Д. В. ВАЙНБЕРГ, В. З. ЖДАН

Матричные алгоритмы в теории оболочек вращения

ИЗДАТЕЛЬСТВО КИЕВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1967

УДК 624.074

Матричные алгоритмы в теории оболочек вращения
Вайнберг Д. В., Ждан В. З., 1967, стр. 164.

Объектом исследования является тонкая оболочка вращения, незамкнутая в вершине, меридианом которой является произвольная кривая, а толщина изменяется по любому закону. Оболочка или отдельные ее части могут подкрепляться системой часто расположенных меридиональных и кольцевых ребер. Действующая на оболочку нагрузка может изменяться по любому закону в меридиональном и кольцевом направлениях и, в частности, иметь локальный характер.

Исходная оболочка заменяется системой конических и цилиндрических коротких оболочек.

Для отдельной заменяющей оболочки выводится система обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений 8-го порядка относительно перемещений срединной поверхности. Коэффициенты этих уравнений — постоянные величины.

С использованием матричных обозначений система записывается в виде одного дифференциального уравнения первого порядка. Решение соответствующего однородного уравнения представляется сходящимся степенным матричным рядом.

Искомые усилия и перемещения оболочки в любом ее меридиональном сечении выражаются через значения этих же функций в начальном сечении.

Для сопряжения отдельных заменяющих оболочек используются условия равенства векторов усилий и перемещений соприкасающихся краев двух смежных оболочек.

Алгоритм решения задачи строится путем составления условий сопряжения всех заменяющих оболочек и подчинения его конкретным граничным условиям.

На всех этапах расчета — от составления и интегрирования системы разрешающих дифференциальных уравнений до формулировки граничных условий и выполнения вычислительного процесса — последовательно используется матричное исчисление.

Для иллюстрации основных положений излагаемого метода приводятся числовые примеры расчета реальных конструкций резервуара водонапорной башни и камина градирни в монтажной стадии.

Монография рассчитана на научных работников, преподавателей вузов, инженеров-расчетчиков, аспирантов и студентов.

Рисунков — 50, таблиц — 10, библиографий — 108 названий.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В работе рассматриваются незамкнутые в вершине тонкостенные оболочки вращения с любым изменением геометрических и статических характеристик вдоль меридиана. Оболочки этого класса применяются в виде купольных покрытий, резервуаров, водонапорных башен, градирен, трубопроводов и аналогичных сооружений.

В главе I описана принятая схема и выведены основные дифференциальные уравнения задачи. Рассматриваемая оболочка вращения с любым очертанием меридиана заменяется системой конических оболочек линейно-переменной толщины и цилиндрических оболочек постоянной толщины. При такой замене возникает вопрос о выборе длины отдельной заменяющей оболочки. Приводятся соображения о рациональном разбиении исходной оболочки вращения на отдельные конические и цилиндрические оболочки.

Далее исследуется отдельная заменяющая коническая и цилиндрическая оболочка, подкрепленная кольцевыми и меридиональными ребрами, для которой составляется система дифференциальных уравнений в частных производных относительно перемещений срединной поверхности оболочки.

Наличие подкрепляющих оболочку кольцевых и меридиональных ребер, как указывалось, учитывается приближенно, путем усреднения изгибной жесткости и жесткости при растяжении как в меридиональном, так и в кольцевом направлениях.

Для разделения переменных используются циклические свойства оболочки вращения [66, 67], что позволяет свести решение задачи к интегрированию неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем случае 8-го порядка (или 6-го порядка при загружении оболочки осесимметричными воздействиями). Благодаря выбранному закону изменения толщины стенки конической и цилиндрической оболочек коэффициенты указанной системы уравнений оказались постоянными.

В главе II рассматривается интегрирование однородной системы, соответствующей неоднородной системе разрешающих дифференциальных уравнений задачи. Эта система с использованием матричных обозначений представляется символически одним однородным дифференциальным уравнением первого порядка, коэффициентом которого является матрица. Так как элементы матрицы составлены из постоянных коэффициентов интегрируемой системы, то решение указанного дифференциального уравнения легко строится в виде сходящегося матричного ряда, содержащего восемь или шесть постоянных интегрирования.

В главе III определяются частные интегралы задачи и строится ее общее решение.

Внешняя нагрузка, действующая на оболочку, представляется вдоль меридиана в виде конечного степенного ряда, после чего частные интегралы вычисляются методом неопределенных коэффициентов [4]. Устанавливается также критерий применимости мембранной теории для определения частных интегралов.

При построении общего решения для отдельной оболочки вводятся в рассмотрение деформации и усилия, характеризующие ее напряженное состояние. Эти величины с помощью выведенных ранее соотношений выражаются через начальные параметры, т. е. значения усилий и перемещений одного из краев оболочки.

Общее решение задачи для всей конструкции строится сопряжением отдельных оболочек между собой. Условия сопряжения выражают неразрывность деформаций соприкасающихся краев двух смежных оболочек, а также равенства векторов краевых усилий и перемещений. Раскрытие указанных условий приводит к построению общего алгоритма решения задачи, имеющего благодаря использованию матричной символики компактный вид.

Полученное решение содержит восемь или шесть неизвестных начальных параметров, которые определяются после подчинения этого решения конкретным граничным условиям всей оболочки. Формулируются граничные условия при подкреплении краев оболочки упругими кольцами. Учитывается вид опирания колец на внешние связи: свободное кольцо, шарнирно-подвижное и неподвижное опирание, скользящее в своей плоскости кольцо и т. д.

В главе IV рассматривается осесимметричная деформация оболочки вращения. Решение легко получается из общих формул предыдущих глав.

Излагается также решение задачи в усилиях. В этом случае для конической оболочки выводится разрешающее дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами и дается простое решение соответствующего характеристического уравнения с точностью, соответствующей точности исходных гипотез теории оболочек.

При формулировке граничных условий задачи подробно рассматриваются различные случаи подкрепления краев оболочки упругими кольцами. Приводятся также формулы для определения длины интервала распространения вдоль меридиана оболочки величин, имеющих характер краевого эффекта.

В главе V освещаются вопросы сходимости и суммирования матричных рядов, которыми представлено решение системы разрешающих дифференциальных уравнений задачи. Далее излагаются указания о применении электронных цифровых вычислительных машин для расчета предлагаемым методом оболочек вращения.

В этой же главе приводятся примеры расчета оболочек резервуара водонапорной башни и камина градирни. разработанных Государственным проектным институтом «Киев промстройпроект» для металлургических предприятий.

На примере расчета конической оболочки исследована сходимость излагаемого метода расчета. Показано, что уже в том случае, когда геометрические параметры заменяющих оболочек отличаются от соответствующих параметров исходной оболочки на 6—7%, полученные значения расчетных функций практически можно считать точными.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Расчетная схема оболочки вращения с любым очертанием меридиана

Рассмотрим оболочку вращения, у которой (рис. 1):

а) меридианом является произвольная плоская кривая, необязательно плавная;

б) толщина оболочки изменяется по произвольному закону и, в частности, скачкообразно;

в) стенка оболочки может подкрепляться системой часто расположенных меридиональных и кольцевых ребер;

г) внешняя нагрузка может быть произвольной и распределенной по всей поверхности оболочки или ее части.

Исключается случай действия на оболочку сосредоточенных сил, которые можно рассматривать как поверхностные нагрузки бесконечно большой интенсивности. Усилия и деформации в местах приложения сосредоточенных сил терпят разрывы, что противоречит физическому смыслу задачи. Поэтому при действии на оболочку «сосредоточенных» сил будем их трактовать как поверхностную нагрузку, действующую на малую, но конечную площадку.

Считаем, что для изотропного материала оболочки справедлив закон Гука, а перемещения точек срединной поверхности оболочки малы по сравнению с ее толщиной h. Указанные ограничения сводят задачу о напряженном и деформированном состоянии оболочки к линейной [57]

Следующее ограничение заключается в том, что рассмотрению подлежат тонкие оболочки, при расчете которых можно пренебречь по сравнению с единицей максимальным значением отношения $\frac{h}{R}$, где R — радиус кривизны срединной поверхности. Речь идет об оболочках, у которых $\frac{h}{R} < 0{,}05$, как это принято в работе [57].

Дальнейший расчет строится на основе гипотез Г. Кирхгоффа [94]:

а) прямолинейные волокна, перпендикулярные к срединной поверхности оболочки до деформации, остаются после деформации прямолинейными и перпендикулярными

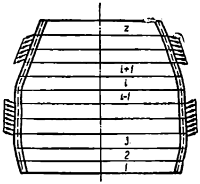


Рис. 1.

к изогнутой срединной поверхности и сохраняют свою длину;

б) нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, являются величинами пренебрежимо малыми по сравнению с другими составляющими напряжений.

В работах [55] и [56] показано, что принятие этих гипотез вносит в уравнения теории оболочек относительную погрешность порядка $\frac{h}{R}$ по сравнению с единицей. Поэтому решение уравнений теории оболочек, построенных на основании гипотез Кирхгоффа, с большей точностью теряет смысл. Вследствие этого в настоящей работе все построения, промежуточные преобразования и окончательные результаты получены с указанной погрешностью.

Произвольную оболочку вращения, подлежащую расчету, заменяем системой конических и цилиндрических оболочек (рис. 1). Толщина стенки отдельной i-й заменяющей конической оболочки подчиняется закону (рис. 2)

$$h_i = h_{0i} \frac{s_i}{s_{0i}} = h_{0i} x_i, \qquad (1.1)$$

где h_{0i} — средняя толщина стенки i-го участка заменяемой оболочки;

s_i — текущая меридиональная координата i-ющей оболочки;

s_{0i} — координата фиксированного сечения i-й заменяющей оболочки;

$x_i = \frac{s_i}{s_{0i}}$ — безразмерная координата.

В дальнейшем индекс «i» будем опускать в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений.

Формула (1.1) принимает вид

$$h = h_0 x. \tag{1.2}$$

При подкреплении отдельных участков или всей заменяемой оболочки меридиональными и кольцевыми ребрами будут ребристыми и заменяющие оболочки. Размеры меридиональных и кольцевых ребер заменяющей конической оболочки (рис. 2) запишем соответственно в виде

$$h_{p1} = h_{p10} x,$$
$$b_{p1} = b_{p10} x; \tag{1.3}$$

$$h_{p2} = h_{p20} x,$$
$$b_{p2} = b_{p20}. \tag{1.4}$$

В формулах (1.3) и (1.4) введены обозначения:

h_{p1} и h_{p2} — высота соответственно меридионального и кольцевого ребра;

b_{p1} и b_{p2} — ширина меридионального и кольцевого ребра;

h_{p10}, b_{p10}, h_{p20}, b_{p20} — постоянные величины.

Расстояние между кольцевыми ребрами принимаем постоянным и равным величине p_2. При замене отдельных участков оболочки гладкими или ребристыми цилиндрическими оболочками принимаем толщину стенки заменяющей оболочки и размеры подкрепляющих ее ребер постоянными на данном участке и равными средним значениям соответствующих величин заменяемой оболочки.

При достаточно частом расположении подкрепляющих ребер расчет ребристой оболочки сводим к расчету гладкой конструктивно-ортотропной оболочки, имеющей неодинаковые жесткости в главных направлениях. Определение этих характеристик дано в § 4. Здесь приведем критерий применимости теории конструктивно-ортотропных оболочек к определению напряженного и деформированного состояния оболочек, усиленных ребрами. Такой критерий для усиленных стрингерами цилиндрических оболочек, подверженных действию осесимметричных нагрузок, вы-

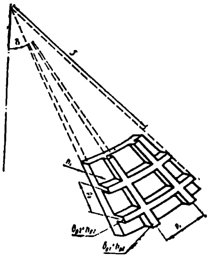


Рис. 2.

веден в работе [27] при сравнении характеристических уравнений для конструктивно-ортотропных и ребристых оболочек. Видоизменив некоторые обозначения, получим

$$a^2k^4 \gg 1, \tag{1.5}$$

где k — число стрингеров,

$$a^2 = \frac{h^2}{3r^2};$$

r — радиус цилиндрической оболочки.

Из сравнения изгибающих моментов, возникающих в полубесконечной оболочке, которая находится под действием осесимметричной краевой нагрузки, вычисленных по теории конструктивно-ортотропных оболочек и по теории ребристых оболочек, получен достаточный критерий применимости теории конструктивно-ортотропных оболочек

$$a^2k^4 \gg \frac{D_{p1}k}{2\pi r D_M}, \tag{1.6}$$

где D_{p1} — изгибная жесткость стрингера;

D_M — цилиндрическая жесткость обшивки.

Условия (1.5) и (1.6) используем как приближенный критерий применимости теории конструктивно-ортотропных оболочек к расчету как цилиндрических, так и конических оболочек усиленных ребрами и находящимися под действием произвольных нагрузок.

Придадим формулам (1.5) и (1.6) иной вид. Обозначим расстояния между меридиональными ребрами конической и цилиндрической оболочки символом p_1. Тогда

$$k = \frac{2\pi r}{p_1}. \tag{1.7}$$

Здесь r — радиус параллельного круга конической оболочки и, как прежде, радиус цилиндрической оболочки.

Переписав условие (1.5) в виде

$$\frac{h^2}{3r^2}\frac{16\pi^4 r^4}{p_1^4} \geqslant \frac{r}{h}$$

и выполнив несложные преобразования, получим

$$p_1 \leqslant 2\pi h \sqrt[4]{\frac{r}{3h}}, \tag{1.8}$$

$$k \geqslant \frac{r}{h}\sqrt[4]{\frac{3h}{r}}. \tag{1.9}$$

Представим условие (1.6) в виде

$$\frac{h^2}{3r^2}\frac{8\pi^3 r^3}{p_1^3} \gg \frac{r}{h}\frac{b_{p1}h_{p1}^3}{2\pi r h^3}.$$

Выполнив элементарные преобразования, получим

$$p_1 < \frac{2\pi h^2}{h_{p1}}\sqrt[3]{\frac{2\pi r}{3b_{p1}}} \tag{1.10}$$

$$k \geqslant \frac{rh_{p1}}{h^2}\sqrt[3]{\frac{3b_{p1}}{2\pi r}}. \tag{1.11}$$

Выражения (1.8) — (1.11) будем рассматривать как приближенные условия, при выполнении которых к расчету ребристых конических оболочек можно применять теорию гладких конструктивно-ортотропных оболочек.

Заменяя произвольную оболочку вращения системой конических и цилиндрических оболочек (рис. 1), будем исходить из следующих соображений. Сечения, являющиеся краями заменяющих оболочек, назначаются в местах изломов меридиана исходной оболочки, в местах скачкообразного изменения толщины стенки оболочки и действующей внешней нагрузки.

При плавном изменении геометрических параметров и действующей на оболочку нагрузки длины заменяющих конических и цилиндрических оболочек выбираем таким образом, чтобы их толщины отличались от толщины стенок соответствующих заменяемых участков на малые заданные величины, например, на величины $\frac{h_l}{R_l}h$. Кроме того, указанные сечения назначаются в тех местах, в которых требуется определить величины, характеризующие напряженное и деформированное состояние оболочки.

Резюмируя изложенное, приходим к следующей расчетной модели: оболочка вращения заменяется системой коротких конических и цилиндрических гладких или ребристых оболочек. Геометрические параметры заменяющих конических оболочек характеризуются величинами (1.2) — — (1.4). Толщины стенок и размеры подкрепляющих ребер цилиндрических оболочек являются постоянными величинами. Внешняя нагрузка либо распределена по всей поверхности отдельной заменяющей оболочки, либо отсутствует на ее поверхности.

Следовательно, расчетными элементами системы являются короткая коническая или цилиндрическая оболочки, каждая из которых может быть конструктивно-ортотропной.

§ 2. Дифференциальные уравнения равновесия

Отнесем коническую оболочку к координатам: меридиональной s, отсчитываемой от вершины конуса вдоль меридиана, и угловой β, измеряемой от плоскости начального меридиана.

Выделим из оболочки четырьмя сечениями, нормальными к ее срединной поверхности и касающимися линий

s, $s + ds$, β, $\beta + d\beta$, пространственный элемент с высотой, равной толщине оболочки. На площадки, ограничивающие указанный элемент, действуют соответствующие нормальные и касательные напряжения.

Введя вместо напряжений их интегральные характеристики — усилия и моменты, соответственно отнесенные к

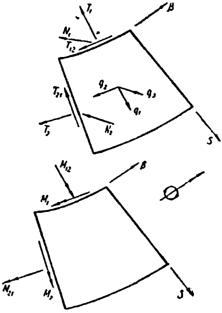


Рис. 3.

единице длины линии s или β, — вместо пространственного элемента, выделенного из оболочки, рассматриваем соответствующий ему элемент срединной поверхности, прилагая к его сторонам усилия и моменты. На рис. 3 изображен такой элемент, находящийся под действием внешних и внутренних сил. Приняты следующие обозначения мембранной группы усилий:

T_1, T_{12} — интенсивность нормальных и сдвигающих усилий, действующих на площадке $s = \text{const}$;

T_2, T_{21} — интенсивность нормальных и сдвигающих усилий, приложенных на площадке $\beta = \text{const}$;

Растягивающие нормальные усилия T_1 и T_2 считаем положительными. Сдвигающие усилия T_{12} и T_{21} — положительны, если они, действуя на площадках с положительными внешними нормалями, направлены в сторону положительных касательных к соответствующим координатным линиям срединной поверхности.

Моментные усилия обозначаем:

M_1, M_{12}, N_1 — интенсивность изгибающих моментов, крутящих моментов и поперечных сил, приложенных на площадке $s = \text{const}$;

M_2, M_{21}, N_2 — интенсивность изгибающих, крутящих моментов и поперечных сил, действующих на площадке $\beta = \text{const}$. Положительными изгибающими моментами M_1 и M_2 считаем моменты, вызывающие растяжение внешних и сжатие внутренних волокон поверхностей оболочки.

Поперечные силы N_1 и N_2 считаются положительными, если они, будучи приложены к площадкам с отрицательными внешними нормалями, направлены в сторону отрицательной нормали к срединной поверхности оболочки.

Компонентами внешней нагрузки, действующей на оболочку, являются:

q_1 и q_2 — составляющие, направленные соответственно вдоль линий s и β;

q_3 — составляющая, направленная вдоль внешней нормали к срединной поверхности оболочки.

На рис. 3 показаны положительные направления внешних и внутренних сил, действующих на элемент оболочки.

Введем, как это сделано в работе [57], обозначения:

$$S = T_{12} - \frac{M_{21}}{s \operatorname{tg} \delta} = T_{21}; \tag{2.1}$$

$$H = \frac{1}{2}(M_{12} + M_{21}),$$

где δ — половина угла при вершине конуса (рис. 2).

Тогда уравнения равновесия элемента конической оболочки можно записать в виде [57]

$$\sin\delta \frac{\partial}{\partial s}(sT_1) + \frac{\partial}{\partial\beta} S - \sin\delta T_2 = -\sin\delta s q_1;$$

$$\sin\delta \frac{\partial}{\partial s}(sS) + \frac{\partial}{\partial\beta} T_2 + \sin\delta S + \operatorname{ctg}\delta \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial\beta} M_2 + \right.$$

$$\left. + 2\sin\delta \frac{\partial}{\partial s}(sH)\right] = -\sin\delta s q_2; \tag{2.2}$$

$$\cos\delta T_2 - \left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\sin\delta\frac{\partial}{\partial s}(sM_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}H - \sin\delta M_2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin\delta\cdot s}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\sin\delta\frac{\partial}{\partial s}(sH) + \frac{\partial}{\partial\beta}M_2 + \sin\delta H\right]\right\} = \sin\delta s q_3.$$

Введем новую переменную t

$$x = e^t. \tag{2.3}$$

После перехода к этой переменной уравнения равновесия (2.2) примут вид

$$\sin\delta\,(T_1 + T'_{1t} - T_2) + S'_\beta = -s_0\sin\delta e^t q_1;$$

$$\sin\delta\,(2S + S'_t) + T'_{2\beta} + \frac{\operatorname{ctg}\delta}{s_0 e^t}[M'_{2\beta} + 2\sin\delta\,(H + H'_t)] =$$

$$= - s_0\sin\delta e^t q_2;$$

$$\cos\delta T_2 - \frac{1}{s_0 e^t}[\sin\delta\,(M'_{1t} - M'_{2t} + M''_{1tt}) + 2H''_{t\beta} +$$

$$+ 2H'_\beta + \frac{1}{\sin\delta}M''_{1\beta\beta}] = s_0\sin\delta e^t q_3. \tag{2.4}$$

Штрихами в уравнениях системы (2.4) и в дальнейшем обозначены производные по переменным, стоящим в качестве индексов при обозначениях функций.

Уравнения системы (2.4) являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Для разделения переменных представим заданную нагрузку в виде ряда

$$q(s,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}[q_n(s)\cos n\beta + \bar{q}_n(s)\sin n\beta]. \tag{2.5}$$

Так как каждое слагаемое суммы (2.5) представляет собой периодическую функцию угла β, то все величины, которые характеризуют напряженное и деформированное состояние оболочки вращения, являющейся полярно симметричной системой, также являются периодическими функциями β [66, 67].

Решения, отвечающие отдельным гармоникам разложения (2.5), могут представлять и самостоятельный интерес. Так, расчет оболочек вращения от действия собственного веса сводится к рассмотрению случая $n = 0$. Не менее интересен случай антисимметричной деформации ($n = 1$).

Рассмотрим действие n-й гармоники разложения (2.5) внешней нагрузки. В этом случае усилия и моменты являются функциями угла β

$$T_1 = T_{1n} \begin{matrix} \cos n\beta \\ \sin n\beta \end{matrix}; \qquad T_2 = T_{2n} \begin{matrix} \cos n\beta \\ \sin n\beta \end{matrix}; \qquad M_1 = M_{1n} \begin{matrix} \cos n\beta \\ \sin n\beta \end{matrix};$$

$$M_2 = M_{2n} \begin{matrix} \cos n\beta \\ \sin n\beta \end{matrix}; \qquad S = S_n \begin{matrix} \sin n\beta \\ \cos n\beta \end{matrix}; \qquad H = H_n \begin{matrix} \sin n\beta \\ \cos n\beta \end{matrix};$$

$$q_1 = q_{1n} \begin{matrix} \cos n\beta \\ \sin n\beta \end{matrix}; \qquad q_2 = q_{2n} \begin{matrix} \sin n\beta \\ \cos n\beta \end{matrix}; \qquad q_3 = q_{3n} \begin{matrix} \cos n\beta \\ \sin n\beta \end{matrix}. \qquad (2.6)$$

Двойные функции введены для сокращения записей. Верхние функции соответствуют случаю действия симметричной нагрузки $q_n(s) \cos n\beta$, нижние — случаю действия обратно симметричной нагрузки $\bar{q}_n(s) \sin n\beta$. Такой же смысл имеют и используемые в дальнейшем двойные знаки $\pm$ ($\mp$).

Подставив величины (2.6) в уравнения (2.4) и выполнив необходимые дифференцирования по переменной β, получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} T_1 + T_1' - T_2 \pm \bar{n} S = -s_0 e^t q_1; \\ 2S + S' \mp \bar{n} T_2 + \frac{\operatorname{ctg}\delta}{s_0 e^t} [\mp \bar{n} M_2' + 2(H + H')] = -s_0 e^t q_2; \\ -\operatorname{ctg}\delta T_2 + \frac{1}{s_0 e^t} [M_1' - M_2' + M_1'' \pm 2\bar{n}(H + H') - \\ - \bar{n}^2 M_2] = -s_0 e^t q_3. \end{gathered} \qquad (2.7)$$

Здесь и в дальнейшем

$$\bar{n} = \frac{n}{\sin\delta}.$$

В уравнениях системы (2.7) при обозначениях величин опущен индекс «n», указывающий номер рассматриваемой гармоники разложения (2.5). Штрихами в этих уравнениях обозначены производные по переменной t.

Уравнения (2.7) выражают условия равновесия отдельного элемента конической оболочки вращения, загруженного n-й гармоникой поверхностной нагрузки.

Соответствующие уравнения равновесия для круговой цилиндрической оболочки имеют вид

$$\begin{gathered} T_1' \pm nS = -rq_1; \\ S' \mp nT_2 + \frac{1}{r}(\mp nM_2 + 2H') = -rq_2; \qquad (2.8) \\ -T_2 + \frac{1}{r}(M_1'' \pm 2nH' - n^2M_2) = -rq_3. \end{gathered}$$

Цилиндрическая оболочка отнесена к продольной координате s, отсчитываемой от края оболочки, и к угловой координате β, отсчитываемой от плоскости начального меридиана. Переменная s заменена безразмерной координатой x

$$x = \frac{s}{r}.$$

Штрихами в системе (2.8) и в дальнейшем при рассмотрении цилиндрических оболочек обозначены производные по переменной x.

Уравнения равновесия (2.7) элемента срединной поверхности конической оболочки могут быть представлены в матричной форме

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{d}{dt} + 1 & -1 & \pm\bar{n} & 0 \\ 0 & \mp\bar{n} & \dfrac{d}{dt} + 2 & 0 \\ 0 & -\operatorname{ctg}\delta & 0 & \dfrac{1}{s_0e^t}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d}{dt} + 1\right) \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\pm\bar{n}\operatorname{ctg}\delta}{s_0e^t}\dfrac{d}{dt} & \dfrac{2\operatorname{ctg}\delta}{s_0e^t}\left(\dfrac{d}{dt} + 1\right) \\ -\dfrac{1}{s_0e^t}\left(\dfrac{d}{dt} + \bar{n}^2\right) & \dfrac{\pm 2\bar{n}}{s_0e^t}\left(\dfrac{d}{dt} + 1\right) \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ S \\ M_1 \\ M_2 \\ H \end{vmatrix} = -s_0 e^{t} \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

Уравнениям (2.8) для цилиндрической оболочки придадим также матричную форму

$$\begin{Vmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & \pm n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp n & 0 & 0 & \frac{\mp n}{r} & \frac{2}{r}\cdot\frac{d}{dx} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{r}\cdot\frac{d^2}{dx^2} & -\frac{n^2}{r} & \frac{\pm 2n}{r}\cdot\frac{d}{dx} \end{Vmatrix} \times$$

$$\begin{Vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ S \\ M_1 \\ M_2 \\ H \end{Vmatrix} = -r \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_2 \end{vmatrix}. \tag{2.10}$$

Формулам (2.9) и (2.10) придадим компактную форму

$$A_1 T = -Q. \tag{2.11}$$

§ 3. Деформации срединной поверхности оболочки

Пространственное перемещение точки срединной поверхности оболочки характеризуется вектором, компонентами которого являются (рис. 4): u — перемещение вдоль меридиана; v — перемещение вдоль направляющей; w — нормальное перемещение.

На рис. 4 указаны положительные направления перемещений.

Деформация элемента, выделенного из оболочки, полностью характеризуется следующими величинами:

ε_1 и ε_2 — относительными удлинениями срединной поверхности соответственно вдоль меридиана и направляющей;

ω — сдвигом срединной поверхности;

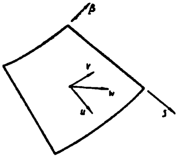


Рис. 4.

$\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — изменением кривизны срединной поверхности оболочки. Параметры $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ положительны при увеличении кривизны срединной поверхности;

τ — кручением срединной поверхности при деформации;

θ_1 — углом поворота меридиана.

Параметры, характеризующие деформацию срединной поверхности оболочки, выражаются через перемещения точек этой поверхности при помощи зависимостей

$$\varepsilon_1 = u'_s;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\sin\delta s} v'_\beta + \frac{1}{s} u + \frac{\operatorname{ctg}\delta}{s} w; \qquad (3.1)$$

$$\omega = \frac{1}{\sin\delta s} u'_\beta + s\left(\frac{v}{s}\right)'_s;$$

$$\varkappa_1 = -w''_{ss};$$

$$\varkappa_2 = -\frac{1}{\sin\delta s}\left(\frac{1}{\sin\delta s} w''_{\beta\beta} - \frac{\operatorname{ctg}\delta}{s} v'_\beta + \sin\delta w'_s\right);$$

$$\tau = -\frac{1}{\sin\delta s}\left(w^{\bullet}_{s\beta} - \frac{1}{s} w'_{\beta} - \cos\delta v'_{s} + \frac{\cos\delta}{s} v\right);$$

$$\theta_1 = -w'_s.$$

При действии на оболочку гармонической внешней нагрузки перемещения и деформации срединной поверхности являются также гармоническими функциями

$$u = u_n \frac{\cos n\beta}{\sin n\beta}; \qquad v = v_n \frac{\sin n\beta}{\cos n\beta}; \qquad w = w_n \frac{\cos n\beta}{\sin n\beta};$$

$$\theta_1 = \theta_{1n} \frac{\cos n\beta}{\sin \beta}; \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_{1n} \frac{\cos n\beta}{\sin n\beta}; \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_{2n} \frac{\cos n\beta}{\sin n\beta};$$

$$\omega = \omega_n \frac{\sin n\beta}{\cos n\beta}; \qquad \varkappa_1 = \varkappa_{1n} \frac{\cos n\beta}{\sin n\beta}; \qquad \varkappa_2 = \varkappa_{2n} \frac{\cos n\beta}{\sin n\beta};$$

$$\tau = \tau_n \frac{\sin n\beta}{\cos n\beta}. \tag{3.2}$$

Используя зависимости (3.2) и переходя к переменной t, получаем соотношения между деформациями и перемещениями срединной поверхности конической оболочки

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{s_0 e^t} u';$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{s_0 e^t}\left(u + \operatorname{ctg}\delta w \pm \frac{n}{\sin\delta} v\right); \tag{3.3}$$

$$\omega = \frac{1}{s_0 e^t}\left(\mp \frac{n}{\sin\delta} u + v' - v\right);$$

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{s_0^2 e^{2t}}(w'' - w');$$

$$\varkappa_2 = -\frac{1}{s_0^2 e^{2t}}\left(-\frac{n^2}{\sin^2\delta} w + w' \mp \frac{n}{\sin\delta} \operatorname{ctg}\delta v\right);$$

$$\tau = -\frac{1}{s_0^2 e^{2t}}\left(\mp \frac{n}{\sin\delta} w' - \operatorname{ctg}\delta v' + \operatorname{ctg}\delta v \pm \frac{n}{\sin\delta} w\right);$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{s_0 e^t} w'.$$

Теперь приведем значения деформаций срединной поверхности цилиндрической оболочки

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r} u';$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r}(w \pm nv);$$

$$\omega = \frac{1}{r}(\mp nu + v');$$

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{r^2} w'';$$

$$\varkappa_2 = -\frac{1}{r^2}(-n^2 w \mp nv); \tag{3.4}$$

$$\tau = -\frac{1}{r^2}(\mp nw' - v');$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{r} w'.$$

Используя матричную форму записи, придадим выражениям (3.3) и (3.4) следующий вид:

Для конической оболочки

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 s_0 e^t \\ \varepsilon_2 s_0 e^t \\ \omega s_0 e^t \\ \varkappa_1 s_0^2 e^{2t} \\ \varkappa_2 s_0^2 e^{2t} \\ \tau s_0^2 e^{2t} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 1 & \pm \bar{n} & \operatorname{ctg}\delta \\ \mp \bar{n} & \frac{d}{dt} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right) \\ 0 & \pm n \operatorname{ctg}\delta & n^2 - \frac{d}{dt} \\ 0 & \operatorname{ctg}\delta\left(\frac{d}{dt} - 1\right); & \pm \bar{n}\left(\frac{d}{dt} - 1\right) \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}. \tag{3.5}$$

Для цилиндрической оболочки

$$\left\| \begin{array}{c} \varepsilon_1 r \\ \varepsilon_2 r \\ \omega r \\ \varkappa_1 r^2 \\ \varkappa_2 r^2 \\ \tau r^2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \pm n & 1 \\ \mp n & \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d^2}{dx^2} \\ 0 & \pm n & n^2 \\ 0 & \frac{d}{dx} & \pm n \frac{d}{dx} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\| . \qquad (3.6)$$

Символически зависимости (3.5) и (3.6) можно представить матричным соотношением

$$\Omega = CV. \qquad (3.7)$$

§ 4. Соотношения упругости для конструктивно-ортотропных конических и цилиндрических оболочек

В § 2 и § 3 составлены дифференциальные уравнения равновесия (2.9) и (2.10) элементов конической и цилиндрической оболочек и установлены зависимости (3.5) и (3.6) между деформациями и перемещениями срединной поверхности. В эти соотношения не входит параметр, зависящий от толщины оболочки. Следовательно, уравнения равновесия (2.9) и (2.10) и соотношения эластомеханики (3.5) и (3.6) одинаковы как для гладкой, так и для ребристой оболочек.

Однако усилия и моменты, возникающие в оболочке, уже зависят от характеристик ее жесткости. Ребристые оболочки, для которых выполняются условия (1.8) — (1.11), будем рассматривать как гладкие конструктивно-ортотропные оболочки. Физически это означает, что жесткость дискретных ребер усредняется по всей поверхности оболочки. При этом деформации ребристой и конструктивно ортотропной оболочек должны быть одинаковы.

Будем считать, что меридиональные ребра не воспринимают кольцевых напряжений, а кольцевые ребра не передают напряжений в меридиональном направлении. Не будем также учитывать влияния подкрепляющих ребер на сдвиг срединной поверхности оболочки [7]. Кроме того, пренебрегаем влиянием изменения кривизны этой поверхности на величину нормальных усилий и, соответственно, влиянием удлинения срединной поверхности на величину изгибающих моментов.

Благодаря принятым предположениям формулы, выражающие для оболочки закон Гука, можно представить в виде

$$\begin{aligned} T_1 &= D_{T1}\varepsilon_1 + \nu D_T\varepsilon_2, \\ T_2 &= \nu D_T\varepsilon_1 + D_{T2}\varepsilon_2, \\ M_1 &= D_{M1}\varkappa_1 + \nu D_M\varkappa_2, \\ M_2 &= \nu D_M\varkappa_1 + D_{M2}\varkappa_2; \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} T_{12} &= \frac{1-\nu}{2} D_T \left(\omega + \frac{h^2}{6R}\tau\right), \\ T_{21} &= \frac{1-\nu}{2} D_T\omega, \\ M_{12} &= \left[(1-\nu)D_1 + 2G\frac{\bar{i}_{p1}}{\rho_1}\right]\tau, \\ M_{21} &= \left[(1-\nu)D_2 + 2G\frac{\bar{i}_{p2}}{\rho_2}\right]\tau, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$D_T = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}$ — жесткость неподкрепленной оболочки при растяжении;

$D_M = \dfrac{Eh^3}{(1-\nu^2)\cdot 12}$ — цилиндрическая жесткость гладко оболочки;

D_{T1}, D_{T2} — жесткости при растяжении ребристой оболочки соответственно в меридиональном и кольцевом направлениях;

D_{M1}, D_{M2} — изгибные жесткости ребристой оболочки в меридиональном и кольцевом направлениях;

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига;

D_1 и D_2 — цилиндрические жесткости оболочки в меридиональном и кольцевом направлениях, при определении которых моменты инерции стенки оболочки вычисляются относительно осей, проходящих через центры тяжести сечений. Последние состоят из стенки оболочки и подкрепляющих ребер;

$\bar{i}_{p1}$ и $\bar{i}_{p2}$ — моменты инерции соответственно меридионального и кольцевого ребер относительно тех же осей.

Четыре величины (4.2) при помощи соотношений (2.1) легко заменяются величинами S и H

$$S = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\,\omega;$$

$$H = \left[\frac{1}{2}(1-\nu)(D_1 + D_2) + G\left(\frac{\bar{i}_{p1}}{p_1} + \frac{\bar{i}_{p2}}{p_2}\right)\right]\tau. \tag{4.3}$$

Жесткость ребристой оболочки при растяжении в меридиональном направлении равна

$$D_{T1} = \frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{Eb_{p1}h_{p1}k}{2\pi r} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[1 + (1-\nu^2)\frac{kb_{p1}h_{p1}}{2\pi rh}\right] =$$

$$= \frac{Eh}{1-\nu^2}(1+\alpha_1) = D_T(1+\alpha_1). \tag{4.4}$$

Обозначим

$$\frac{h_{p1}}{h} = \bar{h}_{p1}, \qquad \frac{h_{p2}}{h} = \bar{h}_{p2}. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\alpha_1 = (1-\nu^2)\,\bar{h}_{p1}\frac{kb_{p1}}{2\pi r}. \tag{4.6}$$

Жесткость ребристой оболочки при растяжении в кольцевом направлении равна

$$D_{T2} = D_T(1+\alpha_2), \tag{4.7}$$

где

$$\alpha_2 = (1-\nu^2)\,\bar{h}_{p2}\frac{b_{p2}}{p_2}. \tag{4.8}$$

Отметим одно важное для дальнейшего решения обстоятельство. Величины $\bar{h}_{p1}$ и $\bar{h}_{p2}$, α_1 и α_2 являются постоянными для рассматриваемых видов конической и цилиндрической оболочек. Действительно, подставляя в соотношения (4.5)—(4.7) значения соответствующих параметров из формул (1.2) — (1.4), для конической оболочки получаем

$$\bar{h}_{p1} = \frac{h_{p10}x}{h_0 x} = \frac{h_{p10}}{h_0} = \text{const};$$

$$\bar{h}_{p2} = \frac{h_{p20}x}{h_0 x} = \frac{h_{p20}}{h_0} = \text{const}; \tag{4.9}$$

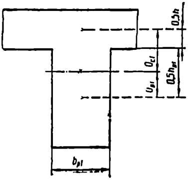


Рис. 5.

$$\alpha_1 = (1 - \nu^2)\,\bar{h}_{p1}\,\frac{kb_{p10}x}{2\pi \sin\delta \cdot s_0 x} = (1 - \nu^2)\,\bar{h}_{p1}\,\frac{kb_{p10}}{2\pi \sin\delta s_0} = \text{const};$$

$$\alpha_2 = (1 - \nu^2)\,\bar{h}_{p2}\,\frac{b_{p20}}{p_2} = \text{const}.$$

Для цилиндрической оболочки постоянной толщины, подкрепленной системой меридиональных и кольцевых ребер, размеры которых постоянны, величины $\bar{h}_{p1}$ и $\bar{h}_{p2}$, α_1 и α_2, как следует из соотношений (4.5) — (4.8), являются также величинами постоянными.

