

Б.Г. Габдулхаев

**ПРЯМЫЕ И ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I-РОДА**

Казань — 2006

Казанский государственный университет
им. В.И. Ульянова-Ленина

Б.Г. Габдулхаев

ПРЯМЫЕ И ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I-РОДА

У ч е б н о е п о с о б и е

Казань
2006

УДК 517.9:519.6

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
механико–математического факультета
Казанского государственного университета
от 26 мая 2006 г.

Научный редактор
кандидат физико-математических наук, доцент Ожегова А.В.

Габдулхаев Б.Г.

Прямые и проекционные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений I-го рода. Учебное пособие. — Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2006.— 137с.

Излагаются прямые и проекционные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений I-го рода с разрывными разностными ядрами в главных частях интегральных операторов. Предлагается теоретико-функциональное обоснование основных полиномиальных и сплайновых методов в смысле общей теории приближенных методов функционального анализа.

Книга предназначена для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области теории функций и приближений, интегральных и интегродифференциальных уравнений.

УДК 517.9:519.6

© Габдулхаев Б.Г., 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многочисленные теоретические и прикладные задачи науки, техники и производства приводят (см., напр., монографии [9, 34, 35, 44, 49, 52, 54, 59, 67, 69, 70], докторские диссертации [46, 80], работы обзорного характера [56, 72, 73, 81] и библиографию в них) к необходимости решения различных классов слабосингулярных интегральных уравнений I-рода с разностными разрывными ядрами в главных частях интегральных операторов. Такие уравнения относятся к классу некорректно поставленных задач [53, 58, 65, 76] и, как правило, точно не решаются. Поэтому для их решения разработаны и применяются различные приближенные методы (см., напр., монографии [9, 34, 35, 44, 49, 52, 54, 67, 69], диссертации [2, 8, 46, 50, 68, 74, 80], а также библиографию в них).

В данном учебном пособии излагаются результаты по аппроксимативным (в первую очередь, по *прямым и проекционным*) методам решения указанных выше уравнений. Книга состоит из двух глав, в которых излагаются соответственно *полиномиальные* и *сплайновые* методы решения слабосингулярных интегральных уравнений I-рода. Изложение ведется в основном по работам автора, в первую очередь по его монографиям [25, 34, 35].

В обеих главах основное внимание уделено: 1) корректной постановке задачи решения слабосингулярных интегральных уравнений I-го рода путем подходящего подбора пространств искомых элементов в зависимости от пространств правых частей, а следовательно, в зависимости от исходных данных; 2) теоретическому обоснованию приближенных методов решения таких уравнений, под которым понимается следующий круг задач (см. гл.14 [55] и гл.1 [25]): а) доказательство теорем существования и единственности решения аппроксимирующих уравнений; б) установление эффективных оценок погрешности приближенного решения в зависимости от структурных свойств исходных данных; в) доказательство сходимости приближенных решений к точному решению при наличии последовательности аппроксимирующих уравнений и установление скорости сходимости; г) исследование устойчивости и обусловленности приближенных методов.

Книга предназначена для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области теории функций и приближений, интегральных и интегродифференциальных уравнений.

ГЛАВА I

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I-РОДА

Данная глава посвящена *полиномиальным* приближенным методам решения слабосингулярных интегральных уравнений (кратко: слабо с.и.у.) вида

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right| x(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma = y(s), \quad (0.1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \ln \frac{1}{|t-\tau|} \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} g(t, \tau) \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = f(t), \quad |t| \leq 1, \quad (0.2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} \right|^\gamma x(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma = y(s) \quad (0.3)$$

и некоторых их обобщений; здесь $h(s, \sigma)$, $y(s)$, $g(t, \tau)$, $f(t)$ – известные непрерывные функции в своих областях определения, $x(s)$, $\varphi(t)$ – искомые функции, $0 < \gamma = \text{const} < 1$, причем h , y и x являются 2π -периодическими функциями, а слабо сингулярные интегралы понимаются как несобственные.¹⁾

§1. Уравнения с логарифмическими ядрами. Периодический случай

1.1. Корректность и некорректность задачи. Построение приближенных методов решения с.и.у. (0.1) (как и с.и.у. (0.2) и (0.3)) не представляет особых трудностей. Однако большие трудности представляет теоретическое обоснование указанных методов. Это связано с некорректностью задачи решения с.и.у. (0.1), что, в свою очередь, связано с полной непрерывностью слабо сингулярного оператора $S : X \rightarrow X$,

¹⁾ В каждой из глав принята автономная двойная нумерация теорем, лемм, формул и т. п.; напр., формула (2.3) и теорема 1.4 гл. I (соответственно гл. II) означают формулу 3 § 2 и теорему 4 § 1 соответствующей главы.

$$Sx \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right| x(\sigma) d\sigma, \quad x \in X, \quad (1.1)$$

и вытекающей отсюда полной непрерывностью оператора $A : X \longrightarrow X$,

$$Ax \equiv Sx + Rx, \quad Rx \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s, \sigma)x(\sigma) d\sigma, \quad (1.2)$$

в известных функциональных пространствах X .

Пусть ниже $L_p = L_p[0, 2\pi]$, $C_{2\pi} = \tilde{C}$, $H^\beta = H^\beta[0, 2\pi]$ – пространства соответственно суммируемых со степенью p ($1 \leq p < \infty$), непрерывных и удовлетворяющих условию Гёльдера ($H^\beta \equiv H_\beta$) с показателем β ($0 < \beta \leq 1$) 2π -периодических функций с нормами

$$\|x\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \equiv \|x\|_p, \quad x \in L_p;$$

$$\|x\|_{C_{2\pi}} = \max_s |x(s)| \equiv \|x\|_\infty = \|x\|_{\tilde{C}}, \quad x \in C_{2\pi};$$

$$\|x\|_{H^\beta} = \|x\|_\infty + H(x; \beta) \equiv \|x\|_\beta, \quad x \in H^\beta \equiv H_\beta,$$

где

$$H(x; \beta) = \sup\{|x(s') - x(s'')| \cdot |s' - s''|^{-\beta} : s' \neq s''\}.$$

Лемма 1.1. Пусть X – любое из пространств: L_p ($1 \leq p < \infty$), $C_{2\pi}$, H^β ($0 < \beta \leq 1$). Тогда оператор $S : X \longrightarrow X$ вполне непрерывен.

Следствие. Пусть в случае $X = H^\beta$ функция $h(s, \sigma)$ по переменной s дополнительно удовлетворяет условиям: $h(s, \sigma) \in H^\alpha$ ($0 < \beta < \alpha \leq 1$) при $\beta < 1$ и $h'_s(s, \sigma) \in H^\delta$ ($\delta > 0$) при $\beta = 1$ равномерно относительно σ . Тогда в условиях леммы оператор $A : X \longrightarrow X$ вполне непрерывен, а обратный оператор $A^{-1} : X \longrightarrow X$, в случае его существования, неограничен.

Доказательство леммы проводится с учетом соотношения

$$g(\sigma) \equiv -\ln \left| \sin \frac{\sigma}{2} \right| = O(|\sigma|^{-\varepsilon}), \quad \sigma \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

(здесь ε – любое сколь угодно малое положительное число), и при $X = C_{2\pi}$ и $X = L_p$ ($1 \leq p < \infty$) оно ничем не отличается от доказательства теоремы 1 (и ее следствия 2) работы [38].

Пусть $X = H^\beta$. Тогда в силу известной теоремы И.И.Привалова [4, 66] для любой функции $x(s) \in H^\beta$ функция $\psi(s) = S(x; s)$ удовлетворяет условиям: $\psi'(s) \in H^\beta$ при $0 < \beta < 1$ и $\psi'(s) \in Z$ при $\beta = 1$; здесь $Z = Z[0, 2\pi]$ означает класс непрерывных 2π -периодических функций, удовлетворяющих условию Зигмунда, т.е. $\omega_2(\varphi; \delta) = O(\delta)$, $0 < \delta \leq \pi$, где $\omega_2(\varphi; \delta)$ – второй модуль непрерывности (модуль гладкости) функции $\varphi(s) \in C_{2\pi}$. Из последнего неравенства следует, как известно, оценка $\omega(\psi'; \delta) = O\{\delta(1 + |\ln \delta|)\}$, где $\omega(\varphi; \delta) = \omega(\varphi; \delta)_\infty = \omega(\varphi; \delta)_C$ – обычный модуль непрерывности функции $\varphi \in C_{2\pi}$. Тогда для завершения доказательства леммы остается воспользоваться критерием компактности в пространстве гёльдеровых функций. В силу сказанного утверждение следствия становится очевидным.

Заметим, что утверждение, аналогичное лемме, имеет место также при другом способе выбора функциональных пространств X . Поэтому, если мы хотим решать с.и.у. (0.1) в пространстве X , считая $A : X \rightarrow X$, то должны использовать теорию некорректно поставленных задач (см., напр., [53, 58, 65, 76]) для операторных уравнений I-рода, в частности, хорошо развитые методы регуляризации и квази-решений, со всеми вытекающими отсюда трудностями.

Однако для с.и.у. (0.1)–(0.3) и им подобных существует также другой подход, основанный на соответствующем выборе пространств правых частей (обозначим его Y) и искомым элементов X . Другими словами, теперь операторы S и A будем рассматривать как операторы из X в Y , где $X \neq Y$. Тогда при подходящем выборе пространства $X(Y)$ в зависимости от данного пространства $Y(X)$ (или же наоборот) и условий решаемой задачи с.и.у. (0.1) – (0.3) становятся уравнениями, приводящимися к уравнениям II-рода (здесь мы пользуемся терминологией [55]), а тогда задача решения с.и.у. (0.1) – (0.3) будет поставлена корректно.

Следует отметить, что лемма 1.1 допускает различные обобщения; здесь приведем (без доказательства) лишь следующее

Добавление к лемме 1.1. а) Оператор $S : C_{2\pi} \rightarrow H^\beta$ вполне непрерывен при любых $\beta \in (0, 1)$, а при $\beta = 1$ неограничен; б) оператор $S : L_p \rightarrow H^\beta$, где $p \in (1, \infty)$ дано, вполне непрерывен при любых $\beta \in (0, 1 - \frac{1}{p})$; в) оператор $S : L_p \rightarrow H^\beta$, где $\beta \in (0, 1)$ дано, вполне непрерывен при любых $p \in (1, \frac{1}{1-\beta})$.

С учетом сказанного и исходя из пространства X , введем про-

пространства 2π -периодических функций

$$X^{(r)} = \{\varphi(s) \in X : \exists \varphi^{(r)}(s) \in X\} \equiv X^r, \quad r + 1 \in \mathbb{N}, \quad X^{(0)} \equiv X,$$

с нормой

$$\|\varphi\|_{X^r} = \sum_{i=0}^r \|\varphi^{(i)}(s)\|_X, \quad \varphi^{(0)}(s) \equiv \varphi(s).$$

В случае $X = L_p$ ($1 \leq p < \infty$) будем пользоваться стандартным обозначением $X^r \equiv W_p^r$, а также $\|\varphi\|_{W_p^r} = \|\varphi\|_{r,p}$ ($\varphi \in W_p^r$).

В пространстве L_p рассмотрим оператор Гильберта

$$I\varphi = I(\varphi; s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \varphi(\sigma) d\sigma, \quad \varphi \in L_p, \quad 1 < p < \infty, \quad (1.4)$$

где сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши – Лебегу [45, 61, 66]. Ниже всюду через

$$c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) e^{-ik\sigma} d\sigma, \quad \varphi \in L_1, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

будем обозначать комплексные коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L_1 \equiv L$. Кроме того, регулярные ядра и правые части с.и.у. (0.1) – (0.3) без ограничения общности будем считать вещественными ¹⁾.

Лемма 1.2. Пусть $X = L_p$ ($1 < p < \infty$) или H^β ($0 < \beta < 1$), а $Y = X^1$. Тогда оператор $S : X \rightarrow Y$ непрерывно обратим и обратный оператор $S^{-1} : Y \rightarrow X$ определяется по любой из формул

$$S^{-1}(y; s) = -2I(y'; s) + \frac{1}{2\pi \ln 2} \int_0^{2\pi} y(s) ds, \quad y \in Y, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} S^{-1}(y; s) &= \frac{c_0(y)}{\ln 2} + 2i \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| c_k(y) e^{iks} = \\ &= \frac{c_0(y)}{\ln 2} - 2i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \cdot c_k(y) e^{iks}, \quad y \in Y \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\operatorname{sgn} a = \{+1 \text{ при } a > 0; \quad 0 \text{ при } a = 0; \quad -1 \text{ при } a < 0\}$.

Следствие 1. При $X = L_2$, $Y = W_2^1$ для обратного оператора S^{-1} справедлива формула

$$\|S^{-1}\| = 2, \quad S^{-1} : W_2^1 \rightarrow L_2. \quad (1.7)$$

¹⁾ Несмотря на это, ради упрощения выкладок мы иногда пользуемся рядами Фурье в комплексной форме.

Следствие 2. Пусть ядро $h(s, \sigma)$ таково, что оператор $R : X \rightarrow Y$ вполне непрерывен. Если однородное уравнение, соответствующее с.и.у. (0.1), имеет только нулевое решение, то оператор $A \equiv S + R : X \rightarrow Y$ непрерывно обратим.

Доказательство. Формулы (1.5) и (1.6) по существу известны (см., напр., [45, 77]), поэтому их доказательства приводятся лишь ради полноты изложения. Рассмотрим уравнение $Sx = y$ ($x \in X, y \in Y$), где оператор S определен в (1.1). Дифференцируя и интегрируя его, получим уравнения

$$I(x; s) = 2y'(s) \quad (x \in X, y \in Y), \quad (1.8)$$

$$\ln 2 \cdot \int_0^{2\pi} x(s) ds = \int_0^{2\pi} y(s) ds \quad (x \in X, y \in Y). \quad (1.9)$$

Известно [45, 66], что уравнение (1.8) разрешимо и его общее решение имеет вид $x(s) = -2I(y'; s) + \text{const}$. Отсюда, определяя const с помощью (1.9), получаем представление (1.5).

Докажем представление (1.6). В условиях леммы функции $x \in X$ и $y \in Y$ можно разложить в ряды Фурье

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) e^{iks}, \quad y(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{iks}. \quad (1.10)$$

Тогда в силу (1.1) и (1.3) имеем

$$Sx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\sigma}{2} \right| x(s - \sigma) d\sigma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) c_k(g) e^{iks}. \quad (1.11)$$

Отсюда, с учетом линейной независимости системы функций $\{e^{ijs}\}$, находим $c_k(x) = c_k(y)/c_k(g) \equiv c_k(x^*)$, где,

$$c_k(g) = \{\ln 2 \text{ при } k = 0; \frac{1}{2|k|} \text{ при } k \neq 0\}, \quad g(\sigma) = -\ln \left| \sin \frac{\sigma}{2} \right|. \quad (1.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} x^*(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x^*) e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k(y)}{c_k(g)} e^{iks} = \\ &= \frac{c_0(y)}{\ln 2} - 2i \sum_{|k|=1}^{\infty} \text{sgn } k \cdot c_k(y') e^{iks} \equiv S^{-1}y. \end{aligned}$$

Легко показать, что в условиях леммы только что построенная функция $x^*(s)$ является единственным решением уравнения $Sx = y$ ($x \in X$, $y \in Y$).

Далее, разлагая $y'(s) \in L_2$ в ряд Фурье

$$y'(s) = \sum_{|k|=1}^{\infty} c_k(y') e^{iks}, \quad c_k(y') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y'(s) e^{-iks} ds, \quad y \in Y, \quad (1.13)$$

и пользуясь известными формулами

$$I(\cos k\sigma; s) = -\sin ks, \quad k+1 \in \mathbb{N}; \quad I(\sin k\sigma; s) = \cos ks, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.14)$$

имеем

$$I(y'; s) = i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \cdot c_k(y') e^{iks} = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| c_k(y') e^{iks}. \quad (1.15)$$

Тогда, как легко видеть, из (1.6) и (1.15) следует представление (1.5). В свою очередь, с учетом (1.10) и (1.15) из (1.5) следует представление (1.6). Другими словами, представления (1.5) и (1.6) являются эквивалентными, что, очевидно, естественно.

Из (1.6), (1.13) с учетом равенства Парсеваля находим

$$\begin{aligned} \|S^{-1}y\|_2^2 &= |c_0(y)|^2 / \ln^2 2 + 4 \sum_{|k|=1}^{\infty} |c_k(y')|^2 \leq \\ &\leq \|y\|_2^2 / \ln^2 2 + 4\|y'\|_2^2 \leq 4\|y\|_{1;2}^2, \quad y \in W_2^1. \end{aligned}$$

Отсюда (равно как и из (1.5)) следует неравенство $\|S^{-1}\| \leq 2$, $S^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2$. Обычным способом легко доказывается также обратное неравенство.

Лемма 1.2 и ее следствие 1 доказаны, а тогда следствие 2 становится очевидным в силу известных результатов (см., напр., [55]) для операторных уравнений, приводящихся к уравнениям II рода в B -пространствах.

Добавление к лемме 1.2. *Операторы $S : C_{2\pi} \longrightarrow C_{2\pi}^1$ и $S^{-1} : C_{2\pi}^1 \longrightarrow C_{2\pi}$ неограничены, где $C_{2\pi}^1$ – пространство непрерывно дифференцируемых 2π -периодических функций с обычной нормой*

$$\|x\| = \|x\|_{\infty} + \|x'\|_{\infty}.$$

Это утверждение следует из леммы 1.2 и известного результата Н.Н.Лузина о сопряженных функциях (см., напр., в [4]).

Лемма 1.3. Оператор $S : L_2 \longrightarrow L_2$ симметричен и положителен, а его собственные значения λ_k ($k = 0, \pm 1, \dots$) и соответствующие собственные функции $\varphi_k(s)$ определяются по формулам

$$\lambda_k = c_k(g) = \{\ln 2, k = 0; \frac{1}{2|k|}, k = \pm 1, \pm 2, \dots\}, \varphi_k(s) = e^{iks}. \quad (1.16)$$

Следствие. $\|S\| = \ln 2$, $S : L_2 \longrightarrow L_2$, и однородное уравнение $Sx = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение $x^* = 0$.

Доказательство. Симметричность оператора S очевидна, докажем его положительность. С помощью (1.10) – (1.12) для любого $x \in L_2$ ($x \neq 0$) находим

$$\begin{aligned} (Sx, x)_2 &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)c_k(g)e^{iks}, \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(x)e^{ijs} \right)_{L_2} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 c_k(g) = |c_0(x)|^2 \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(x)|^2}{k} > 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $(\varphi, \phi)_2$ – скалярное произведение функций $\varphi, \phi \in L_2$, причем $(1, 1)_2 \equiv 1$. Ясно, что из (1.17) следует [62] положительность оператора $S : L_2 \longrightarrow L_2$. В силу сказанного выше, формула (1.16) становится очевидной. Тогда первое утверждение следствия выводится из (1.16), а второе – из (1.17).

Далее, с.и.у. (0.1) запишем в операторном виде

$$Ax \equiv Sx + Rx = y \quad (x \in X, y \in Y), \quad (1.18)$$

где $X = L_p$ ($1 < p < \infty$) или H^β ($0 < \beta < 1$), а $Y = X^1$. Тогда в силу леммы 1.2 это уравнение эквивалентно любому из интегральных уравнений II-рода

$$x + S^{-1}Rx = S^{-1}y \quad (x, S^{-1}y \in X), \quad (1.18')$$

$$\varphi + RS^{-1}\varphi = y \quad (\varphi = Sx, y \in Y), \quad (1.18'')$$

рассматриваемых соответственно в пространствах X и Y . Другими словами, при соответствующих условиях с.и.у. (0.1) становится, как уже отмечалось, уравнением, приводящимся к уравнениям Фредгольма II-рода, где при некоторых естественных условиях на регулярное ядро $h(s, \sigma)$ операторы $S^{-1}R : X \longrightarrow X$ и $RS^{-1} : Y \longrightarrow Y$ являются вполне непрерывными в пространствах X и $Y = X^1$ соответственно.

Указанная процедура регуляризации с.и.у. (0.1), т.е. приведение его к эквивалентным уравнениям (1.18') и (1.18''), может быть положена в основу построения численных методов его решения (см., напр.,

[77]); в этом случае обоснование численных методов не представляет особых трудностей, т.к. уравнения (1.18') и (1.18'') являются обычными интегральными уравнениями Фредгольма II-рода. Тем не менее для многих приближенных методов, особенно для методов проекционного типа, непосредственное численное решение с.и.у. (0.1), т.е. не приводя его к уравнению II -рода, является более эффективным со многих точек зрения. Ниже мы именно так и будем поступать как относительно с.и.у. (0.1), так и относительно других с.и.у. Однако в этом случае обоснование численных методов будет представлять существенную трудность, которая в ряде случаев до сих пор не преодолена.

Этот раздел закончим доказательством устойчивости решений слабо с.и.у. Наряду с (0.1) рассмотрим также с.и.у. вида

$$A_\varepsilon x_\varepsilon \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right| x_\varepsilon(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_\varepsilon(s, \sigma) x_\varepsilon(\sigma) d\sigma = y_\varepsilon(s), \quad (1.19)$$

где непрерывные функции h_ε и y_ε в определенном смысле аппроксимируют функции соответственно $h(s, \sigma)$ и $y(s)$ из с.и.у. (0.1), а ε – положительный параметр. Имеет место следующая

Лемма 1.4. Пусть с.и.у. (0.1) имеет единственное решение $x^*(s) \in X$ при любой правой части $y(s) \in Y$ и выполнены условия:

а) при $X = L_2, Y = W_2^1$

$$\sum_{i=0}^1 \left\| y^{(i)} - y_\varepsilon^{(i)} \right\|_{L_2[0,2\pi]} < \varepsilon, \quad \sum_{i=0}^1 \left\| h_s^{(i)} - h_{\varepsilon s}^{(i)} \right\|_{L_2[0,2\pi]^2} < \varepsilon;$$

б) при $X = H^\beta, Y = X^1 = H^{1+\beta} (0 < \beta < 1)$

$$\sum_{i=0}^1 \left\| y^{(i)} - y_\varepsilon^{(i)} \right\|_\beta < \varepsilon, \quad \sum_{i=0}^1 \left\| h_s^{(i)} - h_{\varepsilon s}^{(i)} \right\|_{H^\beta \otimes C_{2\pi}} < \varepsilon,$$

где

$$\left\| \varphi(s, \sigma) \right\|_{L_2[0,2\pi]^2} = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(s, \sigma)|^2 ds d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\left\| \varphi(s, \sigma) \right\|_{H^\beta \otimes C_{2\pi}} = \max_{s, \sigma} |\varphi(s, \sigma)| + \sup_{\substack{s', s'', \sigma \\ s' \neq s''}} \frac{|\varphi(s', \sigma) - \varphi(s'', \sigma)|}{|s' - s''|^\beta}.$$

Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ с.и.у. (1.19) также имеет единственное решение $x_\varepsilon^*(s) \in X$, которое при

$\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к $x^*(s)$ со скоростью

$$\|x^* - x_\varepsilon^*\|_X = O(\varepsilon).$$

Доказательство почти очевидно. Действительно, из условий леммы следует, что

$$\|A - A_\varepsilon\|_{X \rightarrow Y} = O(\varepsilon), \quad \|y - y_\varepsilon\|_Y < \varepsilon.$$

Отсюда и из известной теоремы функционального анализа об обратимости операторов, близких к обратимому оператору (см., напр., [55]), в силу леммы 1.2 получаем требуемое утверждение.

С учетом сказанного выше всюду в дальнейшем, если нет других условий, будем считать, что

$$y(s) \in W_2^1, \quad h(s, \sigma) \in C_{2\pi} \otimes L_2, \quad \frac{d}{ds} R(x; s) \in L_2 \quad (x \in L_2), \quad (1.20)$$

где $\varphi(s, \sigma) \in C_{2\pi} \otimes L_2$ означает, что $\varphi(s, \sigma) \in C_{2\pi}$ по s почти для всех σ и $\varphi(s, \sigma) \in L_2[0, 2\pi]$ по σ равномерно относительно s .

1.2. Общий прямой и проекционный методы. Приближенное решение с.и.у. (0.1) будем искать в виде тригонометрического полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{iks}, \quad \bar{\alpha}_k = \alpha_{-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.21)$$

коэффициенты которого определим исходя из минимальности невязки¹⁾

$$r_n \equiv y - Ax_n \equiv \Phi(s; \{\alpha_k\}_{-n}^n) = r_n(s) \quad (1.22)$$

в том или ином смысле. В зависимости от смысла минимизации будем получать тот или иной проекционный метод решения с.и.у. (0.1). Например, если коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из условия

$$\|\Phi(s; \{\alpha_k\}_{-n}^n)\|_U \implies \min, \quad U = X \text{ или } Y, \quad (1.23)$$

то будем иметь *метод наименьших квадратов*. Если

$$\int_0^{2\pi} \Phi(s; \{\alpha_k\}_{-n}^n) e^{-ijs} ds = 0, \quad j = \overline{-n, n}, \quad (1.24)$$

то получим *метод Галеркина (редукции)* по тригонометрической системе функций. Если

$$\Phi(s_j; \{\alpha_k\}_{-n}^n) = 0, \quad j = \overline{0, 2n}, \quad (1.25)$$

¹⁾ Здесь и далее $\bar{\alpha}$ – комплексно сопряженная с α величина.

где $\{s_j\}$ – некоторая система попарно неэквивалентных узлов, то получим *метод коллокации (совпадения)*. Если же коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из условий

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} \Phi(s; \{\alpha_k\}_{-n}^n) ds = 0, \quad j = \overline{0, 2n}, \quad (1.26)$$

где $\{s_j\}$ – некоторая система узлов, то получим *метод подобластей*.

Заметим, что каждое из условий (1.23) – (1.26) приводит к системе линейных алгебраических уравнений (далее кратко: СЛАУ) порядка $N = 2n + 1$. Если указанная система имеет решение $\{\alpha_k^*\}_{-n}^n$, то за приближенное решение с.и.у. (0.1) будем принимать полином

$$x_n^*(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k^* e^{iks}, \quad \bar{\alpha}_k^* = \alpha_{-k}^*, \quad (1.21^*)$$

причем свой для каждого конкретного приближенного метода.

К построению приближенного решения с.и.у. (0.1) – (0.3) можно подойти также с других и, как нам представляется, более общих позиций. Объясним суть дела снова на примере с.и.у. (0.1).

Обозначим (здесь и далее) через \mathbb{H}_n^T множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n . Через $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ будем обозначать множество \mathbb{H}_n^T , наделенное нормами пространств соответственно X и Y . Обозначим через P_n некоторый аддитивный и однородный оператор, отображающий пространство Y в подпространство Y_n , где $2n + 1 \in \mathbb{N}$. Теперь приближенное решение $x_n^*(s)$ с.и.у. (0.1) будем определять как точное решение одного из следующих операторных уравнений:

$$A_n x_n \equiv S_n x_n + R_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n, y_n \in Y_n), \quad (1.27)$$

$$A_n x_n \equiv P_n S x_n + P_n R x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n), \quad (1.28)$$

где операторы $S_n, R_n : X_n \rightarrow Y_n$ и элементы $y_n \in Y_n$ суть некоторые аппроксимации соответственно операторов $S, R : X \rightarrow Y$ и правой части $y \in Y$ уравнения (1.18).

Отметим, что каждое из уравнений (1.27), (1.28) эквивалентно СЛАУ относительно коэффициентов полинома (1.21). Поскольку этот полином можно представить в виде

$$x_n(s) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} x_n(s_k) D_n(s - s_k) = \sum_{k=-n}^n c_k(x_n) e^{iks}, \quad (1.29)$$

где

$$D_n(\varphi) = \frac{\sin(n + 1/2)\varphi}{2 \sin(\varphi/2)} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m\varphi, \quad s_k = \frac{2k\pi}{2n + 1}, \quad (1.30)$$

— ядро Дирихле n -го порядка, то каждое из уравнений (1.27), (1.28) эквивалентно СЛАУ относительно $x_n(s_k)$ — приближенных значений искомой функции $x(s)$ в узлах s_k , $k = \overline{0, 2n}$, или же относительно коэффициентов Фурье $c_k(x_n)$, $k = \overline{-n, n}$, приближенного решения $x_n(s)$.

Отметим, что если $S_n x_n = P_n S x_n$ и $R_n x_n = P_n R x_n$ для $x_n \in X_n$, а операторы $P_n : Y \rightarrow Y_n$ являются проекционными, т.е. $P_n^2 = P_n$, то уравнения (1.27) и (1.28) являются эквивалентными; однако в общем случае эти уравнения указанным свойством не обладают. Отсюда ясно, что наиболее общим из них является уравнение (1.27), представляющее собой приближенное уравнение *общего полиномиального прямого метода решения с.и.у.* (0.1), а (1.28) является приближенным уравнением *общего проекционного метода решения с.и.у.* (0.1). Поэтому при соответствующем выборе операторов P_n , S_n , R_n и элементов y_n из (1.27), (1.28) можно получить СЛАУ многих известных прямых и проекционных методов решения с.и.у. (0.1), в том числе указанных выше методов Галеркина, коллокации, подобластей и механических квадратур.

Для уравнений (0.1) и (1.27) справедлива следующая общая

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия:*

а) *с.и.у. (0.1) однозначно разрешимо в X при любой правой части $y \in Y = X^1$;*

$$\text{б) } \varepsilon_n \equiv \|A - A_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \quad A - A_n : X_n \rightarrow Y. \quad (1.31)$$

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что

$$q_n \equiv \|A^{-1}\| \varepsilon_n < 1, \quad A^{-1} : Y \rightarrow X, \quad (1.32)$$

приближенные уравнения (1.27) также однозначно разрешимы. Если, кроме того, выполнено условие

$$\text{в) } \delta_n \equiv \|y - y_n\|_Y \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.33)$$

то приближенные решения (1.21), определяемые из уравнения (1.27), сходятся к точному решению x^* с.и.у. (0.1) в пространстве X и*

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - q_n} [\|y - y_n\|_Y + q_n \|y\|_Y] = O(\varepsilon_n + \delta_n). \quad (1.34)$$

Следствие. В условиях теоремы операторы $A_n : X_n \longrightarrow Y_n$ линейно обратимы и обратные операторы $A_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n$ ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|(1 - q_n)^{-1} = O(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.35)$$

Доказательство этой теоремы с учетом сказанного в разделе 1.1 следует из теоремы 7 гл. I монографии [25] (см. также ниже §5).

Очевидно, что для уравнения (1.28) теорема 1.1 и ее следствие остаются в силе. Однако в этом случае из теорем 6 и 14 гл. I монографии [25] и леммы 1.2 следует более общий результат:

Теорема 1.2. *Справедливы утверждения:* а) если оператор $A = S + R : X \longrightarrow Y$ линейно обратим, то при n таких, что

$$r_n \equiv \|A^{-1}\| \|R - P_n R\| < 1, \quad R - P_n R : X_n \longrightarrow Y, \quad (1.36)$$

операторы $A_n = S + P_n R : X_n \longrightarrow Y_n$ также линейно обратимы и

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - r_n} [\|y - P_n y\|_Y + r_n \|y\|_Y], \quad (1.31')$$

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \|E - A_n^{-1} P_n A\|_{X \rightarrow X} \|x^* - \tilde{x}_n\|_X, \quad \forall \tilde{x}_n \in X_n, \quad (1.37)$$

где $x^* = A^{-1}y$, $x_n^* = A_n^{-1}P_n y$, а E – единичный оператор; б) если с.и.у. (0.1) имеет решение x^* при данной правой части $y \in Y$ и операторы $A_n = S + P_n R : X_n \longrightarrow Y_n$ линейно обратимы (напр., в условиях пункта а)), то при $P_n^2 = P_n$ для погрешности приближенного решения справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\|_X &= \|(E - A_n^{-1} P_n R)(x^* - S^{-1} P_n S x^*)\|_X \leq \\ &\leq \|E - A_n^{-1} P_n R\|_{X \rightarrow X} \cdot \|S^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \cdot \|S x^* - P_n S x^*\|_Y; \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \|E - A_n^{-1} P_n R\|_{X \rightarrow X} \cdot \|x^* - P_n x^*\|_X \quad \text{при } S^{-1} P_n S = P_n. \quad (1.38')$$

Следствие. Если оператор $A = S + R : X \longrightarrow Y$ линейно обратим и

$$\varepsilon'_n \equiv \|R - P_n R\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad R - P_n R : X \longrightarrow Y, \quad P_n^2 = P_n, \quad (1.39)$$

то при n таких, что $q'_n \equiv \|A^{-1}\| \varepsilon'_n < 1$, каждый из операторов $A_n = S + P_n R : X \longrightarrow Y$ и $A_n = S + P_n R : X_n \longrightarrow Y_n$ линейно обратим и для погрешности приближенного решения справедливы соотношения

$$\|x^* - x_n^*\|_X = \|(S + P_n R)^{-1}(S x^* - P_n S x^*)\|_X \leq$$

$$\leq \| (S + P_n R)^{-1} \|_{Y \rightarrow X} \cdot \| Sx^* - P_n Sx^* \|_Y = O\{ \| Sx^* - P_n Sx^* \|_Y \}. \quad (1.40)$$

В силу сказанного выше остается заметить, что соотношения (1.40) следуют из (1.38) и очевидных тождеств

$$E - A_n^{-1} P_n R = E - (S + P_n R)^{-1} P_n R = (S + P_n R)^{-1} S,$$

где оператор $A_n = S + P_n R : X_n \longrightarrow Y_n$ определен в (1.28).

В следующих пунктах приводятся вычислительные схемы ряда прямых и проекционных методов решения с.и.у. (0.1) и с помощью теорем 1.1 и 1.2 дается их теоретическое обоснование. При этом всюду в пределах этого параграфа, если нет других условий, будем считать, что с.и.у. (0.1) *однозначно разрешимо* в пространстве $X = L_2[0, 2\pi]$ при любой правой части $y \in Y = W_2^1[0, 2\pi]$. Всюду через $E_n^T(\varphi)_2$ будем обозначать наилучшее среднеквадратическое приближение функции $\varphi \in L_2$ элементами из \mathbb{H}_n^T ; аналогично, через $E_n^{Ts}(\psi)_2$ будем обозначать частное наилучшее среднеквадратическое приближение функции $\psi(s, \sigma) \in L_2[0, 2\pi]^2$ по переменной s .

1.3. Метод Галеркина (кратко: м.Г.). В силу (1.11) для элементов (1.21) имеем

$$S(x_n; s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k c_k(g) e^{iks}, \quad \alpha_{-k} = \bar{\alpha}_k. \quad (1.41)$$

Поэтому условия (1.24) эквивалентны СЛАУ

$$\alpha_j c_j(g) + \sum_{k=-n}^n h_{jk} \alpha_k = c_j(y), \quad j = \overline{-n, n}, \quad (1.42)$$

где $c_j(g)$ определены в (1.12), $h_{jk} = c_j(\varphi_k)$, $\varphi_k(s) = R(e^{ik\sigma}; s)$, а $c_j(\varphi)$ – как и выше, коэффициенты Фурье функции $\varphi(s) \in L_1[0, 2\pi]$.

Сходимость м.Г. (0.1), (1.21), (1.42) и оценку погрешности ус-танавливает следующая

Теорема 1.3. Пусть ядро $h(s, \sigma)$ таково, что регулярный оператор $R : L_2 \longrightarrow W_2^1$ вполне непрерывен. Тогда при всех $n \geq n_0$ (n_0 определяется свойствами $h(s, \sigma)$) СЛАУ (1.42) имеет единственное решение α_k^* , $k = \overline{-n, n}$. Приближенные решения (1.21*) сходятся к точному решению с.и.у. (0.1) со скоростью

$$\| x^* - x_n^* \|_2 = O \{ E_n^T(x^*)_2 \} = O \{ E_n^T((Sx^*)'_2) \}. \quad (1.43)$$

Следствие. В условиях теоремы справедливы оценки

$$\| x^* - x_n^* \|_2 = O \left\{ E_n^T\left(\frac{d}{ds}y\right)_2 + E_n^T\left(\frac{d}{ds}Rx^*\right)_2 \right\}, \quad (1.44)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq E_n^T(x^*)_2 \|E - A_n^{-1}\Phi_n R\|, \quad E - A_n^{-1}\Phi_n R : L_2 \longrightarrow L_2, \quad (1.45)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq 2E_n^T(x^*)_2 \|(S + \Phi_n R)^{-1}\|, \quad S + \Phi_n R : L_2 \longrightarrow W_2^1. \quad (1.46)$$

Если, кроме того, существует $h'_s(s, \sigma) \in L_2[0, 2\pi]^2$, то

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \{E_n^T(y')_2 + E_n^{Ts}(h'_s)_2\}, \quad (1.44')$$

где Φ_n – оператор Фурье n -го порядка:

$$\Phi_n(\varphi; s) = \sum_{k=-n}^n c_k(\varphi) e^{iks}, \quad \varphi \in L_2. \quad (1.47)$$

Доказательство. Пусть $X_n = \mathbb{H}_n^T \subset X = L_2$ и $Y_n = \mathbb{H}_n^T \subset Y = W_2^1$. Тогда СЛАУ (1.42) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Phi_n A x_n = \Phi_n y \quad (x_n \in X_n, \Phi_n y \in Y_n).$$

Ясно, что $\Phi_n^2 = \Phi_n$ и $\Phi_n : W_2^1 \longrightarrow Y_n$. Поэтому $\Phi_n S x_n = S x_n$ для любого $x_n \in X_n$ и СЛАУ (1.42) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv S x_n + \Phi_n R x_n = \Phi_n y \quad (x_n \in X_n, \Phi_n y \in Y_n), \quad (1.48)$$

т.е. уравнению (1.28) при $P_n = \Phi_n$, $X = L_2$, $Y = W_2^1$.

Из уравнений (1.18) и (1.48) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\begin{aligned} \|A x_n - A_n x_n\|_Y &= \|R x_n - \Phi_n R x_n\|_Y = \|R z_n - \Phi_n R z_n\| \cdot \|x_n\|_X \leq \\ &\leq \|x_n\|_X \{ \sup \|\varphi - \Phi_n \varphi\|_Y : \varphi \in R\mathbb{H} \}, \quad z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где $\mathbb{H} = \mathbb{H}(0, 1)$ – единичный шар пространства $L_2[0, 2\pi]$.

Для любого $\psi \in W_2^1$ справедливо тождество

$$\frac{d}{ds} \Phi_n(\psi(\sigma); s) = \Phi_n \left(\frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma}; s \right). \quad (1.50)$$

Тогда для $\psi \in W_2^1$ с учетом $\|\Phi_n\| = 1$, $\Phi_n : L_2 \longrightarrow L_2$, находим ¹⁾

$$\|\Phi_n \psi\|_{1,2} = \|\Phi_n \psi\|_2 + \left\| \frac{d}{ds} \Phi_n \psi \right\|_2 \leq \|\psi\|_2 + \|\psi'\|_2 = \|\psi\|_{1,2},$$

т.е. $\|\Phi_n\| \leq 1$, $\Phi_n : W_2^1 \longrightarrow W_2^1$. А так как $\Phi_n^2 = \Phi_n$, то и

$$\|\Phi_n\| = 1, \quad \Phi_n : W_2^1 \longrightarrow W_2^1, \quad n + 1 \in \mathbb{N}. \quad (1.51)$$

¹⁾ Напомним, что везде $\|\cdot\|_{1,2}$ означает норму в $W_2^1[0, 2\pi]$.

Кроме того, для любой $\psi \in W_2^1$ аналогично находим

$$\|\psi - \Phi_n \psi\|_{1;2} = \|\psi - \Phi_n \psi\|_2 + \|\psi' - (\Phi_n \psi)'\|_2 = E_n^T(\psi)_2 + E_n^T(\psi')_2. \quad (1.52)$$

Так как

$$E_n^T(\psi)_2 \leq E_n^T(\psi')_2 / (n+1), \quad \psi \in W_2^1, \quad n+1 \in \mathbb{N}, \quad (1.53)$$

то из (1.52) для любой $\psi \in W_2^1$ получаем соотношения

$$E_n^T(\psi')_2 \sim \|\psi - \Phi_n \psi\|_{1;2} \leq 2 E_n^T(\psi')_2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.54)$$

Поскольку оператор $R : L_2 \rightarrow W_2^1$ вполне непрерывен, то множество $R\mathbb{Ш}(0, 1)$ компактно в пространстве W_2^1 . Поэтому из (1.54) в силу одного результата И.М. Гельфанда относительно равномерной и сильной сходимости последовательности линейных операторов в B -пространствах (см., напр., [55], с. 274 – 276) следует, что

$$\varepsilon'_n \equiv \sup\{\|\varphi - \Phi_n \varphi\|_{1;2} : \varphi \in R\mathbb{Ш}(0, 1)\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.55)$$

Отсюда и из (1.49) получаем оценку

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq \|R - \Phi_n R\|_{X \rightarrow Y} \leq \varepsilon'_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.56)$$

где $\varepsilon'_n = 0$ при $R = 0$ (напр., при $h(s, \sigma) \equiv 0$ или $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$).

В силу (1.54) для правых частей уравнений (1.18) и (1.48) справедлива оценка

$$\delta_n \equiv \|y - \Phi_n y\|_{1;2} \leq 2 E_n^T(y')_2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.57)$$

В условиях теоремы в силу сделанного выше предположения о разрешимости с.и.у. (0.1) оператор $A : L_2 \rightarrow W_2^1$ непрерывно обратим. Таким образом, в силу (1.55) – (1.57) для уравнений (1.18) и (1.48) выполнены все условия теорем 1.1 и 1.2. Другими словами, сходимость м.Г. (0.1), (1.21), (1.42) доказана. Первая часть оценки (1.43) следует из неравенства (1.37) при $\tilde{x}_n = \Phi_n x^*$. Вторую часть оценки (1.43) получаем из (1.38) с учетом (1.7), (1.35), (1.51) и (1.52):

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O(\|Sx^* - \Phi_n Sx^*\|_{1;2}) = O\left\{E_n^T\left(\frac{d}{ds} Sx^*\right)_2\right\}.$$

Отсюда и из тождества $Sx^* \equiv y - Rx^*$ находим оценку (1.44). Оценка (1.44') выводится из (1.44) и легко доказываемого неравенства

$$E_n^T\left(\frac{dRx^*}{ds}\right)_2 \leq E_n^{Ts}\left(\frac{\partial h(s, \sigma)}{\partial s}\right)_2 \cdot \|x^*\|_2, \quad x^* = A^{-1}y.$$

Неравенство (1.46) выводится из (1.38') и следующих интересных формул

$$S^{-1}\Phi_n S = E \quad \text{в} \quad L_2, \quad S\Phi_n S^{-1} = E \quad \text{в} \quad W_2^1.$$

Наконец, оценка (1.45) следует из (1.40) и (1.54) при $\psi = Sx^*$ с учетом того факта, что $E_n^T(Ix)_2 = E_n^T(x)_2$, $x \in L_2$.

Теорема 1.3 и ее следствие полностью доказаны.

Замечание 1.1. Для полной непрерывности оператора $R : L_2 \longrightarrow W_2^1$ достаточно, напр., чтобы $h(s, \sigma)$ имела производную по s , удовлетворяющую при $\sigma - s \rightarrow 0$ условию

$$\frac{\partial h(s, \sigma)}{\partial s} = O\left(\frac{\ln^m |s - \sigma|}{|\sigma - s|^\alpha}\right), \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad m + 1 \in \mathbb{N}, \quad m + \alpha > 0.$$

1.4. Метод коллокации. Пользуясь (1.25), сначала приведем две вычислительные схемы метода коллокации (кратко: м.к.). Если приближенное решение ищется в виде полинома (1.21), то соотношения (1.25) и (2.41) приводят к СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^n \{c_k(g)e^{iks_j} + h_{jk}\}\alpha_k = y(s_j), \quad j = \overline{-n, n}, \quad (1.58)$$

где $\{s_j\}$ – любая система из $2n + 1$ попарно неэквивалентных узлов, $c_k(g)$ определены в (1.12), а $h_{jk} = R(e^{ik\sigma}; s_j)$. В дальнейшем в качестве узлов будем использовать

$$s_j = 2j\pi/(2n + 1), \quad j = \overline{-n, n}; \quad (1.59)$$

это связано, с одной стороны, с получением наиболее простых вычислительных схем, а с другой – с получением наиболее точных результатов для рассматриваемых методов.

