй системы координат $O^*x^*y^*z^*$ параллельны осям системы $Oxyz$ и движутся равномерно и поступательно со скоростью ветра относительно системы $Oxyz$.

В системе координат $O^*x^*y^*z^*$ воздух находится в покое, и скорости ракеты $\mathbf{v}^*$ (относительно системы $O^*x^*y^*z^*$) и $\mathbf{v}_r^*$ (относительно воздуха) совпадают и, следовательно, угол Δ_r^* равен углу Δ^{*1}). Поэтому уравнения движения ракеты при наличии ветра в системе координат $O^*x^*y^*z^*$ совпадают с уравнениями движения ракеты при отсутствии ветра, т. е. с уравнениями (17).

Отличие в постановке задачи заключается лишь в изменении начальных условий. Если в системе $Oxyz$ при $t=t_0$ ($s=s_0$), т. е. в момент схода ракеты со станка, $v=v_0$, $X=X_0$, $\dot{X}=\dot{X}_0$, $\Psi=0$ и $\Delta_0=X_0$, то в системе $O^*x^*y^*z^*$ при $t=t_0$ ($s^*=s_0^*$) скорость $\mathbf{v}_0^*=\mathbf{v}_0-\mathbf{w}$, $X_0^*=X_0$, $\dot{X}_0^*=\dot{X}_0^{*2}$, а углы Ψ_0^* и Δ_0^* отличны от соответствующих значений в системе $Oxyz$.

Для определения Ψ_0^* и Δ_0^* выразим сперва углы Ψ и Δ в обеих системах координат через компоненты скорости v_x , v_y , v_z (и соответственно v_x^* , v_y^* , v_z^*).

Как и в § 68, напомним:

$$v_x = v \cos \psi_2 \cos \psi_1, \quad v_y = v \cos \psi_2 \sin \psi_1, \quad v_z = v \sin \psi_2.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{v_y}{v_x}, \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \cos \psi_1 \frac{v_z}{v_x}.$$

Так как $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, то $v_x^* = v_x - w_1$, $v_y^* = v_y - w_2$, $v_z^* = v_z - w_3$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \psi_1^* = \frac{v_y^*}{v_x^*} = \frac{v_y - w_2}{v_x - w_1}, \quad \operatorname{tg} \psi_2^* = \cos \psi_1^* \frac{v_z^*}{v_x^*} = \cos \psi_1^* \frac{v_z - w_3}{v_x - w_1}.$$

¹⁾ Значок * при некоторой величине означает, что данная величина рассматривается в системе координат $O^*x^*y^*z^*$.

²⁾ Заметим, что так как системы координат $Oxyz$ и $O^*x^*y^*z^*$ движутся поступательно друг относительно друга и соответствующие оси обеих систем параллельны между собой, то углы X и X^* , а также угловые скорости $\dot{X}$ и $\dot{X}^*$ равны между собой.

В силу малости углов ψ_1 и ψ_2 мы с точностью до членов второго порядка малости получим:

$$\begin{aligned} v &\approx v_x, & v^* &\approx v_x^* = v_x - w_1 \approx v - w_1, \\ \psi_1 &\approx \frac{v_y}{v}, & \psi_2 &\approx \frac{v_z}{v}, \\ \psi_1^* &\approx \frac{v_y - w_2}{v_x^*} \approx \frac{v_y}{v^*} - \frac{w_2}{v^*} \approx \psi_1 \frac{v}{v^*} - \frac{w_2}{v^*}, \\ \psi_2^* &\approx \frac{v_z - w_3}{v_x^*} \approx \frac{v_z}{v^*} - \frac{w_3}{v^*} \approx \psi_2 \frac{v}{v^*} - \frac{w_3}{v^*}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили:

$$\Psi^* = \Psi \frac{v}{v^*} - \frac{w_2 + i w_3}{v^*}. \quad (18a)$$

С другой стороны, ввиду того, что $X \approx \Psi + \Delta$; $X^* \approx \Psi^* + \Delta^*$ (см. § 72) и $X = X^*$, для углов Δ и Δ^* получим соотношение

$$\Delta^* = \Psi + \Delta - \Psi^* = \Delta + \frac{w_2 + i w_3}{v^*} - \frac{w_1}{v^*} \Psi. \quad (18b)$$

Уравнения (18) позволяют нам установить начальные условия для уравнений (17) в системе координат $O^*x y z$. Действительно, учитывая, что $\Delta_0 = X_0$ и $\Psi_0 = 0$, найдем

$$\Psi_0^* = -\frac{W}{v_0^*} \quad \text{и} \quad \Delta_0^* = X_0 + \frac{W}{v_0^*}, \quad (19)$$

где

$$W = w_2 + i w_3.$$

Для решения системы уравнений (17) при начальных условиях (19) перейдем к новым переменным: $s^* = s - w_1 t^1$ и $U^* = v^* \Delta^*$. Тогда уравнения (17) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv^*}{dt} &= a - n(v^*)^2, \\ \frac{d\Psi^*}{ds^*} &= \left[\frac{a}{v^{*2}} + \mu \right] \Delta^* + \frac{b}{v^{*2}} e^{i(\beta_1 + \varphi)}, \\ \frac{dp}{ds^*} + Ap &= \frac{\mu_1 m a}{I_1 v^*} + B v^*, \\ \frac{d^2 U^*}{ds^{*2}} + 2h \frac{dU^*}{ds^*} \pm k^2 U^* &= D(s^*), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

$$2h = \mu + n + k_2 - 2if, \quad f = \frac{I_1 p}{2I v^*},$$

$$k^2 = k_1^2 + (k_2 - 2if)(\mu + n) \approx k_1^2,$$

$$D(s^*) = \frac{M(s^*)}{I v^*} e^{i(\beta_2 + \varphi)} - \frac{d}{ds^*} \left[\frac{b(s^*)}{v^*} e^{i(\beta_1 + \varphi)} \right] - \frac{b(s^*)}{v^*} (k_2 - 2if) e^{i(\beta_1 + \varphi)}.$$

¹⁾ Это соотношение следует из равенства $v^* = v - w_1$.

Найдем теперь начальные условия для U^* и $\frac{dU^*}{ds^*}$. На основании (19) имеем:

$$U_0^* = v_0^* \Delta_0^* = v_0^* X_0 + W. \quad (21a)$$

Далее, так как (см. уравнение (40) в § 72)

$$\frac{dU^*}{ds^*} = \dot{X} - (\mu + n) U^* - \frac{b}{v^*} e^{i(\beta_1 + \varphi)},$$

то для $\left(\frac{dU^*}{ds^*}\right)_0$, учитывая (21a), получим:

$$\left(\frac{dU^*}{ds^*}\right)_0 = \dot{X}_0 - (\mu + n) v_0^* X_0 - (\mu + n) W - \frac{b_0}{v_0^*} e^{i(\beta_{10} + \varphi_0)}. \quad (21b)$$

Решение последнего уравнения (20) для U^* при начальных условиях (21) можно представить в виде

$$U^* = C_1 e^{\lambda_1(s^* - s_0^*)} + C_2 e^{\lambda_2(s^* - s_0^*)} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{s_0^*}^{s^*} D(\sigma) [e^{\lambda_2(s^* - \sigma)} - e^{\lambda_1(s^* - \sigma)}] d\sigma, \quad (22)$$

где

$$\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 \mp k^2} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 \mp k^2} \quad (22')$$

представляют собой корни характеристического уравнения, а

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\lambda_2 U_0^* - \left(\frac{dU^*}{ds^*}\right)_0 \right], \\ C_2 &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[-\lambda_1 U_0^* + \left(\frac{dU^*}{ds^*}\right)_0 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (22'')$$

Найдя U^* , а затем и $\Delta^* = \frac{1}{v^*} U^*$, мы из второго уравнения (20) найдем Ψ^* :

$$\Psi^*(s^*) = \Psi_0^* + \int_{s_0^*}^{s^*} \left\{ \left[\frac{a}{v^{*2}} + \mu \right] \Delta^* + \frac{b}{v^{*2}} e^{i(\beta_1 + \varphi)} \right\} ds^*.$$

Угол Ψ^* представляет собой угол между направлением стрельбы и скоростью $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v}_r$, т. е. скоростью центра тяжести ракеты относительно воздуха. Нас же интересует угол Ψ между направлением стрельбы и скоростью $\mathbf{v}$ центра тяжести ракеты относительно земли. Из (18a) легко получить

$$\Psi = \frac{v^*}{v} \left[\Psi^* + \frac{W}{v^*} \right]. \quad (23)$$

Поэтому окончательно найдем угловое отклонение траектории ракеты относительно направления стрельбы:

$$\Psi = \frac{v^*}{v} \left\{ W^* \left(\frac{1}{v^*} - \frac{1}{v_0^*} \right) + \int_{s_0^*}^{s^*} \left[\left(\frac{a}{v^{*2}} + \mu \right) \Delta^* + \frac{b}{v^{*2}} e^{i(\beta_1 + \varphi)} \right] ds^* \right\}. \quad (24)$$

Так как компоненты скорости ветра w_2 и w_3 линейно входят в выражения (21) для U_0^* и $\left(\frac{dU^*}{ds^*} \right)_0$, которые в свою очередь линейно входят в решение уравнений движения, то можно, очевидно, рассматривать влияние компонентов w_2 и w_3 на движение ракет независимо от всех остальных факторов, возмущающих движение, т. е. независимо от M , P_1 , X_0 и $\dot{X}_0$. Это обстоятельство и было нами использовано в § 82, где мы, исследуя влияние бокового ветра на полет ракеты, положили $M=0$, $P_1=0$, $X_0=0$ и $\dot{X}_0=0$. Что же касается компонента w_1 , то он вызывает изменение начальной скорости ракеты относительно воздуха и потому влияет на угловое отклонение, вызванное всеми остальными факторами.

В случае, когда ракета имеет вне пускового станка постоянное ускорение a и сила лобового сопротивления гораздо меньше реактивной тяги ($\mu v^2 \ll a$), влияние компонента w_1 сводится к тому, что при расчете Ψ вместо реальной длины направляющей s_0 нужно в формулах (22) и (23) подставить эффективную длину направляющей¹⁾

$$s_{0\text{эф}} = \frac{(v_0 - w_1)^2}{2a}, \quad (25a)$$

а вместо длины пути s^* — эффективную длину пути

$$s_{\text{эф}} = \frac{(v - w_1)^2}{2a}. \quad (25b)$$

Тогда

$$v^* = \sqrt{2as_{\text{эф}}} \quad \text{и} \quad v_0 = \sqrt{2as_{0\text{эф}}}. \quad (25в)$$

В дальнейших параграфах при анализе различных частных случаев движения ракет при наличии ветра мы будем предполагать, что все возмущающие движение ракеты факторы (M , P_1 , X_0 и $\dot{X}_0$) равны нулю. Влияние же компонента скорости ветра w_1 на угловые отклонения, вызванные этими возмущающими факторами, всегда легко учесть, пользуясь формулами (22) и (23) (положив в них $W = w_2 + iw_3 = 0$).

¹⁾ См. § 36.

§ 85. Невращающиеся оперенные ракеты

В случае невращающейся оперенной ракеты угловая скорость ракеты p , а следовательно, и коэффициент f равны нулю. Поэтому последнее из уравнений (20) примет вид¹⁾

$$\frac{d^2 U^*}{ds^{*2}} + 2h \frac{dU^*}{ds^*} + k^2 U^* = 0,$$

где $k^2 = k_1^2 + (\mu + n)k_2 \approx k_1^2$ и $2h = \mu + n + k_2$ — действительные положительные числа.

Поэтому

$$U^* = e^{-h(s^* - s_0^*)} \{C_1 \cos \bar{k}(s^* - s_0^*) + C_2 \sin \bar{k}(s^* - s_0^*)\},$$

где в силу (21)

$$C_1 = W = w_2 + iw_3, \quad C_2 = \frac{k_2 - \mu - n}{2\bar{k}} W,$$

$$\bar{k} = \sqrt{k^2 - h^2} \approx k_1.$$

Следовательно,

$$\Psi = \frac{v^*}{v} W \left\{ \frac{1}{v^*} - \frac{1}{v_0^*} + \int_{s_0^*}^{s^*} \left[\frac{a}{v^{*2}} + \mu \right] \frac{e^{-h(s^* - s_0^*)}}{v^*} [\cos \bar{k}(s^* - s_0^*) + \frac{k_2 - \mu - n}{2\bar{k}} \sin \bar{k}(s^* - s_0^*)] ds^* \right\}. \quad (26)$$

Выражение, стоящее в уравнении (26) в фигурных скобках, представляет собой действительное число. Поэтому, отделяя в выражении для Ψ действительную и мнимую части, мы получим, что угол ψ_1 (или ψ_w) пропорционален компоненту w_2 , а угол ψ_2 (или ψ_p) — компоненту w_3 . Найдя из (26) углы ψ_p и ψ_w , мы по формулам (13) и (14) сможем определить отклонения координат точки падения ракеты $\Delta_a Z$ и $\Delta_a X$, вызванные ветром на активном участке.

Если положить в формуле (26) $w_1 = w_2 = 0$, $w_3 = w$, $k_2 = \mu = n = 0$, то мы получим $s^* = s$, $v^* = v$, $\bar{k} = k_1$, а для Ψ — следующее выражение:

$$\Psi = \psi_p = w \left\{ \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} + \int_{s_0}^s \frac{a \cos k(s - s_0)}{v^3} ds \right\}.$$

¹⁾ В соответствии со сказанным в конце предыдущего параграфа мы полагаем все возмущающие факторы M , P_1 , X_0 , $\dot{X}_0$ равными нулю

Это выражение в силу того, что

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = - \int_{s_0}^s \frac{a ds}{v^3},$$

совпадает с выражением (7) в § 82.

В случае, когда ускорение реактивной тяги a постоянно вне пускового станка и $nv^2 \ll a$, уравнение (26) примет вид

$$\Psi = \frac{V s_{\text{эф}}}{w_1 + \sqrt{2as_{\text{эф}}}} W \int_{s_0 \text{ эф}}^{s_{\text{эф}}} \left\{ -\frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}} + \left[\frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{V s} \right] e^{-h(s - s_0 \text{ эф})} \times \right. \\ \left. \times \left[\cos \bar{k}(s - s_0 \text{ эф}) + \frac{k_2 - \mu - n}{2\bar{k}} \sin \bar{k}(s - s_0 \text{ эф}) \right] \right\} ds. \quad (27)$$

В § 81 были приведены результаты конкретных расчетов углового отклонения ψ , вызванного боковым ветром, при учете главных сил и моментов, действующих на ракету (тяги P и момента M_1).

Произведем оценку влияния подъемной силы Y , лобового сопротивления Q и экваториального демпфирующего момента M_2 на вызванное боковым ветром ($W = w_3 = w$) угловое отклонение ψ (в § 81 эти факторы не учитывались). При этом мы будем считать компонент скорости w_1 равным нулю, а ускорение реактивной тяги a постоянным на всем активном участке (включая направляющую).

В этом случае угловое отклонение ψ можно представить в виде суммы четырех слагаемых:

$$\psi = A + B + C + D, \quad (28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{w}{2\sqrt{2a}} \int_{s_1}^s \frac{1 - e^{-h(s - s_0)} \cos \bar{k}(s - s_0)}{s^{\frac{3}{2}}} ds, \\ B &= \frac{\mu w}{\sqrt{2a}} \int_{s_1}^s \frac{\cos \bar{k}(s - s_0) e^{-h(s - s_0)}}{V s} ds, \\ C &= \frac{(k_2 - \mu - n) w}{4\bar{k} \sqrt{2a}} \int_{s_1}^s \frac{\sin \bar{k}(s - s_0) e^{-h(s - s_0)}}{s^{\frac{3}{2}}} ds, \\ D &= \frac{\mu (k_2 - \mu - n) w}{2\bar{k} \sqrt{2a}} \int_{s_1}^s \frac{\sin \bar{k}(s - s_0) e^{-h(s - s_0)}}{V s} ds. \end{aligned} \right\} \quad (28')$$

В следующей таблице даны значения величин A, B, C, D для ракет I, II, III в конце активного участка при значении ско-

рости $\omega = 1$ м/сек и температуре ракетного заряда, равной $+15^\circ\text{Ц}$. Одновременно для тех же ракет приведено значение A_0 , получающееся из первой формулы (28') при $h = 0$.