Для определения изгибной жесткости оболочки в продольном направлении рассмотрим меридиональное сечение, изображенное на рис. 5. Расстояния от центров тяжести стенки оболочки и подкрепляющего ее ребра до центра тяжести всего сечения соответственно равны

$$a_{c1} = 0{,}5h\bar{h}_{p1}b_{p1}\,\frac{1 + \bar{h}_{p1}}{\bar{h}_{p1}b_{p1} + p_1}; \tag{4.10}$$

$$o_{p1} = 0{,}5hp_1 \frac{1+\bar{h}_{p1}}{\bar{h}_{p1}b_{p1}+p_1}.$$

Зная эти расстояния, легко определить изгибную жесткость оболочки в продольном направлении

$$D_{M1} = D_1 + \frac{E\bar{i}_{p1}}{p_1} = \tag{4.12}$$

$$= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + Eho_{c1}^2 \frac{E}{p_1}\left(\frac{b_{p1}h_{p1}^3}{12} + b_{p1}h_{p1}o_{p1}^2\right).$$

Опуская промежуточные преобразования, окончательно получаем

$$D_{M1} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left\{1 + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}\left[3 + 6\bar{h}_{p1} + (4+\alpha_1)\bar{h}_{p1}^2\right]\right\}. \tag{4.13}$$

Введем обозначение

$$\varrho_1 = \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}[3 + 6\bar{h}_{p1} + (4+\alpha_1)\bar{h}_{p1}^2], \tag{4.14}$$

после чего выражение для жесткости D_{M1} приобретает простой вид

$$D_{M1} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(1+\varrho_1) = D_M(1+\varrho_1). \tag{4.15}$$

Аналогично определяется изгибная жесткость оболочки в кольцевом направлении

$$D_{M2} = D_2 + \frac{E\bar{i}_{p2}}{p_2} = D_M(1+\varrho_2), \tag{4.16}$$

где

$$\varrho_2 = \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}[3 + 6\bar{h}_{p2} + (4+\alpha_2)\bar{h}_{p2}^2]. \tag{4.17}$$

При помощи соотношений (4.12), (4.15) и (4.16) второму выражению (4.3) легко придать более компактный вид

$$H = (1-\nu)D_M(1+\gamma)\tau. \tag{4.18}$$

Величина γ определяется равенством

$$\gamma = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}. \tag{4.19}$$

Анализ выражений (4.4), (4.7), (4.15), (4.16) и (4.18) показывает, что постоянные величины α_1 α_2, ϱ_1, ϱ_2 и γ характеризуют влияние системы подкрепляющих оболочку меридиональных и кольцевых ребер на ее жесткость.

Используя полученные зависимости, представим соотношения упругости для рассматриваемых конструктивно-ортотропных конической и цилиндрической оболочек в виде

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}[(1+\alpha_1)\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2];\\
T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}[\nu\varepsilon_1 + (1+\alpha_2)\varepsilon_2];\\
M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}[(1+\varrho_1)\varkappa_1 + \nu\varkappa_2];\\
M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}[\nu\varkappa_1 + (1+\varrho_2)\varkappa_2];\\
S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)}\omega;\\
H &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}(1+\gamma)\tau.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Соотношения (4.20) можно записать и в несколько иной форме

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \bar{E}_1[(1+\alpha_1)\varepsilon_1 s_0 e^t + \nu\varepsilon_2 s_0 e^t];\\
T_2 &= \bar{E}_1[\nu\varepsilon_1 s_0 e^t + (1+\alpha_2)\varepsilon_2 s_0 e^t];\\
S &= 0{,}5(1-\nu)\bar{E}_1 \omega s_0 e^t;\\
\frac{1}{s_0 e^t} M_1 &= \bar{E}_2[(1+\varrho_1)\varkappa_1 s_0^2 e^{2t} + \nu\varkappa_2 s_0^2 e^{2t}] = \overline{M}_1;\\
\frac{1}{s_0 e^t} M_2 &= \bar{E}_2[\nu\varkappa_1 s_0^2 e^{2t} + (1+\varrho_2)\varkappa_2 s_0^2 e^{2t}] = \overline{M}_2;
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

$$\frac{1}{s_0 e^t} H = (1-\nu)(1+\gamma)\,\overline{E}_2 \tau s_0^2 e^{2t} = \overline{H},$$

где

$$\overline{E}_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)}\cdot\frac{h_0}{s_0},$$

$$\overline{E}_2 = \frac{E}{12(1-\nu^2)}\cdot\frac{h_0^3}{s_0^3}. \qquad (4.22)$$

Представим соотношения (4.21) в матричном виде

$$\begin{Vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ S \\ \overline{M}_1 \\ \overline{M}_2 \\ \overline{H} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} (1+\alpha_1)\overline{E}_1 & \nu\overline{E}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu\overline{E}_1 & (1+\alpha_2)\overline{E}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5(1-\nu)\overline{E}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\varrho_1)\overline{E}_2 & \nu\overline{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu\overline{E}_2 & (1+\varrho_2)\overline{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)(1+\gamma)\overline{E}_2 \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \varepsilon_1 s_0 e^t \\ \varepsilon_2 s_0 e^t \\ \omega s_0 e^t \\ \varkappa_1 s_0^2 e^{2t} \\ \varkappa_2 s_0^2 e^{2t} \\ \tau s_0^2 e^{2t} \end{vmatrix}, \tag{4.23}$$

или

$$\overline{T} = B\Omega. \tag{4.24}$$

Для цилиндрической оболочки легко получить аналогичную зависимость.

Установим некоторые вспомогательные соотношения между величинами T и $\overline{T}$, которые окажутся полезными в дальнейшем,

$$T_1 = T_1, \quad T_2 = T_2, \quad S = S;$$

$$\overline{M}_1 = \frac{1}{s_0 e^t} M, \qquad \overline{M}_2 = \frac{1}{s_0 e^t} M_2, \qquad \overline{H} = \frac{1}{s_0 e^t} H;$$

$$\frac{1}{s_0 e^t} M_1' = \overline{M}_1 + \overline{M}_1', \qquad \frac{1}{s_0 e^t} M_1'' = \overline{M}_1 + 2\overline{M}_1' + \overline{M}_1'';$$

$$\frac{1}{s_0 e^t} M_2' = \overline{M}_2 + \overline{M}_2'; \tag{4.25}$$

$$\frac{1}{s_0 e^t} H' = \overline{H} + \overline{H}'$$

для конической оболочки и

$$T_1 = T_1, \quad T_2 = T_2, \quad S = S;$$

$$\overline{M}_1 = \frac{1}{r} M_1, \qquad \overline{M}_2 = \frac{1}{r} M_2, \qquad \overline{H} = \frac{1}{r} H;$$

$$\frac{1}{r} M_1' = \overline{M}_1' \tag{4.26}$$

для цилиндрической оболочки.

§ 5. Система разрешающих дифференциальных уравнений

Уравнениям равновесия (2.9) с помощью соотношений (4.25) легко придать несколько иной вид

$$\left\| \begin{matrix} 1+\dfrac{d}{dt} & -1 & \pm\bar{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp\bar{n} & 2+\dfrac{d}{dt} & 0 & \mp\bar{n}\operatorname{ctg}\delta\left(1+\dfrac{d}{dt}\right) & 2\operatorname{ctg}\delta\left(2+\dfrac{d}{dt}\right) \\ 0 & -\operatorname{ctg}\delta & 0 & 2+3\dfrac{d}{dt}+\dfrac{d^2}{dt^2} & -\left(\bar{n}^2+1+\dfrac{d}{dt}\right) & \pm 2\bar{n}\left(2+\dfrac{d}{dt}\right) \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left| \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ S \\ \overline{M}_1 \\ \overline{M}_2 \\ \overline{H} \end{matrix} \right| = -s_0 e^t \left| \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{matrix} \right|. \tag{5.1}$$

Для цилиндрической оболочки получим соответственно

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{d}{dx} & 0 & \pm n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp n & 0 & 0 & \mp n & 2\dfrac{d}{dx} \\ 0 & -1 & 0 & \dfrac{d^2}{dx^2} & -n^2 & \pm 2n\dfrac{d}{dx} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ S \\ \overline{M}_1 \\ \overline{M}_2 \\ \overline{H} \end{Vmatrix} = -r \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Vmatrix}. \qquad (5.1')$$

Системы дифференциальных уравнений равновесия (5.1) и (5.1′) символически записываем в форме

$$A\overline{T} = -Q. \qquad (5.2)$$

Таким образом, для рассматриваемых конической и цилиндрической конструктивно ортотропных оболочек вращения сформулированы в матричном виде:

а) уравнения равновесия элемента срединной поверхности оболочки (5.2)

$$A\overline{T} = -Q;$$

б) соотношения упругости (4.24)

$$\overline{T} = B\Omega;$$

в) выражения для деформаций элемента срединной поверхности (3.7)

$$\Omega = CV.$$

Благодаря специальному выбору геометрических параметров оболочек и независимых переменных t и x соответственно для конической и цилиндрической оболочек элементы матрицы B и коэффициенты при дифференциальных операторах, входящих в элементы матриц A и C, получились величинами постоянными.

Дальнейший ход построений заключается в следующем. Из уравнений равновесия элемента срединной поверхности оболочки (5.2) при помощи соотношений упругости (4.24) исключим усилия $\overline{T}$

$$AB\Omega = -Q.$$

Из полученного выражения, используя зависимости (3.7), исключим деформации Ω

$$ABCV = -Q. \qquad (5.3)$$

В выражение (5.3) входят только три функции u, v, w (вектор V), коэффициентами при которых являются элементы матрицы ABC. Так как элементы матриц A, B и C

являются постоянными величинами, то для определения элементов матрицы ABC достаточно просто перемножить эти матрицы.

Выполнив эти действия, получим систему дифференциальных уравнений

$$-[1+\alpha_2-\nu+0{,}5(1-\nu)\bar{n}^2]u+(1+\alpha_1)(u'+u'')\mp$$

$$\mp(1{,}5+\alpha_2-1{,}5\nu)\bar{n}v\pm 0{,}5(1+\nu)\bar{n}v'-(1+\alpha_2-\nu)\operatorname{ctg}\delta w+$$

$$+\nu\operatorname{ctg}\delta w'=-\frac{(1-\nu^2)s_0^2e^t}{Eh_0}q_1;$$

$$\mp(2+\alpha_2-\nu)\bar{n}u\mp 0{,}5(1+\nu)\bar{n}u'-[1-\nu+(1+\alpha_2)\bar{n}^2]v+$$

$$+0{,}5(1-\nu)(v'-v'')\mp(1+\alpha_2)\operatorname{ctg}\delta\bar{n}\times$$

$$\times\left(1+\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h_0^2}{12s_0^2}\bar{n}^2\right)w\pm\frac{\operatorname{ctg}\delta h_0^2\bar{n}}{12s_0^2}[1+\varrho_2-\nu+$$

$$+2(1-\nu)(1+\gamma)]w'\pm\frac{\operatorname{ctg}\delta h_0^2\bar{n}}{12s_0^2}[\nu+2(1-\nu)(1+\gamma)]w''=$$

$$=-\frac{(1-\nu^2)s_0^2e^t}{Eh_0}q_2; \qquad (5.4)$$

$$(1+\alpha_2)\operatorname{ctg}\delta u+\nu\operatorname{ctg}\delta u'\pm(1+\alpha_2)\operatorname{ctg}\delta\bar{n}\times$$

$$\times\left(1+\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h_0^2\bar{n}^2}{12s_0^2}\right)v\pm\frac{\operatorname{ctg}\delta h_0^2}{12s_0^2}\bar{n}[1+\varrho_2-3\nu-$$

$$-2(1-\nu)(1+\nu)]v'\mp\frac{\operatorname{ctg}\delta h_0^2\bar{n}}{12s_0^2}[\nu+2(1-\nu)(1+\gamma)]v''+$$

$$+(1+\alpha_2)\left\{\operatorname{ctg}^2\delta+(1+\bar{n}^2)\frac{(1+\varrho_2)h_0^2\bar{n}^2}{(1+\alpha_2)12s_0^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+\frac{4(1-\nu)(1+\gamma)-2\nu)}{(1+\bar{n}^2)(1+\varrho_2)}\right]\right\}w-$$

$$-\frac{h_0^2}{12s_0^2}\{3+2\varrho_1+\varrho_2-3\nu+2\bar{n}^2[\nu+(1-\nu)(1+\gamma)]\}w'-$$

$$-\frac{h_0^2}{12s_0^2}\{-(1+\varrho_1)+3+2\varrho_1+\varrho_2-3\nu+2\bar{n}^2[\nu+$$

$$+(1-\nu)(1+\nu)]\}\,w''+\frac{h_0^2}{12s_0^2}(1+\varrho_1)(2w'''+w^{\mathrm{IV}})=\frac{(1-\nu^2)s_0^2e'}{Eh_0}q_3$$

для конической оболочки и

$$-0{,}5\,(1-\nu)\,n^2u+(1+\alpha_1)u''\pm 0{,}5(1+\nu)nv'+\nu w'=$$

$$=-\frac{(1-\nu^2)r^2}{Eh}q_1;$$

$$\mp 0{,}5\,(1+\nu)\,nu'-n^2(1+\alpha_2)\,v+0{,}5\,(1-\nu)\,v''\mp$$

$$\mp(1+\alpha_2)\,n\left[1+\underline{\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h^2n^2}{12r^2}}\right]w\pm\frac{h^2n}{12r^2}[\nu+$$

$$+2(1-\nu)(1+\gamma)]w''=-\frac{(1-\nu^2)\,r^2}{Eh}q_2; \qquad (5.5)$$

$$\nu u'\pm(1+\alpha_2)n\left[1+\underline{\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h^2n^2}{12r^2}}\right]v\mp\frac{h^2n}{12r^2}[\nu+$$

$$+2(1-\nu)(1+\gamma)]v''+(1+\alpha_2)\left[1+\underline{n^2\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h^2n^2}{12r^2}}\right]w-$$

$$-\frac{2h^2n^2}{12r^2}[\nu+(1-\nu)\,(1+\gamma)]\,w''+$$

$$+\frac{h^2}{12r^2}(1+\varrho_1)\,w^{\mathrm{IV}}=\frac{(1-\nu^2)\,r^2}{Eh}q_3$$

для цилиндрической оболочки.

При выводе уравнений (5.4) и (5.5) величины порядка $\frac{h}{R}$ по сравнению с единицей опускались. Однако подчеркнутыми выше величинами, вообще говоря, пренебрегать нельзя, так как при высоких гармониках n разложения (2.5) внешней нагрузки эти величины могут быть сравнимы с единицей.

При принятой в технических расчетах точности подчеркнутыми пунктирной линией величинами можно пренебречь, если

$$\frac{(1+\varrho_2)h^2n^2}{12(1+\alpha_2)r^2} \leqslant \frac{1}{20}, \tag{5.6}$$

$$n \leqslant \frac{r}{h}\sqrt{\frac{0{,}6(1+\alpha_2)}{1+\varrho_2}}. \tag{5.7}$$

Подчеркнутыми сплошной линией величинами можно пренебречь при условии

$$n \leqslant \sqrt{\frac{r}{h}}\sqrt[4]{\frac{0{,}6(1+\alpha_2)}{1+\varrho_2}}. \tag{5.8}$$

Неравенства (5.7) и (5.8) выведены для цилиндрической оболочки. Для конической оболочки выполняется равенство

$$\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h_0^2}{12s_0^2}\cdot\frac{n^2}{\sin^2\delta} = \frac{(1+\varrho_2)h_0^2n^2}{12(1+\alpha_2)r_0^2}. \tag{5.9}$$

Здесь r_0 — радиус параллельного круга для сечения, в котором толщина оболочки равна h_0. Так как правая часть выражения (5.9) идентична левой части неравенства (5.6), то условия (5.7) и (5.8) сохраняют силу и для конической оболочки.

Уравнения (5.4) и (5.5) относительно трех основных функций u, v, w составляют системы обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений восьмого порядка. Благодаря специальному выбору параметров (толщины и размеров подкрепляющих ребер) оболочек коэффициенты этих уравнений удалось получить постоянными.

Системы (5.4) и (5.5) являются основными разрешающими уравнениями задачи, так как после их интегрирования, т. е. определения функций u, v и w, по формулам, приведенным в параграфах этой главы, легко определяются величины, характеризующие напряженное и деформированное состояние оболочки.

ГЛАВА II

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 6. Матричная форма разрешающих уравнений

Введем обозначения для коэффициентов дифференциальных уравнений равновесия (5.3)

$$-a_{11}u + a_{12}(u' + u'') \mp b_{11}v \pm b_{12}v' - c_{11}w + c_{12}w' = = -\frac{(1-\nu^2)s_0e^t}{Eh_0}q_1;$$

$$\mp a_{21}u \mp b_{12}u' - b_{21}v + b_{22}(v' + v'') \mp \bar{c}_{21}w \mp \bar{c}_{22}w' \pm \bar{c}_{23}w'' = = -\frac{(1-\nu^2)s_0^2e^t}{Eh_0}q_2; \qquad (6.1)$$

$$a_{31}u + c_{12}u' \pm \bar{c}_{21}v \mp \bar{b}_{31}v' \mp \bar{c}_{23}v'' + \bar{c}_{31}w - \bar{c}_{32}w' + + (\bar{c}_{34} - \bar{c}_{32})w'' + \bar{c}_{34}(2w''' + w^{IV}) = \frac{(1-\nu^2)s_0^2e^t}{Eh_0}q_3.$$

Для сокращения записи величин a, b и c, входящих в уравнения (6.1), приводить не будем; их легко получить, сравнивая аналогичные члены уравнений (5.3) и (6.1). Чертой сверху отмечены коэффициенты, содержащие величину $\frac{h_0^2}{12s_0^2}$.

Уравнения равновесия (5.5) цилиндрической оболочки при принятых обозначениях приобретают форму

$$a_{11}u + a_{12}u'' \pm b_{12}v' + \nu w' = -\frac{(1-\nu^2)r^2}{Eh}q_1;$$

$$\mp b_{12}u' - b_{21}v + b_{22}v'' \mp \bar{c}_{21}w \pm \bar{c}_{23}w'' = -\frac{(1-\nu^2)r^3}{Eh}q_2; \quad (6.2)$$

$$\nu u' \pm \bar{c}_{21} v \mp \bar{c}_{23} v'' + \bar{c}_{31} w - \bar{c}_{33} w'' + \bar{c}_{34} w^{\mathrm{IV}} = \frac{(1-\nu^2)\, r^2}{Eh} q_3.$$

Величины коэффициентов системы (6.2) также легко определить, сравнивая уравнения (6.2) с соответствующими уравнениями системы (5.5).

Решение системы неоднородных дифференциальных уравнений (6.1) складывается из общего решения системы соответствующих однородных уравнений и частного решения, зависящего от вида правых частей уравнений (6.1), т. е. от внешней нагрузки, действующей на оболочку.

Перейдем к определению общего решения однородной системы уравнений, соответствующей системе (6.1). Величины, относящиеся к этому случаю, будем отмечать индексом «0».

Исключим из первого уравнения старшую производную функции u^0, т. е. $u^{0''}$, из второго уравнения — производную $v^{0''}$ и из третьего уравнения—четвертую производную функции w^0, т. е. $w^{0\,\mathrm{IV}}$,

$$u^{0''} = \frac{a_{11}}{a_{12}} u^0 - u^{0'} \pm \frac{b_{11}}{a_{12}} v^0 \mp \frac{b_{12}}{a_{12}} v^{0'} + \frac{c_{11}}{a_{12}} w^0 - \frac{c_{12}}{a_{12}} w^{0'};$$

$$v^{0''} = \pm \frac{a_{21}}{b_{22}} u^0 \pm \frac{b_{12}}{b_{22}} u^{0'} + \frac{b_{21}}{b_{22}} v^0 - v^{0'} \pm$$

$$\pm \frac{\bar{c}_{21}}{b_{22}} w^0 \mp \frac{\bar{c}_{22}}{b_{22}} w^{0'} \mp \frac{\bar{c}_{23}}{b_{22}} w^{0''};$$

$$w^{0\,\mathrm{IV}} = -\frac{a_{31}}{\bar{\bar{c}}_{34}} u^0 - \frac{c_{12}}{\bar{\bar{c}}_{34}} u^{0'} \mp \frac{\bar{c}_{21}}{\bar{\bar{c}}_{34}} v^0 \mp \frac{\bar{b}_{31}}{\bar{\bar{c}}_{34}} v^{0'} \pm$$

$$\pm \frac{\bar{c}_{23}}{\bar{\bar{c}}_{34}} v^{0''} - \frac{\bar{c}_{31}}{\bar{\bar{c}}_{34}} w^0 + \frac{\bar{c}_{32}}{\bar{\bar{c}}_{34}} w^{0'} + \left(\frac{\bar{c}_{32}}{\bar{\bar{c}}_{34}} - 1\right) w^{0''} - 2w^{0'''}. \tag{6.3}$$

Теперь при помощи второго уравнения системы (6.3) исключим из третьего уравнения этой системы величину $v^{0''}$

$$w^{0\,\mathrm{IV}} = \left(\frac{a_{21}\bar{c}_{23}}{b_{22}\bar{\bar{c}}_{34}} - \frac{a_{31}}{\bar{\bar{c}}_{34}}\right) u^0 + \left(\frac{b_{12}\bar{c}_{23}}{b_{22}\bar{\bar{c}}_{34}} - \frac{c_{12}}{\bar{\bar{c}}_{34}}\right) u^{0'} \pm$$

$$\pm\left(\frac{b_{21}\bar{c}_{23}}{b_{22}\bar{c}_{34}}-\frac{\bar{c}_{21}}{\bar{c}_{34}}\right)v^0 \mp\left(\frac{\bar{b}_{31}}{\bar{c}_{34}}+\frac{\bar{c}_{23}}{\bar{c}_{34}}\right)v^{0'}+$$

$$+\left(\frac{\bar{c}_{21}\bar{c}_{23}}{b_{22}\bar{c}_{34}}-\frac{\bar{c}_{31}}{\bar{c}_{34}}\right)w^0-\left(\frac{\bar{c}_{23}\bar{c}_{22}}{b_{22}\bar{c}_{34}}-\frac{\bar{c}_{32}}{\bar{c}_{34}}\right)w^{0'}-$$

$$-\left(\frac{\bar{c}_{23}^2}{b_{22}\bar{c}_{34}}-\frac{\bar{c}_{32}}{\bar{c}_{34}}+1\right)w^{0''}-2w^{0'''} \tag{6.4}$$

Добавив некоторые очевидные равенства, представим первые два уравнения системы (6.3) и уравнение (6.4) в виде:

$$\left|\begin{matrix} v^{0'} \\ v^{0''} \\ u^{0'} \\ u^{0''} \\ w^{0'} \\ w^{0''} \\ w^{0'''} \\ w^{0\,\mathrm{IV}} \end{matrix}\right|_t = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & -1 & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} & g_{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & -1 & g_{45} & g_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ g_{81} & g_{82} & g_{83} & g_{84} & g_{85} & g_{86} & g_{87} & -2 \end{matrix}\right\| \times$$

$$\times\left|\begin{matrix} v_0 \\ v^{0'} \\ u^0 \\ u^{0'} \\ w^0 \\ w^{0'} \\ w^{0''} \\ w^{0'''} \end{matrix}\right|_t . \tag{6.5}$$

Равенство (6.5) представляет в матричной форме систему разрешающих дифференциальных уравнений задачи. Индексы «t» при векторах указывают на то, что соответствующие величины являются функциями аргумента t.

Элементы g_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, 8$) квадратной матрицы восьмого порядка являются коэффициентами преобразованных при помощи соотношений (6.3) и (6.4) однородных уравнений, соответствующих системе (5.3). Эти элементы определяются из сравнения второй строки матрицы со вторым уравнением (6.3) четвертой строки — с первым уравнением (6.3) и восьмой строки — с уравнением (6.4). Так как коэффициенты этих уравнений соответствуют коэффициентам уравнений равновесия (5.3), то легко вычислить значения элементов g_{ij}

$$g_{21} = 2\left(1 + \bar{n}^2 \frac{1+\alpha_2}{1-\nu}\right); \qquad g_{23} = \pm 2\bar{n}\frac{2+\alpha_2-\nu}{1-\nu};$$

$$g_{24} = \pm \bar{n}\frac{1+\nu}{1-\nu}; \qquad g_{25} = \pm \frac{2\operatorname{ctg}\delta\,(1+\alpha_2)\,\bar{n}}{1-\nu} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h_0^2\bar{n}^2}{12s_0^2}\right);$$

$$g_{26} = \mp \frac{2\operatorname{ctg}\delta\, h_0^2\bar{n}}{12(1-\nu)s_0^2}\,[1+\varrho_2-\nu+2(1-\nu)(1+\gamma)];$$

$$g_{27} = \pm \frac{2\operatorname{ctg}\delta\, h_0^2\bar{n}}{12(1-\nu)s_0^2}\,[\nu+2(1-\nu)(1+\gamma)];$$

$$g_{41} = \pm \frac{(1{,}5+\alpha_2-1{,}5\nu)\,\bar{n}}{1+\alpha_1}; \qquad g_{42} = \mp \frac{(1+\nu)\,\bar{n}}{2(1+\alpha_1)};$$

$$g_{43} = \frac{1}{1+\alpha_1}\left(1+\alpha_2-\nu+\frac{1-\nu}{2}\bar{n}^2\right);$$

$$g_{45} = \frac{1+\alpha_2-\nu}{1+\alpha_1}\operatorname{ctg}\delta; \qquad g_{46} = -\frac{\nu\operatorname{ctg}\delta}{1+\alpha_1}; \tag{6.6}$$

$$g_{81} = \mp \frac{12(1+\alpha_2)\operatorname{ctg}\delta\cdot\bar{n}s_0^2}{(1+\varrho_1)h_0^2} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\bar{n}^2h_0^2}{12s_0^2}\cdot\left(\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2} - \frac{2\nu}{1-\nu} - \frac{1+\gamma}{0{,}25}\right)\right];$$

$$g_{82} = \mp \frac{\operatorname{ctg}\delta \cdot \bar{n}}{1+\varrho_1}\,(1 \pm \varrho_2 - 2\nu);$$

$$g_{83} = -\frac{12\,(1+\alpha_2)\operatorname{ctg}\delta \cdot s_0^2}{(1+\varrho_1)\,h_0^2} \times$$

$$\times \left[1 - \left(1 + \frac{1-\nu}{1+\alpha_2}\right)\frac{h_0^2\bar{n}^2}{12 s_0^2}\left(\frac{2\nu}{1-\nu} + \frac{1+\nu}{0{,}25}\right)\right];$$

$$g_{84} = -\frac{12\operatorname{ctg}\delta s_0^2}{(1+\varrho_1)\,h_0^2}\left[\nu - 0{,}5(1+\nu)\,\frac{h_0^2\bar{n}^2}{12 s_0^2}\left(\frac{2\nu}{1-\nu} + \frac{1+\gamma}{0{,}25}\right)\right];$$

$$g_{85} = -\frac{12\,(1+\alpha_2)\,s_0^2}{(1+\varrho_1)\,h_0^2}\left\{\operatorname{ctg}^2\delta\left[1 - \frac{h_0^2\bar{n}^2}{12 s_0^2}\left(\frac{2\nu}{1-\nu} + \frac{1+\gamma}{0{,}25}\right)\right] + \right.$$

$$\left. \pm (1+\bar{n}^2)\,\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h_0^2\bar{n}^2}{12 s_0^2}\left[1 + \frac{4\,(1-\nu)(1+\gamma) - 2\nu}{(1+\bar{n}^2)\,(1+\varrho_2)}\right]\right\};$$

$$g_{86} = 2 + \frac{1 \pm \varrho_2 - 3\nu}{1+\varrho_1} + 2\bar{n}^2\frac{\nu + (1-\nu)\,(1+\gamma)}{1+\varrho_1}; \quad g_{87} = g_{86} - 1.$$

Однородные уравнения для цилиндрической оболочки, соответствующие уравнениям равновесия (5.5), можно представить в матричной форме

$$\left|\begin{matrix} v^{0\prime} \\ v^{0\prime\prime} \\ u^{0\prime} \\ u^{0\prime\prime} \\ w^{0\prime} \\ w^{0\prime\prime} \\ w^{0\prime\prime\prime} \\ w^{0IV} \end{matrix}\right|_x = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & 0 & g_{24} & g_{25} & 0 & g_{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{42} & g_{43} & 0 & 0 & g_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ g_{81} & 0 & 0 & g_{84} & g_{85} & 0 & g_{87} & 0 \end{matrix}\right\| \times$$

$$\times \left| \begin{matrix} v^0 \\ v^{0'} \\ u^0 \\ u^{0'} \\ w^0 \\ w^{0'} \\ w^{0''} \\ w^{0'''} \end{matrix} \right|_x . \tag{6.7}$$

Элементы g_{ij} квадратной матрицы равны

$$g_{21} = \frac{2n^2(1+\alpha_2)}{1-\nu}; \qquad g_{24} = \pm \frac{n(1+\nu)}{1-\nu};$$

$$g_{25} = \pm \frac{2n(1+\alpha_2)}{1-\nu}\left(1 + \underline{\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h^2n^2}{12r^2}}\right); \tag{6.8}$$

$$g_{27} = \mp \frac{2h^2n}{12(1-\nu)r^2}[\nu + 2(1-\nu)(1+\gamma)];$$

$$g_{42} = \mp \frac{n(1+\nu)}{2(1+\alpha_1)}; \qquad g_{43} = \frac{n^2(1-\nu)}{2(1+\alpha_1)}; \qquad g_{46} = -\frac{\nu}{1+\alpha_1};$$

$$g_{81} = \mp \frac{12(1+\alpha_2)nr^2}{(1+\varrho_1)h^2} \times$$

$$\times \left[1 + \underline{\frac{h^2n^2}{12r^2}\left(\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2} - \frac{2\nu}{1-\nu} - \frac{1+\gamma}{0,25}\right)}\right];$$

$$g_{84} = -\frac{12r^2}{(1+\varrho_1)h^2}\left[\nu - \underline{\frac{0,5h^2n^2}{12r^2}(1+\nu)\left(\frac{2\nu}{1-\nu} + \frac{1+\nu}{0,25}\right)}\right];$$

$$g_{85} = -\frac{12(1+\alpha_2)r^2}{(1+\varrho_1)h^2} \times$$

$$\times \left[1 + \underline{\frac{h^2n^2}{12r^2}\left(n^2\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\right.} \underline{\left. - \frac{2\nu}{1-\nu} - \frac{1+\gamma}{0,25}\right)}\right];$$

$$g_{87} = \frac{2n^2}{1+\varrho_1}[\nu + (1-\nu)(1+\gamma)].$$

Элементы (6.6) и (6.8) являются величинами постоянными. Отметим еще одно обстоятельство. Как в уравнениях (6.5), так и в уравнениях (6.7) вектор, стоящий слева от знака равенства, состоит из первых производных от величин, составляющих второй вектор. На этом основании системы дифференциальных уравнений (6.5) и (6.7) можно символически представить в виде одного дифференциального уравнения первого порядка

$$U_t^{0'} = GU_t^0 \tag{6.9}$$

для конической оболочки и

$$U_x^{0'} = GU_x^0 \tag{6.10}$$

для цилиндрической оболочки.

В уравнениях (6.9) и (6.10) обозначено:

$U^0 = | v^0, v^{0'} \ldots, w^{0'''} |$ — вектор основных неизвестных;
$G = \| q_{ij} \|$ — квадратная матрица восьмого порядка.

Так как элементы матрицы G, определяемые формулами (6.6) и (6.8),— величины постоянные, то уравнения (6.9) и (6.10) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка с постоянными коэффициентами.

§ 7. Интегрирование однородной системы дифференциальных уравнений при помощи матричных рядов

В предыдущем параграфе было показано, что решение поставленной задачи свелось к интегрированию матричного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами

$$U_t^{0'} = GU_t^0 \tag{7.1}$$

для конической оболочки и уравнения

$$U_x^{0'} = GU_x^0 \tag{7.2}$$

для цилиндрической оболочки.

Для интегрирования этих уравнений применим метод, изложенный в работе [18].

Будем искать решение уравнения (7.1), удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$U^0_{1|t=t_0} = U^0_{10},\ U^0_{2|t=t_0} = U^0_{20}, \ldots,\ U^0_{k|t=t_0} = U^0_{k0},$$

$$U^0_{/t=t_0} = U^0_0. \tag{7.3}$$

Разложим искомый вектор U^0_t в ряд Тэйлора по степеням $t - t_0$

$$U^0_t = U^0_0 + U^{0'}_0 (t - t_0) + U^{0''}_0 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + U^{0'''}_0 \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \ldots \tag{7.4}$$

Из (7.1) почленным дифференцированием находим

$$\begin{aligned} U^{0''}_t &= GU^{0'}_t = G^2 U^0_t; \\ U^{0'''}_t &= GU^{0''}_t = G^3 U^0_t, \ldots \end{aligned} \tag{7.5}$$

Подставляя в (7.1) и (7.5) значение независимой переменной $t = t_0$, получаем

$$U^{0'}_0 = GU^0_0,\ U^{0''}_0 = G^2 U^0_0, \ldots, \tag{7.6}$$

и ряд (7.4) можно записать в виде

$$U^0_t = U^0_0 + (t - t_0) GU^0_0 + \frac{(t - t_0)^2}{2!} G^2 U^0_0 + \ldots =$$

$$= U^0_0 \left[I + (t - t_0) G + \frac{(t - t_0)^2}{2!} G^2 + \ldots \right] = e^{G(t-t_0)} U^0_0, \tag{7.7}$$

где I — единичная матрица 8-го порядка.

Непосредственной подстановкой выражения (7.7) в матричное дифференциальное уравнение (7.1) убеждаемся в том, что ряд (7.7) является решением уравнения (7.1). Таким образом, формула (7.7) представляет решение системы дифференциальных уравнений равновесия, удовлетворяющее начальным условиям (7.3)

Если в качестве начального значения аргумента взять значение $t = 0$, что соответствует разложению решения в ряд Маклорена, то выражение (7.7) переходит в формулу

$$U^0_t = e^{Gt} U^0_0. \tag{7.8}$$

Решение уравнения (7.2) для цилиндрической оболочки представим в виде

$$U_x^0 = e^{G(x-x_0)} U_0^0, \tag{7.9}$$

$$U_x^0 = e^{Gx} U_0^0. \tag{7.10}$$

Матричный ряд (7.7) абсолютно и равномерно сходится при всех значениях аргумента t.

Интегрирование систем дифференциальных уравнений равновесия конической и цилиндрической оболочек сводится, таким образом, к вычислению элементов матриц $e^{G(t-t_0)}$ и $e^{G(x-x_0)}$ или элементов матриц e^{Gt} и e^{Gx}, что легко осуществляется на электронных цифровых вычислительных машинах.

§ 8. Частные интегралы системы дифференциальных уравнений равновесия

Для полного решения системы неоднородных дифференциальных уравнений равновесия (6.1) необходимо еще найти частные интегралы этой системы.

Учитывая, что коэффициенты уравнений системы (6.1) величины постоянные, применим для этой цели метод неопределенных коэффициентов [4].

Представим внешнюю нагрузку $q(t)$, действующую на оболочку, в виде многочлена k-й степени

$$e^t q(t) = q_1 e^t + q_2 e^{2t} + q_3 e^{3t} + \ldots + q_k e^{kt} = \sum_{m=1}^{k} q_m e^{mt} \tag{8.1}$$

коэффициенты которого q_m определяются формулой Лагранжа из условия, чтобы интерполирующий полином (8.1) принимал в узлах интерполяции те же значения, что и интерполируемая функция $q(t)$.