Для вывода второй вычислительной схемы м.к. воспользуемся формулами (1.21), (1.23), (1.30):

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{iks} = \frac{2}{2n + 1} \sum_{k=-n}^n x_n(s_k) D_n(s - s_k). \quad (1.60)$$

Тогда соотношения (1.25) приводят к СЛАУ

$$\begin{aligned} \frac{2}{2n + 1} \sum_{k=-n}^n x_n(s_k) \left\{ S(D_n(\sigma - s_k); s_j) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s_j, \sigma) D_n(\sigma - s_k) d\sigma \right\} = \\ = y(s_j), \quad j = \overline{-n, n}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Интегралы $S(D_n(\sigma - s_k); s_j)$ вычисляются точно, т.к. в силу (1.1), (1.30), (1.11) и (1.12) имеем (см. также с.45 [69])

$$S(D_n(\sigma - s_k); s_j) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\sigma}{2} \right| \cdot D_n(s_j - s_k - \sigma) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \ln 2 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \cos m(s_j - s_k) \right\}, \quad j = \overline{-n, n}. \quad (1.61')$$

Поэтому СЛАУ (1.61) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n x_n(s_k) \left\{ \ln 2 + \sum_{m=1}^n \cos m(s_j - s_k) + 2\tilde{h}_{jk} \right\} = \\ = y(s_j), \quad j = \overline{-n, n}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\tilde{h}_{jk} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s_j, \sigma) D_n(\sigma - s_k) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s_j, s_k - \sigma) D_n(\sigma) d\sigma.$$

Введем важные для дальнейшего изложения обозначения:

$E_n^T(x)_\infty = E_n^T(x)_{C_{2\pi}} = E_n^T(x)_{\tilde{C}}$ – наилучшее равномерное приближение функции $x \in C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n ;

аналогично, $E_n^{Ts}(\varphi)_\infty$ и $E_n^{T\sigma}(\varphi)_\infty$ – частные наилучшие равномерные приближения функции $\varphi(s, \sigma) \in C[0, 2\pi]^2$ по переменным s и σ соответственно;

\mathcal{L}_n – оператор Лагранжа, определяемый по формуле

$$\mathcal{L}_n(\psi; s) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \psi(s_k) D_n(s - s_k), \quad \psi \in C_{2\pi} \equiv \tilde{C}. \quad (1.63)$$

Сходимость и оценку погрешности м.к. устанавливает

Теорема 1.4. Пусть существует $y'(s) \in C_{2\pi}$, а ядро $h(s, \sigma)$ таково, что оператор $R : L_2 \rightarrow C_{2\pi}^1$ вполне непрерывен. Тогда при всех $n \geq n_0$ (n_0 определяется свойствами $h(s, \sigma)$) системы (1.58) и (1.62) имеют единственные решения соответственно α_k^* и $x_n^*(s_k)$, $k = \overline{-n, n}$. Приближенные решения $x_n^*(s)$ (т.е. (1.60) при $\alpha_k = \alpha_k^*$, $x_n(s_k) = x_n^*(s_k)$) сходятся в среднем к точному решению $x^*(s)$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \left\{ E_n^T \left(\frac{d}{ds} Sx^* \right)_\infty \right\} = O \left\{ E_n^T(x^*)_\infty \right\}, \quad (1.64)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \left\{ E_n^T \left(\frac{dy}{ds} \right)_\infty + E_n^T \left(\frac{d}{ds} Rx^* \right)_\infty \right\}. \quad (1.65)$$

Следствие. В условиях теоремы справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq (1 + \pi) E_n^T(x^*)_\infty \cdot \|(S + \mathcal{L}_n R)^{-1}\|, \quad S + \mathcal{L}_n R : L_2 \rightarrow W_2^1. \quad (1.66)$$

Если, кроме того, существует $h'_s(s, \sigma) \in C[0, 2\pi]^2$, то

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \{E_n^T(y')_\infty + E_n^{Ts}(h'_s)_\infty\}. \quad (1.67)$$

Доказательство. Для оператора Лагранжа (1.63) справедливы (см., напр., в гл.3 [25]) соотношения:

$$\|\psi - \mathcal{L}_n \psi\|_2 \leq 2 E_n^T(\psi)_\infty, \quad \psi \in C_{2\pi}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.68)$$

$$\|\mathcal{L}_n\|_2 = \infty, \quad \|\mathcal{L}_n\|_{\infty \rightarrow 2} = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.69)$$

$$\|\mathcal{L}_n\|_\infty = \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \leq \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2(2n+1)}{\pi}, \quad (1.70)$$

где здесь (и далее) $\|A\|_{p \rightarrow q}$ ($\|A\|_{p \rightarrow p} \equiv \|A\|_p$) означает норму оператора $A : L_p \rightarrow L_q$ при всех $1 \leq p, q \leq \infty$, причем формально полагается, что $C = L_\infty$.

Теперь рассмотрим \mathcal{L}_n как оператор из W_2^1 в W_2^1 . Тогда в силу (1.69) имеем $\|\mathcal{L}_n\| \leq \infty$. Однако покажем, что для любой $\psi \in C_{2\pi}^1$ справедлива оценка

$$\|\psi - \mathcal{L}_n \psi\|_{1;2} \leq (1 + \pi) E_n^T(\psi')_\infty, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.71)$$

а тогда $\|\mathcal{L}_n\| \leq 2 + \pi$, $\mathcal{L}_n : C_{2\pi}^1 \rightarrow W_2^1$.

Действительно, для любой $\psi \in C_{2\pi}^1$ с помощью (1.68), (1.50) и указанных выше свойств оператора Фурье (1.47) и Лагранжа (1.63) последовательно находим

$$\begin{aligned} \|\psi - \mathcal{L}_n \psi\|_{1;2} &= \|\psi - \mathcal{L}_n \psi\|_2 + \|(\psi - \mathcal{L}_n \psi)'\|_2 \leq 2E_n^T(\psi)_\infty + \\ &+ \|(\psi - \Phi_n \psi)'\|_2 + \|(\Phi_n \psi - \mathcal{L}_n \psi)'\|_2 \leq 2E_n^T(\psi)_\infty + \|\psi' - \Phi_n(\psi')\|_2 + \\ &+ n\|\Phi_n(\psi - \mathcal{L}_n \psi)\|_2 \leq 2E_n^T(\psi)_\infty + E_n^T(\psi')_2 + 2nE_n^T(\psi)_\infty \leq \\ &\leq \pi E_n^T(\psi')_\infty + E_n^T(\psi')_2 \leq (1 + \pi)E_n^T(\psi')_\infty. \end{aligned}$$

Заметим, что здесь использованы также известные неравенства (см., напр., [48], с.54, 56; [75], с.230)

$$E_n^T(\psi)_\infty \leq \frac{\pi}{2(n+1)} E_n^T(\psi')_\infty, \quad \psi \in C_{2\pi}^1; \quad (1.72)$$

$$\|Q'_n\|_2 \leq n \|Q_n\|_2, \quad Q_n \in \mathbb{H}_n^T. \quad (1.73)$$

Далее, в силу соотношений (1.41), (1.63) и $\mathcal{L}_n^2 = \mathcal{L}_n$ каждая из СЛАУ (1.58), (1.62) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \mathcal{L}_n A x_n = S x_n + \mathcal{L}_n R x_n = \mathcal{L}_n y \quad (x_n \in X_n, \mathcal{L}_n y \in Y_n), \quad (1.74)$$

где $X_n = \mathbb{H}_n^T \subset X = L_2$, $Y_n = \mathbb{H}_n^T \subset Y = W_2^1$. Теперь из (1.18), (1.74) и (1.71) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\begin{aligned} \|Ax_n - A_n x_n\|_Y &= \|Rx_n - \mathcal{L}_n Rx_n\|_Y \leq \|x_n\|_X \cdot \|Rz_n - \mathcal{L}_n Rz_n\|_Y \leq \\ &\leq \|x_n\|_X \cdot (1 + \pi) E_n^T \left(\frac{d}{ds} Rz_n \right)_{\bar{C}}, \quad z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя первую теорему Джексона в тригонометрическом случае (см., напр., [75], с.305):

$$E_n^T(\psi)_\infty < 3\omega \left(\psi; \frac{1}{n} \right)_\infty, \quad \psi \in C_{2\pi},$$

для любого $x_n \in X_n$ получаем

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y \leq 3(1 + \pi) \|x_n\|_X \cdot \sup_{\varphi \in \mathcal{R}\mathbb{H}(0,1)} \omega \left(\varphi'; \frac{1}{n} \right)_\infty \equiv \varepsilon'_n \cdot \|x_n\|_X.$$

Поскольку оператор $R : L_2 \rightarrow C_{2\pi}^1$ вполне непрерывен, то множество функций $\{\varphi'(s)\} \subset C_{2\pi}$, где $\varphi \in \mathcal{R}\mathbb{H}(0,1)$, компактно в $C_{2\pi}$. Поэтому в силу теоремы 3.1 книги [75] имеем

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq \|R - \mathcal{L}_n R\|_{X \rightarrow Y} \leq \varepsilon'_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, в силу (1.71) для правых частей уравнений (1.18) и (1.74) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - \mathcal{L}_n y\|_{1;2} \leq (1 + \pi) E_n^T(y')_\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, для уравнений (1.18) и (1.74) выполнены все условия теорем 1.1 и 1.2, откуда и следует сходимость в среднем м.к. Покажем справедливость оценок (1.64) - (1.67). Из (1.38), (1.40), (1.35) и (1.70) при $P_n = \mathcal{L}_n$ находим

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\|_2 &= O \left\{ \|Sx^* - \mathcal{L}_n Sx^*\|_{1;2} \right\} = O \left\{ E_n^T \left(\frac{d}{ds} Sx^* \right)_\infty \right\} = \\ &= O \left\{ E_n^T(Ix^*)_\infty \right\} = O \left\{ E_n^T(x^*)_\infty \right\}, \end{aligned}$$

т.е. оценки (1.64) доказаны. Здесь необходимо отметить, что в условиях теоремы решение с.и.у. (0.1) удовлетворяет условиям: $x^*(s) \in C_{2\pi}$, $I(x^*; s) \in C_{2\pi}$. Из первой части оценки (1.64) с учетом тождества $(Sx^*)'_s \equiv y'(s) - (R(x^*; s))'_s \in C_{2\pi}$ следует оценка (1.65), а из нее обычным способом выводится оценка (1.67). Оценка (1.66) следует из (1.40) и (1.71) при $\psi = Sx^*$.

Теорема 1.4 и ее следствие полностью доказаны.

Замечание 1.2. Для полной непрерывности регулярного оператора $R : L_2 \rightarrow C_{2\pi}^1$ достаточно, если, напр., производная $h'_s(s, \sigma) \in C[0, 2\pi]^2$ или, более общо, допускает представление

$$\frac{\partial h(s, \sigma)}{\partial s} = h_0(s, \sigma) \ln^m \left| \sin \frac{\sigma - s}{2} \right| \cdot \left| \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \right|^\gamma,$$

где $m + 1 \in \mathbb{N}$, $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$, $m + \gamma > 0$, $h_0 \in C[0, 2\pi]^2$.

Это утверждение следует из [38, 40] и известного критерия компактности в пространстве непрерывных функций.

1.5. Метод механических квадратур. В этом и следующем пунктах рассматривается приближенное решение слабо с.и.у. (0.1) методом механических квадратур (кратко: м.м.к.).

Возьмем две системы равноотстоящих узлов

$$s_l = s_{l0} = \frac{2l\pi}{2n+1}, \quad l = \overline{0, 2n}, \quad (1.75)$$

$$s_{k\omega} = s_k + \frac{\omega}{2n+1}, \quad k = \overline{0, 2n}, \quad 0 \leq \omega = \text{const} \leq \pi. \quad (1.76)$$

Приближенное решение с.и.у. (0.1) будем искать в виде полинома

$$x_n^*(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k^* e^{iks} = \frac{2}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} x_n^*(s_l) D_n(s - s_l), \quad (1.77)$$

Неизвестные коэффициенты α_k^* , $k = \overline{-n, n}$, и $x_n^*(s_l)$, $l = \overline{0, 2n}$, будем определять как решения СЛАУ соответственно

$$\sum_{k=-n}^n \alpha_k \left\{ c_k(g) e^{iks_{j\omega}} + \frac{1}{2n+1} \sum_{l=-n}^n h(s_{j\omega}, s_l) e^{iks_l} \right\} = y(s_{j\omega}), \quad j = \overline{0, 2n}, \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} x_n(s_l) \left\{ \ln 2 + \sum_{m=1}^n \frac{\cos m(s_{j\omega} - s_l)}{m} + h(s_{j\omega}, s_l) \right\} = \\ = y(s_{j\omega}), \quad j = \overline{0, 2n}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Отметим, что для получения СЛАУ (1.78) и (1.79) обе части с.и.у. (0.1) приравниваем в узлах (1.76), вместо $x(\sigma)$ подставляем $x_n(\sigma)$ из (1.60), после чего интегралы $S(x_n; s_{j\omega})$ вычисляем точно по формулам соответственно (1.41) и (1.61'), а интегралы $R(x_n; s_{j\omega})$ вычисляем приближенно по квадратурной формуле левых прямоугольников с узлами (1.75). Отметим также, что с помощью легко доказываемой формулы

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_n(\sigma) e^{-ik\sigma} d\sigma = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^{2n} x_n(s_m) e^{-iks_m}, \quad k = \overline{-n, n}, \quad (1.80)$$

СЛАУ (1.78) выводится из СЛАУ (1.79) и наоборот.

Ясно, что при $\omega = 0$ обе системы несколько упрощаются, в частности, из (1.79) можно получить СЛАУ (I.126) из книги [69]. В то же время при $\omega = \pi$ из (1.79), (1.75) – (1.77) получим одну из вычислительных схем метода дискретных вихрей (пользуемся терминологией [6, 59]); этот метод рассматривается в следующем пункте.

Сходимость м.м.к. в L_2 и оценку погрешности устанавливает

Теорема 1.5. Пусть функции $y(s)$ и $h(s, \sigma)$ таковы, что $y' \in C[0, 2\pi]$, $h'_s \in C[0, 2\pi]^2$. Тогда при всех $n \geq n_0$ (число n_0 определяется свойствами ядра $h(s, \sigma)$) каждая из СЛАУ (1.78) и (1.79) имеет единственное решение соответственно α_k^* , $k = \overline{-n, n}$, и $x_n^*(s_l)$, $l = \overline{0, 2n}$. Приближенные решения (1.77) сходятся к точному решению $x^*(s)$ в среднем со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \left\{ E_n^T(y')_\infty + E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty \right\}. \quad (1.81)$$

Если, кроме того, существует $h'_\sigma \in C[0, 2\pi]^2$, то справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \left\{ E_n^T(y')_\infty + E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty \right\}. \quad (1.82)$$

Доказательство. Будем пользоваться результатами и обозначениями раздела 1.4. Кроме того, обозначим через $\mathcal{L}_{n,\omega}$ тригонометрический оператор Лагранжа

$$\mathcal{L}_{n,\omega}(\varphi; s) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi(s_{k\omega}) D_n(s - s_{k\omega}), \quad \varphi \in C_{2\pi}, \quad \mathcal{L}_{n,\omega}^2 = \mathcal{L}_{n,\omega},$$

где $D_n(t)$ – ядро Дирихле n -го порядка. Тогда каждая из СЛАУ (1.78), (1.79) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv S_n x_n + R_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n, y_n \in Y_n), \quad (1.83)$$

где

$$S_n x_n = \mathcal{L}_{n,\omega} S x_n = S x_n, \quad y_n = \mathcal{L}_{n,\omega} y, \quad (1.84)$$

$$R_n x_n = \mathcal{L}_{n,\omega} \{ \rho \mathcal{L}_n^\sigma(h x_n) \}, \quad \rho \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) d\sigma,$$

а \mathcal{L}_n^σ означает, что оператор $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n,0}$ применен по переменной σ . Поскольку квадратурная формула прямоугольников с узлами (1.75)

имеет наивысшую тригонометрическую степень точности, равную $2n$, то

$$R_n x_n = \mathcal{L}_{n,\omega} \rho \mathcal{L}_n^\sigma(h x_n) = \mathcal{L}_{n,\omega} \rho(\mathcal{L}_n^\sigma h) x_n, \quad x_n \in X_n. \quad (1.84')$$

Поэтому уравнение (1.83) с учетом $(\mathcal{L}_{n,\omega})^2 = \mathcal{L}_{n,\omega}$ сводится к

$$A_n x_n \equiv S x_n + \mathcal{L}_{n,\omega} \rho(\mathcal{L}_n^\sigma h) x_n = \mathcal{L}_{n,\omega} y \quad (x_n \in X_n, \mathcal{L}_{n,\omega} y \in Y_n). \quad (1.85)$$

Аналогично, с учетом (1.84) с.и.у. (0.1) запишем в виде

$$A x \equiv S x + \rho h x = y \quad (x \in X, y \in Y), \quad (1.86)$$

где $X = L_2$, $Y = W_2^1$. Дальше существенную роль играет следующая известная (см., напр., гл. III [25], а также оценку (1.71))

Лемма 1.5. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения*

- (а) $\|\mathcal{L}_{n,\omega}\|_2 = \infty$, $\|\mathcal{L}_{n,\omega}\|_{\infty \rightarrow 2} = 1$, $\|\mathcal{L}_{n,\omega}\|_\infty = O(\ln n)$;
- (б) $\|\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega} \varphi\|_2 \leq 2 E_n^T(\varphi)_\infty$, $\varphi \in C_{2\pi}$;
- (в) $\|\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega} \varphi\|_\infty \leq 2 \|\mathcal{L}_{n,\omega}\|_\infty \cdot E_n^T(\varphi)_\infty = O(E_n^T(\varphi)_\infty \ln n)$, $\varphi \in C_{2\pi}$,
- (г) $\|\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega} \varphi\|_{1;2} \leq (1 + \pi) E_n^T(\varphi')_\infty$, $\varphi \in C_{2\pi}^1$.

Оценки (а) – (г) справедливы также в случае узлов

$$\tilde{s}_{k\omega} = \frac{k\pi}{n} + \frac{\omega}{2n}, \quad k = \overline{0, 2n-1}, \quad 0 \leq \omega = \text{const} \leq \pi, \quad (1.76')$$

при этом в оценках (б), (в) и (г) величины $E_n^T(\varphi)_\infty$ и $E_n^T(\varphi')_\infty$ следует заменить на $E_{n-1}^T(\varphi)_\infty$ и $E_{n-1}^T(\varphi')_\infty$ соответственно.

Теперь для уравнений (1.85), (1.86) в силу леммы 1.5 для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\begin{aligned} \|A x_n - A_n x_n\|_{1;2} &= \|R x_n - R_n x_n\|_{1;2} \leq \|R x_n - \mathcal{L}_{n,\omega} R x_n\|_{1;2} + \\ &+ \|\mathcal{L}_{n,\omega} \rho h x_n - \mathcal{L}_{n,\omega} \rho(\mathcal{L}_n^\sigma h) x_n\|_{1;2} \leq (1 + \pi) E_n^T(\rho h'_s x_n)_\infty + \\ &+ \|\mathcal{L}_{n,\omega} \rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h) x_n\|_{1;2} \leq (1 + \pi) E_n^{Ts}(h'_s)_\infty \cdot \|x_n\|_2 + \\ &+ \|\psi - \mathcal{L}_{n,\omega} \psi\|_{1;2}, \quad \psi \equiv \rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h) x_n. \end{aligned} \quad (1.87)$$

С помощью неравенства Гёльдера и леммы 1.5 находим оценки:

$$\|\psi\|_{1;2} = \|\psi\|_2 + \|\psi'\|_2 = \|\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h) x_n\|_2 + \|\rho(h'_s - \mathcal{L}_n^\sigma h'_s) x_n\|_2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \|x_n\|_2 \{E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\}, \quad x_n \in X_n; \quad (1.88) \\
&\|\psi - \mathcal{L}_{n,\omega}\psi\|_{1;2} \leq (1 + \pi) E_n^T(\psi')_\infty \leq (1 + \pi) \|\psi'\|_\infty = \\
&= (1 + \pi) \|\rho(h'_s - \mathcal{L}_n^\sigma h'_s)x_n\|_\infty \leq 2(1 + \pi) E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty \|x_n\|_2.
\end{aligned}$$

Из неравенств (1.86) – (1.88) находим оценки

$$\begin{aligned}
\|Ax_n - A_n x_n\|_{1;2} &\leq \{(1 + \pi) E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + 2 E_n^{T\sigma}(h)_\infty + 2 E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty + \\
&+ 2(1 + \pi) E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\} \|x_n\|_2 \equiv \varepsilon'_n \|x_n\|_2, \quad x_n \in X_n; \quad (1.89)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\| \leq \varepsilon'_n = O \{E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\}, \quad (1.90)$$

где $A - A_n : X_n \longrightarrow Y$. С другой стороны, в силу леммы 1.5 для правых частей уравнений (1.85) и (1.86) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - \mathcal{L}_{n,\omega}y\|_{1;2} = O \{E_n^T(y')_\infty\}. \quad (1.91)$$

Таким образом, все условия теоремы 1.1 выполнены, откуда с учетом неравенств (1.90) и (1.91) следует утверждение доказываемой теоремы, в том числе оценка (1.81).

Докажем оценку (1.82). С этой целью вместо (1.87) рассмотрим неравенства

$$\begin{aligned}
\|Ax_n - A_n x_n\|_{1;2} &\leq \|Rx_n - \mathcal{L}_{n,\omega}Rx_n\|_{1;2} + \|\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_{1;2} \leq \\
&\leq (1 + \pi) E_n^{Ts}(h'_s)_\infty \|x_n\|_2 + \|\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_2 + \\
&+ \|[\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n]'\|_2, \quad x_n \in X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.92)
\end{aligned}$$

С помощью леммы 1.5, неравенства Гёльдера и неравенства Бернштейна (1.73) последовательно находим оценки

$$\|\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_2 \leq \|\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_\infty \leq 2E_n^{T\sigma}(h)_\infty \|x_n\|_2; \quad (1.93)$$

$$\left\| \frac{d}{ds} [\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n] \right\|_2 \leq 2 E_n^{T\sigma}(h)_\infty \|x_n\|_2.$$

Из (1.72) и (1.93) для любого $x_n \in X_n$ получаем

$$\|\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_{1;2} \leq (2 + 2n) E_n^{T\sigma}(h)_\infty \|x_n\|_2 \leq \pi E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty \|x_n\|_2. \quad (1.94)$$

Из неравенств (1.92) и (1.94) следует оценка

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &\equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq (1 + \pi) E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + \pi E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty \equiv \\
&\equiv \varepsilon''_n = O \{E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty\}. \quad (1.95)
\end{aligned}$$

Теперь с учетом неравенств (1.91) и (1.95) из теоремы 1.1 следует оценка (1.82).

Теорема 1.5 доказана полностью.

Из сравнения доказательств теорем 1.4 и 1.5 следует

Теорема 1.6. *В условиях теоремы 1.5 погрешность приближенного решения (1.77), построенного методом механических квадратур, может быть оценена любым из неравенств*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \{E_n^T(x^*)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\}, \quad (1.96)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \{E_n^T(y')_\infty + E_n^T((Rx^*)')_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\}; \quad (1.97)$$

если, кроме того, $h'_\sigma(s, \sigma) \in C[0, 2\pi]^2$, то и неравенствами

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \{E_n^T(x^*)_\infty + E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty\}. \quad (1.98)$$

Замечание 1.3. Выше при исследовании м.м.к. было использовано нечетное число узлов. Совершенно аналогично может быть исследован м.м.к., основанный на сетке из четного числа узлов (необходимые для этого сведения см., напр., в [14, 25], а также в лемме 1.5). Здесь приближенное решение уместно представить в виде

$$x_n(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos ks + b_k \sin ks + \frac{a_n}{2} \cos ns \quad (1.99)$$

и удобно пользоваться простой формулой

$$S(x_n; s) = \frac{a_0 \ln 2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k \cos ks + b_k \sin ks}{2k} + \frac{a_n \cos ns}{4n} \quad (1.99')$$

и приведенными в лемме 1.5 сведениями.

Далее, аналогично приведенному выше может быть исследована также следующая вычислительная схема метода квадратур.

Возьмем сетку из N равноотстоящих узлов

$$s_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = \overline{1, N}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (1.100)$$

и с.и.у. (0.1) представим в виде

$$x(s) \ln 2 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\sigma - s}{2} \right| \cdot [x(\sigma) - x(s)] d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma = y(s); \quad (1.101)$$

тогда, применив к интегралам в (1.101) квадратурную формулу левых прямоугольников с узлами (1.100), приходим к СЛАУ

$$\begin{aligned} \beta_j \ln 2 - \frac{1}{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \ln \left| \sin \frac{s_k - s_j}{2} \right| \cdot (\beta_k - \beta_j) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h(s_j, s_k) \beta_k = \\ = y(s_j), \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (1.102)$$

где $\beta_j \approx x(s_j)$. Пусть $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_N^*$ – решение СЛАУ (1.102). Тогда за приближенное решение с.и.у. (0.1) будем принимать полином

$$x_n^*(s) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \Delta_n(s - s_k) \beta_k, \quad n = \left[\frac{N}{2} \right], \quad (1.103)$$

где $\llbracket t \rrbracket$ – целая часть числа $t \geq 0$, а

$$\Delta_n(\varphi) = \frac{1}{2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi \cdot \operatorname{cosec} \frac{\varphi}{2}, \quad N = 2n + 1, \quad (1.103')$$

– обычное ядро Дирихле n -го порядка,

$$\Delta_n(\varphi) = \frac{1}{2} \sin n\varphi \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, \quad N = 2n, \quad (1.103'')$$

– т.н. модифицированное ядро Дирихле того же порядка.

Совершенно аналогично, но путем исключения малой окрестности особой точки $\sigma = s$ в с.и.у. (0.1) может быть получена и исследована следующая СЛАУ м.м.к.:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \ln \left| \sin \frac{s_j - s_k}{2} \right| \cdot \beta_k + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h(s_j, s_k) \beta_k = \\ = y(s_j), \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

1.6. Метод дискретных вихрей. Теперь рассмотрим некоторую модификацию м.м.к., часто используемую в ряде приложений. Возьмем две сетки из $N \in \mathbb{N}$ равноотстоящих узлов

$$\sigma_k = \frac{2(k-1)\pi}{N}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (1.105)$$

$$s_j = \frac{(2j-1)\pi}{N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1.106)$$

и приближенные значения γ_k , $k = \overline{1, N}$, искомой функции $x(\sigma)$ в узлах (1.105) будем определять из следующей СЛАУ:

$$-\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \left| \sin \frac{s_j - \sigma_k}{2} \right| \gamma_k + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h(s_j, \sigma_k) \gamma_k = y(s_j), \quad j = \overline{1, N}. \quad (1.107)$$

Пользуясь известной терминологией (см. монографии [6, 59]), эту систему будем называть СЛАУ метода дискретных вихрей (м.д.в.).

Если γ_k^* , $k = \overline{1, N}$, – решение СЛАУ (1.107), то решение с.и.у. (0.1) приближенно может быть восстановлено по формуле

$$x^*(s) \approx x_N^*(s) = \sum_{k=1}^N \gamma_k^* \varphi_k(s), \quad n = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \quad (1.108)$$

где $\{\varphi_k(s)\}$ – система фундаментальных полиномов степени $n = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ или сплайнов степени m ($m + 1 \in \mathbb{N}$) на сетке узлов (1.105); в частности, можно принять $\varphi_k(s) = \varphi_{k,n}(s) = 2 \Delta_n(s - \sigma_k)/N$, где $\Delta_n(\varphi)$ определено в (1.103') или (1.103'').

Пусть теперь

$$\mathcal{L}_n^\sigma(\varphi; \sigma) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \Delta_n(\sigma - \sigma_k) \varphi(\sigma_k), \quad \mathcal{L}_n^s(\psi; s) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \Delta_n(s - s_j) \psi(s_j),$$

где узлы σ_k и s_j определены соответственно в (1.105) и (1.106), а $\Delta_n(\varphi)$ – в (1.103'), (1.103''). Далее, пусть $X_n \subset X = L_2$ и $Y_n \subset Y = W_2^1$ при $N = 2n + 1$ те же, что и выше, а при $N = 2n$ X_n и Y_n суть множества элементов вида (1.99) с нормами соответственно пространств X и Y . Тогда СЛАУ (1.107) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \mathcal{L}_n^s S x_n + \mathcal{L}_n^s \rho \mathcal{L}_n^\sigma (h x_n) = \mathcal{L}_n^s y \quad (x_n \in X_n, \quad \mathcal{L}_n^s y \in Y_n). \quad (1.109)$$

В силу этого для вычислительной схемы м.д.в. (0.1), (1.105) – (1.107), (2.108), $\varphi_k(s) = 2 \Delta_n(s - \sigma_k)/N$, справедливы утверждения, *аналогичные* теоремам 1.5 и 1.6. При доказательстве этого факта существенным образом использованы результаты глав 1 и 3 монографии [25], а также вышеприведенные теоремы 1.1, 1.2 и лемма 1.5.

1.7. Метод вырожденных ядер. Ядро $h(s, \sigma)$ с.и.у. (0.1) заменим вырожденным аппроксимирующим ядром

$$h_N(s, \sigma) = \sum_{k=1}^N a_k(s) b_k(\sigma), \quad N \in \mathbb{N}, \quad (1.110)$$

где $\{a_k\}_1^N \subset W_2^1$ и $\{b_k\}_1^N \subset L_2$ – некоторые системы 2π -периодических функций, хотя бы одна из которых линейно независима. Тогда получим уравнение метода вырожденных ядер (м.в.я.)

$$A_N x \equiv S x + R_N x = y, \quad R_N x \equiv r h_N x \quad (x \in X, \quad y \in Y). \quad (1.111)$$

Решение этого уравнения, в случае его существования, будем определять по формуле

$$x_N^*(s) = S^{-1}(y; s) - \sum_{k=1}^N \alpha_k^* S^{-1}(a_k; s), \quad (1.112)$$

где $\{\alpha_k^*\}$ – решение СЛАУ

$$\alpha_j + \sum_{k=1}^N a_{jk} \alpha_k = y_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1.113)$$

оператор $S^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2$ определен в лемме 1.2, а

$$y_j = \int_0^{2\pi} y(s) b_j(s) ds, \quad a_{jk} = \int_0^{2\pi} S^{-1}(a_k; s) b_j(s) ds.$$

Сходимость этой схемы устанавливает следующая простая

Теорема 1.7. *Пусть выполнены условия:*

а) $y'(s) \in L_2[0, 2\pi]$, $h'_s(s, \sigma) \in L_2[0, 2\pi]^2$, $a'_k(s) \in L_2[0, 2\pi]$, $k = \overline{1, N}$;

б) $\varepsilon_N \equiv \|h - h_N\|_{L_2[0, 2\pi]^2} + \|h'_s - h'_{N's}\|_{L_2[0, 2\pi]^2} \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. (1.114)

Тогда при всех N , хотя бы достаточно больших, СЛАУ (1.113) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}$ и приближенные решения (1.112) сходятся к точному решению $x^*(s)$ в среднем со скоростью

$$\|x^* - x_N^*\|_2 = O(\varepsilon_N). \quad (1.115)$$

Доказательство. Следуя разделу 1.1, уравнения (0.1) и (1.111) будем рассматривать как операторные уравнения, приводящиеся к уравнениям второго рода, где $A : X \longrightarrow Y$ и $A_N : X \longrightarrow Y$, а $X = L_2$, $Y = W_2^1$. Тогда для любого $x \in X$ с помощью неравенства Гёльдера и условий теоремы находим

$$\|Ax - A_N x\|_{1;2} = \|Rx - R_N x\|_{1;2} = \|r(h - h_N)x\|_{1;2} \leq \varepsilon_N \|x\|_2,$$

где ε_N определено в (1.114). Таким образом, имеем

$$\|A - A_N\| \leq \varepsilon_N, \quad A - A_N : X \longrightarrow Y. \quad (1.116)$$

В силу (1.114) и (1.116) остальное следует из леммы 1.4 при $X = L_2$, $Y = W_2^1$.

1.8. Метод наименьших квадратов (м.н.к.). Введем в пространстве $Y = W_2^1$ скалярное произведение

$$(\varphi, \psi)_{1;2} = (\varphi, \psi)_2 + (\varphi', \psi')_2 \quad (\varphi, \psi \in W_2^1). \quad (1.117)$$

Тогда условия (1.23) при $U = Y$ приводят к СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^n \alpha_k (Ae^{ik\sigma}, Ae^{ij\sigma})_{1;2} = (y, Ae^{ij\sigma})_{1;2}, \quad j = \overline{-n, n}. \quad (1.118)$$

Теорема 1.8. Пусть $y(s) \in W_2^1$, а ядро $h(s, \sigma)$ таково, что оператор $R : L_2 \rightarrow W_2^1$ вполне непрерывен. Если с.и.у. (0.1) однозначно разрешимо в L_2 при любой правой части из W_2^1 , то при всех натуральных n СЛАУ (1.118) имеет единственное решение α_k^* , $k = \overline{-n, n}$. Приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся к точному решению $x^*(s)$ в среднем со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq \eta(A) E_n^T(x^*)_2, \quad (1.119)$$

где $\eta(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ — число обусловленности оператора $A : L_2 \rightarrow W_2^1$.

Доказательство. Система функций $\{e^{iks}\}$, $k = 0, \pm 1, \dots$, полна как в L_2 , так и в W_2^1 . В условиях теоремы из результатов раздела 1.1 следует, что операторы $A : L_2 \rightarrow W_2^1$ и $A^{-1} : W_2^1 \rightarrow L_2$ являются ограниченными. Поэтому система функций $\{e^{iks}\}$ является также A -полной [62]. Тогда из результатов С.Г.Михлина [62] по м.н.к. получаем требуемое утверждение.

Следует отметить, что если м.н.к. применить к с.и.у. (0.1) лишь в пространстве L_2 , то придем к СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^n \alpha_k (Ae^{ik\sigma}, Ae^{ij\sigma})_2 = (y, Ae^{ij\sigma})_2, \quad j = \overline{-n, n}. \quad (1.120)$$

Теорема 1.9. Пусть выполнены условия: а) $y \in L_2[0, 2\pi]$, $h \in L_2[0, 2\pi]^2$; б) с.и.у. (0.1) имеет решение $x^* \in L_2$ при данной правой части $y \in L_2$; в) уравнение $Ax = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение. Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$ СЛАУ (1.120) имеет единственное решение $\tilde{\alpha}_k$, $k = \overline{-n, n}$. Приближенные решения

$$\tilde{x}_n(s) = \sum_{k=-n}^n \tilde{\alpha}_k e^{iks} \quad (1.121)$$

сходятся в том смысле, что невязка $r_n \equiv y - A\tilde{x}_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, и

$$\|r_n\|_2 \leq E_n(y)_2 \leq \|A\|_2 \cdot E_n^T(x^*)_2, \quad (1.122)$$

$$E_n(y)_2 = \|y - y_n^0\|_2, \quad y_n^0 = \sum_{j=-n}^n \tilde{\alpha}_j A e^{ijs}. \quad (1.123)$$

Доказательство. В силу условия а) теоремы и леммы 1.1 оператор $A : L_2 \rightarrow L_2$ является вполне непрерывным. Поэтому система $\{e^{ijs}\}_{-\infty}^{\infty}$ является также A -полной в L_2 . С другой стороны, в силу условия в) теоремы система функций $\varphi_j(s) = A(e^{ijs}; s), j = \overline{-\infty, \infty}$, является линейно независимой. Тогда определитель СЛАУ (1.120) совпадает с определителем Грамма системы функций $\{\varphi_j(s)\}$, а, следовательно, отличен от нуля при любых $n \in \mathbb{N}$. Поэтому СЛАУ (1.120) имеет единственное решение $\tilde{\alpha}_k, k = \overline{-n, n}$, при любых $n \in \mathbb{N}$ и в силу (1.23) при $U = L_2$ и (1.121) справедлива оценка

$$\|r_n\|_2 = \|y - A\tilde{x}_n\|_2 \leq \|y - Ax_n\|_2 \quad (1.124)$$

для любого $x_n \in \mathbb{H}_n^T$. Полагая $x_n = \Phi_n x^*$, из (1.124) в силу условия б) теоремы находим требуемую оценку:

$$\begin{aligned} \|r_n\|_2 &= \|y - A\tilde{x}_n\|_2 \leq \|y - A\Phi_n x^*\|_2 = \|A(x^* - \Phi_n x^*)\|_2 \leq \\ &\leq \|A\|_2 \cdot \|x^* - \Phi_n x^*\|_2 = \|A\|_2 \cdot E_n^T(x^*)_2. \end{aligned}$$

Следует отметить, что если оператор $A : L_2 \rightarrow L_2$ обратим, то в условиях теоремы 1.9 справедливо соотношение $\|x^* - x_n^*\|_2 = \infty$ для любых $n \in \mathbb{N}$, т.е. некорректность задачи в рассматриваемом случае самым неприятным образом отражается на оценке погрешности м.н.к. В этом и состоит преимущество теоремы 1.8 перед теоремой 1.9.

1.9. Метод подобластей (м.п.). Условия (2.26) в случае равноотстоящих узлов приводят к следующей СЛАУ относительно коэффициентов полинома (1.21):

$$\sum_{k=-n}^n \alpha_k \{c_k(g) e^{iks_j} a_k + b_{jk}\} = y_j, \quad s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j = \overline{0, 2n}, \quad (1.125)$$

где $c_k(g)$ определены в (1.12), а

$$a_k = \{(e^{iks_1} - 1)/ik \quad \text{при } k \neq 0; \quad 2\pi/(2n+1) \quad \text{при } k = 0\};$$

$$b_{jk} = \frac{1}{2\pi} \int_{s_j}^{s_{j+1}} ds \int_0^{2\pi} h(s, \sigma) e^{ik\sigma} d\sigma, \quad y_j = \int_{s_j}^{s_{j+1}} y(s) ds.$$

Сходимость м.п. и оценку погрешности устанавливает

Теорема 1.10. Пусть $y(s) \in W_2^1$, а ядро $h(s, \sigma)$ таково, что регулярный оператор $R : L_2 \rightarrow W_2^1$ вполне непрерывен. Тогда при всех $n \geq n_0$ (n_0 определяется свойствами функции $h(s, \sigma)$) СЛАУ (1.125) имеет единственное решение α_k^* , $k = \overline{-n, n}$. Приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся к точному решению $x^*(s)$ в среднем со скоростью

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\|_2 &= O \{E_n^T(x^*)_2\} = O \{E_n^T((Sx^*)'_2)\} = \\ &= O \{E_n^T(y')_2 + E_n^T((Rx^*)'_2)\}. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Если, кроме того, $h'_s(s, \sigma) \in L_2[0, 2\pi]^2$, то справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \{E_n^T(y')_2 + E_n^{Ts}(h'_s)_2\}. \quad (1.127)$$

Доказательство ведем методом работы [41] и §8 гл.2 [51]. Обозначим через $\Pi_n : L_2 \rightarrow \mathbb{H}_n^T \subset L_2$ линейный проекционный оператор, однозначно определяющийся (см., напр., [41]) из условий

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} \Pi_n(\varphi; s) ds = \int_{s_j}^{s_{j+1}} \varphi(s) ds, \quad s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j = \overline{0, 2n}. \quad (1.128)$$

Известно [41, 51], что

$$\|\varphi - \Pi_n \varphi\|_2 \leq \frac{\pi}{2} E_n^T(\varphi)_2, \quad \varphi \in L_2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.129)$$

Теперь рассмотрим Π_n как оператор из W_2^1 в W_2^1 . Тогда для любой $\varphi \in W_2^1$ справедлива оценка

$$\|\varphi - \Pi_n \varphi\|_{1,2} \leq (1 + \pi/2) E_n^T(\varphi')_2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.130)$$

Действительно, с помощью (1.129), (1.50), (1.73), (1.53) и свойств оператора Фурье (1.47) для любой $\varphi \in W_2^1$ находим

$$\begin{aligned} \|\varphi - \Pi_n \varphi\|_{1,2} &= \|\varphi - \Pi_n \varphi\|_2 + \|(\varphi - \Pi_n \varphi)'\|_2 \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2} E_n^T(\varphi)_2 + \|(\varphi - \Phi_n \varphi)'\|_2 + \|\Phi_n(\varphi - \Pi_n \varphi)\|_2 \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2} E_n^T(\varphi)_2 + E_n^T(\varphi')_2 + n \|\varphi - \Pi_n \varphi\|_2 \leq \\ &\leq \frac{\pi(1+n)}{2} E_n^T(\varphi)_2 + E_n^T(\varphi')_2 \leq \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) E_n^T(\varphi')_2. \end{aligned}$$

Пусть $X_n = \mathbb{H}_n^T \subset X = L_2$, $Y_n = \mathbb{H}_n^T \subset Y = W_2^1$. Тогда в силу (1.26), (1.128), (1.41) и свойства $\Pi_n^2 = \Pi_n$ СЛАУ (1.125) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Pi_n A x_n = S x_n + \Pi_n R x_n = \Pi_n y \quad (x_n \in X_n, \Pi_n y \in Y_n). \quad (1.131)$$

Теперь из (1.131) и (1.18) с учетом (1.130) находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_{1,2} = \|Rx_n - \Pi_n Rx_n\|_{1,2} \leq \varepsilon'_n \|x_n\|_2, \quad x_n \in X_n,$$

$$\varepsilon'_n \equiv \sup\{\|\psi - \Pi_n \psi\|_{1,2} : \psi \in R\mathcal{H}(0, 1)\}.$$

В силу (1.130) операторы $\Pi_n \rightarrow E$ сильно в W_2^1 , а в условиях теоремы множество $R\mathcal{H}(0, 1)$ компактно в W_2^1 . Тогда из использованной выше (см. раздел 1.1) теоремы И.М.Гельфанда следует, что $\varepsilon'_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Другими словами, имеем

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq \|R - \Pi_n R\|_{X \rightarrow Y} \leq \varepsilon'_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.132)$$

Кроме того, в силу (1.130) и теоремы Джексона в L_2 для правых частей уравнений (1.18) и (1.131) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - \Pi_n y\|_{1,2} = O\{E_n^T(y')_2\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.133)$$

Таким образом, в силу (1.132) и (1.133) для уравнений (1.18) и (1.131) выполнены все условия теорем 1.1 и 1.2, из которых с учетом оценки (1.130) следует требуемое утверждение.

1.10. Скорость сходимости приближенных методов. Равномерная сходимость как следствие сходимости в среднем. Выше установлены среднеквадратические оценки погрешности приближенных методов решения с.и.у. (0.1), причем это сделано в терминах наилучших среднеквадратических или же наилучших равномерных приближений элементов этого уравнения тригонометрическими полиномами. Поэтому известные теоремы Джексона (см., напр., [48, 57, 75]) в пространствах L_2 и $C_{2\pi}$ позволяют установить скорость сходимости указанных методов через структурные свойства элементов с.и.у. (0.1). Для иллюстрации приведем следующие результаты. При этом будем использовать известные классы функций

$$W^r H^\alpha = \{x \in C_{2\pi} : x^{(r)}(s) \in H^\alpha\}, \quad r + 1 \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha \leq 1;$$

$$W^r H_2^\alpha = \{x \in L_2 : \|x^{(r)}(s+\delta) - x^{(r)}(s)\|_2 = O(\delta^\alpha)\}, \quad r \geq 0, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Теорема 1.11. Пусть с.и.у. (0.1) таково, что его точное решение $x^*(s) \in W^r H_2^\alpha$ ($r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$)¹⁾. Тогда м.Г. в условиях теоремы 1.3, м.н.к. в условиях теоремы 1.8, м.п. в условиях теоремы 1.10 сходятся в среднем и равномерно (при $r + \alpha > \frac{1}{2}$) со скоростями соответственно

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O(n^{-r-\alpha}), \quad (1.134)$$

¹⁾ Для этого достаточно, если, напр., $y(s) \in W^{r+1} H_2^\alpha$, $h(s, \sigma) \in W^{r+1} H_2^\alpha$ по s равномерно относительно σ , а $h(s, \sigma) \in L_2[0, 2\pi]^2$.