Ракеты	A_0	A	B	C	D
I	$-0,525^\circ$	$-0,509^\circ$	$0,0136^\circ$	$0,0011^\circ$	$0,00006^\circ$
II	$-0,396^\circ$	$-0,392^\circ$	$0,0045^\circ$	$0,0015^\circ$	$0,00006^\circ$
III	$-0,484^\circ$	$-0,483^\circ$	$0,0125^\circ$	$0,0034^\circ$	$0,00011^\circ$

Таблица показывает, что сумма $B + C + D$ для всех трех ракет не превышает $2,5\%$ от A , а величина A_0 отличается от A не больше чем на 3% . Следовательно, при расчете отклонения ψ_a , вызванного ветром, можно пренебрегать всеми силами и моментами, кроме тяги P и момента M_1 (ср. с § 43). Поэтому для расчета углового отклонения Ψ , вызванного ветром, можно вместо формул (26) и (27) пользоваться уравнениями:

$$\Psi = -\frac{v^*}{v} W \int_{s_0^*}^{s^*} \frac{a[1 - \cos \bar{k}(s^* - s_0^*)]}{v^{*3}} ds^* \quad (29')$$

II

$$\Psi = -\frac{V_{s_{\text{эф}}}}{w_1 + \sqrt{2as_{\text{эф}}}} W \int_{s_{0 \text{ эф}}}^{s_{\text{эф}}} \frac{[1 - \cos \bar{k}(s - s_{0 \text{ эф}})]}{2s^{\frac{3}{2}}} ds. \quad (29'')$$

При $w_1 = 0$ формулы (29) совпадают с уравнениями (7) и (8) в § 81.

§ 86. Проворачивающиеся оперенные ракеты

В настоящем параграфе мы рассмотрим оперенные ракеты, которым придано вращение вокруг оси симметрии для усреднения влияния отклоняющего экваториального реактивного момента M . Угловая скорость p таких ракет во много раз меньше угловой скорости вращающихся ракет, у которых вращение служит для придания ракете устойчивости.

В этом случае коэффициент уравнения (20) $2h = \mu + n + k_2 - 2if$ имеет, вообще говоря, непостоянную мнимую часть. Однако величина $2h$ для реальных ракет в силу небольшой величины угловой скорости невелика и, как показывают расчеты, в первом приближении может быть принята равной нулю ¹⁾.

¹⁾ См. § 75.

Поправка, вносимая членом $2h \frac{dU^*}{ds^*}$, не превышает нескольких процентов от первого приближения.

Таким образом, в первом приближении отклонение, вызванное ветром, не зависит от вращения оперенной ракеты и может быть рассчитано по формулам § 81 и 85.

§ 87. Вращающиеся ракеты

Для вращающихся ракет с большой степенью точности можно положить коэффициенты A , B , μ , k_2 и n равными нулю. Тогда уравнения движения (20) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv^*}{dt} &= a, \\ \frac{d\Psi^*}{ds^*} &= \frac{a}{v^{*2}} \Delta^*, \\ \frac{dp}{ds^*} &= \frac{\mu_1 m a}{I_1 v^*}, \\ \frac{d^2 U^*}{ds^{*2}} - 2if \frac{dU^*}{ds^*} - k^2 U^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Так как $\frac{dp}{dt} = Fa = F \frac{dv^*}{dt}$, то $\frac{dp}{dv^*} = F$ и $p - p_0 = F(v^* - v_0)$. Но ракеты вращаются на пусковом станке и, следовательно, при пренебрежении трением на станке

$$p_0 = Fv_0 = F(v_0^* + \omega_1).$$

Поэтому

$$p = Fv^* \left(1 + \frac{\omega_1}{v^*}\right), \quad (31)$$

и коэффициент

$$f = \frac{I_1 p}{2I v^*} = \frac{I_1 F}{2I} \left(1 + \frac{\omega_1}{v^*}\right). \quad (32)$$

Так как ω_1 обычно значительно меньше v^* , то в первом приближении можно принять $f = \frac{I_1 F}{2I} = \text{const}$, а изменение коэффициента f , вызванное наличием компонента ветра ω_1 , учесть путем последовательных приближений¹⁾.

Таким образом, для вращающихся ракет четвертое уравнение (30) будет иметь вид²⁾

$$\frac{d^2 U^*}{ds^{*2}} - 2if \frac{dU^*}{ds^*} - k^2 U^* = 0,$$

где $f = \text{const}$ и $k = \text{const}$.

¹⁾ См. § 75.

²⁾ См. § 78.

Решение этого уравнения при начальных условиях (21) имеет вид

$$U^* = (\omega_2 + i\omega_3) \frac{l_1 e^{il_1(s-s_0)} - l_2 e^{il_2(s-s_0)}}{2f\sigma},$$

где

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{k^2}{f^2}}; \quad l_1 = f(1 + \sigma); \quad l_2 = f(1 - \sigma).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi = -\frac{v^*}{v} W \int_{s_0}^{s^*} \frac{a}{v^{*3}} \left[1 - \frac{l_1 e^{il_1(s^*-s_0)} - l_2 e^{il_2(s^*-s_0)}}{2f\sigma} \right] ds^* = \\ = (\omega_2 + i\omega_3)(E_1 + iE_2), \end{aligned} \quad (33)$$

где E_1 и E_2 — действительная и мнимая части интеграла в формуле (33).

Отсюда имеем:

$$\psi_1 = \omega_2 E_1 - \omega_3 E_2, \quad \psi_2 = \omega_2 E_2 + \omega_3 E_1. \quad (34)$$

В случае, когда вне пускового станка ускорение ракеты постоянно, получаем для E_1 и E_2 выражения:

$$\begin{aligned} E_1 = \frac{1}{\sigma} - \frac{v^*}{v v_0} + \frac{\sqrt{2as_{\text{сп}}}}{v_1 + \sqrt{2as_{\text{сп}}}} \times \\ \times \frac{1}{4f\sigma\sqrt{2a}} \int_{s_{0,\text{сп}}}^{s_{\text{сп}}} \frac{l_1 \cos l_2(s - s_{0,\text{сп}}) - l_2 \cos l_1(s - s_{0,\text{сп}})}{s^{3/2}} ds, \\ E_2 = \frac{\sqrt{2as_{\text{сп}}}}{v_1 + \sqrt{2as_{\text{сп}}}} \times \\ \times \frac{1}{4f\sigma\sqrt{2a}} \int_{s_{0,\text{сп}}}^{s_{\text{сп}}} \frac{l_1 \sin l_2(s - s_{0,\text{сп}}) - l_2 \sin l_1(s - s_{0,\text{сп}})}{s^{3/2}} ds. \end{aligned} \quad (35)$$

Формулы (35) подстановками $\zeta_1 = l_1 s$ и $\zeta_2 = l_2 s$ легко выражаются через интегралы Френеля и функции Бесселя $J_{\frac{1}{2}}$ и $J_{-\frac{1}{2}}$ от

аргументов $z_1 = l_1 S_{\text{эф}}$ и $z_2 = l_2 S_{\text{эф}}$:

$$\begin{aligned}
 L_1 = & \frac{1}{v} + \frac{v^* \pi f (1 - \sigma^2) \sqrt{S_{0\text{эф}}}}{2\sigma \sqrt{2a}} \left\{ \frac{1}{2} \left[J_{-\frac{1}{2}}(z_1) J_{-\frac{1}{2}}(z_{10}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + J_{\frac{1}{2}}(z_1) J_{\frac{1}{2}}(z_{10}) - J_{-\frac{1}{2}}(z_2) J_{-\frac{1}{2}}(z_{20}) J_{\frac{1}{2}}(z_2) J_{\frac{1}{2}}(z_{20}) \right] + \right. \\
 & \left. + J_{-\frac{1}{2}}(z_{10}) S_{z_{10}}^{\frac{1}{2}} - J_{\frac{1}{2}}(z_{10}) C_{z_{10}}^{\frac{1}{2}} - J_{-\frac{1}{2}}(z_{20}) S_{z_{20}}^{\frac{1}{2}} + J_{\frac{1}{2}}(z_{20}) C_{z_{20}}^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (36a) \\
 L_2 = & \frac{v^* \pi f (1 - \sigma^2) \sqrt{S_{0\text{эф}}}}{2\sigma \sqrt{2a}} \left\{ \frac{1}{2} \left[J_{\frac{1}{2}}(z_1) J_{-\frac{1}{2}}(z_{10}) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - J_{-\frac{1}{2}}(z_1) J_{\frac{1}{2}}(z_{10}) - J_{\frac{1}{2}}(z_2) J_{-\frac{1}{2}}(z_{20}) + J_{-\frac{1}{2}}(z_2) J_{\frac{1}{2}}(z_{20}) \right] - \right. \\
 & \left. - J_{-\frac{1}{2}}(z_{10}) C_{z_{10}}^{\frac{1}{2}} - J_{\frac{1}{2}}(z_{10}) S_{z_{10}}^{\frac{1}{2}} + J_{-\frac{1}{2}}(z_{20}) C_{z_{20}}^{\frac{1}{2}} + J_{\frac{1}{2}}(z_{20}) S_{z_{20}}^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (36b)
 \end{aligned}$$

где

$$z_{10} = l_1 S_{0\text{эф}} \quad \text{и} \quad z_{20} = l_2 S_{0\text{эф}}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СИЛ В УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

В гл. I были выведены уравнения (21) (стр. 20), характеризующие изменение во времени количества движения и кинетического момента фиктивного твердого тела S , которое образуется после «затвердевания» ракеты в момент времени t . Отсюда был получен «принцип затвердевания» для ракеты, позволяющий писать уравнение движения ракеты в виде уравнений движения твердого тела, находящегося под действием сил, приложенных к ракете, и дополнительных сил: реактивных сил и сил Кориолиса.

В § 1 этого Приложения мы установим теоремы об изменении количества движения и кинетического момента тела S в другой форме. Сопоставление полученных уравнений с уравнениями (21) гл. I даст нам (§ 2) интересные формулы для главного вектора J и главного момента H_C кориолисовых сил. Из выражения для J мы получим формулу для количества движения газа в ракете (частный случай формулы (12) на стр. 15). Наконец, в § 3 будут приведены формулы для скорости и ускорения центра инерции ракеты относительно ее корпуса и даны оценки этих величин, оправдывающие то пренебрежение этими величинами, которое имело место в различных главах настоящей книги.

§ 1. Вторая форма уравнений количеств движения и кинетического момента для тела S

Рассмотрим бесконечно малый интервал времени от t до $t_1 = t + dt$ и сравним между собой элементарные приращения за этот промежуток времени количеств движения dQ^* и dQ^S системы Σ^* (система постоянного состава, состоящая из частиц, находящихся в ракете в момент времени t) и тела S , полученного путем «затвердевания» ракеты в тот же момент времени t .

Для этого разобьем объем, занимаемый ракетой, на три части: 1) объем, занимаемый корпусом¹⁾, 2) объем, занимаемый в момент t

¹⁾ В корпус мы включаем металл и другие неизменные части ракеты.

порохом (или жидким топливом), и 3) объем, занимаемый в момент времени t находящимися в ракете частицами газа. Части количества движения, относящиеся к этим объемам, будем соответственно обозначать индексами 1, 2 и 3.

Очевидно, что для корпуса

$$dQ_1^* = dQ_1^S. \quad (1)$$

Переходим к пороху. В момент t имеем: $Q_2^* = Q_2^S$, но в момент $t_1 = t + dt$ вектор Q_2^* отличается от вектора Q_2^S на количество движения той элементарной массы пороха, которая сгорела за dt секунд. Это недостающее количество движения мы представим в виде $k_p dt$, где k_p — секундный расход количества движения пороха (т. е. количество движения расходуемой секундной массы пороха). Тогда¹⁾

$$dQ_2^* = dQ_2^S - k_p dt. \quad (2)$$

В случае жидкого топлива

$$dQ_2^* = dQ_2^S - k_p dt + dQ_2^r, \quad (2')$$

где Q_2^r — количество движения жидкого топлива в относительном движении (относительно корпуса ракеты), а дифференциал dQ_2^r учитывает изменение вектора Q_2^r относительно неподвижной системы координат. Но тогда

$$dQ_2^r = \delta Q_2^r + \omega \times Q_2^r dt, \quad (3)$$

где δQ_2^r — элементарное изменение вектора Q_2^r относительно корпуса ракеты, а ω — угловая скорость корпуса.

Переходим теперь к объему части ракеты, занятой в момент t газом. Количество движения частиц газа, находящихся в этом объеме, относительно корпуса ракеты обозначим через Q_3^r . Соответствующее приращение будет dQ_3^r и аналогично (3) получим:

$$dQ_3^r = \delta Q_3^r + \omega \times Q_3^r dt. \quad (4)$$

Перейдем теперь к приращению количества движения газа в рассматриваемом объеме в переносном движении. Это приращение совпадает с dQ_3^S в том случае, если в каждой точке плотность газа ρ в моменты t и t_1 одинакова. В общем же случае необходимо учесть

¹⁾ Мы пренебрегаем количеством движения газа, занимающего в момент t_1 объем пороха, сгоревшего за dt секунд. Это неучтенное количество движения равно $\epsilon k_p dt$, где k_p — секундный расход количества движения пороха, а ϵ — отношение плотности газа к плотности пороха. Для учета этого количества движения следует во всех формулах под k_p понимать секундный расход количества движения пороха (топлива), помноженный на $(1 - \epsilon)$.

и изменение плотности ρ . Поэтому в общем случае искомое приращение количества движения в переносном движении равно

$$dQ_3^S + \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \mathbf{v}_e dW.$$

Здесь интеграл распространяется на ту часть объема ракеты, которая в момент t занята газом, $\mathbf{v}_e$ — переносная скорость элемента объема dW и $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ — скорость изменения плотности ρ в данном элементе объема dW .

Поэтому

$$dQ_3^* = dQ_3^S + \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \mathbf{v}_e dW + \delta Q_3^r + \boldsymbol{\omega} \times Q_3^r dt. \quad (5)$$

До сих пор мы рассматривали приращения количеств движения частиц, находящихся в объеме ракеты. Но при вычислении dQ необходимо учесть и количество движения в момент t_1 тех частиц, которые за промежуток времени от t до $t_1 = t + dt$ прошли через выходное сечение сопла. Это количество движения равно $(k_e + k_r) dt$, где k_e — секундный расход количества движения газа через выходное сечение сопла в переносном движении, а k_r — в относительном.

Таким образом,

$$dQ^* = dQ_1^* + dQ_2^* + dQ_3^* + (k_e + k_r) dt, \quad (6)$$

$$dQ^S = dQ_1^S + dQ_2^S + dQ_3^S. \quad (7)$$

Подставляя в (6) полученные ранее выражения для dQ_1^* , dQ_2^* и dQ_3^* , получим:

$$dQ^* = dQ^S - (k_p - k_e - k_r) dt + \delta Q^r + \boldsymbol{\omega} \times Q^r dt + \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \mathbf{v}_e dW, \quad (8)$$

где Q^r (как и в гл. I) — относительное количество движения ракеты, т. е. количество движения газа для пороховой ракеты ($Q^r = Q_3^r$) и количество движения газа и топлива при жидком топливе ($Q^r = Q_2^r + Q_3^r$), причем здесь все количества движения берутся относительно корпуса ракеты.