Подставим разложение (8.1) в правые части уравнений (6.1) и обозначим частные интегралы соответствующих функций индексом «*»; тогда

$$-a_{11}u^{*} + a_{12}(u^{*\prime} + u^{*}) \mp b_{11}v^{*} \pm b_{12}v^{*\prime} - c_{11}w^{*} +$$

$$+ c_{12}w^{*\prime} = -\frac{(1-\nu^2)\, s_0^2}{Eh_0} \sum_{m=1}^{k} q_{1m} e^{mt};$$

$$
\begin{gathered}
-a_{21}\, u^{*} \mp b_{12}\, u^{*'} - b_{21}\, v^{*} + b_{22}(v^{*'} + v^{*^{\cdot}}) \mp \bar{c}_{21} w^{*} \pm \\
\pm \bar{c}_{22} w^{*'} \pm \bar{c}_{23} w^{*^{\cdot}} = -\frac{(1-\nu^2)\, s_0^2}{E h_0} \sum_{m=1}^{k} q_{2m} e^{mt};
\end{gathered} \tag{8.2}
$$

$$
\begin{gathered}
a_{31}\, u^{*} + c_{12} u^{*'} \pm \bar{c}_{21}\, v^{*} \pm \bar{b}_{31} v^{*'} \mp \bar{c}_{23} v^{*''} + \bar{c}_{31} w^{*} - \\
- \bar{c}_{32} w^{*'} + (\bar{c}_{34} - \bar{c}_{32})\, w^{*^{\cdot}} + \bar{c}_{34}\,(2 w^{*'''} + w^{*\mathrm{IV}}) = \\
= \frac{(1-\nu^2)\, s_0^2}{E h_0} \sum_{m=1}^{k} q_{3m} e^{mt}.
\end{gathered}
$$

Частные решения системы (8.2) будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
u^{*}(t) &= \sum_{m=1}^{k} \overset{*}{u}_m e^{mt}; \\
v^{*}(t) &= \sum_{m=1}^{k} \overset{*}{v}_m e^{mt}; \\
w^{*}(t) &= \sum_{m=1}^{k} \overset{*}{w}_m e^{mt},
\end{aligned} \tag{8.3}
$$

где $\overset{*}{u}_m$, $\overset{*}{w}_m$ и $\overset{*}{v}_m$ — неизвестные постоянные коэффициенты. Для их определения подставим значения функций $u^{*}(t)$, $v^{*}(t)$ и $w^{*}(t)$ (8.3) в уравнения (8.2). Записывая для сокращения письма только m-й член ряда (8.1) и соответствующие ему значения величин (8.3), получаем

$$
\begin{gathered}
[-a_{11} + a_{12}(m + m^2)]\, u_m^{*} + (\mp b_{11} \pm b_{12} m)\, v_m^{*} + \\
+ (-c_{11} + c_{12} m)\, w_m^{*} = -\frac{(1-\nu^2)\, s_0^2}{E h_0}\, q_{1m};
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(-a_{21} \mp b_{12} m)\, u_m^{*} + [-b_{21} + b_{22}(m + m^2)]\, v_m^{*} + \\
+ (\mp \bar{c}_{21} \pm \bar{c}_{22} m \pm \bar{c}_{23} m^2)\, w_m^{*} = -\frac{(1-\nu^2)\, s_0^2}{E h_0}\, q_{2m};
\end{gathered} \tag{8.4}
$$

$$(a_{31} + c_{12}m)u_m^* + (\pm \bar{c}_{21} \pm \bar{b}_{31}m \mp \bar{c}_{23}m^2)v_m' +$$

$$+ [\bar{c}_{31} - \bar{o}_{32}(m + m^2) + \bar{c}_{34}(m + m^2)^2]w_m^* = \frac{(1 - v^2)s_0^2}{Eh_0} q_{3m}.$$

Система линейных алгебраических уравнений (8.4) содержит в качестве неизвестных коэффициенты u_m^*, v_m^* и w_m^*. Составив для каждого номера m $(m = 1, 2, \ldots, k)$ аналогичную систему уравнений и решив ее, определим все коэффициенты разложений (8.3), после чего найдем по формулам (8.3) частные решения функций $u^*(t)$, $v^*(t)$ и $w^*(t)$, соответствующие полной нагрузке $q(t)$.

Внешнюю нагрузку, действующую на цилиндрическую оболочку, представим в виде полинома

$$q(x) = q_0 + q_1e^x + q_2e^{2x} + q_3e^{3x} + \ldots + q_me^{mx} = \sum_0^m q_m e^{mx}. \tag{8.5}$$

Частные решения функций u, v и w зададим в форме

$$u^*(x) = \sum_0^m u_m^* e^{mx}; \qquad v^*(x) = \sum_0^m u_m^* e^{mx};$$

$$w^*(x) = \sum_0^m w_m^* e^{mx}, \tag{8.6}$$

где u_m^*, v_m^* и w_m^* — неизвестные постоянные коэффициенты.

Подставив m-е члены рядов (8.5) и (8.6) в уравнения (6.2), получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов u_m^*, v_m^* и w_m^* при фиксированном значении m

$$(-a_{11} + a_{12}m^2)u_m^* \pm b_{12}mv_m^* + vmw_m^* = -\frac{(1 - v^2)r^2}{Eh} q_1;$$

$$\mp b_{12}mu_m^* + (-b_{12} + b_{22}m^2)v_m^* + (\mp \bar{c}_{21} \pm \bar{c}_{23}m^2)w_m^* =$$

$$= -\frac{(1 - v^2)r^2}{Eh} q_{2m}; \tag{8.7}$$

$$vmu_m^* + (\pm \bar{o}_{21} \mp \bar{c}_{23}m^2)v_m^* + (\bar{c}_{31} - \bar{c}_{33}m^2 + \bar{c}_{34}m^4)w_m^* =$$

$$= \frac{(1 - v^2)r_2}{Eh} q_{3m}.$$

Составив и решив m таких систем уравнений, получим значения всех коэффициентов рядов (8.6), т. е. найдем частные решения функций $u^*(x)$, $v^*(x)$ и $w^*(x)$.

Этим исчерпывается решение задачи об определении частных интегралов систем дифференциальных уравнений равновесия конической и цилиндрической оболочек.

Отметим одно важное обстоятельство. Частные интегралы, определяемые уравнения (8.4) и (8.7), являются точными, так как при их вычислении в уравнениях равновесия учитывались мембранные и моментные члены.

Однако при отыскании частных решений задачи может быть использован и другой метод, когда в уравнениях равновесия моментные члены, содержащие множитель $\frac{h_0^2}{12s_0^2}$, полагаются равными нулю, т. е. применяется мембранная теория.

Для оценки погрешности применения этого метода запишем уравнения (8.4) в мембранном варианте, другими словами, в уравнениях равновесия (5.3) приравняем нулю величины, имеющие множитель $\frac{h_0^2}{12s_0^2}$,

$$[-a_{11} \dotplus a_{12}(m \dotplus m^2)]\,u_m^* \dotplus (\mp b_{11} \dotplus b_{12}m)\,v_m^* \dotplus (-c_{11} \dotplus$$

$$\dotplus c_{12}m)\,w_m^* = -\frac{(1-\nu^2)\,s_0^2}{Eh_0}q_{1m}; \qquad (8.8)$$

$$(-a_{21} \mp b_{12}m)\,u_m^* \dotplus [-b_{21} \dotplus b_{22}(m \dotplus m^2)]\,v_m^* \mp (1 \dotplus$$

$$\dotplus \alpha_2)\operatorname{ctg}\sigma\bar{n}w_m^* = -\frac{(1-\nu^2)\,s_0^2}{Eh_0}q_{2m};$$

$$(a_{31} \dotplus c_{12}m)\,u_m^* \pm (1 \dotplus \alpha_2)\operatorname{ctg}\sigma\bar{n}v_m^* \dotplus (1 \dotplus \alpha_2)\operatorname{ctg}^2\sigma w_m^* =$$

$$= \frac{(1-\nu^2)\,s_0^2}{Eh_0}q_{3m}.$$

При написании уравнений (8.8) мы пренебрегаем величинами

$$\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h_n^2\bar{n}^2}{12s_0^2} \quad \text{и} \quad \frac{1 \dotplus \varrho_2}{1+\alpha_2}\;\frac{h_n^2\bar{n}^4}{12s_0^2} \qquad (8.9)$$

по сравнению с единицей, величинами

$$\frac{2h_0^2m^2}{12s_0^2}(1+\gamma) \tag{8.10}$$

по сравнению с

$$1+\frac{1+\sigma_2}{1+\alpha_2}\,\frac{h_0^2\bar{n}^2}{12s_0^2} \tag{8.11}$$

и коэффициентом

$$\frac{h_n^2m^4}{12s_0^2} \tag{8.12}$$

по сравнению с величиной

$$\frac{1+\alpha_2}{1+\varrho_1}\left(\operatorname{ctg}^2\delta+\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\,\frac{h_0^2\bar{n}^4}{12s_0^2}\right). \tag{8.13}$$

Это не выходит за пределы принятой точности вычислений, если выполняются условия (5.7), (5.8) и

$$\frac{h_0^2m^2}{12s_0^2}\,2(1+\gamma)<\frac{1}{20}\left(1+\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h_0^2\bar{n}^2}{12s_0^2}\right), \tag{8.14}$$

$$\frac{h_0^2m^4}{12s_0^2}\leqslant\frac{1+\alpha_2}{20(1+\varrho_1)}\left(\operatorname{ctg}^2\delta+\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h_0^2\bar{n}^4}{12s_0^2}\right). \tag{8.15}$$

Неравенства (8.14) и (8.15) можно преобразовать к ду

$$m<\frac{s_0}{h_0}\sqrt{\frac{0{,}3}{1+\gamma}\left(1+\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h_0^2\bar{n}^2}{12s_0^2}\right)}; \tag{8.16}$$

$$m<\sqrt{\frac{s_0}{h_0}}\sqrt[4]{\frac{0{,}6(1+\alpha_2)}{1+\varrho_1}\left(\operatorname{ctg}^2\delta+\frac{1+\varrho_2}{1+\alpha_2}\cdot\frac{h_0^2\bar{n}^4}{12s_0^2}\right)}. \tag{8.17}$$

На основании изложенного приходим к важному практическому выводу. Критерием применимости мембранной теории для определения частных интегралов дифференциальных уравнений конической конструктивно-ортотропной оболочки является выполнение условий, определяющих максимальные величины показателей изменяемости внешней нагрузки n (в кольцевом направлении) и m (в меридиональном направлении),

$$n < \sqrt{\frac{s_0 \cos \delta}{h_0}} \sqrt[4]{\frac{0,6\,(1+\alpha_2)}{1+\varrho_2}}; \tag{8.18}$$

$$m < \sqrt{\frac{s_0 \operatorname{ctg} \delta}{h_0}} \sqrt[4]{\frac{0,6\,(1+\alpha_2)}{1+\varrho_1}}. \tag{8.19}$$

Соответствующие условия для цилиндрической конструктивно-ортотропной оболочки, определенные путем аналогичных рассуждений, имеют вид

$$n < \sqrt{\frac{r}{h}} \sqrt{\frac{0,6\,(1+\alpha_2)}{1+\varrho_2}}; \tag{8.20}$$

$$m < \sqrt{\frac{r}{h}} \sqrt[4]{\frac{0,6\,(1+\alpha_2)}{1+\varrho_1}}. \tag{8.21}$$

ГЛАВА III

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

§ 9. Общее решение для отдельной оболочки

В предыдущей главе было получено общее решение системы дифференциальных уравнений равновесия, записанных в перемещениях u, v и w срединной поверхности оболочки,

$$U_t = U_t^0 + U_t^* \tag{9.1}$$

для конической оболочки и

$$U_x = U_x^0 + U_x^* \tag{9.2}$$

для цилиндрической оболочки.

Однако в общие решения однородных дифференциальных уравнений U_t^0 и U_x^0 входят неизвестные начальные параметры

$$U_0^0 = |v_0^0,\ v_0^{0'},\ u_0^0,\ u_0^{0'},\ w_0^{0'},\ w_0^{0''},\ w_0^{0'''}|. \tag{9.3}$$

Для их определения необходимо подчинить решения (9.1) и (9.2) заданным граничным условиям задачи, т. е. тем соотношениям, заданным на краях оболочки, которые связывают усилия, моменты, перемещения или их функции.

Как показал В. В. Новожилов в работе [57], напряженное состояние на краю оболочки и перемещения точек этого края полностью определяются величинами

$$v,\ T_{12} + \frac{M_{12}}{s \cdot \operatorname{tg} \delta},\ u,\ w,\ \theta_1,\ T_1,\ M_1,\ N_1 + \frac{1}{s \cdot \sin \delta} \cdot \frac{dM_{12}}{ds} \tag{9.4}$$

для конической оболочки и

$$v,\ T_{12} + \frac{M_{12}}{r},\ u,\ w,\ \theta_1,\ T_1,\ M_1,\ N_1 + \frac{1}{r}\frac{dM_{12}}{ds} \tag{9.5}$$

для цилиндрической оболочки.

Выражения

$$T_{12} + \frac{M_{12}}{s \cdot \operatorname{tg} \delta} \text{ и } N_1 + \frac{1}{s \cdot \sin \delta} \frac{dM_{12}}{ds}$$

являются соответственно обобщенными касательными и перерезывающими усилиями и связаны с функциями, введенными ранее, соотношениями

$$\overline{T}_{12} = T_{12} + \frac{\operatorname{ctg} \delta}{s} M_{12} = S + \frac{2 \operatorname{ctg} \delta}{s_0 e^t} H; \qquad (9.6)$$

$$\overline{N}_1 = N_1 + \frac{1}{\sin \delta s} \frac{dM_{12}}{ds} = \frac{1}{s_0 e^t} (M_1 - M_2 + M_1' \pm 2\overline{n}H).$$

Так как именно величины (9.4) и (9.6) характеризуют напряженное и деформированное состояние оболочки, то они и являются основными неизвестными функциями, подлежащими определению. Эти величины связаны с перемещениями u, v и w срединной поверхности оболочки соотношениями упругости. Величины $\overline{T}_{12}$ и $\overline{N}_1$ легко выразить через перемещения u, v и w при помощи уравнений (9.6). Приведем эти соотношения

$$\left| \begin{matrix} v \\ \overline{T}_{12} \\ u \\ w \\ \theta_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ \overline{N}_1 \end{matrix} \right|_t = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 & f_{25} & f_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{56} & 0 & 0 \\ f_{61} & 0 & f_{63} & f_{64} & f_{65} & 0 & 0 & 0 \\ f_{71} & 0 & 0 & 0 & f_{75} & f_{76} & f_{77} & 0 \\ f_{81} & f_{82} & 0 & 0 & f_{85} & f_{86} & f_{87} & f_{87} \end{matrix} \right\|_t \times \left| \begin{matrix} v \\ v' \\ u \\ u' \\ w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{matrix} \right|_t . \qquad (9.7)$$

Символически соотношения (9.7) можно представить в виде

$$W_t = F_t U_t. \qquad (9.8)$$

Элементы матрицы F_t равны

$$f_{21} = -\frac{Eh_0}{2(1+\nu)s_0}; \qquad f_{22} = -f_{21}; \qquad f_{23} = \pm \overline{n} f_{21};$$

$$f_{25} = \mp \frac{Eh_0^3 (1 + \gamma) \operatorname{ctg} \delta \bar{n}}{6 (1 + \nu) s_0^3}; \qquad f_{26} = -f_{25};$$

$$f_{56} = -\frac{1}{s_0 e^t};$$

$$f_{61} = \pm \bar{n} f_{63}; \qquad f_{63} = \frac{Eh_0 \nu}{(1 - \nu^2) s_0};$$

$$f_{64} = \frac{Eh_0 (1 + \alpha_1)}{(1 - \gamma^2) s_0}; \qquad f_{65} = \operatorname{ctg} \delta f_{63};$$

$$f_{71} = \pm \frac{Eh_0^3 \nu \operatorname{ctg} \delta \bar{n} e^t}{12 (1 - \nu^2) s_0^2}; \qquad f_{75} = \pm \bar{n} \operatorname{tg} \delta f_{71};$$

$$f_{76} = \frac{Eh_0^3 (1 + \varrho_1 - \nu) e^t}{12 (1 - \nu^2) s_0^2}; \qquad f_{77} = -\frac{Eh_0^3 (1 + \varrho_1) e^t}{12 (1 - \nu^2) s_0^2}; \tag{9.9}$$

$$f_{81} = \mp \frac{Eh_0^3 \operatorname{ctg} \delta \bar{n}}{12 (1 - \nu^2) s_0^3} [1 + \varrho_2 - 2\nu + 2 (1 - \nu)(1 + \gamma)];$$

$$f_{82} = \pm \frac{Eh_0^3 \operatorname{ctg} \delta \bar{n}}{12 (1 - \nu^2) s_0^3} [\nu + 2 (1 - \nu) (1 + \gamma)];$$

$$f_{85} = \pm \operatorname{tg} \delta \cdot \bar{n} f_{81};$$

$$f_{86} = \frac{Eh_0^3}{12 (1 - \nu^2) s_0^3} \{3 + 2\varrho_1 + \varrho_2 - 3\nu + \bar{n}^2 [\nu + $$
$$+ 2(1 - \nu)(1 + \gamma)]\};$$

$$f_{87} = \frac{1}{s_0 e^t} f_{77}.$$

Из равенства (9.8) легко найти вектор U_0, т. е. выразить перемещения u, v и w и их производные через физические величины (9.4) и (9.6),

$$U_0 = F_0^{-1} W_0, \tag{9.10}$$

где

$$U_0 = | v, v', \quad ', w, w', w'', w''' |_{t=0};$$
$$W_0 = | v, \bar{T}_{12}, u, w, \theta, T_1, M_1, \bar{N}_1 |_{t=0}; \tag{9.11}$$

F_0^{-1} — матрица, обратная матрице F_t; ее элементы (9.9) вычислены при значении независимой переменной $t = 0$.

Матрица F_0^{-1} равна

$$F_0^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{f}_{22} & \bar{f}_{23} & \bar{f}_{24} & \bar{f}_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{f}_{41} & 0 & \bar{f}_{43} & \bar{f}_{44} & 0 & \bar{f}_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{f}_{65} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{f}_{71} & 0 & 0 & \bar{f}_{74} & \bar{f}_{75} & 0 & \bar{f}_{77} & 0 \\ \bar{f}_{81} & \bar{f}_{82} & \bar{f}_{83} & \bar{f}_{84} & \bar{f}_{85} & 0 & \bar{f}_{87} & \bar{f}_{88} \end{Vmatrix}, \qquad (9.12)$$

где

$$\bar{f}_{22} = \frac{2(1+\nu)s_0}{Eh_0}; \quad \bar{f}_{23} = \pm\bar{n}; \quad \bar{f}_{24} = \pm\frac{h_0^2(1+\gamma)\operatorname{ctg}\delta\bar{n}}{3s_0^2};$$

$$f_{25} = s_0\bar{f}_{24}; \quad \bar{f}_{41} = \pm\bar{n}\cdot\bar{f}_{43}; \quad \bar{f}_{43} = -\frac{\nu}{1+\alpha_1};$$

$$\bar{f}_{44} = \operatorname{ctg}\delta\cdot\bar{f}_{43}; \quad \bar{f}_{46} = \frac{(1-\nu^2)s_0}{Eh_0(1+\alpha_1)}; \quad \bar{f}_{65} = -s_0;$$

$$\bar{f}_{71} = \pm\frac{\nu\operatorname{ctg}\delta\bar{n}}{1+\varrho_1}; \quad \bar{f}_{74} = \frac{\nu\bar{n}^2}{1+\varrho_1}; \quad \bar{f}_{75} = -\frac{1+\varrho_1-\nu}{1+\varrho_1}s_0;$$

$$\bar{f}_{77} = -\frac{12(1-\nu^2)s_0^2}{Eh_0^3(1+\varrho_1)}; \quad \bar{f}_{81} = \mp\frac{\operatorname{ctg}\delta\bar{n}}{1+\varrho_1}(1+\varrho_2-2\nu); \qquad (9.13)$$

$$\bar{f}_{82} = \pm\frac{2(1+\nu)\operatorname{ctg}\delta\bar{n}s_0}{E(1+\varrho_1)h_0}[\nu+2(1-\nu)(1+\gamma)];$$

$$\bar{f}_{83} = \frac{\operatorname{ctg}\delta\bar{n}^2}{1+\varrho_1}[\nu+2(1-\nu)(1+\gamma)];$$

$$\bar{f}_{84} = -\frac{\bar{n}^2}{1+\varrho_1}[1+\varrho_2-\nu+2(1-\nu)(1+\gamma)];$$

$$\overline{f}_{65} = -\frac{s_0}{1+\varrho_1}\{2+\varrho_1+\varrho_2-2\nu+\overline{n}^2[\nu+2(1-\nu)(1+\gamma)]\};$$

$$\overline{f}_{87} = -\overline{f}_{77}:\quad \overline{f}_{88} = + s_0 f_{77}.$$

Как указывалось, напряженное и деформированно состояние оболочки в произвольном меридиональном сечении характеризуется величинами (9.4) и (9.6), обозначенными W_t, а граничные условия задачи определяются заданием этих же величин на краях оболочки, т. е. заданием вектора W_0. Для решения задачи необходимо установить зависимость между величинами W_t и W_0.

Подставим в выражение (9.8) значение вектора U_t по формуле (9.1)

$$W_t = F_t(U_t^0 + U_t^*) = F_tU_t^0 + F_tU_t^* = F_tU_t^0 + W_t^*, \quad (9.14)$$

где

$$W_t^* = F_tU_t^* \quad (9.15)$$

— частные решения для функций (9.4) и (9.6), зависящие от вида нагрузки, действующей на оболочку.

Из (9.14) находим

$$F_tU_t^0 = W_t - W_t^*, \quad (9.16)$$

откуда

$$U_t^0 = F_t^{-1}(W_t - W_t^*). \quad (9.17)$$

Выражение (9.17) справедливо для любого значения переменной t и, в частности, при $t = 0$

$$U_0^0 = F_0^{-1}(W_0 - W_0^*). \quad (9.18)$$

Используя формулы (7.8) и (9.18), получаем зависимость между величинами W_t и W_0

$$W_t = F_tG^{Gt}U_0^0 + W_t^*.$$

$$W_t = F_te^{Gt}F_0^{-1}(W_0 - W_0^*) + W_t^*. \quad (9.19)$$

Введем обозначение

$$P_t = F_te^{Gt}F_0^{-1}, \quad (9.20)$$

тогда

$$W_t = P_t (W_0 - W_0^*) + W_t^*. \tag{9.21}$$

Уравнение (9.21), являющееся основным для рассматриваемой задачи, выражает зависимость между искомыми усилиями и перемещениями W_t в меридиональном сечении с координатой t и начальными параметрами W_0.

Приведем теперь решение для цилиндрической оболочки.

Функции (9.5) связаны с перемещениями u, v и w срединной поверхности цилиндрической оболочки соотношениями

$$\begin{Vmatrix} v \\ \bar{T}_{12} \\ u \\ w \\ \theta \\ T_1 \\ M_1 \\ \bar{N}_1 \end{Vmatrix}_x = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} & 0 & 0 & f_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{56} & 0 & 0 \\ f_{61} & 0 & 0 & f_{64} & f_{65} & 0 & 0 & 0 \\ f_{71} & 0 & 0 & 0 & f_{75} & 0 & f_{77} & 0 \\ 0 & f_{82} & 0 & 0 & 0 & f_{86} & 0 & f_{88} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v \\ v' \\ u \\ u' \\ w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{Vmatrix}_x, \tag{9.22}$$

или символически

$$w_x = F u_x. \tag{9.23}$$

Элементы матрицы F равны

$$f_{22} = \frac{Eh}{2(1+\nu)r}; \quad f_{23} = \mp n f_{22}; \quad f_{26} = \pm \frac{Enh^3(1+\gamma)}{6(1+\nu)r^3};$$

$$f_{56} = -\frac{1}{r}; \quad f_{61} = \pm \frac{Eh\nu n}{(1-\nu^2)r}; \quad f_{64} = \frac{Eh(1+\alpha_1)}{(1-\nu^2)r};$$

$$f_{65} = \pm \frac{1}{n} f_{61}; \quad f_{71} = \pm \frac{Eh^3\nu n}{12(1-\nu^2)r^2}; \quad f_{75} = \pm n f_{71};$$

$$f_{77} = -\frac{Eh^3(1+\varrho_1)}{12(1-\nu^2)r^2}; \tag{9.24}$$

$$f_{82} = \pm \frac{Eh^3 n}{12(1-\nu^2)r^3}[\nu + 2(1-\nu)(1+\gamma)];$$

$$f_{86} = \pm n f_{82}; \qquad f_{88} = \frac{1}{r} f_{77}.$$

Из (9.23) получаем

$$U_0 = F^{-1} W_0. \tag{9.25}$$

Матрица F^{-1} имеет вид

$$F^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{f}_{22} & \overline{f}_{23} & 0 & \overline{f}_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{f}_{41} & 0 & 0 & \overline{f}_{44} & 0 & \overline{f}_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{f}_{65} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{f}_{71} & 0 & 0 & \overline{f}_{74} & 0 & 0 & \overline{f}_{77} & 0 \\ 0 & \overline{f}_{82} & \overline{f}_{83} & 0 & \overline{f}_{85} & 0 & 0 & \overline{f}_{88} \end{vmatrix}, \tag{9.26}$$

а ее элементы равны

$$\overline{f}_{22} = \frac{2(1+\nu) r}{Eh}; \qquad \overline{f}_{23} = \pm n; \qquad \overline{f}_{25} = \pm \frac{h^2 (1+\gamma) n}{3r};$$

$$\overline{f}_{41} = \mp \frac{\nu n}{1+\alpha_1}; \qquad \overline{f}_{44} = -\frac{\nu}{1+\alpha_1}; \qquad \overline{f}_{46} = \frac{(1-\nu^2) r}{E(1+\alpha_1) h} \tag{9.27}$$

$$f_{65} = -r; \qquad \overline{f}_{71} = \pm \frac{\nu n}{1+\varrho_1}; \qquad \overline{f}_{74} = \pm n \overline{f}_{71};$$

$$\overline{f}_{77} = -\frac{12(1-\nu^2) r^2}{Eh^3 (1+\varrho_1)};$$

$$\overline{f}_{82} = \pm \frac{2(1+\nu) nr}{Eh(1+\varrho_1)} [\nu + 2(1-\nu)(1+\gamma)]; \qquad \overline{f}_{85} = -r\overline{f}_{83}$$

$$\bar{f}_{83} = \frac{n^2}{1+\varrho_1}[\nu + 2(1-\nu)(1+\gamma)]; \qquad \bar{f}_{88} = r\bar{f}_{77}.$$

Усилия и перемещения W_x в произвольном меридиональном сечении оболочки выражаются через начальные параметры W_0 при помощи соотношения

$$W_x = Fe^{Gx}F^{-1}(W_0 - W_0^*) + W_x^*, \tag{9.28}$$

$$W_x = P_x(W_0 - W_0^*) + W_x^*, \tag{9.29}$$

где

$$P_x = Fe^{Gx}F^{-1}. \tag{9.30}$$

§ 10. Алгоритм решения задачи

Формулы (9.21) и (9.29), определяющие усилия и перемещения в меридиональном сечении, применимы для любой конической или цилиндрической оболочки, система которых заменяет рассматриваемую оболочку вращения со сложным очертанием меридиана.

Запишем формулу (9.21) для первой оболочки (рис. 1)

$$W_{1t} = P_{1t}(W_{10} - W_{10}^*) + W_{1t}^*. \tag{10.1}$$

Здесь и в дальнейшем первый индекс при обозначениях матриц указывает номер заменяющей оболочки, второй— координату t меридионального сечения, в котором определяются искомые функции W.

Рассмотрим вопрос о сопряжении отдельных оболочек между собой. Перемещения, угол поворота, усилия и момент, действующие в верхнем краевом меридиональном сечении первой оболочки, равны

$$W_{1l} = P_{1l}(W_{10} - W_{10}^*) + W_{1l}^*. \tag{10.2}$$

Те же величины, действующие в нижнем краевом меридиональном сечении второй оболочки, равны W_{20}.

Потребовав, чтобы вектор усилий и перемещений верхнего края нижней оболочки и нижнего края верхней оболочки был равен нулю, получим

$$\begin{Vmatrix} v \\ \overline{T}_{12} \\ u \\ w \\ \theta_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ \overline{N}_1 \end{Vmatrix}_{2,0} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & d_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{43} & d_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & d_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} & 0 & d_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{86} & 0 & d_{88} \end{Vmatrix}_{1,2} \times \begin{Vmatrix} v \\ \overline{T}_{12} \\ u \\ w \\ \theta_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ \overline{N}_1 \end{Vmatrix}_{1,l}, \qquad (10.3)$$

или

$$W_{20} = D_{1,2} W_{1l}. \qquad (10.4)$$

Матрицу $D_{1,2}$, характеризующую условия сопряжения 1-й и 2-й оболочек, назовем матрицей перехода от оболочки 1 к оболочке 2, а при сопряжении i — 1-й и i-й оболочке будем обозначать символом $D_{i-1,\,i}$.

Значения элементов этой матрицы при различных схемах сопряжения отдельных оболочек приведены в табл. 1.

На рисунках, приведенных в табл. 1, стрелками указаны направления отсчета меридиональной координаты s. Если i — 1-я (или i-я) оболочка является цилиндрической, то следует положить угол

$$\delta_{i-1} = 0 \quad (\text{или } \delta_i = 0).$$

В том случае, когда вдоль линии сопряжения двух оболочек срединные поверхности последних имеют общую касательную плоскость, матрица перехода превращается в единичную матрицу.

Запишем общую формулу (9.21) для второй оболочки

$$W_{2l} = P_{2l}(W_{20} - W^*_{20}) + W^*_{2l} \qquad (10.5)$$

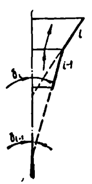
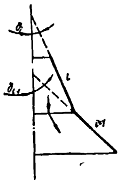
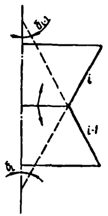
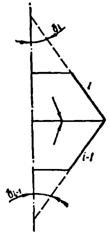
и воспользуемся равенством (10.4)

$$W_{2l} = P_{2l}(D_{1,2}W_{1l} - W^*_{20}) + W^*_{2l}. \qquad (10.6)$$

Исключим из выражения (10.6) с помощью (10.2) матрицу W_{1l}

$$W_{2l} = P_{2l}\{D_{1,2}[P_{1l}(W_{10} - W^*_{10}) + W^*_{1l}] - W^*_{20}\} + W^*_{2l}. \qquad (10.7)$$

Таблица 1

Схемы сопряжения оболочек	Элементы матрицы $D_{i-1,\,i}$
 	$d_{33} = d_{44} = d_{66} = d_{88} = \cos(\delta_i - \delta_{i-1})$, $d_{34} = -d_{43} = d_{68} = -d_{86} = \sin(\delta_i - \delta_{i-1})$, $d_{55} = 1$
 	$-d_{33} = d_{44} = d_{66} = -d_{88} = \cos(\delta_i + \delta_{i-1})$, $d_{34} = d_{43} = -d_{68} = -d_{86} = \sin(\delta_i + \delta_{i-1})$, $d_{55} = -1$

После очевидных преобразований окончательно получим

$$W_{2i} = P_{2i}D_{1,2}P_{1i}(W_{10} - W_{10}^{*}) + P_{2i}D_{1,2}(W_{1i}^{*} - D_{1,2}^{-1}W_{20}^{*}) + W_{2i}^{*}. \tag{10.8}$$

Аналогично выведена формула для определения усилий и перемещений меридионального сечения 3-й оболочки

$$W_{3i} = P_{3i}D_{2,3}P_{2i}D_{1,2}P_{1i}(W_{10} - W_{10}^{*}) + $$
$$+ P_{3i}D_{2,3}P_{2i}D_{1,2}(W_{1i}^{*} - D_{1,2}^{-1}W_{20}^{*}) + \tag{10.9}$$

$$+ P_{3t} D_{2,3} (W^*_{2t} - D^{-1}_{2,3} W^*_{30}) + W^*_{3t}.$$

Обозначим

$$P_{2t} D_{1,2} = \overline{P}_{2t}, P_{3t} D_{2,3} = \overline{P}_{3t}, \qquad (10.1$$

$$W^*_{1t} - D^{-1}_{1,2} W^*_{20} = \overline{W}^*_{20};$$

$$(10.1$$

$$W^*_{2t} - D^{-1}_{23} W^*_{30} = \overline{W}^*_{30}.$$

Тогда формулы (10.1), (10.8) и (10.9) можно записа в виде блочной матрицы

$$\begin{vmatrix} W_{1t} \\ W_{2t} \\ W_{3t} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} P_{1t} & 0 & 0 \\ \overline{P}_{2t} P_{1t} & \overline{P}_{2t} & 0 \\ \overline{P}_{3t} \overline{P}_{2t} P_{1t} & \overline{P}_{3t} \overline{P}_{2t} & \overline{P}_{3t} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} W_{10} - W^*_{10} \\ \overline{W}^*_{20} \\ \overline{W}^*_{30} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} W^*_{1t} \\ W^*_{2t} \\ W^*_{3t} \end{vmatrix}.$$

(10.1

Выражение (10.12) легко распространить на всю с тему, состоящую из z конических и цилиндрических об лочек, которыми заменена исходная оболочка вращен (рис 1). Для сокращения записи обозначим элементы бло ной матрицы символом Q с соответствующими индексам

Тогда выражения для усилий и перемещений в прои вольном меридиональном сечении каждой из z коническ и цилиндрических заменяющих оболочек можно записа в виде

$$\begin{vmatrix} W_{1t} \\ W_{2t} \\ \\ \vdots \\ W_{(z-1)x} \\ W_{zt} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} Q_{11} & 0 & \dots 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots 0 & 0 \\ \\ \\ Q_{(z-1)1} & Q_{(z-1)2} & \dots Q_{(z-1)(z-1)} & 0 \\ Q_{z1} & Q_{z2} & \dots Q_{z(z-1)} & Q_{zz} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times\begin{vmatrix} W_{10}-W^{*}_{10} \\ \overline{W}^{*}_{20} \\ \\ \\ \overline{W}^{*}_{(z-1)\,0} \\ W^{*}_{z0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} W^{*}_{1l} \\ W^{*}_{2l} \\ \\ \\ W^{*}_{(z-1)\,x} \\ W^{*}_{zl} \end{vmatrix}. \qquad (10.13)$$

В (10.13) z — 1-я оболочка является цилиндрической на что указывает индекс «x» при обозначениях матрицы W_{z-1}

Формула (10.13) является основной для решаемой задачи, так как при известных начальных параметрах W_{10} этой формулой вычисляются перемещения и усилия в любом меридиональном сечении рассматриваемой оболочки вращения. Для нахождения начальных параметров необходимо решение (10.13) подчинить граничным условиям задачи, которые будут определять векторы W_{10} и W_{zl}.

При выводе выражения (10.13) переход от каждой оболочки к смежной осуществляется последовательно от 1-й до z-й оболочки включительно. Квадратная матрица, входящая в выражение (10.13), является нижней треугольной блок-матрицей порядка z, число ненулевых элементов которой равно

$$0{,}5\ z\,(z+1). \qquad (10.14)$$

Число элементов, отличных от нуля, можно значительно сократить. Изменим нумерацию отдельных участков согласно рис. 6, и порядок перехода от оболочки к оболочке будем осуществлять по схеме, указанной на этом же рисунке стрелками.

Для нижней части оболочки, включающей z_1 участков, получим решение, выбрав в качестве начальных параметров величины (9.4) и (9.6), действующие на нижнем крае 1-й оболочки,

$$\begin{vmatrix} W_{1l} \\ \\ \\ W_{z_1 l} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} Q_{11} & 0\ldots0 & & 0 \\ & & & \cdot \\ Q_{z_1\cdot1} & Q_{z_1\cdot2}\ldots & Q_{z_1(z_1-1)} & Q_{z_1z_1} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times\begin{vmatrix} W_{10}-W^{*}_{10} \\ \\ \dot{\overline{W}}^{*}_{z_1 0}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} W^{*}_{1t} \\ \\ W^{*}_{z_1 t}\end{vmatrix}. \tag{10.15}$$

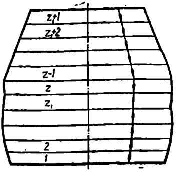


Рис. 6.