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha+\frac{1}{2}}\right). \quad (1.135)$$

Доказательство. В ходе доказательства теорем 1.3, 1.8 и 1.10 установлено, что

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T(x^*)_2\right\}. \quad (1.136)$$

Поскольку здесь $x^* \in W^r H_2^\alpha$, то в силу теоремы Джексона в L_2 (см., напр., [48, 57, 75]) имеем

$$E_n^T(x^*)_2 = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \quad r + \alpha > 0. \quad (1.137)$$

Из (1.136) и (1.137) следует оценка (1.134).

Для доказательства (1.135) воспользуемся приемом, предложенным в гл.14 [55]:

$$x^*(s) - x_n^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2^k n}^*(s) - x_{2^{k-1} n}^*(s), \quad (1.138)$$

где ряд сходится в среднем. Ясно, что в силу (1.134)

$$\|x_{2^k n}^* - x_{2^{k-1} n}^*\|_2 \leq \|x^* - x_{2^k n}^*\|_2 + \|x^* - x_{2^{k-1} n}^*\|_2 = O\left\{(2^{k-1}n)^{-r-\alpha}\right\}. \quad (1.139)$$

Поскольку (см., напр., [75], с.244)

$$\|T_n\|_\infty \leq \sqrt{2n+1} \|T_n\|_2, \quad T_n \in \mathbb{H}_n^T, \quad (1.140)$$

то из (1.138) и (1.139) с учетом $x_m^* \in \mathbb{H}_m^T$ находим (1.135).

Теорема 1.12. Пусть $y(s) \in W^{r+1}H^\alpha$ и $h(s, \sigma) \in W^{r+1}H^\alpha$ по переменной s равномерно относительно σ , где $r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда в условиях теоремы 1.4 м.к. сходится в среднем и равномерно со скоростями соответственно (1.134) и (1.135). Если, кроме того, $h(s, \sigma) \in W^{r+1}H^\alpha$ по σ равномерно относительно s , то в условиях теоремы 1.6 м.м.к. сходится в среднем и равномерно со скоростями соответственно (1.134) и (1.135).

Доказательство. С помощью теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ (см., напр., [48, 57, 75]) имеем

$$E_n^T(y')_\infty = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \quad E_n^{Ts}(h'_s)_\infty = O\left(n^{-r-\alpha}\right). \quad (1.141)$$

Отсюда и из (1.67) для метода коллокации следует оценка (1.134), а из нее, как показано выше, следует равномерная оценка (1.135).

Пусть теперь $h \in W^{r+1}H^\alpha$ (по σ). Тогда

$$E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty = O\left(n^{-r-\alpha}\right). \quad (1.142)$$

Из неравенств (1.141), (1.142) и (1.99) для метода механических квадратур следует оценка (1.134), а из нее – (1.135).

Результаты, аналогичные теоремам 1.11 и 1.12, справедливы также для м.в.я. при конкретном выборе аппроксимирующих ядер (1.110). Например, справедлива следующая

Теорема 1.13. Пусть $y(s) \in W^{r+1}H^\alpha$ и $h(s, \sigma) \in W^{r+1}H^\alpha$ по переменной s равномерно относительно σ , а

$$h_N(s, \sigma) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N h(s_k, \sigma) \Delta_n(s - s_k) = \mathcal{L}_n^s h(s, \sigma), \quad s_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad (1.143)$$

где ядра $\Delta_n(\varphi)$, $n = \llbracket N/2 \rrbracket$, определены в (1.103') и (1.103''). Тогда м.в.я. (1.111)–(1.113) решения с.и.у. (0.1) сходится в среднем и равномерно (при $r + \alpha > \frac{1}{2}$) со скоростями соответственно

$$\|x^* - x_N^*\|_2 = O(N^{-r-\alpha}), \quad (1.144)$$

$$\|x^* - x_N^*\|_\infty = O(N^{-r-\alpha+\frac{1}{2}}). \quad (1.145)$$

Доказательство. В рассматриваемом случае в силу леммы 1.5 и теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ имеем

$$\|h - h_N\|_{L_2[0,2\pi]^2} \leq 2 E_m^{Ts}(h)_\infty = O(N^{-r-\alpha-1}),$$

$$\|h'_s - h'_{N_s}\|_{L_2[0,2\pi]^2} = O(N^{-r-\alpha}), \quad m = \llbracket (N-1)/2 \rrbracket.$$

Отсюда и из теоремы 1.7 следует оценка (1.144). Для доказательства оценки (1.145) в уравнениях (1.18) и (1.111) вводим замены соответственно

$$Sx^* = y + z^*; \quad Sx_N^* = y + z_N^*, \quad (1.146)$$

где z^* и z_N^* – решения уравнений соответственно

$$z + RS^{-1}z = -RS^{-1}y, \quad (1.147)$$

$$z_N + R_N S^{-1}z_N = -R_N S^{-1}y. \quad (1.148)$$

Ясно, что $z_N^* \in \mathbb{H}_n^T$, где $n = \llbracket \frac{N}{2} \rrbracket$, и

$$x^* - x_N^* = S^{-1}(z^* - z_N^*) = S^{-1}z^* - S^{-1}z_N^*. \quad (1.149)$$

Из (1.144) и (1.149) следует оценка

$$\|x^* - x_N^*\|_2 = \|S^{-1}z^* - S^{-1}z_N^*\|_2 = O(N^{-r-\alpha}). \quad (1.149')$$

Здесь элемент $S^{-1}(z_N^*; s)$, в отличие от элемента $x_N^*(s)$, является тригонометрическим полиномом порядка не выше $n = \llbracket \frac{N}{2} \rrbracket$ (этот факт

доказывается с помощью леммы 1.2 и соотношений (1.14)). Теперь, применяя к элементам $S^{-1}z^*$ и $S^{-1}z_N^*$ метод доказательства оценки (1.135), из соотношений (1.149') выводим (1.145).

В теоремах 1.10 – 1.12 равномерная сходимость приближенных методов решения с.и.у. (0.1) установлена как следствие сходимости в среднем. Следует отметить, что полученные при этом равномерные оценки погрешности (1.135) и (1.145) являются несколько грубыми; это связано, как увидим ниже, с использованным выше методом их доказательства. Суть дела продемонстрируем для наиболее употребительного в приложениях, но в то же время для наиболее трудного для обоснования метода, а именно, для метода механических квадратур. Имеет место следующая

Теорема 1.14. Пусть выполнены условия: а) функции $y(s) \in W^{r+1}H^\alpha$ и $h(s, \sigma) \in W^{r+1}H^\alpha$ (по каждой из переменных равномерно относительно другой из них), где $r \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha \leq 1$; б) с.и.у. (0.1) однозначно разрешимо в L_2 при любой правой части из W_2^1 . Тогда при всех n таких, что

$$q_n = e_0 n^{-r-\alpha} < 1, \quad (1.150)$$

СЛАУ (1.78) и (1.79) однозначно разрешимы и приближенные решения (1.77) сходятся к точному решению $x^*(s)$ с.и.у. (0.1) в среднем и равномерно со скоростями соответственно

$$\text{а) } \|x^* - x_n^*\|_2 \leq e_1 n^{-r-\alpha}; \quad \text{б) } \|x^* - x_n^*\|_\infty \leq e_2 n^{-r-\alpha} \ln n, \quad (1.151)$$

где e_i – положительные постоянные, не зависящие от n .

Следствие. В условиях теоремы для любых $k \in \mathbb{N}$ таких, что $1 \leq k < r + \alpha$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} \text{а) } \|(x^* - x_n^*)^{(k)}\|_2 &= O(n^{-r-\alpha+k}); \\ \text{б) } \|(x^* - x_n^*)^{(k)}\|_\infty &= O(n^{-r-\alpha+k} \ln n). \end{aligned} \quad (1.152)$$

Доказательство. Из теоремы 1.1 и хода доказательства теорем 1.5 и 1.12 следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{x_n \rightarrow y} \leq (1 + \pi) \{E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty\}, \quad (1.153)$$

где операторы A_n определены в (1.83), (1.84). Отсюда и из теоремы 1.1 и теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ (см., напр., [75], с.305) находим (при $n \geq n_0$)

$$q_n \equiv 3(1 + \pi) \|A^{-1}\| \left\{ H_s \left(\frac{\partial^{r+1}h}{\partial s^{r+1}}; \alpha \right) + H_\sigma \left(\frac{\partial^{r+1}h}{\partial \sigma^{r+1}}; \alpha \right) \right\} \frac{1}{n^{r+\alpha}} < 1,$$

где $A^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2$, а $H_s(\varphi; \alpha)$ и $H_\sigma(\varphi; \alpha)$ означают, что оператор $H(\cdot; \alpha)$ применен к функции $\varphi(s, \sigma)$ по переменным s и σ соответственно. Поэтому чем лучше функция $h(s, \sigma)$, тем меньше $n_0 \in \mathbb{N}$, начиная с которого СЛАУ (1.78), (1.79) м.м.к. однозначно разрешимы. С другой стороны, из леммы 1.5 и снова из теоремы Джексона получаем

$$\delta_n \equiv \|y - \mathcal{L}_{n;\omega}\|_{W_2^1} \leq (1 + \pi) E_n^T(y')_\infty \leq \frac{3(1 + \pi) H(y^{r+1}; \alpha)}{n^{r+\alpha}}. \quad (1.154)$$

Тогда из теоремы 1.1 с учетом неравенств (1.153) и (1.154) находим

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - q_n} \left\{ \frac{e_0}{n^{r+\alpha}} \|y\|_{W_2^1} + \frac{3(1 + \pi) H(y^{(r+1)}; \alpha)}{n^{r+\alpha}} \right\},$$

т.е. неравенства (1.150) и (1.151a) установлены с постоянными

$$e_0 = 3(1 + \pi) \|A^{-1}\|_{W_2^1 \rightarrow L_2} \cdot \left\{ H_s \left(\frac{\partial^{r+1} h}{\partial s^{r+1}}; \alpha \right) + H_\sigma \left(\frac{\partial^{r+1} h}{\partial \sigma^{r+1}}; \alpha \right) \right\},$$

$$e_1 = \frac{\|A^{-1}\|}{1 - e_0 n^{-r-\alpha}} \left\{ e_0 \|y\|_{W_2^1} + 3(1 + \pi) H(y^{(r+1)}; \alpha) \right\}, \quad A^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2.$$

Докажем оценку (1.151б), при этом ввиду излишней громоздкости выкладок подсчетом постоянной e_2 заниматься не будем.

В силу (0.1) и (1.83), (1.84) имеем тождества

$$S(x^*; s) \equiv y(s) - (\rho h x^*)(s), \quad (1.155)$$

$$S(x_n^*; s) \equiv \mathcal{L}_{n,\omega}(y; s) - \mathcal{L}_{n,\omega}(\rho(\mathcal{L}_n^\sigma h)x_n^*; s), \quad (1.156)$$

откуда получаем

$$S(x^* - x_n^*) = (y - \mathcal{L}_{n;\omega}y) - (\rho h x^* - \mathcal{L}_{n,\omega} \rho h x_n^*) - \rho h(x^* - x_n^*) - \mathcal{L}_{n,\omega} \{ \rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n^* \} \equiv \theta_n(s). \quad (1.157)$$

Решим уравнение $S(x^* - x_n^*) = \theta_n(s)$ относительно $x^* - x_n^*$, считая временно $\theta_n(s)$ известной функцией. Тогда в силу леммы 1.2 имеем

$$x^*(s) - x_n^*(s) = -2I(\theta_n'; s) + \rho(\theta_n)/\ln 2, \quad (1.158)$$

где операторы I и ρ определены в (1.4) и (1.84) соответственно.

Из соотношений (1.157) и (1.158) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x^* - x_n^*\|_\infty &\leq \|I(y - \mathcal{L}_{n,\omega}y)_\sigma'\|_\infty + \|I(\psi - \mathcal{L}_{n,\omega}\psi)_\sigma'\|_\infty + \\ &+ \|I[\rho h(x^* - x_n^*)]_\sigma'\|_\infty + \|I[\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n^*]_\sigma'\|_\infty + \end{aligned} \quad (1.159)$$

$$+\frac{1}{2 \ln 2} |\rho S(x^* - x_n^*)| \equiv M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5, \quad \psi \equiv \rho h x_n^*.$$

Дальше доказательство существенным образом опирается на следующую лемму (доказательство приводится ниже):

Лемма 1.6. *Для любой функции $\varphi \in W^m H^\alpha$ справедливы оценки*

$$\|I(\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega}\varphi)\|_\infty \leq d_0 n^{-m-\alpha} \ln n \quad \text{при } m + \alpha > 0; \quad (1.160)$$

$$\|I(\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega}\varphi)'_\sigma\|_\infty \leq d_1 n^{-m-\alpha+1} \ln n \quad \text{при } m + \alpha > 1, \quad (1.161)$$

где d_i – положительные постоянные, не зависящие от n .

Оценим каждое из слагаемых M_k из (1.159) в отдельности.

Пользуясь (1.161), для слагаемого M_1 находим

$$M_1 \equiv \|I(y - \mathcal{L}_{n,\omega}y)'_\sigma\|_\infty = O(n^{-r-\alpha} \ln n). \quad (1.162)$$

Поскольку $\|x_n^*\|_2 = O(1)$, $n \rightarrow \infty$, и $h \in W^{r+1}H^\alpha$ (по s), то функция $\psi(s) \equiv (\rho h x_n^*)(s) \in W^{r+1}H^\alpha$ равномерно относительно n . Поэтому снова по оценке (1.161) получаем

$$M_2 \equiv \|I(\psi - \mathcal{L}_{n,\omega}\psi)'_\sigma\|_\infty = O(n^{-r-\alpha} \ln n). \quad (1.163)$$

Для M_3 из (1.159) имеем

$$M_3 = \|I[\rho h(x^* - x_n^*)]'_\sigma\|_\infty = \|\rho h_1(x^* - x_n^*)\|_\infty,$$

где $h_1(s, \sigma) = I_\eta[h'_\eta(\eta, \sigma); s]$, а сингулярный оператор $I = I_\eta$ применен по переменной η . В силу условия а) теоремы и свойств сингулярных интегральных операторов (см., напр., главы 1 и 2 монографии [66]) функция $h_1(s, \sigma)$ удовлетворяет хотя бы условию Гёльдера с некоторым положительным показателем. Тогда из неравенства Гёльдера и оценки (1.151a) находим

$$M_3 \leq \max_{s,\sigma} |h_1(s, \sigma)| \cdot \|x^* - x_n^*\|_2 = O(n^{-r-\alpha}). \quad (1.164)$$

В силу известных результатов (см., напр., [4, 45, 61])

$$\frac{d}{ds} I(x; s) = I\left(\frac{dx(\sigma)}{d\sigma}; s\right), \quad x \in W_2^1. \quad (1.165)$$

Известно (см., напр., [75], с.223), что

$$\left\| \frac{d}{ds} I(T_n; s) \right\|_\infty \leq n \|T_n(s)\|_\infty, \quad T_n \in \mathbb{H}_n^T. \quad (1.166)$$

Теперь с помощью леммы 1.5 и соотношений (1.165), (1.166) для слагаемого M_4 из (1.159) находим

$$M_4 = \|I(\mathcal{L}_{n,\omega}\varphi)'_\sigma\|_\infty = \|(I\mathcal{L}_{n,\omega}\varphi)'_s\|_\infty \leq n \|\mathcal{L}_{n,\omega}\varphi\|_\infty =$$

$$= O(n \ln n) \|\varphi\|_\infty, \quad \varphi(s) \equiv (\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n^*)(s).$$

Отсюда с помощью оценок (1.68), (1.151a) находим

$$\begin{aligned} |\varphi(s)| &\leq \|x_n^*\|_2 \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(s, \sigma) - \mathcal{L}_n^\sigma h(s, \sigma)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2 E_n^{T\sigma}(h)_\infty \|x_n^*\|_2 = O \{ E_n^{T\sigma}(h)_\infty \}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ для M_4 имеем

$$M_4 = O(n \ln n) \cdot O(n^{-r-1-\alpha}) = O(n^{-r-\alpha} \cdot \ln n). \quad (1.167)$$

Наконец, для слагаемого M_5 из (1.159) с помощью леммы 1.3 и неравенства (1.151a) находим

$$M_5 \leq \frac{1}{2 \ln 2} \|S(x^* - x_n^*)\|_2 \leq \frac{1}{2} \|x^* - x_n^*\|_2 = O(n^{-r-\alpha}). \quad (1.168)$$

Теперь из неравенств (1.159), (1.162) – (1.164), (1.167), (1.168) следует требуемая оценка (1.151б).

Для завершения доказательства теоремы 1.14 остается показать справедливость формул (1.160) и (1.161). Формула (1.160) известна (см., напр., теорему 9 гл.3 [25]). Докажем формулу (1.161).

Из леммы 1.5 и теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ следует, что

$$\|\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega}\varphi\|_\infty \leq d_2 n^{-m-\alpha} \ln n, \quad \varphi \in W^m H^\alpha, \quad (1.169)$$

где d_2 – положительная постоянная, не зависящая от n . Тогда

$$\|\mathcal{L}_{2^k n, \omega}\varphi - \mathcal{L}_{2^{k-1} n, \omega}\varphi\|_\infty \leq 2 d_2 (2^{k-1} n)^{-m-\alpha} \ln(2^k n). \quad (1.170)$$

Теперь из (1.170), (1.165), (1.166) с учетом $\mathcal{L}_{2^k n, \omega}\varphi \in \mathbb{H}_{2^k n}^T$ последовательно находим оценку (1.161):

$$\begin{aligned} \|I(\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega}\varphi)'_\sigma\|_\infty &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} [I(\mathcal{L}_{2^k n, \omega}\varphi - \mathcal{L}_{2^{k-1} n, \omega}\varphi)]'_s \right\|_\infty \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^k n \cdot \|\mathcal{L}_{2^k n, \omega}\varphi - \mathcal{L}_{2^{k-1} n, \omega}\varphi\|_\infty \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (2^k n \cdot 2 d_2 \cdot (2^{k-1} n)^{-m-\alpha} \ln(2^k n)) = \\ &= \frac{4 d_2}{n^{m+\alpha-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(2^k n)}{2^{(k-1)(m+\alpha-1)}} \leq \frac{d_1 \ln n}{n^{m+\alpha-1}} \quad (m + \alpha > 1). \end{aligned}$$

Для доказательства следствия воспользуемся рядом

$$D^k(x^* - x_n^*) = \sum_{j=1}^{\infty} D^k(x_{2^j n}^* - x_{2^{j-1} n}^*), \quad D^k \equiv \frac{d^k}{ds^k},$$

сходящимся как в L_2 , так и в $C_{2\pi}$. Отсюда, применяя неравенства С.Н.Бернштейна (и их следствия) для тригонометрических полиномов в пространствах $U = L_2[0, 2\pi]$ и $U = C_{2\pi}$, находим

$$\|D^k(x^* - x_n^*)\|_U \leq \sum_{j=1}^{\infty} (2^j n)^k \|x_{2^j n}^* - x_{2^{j-1} n}^*\|_U.$$

Отсюда при $U = L_2[0, 2\pi]$ ($U = C_{2\pi}$) и из (1.151а) (соответственно (1.151б)) находим оценку (1.152а) (соответственно (1.152б)).

Теорема 1.14 и ее следствие доказаны полностью. В силу сказанного выше, утверждение, аналогичное только что доказанной теореме и ее следствию, справедливо также для других приближенных методов решения с.и.у. (0.1), рассмотренных в этом параграфе.

Замечание 1.4. В силу добавления к лемме 1.2, равномерные оценки погрешности (1.135), (1.145), (1.151б) и (1.152б) не могут быть получены непосредственно, т.е. при выборе $X = C_{2\pi}$, если даже пространство Y выбрано в виде $Y = X^1 = C_{2\pi}^1$. Это утверждение относится также к другим приближенным методам.

1.11. Об устойчивости, обусловленности и оптимальности приближенных методов. При практической численной реализации приближенных методов большое значение имеет доказательство их устойчивости и обусловленности. Пользуясь приведенными в §5 гл.1 [25] определениями и результатами, докажем следующее утверждение:

Теорема 1.15. а) В условиях теоремы 1.3 м.Г., теоремы 1.4 м.к., теоремы 1.5 м.м.к., теоремы 1.7 м.в.я., теоремы 1.8 м.н.к., теоремы 1.10 м.п. устойчивы относительно малых возмущений элементов соответствующих аппроксимирующих СЛАУ. б) В каждой из указанных теорем из хорошей обусловленности точного с.и.у. (0.1) следует хорошая обусловленность соответствующих аппроксимирующих уравнений $A_n x_n = y_n$ ($x_n \in X_n$, $y_n \in Y_n$, $A_n : X_n \rightarrow Y_n$) исследованных методов.

Доказательство проведем лишь для метода квадратур; другие методы рассматриваются совершенно аналогично.

В ходе доказательства теоремы 1.5 показано, что

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq \varepsilon'_n = O \{ E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty \},$$

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq \varepsilon_n'' = O \{ E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty \},$$

$$\|A_n^{-1}\| \leq 2 \|A^{-1}\|, \quad A_n : X_n \longrightarrow Y_n, \quad A : X \longrightarrow Y, \quad n \geq n_1,$$

где $n = n_1$ определяется из неравенства $q_n = \varepsilon_n \|A^{-1}\| < 1/2$. В силу этих неравенств из результатов п.1 §5 гл.1 [25] следует утверждение а) теоремы 1.15 в случае метода квадратур.

Пусть теперь с.и.у. (0.1) хорошо обусловлено, т.е. число обусловленности $\eta(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ оператора $A = S + R : L_2 \longrightarrow W_2^1$ не велико. Тогда из только что указанных неравенств следует, что при всех $n \geq n_0$, удовлетворяющих неравенству $q_n \equiv \|A^{-1}\| \varepsilon_n < 1$, $A^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2$, числа обусловленности операторов $A_n : X_n \longrightarrow Y_n$, определяемых соотношениями (1.83), (1.84), существуют, причем

$$\eta(A_n) = \|A_n\|_{X_n \rightarrow Y_n} \cdot \|A_n^{-1}\|_{Y_n \rightarrow X_n} \leq \frac{\eta(A) + q_n}{1 - q_n} \equiv \gamma_n.$$

Поскольку $\gamma_n \rightarrow \eta(A)$ при $n \rightarrow \infty$, то из результатов п.2 §5 гл.1 [25] следует утверждение б) теоремы 1.15.

Замечание 1.5. Доказанные выше теоремы 1.1 – 1.15 позволяют проводить весьма интересные исследования по устойчивости рассмотренных приближенных методов, что может быть сделано с помощью соответствующих результатов монографии С.Г.Михлина [64]. Однако ограниченность объема работы не позволяет нам остановиться на этом более подробно.

Далее, многие из полученных выше оценок погрешности, как следует из работ автора [25, 31, 32], являются в определенном смысле неулучшаемыми. В частности, справедлива следующая

Теорема 1.16. а) Оценки (1.43), (1.45), (1.115), (1.118), (1.116), полученные соответственно для методов Галеркина, вырожденных ядер, наименьших квадратов и подобластей, неулучшаемы по порядку. б) Оценки (1.64), (1.66) из теоремы 1.4, (1.134) из теоремы 1.12 и (1.151), (1.152) из теоремы 1.14 по методам коллокации и квадратур неулучшаемы по порядку для класса уравнений (0.1), множество решений $X^* = \{x^* \in X : Ax^* \equiv y\}$ которого в пространстве $C_{2\pi}$ удовлетворяет условию $\omega(x^*; \delta) \ln \delta \rightarrow 0, \delta \rightarrow +0$, равномерно относительно $x^* \in X^*$.

Доказательство утверждения а) почти очевидно. Действительно, для м.Г., м.н.к. и м.п. выше показано, что

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \{ E_n^T(x^*)_2 \}. \quad (1.171)$$

Для этих методов приближенные решения (1.21*) построены так, что $x_n^*(s) \in \mathbb{H}_n^T$. Отсюда и из определения наилучших среднеквадратических приближений следует, что

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \geq E_n^T(x^*)_2 = \rho(x^*, \mathbb{H}_n^T)_2, \quad (1.172)$$

где $\rho(x^*, F)_2$ – расстояние от элемента $x^* \in X$ до множества $F \subset X = L_2$. Из неравенств (1.171) и (1.172) следует утверждение а) для м.Г., м.н.к. и м.п. Для м.в.я. доказательство ведется аналогичным образом.

Утверждение б) доказывается с помощью результатов глав II – IV монографии автора [25] и частично следует из работ [31, 32]. Однако ввиду излишней громоздкости выкладок доказательство здесь не приводится.

Отметим, что как теорема 1.16, так и аналогичные им более общие результаты следуют также из соответствующих результатов работ автора [25, 29]. Более того, на основе полученных результатов и с помощью результатов и методов работ [25, 29, 37] может быть решена довольно трудная, но в то же время весьма важная задача оптимизации прямых и проекционных методов решения с.и.у. (0.1), когда оптимальная оценка погрешности определяется по минимаксному принципу [5, 25]. Некоторое представление о полученных при этом результатах дают работы автора [21 - 32], а также [1, 36, 39, 43, 87].

1.12. Об итерационных методах. До сих пор речь шла о прямых и проекционных методах решения с.и.у. (0.1). Это уравнение можно решать также различными итерационными методами. В частности, можно использовать метод простой итерации в следующем виде:

$$Sx^{k+1} + Rx^k = y \quad (S, R : X \longrightarrow Y, k = 0, 1, \dots), \quad (1.173)$$

где x° – произвольный элемент из пространства X , в частности, $x^\circ = S^{-1}y$. Тогда леммы 1.2 и 1.3 позволяют доказать сходимость последовательных приближений $x^k(s) \rightarrow x^*(s)$, $k \rightarrow \infty$, в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ с определенной скоростью, если S, R (и $A \equiv S+R$) рассматривать как линейные операторы из пространства $X = L_2$ в пространство $Y = W_2^1$; возможен и другой способ выбора пространств, напр., можно положить $X = H^\beta$, $Y = H^{1+\beta} \equiv H_\beta^1$ ($0 < \beta < 1$). К уравнению (0.1) могут быть применены также другие, в частности, т.н. универсальные итерационные методы (см., напр., [60]).

Теперь в итерационном процессе (1.173) начальное приближение выберем специальным образом, а именно, положим $x^\circ = x_n^*$, где x_n^* –

приближенное решение с.и.у. (0.1), построенное одним из рассмотренных выше прямых методов. Следуя нашей работе [16] (п.2 §2), первое приближение x_n^1 определим по формуле

$$Sx_n^1 + Rx_n^* = y \quad (x_n^* = x^\circ; \quad S, R : L_2 \longrightarrow W_2^1). \quad (1.173')$$

Отсюда и из точного уравнения находим $S(x^* - x_n^1) = -R(x^* - x_n^*)$, а тогда в силу леммы 1.2 имеем

$$x^* - x_n^1 = -S^{-1}R(x^* - x_n^*), \quad x_n^* = x^\circ. \quad (1.173'')$$

Как показано в работе [16], погрешность первого приближения x_n^1 не больше (а в случае метода квадратур и меньше) погрешности нулевого приближения $x^\circ = x_n^*$, т.е. погрешности прямого метода. Например, пусть ядро $h(s, \sigma)$ таково, что оператор $S^{-1}R$ является ограниченным из L_2 в $C_{2\pi}$. Тогда из (1.173'') получаем

$$\|x^* - x_n^1\|_\infty \leq \|S^{-1}R\|_{2 \rightarrow \infty} \cdot \|x^* - x_n^*\|_2. \quad (1.173''')$$

В этом случае прямой метод равномерно может и не сходиться, хоть и сходится в среднем, а первое приближение x_n^1 сходится равномерно к точному решению с.и.у. (0.1). Более того, x_n^1 может сходиться к x^* и в пространствах гладких функций, если оператор $S^{-1}R$ обладает определенным сглаживающим свойством.

Далее, уравнения, соответствующие рассмотренным выше приближенным методам, запишем в абстрактном виде

$$A_n x_n \equiv Sx_n + Rx_n = y_n \quad (x_n \in X_n \subset X, y_n \in Y_n \subset Y). \quad (1.174)$$

Как уже указывалось выше, уравнение (1.174) эквивалентно СЛАУ относительно коэффициентов разложения элемента x_n по элементам базиса подпространства $X_n \subset X$. Это уравнение, а следовательно, и соответствующая ему СЛАУ, как было доказано выше, однозначно разрешимы при всех $n \geq n_0$, где номер n_0 определяется свойствами функции $h(s, \sigma)$; в частности, имеем: а) $n_0 = 0$ для м.н.к. в общем случае; б) $n_0 = 0$ для всех методов, если $h(s, \sigma) \equiv 0$; в) $n_0 = 0$ для всех проекционных методов, если $h(s, \sigma)$ не зависит от переменной s ; г) $n_0 = 0$ для всех проекционных методов, если $P_n^2 = P_n$ и $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$ (см. также §2).

Из доказанных выше теорем в общем случае прослеживается следующая интересная закономерность: чем лучше структурные свойства функции $h(s, \sigma)$, то тем меньше номер n_0 . Однако в общем случае, кроме м.н.к., номер n_0 в ряде случаев может оказаться достаточно

большим, а тогда решение с.и.у. (0.1) прямыми и проекционными методами может представить значительные практические трудности. В этом случае уравнение (1.174) можно решать итерационным методом по схеме

$$Sx_n^{k+1} + R_n x_n^k = y_n, \quad x_n^0 = S^{-1}y_n, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.175)$$

Тогда, следуя §7 гл. II [25], легко доказывается, что последовательность элементов $x_n^k(s)$, определяемых из (1.175), сходится в среднем к точному решению $x^*(s)$ с.и.у. (0.1) в смысле

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* = x^*,$$

причем с определенной скоростью сходимости. Ясно, что (1.175) есть простейшая схема аппроксимативно-итерационного метода решения с.и.у. (0.1). Пользуясь результатами §7 гл. II [25] и [60] и вышеприведенными результатами, с.и.у. (0.1) можно решать также более общими методами (в частности, методом уточняющих итераций), основанными на сочетании как прямых и проекционных, так и универсальных итерационных методов.

1.13. Сходимость в пространстве гёльдеровых функций.

Выше везде речь шла о сходимости в L_2 , а в ряде случаев и в $C_{2\pi}$. Следует отметить, что результаты, аналогичные приведенным выше, можно получить также в пространстве L_p ($1 < p < \infty$, $p \neq 2$) и пространстве гёльдеровых функций H^β ($0 < \beta < 1$). Для иллюстрации приведем лишь один результат для м.м.к.:

Теорема 1.17. Пусть выполнены условия: а) $y(s) \in W^{r+1}H^\alpha$ и $h(s, \sigma) \in W^{r+1}H^\alpha$ (по каждой из переменных равномерно относительно другой из них), где $r \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha \leq 1$; б) с.и.у. (0.1) однозначно разрешимо в пространстве $X = H^\beta$ при любой правой части из $Y = X^1 = H^{1+\beta}$, где $0 < \beta < 1$. Тогда при всех $n \geq n_0$ ($n_0 = 0$ при $h(s, \sigma) \equiv 0$ или $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$) таких, что

$$q_n = d'_0 \|A^{-1}\| n^{-r-\alpha+\beta} \ln n < 1, \quad r + \alpha > \beta, \quad A^{-1} : X^1 \longrightarrow X, \quad (1.176)$$

СЛАУ (1.78) и (1.79) м.м.к. однозначно разрешимы. Приближенные решения (1.77) сходятся к точному решению $x^*(s)$ с.и.у. (0.1) в пространстве H^β со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_\beta \leq d'_1 n^{-r-\alpha+\beta} \ln n, \quad r + \alpha > \beta, \quad (1.177)$$

где d'_i – положительные постоянные, не зависящие от n .

Следствие. В условиях теоремы для любых k таких, что $0 \leq k < r + \alpha - \delta$ ($k + 1 \in \mathbb{N}$), в пространстве H^δ ($0 \leq \delta \leq 1$) справедливы оценки

$$\left\| \frac{d^k(x^* - x_n^*)}{ds^k} \right\|_\delta = O \left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-k-\delta}} \right), \quad r + \alpha > k + \delta, \quad 0 \leq \delta \leq 1, \quad (1.178)$$

где через H° формально обозначено пространство $C_{2\pi}$.

Эта теорема доказывается с помощью теорем 1.1, 1.14 и соответствующих результатов автора по аппроксимации тригонометрическими полиномами в пространствах Гёльдера (см., напр., [12, 13, 15, 18, 20, 25, 26]). Аналогичные теоремы справедливы также для других рассмотренных выше прямых и проекционных методов.

1.14. Система слабосингулярных уравнений. В приложениях (см., напр., в [82, 84, 86]) нередко встречается система слабо с.и.у. вида

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{s - \sigma}{2} \right| x(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma = y(s) + F, \quad (a)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) d\sigma = D, \quad (б)$$

где $h(s, \sigma), y(s)$ – известные функции, $x(\sigma)$ – искомая функция, F – искомый, а D – данный параметр. Эта система практически может быть решена теми же методами, что и с.и.у. (1.1). Для иллюстрации приведем следующий результат.

Приближенное решение системы (а) – (б) будем искать в виде вектор-функции $\vec{x}_n(s) = \{x_n(s); F_n\}$ с неизвестными компонентами $F_n \in \mathbb{R}$ и

$$x_n(s) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k D_n(s - s_k) \in \mathbb{H}_n^T, \quad s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad (в)$$

где γ_k – подлежащие определению параметры. Неизвестные коэффициенты $F_n, \gamma_0, \dots, \gamma_{2n}$ будем определять из СЛАУ

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k(s_j) \gamma_k + \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} h(s_j, s_k) \gamma_k = y(s_j) + F_n, \quad (г)$$

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k = D, \quad s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j = \overline{0, 2n}, \quad (д)$$

где функции $a_k(s)$ определяются из различных условий, напр., из условия, чтобы квадратурная формула

$$S(x; s) \approx \sum_{k=0}^{2n} a_k(s)x(s_k), \quad x \in C_{2\pi}, \quad (\text{e})$$

имела наивысшую тригонометрическую степень точности (таким свойством обладают, напр., формулы, построенные в гл. 1 [69]).

Для вычислительной схемы (а) – (е) справедливы результаты, аналогичные полученным выше по м.м.к. для с.и.у. (0.1). В частности, справедлива следующая

Теорема 1.18. Пусть выполнены условия: 1) функция h (по каждой из переменных в отдельности и равномерно относительно другой из них) и $y \in W^{r+1}H^\alpha$ ($r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1$); 2) точная система (а) – (б) имеет единственное решение $\vec{x}^*(s) = \{x^*(s); F^*\} \in L_2 \otimes \mathbb{R}$ при любой правой части $\vec{y}(s) = \{y(s); D\} \in W_2^1 \otimes \mathbb{R}$; 3) функции $a_k(s)$ определены по формуле (1.79) при $\omega = 0$.

Тогда при всех $n \geq n_0$ ($n_0 = 0$ при $h(s, \sigma) = \text{const}$ или при $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$) СЛАУ (г) – (е) имеет единственное решение $F_n^*, \gamma_0^*, \dots, \gamma_{2n}^*$. Приближенные решения $\vec{x}_n^*(s) = \{x_n^*(s); F_n^*\}$, где $x_n^*(s) = x_n(s)$ при $\gamma_k = \gamma_k^*$, $k = \overline{0, 2n}$, сходятся к точному решению системы (а) – (б) со скоростями

$$\|\vec{x}^* - \vec{x}_n^*\| = \|x^* - x_n^*\|_2 + |F^* - F_n^*| = O(n^{-r-\alpha}), \quad (\text{ж})$$

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-r-\alpha} \ln n), \quad r + \alpha > 0. \quad (\text{з})$$

Доказательство. Сначала точную систему (а) – (б) запишем в виде одного операторного уравнения

$$\vec{K}\vec{x} \equiv \vec{S}\vec{x} + \vec{R}\vec{x} = \vec{y} \quad (\vec{x} \in \vec{X}, \vec{y} \in \vec{Y}), \quad (\text{и})$$

где $\vec{X} = \{\vec{x}\}$ – пространство вектор-функций $\vec{x}(s) = \{x(s); F\}$ с компонентами $x(s) \in L_2, F \in \mathbb{R}$ и нормой $\|\vec{x}\| = \|x\|_2 + |F|$ ($\vec{x} \in \vec{X}$), а $\vec{Y} = \{\vec{y}\}$ – пространство вектор-функций $\vec{y}(s) = \{y(s); D\}$ с компонентами $y \in W_2^1, D \in \mathbb{R}$ и с нормой $\|\vec{y}\| = \|y\|_{1,2} + |D|$ ($\vec{y} \in \vec{Y}$); смысл операторов \vec{S} и \vec{R} очевиден. Ясно, что в условиях теоремы \vec{K} – ограниченный оператор из \vec{X} на \vec{Y} , причем существует непрерывный обратный $\vec{K}^{-1} : \vec{Y} \rightarrow \vec{X}$.

Обозначим через $\vec{X}_n = \{\vec{x}_n\} \subset \vec{X}$ подпространство вектор-функций $\vec{x}_n(s) = \{x_n(s); F_n\}$ с компонентами $x_n \in \mathbb{H}_n^T \subset L_2, F_n \in \mathbb{R}$ и с нормой пространства \vec{X} ; через $\vec{Y}_n = \{\vec{y}_n\} \subset \vec{Y}$ обозначим подпространство

вектор-функций $\vec{y}_n(s) = \{y_n(s); D\}$ с компонентами $y_n \in \mathbb{H}_n^T \subset W_2^1$, $D \in \mathbb{R}$ и с нормой пространства \vec{Y} . Тогда СЛАУ (в) – (е) эквивалентна одному операторному уравнению вида

$$\vec{K}_n \vec{x}_n \equiv \vec{S} \vec{x}_n + \vec{R}_n \vec{x}_n = \vec{y}_n \quad (\vec{x}_n \in \vec{X}_n, \vec{y}_n \in \vec{Y}_n), \quad (\kappa)$$

где \vec{K}_n – ограниченный оператор из \vec{X}_n в \vec{Y}_n при каждом n ($2n+1 \in \mathbb{N}$), а смысл операторов \vec{R}_n очевиден.

Теперь для любого $\vec{x}_n \in \vec{X}_n$, как и при доказательстве теоремы 1.6, с помощью уравнений (и), (к) находим

$$\|\vec{K} - \vec{K}_n\|_{\vec{X}_n \rightarrow \vec{Y}} = O \{E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty\},$$

$$\|\vec{y} - \vec{y}_n\|_{\vec{Y}} = \|y - y_n\|_Y = O \{E_n^T(y')_\infty\}.$$

В силу условия 1) теоремы из двух последних неравенств получаем

$$\|\vec{K} - \vec{K}_n\|_{\vec{X}_n \rightarrow \vec{Y}} = O(n^{-r-\alpha}), \quad \|\vec{y} - \vec{y}_n\|_{\vec{Y}} = O(n^{-r-\alpha}), \quad r + \alpha > 0.$$

Дальше доказательство завершается по аналогии с доказательством теорем 1.5 и 1.14.

§2. Уравнения с периодическими ядрами.

Продолжение

В этом параграфе рассматривается приближенное решение частного случая с.и.у. (0.1), а именно, слабо с.и.у. вида

$$Bx \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right| x(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s-\sigma)x(\sigma) d\sigma = y(s), \quad (2.1)$$

где искомая функция $x(s)$ ищется в пространстве $L_p[0, 2\pi]$, $1 < p < \infty$, а $h(s) \in W_1^1[0, 2\pi]$ и $y(s) \in W_p^1[0, 2\pi]$ – известные 2π -периодические функции, причем $h(s)$ является четной. В этих условиях B является ограниченным оператором из L_p в W_p^1 , $1 < p < \infty$. Поэтому для с.и.у. (2.1) результаты §1 сохраняют силу. Однако в этом случае можно получить и другие результаты, которые для общего с.и.у. (0.1) не имеют места.

2.1. Структура обратного оператора. Наличие регулярного разностного ядра $h(s-\sigma)$ в (2.1) и лемма 1.2 позволяют определить явный вид обратного оператора $B^{-1} : W_p^1 \longrightarrow L_p$ ($1 < p < \infty$).

Лемма 2.1. *Если ядро $h(s)$ таково, что*

$$c_0(h) \neq -\ln 2, \quad 2|k|c_k(h) \neq -1, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.2)$$

то оператор $B : W_p^1 \longrightarrow L_p$ ($1 < p < \infty$) имеет обратный и

$$B^{-1}(y; s) = \frac{c_0(y)}{c_0(h) + \ln 2} - 2i \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y') \operatorname{sgn} k}{1 + 2|k|c_k(h)} e^{iks}, \quad y \in W_p^1. \quad (2.3)$$

Если существует постоянная $\lambda > 0$ такая, что ¹⁾

$$|c_0(h) + \ln 2| \geq 1/\lambda, \quad |1 + 2|k|c_k(h)| \geq 2/\lambda, \quad k \neq 0, \quad (2.4)$$

то при $p = 2$ справедлива оценка

$$\|B^{-1}\| \leq \lambda < \infty, \quad B^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2. \quad (2.5)$$

Доказательство. Разложим функции $x(s), y(s), h(s)$ и $g(s)$ в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} x(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) e^{iks}, & y(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{iks}, \\ h(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(h) e^{iks}, & g(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(g) e^{iks}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где коэффициенты $c_k(g)$ определены в (1.12). Поскольку

$$Bx \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\sigma}{2} \right| \cdot x(s - \sigma) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\sigma) x(s - \sigma) d\sigma = y(s), \quad (2.7)$$

то, подставив (2.6) в (2.7), находим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) c_k(g) e^{iks} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) c_k(h) e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{iks}. \quad (2.8)$$

Отсюда с учетом (2.2) получаем $c_k(x) = c_k(y) / \{c_k(g) + c_k(h)\} \equiv c_k(x^*)$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Поскольку $c_k(g) = O(1/k)$, а $h(s) \in W_1^1$, то $c_k(g) + c_k(h) \sim c_k(g)$ и $|k|c_k(h) = o(1)$, $k \rightarrow \infty$; поэтому в силу соотношений (2.2) и (2.6) последовательно находим (2.3):

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k(y)}{c_k(g) + c_k(h)} e^{iks} =$$

¹⁾При $h(\sigma) \in W_1^1$ вторые из условий (2.2) и (2.4) эквивалентны условиям соответственно $b_k(h') \neq 1$ и $|1 - b_k(h')| \geq 2/\lambda$, $k \in \mathbb{N}$, где $b_k(h')$ – синус-коэффициенты Фурье функции $h'(\sigma)$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_0(y)}{c_0(g) + c_0(h)} + \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y) e^{iks}}{c_k(g) + c_k(h)} = \\
&= \frac{c_0(y)}{c_0(g) + \ln 2} - 2i \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y') \operatorname{sgn} k}{1 + 2|k| c_k(h)} e^{iks} \equiv x^*(s).
\end{aligned}$$

Легко показать, что только что построенная функция $x^*(s)$ является решением с.и.у. (2.1); единственность решения доказывается методом от противного.

Из формулы (2.3) с помощью равенства Парсеваля и условий (2.4) для любого $y \in W_2^1$ находим

$$\begin{aligned}
\|B^{-1}y\|_2^2 &= \frac{|c_0(y)|^2}{|c_0(h) + \ln 2|^2} + 4 \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{|c_k(y')|^2}{|1 + 2|k| c_k(h)|^2} \leq \\
&\leq \lambda^2 \{|c_0(y)|^2 + \sum_{|k|=1}^{\infty} |c_k(y')|^2\} \leq \lambda^2 \{\|y\|_2^2 + \|y'\|_2^2\} \leq \lambda^2 \|y\|_{1;2}^2.
\end{aligned}$$

Отсюда, в свою очередь, следует оценка (2.5).

Замечание 2.1. В условиях (2.4) формула (2.3) остается в силе и в случае $B : H^\beta \rightarrow H_\beta^1$ ($0 < \beta < 1$). Отметим также, что в частном случае лемма 2.1 доказана в §8 гл.2 [51].

Лемма 2.2. Если $h(s) \in L_2$, то оператор $B : L_2 \rightarrow L_2$ является симметричным и вполне непрерывным. Если $c_k(g) + c_k(h) > 0$ ($k = 0, \pm 1, \dots$), то оператор B положителен, а однородное уравнение $Bx = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение.

Следствие. В условиях леммы оператор B на конечномерном подпространстве $X_n \subset L_2[0, 2\pi]$ положительно определен.