Пусть, как и в гл. I, R^o обозначает главный вектор сил нормального атмосферного давления и давления наружной части газа на ракету, а R — главный вектор всех остальных внешних сил. Применяя теорему количеств движения к системе постоянного состава Σ^* , найдем:

$$\frac{dQ}{dt} = R + R^o. \quad (9)$$

Как было выяснено в § 4 гл. I, реактивная тяга определяется формулой

$$T = -k_r + R^0 - \frac{\delta Q^r}{dt}. \quad (10)$$

Из (8), (9) и (10) находим:

$$\frac{dQ^S}{dt} = R + T + k_p - k_e - \omega \times Q^r - \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} v_e dW. \quad (11)$$

Для главного вектора кориолисовых сил инерции имеем:

$$J = -2 \int \int \int \omega \times v_{r\rho} dW = -2\omega \times Q^r. \quad (12)$$

Поэтому формулу (11) можно записать следующим образом:

$$\frac{dQ^S}{dt} = R + T + k_p - k_e - \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} v_e dW + \frac{1}{2} J. \quad (13)$$

Это и есть *вторая форма уравнения количества движения*.

Переходим теперь к уравнению моментов. Прежде всего, наряду с центром инерции C тела S , рассмотрим центр инерции C^* системы постоянного состава Σ^* . Тогда по известной формуле, связывающей главные моменты для разных полюсов, имеем:

$$G_{C^*}^* = G_C^* + C^*C \times Q^*. \quad (14)$$

Дифференцируя выражение (14) и замечая, что в момент t точки C^* и C совпадают, а $Q^* = m v_{C^*} = m v_C + Q^r$, найдем:

$$\begin{aligned} L_C + L_C^0 &= L_{C^*} + L_{C^*}^0 = \frac{dG_{C^*}^*}{dt} = \frac{dG_C^*}{dt} + \frac{dC^*C}{dt} \times Q^* = \\ &= \frac{dG_C^*}{dt} + (v_C - v_{C^*}) \times Q^* = \frac{dG_C^*}{dt} + v_C \times Q^r, \end{aligned} \quad (15)$$

т. е.

$$\frac{dG_C^*}{dt} = L_C + L_C^0 - v_C \times Q^r. \quad (16)$$

Теперь для того, чтобы получить вторую форму уравнения кинетического момента, нужно сравнить между собой dG_C^* и dG_C^S и повторить почти дословно приведенные выше рассуждения относительно dQ^* и dQ^S . Тогда, поскольку вместо равенства (9) мы имеем соотношение (16), то вместо (11) теперь получим:

$$\begin{aligned} \frac{dG_C^S}{dt} &= L_C + M_C + l_{pC} - l_{eC} - v_C \times Q^r - \\ &\quad - \omega \times G_C^r - \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r' \times v_e dW, \end{aligned} \quad (17)$$

где l_{pC} — секундный расход кинетического момента пороха¹⁾, а

¹⁾ Фактически под l_{pC} следует понимать секундный расход кинетического момента пороха (топлива), помноженный на $(1 - \varepsilon)$ (см. сноску на стр. 282).

l_c — секундный расход через выходное сечение сопла кинетического момента газа, причем в обоих случаях имеется в виду кинетический момент в переносном движении корпуса относительно неподвижной (точнее, инерциальной) системы осей координат; L_c — главный момент всех внешних сил и M_c — главный момент реактивных сил, в которые, как и в главе I, включены силы атмосферного давления и давления вышедшей части газа на часть, оставшуюся в ракете, r' — радиус-вектор точки объема, занятого газом, проведенный из точки C .

Уравнение (17) и представляет собой вторую форму уравнения кинетического момента.

§ 2. Формулы для количества движения, кориолисовой силы и кориолисова момента

Сопоставляя уравнения (13) и (17) с уравнениями (21) и (21') гл. I, мы получим выражения для кориолисовой силы и кориолисова момента:

$$J = 2 \left(k_p - k_e - \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} v_e dW \right), \quad (18)$$

$$H_c = l_{pc} - l_{ec} - v_c \times Q' - \omega \times G'_c - \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r' \times v_e dW. \quad (19)$$

Здесь интегралы распространяются на объем той части ракеты, которая занята газом, v_c — переносная скорость центра инерции ракеты, r' — проведенный из центра инерции ракеты радиус-вектор точки объема, занятого газом.

Формулы (18) и (19) очевидным образом упрощаются, если плотность газа в фиксированной точке объема ракеты медленно меняется с течением времени, т. е. $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ (это имеет место при квазистационарном течении газа в ракете).

Остановимся сначала на выражении (18) для J . Обозначим через μ_1 секундный расход массы пороха, а через μ_2 — секундный расход массы газа через выходное сечение сопла. Тогда, очевидно,

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{d}{dt} \int \int \int \rho dW = \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dW. \quad (20)$$

Далее, $k_p dt$ представляет собой количество движения элементарной массы пороха $\mu_1 dt$, сгоревшей за dt секунд. Обозначим через C_p центр инерции этой элементарной массы пороха, а через v_{C_p} — скорость точки C_p в переносном движении корпуса. Тогда $k_p = \mu_1 v_{C_p}$. Если элементарная масса пороха $\mu_1 dt$ симметрично расположена относительно оси ракеты, то точка C_p лежит на этой оси. Если масса $\mu_1 dt$

симметрична относительно среднего сечения пороховых шашек, то точка C_p будет расположена в плоскости этого сечения.

Точно так же рассмотрим элементарную массу газа $\mu_2 dt$, прошедшую через выходное сечение сопла за время dt . Обозначим через C_e центр инерции этой элементарной массы и через v_{C_e} — переносную скорость точки C_e . Тогда $k_e = \mu_2 v_{C_e}$. Если проходящий через выходное сечение поток газа симметричен, то точка C_e лежит в центре выходного сечения сопла.

Обозначим через r_p и r_e радиус-векторы точек C_p и C_e , проведенные из какого-либо полюса A , неизменно связанного с корпусом. Кроме того, пусть r — радиус-вектор произвольной точки внутри ракеты. Используя известные формулы для скоростей точек твердого тела, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} v_{C_p} &= v_A + \omega \times r_p, \\ v_{C_e} &= v_A + \omega \times r_e, \\ v_e &= v_A + \omega \times r. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

На основании этих формул, равенств $k_p = \mu_1 v_{C_p}$ и $k_e = \mu_2 v_{C_e}$, а также формул (20) найдем из выражения (18):

$$J = -2\omega \times \left(\mu_2 r_e - \mu_1 r_p + \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r dt \right). \quad (22)$$

Сопоставив это равенство с формулой (12) для кориолисовой силы и учитывая произвольность вектора ω , получим:

$$Q^r = \mu_2 r_e - \mu_1 r_p + \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r dW. \quad (23)$$

Эта формула определяет количество движения относительно корпуса ракеты находящихся в ракете частиц газа (в случае пороховой ракеты) или частиц газа и жидкого топлива (в случае ЖРД)¹⁾.

Рассмотрим частный случай, когда $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ (квазистационарное течение газа в ракете). В этом случае согласно формуле (20) $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, где $\mu = -\frac{dm}{dt}$, и формула (23) принимает простой вид:

$$Q^r = \mu C_p C_e, \quad (24)$$

а

$$J = -2\omega \times Q^r = -2\mu \omega \times C_p C_e = -2\mu v_{pe}, \quad (25)$$

¹⁾ В случае пороховой ракеты формула (23) представляет собой частный случай формулы (10) гл. I (в качестве объема W следует взять объем части ракеты, занятой газом). В случае жидкого топлива формула (23) является частным случаем формулы (13) гл. I. Конечно, формулу (13) гл. I можно применить и к пороховой ракете, если в качестве W взять не объем, занятый газом, а объем всей ракеты.

где v_{pe} — вращательная скорость точки C_e относительно точки C_p . По формулам (24) и (25) легко вычисляются относительное количество движения и кориолисова сила ракеты.

Переходим теперь к формуле (19) для кориолисова момента и запишем ее в более удобной для вычисления форме. Для этого разложим движение корпуса ракеты на поступательное движение вместе с точкой C и на вращательное вокруг C . Все величины, относящиеся к этой вращательной части движения корпуса, будем отмечать штрихом. Тогда, полагая $r_p = CC_p$, $r_e = CC_e$, получим:

$$\left. \begin{aligned} l_{pC} &= l'_{pC} + \mu_1 r_p \times v_C, \\ l_{eC} &= l'_{eC} + \mu_2 r_e \times v_C, \\ v_e &= v'_e + v_C. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Используя формулу (23), будем иметь:

$$\begin{aligned} l_{pC} - l_{eC} - \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r' \times v_e dW &= l'_{pC} - l'_{eC} - \\ - \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r' \times v'_e dW + (\mu_1 r_p - \mu_2 r_e - \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r' dW) \times v_C &= \\ = l'_{pC} - l'_{eC} - \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r' \times v'_e dW + v_C \times Q'. \end{aligned}$$

Но тогда формула (19) принимает вид

$$H_C = l'_{pC} - l'_{eC} - \omega \times G'_C - 2 \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r' \times v'_e dW. \quad (27)$$

Если $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ (течение газа квазистационарное) и $G'_C = 0$ (равнодействующий вектор относительных количеств движения приложен в центре инерции C), то в этом частном случае формула для H_C принимает простой вид:

$$H_C = l'_{pC} - l'_{eC}. \quad (28)$$

Рассмотрим для примера случай плоскопараллельного движения ракеты. Обозначим через I момент инерции ракеты относительно экваториальной оси, проходящей через точку C перпендикулярно к плоскости движения. Тогда момент инерции сгоревшей за время dt массы пороха будет $(-dI)$. Следовательно, кинетический момент этой массы $l'_{pC} dt = -dI \cdot \omega$. С другой стороны,

$$l'_{eC} = -\frac{dm}{dt} r_e^2 \omega,$$

где $r_e = CC_e$. Тогда

$$H_C = \left(-\frac{dI}{dt} + \frac{dm}{dt} r_e^2 \right) \omega. \quad (29)$$

§ 3. О перемещении центра инерции относительно корпуса ракеты

Найдем формулы для скорости v_r и ускорения w_r центра инерции ракеты при его перемещении относительно корпуса. Будем считать корпус ракеты неподвижным и все радиус-векторы будем проводить из некоторой точки этого корпуса. Обозначим положения центра инерции ракеты в моменты времени t и $t_1 = t + dt$ через C и C_1 , радиус-векторы этих точек — через r_C и $r_{C_1} = r_C + dr_C$, статические моменты — через Z и $Z_1 = Z + dZ$. Тогда

$$mr_C = Z,$$

$$(m + dm)(r_C + dr_C) = Z_1 = Z - \mu_1 r_p dt + \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r dt dW,$$

где интеграл распространен на объем, занятый газом в момент t . Вычитая почленно из последнего равенства предыдущее, получим:

$$mdr_C + dmr_C = -\mu_1 r_p dt + \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r dt dW.$$

Деля на dt и замечая, что $\mu_2 = -\frac{dm}{dt}$, найдем:

$$mv_r = m \frac{dr_C}{dt} = \mu_2 r_C - \mu_1 r_p + \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} r dW. \quad (30)$$

Отсюда на основании (23) находим:

$$mv_r = \mu_2 (r_C - r_e) + Q^r.$$

Дифференцируя почленно последнее равенство, получим:

$$-\mu_2 v_r + mw_r = \mu_2 v_r + \frac{d\mu_2}{dt} (r_C - r_e) + \frac{\delta Q^r}{dt},$$

откуда

$$mw_r = 2\mu_2 v_r + \frac{d\mu_2}{dt} (r_C - r_e) + \frac{\delta Q^r}{dt}. \quad (31)$$

Формулы (30) и (31) для v_r и w_r в квазистационарном случае $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0, \mu_1 = \mu_2 = \mu, \frac{\delta Q^r}{dt} \approx 0, \frac{d\mu}{dt} = 0\right)$ принимают простой вид:

$$v_r = \frac{\mu}{m} (r_C - r_p) = \frac{\mu}{m} C_p C, \quad (32)$$

$$w_r = \frac{2\mu}{m} v_r = 2 \frac{\mu^2}{m^2} C_p C. \quad (33)$$

Вычисления, проведенные по этим формулам для конкретных ракет, показывают, что величины v_r и w_r пренебрежимо малы по сравнению со средними скоростями и ускорениями ракет на активном участке: так, например, для немецкого 82-мм реактивного снаряда $v_r \approx 0,05$ м/сек, а $w_r \approx 0,02$ м/сек²; для Фау-2: $v_r < 0,1$ м/сек, а $w_r < 0,007$ м/сек².

ПРИЛОЖЕНИЕ II

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО АЭРОДИНАМИКЕ СНАРЯДА

§ 1. Введение

В аэродинамике, представляющей собой часть механики сплошных сред, изучается движение воздуха и исследуется взаимодействие воздушной среды с телами, с ней соприкасающимися. Мы будем рассматривать лишь вторую группу указанных вопросов, а именно — рассмотрим силы, действующие на движущиеся в воздухе снаряд или ракету.

На покоящийся снаряд со стороны воздуха действуют лишь силы давления, равнодействующая которых равна нулю вследствие равномерности давления воздуха на все части снаряда¹⁾.

При движении снаряда в воздухе давление воздуха на различные части снаряда уже не будет равномерным или, как говорят, на поверхности снаряда возникает некоторое неравномерное распределение давления. В этом случае результирующая сил давления, перпендикулярных к поверхности снаряда, уже не будет равна нулю.

Кроме того, на поверхность движущегося снаряда действуют еще вызванные вязкостью воздуха тангенциальные силы, направленные вдоль скорости потока воздуха, обтекающего данную часть снаряда.

Нормальные к поверхности снаряда силы давления воздуха вместе с тангенциальными к поверхности снаряда силами вязкости создают суммарные аэродинамические силу и момент, действующие на движущийся в воздухе снаряд.

Эти сила и момент зависят от формы и размеров снаряда, от ориентации снаряда относительно скорости его центра тяжести, от величины этой скорости, а также от угловой скорости снаряда, от плотности и коэффициента вязкости воздуха. Рассмотрению этих зависимостей и посвящено настоящее Приложение. Оно не претендует на сколько-нибудь полное описание аэродинамических явлений,

1) В действительности из-за силы тяжести давление воздуха на различные части покоящегося снаряда не одинаково и равнодействующая сил давления, так называемая архимедова сила, равна весу воздуха в объеме снаряда. Совершенно очевидно, что этой силой в интересующих нас случаях можно пренебречь.

а лишь конспективно дает о них основные сведения, необходимые для исследования движения снаряда в воздухе.

Для более подробного ознакомления с этими вопросами мы отсылаем читателя к курсам экспериментальной аэродинамики или к соответствующим разделам курсов внешней баллистики нереактивных снарядов.

§ 2. Элементы теории подобных явлений

Зависимость аэродинамических сил и моментов, действующих на снаряд, от размеров снаряда, его скорости и ориентации, а также от плотности воздушной среды, в которой он движется, может быть получена на основании соображений теории подобия из экспериментов, проводимых над моделями снарядов в аэродинамических трубах.

Использование результатов измерения сил и моментов, действующих на модель снаряда в аэродинамической трубе, для вычисления сил и моментов, действующих на натурный снаряд при реальном полете, базируется на предположении, что в обоих случаях — как в трубе, так и в натуре — модель и снаряд обтекаются *подобными воздушными потоками*¹⁾. При этом под подобными потоками понимают два таких потока, у которых отношение однородных физических величин в любых сходственных точках обоих потоков будет одинаковым²⁾. Это отношение для различных физических величин может быть различным и носит название *масштаба* соответствующей физической величины.

Так, например, в подобных потоках отношение скоростей в какой-либо точке одного потока к скорости в сходственной точке второго потока одинаково для всех пар сходственных точек. Это отношение назовем *масштабом скорости* в обоих потоках.

Другими словами, если мы назовем отношение скоростей в сходственных точках двух потоков, обтекающих геометрически подобные тела, *масштабом скорости*, то для подобных потоков масштаб скорости постоянен для всех точек потоков.

То же утверждение верно и для масштабов всех других физических величин, например ускорения; сил, действующих на сходственные объемы или площади; плотности воздуха и т. д.

Хотя масштабы различных физических величин в подобных потоках, вообще говоря, различны, однако между ними существуют

1) То обстоятельство, что в трубе модель неподвижна, а воздушный поток набегаёт на нее, в то время как в натуральном полете воздух неподвижен, а снаряд летит в нем, не играет роли, так как при стационарном движении аэродинамические силы и моменты зависят лишь от скорости снаряда относительно воздуха.