Для верхней части оболочки, состоящей из $z - z_1$ участков, получим решение, взяв в качестве начальных параметров величины (9.4) и (9.6), действующие на верхнем крае $z_1 + 1$-й оболочки

$$\begin{vmatrix} W_{(z_1+1),\,t} \\ \\ W_{zt}\end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} Q_{(z_1+1)\,1} & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \\ Q_{z1} & Q_{z2} & \ldots Q_{z\,(z-1)} & Q_{zz}\end{Vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} W_{(z_1+1)\,0}-W^{*}_{(z_1+1)\,0} \\ \\ \overline{W}^{*}_{z0}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} W^{*}_{(z_1+1)\,t} \\ \\ W^{*}_{zt}\end{vmatrix}. \tag{10.16}$$

Число ненулевых элементов квадратных блок-матриц, входящих в решения (10.15) и (10.16), соответственно равно

$$0{,}5z_1(z_1+1) \quad \text{и} \quad 0{,}5\,[(z-z_1)(z-z_1+1)].$$

Общее число элементов указанных матриц, отличных от нуля, определяется выражением

$$0{,}5z_1(z_1+1)+0{,}5\,[(z-z_1)(z-z_1+1)] = \\ = 0{,}5\,[z(z+1)-2z_1(z-z_1)], \tag{10.17}$$

что всегда меньше (10.14). Отношение чисел (10.17) и (10.14) равно

$$1-\frac{2z_1(z-z_1)}{z(z+1)}. \tag{10.18}$$

Выражение (10.18) показывает, насколько сокращается число элементов блок-матрицы (10.13), подлежащих вычислению, и характеризует снижение трудоемкости при применении форм решения (10.15) и (10.16) вместо формы решения, представляемой выражением (10.13).

Пусть, например, исходная оболочка вращения заменена 20 отдельными оболочками ($z = 20$), а $z_1 = 10$. Тогда в решение (10.13) входят 210 элементов, подлежащих вычислению, а в решения (10.15) и (10.16) только 110 таких элементов.

В дальнейшем будем пользоваться формой решения (10.15) и (10.16), как менее трудоемкой.

§ 11. Оболочки на упругом контуре. Формулировка граничных условий

Как было отмечено выше, усилия и перемещения в меридиональном сечении оболочки характеризуются величинами

$$v,\ \overline{T}_{12},\ u,\ w,\ \theta,\ T_1,\ M_1,\ N_1. \tag{11.1}$$

Соответственно этому и граничные условия задачи определяются заданием на крае оболочки четырех из этих величин или заданием такого же количества алгебраических соотношений, связывающих величины (11.1) между собой.

Так, если край оболочки жестко защемлен, то угол поворота меридиана и перемещения этого края равны нулю,

$$\theta = v = u = w = 0. \tag{11.2}$$

Неизвестными в этом случае являются усилия $\overline{T}_{12}$, T_1, N_1 и момент M_1, действующие в краевом сечении оболочки.

Если край оболочки свободен, то неизвестны его перемещения u, v и w и угол поворота меридиана θ, а усилия и момент равны нулю

$$\overline{T}_{12} = T_1 = M_1 = \overline{N}_1 = 0. \tag{11.3}$$

Однако часто граничные условия задачи таковы, что из восьми величин (11.1) ни одна не задана непосредственно. В этих случаях приходится устанавливать определенные соотношения между указанными величинами, и при помощи этих соотношений удовлетворять граничным условиям.

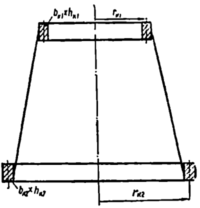


Рис. 7.

Формулировка подобных граничных условий и вывод соответствующих соотношений, связывающих величины (11.1) между собой, и рассматриваются в этом параграфе.

Пусть края конической оболочки подкреплены упругими кольцами (рис. 7). Назовем кольцо, подкрепляющее узкий край оболочки, первым, а кольцо, подкрепляющее широкий край,— вторым. В соответствии с этим в дальнейшем все величины, относящиеся к узкому краю, будем отмечать индексом «1», а относящиеся к широкому краю — индексом «2».

Рассмотрим деформацию кругового цилиндрического кольца радиуса $r_к$ при нагрузках, распределенных вдоль его окружности. Если закон изменения нагрузок вдоль окружности произволен, то представляем нагрузки в виде гармонического ряда по угловой переменной β. Такими нагрузками в общем случае являются (рис. 8):

$p_{к}\begin{smallmatrix}\cos n\beta\\ \sin n\beta\end{smallmatrix}$ — вертикальная нагрузка;

$t_{к}\begin{smallmatrix}\sin n\beta\\ \cos n\beta\end{smallmatrix}$ — окружная нагрузка;

$q_{к}\begin{smallmatrix}\cos n\beta\\ \sin n\beta\end{smallmatrix}$ — радиальная нагрузка;

$m_{к}\begin{smallmatrix}\cos n\beta\\ \sin n\beta\end{smallmatrix}$ — моментная нагрузка в меридиональных плоскостях;

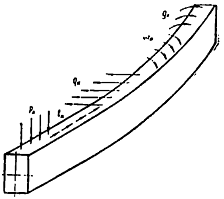


Рис. 8.

$g_{к}\begin{smallmatrix}\sin n\beta\\ \cos n\beta\end{smallmatrix}$ — моментная нагрузка в плоскости кольца.

Положительными приняты направления:

$p_к$ — сверху вниз;

$t_к$ — в сторону возрастания угла β, т. е. против часовой стрелки относительно центра кольца;

$q_к$ — к центру;

$m_к$ — по часовой стрелке, если смотреть вдоль окружности в сторону возрастания β;

$g_к$ — по часовой стрелке, если смотреть на кольцо сверху.

Указанные нагрузки отнесены к единице ширины кольца $b_к$ и имеют размерность

$$p_к, t_к, q_к - \frac{\textit{ед. силы}}{\textit{ед. длины}};$$

$$m_к, q_к - \textit{ед. силы}$$

Векторы усилий $p_к$, $t_к$ и $q_к$ проходят через геометрическую ось кольца, но для наглядности они изображены на верхней поверхности кольца.

Под действием указанных усилий и моментов точки оси кольца перемещаются в пространстве, а само кольцо — закручивается.

Перемещения точек оси кольца характеризуются (рис. 9):

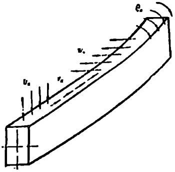


Рис. 9.

$w_{\text{к}} \begin{matrix}\cos n\beta \\ \sin n\beta\end{matrix}$ — радиальными перемещениями;

$u_{\text{к}} \begin{matrix}\cos n\beta \\ \sin n\beta\end{matrix}$ — вертикальными перемещениями;

$v_{\text{к}} \begin{matrix}\sin n\beta \\ \cos n\beta\end{matrix}$ — касательными перемещениями.

Закручивание поперечных сечений характеризуется

$$\theta_{\text{к}} \begin{matrix}\cos n\beta \\ \sin n\beta\end{matrix}$$

— поворотом (углом кручения) в меридиональных плоскостях.

Положительными считаются: $w_{\text{к}}$ — к центру; $u_{\text{к}}$ — сверху вниз; $v_{\text{к}}$ — в сторону возрастания угловой координаты β; $\theta_{\text{к}}$ — по часовой стрелке, если смотреть вдоль окружности в сторону возрастания β.

Исследованию напряженного и деформированного состояния круглых колец при действии гармонических внешних воздействий посвящены работы [66] и [67], откуда заимствованы формулы для перемещений кольца.

Для иллюстрации основных положений излагаемого решения рассмотрим случай действия на кольцо нагрузок вида

$$p_к \cos n\beta,\ t_к \sin n\beta,\ q_к \cos n\beta,\ m_к \cos n\beta,\ g_к \sin n\beta.$$

В этом случае четными относительно переменной β функциями являются радиальные и вертикальные перемещения точек оси кольца $w_к$ и $u_к$, повороты в диаметральных плоскостях $\theta_к$, а нечетной функцией — касательные перемещения $v_к$, так как при действии на кольцо нагрузок

$$p_к \sin n\beta,\ t_к \cos n\beta,\ q_к \sin n\beta,\ m_к \sin n\beta,\ g_к \cos n\beta$$

изменяется лишь вид функций $w_к$, $u_к$, $\theta_к$, $v_к$, а именно: $w_к$, $u_к$, $\theta_к$ изменяются по закону $\sin n\beta$, т. е. являются уже нечетными, а функция $v_к$ становится четной. Вид соотношений между перемещениями кольца и нагрузками, действующими на него, и в первом, и во втором случаях одинаков.

Рассмотрим отдельно различные случаи загружения незакрепленного кольца, т. е. кольца, на которого не наложены внешние связи.

А. Осесимметричное загружение ($n = 0$). Как известно.

$$\theta_к = \frac{r_к^2}{EI_к} m_к; \tag{11.4}$$

$$w_к = \frac{r_к^2}{EF_к} q_к.$$

Б. Антисимметричное загружение ($n = 1$). В этом случае из условий равновесия кольца вытекают соотношения между амплитудными значениями внешних загружений кольца

$$\begin{aligned} r_к p_к &= -m_к; \\ q_к &= -t_к. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Перемещения кольца определяются по формулам

$$u_к - r_к\theta_к = \left[\frac{fr_к^2}{(1+f)\,I_к} + \frac{2{,}4\,(1+\nu)}{F_к}\right]\frac{r_к^2 p_к}{E}. \tag{11.6}$$

$$w_к - v_к = \frac{r_к}{EF}(g_к + r_к q_к).$$

В. Загружение общего вида ($n \geqslant 2$). Каждая нагрузка в этом случае является самоуравновешенной. Соотношения между перемещениями и нагрузкой, действующей на кольцо, представляются в виде

$$\begin{vmatrix} u_к \\ \theta_к \\ v_к \\ w_к \\ \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} z_{11} & z_{12} & 0 & 0 & 0 \\ z_{12} & z_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{33} & z_{34} & z_{35} \\ 0 & 0 & nz_{33} & z_{38} & z_{45} \\ & & & & \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_к \\ m_к \\ q_к \\ t_к \\ g_к \end{vmatrix}, \qquad (11.7)$$

что символически можно записать

$$V_к = Z_к Y_к. \qquad (11.8)$$

В формулах (11.4) — (11.7) введены обозначения:

$$F_к = b_к h_к \qquad (11.9)$$

— площадь поперечного сечения кольца;

$$I_к = \frac{b_к h_к^3}{12} \qquad (11.10)$$

— момент инерции поперечного сечения кольца относительно горизонтальной оси, проходящей через его центр тяжести;

$$I_{к.к} = \alpha_к b_к^4 \qquad (11.11)$$

— момент крутильной жесткости кольца, для определения которого приведены в табл. 2 значения коэффициента $\alpha_к$, зависящего от отношения $h_к/b_к$ [3].

Таблица 2

$h_к/b_к$	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
$\alpha_к$	0,140	0,294	0,457	0,790	1,123

Кроме того, обозначим

$$f = 2(1+\nu)\frac{I_\text{к}}{I_\text{к.к}}. \qquad (11.12)$$

Элементы матрицы $Z_\text{к}$ равны

$$z_{11} = \frac{r_\text{к}^4}{E(n^2-1)^2}\left[\frac{1}{I_\text{к}} + \frac{2{,}4(1+\nu)}{F_\text{к}}\left(\frac{n^2-1}{nr_\text{к}}\right)^2 + \frac{2(1+\nu)}{n^2 I_\text{к.к}}\right];$$

$$z_{12} = \frac{r_\text{к}^3(1+f)}{(n^2-1)^2 EI_\text{к}};$$

$$z_{22} = \frac{r_\text{к}^2(1+n^2 f)}{(n^2-1)^2 EI_\text{к}};$$

$$z_{33} = \frac{r_\text{к}^4}{n(n^2-1)^2 EI_\text{к}}\left\{1 + \frac{h_\text{к}^2}{12r_\text{к}^2}[2{,}4(1+\nu)n^2 - 1]\right\};$$

$$(11.13)$$

$$z_{34} = \frac{r_\text{к}^4}{n^2(n^2-1)^2 EI_\text{к}}\left\{1 + \frac{n^2 h_\text{к}^2}{12r_\text{к}^2}[n^2 - 2 + 2{,}4(1+\nu)]\right\};$$

$$z_{35} = \frac{r_\text{к}^3}{n^2(n^2-1)EI_\text{к}}\left(1 - \frac{n^2 h_\text{к}^2}{12r_\text{к}^2}\right);$$

$$z_{45} = \frac{r_\text{к}^3}{n(n^2-1)EI_\text{к}}.$$

Рассмотрим совместную деформацию оболочки и кольца, подкрепляющего ее узкий край (рис. 10).

В сечении оболочки, примыкающем к кольцу, действуют усилия $\overline{T}_{12,1}$, $T_{1,1}$, $\overline{N}_{1,1}$ и момент $M_{1,1}$. К кольцу, кроме того, приложены внешние нагрузки: $p^*_{\text{к},1}$, $t^*_{\text{к},1}$, $q^*_{\text{к},1}$, $m^*_{\text{к},1}$ и $g^*_{\text{к},1}$.

Полная нагрузка, действующая на кольцо, включает внешнюю нагрузку и усилия взаимодействий с оболочкой

$$\begin{Vmatrix} p_{\text{к},1} \\ m_{\text{к},1} \\ q_{\text{к},1} \\ t_{\text{к},1} \\ g_{\text{к},1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \cos\delta & 0 & -\sin\delta \\ 0 & +(o_{\text{к}1,1})\cos\delta + (o_{\text{к}1,2})\sin\delta & 1 & +(-o_{\text{к}1,1})\sin\delta + (o_{\text{к}1,2})\cos\delta \\ 0 & -\sin\delta & 0 & -\cos\delta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ +(-o_{\text{к}1,1}) & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \overline{T}_{12,1} \\ T_{1,1} \\ M_{1,1} \\ \overline{N}_{1,1} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} p^{*}_{\text{к},1} \\ m^{*}_{\text{к},1} \\ q^{*}_{\text{к},1} \\ t^{*}_{\text{к},1} \\ g^{*}_{\text{к},1} \end{Vmatrix}, \qquad (11.14)$$

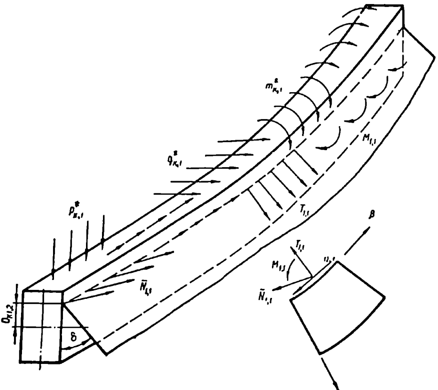


Рис. 10.

$$Y_{\text{к},1} = O_{\text{к},1} \widetilde{W}_{1,0} + Y^{*}_{\text{к},1}. \qquad (11.15)$$

При выводе соотношений (11.14) предполагалось, что оболочка крепится к волокну кольца 1 (рис. 11). Если оболочка примыкает к другим волокнам кольца, например, к волокну 2 или 3, то в выражении (11.14) перед круглыми

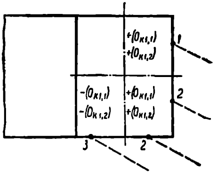


Рис. 11.

скобками, в которые заключены величины $o_{\text{к}1,2}$ и $o_{\text{к}1.2}$, знаки необходимо проставлять в соответствии с рис. 11.

Перемещения $w_{\text{к},1}$, $u_{\text{к},1}$, $v_{\text{к},1}$ волокна кольца, вдоль которого оболочка с ним сопрягается, связаны с перемещениями u_1, w_1 и v_1 края оболочки следующими соотношениями (рис. 12):

Радиальные перемещения

$$w_{\text{к},1} + (-o_{\text{к}1,2})\,\theta_{\text{к},1} = -u_1 \sin\delta - w_1 \cos\delta; \qquad (11.16)$$

вертикальные перемещения

$$u_{\text{к},1} + (+o_{\text{к}1,1})\,\theta_{\text{к},1} = u_1 \cos\delta - w_1 \sin\delta; \qquad (11.17)$$

окружные перемещения

$$v_{\text{к},1} = v_1. \qquad (11.18)$$

Угол поворота меридиана оболочки $\theta_{1,1}$ равен углу поворота поперечного сечения кольца в меридиональной плоскости

$$\theta_{\text{к},1} = \theta_{1,1}. \qquad (11.19)$$

Выше было рассмотрено свободное кольцо, т. е. кольцо на которое не наложены внешние связи. Однако часто встречаются случаи, когда кольцо опирается на внешние опоры, препятствующие его свободной деформации. На рис. 13 представлены некоторые возможные схемы опирания кольца подкрепляющего узкий край конической оболочки:

схема I_1 — свободное кольцо;

схема II_1 — на кольцо наложена связь, исключающая

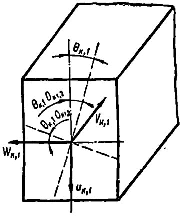


Рис. 12.

вертикальные перемещения волокна A_1, но не препятствующая радиальным перемещениям этого волокна и поворотам кольца в меридиональных плоскостях;

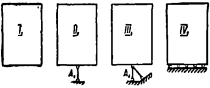


Рис. 13.

схема III_1 — волокно A_1 закреплено от вертикальных и горизонтальных перемещений и является геометрическим местом центров поворота поперечных сечений кольца;

схема IV_1 — поперечное сечение кольца может совершать только радиальные перемещения.

Кроме того, предполагается, что связи, наложенные на кольцо, не препятствуют касательным перемещениям точек кольца.

Приведенные выше соотношения дают возможность составить условия сопряжения оболочки и подкрепляющего ее узкий край кольца

Схема I_1. А. Осесимметричное загружение. В этом случае условия равновесия кольца требуют выполнения равенства

$$p_{к,1} = 0, \qquad (11.20)$$

а условия совместности деформаций и перемещений кольца и оболочки—соблюдения равенств

$$\begin{aligned} &\theta_{к,1} = \theta_{1,1}; \\ &w_{к,1} + (-o_{к1,2})\,\theta_{к1} = -u_1 \sin\delta - w_1 \cos\delta. \end{aligned} \qquad (11.21)$$

Раскрывая условия (11.20) и (11.21) при помощи формул (11.4), (11.5) и (11.14), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} u_1 &= -\operatorname{ctg}\delta w_1 + \frac{(+o_{к1,2})}{\sin\delta}\theta_{1,1} + \frac{r^2_{к,1}}{EF_{к,1}\sin^2\delta}T_{1,1} + \\ &+ \frac{r^2_{к,1}}{EF_{к,1}\sin\delta}(\operatorname{ctg}\delta \cdot p^*_{к,1} - q^*_{к,1}); \\ M_{1,1} &= -\frac{EI_{к,1}}{r^2_{к1}}\theta_{1,1} + \frac{(-o_{к1,2})}{\sin\delta}T_{1,1} + [(-o_{к1,2})\operatorname{ctg}\delta + \\ &+ (o_{к1,1})]\,p^*_{к1} - m^*_{к1}; \\ \overline{N}_{1,1} &= \operatorname{ctg}\delta T_{1,1} + \frac{1}{\sin\delta}p^*_{к,1}. \end{aligned} \qquad (11.22)$$

Величины (11.1) начальных параметров задачи, характеризующих усилия и перемещения края оболочки, можно, имея в виду, что при $n = 0$ перемещение v и усилие $\overline{T}_{12}$ равны нулю, представить в виде

$$\begin{Vmatrix} u \\ w \\ \theta_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\operatorname{ctg}\delta & \dfrac{(+o_{к1,2})}{\sin\delta} & \dfrac{r^2_{к,1}}{EF_{к1}\sin^2\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{EI_{к1}}{r^2_{к1}} & \dfrac{(-o_{к1,2})}{\sin\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ctg}\delta & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} w \\ \theta_1 \\ T_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}_1 +$$

$$
+\left|\begin{matrix}
\dfrac{r_{\text{к}1}^{2}}{EF_{\text{к}1}\sin\delta}(\operatorname{ctg}\delta\cdot p^{*}_{\text{к}1}-q^{*}_{\text{к}1})\\
0\\
0\\
0\\
[(-o_{\text{к}1.2})\operatorname{ctg}\delta+(o_{\text{к}1.1})]\,p^{*}_{\text{к},1}-m^{*}_{\text{к}1}\\
\dfrac{1}{\sin\delta}\,p^{*}_{\text{к}1}
\end{matrix}\right|, \qquad (11.23)
$$

или символически

$$
W_{10}=C_{\text{к}1}\,\widetilde{W}_{10}+\widetilde{W}^{*}_{10}. \qquad (11.24)
$$

Б. Антисимметричное загружение. Условия равновесия кольца удовлетворяются при выполнении соотношений (11.5), а перемещения кольца определяются формулой (11.6).

Раскрывая (11.5) и (11.6) при помощи (11.4) и (11.16) — (11.19), получаем

$$
\left|\begin{matrix} v\\ T_{12}\\ u\\ w\\ \theta_1\\ T_1\\ M_1\\ \overline{N}_1\end{matrix}\right|_1=
\left\|\begin{matrix}
-\dfrac{1}{\cos\delta} & -\operatorname{tg}\delta r_{\text{к}1} & & & 0000\\
0 & 0 & \sin\delta & \cos\delta & 0000\\
\operatorname{tg}\delta & \dfrac{r_{\text{к}1}}{\cos\delta} & & -c_{33}\operatorname{tg}\delta & 0000\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0000\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0000\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0000\\
0 & 0 & -r_{\text{к}1}\cos\delta & r_{\text{к}1}\sin\delta & 0000\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0000
\end{matrix}\right\|_1\times
$$

$$\times \left| \begin{matrix} w \\ \theta_1 \\ T_1 \\ \overline{N}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right|_1 + \left| \begin{matrix} \\ -q^{\bullet}_{\text{к}1} \; -t^{\bullet}_{\text{к}1} \\ \dfrac{c_{33}}{\cos\delta}\, p^{\bullet}_{\text{к}1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{\text{к}1}\, p^{\bullet}_{\text{к}1} \; -m_{\text{к}1} \\ 0 \end{matrix} \right|_1, \tag{11.25}$$

$$W_{10} = C_{\text{к}1}\, \widetilde{W}_{10} + \widetilde{W}^{\bullet}_{10}. \tag{11.26}$$

Элементы матрицы $C_{\text{к}1}$ равны

$$c_{13} = -\sin\delta\left(c_{33} - \frac{r^2_{\text{к}1}}{F_{\text{к}1}}\right);$$

$$c_{14} = \cos\delta\left(\operatorname{tg}^2\delta c_{33} + \frac{r^2_{\text{к}1}}{F_{\text{к}1}}\right); \tag{11.27}$$

$$c_{33} = + \frac{r^2_{\text{к}1}}{E}\left[\frac{f r^2_{\text{к}1}}{(1+f)\, I_{\text{к}1}} + \frac{2{,}4\,(1+\nu)}{F_{\text{к}1}}\right];$$

Элемент $\tilde{v}^{\bullet}_1$ вектора $\widetilde{W}^{\bullet}_{10}$ равен

$$\tilde{v}^{\bullet}_1 = -\operatorname{tg}\delta \cdot c_{33} p^{\bullet}_{\text{к}1} + \frac{r_{\text{к}1}}{EF_{\text{к}1}}\left[(-o_{\text{к}1,1})\, t^{\bullet}_{\text{к}1} - r_{\text{к}} q^{\bullet}_{\text{к}1} - g^{\bullet}_{\text{к}1}\right]. \tag{11.28}$$

В. З а г р у ж е н и е   о б щ е г о   в и д а. Использовав зависимости (11.14) — (11.19), представим основную для этого случая формулу (11.8) в форме

$$\begin{vmatrix} u\cos\delta - w\sin\delta - (+o_{\text{к}1,1})\,\theta_1 \\ \theta_1 \\ v \\ -u\sin\delta - w\cos\delta - (-o_{\text{к}1,2})\,\theta_1 \end{vmatrix} = Z_{\text{к},1}(O_{\text{к},1}\widetilde{W}_{1,v} + Y^{*}_{\text{к},1}). \tag{11.29}$$

Выражение (11.29) после несложных преобразований приводится к виду

$$\begin{Vmatrix} v \\ \overline{T}_{12} \\ u \\ w \\ \theta_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & c_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{33} & c_{53} & c_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}_1 \times \begin{Vmatrix} \overline{T}_{12} \\ T_1 \\ M_1 \\ \overline{N}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}_1 + \begin{Vmatrix} \tilde{v}^{*} \\ 0 \\ \tilde{u}^{*} \\ \tilde{w}^{*} \\ \tilde{\theta}_1^{*} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}_1, \tag{11.30}$$

или

$$W_{10} = C_{\text{к}1}\,\overline{W}_{10} + \overline{W}^{*}_{10}. \tag{11.31}$$

Элементы $C_{\text{к}1}$ равны

$$\begin{gathered} c_{11} = z_{34};\quad c_{12} = -\sin\delta z_{33};\quad c_{14} = -\cos\delta z_{33}; \\ c_{32} = \cos^2\delta z_{11} + n\sin^2\delta z_{33};\quad c_{33} = \cos\delta z_{12}; \\ c_{34} = -\sin\delta\cos\delta\,(z_{11} - \operatorname{tg}\delta z_{33}); \\ c_{42} = -\sin\delta\cos\delta\,(z_{11} - nz_{33});\quad c_{43} = -\sin\delta z_{12}; \\ c_{44} = \sin^2\delta\,(z_{11} + \operatorname{ctg}\delta z_{33});\quad c_{53} = z_{22}. \end{gathered} \tag{11.32}$$

Элементы вектора $\widetilde{W}^{*}_{10}$, зависящие от внешней нагрузки, которая действует на кольцо, запишем в виде

$$v_1^{\bullet} = z_{33}q_{\text{к}1}^{\bullet} + z_{34}t_{\text{к}1}^{\bullet} + z_{35}q_{\text{к}1}^{\bullet};$$

$$\tilde{u}_1^{\bullet} = \cos\delta\,(z_{11}p_{\text{к}1}^{\bullet} + z_{12}m_{\text{к}1}^{\bullet}) - \sin\delta\,(z_{33}nq_{\text{к}1}^{\bullet} + z_{33}t_{\text{к}1}^{\bullet} + z_{45}g_{\text{к}1}^{\bullet});$$

$$\tilde{w}_1^{\bullet} = -\sin\delta\,(z_{11}p_{\text{к}1}^{\bullet} + z_{12}m_{\text{к}1}^{\bullet}) - \cos\delta\,(nz_{33}q_{\text{к}1}^{\bullet} + z_{33}t_{\text{к}1}^{\bullet} + z_{45}g_{\text{к}1}^{\bullet}); \quad (11.33)$$

$$\theta_{1,1}^{\bullet} = z_{12}p_{\text{к}1}^{\bullet} + z_{22}m_{\text{к}1}^{\bullet}.$$

Изложенное исчерпывает задачу о формулировке граничных условий при упругом подкреплении узкого края оболочки по схеме I_1.

Схема II_1. В этом случае вертикальные перемещения точек оси кольца отсутствуют, т. е.

$$u_{\text{к}1} = 0, \qquad (11.34)$$

вследствие чего граничные условия формулируются следующим образом.

А. ($n=0$). Вертикальное перемещение волокна кольца, к которому примыкает оболочка, зависит только от угла поворота сечения кольца в меридиональной плоскости и равно вертикальному перемещению края оболочки

$$(+\,o_{\text{к}1,1})\,\theta_{\text{к}1} = u_1\cos\delta - w_1\sin\delta. \qquad (11.35)$$

Остальные два условия совместности деформаций и перемещений кольца и оболочки имеют вид (11.21).

Б. ($n = 1$). Вертикальные перемещения волокна кольца и края оболочки одинаковы

$$(+\,o_{\text{к}1,1})\,\theta_{\text{к}1} = \cos\delta\cdot u_1 - \sin\delta\cdot w_1. \qquad (11.36)$$

Угол поворота сечения кольца в меридиональной плоскости, равный углу поворота меридиана оболочки, определяется первой формулой (11.6) при $u_{\text{к}} = 0$ с учетом первого равенства (11.5)

$$\theta_{\text{к}1} = \theta_{1,1} = \frac{fr_{\text{к}1}^2}{(1+f)\,EI_{\text{к}1}}\,m_{\text{к}1}. \qquad (11.37)$$

Два других граничных условия представляются вторыми формулами (11.5) и (11.6)

$$q_{\kappa 1} = -t_{\kappa 1};$$
$$w_{\kappa 1} - v_{\kappa 1} = \frac{r_{\kappa 1}}{EF_{\kappa 1}}(g_{\kappa 1} + r_{\kappa 1}q_{\kappa 1}). \tag{11.38}$$

В. ($n \geqslant 2$). Граничные условия в этом случае определяются соотношениями, аналогичными (11.29), с той лишь

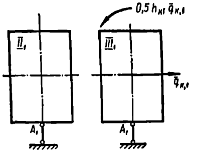


Рис. 14.

разницей, что при выводе этих соотношений в выражении (11.17) необходимо принять $u_{\kappa.1}$ равным нулю.

Путем, описанным выше, граничные условия при рассматриваемой схеме опирания контурного кольца приводятся при всех значениях n (0, 1, 2, .) к виду

$$W_{10} = C_{\kappa 1} \times \tilde{W}_{10} + \tilde{\tilde{W}}_{10}. \tag{11.39}$$

Матрица, входящая в это выражение, имеет такую же структуру, как и матрицы, фигурирующие в формулах (11.24), (11.26) и (11.31), однако некоторые ее элементы, естественно, отличаются от соответствующих элементов перечисленных матриц.

Схема III_1. Эта схема опирания кольца отличается от схемы II_1 тем, что на кольцо наложена внешняя связь, препятствующая горизонтальному перемещению волокна A_1.

Удалим эту связь, заменив ее действие на кольцо усилием $\bar{q}_{\kappa 1}$ (рис. 14).

Усилие $q_{\kappa 1}$ приложено к кольцу вдоль волокна A_1, вследствие чего при переносе его на ось кольца возникают моменты, действующие в меридиональных плоскостях и равные 0,5 $h_{\kappa 1}\,\bar{q}_{\kappa 1}$ (рис. 14).

А. ($n = 0$). Для определения дополнительного усилия $q_{\kappa 1}$ используем условие равенства нулю горизонтального перемещения точки A_1 (формула 11.4)

$$\frac{r_{\text{к}1}^2}{EF_{\text{к}1}}(q_{\text{к}1}-\bar{q}_{\text{к}1}) + 0{,}5h_{\text{к}1}\ \frac{r_{\text{к}1}^2}{EI_{\text{к}1}}(m_{\text{к}1}\ -0{,}5h_{\text{к}1}\bar{q}_{\text{к}1}) = 0,$$

откуда

$$\bar{q}_{\text{к}1} = 0{,}25\left(q_{\text{к}1} + \frac{6}{h_{\text{к}1}}m_{\text{к}1}\right). \tag{11.40}$$

Следовательно, на кольцо действует радиальное усилие

$$q_{\text{к}1} - \bar{q}_{\text{к}1} = 0{,}75\left(q_{\text{к}1} - \frac{2}{h_{\text{к}1}}m_{\text{к}1}\right) \tag{11.41}$$

и изгибающие моменты в меридиональных плоскостях

$$m_{\text{к}1} - 0{,}5h_{\text{к}1}\bar{q}_{\text{к}1} = 0{,}125h_{\text{к}1}\left(-q_{\text{к}1} + \frac{2}{h_{\text{к}1}}m_{\text{к}1}\right). \tag{11.42}$$

Условия сопряжения оболочки с кольцом формулируются следующим образом. Радиальные и вертикальные перемещения волокна кольца, к которому примыкает оболочка, равны соответствующим перемещениям края оболочки

$$[0{,}5h_{\text{к}1} + (\dotplus o_{\text{к}1,2})]\,\theta_{\text{к}1} = +\sin\delta u_1 + \cos\delta w_1;$$
$$(\dotplus o_{\text{к}1,1})\,\theta_{\text{к}1} = \cos\delta u_1 + \sin\delta w_1. \tag{11.43}$$

Угол поворота меридиана оболочки равен углу поворота сечения кольца в меридиональной плоскости

$$\theta_{\text{к}1} = \theta_{1,1}. \tag{11.44}$$

Определяя угол $\theta_{\text{к}1}$ по формуле (11.4) вместо величины $m_{\text{к}1}$ необходимо использовать величину (11.42).

Б. ($n = 1$). Из второго условия равновесия кольца (11.5) находим

$$q_{\text{к}1} - \bar{q}_{\text{к}1} = -t_{\text{к}1}, \quad \bar{q}_{\text{к}1} = q_{\text{к}1} + t_{\text{к}1}. \tag{11.45}$$

Условия сопряжения оболочки и подкрепляющего ее кольца записываются в виде

$$[0{,}5h_{\text{к}1} + (\dotplus o_{\text{к}1,2})]\,\theta_{\text{к}1} = \sin\delta u_1 + \cos\delta w_1;$$
$$(\dotplus o_{\text{к}1,1})\,\theta_{\text{к}1} = \cos\delta u_1 + \sin\delta w_1; \tag{11.46}$$
$$\theta_{\text{к}1} = \theta_{1,1}; \quad v_{\text{к}1} = v.$$

Величины $\theta_{\text{кl}}$ и $v_{\text{кl}}$ определяются формулой (11.6), в которой принимаем

$$u_{\text{кl}} = 0;$$
$$r_{\text{кl}}\, p_{\text{кl}} = -[m_{\text{кl}} - 0{,}5h_{\text{кl}}\,(q_{\text{кl}} + t_{\text{кl}})]; \qquad (11.47)$$
$$w_{\text{кl}} = -0{,}5h_{\text{кl}}\theta_{\text{кl}}.$$

В. ($n \geqslant 2$). Усилие $\bar{q}_{\text{кl}}$, как и при $n = 0$, определяем из условия равенства нулю горизонтального перемещения волокна A_1. Записав значение этого перемещения по формуле (11.7) с учетом угла поворота сечения кольца $\theta_{\text{кl}}$, получим

$$nz_{33}(q_{\text{кl}} - \bar{q}_{\text{кl}}) + z_{33}t_{\text{кl}} + z_{45}g_{\text{кl}} +$$
$$+ 0{,}5h_{\text{кl}}\,[z_{12}p_{\text{кl}} + z_{22}(m_{\text{кl}} - 0{,}5h_{\text{кl}}\,\bar{q}_{\text{кl}})] = 0,$$

откуда

$$\bar{q}_{\text{кl}} = q_{\text{кl}} + \frac{1}{n}t_{\text{кl}} + \frac{1}{nz_{33}}\,[z_{45}q_{\text{кl}} + 0{,}5h_{\text{кl}}\,(z_{12}p_{\text{кl}} + z_{22}m_{\text{кl}})]. \qquad (11.48)$$

При выводе выражения (11.48) мы пренебрегаем малой по сравнению с z_{33} величиной $0{,}25h_{\text{кl}}^2\, z_{22}$.

Граничные условия в этом случае представляются соотношениями (11.46), где величины $\theta_{\text{кl}}$ и $v_{\text{кl}}$ определяются формулой (11.7). Усилия $q_{\text{кl}}$ следует заменить усилиями $(q_{\text{кl}} - \bar{q}_{\text{кl}})$, моменты $m_{\text{кl}}$ — моментами $(m_{\text{кl}} - 0{,}5h_{\text{кl}}\,\bar{q}_{\text{кl}})$. Величина $\bar{q}_{\text{кl}}$ остается равной (11.48).

IV схема. Угол поворота $\theta_{\text{к}}$ поперечного сечения кольца в меридиональной плоскости и вертикальные перемещения кольца $u_{\text{кl}}$ равны нулю

$$\theta_{\text{кl}} = \theta_{1,1} = 0;$$
$$u_{\text{кl}} = \cos\delta u_1 - \sin\delta w_1 = 0. \qquad (11.49)$$

Остальные условия формулируются следующим образом.

А. ($n=0$). Горизонтальное перемещение кольца равно горизонтальному перемещению края оболочки

$$w_{к1} = -\sin\delta u_1 - \cos\delta w_1, \qquad (11.50)$$

где $w_{к1}$ определяется второй фо мулой (11.4).

Б. ($n = 1$) Кольцо находится в равновесии в своей плоскости, что приводит ко второму соотношению (11.5); его перемещения определяются второй формулой (11.6).

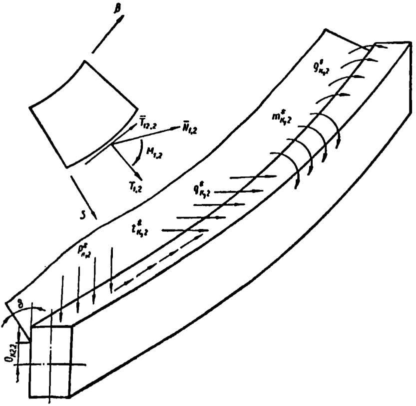


Рис. 15.

Перемещения края оболочки связаны с перемещениями точек кольца соотношениями (11 16) и (11 18) при $\theta_{к1} = 0$.

В. ($n \geqslant 2$) Между перемещениями края оболочки и точек кольца сохраняются соотношения (11.16) и (11.18), величины $w_{к1}$ и $v_{к1}$ определяются формулой (11.7).