Доказательство. Симметричность и полная непрерывность оператора B очевидны. Из (2.6) и (2.8) для любого $x \in L_2$ находим

$$(Bx, x)_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{c_k(g) + c_k(h)\} |c_k(x)|^2, \quad x \in L_2. \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует положительность оператора B в зависимости от свойств функций $g(s)$ и $h(s)$. В силу (2.9) уравнение $Bx = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение.

Докажем следствие. Оператор B из (2.1) на конечномерном подпространстве $X_n \subset L_2$ определяется квадратной симметричной матрицей порядка $N = \dim X_n$. При $X_n = \mathbb{H}_n^T$ эта матрица является

особенно простой. Действительно, в этом случае в силу (2.7) и (2.8) имеем

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{iks} \in \mathbb{H}_n^T, \quad Bx_n = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \{c_k(g) + c_k(h)\} e^{iks} \in \mathbb{H}_n^T, \quad (2.10)$$

и указанная матрица является диагональной с элементами $c_k(g) + c_k(h)$, $-n \leq k \leq n$, где $c_k(g)$ определены в (2.12), а $c_k(h)$ – вещественные числа. Поскольку симметричная и положительная матрица является положительно определенной, то из сказанного следует утверждение следствия. В частности, если $h(s) \in W_1^1$, то из формул (2.9) и (2.10) следует, что

$$\|B^{-1}\|_2 = O(n), \quad B^{-1} : X_n \longrightarrow X_n, \quad X_n = \mathbb{H}_n^T \subset L_2.$$

2.2. Полиномиальные проекционные методы. Приближенное решение с.и.у. (2.1) будем искать в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{iks}, \quad \alpha_{-k} = \bar{\alpha}_k, \quad (2.11)$$

который определим как решение операторного уравнения

$$B_n x_n \equiv P_n B x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n), \quad (2.12)$$

где $X_n = \mathbb{H}_n^T \subset L_2$ и $Y_n = \mathbb{H}_n^T \subset L_2$, а $P_n : L_2 \longrightarrow \mathbb{H}_n^T$ – аддитивный и однородный проекционный оператор.

Отметим, что уравнение (2.12) эквивалентно СЛАУ порядка $2n+1$ относительно коэффициентов полинома (2.11). В силу соотношений (2.10) – (2.12) и $P_n^2 = P_n$ имеем $B_n x_n \equiv P_n B x_n = B x_n$ для любого $x_n \in X_n$, и поэтому матрица упомянутой системы является исключительно простой, а именно, является диагональной с элементами $c_k(g) + c_k(h)$, $k = \overline{-n, n}$. Этот факт делает рассматриваемый приближенный метод весьма удобным для практических применений.

Теорема 2.1. *Если $h(s) \in W_2^1$, а с.и.у. (2.1) имеет единственное решение $x^* \in L_2$ при любой $y \in W_2^1$ (напр., в условиях леммы 2.1), то при любых $n = 0, 1, \dots$ приближенное уравнение (2.12) также имеет единственное решение*

$$x_n^*(s) = \frac{c_0(P_n y)}{c_0(h) + \ln 2} - 2i \sum_{|k|=1}^n \frac{c_k((P_n y)') \operatorname{sgn} k}{1 + 2|k| c_k(h)} e^{iks}. \quad (2.13)$$

Если $P_n y \rightarrow y$ в W_2^1 , то $x_n^* \rightarrow x^*$ в L_2 и погрешность приближенного решения может быть оценена неравенством

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq \|B^{-1}\| \cdot \|y - P_n y\|_{1,2}, \quad B : L_2 \longrightarrow W_2^1. \quad (2.14)$$

В частности, в условиях леммы 2.1 справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq \lambda \|y - P_n y\|_{1,2}, \quad B : L_2 \longrightarrow W_2^1, \quad (2.14')$$

где λ определено в (2.4).

Следствие. Если $P_n = \Phi_n$ – оператор Фурье порядка n , то в условиях леммы 2.1 для погрешности приближенного решения справедливы соотношения

$$x^*(s) - x_n^*(s) = -2i \sum_{|k|=n+1}^{\infty} \frac{c_k(y') \operatorname{sgn} k}{1 + 2|k|c_k(h)} e^{iks}, \quad (2.15)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq 2 E_n^T(y')_2 / \min_{k \geq n+1} |1 + 2k c_k(h)|. \quad (2.16)$$

Доказательство. В условиях теоремы интегральный оператор $V : L_2 \longrightarrow W_2^1$, порождаемый разностным ядром $h(s - \sigma)$, вполне непрерывен, а оператор $B : L_2 \longrightarrow W_2^1$ линейно обратим. Как уже отмечалось, здесь приближенное уравнение (2.12) принимает вид

$$B_n x_n \equiv B x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n). \quad (2.12')$$

Другими словами, для с.и.у. (2.1) оператор B_n приближенного уравнения рассматриваемого проекционного метода совпадает с сужением исходного оператора B на $X_n \subset X$. Поэтому для всех $n = 0, 1, \dots$ существует приближенное решение $x_n^* = B_n^{-1} P_n y = B^{-1} P_n y$ и в силу (2.3) справедливы представления (2.13) и $x^* - x_n^* = B^{-1}(y - P_n y)$. Отсюда и следуют требуемые утверждения, в том числе оценки (2.14) и (2.14').

Если же $P_n = \Phi_n$, то $c_k(P_n \varphi) = c_k(\varphi)$ (при $|k| = \overline{0, n}$) для любой $\varphi \in L_2$ и $c_k((P_n y)') = c_k(P_n(y')) = c_k(y')$ (при $|k| = \overline{1, n}$), $c_k((P_n y)') = 0$ (при $|k| \geq n + 1$) для любой $y \in W_2^1$. Отсюда и из (2.3) и (2.13) получаем соотношение (2.15), а из него с помощью равенства Парсеваля и свойств наилучших среднеквадратических приближений выводится оценка (2.16).

Теорему 2.1 несколько дополняет следующая

Теорема 2.2. Пусть с.и.у. (2.1) имеет решение $x^* \in L_2$ при данной правой части $y \in L_2$, а ядро $h(s)$ таково, что $c_k(g) + c_k(h) > 0$,

($k = 0, \pm 1, \dots$). Тогда приближенное уравнение (2.12) имеет единственное решение $x_n^* \in \mathbb{H}_n^T$ при любой правой части $P_n y \in \mathbb{H}_n^T$. Если $P_n y \rightarrow y$, $n \rightarrow \infty$, в L_2 , то невязка $r_n \equiv y - Bx_n^* \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и

$$\|r_n\|_2 \leq \|y - P_n y\|_2. \quad (2.17)$$

Следствие. Если y и $P_n y$ таковы, что

$$\|y - P_n y\|_2 = O(n^{-r-\alpha-1}), \quad r \geq 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.18)$$

то приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся к точному решению $x^*(s)$ в среднем со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O(n^{-r-\alpha}), \quad r + \alpha > 0. \quad (2.19)$$

Если, кроме того, y и $P_n y$ таковы, что

$$\|y - P_n y\|_\infty = O(n^{-r-\alpha-1} \ln n), \quad r \geq 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.20)$$

то при $h(s) \in W_2^1$ приближенные решения сходятся равномерно и

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-r-\alpha} \ln n), \quad r + \alpha > 0. \quad (2.21)$$

Доказательство. В силу леммы 2.2 оператор B является симметричным и положительным. Поскольку $B_n = P_n B = B$ на X_n , то в силу следствия леммы 2.2 оператор B_n является положительно определенным. Поэтому приближенное уравнение (2.12) однозначно разрешимо при любой правой части. Тогда для уравнений (2.1) и (2.12) справедливы тождества $r_n \equiv y - Bx_n^* = B(x^* - x_n^*) = y - P_n y$. Отсюда видно, что $r_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, в L_2 со скоростью (2.17).

Пусть выполнено условие (2.18). Тогда из обратных теорем (см., напр., в [48, 75]) конструктивной теории функций в L_2 следует, что, по крайней мере, $y \in W_2^1$. Поэтому B можно рассматривать как непрерывно обратимый оператор из L_2 в W_2^1 . А тогда

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = \|B^{-1} r_n\|_2 \leq \|B^{-1}\| \cdot \|y - P_n y\|_{1;2}, \quad B^{-1} : W_2^1 \rightarrow L_2. \quad (2.22)$$

В силу (2.22) и (2.18) для справедливости (2.19) достаточно показать, что

$$\|(y - P_n y)'\|_2 = O(n^{-r-\alpha}). \quad (2.23)$$

Как и в §2, разность $y - P_n y$ представим в виде

$$y - P_n y = \sum_{k=1}^{\infty} P_{2^k n} y - P_{2^{k-1} n} y \equiv \sum_{k=1}^{\infty} Q_{kn}(s). \quad (2.24)$$

Ясно, что $Q_{kn} \in \mathbb{H}_{2^k n}^T$ и в силу (2.18)

$$\|Q_{kn}\|_2 \leq \|y - P_{2^k n} y\|_2 + \|y - P_{2^{k-1} n} y\|_2 = O \left\{ (2^{k-1} n)^{-r-\alpha-1} \right\}. \quad (2.25)$$

Используя неравенство Бернштейна (1.73), из (2.24) и (2.25) последовательно находим требуемую оценку:

$$\begin{aligned} \|y'(s) - (P_n y)'(s)\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|Q'_{kn}(s)\|_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^k n \|Q_{kn}\|_2 = \\ &= O \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 2^k n \cdot (2^{k-1} n)^{-r-\alpha-1} \right\} = O \left(n^{-r-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Пусть теперь выполнено условие (2.20). Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $\|y - P_n y\|_{\infty} = O \left(n^{-r-\alpha-1+\varepsilon} \right)$, где $0 < \alpha - \varepsilon < 1$. Отсюда и из обратных теорем теории приближений (см., напр., [48, 75]) в $C_{2\pi}$ следует, что функция $y(s) \in W^{r+1} H^{\alpha-\varepsilon}$. Поскольку

$$Bx^* \equiv Sx^* + Vx^* \equiv y, \quad Bx_n^* \equiv Sx_n^* + Vx_n^* \equiv P_n y,$$

то

$$S(x^* - x_n^*) = (y - P_n y) - V(x^* - x_n^*) \equiv b_n(s). \quad (2.26)$$

Нетрудно показать, что функция $b_n \in W_2^1$ равномерно относительно n . Поэтому, решая уравнение (2.26) относительно $x^* - x_n^*$, с помощью леммы 1.2 находим

$$x^*(s) - x_n^*(s) = -2I \left(\frac{db_n(\sigma)}{d\sigma}; s \right) + \frac{1}{2\pi \ln 2} \int_0^{2\pi} b_n(\sigma) d\sigma. \quad (2.27)$$

Из (2.19) и (2.26) следует, что

$$\left| \frac{1}{2\pi \ln 2} \int_0^{2\pi} b_n(\sigma) d\sigma \right| = O \left\{ \|S(x^* - x_n^*)\|_2 \right\} = O \left(\frac{1}{n^{r+\alpha}} \right). \quad (2.28)$$

Из (2.26), (2.27) находим

$$\begin{aligned} \|I(b'_{n\sigma}; s)\|_{\infty} &\leq \|I(y - P_n y)'_{\sigma}\|_{\infty} + \\ &+ \|I[V(x^* - x_n^*)]_{\sigma}'\|_{\infty} = \|S_1\|_{\infty} + \|S_2\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для $S_1(s)$ с помощью (1.165), (1.166) и (2.18), (2.20), как и при доказательстве леммы 1.6, последовательно находим

$$\|S_1\|_{\infty} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|(IP_{2^k n} y - IP_{2^{k-1} n} y)'_s\|_{\infty} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^k n (\|y - P_{2^k n} y\|_{\infty} + \|y - P_{2^{k-1} n} y\|_{\infty}) = \\
&= O \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 2^k n \cdot \ln(2^k n) \cdot (2^{k-1} n)^{r-\alpha-1} \right\} = O(n^{-r-\alpha} \ln n). \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Для $S_2(s)$ с учетом определения операторов I, R, ρ находим

$$\begin{aligned}
S_2(s) &= I[V(x^* - x_n^*)]' = I[\rho h(x^* - x_n^*)]' = I[\rho h'(x^* - x_n^*)] = \\
&= \rho \varphi(x^* - x_n^*), \quad \varphi(s - \sigma) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h'(t - \sigma) \operatorname{ctg} \frac{t - s}{2} dt.
\end{aligned}$$

Поскольку $h'(t) \in L_2[0, 2\pi]$, то в силу известных результатов функция $\varphi(s) \in L_2[0, 2\pi]$. Тогда в силу свойств сверток имеем $S_2(s) \in C_{2\pi}$, откуда и из (2.19) находим

$$\|S_2(s)\|_{\infty} = \|\rho \varphi(x^* - x_n^*)\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_2 \|x^* - x_n^*\|_2 = O(n^{-r-\alpha}). \quad (2.31)$$

Из соотношений (2.27) – (2.31) следует требуемая оценка (2.21).

Теорема 2.2 доказана полностью.

Завершая этот параграф, отметим, что теоремы 2.1 и 2.2 являются достаточно общими в том смысле, что принимая в них в качестве P_n различные полиномиальные операторы, мы получаем сходимость различных полиномиальных проекционных методов решения с.и.у. (2.1); в частности, теоремы 2.1 и 2.2 обеспечивают сходимость таких известных проекционных методов, как методы коллокации, Галеркина и подобластей.

§3. Уравнения с логарифмическими ядрами. Непериодический случай

3.1. Постановка задачи и вспомогательные результаты.

В этом параграфе рассматриваются вопросы приближенного решения слабо с.и.у. I рода вида

$$\bar{A}\varphi \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \ln|\tau - t| \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} g(t, \tau) \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f(t), \quad |t| \leq 1, \quad (3.1)$$

где $g(t, \tau)$ и $f(t)$ – известные непрерывные функции в областях соответственно $[-1, 1]^2$ и $[-1, 1]$, а $\varphi(\tau)$ – искомая функция. От правой

части $f(t)$ и регулярного ядра $g(t, \tau)$ будем требовать также, чтобы они удовлетворяли условиям

$$\int_{-1}^{+1} |f'(t)|^2 \sqrt{1-t^2} dt < \infty, \quad \iint_{-1-1}^{+1+1} \left| \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial t} \right|^2 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-\tau^2}} dt d\tau < \infty. \quad (3.2)$$

Решение с.и.у. (3.1) будем искать в пространстве $L_{2p}[-1, 1]$ квадратично суммируемых на $[-1, 1]$ с весом $p(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ функций с нормой

$$\|\varphi\|_{L_{2p}} = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{|\varphi(t)|^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} \right)^{1/2} \equiv \|\varphi\|_{2p} \quad (\varphi \in L_{2p}[-1, 1]). \quad (3.3)$$

Обозначим через $W_{2q}^1[-1, 1]$ пространство абсолютно непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f(t)$, у которых производные квадратично суммируемы на $[-1, 1]$ с весом $q(t) = 1/p(t) = (1-t^2)^{1/2}$; норму в W_{2q}^1 введем соотношением

$$\begin{aligned} \|f\|_{W_{2q}^1} &= \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{|f(t)|^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} |f'(t)|^2 \sqrt{1-t^2} dt \right)^{1/2} \equiv \\ &\equiv \|f\|_{L_{2p}} + \|f'\|_{L_{2q}} \equiv \|f\|_{1;2q} \quad (f \in W_{2q}^1[-1, 1]). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для дальнейшего изложения существенное значение имеют следующие **утверждения I – IV**.

Утверждение I. Уравнение (3.1) сводится к частному случаю исследованного в §1 с.и.у. (0.1) при

$$x(\sigma) = \varphi(\cos \sigma), \quad y(s) = f(\cos s), \quad h(s, \sigma) = g(\cos s, \cos \sigma) - \frac{\ln 2}{2}. \quad (3.5)$$

Действительно, положим в (3.1)

$$t = \cos s, \quad \tau = \cos \sigma, \quad -1 \leq t, \tau \leq 1, \quad 0 \leq s, \sigma \leq \pi. \quad (3.6)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \ln |\tau - t| \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \int_0^\pi \ln |\cos s - \cos \sigma| \cdot \varphi(\cos \sigma) d\sigma = \\ &= \ln 2 \cdot \int_0^\pi x(\sigma) d\sigma + \int_0^\pi \ln \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right| \cdot x(\sigma) d\sigma + \int_0^\pi \ln \left| \sin \frac{s+\sigma}{2} \right| \cdot x(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Заменяя в последнем интеграле σ на $-\sigma$ и используя четность функции $x(\sigma)$ и 2π -периодичность подынтегральных функций, находим

$$\bar{S}\varphi \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \ln |\tau - t| \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = Sx - \frac{\ln 2}{2} \rho x, \quad (3.7)$$

где операторы S и ρ определены в §1. С другой стороны, в силу (3.5) для регулярного интеграла из (3.1) имеем

$$\bar{R}\varphi \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\cos s, \cos \sigma) x(\sigma) d\sigma \equiv \rho(gx). \quad (3.8)$$

Из соотношений (3.6) – (3.8) следует требуемое утверждение.

Утверждение II. В силу формул (3.5), (3.6) имеем

$$\|\varphi\|_{L_{2p}[-1,1]} = \|x\|_{L_2[0,2\pi]}, \quad \|f\|_{W_{2q}^1[-1,1]} = \|y\|_{W_2^1[0,2\pi]}, \quad (3.9)$$

т.е. пространства $L_{2p}[-1, 1]$ и $W_{2q}^1[-1, 1]$ с нормами (3.3), (3.4) изоморфны и изометричны пространствам четных 2π – периодических функций $L_2[0, 2\pi]$ и $W_2^1[0, 2\pi]$ соответственно с нормами, введенными в §1.

Утверждение III. В силу утверждений I и II и соответствующих результатов раздела 1.1 оператор $\bar{A} = \bar{S} + \bar{R}$ можно рассматривать как линейный оператор из пространства $L_{2p}[-1, 1]$ в пространство W_{2q}^1 . При этом ясно, что оператор \bar{R} является вполне непрерывным как оператор из L_{2p} в W_{2q}^1 , а слабо сингулярный оператор \bar{S} является лишь непрерывным из L_{2p} в W_{2q}^1 . Кроме того, легко показать, что оператор $\bar{S} : L_{2p} \longrightarrow W_{2q}^1$ линейно обратим и для обратного оператора $\bar{S}^{-1} : W_{2q}^1 \longrightarrow L_{2p}$ справедлива оценка

$$\|\bar{S}^{-1}\| = 2, \quad \bar{S}^{-1} : W_{2q}^1 \longrightarrow L_{2p} \quad (p = 1/\sqrt{1 - t^2}, q = \sqrt{1 - t^2}). \quad (3.10)$$

Оператор \bar{S} обладает также многими другими свойствами оператора S , введенного и исследованного в §1.

Таким образом, с.и.у. (3.1) можно рассматривать как операторное уравнение, приводящееся к уравнению второго рода. Поэтому, если уравнение (3.1) однозначно разрешимо в $L_{2p}[-1, 1]$ при любой правой части из $W_{2q}^1[-1, 1]$, то в силу известных результатов по теории операторных уравнений в B -пространствах (см., напр., [55]) существует ограниченный обратный $\bar{A}^{-1} : W_{2q}^1 \longrightarrow L_{2p}$. Отсюда, в частности,

следует, что если решение уравнения (3.1) единственно в пространстве $L_{2p}[-1, 1]$, то оно обязательно разрешимо в этом пространстве при любой правой части из $W_{2q}^1[-1, 1]$.

Утверждение IV. *Ниже приближенное решение с.и.у. (3.1) будем искать в виде многочлена*

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i T_i(t) \equiv \sum_{i=0}^n \beta_i t^i, \quad T_i(t) = \cos i \arccos t, \quad (3.11)$$

коэффициенты которого будем определять исходя из минимальности невязки $r_n \equiv f - \bar{A}\varphi_n$ в том или ином смысле. Ясно, что в силу (3.5), (3.6) полином $\varphi_n(t) = \varphi_n(\cos s) \equiv x_n(s)$, являющийся частным случаем полинома (1.21), будет приближенным решением частного случая с.и.у. (0.1), эквивалентного уравнению (3.1).

Утверждения I – IV позволяют перенести на с.и.у. (3.1) все результаты, полученные в §1 по приближенным методам решения с.и.у. (0.1). Поэтому дальнейшее изложение будем вести с учетом этого факта, ограничиваясь в основном лишь формулировками ряда результатов.

3.2. Метод наименьших квадратов. Приближенное решение с.и.у. (3.1) будем искать в виде многочлена (3.11), коэффициенты которого будем определять по м.н.к. из СЛАУ

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i (\bar{A}T_i, \bar{A}T_j)_F = (f, \bar{A}T_j)_F, \quad j = \overline{0, n}, \quad (3.12)$$

где

$$\bar{A}T_i = \gamma_i T_i(t) + \bar{R}(T_i; t), \quad (3.13)$$

$$\gamma_i = \left\{ \frac{\ln 2}{2} \quad \text{при } i = 0; \quad \frac{1}{2i} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots \right\}, \quad (3.14)$$

а $(u, v)_F$ – скалярное произведение в пространстве $F = W_{2q}^1$:

$$(u, v)_F = (u, v)_{2p} + (u', v')_{2q} \quad (u, v \in W_{2q}^1[-1, 1]). \quad (3.15)$$

Теорема 3.1. *Если с.и.у. (3.1) имеет единственное решение $\varphi \in L_{2p}$ при любой правой части $f \in W_{2q}^1$, то при любых $n = 0, 1, \dots$ СЛАУ (3.12) – (3.14) имеет единственное решение $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Приближенные решения (3.1) сходятся в L_{2p} к точному решению $\varphi(t)$ с.и.у. (3.1) со скоростью*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} \leq \eta(\bar{A}) E_n(\varphi)_{2p}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.16)$$

где $\eta(\bar{A})$ – число обусловленности оператора $\bar{A} : L_{2p} \longrightarrow W_{2q}^1$, а $E_n(\varphi)_{2p}$ – наилучшее приближение функции $\varphi(t)$ алгебраическими многочленами степени не выше n в пространстве $L_{2p}[-1, 1]$.

Теорему 3.1 несколько дополняет следующая

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия: а) $f(t) \in L_{2p}[-1, 1]$ и $g(t, \tau) \in L_{2p}[-1, 1]^2$ с $\rho(t, \tau) = p(t)p(\tau)$; б) с.и.у. (3.1) имеет решение $\varphi(t) \in L_{2p}[-1, 1]$ при данной правой части $f(t) \in L_{2p}[-1, 1]$; в) уравнение $\bar{A}\varphi = 0$ имеет в $L_{2p}[-1, 1]$ лишь тривиальное решение. Тогда СЛАУ (3.12) – (3.14) при $F = L_{2p}$ имеет единственное решение $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n$. Приближенные решения

$$\tilde{\varphi}_n(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{\alpha}_i T_i(t) \quad (3.17)$$

сходятся в том смысле, что невязка $r_n \equiv f - \bar{A}\tilde{\varphi}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $L_{2p}[-1, 1]$ со скоростью

$$\|r_n\|_{2p} \leq \|\bar{A}\| \cdot E_n(\varphi)_{2p}, \quad \bar{A} : L_{2p} \longrightarrow L_{2p}. \quad (3.18)$$

3.3. Метод ортогональных многочленов. Пусть коэффициенты многочлена (3.11) определяются из условий

$$(r_n, T_j)_{2p} = 0, \quad j = \overline{0, n}, \quad r_n \equiv f - \bar{A}\varphi_n. \quad (3.19)$$

Тогда в силу (3.13), (3.14) получаем СЛАУ

$$\alpha_j \gamma_j + \sum_{i=0}^n a_{ji} \alpha_i = y_j, \quad j = \overline{0, n}, \quad (3.20)$$

где постоянные γ_i определены в (3.14), а

$$y_j = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{y(t) T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad a_{ji} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t, \tau) T_j(t) T_i(\tau) dt d\tau}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}. \quad (3.21)$$

Теорема 3.3. Пусть с.и.у. (3.1) однозначно разрешимо в пространстве L_{2p} при любой правой части $f \in W_{2q}^1$. Тогда при всех n , начиная с некоторого, СЛАУ (3.19) – (3.21) имеет единственное решение $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ и приближенные решения (3.11) сходятся к точному решению $\varphi(t)$ в $L_{2p}[-1, 1]$ со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O \{E_n(\varphi)_{2p}\}. \quad (3.22)$$

Следствие. Если выполнены условия ¹⁾

$$f(t) \in W^{r+1}H^\alpha L_{2q}, g(t, \tau) \in W^{r+1}H^\alpha L_{2q} \quad (r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1) \quad (3.23)$$

по переменной t равномерно относительно τ , то метод (3.1), (3.11), (3.19) – (3.21) сходится в пространстве $L_{2p}[-1, 1]$ со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O(n^{-r-\alpha}), \quad r + \alpha > 0. \quad (3.24)$$

Оценка (3.24) остается в силе, если

$$f(t) \in W^{r+1}H^\alpha \quad \text{и} \quad g(t, \tau) \in W^{r+1}H^\alpha \quad (r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1) \quad (3.25)$$

по переменной t равномерно относительно τ .

3.4. Метод коллокации. Пусть коэффициенты приближенного решения (3.11) определяются по м.к. из условий

$$r_n(t_j) = 0, \quad j = \overline{0, n},$$

где $\{t_j\}$ – некоторая система из $(n + 1)$ – узлов на сегменте $[-1, 1]$. Тогда в силу (3.13), (3.14) получаем СЛАУ

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \{\gamma_i T_i(t_j) + \bar{R}(T_i; t_j)\} = f(t_j), \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.26)$$

Теорема 3.4. Пусть выполнены условия: 1) $f'(t) \in C[-1, 1]$, а ядро $g(t, \tau)$ таково, что оператор $\bar{R} : L_{2p} \rightarrow C^1[-1, 1]$ вполне непрерывен (в частности, $g'_t(t, \tau) \in C[-1, 1]^2$); 2) узлы t_j определены по любой из формул

$$\text{а) } t_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2} \pi; \quad \text{б) } t_j = \cos \frac{j+1}{n+2} \pi; \quad \text{в) } t_j = \cos \frac{j}{n} \pi, \quad j = \overline{0, n}; \quad (3.27)$$

3) с.и.у. (3.1) однозначно разрешимо в $L_{2p}[-1, 1]$ при любой правой части из $W_{2q}^1[-1, 1]$. Тогда при всех n , начиная с некоторого, СЛАУ (3.26) имеет единственное решение. Приближенные решения (3.11) сходятся в пространстве $L_{2p}[-1, 1]$ к точному решению $\varphi(t)$ с.и.у. (3.1) со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O\{E_n(\varphi)_\infty\}, \quad (3.28)$$

где $E_n(\varphi)_\infty$ – наилучшее равномерное на $[-1, 1]$ приближение функции $\varphi(t)$ алгебраическими многочленами степени не выше n .

¹⁾ Заметим, что $W^{r+1}H^\alpha L_{2q} = \{\varphi \in C[-1, 1] : \omega(\varphi^{(r+1)}; \delta)_{2q} = O(\delta^\alpha), 0 < \delta \leq 2\}$, где $\omega(\psi; \delta)_{2q}$ – модуль непрерывности $\psi(t)$ в пространстве L_{2q} .

Следствие. Если выполнены условия (3.25), то метод коллокации (3.1), (3.11), (3.26), (3.27) сходится со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O(n^{-r-\alpha}), \quad r + \alpha > 0. \quad (3.29)$$

Запишем СЛАУ (3.26) в несколько другом, но эквивалентном виде. Введем узлы Чебышева I рода

$$\tau_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = \overline{0, n}. \quad (3.30)$$

Тогда коэффициенты α_i многочлена (3.11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_n(t) T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi_n(\tau_k) T_i(\tau_k) = \\ &= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi_n(\cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi) \cos \frac{(2k+1)i\pi}{2n+2}, \quad i = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

В силу (3.31) соотношения (3.11) и (3.26) принимают вид

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n \varphi_n(\tau_k) l_k(t), \quad (3.11')$$

$$\sum_{k=0}^n x_n(\tau_k) \{ \bar{S}(l_k; t_j) + \bar{R}(l_k; t_j) \} = f(t_j), \quad j = \overline{0, n}, \quad (3.26')$$

где $l_k(t)$ – фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам (3.30). Известно, что

$$\begin{aligned} l_k(t) &= \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^n \frac{t - \tau_l}{\tau_k - \tau_l} = \frac{T_{n+1}(t)}{(t - \tau_k) T'_{n+1}(\tau_k)} = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{n+1} \cdot \frac{T_{n+1}(t)}{t - \tau_k} \cdot \sin \frac{2k+1}{2n+2}\pi = \\ &= \frac{2}{n+1} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n T_m(t) T_m(\tau_k) \right\}, \quad k = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

Поэтому интегралы $\bar{S}(l_k; t_j)$ вычисляются точно. Действительно, с помощью (3.32) и (3.14) легко находим (см. также с.46 [69])

$$\bar{S}(l_k; t_j) = \frac{2}{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \bar{S}(1; t_j) + \sum_{m=1}^n T_m(\tau_k) \bar{S}(T_m; t_j) \right\} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{\ln 2}{2} + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} T_m(\tau_k) T_m(t_j) \right\}, \quad (3.33)$$

где узлы τ_k и t_j определены в формулах соответственно (3.30) и (3.27). Ясно, что в силу (3.33) СЛАУ (3.26') несколько конкретизируется.

3.5. Метод механических квадратур. В СЛАУ (3.26') коэффициенты $\bar{R}(l_k; t_j)$ вычислим приближенно по квадратурной формуле Гаусса – Чебышева с узлами (3.30). Тогда в силу соотношений $l_k(\tau_l) = \delta_{kl}$, где δ_{kl} – символ Кронекера, имеем

$$\bar{R}(l_k; t_j) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t_j, \tau) l_k(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \approx \frac{1}{n+1} g(t_j, \tau_k), \quad k = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.34)$$

Поэтому вместо (3.26') получаем следующую СЛАУ относительно приближенных значений искомой функции в узлах (3.30):

$$\sum_{k=0}^n \varphi_n(\tau_k) \left\{ \bar{S}(l_k; t_j) + \frac{1}{n+1} g(t_j, \tau_k) \right\} = f(t_j), \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.35)$$

Тогда в силу (3.33) имеем

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi_n(\tau_k) \left\{ \frac{\ln 2}{2} + \sum_{m=1}^n \frac{T_m(\tau_k) T_m(t_j)}{m} + g(t_j, \tau_k) \right\} = f(t_j), \quad j = \overline{0, n}, \quad (3.36)$$

где узлы t_j и τ_k определены в (3.27) и (3.30).

Системы (3.35) и (3.36) представляют собой СЛАУ м.м.к. для с.и.у. (3.1). Для этого уравнения приведем еще одну СЛАУ метода квадратур. С этой целью в (3.26) коэффициенты $\bar{R}(T_i; t_j)$ вычислим по формуле Гаусса – Чебышева с узлами (3.30):

$$\bar{R}(T_i; t_j) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t_j, \tau) T_i(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \approx \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g(t_j, \tau_k) T_i(\tau_k). \quad (3.37)$$

Из (3.26) и (3.37) находим требуемую систему

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \left\{ \gamma_i T_i(t_j) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g(t_j, \tau_k) T_i(\tau_k) \right\} = f(t_j), \quad j = \overline{0, n}, \quad (3.38)$$

где $\alpha_i, \gamma_i, t_j, \tau_k$ определены в соотношениях соответственно (3.11), (3.14), (3.27), (3.30).

Следует отметить, что системы (3.36) и (3.38) эквивалентны в том смысле, что они разрешимы (или неразрешимы) одновременно. Кроме того, если $\{\varphi_n(\tau_k)\}_0^n$ – решение СЛАУ (3.36), то решение СЛАУ (3.38) можно определить по формуле (3.31); если же $\{\alpha_i\}_0^n$ – решение СЛАУ (3.38), то решение СЛАУ (3.36) можно определить по формуле

$$\varphi_n(\tau_k) = \sum_{i=0}^n \alpha_i T_i(\tau_k), \quad k = \overline{0, n}.$$

Такое же замечание справедливо относительно СЛАУ м.к. (3.26) и (3.26').

Теорема 3.5. Пусть с.и.у. (3.1) однозначно разрешимо в $L_{2p}[-1, 1]$ при любой правой части из $W_{2q}^1[-1, 1]$. Если $f'(t) \in C[-1, 1]$, $g'_t(t, \tau) \in C[-1, 1]^2$, то при всех $n \geq n_0$ (n_0 определяется свойствами функции $g(t, \tau)$, в частности, $n_0 = 0$ при $g(t, \tau) \equiv 0$) каждая из СЛАУ (3.38) и (3.36) однозначно разрешима. Приближенные решения, определяемые формулами соответственно (3.11) и (3.11'), сходятся к точному решению $\varphi(t)$ с.и.у. (3.1) в пространстве $L_{2p}[-1, 1]$ со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O \left\{ E_n(f')_\infty + E_n^t(g'_t)_\infty + E_n^r(g'_t)_\infty + E_n^r(g)_\infty \right\}, \quad (3.39)$$

где $E_n^t(\psi)_\infty$ (соответственно $E_n^r(\psi)_\infty$) – наилучшее равномерное приближение функции $\psi(t, \tau) \in C[-1, 1]^2$ алгебраическими многочленами степени не выше n по переменной t (по τ) равномерно относительно τ (относительно t).

Следствие. Если $f(t) \in W^{r+1}H^\alpha[-1, 1]$ и $g(t, \tau) \in W^{r+1}H^\alpha[-1, 1]$ (по каждой из переменных в отдельности равномерно относительно другой из них), то м.м.к. (3.1), (3.11), (3.11'), (3.36), (3.38) сходятся в пространстве $L_{2p}[-1, 1]$ со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O(n^{-r-\alpha}), \quad r + \alpha > 0. \quad (3.40)$$

Теоремы 3.4 и 3.5 могут быть доказаны также самостоятельно, т.е. независимо от результатов §1. Это можно осуществить с помощью теорем 7 и 14 гл. 1 [25] и следующих лемм.

Лемма 3.1. Пусть $\mathcal{L}_n\varphi = \mathcal{L}_n(\varphi, t)$ – алгебраический интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $\varphi \in C[-1, 1]$ по любой из систем узлов (3.27). Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$\|\mathcal{L}_n\|_{L_{2p} \rightarrow L_{2p}} = \infty, \quad \|\mathcal{L}_n\|_{C \rightarrow L_{2p}} = 1,$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_n\|_{W_{2q}^1 \rightarrow W_{2q}^1} &< \infty, \quad \|\mathcal{L}_n\|_{C^1 \rightarrow W_{2q}^1} \leq \text{const} < \infty, \\ \|\varphi - \mathcal{L}_n \varphi\|_{1;2q} &= \|\varphi - \mathcal{L}_n \varphi\|_{2p} + \left\| \frac{d}{dt}(\varphi - \mathcal{L}_n \varphi) \right\|_{2q} \leq \\ &\leq 2 E_n(\varphi)_\infty + (\pi + 1/\sqrt{2}) E_{n-1}(\varphi')_\infty, \quad \varphi' \in C = C[-1, 1]. \end{aligned}$$

Лемма 3.2. Для любого алгебраического многочлена $Q_n(t)$ степени не выше n справедливо неравенство

$$\|Q'_n(t)\|_{2q} \leq n \|Q_n(t)\|_{2p}, \quad p(t) = (1 - t^2)^{-1/2}, \quad q(t) = (1 - t^2)^{1/2}.$$

3.6. Еще три схемы метода квадратур. Для с.и.у. (3.1) приведем еще три СЛАУ м.м.к.:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2(n+1)} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \varphi_n(\tau_k) \ln |\tau_k - \tau_j| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g(\tau_j, \tau_k) \varphi_n(\tau_k) &= \\ &= f(\tau_j), \quad j = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где узлы коллокации и квадратур совпадают и определены в (3.30);

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \varphi_n(\tau_k) \ln |\tau_k - t_j| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g(t_j, \tau_k) \varphi_n(\tau_k) &= \\ &= f(t_j), \quad j = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где узлы коллокации и квадратур определены соответственно в (3.27) и (3.30).

Системы (3.41) и (3.42) несколько обобщает следующая СЛАУ

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \varphi_n(\tau_k) \ln |\tau_k - t_j| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g(t_j, \tau_k) \varphi_n(\tau_k) &= \\ &= f(t_j), \quad j = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где узлы коллокации могут и не совпадать с узлами квадратур τ_j , а штрих у знака суммы означает, что соответствующее слагаемое при $|\tau_k - t_j| < \delta$ опускается; здесь δ – некоторое положительное число, выбираемое в зависимости от точности вычислений.

Замечание 3.1. Системами (3.41) – (3.43) удобно пользоваться в случае, когда функции $f(t)$ и $g(t, \tau)$ обладают небольшой гладкостью.

При этом системы (3.42) и (3.43) при $\tau_k \neq t_j$ ($k, j = \overline{0, n}$) можно рассматривать также как СЛАУ м.д.в. для с.и.у. (3.1).

3.7. Метод подобластей. Пусть коэффициенты многочлена (3.11) определяются из условий

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_n(t) dt = 0, \quad k = \overline{1, n+1}, \quad r_n(t) \equiv f - \overline{A}\varphi_n, \quad (3.44)$$

где t_k – некоторая система узлов из $[-1, 1]$. Эти условия эквивалентны СЛАУ

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i (\gamma_i a_{ik} + b_{ik}) = f_k, \quad k = \overline{1, n+1}, \quad (3.45)$$

где γ_i определены в (3.14), а

$$a_{ik} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_i(t) dt, \quad b_{ik} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{R}(T_i; t) dt, \quad f_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) dt. \quad (3.46)$$

Теорема 3.6. Пусть узлы t_k определены по любой из формул

$$(a) \quad t_k = \cos \frac{2k+1}{2n+4} \pi; \quad (б) \quad t_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = \overline{0, n+1}. \quad (3.47)$$

Тогда в условиях теоремы 3.4 м.п. (3.1), (3.11), (3.44) – (3.47) сходится в пространстве $L_{2p}[-1, 1]$ со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O \{E_n(\varphi)_\infty\}. \quad (3.48)$$

Следствие. Если выполнено условие (3.25), то метод подобластей сходится со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O(n^{-r-\alpha}), \quad r + \alpha > 0. \quad (3.49)$$

Отметим, что здесь при доказательстве существенным образом использована теорема 14 гл.1 [51] об аппроксимативных свойствах операторов м.п. по узлам (3.47).

3.8. Устойчивость решений и метод вырожденных ядер. Наряду с с.и.у. (3.1) рассмотрим уравнение вида

$$\overline{A}_\varepsilon \varphi \equiv \overline{S}\varphi + \overline{R}_\varepsilon \varphi = f_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \infty, \quad (3.50)$$

где

$$\overline{R}_\varepsilon \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} g_\varepsilon(t, \tau) (\varphi(\tau) / \sqrt{1-\tau^2}) d\tau,$$

а $f_\varepsilon(t)$ и $g_\varepsilon(t, \tau)$ в некотором смысле аппроксимируют функции $f(t)$ и $g(t, \tau)$ соответственно.

Теорема 3.7. Пусть выполнены условия:

$$\int_{-1}^{+1} |f(t) - f_\varepsilon(t)|^2 (1 - t^2)^{-1/2} dt \leq \varepsilon^2,$$

$$\int_{-1}^{+1} |f'(t) - f'_\varepsilon(t)|^2 (1 - t^2)^{1/2} dt \leq \varepsilon^2;$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} |g(t, \tau) - g_\varepsilon(t, \tau)|^2 (1 - t^2)^{-1/2} (1 - \tau^2)^{-1/2} dt d\tau \leq \varepsilon^2,$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} |g'_t(t, \tau) - g'_{\varepsilon t}(t, \tau)|^2 (1 - t^2)^{1/2} (1 - \tau^2)^{-1/2} dt d\tau \leq \varepsilon^2.$$

Если задача (3.1) поставлена корректно, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ задача решения (3.50) поставлена также корректно; в частности, при $\varepsilon \rightarrow +0$ для решений $\varphi(t)$ и $\varphi_\varepsilon(t)$ уравнений соответственно (3.1) и (3.50) справедлива оценка

$$\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{2p} = O(\varepsilon). \quad (3.51)$$

Пусть теперь

$$g(t, \tau) \approx \sum_{k=1}^N A_k(t) B_k(\tau) \equiv g_N(t, \tau),$$

где $g_N(t, \tau)$ – вырожденное аппроксимирующее ядро. Тогда при $f_\varepsilon(t) \equiv f(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$, из теоремы 3.7 следует сходимость м.в.я. для с.и.у. (3.1).

3.9. Равномерная сходимость приближенных методов как следствие сходимости в среднем. Имеет место следующая

Теорема 3.8. В условиях (3.24), (3.29), (3.40), (3.49) методы соответственно ортогональных многочленов, коллокации, механических квадратур и подобластей при $r + \alpha > 1/2$ сходятся равномерно со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha+1/2}\right). \quad (3.52)$$

Это утверждение, как и аналогичное утверждение из §1, является следствием сходимости в пространстве $L_{2p}[-1, 1]$; самостоятельное (от §1) доказательство (3.52) может быть осуществлено с помощью оценок (3.24), (3.29), (3.40), (3.49) и легко доказываемого неравенства

$$\|Q_n\|_\infty = O(\sqrt{n}) \|Q_n\|_{2p}, \quad Q_n(t) \equiv \sum_{k=0}^n a_k t^k, \quad a_k \in \mathbb{R}. \quad (3.53)$$

Однако в ряде случаев можно получить и более сильные результаты. Приведем лишь один из них:

Теорема 3.9. Пусть с.и.у. (3.1) однозначно разрешимо в $L_{2p}[-1, 1]$ при любой правой части из $W_{2q}^1[-1, 1]$. Если выполнено условие (3.25), то методы коллокации и подобластей сходятся равномерно со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_\infty = O(n^{-r-\alpha} \ln n), \quad r + \alpha > 0. \quad (3.54)$$

В условиях следствия теоремы 3.5 с такой же скоростью сходится и м.м.к.; в условиях (3.24), (3.25) такое утверждение справедливо также для метода ортогональных многочленов.

3.10. Дополнения. Завершая этот параграф, отметим, что для с.и.у. (3.1) справедливы утверждения, аналогичные приведенным в пунктах 1.11 – 1.14 для с.и.у. (0.1). В частности, рассмотренные в этом параграфе методы являются устойчивыми и хорошо обусловленными, если корректным и соответственно хорошо обусловленным является точное уравнение (3.1).

В заключение рассмотрим систему с.и.у. вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \ln \frac{1}{|\tau - t|} \cdot \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} g(t, \tau) \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f(t) + F, \quad (a)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \varphi(\tau) (1 - \tau^2)^{-1/2} d\tau = D, \quad (б)$$

где φ – искомая функция, g и f – известные функции, F – неизвестный, а D – известный параметры. Эта система встречается в ряде прикладных задач (см., напр., [82, 84, 86]).

Для системы (а) – (б) справедливы результаты, вполне аналогичные полученным в предыдущих пунктах этого параграфа для с.и.у. (3.1). Для иллюстрации приведем лишь следующий результат.

Приближенное решение системы (а) – (б) будем искать в виде вектор-функции $\vec{\varphi}_n(t) = \{\varphi(t); F_n\}$ с компонентами $F_n \in \mathbb{R}$ и

$$\varphi_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \delta_k \frac{T_{n+1}(\tau)}{(\tau - \tau_k) T'_{n+1}(\tau_k)}, \quad \tau_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad (\text{в})$$

где $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$ – неизвестные параметры. Их и приближенное значение F_n параметра F будем определять из СЛАУ

$$\sum_{k=0}^n A_k(t_j) \delta_k + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g(t_j, t_k) \delta_k = f(t_j) + F_n, \quad (\text{г})$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \delta_k = D, \quad t_j \in [-1, 1], \quad j = \overline{0, n}, \quad (\text{д})$$

где $A_k(t)$ – функции, определяемые из условия алгебраической степени точности квадратурной формулы

$$\int_{-1}^{+1} \ln |\tau - t| \cdot (1 - t^2)^{-1/2} \varphi(\tau) d\tau \approx -2\pi \sum_{k=0}^n A_k(t) \varphi(t_k). \quad (\text{е})$$

Теорема 3.10. Пусть выполнены условия: 1) функции g (по каждой из переменных в отдельности) и $f \in W^{r+1} H^\alpha[-1, 1]$, $r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$; 2) система интегральных уравнений (а), (б) имеет единственное решение

$$\vec{\varphi}^*(t) = \{\varphi^*(t); F^*\}, \quad \varphi^*(t) \in L_{2p}[-1, 1], \quad F^* \in \mathbb{R},$$

при любой правой части $\vec{f} = \{f; D\}$, $f \in W_{2q}^1[-1, 1]$, $D \in \mathbb{R}$; 3) коэффициенты $A_k(t_j) = \overline{S}(l_k; t_j)$ определены по формуле (3.33), а узлы t_j определены по любой из формул а), б), в) из (3.27).