2) Под сходственными точками обоих потоков понимают точки, геометрически подобно расположенные относительно геометрически подобных тел, находящихся в обоих потоках.

вполне определенные соотношения. Так, например, масштаб сходственных площадей

$$k_s = \frac{S'}{S} = \left(\frac{l'}{l}\right)^2 = k_l^2,$$

где S и S' — сходственные площади, l и l' — сходственные линейные размеры этих подобных площадей, k_s и k_l — масштабы площадей и длин обоих потоков.

Аналогично

$$k_w = \frac{W'}{W} = \left(\frac{l'}{l}\right)^3 = k_l^3,$$

где W и W' — сходственные объемы.

Если под сходственными временами понимать, например, времена прохождения частиц воздуха между сходственными точками потоков, то отношение скоростей в сходственных точках равно

$$k_v = \frac{v'}{v} = \left[\lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta l'}{\Delta t'} \right] : \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} \right] = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta t' \rightarrow 0}} \frac{\Delta l'}{\Delta l} \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{k_l}{k_t},$$

где v и v' — скорости в сходственных точках, а k_t — масштаб сходственных времен.

Аналогично масштаб ускорений

$$k_j = \frac{j'}{j} = \frac{k_v}{k_t} = \frac{k_l}{k_t^2},$$

а масштаб удельных весов γ в сходственных точках равен

$$k_\gamma = \frac{\gamma'}{\gamma} = \left[\lim_{\Delta W' \rightarrow 0} \frac{\Delta q'}{\Delta W'} \right] : \left[\lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta W} \right] = \lim_{\substack{\Delta W \rightarrow 0 \\ \Delta W' \rightarrow 0}} \frac{\Delta q'}{\Delta q} \frac{\Delta W}{\Delta W'} = \frac{k_R}{k_W},$$

где k_R — масштаб сил, равный, в частности, масштабу сил тяжести q , и т. д.

Легко видеть, что масштабы всех физических величин составляются из масштабов основных физических величин — длины, времени и силы — так же, как размерность этих физических величин составляется из размерности длины, времени и силы.

В двух подобных воздушных потоках вполне определены скорости v и v' набегающих на тела потоков, плотности воздуха ρ и ρ' вдали от тел и линейные размеры тел. Задание этих величин определяет масштабы скорости, плотности и масштаб линейных размеров (геометрический масштаб). Поэтому все остальные масштабы должны выражаться через эти заданные характеристики обоих потоков.

Так, например, для масштабов сил (k_R) и моментов (k_M) имеем выражения:

$$k_R = k_\rho k_W k_j = k_\rho k_l^3 \frac{k_v}{k_t} = k_\rho k_l^2 k_v^2, \quad (1)$$

$$k_M = k_R k_l = k_\rho k_l^3 k_v^2. \quad (2)$$

Вследствие равенства (1) отношение всех сходственных сил при подобии обоих потоков, в том числе и сил, действующих на находящиеся в потоках подобные тела (например, натурный снаряд в первом потоке и модель снаряда во втором), равно

$$\frac{R'}{R} = k_R = k_\rho k_l^2 k_v^2 = \frac{\rho'}{\rho} \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \left(\frac{l'}{l}\right)^2.$$

Отсюда получим:

$$\frac{R}{\rho v^2 l^2} = \frac{R'}{\rho' v'^2 l'^2} = c, \quad (3)$$

где c одинаково для всех подобных потоков.

Обычно в экспериментальной аэродинамике это фундаментальное выражение (3), связывающее аэродинамические силы с характеристиками потока, записывают в другой форме, а именно, полагают:

$$R = c_R \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (4)$$

где R — аэродинамическая сила, действующая на тело в потоке; ρ — плотность воздуха в набегающем потоке, v — скорость набегающего потока, S — какая-нибудь характерная площадь (для снаряда в качестве S выбирают обычно площадь миделя S_m). c_R — безразмерный коэффициент силы (c_R -вектор).

Коэффициент c_R для подобных потоков, обтекающих геометрически подобные тела, уже не зависит от плотности и скорости потока и геометрических размеров тела, а зависит лишь от формы тела и его ориентации в потоке.

Совершенно таким же образом из выражения (2) получим:

$$M = c_m \frac{\rho v^2}{2} SL, \quad (5)$$

где M — момент аэродинамических сил, действующих на тело, помещенное в воздушный поток, L — какая-нибудь характерная длина (для снаряда в качестве длины L обычно выбирают длину снаряда), c_m — безразмерный коэффициент момента (c_m -вектор).

Коэффициент c_m , как и c_R , зависит лишь от формы тела, его ориентации в потоке и, кроме того, от выбора точки, относительно которой вычисляется момент.

Таким образом, соотношения (4) и (5) позволяют по результатам измерения сил и моментов, действующих на модель снаряда, помещенную в поток аэродинамической трубы, определить коэффициенты c_R и c_m , а по ним найти аэродинамические силы и моменты, действующие на натурный снаряд в реальном полете.

Однако применение этих соотношений базируется на предположении, что оба сравниваемых потока подобны. Как показывает анализ уравнений, описывающих движение воздуха, для того чтобы два воздушных потока были подобны, во всяком случае необходимо, чтобы

для обоих потоков были равны два безразмерных соотношения между характеристиками потока.

В обоих потоках должны быть равны

1) числа Рейнольдса

$$Re = \rho \frac{vL}{\mu}; \quad (6)$$

2) числа Маха

$$M = \frac{v}{a}, \quad (7)$$

где ρ — плотность воздуха в набегающем потоке, v — скорость набегающего потока, L — характерная длина, μ — коэффициент вязкости набегающего потока, a — скорость звука в набегающем потоке.

Поэтому в установленных ранее выражениях (4) и (5) для аэродинамических сил и моментов, действующих на снаряд, коэффициенты c_d и c_m зависят не только от формы снаряда и его ориентации относительно потока, но и от чисел Рейнольдса и Маха.

§ 3. Методы описания аэродинамических сил и моментов

Для описания аэродинамических сил и моментов вводят так называемую *поточную* или *скоростную систему координат*.

Как известно из механики, любую систему сил, действующих на тело, можно свести к силе, приложенной в некоторой произвольной точке, и к паре сил. В качестве этой произвольной точки выбирают центр тяжести снаряда C .

С центром тяжести снаряда связывают систему координат следующим образом (рис. 115). Ось Sx направляют по вектору скорости центра тяжести v . Угол между осью Sx (скоростью v) и осью снаряда CC' называют *углом атаки* снаряда δ . Оси Sx и CC' определяют так называемую плоскость угла атаки. Ось Sy лежит в плоскости угла атаки перпендикулярно к оси Sx . Ось Sz перпендикулярна к осям Sx и Sy и направлена так, чтобы система $Sxyz$ была правой системой. Направление отсчета угла атаки δ указано на рис. 115.

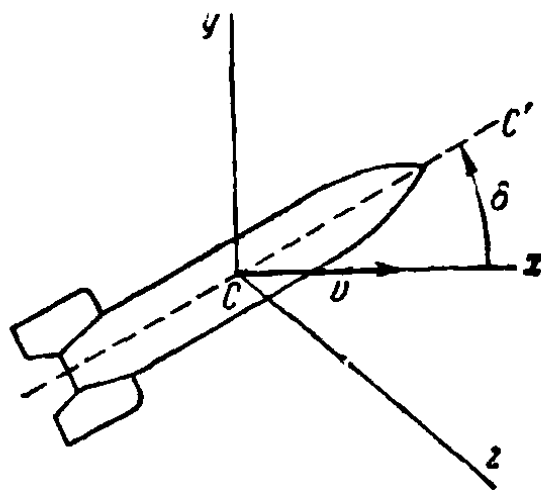


Рис. 115.

Таким образом, ориентация снаряда относительно набегающего потока может быть задана углом атаки δ и углом φ между плоскостью угла атаки и некоторой фиксированной плоскостью, проходящей через ось снаряда и связанной с корпусом снаряда (например, с плоскостью одного из перьев оперения).

Полную аэродинамическую силу R , действующую на снаряд, и момент пары M разлагают на компоненты по осям Cx , Cy и Cz . Эти компоненты носят следующие названия¹⁾:

$$\begin{aligned} -R_x &= -X = Q \text{ — лобовое сопротивление,} \\ R_y &= Y \text{ — подъемная сила,} \\ R_z &= Z \text{ — боковая сила,} \\ M_x &\text{ — момент крена,} \\ M_y &\text{ — момент рыскания,} \\ M_z &\text{ — момент тангажа.} \end{aligned}$$

В соответствии с формулами (4) и (5) перечисленные компоненты имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} Q &= c_x \frac{\rho v^2}{2} S, \\ Y &= c_y \frac{\rho v^2}{2} S, \\ Z &= c_z \frac{\rho v^2}{2} S, \\ M_x &= m_x \frac{\rho v^2}{2} SL, \\ M_y &= m_y \frac{\rho v^2}{2} SL, \\ M_z &= m_z \frac{\rho v^2}{2} SL, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где c_x , c_y , c_z , m_x , m_y и m_z — безразмерные коэффициенты соответствующей силы или момента.

Для симметричного снаряда при отсутствии производственных дефектов (погнутости оперения, смещения центра тяжести с оси снаряда и т. п.) можно пренебречь компонентами c_z и m_y и считать их равными нулю. Появление значительного по величине компонента m_x у оперенных снарядов связано обычно с косой установкой оперения (см. § 8). Поэтому вначале мы рассмотрим лишь компоненты Q , Y и M_z .

В соответствии с этим ограничением возникает второй способ описания аэродинамических сил и моментов, действующих на снаряд. В силу сказанного выше система сил, действующих на симметричный снаряд, симметрична относительно плоскости угла атаки. Как известно, такую систему сил можно свести к одной полной аэродинамической силе, лежащей в плоскости симметрии (в данном случае — в плоскости угла атаки). Точку пересечения линии действия этой силы с осью снаряда называют *центром давления*. Аэродинамический момент, действующий на снаряд, находят, вычисляя момент

¹⁾ Мы пользуемся здесь установленной ОСТ терминологией аэродинамики самолета.

полной аэродинамической силы относительно выбранной точки (обычно относительно центра тяжести снаряда). Легко найти связь между обоими способами описания аэродинамических сил и моментов.

Обозначим расстояние между центром тяжести C и центром давления O через l_C (рис. 116). Расстояние $l_C = CO$ будет положительно, если центр давления лежит впереди центра тяжести. Момент полной аэродинамической силы R относительно центра тяжести C равен

$$M_z = Yl_C \cos \delta + Ql_C \sin \delta,$$

где Y — подъемная сила, а Q — лобовое сопротивление. Отсюда согласно выражениям (8) имеем:

$$m_z \frac{\rho v^2}{2} SL = c_y \frac{\rho v^2}{2} Sl_C \cos \delta + c_x \frac{\rho v^2}{2} Sl_C \sin \delta.$$

Сокращая на $\frac{\rho v^2}{2} S$, получаем:

$$m_z L = l_C (c_y \cos \delta + c_x \sin \delta). \quad (9)$$

Заметим, что по формуле (9), зная коэффициент m_z относительно какой-нибудь точки оси снаряда, можно вычислить коэффициент m'_z этого снаряда относительно другой точки оси (такая задача возникает, например, при изменении центровки снаряда). Для этого по формуле (9) вычисляем расстояние l_C относительно первой точки. По смещению Δl_C второй точки по отношению к первой найдем расстояние центра давления от второй точки $l'_C = l_C + \Delta l_C$, а затем и коэффициент m'_z .

При этом

$$\frac{m'_z}{m_z} = \frac{l_C + \Delta l_C}{l_C}, \quad (10)$$

где

$$l_C = \frac{m_z L}{c_y \cos \delta + c_x \sin \delta}.$$

Помимо поточной системы координат, в аэродинамике часто употребляют так называемую связанную систему координат. В этой системе ось Sx_1 направлена по оси снаряда. Ось Sy_1 лежит в плоскости угла атаки и перпендикулярна к Sx_1 . Ось Sz_1 перпендикулярна к осям Sx_1 и Sy_1 , так что система $Sx_1 y_1 z_1$ — правая система (ось Sz_1 совпадает с Sz).

Компоненты полной аэродинамической силы X_1 , Y_1 и Z_1 по осям Sx_1 , Sy_1 и Sz_1 носят соответственно названия *тангенциальной*, *нормальной* и *боковой силы*. Компоненты аэродинамического момента M_{x1} , M_{y1} и M_{z1} носят те же названия, что и в поточной

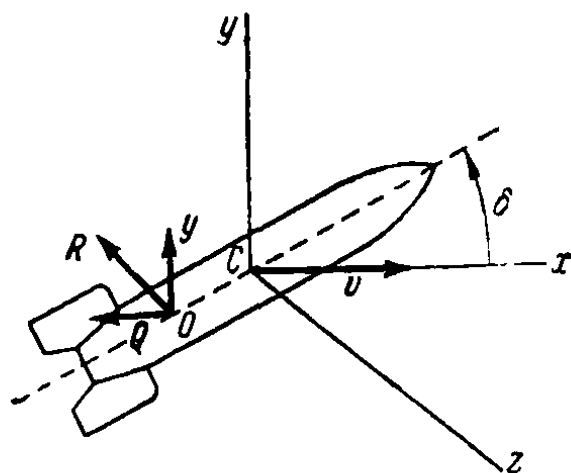


Рис. 116.

системе координат. Безразмерные коэффициенты этих компонентов c_{x1} , c_{y1} , m_{x1} и m_{y1} связаны между собой соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} c_{x1} &= -c_y \sin \delta + c_x \cos \delta, \\ c_{y1} &= c_y \cos \delta + c_x \sin \delta, \\ m_{x1} &= m_y \sin \delta + m_x \cos \delta, \\ m_{y1} &= m_y \cos \delta - m_x \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Учитывая второе из этих уравнений, мы можем представить соотношение (9) в виде

$$m_z L = l c c_{y1}. \quad (12)$$

Метод описания аэродинамических сил и моментов, изложенный в настоящем параграфе, соответствует случаю поступательного движения тела с постоянной скоростью.

Однако обычно этот метод используется и для общего случая движения тел в воздухе. При этом предполагается, что значения аэродинамической силы R и момента M (так называемые статические сила и момент) определяются мгновенным значением скорости центра тяжести и ориентацией тела относительно этой скорости. Влияние угловой скорости снаряда учитывается путем введения динамических сил и моментов, из которых для снаряда практическое значение могут иметь лишь так называемые демпфирующие моменты M_z и M_ω (см. § 7 и 8).

§ 4. Лобовое сопротивление

Компонент полной аэродинамической силы по оси Sx направлен всегда против скорости движения снаряда. Поэтому коэффициент лобового сопротивления c_x всегда положителен. Согласно изложенному в § 2 коэффициент c_x должен зависеть от формы снаряда, его ориентации (т. е. от угла атаки δ и угла поворота φ) и от чисел Рейнольдса и Маха.

Не имея возможности в этом кратком очерке остановиться на зависимости c_x снаряда от формы, рассмотрим вкратце лишь зависимость c_x от остальных параметров движения.

Зависимость лобового сопротивления от числа Рейнольдса исследована для неснарядных форм при малых числах M (порядка 0,2—0,3). В большей степени исследована зависимость коэффициента c_x снарядов от числа M . Известные из курсов внешней баллистики ¹⁾ «закон Сиацчи», «закон 1930 года», «закон 1943 года» и т. д. представляют собой не что иное, как функциональную зависимость коэффициента c_x от числа M (при угле атаки $\delta = 0$) ²⁾. Все эти законы были найдены

¹⁾ См., например, [7], § 29.

²⁾ Заметим, что коэффициент c_x в баллистике часто обозначается через k .

экспериментально путем измерения скоростей снарядов различных форм при движении вдоль траектории и последующего затем определения ускорения силы лобового сопротивления.

Так, например, «закон Сиаччи» был составлен на основании опытов, проведенных в прошлом веке на снаряде с цилиндрическим корпусом и радиусом оживала в полтора калибра. «Закон 1930 года» составлен на основании опытов, проведенных на снаряде, имевшем длинную оживальную часть, цилиндрический корпус и хвостовую часть в виде усеченного конуса. «Закон 1943 года» составлен на основании специальных отстрелов дальнобойных снарядов и т. д.