Рассмотрим совместную деформацию оболочки и кольца, подкрепляющего ее широкий край (рис 15).

Отделив, как и раньше, оболочку от кольца и приложив к нему усилия $\bar{T}_{12.2}$, $T_{1,2}$, $M_{1,2}$ и $\bar{N}_{1,2}$, получим полную нагрузку, действующую на кольцо,

$$\left|\begin{matrix} p_{к,2} \\ m_{к,2} \\ q_{к,2} \\ t_{к,2} \\ g_{к,2} \end{matrix}\right| = \left\|\begin{matrix} 0 & -\cos\delta & 0 & \sin\delta \\ 0 & +(-o_{к2,1})\cos\delta + (-o_{к2,2})\sin\delta & -1 & +(+o_{к2,1})\sin\delta + (-o_{к2,2})\cos\delta \\ 0 & \sin\delta & 0 & \cos\delta \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ +(+o_{к2,1}) & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| \times$$

$$\times \left|\begin{matrix} \overline{T}_{12,2} \\ T_{1,2} \\ M_{1,2} \\ \overline{N}_{1,2} \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} p^{*}_{к,2} \\ m^{*}_{к,2} \\ q^{*}_{к,2} \\ t^{*}_{к,2} \\ g^{*}_{к,2} \end{matrix}\right|. \qquad (11.51)$$

Здесь звездочками отмечены внешние нагрузки, приложенные к кольцу. Величины $o_{к2,1}$ и $o_{к2,2}$ характеризуют эксцентричность прикрепления оболочки к опорному кольцу. Знаки перед круглыми скобками, заключающими эти величины, в расчетных формулах следует проставлять в соответствии с рис. 16, в зависимости от места прикрепления оболочки к кольцу.

Формулу (11.51) символически можно записать в виде

$$Y_{к2} = O_{к,2} \times \widetilde{W}_{2,0} + Y^{*}_{к,2}. \qquad (11.52)$$

Вид соотношений между деформациями и перемещениями подкрепляющего кольца и оболочки в этом случае не изменяется и выражается зависимостями (11.16) — (11.19).

Отличие рассматриваемого случая от описанного выше заключается только в значениях элементов матриц $O_{к,1}$ и

$O_{к.2}$, поэтому при формулировке граничных условий на широком контуре оболочки, подкрепленном упругим кольцом при различных схемах его опирания, полностью сохраняется последовательность вывода расчетных формул, приведенных в настоящем параграфе. Разумеется, должны

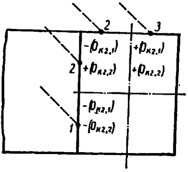


Рис. 16.

быть учтены замечания относительно значений элементов матриц $O_{к,1}$ и $O_{к.2}$.

Условимся только матрицы $C_{к2}$ записывать так, чтобы нулевыми были первые столбцы. Например, граничные условия при подкреплении широкого края оболочки свободным кольцом сформулируются следующим образом[1]:

А. $n = 0$.

$$\begin{vmatrix} u \\ w \\ \theta_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_1 \end{vmatrix}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -\operatorname{ctg}\delta & \dfrac{(+o_{к2.2})}{\sin\delta} & -\dfrac{r_{к2}^2}{EF_{к2}\sin^2\delta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{EI_{к2}}{r_{к2}^2} & \dfrac{(-o_{к2.2})}{\sin\delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{ctg}\delta \end{Vmatrix}_2 \times$$

[1] Напомним, что для узкого края граничные условия при аналогичном подкреплении представлены формулами (11.23) и (11.30).

$$\times \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \\ \theta_1 \\ T_1 \end{matrix}\right|_2 + \left|\begin{matrix} \dfrac{r_{к2}^2}{EF_{к2}\sin\delta}(\operatorname{ctg}\delta\, p_{к2}^{*} - q_{к2}^{*}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -[\operatorname{ctg}\delta(-o_{к2,2}) + (o_{к2,1})]\, p_{к2}^{*} + m_{к2}^{*} \\ -\dfrac{1}{\sin\delta} p_{к2}^{*} \end{matrix}\right|, \qquad (11.53)$$

или

$$W_{20} = C_{к2}\, \widetilde{W}_{20} + \widetilde{W}_{20}^{*}. \qquad (11.54)$$

Б. $n \geqslant 2$.

$$\left|\begin{matrix} v \\ \overline{T}_{12} \\ u \\ w \\ \theta_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ \overline{N}_1 \end{matrix}\right|_2 = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c_{15} & c_{16} & 0 & c_{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{16} & & & c_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{18} & c_{46} & & c_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{37} & c_{57} & c_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|_2 \times \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \overline{T}_{12} \\ T_1 \\ M_1 \\ \overline{N}_1 \end{matrix}\right|_2 + \left|\begin{matrix} \tilde{v}^{*} \\ 0 \\ \tilde{u}^{*} \\ \tilde{w}^{*} \\ \tilde{\theta}_1^{*} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right|_2, \qquad (11.55)$$

или

$$W_{20} = G_{к2}\widetilde{W}_{20} + \widetilde{W}_{20}^{*}. \qquad (11.56)$$

Условия сопряжения цилиндрической оболочки с подкрепляющими ее упругими кольцами формулируются аналогично изложенному выше. Необходимо только учесть, что угол δ между образующей оболочки и вертикальной осью кольца равен нулю.

Результаты, приведенные в настоящем параграфе, дают возможность сформулировать в матричной форме граничные условия задачи при самых разнообразных схемах подкрепления краев оболочки упругими кольцами

$$W_{i0} = G_{кi}\widetilde{W}_{i0} + \widetilde{W}_{i0}^{*}. \qquad (11.57)$$

Вектор W_{i0} всегда состоит только из четырех неизвестных начальных параметров (или трех в случае осесимметричной задачи).

Индекс «i» в формуле (11.57) указывает номер того участка, который подкрепляется упругим кольцом, например, 1-го и z_1+1-го участков на рис. 6.

§ 12. Определение начальных параметров

Используя общую формулу (11.57), представим решение задачи (10.15) — (10.16) в виде

$$\begin{vmatrix} W_{1l} \\ \\ W_{z_1 l} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} Q_{11} & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & \\ Q_{z_1\cdot 1} & Q_{z_1\cdot 2} & \dots & Q_{z_1(z_1-1)} & 0_{z_1 z_1} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} C_{\kappa 1}\widetilde{W}_{10} + \widetilde{W}^{*}_{10} - W^{*}_{10} \\ \cdot \\ \overline{W}^{*}_{z_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} W^{*}_{1l} \\ \\ \overline{W}^{*}_{z_1 l} \end{vmatrix}, \qquad (12.1)$$

$$\begin{vmatrix} W_{(z_1+1)l} \\ \\ W_{zl} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} Q_{(z_1+1)1} & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & \cdot \\ Q_{z1} & Q_{z2} & \dots & Q_{z(z-1)} & Q_{zz} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} C_{\kappa(z_1+1)}\widetilde{W}_{(z_1+1)0} - \widetilde{W}^{*}_{(z_1+1)0} - W_{(z_1+1)0} \\ \cdot \\ \overline{W}^{*}_{z0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} W^{*}_{(z_1+1)l} \\ \cdot \\ W^{*}_{zl} \end{vmatrix}. \qquad (12.2)$$

Выражения (12.1) и (12.2) отличаются от аналогичных выражений (10.5) и (10.16) тем, что в каждое из них входят уже в явной форме четыре неизвестных параметра.

Вектор $W_{z_1 l}$ определяет напряженное и деформированное состояние верхнего края z_1-й заменяющей оболочки, а вектор W_{ze} — нижнего края z-й заменяющей оболочки.

Как видно из рис. 6, оба эти вектора определяют усилия и перемещения одного и того же меридионального сечения рассматриваемой оболочки и поэтому связаны между собой соотношением

$$W_{z_1 e} = D_{z_1, z} W_{zl}. \qquad (12.3)$$

В частном случае, когда участки z_1 и z вдоль линии сопряжения имеют общую касательную плоскость, то матрица перехода $D_{z_1, z}$ вырождается в единичную и

$$W_{z_1 l} = W_{ze}. \qquad (12.4)$$

Подставим в равенство (12.3) значение вектора $W_{z_1 e}$, определяемое формулой (12.1), и значение вектора W_{ze}, определяемое формулой (12.2),

$$Q_{z_1 1}(C_{\text{к}1}\widetilde{W}_{10} + W^*_{10} - W^*_{10}) + Q_{z_1 2}\overline{W}^*_{20} + Q_{z_1 3}\overline{W}^*_{30} + \ldots +$$

$$+ Q_{z_1(z_1-1)}\overline{W}^*_{(z_1-1)0} + Q_{z_1 z_1}\overline{W}^*_{z_1 0} + W^*_{z_1 l} =$$

$$= D_{z_1, z}[Q_{z1}(C_{\text{к}(z_1+1)}\widetilde{W}_{(z_1+1)0} + \widetilde{W}^*_{(z_1+1)0} - W^*_{(z_1+1)0}) +$$

$$+ Q_{z2}\overline{W}^*_{(z_1+2)0} + Q_{z3}\overline{W}^*_{(z_1+3)0} + \ldots + Q_{z(z-1)}\overline{W}^*_{(z-1)0} +$$

$$+ Q_{zz}\overline{W}^*_{z0} + W^*_{zl}]. \qquad (12.5)$$

Придадим выражению (12.5) несколько иную форму

$$Q_{z_1 1}C_{\text{к}1}\widetilde{W}_{10} - D_{z_1, z}Q_{z1}C_{\text{к}(z_1+1)}W_{(z_1+1)0} =$$

$$= D_{z_1, z}[Q_{z1}(\widetilde{W}^*_{(z_1+1)0} - W^*_{(z_1+1)0}) + Q_{z2}\overline{W}^*_{(z_1+2)0} + Q_{z3}\overline{W}^*_{(z_1+3)0} +$$

$$+ \ldots + Q_{z(z-1)}\overline{W}'_{(z-1)0} + Q_{zz}\overline{W}^*_{z0} + W^*_{ze}] - Q_{z_1 1}(\widetilde{W}^*_{10} - W^*_{10}) -$$

$$- Q_{z_1\cdot 2}\overline{W}^*_{20} - Q_{z_1 3}\overline{W}^*_{30} - \ldots - Q_{z_1(z_1-1)}\overline{W}^*_{(z_1-1)0} -$$
$$- Q_{z,z_1}\overline{W}^*_{z,0} - W^*_{z,l}. \qquad (12.6)$$

Пусть матрица G_{kl} имеет вид (11.30), а матрица $C_{к(z_1+1)}$ — вид (11.53). Тогда левую часть выражения (12.6) схематически можно записать в виде

$$\begin{Vmatrix} & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \tilde{w}_{10,1} \\ \tilde{w}_{10,2} \\ \tilde{w}_{10,3} \\ \tilde{w}_{10,4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} -$$

$$- \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{w}_{(z_1+1)0,5} \\ \tilde{w}_{(z_1+1)0,6} \\ \tilde{w}_{(z_1+1)0,7} \\ \tilde{w}_{(z_1+1)0,8} \end{Vmatrix}. \qquad (12.7)$$

Точками обозначены ненулевые элементы матриц $Q_{z,\cdot 1}C_{кl}$ и $D_{z,z}Q_{z1}C_{к(z_1+1)}$, а $\tilde{w}_{10,i}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ и $\tilde{w}_{(z_1+1)0,j}$ $(j = 5, \ldots, 8)$ — неизвестные элементы векторов $\tilde{w}_{10}$ и $\tilde{w}_{(z_1+1)0}$, т. е. начальные параметры задачи, подлежащие определению.

Схематическую запись (12.7) приведем к виду

$$\left\|\begin{matrix} \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} \\ \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} \\ \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} \\ \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} \\ \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} \\ \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} \\ \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} \\ \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} & \underset{\cdot}{-} \end{matrix}\right\| \times \left|\begin{matrix} \tilde{w}_{10,1} \\ \tilde{w}_{10,2} \\ \tilde{w}_{10,3} \\ \tilde{w}_{10,4} \\ \tilde{w}_{(z_1+1)0,5} \\ \tilde{w}_{(z_1+1)0,6} \\ \tilde{w}_{(z_1+1)0,7} \\ \tilde{w}_{(z_1+1)0,8} \end{matrix}\right| . \qquad (12.8)$$

В записи (12.8) точками, как и прежде, обозначены ненулевые элементы матрицы $Q_{z_1 1}C_{\text{к}1}$, а точками с черточками — ненулевые элементы матрицы $D_{z_1,2}Q_{z1}C_{\text{к}(z_1+1)}$ с обратными знаками. Следовательно, выражение (12.8), являющееся схематической формой записи левой части формулы (12.6), равно

$$(Q_{z_1 1}C_{\text{к}1} - D_{z_1,2}Q_{z1}C_{\text{к}(z_1+1)})\,(\widetilde{W}_{10} + \widetilde{W}_{(z_1+1)0}). \qquad (12.9)$$

Введем обозначения

$$B = Q_{z_1 1}C_{\text{к}1} - D_{z_1,2}Q_{z1}C_{\text{к}(z_1+1)}, \qquad (12.10)$$

$$X = \widetilde{W}_{10} + \widetilde{W}_{(z_1+1)0}, \qquad (12.11)$$

где B — квадратная матрица 8-го порядка, а X — вектор, элементами которого являются неизвестные начальные параметры.

Правая часть выражения (12.6) представляет собой вектор, состоящий из 8 элементов, так как каждый член этой части равен произведению квадратной матрицы (с соответствующими индексами) справа на вектор $\widetilde{W}^*$.

Обозначив правую часть (12.6) символом T и учтя обозначения (12.9) и (12.10), получим сокращенную запись выражения (12.6)

$$BX = T. \qquad (12.12)$$

Этим равенством представлена система 8 алгебраических уравнений с 8 неизвестными начальными параметрами (вектор X).

Решение системы (12.12), равное

$$X = B^{-1}T, \tag{12.13}$$

дает значение начальных параметров задачи. Имея это решение, легко определить величины W_{10} и $W_{(z_1+1)0}$, характеризующие напряженное и деформированное состояние краев оболочки. Действительно,

$$W_{10} = C_{\kappa 1}\widetilde{W}_{10} + \widetilde{W}^{*}_{10}. \tag{12.14}$$

С другой стороны, благодаря специальному виду матрицы $C_{\kappa 1}$ выполняется равенство

$$C_{\kappa 1}\widetilde{W}_{10} = C_{\kappa 1}X. \tag{12.15}$$

Подставив (12.15) в (12.14), получим

$$W_{10} = C_{\kappa 1}X + \widetilde{W}^{*}_{10}. \tag{12.16}$$

Аналогично

$$W_{(z_1+1)0} = C_{\kappa(z_1+1)}X + \widetilde{W}^{*}_{(z_1+1)0}. \tag{12.17}$$

Теперь по формулам (10.15), (10.16) определяем величины, характеризующие напряженное и деформированное состояние рассматриваемой оболочки.

ГЛАВА IV

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧЕК

§ 13. Решение задачи в перемещениях

Рассмотрим действие на оболочку вращения осесимметричной нагрузки. Усилия, перемещения и деформации оболочки в этом случае не зависят от координаты β и являются функциями только одной переменной s. Кроме того, из условий симметрии вытекает равенство нулю касательной компоненты внешней нагрузки q_2, окружного перемещения v, сдвигающих усилий T_{12} и T_{21} и крутящих моментов M_{12} и M_{21}. Кручение τ срединной поверхности оболочки равно нулю.

На основании изложенного уравнения равновесия элемента конической оболочки запишем в виде

$$\begin{aligned} &T_1 + T_1' - T_2 = -s_0 e^t q_1; \\ &\operatorname{ctg}\delta T_2 - \frac{1}{s_0 e^t}(M_1' - M_2' + M_1'') = s_0 e^t q_3. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Они получены из общих уравнений равновесия (2.7), из которых второе в данном случае обращается в тождество.

Соотношения упругости значительно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh_0}{(1-\nu^2)s_0}[\nu u + (1+\alpha_1)u' + \nu\operatorname{ctg}\delta w]; \\ T_2 &= \frac{Eh_0}{(1-\nu^2)s_0}[(1+\alpha_2)u + \nu u' + (1+\alpha_2)\operatorname{ctg}\delta w]; \end{aligned} \tag{13.2}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{Eh_0^2 h}{12(1-\nu^2)s_0^2}[(1+\varrho_1-\nu)w' - (1+\varrho_1)w'']; \\ M_2 &= \frac{Eh_0^2 h}{12(1-\nu^2)s_0^2}[-(1+\varrho_2-\nu)w' - \nu w'']. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Уравнения равновесия (13.2) легко записать в перемещениях, использовав соотношения упругости (13.3),

$$-(1+\alpha_2-\nu)\,u+(1+\alpha_1)(u'+u'')-(1+\alpha_2-\nu)\operatorname{ctg}\delta w+$$
$$+\nu\operatorname{ctg}\delta w'=\frac{(1-\nu^2)\,s_0^2e^t}{Eh_0}q_1;$$
$$(1+\alpha_2)\operatorname{ctg}\delta u+\nu\operatorname{ctg}\delta u'+(1+\alpha_2)\operatorname{ctg}^2\delta w-$$
$$-\frac{h_0^2}{12s_0^2}(3+2\varrho_1+\varrho_2-3\nu)\,w'-\frac{h_0^2}{12s_0^2}\times \tag{13.4}$$
$$\times[-(1+\varrho_1)+3+2\varrho_1+\varrho_2-3\nu]\,w''+$$
$$+\frac{h_0^2}{12s_0^2}(1+\varrho_1)(2w^{\mathrm{III}}+w^{\mathrm{IV}})=\frac{(1-\nu^2)\,s_0^2e^t}{Eh_0}q_3.$$

Представим однородную систему дифференциальных уравнений шестого порядка, соответствующую неоднородной системе (13.4), в матричной форме

$$\begin{vmatrix} u^{0\prime} \\ u^{0\cdot} \\ w^{0\prime} \\ w^{0\cdot} \\ w^{0\prime\prime\prime} \\ w^{0\mathrm{IV}} \end{vmatrix}_t = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{43} & -1 & g_{45} & g_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ g_{83} & g_{84} & g_{85} & g_{86} & g_{87} & -2 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} u^{0} \\ u^{0\prime} \\ w^{0} \\ w^{0\prime} \\ w^{0\cdot} \\ w^{0\prime\prime\prime} \end{vmatrix}_t, \tag{13.5}$$

или символически

$$U_t^{0\prime}=GU_t^0. \tag{13.6}$$

Элементы матрицы G равны

$$g_{43}=\frac{1+\alpha_2-\nu}{1+\alpha_1},\quad g_{45}=g_{43}\operatorname{ctg}\delta,\quad g_{46}=-\frac{\nu\operatorname{ctg}\delta}{1+\alpha_1};$$
$$g_{83}=-\frac{12(1+\alpha_2)\operatorname{ctg}\delta s_0^2}{(1+\varrho_1)h_0^2},\quad g_{84}=-\frac{12\nu\operatorname{ctg}\delta s_0^2}{(1+\varrho_1)h_0^2}, \tag{13.7}$$
$$g_{85}=g_{83}\operatorname{ctg}\delta,\quad g_{86}=2+\frac{1+\varrho_2-3\nu}{1+\varrho_1},\quad g_{87}=g_{86}-1.$$

Решение системы (13.6), как и в общем случае, представим в виде матричного ряда по степеням матрицы Gt

$$U_t^0 = \left(I + G\frac{t}{1!} + G^2\frac{t^2}{2!} + G^3\frac{t^3}{3!} + \ldots\right)U_0^0, \quad (13.8)$$

$$U_t^0 = e^{Gt}U_0^0, \quad (13.9)$$

где U_0^0 — вектор начальных параметров задачи.

Для определения частных интегралов системы дифференциальных уравнений (13.4) представим внешнюю нагрузку q, являющуюся функцией только переменной s (или что равносильно t), в виде многочлена k-й степени (8.1), а искомые частные решения — в виде

$$u^*(t) = \sum_{m=1}^{k} \overset{*}{u}_m e^{mt}, \quad w^*(t) = \sum_{m=1}^{k} \overset{*}{w}_m e^{mt}. \quad (13.10)$$

Подставив ряды (8.1) и (13.10) в уравнения системы (13.4), после несложных преобразований получим

$$-[(1 + \alpha_2 - \nu) + (1 + \alpha_1)(1 + m)m]\overset{*}{u}_m +$$
$$+ \operatorname{ctg}\delta[-(1 + \alpha_2 - \nu) + \nu m]\overset{*}{w}_m = -\frac{(1-\nu^2)s_0^2}{Eh_0}q_{1m};$$
$$\operatorname{ctg}\delta(1 + \alpha_2 + \nu m)\overset{*}{u}_m + (1 + \alpha_2)\operatorname{ctg}^2\delta \times$$
$$\times\left\{1 + \frac{h_0^2\operatorname{tg}^2\delta(1 + \varrho_1)}{12(1 + \alpha_2)s_0^2}\left[-\left(2 + \frac{1 + \varrho_2 - 3\nu)}{1 + \varrho_1}\right)m -\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(1 + \frac{1 + \varrho_2 - 3\nu}{1 + \varrho_1}\right)m^2 + 3m^3 + m^4\right]\right\}\overset{*}{w}_m =$$
$$= \frac{(1-\nu^2)s_0^2}{Eh_0}q_{3m}. \quad (13.11)$$

Решение k систем алгебраических уравнений (13.11) дает значения неизвестных коэффициентов $\overset{*}{u}_m$ и $\overset{*}{w}_m$ рядов (13.10).

Моментные члены входят во второе уравнение системы (13.11) с малым множителем

$$\frac{h_0^2\operatorname{tg}^2\delta(1 + \varrho_1)}{12(1 + \alpha_2)s_0^2}.$$

Поэтому условием применимости мембранной теории к отысканию частных решений задачи или условием при котором можно пренебречь указанными моментными членами, является выполнение неравенства

$$m < \sqrt{\frac{s_0 \operatorname{ctg} \delta}{h_0}} \cdot \sqrt[4]{\frac{0{,}6(1+\alpha_2)}{1+\varrho_1}}, \qquad (13.12)$$

совпадающего с неравенством (8.19). Последнее выражает такое же условие в случае действия произвольной нагрузки $q(s, \beta)$.

В § 9 указывалось, что напряженное и деформированное состояние меридионального сечения оболочки в общем случае характеризуется величинами (9.4) и (9.6). В рассматриваемой здесь задаче такими величинами являются

$$u,\ w,\ \theta_1,\ T_1,\ M_1,\ N_1. \qquad (13.13)$$

При помощи соотношений упругости (13.3) функции (13.13) легко выражаются через перемещения u, w и их производные

$$\left|\begin{matrix} u \\ w \\ \theta_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_1 \end{matrix}\right|_t = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{56} & 0 & 0 \\ f_{63} & f_{64} & f_{65} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{76} & f_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{86} & f_{87} & f_{87} \end{matrix}\right\|_t \times \left|\begin{matrix} u \\ u' \\ w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{matrix}\right|_t, \qquad (13.14)$$

или символически

$$W_t = F_t U_t. \qquad (13.15)$$

Элементы матрицы F_t равны

$$f_{63} = \frac{Eh_0 \nu}{(1-\nu^2) s_0}; \quad f_{64} = \frac{Eh_0(1+\alpha_1)}{(1-\nu^2) s_0}; \quad f_{65} = \operatorname{ctg} \delta f_{63};$$

$$f_{76} = \frac{Eh_0^3 (1+\varrho_1-\nu) e^t}{12(1-\nu^2) s_0^2}; \quad f_{77} = -\frac{Eh_0^3(1+\varrho_1) e^t}{12(1-\nu^2) s_0^2};$$

$$f_{86} = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2) s_0^3}(3+2\varrho_1+\varrho_2-3\nu); \quad f_{87} = \frac{1}{s_0 e^t} f_{77}. \qquad (13.16)$$

Из (13.15) легко найти вектор U_0, т. е. выразить перемещения u, w и их производные через величины (13.13) при $t = 0$,

$$U_0 = F_0^{-1} W_0. \tag{13.17}$$

Матрица F_0^{-1} имеет вид

$$F_0^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{f}_{43} & \bar{f}_{44} & 0 & \bar{f}_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{f}_{65} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{f}_{75} & 0 & \bar{f}_{77} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{f}_{85} & 0 & \bar{f}_{87} & \bar{f}_{88} \end{Vmatrix}, \tag{13.18}$$

а ее элементы равны

$$\bar{f}_{43} = -\frac{\nu}{1+\alpha_1};\ \bar{f}_{44} = \operatorname{ctg}\delta \bar{f}_{43};\ \bar{f}_{46} = \frac{(1-\nu^2)s_0}{Eh_0(1+\alpha_1)};\ \bar{f}_{65} = -s_0;$$

$$\bar{f}_{75} = -\frac{1+\varrho_1-\nu}{1+\varrho_1}s_0;\ \bar{f}_{77} = -\frac{12(1-\nu^2)s_0^2}{Eh_0^3(1+\varrho_1)};$$

$$\bar{f}_{85} = -\frac{s_0}{1+\varrho_1}(2+\varrho_1+\varrho_2-2\nu);\ \bar{f}_{87} = -\bar{f}_{77};\ \bar{f}_{88} = s_0\bar{f}_{77}. \tag{13.19}$$

Общее решение задачи для отдельного участка рассматриваемой оболочки легко теперь представить в виде

$$W_t = F_t e^{Gt} F_0^{-1}(W_0 - W_0^*) + W_t^*. \tag{13.20}$$

Формула (13.20) по своей структуре совпадает с формулой (9.19), описывающей отдельный участок оболочки в общем случае. Однако между этими формулами существует одно различие: квадратные матрицы, входящие в решение (13.20), имеют шестой порядок, а аналогичные матрицы, входящие в решение (9.19),— восьмой порядок.

Алгоритм решения задачи, описанный в § 10, и представленный формулами (10.15) и (10.16) полностью применим и для рассматриваемого случая, только порядок квадратных матриц Q_{ij} понижается с восьмого до шестого и векторы W_i, W_i^* и $\overline{W}_i^*$ в этом случае состоят из шести элементов.

Граничные условия задачи при подкреплении краев оболочки упругими кольцами сформулированы в § 11 для различных гармоник, определяемых числом n разложения внешней нагрузки (2.5), в том числе и для $n = 0$, т. е. для рассматриваемого случая осесимметричной нагрузки.

Вышеуказанным исчерпывается вопрос о решении осесимметричной задачи для круговой конической оболочки в перемещениях u и w срединной поверхности.

Решения для цилиндрической оболочки приводить не будем. Укажем только, что для получения этого решения в общих формулах, приведенных в предыдущих главах и относящихся к цилиндрической оболочке, необходимо принять n равным нулю.

§ 14. Решение задачи в усилиях

В предыдущих разделах было изложено решение в перемещениях статической задачи для произвольных оболочек вращения при действии нагрузки общего вида и осесимметричной нагрузки.

Решение содержало 8 неизвестных начальных параметров в первом случае, т. е. при $n \geqslant 1$ (вектор X в формуле (12.11), и 6 неизвестных параметров во втором случае ($n = 0$). Величины начальных параметров определялись в зависимости от граничных условий задачи по формулам (12.12) и (12.13). В этих формулах вектор T зависел, как видно из приведенных в § 12 соотношений, от граничных условий и внешней нагрузки, действующей на оболочку. Квадратная же матрица B определялась только геометрическими параметрами оболочки и фактически характеризовала взаимное влияние краев оболочки.

В связи с этим необходимо заметить, что при действии на оболочку нагрузки общего вида (т. е. при $n \geqslant 1$) усилия и перемещения оболочки являются незатухающими функциями, в том числе и оболочки с прямолинейным меридианом. Поэтому условия, осуществляемые на каждом крае, оказывают взаимное влияние. Иными словами, зона распространения краевых усилий охватывает всю оболочку и матрица B является нормальной матрицей.

Иная картина наблюдается пои действии на оболочку вращения осесимметричной нагрузки $n = 0$. В этом случае моменты, а иногда и усилия, возникающие в краевых сечениях оболочки с прямолинейной образующей, носят затухающий характер. Здесь имеет место краевой эффект. Зона распространения краевого возмущения зависит от толщины стенки оболочки, радиуса кривизны, угла конусности и может охватывать не всю оболочку, а только ее части, примыкающие к краям. Оболочку в таком случае называют «длинной» и расчет ведут без учета взаимного влияния ее краев.

Это обстоятельство находит отражение в том, что матрица B вырождается, и выше описанное решение становится неприемлемым. Поэтому возникает необходимость выяснения вопроса о зоне распространения краевого эффекта в конической оболочке.

Представим с этой целью решение осесимметричной задачи оболочки вращения в форме, отличной от выше приведенной.

Рассматривается, как и прежде, коническая оболочка вращения, толщина которой изменяется по закону,

$$h=h_0\frac{S}{S_0}=h_0 x \tag{14.1}$$

Оболочка подкреплена меридиональными ребрами, имеющими размеры (1.3), и кольцевыми ребрами с размерами (1.4), расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга.

Представим уравнения равновесия этой оболочки (13.2) в несколько ином виде

$$\begin{aligned} &(T_1 s)'_s - T_2 = -q_1 s;\\ &\operatorname{ctg}\delta T_2 - (N_1 s)'_s = q_3 s;\\ &(M_1 s)'_s - M_2 - N_1 s = 0. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Легко заметить, что уравнения (13.2) получаются из уравнений (14.2) исключением из второго уравнения (14.2) величины $N_1 s$ с помощью третьего из этих уравнений и перехода к новой переменной t

$$\frac{s}{s_0} = x = e^t. \tag{14.3}$$

Уравнение совместности деформаций конической оболочки вращения при осесимметричной деформации представляется в виде

$$\theta_1 = \operatorname{tg}\delta\,[\varepsilon_1 - (\varepsilon_2 s)'_s]. \tag{14.4}$$

Относительные удлинения срединной поверхности и угол поворота θ_1 меридиана выражаются через перемещения точек этой поверхности при помощи зависимостей (3.1) и в данном частном случае имеют вид ($v = 0$)

$$\varepsilon_1 = u'_s,$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{s}(u + \operatorname{ctg}\delta w); \tag{14.5}$$

$$\theta_1 = -w'_s. \tag{14.6}$$

Соотношения упругости (13.3) представим в форме

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}[(1+\alpha_1)\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2];$$
$$T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}[\nu\varepsilon_1 + (1+\alpha_2)\varepsilon_2]; \tag{14.7}$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[(1+\varrho_1)\theta'_{1s} + \frac{\nu}{s}\theta_1\right];$$
$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\nu\theta'_{1s} + \frac{1+\varrho_2}{s}\theta_1\right). \tag{14.8}$$

Решая систему (14.7) относительно деформаций ε_1 и ε_2, получаем

$$\varepsilon_1 = \frac{1-\nu^2}{Eah}[(1+\alpha_2)T_1 - \nu T_2];$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1-\nu^2}{Eah}[-\nu T_1 + (1+\alpha_1)T_2], \tag{14.9}$$

где

$$a = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) - \nu^2. \tag{14.10}$$

Общее решение задачи состоит из суммы частного решения, зависящего от внешней нагрузки, и общего решения соответствующих однородных дифференциальных уравнений.

Для построения общего решения однородной задачи (обозначения функций в этом случае будем отмечать значком «о») в уравнениях равновесия (14.2), уравнении совместности деформаций (14.4) и соотношениях упругости (14.8) перейдем к переменной t

$$\begin{gathered} T_1^0 + T_1^{0\prime} - T_2^0 = 0, \\ N_1^0 + N_1^0 - \operatorname{ctg}\delta\, T_2^0 = 0, \\ M_1^0 + M_1^{0\prime} - M_2^0 - s_0 e^t N_1^0 = 0; \end{gathered} \tag{14.11}$$

$$\theta_1^0 = \operatorname{tg}\delta\,(\varepsilon_1^0 - \varepsilon_2^0 - \varepsilon_2^{0\prime}); \tag{14.12}$$

$$\begin{aligned} M_1^0 &= \frac{Eh_0^3 e^{2t}}{12(1-\nu^2)s_0}\,[(1+\varrho_1)\,\theta_1^{0\prime} + \nu\theta_1^0], \\ M_2^0 &= \frac{Eh_0^3 e^{2t}}{12(1-\nu^2)s_0}\,[\nu\theta_1^{0\prime} + (1+\varrho_2)\,\theta_1^0]. \end{aligned} \tag{14.13}$$

Здесь и в дальнейшем штрихами обозначены производные по переменной t.

Из первого и второго уравнения системы (14.11) находим

$$T_2^0 = T_1^0 + T_1^{0\prime}; \tag{14.14}$$

$$N_1^0 = \operatorname{ctg}\delta T_1^0. \tag{14.15}$$

Используя соотношения (14.13) и (14.15), на основании третьего уравнения системы (14.11) приходим к уравнению, связывающему функции T_1^0 и θ_1^0,

$$T_1^0 = \frac{Eh_0^3 \operatorname{tg}\delta e^t}{12(1-\nu^2)s_0^2}\,[-(1+\varrho_2-3\nu)\,\theta_1^0 + (1+\varrho_1)(3\theta_1^{0\prime} + \theta_1^{0\prime\prime})]. \tag{14.16}$$

Исключим из уравнения совместности деформаций (14.12) относительные удлинения ε_1 и ε_2 при помощи соотношений (14.9). Используя зависимость (14.14), получаем второе уравнение, связывающее функции T_1^0 и θ_1^0,

$$\theta_1^0 = \frac{(1-\nu^2)\operatorname{tg}\delta}{E\alpha h_0 e^t}\left[(1+\alpha_2-\nu)T_1^0-(1+\alpha_1)(T_1^{0'}+T_1^{0''})\right]. \tag{14.17}$$

Уравнения (14.16) и (14.17) эквивалентны уравнениям равновесия (14.11) и уравнению совместности деформаций конической оболочки (14.12), вследствие чего решение этих уравнений является решением и рассматриваемой однородной задачи.

Систему уравнений (14.16) и (14.17) легко заменить одним дифференциальным уравнением четвертого порядка относительно функции T_1^0 или θ_1^0

$$T_1^{0^{IV}} + 2T_1^{0'''} - dT_1^{0''} - (1+d)T_1^{0'} + 4k^4T_1^0 = 0, \tag{14.18}$$

или

$$\theta_1^{0^{IV}} + 6\theta_1^{0'''} + (12-d)\theta_1^{0''} + 3(3-d)\theta_1^{0'} + 4k^4\theta_1^0 = 0. \tag{14.19}$$

В уравнениях (14.18) и (14.19) введены обозначения

$$d = 2 + \frac{1+\alpha_2-\nu}{1+\alpha_1} - \frac{\varrho_1-\varrho_2+3\nu}{1+\varrho_1}; \tag{14.20}$$

$$k^4 = \frac{3\operatorname{ctg}^2\delta\cdot\alpha\cdot s_0^2}{(1+\alpha_1)(1+\varrho_1)h_0^2}. \tag{14.21}$$

Уравнение (14.18), или (14.19), к решению которого свелось решение однородной задачи, благодаря специально выбранному закону (14.1) изменения толщины стенки конической оболочки является обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка с постоянными коэффициентами.

Как уже отмечалось, принятые исходные зависимости и, следовательно, полученные уравнения, в силу применимости гипотез Кирхгоффа, имеют погрешность порядка h/r по сравнению с единицей, т. е. порядка 1 по сравнению с k^2. Поэтому и дальнейшие преобразования будем производить с указанной степенью точности.

Для интегрирования уравнения (14.18) состави ответствующее характеристическое уравнение

$$r^4 + br^3 + cr^2 + dr + 4k^4 = 0, \tag{14.22}$$

в котором коэффициенты b, c и d введены для общности изложения. Отметим, что, как видно из формулы (14.21),

$$k \gg 1, \tag{14.23}$$

вследствие чего коэффициенты b, c и d, являющиеся величинами порядка единицы, пренебрежимо малы по сравнению с величинами порядка k^2

При решении алгебраического уравнения 4-й степени (14.22) воспользуемся приемом, изложенным в работе [4].

Корни уравнения (14.22) совпадают с корнями двух квадратных уравнений

$$r^2 + (b + A)\frac{r}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0, \tag{14.24}$$

где

$$A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c}\,, \tag{14.25}$$

а y—какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 - 4cy^2 + (\underline{2bd} - 32k^4)\,y + 4k^4(4c - b^2) - d^2 = 0,$$

или

$$8y^3 - 4cy^2 - 32k^4y + 4k^4(4c - b^2) = 0. \tag{14.26}$$

Здесь и в дальнейшем подчеркнутые величины пренебрежимо малы по сравнению с величинами порядка k^2.