Тогда для всех $n \geq n_0$ (n_0 определяется свойствами функции $g(t, \tau)$) СЛАУ (г) – (д) имеет единственное решение $\delta_0^*, \dots, \delta_n^*, F_n^*$. Приближенные решения $\vec{\varphi}_n^*(t) = \{\varphi_n^*(t); F_n^*\}$, где $\varphi_n^*(t) = \varphi_n(t)$ при $\delta_k = \delta_k^*$, $k = \overline{0, n}$, сходятся к точному решению в среднем и равномерно со скоростями соответственно

$$\|\vec{\varphi}^*(t) - \vec{\varphi}_n^*(t)\| \equiv \|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\|_{2p} + |F^* - F_n^*| = O(n^{-r-\alpha}),$$

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)| = O(n^{-r-\alpha} \ln n).$$

Доказательство ведется по аналогии с доказательством теоремы 1.18, существенно используя при этом теоремы 3.5 и 3.9, а также лемм 3.1 и 3.2.

§4. Уравнения с полярными ядрами

4.1. Вспомогательные результаты. В этом параграфе рассматриваются вопросы приближенного решения с.и.у. вида

$$\mathbb{C}x \equiv Ux + Vx = y \quad (x \in X, y \in Y), \quad (4.1)$$

где

$$Ux = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \right|^\gamma x(\sigma) d\sigma, \quad Vx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s, \sigma)x(\sigma) d\sigma, \quad (4.2)$$

а $0 < \gamma = \operatorname{const} < 1$, $y(s)$ и $h(s, \sigma)$ – известные непрерывные 2π -периодические функции, $x(s)$ – искомая функция.

Положим $X = M[0, 2\pi]$ с обычной суп-нормой и $Y = H^{1-\gamma}[0, 2\pi]$ с нормой, введенной в §1. Оператор \mathbb{C} будем рассматривать как линейный оператор из X в Y . Тогда с.и.у. (4.1) можно трактовать как операторное уравнение, приводящееся к уравнению II рода.

С.и.у. (4.1) удобно рассматривать также в пространствах $L_p[0, 2\pi]$; в этом случае удастся получить также ряд интересных результатов. Здесь мы приведем лишь некоторые из них, аналогичные полученным в §2.

Лемма 4.1. *Оператор $U : L_p[0, 2\pi] \longrightarrow L_p[0, 2\pi]$ ($1 \leq p \leq \infty$, $L_\infty \equiv C_{2\pi}$) является вполне непрерывным, а при $p = 2$ оператор U является также симметричным и положительным.*

Следствие. *В условиях леммы на конечномерном подпространстве $X_n \subset L_2$ оператор U положительно определен.*

Доказательство. Полная непрерывность оператора U в L_p , $1 \leq p \leq \infty$, следует из соответствующих результатов С.Г.Михлина о свойствах слабо сингулярных интегральных операторов (см., напр., [63], а также [38]). Далее, при $p = 2$ для любого $x \in X$ имеем

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)e^{iks}, \quad c_{-k} = \bar{c}_k, \quad (4.3)$$

причем ряд (4.3) сходится в среднем. Тогда

$$Ux = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)c_k(\rho)e^{iks}, \quad \rho(\sigma) = \left| \operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2} \right|^\gamma, \quad (4.4)$$

$$c_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\sigma)e^{-ik\sigma} d\sigma = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} \sigma)^\gamma \cos 2k\sigma d\sigma. \quad (4.5)$$

Из (4.3) – (4.5) и обобщенного равенства Парсеваля находим

$$(Ux, x)_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\rho) |c_k(x)|^2, \quad \rho(\sigma) = \left| \operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2} \right|^\gamma. \quad (4.6)$$

Так как функция $\rho(\sigma) = \rho(-\sigma) \geq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, и является монотонной в $[0, \pi]$, то с помощью (4.5) нетрудно показать, что $c_k(\rho) \geq 0$ для всех $k = 0, \pm 1, \dots$. А тогда из (4.6) для любой $x \in L_2[0, 2\pi]$, $x(s) \not\equiv 0$, получаем требуемое неравенство $(Ux, x)_2 > 0$. Отсюда следует, что однородное уравнение $Ux = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение.

Утверждение следствия очевидно в силу того, что на X_n оператор U задается положительной симметричной матрицей порядка $N = \dim X_n < \infty$, а такая матрица является положительно определенной. Тогда из (4.6), (4.5) следует, что $\|\mathbb{C}^{-1}\|_2 = O(n^{1-\gamma})$, $\mathbb{C} : X_n \rightarrow X_n = \mathbb{H}_n^T \subset L_2$.

Замечание 4.1. Если $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$, где $h(s)$ – четная функция из $C_{2\pi}$, то лемма 4.1 сохраняется и усиливается; в частности, при $p = 2$ для положительности оператора \mathbb{C} достаточно, чтобы $c_k(\rho) + c_k(h) > 0$, $1 + |k| \in \mathbb{N}$.

4.2. Полиномиальные проекционные методы. Приближенное решение с.и.у. (4.1) будем искать в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{iks}, \quad \alpha_{-k} = \bar{\alpha}_k, \quad n + 1 \in \mathbb{N}, \quad (4.7)$$

который будем определять как решение операторного уравнения

$$\mathbb{C}_n x_n \equiv P_n \mathbb{C} x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n); \quad (4.8)$$

здесь X_n, Y_n – подпространства тригонометрических полиномов с соответствующими нормами, а $P_n : L_2 \rightarrow \mathbb{H}_n^T \subset L_2$ – некоторые аддитивные и однородные проекционные операторы.

Ясно, что уравнение (4.8) эквивалентно СЛАУ порядка $2n + 1$ относительно коэффициентов полинома (4.7). Выбирая конкретный полиномиальный оператор P_n , из (4.8) получим конкретную СЛАУ, соответствующую рассматриваемому методу; в частности, из (4.8) можно получить СЛАУ методов Галеркина, коллокации и подобластей.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия: а) $y(s) \in W^r H^\alpha$ и $h(s, \sigma) \in W^r H^\alpha$ (по s равномерно относительно σ), где $r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$; б) с.и.у. (4.1) однозначно разрешимо в M при любой $y \in$

$H^{1-\gamma}$; в) P_n есть либо оператор Фурье Φ_n , либо оператор Лагранжа \mathcal{L}_n по узлам

$$s_k = 2k\pi/(2n+1), \quad k = \overline{0, 2n}, \quad (4.9)$$

либо оператор подобластей Π_n по этим же узлам.

Если $r + \alpha > 1 - \gamma$, $0 < \gamma < 1$, то при всех натуральных $n \geq n_0$ уравнение (4.8) имеет единственное решение $x_n^*(s)$. При $n \rightarrow \infty$ приближенные решения $x_n^*(s)$ равномерно сходятся со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-r-\alpha-\gamma+1} \ln n). \quad (4.10)$$

Следствие. Если $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$, то уравнение (4.8) однозначно разрешимо при любых $n = 0, 1, \dots$ и справедлива оценка (4.10).

Доказательство. В силу (4.4) для любого $x_n \in \mathbb{H}_n^T$ имеем

$$Ux_n = \sum_{k=-n}^n \alpha_k c_k(\rho) e^{iks} \in \mathbb{H}_n^T, \quad \rho(\sigma) = \left| \operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2} \right|^\gamma. \quad (4.11)$$

Положим $X = M$, $X_n = \mathbb{H}_n^T \subset X$, $Y = H^{1-\gamma}[0, 2\pi]$, $Y_n = \mathbb{H}_n^T \subset Y$. Тогда в силу (4.11), (4.1), (4.8) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\begin{aligned} \|\mathbb{C}x_n - \mathbb{C}_n x_n\|_\infty &= \|Vx_n - P_n Vx_n\|_\infty \leq 2\|P_n\|_\infty \cdot E_n^T(Vx_n)_\infty \leq \\ &\leq 2\|P_n\|_\infty \cdot E_n^{Ts}(h)_\infty \|x_n\|_\infty = O(n^{-r-\alpha} \ln n) \|x_n\|_\infty; \end{aligned} \quad (4.12)$$

здесь использованы такие известные факты, как теорема Джексона в $C_{2\pi}$ и неравенства (см., напр., [41, 51, 75])

$$\|\Phi_n\|_\infty = O(\ln n), \quad \|\mathcal{L}_n\|_\infty = O(\ln n), \quad \|\Pi_n\|_\infty = O(\ln n). \quad (4.13)$$

Из (4.13), (4.12) с помощью результатов по аппроксимации в гёльдеровых пространствах (см., напр., [12, 13, 18, 25]) находим

$$\|\mathbb{C}x_n - \mathbb{C}_n x_n\|_{1-\gamma} = O(n^{-r-\alpha+1-\gamma} \ln n) \|x_n\|_\infty, \quad x_n \in X_n. \quad (4.14)$$

Из (4.12) и (4.14) следует оценка

$$\varepsilon_n \equiv \|\mathbb{C} - \mathbb{C}_n\| = O(n^{-r-\alpha+1-\gamma} \ln n), \quad \mathbb{C} - \mathbb{C}_n : X_n \longrightarrow Y. \quad (4.15)$$

По аналогии с (4.12), (4.14) для правых частей уравнений (4.1) и (4.8) с помощью (4.13) находим [12, 18]

$$\|y - P_n y\|_{1-\gamma} = O(n^{-r-\alpha+1-\gamma} \ln n). \quad (4.16)$$

Теперь с учетом (4.16) и (4.15) из теоремы 7 гл. I монографии [25] следует утверждение доказываемой теоремы, в частности, оценка погрешности (4.11). При этом номер n_0 определяется из неравенства

$$q_n \equiv \|\mathbb{C}^{-1}\| \varepsilon_n < 1, \quad \mathbb{C}^{-1} : Y \longrightarrow X,$$

где ε_n определены в (4.16). Отсюда следует, что чем лучше ядро $h(s, \sigma)$, то тем меньше номер n_0 при каждом фиксированном γ .

Докажем следствие. Если $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$, то в силу соотношений (4.1), (4.11) приближенное уравнение (4.8) принимает вид

$$\mathbb{C}_n x_n \equiv U x_n + V x_n = \mathbb{C} x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n). \quad (4.8')$$

Ясно, что в силу условия б) теоремы уравнение (4.8') однозначно разрешимо при любых $n = 0, 1, \dots$, а в силу (4.16) для решений уравнений (4.1) и (4.8') справедливы оценки

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leq \|\mathbb{C}^{-1}\| \cdot \|y - P_n y\|_{1-\gamma} = O(n^{-r-\alpha+1-\gamma} \ln n). \quad (4.17)$$

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия: а) $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$, где $h(s)$ – четная функция из $C_{2\pi}$; б) положительный оператор (в частности, выполнено условие $c_k(\rho) + c_k(h) > 0$, $1 + |k| \in \mathbb{N}$); в) с.и.у. (4.1) имеет решение $x^*(s) \in L_2$ при данной правой части $y(s) \in L_2$. Тогда приближенное уравнение (4.8) имеет единственное решение $x_n^*(s)$ при любой правой части $P_n y \in \mathbb{H}_n^T$ и любых $n = 0, 1, \dots$, а невязка $r_n \equiv y - \mathbb{C} x_n^*$ сходится к нулю со скоростью

$$\|r_n\|_2 = \begin{cases} O\{E_n^T(y)_2\} & \text{при } P_n = \Phi_n \text{ и } \Pi_n; \\ O\{E_n^T(y)_\infty\} & \text{при } P_n = \mathcal{L}_n. \end{cases} \quad (4.18)$$

Доказательство. Из условия а) следует, что $\mathbb{C} : L_2 \rightarrow L_2$ является симметричным оператором. Если же $c_k(\rho) + c_k(h) > 0$, $1 + |k| \in \mathbb{N}$, то, как и при доказательстве леммы 4.1, находим

$$(\mathbb{C}x, x)_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [c_k(\rho) + c_k(h)] |c_k(x)|^2 > 0, \quad x \in L_2, \quad x(s) \not\equiv 0, \quad (4.19)$$

т.е. оператор \mathbb{C} положителен или по предположению, или по условию на ядра $\rho(s)$ и $h(s)$. С другой стороны, в силу (4.1), (4.11), (4.8) имеем $\mathbb{C}_n = \mathbb{C}$ на X_n . Так как \mathbb{C}_n – симметричный положительный оператор на $X = L_2$, то на $X_n \subset L_2$ имеем

$$(\mathbb{C}_n x_n, x_n)_2 \geq \gamma_n^2 (x_n, x_n)_2, \quad x_n \in X_n, \quad (4.20)$$

где γ_n^2 – положительное число, не зависящее от $x_n \in X_n$, но зависящее, вообще говоря, от n (в частности, при $h(\sigma) = \alpha \ln |\sin(\sigma/2)|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, имеем $\gamma_n^2 \asymp n^{-1+\gamma}$, $0 < \gamma < 1$). Из (4.20) следует, что однородное уравнение $\mathbb{C}_n x_n = 0$ имеет лишь тривиальное решение. А тогда

уравнение (4.8), в силу его эквивалентности СЛАУ конечного порядка, будет иметь единственное решение при любой правой части.

Для завершения доказательства остается заметить, что в рассматриваемом случае для невязки справедливы формулы $r_n = y - \mathbb{C}x_n^* = y - P_n y$, и воспользоваться известными результатами по аппроксимативным свойствам операторов Фурье Φ_n , Лагранжа \mathcal{L}_n и подобластей Π_n в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ (см., напр., [75, 41, 51]).

Пусть теперь коэффициенты α_k приближенного решения (4.7) определяются по м.н.к. из СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^n \alpha_k (\mathbb{C}e^{ik\sigma}, \mathbb{C}e^{ij\sigma})_2 = (y, \mathbb{C}e^{ij\sigma})_2, \quad j = \overline{-n, n}. \quad (4.21)$$

Теорема 4.3. Пусть выполнены условия: а) $y \in L_2[0, 2\pi]$, $h \in L_2[0, 2\pi]^2$; б) с.и.у. (4.1) имеет решение $x^* \in L_2$ при данной правой части $y \in L_2$; в) однородное уравнение $\mathbb{C}x = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение. Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$ СЛАУ (4.21) имеет единственное решение α_k^* , $k = \overline{-n, n}$. Приближенные решения $x_n^*(s)$ (т.е. (4.7) при $\alpha_k = \alpha_k^*$) сходятся в том смысле, что невязка $r_n \equiv y - \mathbb{C}x_n^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\|r_n\|_2 \leq \|\mathbb{C}\|_2 \cdot E_n^T(x^*)_2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.22)$$

Доказательство. В условиях теоремы оператор $\mathbb{C} : L_2 \rightarrow L_2$, определяемый левой частью уравнения (4.1), является вполне непрерывным. Отсюда, в частности, следует, что система функций $\{e^{iks}\}_{-\infty}^{\infty}$ является \mathbb{C} -полной. С другой стороны, в силу условия в) теоремы система функций $\varphi_j(s) = \mathbb{N}(e^{ij\sigma}; s)$ является линейно независимой. Поэтому дальше доказательство завершается как и в теореме 1.9.

Отметим, что в приложениях встречаются также слабо с.и.у. первого рода вида (см., напр., [78, 80])

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right|^{-\gamma} x(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma = y(s), \quad (4.23)$$

где $0 < \gamma < 1$, а $h(s, \sigma)$ – регулярное ядро. Для с.и.у. (4.23) справедливы многие из полученных выше результатов. Это утверждение следует из формулы $|\operatorname{ctg} \theta|^\gamma = |\sin \theta|^{-\gamma} - h_0(\theta)$, где $h_0(\theta)$ есть четная непрерывная 2π -периодическая функция. Кроме того, результаты, аналогичные приведенным в этом параграфе, можно получить также

для с.и.у. [79, 80]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{|\tau - t|^\gamma} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} g(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (4.24)$$

где $f(t)$ и $g(t, \tau)$ – известные непрерывные функции в областях соответственно $[-1, 1]$ и $[-1, 1]^2$, а $\varphi(t)$ – искомая функция.

§5. Некоторые обобщения и дополнения

5.1. Общий проекционный метод для общего уравнения.

В §§1, 2 и 4 были рассмотрены общие проекционные методы решения конкретных слабо с.и.у. I-рода и доказана их сходимость. Полученные при этом результаты допускают существенное обобщение.

Рассмотрим с.и.у. I-рода вида

$$Ax \equiv Gx + Rx = y \quad (x \in X, y \in Y), \quad (5.1)$$

$$Gx \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(|s - \sigma|) x(\sigma) d\sigma, \quad Rx \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma \equiv \rho h x.$$

Здесь $g(s) \in L_1[0, 2\pi]$, $h(s, \sigma) \in C[0, 2\pi]^2$, $y(s) \in Y$ – данные 2π -периодические функции, а $x(s)$ – искомая функция, которая разыскивается в некотором нормированном пространстве 2π -периодических функций X . Предположим, что оператор $A : X \rightarrow Y$ непрерывно обратим, где Y – некоторое нормированное пространство, в частности, $Y \equiv G(X)$.

Приближенное решение с.и.у. (5.1) будем искать в виде

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{iks}, \quad \bar{\alpha}_k = \alpha_{-k}. \quad (5.2)$$

Этот полином будем определять как точное решение операторного уравнения (см., напр., [19, 22, 23, 25])

$$A_n x_n \equiv P_n A x_n = P_n y \quad (x_n \in \mathbb{H}_n^T \subset X, P_n y \in \mathbb{H}_n^T \subset Y), \quad (5.3)$$

где $P_n \in \mathcal{P}_n \subset \mathcal{L}(L_2, \mathbb{H}_n^T)$. Очевидно, что уравнение (5.3) эквивалентно СЛАУ порядка $2n + 1$ относительно коэффициентов полинома (5.2) или относительно значений этого полинома в $(2n + 1)$ - попарно неэквивалентных точках.

Легко видеть, что для $x_n(s)$ из (5.2)

$$G(x_n; s) = \sum_{k=-n}^n c_k(x_n) c_k(g) e^{iks}, \quad c_k(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\sigma) \cos k\sigma d\sigma. \quad (5.4)$$

Другими словами, $Gx_n \in \mathbb{H}_n^T$ для любого $x_n \in \mathbb{H}_n^T$. Поэтому, если $P_n^2 = P_n$, то уравнение (5.3) принимает вид

$$A_n x_n \equiv Gx_n + P_n R x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n, P_n \in \mathcal{P}_n), \quad (5.5)$$

где подпространства $X_n = \mathbb{H}_n^T$ и $Y_n = \mathbb{H}_n^T$ наделены нормами пространств соответственно X и Y .

Соотношения (5.2), (5.3), (5.5) представляют собой схему общего проекционного метода решения с.и.у. (5.1). В силу сказанного в разделе 1.2 (см. также гл. I [25]), для обоснования рассматриваемого метода большое значение имеют величины

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} = \|R - P_n R\|_{X_n \rightarrow Y}, \quad \delta_n \equiv \|y - P_n y\|_Y. \quad (5.6)$$

Если при $n \rightarrow \infty$ имеем $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $\delta_n \rightarrow 0$, то сходимость метода следует из теоремы 7 гл. I [25]. Ясно, что последние условия существенным образом зависят от выбора операторов проектирования P_n , порождающих проекционный метод, и от выбора пространств X и Y ; последнее, очевидно, зависит от исходных данных, в первую очередь, от слабо сингулярного ядра $g(s)$. В частности, при $g(s) = \ln |\sin(s/2)|$ полагаем $Y = X^1$ (если пространство X дано) или $X = Y^{-1}$ (если пространство Y дано), где Y^{-1} означает пространство 2π -периодических первообразных функций $y(s) \in Y$. При этом необходимо заботиться о том, чтобы оператор $A^{-1} : Y \rightarrow X$ был ограниченным.

Сначала отметим следующий простой частный случай: если $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$, то для любого $x_n \in \mathbb{H}_n^T$ имеем

$$A_n x_n \equiv P_n (Gx_n + R x_n) = Gx_n + R x_n = A x_n = P_n y.$$

Поэтому в рассматриваемом случае из однозначной разрешимости с.и.у. (5.1) следует однозначная разрешимость приближенного уравнения (5.3) при любых $n = 0, 1, \dots$, причем для невязки $r_n \equiv y - A x_n^*$ и погрешности $\theta_n \equiv x^* - x_n^*$ метода справедливы формулы $r_n = y - P_n y$, $\theta_n = A^{-1} r_n$. Тогда доказательство сходимости метода и оценка погрешности не представляют никаких принципиальных трудностей. Положение еще более упрощается, если проекционные операторы P_n являются инвариантными относительно сдвига, ибо тогда

$$\theta_n \equiv x^* - x_n^* = A^{-1} r_n = x^* - P_n A^{-1} y = x^* - P_n x^*. \quad (5.7)$$

Однако вернемся к общему случаю с наиболее часто встречаемым на практике слабо сингулярным ядром.

5.2. Теоремы о сходимости общего проекционного метода. Итак, пусть (здесь и в следующем разделе) $g(\sigma) = -\ln |\sin \frac{\sigma}{2}|$, а $X = L_2 = L_2[0, 2\pi]$, $Y = W_2^1 = W_2^1[0, 2\pi]$. Обозначим через $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(1)}(L_2, \mathbb{H}_n^T) \subset \mathcal{L}(L_2, L_2)$ множество всех линейных проекционных (т.е. $P_n^2 = P_n$) операторов, отображающих L_2 в $\mathbb{H}_n^T \subset L_2$ и ограниченных по норме в совокупности.

Теорема 5.1. Пусть $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ и $y \in W_2^1$, а регулярное ядро $h(s, \sigma)$ таково, что оператор $R : L_2 \rightarrow W_2^1$ вполне непрерывен. Если с.и.у. (5.1) имеет единственное решение $x^* \in L_2$ при любой $y \in W_2^1$, то при всех $n \geq n_0$ (номер n_0 зависит от свойств ядра $h(s, \sigma)$, в частности, $n_0 = 0$ при $h(s, \sigma) \equiv 0$ или же $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$), приближенное уравнение (5.5) также имеет единственное решение $x_n^* \in \mathbb{H}_n^T \subset L_2$ при любых $P_n y \in \mathbb{H}_n^T \subset W_2^1$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$. Приближенные решения сходятся в среднем со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \left\{ E_n^T \left(\frac{d}{ds} Gx^* \right)_2 \right\} = O \{ E_n^T(x^*)_2 \}. \quad (5.8)$$

Следствие 1. В условиях теоремы операторы $A_n^{-1} = (P_n A)^{-1}$ ($n \geq n_0$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$) ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n, \quad Y_n \subset W_2^1, \quad X_n \subset L_2. \quad (5.9)$$

Следствие 2. Если функции $y(s)$ и $R(x^*; s) \in W^{r+1}H_2^\alpha$, то приближенные решения сходятся в среднем и равномерно (при $r + \alpha > 1/2$) со скоростями соответственно:

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O(n^{-r-\alpha}); \quad \|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-r-\alpha+1/2}). \quad (5.10)$$

Доказательство. Поскольку $P_n^2 = P_n$ и $\|P_n\|_2 = O(1)$, то операторы P_n сходятся сильно в L_2 и для любых $\varphi \in L_2$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$

$$\|\varphi - P_n \varphi\|_2 \leq \|E - P_n\|_2 E_n^T(\varphi)_2 \leq 2 \|P_n\|_2 E_n^T(\varphi)_2 = O \{ E_n^T(\varphi)_2 \}. \quad (5.11)$$

Покажем, что операторы P_n сходятся сильно также в пространстве W_2^1 , причем

$$\begin{aligned} \|\varphi - P_n \varphi\|_{W_2^1} &\leq \left(1 + \frac{n \|P_n\|_2 + \|E - P_n\|_2}{n+1} \right) E_n^T(\varphi')_2 \leq \\ &\leq 3 \|P_n\|_2 E_n^T(\varphi')_2 = O \{ E_n^T(\varphi')_2 \}, \quad \varphi \in W_2^1, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Действительно, с помощью результатов разделов 1.3 и 1.9 для любых $\varphi \in W_2^1$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ последовательно находим

$$\begin{aligned} \|\varphi - P_n\varphi\|_{1,2} &= \|\varphi - P_n\varphi\|_2 + \left\| \frac{d}{ds} (E - P_n)(\varphi - \Phi_n\varphi) \right\|_2 \leq \\ &\leq \|E - P_n\|_2 E_n^T(\varphi)_2 + E_n^T(\varphi')_2 + n \|P_n\|_2 \|\varphi - \Phi_n\varphi\|_2 \leq \\ &\leq \|P_n\|_2 [(2+n)/(n+1)] E_n^T(\varphi')_2 + E_n^T(\varphi')_2 \leq \\ &\leq 3 \|P_n\|_2 E_n^T(\varphi')_2 = O \{E_n^T(\varphi')_2\}, \quad \varphi \in W_2^1, P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.12')$$

Из (5.12'), в частности, следует, что операторы $P_n : W_2^1 \rightarrow W_2^1$ ограничены по норме в совокупности, точнее,

$$\|P_n\|_{W_2^1 \rightarrow W_2^1} \leq 1 + 3 \|P_n\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq 4 \|P_n\|_2 = O(1). \quad (5.13)$$

Поскольку $P_n \rightarrow E$ сильно в W_2^1 , а $R : L_2 \rightarrow W_2^1$ — вполне непрерывный оператор, то операторы $P_n R \rightarrow R$ равномерно, т.е.

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon_n' \equiv \|R - P_n R\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty; \quad R - P_n R : L_2 \rightarrow W_2^1, P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}. \quad (5.14)$$

Кроме того, в силу (5.12) для правых частей (5.1) и (5.5)

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_{1,2} = O \{E_n^T(y')_2\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}. \quad (5.15)$$

В силу соотношений (5.6), (5.14), (5.15) требуемое утверждение следует из теорем 7, 6 и 14 гл. I [25] или же из вышеприведенных теорем 1.1, 1.2 и 1.11.

Замечание 5.1. Из теоремы 5.1 и ее следствия 1 следуют сходимость, устойчивость и оптимальность по порядку [25] как общего проекционного метода (5.1) – (5.5) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$, так и м.Г., м.п. и м.н.к., обоснованных в §1.

Пусть теперь $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(2)}(L_2, \mathbb{H}_n^T)$ есть множество линейных проекционных операторов из $L_2[0, 2\pi]$ в $\mathbb{H}_n^T \subset L_2[0, 2\pi]$, причем $P_n : L_2 \rightarrow L_2$ неограничены, а $P_n : C_{2\pi} \rightarrow L_2$ ограничены по норме в совокупности.

Теорема 5.2. Пусть $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$ и $y \in C_{2\pi}^1$, а регулярное ядро $h(s, \sigma)$ таково, что оператор $R : L_2 \rightarrow C_{2\pi}^1$ вполне непрерывен. Если уравнение (5.1) имеет единственное решение $x^* \in L_2$ при любой $y \in W_2^1$, то при всех n , начиная с некоторого, уравнение (5.3) также имеет единственное решение $x_n^* \in \mathbb{H}_n^T \subset L_2$ при любых $P_n y \in \mathbb{H}_n^T \subset W_2^1$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$. Приближенные решения сходятся в среднем со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \left\{ E_n^T \left(\frac{d}{ds} G x^* \right)_\infty \right\} = O \{E_n^T(x^*)_\infty\}. \quad (5.16)$$

Следствие 1. В условиях теоремы операторы $A_n^{-1} = (P_n A)^{-1}$ ($n \geq n_0$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$) ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n, \quad Y_n \subset W_2^1, \quad X_n \subset L_2.$$

Следствие 2. Если функции $y(s)$ и $R(x^*; s) \in W^{r+1}H^\alpha$, то приближенные решения сходятся в среднем (при $r + \alpha > 0$) и равномерно (при $r + \alpha > 1/2$) со скоростями соответственно

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O(n^{-r-\alpha}); \quad \|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-r-\alpha+\frac{1}{2}}).$$

Доказательство. Поскольку $\|P_n\| = O(1)$, $P_n : C_{2\pi} \longrightarrow L_2$, то $P_n \rightarrow \tilde{E}$ сильно, где \tilde{E} – оператор вложения $C_{2\pi}$ в L_2 , причем

$$\begin{aligned} \|\psi - P_n \psi\|_2 &\leq \|\tilde{E} - P_n\|_{\infty \rightarrow 2} \cdot E_n^T(\psi)_\infty \leq \\ &\leq 2 \|P_n\|_{\infty \rightarrow 2} \cdot E_n^T(\psi)_\infty = O\{E_n^T(\psi)_\infty\}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}, \quad \psi \in C_{2\pi}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Покажем, что при $n \rightarrow \infty$ операторы $P_n \rightarrow \bar{E}$ сильно, где \bar{E} – оператор вложения пространства $C_{2\pi}^1$ в W_2^1 , причем

$$\|\psi - P_n \psi\|_{1;2} \leq (1 + \pi \|P_n\|_{\infty \rightarrow 2}) E_n^T(\psi')_\infty = O\{E_n^T(\psi')_\infty\}, \quad (5.18)$$

где $\psi \in C_{2\pi}^1$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$.

Действительно, с помощью результатов (и обозначений) раздела 1.4 для любых $\psi \in C_{2\pi}^1$ и $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$ последовательно находим

$$\begin{aligned} \|\psi - P_n \psi\|_{1;2} &= \|\psi - P_n \psi\|_2 + \left\| \frac{d}{ds} [(\psi - \Phi_n \psi) + \Phi_n(\psi - P_n \psi)] \right\|_2 \leq \\ &\leq \|\psi - P_n \psi\|_2 + E_n^T(\psi')_2 + n \|\psi - P_n \psi\|_2 \leq (1+n) \|\tilde{E} - P_n\|_{\infty \rightarrow 2} \cdot E_n^T(\psi)_\infty + \\ &\quad + E_n^T(\psi')_2 \leq \frac{\pi}{2} \|\tilde{E} - P_n\|_{\infty \rightarrow 2} \cdot E_n^T(\psi')_\infty + E_n^T(\psi')_\infty \leq \\ &\leq (1 + \pi \|P_n\|_{\infty \rightarrow 2}) E_n^T(\psi')_\infty = O\{E_n^T(\psi')_\infty\}. \end{aligned} \quad (5.18')$$

Из (5.18) следует, что операторы $P_n : C_{2\pi}^1 \longrightarrow W_2^1$ ограничены по норме в совокупности, точнее

$$\|P_n\|_{C_{2\pi}^1 \rightarrow W_2^1} \leq 2 + \pi \|P_n\|_{C_{2\pi} \rightarrow L_2} \leq (2 + \pi) \|P_n\|_{C_{2\pi} \rightarrow L_2} = O(1). \quad (5.19)$$

Поскольку $P_n \rightarrow \bar{E}$ сильно, а $R : L_2 \longrightarrow C_{2\pi}^1$ – вполне непрерывный оператор, то операторы $P_n R \rightarrow R$ равномерно, т.е.

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon_n'' \equiv \|R - P_n R\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \quad R - P_n R : L_2 \longrightarrow W_2^1, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}. \quad (5.20)$$

Кроме того, в силу (5.18') для правых частей (5.1) и (5.3) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_{1;2} = O \{E_n^T(y')_\infty\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}. \quad (5.21)$$

В силу (5.6), (5.20), (5.21) требуемое утверждение следует из теорем 6, 7 и 14 гл. I [25] или же из вышеприведенных теорем 1.1, 1.2 и 1.11.

Замечание 5.2. Из теоремы 5.1 и ее следствия 1 следует сходимость и устойчивость как общего проекционного метода (5.1) – (5.3) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$, так и метода коллокации, обоснованного в разделе 1.4.

5.3. Возмущенный проекционный метод. Теперь в качестве приближенного уравнения для с.и.у. (5.1) возьмем уравнение вида

$$\bar{A}_n x_n \equiv Gx_n + P_n \rho P_n^\sigma (hx_n) = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n, P_n \in \mathcal{P}_n), \quad (5.22)$$

где $Rx \equiv \rho hx$, а P_n^σ означает оператор P_n , примененный по переменной σ . Ясно, что уравнение (5.22) эквивалентно СЛАУ порядка $2n + 1$ относительно коэффициентов полинома (5.2) или же относительно $x_n(s_k)$, $k = \overline{-n, n}$, где s_k – любая система из $2n + 1$ попарно неэквивалентных узлов.

Рассматриваемый метод естественно называть "возмущенным проекционным методом" ввиду того, что, во-первых, он совпадает с проекционным методом решения "возмущенного" с.и.у. вида

$$\bar{A}x \equiv Gx + \rho P_n^\sigma (hx) = y \quad (x \in X, y \in Y); \quad (5.1')$$

во-вторых, он получается из проекционного метода (5.5) путем возмущения регулярного ядра $h(s, \sigma)$ по переменной σ .

Пусть оператор P_n таков, что

$$\rho[P_n^\sigma(hx_n)] = \rho[(P_n^\sigma h)x_n], \quad x_n \in X_n, P_n \in \mathcal{P}_n \quad (5.23)$$

(как показано в разделе 1.5, для ряда конкретных операторов это условие выполняется). Тогда в силу (5.5) и (5.22) имеем

$$\|A_n x_n - \bar{A}_n x_n\|_Y = \|P_n \rho[(h - P_n^\sigma h)x_n]\|_Y, \quad x_n \in X_n, P_n \in \mathcal{P}_n. \quad (5.24)$$

А тогда при выполнении дополнительного условия $h'_s(s, \sigma) \in L_2[0, 2\pi]^2$ с помощью теоремы 5.1 находим при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$:

$$\begin{aligned} & \|A_n x_n - \bar{A}_n x_n\|_Y \leq \|P_n\|_{W_2^1 \rightarrow W_2^1} \cdot \|\rho(h - P_n^\sigma h)x_n\|_{W_2^1} = \\ & = O \left\{ \|h - P_n^\sigma h\|_{L_2[0, 2\pi]^2} + \|h'_s - P_n^\sigma h'_s\|_{L_2[0, 2\pi]^2} \right\} \cdot \|x_n\|_{L_2} = \\ & = \|x_n\|_2 \cdot O \left\{ E_N^{T\sigma}(h)_2 + E_N^{T\sigma}(h'_s)_2 \right\}, \quad x_n \in X_n; \end{aligned}$$

поэтому справедлива оценка

$$\|A_n - \bar{A}_n\|_{X_n \rightarrow Y_n} = O \{ E_n^{T\sigma}(h)_2 + E_n^{T\sigma}(h'_s)_2 \}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}. \quad (5.25)$$

Если же $h'_s(s, \sigma) \in C[0, 2\pi]^2$, то в силу (5.24) с помощью теоремы 5.2 находим аналогичную оценку при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$:

$$\|A_n - \bar{A}_n\|_{X_n \rightarrow Y_n} = O \{ E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty \}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}. \quad (5.26)$$

С помощью (5.24) – (5.26) из теорем 5.1 и 5.2 выводится

Теорема 5.3. Пусть в условиях теоремы 5.1 (соответственно теоремы 5.2) существует производная $h'_s(s, \sigma) \in L_2[0, 2\pi]^2$ (соответственно $\exists h'_s(s, \sigma) \in C[0, 2\pi]^2$) и выполнено условие (5.23)¹⁾. Если с.и.у. (5.1) однозначно разрешимо в L_2 при любой $y \in W_2^1$, то при всех n , начиная с некоторого, уравнение (5.22) также имеет единственное решение $\bar{x}_n^* = \bar{A}_n^{-1} P_n y$, где $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ (соответственно $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$). Приближенные решения сходятся к точному решению $x^* \in L_2$ в среднем со скоростью

$$\|x^* - \bar{x}_n^*\|_2 = O \{ E_n^T(x^*)_2 + E_n^{T\sigma}(h)_2 + E_n^{T\sigma}(h'_s)_2 \} \quad (5.27)$$

в условиях теоремы 5.1, а в условиях теоремы 5.2 – со скоростью

$$\|x^* - \bar{x}_n^*\|_2 = O \{ E_n^T(x^*)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty \}. \quad (5.28)$$

Следствие. В условиях теоремы 5.3 обратные операторы \bar{A}_n^{-1} ($n \geq n_1 \geq n_0$) ограничены по норме в совокупности:

$$\|\bar{A}_n^{-1}\| = O(1), \quad \bar{A}_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n, \quad Y_n \subset W_2^1, \quad X_n \subset L_2, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(i)} \quad (i = 1, 2).$$

Замечание 5.3. Из теоремы 5.3 следует сходимость и устойчивость как метода (5.1), (5.2), (5.22) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(i)}$ ($i = 1, 2$), так и метода механических квадратур, обоснованного в разделе 1.5.

Замечание 5.4. Утверждения, аналогичные теоремам 5.1 – 5.3, справедливы также для системы слабо с.и.у. I-рода, исследованной в разделе 1.14.

5.4. О равномерной сходимости и насыщаемости методов. В этой главе, в том числе в теоремах 5.1 – 5.3, погрешность исследуемых методов установлена в терминах теории приближения

¹⁾ При его невыполнении утверждение о сходимости метода сохраняется, однако вместо оценок (5.27) и (5.28) будут другие оценки; здесь доказательство можно вести с помощью принципа компактной аппроксимации Г.М.Вайникко (см., напр., [7]).

функций полиномами. Такая характеристика погрешности носит универсальный характер в том смысле, что она автоматически прослеживает структурные свойства исходных данных; другими словами, рассмотренные методы являются, по терминологии К.И. Бабенко [3], не насыщаемыми. Очевидно, что этот факт может иметь большое значение при численной реализации исследованных выше прямых и проекционных методов. Однако при численной реализации равномерные оценки погрешности являются более предпочтительными, чем среднеквадратические оценки. Способом, указанным в разделе 1.10, из среднеквадратических оценок могут быть выведены равномерные оценки погрешности, которые также автоматически учитывают структурные свойства исходных данных. В частности, в условиях теорем 5.1 – 5.3 большое значение имеют аппроксимационные характеристики проекционных операторов P_n в пространстве $C_{2\pi}$, в том числе характер роста их норм в $C_{2\pi}$. Если

$$\|P_n\| = O(\ln n), \quad P_n : C_{2\pi} \longrightarrow C_{2\pi}, \quad (5.29)$$

то для равномерной оценки погрешности методов (5.5) и (5.22) решения с.и.у. (5.1) справедливы такие же результаты, что и для методов Галеркина, коллокации, подобластей и механических квадратур. Здесь уместно отметить, что в силу теоремы Бермана–Зигмунда–Марцинкевича (см., напр., в гл.7 [55]) для полиномиальных проекционных операторов оценка (5.29) не может быть улучшена по порядку. Поэтому, если мы хотим иметь прямые методы с более хорошей равномерной оценкой погрешности, чем методы Галеркина, коллокации, подобластей и квадратур, то необходимо отказаться от проекционности операторов P_n . Известно (см., напр., гл.IV [25]), что порождаемые такими операторами некоторые из полиномиальных прямых методов в пространствах непрерывных функций обладают более хорошими аппроксимативными свойствами, чем полиномиальные прямые методы даже с самыми "хорошими" проекционными операторами. Однако с сожалением приходится констатировать, что являющиеся более предпочтительными при таком сравнении прямые методы с непроекционными операторами обладают большим недостатком, а именно, в пространствах непрерывных функций они являются насыщаемыми.

5.5. Общий проекционный метод решения непериодических уравнений. Результаты, аналогичные приведенным в разделах 5.1 – 5.4, справедливы также для непериодических слабо с.и.у. I рода.

Проиллюстрируем сказанное на примере уравнения

$$B\varphi \equiv H\varphi + T\varphi = f \quad (\varphi \in L_{2p}, f \in W_{2q}^1), \quad (5.30)$$

$$H\varphi \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \ln \frac{1}{|\tau - t|} \cdot \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}}, \quad T\varphi \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{h(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \equiv \theta(h\varphi);$$

здесь $f(t)$ и $h(t, \tau)$ – известные непрерывные функции, а $\varphi(t)$ – иско-
мая функция, которая разыскивается в пространстве $L_{2p}[-1, 1]$ с весом
 $p(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$, причем $q(t) = (1 - t^2)^{1/2}$.

Приближенное решение с.и.у. (5.30) будем искать в виде

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k = \sum_{k=0}^n \beta_k T_k(t), \quad (5.31)$$

где α_k, β_k – неизвестные постоянные. Многочлен (5.31) будем определять
как точное решение уравнения

$$B_n\varphi_n \equiv P_n B\varphi_n = P_n f \quad (\varphi_n \in X_n, P_n f \in Y_n, P_n \in \mathcal{P}_n), \quad (5.32)$$

где X_n и Y_n – подпространства \mathbb{H}_n алгебраических многочленов сте-
пени не выше n , наделенные нормами пространств соответственно
 $X = L_{2p}[-1, 1]$ и $Y = W_{2q}^1[-1, 1]$, а $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{L}(L_{2q}, \mathbb{H}_n)$.

Легко видеть, что уравнение (5.32) эквивалентно СЛАУ порядка
 $n + 1$ относительно коэффициентов многочлена (5.31).

Как уже отмечено в §3, $H\psi_n \in \mathbb{H}_n$ для любого $\psi_n \in \mathbb{H}_n$ ¹⁾. Поэто-
му, если оператор $P_n \in \mathcal{P}_n$ является проекционным (т.е. $P_n^2 = P_n$), то
приближенное уравнение (5.32) принимает вид

$$B_n\varphi_n \equiv H\varphi_n + P_n T\varphi_n = P_n f \quad (\varphi_n \in X_n, P_n f \in Y_n, P_n \in \mathcal{P}_n). \quad (5.33)$$

Для рассматриваемого проекционного метода справедливы сле-
дующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(1)} = \{P_n\}$ – множество всех
линейных проекционных операторов из L_{2q} в $\mathbb{H}_n \subset L_{2q}$, ограничен-
ных по норме в совокупности. Тогда для схемы (5.30), (5.31), (5.33)
справедлив результат, аналогичный теореме 5.1.

Утверждение 2. Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(2)} = \{P_n\}$ – множество проек-
ционных операторов из L_{2q} в \mathbb{H}_n , таких, что $P_n : L_{2q} \rightarrow L_{2q}$ неогра-
ниченны, а $P_n : C[-1, 1] \rightarrow L_{2q}$ ограничены по норме в совокупности.

¹⁾ Таким свойством обладает большое число интегральных операторов, в том
числе операторы с т.н. π -ядрами (см. [71]). Поэтому излагаемый общий проекци-
онный метод применим также к более общим уравнениям, чем слабо с.и.у. (5.30).

Тогда для схемы (5.30), (5.31), (5.33) имеет место результат, аналогичный теореме 5.2.

Утверждение 3. Уравнение (5.33) заменим возмущенным уравнением

$$\overline{B}_n \varphi_n \equiv H \varphi_n + P_n \theta P_n^\tau (h \varphi_n) = P_n f \quad (\varphi_n \in X_n, P_n f \in Y_n, P_n \in \mathcal{P}_n), \quad (5.34)$$

где P_n^τ означает, что оператор P_n применен по переменной τ . Для схемы (5.30), (5.31), (5.34) справедлив результат, аналогичный теореме 5.3.

Заметим, что указанные утверждения могут быть доказаны как самостоятельно, так и (что еще проще) путем сведения (см. §3) уравнений (5.30), (5.33) и (5.34) к частным случаям уравнений соответственно (5.1), (5.5) и (5.22).

5.6. Общий проекционный метод решения слабосингулярных уравнений II -рода. Результаты, полученные выше для слабо с.и.у. I -рода (0.1) – (0.3) и их обобщений, легко переносятся на слабо с.и.у. II -рода и существенно упрощаются и усиливаются. В обозначениях разделов 5.1 – 5.3 этот вопрос рассмотрим, хотя бы вкратце, применительно к слабо с.и.у. II -рода вида

$$Kx \equiv x(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s - \sigma)x(\sigma) d\sigma = y(s) \quad (x, y \in L_2); \quad (5.35)$$

здесь $h(s) \in L_1[0, 2\pi]$ и $y(s) \in L_2[0, 2\pi]$ – известные 2π -периодические функции, а $x(s)$ – искомая функция. Заметим, что в приложениях нередко встречается ядро вида $h(2\theta) = |\operatorname{ctg} \theta|^\gamma \ln^m |\sin \theta|$, где $\theta = (s - \sigma)/2$, $0 \leq \gamma < 1$, $m + 1 \in \mathbb{N}$, $m + \gamma > 0$.