Отсылая за подробностями этих и подобных им экспериментов к курсам обычной внешней баллистики¹⁾, рассмотрим лишь виды «закона Сиаччи», «закона 1930 года» и «закона 1943 года», наиболее часто применяемые в баллистической практике.

На рис. 117 и в табл. I (см. стр. 313) приведены зависимости коэффициента c_x от числа M для «закона Сиаччи», «закона 1930 года» и «закона 1943 года». Из таблицы и рис. 117 можно видеть, что при малых скоростях (до $M = 0,8$ для «закона 1930 года», до

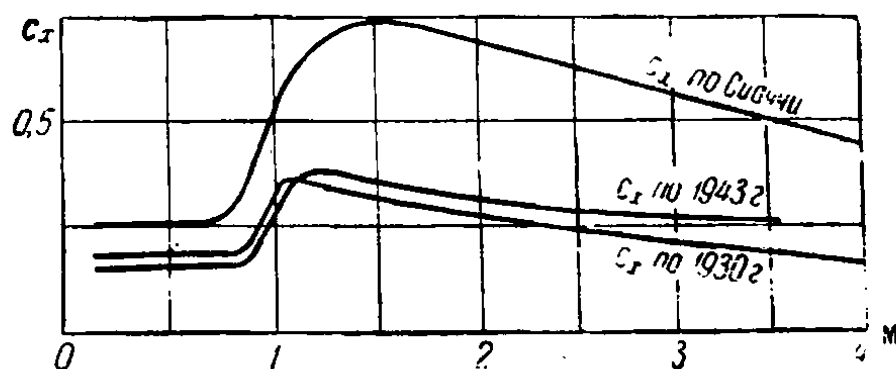


Рис. 117.

$M = 0,6$ для «закона Сиаччи» и до $M = 0,75$ для «закона 1943 года») коэффициент c_x этих снарядов остается постоянным. Резкое увеличение c_x с увеличением числа M наступает при $M \approx 0,8$. Коэффициент c_x достигает максимума при $M \approx 1,1$ для «закона 1930 года» и «закона 1943 года» и при $M = 1,5$ для «закона Сиаччи». Затем c_x начинает уменьшаться²⁾.

Рис. 117 и табл. I показывают также, что снаряды различной формы имеют различную зависимость c_x от числа M . Поэтому, вообще говоря, для вычисления траектории каждого снаряда необходимо знать функцию $c_x(M)$ для данного снаряда.

Последовательное проведение этого принципа при расчете траекторий снарядов привело бы к необходимости составления отдельных баллистических таблиц для каждой формы снаряда. Очевидно, что

¹⁾ См., например, [7].

²⁾ Заметим, однако, что лобовое сопротивление (пропорциональное $c_x v^2$) при этом растет.

практически это осуществить нельзя. Поэтому во внешней баллистике полагают, что снаряды, близкие по форме, имеют одинаковый вид функции $c_x(M)$, отличающийся лишь постоянным множителем, т. е. полагают, что для двух снарядов, близких по форме, отношение $\frac{c'_x(M)}{c_x(M)}$ не зависит от числа M (или от скорости снаряда). При этом отношение коэффициента c_x данного снаряда к $c_{x \text{ эт}}$ снаряда, выбранного за эталон, называют *коэффициентом формы* и обозначают через l .

Таким образом,

$$l = \frac{c_x}{c_{x \text{ эт}}}. \quad (13)$$

Из формулы (13) непосредственно вытекает, что коэффициент формы снаряда l пропорционален коэффициенту c_x снаряда, а множитель пропорциональности равен $\frac{1}{c_{x \text{ эт}}}$.

Из табл. 1 следует, что если известен коэффициент c_x снаряда при $M < 0,6$ (когда его можно считать независимым от числа M), то коэффициент формы l этого снаряда, получающийся при умножении c_x на $\frac{1}{c_{x \text{ эт}}}$, равен

$$\left. \begin{aligned} \text{для «закона 1930 года»} \quad l &= 5,43 c_x, \\ \text{для «закона Сначчи»} \quad l &= 3,92 c_x, \\ \text{для «закона 1943 года»} \quad l &= 6,36 c_x. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Соответственно этому методу описания силы лобового сопротивления в баллистике принято выражать ускорение лобового сопротивления

$$J = \frac{g}{q} Q = \frac{\pi d^2}{4q} \frac{g\rho}{2} v^2 c_x(M)$$

следующим образом:

$$J = cH(y)F(v), \quad (15)$$

где c — баллистический коэффициент:

$$c = \frac{ld^2}{q} 10^3 \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}}, \quad (16)$$

$H(y)$ — функция, характеризующая зависимость удельного веса воздуха Π от высоты y :

$$H(y) = \frac{\Pi(y)}{\Pi_0} \quad (17)$$

и $F(v)$ — функция, определяемая равенством

$$F(v) = \frac{\pi}{8} 10^{-3} \Pi_{0N} v^2 c_{x \text{ эт}}(M) = 4,74 \cdot 10^{-4} v^2 c_{x \text{ эт}}. \quad (18)$$

В этих выражениях Π_0 — удельный вес воздуха на земле ($y = 0$); Π_{0N} — удельный вес воздуха на земле при нормальных атмосферных условиях ¹⁾, d — калибр снаряда, q — вес снаряда.

Выражение (15) положено в основу вычисления баллистических таблиц, которые по входным данным стрельбы (начальной скорости v_0 , углу возвышения орудия θ_0 и баллистическому коэффициенту снаряда c) позволяют определить основные элементы траектории снаряда. Очевидно, что отличительной особенностью баллистической таблицы является принятая при ее составлении зависимость $F(v)$ или в конечном итоге зависимость $c_{x\text{эт}}(M)$. Так, например, известные таблицы Сначчи составлены, исходя из функции $F(v)$, для которой в качестве функции $c_{x\text{эт}}(M)$ принят «закон Сначчи». Баллистические таблицы в книге Я. М. Шапиро [7] составлены на основании «закона 1943 года» и т. д. ²⁾.

Исследования в аэродинамических трубах, устанавливающие зависимость коэффициента c_x от числа M , указывают на значительное расхождение законов сопротивления для оперенных снарядов с употребляемыми в баллистике законами Сначчи, 1930 года и 1943 года, особенно в области скоростей, близких к скорости звука.

Для оперенных снарядов коэффициент c_x начинает резко возрастать при $M \approx 0,6$, а не при $M \approx 0,8$, как это имеет место в упомянутых законах ³⁾. Кроме того, само возрастание c_x происходит более резко. Эти обстоятельства, а также малая обоснованность введения коэффициента формы i на широком интервале скоростей приводят к тому, что баллистические таблицы дают лишь ориентировочное значение элементов траектории.

При составлении таблиц стрельб для снарядов, отличающихся по форме от снарядов, положенных в основу составления закона сопротивления, необходимо откорректировать данные баллистических таблиц при помощи отстрелов этих снарядов на разные дистанции; при этой корректировке вводят для данной начальной скорости снаряда v_0 переменный коэффициент формы i , зависящий от угла возвышения стрельбы (т. е. фактически зависящий от средней скорости снаряда на траектории, которая меняется при изменении угла возвышения).

¹⁾ Под нормальными атмосферными условиями в баллистике принимают температуру воздуха $t_{0N} = 15,9^\circ \text{C}$ и атмосферное давление $p_{0N} = 750 \text{ мм рт. ст.}$ При этом $\Pi_{0N} = 1,206 \text{ кг/м}^3$, а скорость звука $a = 341 \text{ м/сек.}$ Заметим, что в международной стандартной атмосфере $t_{0N} = 15^\circ \text{C}$, $p_{0N} = 760 \text{ мм рт. ст.}$ и, следовательно, $\Pi_{0N} = 1,225 \text{ кг/м}^3$.

²⁾ См. Д. А. Вентцель и Я. М. Шапиро, Внешняя баллистика, ч. III, 1939.

³⁾ Число M , при котором начинается резкое возрастание c_x , практически совпадает с критическим числом $M(M_{кр})$. При $M = M_{кр}$ на обтекаемом теле появляются местные звуковые скорости. При $M > M_{кр}$ на теле возникают скачки уплотнения и появляется так называемое «волновое сопротивление».

В заключение остановимся на зависимости коэффициента c_x от угла атаки δ и угла поворота φ . На рис. 118 схематически представлен типичный график функции $c_x(\delta)$. Для симметричного снаряда функция $c_x(\delta)$ симметрична относительно угла δ . При малых углах атаки ($\delta \leq 3^\circ$) коэффициент c_x практически не зависит от δ и лишь затем начинается возрастание c_x при возрастании угла атаки.

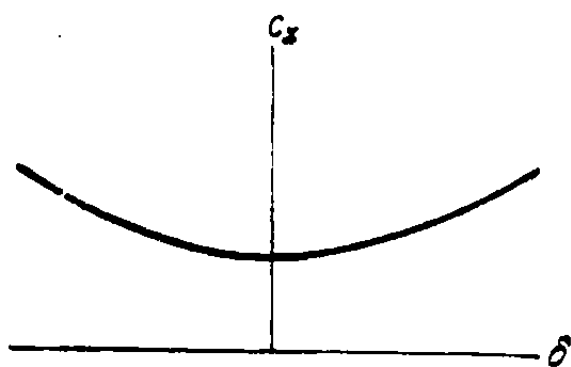


Рис. 118.

Разнообразные аэродинамические исследования показали, что коэффициент c_x снаряда (как артиллерийского, так и оперенного) не зависит от угла поворота φ .

§ 5. Подъемная сила

У снарядов обычной формы (как у артиллерийских, так и оперенных) подъемная сила всегда составляет с осью снаряда угол меньше 90° . В соответствии с введенной в § 3 поточной системой координат это означает, что $c_y > 0$ при $\delta > 0$ и $c_y < 0$ при $\delta < 0$ (см. рис. 115). Для симметричного снаряда $c_y = 0$ при $\delta = 0$.

Если ограничиться рассмотрением малых углов атаки ($\delta < 6^\circ$), то обычно функция $c_y(\delta)$ графически выражается прямой линией, как это схематически изображено на рис. 119. Наклон этой прямой к оси абсцисс характеризуется производной $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$, которая в силу сказанного выше всегда положительна.

Таким образом, в рассматриваемом интервале углов атаки функция $c_y(\delta)$ имеет вид

$$c_y(\delta) = \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \delta, \quad (19)$$

где

$$\frac{\partial c_y}{\partial \delta} = \text{const} > 0.$$

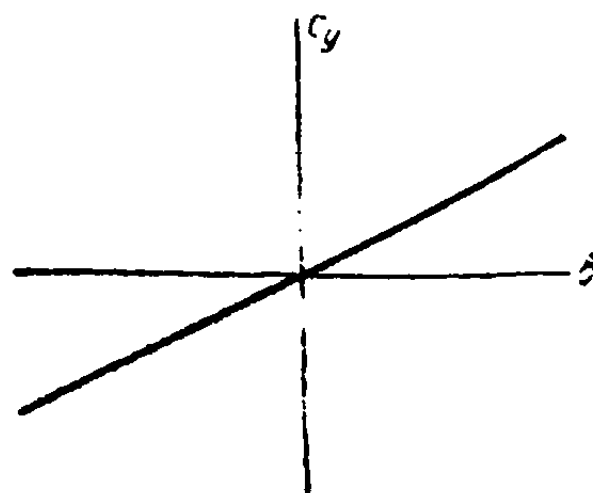


Рис. 119.

Для оперенных снарядов коэффициент c_y , помимо угла δ , может еще зависеть от угла поворота снаряда φ . Опыты, проведенные в аэродинамических трубах, показали, однако, что c_y оперенного снаряда практически не зависит от угла φ .

Опыты показали также, что $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ оперенного снаряда с надкалиберным оперением в 8—10 раз больше, чем $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ того же снаряда при

систом оперении. Таким образом, главную роль в создании подъемной силы оперенного снаряда играет оперение.

Для оперенных снарядов с надкалиберным оперением исследования зависимости $\frac{\partial c_y}{\partial \beta}$ от скорости снаряда, проведенные в нескольких аэродинамических лабораториях, показали, что до $M \approx 0,75—0,8$, т. е. до скоростей 250—280 м/сек, величина $\frac{\partial c_y}{\partial \beta}$ практически не зависит от числа M . Такие же, однако менее достоверные, результаты получены для артиллерийских снарядов.

Рассмотрим, наконец, влияние основных параметров оперения на $\frac{\partial c_y}{\partial \beta}$. Такими основными параметрами являются число перьев, площадь перьев, размах оперения l и хорда оперения b (рис. 120).

Систематические исследования влияния числа перьев на $\frac{\partial c_y}{\partial \beta}$ снаряда не были проведены. Однако экспери-

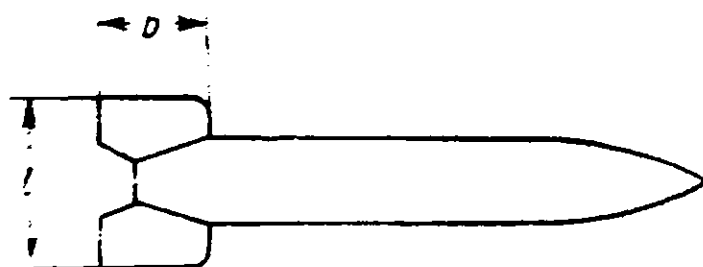


Рис. 120.

менты показывают, что не имеет смысла увеличивать число перьев сверх шести, так как это приводит лишь к незначительному увеличению $\frac{\partial c_y}{\partial \beta}$, не окупающему довольно значительного увеличения c_x .

Что же касается влияния размаха и хорды на $\frac{\partial c_y}{\partial \beta}$, то мы здесь скажем лишь качественные соображения. Из теории крыла известно, что $\frac{\partial c_y}{\partial \beta}$ крыла зависит от его удлинения.

Под удлинением крыла λ понимают отношение квадрата размаха крыла l к площади крыла $S_{кр}$ ¹⁾:

$$\lambda = \frac{l^2}{S_{кр}}. \quad (20)$$

Для удлинений $\lambda > 3$ теория устанавливает следующую зависимость $\frac{\partial c_y}{\partial \beta}$ от величины λ :

$$\left(\frac{\partial c_y}{\partial \beta} \right)_{c_{кр}} = 2\pi \frac{\lambda}{\lambda + 2}. \quad (21)$$

¹⁾ В случае прямоугольного крыла $\lambda = \frac{l}{b}$.

²⁾ Индекс $S_{кр}$ при $\frac{\partial c_y}{\partial \beta}$ означает, что в этой формуле коэффициент c_y берется к площади крыла.

Формула (21) показывает, что $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ крыла увеличивается при увеличении λ .

Для малых удлинений ($\lambda \approx 0,5—1,5$), с какими мы имеем дело в оперенных снарядах, это соотношение (21) точно не выполняется. Однако и здесь оно дает во всяком случае качественное представление о функции $\frac{\partial c_y}{\partial \lambda}(\lambda)$. Положим его в основу анализа влияния изме-

нения размаха и хорды оперения на $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ снаряда.

Как уже было указано выше, $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ снаряда определяется в основном подъемной силой оперения и не зависит от угла поворота снаряда φ . Ограничиваясь случаем четырехперного оперения, рассмотрим $+$ -образное положение оперения снаряда, при котором две лопасти оперения лежат в плоскости угла атаки и, следовательно, на них не возникает подъемная сила.