Введем новую величину

$$y_1 = y - \frac{c}{6} \tag{14.27}$$

и разделим уравнение (14.16) на 8. Тогда

$$y_1^3 + 3py_1 + 2q = 0, \tag{14.28}$$

где

$$2q = -\underline{\frac{c^3}{108}} - \frac{2ck^4}{3} + \frac{4c - b^2}{2}k^4 = \frac{8c - 3b^2}{6}k^4; \tag{14.29}$$

$$3p = \frac{-3\cdot 8\cdot 32k^4 - \underline{16c^2}}{3\cdot 8\cdot 8} = -4k^4. \tag{14.30}$$

Обозначим

$$y_2 = \pm \sqrt{|p|} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} k^2. \qquad (14.31)$$

Знак величины y_2 должен совпадать со знаком q. Введем вспомогательную величину φ

$$\cos\varphi = \frac{q}{r^3} = \frac{3\sqrt{3}(8c - 3b^2)}{96k^2}. \qquad (14.32)$$

Величина (14.32) весьма мала и поэтому можно принять

$$\varphi = \frac{\pi}{2}. \qquad (14.33)$$

Тогда

$$y_1 = -2y_2 \cos\frac{\varphi}{3} = -(\pm 2k^2).$$

Отметим, что q при расчете оболочек всегда отрицательно, потому

$$y_1 = +2k^2. \qquad (14.34)$$

По формуле (14.27) определяем величину y

$$y = y_1 + \frac{c}{6} = 2k^2 + \frac{c}{6} = 2k^2, \qquad (14.35)$$

а по формуле (14.25) — величину A

$$A = \pm\sqrt{16k^2 + b^2 - 4c} = \pm 4k. \qquad (14.36)$$

Уравнения (14.24) принимают вид

$$r^2 + (b \pm 4k)\frac{r}{2} + \left(2k^2 \pm \frac{2k^2 b - d}{4k}\right) = 0, \qquad (14.37)$$

и корни их равны

$$r_i = -\frac{b}{4} \pm k(1 \pm i) \qquad (j = 1, \ldots, 4). \qquad (14.38)$$

Решение (14.38) уравнения (14.22) имеет погрешность порядка $\frac{h}{r}$ по сравнению с единицей или, как отмечалось выше, порядка 1 по сравнению с k^2, что не выходит за пределы принятой точности.

Применяя полученные результаты к решению однородных дифференциальных уравнений (14.18) и (14.19), получаем их общие решения

$$T_1^0 = C_1 e^{(k-0,5)t} \cos kt + C_2 e^{(k-0,5)t} \sin kt + C_3 e^{-(k+0,5)t} \cos kt + {} \\ + C_4 e^{-(k+0,5)t} \sin kt; \tag{14.39}$$

$$\theta_1^0 = F\,[\bar{C}_1 e^{(k-1,5)t} \cos kt + \bar{C}_2 e^{(k-1,5)t} \sin kt + {} \\ + \bar{C}_3 e^{-(k+1,5)t} \cos kt + \bar{C}_4 e^{-(k+1,5)t} \sin kt], \tag{14.40}$$

где C_i и $\bar{C}_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ — постоянные интегрирования, а F—произвольный пока множитель.

Выразим постоянные $\bar{C}_i$ через C_i. Для этого приравняем решение (14.40) решению, получаемому для функции θ_1^0 по формуле (14.17) с использованием функции (14.39) и ее производных,

$$\frac{F}{e^t}[\bar{C}_1 e^{(k-0,5)t} \cos kt + \bar{C}_2 e^{(k-0,5)t} \sin kt + \bar{C}_3 e^{-(k+0,5)t} \cos kt + {} \\ + \bar{C}_4 e^{-(k+0,5)t} \sin kt] = \\ = \frac{2(1-\nu^2)(1+\alpha_1)k^2 \operatorname{tg}\delta}{Eah_0 e^t} \times \\ \times \left\{\left[\underline{\left(\frac{1}{4} + \frac{1+\alpha_2-\nu}{1+\alpha_1}\right)\frac{C_1}{2k^2}} - C_2\right] e^{(k-0,5)t} \cos kt + {} \right. \\ + \left[C_1 + \underline{\left(\frac{1}{4} + \frac{1+\alpha_2-\nu}{1+\alpha_1}\right)\frac{C_2}{2k^2}}\right] e^{(k-0,5)t} \sin kt + {} \\ + \left[\underline{\left(\frac{1}{4} + \frac{1+\alpha_2-\nu}{1+\alpha_1}\right)\frac{C_3}{2k^2}} + C_4\right] e^{-(k+0,5)t} \cos kt + {} \\ \left. + \left[-C_3 + \underline{\left(\frac{1}{4} + \frac{1+\alpha_2-\nu}{1+\alpha_1}\right)\frac{C_4}{2k^2}}\right] e^{-(k+0,5)t} \sin kt\right\}. \tag{14.41}$$

Пренебрегая малыми подчеркнутыми членами в выражении (14.41), получаем

$$F = \frac{2(1-\nu^2)(1+\alpha_1)k^2 \operatorname{tg}\delta}{Eah_0}; \tag{14.42}$$

$$\bar{C}_1 = -C_2, \qquad \bar{C}_2 = C_1; \tag{14.43}$$

$$\bar{C}_3 = C_4, \qquad \bar{C}_4 = -C_3. \tag{14.44}$$

Подставив величины (14.42) — (14.44) в (14.40), находим

$$\theta_1^0 = \frac{2(1-\nu^2)(1+\alpha_1)\,k^2 \operatorname{tg}\delta}{Eah_0e^t}\,[-C_2e^{(k-0,5)t}\cos kt +$$

$$+ C_1e^{(k-0,5)t}\sin kt + C_4e^{-(k+0,5)t}\cos kt - C_3e^{-(k+0,5)t}\sin kt]. \tag{14.45}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в формуле (14.45), получается заменой в выражении (14.39) постоянных C_j постоянными $\bar{C}_j$ $(j = 1, \ldots, 4)$, которые определяются формулами (14.43) и (14.44). Введем обозначение

$$\tilde{T}_1^0 = -C_2e^{(k-0,5)t}\cos kt + C_1e^{(k-0,5)t}\sin kt + C_4e^{-(k+0,5)t}\cos kt -$$

$$- C_3e^{-(k+0,5)t}\sin kt. \tag{14.46}$$

Тогда

$$\theta_1^0 = \frac{2(1-\nu^2)(1+\alpha_1)\,k^2 \operatorname{tg}\delta}{Eah_0e^t}\,\tilde{T}_1^0. \tag{14.47}$$

По формуле (14.13) легко определить меридиональные и кольцевые изгибающие моменты в сечениях оболочки

$$\begin{aligned} M_1^0 &= \frac{s_0 \operatorname{ctg}\delta e^t}{2k^2}\left[-\left(1-\frac{\nu}{1+\varrho_1}\right)\tilde{T}_1^0 + \tilde{T}_1^{0\prime}\right];\\ M_2^0 &= \frac{s_0 \operatorname{ctg}\delta e^t}{2k^2(1+\varrho_1)}\,[(1+\varrho_2-\nu)\,\tilde{T}_1^0 + \nu\tilde{T}_1^{0\prime}], \end{aligned} \tag{14.48}$$

а по формуле (14.9) — продольные и кольцевые относительные удлинения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{1-\nu^2}{Eah_0e^t}\cdot[(1+\alpha_2-\nu)\,T_1^0 - \nu T_1^{0\prime}];\\ \varepsilon_2^0 &= \frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)}{Eah_0e^t}\left[\left(1-\frac{\nu}{1+\alpha_1}\right)T_1^0 + T_1^{0\prime}]\right]. \end{aligned} \tag{14.49}$$

Для определения нормального перемещения w^0 воспользуемся формулами (14.6) и (14.45)

$$w^0 = -\frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)\,k\,\mathrm{tg}\,\delta s_0}{Eah_0}\times$$
$$\times\left\{e^{(k-0,5)t}\left[C_1\left(\sin kt - \frac{k}{k-0,5}\cos kt\right) - \right.\right.$$
$$\left. - C_2\left(\cos kt + \frac{k}{k-0,5}\sin kt\right)\right] +$$
$$+ e^{-(k+0,5)t}\left[C_3\left(\sin kt + \frac{k}{k+0,5}\cos kt\right) - \right.$$
$$\left.\left. - C_4\left(\cos kt - \frac{k}{k+0,5}\sin kt\right)\right]\right\}. \qquad (14.50)$$

Перемещения u^0 находим из второй формулы (14.5)

$$u^0 = s_0 e^t \varepsilon_2^0 - \mathrm{ctg}\,\delta w^0. \qquad (14.51)$$

Выведенные формулы представляют общее решение рассматриваемой однородной задачи и содержат постоянные интегрирования C_j $(j = 1, \ldots, 4)$.

При построении частного решения задачи можно в общем случае воспользоваться формулами (13.11) предыдущего параграфа. В частном случае, когда нагрузка представлена медленно изменяющейся функцией, т. е. когда выполняется условие (13.12), частные решения задачи можно определять по мембранной теории. Иными словами, в уравнениях равновесия (14.2) необходимо приравнять нулю моменты и поперечную силу N_1

$$M_1^* = M_2^* = N_1^* = 0. \qquad (14.52)$$

Пусть

$$q = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{k} q_m s^m. \qquad (14.53)$$

Рассматривая m-й член разложения (14.53), из первого и второго уравнений равновесия (14.2) получаем

$$T_{2m}^* = \mathrm{tg}\,\delta s^{m+1} q_{3m}; \qquad (14.54)$$

$$T_{1m}^* = \frac{s^{m+1}}{m+2}(\mathrm{tg}\,\delta q_{3m} - q_{1m}) + \frac{1}{s}C_5,$$

где C_6 — произвольная постоянная интегрирования, подлежащая определению.

Относительные продольное и кольцевое удлинение $\varepsilon_1^{\bullet}$ и $\varepsilon_2^{\bullet}$ определяются с учетом (14.54) по общей формуле (14.9)

$$\varepsilon_{1m}^{\bullet} = \frac{(1-\nu^2)\,s_0}{Eah_0}\left\{s^m\left[\left(\frac{1+\alpha_2}{m+2}-\nu\right)\operatorname{tg}\delta\cdot q_{3m} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1+\alpha_2}{m+2}\,q_{1m}\right] + \frac{1+\alpha_2}{s^2}\,C_6\right\}; \qquad (14.55)$$

$$\varepsilon_{2m}^{\bullet} = \frac{(1-\nu^2)\,s_0}{Eah_0}\left\{s^m\left[\left(1+\alpha_1-\frac{\nu}{m+2}\right)\operatorname{tg}\delta\cdot q_{3m} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\nu}{m+2}\,q_{1m}\right] - \frac{\nu}{s^2}\,C_5\right\}.$$

После определения $\varepsilon_{1m}^{\bullet}$ и $\varepsilon_{2m}^{\bullet}$ по формуле (14.4) легко находим частное решение для функции $\theta_1^{\bullet}$

$$\theta_{1m}^{\bullet} = \frac{(1-\nu^2)\operatorname{tg}\delta s_0}{Eah_0}\left\{\left[\frac{1+\alpha_2-\nu}{m+2} - \right.\right.$$

$$\left. -(1+\alpha_1)(m+1)\right]\operatorname{tg}\delta s^m q_{3m} - \frac{1+\alpha_2+(m+1)\nu}{m+2}\,s^m q_{1m} +$$

$$\left. + \frac{1+\alpha_2-\nu}{s^2}\,C_6\right\}, \qquad (14.56)$$

а по формулам (14.5) и (14.6) — частные решения для функций w и u

$$w_m^{\bullet} = \frac{(1-\nu^2)\operatorname{tg}\delta s_0}{Eah_0}\left\{-\left[\frac{1+\alpha_2-\nu}{(m+2)(m+1)} - 1 - \alpha_1\right]\times\right.$$

$$\times\operatorname{tg}\delta s^{m+1} q_{3m} + \left[\frac{1+\alpha_2}{(m+2)(m+1)} + \frac{\nu}{m+2}\right]s^{m+1} q_{1m} +$$

$$\left. + \frac{1+\alpha_2-\nu}{s}\,C_6\right\} + \frac{1}{E}\,C_0; \qquad (14.57)$$

$$u_m^{\bullet} = s\varepsilon_{2m}^{\bullet} - \operatorname{ctg}\delta w_m^{\bullet},$$

где C_0 — постоянная интегрирования.

Для построения частных решений, соответствующих действию всей нагрузки q, необходимо сложить частные решения от отдельных членов разложения (14.53). Представим эти решения в виде

$$T_2^* = \tilde{T}_2^*(s);$$

$$T_1^* = \tilde{T}_1^*(s) + \frac{1}{s}C_5;$$

$$E\varepsilon_1^* = \tilde{\varepsilon}_1^*(s) + \frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_2)s_0}{\alpha h_0 s^2}C_5;$$

$$E\varepsilon_2^* = \tilde{\varepsilon}_2^*(s) - \frac{\nu(1-\nu^2)s_0}{\alpha h_0 s^2}C_5; \qquad (14.58)$$

$$E\theta^* = \tilde{\theta}^*(s) + \frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_2-\nu)\operatorname{tg}\delta\cdot s_0}{\alpha h_0 s^2}C_5;$$

$$Ew^* = \tilde{w}^*(s) + \frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_2-\nu)\operatorname{tg}\delta s_0}{\alpha h_0 s}C_5 + C_6;$$

$$Eu^* = s\varepsilon_2^* - \operatorname{ctg}\delta w^*.$$

В этих выражениях символами с чертой обозначены частные решения соответствующих функций при действии на оболочку заданной нагрузки q.

В общее решение задачи, состоящее из суммы общего решения однородной задачи и частного решения, входят 6 произвольных постоянных интегрирования C_j ($j=1, \ldots, 6$), которые определяются после подчинения этого решения конкретным граничным условиям задачи.

§ 15. Формулировка граничных условий при решении задачи в усилиях

Рассмотрим коническую оболочку, края которой подкреплены упругими кольцами. Последние могут быть связаны с опорными конструкциями по схемам, описанным в § 11. К кольцам приложены осесимметричные нагрузки, распределенные вдоль окружностей: $p_к$ — вертикальная $q_к$— радиальная; $m_к$ — моментная в диаметральных плоскостях.

Под действием указанных нагрузок точки осей колец приобретают радиальные перемещения $w_к$ и поперечные сечения поворачиваются (закручиваются) в меридиональных плоскостях на угол $\theta_к$.

Правила знаков для указанных величин, характеризующих загружение кольца и соответствующие ему перемещения и деформации, изложены в § 11.

Перемещения кольца определяются формулами (11.4)

$$\theta_к = \frac{r_к^2}{EI_к} m_к;$$
$$w_к = \frac{r_к^2}{EF_к} q_к. \tag{15.1}$$

Рассмотрим совместную деформацию оболочки и кольца, подкрепляющего ее узкий край (рис. 10 и 11).

В краевом сечении оболочки действуют усилия $T_{1,1}$, $N_{1,1}$ и момент $M_{1,1}$; к кольцу приложены внешние нагрузки $p^*_{к,1}$, $q^*_{к,1}$ и $m^*_{к,1}$.

Будем считать оболочку настолько длинной, что взаимным влиянием ее краев можно пренебречь. В общем решении задачи, представленном формулами § 14, необходимо для узкого края оболочки удержать члены, убывающие при увеличении аргумента t.

Примем в формуле (14.3)

$$s_0 = s_1, \tag{15.2}$$

где s_1 — координата узкого края оболочки. Для этого края (при $s = s_1$) переменная t_1 равна нулю, так как

$$\frac{s}{s_1} = x_1 = e^{t_1}. \tag{15.3}$$

Учитывая изложенное, запишем значения усилий и деформаций в сечении $s = s_1$

$$T_{1,1} = C_3 + \frac{1}{s_1} C_5 + \overline{T}^*_{1,1};$$

$$N_{1,1} = \operatorname{ctg} \delta C_3;$$

$$M_{1,1} = -\frac{s_1 \operatorname{ctg} \delta}{2k^2} \left[kC_3 + \left(k + 1{,}5 - \frac{\nu}{1 + \varrho_1} \right) C_1 \right];$$

$$E\varepsilon_{2,1} = \frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)}{\alpha h_1}\left[-\left(k-0{,}5+\frac{\nu}{1+\alpha_1}\right)C_3+kC_4\right]-$$

$$-\frac{\nu(1-\nu^2)}{\alpha h_1 s_1}C_5+\tilde{\varepsilon}^{\bullet}_{2,1}; \qquad (15.4)$$

$$E\theta_{1,1} = \frac{2(1-\nu^2)(1+\alpha_1)k^2\operatorname{tg}\delta}{\alpha h_1}C_4+$$

$$+\frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_2-\nu)\operatorname{tg}\delta}{\alpha h_1 s_1}C_5+\bar{\theta}^{\bullet}_{1,1};$$

$$Ew_1 = \frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)k\operatorname{tg}\delta s_1}{\alpha h_1}\left(-\frac{k}{k+0{,}5}C_3+C_4\right)+$$

$$+\frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_2-\nu)\operatorname{tg}\delta}{\alpha h_1}C_5+C_6+\bar{w}^{\bullet}_1;$$

$$u_1 = s_1\varepsilon_{2,1}-\operatorname{ctg}\delta w_1,$$

где h_1— толщина оболочки в сечении $s = s_1$.

Отделим кольцо от оболочки и заменим ее действие на кольцо усилиями, действующими в сечении оболочки $s = s_1$. Величина полной нагрузки, действующей на кольцо, определяется общей формулой (11.14), в которой необходимо принять

$$t_{\text{к},1} = g_{\text{к},1} = t^{\bullet}_{\text{к},1} = g^{\bullet}_{\text{к},1} = \bar{T}_{12,1} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{N}_{1,1} = N_{1,1};$$

$$p_{\text{к},1} = \cos\delta T_{1,1} - \sin\delta N_{1,1} + p^{\bullet}_{\text{к},1};$$

$$m_{\text{к},1} = [(o_{\text{к}1,1})\cos\delta + (o_{\text{к}1,2})\sin\delta]\,T_{1,1} + M_{1,1} + \qquad (15.5)$$

$$+[(-o_{\text{к}1,1})\sin\delta + (o_{\text{к}1,2})\cos\delta]\,N_{1,1} + m^{\bullet}_{\text{к},1};$$

$$q_{\text{к},1} = -\sin\delta T_{1,1} - \cos\delta N_{1,1} + q^{\bullet}_{\text{к},1}.$$

Рассмотрим опирание упругого кольца, подкрепляющего узкий край оболочки.

Схема I₁. Раскрывая условия равновесия кольца (11.20) и условия совместности деформаций кольца и оболочки (11.21), получаем, используя соотношения (15.1), (15.4) и (15.5),

$$C_5 = -s_1\left(\overline{T}^{\bullet}_{1,1} + \frac{1}{\cos\delta}\, p^{\bullet}_{\kappa,1}\right); \tag{15.6}$$

$$\frac{r^2_{\kappa 1}}{\sin\delta I_{\kappa 1}}\left[\frac{s_1\cos\delta}{2k} + (-o_{\kappa 1,2})\right]C_3 + \frac{s_1\operatorname{ctg}\delta}{2k^2}\left[\frac{12(1-\nu^2)s_1}{(1+\varrho_1)h_1^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{r^2_{\kappa 1}}{I_{\kappa 1}}\left(k + 1{,}5 - \frac{\nu}{1+\varrho_1}\right)\right]C_4 + \frac{\sin\delta}{s_1}\left\{\frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_2-\nu)}{\alpha h_1\cos\delta} - \right.$$

$$\left. - \frac{r^2_{\kappa 1}}{I_{\kappa 1}}\left[\operatorname{ctg}\delta\,(o_{\kappa 1,1}) + (o_{\kappa 1,2})\right]C_5 = \right.$$

$$= \frac{r^2_{\kappa 1}}{I_{\kappa 1}}\left\{\sin\delta\left[\operatorname{ctg}\delta\,(o_{\kappa 1,1}) + (o_{\kappa 1,2})\right]\overline{T}^{\bullet}_{1,1} + m^{\bullet}_{\kappa,1}\right\} - \overline{\theta}^{\bullet}_{1,1}; \tag{15.7}$$

$$\left[(1+\alpha_1)\left(k - 0{,}5 + \frac{\nu}{1+\alpha_1}\right) + \frac{\alpha h_1 r_{\kappa 1}}{(1-\nu^2)\sin\delta F_{\kappa 1}}\times\right.$$

$$\left.\times C_3 - (1+\alpha_1)\right|1 + \frac{2\operatorname{tg}\delta k}{r_{\kappa 1}}(-o_{\kappa 1,2})\left]kC_4 + \right.$$

$$+ \frac{1}{s_1}\left[\nu + \frac{\alpha h_1 r_{\kappa 1}\sin\delta}{(1-\nu^2)F_{\kappa 1}} + \frac{(1+\alpha_2-\nu)\operatorname{tg}\delta}{r_{\kappa 1}}(o_{\kappa 1,2})\right]C_5 =$$

$$= \frac{\alpha h_1}{1-\nu^2}\left[\bar{\varepsilon}^{\bullet}_{2,1} + \frac{1}{r_{\kappa 1}}(-o_{\kappa 1,2})\overline{\theta}^{\bullet}_{1,1} - \frac{r_{\kappa 1}}{F_{\kappa 1}}\left(\sin\delta\widetilde{T}^{\bullet}_{1,1} - q^{\bullet}_{\kappa,1}\right)\right]. \tag{15.8}$$

Схема II_1. В этом случае условие равновесия кольца (11.20) удовлетворяется автоматически благодаря наличию внешней опоры, которая воспринимает вертикальную нагрузку p_{κ_1}. Вместо этого вводится условие равенства вертикальных перемещений волокна кольца, к которому примыкает оболочка, и вертикальных перемещений края оболочки (11.35). Раскрывая это условие, приходим к алгебраическому уравнению относительно неизвестных постоянных интегрирования, которое заменяет уравнение (15.6),

$$s_1\left[\left(k-0{,}5+\frac{\nu}{1+\alpha_1}\right)\cos\delta-\frac{k^2}{(k+0{,}5)\cos\delta}\right]C_3+$$

$$+s_1\operatorname{tg}\delta\left[\sin\delta+\frac{2k}{s_1}(o_{\text{к}1,1})\right]kC_4+\frac{1}{1+\alpha_1}\left\{\frac{1+\alpha_2-\nu}{\cos\delta}\left[1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sin\delta}{s_1}(O_{\text{к}1,1})\right]+\nu\cos\delta\right\}C_5+\frac{\alpha h_1}{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)\sin\delta}C_6=$$

$$=\frac{\alpha h_1}{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)}\left[\cos\delta\, s_1\bar{\varepsilon}^{*}_{2,1}-(O_{\text{к}1,1})\,\bar{\theta}^{*}_{1,1}-\frac{1}{\sin\delta}w^{*}_{1}\right] \qquad (15.9)$$

Остальные условия совместности деформаций кольца и оболочки выражаются, как и при схеме I_1, уравнениями (11.21), вследствие чего уравнения (15.7) и (15.8) справедливы и в рассматриваемой схеме.

Схема III_1. Наличие внешней связи, исключающей горизонтальные перемещения точки кольца, к которой примыкает опора, стесняет угловые деформации кольца в меридиональных плоскостях и приводит к тому, что горизонтальные перемещения точек кольца обусловливаются только этими угловыми деформациями. Условия совместности деформаций и перемещений кольца и оболочки выражаются в рассматриваемом случае уравнениями (11.43) и (11.44). При определении деформаций кольца вместо усилий $m_{\text{к}.1}$ и $q_{\text{к}.1}$ по формулам (15.5) необходимо оперировать выражениями усилий по (11.41) и (11.42).

Раскрывая первое условие (11.43) и условие (11.44) и учитывая приведенные соображения, приходим к алгебраическим уравнениям

$$\frac{r^2_{\text{к}1}}{8\sin\delta J_{\text{к}1}}\left[\frac{s_1\cos\delta}{k}-h_{\text{к}1}+2(-o_{\text{к}1,2})\right]C_3+\frac{s_1\operatorname{ctg}\delta}{k^2}\times$$

$$\times\left[\frac{6(1-\nu^2)s_1}{(1+\varrho_1)h_1^3}+\frac{r^2_{\text{к}1}}{8J_{\text{к}1}}\left(k+1{,}5-\frac{\nu}{1+\varrho_1}\right)\right]C_4+$$

$$+\frac{\sin\delta}{s_1}\left\{\frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_2-\nu)}{\alpha h_1\cos\delta}-\frac{r^2_{\text{к}1}}{8J_{\text{к}1}}[2(o_{\text{к}1,1})\operatorname{ctg}\delta+h_{\text{к}1}+\right.$$

$$+ 2(o_{\kappa 1,2})]\Big\} C_5 = \frac{r_{\kappa 1}^2}{8 I_{\kappa 1}} \{\sin\delta\,[h_{\kappa 1} + 2(o_{\kappa 1,2}) + 2(o_{\kappa 1,2})\operatorname{ctg}\delta]\overline{T}^{\bullet}_{1,1}$$

$$- h_{\kappa 1} q^{\bullet}_{\kappa 1} + 2 m^{\bullet}_{\kappa 1}\} - \overline{\theta}^{\bullet}_{1,1}; \qquad (15.10)$$

$$(1 + \alpha_1)\left(k - 0{,}5 + \frac{\nu}{1 + \alpha_1}\right) C_3 - (1 + \alpha_1)\left\{1 - \frac{\operatorname{tg}\delta k}{r_{\kappa 1}}[h_{\kappa 1} + \right.$$

$$\left. + 2(o_{\kappa 1,2})]\right\} k C_4 + \frac{1}{s_1}\left\{\nu + \frac{(1 + \alpha_2 - \nu)\operatorname{tg}\delta}{2 r_{\kappa 1}}[h_{\kappa 1} + 2(o_{\kappa 1,2})]\right\} C_5 =$$

$$\frac{\alpha h_1}{1 - \nu^2}\left\{\overline{\varepsilon}^{\bullet}_{2,1} - \frac{1}{2 r_{\kappa 1}}[h_{\kappa 1} + 2(o_{\kappa 1,2})]\,\overline{\theta}^{\bullet}_{1,1}\right\}. \qquad (15.11)$$

Третье граничное условие имеет форму (15.9).

Схема IV_1. В этом случае угол поворота поперечного сечения кольца в меридиональных плоскостях и, следовательно, угол поворота меридиана оболочки в краевом сечении, а также вертикальные перемещения кольца равны нулю, что выражено условиями (11.49). Кроме того, горизонтальные перемещения кольца и края оболочки одинаковы, что представлено условием (11.50). Раскрывая эти равенства, получаем систему трех алгебраических уравнений относительно искомых постоянных интегрирования

$$2(1 + \alpha_1) k^2 C_4 + \frac{1 + \alpha_2 - \nu}{s_1} C_5 = -\frac{\alpha h_1 \operatorname{ctg}\delta}{1 - \nu^2}\overline{\theta}^{\bullet}_{1,1}; \quad (15.12)$$

$$\left[(1 + \alpha_1)\left(k - 0{,}5 + \frac{\nu}{1 + \alpha_1}\right) + \frac{\alpha h_1 r_{\kappa 1}}{(1 - \nu^2)\sin\delta F_{\kappa 1}}\right] C_3 -$$

$$-(1 + \alpha_1) k C_4 + \frac{1}{s}\left[\nu + \frac{\alpha h_1 r_{\kappa 1}\sin\delta}{(1 - \nu^2) F_{\kappa 1}}\right] C_5 =$$

$$= \frac{\alpha h_1}{1 - \nu^2}\left[\overline{\varepsilon}^{\bullet}_{2,1} - \frac{r_{\kappa 1}}{F_{\kappa 1}}(\sin\delta\,\overline{T}^{\bullet}_{1,1} - q^{\bullet}_{\kappa 1})\right]; \qquad (5.13)$$

$$s_1\left[\left(k - 0{,}5 + \frac{\nu}{1 + \alpha_1}\right)\cos\delta - \frac{k^2}{(k + 0{,}5)\cos\delta}\right] C_3 +$$

$$+ s_1 \sin\delta \cdot \operatorname{tg}\delta k C_4 + \frac{1}{1 + \alpha_1}\left(\nu\cos\delta + \frac{1 + \alpha_2 - \nu}{\cos\delta}\right) C_5 +$$

$$+\frac{\alpha h_1}{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)\sin\delta}C_6=\frac{\alpha h_1}{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)}\times$$

$$\times\left(\cos\delta\bar{\varepsilon}^{\bullet}_{2,1}-\frac{1}{\sin\delta}\bar{w}^{\bullet}_1\right). \qquad (15.14)$$

Рассмотрим жесткое защемление края оболочки. В этом случае на основании последних четырех соотношений (15.4) легко получим уравнения для определения постоянных интегрирования

$$(1+\alpha_1)\left(k-0{,}5+\frac{\nu}{1+\alpha_1}\right)C_3-(1+\alpha_1)kC_4+$$

$$+\frac{\nu}{s_1}C_5=\frac{\alpha h_1}{1-\nu^2}\bar{\varepsilon}^{\bullet}_{2,1}; \qquad (15.15)$$

$$-\frac{(1+\alpha_1)k^2}{k+0{,}5}C_3+(1+\alpha_1)kC_4+\frac{1+\alpha_2-\nu}{s_1}C_5+$$

$$+\frac{\alpha h_1\operatorname{ctg}\delta}{(1-\nu^2)s_1}C_6=-\frac{\alpha h_1\operatorname{ctg}\delta}{(1-\nu^2)s_1}\bar{w}^{\bullet}_1. \qquad (15.16)$$

Условие равенства нулю угла поворота $\theta_{1,1}$ выражается уравнением (15.12).

Для удобства пользования приведенными в этом параграфе системами алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных интегрирования сведем их в табл. 3.

Таблица 3

Схема опирания	Система уравнений	Состав неизвестных
I_1	(15.6), (15.7), (15.8)	C_3, C_4, C_5;
II_1	(15.7), (15.8), (15.9)	C_3, C_4, C_5, C_6;
III_1	(15.9), (15.10), (15.11)	C_3, C_4, C_5, C_6;
IV_1	(15.12), (15.13), (15.14)	C_3, C_4, C_5, C_6;
Жесткое защемление	(15.12), (15.15), (15.16)	C_3, C_4, C_5, C_6.

Рассмотрим далее совместную деформацию оболочки и кольца, подкрепляющего ее широкий край (рис. 15 и 16). Со стороны оболочки действуют внутренние усилия $T_{1,2}$, $N_{1,2}$

и $M_{1.2}$. Кроме того, к кольцу приложены внешние нагрузки $p^{*}_{к.2}$, $q^{*}_{к.2}$ и $m^{*}_{к.2}$.

В формуле (14.3) примем

$$s_0 = s_2, \tag{15.17}$$

где s_2 — меридиональная координата широкого края оболочки. Тогда переменная t_2, определяемая соотношением

$$\frac{s}{s_2} = x_2 = e^{t_2}, \tag{15.18}$$

равняется нулю при $s = s_2$.

Считая, как и прежде, оболочку длинной, необходимо в расчетных формулах § 14 удержать члены, убывающие при уменьшении аргумента t_2. Это приводит к следующим соотношениям

$$T_{1,2} = C_1 + \frac{1}{s_2} C_5 + \overline{T}^{*}_{1,2}; \quad N_{1,2} = \operatorname{ctg} \delta C_1; \quad M_{1,2} = \frac{s_2 \operatorname{ctg} \delta}{2k^2} \times$$

$$\times \left[kC_1 - \left(k - 1{,}5 + \frac{\nu}{1 + \varrho_1} \right) C_2 \right]; \; E\varepsilon_{2,2} = \frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)}{\alpha h_2} \times$$

$$\times \left[\left(k + 0{,}5 - \frac{\nu}{1 + \alpha_1} \right) C_1 + kC_2 \right] - \frac{\nu (1 - \nu^2)}{\alpha h_2 s_2} C_5 + \overline{\varepsilon}^{*}_{2,2};$$

$$E\theta_{1,2} = - \frac{2 (1 - \nu^2) (1 + \alpha_1) \operatorname{tg} \delta k^2}{\alpha h_2} C_2 +$$

$$+ \frac{(1 - \nu^2) (1 + \alpha_2 - \nu) \operatorname{tg} \delta}{\alpha h_2 s_2} C_5 + \overline{\theta}^{*}_{1,2}; \tag{15.19}$$

$$E w_2 = \frac{(1 - \nu^2) (1 + \alpha_1) k \operatorname{tg} \delta s_2}{\alpha h_2} \left(\frac{k}{k - 0{,}5} C_1 + C_3 \right) +$$

$$+ \frac{(1 - \nu^2) (1 + \alpha_2 - \nu) \operatorname{tg} \delta}{\alpha h_2} C_5 + C_6 + \overline{w}^{*}_2; \; u_2 = s_2 \varepsilon_{2,2} - \operatorname{ctg} \delta \, w_2,$$

где h_2 — толщина оболочки в сечении $s = s_2$.

Отделим, как и прежде, кольцо от оболочки и приложим к нему усилия $T_{1,2}$, $N_{1,2}$ и $M_{1,2}$. Применив общую формулу (11.51) к рассматриваемому частному случаю, получим значение полной нагрузки, действующей на отделенное от оболочки кольцо

$$p_{\text{к},2} = -\cos\delta T_{1,2} + \sin\delta N_{1,2} + p^{*}_{\text{к},2};$$

$$m_{\text{к},2} = [(-o_{\text{к}2,1})\cos\delta + (-o_{\text{к}2,2})\sin\delta]\, T_{1,2} - M_{1,2} +$$

$$+ [(o_{\text{к}2,1})\sin\delta + (-o_{\text{к}2,2})\cos\delta]\, N_{1,2} + m^{*}_{\text{к},2}; \quad (15.20)$$

$$q_{\text{к},2} = \sin\delta T_{1,2} + \cos\delta N_{1,2} + q^{*}_{\text{к},2}.$$

Раскрывая условия совместной работы и деформации оболочки и подкрепляющего ее широкий край кольца, получаем систему трех алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных интегрирования.

Не повторяя вышеприведенных объяснений, приведем окончательные расчетные соотношения при опирании подкрепляющего кольца по схеме I_2

$$C_5 = -s_2\left(\overline{T}^{*}_{1,2} - \frac{1}{\cos\delta}\, p^{*}_{\text{к},2}\right); \quad (15.21)$$

$$\frac{r^2_{\text{к}2}}{\sin\delta I_{\text{к}2}}\left[\frac{s_2\cos\delta}{2k} + (o_{\text{к}2,2})\right]C_1 - \frac{s_2\operatorname{ctg}\delta}{2k^3}\left[\frac{12(1-\nu^2)\,s_2}{(1+\varrho_1)\,h_2^2} + \right.$$

$$\left.\frac{r^2_{\text{к}2}}{I_{\text{к}2}}\left(k - 1{,}5 + \frac{\nu}{1+\varrho_1}\right)\right]C_2 + \frac{\sin\delta}{s_2}\left\{\frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_2-\nu)}{\alpha h_2\cos\delta} - \right.$$

$$\left. - \frac{r^2_{\text{к}2}}{I_{\text{к}2}}\,[\operatorname{ctg}\delta\,(-o_{\text{к}2,1}) + (-o_{\text{к}2,2})]\right\}C_5 = \frac{r^2_{\text{к}2}}{I_{\text{к}2}} \times$$

$$\times\{\sin\delta\,[\operatorname{ctg}\delta(-o_{\text{к}2,1}) + (-o_{\text{к}2,2})]\overline{T}^{*}_{1,2} + m^{*}_{\text{к},2}\} - \theta^{*}_{1,2}; \quad (15.22)$$

$$\left[(1+\alpha_1)\left(k + 0{,}5 - \frac{\nu}{1+\alpha_1}\right) + \frac{\alpha h_2 r_{\text{к}2}}{(1-\nu^2)\sin\delta F_{\text{к}2}}\right]C_1 +$$

$$+ (1+\alpha_1)\left[1 + \frac{2\operatorname{tg}\delta k}{r_{\text{к}2}}\,(o_{\text{к}2,2})\right]kC_2 - \frac{1}{s_2}\left[\nu - \frac{\alpha h_2 r_{\text{к}2}\sin\delta}{(1-\nu^2)\,F_{\text{к}2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1+\alpha_2-\nu)\operatorname{tg}\delta}{r_{\text{к}2}}\,(o_{\text{к}2,2})\right]C_5 = -\frac{\alpha h_2}{1-\nu^2}\left[\overline{\varepsilon}^{*}_{2,2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_{\text{к}2}}(-o_{\text{к}2,2})\,\overline{\theta}^{*}_{1,2} + \frac{r_{\text{к}2}}{F_{\text{к}2}}\,(\sin\delta\,\overline{T}^{*}_{1,2} + q^{*}_{\text{к},2})\right]. \quad (15.23)$$

Краевые уравнения для случая опирания кольца по схеме II_2

$$-s_2\left[\left(k+0,5-\frac{\nu}{1+\alpha_1}\right)\cos\delta-\frac{k^2}{(k-0,5)\cos\delta}\right]C_1+$$

$$+s_2\operatorname{tg}\delta\left[\sin\delta+\frac{2k}{s_2}(-o_{\text{к}2,1})\right]kC_2+\frac{1}{1+\alpha_1}\left\{\frac{1+\alpha_2-\nu}{\cos\delta}\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+\frac{\sin\delta}{s_2}(o_{\text{к}2,1})\right]+\nu\cos\delta\right\}C_5+\frac{\alpha h_2}{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)\sin\delta}C_6=$$

$$=\frac{\alpha h_2}{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)}\left[\cos\delta s_2\bar{\varepsilon}^{*}_{2,2}+(-o_{\text{к}2,1})\bar{\theta}^{*}_{1,2}-\frac{1}{\sin\delta}\bar{w}^{*}_{2}\right]. \tag{15.24}$$

Остальные два граничных условия описываются уравнениями (15.22) и (15.23).