Приближенное решение уравнения (5.35) снова ищем в виде полинома (5.2), который будем определять как решение уравнения

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n H x_n = P_n y \quad (x_n, P_n y \in \mathbb{H}_n^T, P_n \in \mathcal{P}_n), \quad (5.36)$$

$$Hx \equiv H(x; s) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s - \sigma)x(\sigma) d\sigma, \quad (5.37)$$

где $\mathcal{P}_n = \{P_n\} \subset \mathcal{L}(L_2, \mathbb{H}_n^T)$ – некоторое множество линейных проекционных ($P_n^2 = P_n$) операторов из $L_2[0, 2\pi]$ в \mathbb{H}_n^T с L_2 -нормой. Ясно, что уравнение (6.36) эквивалентно СЛАУ порядка $2n + 1$ относительно коэффициентов полинома (5.2).

Для метода (5.35), (5.2), (5.36) справедливы следующие теоремы.

Теорема 5.4. Пусть $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$, $y \in L_2$ и $c_k(h) \neq -1, k = 0, \pm 1, \dots$. Тогда как точное уравнение (5.35), так и приближенные уравнения (5.36) при любых $n = 0, 1, \dots$ однозначно разрешимы в пространствах соответственно L_2 и $\mathbb{H}_n^T \subset L_2$. Приближенные решения $x_n^* = K_n^{-1}P_n y$ сходятся к точному решению $x^* = K^{-1}y$ в среднем, причем

$$\min_{k=0, \pm 1, \dots} |1 + c_k(h)|^{-1} \leq \|x^* - x_n^*\|_2 / \|y - P_n y\|_2 \leq \max_{k=0, \pm 1, \dots} |1 + c_k(h)|^{-1}, \quad (5.38)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq E_n^T(y)_2 \|E - P_n\|_2 / \min_{k=0, \pm 1, \dots} |1 + c_k(h)|. \quad (5.39)$$

Доказательство. Представляя функции $x(s)$ и $y(s) \in L_2[0, 2\pi]$ через их ряды Фурье и подставляя их в уравнение (5.35), с учетом полноты тригонометрической системы функций находим

$$c_k(x) = c_k(y) / [1 + c_k(h)], \quad k = 0, \pm 1, \dots, \quad (5.40)$$

где $c_k(\varphi)$ – комплексные коэффициенты Фурье функции $\varphi(\sigma) \in L_1[0, 2\pi]$. Очевидно, что функция

$$x^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k(y)}{1 + c_k(h)} e^{iks} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x^*) e^{iks} \quad (5.41)$$

является единственным решением уравнения (5.35).

Из (5.41) находим неравенства

$$\|x^*\|_2 = \|K^{-1}y\|_2 = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{c_k(y)}{1 + c_k(h)} \right|^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \frac{\|y\|_2}{\min_{k=0, \pm 1, \dots} |1 + c_k(h)|} \right\},$$

$$\|x^*\|_2 = \|K^{-1}y\|_2 \geq \|y\|_2 / \max_{k=0, \pm 1, \dots} |1 + c_k(h)|.$$

Отсюда, в свою очередь, следуют неравенства

$$\|K^{-1}\|_2 \leq \max_{k=0, \pm 1, \dots} |1 + c_k(h)|^{-1}, \quad \|K\|_2 \leq \max_{k=0, \pm 1, \dots} |1 + c_k(h)|. \quad (5.42)$$

Заметим, что последнее неравенство легко выводится также из очевидной формулы

$$\|Kx\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 \cdot |1 + c_k(h)|^2, \quad x \in L_2.$$

Поскольку $P_n^2 = P_n$, то для любого $x_n \in \mathbb{H}_n^T$ имеем $P_n H x_n = H x_n$. Тогда приближенное уравнение (5.36) принимает очень простой вид

$$K_n x_n \equiv x_n + H x_n = P_n y \quad (x_n, P_n y \in \mathbb{H}_n^T, P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}). \quad (5.43)$$

Ясно, что в (5.43) оператор K_n является сужением оператора K на $\mathbb{H}_n^T \subset L_2$. Поэтому приближенное уравнение (6.36) однозначно разрешимо в \mathbb{H}_n^T при любых $n = 0, 1, \dots$, а $x_n^* = K_n^{-1}P_n y = K^{-1}P_n y$. В силу этого для невязки и погрешности рассматриваемого приближенного метода справедливы соотношения

$$r_n \equiv y - Kx_n^* = y - P_n y, \quad x^* - x_n^* = K^{-1}r_n. \quad (5.44)$$

Из (5.44) легко находим неравенства

$$\|K\|_2^{-1} \|y - P_n y\|_2 \leq \|x^* - x_n^*\|_2 \leq \|K^{-1}\|_2 \|y - P_n y\|_2, \quad (5.45)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq \|K^{-1}\|_2 \cdot \|E - P_n\|_2 E_n^T(y)_2 = O \{E_n^T(y)_2\}. \quad (5.46)$$

Из (5.45) и (5.46) с учетом неравенств (5.42) следуют требуемые оценки (5.38) и (5.39), а из них, в свою очередь, следует требуемое утверждение.

По аналогии с теоремой 5.4 доказывается следующая

Теорема 5.5. Пусть $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$, $y \in C_{2\pi}$ и $c_k(h) \neq -1$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Тогда как точное уравнение (5.35), так и приближенные уравнения (5.36) при любых $n = 0, 1, \dots$ однозначно разрешимы в пространствах соответственно L_2 и $\mathbb{H}_n^T \subset L_2$. Приближенные решения сходятся в среднем, причем справедливы оценки (5.38) и

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq 2 \|P_n\|_{\infty \rightarrow 2} \cdot E_n^T(y)_\infty \cdot \max_k |1 + c_k(h)|^{-1}. \quad (5.47)$$

Равномерную сходимость метода устанавливает следующая

Теорема 5.6. Пусть правая часть $y \in C_{2\pi}$ и операторы $P_n \in \mathcal{P}_n^{(j)}$ ($j = 1, 2$) таковы, что $\|y - P_n y\|_\infty \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда в условиях каждой из теорем 5.4 и 5.5 приближенные решения сходятся к точному решению равномерно, причем справедливы оценки

$$|1 + c_0(|h|)|^{-1} \leq \{\|x^* - x_n^*\|_\infty / \|y - P_n y\|_\infty\} \leq \|K^{-1}\|_\infty, \quad (5.48)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leq 2 \|P_n\|_\infty \|K^{-1}\|_\infty E_n^T(y)_\infty. \quad (5.49)$$

Если, кроме того, слабо сингулярное ядро $h(s)$ таково, что оператор $H : L_2 \rightarrow C_{2\pi}$ ограничен, то справедлива равномерная оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leq (1 + \|K^{-1}\|_2 \|H\|_{2 \rightarrow \infty}) \cdot \|y - P_n y\|_\infty. \quad (5.50)$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 5.4. С учетом очевидных соотношений

$$\|K\|_\infty \leq 1 + \|H\|_\infty \leq 1 + c_0(|h|)$$

из (5.44) по аналогии с (5.38) выводим неравенства (5.48). Из (5.48), в свою очередь, легко выводится оценка (5.49). Пусть теперь H – ограниченный оператор из L_2 в $C_{2\pi}$. Тогда из тождества $x^* - x_n^* \equiv y - P_n y - H(x^* - x_n^*)$ находим

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leq \|y - P_n y\|_\infty + \|H\|_{2 \rightarrow \infty} \cdot \|x^* - x_n^*\|_2.$$

Отсюда и из правой части неравенств (5.45) получаем оценку

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leq \|y - P_n y\|_\infty + \|H\|_{2 \rightarrow \infty} \cdot \|K^{-1}\|_2 \cdot \|y - P_n y\|_2,$$

откуда, в свою очередь, следует оценка (5.50).

5.7. О невязках приближенных методов. Более сильные оценки, чем приведенные выше, имеют место для невязок исследованных выше приближенных методов. Для иллюстрации приведем лишь два результата.

Теорема 5.7. *В условиях теоремы 1.12 методы коллокации и механических квадратур и в условиях следствия 2 теоремы 5.1 общий проекционный метод решения слабо с.и.у. (1.1) сходятся в том смысле, что для невязок $r_n(s) = y(s) - K(x_n^*; s)$ этих методов справедливы оценки*

$$\|r_n^{(k)}(s)\|_2 = O(n^{-r-\alpha-1+k}), \quad r + \alpha + 1 > k, \quad k + 1 \in \mathbb{N}. \quad (5.51)$$

Доказательство приведем лишь в условиях следствия 2 теоремы 5.1, где для общего проекционного метода при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ доказано, что $\|x^* - x_n^*\|_2 = O(n^{-r-\alpha})$. Тогда можно показать, что функция

$$\varphi_n(s) \equiv S(x_n^*; s) \equiv y(s) - R(x_n^*; s) \in W^{r+1}H^\alpha \quad (5.52)$$

равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$. Тогда, как известно, существует полином $Q_n(x) \in \mathbb{H}_n^T$ такой, что для $k + 1 \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$\|\varphi_n^{(k)}(s) - Q_n^{(k)}(s)\|_2 \leq a n^{-r-1-\alpha+k}, \quad r + 1 + \alpha > k, \quad (5.53)$$

где a – положительная постоянная, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$.

Для невязки проекционного метода решения с.и.у. (0.1) при $P_n \in \mathcal{P}_n$ справедливы тождества

$$r_n = y - Kx_n^* = Sx_n^* - P_n Sx_n^* = (E - P_n)(\varphi_n - Q_n). \quad (5.54)$$

Поэтому

$$\frac{d^k r_n(s)}{ds^k} = \frac{d^k [\varphi_n(s) - Q_n(s)]}{ds^k} - \frac{d^k}{ds^k} P_n[(\varphi_n - Q_n); s]. \quad (5.55)$$

Используя неравенство Бернштейна в L_2 и оценку (5.53) при $k = 0$, последовательно находим

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{d^k}{ds^k} P_n \{(\varphi_n - Q_n); s\} \right\|_2 \leq n^k \|P_n(\varphi_n - Q_n)\|_2 \leq \\ & \leq n^k \|P_n\|_2 \|\varphi_n - Q_n\|_2 = O(n^k) \cdot O(n^{-r-1-\alpha}) = O(n^{-r-1-\alpha+k}). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Из соотношений (5.53) – (5.56) следует требуемая оценка (5.51) для общего проекционного метода (5.2) – (5.5) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$.

Аналогично теореме 5.7, но используя элементы теории приближений в пространствах $C_{2\pi}$ и H^β (см., напр., [48, 51, 75], а также [12, 13, 18, 25]), доказывается следующая

Теорема 5.8. *В условиях теоремы 1.14 м.м.к. решения слабо с.и.у. (0.1) сходится в том смысле, что для его невязки $r_n(s)$ справедливы оценки*

$$\|r_n^{(k)}(s)\|_\beta = O(n^{-r-1-\alpha+k+\beta} \ln n), \quad (5.57)$$

где $r + 1 + \alpha > k + \beta$, $k + 1 \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta \leq 1$, $H^0 \equiv C_{2\pi}$.

5.8. Заключительные замечания.

Замечание 5.5. Условия теорем о м.к. и м.м.к могут быть несколько ослаблены за счет соответствующих результатов глав 1 и 2 книги [35] об аппроксимативных свойствах интерполяционных операторов Лагранже.

Замечание 5.6. Завершая эту главу, отметим, что в ней, как правило, была использована пара пространств L_2, W_2^1 (с весами или без них – в зависимости от ситуации). Однако аналогичные результаты (без существенных изменений как в доказательствах, так и в формулировках) могут быть получены и для пары пространств $L_{r,p}, W_{r,q}^1$ (при любых $r \in (1, \infty)$) с весами $p(s) \equiv q(s) \equiv 1$, $-\infty < s < +\infty$, для периодических уравнений и $p(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$, $q(t) = (1 - t^2)^{1/2}$, $-1 < t < 1$, для неперидических уравнений. Кроме того, в случае проекционных методов решения слабо с.и.у. первого рода вместо интегральных операторов Фредгольма везде можно брать произвольные линейные операторы T , вполне непрерывные из L_2 в W_2^1 (из $L_{2p}[-1, 1]$ в $W_{2q}^1[-1, 1]$) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ и вполне непрерывные из L_2 в $C_{2\pi}^1$ (из $L_{2p}[-1, 1]$ в $C^1[-1, 1]$) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$.

ГЛАВА II

СПЛАЙНОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I-РОДА

Данная глава посвящена сплайн-методам решения слабосингулярных интегральных уравнений (с.и.у. ¹⁾) первого рода вида

$$F\varphi \equiv \int_{-1}^{+1} h(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (0.1)$$

$$Gx \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s-\sigma)x(\sigma) d\sigma = y(s), \quad -\infty < s < \infty, \quad (0.2)$$

и некоторых их обобщений; здесь $\varphi(t)$ и $x(s)$ – искомые функции, $f(t) \in C[-1, 1]$, $h(t) \in L_1[0, 2]$ и $y(s) \in C_{2\pi}$, $g(s) \in L_1[0, 2\pi]$ – данные функции, причем $h(t)$ и $g(s)$ являются четными, а $y(s)$, $g(s)$ и $x(s)$ предполагаются 2π -периодическими. Основное внимание будет уделено теоретическому обоснованию сплайн-методов в смысле гл. 14 [55] и гл. 1 [25].

Следует отметить, что метод сплайн-коллокации в частных случаях задания ядер уравнений (0.1) и (0.2), а именно, при

$$h(t) = -\ln |t|, \quad h(t) = |t|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (0.3)$$

и

$$g(s) = -\ln \left| \sin \frac{s}{2} \right|, \quad g(s) = \left| \sin \frac{s}{2} \right|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (0.4)$$

рассматривался ранее в ряде работ (обзор соответствующих результатов имеется в гл. 4 [34]); ниже нам понадобится также ядро

$$g(s) = \left| \operatorname{ctg} \frac{s}{2} \right|^{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (0.5)$$

§1. Непериодические уравнения

1.1. Схема метода сплайн-коллокации нулевого порядка.

В этом параграфе рассматриваются сплайн-методы решения уравнения (0.1). Сначала приведем вычислительную схему метода сплайн-коллокации нулевого порядка.

¹⁾ В этой главе используются введенные выше обозначения и сокращения.

На сегменте $[-1, 1]$ введем две системы узлов

$$t_k = t_{k,n} = -1 + \frac{2k}{n}, \quad k = \overline{0, n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

$$\bar{t}_k = \bar{t}_{k,n} = -1 + \frac{2k-1}{n}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

и обозначим через $\psi_k = \psi_{k,n}(t) \in M[-1, 1]$ характеристические функции интервалов $(t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, n}$, непрерывные справа, а функцию $\psi_1(t)$ будем считать также непрерывной слева; здесь и далее $M[-1, 1]$ – пространство определенных на $[-1, 1]$ ограниченных функций с обычной *sup*-нормой.

Приближенное решение уравнения (0.1) будем искать в виде сплайна нулевого порядка

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k(t), \quad (1.3)$$

неизвестные коэффициенты α_k которого будем определять из условий

$$F(\varphi_n; \bar{t}_j) = f(\bar{t}_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.4)$$

Эти условия эквивалентны СЛАУ вида

$$\sum_{k=1}^n a_{j-k} \alpha_k = f_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad f_j = f(\bar{t}_j), \quad a_{j-k} = F(\psi_k; \bar{t}_j). \quad (1.5)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} a_{j-k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} h(\bar{t}_j - \tau) d\tau = \int_{\frac{k-j}{n} - \frac{1}{2n}}^{\frac{k-j}{n} + \frac{1}{2n}} h(\tau) d\tau = \\ &= \int_{\bar{t}_{k-j}}^{\bar{t}_{k-j+1}} h(\tau) d\tau = \int_{\bar{t}_{j-k}}^{\bar{t}_{j-k+1}} h(\tau) d\tau = a_{k-j}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Поэтому матрица $\mathcal{A}_n \equiv [a_{j-k}]_{j=1, n}^{k=1, n}$ системы (1.5) является симметричной и теплицевой, что значительно облегчает исследование рассматриваемого метода. Однако следует отметить, что только что приведенная вычислительная схема в общем случае, по-видимому, не обоснована; в ряде частных случаев в работе [79] предложены интересные результаты о свойствах матрицы \mathcal{A}_n (см. также [83, 85]).

1.2. Некоторые общие результаты. В общем случае уравнения (0.1) предполагаем (в конкретных случаях выполнение этого предположения должно быть доказано), что матрица \mathcal{A}_n является невырожденной хотя бы при $n \geq n_0$. Тогда, очевидно, имеем

$$0 < \|\mathcal{A}_n^{-1}\|_i \equiv \theta_{n,i} < \infty \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.7)$$

где $\theta_{n,i}$ означает i -ю норму матрицы \mathcal{A}_n^{-1} , согласованную с i -й нормой n -мерного вектора. Здесь и далее будем пользоваться следующими нормами векторов:

$$\begin{aligned} \|\sigma\|_1 &= \max_{1 \leq k \leq n} |\sigma_k|, & \|\sigma\|_2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\sigma_k|, \\ \|\sigma\|_3 &= \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\sigma_k|^2 \right)^{1/2}, & \sigma &= (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \\ & & \|\sigma\|_2 &\leq \|\sigma\|_3 \leq \|\sigma\|_1. \end{aligned}$$

Из условия (1.7) следует, что хотя бы при $n \geq n_0$ определяется приближенное решение

$$\varphi_n^*(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^* \psi_k(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (1.3^*)$$

где $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$ – решение СЛАУ (1.5). Докажем теоремы о его сходимости к точному решению $\varphi^*(t)$ и установим оценки погрешности в зависимости от свойств элементов уравнения (0.1).

Введем вектор погрешности $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ с компонентами $\varepsilon_k = \varphi^*(\bar{t}_k) - \varphi_n^*(\bar{t}_k)$, и через $\omega(\varphi; \delta) = \omega(\varphi; \delta)_C = \omega(\varphi; \delta)_\infty$ будем обозначать, как и выше, модуль непрерывности функции $\varphi \in C[-1, 1]$ с шагом $\delta \in (0, 2]$.

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия: а) $\int_0^2 |h(\tau)| d\tau \equiv a < \infty$; б) хотя бы при $n \geq n_0$ матрица \mathcal{A}_n невырожденная; в) уравнение (0.1) имеет такое решение $\varphi^* \in C[-1, 1]$, что при $n \rightarrow \infty$

$$\theta_{n,i} \omega(\varphi^*; 1/n)_C = o(1), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.8)$$

Тогда приближенные решения (1.3*) сходятся в следующем смысле:

$$\|\varepsilon\|_i \leq a \theta_{n,i} \omega(\varphi^*; 1/n)_C = o(1), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.9)$$

Доказательство. Введем оператор $S_n = S_n^0 : C[-1, 1] \rightarrow M[-1, 1]$ по формуле

$$S_n \varphi = S_n^0(\varphi; t) = \sum_{k=1}^n \varphi(\bar{t}_k) \psi_k(t), \quad \varphi \in C[-1, 1]. \quad (1.10)$$

Поскольку $F(\varphi^*; \bar{t}_j) = f(\bar{t}_j) = F(\varphi_n^*; \bar{t}_j)$, $j = \overline{1, n}$, то справедливо тождество

$$F(\varphi_n^* - S_n \varphi^*; \bar{t}_j) = F(\varphi^* - S_n \varphi^*; \bar{t}_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.11)$$

В силу (1.4) – (1.6) это тождество можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^n a_{j-k} [\varphi_n^*(\bar{t}_k) - \varphi^*(\bar{t}_k)] = F(\varphi^* - S_n \varphi^*; \bar{t}_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.12)$$

Запишем (1.12) в векторном виде

$$\mathcal{A}_n \varepsilon = r, \quad (1.12')$$

где ε и r суть n -мерные вектора с координатами соответственно ε_k и $r_k = -F(\varphi^* - S_n \varphi^*; \bar{t}_k)$, $k = \overline{1, n}$. Тогда с учетом условия б) теоремы имеем

$$\varepsilon = \mathcal{A}_n^{-1} r, \quad \|\varepsilon\|_i \leq \theta_{n,i} \|r\|_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.13)$$

Ясно, что для вектора $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|r\|_i &\leq \|r\|_1 = \max_{1 \leq k \leq n} |F(\varphi^* - S_n \varphi^*; \bar{t}_k)| \leq \|F(\varphi^* - S_n \varphi^*)\|_C \leq \\ &\leq \|F\|_{M \rightarrow C} \cdot \|\varphi^* - S_n \varphi^*\|_M, \quad i = 2, 3. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Легко показать, что в силу условия а) теоремы имеем

$$\|F\|_{M \rightarrow C} = \|F\|_{C \rightarrow C} = \max_{-1 \leq t \leq 1} \int_{-1}^{+1} |h(\tau - t)| d\tau = \int_0^2 |h(\tau)| d\tau \equiv a < \infty. \quad (1.15)$$

Из (1.13) – (1.15) находим оценки

$$\|\varepsilon\|_i \leq a \theta_{n,i} \|\varphi^* - S_n \varphi^*\|_M, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.16)$$

Очевидно, что для любой $\varphi \in C[-1, 1]$

$$\|\varphi - S_n \varphi\|_M = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\varphi(t) - \varphi(\bar{t}_i)| \leq \omega(\varphi; 1/n)_C. \quad (1.17)$$

Из (1.16), (1.17) получаем оценку (1.9), а из нее с учетом условия (1.8) следует утверждение теоремы.

Положим здесь $X(1) = M[-1, 1]$, $X(2) = L_1[-1, 1]$, $X(3) = L_2[-1, 1]$ с нормами соответственно

$$\|\varphi\|_M = \sup_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi(t)| \equiv \|\varphi\|_\infty, \quad \varphi \in X(1),$$

$$\|\varphi\|_{L_1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |\varphi(t)| dt \equiv \|\varphi\|_1, \quad \varphi \in X(2),$$

$$\|\varphi\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \equiv \|\varphi\|_2, \quad \varphi \in X(3).$$

Теорема 1.2. В условиях теоремы 1.1 приближенные решения (1.3*) сходятся соответственно равномерно (при $i = 1$) в среднем (при $i = 2$) и в среднем квадратичном (при $i = 3$) со скоростями соответственно

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{X(i)} = O \{ \theta_{n,i} \omega(\varphi^*; 1/n)_C \} = o(1), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.18)$$

Доказательство. В силу (1.10), (1.1), (1.2), (1.17) справедливы неравенства

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{X(i)} \leq \|\varphi^* - S_n \varphi^*\|_{X(i)} + \|S_n[\varphi^* - \varphi_n^*]\|_{X(i)}, \quad (1.19)$$

$$\|\varphi^* - S_n \varphi^*\|_{X(i)} \leq \|\varphi^* - S_n \varphi^*\|_{X(1)} \leq \omega(\varphi^*; 1/n)_C, \quad i = 2, 3. \quad (1.20)$$

Функции $\varphi \in C[-1, 1]$ поставим в соответствие n -мерный вектор $\vec{\varphi} = (\varphi(\bar{t}_1), \dots, \varphi(\bar{t}_n))$. Поскольку $S_n(\varphi; t) = \varphi(\bar{t}_k) \equiv \varphi_k$ для любой точки $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, n}$, то для любой функции $\varphi \in C[-1, 1]$ легко находим

$$\|S_n(\varphi; t)\|_{X(1)} = \max_{1 \leq k \leq n} |\varphi_k| = \|\vec{\varphi}\|_1 \leq \|\varphi\|_\infty; \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \|S_n(\varphi; t)\|_{X(2)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |S_n(\varphi; t)| dt \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |\varphi_k| \int_{-1}^{+1} \psi_k(t) dt = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\varphi_k| = \|\vec{\varphi}\|_2 \leq \|\vec{\varphi}\|_3 \leq \|\vec{\varphi}\|_1 \leq \|\varphi\|_\infty; \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \|S_n(\varphi; t)\|_{X(3)} &= \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |S_n(\varphi; t)|^2 dt \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_k \varphi_j \int_{-1}^{+1} \psi_k(t) \psi_j(t) dt \right)^{1/2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi_k^2(t) dt \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2 \right)^{1/2} = \\
&= \|\vec{\varphi}\|_3 \leq \|\vec{\varphi}\|_1 \leq \|\varphi\|_\infty.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Из соотношений (1.19) – (1.23) с учетом аппроксимативных свойств сплайна $S_n\varphi^*$ находим

$$\begin{aligned}
\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{X(i)} &\leq \|\varphi^* - S_n\varphi^*\|_{X(i)} + \|\vec{\varphi}^* - \vec{\varphi}_n^*\|_i \leq \\
&\leq \omega(\varphi^*; 1/n)_\infty + \|\varepsilon\|_i, \quad i = \overline{1, 3},
\end{aligned} \tag{1.24}$$

где вектор $\varepsilon = \vec{\varphi}^* - \vec{\varphi}_n^*$ определен выше. Очевидно, что из формул (1.24) и (1.9) следует требуемое утверждение.

Теорему 1.2 несколько дополняет следующая

Теорема 1.3. Пусть выполнены условия: а) $F : L_2[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$ – ограниченный оператор; б) существует \mathcal{A}_n^{-1} ($n \geq n_0$) и $\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_3 = \theta_{n,3} < \infty$; в) уравнение (1.1) разрешимо в L_2 хотя бы при данной правой части $f(t) \in C[-1, 1]$ и его решение $\varphi^*(t) \in L_2[-1, 1]$ удовлетворяет условию

$$\theta_{n,3} \omega(\varphi^*; 1/n)_2 = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \tag{1.25}$$

Тогда приближенные решения $\varphi_n^*(t)$ сходятся в $L_2[-1, 1]$ со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = O\{\theta_{n,3} \omega(\varphi^*; 1/n)_2\}, \tag{1.26}$$

где $\omega(\varphi^*; \delta)_2$ – модуль непрерывности функции $\varphi^*(t)$ с шагом $\delta \in (0, 2]$ в пространстве $L_2[-1, 1]$.

Доказательство. Пусть $L_{2,n}$ – линейная оболочка, натянутая на элементы $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Ясно, что $L_{2,n} \subset L_2$ и уравнения (1.1) и (1.5) эквивалентны операторным уравнениям соответственно

$$F\varphi = f \quad (\varphi, f \in L_2), \quad F_n\varphi_n \equiv S_n F\varphi_n = S_n f \quad (\varphi_n, S_n f \in L_{2,n}). \tag{1.27}$$

Для этих уравнений в силу теоремы 6 гл. I [25] и условия б) теоремы справедливо тождество

$$\varphi^* - \varphi_n^* = (E - F_n^{-1} S_n F) (\varphi^* - \varphi_n^0), \quad n \geq n_0, \tag{1.28}$$

где φ_n^0 – произвольный элемент из $L_{2,n}$. Положим

$$\varphi_n^0(t) = \frac{n}{2} \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi^*(t) dt. \tag{1.29}$$

Тогда, как известно (см., напр., [57]),

$$\|\varphi^* - \varphi_n^0\|_2 \leq \omega(\varphi^*; 2/n)_2 \leq 2\omega(\varphi^*; 1/n)_2. \quad (1.30)$$

Из (1.28) – (1.30) следует оценка

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 \leq 2\omega(\varphi^*; 1/n)_2 \cdot (1 + \|F_n^{-1}\|_2 \cdot \|S_n F\|_2), \quad (1.31)$$

где $F_n^{-1} : L_{2,n} \longrightarrow L_{2,n} \subset L_2$, $S_n F : L_2 \longrightarrow L_{2,n} \subset L_2$.

В силу (1.23) и условия а) теоремы для любого $\varphi \in L_2$ имеем

$$\|S_n F \varphi\|_{L_2} \leq \|F \varphi\|_C \leq \|F\|_{L_2 \rightarrow C} \cdot \|\varphi\|_{L_2} \equiv a' \|\varphi\|_{L_2}. \quad (1.32)$$

Возьмем сплайн $\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(t) \in L_{2,n}$ и образуем вектор $\vec{\varphi}_n = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ с компонентами $a_k = \varphi_n(\bar{t}_k)$, $k = \overline{1, n}$; наоборот, вектору $\vec{\varphi}_n = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие сплайн $\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(t) \in L_{2,n}$. Тогда в силу (1.23) имеем

$$\|\varphi_n\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |\varphi_n(t)|^2 dt \right\}^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} = \|\vec{\varphi}_n\|_3, \quad (1.33)$$

и поэтому пространства $L_{2,n}$ и \mathbb{R}^n являются изоморфными и изометричными. Отсюда и из (1.3) – (1.6), (1.27) находим

$$\|F_n \varphi_n\|_2 = \|\mathcal{A}_n \vec{\varphi}_n\|_3 \quad (\varphi_n \in L_{2,n}, \vec{\varphi}_n \in \mathbb{R}^n). \quad (1.34)$$

Из (1.34), (1.33) следует, что операторы $F_n : L_{2,n} \longrightarrow L_{2,n}$ и матрицы $\mathcal{A}_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ обратимы (или нет) одновременно и

$$\|F_n\|_2 = \|\mathcal{A}_n\|_3; \quad \|F_n^{-1}\|_2 = \|\mathcal{A}_n^{-1}\|_3 \equiv \theta_{n,3} < \infty. \quad (1.35)$$

Теперь из (1.31), (1.32), (1.35) следует требуемое утверждение:

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 \leq 2(1 + a' \theta_{n,3}) \omega(\varphi^*; 1/n)_2. \quad (1.26')$$

Замечание 1.1. Если F – ограниченный оператор в C или из L в C , то результат, аналогичный теореме 1.3, можно получить также в пространствах $C[-1, 1]$ и $L[-1, 1]$; при этом существенную роль играют аналоги соотношений (1.34), (1.35) для пар пространств $M[-1, 1]$ и m_n ; $L_1[-1, 1]$ и l_1^n . А тогда теорема 1.1 может быть получена также только что указанным способом, т.е. с помощью общей теории приближенных методов анализа.

1.3. Приложения к конкретным уравнениям. Ясно, что для применимости теорем 1.1 – 1.3 необходимо знать некоторые структурные свойства решения $\varphi^*(t)$ уравнения (0.1) и свойства матрицы \mathcal{A}_n .

Отметим, что свойства $\varphi^*(t)$ для конкретных слабосингулярных разностных ядер $h(t-\tau)$ можно установить с помощью соответствующих результатов работ [9, 45, 66, 72]. А нужные нам свойства матрицы \mathcal{A}_n с учетом ее симметричности и теплицевости в ряде случаев легко вывести из известных результатов В.А. Цецохо (см., напр., [78-81]). Приведем два из таких результатов в следующей лемме.

Лемма 1.1. а) Если $h(t, \tau) = |t - \tau|^{-\gamma}$, где $0 < \gamma = \text{const} < 1$, то

$$\theta_{n,3} = \|\mathcal{A}_n^{-1}\|_3 = O(n^{1-\gamma}); \quad (1.36)$$

б) если же $h(t - \tau) = \ln |t - \tau|$, то

$$\theta_{n,3} = \|\mathcal{A}_n^{-1}\|_3 = O(n). \quad (1.37)$$

Из теорем 1.1 – 1.3 и леммы 1.1 в случае ядер (0.3) следует

Теорема 1.4. В случае ядер (0.3) СЛАУ (1.5) имеет единственное решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$. При этом справедливы утверждения:

а) Если решение уравнения (0.1) с ядром $h(\tau) = |\tau|^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, удовлетворяет условию $\varphi^* \in H^\alpha[-1, 1]$, $0 < \alpha \leq 1$, то при $\alpha + \gamma > 1$ приближенное решение (1.3*) сходится к точному решению $\varphi^*(t)$ со скоростью

$$\max(\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2, \|\bar{\varphi}^* - \bar{\varphi}_n^*\|_3) = H(\varphi^*; \alpha) \cdot O(n^{1-\alpha-\gamma}); \quad (1.38)$$

если же $\varphi^* \in H_2^\alpha$, а $\gamma < 1/2$, то и со скоростью

$$\max(\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2, \|\bar{\varphi}^* - \bar{\varphi}_n^*\|_3) = H(\varphi^*; \alpha)_2 \cdot O(n^{1-\alpha-\gamma}). \quad (1.39)$$

б) Если решение уравнения (0.1) с ядром $h(\tau) = \ln |\tau|$ удовлетворяет условию $\varphi^* \in H_2^\alpha[-1, 1]$, $0 < \alpha \leq 1$, то справедлива оценка ¹⁾

$$\max(\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2, \|\bar{\varphi}^* - \bar{\varphi}_n^*\|_3) = H(\varphi^*; \alpha)_2 \cdot O(n^{1-\alpha}), \quad (1.40)$$

где $H(\varphi; \alpha)$ и $H(\psi; \alpha)_2$ – наименьшие постоянные условий Гёльдера функций $\varphi \in H^\alpha$ и $\psi \in F_2^\alpha$ в пространствах соответственно $H^\alpha = \text{Lip } \alpha$ и $H_2^\alpha = \text{Lip}(\alpha, 2)$ ($0 < \alpha \leq 1$).

Замечание 1.2. Приведенные выше результаты справедливы лишь в случае, если точное решение с.и.у. (0.1) удовлетворяет условию $\varphi^* \in L_2[-1, 1]$. Если же решение $\varphi^* \notin L_2[-1, 1]$, то согласно теории с.и.у. (0.1) его, как правило, можно представить в виде

$$\varphi^*(t) = \psi^*(t) (1 - t^2)^{-1/2}, \quad (1.41)$$

¹⁾ Здесь, как и выше, $\bar{\varphi}^* - \bar{\varphi}_n^*$ есть n -мерный вектор с координатами $\varphi^*(\bar{t}_k) - \varphi_n^*(\bar{t}_k) = \varphi^*(\bar{t}_k) - \alpha_k^*$, $k = \overline{1, n}$.

где $\psi^* \in L_2[-1, 1]$ – новая искомая функция, не обращающаяся в нуль в точках $t = \pm 1$. В этом случае аналоги приведенных выше результатов можно получить, выбирая в качестве основного пространства X пространство $L_p[-1, 1]$ с показателем $p \in (1, 2)$; однако в этом случае проще всего свести с.и.у. (0.1), как это указано в §3 гл. I, к частному случаю с.и.у. (0.2) относительно новой искомой функции $x(\sigma) = \psi(\cos \sigma)$ и пользоваться результатами следующих параграфов.

§2. Периодические уравнения

2.1. Сплайн–методы коллокации и подобластей нулевого порядка. Рассмотрим слабо с.и.у. I-рода (0.2), записанное в виде

$$Gx \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(|s - \sigma|)x(\sigma) d\sigma = y(s), \quad -\infty < s < +\infty, \quad (2.1)$$

где $y(s) \in C_{2\pi}$, $g(s) \in L_1[0, 2\pi]$ – известные функции, а $x(s)$ – искомая функция, которая разыскивается в пространстве 2π -периодических функций $L_2[0, 2\pi]$ с обычной нормой $\|x\| = \|x\|_2$.

Сразу отметим, что для уравнения (2.1) справедливы результаты, вполне аналогичные теоремам 1.1 – 1.4. В частности, для ядер (0.4), (0.5) имеет место утверждение, аналогичное лемме 1.1 и теореме 1.4. Здесь узлы сплайна и узлы коллокации определяются формулами соответственно

$$s_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n}; \quad \bar{s}_j = \frac{2j-1}{n}\pi, \quad j = \overline{1, n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

а функции $\psi_k(s)$ вводятся как и выше. Однако наличие дополнительной информации, т.е. периодичность функций $g(\sigma)$ и $y(s)$, позволяет получить и дополнительные результаты. Например, для ядра $g(\sigma) = -\ln|\sin(\sigma/2)|$ элементы матрицы $\mathcal{A}_n = [a_{j-k}]_{j=1, n}^{k=1, n}$ в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_{j-k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{(j-k-\frac{1}{2})\delta}^{(j-k+\frac{1}{2})\delta} g(|\sigma|) d\sigma = \int_{(k-j-\frac{1}{2})\delta}^{(k-j+\frac{1}{2})\delta} g(|\sigma|) d\sigma = a_{k-j} = \\ &= \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin l(j-k+\frac{1}{2})\delta + \sin l(k-j+\frac{1}{2})\delta}{l^2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\delta = 2\pi/n$. Эта формула позволяет легко доказать, что матрица \mathcal{A}_n является невырожденной при всех $n \geq 2$ и для третьей нормы

обратной к ней матрицы справедлива оценка

$$\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_3 = O(n); \quad (2.4)$$

для остальных ядер из (0.4), (0.5) аналогично доказывается, что

$$\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_3 = O(n^{1-\gamma}), \quad 0 < \gamma < 1. \quad (2.5)$$

Заметим, что неравенства (2.4) и (2.5) хорошо согласуются с оценками соответственно (1.37) и (1.36) для непериодического случая. Поэтому для уравнения (2.1) метод сплайн–коллокации нулевого порядка приводит к результатам, вполне аналогичным теоремам 1.1 – 1.4. Однако здесь на подробных формулировках останавливаться не будем, а рассмотрим, хотя бы вкратце, метод сплайн–подобластей нулевого порядка.

Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать в виде сплайна

$$x_n(s) = \sum_{k=1}^n \beta_k \psi_k(s), \quad -\infty < s < \infty, \quad (2.6)$$

где $\psi_k(s)$ суть 2π –периодические характеристические функции интервалов $(s_{k-1}, s_k]$. Неизвестные коэффициенты будем определять из условий

$$\int_{\Delta_j} G(x_n; s) ds = \int_{\Delta_j} y(s) ds, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Delta_j = [s_{j-1}, s_j], \quad (2.7)$$

где узлы s_j определены в (2.2). Эти условия эквивалентны СЛАУ

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{j-k} \beta_k = y_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.8)$$

где

$$y_j = \int_{\Delta_j} y(s) ds, \quad \alpha_{j-k} = \int_{\Delta_j} G(\psi_k; s) ds, \quad \Delta_j = [s_{j-1}, s_j]. \quad (2.9)$$

С учетом свойств функции $g(\sigma)$ легко показать, что

$$\alpha_{j-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_j} ds \int_{\Delta_k} g(|s - \sigma|) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_{k-j}} ds \int_s^{s+\delta} g(|\sigma|) d\sigma = \alpha_{k-j}. \quad (2.10)$$

Таким образом, матрица СЛАУ (2.8) является симметричной и теплоцевой, а это значительно облегчает исследование метода сплайн–подобластей. Для иллюстрации приведем следующие результаты.

Теорема 2.1. Пусть ядро $g(\sigma) \in L_1[0, 2\pi]$ таково, что его косинус-коэффициенты Фурье неотрицательны и уравнение (2.1) имеет решение $x^*(s) \in L_2[0, 2\pi]$ хотя бы при данной правой части $y(s) \in L_2[0, 2\pi]$. Тогда решение уравнения (2.1) единственно и для любых $n \in \mathbb{N}$ СЛАУ (2.8), (2.9) имеет единственное решение $\beta_1^*, \dots, \beta_n^*$ при любых правых частях.

Доказательство. Уравнение (2.1) будем рассматривать как операторное уравнение вида

$$Gx = y \quad (x, y \in L_2[0, 2\pi]), \quad (2.1')$$

где G – симметричный оператор. Для любой $x \in L_2$, как и в разделе 1.1 гл. I, имеем

$$(Gx, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 c_k(g),$$

где $c_k(x)$ и $c_k(g)$ – комплексные коэффициенты Фурье функций $x(s)$ и $g(s)$. В условиях теоремы легко видеть, что

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\sigma) e^{-ik\sigma} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(\sigma) \cos k\sigma d\sigma \geq 0 \quad (2.11)$$

для любых $k = 0, \pm 1, \dots$. Поэтому оператор $G : L_2 \rightarrow L_2$ является положительным. Отсюда заключаем, что уравнение (2.1) имеет единственное решение при данной правой части $y \in L_2$. Пусть $X_n \subset L_2[0, 2\pi]$ есть подпространство всех 2π -периодических сплайнов нулевого порядка с узлами $s_k, k = \overline{0, n}$, из (2.2). Поскольку $\dim X_n = n < \infty$, то в силу сказанного оператор G на X_n будет положительно определенным:

$$(Gx_n, x_n) \geq \gamma_n^2 (x_n, x_n), \quad x_n \in X_n, \quad (2.12)$$

где $\gamma_n^2 = \text{const} > 0$ и не зависит от $x_n \in X_n$, но, вообще говоря, зависит от n .

Обозначим через $\bar{S}_n : L_2 \rightarrow X_n$ оператор, определяемый по формуле

$$\bar{S}_n(x; s) = \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^n \psi_k(s) \int_{s_{k-1}}^{s_k} x(\sigma) d\sigma, \quad s_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad x \in L_2. \quad (2.13)$$

Тогда СЛАУ (2.8), (2.9) эквивалентна операторному уравнению

$$G_n x_n \equiv \bar{S}_n G x_n = \bar{S}_n y \quad (x_n, \bar{S}_n y \in X_n). \quad (2.8')$$

Легко показать, что \bar{S}_n является оператором ортогонального проектирования на подпространство $X_n \subset L_2$. Поэтому для любого $x_n \in X_n$

с учетом (2.12), (2.13) последовательно находим

$$\begin{aligned} (G_n x_n, x_n) &= (\bar{S}_n G x_n, x_n) = (G x_n, \bar{S}_n^* x_n) = \\ &= (G x_n, \bar{S}_n x_n) = (G x_n, x_n) \geq \gamma_n^2 \|x_n\|_2^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где \bar{S}_n^* – сопряженный с \bar{S}_n оператор. Отсюда для любого $x_n \in X_n$ получаем неравенство

$$\|G_n x_n\|_2 \geq \gamma_n^2 \|x_n\|_2. \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что оператор $G_n : X_n \rightarrow X_n \subset L_2$ имеет левый линейный обратный G_{nl}^{-1} и $\|G_{nl}^{-1}\| \leq \gamma_n^{-2}$ ($n \in \mathbb{N}$). Так как $G_n : X_n \rightarrow X_n$ с $\dim X_n = n < \infty$, то существует также правый линейный обратный G_{nr}^{-1} и $G_{nr}^{-1} = G_{nl}^{-1} = G_n^{-1}$, причем

$$\|G_n^{-1}\|_2 \leq \gamma_n^{-2} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2.16)$$

Эти соотношения приводят к справедливости теоремы 2.1.