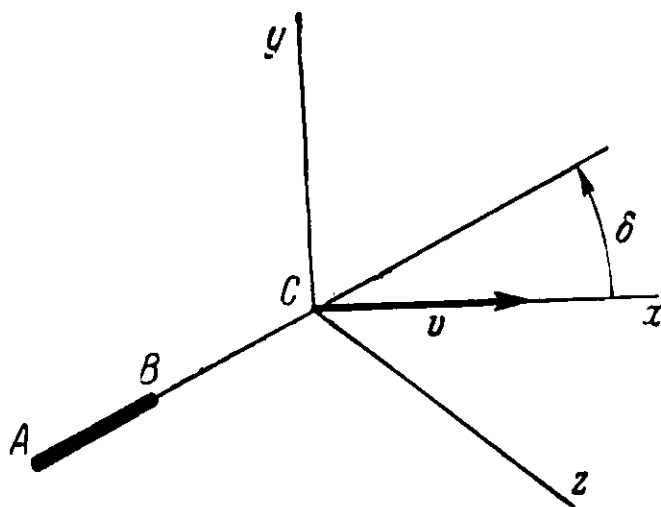


Рис. 121.

Этот случай можно представить «идеальной схемой» снаряда, изображенной на рис. 121. В этой схеме корпус снаряда заменен стержнем, на конце которого прикреплено прямоугольное крыло оперения AB. Центр тяжести «снаряда» лежит в точке C. Подъемная сила такого снаряда равна:

$$Y = (c_y)_{S_{кр}} \frac{\rho v^2}{2} S_{кр} = \left(\frac{\partial c_y}{\partial \delta} \right)_{S_{кр}} \frac{\rho v^2}{2} S_{кр} \delta.$$

Сравнивая последнее выражение с формулой

$$Y = \left(\frac{\partial c_y}{\partial \delta} \right)_{S_m} \frac{\rho v^2}{2} S_m \delta,$$

в которой коэффициент подъемной силы отнесен к площади миделя S_m , получим:

$$\left(\frac{\partial c_y}{\partial \delta} \right)_{S_m} = \left(\frac{\partial c_y}{\partial \delta} \right)_{S_{кр}} \frac{S_{кр}}{S_m}.$$

Отсюда в силу (21)

$$\left(\frac{\partial c_y}{\partial \delta} \right)_{S_m} = 2\pi \frac{\lambda}{\lambda + 2} \frac{S_{кр}}{S_m}. \quad (22)$$

При вариациях размаха и хорды оперения меняются величина удлинения λ и площадь крыла оперения $S_{\text{кр}}$; площадь же миделя S_m остается неизменной. Поэтому при этих вариациях

$$\frac{\partial c_y}{\partial \lambda}_{S_m} \sim \frac{1}{1+\lambda} S_{\text{кр}}. \quad (23)$$

Из формулы (23) вытекает, что $\left(\frac{\partial c_y}{\partial \lambda}\right)_{S_m}$ снаряда увеличивается при увеличении размаха и хорды. Однако в то время как увеличение размаха при сохранении постоянной хорды увеличивает и удлинение λ и площадь крыла, т. е. увеличивает оба множителя выражения (23), увеличение хорды при неизменном размахе увеличивает площадь крыла, но уменьшает λ , т. е. увеличивает второй и уменьшает первый из множителей формулы (23). Поэтому увеличение размаха оперения снаряда эффективнее увеличивает $\left(\frac{\partial c_y}{\partial \lambda}\right)_{S_m}$ снаряда, чем увеличение хорды.

Пронумеруем этот вывод на примере. Пусть у начального варианта снаряда крыло имеет хорду и размах, равные 1. Согласно (23) увеличение в 1,5 раза хорды этого крыла увеличивает $\frac{S_{\text{кр}}}{\lambda}$ снаряда всего лишь на 12,5%, в то время как увеличение в 1,5 раза размаха оперения увеличивает $\left(\frac{\partial c_y}{\partial \lambda}\right)_{S_m}$ снаряда примерно в 1,5 раза точнее, в 27,14 раз).

Следствие, что полученная резкая разница во влиянии размаха хорды на $\frac{\partial c_y}{\partial \lambda}$ снаряда является следствием малого удлинения крыла начального варианта.

Приведенные в настоящем параграфе качественные соображения о влиянии размаха и хорды оперения на $\frac{\partial c_y}{\partial \lambda}$ снаряда подтверждаются экспериментально.

§ 6. Экваториальный аэродинамический момент

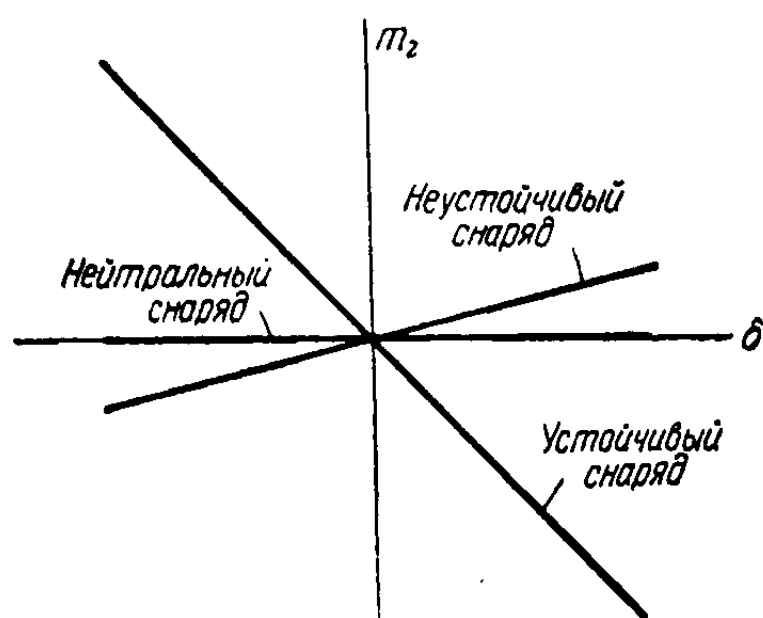
Компонент M_x аэродинамического момента перпендикулярен к плоскости угла атаки, поэтому его воздействие на снаряд сводится к стремлению повернуть угол атаки. Компонент M_z направлен по оси Cz , перпендикулярной к оси снаряда. Поэтому компонент M_z мы будем называть экваториальным аэродинамическим моментом.

На рис. 113 видно, что, если знак M_z (или, что то же самое, M_x) совпадает со знаком λ , то момент M_z стремится повернуть снаряд так, чтобы абсолютное значение угла атаки увеличилось.

т. е. в этом случае момент M_z стремится опрокинуть снаряд. Если же знак M_z (или m_z) противоположен знаку δ , то момент M_z стремится уменьшить абсолютное значение угла атаки. В этом случае момент M_z стремится привести ось снаряда к совпадению с касательной к траектории.

В первом случае момент M_z называется *опрокидывающим моментом*, а во втором — *стабилизирующим моментом*.

В соответствии со сказанным, если у снаряда на некотором интервале углов атаки выполняется неравенство



$$\frac{m_z}{\delta} < 0, \quad (24)$$

то говорят, что на этом интервале углов атаки снаряд *аэродинамически устойчив*.

Наоборот, если

$$\frac{m_z}{\delta} > 0, \quad (25)$$

то говорят, что на этом интервале углов атаки снаряд *аэродинамически неустойчив*.

В случае, если на некотором интервале изменения δ коэффициент $m_z = 0$, то говорят, что на

этом интервале снаряд *аэродинамически нейтрален*. У симметричного снаряда $m_z = 0$ при $\delta = 0$.

Если ограничиться рассмотрением малых углов атаки ($\delta < 6^\circ$), то обычно функция $m_z(\delta)$ на этом интервале линейна относительно δ и, следовательно, изображается прямой линией, проходящей через начало координат (рис. 122). Наклон этой прямой к оси абсцисс характеризуется производной $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$. Таким образом, в рассматриваемом интервале углов атаки

$$m_z = \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \delta, \quad (26)$$

где $\frac{\partial m_z}{\partial \delta} = \text{const.}$

В силу сказанного выше

$$\frac{\partial m_z}{\partial \delta} > 0 \text{ для неустойчивого снаряда.}$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial \delta} < 0 \text{ для устойчивого снаряда,}$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial \delta} = 0 \text{ для нейтрального снаряда.}$$

Рассмотрим теперь положение центра давления у различных типов снаряда. Из рис. 116 очевидно, что для устойчивого снаряда центр

давления должен лежать сзади центра тяжести ($l_C < 0$) и, наоборот, у неустойчивого снаряда центр давления лежит впереди центра тяжести ($l_C > 0$). У нейтрального снаряда центр тяжести и центр давления совпадают ($l_C = 0$).

В интервале углов атаки, при которых удовлетворяются соотношения (19) и (26), формула (9) в силу малости углов атаки δ ($\cos \delta \approx 1$ и $\sin \delta \approx \delta$) принимает вид ¹⁾

$$\frac{\partial m_z}{\partial \delta} L = l_C \left(\frac{\partial c_y}{\partial \delta} + c_x \right). \quad (27)$$

Обычно для оперенных снарядов коэффициент c_x во много раз меньше $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ (он составляет 2—4% от $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$). Поэтому ²⁾

$$\frac{\partial m_z}{\partial \delta} L \approx l_C \frac{\partial c_y}{\partial \delta}. \quad (28)$$

Как и для коэффициента c_y , опыты, проведенные в аэродинамических трубах, показали, что m_z оперенного снаряда практически не зависит от угла поворота φ .

Для выяснения роли отдельных частей снаряда в создании момента M_z полезно ввести понятие *распределения нормальной силы по длине снаряда*. По результатам измерения распределения давления по поверхности снаряда можно вычислить силы, действующие на отдельные элементы снаряда, ограниченные плоскостями, перпендикулярными к его оси. Компоненты этих сил, перпендикулярные к оси снаряда и лежащие в плоскости угла атаки, называют *нормальными силами, действующими на соответствующие элементы снаряда*. Разделив величины нормальных сил, действующих на отдельные элементы, на расстояния между плоскостями, ограничивающими элементы, получим так называемое *распределение плотности нормальной силы по длине снаряда* $\frac{dY_1}{dx}$ ³⁾. Разделив плотность нормальной силы на скоростной напор $\frac{\rho v^2}{2}$ и площадь миделя S_m , получим *распределение плотности безразмерного коэффициента нормальной силы c_{y1} по длине снаряда* $\frac{dc_{y1}}{dx}$.

¹⁾ Заметим, что в этой формуле в выражениях $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ и $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ угол δ нужно измерять в радианах. Ввиду того что $c_x > 0$ и $\frac{\partial c_y}{\partial \delta} > 0$, знак $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ совпадает со знаком l_C . Это подтверждает правильность выбора знака l_C .

²⁾ Приближенное равенство (28) эквивалентно равенству $\frac{\partial c_y}{\partial \delta} \approx \frac{dc_{y1}}{d\delta}$.

³⁾ $\frac{dY_1}{dx} \approx \frac{\Delta Y_1}{\Delta x}$, где ΔY_1 — нормальная сила, действующая на элемент, имеющий длину Δx .

На рис. 123 представлено типичное распределение плотности c_n по длине неоперенного снаряда с оживальной частью и конусной хвостовой частью (при положительном угле атаки). Исходя из графика $\frac{dc_n}{dx}(x)$, мы можем получить величину коэффициента нормальной силы c_n , интегрируя по длине снаряда, т. е. находя площадь, ограниченную кривой $\frac{dc_n}{dx}$ и осью абсцисс.

Аналогично момент M_z мы получим по формуле

$$M_z = \frac{\rho v^2}{2} S_n \int_0^l \frac{dc_n}{dx} (x - x_c) dx, \quad (29)$$

где x_c — координата центра тяжести.

Как видно на рис. 123, распределение плотности нормальной силы у неоперенного снаряда таково, что при этом создается аэродинамический момент M_z , опрокидывающий снаряд, так как подынтегральное выражение в формуле (29) всюду положительно.

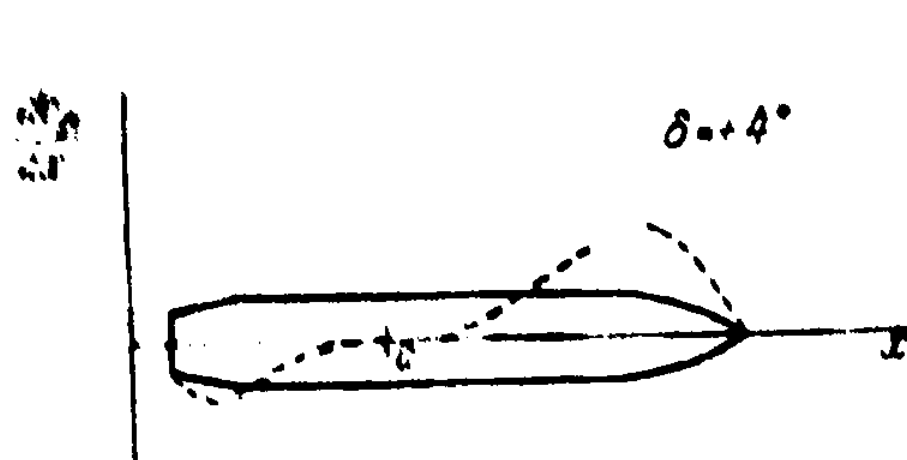


Рис. 123.

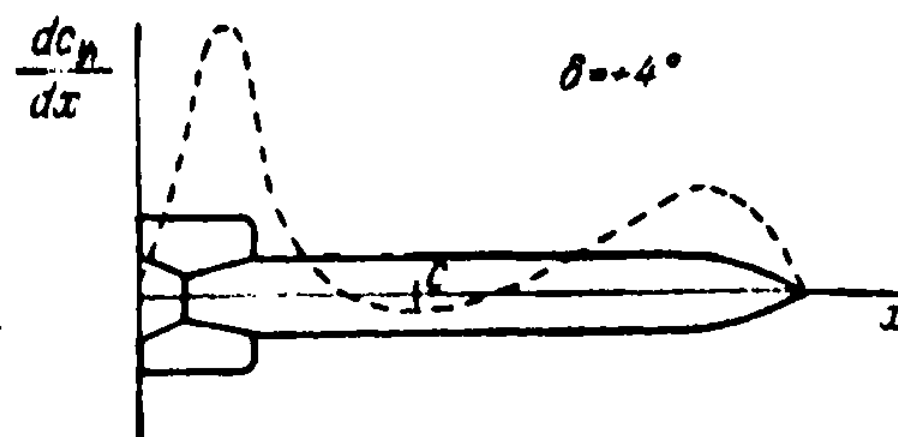


Рис. 124.

Установка оперения на хвостовой части снаряда, изображенного на рис. 123, приводит к заметному изменению плотности нормальной силы лишь в области оперения. На рис. 124 дан график зависимости $\frac{dc_n}{dx}$ от x для оперенного снаряда при том же, как и на рис. 123, положительном угле атаки δ . Из рис. 124 видно, что оперение вызывает появление значительной положительной плотности нормальной силы в зоне оперения.

При подсчете аэродинамического момента M_z относительно центра тяжести опрокидывающий момент оживальной части снаряда алгебраически складывается с восстанавливающим моментом оперения. В результате этого сложения суммарный аэродинамический момент будет приближать ось снаряда к вектору скорости центра тяжести, т. е. он будет стабилизирующим моментом. Очевидно, что этот стабилизирующий момент при данном корпусе снаряда будет тем больше, чем больше нормальная сила оперения и чем больше плечо оперения, т. е. расстояние оперения от центра тяжести снаряда.

Из всего сказанного вытекает, что между величиной стабилизирующего момента оперенного снаряда и подъемной силой оперения существует тесная связь ¹⁾. Чтобы увеличить величину стабилизирующего момента (или, точнее, величину $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$ снаряда), мы должны увеличить $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ оперения или плечо оперения. Поэтому все сказанное в предыдущем параграфе относительно методов увеличения $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ оперенного снаряда можно прямо перенести на способы увеличения $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$ снаряда.