Для схемы III_2

$$\frac{r_{\text{к}2}^2}{\delta\sin\delta I_{\text{к}2}}\left[\frac{s_2\cos\delta}{k}+h_{\text{к}2}+2(+o_{\text{к}2,2})\right]C_1-\frac{s_2\operatorname{ctg}\delta}{k^2}\times$$

$$\times\left[\frac{6(1-\nu^2)s_2}{(1+\varrho_1)h_2^3}+\frac{r_{\text{к}2}^2}{8I_{\text{к}2}}\left(k-1,5+\frac{\nu}{1+\varrho_1}\right)\right]C_2+\frac{\sin\delta}{s_2}\times$$

$$\times\left\{\frac{(1-\nu^2)(1+\alpha_2-\nu)}{\alpha h_2\cos\delta}+\frac{r_{\text{к}2}^2}{8I_{\text{к}2}}[2(o_{\text{к}2,1})\operatorname{ctg}\delta+h_{\text{к}2}+\right.$$

$$\left.+2(o_{\text{к}2,2})]\right\}C_5=-\frac{r_{\text{к}2}^2}{8I_{\text{к}2}}\left\{\sin\delta[2(o_{\text{к}2,1})\operatorname{ctg}\delta+h_{\text{к}2}+\right.$$

$$\left.+2(o_{\text{к}2,2})]\bar{T}^{*}_{1,2}+h_{\text{к}2}q^{*}_{\text{к}2}-2m^{*}_{\text{к}2}\right\}-\bar{\theta}^{*}_{1,2}; \tag{15.25}$$

$$(1+\alpha_1)\left(k+0,5-\frac{\nu}{1+\alpha_1}\right)C_1+(1+\alpha_1)\left\{1+\frac{\operatorname{tg}\delta k}{r_{\text{к}2}}\times\right.$$

$$\left.\times[h_{\text{к}2}+2(o_{\text{к}2,2})]\right\}kC_2-\frac{1}{s_2}\left\{\nu+\frac{(1+\alpha_2-\nu)\operatorname{tg}\delta}{2r_{\text{к}2}}[h_{\text{к}2}+\right.$$

$$\left.+2(o_{\text{к}2,2})]\right\}C_5=\frac{\alpha h_2}{1-\nu^2}\left\{-\bar{\varepsilon}^{*}_{2,2}+\frac{1}{2r_{\text{к}2}}[h_{\text{к}2}+2(o_{\text{к}2,2})]\bar{\theta}^{*}_{1,2}\right\}. \tag{15.26}$$

Третье граничное условие выражается уравнением (15.24). Для схемы опирания IV_2

$$2(1+\alpha_1)k^2C_2 - \frac{1+\alpha_2-\nu}{s^2}C_5 = \frac{\alpha h_2 \operatorname{ctg}\delta}{1-\nu^2}\bar{\theta}^{\bullet}_{1,2}; \quad (15.27)$$

$$\left[(1+\alpha_1)\left(k+0{,}5-\frac{\nu}{1+\alpha_1}\right)+\frac{\alpha h_2 r_{\text{к}2}}{(1-\nu^2)\sin\delta F_{\text{к}2}}\right]C_1 + (1+\alpha_1)kC_2 + \frac{1}{s_2}\left[\frac{\alpha h_2 r_{\text{к}2}\sin\delta}{(1-\nu^2)F_{\text{к}2}}-\nu\right]C_5 = -\frac{\alpha h_2}{1-\nu^2}\left[\bar{\varepsilon}^{\bullet}_{2,2} + \frac{r_{\text{к}2}}{F_{\text{к}2}}(\sin\delta\bar{T}^{\bullet}_{1,2}+q^{\bullet}_{\text{к},2})\right]; \quad (15.28)$$

$$-s_2\left[\left(k+0{,}5-\frac{\nu}{1+\alpha_1}\right)\cos\delta - \frac{k^2}{(k+0{,}5)\cos\delta}\right]C_1 + s_2\sin\delta\cdot\operatorname{tg}\delta kC_2 + \frac{1}{1+\alpha_1}\left(\nu\cos\delta+\frac{1+\alpha_2-\nu}{\cos\delta}\right)C_4 + \frac{\alpha h_2}{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)\sin\delta}C_6 = \frac{\alpha h_2}{(1-\nu^2)(1+\alpha_1)}\times \left(\cos\delta\bar{\varepsilon}^{\bullet}_{2,2} - \frac{1}{\sin\delta}\bar{w}^{\bullet}_2\right). \quad (15.29)$$

При жестком защемлении

$$(1+\alpha_1)\left(k+0{,}5-\frac{\nu}{1+\alpha_1}\right)C_1 + (1+\alpha_1)kC_2 - \frac{\nu}{s_2}C_5 = -\frac{\alpha h_2}{1-\nu^2}\bar{\varepsilon}^{\bullet}_{2,2}; \quad (15.30)$$

$$\frac{(1+\alpha_1)k^2}{k-0{,}5}C_1 + (1+\alpha_1)kC_2 + \frac{1+\alpha_2-\nu}{s_2}C_5 + \frac{\alpha h_2\operatorname{ctg}\delta}{(1-\nu^2)s_2}C_6 + = -\frac{\alpha h_2\operatorname{ctg}\delta}{(1-\nu^2)s_2}\bar{w}^{\bullet}_2. \quad (15.31)$$

Третье граничное условие описывается уравнением (15.27). В табл. 4 приведена сводка полученных формул.

Таблица 4

Схема опирания	Система уравнений	Состав неизвестных
I_2	(15.21), (15.22), (15.23)	C_1, C_2, C_5;
II_3	(15.22), (15.23), (15.24)	C_1, C_2, C_5, C_6;
III_3	(15.24), (15.25), (15.26)	C_1, C_2, C_5, C_6;
IV_2	(15.27) (15.28), (15.29)	C_1, C_2, C_5, C_6;
Жесткое защемление	(15.27), (15.30), (15.31)	C_1, C_2, C_5, C_6

Анализ приведенных в табл. 3 и 4 данных показывает, что при расчете даже длинных конических оболочек на осесимметричную нагрузку не удается произвести разделение неизвестных. Исключение составляет только случай, когда из условий равновесия можно определить краевые значения меридионального усилия T_1 и поперечной силы N_1 (схемы I_1 и I_2).

Это является следствием того, что произвольные постоянные интегрирования C_5 и C_6 входят в общее решение, приведенное в § 14, как коэффициенты при медленно изменяющихся функциях. Другими словами, величины C_1 C_2, C_3 и C_4 характеризуют состояние краевого эффекта, а C_5 и C_6 — основное состояние оболочки.

При выполнении расчетов в соответствии с табл. 3 и 4 составляют систему уравнений относительно неизвестных C_j ($j = 1, \ldots, 6$), решение которой и дает значения этих неизвестных. Состав уравнений для определения C_j зависит от конкретных граничных условий задачи, т. е. от схем опирания подкрепляющих оболочку упругих колец. Пусть, например, верхний край оболочки жестко защемлен, а нижний опирается по схеме IV_2. Тогда система уравнений для определения произвольных постоянных интегрирования состоит из уравнений (15.12), (15.15), (15.16) (табл. 3) и уравнений (15.27), (15.28), (15.29) (табл. 4)

После определения постоянных интегрирования C_j расчет ведем по общим формулам, приведенным в § 14.

Необходимо помнить, что аргументом функций, относящихся к узкому краю оболочки (коэффициентами при которых служат C_3 и C_4), является переменная t_1, определяемая формулой (15.3). Аргументом же функций с коэффициентами C_1 и C_2, относящихся к широкому краю оболочки, является переменная t_2, определяемая соотношением (15.18).

§ 16. Критерии применимости решения

При выводе расчетных формул в § 14 и при формулировке граничных условий задачи в § 15 были использованы следующие допущения:

1. Коэффициенты характеристического уравнения (14.22) пренебрежимо малы по сравнению с величинами порядка k^2.

2. Рассматриваемая коническая оболочка является настолько длинной, что взаимным влиянием ее краев можно пренебречь.

Указанные допущения накладывают определенные ограничения на применимость полученного решения, в связи с чем возникает вопрос о формулировке критериев применимости этого решения.

Допущение 1. В § 14 при выводе расчетных формул использовались результаты приближенного решения характеристических уравнений, соответствующих основным дифференциальным уравнениям (14.18) и (14.19). При решении этих характеристических уравнений, как указывалось, мы пренебрегали коэффициентами при производных функций T_1^0 и θ_1^0, входящих в уравнения (14.18) и (14.19). Наибольшая погрешность в решение вносится при этом вследствие пренебрежения величиной $(12—d)$ — коэффициентом при второй производной функции θ_1^0, так как эта величина является наибольшей (по модулю) среди пренебрегаемых величин. Считая допустимой погрешность порядка 0,05 по сравнению с единицей, получаем неравенство

$$k^2 \geqslant 20\,(12 - d), \tag{16.1}$$

при соблюдении которого погрешность расчетных формул § 14 не превосходит погрешности технической теории оболочек.

Исключим из неравенства (16.1) при помощи соотношений (14.20) и (14.21) величины d и k. Выполнив несложные промежуточные преобразования, получим

$$\operatorname{ctg}\delta\frac{s}{h} \geqslant 20\sqrt{\frac{1}{3\alpha(1+\alpha_1)(1+\varrho_1)}}\,[10(1+\alpha_1)(1+\varrho_1) -$$

$$-(1+\alpha_2-\nu)(1+\varrho_1)+(\varrho_1-\varrho_2+3\nu)(1+\alpha_1)] \tag{16.2}$$

для конструктивно-ортотропной оболочки и

$$\operatorname{ctg}\delta\,\frac{s}{h} \geqslant 80\sqrt{\frac{1}{3(1-\nu^2)}}\,(2{,}25-\nu) \qquad (16.3)$$

для гладкой оболочки.

Таким образом, полученное в § 14 решение применимо к конструктивно-ортотропным и гладким коническим оболочкам, геометрические параметры которых подчиняются соответственно условиям (16.2) и (16.3).

Допущение 2. Общее решение однородной задачи § 14 представлено быстро изменяющимися функциями. В связи с этим указанное решение было разделено на две независимые части: с коэффициентами C_1, C_2 и C_3, C_4, каждая из которых описывает напряженное и деформированное состояние соответственно вблизи широкого и узкого края оболочки.

Определим расстояние от края оболочки до ее сечения, в котором любое краевое воздействие уменьшается в 20 раз и, следовательно, становится пренебрежимо малым.

Узкий край оболочки ($C_1 = C_2 = 0$). Рассмотрим, например, функцию θ_1^0, представленную формулой (14.45)

$$\theta_1^0 = \frac{2(1-\nu^2)(1+\alpha_1)k^2\operatorname{tg}\delta}{E\alpha h_0 e^{t_1}}\,e^{-(k+0{,}5)t_1}(C_4\cos kt_1 - C_3\sin kt_1). \qquad (16.4)$$

Напомним, что речь идет об определении такого значения переменной t_1, при котором функции θ_1^0 в 20 раз меньше своего краевого значения, т. е. значения при $t_1 = 0$. Иными словами,

$$\frac{C_4}{e^{-(k+1{,}5)t_1}(C_4\cos kt_1 - C_3\sin kt_1)} \geqslant 20,$$

откуда

$$e^{(k+1{,}5)t_1} \geqslant \frac{20(C_4\cos kt_1 - C_3\sin kt_1)}{C_4}. \qquad (16.5)$$

Величина правой части неравенства (16.5) зависит от соотношения постоянных C_3 и C_4 и от значения тригонометрических функций. Будем считать, что эти функции принимают только крайние значения 1 и 0, и рассмотрим возможные соотношения между постоянными C_3 и C_4:

1) $C_3 \approx C_4$;

2) $C_3 \approx -C_4$; (16.6)

3) $C_3 = 0$.

В соответствии с этим получим

1) $e^{(k+1,5)t_1} \geqslant 20$ (при $\cos kt_1 = 1$, $\sin kt_1 = 0$); (16.7)

2) $e^{(k+1,5)t_1} \geqslant 40 (\cos kt_1 = \sin kt_1 = 1)$;

3) $e^{(k+1,5)t_1} \geqslant 20 (\cos kt_1 = 1, \sin kt_1 = 0)$.

Следовательно, при

$$t_1 = \frac{\ln 20}{k+1,5} = \frac{3}{k+1,5}, \tag{16.8}$$

$$t_1 = \frac{\ln 40}{k+1,5} = \frac{3,689}{k+1,5}, \tag{16.9}$$

значение функции θ_1^0 в 20 раз меньше краевого значения этой функции.

Отметим, что формулами (16.8) и (16.9) представлены соответственно минимально и максимально возможное расстояние от узкого края оболочки, при котором величина функции θ_1^0 становится пренебрежимо малой. При значениях постоянных C_3 и C_4, отличных от (16.6), и значениях тригонометрических функций, отличных от 1 и 0, величина аргумента t_1 будет колебаться между значениями (16.8) и (16.9).

Аналогичный анализ остальных функций показывает, что расстояние от узкого края оболочки до сечения, в котором практически не сказывается влияние краевых воздействий, колеблется в пределах

$$\frac{4,3820 + \ln k}{k+0,5} \geqslant t_1 \geqslant \frac{3}{k+1,5}. \tag{16.10}$$

Ш и р о к и й к р а й о б о л о ч к и ($C_3 = C_4 = 0$). Соответствующее расстояние от этого края, определяемое принятым выше критерием, ограничено величинами

$$-\frac{4,3820 + \ln k}{k-1,5} < t_2 < -\frac{3}{k+0,5}. \tag{16.11}$$

Для придания критериям (16.10) и (16.11) большей определенности укажем максимально возможные расстояния распространения краевых воздействий.

От узкого края

$$t_1 \leqslant \frac{4{,}3820 + \ln k}{k + 0{,}5}. \tag{16.12}$$

От широкого края

$$t_2 \geqslant -\frac{4{,}3820 + \ln k}{k - 1{,}5}. \tag{16.13}$$

Итак, если края конической оболочки удалены друг от друга на расстояние, большее, чем (16.12) или (16.13), то их взаимным влиянием можно пренебречь, т. е. считать оболочку «длинной».

Условия (16.2), (16.12) и (16.13) устанавливают границы применимости построенного в этой главе решения в усилиях осесимметричной задачи для конической конструктивно-ортотропной оболочки. При соблюдении этих условий указанное решение является точным (в рамках технической теории оболочек).

Приведенные в этой главе решения осесимметричной задачи для конической оболочки имеют двоякое значение. Во-первых, они необходимы для определения границ применимости общего решения задачи в перемещениях — критерии (16.12) и (16.13). Во-вторых, ими пользуются для непосредственного расчета пространственных конструкций, выполненных в виде конструктивно-ортотропных и гладких конических оболочек линейно-переменной толщины (14.1), на осесимметричную нагрузку.

ГЛАВА V

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИЗЛАГАЕМОГО МЕТОДА РАСЧЕТА

§ 17. Использование электронных цифровых вычислительных машин для решения задачи

Предложенный в работе метод расчета произвольных оболочек вращения, находящихся под действием любой нагрузки, легко реализуется на электронных цифровых вычислительных машинах (ЭЦВМ), так как все операции метода представлены в матричной форме.

Будем считать, что для ЭЦВМ составлены стандартные подпрограммы следующих операций: умножения двух квадратных матриц 8- и 6-го порядка; сложения (вычитания) двух матриц; умножения квадратной матрицы на вектор и на скаляр; обращения квадратной матрицы 8- и 6-го порядка; сложения двух векторов.

Исходными данными для решения задачи на ЭЦВМ являются: квадратные матрицы G_i, F_{ti}, F_{0i}^{-1}, элементы которых вычисляются для каждого i-го участка соответственно по формулам (6.6), (9.9), (9.13); квадратные матрицы $D_{i-1,i}$ с элементами, определяемыми в соответствии с табл. 1; матрицы $C_{\text{к}1}$ и $C_{\text{к}(z_1+1)}$, характеризующие граничные условия задачи (§ 11); векторы $\overline{W}_{i0}^{*}$, определяемые формулой (10.11) и учитывающие влияние нагрузки, которая действует на оболочку.

При наличии вышеуказанных подпрограмм составление общей программы для реализации на ЭЦВМ алгоритма решения задачи не представляет принципиальных трудностей и осуществляется в следующем порядке:

1. Вычисление матричного ряда e^{Gt}

$$e^{Gt} = I + Gt + G^2\frac{t^2}{2!} + G^3\frac{t^3}{3!} + G^4\frac{t^4}{4!} + \ldots \quad (17.1)$$

2. Вычисление матрицы P_t по формуле (9.20)

$$P_t = F_t e^{Gt} F_0^{-1}. \quad (17.2)$$

3. Вычисление матрицы $\overline{P}_{it}$ по формуле (10.10)

$$\overline{P}_{it} = P_{it} D_{i-1,i}. \tag{17.3}$$

4. Вычисление матриц Q_{zj} $(j = 1, 2, \ldots, z)$ по формулам (10.12) и (10.13)

$$\begin{aligned}
Q_{z1} &= \overline{P}_{z,t}\overline{P}_{z-1,t}\overline{P}_{z-2,t}\ldots P_{1t};\\
Q_{z2} &= \overline{P}_{z,t}\overline{P}_{z-1,t}\overline{P}_{z-2,t}\ldots \overline{P}_{2t};\\
Q_{z3} &= \overline{P}_{z,t}\overline{P}_{z-1,t}\overline{P}_{z-2,t}\ldots \overline{P}_{3,t};\\
&\cdot\\
Q_{zj} &= \overline{P}_{z,t}\overline{P}_{z-1,t}\overline{P}_{z-2,t}\ldots \overline{P}_{j,t};\\
&\cdot\\
Q_{zz} &= \overline{P}_{z,t}.
\end{aligned} \tag{17.4}$$

Вычисление этих матриц дает значение элементов блочных матриц, входящих в общее решение (10.15) и (10.16).

5. Вычисление квадратной матрицы по формуле (12.10)

$$B = Q_{z_1 1}\ C_{\text{к}1} - D_{z_1,z}\ Q_{z1}\ C_{\text{к}(z_1+1)}. \tag{17.5}$$

6. Вычисление правой части выражения (12.6) — вектора T.

7. Обращение квадратной матрицы B, т. е. решение системы алгебраических уравнений (12.12).

8. Вычисление по формулам (12.16) и (12.17) векторов W_{10} и $W_{(z_1+1)0}$.

9. Определение по формулам (10.15) и (10.16) всех искомых величин.

При реализации на ЭЦВМ описанного процесса вычислений возникает вопрос о числе членов ряда (17.1), которые необходимо удержать в решении. Для выяснения этого обстоятельства представим матрицу G в схематическом виде

$$\overline{G} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p^{-1} & p^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 1 & p & p & p & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (17.6)$$

В матрице (17.6) символом p обозначен модуль наибольшего из элементов g_{81}, g_{83}, g_{84} и g_{85}, содержащих множителем большую величину $\frac{12s_0}{h_0^2}$ (формулы 6.6), символом p^{-1} — модуль элемента g_{26} (или g_{27}), содержащего множителем малую величину $\frac{h_0^2}{12s_0^2}$, а единицей — остальные элементы (6.6) матрицы G.

Заменим теперь в ряде (17.1) матрицу G матрицей $\overline{G}$ и выведем общую формулу для наибольшего элемента матрицы $e^{\overline{G}t}$. Вычисление членов этого ряда показывает, что такими наибольшими по модулю элементами матрицы $e^{\overline{G}t}$ являются первый, третий, четвертый и пятый элементы ее восьмой строки. Все эти элементы равны и вычисляются по формуле

$$e_{81} = pt + p\frac{t^2}{2!} + p\frac{t^3}{3!} + p\frac{t^4}{4!} + p^2\frac{t^5}{5!} + p^2\frac{t^6}{6!} + p^2\frac{t^7}{7!} + p^2\frac{t^8}{8!} + p^3\frac{t^9}{9!} + p^3\frac{t^{10}}{10!} + p^3\frac{t^{11}}{11!} + p^3\frac{t^{12}}{12!} + \ldots \qquad (17.7)$$

Представим ряд (17.7) в несколько ином виде

$$e_{81} = pt\left(1 + \underline{\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2\cdot 3} + \frac{t^3}{2\cdot 3\cdot 4}}\right) + p^2\frac{t^5}{5!}\left(1 + \underline{\frac{t}{6} + \frac{t^2}{6\cdot 7} + \frac{t^3}{6\cdot 7\cdot 8}}\right) +$$

$$+ p^3 \frac{t^9}{9!}\left(1 + \frac{t}{10} + \underline{\frac{t^2}{10 \cdot 11}} + \underline{\frac{t^3}{10 \cdot 11 \cdot 12}}\right) + \dots \quad (17.8)$$

Так как в реальных расчетах аргумент t всегда меньше единицы, то подчеркнутыми членами в выражении (17.8) можно пренебречь. Тогда

$$e_{81} \approx pt + p^2 \frac{t^5}{5!} + p^3 \frac{t^9}{9!} + \dots + p^j \frac{t^{[1+4(j-1)]}}{[1+4(j-1)]!} + \dots \quad (17.9)$$

$$(j = 1, 2, 3, \dots).$$

Быстрота сходимости ряда (17.9) зависит от значений величин t и p и характеризует сходимость матричного ряда (17.1), в связи с чем число членов ряда (17.9), которые практически необходимо удерживать, определяет и число членов ряда (17.1) при его вычислении, так как остальные элементы матрицы e^{Gt} представляются сходящимися рядами, аналогичными ряду (17.9).

При решении осесимметричной задачи в перемещениях (§ 13), когда необходимо вычислять матричный ряд (13.8), формула (17.9) также применима, только в качестве величины p следует использовать модуль большего из элементов g_{83}, g_{84} и g_{85} матрицы G.

§ 18. Оболочка резервуара водонапорной башни под действием осесимметричной нагрузки

Описанная выше методика расчета оболочек вращения на действие осесимметричной нагрузки была применена для определения усилий в оболочке резервуара водонапорной башни объемом в 2500 $м^3$, (рис. 17) разработанной ГПИ «Киев промстройпроект» в качестве типового сооружения, предназначенного для аварийного снабжения водой доменных цехов.

Водонапорная башня состоит из таких основных конструктивных элементов: монолитного железобетонного фундамента; цилиндрического ствола, собираемого из сборных железобетонных ребристых панелей; сборно-монолитной железобетонной конической оболочки резервуара; верхнего монолитного железобетонного кольца конической оболочки; покрытия резервуара, собираемого из сборных железобетонных элементов.

Коническая оболочка резервуара собирается из 48 отдельных панелей, каждая из которых представляет трапециевидную в плане плиту толщиной 0,04 *м*, окаймленную продольными ребрами.

После монтажа панелей резервуара производится бетонирование монолитной плиты толщиной 0,14 *м* и в рабочем состоянии резервуар представляет собой коническую оболочку толщиной 0,18 *м*, подкрепленную 48 меридиональными ребрами, с поперечным сечением $0{,}18 \times \times 0{,}15$ *м* Основные размеры оболочки резервуара указаны на рис. 18.

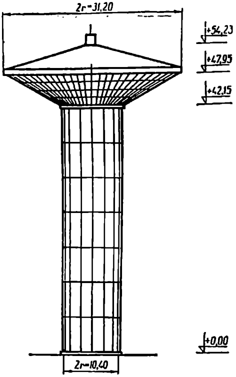


Рис. 17.

Широкий край оболочки подкреплен упругим кольцом, высота поперечного сечения которого равна 0,45 *м*, а ширина — 0,35 *м* (рис. 19). На этом рисунке указаны также внешние нагрузки, приложенные к кольцу, которые включают его собственный вес и усилия, передающиеся со стороны покрытия резервуара.

Нагрузкой, действующей на оболочку, является внутреннее гидростатическое давление, а также ее собственный вес и вес вспомогательных конструкций (утеплителя, гидроизоляции и т. д.). Общая величина этих нагрузок равна:

в направлении меридиана $q_1 = -5 \cdot 10^3$ *н/м*^{3},

в направлении внешней нормали $q_3 = (100 - 5\,s) \times \times 10^3$ *н/м*^{2}.

Для удобства вычислений введем масштаб сил, равный $5 \cdot 10^3$ *н/м*^{2}. Тогда

$$q_1 = -1;$$

$$q_3 = 20 - s. \tag{18.1}$$

Внешняя нагрузка, действующая на опорное кольцо, равна (в принятом масштабе сил)

$$p^{*}_{\text{к}2} = -2{,}855;$$
$$q^{*}_{\text{к}2} = -1{,}00; \qquad (18.2)$$
$$m^{*}_{\text{к}2} = 0{,}35.$$

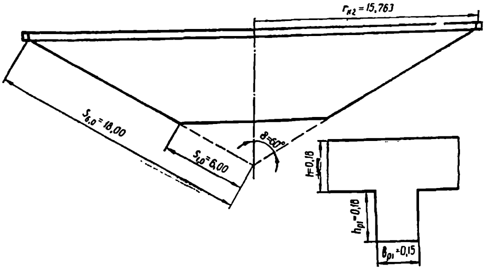


Рис. 18.

Материал конструкций — железобетон, коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{6}$, модуль Юнга $E = 5 \cdot 10^{10}$ $н/м^2$. Половина угла при вершине конуса $\delta = 60°$

Заменим оболочку, изображенную на рис. 18, системой конических оболочек (рис. 20), толщина стенки каждой из которых изменяется по закону (1.1)

$$h_i = h_{0i} x_i. \qquad (18.3)$$

Координату $x_i = \frac{s_i}{s_{0i}}$ назначаем таким образом, чтобы в начале каждого участка $x_i = 1$. Длины отдельных заменяющих оболочек, т. е. величины $s_{0i} - s_{li}$ (или $s_{li} - s_{0i}$), определяем так, чтобы толщины h_i отличались от толщины h оболочки резервуара не более чем на 7%. Величины s_i и x_i для каждой заменяющей оболочки приведены в табл. 5.

При определении величин h_{0i} исходим из условия, чтобы в середине каждого участка толщина стенки равнялась толщине расчитываемой оболочки h. Тогда

$$\frac{h_i}{s_i} = \frac{2h}{s_{0i} + s_{1i}}. \qquad (18.4)$$

Вычисленные по формуле (18.4) отношения h_i/s_i приведены для каждого участка в табл. 5. В этой таблице даны определенные по формуле (2.3) значения переменной t_i.

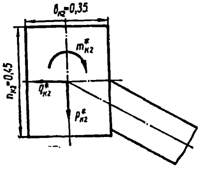


Рис. 19.

Отдельные оболочки, заменяющие рассматриваемую оболочку, подкреплены меридиональными ребрами, размеры которых назначаем в соответствии с формулой (1.3)

$$h_{p1,i} = h_{p10,i}x_i;$$
$$b_{p1,i} = b_{p10,i}x_i. \qquad (18.5)$$

При определении величин $h_{p10,i}$, $b_{p10,i}$ соблюдено условие, чтобы в середине каждого участка величины $h_{p1,i}$, $b_{p1,i}$ равнялись заданным значениям $h_{p1} = 0,18$ *м* и $b_{p1} = 0,15$ *м*

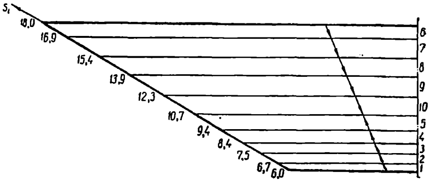


Рис. 20.

Все оболочки, заменяющие рассматриваемую оболочку, подкреплены 48 меридиональными ребрами. Поэтому необходимо проверить условия (1.9) и (1.11) применимости теории гладких конструктивно-ортотропных оболочек к расчету ребристых оболочек. В данном случае достаточно выполнить такую проверку только для 6-го участка, так

Таблица 5

Номера участков			t_i	α_{1i}	ϱ_{1i}	$100h_i/s_i$
1	6,0 6,7	1,0 1,1166	0,0 0,1104	0,2026	2,2242	,8346
2	6,7 7,5	1,0 1,1194	0,0 0,1128	0,1812	2,0220	2,5352
3	7,5 8,4	1,0 1,1200	0,0 0,1134	0,1618	1,8330	2,2642
	8,4 9,4	1,0 1,1190	0,0 0,1125	0,1445	1,6596	2,0225
5	9,4 10,7	1,0 1,1382	0,0 0,1295	0,1280	1,4897	1,7910
10	10,7 12,3	0,8699 1,0	—0,1393 0,0	0,1119	1,3196	1,5652
9	12,3 13,9	0,8848 1,0	—0,1223 0,0	0,0982	1,1712	1,3740
8	13,9 15,4	0,9025 1,0	—0,1025 0,0	0,0878	1,0564	1,2287
7	15,4 16,9	0,9112 1,0	—0,0930 0,0	0,0797	0,9655	1,1146
6	16,9 18,0	0,9388 1,0	—0,0631 0,0	0,0737	0,8974	1,0315

как на этом участке усредненные жесткостные характеристики меньше, чем на других участках.

Правая часть выражения (1.9) равна

$$\frac{r_в}{h}\sqrt[4]{\frac{3h}{r_в}}=\frac{0{,}5\,(16{,}9+18{,}0)\ 0{,}866}{0{,}18}\times$$

$$\times\sqrt[4]{\frac{3\cdot 0{,}18}{0{,}5\,(16{,}9+18{,}0)\cdot 0{,}866}}=36{,}5. \qquad (18.6)$$

Действительное количество меридиональных ребер $k = 48$ больше 36,5, таким образом, условие (1.9) выполнено.

Правая часть выражения (1.11)

$$\frac{r_6 h_{\text{pl},6}}{h^2}\sqrt{\frac{3b_{\text{pl},6}}{2\pi r_6}} = 14,1, \tag{18.7}$$

что также меньше 48.

Следовательно, к расчету рассматриваемой ребристой оболочки резервуара можно применить теорию гладких конструктивно-ортотропных оболочек. Характеристики их жесткости определяем по формулам (4.9), (4.14), (4.17) и (4.19), учитывая, что кольцевые ребра отсутствуют, а размеры меридиональных ребер определяются формулой (18.5).

Так, для 1-го участка получим

$$\alpha_{1,1} = 0,9722\,\frac{48\cdot 0,1417}{6,2832\cdot 0,866\cdot 6,0} = 0,2026;$$

$$\alpha_{2,1} = \varrho_{2,1} = 0; \tag{18.8}$$

$$\varrho_{1,1} = \frac{0,2026}{1,2026}(3 + 6 + 4,2026) = 2,2242.$$

Аналогично вычисляются характеристики жесткости и для других участков оболочки. Результаты этих вычислений приведены в табл. 5.

Далее по формулам (13.7) вычисляем элементы матриц G_i по формулам (13.16) — элементы матриц $F_{l,i}$ и формулам (13.19) — элементы матриц $F_{0,i}^{-1}$.

Для 1-го участка эти матрицы представлены соответственно записями (18.9), (18.10) и (18.11)

$$G_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,6929 & -1 & 0,4001 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,2674\cdot 10^4 & -0,4458\cdot 10^3 & -0,1544\cdot 10^4 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -0{,}080 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2{,}1551 & 1{,}1551 & -2 \end{matrix}\Bigg\Vert; \quad (18.9)$$

$$F_{l,1} = \Bigg\Vert\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4859\cdot 10^{-2} & 3{,}5063\cdot 10^{-2} & 0{,}2806\cdot 10^{-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0{,}1493 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3{,}9994\cdot 10^{-5} & -4{,}2174\cdot 10^{-5} & 0 \\ 1{,}3565\cdot 10^{-5} & -6{,}2946\cdot 10^{-6} & -6{,}2946\cdot 10^{-6} \end{matrix}\Bigg\Vert; \quad (18.10)$$

$$F_{0,1}^{-1} = \Bigg\Vert\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}1386 & -0{,}080 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6{,}0 \\ 0 & 0 & -5{,}5037 \\ 0 & 0 & -7{,}2406 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 28{,}520 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}6477\cdot 10^{4} & 0 \\ 0 & 2{,}6477\cdot 10^{4} & -15{,}886\cdot 10^{4} \end{matrix}\Bigg\Vert. \quad (18.11)$$

Приступая к вычислению частных решений задачи, проверяем условие (13.12) применимости мембранной теории к отысканию частных решений. Так как отношение s_0/h_0 (или s_i/h_i) является наибольшим для 1-го участка, то достаточно проверить выполнимость условия (13.12) именно для этого участка

$$\sqrt{\frac{s_{0,1}\operatorname{ctg}\delta}{h_{0,1}}}\cdot\sqrt[4]{\frac{0,6}{1+\varrho_1}}=\sqrt{\frac{100\cdot 0,5774}{2,8346}}\cdot\sqrt[4]{\frac{0,6}{3,2242}}=2,96, \tag{18.12}$$

что больше величины $m = 2$,— наибольшей степени переменной s в формуле (18.1), увеличенной на 1.

Итак, частные решения рассматриваемой задачи можно определять по мембранной теории и пренебречь в уравнениях (13.11) моментными членами.

Составив и решив системы (13.11) для каждого участка оболочки, определим значения функций $u_i^*(t)$, $w_i^*(t)$, после чего по первой формуле (13.3) и по последней формуле (3.3) вычисляем частные решения для функций T_1^*, θ_1^*.

Результаты выполненных вычислений сведены в табл. 6. В этой же таблице приведены частные решения для функции T_2^*, определенные непосредственно из второго уравнения равновесия (13.2) при пренебрежении в нем моментными членами.

Зная величины, приведенные в табл. 6, легко вычислить компоненты векторов W_{it}^*, W_{i0}^*, $\overline{W}_{i0}^*$, входящих в общие решения (10.15) и (10.16). Следует только учесть, что в данном случае образующая оболочки не имеет изломов, благодаря чему матрицы $D_{i-1,i}$ и $D_{i-1,i}^{-1}$ превращаются в единичные, а величины v_i^* и $\overline{T}_{12,i}^*$ отсутствуют. Так,

$$W_{10}^*=\begin{vmatrix} 1,6654\cdot 10^3\\ 4,0200\cdot 10^3\\ -0,3073\cdot 10^3\\ 86,137\\ 0,0\\ 0,0\end{vmatrix};\qquad W_{11}^*=\begin{vmatrix} 1,8428\cdot 10^3\\ 4,9719\cdot 10^3\\ -0,1754\cdot 10^3\\ 93,479\\ 0,0\\ 0,0\end{vmatrix}; \tag{18.13}$$

$$\overline{W}^*_{20} = W^*_{1i} - W^*_{20} = \begin{vmatrix} -0{,}2532 \cdot 10^3 \\ 0{,}4490 \cdot 10^3 \\ 0{,}0108 \cdot 10^3 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{vmatrix}.$$

Таблица 6

Номера участков		$10^{-3}Eu^*_i$	$10^{-3}Ew^*_i$	$10^{-3}E\theta^*_{1i}$	T^*_{1i}	T^*_{2i}
1	6,0 6,7	1,6654 1,8428	4,0210 4,9719	—0,3073 —0,1754	86,137 93,479	145,488 154,339
2	6,7 7,5	2,0960 2,3218	4,5229 5,5549	—0,1862 —0,0179	93,479 101,177	154,339 162,375
3	7,5 8,4	2,6435 2,9256	4,9859 6,0277	—0,0096 0,2022	101,177 108,954	162,375 168,766
4	8,4 9,4	3,1841 3,5157	5,5668 6,5315	0,2373 0,5002	108,954 116,498	168,766 172,576
5	9,4 10,7	4,1731 4,6668	5,3766 6,1351	0,5702 0,9559	116,498 124,579	172,576 172,351
10	10,7 12,3	6,1973 6,9674	3,4638 3,2539	1,2135 1,7307	124,579 131,846	172,351 164,038
9	12,3 13,9	7,9745 8,8092	1,4883 —0,1074	1,9997 2,6106	131,846 136,158	164,038 146,856
8	13,9 15,4	9,8556 10,6838	—1,9390 —4,9840	2,9209 3,5613	136,158 137,515	146,856 122,695
7	15,4 16,9	11,8147 12,6798	—6,9614 —11,7840	3,9297 4,6354	137,515 136,275	122,695 90,739
6	16,9 18,0	13,5729 14,2276	—13,3456 —18,1732	5,0000 5,5594	136,275 135,714	90,739 62,352

При формулировке граничных условий задачи используем формулы § 11. В данном случае узкий край оболочки считается жестко защемленным, вследствие чего здесь деформации и перемещения равны нулю. Кроме того, все компоненты вектора $\overset{*}{W}_{10}$, входящего в выражения (11.23) и (11.24), также равны нулю.