Замечание 2.1. Следует отметить, что $\gamma_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что хорошо согласуется с неограниченностью оператора G^{-1} в L_2 и тем легко доказываемым фактом, что $G_n = \bar{S}_n G : L_2 \rightarrow L_2$ сходится (по крайней мере, сильно) к оператору $G : L_2 \rightarrow L_2$; более того, поскольку $\bar{S}_n \rightarrow E$ сильно в L_2 , а оператор G во многих случаях (напр., для ядер (0.4), (0.5)) является вполне непрерывным, то в указанных случаях $G_n \rightarrow G$ равномерно в L_2 , т.е. $\|G_n - G\|_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2.2. Если в условиях теоремы 2.1 решение $x^* \in L_2[0, 2\pi]$ уравнения (2.1) таково, что

$$\omega(x^*; 1/n)_2 = o(\gamma_n^2), \quad (2.17)$$

то приближенные решения $x_n^*(s) = G_n^{-1} \bar{S}_n y = \sum_{k=1}^n \beta_k^* \psi_k(s)$ сходятся в среднем со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\{\gamma_n^{-2} \omega(x^*; 1/n)_2\}. \quad (2.18)$$

Доказательство. В силу (2.16) для уравнений (2.1') и (2.8') из теоремы 6 гл. I [25] следует оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq (1 + \|G_n^{-1} \bar{S}_n G\|_2) \|x^* - \bar{S}_n x^*\|_2. \quad (2.19)$$

Поскольку

$$\|G_n^{-1} \bar{S}_n G\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \|G_n^{-1}\|_{X_n \rightarrow X_n} \cdot \|\bar{S}_n\|_{L_2 \rightarrow L_2} \cdot \|G\|_{L_2 \rightarrow L_2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

то в силу (2.19) имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq (1 + \gamma_n^{-2} \|G\|_2) \|x^* - \bar{S}_n x^*\|_2.$$

Отсюда и из аналога неравенств (1.30) в периодическом случае находим

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq (1 + \gamma_n^{-2} \|G\|_2) \omega(x^*; 2\pi/n)_2. \quad (2.20)$$

Из (2.20) и (2.17) следует требуемое утверждение:

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\|_2 &\leq (1 + 2\pi) (1 + \gamma_n^{-2} \|G\|_2) \omega(x^*; 1/n)_2 = \\ &= O\{\gamma_n^{-2} \omega(x^*; 1/n)_2\} = o(1). \end{aligned} \quad (2.18')$$

Теперь применим метод сплайн-подобластей к полному уравнению вида

$$Ax \equiv Gx + Tx = y \quad (x, y \in L_2), \quad (2.21)$$

где оператор G определен в (2.1), а

$$Tx \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma, \quad h(s, \sigma) \in L_2[0, 2\pi]^2. \quad (2.22)$$

Приближенное решение уравнения (2.21) ищем в виде сплайна (2.6), коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ которого определяем из условий

$$\int_{\Delta_j} A(x_n; s) ds = \int_{\Delta_j} y(s) ds, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Delta_j = [s_{j-1}, s_j], \quad (2.23)$$

где узлы определены в (2.2). Ясно, что условия (2.23) эквивалентны, с одной стороны, СЛАУ порядка n относительно $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, с другой стороны, они эквивалентны операторному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv \bar{S}_n G x_n + \bar{S}_n T x_n = \bar{S}_n y \quad (x_n, \bar{S}_n y \in X_n), \quad (2.24)$$

заданному в подпространстве $X_n = \mathcal{L}(\{\psi_k(s)\}_1^n) \subset L_2$, где оператор \bar{S}_n определен в (2.13).

Для схемы (2.21) – (2.24) справедлива следующая

Теорема 2.3. Пусть функции $g(s) \in L_1[0, 2\pi]$, $y(s) \in L_2[0, 2\pi]$, $h(s, \sigma) \in L_2[0, 2\pi]^2$ таковы, что выполнены условия теоремы 2.1 и

$$\text{а) } G^{-1}y \in L_2, \quad \sigma_n \equiv \omega(G^{-1}y; 1/n)_2 = o(\gamma_n^2),$$

$$\text{б) } \rho_n \equiv \sup\{\omega(G^{-1}Tu; 1/n)_2 : u \in L_2, \|u\|_2 \leq 1\} = o(\gamma_n^2),$$

где γ_n^2 определено в теореме 2.1. Если уравнение (2.21) при $y = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение, то при всех n , начиная с

некоторого, операторы $A_n : X_n \longrightarrow X_n$ линейно обратимы. Приближенные решения $x_n^* = A_n^{-1} \bar{S}_n y$ сходятся к точному решению x^* уравнения (2.21) со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\{(\rho_n + \sigma_n) \gamma_n^{-2}\} = o(1). \quad (2.25)$$

Доказательство. Уравнения (2.21) и (2.24) эквивалентны операторным уравнениям соответственно

$$Kx \equiv x + G^{-1}Tx = G^{-1}y \quad (x, G^{-1}y \in L_2), \quad (2.21')$$

$$K_n x_n \equiv x_n + G_n^{-1} \bar{S}_n T x_n = G_n^{-1} \bar{S}_n y \quad (x_n, G_n^{-1} \bar{S}_n y \in X_n). \quad (2.24')$$

В силу условия б) оператор $G^{-1}T : L_2 \longrightarrow L_2$ является вполне непрерывным. Поэтому существует непрерывный обратный $K^{-1} : L_2 \longrightarrow L_2$. В силу теоремы 2.2 и условия а) имеем

$$\|G^{-1}y - G_n^{-1} \bar{S}_n y\| = O(\gamma_n^{-2} \omega(G^{-1}y; 1/n)_2) = O(\gamma_n^{-2} \sigma_n) = o(1). \quad (2.26)$$

Для любого $x_n \in X_n$ ($x_n \neq 0$) благодаря теореме 2.2 и условию б) находим

$$\begin{aligned} \|Kx_n - K_n x_n\|_2 &= \|G^{-1}Tx_n - G_n^{-1} \bar{S}_n T x_n\|_2 \leq \\ &\leq \|x_n\|_2 \|G^{-1}Tu - G_n^{-1} \bar{S}_n Tu\|_2 \leq \|x_n\|_2 \cdot O\{\gamma_n^{-2} \omega(G^{-1}Tu; 1/n)_2\} \leq \\ &\leq \|x_n\|_2 \cdot O(\rho_n / \gamma_n^2), \quad u = x_n / \|x_n\|_2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|K - K_n\|_{x_n \rightarrow X} = O(\rho_n / \gamma_n^2) = o(1). \quad (2.27)$$

Применив к уравнениям (2.21') и (2.24') теорему 7 гл. I [25], в силу (2.26) и (2.27) получим требуемое утверждение.

Для применения теорем 2.2 и 2.3 необходимо знать хотя бы оценку величины γ_n^2 . Такие оценки могут быть установлены либо самостоятельно, либо с помощью аналогичных оценок для метода сплайн-коллокации. Например, справедлива

Лемма 2.1. Если $g(\sigma) = \ln|\sin(\sigma/2)|$, то $\gamma_n^{-2} = O(n)$; если же $g(\sigma) = |\sin(\sigma/2)|^{-\gamma}$ или $g(\sigma) = |\operatorname{ctg}(\sigma/2)|^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, то $\gamma_n^{-2} = O(n^{1-\gamma})$, причем в обоих случаях СЛАУ (2.8), (2.9) имеет единственное решение при любых $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 2.2. а) Лемма 2.1 позволяет конкретизировать теоремы 2.1 – 2.3 в случае конкретных ядер; б) результаты по методу сплайн-подобластей нулевого порядка, аналогичные теоремам 2.1 – 2.3 и лемме 2.1, можно получить также для уравнения (0.1).

2.2. Схема метода сплайн–коллокации первого порядка.

Для простоты выкладок этот метод будем рассматривать для нечетного числа узлов

$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1} = k\delta, \quad \delta = \frac{2\pi}{2n+1}, \quad k = \overline{-n, n}. \quad (2.28)$$

Обозначим через $\{\varphi_k(s)\}_{-n}^n$ систему 2π -периодических фундаментальных сплайнов первого порядка по системе узлов (2.28). Известно, что $\varphi_k(s) = \varphi_0(s - s_k)$, $\varphi_k(-s) = \varphi_k(s)$, $\varphi_k(s + 2\pi j) = \varphi_k(s)$, $k = \overline{-n, n}$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$, $\varphi_0(s) = \{1 - |s/\delta| \text{ при } s \in [-\delta, \delta]; 0 \text{ при } s \notin [-\delta, \delta]\}$.

Приближенное решение уравнения (0.2) будем искать в виде сплайна

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \varphi_k(s), \quad -\infty < s < \infty, \quad (2.29)$$

коэффициенты которого определяются из условий $G(x_n; s_j) = y(s_j)$, $j = \overline{-n, n}$. Эти условия эквивалентны СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^n b_{j-k} \alpha_k = y_j, \quad j = \overline{-n, n}, \quad y_j = y(s_j), \quad b_{j-k} = G(\varphi_k; s_j). \quad (2.30)$$

С учетом четности и периодичности функций $g(\sigma)$ и $\varphi_k(s)$ последовательно находим

$$\begin{aligned} b_{j-k} &= G(\varphi_k; s_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} g(|s_j - \sigma|) \varphi_0(\sigma - s_k) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} g(|s_j - s_k - \sigma|) \varphi_0(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} g(|s_j - s_k - \sigma|) (1 - |\sigma/\delta|) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \{g(|(j-k)\delta + \sigma|) + g(|(k-j)\delta + \sigma|)\} (1 - \sigma/\delta) d\sigma = b_{k-j}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Поэтому матрица $\mathcal{B}_n = [b_{j-k}]_{j=\overline{-n, n}}^{k=\overline{-n, n}}$ СЛАУ (2.30) является симметричной и теплоцевой. Предположим, что она является невырожденной хотя бы при $n \geq n_0$. Тогда в любой норме, согласованной с нормой $(2n+1)$ -мерного пространства векторов, имеем

$$0 < \|\mathcal{B}_n^{-1}\|_i \equiv \tau_{n,i} < \infty \quad (n \geq n_0; i = 1, 2, 3). \quad (2.32)$$

А тогда СЛАУ (2.30) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}_{-n}^n$ и приближенные решения $x_n^*(s)$ (т.е. (2.29) при $\alpha_k = \alpha_k^*$) существуют при всех $n \geq n_0$. В следующем пункте устанавливаются условия его сходимости и оценки погрешности в общем случае.

2.3. Некоторые общие результаты. Здесь нам понадобятся оператор сплайн-интерполяции первого порядка

$$S_n f = S_n^1(f; s) = \sum_{k=-n}^n f(s_k) \varphi_k(s), \quad f \in C_{2\pi}, \quad (2.33)$$

и вектор погрешности $\varepsilon = \vec{x}^* - \vec{x}_n^*$ с компонентами $\varepsilon_k = x^*(s_k) - x_n^*(s_k) = x^*(s_k) - \alpha_k^*$, $k = \overline{-n, n}$.

Теорема 2.4. Пусть $b = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |g(\sigma)| d\sigma < \infty$ и выполнены условия (2.32). Если уравнение (2.1) имеет такое решение $x^* \in C_{2\pi}$, что при $n \rightarrow \infty$

$$\tau_{n,i} \|x^* - S_n x^*\|_\infty = o(1), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.34)$$

то приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся к точному решению $x^*(s)$ со скоростью

$$\|\varepsilon\|_i = O\{\tau_{n,i} \|x^* - S_n x^*\|_\infty\}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.35)$$

Доказательство. Поскольку $G(x^*; s_j) = G(x_n^*; s_j)$, $j = \overline{-n, n}$, то справедливы соотношения

$$G(x_n^* - S_n x^*; s_j) = G(x^* - S_n x^*; s_j), \quad j = \overline{-n, n}. \quad (2.36)$$

Ясно, что

$$G(x_n^* - S_n x^*; s_j) = \sum_{k=-n}^n [\alpha_k^* - x^*(s_k)] G(\varphi_k; s_j), \quad j = \overline{-n, n}.$$

Отсюда и из (2.31) следует, что (2.36) можно представить в виде

$$\sum_{k=-n}^n b_{j-k} \varepsilon_k = r_j, \quad j = \overline{-n, n}, \quad (2.37)$$

где $r_j = -G(x^* - S_n x^*; s_j)$, или же в векторном виде

$$\mathcal{B}_n \varepsilon = r, \quad \varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{-n}^n, \quad r = \{r_j\}_{-n}^n. \quad (2.37')$$

Тогда в силу (2.32) имеем

$$\|\varepsilon\|_i \leq \|\mathcal{B}_n^{-1}\|_i \|r\|_i = \tau_{n,i} \|r\|_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.38)$$

С учетом периодичности функции $g(\sigma) \in L_1[0, 2\pi]$ легко показать, что для нормы оператора G в $C_{2\pi}$ имеем $\|G\|_\infty = b < \infty$. Поэтому для вектора r в любой из трех используемых здесь норм имеем

$$\|r\|_1 = \max_{-n \leq j \leq n} |r_j| = \max_{-n \leq j \leq n} |G(x^* - S_n x^*; s_j)| \leq$$

$$\leq \|G(x^* - S_n x^*)\|_\infty \leq b \|x^* - S_n x^*\|_\infty; \quad (2.39)$$

$$\|r\|_2 = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n |r_j| \leq \|r\|_1 \leq b \|x^* - S_n x^*\|_\infty; \quad (2.40)$$

$$\|r\|_3 = \left\{ \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n |r_j|^2 \right\}^{1/2} \leq \|r\|_1 \leq b \|x^* - S_n x^*\|_\infty. \quad (2.41)$$

Из неравенств (2.38) – (2.41) находим оценку

$$\|\varepsilon\|_i \leq b \tau_{n,i} \|x^* - S_n x^*\|_\infty, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.42)$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Теорема 2.5. *Если уравнения (2.1) и (2.30) имеют решения $x^*(s) \in C_{2\pi}$ и $\vec{x}_n^* = \{\alpha_k^*\}_{-n}^n \in \mathbb{R}^{2n+1}$, то для погрешности приближенного решения $x_n^*(s)$ в пространствах $C_{2\pi}$ и $L_2[-\pi, \pi]$ справедливы оценки соответственно*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leq \|x^* - S_n x^*\|_\infty + \|\varepsilon\|_1, \quad (2.43)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq \|x^* - S_n x^*\|_2 + \|\varepsilon\|_3, \quad (2.44)$$

где $\varepsilon = \vec{x}^* - \vec{x}_n^*$ – вектор погрешности.

Следствие 1. *Если выполнено условие (2.34) при $i = 1$, то приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся равномерно со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O \{ \tau_{n,1} \|x^* - S_n x^*\|_\infty \}. \quad (2.45)$$

Следствие 2. *Если G – ограниченный оператор из L_2 в $C_{2\pi}$ и выполнено условие (2.34) при $i = 3$, то приближенные решения сходятся в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O \{ \tau_{n,3} \|x^* - S_n x^*\|_2 \}. \quad (2.46)$$

Доказательство. В условиях теоремы справедливы неравенства

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \|x^* - S_n x^*\|_X + \|S_n[x^* - x_n^*]\|_X, \quad (2.47)$$

где $X = C_{2\pi}$ или L_2 , а оператор $S_n = S_n^1$ определен в (2.33). Известно (см., напр., в [11]), что

$$\|S_n(f; s)\|_C \leq \max_{-n \leq k \leq n} |f(s_k)|, \quad f \in C_{2\pi}. \quad (2.48)$$

Очевидно, что из (2.47) при $X = C_{2\pi}$ и (2.48) при $f(s) = x^*(s) - x_n^*(s)$ следует оценка (2.43). Оценка (2.44) следует из (2.47) при $X = L_2$ и из

следующей леммы (снова при $f(s) = x^*(s) - x_n^*(s)$), имеющей также определенный самостоятельный интерес:

Лемма 2.2. Для любой функции $f(s) \in C_{2\pi}$ справедливы неравенства

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \|\vec{f}\|_3 \leq \|S_n f\|_2 \leq \|\vec{f}\|_3, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.49)$$

где $\vec{f} = (f(s_{-n}), \dots, f(s_0), \dots, f(s_n))$, а

$$\|\vec{f}\|_3 = \left\{ \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n |f(s_k)|^2 \right\}^{1/2}, \quad \|f\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(s)|^2 ds \right\}^{1/2}.$$

Для доказательства (2.49) заметим, что в силу формулы (2.33) для любой $f \in C_{2\pi}$ имеем

$$\begin{aligned} 2\pi \|S_n(f; s)\|_2^2 &= \sum_{k=-n}^n \sum_{j=-n}^n f_k f_j \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(s) \varphi_j(s) ds = \\ &= \sum_{k=-n}^n f_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k^2(s) ds + \sum_{k \neq j} f_k f_j \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(s) \varphi_j(s) ds, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где $f_l = f(s_l)$, $l = \overline{-n, n}$. Используя периодичность и финитность функций $\varphi_l(s)$, последовательно находим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k^2(s) ds &= \int_{s_{k-1}}^{s_k} \left(\frac{s - s_{k-1}}{\delta} \right)^2 ds + \int_{s_k}^{s_{k+1}} \left(\frac{s_{k+1} - s}{\delta} \right)^2 ds = \frac{2}{3} \delta; \\ \sum_{k \neq j} f_k f_j \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(s) \varphi_j(s) ds &= \sum_{k=-n}^n [f_{k-1} f_k \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{k-1}(s) \varphi_k(s) ds + \\ &+ f_k f_{k+1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds] = \sum_{k=-n}^n [f_{k-1} f_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \varphi_{k-1}(s) \varphi_k(s) ds + \\ &+ f_k f_{k+1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds] = \frac{\delta}{2} \sum_{k=-n}^n (f_{k-1} f_k + f_k f_{k+1}). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Из (2.50) – (2.51) следует формула

$$\|S_n(f; s)\|_2^2 = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n f_k \cdot \frac{f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}}{6} \equiv \sigma. \quad (2.52)$$

Для вектора $\vec{f} = \{f_k\}_{-n}^n$, $f_k = f(s_k)$, в силу (2.52) и неравенства Буняковского с учетом соотношений $f_{k+N} = f_k$, $N = 2n+1$, находим

оценки сверху

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n f_k^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n f_k (f_{k-1} + f_{k+1}) \leq \\
&\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n f_k^2 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n f_k^2 \right\}^{1/2} \times \\
&\times \left\{ \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n (f_{k-1} + f_{k+1})^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{2}{3} \|\vec{f}\|_3^2 + \frac{1}{6} \|\vec{f}\|_3 \cdot 2 \|\vec{f}\|_3 = \|\vec{f}\|_3^2.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

С другой стороны, из (2.52) аналогично находим оценки снизу

$$\begin{aligned}
\sigma &\geq \frac{2}{3} \|\vec{f}\|_3^2 - \frac{1}{6} \left| \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n f_k (f_{k-1} + f_{k+1}) \right| \geq \\
&\geq \frac{2}{3} \|\vec{f}\|_3^2 - \frac{1}{3} \|\vec{f}\|_3^2 = \frac{1}{3} \|\vec{f}\|_3^2.
\end{aligned} \tag{2.53'}$$

Из (2.52), (2.53) и (3.53') следуют неравенства (3.49).

Из (2.44) и (2.34), (2.35) при $i = 1$ получаем утверждение следствия 1. Докажем следствие 2. В силу (2.37) и (2.38) последовательно находим

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon\|_3 &\leq \|\mathcal{B}_n^{-1}\|_3 \|r\|_3 \leq \tau_{n,3} \max_{-n \leq j \leq n} |G(x^* - S_n x^*; s_j)| \leq \\
&\leq \tau_{n,3} \|G(x^* - S_n x^*)\|_\infty \leq \tau_{n,3} \|G\|_{2 \rightarrow \infty} \cdot \|x^* - S_n x^*\|_2 = \\
&= O\{\tau_{n,3} \|x^* - S_n x^*\|_2\}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Поэтому из (2.47) при $X = L_2$ и (2.49) следует оценка (2.46), откуда с учетом (2.34) при $i = 3$ следует утверждение следствия 2.

Теорема 2.5 и ее следствия доказаны полностью.

2.4. Приложения к конкретным уравнениям. Сначала рассмотрим два частных случая:

$$Gx \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right|^{-\gamma} x(\sigma) d\sigma = y(s), \quad 0 < \gamma < 1, \quad y \in C_{2\pi}, \tag{2.55}$$

$$Gx \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right| \cdot x(\sigma) d\sigma = y(s), \quad y \in C_{2\pi}. \tag{2.56}$$

Для этих уравнений весьма содержательные результаты по методу сплайн-коллокации первого порядка получены в работах В.А. Цецохо и В.В. Воронина (см., напр., [10, 78]). Из их результатов для уравнений (2.55) и (2.56) можно вывести следующие полезные неравенства соответственно

$$\|\mathcal{B}_n^{-1}\|_3 \leq d_1 n^{1-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (2.55')$$

$$\|\mathcal{B}_n^{-1}\|_3 \leq d_2 n, \quad (2.56')$$

где d_i ($i = \overline{1, 7}$) – положительные постоянные, не зависящие от n . Отсюда и из полученных выше результатов следует

Теорема 2.6. *Справедливы утверждения:*

а) Если решение уравнения (2.55) таково, что $\|x^* - S_n x^*\|_\infty = o(n^{\gamma-1})$, то приближенные решения сходятся со скоростью

$$\max\{\|x^* - x_n^*\|_2, \|\vec{x}^* - \vec{x}_n^*\|_3\} = O\{n^{1-\gamma} \|x^* - S_n x^*\|_\infty\}; \quad (2.57)$$

если же $x^*(s) \in W^r H^\alpha$ ($r = 0$ или 1 ; $0 < \alpha \leq 1$), то при $r + \alpha + \gamma > 1$

$$\max\{\|x^* - x_n^*\|_2, \|\vec{x}^* - \vec{x}_n^*\|_3\} = H(x^{*(r)}; \alpha) \cdot O(n^{1-r-\alpha-\gamma}). \quad (2.57')$$

б) Если решение уравнения (2.56) таково, что $\|x^* - S_n x^*\|_\infty = o(n^{-1})$, то приближенные решения сходятся со скоростью

$$\max\{\|x^* - x_n^*\|_2, \|\vec{x}^* - \vec{x}_n^*\|_3\} = O\{n \|x^* - S_n x^*\|_\infty\}; \quad (2.58)$$

если же $x^*(s) \in W^1 H^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), то

$$\max\{\|x^* - x_n^*\|_2, \|\vec{x}^* - \vec{x}_n^*\|_3\} = H(x^{*'}; \alpha) \cdot O(n^{-\alpha}), \quad (2.58')$$

где $\vec{x}^* - \vec{x}_n^* = \{x^*(s_k) - x_n^*(s_k)\}_{-n}^n$.

Теперь рассмотрим применение метода сплайн-коллокации первого порядка к полному уравнению вида

$$Ax \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right| \cdot x(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma = y(s), \quad (2.59)$$

где y и h – известные непрерывные 2π -периодические функции по каждой из переменных. Его приближенное решение будем искать в виде сплайна (2.29), который будем определять из условий $A(x_n^*; s_j) = y(s_j)$, $j = \overline{-n, n}$. Эти условия эквивалентны, очевидно, СЛАУ порядка $2n + 1$ относительно коэффициентов α_k , $k = \overline{-n, n}$:

$$\sum_{k=-n}^n b_{j-k} \alpha_k + \sum_{k=-n}^n h_{jk} \alpha_k = y_j, \quad j = \overline{-n, n}; \quad (2.60)$$

здесь

$$y_j = y(s_j), \quad h_{jk} = \frac{1}{2\pi} \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} h(s_j, \sigma) \varphi_k(\sigma) d\sigma = \frac{h(s_j, \xi_k)}{2n+1}, \quad (2.61)$$

где коэффициенты b_{j-k} определены в (3.30) и (3.31) при $g(\sigma) = -\ln|\sin(\sigma/2)|$, узлы s_j, s_k — в (3.28), а $\xi_k \in [s_{k-1}, s_{k+1}]$.

Теорема 2.7. Пусть $y(s) \in W^2H^\alpha$ и $h(s, \sigma) \in W^2H^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) по переменной s равномерно относительно σ . Если уравнение (2.59) однозначно разрешимо в L_2 при любой правой части из W_2^1 , то при всех n , начиная с некоторого, СЛАУ (2.60), (2.61) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}_n$. Приближенные решения $x_n^*(s)$ (т.е. (2.29) при $\alpha_k = \alpha_k^*$) сходятся в среднем к точному решению $x^*(s)$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.62)$$

Доказательство. В силу результатов §1 гл. I уравнение (2.59) можно записать в пространстве $X = L_2[-\pi, \pi]$ в виде эквивалентного операторного уравнения

$$Kx \equiv x + G^{-1}Tx = G^{-1}y \quad (x, G^{-1}y \in L_2), \quad (2.63)$$

где операторы $G^{-1} : W_2^1 \rightarrow L_2$ и $T : L_2 \rightarrow W_2^1$ определены в §1 гл. I и соответственно в (2.22). Ясно, что в условиях теоремы оператор $K : L_2 \rightarrow L_2$ непрерывно обратим.

Обозначим через $X_n = \mathcal{L}(\{\varphi_k\}_n)$ подпространство 2π -периодических сплайнов первого порядка с узлами (2.28). Очевидно, что $X_n \subset L_2$, а СЛАУ (2.60), (2.61) эквивалентна заданному в X_n операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv G_n x_n + S_n T x_n = S_n y \quad (x_n, S_n y \in X_n), \quad (2.64)$$

где $G_n x_n = S_n G x_n$, причем оператор $S_n = S_n^1$ определен в (2.33). В силу сказанного выше уравнение (2.64) эквивалентно операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n + G_n^{-1} S_n T x_n = G_n^{-1} S_n y \quad (x_n, G_n^{-1} S_n y \in X_n). \quad (2.65)$$

Поскольку $y \in W^2H^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), то в силу леммы 1.2 гл. I и известных теорем Привалова и Зигмунда о свойствах сопряженных функций (см., напр., [4, 66]) имеем

$$\frac{d}{ds} G^{-1}(y; s) = -2 \frac{d}{ds} I \left(\frac{dy(\sigma)}{d\sigma}; s \right) =$$

$$= -2I \left(\frac{d^2 y(\sigma)}{d\sigma^2}; s \right) \in \{H^\alpha \text{ при } \alpha < 1; Z \text{ при } \alpha = 1\},$$

где I и Z – использованные в §1 гл. I оператор Гильберта и соответственно класс функций Зигмунда. Поэтому

$$H \left(\frac{d}{ds} G^{-1} y; \alpha \right) = 2 H(Iy''); \alpha \leq d_3 H(y''); \alpha < 1;$$

$$Z \left(\frac{d}{ds} G^{-1} y \right) = 2 Z(Iy'') \leq d_4 Z(y'') \leq 2 d_4 F(y''); \alpha = 1,$$

где

$$Z(\varphi) = \sup_{\delta \neq 0} \frac{|\varphi(s + \sigma) - 2\varphi(s) + \varphi(s - \sigma)|}{\delta}, \quad \varphi \in Z.$$

Тогда с помощью известных аппроксимативных свойств оператора $S_n = S_n^1$ (см., напр., в [57]) имеем

$$\|G^{-1}y - S_n G^{-1}y\|_\infty = H(y''); \alpha \cdot O(n^{-1-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.66)$$

А тогда в силу пункта б) теоремы 2.6 имеем

$$\begin{aligned} r_n &\equiv \|G^{-1}y - G_n^{-1}S_n y\|_2 = O(n) \cdot \|G^{-1}y - S_n G^{-1}y\|_\infty = \\ &= H(y''); \alpha \cdot O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (2.67)$$

В условиях теоремы функция $T(x_n; s)$ удовлетворяет условиям

$$T(x_n; s) \in W^2 H^\alpha, \quad H(d^2 T x_n / ds^2; \alpha) \leq d_5 \|x_n\|_2.$$

Поэтому, полагая в (2.67) $y(s) = T(x_n; s)$, для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|G^{-1}T x_n - G_n^{-1}S_n T x_n\|_2 = H \left(\frac{d^2 T x_n}{ds^2}; \alpha \right) \cdot O \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) \leq \frac{d_6 \|x_n\|_2}{n^\alpha},$$

где d_5 и d_6 не зависят от $x_n \in X_n$. Отсюда получаем

$$l_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \rightarrow X} = \|G^{-1}T - G_n^{-1}S_n T\|_{X_n \rightarrow X} = O \left(\frac{1}{n^\alpha} \right), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.68)$$

Тогда на основании теоремы 7 гл. I [25] при всех n таких, что $q_n = \|K^{-1}\|_2 l_n \leq d_7 n^{-\alpha} < 1$, операторы $K_n : X_n \rightarrow X_n$ линейно обратимы (а следовательно, СЛАУ (2.60), (2.61) однозначно разрешима) и приближенные решения $x_n^* = K_n^{-1}G_n^{-1}S_n y = A_n^{-1}S_n y$ сходятся со скоростью $\|x^* - x_n^*\|_2 = O(r_n + l_n) = O(n^{-\alpha})$, $0 < \alpha \leq 1$. Таким образом, теорема 2.7 полностью доказана.

Замечание 2.3. Результаты по методу сплайн–коллокации первого порядка, аналогичные теоремам 2.4 – 2.7 и лемме 2.2, можно получить также для уравнения (0.1).

2.5. Метод сплайн–квадратур. Этот метод рассмотрим применительно к уравнению (2.59). Его приближенное решение будем искать в виде сплайна (2.29), коэффициенты $\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n$ которого будем определять из СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^n b_{j-k} \alpha_k + \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n h(s_j, s_k) \alpha_k = y(s_j), \quad j = \overline{-n, n}, \quad (2.69)$$

где b_{j-k} определены в (2.31) при $g(\sigma) = -\ln |\sin(\sigma/2)|$, а узлы – в (2.28).

Для вычислительной схемы метода квадратур (2.59), (2.29), (2.69) справедлива следующая

Теорема 2.8. Пусть в условиях теоремы 2.7 $\partial^i h(s, \sigma)/\partial s^i \in H^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$; $i = 0, 1, 2$) по переменной σ равномерно относительно s . Тогда СЛАУ (2.69) имеет единственное решение $\alpha_{-n}^*, \dots, \alpha_n^*$ хотя бы при достаточно больших n . Приближенные решения

$$\tilde{x}_n^*(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k^* \varphi_k(s), \quad -\infty < s < \infty, \quad (2.29^*)$$

сходятся к точному решению $x^*(s)$ в среднем со скоростью

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_2 = O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.70)$$

Доказательство. В обозначениях предыдущей теоремы СЛАУ (2.69) эквивалентна заданному в подпространстве $X_n \subset L_2$ операторному уравнению

$$\tilde{A}_n x_n \equiv G_n x_n + T_n x_n = S_n y \quad (x_n, S_n y \in X_n), \quad (2.71)$$

где

$$\mu_n = T_n x_n, \quad \mu_n(s) = \frac{S_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^\sigma [h(s, \sigma) x_n(\sigma)] d\sigma, \quad (2.72)$$

оператор $S_n = S_n^1$ определен в (2.33), а S_n^σ означает, что оператор S_n применяется по переменной σ . Как отмечено выше, при всех $n \geq n_0$ оператор $G_n : X_n \rightarrow X_n$ линейно обратим. Поэтому уравнение (2.71) эквивалентно операторному уравнению

$$\tilde{K}_n x_n \equiv x_n + G_n^{-1} T_n x_n = G_n^{-1} S_n y \quad (x_n, G_n^{-1} S_n y \in X_n). \quad (2.73)$$

Из (2.73) и (2.65) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$K_n x_n - \tilde{K}_n x_n = G_n^{-1} S_n \nu_n, \quad \nu_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [h x_n - S_n^\sigma(h x_n)] d\sigma. \quad (2.74)$$

Как показано при доказательстве теоремы 2.7, для любой $y \in W^2 H^\alpha$, ($0 < \alpha \leq 1$) справедлива оценка (2.67). Полагая в ней $y(s) = \nu_n(s)$, для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|G_n^{-1} S_n \nu_n\|_2 \leq \|G^{-1} \nu_n\|_2 + H(\nu_n''; \alpha) \cdot O(n^{-\alpha}). \quad (2.75)$$

Положим

$$\nu_n^{(i)}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [h_i x_n - S_n^\sigma(h_i x_n)] d\sigma, \quad h_i(s, \sigma) = \frac{\partial^i h(s, \sigma)}{\partial s^i}, \quad (2.76)$$

где $i = 0, 1, 2$, а $h_0 \equiv h$. В силу леммы 1.2 гл. I и (2.76) имеем

$$\begin{aligned} \|G^{-1} \nu_n\|_2 &\leq 2 \|\nu_n\|_{W_2^1} = 2 (\|\nu_n\|_2 + \|\nu_n'\|_2) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^1 \frac{1}{\pi} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} [h_i x_n - S_n^\sigma(h_i x_n)] d\sigma \right\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Отсюда и из леммы 2.2 с учетом соответствующих результатов [42] находим

$$\begin{aligned} \|G^{-1} \nu_n\|_2 &\leq \|x_n\|_2 \cdot O\{\omega_\sigma(h; 1/n)_\infty + \omega_\sigma(h_1; 1/n)_\infty\} = \\ &= \|x_n\|_2 \cdot O(n^{-\alpha}), \quad x_n \in X_n, \quad 0 < \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (2.78)$$

где $\omega_\sigma(\psi; \delta)_\infty$ – модуль непрерывности с шагом $\delta > 0$ функции $\psi(s, \sigma) \in C[-\pi, \pi]^2$ по переменной σ равномерно относительно s . Для $\nu_n''(s)$ аналогично получаем

$$\|\nu_n''(s)\|_\infty \leq \|x_n\|_2 \cdot O\{\omega_\sigma(h_2; 1/n)_\infty\} = \|x_n\|_2 \cdot O(n^{-\alpha}).$$

Отсюда по аналогии с соответствующим результатом гл. 3 [25] находим

$$H(\nu_n''; \alpha) = \|x_n\|_2 \cdot O(1), \quad x_n \in X_n. \quad (2.79)$$

Из формул (2.74) – (2.79) следует оценка

$$\|K_n x_n - \tilde{K}_n x_n\|_2 \leq \|x_n\|_2 \cdot O(n^{-\alpha}), \quad x_n \in X_n. \quad (2.80)$$

Поэтому в силу (2.68) имеем

$$\tilde{l}_n \equiv \|\tilde{K}_n - K\|_{X_n \rightarrow X} \leq l_n + \|K_n - \tilde{K}_n\|_{X_n \rightarrow X_n} = O(n^{-\alpha}). \quad (2.81)$$

Теперь с учетом (2.80), (2.81) и (2.67) из теоремы 7 гл. I [25] следует требуемое утверждение.

§3. О характере и скорости сходимости сплайн-методов

3.1. О равномерной сходимости сплайн-методов. Из сходимости в среднем, установленной выше для сплайн-методов, можно вывести также равномерную сходимость с определенной скоростью. Приведем некоторые из таких результатов.

Теорема 3.1. *Если в условиях пункта а) теоремы 1.4 точное решение $\varphi^* \in H^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), то при $\alpha + \gamma > 3/2$ приближенные решения $\varphi_n^*(t)$ метода сплайн-коллокации нулевого порядка сходятся со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_M = H(\varphi^*; \alpha) \cdot O(n^{-\alpha-\gamma+3/2}); \quad (3.1)$$

если же $\varphi^* \in F_2^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), а $\gamma < 1/2$, то и со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_M = H(\varphi^*; \alpha)_2 \cdot O(n^{-\alpha-\gamma+3/2}). \quad (3.2)$$

Доказательство. Сначала докажем оценку (3.2). Как показано в теореме 1.4, при $\alpha + \gamma > 1$ справедлива оценка

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = H(\varphi^*; \alpha)_2 \cdot O(n^{1-\alpha-\gamma}). \quad (3.3)$$

Разность $\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)$ представим в виде

$$\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_{2^k n}^*(t) - \varphi_{2^{k-1} n}^*(t)]. \quad (3.4)$$

Легко видеть, что для любого сплайна $u_n(t) \in X_n = \mathcal{L}(\{\psi_k\}_1^n)$ справедливо неравенство

$$\|u_n\|_{M[-1,1]} \leq \sqrt{n} \|u_n\|_{L_2[-1,1]}. \quad (3.5)$$

В самом деле, полагая $u_n(t) = \sum_{k=1}^n u_n(t_k) \psi_k(t)$ и учитывая соотношения $\psi_k^2(t) = \psi_k(t)$ и (1.23), для любой $t \in [-1, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq \left\{ \sum_{k=1}^n |u_n(t_k)|^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \right\}^{1/2} = \\ &= \sqrt{n} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_n(t_k)|^2 \right\}^{1/2} = \sqrt{n} \|u_n\|_{L_2[-1,1]}. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi_{2^k n}^*(t) - \varphi_{2^{k-1} n}^*(t) \in X_{2^k n}$, то с помощью (3.4), (3.5) получаем неравенства

$$\|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\|_M \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{2^k n}^*(t) - \varphi_{2^{k-1} n}^*(t)\|_M \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2^k n} \cdot \|\varphi_{2^k n}^* - \varphi_{2^{k-1} n}^*\|_2. \quad (3.6)$$

Так как в силу (3.3)

$$\begin{aligned} \|\varphi_{2^k n}^* - \varphi_{2^{k-1} n}^*\|_2 &\leq \|\varphi^* - \varphi_{2^k n}^*\|_2 + \|\varphi^* - \varphi_{2^{k-1} n}^*\|_2 \leq \\ &\leq H(\varphi^*; \alpha)_2 \cdot O\{(2^k n)^{1-\alpha-\gamma} + (2^{k-1} n)^{1-\alpha-\gamma}\} = \\ &= H(\varphi^*; \alpha)_2 \cdot 2^{(k-1)(1-\alpha-\gamma)} \cdot O(n^{1-\alpha-\gamma}), \end{aligned}$$

то из (3.6) следует оценка (3.2).

Оценка (3.1) может быть доказана совершенно аналогично. Однако здесь укажем другой способ доказательства, который понадобится также ниже. В рассматриваемом случае, как показано в теореме 1.4, справедливо неравенство

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = H(\varphi^*; \alpha) \cdot O(n^{-\alpha-\gamma+1}). \quad (3.7)$$

Здесь разность $\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)$, $t \in [-1, 1]$, представим в виде

$$\varphi^* - \varphi_n^* = (\varphi^* - S_n \varphi^*) + S_n(\varphi^* - \varphi_n^*), \quad (3.8)$$

где оператор $S_n = S_n^0$ определен в (1.10). Полагая $u_n = S_n(\varphi^* - \varphi_n^*)$, из (3.5) и (1.23) находим

$$\begin{aligned} \|S_n(\varphi^* - \varphi_n^*)\|_{M[-1,1]} &\leq \sqrt{n} \|S_n(\varphi^* - \varphi_n^*)\|_{L_2[-1,1]} \leq \\ &\leq \sqrt{n} \|\bar{\varphi}^* - \bar{\varphi}_n^*\|_3 = \sqrt{n} \|\varepsilon\|_3. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) и (1.38) последовательно находим требуемую оценку (3.1):

$$\begin{aligned} \|\varphi^* - \varphi_n^*\|_M &\leq \|\varphi^* - S_n \varphi^*\|_M + \sqrt{n} \|\varepsilon\|_3 \leq \\ &\leq H(\varphi^*; \alpha) n^{-\alpha} + \sqrt{n} H(\varphi^*; \alpha) \cdot O(n^{-\alpha-\gamma+1}) = \\ &= H(\varphi^*; \alpha) \cdot O(n^{-\alpha} + n^{-\alpha-\gamma+3/2}) = H(\varphi^*; \alpha) \cdot O(n^{-\alpha-\gamma+3/2}). \end{aligned}$$

Аналогичным образом может быть доказана также оценка (3.2).

Для метода сплайн-коллокации первого порядка справедливы следующие две теоремы.

Теорема 3.2. а) Если $r + \alpha + \gamma > 3/2$, то в условиях пункта а) теоремы 2.6 приближенные решения метода сплайн-коллокации первого порядка для уравнения (2.55) сходятся равномерно со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{\infty} = O(n^{-r-\alpha-\gamma+3/2}) \quad (r = 0, 1; 0 < \alpha \leq 1, 0 < \gamma < 1);$$

б) если $\alpha > 1/2$, то в условиях пункта б) теоремы 2.6 тот же метод для уравнения (2.56) сходится равномерно со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-\alpha+1/2}), \quad 1/2 < \alpha \leq 1.$$

Теорема 3.3. Если $\alpha > 1/2$, то в условиях теоремы 2.7 метод сплайн-коллокации и в условиях теоремы 2.8 метод сплайн-квадратур решения уравнения (2.59) сходятся равномерно со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-\alpha+1/2}), \quad 1/2 < \alpha \leq 1.$$

Теоремы 3.2 и 3.3 доказываются аналогично теореме 3.1.

3.2. О сходимости невязки сплайн-методов. Приведенные в §§1 и 2 результаты позволяют доказать сходимость невязки приближенного решения. Здесь особый интерес представляет тот случай, когда сходимости приближенных решений может и не быть даже в L_2 , а невязка сходится не только в среднем, но и равномерно. Приведем один из таких результатов.

Теорема 3.4. Если $\alpha > 1/2$, то в условиях пункта б) теоремы 1.4 невязка приближенного решения (1.3*) метода сплайн-коллокации нулевого порядка сходится равномерно со скоростью

$$\|f - H\varphi_n^*\|_\infty = O\{\omega(f; 1/n)_\infty + n^{-\alpha+1/2}\}, \quad 1/2 < \alpha \leq 1. \quad (3.10)$$

Доказательство. В силу (1.40) имеем

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = H(\varphi^*; \alpha)_2 \cdot O(n^{1-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Поэтому

$$\|\varphi_n^*\|_2 \leq \|\varphi^*\|_2 + H(\varphi^*; \alpha)_2 \cdot O(n^{1-\alpha}) = O(n^{1-\alpha}). \quad (3.11)$$

Поскольку $S_n F \varphi_n^* \equiv S_n f$, где $S_n = S_n^0$, то

$$\|f - F\varphi_n^*\|_C \leq \|f - S_n f\|_M + \|F\varphi_n^* - S_n F\varphi_n^*\|_M. \quad (3.12)$$

Нетрудно показать, что функция $F(\varphi_n^*; t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1/2$ и с постоянной $a_0 \|\varphi_n^*\|_2$, где a_0 — положительная постоянная, не зависящая от n и φ_n^* . Тогда из (3.12), (1.17) и (3.11) последовательно находим

$$\begin{aligned} \|f - F\varphi_n^*\|_\infty &\leq \omega(f; 1/n)_\infty + a_0 \|\varphi_n^*\|_2 / \sqrt{n} = \omega(f; 1/n)_\infty + \\ &+ (a_0 / \sqrt{n}) \cdot O(n^{1-\alpha}) = O\{\omega(f; 1/n)_\infty + n^{1/2-\alpha}\}, \quad 1/2 < \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

Теорема 3.5. Если уравнение (2.56) имеет решение $x^* \in C_{2\pi}$ при данной правой части $y \in C_{2\pi}$, то для погрешности в L_2 метода сплайн-коллокации I-порядка справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O(n \|x^* - S_n^1 x^*\|_2). \quad (3.13)$$

В то же время для невязки справедлива равномерная оценка

$$\|y - Gx_n^*\|_\infty = O\{\|y - S_n^1 y\|_\infty + n^{-1/2} \|x_n^*\|_2\}, \quad (3.14)$$

где $\|x_n^*\|_2 \leq \|x^*\|_2 + O(n \|x^* - S_n^1 x^*\|_2)$, а оператор S_n^1 определен в (2.33).

Следствие. Если $x^* \in W_2^1$ (для этого достаточно, чтобы $y \in W_2^2$), то

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O(1), \quad \|y - Gx_n^*\|_\infty = O(n^{-1/2}). \quad (3.15)$$

Доказательство. Используя способ доказательства теорем 2.5 и 2.4, последовательно находим

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\|_2 &\leq \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 + \|S_n^1[x^* - x_n^*]\|_2 \leq \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 + \\ &+ \|\varepsilon\|_3 \leq \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 + \|\mathcal{B}_n^{-1}\|_3 \|r\|_3 \leq \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 + \\ &+ \tau_{n,3} \|r\|_1 \leq \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 + \tau_{n,3} \|G(x^* - S_n^1 x^*)\|_\infty \leq \\ &\leq \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 \cdot (1 + \tau_{n,3} \|G\|_{2 \rightarrow \infty}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\|G\|_{2 \rightarrow \infty} \equiv \|G\|_{L_2 \rightarrow C} \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln^2 |\sin \sigma| d\sigma < \infty$. Из (3.16) и (2.56') следует оценка (3.13).

Для доказательства (3.14) заметим, что функция $Gx_n^* \in W_2^1$, а следовательно, $Gx_n^* \in H^{1/2}(b_0 \|x_n^*\|_2)$, где b_0 – положительная постоянная, не зависящая от n и x_n^* . Тогда с учетом аппроксимативных свойств оператора S_n^1 имеем

$$\begin{aligned} \|y - Gx_n^*\|_\infty &\leq \|y - S_n^1 y\|_\infty + \|Gx_n^* - S_n^1 Gx_n^*\|_\infty \leq \\ &\leq \|y - S_n^1 y\|_\infty + b_0 n^{-1/2} \|x_n^*\|_2, \end{aligned}$$

т.е. оценка (3.14) доказана.

Если $x^* \in W_2^1$, то легко показать, что $y \in W_2^2$ (и наоборот), а следовательно, $y \in W^1 H^{1/2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 &= O(n^{-1}), \quad \|y - S_n^1 y\|_\infty = O(n^{-3/2}), \\ \|x_n^*\|_2 &\leq \|x^*\|_2 + O(1) = O(1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.13), (3.14) получаем утверждения следствия.