Рассмотрим, наконец, зависимость $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ оперенного снаряда от его скорости. На рис. 125 представлены графики распределения плотности коэффициента нормальной силы для оперенного снаряда при

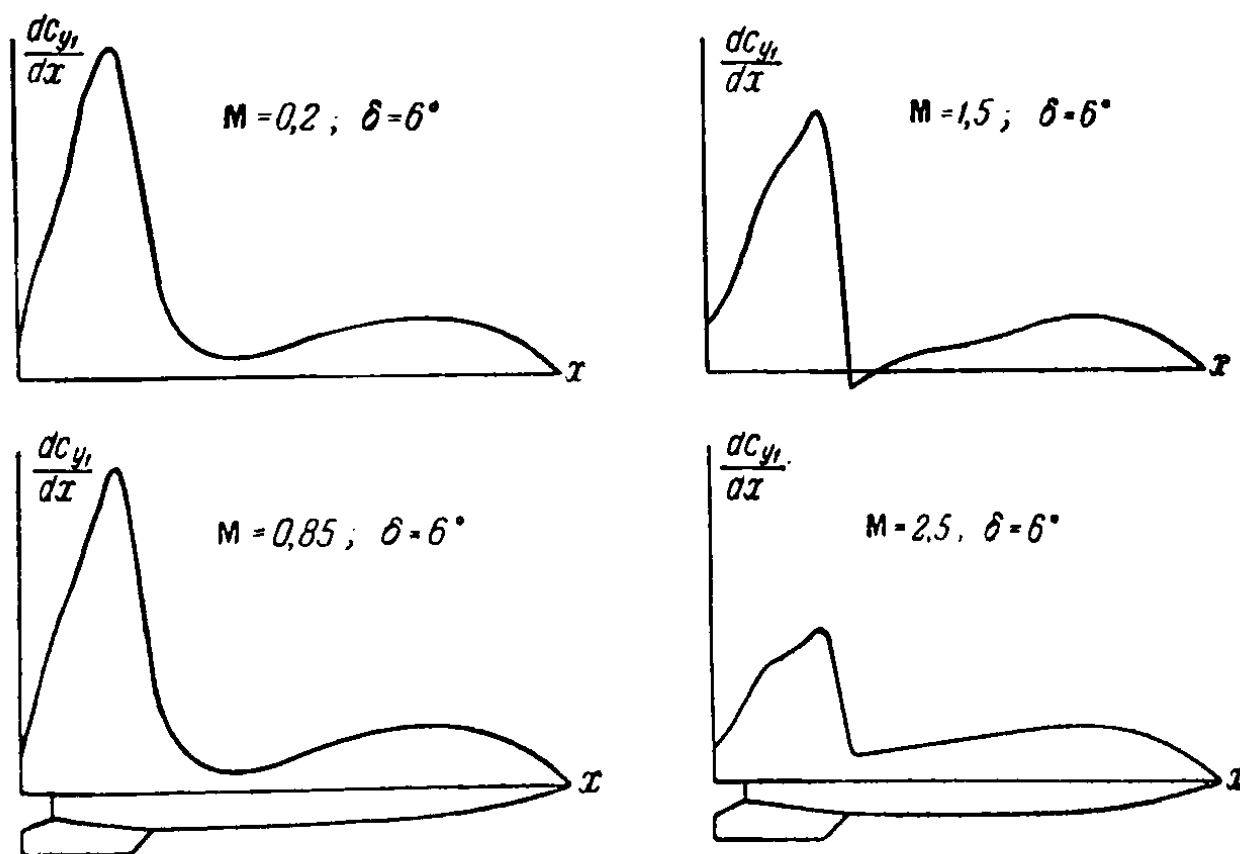


Рис. 125.

разных числах M . Из них вытекает, что $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ и $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$ снаряда почти не изменяются при изменении числа M в диапазоне $0,1 \leq M \leq 0,85$, а при сверхзвуковых скоростях ($M > 1$) эти коэффициенты уменьшаются при увеличении числа M .

Независимость числа $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ от числа M при $M < 0,8$ имеет место и для артиллерийских (неоперенных) снарядов.

¹⁾ Напомним, что подъемная сила и нормальная сила оперенного снаряда очень близки по своей величине.

§ 7. Экваториальный демпфирующий момент

При реальном полете симметричного оперенного снаряда ось его колеблется относительно траектории центра тяжести. При этом величина угла атаки под влиянием аэродинамического момента M_x колеблется около значения $\delta = 0$.

Таким образом, движение снаряда в каждый момент времени характеризуется не только скоростью центра тяжести, углом атаки δ и углом поворота φ , но и угловой скоростью Ω относительно оси, перпендикулярной к оси снаряда и проходящей через центр тяжести (так называемой экваториальной оси). Эта экваториальная угловая скорость Ω вызывает добавочный аэродинамический момент M_2 , пропорциональный угловой скорости и направленный так, что он в любой момент времени стремится уменьшить угловую скорость Ω . Момент M_2

называется *экваториальным демпфирующим моментом*. Физическую картину появления демпфирующего экваториального момента можно выяснить на схеме идеального оперенного снаряда, приведенной в § 5.

Пусть в некоторый момент времени снаряд имеет скорость центра тяжести, равную v , угол атаки δ и экваториальную угловую скорость Ω , направленную

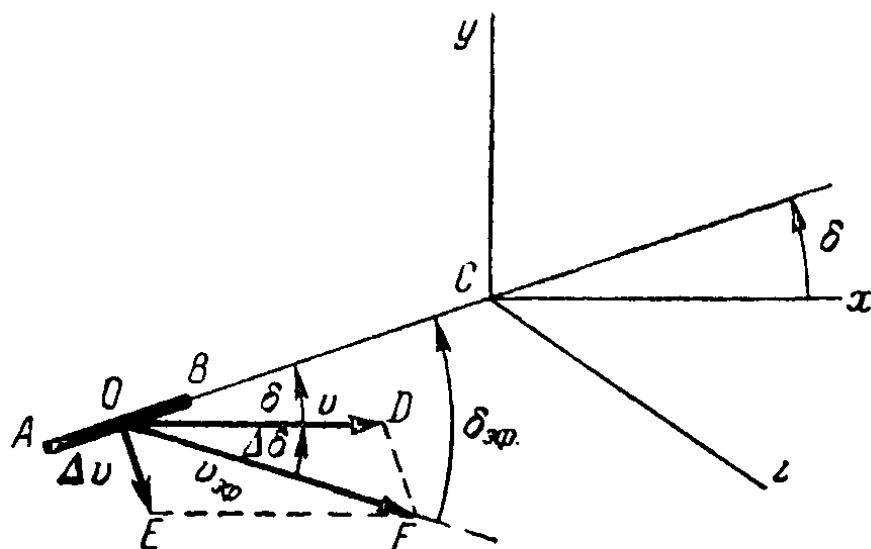


Рис. 126.

по оси Cz (рис. 126). Благодаря наличию угловой скорости Ω скорость оперения AB относительно воздуха $v_{эф}$, равная сумме переносной скорости центра тяжести снаряда v и относительной скорости оперения (относительно центра тяжести) Δv , не совпадает ни по величине, ни по направлению со скоростью v , а эффективный угол атаки оперения, представляющий собой угол между вектором скорости оперения $v_{эф}$ и плоскостью лопасти оперения AB , равен

$$\delta_{эф} = \delta + \Delta\delta.$$

Предполагая, что сила, действующая на оперение снаряда, в каждый момент времени зависит от скорости оперения относительно воздуха, мы приходим к выводу, что появление добавочной скорости Δv , связанной с угловой скоростью Ω , вызывает изменение силы, действующей на оперение.

В рассматриваемом на рис. 126 случае положительного угла атаки δ и положительной угловой скорости Ω эффективный угол атаки больше угла δ . Это означает, что подъемная сила и стабилизирующий момент оперения должны быть в этом случае больше, чем при равенстве

нулю угловой скорости Ω . Таким образом, в этом случае ($\delta > 0$, $\Omega > 0$) угловая скорость Ω вызывает добавочный аэродинамический момент, направленный против угловой скорости. Легко показать, что при любой комбинации знаков δ и Ω этот вывод сохранится.

Рассмотрим теперь подробнее связь между экваториальным демпфирующим моментом и характеристиками движения. Добавочная скорость Δv перпендикулярна к оси снаряда и равна $l_C \Omega$, где l_C — расстояние от центра тяжести снаряда до центра давления оперения. Поэтому в треугольнике OEF (см. рис. 126)

$$OE = \Delta v = \mp l_C \Omega, \quad EF = v, \quad OF = v_{\text{эф}},$$

$$\angle OFE = \pm \delta; \quad \angle OEF = \frac{\pi}{2} \pm \delta; \quad \angle EOF = \frac{\pi}{2} \mp \delta \mp \Delta \delta^1).$$

Согласно теореме синусов имеем:

$$\frac{v}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \mp \delta \mp \Delta \delta\right)} = \frac{v_{\text{эф}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \delta\right)} = \frac{\mp \Omega l_C}{\sin(\pm \Delta \delta)}.$$

Отсюда

$$v_{\text{эф}} = v \frac{\cos \delta}{\cos(\delta + \Delta \delta)}, \quad \sin \Delta \delta = -\frac{l_C \Omega}{v} \cos(\delta + \Delta \delta).$$

Так как обычно угловая скорость Ω мала, то угол $|\Delta \delta| = \frac{|\Omega l_C|}{v}$ мал. Ограничиваясь также малыми углами атаки, мы можем приближенно считать $\cos \delta$ и $\cos(\delta + \Delta \delta)$ равными единице, а $\sin \Delta \delta$ — равным углу $\Delta \delta$.

Тогда

$$v_{\text{эф}} \approx v, \quad \Delta \delta = -\frac{\Omega l_C}{v}, \quad \delta_{\text{эф}} = \delta + \Delta \delta = \delta - \frac{\Omega l_C}{v}. \quad (30)$$

Подъемная сила оперения равна

$$Y = \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \delta_{\text{эф}} \frac{\rho v_{\text{эф}}^2}{2} S_M = \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \left(\delta - \frac{\Omega l_C}{v} \right) \frac{\rho v^2}{2} S_M. \quad (31)$$

Стабилизирующий момент M_z в нашем случае равен (при пренебрежении лобовым сопротивлением)

$$\begin{aligned} M_z = Y l_C \cos(\delta + \Delta \delta) &\approx \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \left(\delta - \frac{\Omega l_C}{v} \right) \frac{\rho v^2}{2} S_M l_C = \\ &= l_C \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \delta \frac{\rho v^2}{2} S_M - \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \frac{\rho \Omega v l_C}{2} l_C. \end{aligned} \quad (32)$$

Первый член выражения (32) представляет собой уже знакомый нам аэродинамический момент M_z , связанный с наличием угла атаки δ

¹⁾ Верхний знак соответствует случаю, когда $\Omega > 0$, нижний — когда $\Omega < 0$. Напомним, что для оперенного снаряда $l_C < 0$.

и равный $\frac{\partial m_z}{\partial \delta} \delta \frac{\rho v^2}{2} S_m L$. Второй член представляет собой экваториальный демпфирующий момент M_Ω , обязанный своим происхождением наличию экваториальной угловой скорости ¹⁾.

Таким образом,

$$M_\Omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \rho \Omega v S_m l_C^2, \quad (33)$$

т. е. момент M_Ω пропорционален величине экваториальной угловой скорости и первой степени скорости центра тяжести. Ввиду того что величина $\frac{\partial c_y}{\partial \delta}$ всегда положительна, знак минус в выражении (33) означает, что M_Ω всегда стремится уменьшить угловую скорость Ω .

В экспериментальной аэродинамике принято обычно записывать выражение (33) в виде

$$M_\Omega = m_\Omega \rho v \Omega S_m L^2, \quad (34)$$

где L — характерная длина, m_Ω — безразмерный коэффициент экваториального демпфирующего момента (коэффициент m_Ω всегда отрицателен).

Сравнивая выражения (33) и (34), можно заключить, что для идеального снаряда

$$m_\Omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \frac{l_C^2}{L^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \frac{l_C}{L}. \quad (35)$$

В случае реального снаряда (как оперенного, так и неоперенного) природа возникновения экваториального демпфирующего момента остается такой же, как и для идеальной схемы: вследствие отличия $v_{эф}$ различных частей снаряда от скорости центра тяжести v появляется добавочный момент, пропорциональный угловой скорости Ω . Поэтому формула (34) имеет место и для любого снаряда. С известной степенью приближения применима для оценки m_Ω оперенных снарядов и формула (35).

§ 8. Аксиальные аэродинамические моменты

Для симметричного оперенного снаряда, как было уже указано выше, компонент момента M_x по оси снаряда практически равен нулю ²⁾. Иначе обстоит дело для снаряда с косо поставленным оперением.

¹⁾ Согласно формуле (31) угловая скорость Ω вызывает добавочную подъемную силу $Y_\Omega = -\frac{\partial c_y}{\partial \delta} \frac{\rho v}{2} \Omega l_C S_m$. Однако влияние этой силы на полет снаряда ничтожно мало, и мы в дальнейшем не будем учитывать силу Y_Ω .

²⁾ Ввиду того что для симметричного снаряда компонент момента в связанной системе координат M_{y1} равен нулю, то $M_x = M_{x1} \cos \delta \approx M_{x1}$. Поэтому в дальнейшем не делается различия между M_x и M_{x1} .

Под снарядом с косо поставленным оперением понимают снаряд, у которого каждая лопасть оперения составляет некоторый угол ϵ с осью снаряда, так что при повороте снаряда на угол $\frac{360^\circ}{n}$ (где n — число перьев оперения) каждое перо принимает положение, которое занимало соседнее перо до поворота.

При такой установке лопастей во время движения снаряда возникает момент, закручивающий снаряд вокруг оси симметрии (аксиальный момент M_x).

Рассмотрим для простоты движение такого снаряда при угле атаки $\delta = 0$ (рис. 127). Так как каждая лопасть оперения встречает при этом поток воздуха под углом атаки ϵ , то на ней возникает подъемная сила Y_1 , перпендикулярная к скорости v и, следовательно, перпендикулярная к оси снаряда. Центр давления этой силы (т. е. точка пересечения линии действия этой силы с плоскостью пера) расположен на некотором расстоянии r_c от оси снаряда (рис. 128). Поэтому подъемная сила Y_1 создает момент $Y_1 r_c$ относительно оси снаряда.

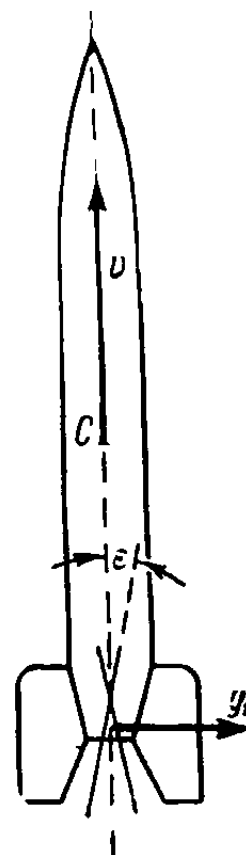


Рис. 127.

Если число перьев оперения равно n , то полный аксиальный момент равен $n Y_1 r_c$. Так как подъемная

сила пера Y_1 пропорциональна плотности воздуха ρ , квадрату скорости v и углу установки пера оперения ϵ (при малых ϵ), то суммарный аэродинамический момент можно представить в виде

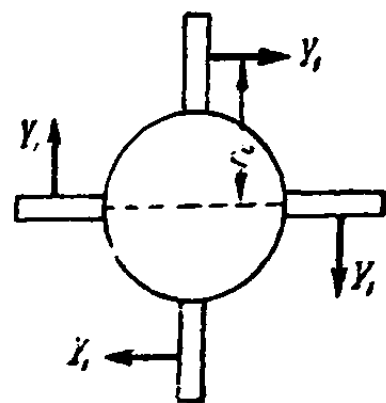


Рис. 128.

$$M_x = m_x \frac{\rho v^2}{2} S_M L = \frac{\partial m_x}{\partial \epsilon} \epsilon \frac{\rho v^2}{2} S_M L. \quad (36)$$

Испытания в аэродинамических трубах показывают, что m_x снаряда с косо поставленным оперением практически не зависит от угла атаки снаряда δ (при $\delta \leq 6^\circ$).

При вращении оперенного снаряда (как с прямым, так и с косо поставленным оперением) с угловой скоростью ω вокруг оси симметрии возникает аэродинамический *демпфирующий аксиальный* момент M_ω , пропорциональный ω и стремящийся уменьшить величину ω .

Природа происхождения этого момента совершенно аналогична природе экваториального демпфирующего момента.