§4. Некоторые обобщения

4.1. Неулучшаемые оценки погрешности метода сплайн-коллокации. Приведенные выше результаты позволяют получить неулучшаемые по порядку оценки погрешности для сплайн-методов решения уравнений (0.1), (0.2) и некоторых их обобщений. Исследования здесь основаны на доказательстве обратимости слева соответствующих аппроксимирующих операторов сплайн-методов для характеристических частей рассматриваемых уравнений и на последующем применении результатов общей теории приближенных методов и теории приближения сплайнами. Проиллюстрируем сказанное применительно к методу сплайн-коллокации первого порядка (2.29), (2.59) – (2.61).

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия: а) $y(s) \in W_2^1[-\pi, \pi]$, а ядро $h(s, \sigma)$ таково, что оператор $T : L_2 \rightarrow W_2^1$ вполне непрерывен; б) уравнение (4.59) имеет единственное решение $x^* \in L_2[-\pi, \pi]$ при любой правой части $y \in W_2^1[-\pi, \pi]$. Тогда при всех $n \geq n_0$ (n_0 определяется свойствами регулярного ядра $h(s, \sigma)$, в частности, $n_0 = 0$, если ядро $h(s, \sigma) = 0$ или же не зависит хотя бы от первой переменной) СЛАУ (2.60), (2.61) также имеет единственное решение α_{k-n}^{*n} . Приближенные решения $x_n^*(s)$ (т.е. (2.29) при $\alpha_k = \alpha_k^*$) сходятся к точному решению $x^*(s)$ в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \asymp E_n^1(x^*)_2, \quad (4.1)$$

где $E_n^1(x^*)_2 = \rho(x^*, X_n)_2$, $X_n = \{x_n\}$, а знак \asymp есть символ слабой эквивалентности.

Доказательство. Ввиду излишней громоздкости выкладок приведем в основном лишь схему доказательства.

Положим: $X = L_2[-\pi, \pi] \equiv L_2$ с обычной нормой $\|\cdot\|_2$ и $Y = W_2^1[-\pi, \pi] \equiv W_2^1$ с нормой $\|y\|_Y = \|y\|_\infty + \|y'\|_2$, эквивалентной введенной в гл. I, и

$$X_n = \mathcal{L}(\{\varphi_k\}_{-n}^n) \cap L_2, \quad Y_n = \mathcal{L}(\{\varphi_k\}_{-n}^n) \cap W_2^1,$$

где $\{\varphi_k\}_{-n}^n$ – фундаментальные сплайны первой степени для системы узлов (2.28). Тогда уравнение (2.59) и СЛАУ (2.60), (2.61) эквивалентны операторным уравнениям соответственно

$$Ax \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X, y \in Y), \quad (4.2)$$

$$A_n x_n \equiv G_n x_n + S_n^1 T x_n = S_n^1 y \quad (x_n \in X_n, S_n^1 y \in Y_n), \quad (4.3)$$

где $G_n = S_n^1 G$, а оператор S_n^1 определен в (2.33).

В силу условий теоремы оператор $A : L_2 \longrightarrow W_2^1$ непрерывно обратим. Докажем, что операторы $A_n : X_n \longrightarrow Y_n$ ($n \geq n_0$) также непрерывно обратимы, а обратные операторы ограничены по норме в совокупности ¹⁾ :

$$\|A_n^{-1}\| \leq e_1, \quad A_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n. \quad (4.4)$$

С этой целью нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 4.1. *Операторы $S_n^1 : Y \longrightarrow Y_n$ ограничены по норме в совокупности, точнее,*

$$\|S_n^1\| = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Следствие. *Для любой функции $y \in W_2^1$ сплайн $S_n^1 y \rightarrow y$, $n \rightarrow \infty$, в пространстве W_2^1 и*

$$\|y - S_n^1 y\|_Y \leq e_2 \rho(y, Y_n)_Y. \quad (4.6)$$

Лемма 4.2. *Операторы $G_n = S_n^1 G : X_n \longrightarrow Y_n$ непрерывно обратимы при любых $n \in \mathbb{N}$ и*

$$\|G_n^{-1}\| \leq e_3, \quad G_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n. \quad (4.7)$$

Лемма 4.3. *Операторы $G_n^{-1} S_n^1 : Y \longrightarrow X_n$ при $n \rightarrow \infty$ сильно сходятся к оператору $G^{-1} : Y \longrightarrow X$, причем для любой $y \in W_2^1$ имеем*

$$\|G^{-1} y - G_n^{-1} S_n^1 y\|_2 \leq e_4 E_n^1(G^{-1} y)_2. \quad (4.8)$$

Лемма 4.4. *Операторы $G_n^{-1} S_n^1 T : X \longrightarrow X$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к оператору $G^{-1} T : X \longrightarrow X$ равномерно, причем*

$$\|(G^{-1} - G_n^{-1} S_n^1) T\|_2 \leq \nu_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.9)$$

где величина ν_n определяется мерой компактности (в частности, сглаживающими свойствами) оператора $T : X \longrightarrow Y$.

Теперь с помощью лемм 4.1 – 4.4 для любого $x_n \in X_n$ последовательно находим (см. также [47, 33])

$$\begin{aligned} \|A_n x_n\|_Y &= \|G_n x_n + S_n^1 T x_n\|_Y \geq \|G_n^{-1}\|^{-1} \|G^{-1} A x_n - \\ &- (G^{-1} - G_n^{-1} S_n^1) T x_n\|_2 \geq e_3^{-1} [\|G^{-1} A x_n\|_2 - \|(G^{-1} - \\ &- G_n^{-1} S_n^1) T x_n\|_2] \geq e_3^{-1} \|A^{-1} G\|_2^{-1} \|x_n\|_2 (1 - \nu_n \|A^{-1} G\|_2) \geq \end{aligned}$$

¹⁾ Здесь e_k ($k = \overline{1, 8}$) – вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от n , об эффективности которых нетрудно судить по их происхождению.

$$\geq (e_3 \|A^{-1}\| \cdot \|G\|)^{-1} (1 - \nu_n \|A^{-1}\| \cdot \|G\|) \|x_n\|_2; \quad (4.10)$$

здесь операторы $G, A : X \rightarrow Y$; $G^{-1}, A^{-1} : Y \rightarrow X$; $A^{-1}G : X \rightarrow X$, а величина

$$q_n \equiv \nu_n \|A^{-1}G\|_2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

Поэтому существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ имеем $q_n \leq 1/2$. А тогда операторы $A_n : X_n \rightarrow Y_n$, как известно (см., напр., теорему 1 и ее следствие гл. I [25]), обратимы слева и

$$\|A_n^{-1}\| \leq e_3 \|A^{-1}G\|_2 (1 - q_n)^{-1} \leq 2e_3 \|A^{-1}G\|_2; \quad (4.4')$$

поскольку $\dim X_n = \dim Y_n < \infty$, то операторы $A_n : X_n \rightarrow Y_n$ обратимы также справа, а тогда из (4.4') следует неравенство (5.4) с $e_1 = 2e_3 \|A^{-1}G\|_2$.

Теперь, применив к уравнениям (4.2), (4.3) теорему 6 гл. I книги [25], получаем

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = \|A^{-1}y - A_n^{-1}S_n^1 y\|_2 \leq \|E - A_n^{-1}S_n^1 A\|_2 \cdot \|x^* - x_n\|_2, \quad (4.12)$$

где x_n – произвольный элемент из X_n . Выбирая его так, чтобы $\|x^* - x_n\|_2 = E_n^1(x^*)_2$ и пользуясь неравенствами (4.4'), (4.6), (4.12), последовательно находим

$$\begin{aligned} E_n^1(x^*)_2 &\leq \|x^* - x_n^*\|_2 \leq E_n^1(x^*)_2 \{1 + \|A_n^{-1}\|_{Y_n \rightarrow X_n} \cdot \\ &\cdot \|S_n^1\|_{Y \rightarrow Y_n} \cdot \|A\|_{X \rightarrow Y}\} \leq E_n^1(x^*)_2 (1 + e_1 e_5), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $e_5 = \|A\|_{X \rightarrow Y}$. Отсюда следует требуемое утверждение.

Из теоремы 4.1 легко выводятся следующие теоремы.

Теорема 4.2. *В условиях теоремы 4.1 невязка метода сплайн-коллокации (2.29), (2.59)–(2.61) сходится в пространствах W_2^1 и H^β ($0 < \beta \leq 1/2$, $H^0 \equiv C_{2\pi}$) со скоростями соответственно*

$$\|y - Ax_n^*\|_{W_2^1} = O\{E_n^1(x^*)_2\}, \quad \|y - Ax_n^*\|_{H^\beta} = O\{E_n^1(x^*)_2\}.$$

Теорема 4.3. *Если $x^* \in W^r H_2^\alpha$ ($r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$), то в условиях теоремы 4.1 метод сплайн-коллокации первого порядка сходится в том смысле, что*

$$\|y - Ax_n^*\|_{W_2^1} \asymp \|x^* - x_n^*\|_{L_2} = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha}) & \text{при } 0 < r + \alpha \leq 2, \\ O(n^{-2}) & \text{при } r + \alpha > 2; \end{cases}$$

если же $x^* \in W^r H^\alpha$ ($r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1$), то

$$\|x^* - x_n^*\|_C = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha} \ln n) & \text{при } 0 < r + \alpha \leq 2, \\ O(n^{-2} \ln n) & \text{при } r + \alpha > 2. \end{cases}$$

4.2. Метод сплайн-квадратур. Для метода сплайн-квадратур (2.29), (2.59), (2.69) при дополнительных условиях относительно регулярного ядра $h(s, \sigma)$ по переменной σ справедливы утверждения, аналогичные теоремам 4.1 – 4.3. Для иллюстрации приводятся следующие результаты.

Теорема 4.4. Пусть функции $y(s) \in W_2^1[-\pi, \pi]$ и $h(s, \sigma), h'_s(s, \sigma) \in C[-\pi, \pi]^2$. Если же уравнение (2.59) однозначно разрешимо в L_2 при любой правой части из W_2^1 , то при всех n , начиная с некоторого, СЛАУ (2.69) также однозначно разрешима. Приближенные решения $\tilde{x}_n^*(s)$ метода сплайн-квадратур сходятся к точному решению $x^*(s)$ в среднем со скоростью

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_2 = O\{E_n^1(x^*)_2 + \omega_\sigma(h; 1/n)_\infty + \omega_\sigma(h'_s; 1/n)_\infty\}. \quad (4.14)$$

Доказательство. СЛАУ (2.69) эквивалентна операторному уравнению

$$\tilde{A}_n x_n \equiv G_n x_n + \tilde{T}_n x_n = S_n^1 y \quad (x_n \in X_n, S_n^1 y \in Y_n), \quad (4.15)$$

где

$$\tilde{T}_n x_n \equiv \frac{S_n^1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n h(s, s_k) x_n(s_k), \quad x_n \in X_n \subset X. \quad (4.16)$$

Поскольку в силу (2.29), (2.59) и (2.61)

$$S_n^1 T x_n = \frac{S_n^1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n h(s, \xi_k) x_n(s_k), \quad x_n \in X_n, \quad (4.17)$$

где $s_{k-1} < \xi_k < s_{k+1}$, то из (4.3), (4.17) и (4.15), (4.16) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|A_n x_n - \tilde{A}_n x_n\|_Y = \left\| \frac{S_n^1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n [h(s, \xi_k) - h(s, s_k)] x_n(s_k) \right\|_Y.$$

Отсюда и из леммы 4.1 для любого $x_n \in X_n$ имеем

$$\|A_n x_n - \tilde{A}_n x_n\|_Y \leq \left\| \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n [h(s, \xi_k) - h(s, s_k)] x_n(s_k) \right\|_Y \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=0}^1 \frac{1}{2n+1} \left\| \sum_{k=-n}^n [h_i(s, \xi_k) - h_i(s, s_k)] x_n(s_k) \right\|_{\infty} \leq \\
&\leq \left[\sum_{i=0}^1 \omega_{\sigma} \left(h_i; \frac{2\pi}{2n+1} \right)_{\infty} \right] \cdot \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n |x_n(s_k)| \leq \\
&\leq (1+\pi) \sum_{i=0}^1 \omega_{\sigma} \left(h_i; \frac{1}{n} \right)_{\infty} \cdot \left\{ \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n |x_n(s_k)|^2 \right\}^{1/2}, \quad (4.18)
\end{aligned}$$

где $h_i(s, \sigma) = \partial^i h(s, \sigma) / \partial s^i$ ($i = 0, 1$). Из (4.18) и леммы 2.2 следует, что

$$\|A_n - \tilde{A}_n\|_{X_n \rightarrow Y_n} \leq (1+\pi) \sqrt{3} \{ \omega_{\sigma}(h; 1/n)_{\infty} + \omega_{\sigma}(h'_s; 1/n)_{\infty} \} \equiv \mu_n. \quad (4.19)$$

Поскольку $\mu_n \rightarrow 0$ монотонно при $n \rightarrow \infty$, а в силу теоремы 4.1 операторы $A_n : X_n \rightarrow Y_n$ ($n \geq n_0$) линейно обратимы, то из (4.4) и (4.19) следует, что при всех $n \geq n_1$ таких, что

$$r_n \equiv \|A_n^{-1}\| \mu_n < 1, \quad (4.20)$$

операторы $\tilde{A}_n : X_n \rightarrow Y_n$ также линейно обратимы и

$$\|\tilde{A}_n^{-1}\| \leq \|A_n^{-1}\| (1 - r_n)^{-1} \leq e_6, \quad (4.21)$$

$$\|A_n^{-1} - \tilde{A}_n^{-1}\|_{Y_n \rightarrow X_n} \leq e_7 \|A_n - \tilde{A}_n\|_{X_n \rightarrow Y_n} \leq e_7 \mu_n. \quad (4.22)$$

Поэтому СЛАУ (2.69) при всех $n \geq \max(n_0, n_1)$ однозначно разрешима и в силу (4.19) – (4.22) и леммы 4.1 имеем

$$\begin{aligned}
&\|x_n^* - \tilde{x}_n^*\|_2 = \|(A_n^{-1} - \tilde{A}_n^{-1}) S_n^1 y\|_2 \leq \\
&\leq \|A_n^{-1} - \tilde{A}_n^{-1}\|_{Y_n \rightarrow X_n} \cdot \|S_n^1 y\|_Y \leq e_7 \mu_n \|y\|_Y = e_8 \mu_n. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_2 = \|(A^{-1} - \tilde{A}_n^{-1} S_n^1) y\|_2 \leq \|x_n^* - \tilde{x}_n^*\|_2 + \|x^* - x_n^*\|_2,$$

где $x_n^*(s)$ – приближенное решение, построенное методом сплайн-коллокации, то из неравенств (4.1), (4.23) и (4.19) следует требуемая оценка (4.14).

Теорема 4.4 доказана. Из нее для метода сплайн-квадратур можно получить утверждения, аналогичные теоремам 4.2 и 4.3 для метода сплайн-коллокации; например, справедлива следующая

Теорема 4.5. Пусть выполнены условия: а) $y(s) \in W^{r+1} H_2^{\alpha}$ и $h(s, \sigma) \in W^{r+1} H_2^{\alpha}$ по переменной s , где $r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$;

б) функции $h_i(s, \sigma) \equiv \partial^i h(s, \sigma) / \partial s^i \in W^r H^\alpha$ по переменной σ , где $i = 0$ и $i = 1$; в) с.и.у. (3.59) однозначно разрешимо в L_2 при любой правой части из W_2^1 . Тогда приближенные решения $\tilde{x}_n^*(s)$ метода сплайн-квадратур и соответствующие невязки сходятся со скоростью

$$\begin{aligned} & \|x^* - \tilde{x}_n^*\|_{L_2} \asymp \|y - A\tilde{x}_n^*\|_{W_2^1} = \\ & = \{ O(n^{-r-\alpha}) \text{ при } 0 < r + \alpha \leq 2; O(n^{-2}) \text{ при } r + \alpha > 2 \}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Доказательство. В силу (4.19) и условия б) имеем при $r = 0$ и $r = 1$ соответственно

$$\mu_n \leq (1 + \pi) \sqrt{3} \{ H_\sigma(h; \alpha) + H_\sigma(h'_s; \alpha) \} n^{-\alpha}, \quad (4.25)$$

$$\mu_n \leq (1 + \pi) \sqrt{3} \{ \|h'_\sigma\|_{C[-\pi, \pi]^2} + \|h''_{s\sigma}\|_{C[-\pi, \pi]^2} \} n^{-1}.$$

Поэтому из теоремы 4.4 следует, что операторы $\tilde{A}_n : X_n \rightarrow Y_n$ из (4.15) непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|\tilde{A}_n^{-1}\| = O(1), \quad \tilde{A}_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n. \quad (4.26)$$

Тогда в силу теоремы 6 гл. I [25] имеем

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_2 \leq (1 + \|\tilde{A}_n^{-1} S_n^1 A\|_2) \|x^* - \tilde{x}\|_2 + \|\tilde{A}_n^{-1}\| \cdot \|\tilde{A}_n \tilde{x} - A_n \tilde{x}\|_Y, \quad (4.27)$$

где \tilde{x} – произвольный элемент из X_n , а операторы \tilde{A}_n и A_n определены в (4.15) и (2.64). Отсюда и из (4.26), (4.5), (4.15), (2.64) следует оценка

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_2 = O \{ \|x^* - \tilde{x}\|_2 + \|(\tilde{T}_n - S_n^1 T) \tilde{x}\|_Y \}. \quad (4.28)$$

Из хода доказательства теоремы 4.4 видно, что

$$\|\tilde{T}_n - S_n^1 T\| = O(1), \quad \tilde{T}_n - S_n^1 T : X \rightarrow Y_n.$$

Поэтому в силу (4.28) имеем

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_2 = O \{ E_n^1(x^*)_2 + \|(\tilde{T}_n - S_n^1 T) x^*\|_Y \}. \quad (4.29)$$

Очевидно, что в силу леммы 4.1

$$\|(\tilde{T}_n - S_n^1 T) x^*\|_Y \leq \sum_{i=0}^1 \|h_i x^* - S_n^\sigma(h_i x^*)\|_{L_2 \otimes L_2}. \quad (4.30)$$

Из результатов раздела 1.1 гл. I и условий а) – в) теоремы следует, что решение $x^*(s)$ уравнения (2.59) удовлетворяет условиям

$$x^*(s) \in \{ W^r H_2^\alpha \text{ при } 0 < \alpha < 1; \quad W^r Z_2 \text{ при } \alpha = 1 \}, \quad (4.31)$$

где $Z_2 = \{ \varphi \in L_2 : \omega_2(\varphi; \delta)_2 = O(\delta), 0 < \delta \leq \pi \}$. Поэтому функция $h_i(s, \sigma)x^*(\sigma) \in \{ W^r H_2^\alpha \text{ при } 0 < \alpha < 1; \quad W^r Z_2 \text{ при } \alpha = 1 \}$ по переменной σ равномерно относительно s . Тогда из (4.30) и результатов по теории приближений сплайнами выводим, что

$$\|(\tilde{T}_n - S_n^1 T)x^*\|_Y = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha}) & \text{при } 0 < r + \alpha \leq 2; \\ O(n^{-2}) & \text{при } r + \alpha > 2. \end{cases} \quad (4.32)$$

Из соотношений (4.29) – (4.32) следуют оценки (4.24).

4.3. О сплайн-методах высоких порядков. Рассмотрим интегро-функциональное уравнение вида

$$Dx \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\sigma - s}{2} \right| x(\sigma) d\sigma + T(x; s) = y(s), \quad (4.33)$$

где $y \in W_2^1[0, 2\pi]$, а $T : L_2[0, 2\pi] \longrightarrow W_2^1[0, 2\pi]$ – некоторый вполне непрерывный оператор. Решение этого уравнения будем аппроксимировать сплайнами высоких порядков. Обозначим через $X_N \subset L_2[0, 2\pi]$ подпространство всех 2π -периодических сплайнов степени $2r - 1$ ($r \in \mathbb{N}$) с узлами

$$s_k = 2k\pi/N, \quad k = \overline{0, N} \quad (N \in \mathbb{N}). \quad (4.34)$$

Приближенное решение уравнения (4.33) будем искать в виде сплайна $x_N(s) \in X_N$, который будем определять как решение операторного уравнения

$$D_N x_N \equiv S_N^1 G x_N + S_N^1 T x_N = S_N^1 y(s) \quad (x_N \in X_N, S_N^1 y \in Y_N); \quad (4.35)$$

здесь $Y_N \subset W_2^1[0, 2\pi]$ есть подпространство сплайнов первого порядка с указанными узлами, $S_N^1 : W_2^1 \longrightarrow Y_N$ – соответствующий оператор сплайн-интерполяции, а оператор G определен выше. Тогда справедлива следующая

Теорема 4.6. Пусть уравнение (4.33) имеет единственное решение $x^*(s) \in L_2[0, 2\pi]$ при любой правой части $y(s) \in W_2^1[0, 2\pi]$. Тогда при всех $N \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого, уравнение (4.35) также имеет единственное решение $x_N^*(s)$, которое при $N \rightarrow \infty$ сходится со скоростью

$$\|x^* - x_N^*\|_2 \asymp \rho(x^*, X_N)_2. \quad (4.36)$$

Следствие. Пусть оператор $T : L_2 \longrightarrow W_2^1$ и правая часть $y(s)$ уравнения (4.33) таковы, что его решение удовлетворяет условию $x^*(s) \in W^m H_2^\alpha$ ($m + 1 \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$). Тогда в условиях теоремы 4.6 метод сплайн-коллокации сходится со скоростью

$$\|x^* - x_N^*\|_2 = \begin{cases} O(N^{-m-\alpha}), & \text{если } 0 < m + \alpha \leq 2r; \\ O(N^{-2r}), & \text{если } m + \alpha > 2r. \end{cases} \quad (4.36^\circ)$$

4.4. Замечания. Завершая эту главу, уместно привести следующие утверждения.

1°. Результаты, аналогичные приведенным в этом и других параграфах этой главы, справедливы также для систем с.и.у. I-рода со слабыми особенностями вида (а), (б) раздела 1.14 гл. I. Обоснование этого утверждения проводится по схеме, предложенной в гл. I при рассмотрении аналогичного вопроса для полиномиальных методов.

2°. Результаты §4 по сплайн-методам могут быть применены при обосновании полиномиальных методов коллокации и квадратур. Для иллюстрации приведем следующий результат.

Приближенное решение уравнения (4.33) ищем в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{iks}, \quad n + 1 \in \mathbb{N}, \quad (4.37)$$

коэффициенты которого будем определять по методу коллокации из СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^n \alpha_k D(e^{ik\sigma}; s_j) = y(s_j), \quad j = \overline{-n, n}, \quad (4.38)$$

где узлы определены в (2.28). Для этой схемы справедлива

Теорема 4.7. Пусть: а) $T : L_2 \longrightarrow W_2^1$ есть вполне непрерывный оператор; б) с.и.у. (4.33) однозначно разрешимо в $X \equiv L_2$ при любой правой части из $Y \equiv W_2^1$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого, СЛАУ (4.38) также однозначно разрешима. Приближенные решения (4.37) сходятся в среднем к точному решению $x^*(s)$ с.и.у. (4.33) со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \asymp E_n^T(x^*)_2, \quad E_n^T(x^*)_2 = \rho(x^*, \mathbb{H}_n^T)_{L_2}. \quad (4.39)$$

Следствие. Пусть решение уравнения (4.33) удовлетворяет условию $x^*(s) \in W^m H_2^\alpha$ ($m \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha \leq 1$). Тогда в условиях теоремы 4.7 полиномиальный метод коллокации (4.33), (4.37), (4.38), (2.28)

сходится в среднем и равномерно (при $m + \alpha > 1/2$) со скоростями соответственно

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O(n^{-m-\alpha}); \quad \|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-m-\alpha+1/2}). \quad (4.39^\circ)$$

Доказательство. СЛАУ (4.38) запишем в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$D_n x_n \equiv S_n^1 D x_n = S_n^1 y \quad (x_n \in X_n, S_n^1 y \in Y_n), \quad (4.40)$$

где $X_n = \mathbb{H}_n^T \cap L_2$, а Y_n – подпространство всех сплайнов первой степени по сетке узлов (2.28). Тогда, следуя лемме 4.2, можно показать, что операторы $G_n \equiv S_n^1 G : X_n \longrightarrow Y_n$ непрерывно обратимы при любых $n \in \mathbb{N}$ и

$$\|G_n^{-1}\| = O(1), \quad G_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n. \quad (4.41)$$

Поэтому в силу теоремы 6 гл. I [25] для уравнений $Gx = y$ ($x \in X$, $y \in Y$) и $G_n x_n = S_n^1 y$ ($x_n \in X_n$, $S_n^1 y \in Y_n$) имеем

$$\|G^{-1}y - G_n^{-1}S_n^1 y\|_2 \leq (1 + \|G_n^{-1}S_n^1 G\|_2) \|G^{-1}y - x_n^0\|_2, \quad (4.42)$$

где x_n^0 – произвольный элемент из X_n . Полагая $x_n^0 = \Phi_n G^{-1}y$, в силу леммы 4.1 и соотношений (4.41), (4.42) для любой $y \in W_2^1$ находим оценку

$$\|G^{-1}y - G_n^{-1}S_n^1 y\|_2 = O\{E_n^T(G^{-1}y)_2\}. \quad (4.43)$$

Поэтому, применив к уравнениям (4.33) и (4.40) схему доказательства теоремы 4.1, находим, что операторы $D_n : X_n \longrightarrow Y_n$ непрерывно обратимы хотя бы при $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ и обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|D_n^{-1}\| = O(1), \quad D_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n. \quad (4.44)$$

Теперь к уравнениям (4.33) и (4.40) применим снова теорему 6 гл. I книги [25]:

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = \|D^{-1}y - D_n^{-1}S_n^1 y\|_2 \leq \|x^* - \tilde{x}_n\|_2 \cdot (1 + \|D_n^{-1}S_n^1 D\|_2), \quad (4.45)$$

где \tilde{x}_n – произвольный элемент из $X_n = \mathbb{H}_n^T$. Полагая $\tilde{x}_n = \Phi_n x^*$ и пользуясь неравенствами (4.45), (4.44) и (4.5), находим требуемую оценку (4.39). Из нее и прямых теорем теории полиномиальных приближений (см., напр., [48, 57, 75]) следует первая из оценок (4.39°); вторая из оценок (4.39°) доказывается по аналогии с соответствующими неравенствами гл. I.

3°. Оценки теорем 4.1 – 4.3, 4.6, 4.7 являются окончательными по порядку. Однако некоторые из приведенных в §§3 – 4 оценок погрешностей сплайн-методов могут быть несколько улучшены при улучшении структурных свойств исходных данных. Вместе с тем для существенного улучшения как этих оценок, так и оценок теорем 4.1 – 4.3, необходимо использовать сплайн-аппроксимацию более высоких порядков (см., напр., теорему 4.6), а это приводит, к сожалению, к значительному усложнению вычислительных схем. При этом указанный порядок должен быть разумно согласован с гладкостью исходных данных и с желаемым порядком погрешности. В противном случае даже за счет усложнения вычислительных схем сплайн-методов мы не получим желаемой степени их точности. Другими словами, сплайн-методы решения слабосингулярных интегральных уравнений обладают свойством насыщения (по терминологии К.И. Бабенко [3]). Этот факт должен учитываться в реальной вычислительной практике, ибо его игнорирование приводит к неоправданной затрате труда и времени.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

- с.и.у. — сингулярное интегральное уравнение;
 м.м.к. — метод механических квадратур;
 м.к. — метод коллокации;
 м.п. — метод подобластей;
 м.Г. — метод Галеркина;
 м.н.к. — метод наименьших квадратов;
 м.в.я. — метод вырожденных ядер;
 $\mathbb{N}(\mathbb{R})$ — множество натуральных (соответственно действительных) чисел;
 $[t]$ — целая часть числа $t \geq 0$;
 $\operatorname{sgn} t = \{+1 \text{ при } t > 0; 0 \text{ при } t = 0; -1 \text{ при } t < 0\}$;
 $\|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{L_r}$ и $\|\cdot\|_{2p} = \|\cdot\|_{L_{2p}}$ — нормы функций в пространствах соответственно $L_r(D)$ ($1 \leq r \leq \infty$) и $L_{2p} = L_{2p}[-1, 1]$, где $\|x\|_\infty = \|x\|_C$ для $x \in C$; $D = [0, 2\pi]$ или $[-1, 1]$, а $p = p(t)$ — весовая функция;
 $\|x\|_{1;2}$ и $\|\varphi\|_{1;2q}$ — нормы функций в соболевских пространствах соответственно $W_2^1 \equiv W_2^1[0, 2\pi]$ и $W_{2q}^1 \equiv W_{2q}^1[-1, 1]$, где $q = q(t)$ — весовая функция;
 $\mathbb{H}_n(\mathbb{H}_n^T)$ — множество всех алгебраических (соответственно тригонометрических) полиномов степени не выше n ;
 $D_n(\sigma)$ — ядро Дирихле порядка n ;
 $c_k(\varphi)$ — комплексные коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L[0, 2\pi]$, где $k = 0, \pm 1, \dots$;
 $c_n^{T(f)}$ (соответственно $c_n^U(f)$) — коэффициенты Фурье функции $f \in L[-1, 1]$ по системе полиномов Чебышева I-го рода $T_n(t) = \cos n \arccos t$ (соответственно II-го рода $U_n(t) = (1 - t^2)^{-1/2} \sin(n + 1) \arccos t$), где $n = 0, 1, \dots$;
 $E_n(\varphi)_r = \inf\{\|\varphi - Q\|_r : Q \in \mathbb{H}_n\}$, $\varphi \in L_r[-1, 1]$, $1 \leq r \leq \infty$;
 $E_n(\varphi)_{2p} = \inf\{\|\varphi - Q\|_{2p} : Q \in \mathbb{H}_n\}$, $\varphi \in L_{2p}[-1, 1]$, $p(t) \in L[-1, 1]$;
 $E_n^s(h)_r$ и $E_n^\sigma(h)_r$ — частные наилучшие алгебраические приближения функции $h(s, \sigma)$ по переменным s и σ соответственно; $E_n^T(\varphi)_r$, $E_n^{Ts}(h)_r$, $E_n^{T\sigma}(h)_r$ — соответствующие тригонометрические приближения;
 I — оператор Гильберта;
 E — единичный оператор;
 $\Phi_n, \mathcal{L}_n, \Pi_n$ — операторы соответственно Фурье, Лагранжа, подобластей порядка n .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аминов Р.Х., Габдулхаев Б.Г.* Приближенное решение функционального уравнения Амбарцумяна // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 304. – № 2. – С. 322–325.
2. *Аюпова Е.Ф.* Аппроксимативные методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода: Дисс... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 2000. – 113 с.
3. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.
4. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
5. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
6. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 254 с.
7. *Вайникко Г.М.* Анализ дискретизационных методов. – Тарту: Изд-во Тартусск. ун-та, 1976. – 161 с.
8. *Валеева Р.Т.* Аппроксимативные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений первого рода: Дисс... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1994. – 108 с.
9. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 455 с.
10. *Воронин В.В., Цецохо В.А.* Интерполяционный метод решения интегрального уравнения первого рода с логарифмической особенностью // Матем. проблемы геофизики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР. – 1973. – Вып. 4. – С. 212–228.
11. *Габдулхаев Б.Г.* Об одном прямом методе решения интегральных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1965. – № 3. – С. 51–60.
12. *Габдулхаев Б.Г.* Об аппроксимации тригонометрическими полиномами и погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов // Учен. записки Казанск. ун-та. – 1967. – Т. 127. – № 1. – С. 54–90.
13. *Габдулхаев Б.Г.* Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур // Доклады АН СССР. – 1968. – Т. 179. – № 2. – С. 260–263.

14. *Габдулхаев Б.Г.* Об одном общем квадратурном процессе и его применении к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // Доклады АН СССР. – 1968. – Т. 179. – № 3. – С. 515–517.
15. *Габдулхаев Б.Г.* Некоторые вопросы теории приближенных методов, III // Годишн. Софийск. ун-т. Матем. фак-т, 1968/1969 уч. г. – 1970. – Т. 63. – С. 39–51.
16. *Габдулхаев Б.Г.* Прямые методы решения некоторых операторных уравнений, I–IV // Изв. вузов. Матем. – 1971. – № 11. – С. 33–44; Изв. вузов. Матем. – 1971. – № 12. – С. 28–38; Изв. вузов. Матем. – 1972. – № 4. – С. 32–43; Изв. вузов. Матем. – 1974. – № 3. – С. 18–31.
17. *Габдулхаев Б.Г.* Сплайн-методы решения одного класса сингулярных интегродифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 6. – С. 14–24.
18. *Габдулхаев Б.Г.* Аппроксимация в H -пространствах и приложения // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 223. – № 6. – С. 1293–1296.
19. *Габдулхаев Б.Г.* Аппроксимация полиномами и сплайнами решений слабо сингулярных интегральных уравнений // Труды Междун. конф. по теории прикл. функций. Калуга, 1975. – М.: Наука, 1977. – С. 89–93.
20. *Габдулхаев Б.Г.* Квадратурные формулы с кратными узлами для сингулярных интегралов // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 3. – С. 531–534.
21. *Габдулхаев Б.Г.* Поперечники и оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 234. – № 3. – С. 513–516.
22. *Габдулхаев Б.Г.* Поперечники и оптимизация численных методов решения сингулярных интегральных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1977. – № 8. – С. 95–98.
23. *Габдулхаев Б.Г.* Полиномиальные аппроксимации по В.К. Дзядыку решений сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1978. – № 6. – С. 51–62.
24. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимизация коллокационных методов // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 247. – № 5. – С. 1033–1037.

25. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
26. *Габдулхаев Б.Г.* Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Матем. анализ. – М.: Изд-во АН СССР. – 1980. – Вып. 18. – С. 251–307.
27. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимизация квадратурных методов решения интегральных уравнений // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 271. – № 1. – С. 20–25.
28. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные методы решения сингулярных интегральных уравнений // Докл. науч.-техн. конф. по интегр. уравнениям в прикл. моделировании. – Киев, 1983. – Т. 2. – С. 68–69.
29. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений: Дисс. . . д-ра физ.-матем. наук в форме науч. докл. – Киев, 1985. – 48 с.
30. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные методы решения сингулярных интегральных уравнений I-рода // Докл. Всесоюз. симп. по методу дискретных особенностей в задачах матфизики. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1985. – С. 28–29.
31. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимизация прямых методов решения интегральных уравнений I-рода с логарифмической особенностью // Докл. науч.-техн. конф. по интегр. уравнениям в прикл. моделировании. – Киев, 1986. – Ч. 1. – С. 22–23.
32. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные проекционные методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений I-рода // Докл. Всесоюз. симп. по методу дискретных особенностей в задачах матфизики. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1987. – С. 41–43.
33. *Габдулхаев Б.Г.* К численному решению полных сингулярных интегральных уравнений // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложения. – Чебоксары, 1988. – С. 138–146.
34. *Габдулхаев Б.Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.

35. *Габдулхаев Б.Г.* Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
36. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 12. – С. 3–18.
37. *Габдулхаев Б.Г., Велев Г.Д.* Оптимальные методы решения операторных уравнений // Труды Междун. конф. по численным методам и приложениям. София, 1988. – София: Изд-во Болг. АН, 1989. – С. 545–552.
38. *Габдулхаев Б.Г., Горлов В.Е.* О сходимости полигонального метода решения слабосингулярных интегральных уравнений // Функц. анализ и его приложения. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1975. – С. 60–72.
39. *Габдулхаев Б.Г., Горлов В.Е.* Об оптимальных алгоритмах решения сингулярных интегральных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1976. – № 11. – С. 13–23.
40. *Габдулхаев Б.Г., Душков П.Н.* О полигональном методе решения интегральных уравнений со слабой особенностью // Приложения функц. анализа к приibl. вычислениям. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та. – 1974. – С. 37–57.
41. *Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б.* Один новый полиномиальный оператор и его приложения // Теория приibl. функций. – М.: Наука. – 1987. – С. 98–100.
42. *Габдулхаев Б.Г., Жечев Й.И.* Полигональный метод решения линейных уравнений // Научни трудове Висш. пед. ин-та, г. Пловдив. – 1971. – № 1. – С. 9–26.
43. *Габдулхаев Б.Г., Шарипов Р.Н.* Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов Коши и Адамара // Конструктивная теория функций и функц. анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. – С. 3–48.
44. *Галишишникова Т.Н., Ильинский А.С.* Численные методы в задачах дифракции. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 208 с.
45. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 638 с.

46. *Гребенников А.И.* Сплайн-аппроксимационный метод и его приложения: Дисс. . . д-ра физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1988. – 283 с.
47. *Гохберг И.Ц., Фельдман И.А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
48. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.
49. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 167 с.
50. *Еникеева С.Р.* Прямые методы решения слабосингулярных интегральных уравнений: Дисс. . . канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1999. – 107 с.
51. *Ермолаева Л.Б.* Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегродифференциальных уравнений методом подобластей: Дисс. . . канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 154 с.
52. *Захаров Е.В., Пименов Ю.В.* Численный анализ дифракции радиоволн. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
53. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
54. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.
55. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
56. *Килбас А.А.* Интегральные уравнения первого рода с логарифмическими ядрами // Науч. труды Юбил. семинара по краевым задачам, посвящ. 75-летию акад. АН БССР Ф.Д. Гахова. – Минск: Изд-во АН БССР, 1985. – С. 54–64.
57. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
58. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
59. *Лифанов И.К.* Методы сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.

60. *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. – М.: Атомиздат, 1971. – 482 с.
61. *Михлин С.Г.* Сингулярные интегральные уравнения // Успехи матем. наук. – 1948. – Т. 3. – № 3. – С. 29–112.
62. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
63. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. – М.: Физматгиз, 1969. – 575 с.
64. *Михлин С.Г.* Некоторые вопросы теории погрешностей. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1988. – 334 с.
65. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 239 с.
66. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
67. *Назарчук З.Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 256 с.
68. *Ожегова А.В.* Равномерные приближения решений слабо сингулярных уравнений первого рода: Дисс. . . канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1996. – 92 с.
69. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.
70. *Плецинский Н.Б.* Приложения теории интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. – 158 с.
71. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
72. *Самко С.Г.* Интегральные уравнения первого рода с логарифмическим ядром // Методы отображений. – Грозный. – 1976. – С. 41–69.
73. *Самко С.Г.* Одномерные и многомерные интегральные уравнения первого рода со слабой особенностью в ядре // Науч. труды Юбил. семинара по краевым задачам, посвящ. 75-летию акад. АН БССР Ф.Д. Гахова. – Минск: Изд-во АН БССР, 1985. – С. 103–115.

74. *Сурай Л.А.* Прямые методы решения интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью: Дисс. . . канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1994. – 131 с.
75. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
76. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 286 с.
77. *Хапаев М.М. (мл.)* Численное решение одномерных интегральных уравнений скин-эффекта и теории потенциала: Дисс. . . канд. физ.-матем. наук. – Москва, 1983. – 120 с.
78. *Цецохо В.А.* Некоторые вопросы обоснования численных методов решения интегральных уравнений 1-го рода со слабыми особенностями // Актуальные проблемы вычислительной и прикл. математики. – Новосибирск: Наука, 1983. – С. 137–142.
79. *Цецохо В.А.* К обоснованию метода коллокации решения интегральных уравнений первого рода со слабыми особенностями в случае разомкнутых контуров // Некорректные задачи матем. физики и анализа. – Новосибирск: Наука, 1984. – С. 189–198.
80. *Цецохо В.А.* Численное решение задач дифракции методом потенциалов: Дисс. . . д-ра физ.-матем. наук в форме науч. докл. – Новосибирск, 1987. – 38 с.
81. *Цецохо В.А.* К обоснованию метода коллокации численного решения одного класса интегральных уравнений первого рода по отрезку со слабыми особенностями // Интегр. уравнения и краевые задачи. Теория и прикл. системы. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990. – С. 94–150.
82. *Christiansen S.* Modifications of some first kind integral equations with logarithmic kernel to improve numerical conditioning // Computing. – 1985. – V. 34. – № 3. – P. 221–242.
83. *Hsiao G.C., Kopp P., Wendland W.L.* A Galerkin collocation method for some integral equations of the first kind // Computing. – 1980. – V. 25. – № 2. – P. 89–130.
84. *Hsiao G., McCamy R.C.* Solution of boundary value problems by integral equations of the first kind // SIAM Rev. – 1973. – № 15. – P. 687–705.

85. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* A finite element methods for some integral equations of the first kind // J. Math. Anal. and Appl. – 1977. – № 58. – P. 449–481.
86. *McLean W.* A spectral Galerkin method for a boundary integral equations // Math. Comp. – 1986. – V. 47. – № 176. – P. 597–607.
87. *Velev G.D., Gabdulkaev B.G.* Best approximations of solutions of singular integral equations of the first kind // Proc. Int. Conf. of Constructive Theory of Functions, 1987. – Sofia, 1988. – P. 471–477.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I	
Полиномиальные методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений I-рода	4
§1. Уравнения с логарифмическими ядрами. Периодический случай (4). 1.1. Корректность и некорректность задачи (4). 1.2. Общий прямой и проекционный методы (12). 1.3. Метод Галеркина (16). 1.4. Метод коллокации (19). 1.5. Метод механических квадратур (23). 1.6. Метод дискретных вихрей (31). 1.7. Метод вырожденных ядер (29). 1.8. Метод наименьших квадратов (31). 1.9. Метод подобластей (32). 1.10. Скорость сходимости приближенных методов. Равномерная сходимость как следствие сходимости в среднем (34). 2.11. Об устойчивости, обусловленности и оптимальности приближенных методов (41). 1.12. Об итерационных методах (43). 1.13. Сходимость в пространстве гёльдеровых функций (45). 1.14. Система слабо сингулярных уравнений (46).	
§2. Уравнения с периодическими ядрами. Продолжение (48). 2.1. Структура обратного оператора (48). 2.2. Полиномиальные проекционные методы (51).	
§3. Уравнения с логарифмическими ядрами. Непериодический случай (55). 3.1. Постановка задачи и вспомогательные результаты (55). 3.2. Метод наименьших квадратов (58). 3.3. Метод ортогональных многочленов (59). 3.4. Метод коллокации (60). 3.5. Метод механических квадратур (62). 3.6. Еще три схемы метода квадратур (64). 3.7. Метод подобластей (32). 3.8. Устойчивость решений и метод вырожденных ядер (65). 3.9. Равномерная	

сходимость приближенных методов как следствие сходимости в среднем (66). 3.10. Дополнения (67).

- §4. Уравнения с полярными ядрами (69).
 - 4.1. Вспомогательные результаты (69).
 - 4.2. Полиномиальные проекционные методы (70).
- §5. Некоторые обобщения и дополнения (74)
 - 5.1. Общий проекционный метод для общего уравнения (74).
 - 5.2. Теоремы о сходимости общего проекционного метода (76).
 - 5.3. Возмущенный проекционный метод (79).
 - 5.4. О равномерной сходимости и насыщаемости методов (80).
 - 5.5. Общий проекционный метод решения неперiodических уравнений (81).
 - 5.6. Общий проекционный метод решения слабо сингулярных уравнений II рода (83).
 - 5.7. О невязках приближенных методов (86).
 - 5.8. Заключительные замечания (87).

Глава II

Сплайновые методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений I-рода

88

- §1. Непериодические уравнения (88).
 - 1.1. Схема метода сплайн-коллокации нулевого порядка (88).
 - 1.2. Некоторые общие результаты (90).
 - 1.3. Приложения к конкретным уравнениям (94).
- §2. Периодические уравнения (96).
 - 2.1. Сплайн-методы коллокации и подобластей нулевого порядка (96).
 - 2.2. Схема метода сплайн-коллокации первого порядка (102).
 - 2.3. Некоторые общие результаты (103).
 - 2.4. Приложения к конкретным уравнениям (106).
 - 2.5. Метод сплайн-квадратур (119).
- §3. О характере и скорости сходимости сплайн-методов (112).
 - 3.1. О равномерной сходимости сплайн-методов (112).
 - 3.2. О сходимости невязки сплайн-методов (86).

§4. Некоторые обобщения (116). 4.1. Неулучшаемые оценки погрешности метода сплайн-коллокации (116). 4.2. Метод сплайн-квадратур (119). 4.3. О сплайн-методах высоких порядков (122). 4.4. Замечания (123).

Список сокращений и обозначений	126
Литература	127