Выясним это на примере полета снаряда с прямым оперением со скоростью v и угловой скоростью ω при угле атаки $\delta = 0$. При этом скорость лопасти оперения относительно воздуха будет складываться из переносной скорости центра тяжести v и относительной скорости Δv , равной произведению угловой скорости ω на расстояние

Сравнивая полученное выражение с формулой (36), получим:

$$m_x = \frac{4kr_c}{L} \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \varepsilon. \quad (39)$$

Совершенно аналогично найдем для аксиального демпфирующего момента

$$M_\omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial m_x}{\partial \delta} \rho \omega v S_x L r_c = -2kr_c^2 \frac{\partial c_y}{\partial \delta} \rho \omega v S_x.$$

Сравнивая это последнее выражение с формулой (38), получим:

$$m_\omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial m_x}{\partial \varepsilon} \frac{r_c}{L} = -2k \left(\frac{r_c}{L} \right)^2 \frac{\partial c_y}{\partial \delta}. \quad (40)$$

Предполагая, что центр давления лопасти лежит посредине лопасти (по размаху), получим:

$$r_c = \frac{d+l}{4}, \quad (41)$$

где d — калибр снаряда, а l — размах оперения.

Величину k можно оценить из предположения, что вдоль размаха оперения подъемная сила распределена равномерно. Тогда

$$k = \frac{l-d}{2l}. \quad (42)$$

Еще раз напоминаем, что формулы (39)—(42) могут служить лишь для оценки порядка величин m_x и m_ω .

§ 9. О влиянии аэродинамических характеристик на полет снаряда

Мы видели в § 4, что минимальное значение лобового сопротивления соответствует углу атаки $\delta = 0$. Так как для увеличения дальности снаряда мы заинтересованы в уменьшении лобового сопротивления, то в идеальном случае снаряд должен двигаться так, чтобы в любой момент времени угол атаки δ равнялся нулю или по крайней мере был мал. Такой полет снаряда мы будем называть *следящим полетом*, так как при этом ось снаряда как бы следит за направлением траектории.

Однако начальные возмущения и возмущения при полете всегда вызывают некоторое отклонение оси снаряда от касательной к траектории центра тяжести, т. е. вызывают появление угла атаки. Если центр давления аэродинамической силы лежит сзади центра тяжести снаряда ($l_c < 0$ или $\frac{\partial m_z}{\partial \delta} < 0$), то при этом появляется момент M_z , стремящийся повернуть снаряд так, чтобы ось снаряда приблизилась к касательной к траектории центра тяжести, т. е. чтобы абсолютное

значение угла атаки уменьшалось (см. § 6). Если же центр давления лежит впереди центра тяжести, появляющийся момент M_z стремится еще более увеличить абсолютное значение угла атаки, т. е. отдалить ось снаряда от направления траектории. В первом случае ось снаряда будет совершать вращательно-колебательное движение относительно направления траектории, во втором же случае снаряд начнет кувираться.

Первый случай имеет место для оперенных снарядов. При этом возбужденное возмущающими факторами ¹⁾ колебательное движение оси снаряда гасится экваториальным демпфирующим моментом. Если исключить из рассмотрения порывы ветра, то можно утверждать, что при прочих равных условиях одни и те же возмущающие факторы вызовут тем меньшую амплитуду колебаний угла атаки симметричного оперенного снаряда, чем большим значением коэффициента $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$ обладает снаряд. Это является следствием того, что при одинаковых углах атаки при прочих равных условиях на снаряд с большим значением $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$ будет действовать больший стабилизирующий момент M_z . Поэтому иногда величину $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$ связывают с устойчивостью снаряда и говорят, что снаряд тем более устойчив в полете (тем более стабилизирован), чем большим значением $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$ он обладает.

У ракеты на активном участке полета возникает большой угловой разброс траекторий, так как при появлении из-за возмущающих факторов угла атаки возникает компонент реактивной тяги, перпендикулярный к траектории центра тяжести. Чем больше абсолютная величина угла атаки, тем больше этот нормальный компонент реактивной тяги и тем больше он искривляет траекторию ракеты. Поэтому увеличение $\left| \frac{\partial m_z}{\partial \delta} \right|$ для оперенных ракет должно при равных возмущающих факторах вызвать уменьшение амплитуды угла атаки δ и, следовательно, уменьшение углового разброса траекторий или, что то же, улучшение кучности.

У артиллерийских снарядов и вращающихся ракет центр давления лежит впереди центра тяжести ($\frac{\partial m_z}{\partial \delta} > 0$), и поэтому, для того чтобы их полет был следящим, необходимо стабилизировать его путем придания снаряду или ракете быстрого вращения вокруг оси симметрии. У вращающегося артиллерийского снаряда или вращающейся ракеты опрокидывающий момент M_z не вызывает кувиркания, а приводит лишь к прецессии и нутации оси снаряда (ракеты) около направле-

¹⁾ Такими возмущающими факторами являются, например, начальные возмущения при выходе снаряда из ствола орудия или направляющего устройства, порывы ветра, асимметрия аэродинамических сил, вызванная асимметрией снаряда, эксцентриситет реактивной силы у ракеты и т. д.

ния траектории. Возникающие при этом углы атаки у правильно сконструированного снаряда невелики.

Необходимо здесь заметить, что у вращающегося артиллерийского снаряда или вращающейся ракеты опрокидывающий момент M_z не только не вызывает кувыркания, но, наоборот, вынуждает ось следить за траекторией. Действительно, в случае отсутствия опрокидывающего момента ось снаряда (ракеты) не меняла бы своего направления в пространстве и во все время полета была бы наклонена к горизонту под углом, равным углу возвышения ствола орудия. Поэтому при конструировании артиллерийских снарядов или вращающихся ракет необходимо подобрать (при данной угловой скорости вращения) величину $\frac{\partial m_z}{\partial \delta}$ снаряда таким образом, чтобы, с одной стороны, она

не была слишком велика (тогда момент M_z на начальном участке траектории, где скорость v , а следовательно, и M_z максимальны, будет вызывать появление значительных углов атаки), но и не слишком мала (так как тогда на вершине траектории, где скорость v и момент M_z минимальны, снаряд будет плохо следить за траекторией и возникнут большие углы атаки).

Появление значительных углов атаки, помимо снижения дальности снаряда, приводит еще и к ухудшению кучности по дальности. Действительно, факторы, возмущающие движение снаряда, носят случайный характер, поэтому их воздействие на снаряд от выстрела к выстрелу меняется. Меняются также и появляющиеся при этом амплитуды

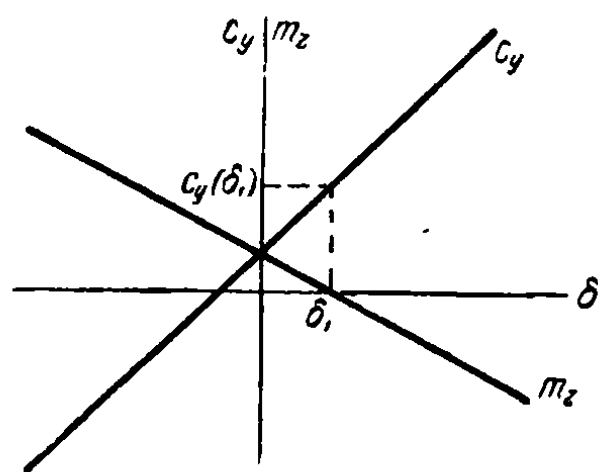


Рис. 130.

колебаний угла атаки, а следовательно, и средние значения коэффициента лобового сопротивления. Последнее обстоятельство и вызывает разброс по дальности. По диаграмме зависимости коэффициента c_x от угла атаки δ (см. рис. 118) легко заключить, что при малых углах атаки c_x слабо меняется с изменением δ и лишь при $\delta > 5^\circ$ могут наступить значительные изменения. Поэтому следящий за траекторией снаряд будет обладать гораздо меньшим разбросом по дальности, чем снаряд, при полете которого возникают большие углы атаки.

Остановимся, наконец, на влиянии аэродинамической асимметрии оперенного снаряда на его полет. У такого снаряда вследствие перекоса или погнутости оперения коэффициенты c_y и m_z при $\delta = 0$ могут быть не равны нулю. На рис. 130 представлены типичные графики $c_y(\delta)$ и $m_z(\delta)$ такого снаряда. Угол δ_1 , при котором $m_z = 0$, носит название балансировочного угла атаки. При полете такого снаряда угол атаки будет колебаться около значения δ_1 . При таком колебании среднее значение c_y уже не будет равно нулю (как в случае симметричного снаряда), а будет равно $c_y(\delta_1)$. Это обстоятельство может привести к сносу снаряда по направлению нормали к траектории и вызвать боковое рассеивание таких снарядов и рассеивание по дальности.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Асимметрия аэродинамическая 311
- Баллистика внешняя 7
 - внутренняя 7
- Бесселя функция 108
- Вектор случайный 81
- Величина случайная дискретная 70
 - — непрерывная 71
- Вес ракетного заряда 31
 - ракеты пассивный 31
 - — полный 31
- Гаусса закон распределения 72 и д.
- Дальность прямого выстрела 198
- Движение газа в ракете квазистационарное 18
- Деривация 241
- Диаграмма реактивного ускорения 37, 122, 196—198, 206—208
 - — — ступенчатая 122
 - реактивной силы 35
 - — тяги 38
- Дидиона метод 266
- Длина активного участка 35 и д., 47, 130
 - критического участка 106, 128, 130
 - направляющей эффективная 38, 120 и д., 182, 270
 - пути эффективная 122, 182, 270
- Задача основная внешней баллистики 24, 27
- Задачи специальные 11, 24
- Закон распределения Гаусса 72 и д.
 - — плотности вероятности 71
 - сопротивления, 1930 г. 45, 54, 292 и д.
 - —, 1943 г. 292 и д.
 - —, Сиацци 54, 292 и д.
- Значение вероятное (срединное) 73
 - — бокового отклонения (Вб) 83
 - — отклонения по высоте (Вв) 203
 - — — по дальности (Вд) 84
- Значение вероятное углового отклонения 83, 101, 170
 - — эксцентриситета 100
- Импульс заряда единичный 27
- Интеграл Френеля 108
- Интервал разброса 74
- Кориолиса момент 138 и д., 211 и д., 281 и д.
- Корню спираль 110 и д.
- Коэффициент аэродинамический 100, 159 и д.
 - баллистический 24, 53, 61, 294
 - гироскопической устойчивости 239, 252 и д.
 - демпфирующего аксиального момента 52, 306 и д.
 - — экваториального момента 304 и д.
 - лобового сопротивления 288, 292 и д.
 - подъемной силы 288, 296 и д.
 - стабилизирующего момента 189
 - формы 43, 294
- Крамп функция 74
- Масштаб физической величины 286
- Маха число 244, 289
- Медиана случайной величины 71
- Мера точности закона Гаусса 72, 73 и д.
- Метод Дидиона 266
- Мины активно-реактивные 122, 125
- Момент аэродинамический аксиальный 10, 159, 222, 266, 306
 - — демпфирующий аксиальный 159, 227, 236, 270, 296, 311 и д.
 - — — экваториальный 91, 222, 226, 266, 292, 304 и д.
 - — стабилизирующий 10, 91, 104, 123, 139, 210, 222, 244, 266, 299 и д.
 - — экваториальный (опрокидывающий) 10, 91, 104, 123, 130, 222, 237, 244, 266, 299 и д.

- Момент Кориолиса 139 и д., 211
и д., 261 и д.
— реактивный аксиальный 7, 69, 152,
155 и д., 221, 232, 266
— экваториальный боковой (от-
клоняющий) 7, 90, 94, 103, 139, 192,
221, 266
- Напор скоростной 301
Направляющая спиральная 167, 177
Нейтральность аэродинамическая 300
Несимметрия реактивных сил 98
Неустойчивость аэродинамическая 300
- Оболочка 12
— твердая 12, 1
Оперение (хорда, размах, площадь
перьев) 297
— косо поставленное 152, 163, 177
Отклонение боковое 68, 76
— боковое вероятное 67, 75 и д., 83
— вероятное 73, 82, 83
— — по дальности 67, 75
— по высоте 207
— угловое 10, 89, 101, 108, 114, 168,
170, 175, 189, 194, 246, 257
- Плечо сопла 134, 201
Плоскость бросания 9
— угла атаки 293
Плотность вероятности 71, 81, 82, 170
— коэффициента нормальной силы 302
— нормальной силы 301
Поверхность контрольная 11, 25
— разрыва плотности 15
— твердая 12
Полет следящий 309
Потоки воздушные подобные 19
Принцип затвердевания 7, 11, 18 и д.
Приход абсолютный секундный
массы 14
Проворот 152
Путь эффективный 182, 183
- Разброс боковой 68, 179, 181
— максимальный 74
— угловой 102, 115, 117, 127, 202
Ракеты ближнего боя 107
— вращающиеся 7, 74, 152, 232,
237, 274
— невращающиеся 233, 271
Ракеты оперенные 7, 87 и д.
— оперенные проворачивающиеся
151, 234, 273
— — противотанковые 184 и д.
— пороховые 7
- Ракеты проворачивающиеся 152
— противотанковые 107
— с воздушным реактивным двига-
телем 7
— с жидкостным реактивным двига-
телем 7
— составные 122, 125
Рассеивание ракет 67, 138, 151, 211
— — боковое 68, 107, 202
— — по высоте 107, 202
— — по дальности 84
— — угловое 117, 126, 128, 130
Расход массы газов 139 и д., 157
— секундный абсолютный массы 14
— — кинетического момента 13, 16
— — количества движения 13, 16, 278
— статического момента 14
Рейнольдса число 289
- Сначчи закон сопротивления 54, 292
и д.
Сила атмосферного давления 19
— аэродинамическая боковая 295
— — лобового сопротивления 222,
224, 262
— — нормальная 291
— — подъемная 222, 224, 265
— — полная 290
— — тангенциальная 291
— боковая 291
— веса 43
— подъемная 9, 24, 290, 296, 303
— реактивная 17, 20, 25, 69
— — ее боковая слагающая 90
Силы вариационные 18
— инерции переносные 16
— нормальные 301
— фиктивные 12
Система координат поточная 289
— — связанная 291
— — скоростная 289
— переменного состава 12
— постоянного состава 12
Скорость дульная 9, 35, 36, 123
— истечения средняя 26
— — эффективная 9, 26, 157
— угловая 21
— — экваториальная 70, 139, 304
— центра инерции относительно кор-
пуса 288
Снаряды орудийно-реактивные 30, 32,
38, 41
— турбореактивные 241
Спираль Корню 110 и д.
- Тело твердое фиктивное 11, 20
Точка вылета 9

Точки сходственные 290

Тяга реактивная 9, 20, 25, 68, 94, 139, 158, 221, 224, 265, 280

— —, ее нормальная слагающая 106, 122

Угол атаки 10, 68, 89, 107, 189, 227, 289, 304, 311

— бросания 10, 24

— наклона 10

— падения 24

— поворота 10, 70, 89, 160, 228

Углы типа де Спарра 216, 219, 224

Удлинение крыла 297

Ускорение лобового сопротивления 30
— реактивное 34 и д.

Условия атмосферные нормальные 295

— гироскопической устойчивости снаряда 237, 239

— устойчивости 245

Устойчивость аэродинамическая 300

— снаряда гироскопическая 237

Участок траектории активный 9, 25

— — критический 105 и д.

— — пассивный 9, 24

Формула Циолковского 31, 36, 195

Френеля интеграл 108

Функция Бесселя 108

— Крампа (Лапласа) 74

— сопротивления 43, 294

Центр входа масс 14

— выхода масс 14

— давления 237, 290, 300

— инерции 16, 20

— тяжести ракеты, его перемещение относительно корпуса 284

Циолковского формула 31, 36, 195

Число Маха 244, 289

— Рейнольдса 289

Эксцентриситет газодинамический 70, 102, 130, 154

— геометрический 70, 102, 154

— начальный 170

— переменный 154

— реактивной силы 9, 177, 181

— угловой 102

Эллипс рассеивания 75, 82

Эффект вращения гироскопический 152, 155