На основании изложенного граничные условия для узкого края оболочки, т. е. для начала 1-го участка запишем в виде

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_{1,(1,0)} \\ M_{1,(1,0)} \\ N_{1,(1,0)} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} T_{1,(1,0)} \\ M_{1,(1,0)} \\ N_{1,(1,0)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (18.14)$$

Широкий край рассматриваемой оболочки (начало 6-го участка) подкреплен свободным упругим кольцом, поэтому здесь граничные условия описываются формулами (11.53) и (11.54).

При вычислении элементов матрицы $C_{к,2}$ и вектора $\overset{*}{W}_{2,0}$, входящих в эти формулы, необходимо величины внешних нагрузок, приложенных к кольцу, определять в соответствии с формулой (18.2), так как направления усилий $p^*_{к2}$ и $q^*_{к2}$ в данном случае противоположны направлениям тех же усилий, изображенных на рис. 15 (рис. 19 и 21).

Приведем величины, необходимые для дальнейших вычислений (рис. 15, 19 и 21),

$$\begin{aligned} o_{к2,1} &= \cos\delta b_{к2} = 0{,}175 \ м; \\ o_{к2,2} &= \operatorname{ctg}\delta b_{к2} = 0{,}101 \ м; \\ r_{к2} &= 15{,}763 \ м; \qquad\qquad (18.15) \\ F_{к2} &= h_{к2} b_{к2} = 0{,}1575 \ м^2; \\ I_{к2} &= \frac{1}{12} b_{к2} h^3_{к2} = 2{,}6578 \cdot 10^{-3} \ м^4. \end{aligned}$$

Так как оболочка примыкает к кольцу вдоль линии 2 (рис. 16 и 21), то в формуле (11.53) при вычислении элементов матрицы $C^{к,2}$ перед круглыми скобками для величины $o_{к2,1}$ необходимо ставить знак «минус», а для величины $o_{к2,2}$ — знак «плюс»

Учитывая изложенное, граничные условия для широкого края оболочки запишем в виде

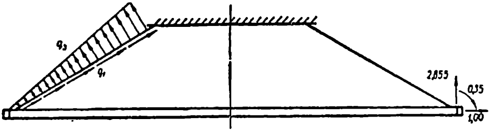


Рис. 21.

$$
\begin{Vmatrix} u_{(6,0)} \\ w_{(6,0)} \\ \theta_{1(6,0)} \\ T_{1,(6,0)} \\ M_{1,(6,0)} \\ N_{1,(6,0)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -0{,}5774 & 0{,}1166 & -2103{,}56 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}0697\cdot 10^{-5} & -0{,}1166 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5774 \end{Vmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_{(6,0)} \\ \theta_{1,(6,0)} \\ T_{1,(6,0)} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1181{,}3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}3161 \\ 3{,}2968 \end{Vmatrix}. \qquad (18.16)
$$

Определенные выше величины являются исходными для дальнейших расчетов на ЭЦВМ, после выполнения которых получены значения усилий и перемещений ребристой оболочки резервуара, помещенные в табл. 8.

Для определения кольцевых усилий T_2 и моментов M_2 необходимо предварительно из первого выражения (13.3) вычислить величину u', из третьего выражения (13.3) — величину w'' и из последнего выражения (3.3) — величину w' После этого по второй и четвертой формулам (13.3) определяют соответственно усилие T_2 и момент M_2.

Вычисленные таким образом значения функций T_2 и M_2, действующих на краях отдельных участков, приведены в табл. 7. Вследствие того, что при принятой расчетной

Таблица 7

	Ребристый резервуар		$10^{-4}\cdot T_2$, н/м		$10^{-4}\cdot M_2$, н·м/м	
	$10^{-4}\cdot T_2$, н/м	$10^{-4}\cdot M_2$, н·м/м		II		II
6,0	—19,38	—0,714	—23,34	—23,77	—1,104	—1,092
6,7	—3,84	—0,437	5,38	3,98	—0,499	—0,503
6,7	—5,59	—0,398	1,18	1,30	—0,392	—1,431
7,5	38,31	—0,265	×	47,84	×	—0,130
7,5	32,32	—0,209	×	40,76	×	—0,073
8,4	75,43	—0,139	84,10	78,10	—0,011	—0,004
8,4	65,89	—0,094	62,56	68,14	0,043	0,023
9,4	90,91	—0,076	×	88,98	×	—0,089
9,4	79,16	—0,045	×	77,41	×	—0,069
10,7	95,42	—0,027	98,43	93,54	—0,074	—0,073
10,7	82,31	—0,010	74,51	80,64	—0,048	—0,059
12,3	89,70	0,023	×	87,34	×	—0,028
12,3	78,06	0,027	×	76,11	×	—0,021
13,9	73,51	0,031	76,79	74,41	0,039	0,041
13,9	65,36	0,027	60,60	66,16	0,038	0,041
15,4	60,55	0,023	×	60,30	×	0,000
15,4	54,74	0,017	×	54,50	×	—0,002
16,9	49,95	0,016	52,58	50,08	0,008	0,005
16,9	46,15	0,011	46,29	46,27	0,002	0,001
18,0	41,90	0,041	42,91	42,81	0,045	0,045

Примечание. Знак «×» в таблице означ
сечении расчетная величина не определялась.

схеме характеристики жесткости оболочки претерпевают разрывы на границах смежных участков, прерывистыми оказываются и функции T_2 и M_2. В качестве расчетных значений этих функций, приведенных в табл. 8, взяты из табл. 7 средние арифметические значения усилия T_2 и момента M_2, действующие на концах смежных участков.

Таблица 8

s, м	u,	w,	$10^4 \cdot \theta_1$, рад	$10^{-4} \cdot T_1$, н/м	$10^{-4} \cdot M_1$, ·м/м	$10^{-4} \cdot N_1$ н/м	$10^{-4} T_2$, н/м	$10^{-4} \cdot M_2$, ·м/м
6,0	0,0	0,0	0,0	—139,83	—11,483	13,801	—19,38	—0,714
6,7	—0,105	0,348	—6,19	—125,60	—3,561	7,123	—4,72	—0,417
7,5	—0,167	1,022	—7,51	—108,84	+0,173	2,497	35,31	—0,237
8,4	—0,255	1,729	—6,26	—84,71	1,107	0,240	67,43	—0,116
9,4	—0,340	2,324	—4,37	—71,39	0,824	—0,290	85,04	—0,060
10,7	—0,475	2,817	—2,43	—51,85	0,533	0,158	88,87	—0,009
12,3	—0,610	3,155	—0,85	—34,23	+0,326	0,239	83,88	0,025
13,9	—0,723	3,187	1,09	—21,46	+0,117	—0,155	69,43	0,029
15,4	—0,800	3,146	1,76	—12,51	—0,105	—0,116	57,65	0,020
16,9	—0,836	3,029	1,94	—5,87	—0,174	0,098	48,05	0,014
18,0	—0,854	2,898	2,34	—2,16	0,082	0,400	41,90	0,041

Эпюры перемещений и усилий, возникающих в ребристой оболочке резервуара, изображены на рис. 22—29.

Замена оболочки постоянной толщины системой оболочек с линейным законом изменения толщины стенки приводит к тому, что определенные таким образом величины усилий и перемещений отличаются от соответствующих величин для исходной оболочки.

Для выяснения возникающей при принятой расчетной схеме погрешности выполнены сравнительные расчеты описанной выше оболочки резервуара в предположении, что меридиональные ребра отсутствуют.

Этот случай отличается от приведенного выше тем, что величины α_{1i} и ϱ_{1i} равны нулю. Ход всех подготовительных вычислений не отличается от описанного в настоящем параграфе, поэтому приведем в табл. 9 окончательные результаты расчетов.

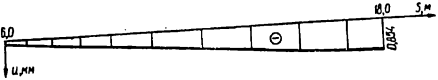


Рис. 22.

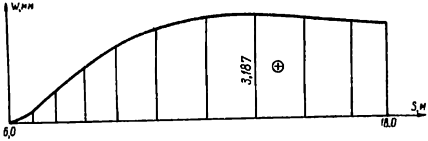


Рис. 23.

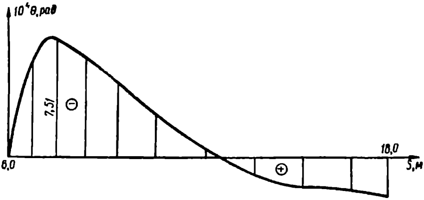


Рис. 24.

Рис. 25.

Рис. 26.

В первом варианте гладкая оболочка была заменена системой из 6 конических оболочек (рис. 30), толщина стенки

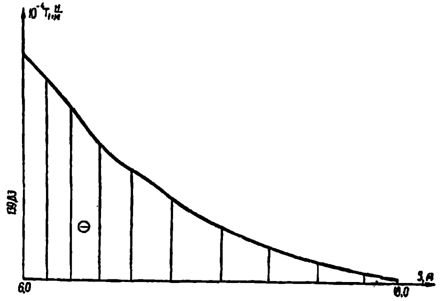


Рис. 27.

Рис. 28.

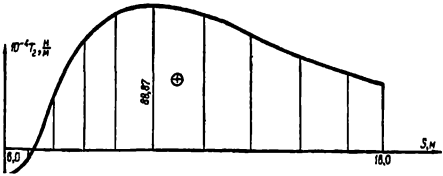


Рис. 29.

каждой из которых определялась формулой (18.3), но отличалась от толщины исходной оболочки уже на 6—14%.

Во втором варианте гладкая оболочка была заменена системой из 10 отдельных оболочек, толщина стенки каж-

Таблица 9

	u, мм		w, мм		$10^4 \cdot \theta$,1 рад			$10^{-4} \cdot T_1$, н/м		
		II		II		II	III			III
6,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	—139,99	—142,59	—144,63
6,7	—0,103	—0,108	0,501	0,497	—9,01	—8,96	—8,97	—126,14	—128,14	—131,19
7,5	×	—0,174	×	1,208	×	—7,83	—8,03	×	—110,67	—114,48
8,4	—0,265	—0,284	1,884	1,919	—4,01	—4,16	—4,30	—89,92	—91,34	—95,26
9,4	×	—0,390	×	2,407	×	—3,29	—3,39	×	—72,70	—75,88
10,7	—0,486	—0,526	2,808	2,891	—2,31	—2,39	—2,21	—51,40	—53,04	—54,98
12,3	×	—0,651	×	3,194	×	—1,32	—1,18	×	—35,34	—36,09
13,9	—0,720	—0,761	3,151	3,287	0,13	0,15	×	—21,88	—21,98	×
15,4	×	—0,824	×	3,187	×	0,78	×	×	—12,84	×
16,9	—0,830	—0,861	3,025	3,079	1,70	1,73	×	—5,94	—6,01	×
18,0	—0,849	—0,880	2,924	2,974	2,07	2,10	×	—2,22	—2,21	×

Примечание: Знак „ ” в таблице означает, что в данном сечении расчетная величина не определялась.

Продолжение табл. 9

	$10^{-4}\cdot M_1$, *нм/м*			$10^{-4}\cdot N_1$, *н/м*			$10^{-4}\cdot T_2$, *н/м*			$10^{-4}\cdot M_2$, *н·м/н*		
	I	II	III		II	III		II	III			III
6,0	—6,620	—6,550	—6,257	11,223	11,111	11,030	—23,34	—23,77	—24,09	—1,104	—1,092	—1,043
6,7	—0,807	—0,848	—0,901	4,618	4,425	4,190	5,38	2,64	1,18	—0,445	—0,467	—0,525
7,5	×	0,918	0,867	×	0,816	0,791	×	44,30	43,07	×	—0,101	—0,121
8,	0,796	0,784	0,744	—0,462	—0,473	—0,502	72,83	73,12	75,45	0,016	0,010	0,000
9,4	×	0,032	0,038	×	—0,777	—0,716	×	83,20	87,60	×	—0,079	—0,047
10,7	—0,051	—0,070	×	—0,802	—0,806	×	86,47	87,09	86,18	—0,061	—0,066	×
12,3	×	0,012	×	×	—0,103	×	×	81,72	82,02	×	—0,024	×
13,9	0,219	0,229	×	—0,115	—0,133	×	68,69	70,29	×	0,039	0,041	×
15,4	×	—0,081	×	×	—0,101	×	×	57,40	×	×	—0,001	×
16,9	—0,127	—0,134	×	0,061	0,063	×	49,43	48,17	×	0,005	0,003	×
18,0	0,089	0,089	×	0,368	0,371	×	42,91	42,81	×	0,045	0,045	×

дой из которых отличалась от толщины рассчитываемой оболочки всего на 6—7% (рис. 31).

Третьим вариантом явился расчет гладкой оболочки резервуара постоянной толщины с использованием асимптотических представлений цилиндричегких функций второго порядка первого и третьего рода [64]. В этом случае

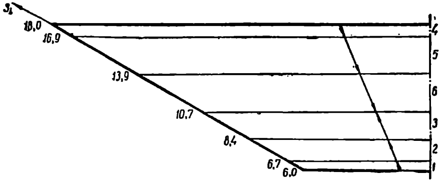


Рис. 30.

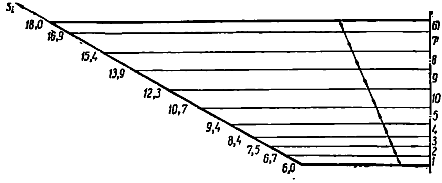


Рис. 31.

не было учтено влияние на напряженное и деформированное состояние оболочки условий, осуществленных на ее широком крае.

Результаты расчетов оболочки в первом, втором и третьем вариантах приведены в табл. 9 соответственно в столбцах I, II и III.

На рис. 32—39 представлены эпюры перемещений и усилий, возникающих в сечениях гладкой оболочки резервуара (II вариант расчета).

Сравнение результатов расчетов, выполненных в описанных вариантах (табл. 9), показывает, что при замене исходной оболочки вращения постоянной толщины системой конических оболочек, толщины которых изменяются

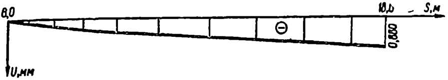


Рис. 32.

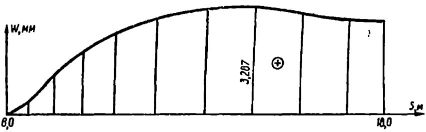


Рис. 33.

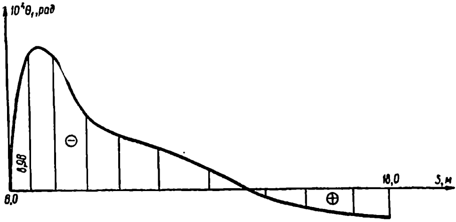


Рис. 34.

Рис. 35.

Рис. 36.

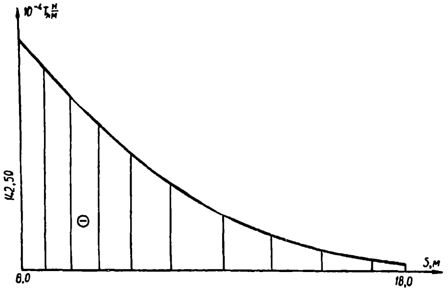


Рис. 37.

Рис. 38.

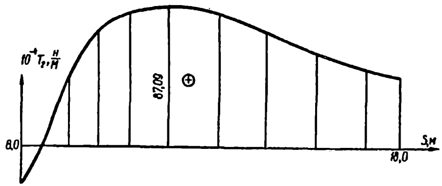


Рис. 39.

по закону (18.3), величины усилий и перемещений, вычисленных при такой расчетной модели, практически не отличаются от значений усилий и перемещений исходной оболочки, если погрешность такой замены составляет

6—7%. И даже в том случае, когда эта погрешность достигает 13—14%, полученные результаты могут быть использованы для практических расчетов.

§ 19. Оболочка камина градирни под действием нагрузки общего вида

Изложенный в предыдущих главах метод расчета произвольных оболочек вращения на любую нагрузку применен в настоящем параграфе для определения усилий в тонкостенной оболочке градирни с пленочным оросителем площадью 1500 $м^2$ (рис. 40). Проект градирни разработан ГПИ «Киев промстройпроект» в качестве типового сооружения для тепловых электростанций и металлургических предприятий.

Оболочка камина представляет собой сборную железобетонную осесимметричную башню, состоящую по высоте из ряда ярусов (рис. 41), каждый из которых образован из 48 трапециевидных плит-панелей. Отдельные панели окаймлены по периметру ребрами и, кроме того, имеют одно продольное и два поперечных ребра.

В замоноличенном виде сборный железобетонный камин градирни представляет собой тонкую оболочку, усиленную системой меридиональных и кольцевых ребер.

Целью настоящего параграфа является иллюстрация практического приложения изложенного метода, поэтому ограничимся расчетом оболочки камина градирни в монтажной стадии на действие ветровой нагрузки.

Камин градирни поддерживается опорным кольцом, поперечное сечение которого имеет размеры $0{,}8 \times 0{,}4$ *м*. Это кольцо окаймляет систему раскосов сечением $0{,}34 \times \times 0{,}34$ *м* (рис. 42). Опорой для них служит стенка бассейна градирни, имеющая постоянную толщину 0,40*м*.

Если рассматривать систему раскосов, изображенную на рис. 42, как некоторую фиктивную коническую оболочку, то в смонтированном виде часть градирни, подлежащая расчету, представит собой коническую оболочку вращения с прямолинейной образующей. Эта оболочка включает участки, которыми являются:

гладкая коническая оболочка постоянной толщины (стенка бассейна);

фиктивная коническая оболочка, заменяющая систему раскосов;

гладкая коническая оболочка постоянной толщины (опорное кольцо);

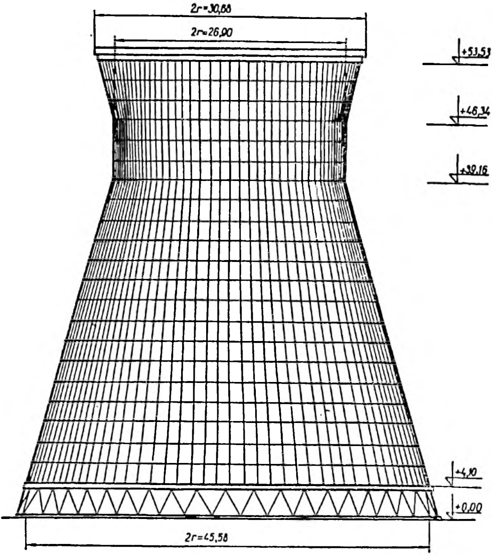


Рис. 40.

коническая оболочка камина, толщина стенки которой постоянна и равна 0,04 *м*, эта оболочка подкреплена 96 меридиональными ребрами, высота которых равна 0,20 *м*, а ширина — 0,15 *м*, и кольцевыми ребрами с такими же размерами поперечного сечения.

Кольцевые ребра расположены на расстоянии 2,4 *м* один от другого.

Угол δ между осью вращения оболочки и меридианом равен 15°.

Материал конструкций — железобетон; коэффициент Пуассона $\gamma = 1/6$, модуль Юнга

$$E = 4 \cdot 10^{10}\ н/м^2.$$

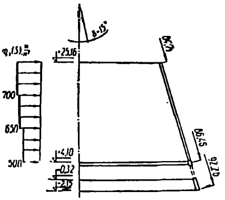


Рис. 41.

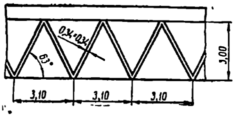


Рис. 42.

Ветровая нагрузка действует нормально к поверхности оболочки[1] с интенсивностью

$$q_1 = q_2 = 0; \tag{19.1}$$

$$q_3(s, \beta) = 1{,}2 \cdot \overline{q}_3(s)\,[1 + \xi m(s)]\, l(\beta), \tag{19.2}$$

где

$\overline{q}_3(s)$ — нормативный скоростной напор ветра, $н/м^2$;

$l(\beta)$ — коэффициент лобового сопротивления;

ξ — коэффициент динамичности;

$m(s)$ — коэффициент пульсации скоростного напора.

Величина ξ зависит от периода основного тона собственных колебаний конструкций. Для рассчитываемой градирни принято $\xi = 1$.

По указанному «Справочнику проектировщика» определены значения величин $\overline{q}_3(s)$ и $m(s)$, после чего вычислено выражение $1{,}2\,\overline{q}_3(s)\,[1 + m(s)]$ при $\xi = 1$ в зависимости от высоты H над поверхностью земли (рис. 43).

[1] Справочник проектировщика. Под ред. А. А. Уманского. Том расчетно-теоретический. Госстройиздат, 1960.

Коэффициент лобового сопротивления $l(\beta)$, являющийся сложной функцией от угла β (рис. 44), заменен приближенно тригонометрическим полиномом, коэффициенты которого вычислены способом, изложенным в работе [4].

Опуская промежуточные вычисления, приведем окончательные результаты

$$q_3(s, \beta) = 1{,}2\bar{q}_3(s)\,[1 + \xi m(s)] \times (-0{,}6 + 0{,}2943\cos\beta +$$
$$+ 0{,}9333\cos 2\beta + 0{,}4\cos 3\beta - 0{,}1\cos 4\beta + 0{,}00566\cos 5\beta +$$
$$+ 0{,}06666\cos 6\beta). \qquad (19.3)$$

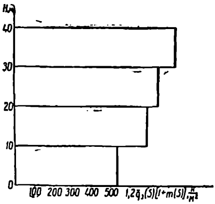


Рис. 43.

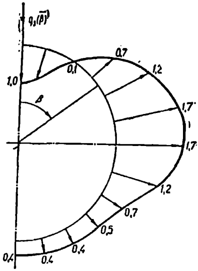


Рис. 44.

Расчет сводится к вычислению усилий, возникающих в оболочке камина градирни от действия отдельных членов ряда разложения (19.3) ветровой нагрузки.

В качестве примера рассмотрим действие на оболочку второго члена этого разложения. Принимая во внимание, что ветровая нагрузка на меридиане $\beta = 0$ направлена по внутренней нормали к поверхности, будем иметь

$$q_3 = -\,1{,}2\bar{q}_3(s)\,[1 + \xi m(s)]\cos 2\beta \cdot 0{,}9333. \qquad (19.4)$$

Заменим оболочку, представленную на рис. 41, согласно принятой в настоящей работе расчетной схеме системой конических оболочек (рис. 45), толщина стенки каждой из которых изменяется по линейному закону (1.1)

$$h_i = h_{0i} x_i.$$

Переменные $x_i = \frac{s_i}{s_{0i}}$ назначим таким образом, чтобы в начале каждого участка эти переменные равнялись единице.

Постоянную h_{0i} определяем для каждого участка (кроме 2-го) из условия, чтобы толщина стенки середины участка равнялась толщине в этом же сечении заменяемой оболочки.

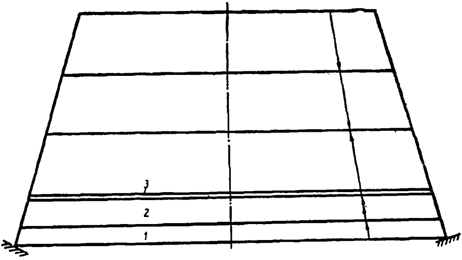


Рис. 45.

Для второго участка систему раскосов заменяем фиктивной гладкой конической оболочкой, характеристики жесткости которой определяем из условия равенства между собой деформаций системы раскосов и заменяющей их конической оболочки при растяжении — сжатии и при изгибе в меридиональном и кольцевом направлениях:

жесткость при растяжении в меридиональном направлении

$$D_{T1} = \frac{1}{E} h_{1\phi} = \frac{0{,}34^2 \cdot 2}{3{,}1 \sin 63^\circ} = \frac{1}{E} 8{,}3703 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

жесткость при изгибе в меридиональном направлении

$$D_{M1} = \frac{1}{12E} \overline{h}^3_{1\phi} = \frac{0{,}34^4 \cdot 2}{12 \cdot 3{,}1 \sin 63^\circ} \frac{1}{E} = \frac{1}{E} 8{,}0634 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

жесткость при растяжении в кольцевом направлении

$$D_{T2} = \frac{1}{E} h_{2\phi} = \frac{1}{E} 16{,}9750 \cdot 10^{-2} \ \text{м};$$

жесткость при изгибе в кольцевом направлении

$$D_{M?} = \frac{1}{12E} \bar{h}^3_{2\phi} = \frac{1}{E} 16{,}3526 \cdot 10^{-4} \ \text{м}^3.$$

Коэффициент Пуассона ν для этой оболочки был принят равным нулю.

Участки 4—6-й являются коническими оболочками, подкрепленными часто расположенными меридиональными и кольцевыми ребрами. Заменим эти ребристые оболочки гладкими конструктивно-ортотропными коническими оболочками и определим по формулам § 4 их приведенные жесткости. Так, для 4-го участка соответственно по формулам (4.9), (4.14), (4.17) и (4.19) получим

$$\alpha_{1,4} = 0{,}9722 \cdot 5 \frac{96 \cdot 0{,}1566}{6{,}2832 \cdot 0{,}2588 \cdot 86{,}46} = 0{,}5197;$$

$$\alpha_{2,4} = 0{,}9722 \cdot 5 \frac{0{,}1566}{2{,}4} = 0{,}3038;$$

$$\varrho_{1,4} = \frac{0{,}5197}{1{,}5197}(3 + 6 \cdot 5 + 4{,}5197 \cdot 5^2) = 49{,}924; \quad (19.5)$$

$$\varrho_{2,4} = \frac{0{,}3038}{1{,}3038}(3 + 6 \cdot 5 + 4{,}3038 \cdot 5^2) = 32{,}762;$$

$$\gamma_4 = \frac{49{,}924 + 32{,}762}{2} = 41{,}343.$$

Приведем значения тригонометрических функций половины угла $\delta = 15^\circ$ при вершине конической оболочки

$$\sin\delta = 0{,}2588, \quad \cos\delta = 0{,}9659, \quad \operatorname{tg}\delta = 0{,}2679.$$

$$\operatorname{ctg}\delta = 3{,}7322.$$

Величина $\bar{n}$, определяемая формулой (5.4), равна

$$\bar{n} = \frac{2}{0{,}2588} = 7{,}7341.$$

Проверим выполняемость условия (5.8). Правая часть неравенства (5.8) имеет наименьшее значение для 5-го участка и равна

$$\sqrt{\frac{s_5 \sin\delta}{h_5}} \sqrt[4]{\frac{0{,}6\,(1+\alpha_2)}{1+\varrho_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{53{,}828 \cdot 0{,}2588}{0{,}04}} \sqrt[4]{\frac{0{,}6 \cdot 1{,}3038}{33{,}762}} = 7{,}27. \qquad (19.6)$$

Так как в данной задаче $n = 2$, т. е. $n < 7.27$, то условие (5.8) выполняется и поэтому в формулах (6.6) можно пренебречь подчеркнутыми членами.

Ввиду того, что действующая на оболочку нагрузка (19.1) является симметричной, в общих формулах глав II и III необходимо из двойных знаков удерживать верхний знак.

Теперь по формулам (6.6), (9.9) и (9.13) вычисляем элементы матриц G_i, F_{ii} и F_{0i}^{-1}. Эти формулы имеют одинаковый вид для всех участков оболочки, поэтому приведем для иллюстрации лишь матрицу G_4

$$G_4 = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 188{,}88 & -1 & 39{,}640 & 10{,}819 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7{,}9016 & -2{,}9664 & 17{,}123 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3{,}8016 \cdot 10^7 & -18{,}783 & -4{,}9193 \cdot 10^6 & -0{,}6288 \cdot 10^6 \end{matrix} \right.$$

$$
\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
90{,}253 & -1{,}4007\cdot 10^{-4} & -9{,}5117\cdot 10^{-5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
2{,}7928 & -0{,}4093 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
-1{,}8360\cdot 10^{7} & 85{,}807 & 84{,}807 & -2
\end{array}\right\| . \qquad (19.7)
$$

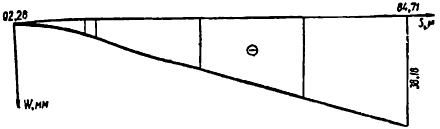


Рис. 46.

Перейдем к определению частных решений задачи На участках $1 \div 3$ поверхностная нагрузка отсутствует, поэтому здесь частные решения для всех функций равны нулю.

При построении частных решений для остальных участков проверим прежде всего выполнение условий (8.18) и (8.19) применимости мембранной теории к отысканию частных решений.

Правые части неравенств (8.18) и (8.19) являются наименьшими для 5-го участка и соответственно равны 16,5 и 28,4. Так как в рассматриваемом примере величины $n = 2$ и $m = 2$ меньше соответственно величин 16,5 и 28,4, то частные решения задачи можно определять по мембранной теории.

Результаты вычислений приводить не будем, а выпишем лишь для 4- и 5-го участков векторы W^{*}_{it}, W^{*}_{i0} и $\overline{W}^{*}_{i0}$ — выражения (9.11) и (9.15), входящие в общие решения оболочки (10.15) и (10.16),

$$W^{*}_{10} = W^{*}_{11} = \overline{W}^{*}_{20} - W^{*}_{21} = \overline{W}^{*}_{30} = W^{*}_{31} = 0; \qquad (19.8)$$

$$-W^{*}_{10} = \left\| \begin{array}{r} 0{,}0 \\ 2{,}9837 \cdot 10^{4} \\ -15{,}556 \cdot 10^{6} \\ 5{,}204 \cdot 10^{6} \\ -2{,}5804 \cdot 10^{6} \\ -10{,}950 \cdot 10^{4} \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{array} \right\|, \quad W^{*}_{4l} = \left\| \begin{array}{r} -8{,}4460 \cdot 10^{6} \\ -2{,}7334 \cdot 10^{4} \\ 14{,}2600 \cdot 10^{6} \\ 12{,}880 \cdot 10^{6} \\ 2{,}3576 \cdot 10^{6} \\ 10{,}032 \cdot 10^{4} \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{array} \right\|,$$

$$-W^{*}_{50} = \left\| \begin{array}{r} 0{,}0 \\ 3{,}1262 \cdot 10^{4} \\ -11{,}407 \cdot 10^{6} \\ 3{,}8381 \cdot 10^{6} \\ -2{,}5027 \cdot 10^{6} \\ -11{,}473 \cdot 10^{4} \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{array} \right\|, \quad W_{5l} - W^{*}_{60} = \left\| \begin{array}{r} 9{,}0180 \cdot 10^{6} \\ -0{,}2485 \cdot 10^{4} \\ -0{,}8320 \cdot 10^{6} \\ -18{,}4041 \; 10^{6} \\ 0{,}0831 \cdot 10^{6} \\ 0{,}3121 \cdot 10^{4} \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{array} \right\|. \tag{19.9}$$

В выражениях (19.9) фигурируют частные решения для перемещений v, u, w срединной поверхности, увеличенные в E раз.

Граничные условия задачи определяются тем, что нижний край градирни жестко защемлен, а верхний край — свободен. В соответствии с этим на нижнем крае (начало 1-го участка) осуществляются условия

$$v_{1,0} = u_{1,0} = w_{1,0} = \theta_{(1)1,0} = 0, \tag{19.10}$$

а на верхнем крае градирни (начало 5-го участка) — условия

$$\widetilde{T}_{(12)5,0} = T_{(1)5,0} = M_{(1)5,0} = \overline{N}_{(1)5,0} = 0. \tag{19.11}$$

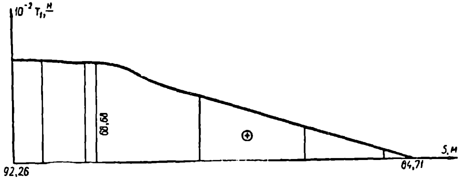


Рис. 47.

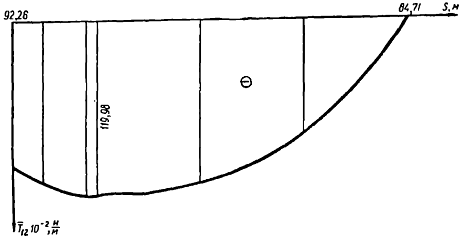


Рис. 48.

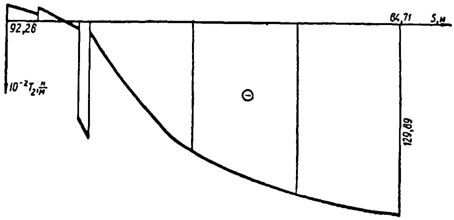


Рис. 49.

Таблица 10

	v, мм	u, мм	w, мм	$10^4\ \theta_1$, рад	$10^{-2}\ T_1$, н/м	$10^{-2}\bar{T}_{12}$, н/м	$10^{-2}\ M_1$, н·м/м	$10^{-2}\ \bar{N}_1$, н/м	$10^{-2}\ T_2$, н/м	$10^{-2}\ M_2$, н·м/м
92,26	0,0	0,0	0,0	0,0	72,23	—103,21	4,69	1,83	12,04	0,78
90,26	0,17	—0,11	— 0,30	—3,11	70,95	—111,85	4,47	—0,05	7,39	—9,31
90,26	0,17	—0,11	— 0,30	—3,11	70,95	—111,85	4,47	—0,05	10,89	0,70
87,26	2,48	—0,43	— 5,02	—32,77	69,23	—123,55	4,94	—1,47	—4,46	—0,81
87,26	2,48	—0,43	— 5,02	—32,77	69,23	—123,55	4,94	—1,47	—60,62	—128,41
86,46	3,17	—0,52	— 6,49	—34,97	68,68	—119,98	5,10	—1,45	—79,91	—164,25
86,46	3,17	—0,52	— 6,49	—34,97	68,68	—119,98	5,10	—1,45	—7,04	—6,13
79,21	6,95	—1,84	—18,21	—28,07	44,31	—110,01	—0,42	—3,74	—86,87	—12,01
71,95	18,64	—2,31	—27,72	—19,66	21,96	— 77,86	—4,62	—4,41	—118,56	—19,56
64,71	18,47	—1,19	—38,18	—271,3	0,0	0,0	0,0	0,0	—129,89	—29,86

Вычислением приведенных выше величин определяется подготовительная работа при решении конкретной задачи. Дальнейшие вычисления выполняются на ЭЦВМ по схеме, приведенной в § 17.

Результаты решения расчета оболочки камина градирни в монтажной стадии приведены в табл. 10. На рис.

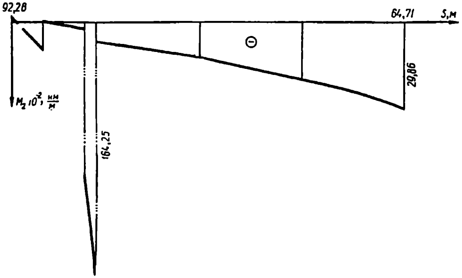


Рис. 50.

46 — 50 изображены эпюры нормальных перемещений w, усилий $\overline{T}_{1,2}$, T_1, T_2 и кольцевого изгибающего момента M_2.

Укажем, что величины функций T_2 и M_2 были найдены по второй и пятой формулам (5.1) после вычисления остальных перемещений и усилий, приведенных в табл. 10.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный в работе метод позволяет рассчитывать произвольные оболочки вращения, находящиеся под действием любой поверхностной и краевой нагрузки. Толщина оболочки может изменяться по произвольному закону вдоль меридиана, в частности скачкообразно. Вся оболочка или отдельные ее участки могут быть подкреплены системой часто расположенных кольцевых и меридиональных ребер. Нагрузка может быть распределенной по всей поверхности оболочки или приложена к отдельным конечным ее частям.

При построении расчетной схемы заданная оболочка вращения заменена системой конических оболочек линейно-переменной толщины и цилиндрических оболочек постоянной толщины.

При выводе разрешающих дифференциальных уравнений для отдельной заменяющей оболочки учтены все внутренние усилия и перемещения оболочки. Для ребристой оболочки учтено влияние на ее напряженное и деформированное состояние системы меридиональных и кольцевых ребер. Коэффициенты разрешающих уравнений благодаря специальному выбору закона изменения толщины стенки оболочки и размеров подкрепляющих ребер оказываются постоянными величинами. Это обстоятельство дает возможность построить точное решение систем разрешающих дифференциальных уравнений в виде сходящихся матричных рядов.

Таким образом, решение задачи о деформации отдельной короткой конической и цилиндрической оболочки является строгим в рамках принятых исходных гипотез технической теории. Строгим является и решение для всей оболочки, если рассматривать ее как систему вписанных конических и цилиндрических оболочек. Погрешность изложенного метода вызывается, следовательно, только изменением геометрических параметров оболочки и приобретает физическую наглядность, так как всегда видно, насколько принятая расчетная модель отличается от исходной конструкции.

Указанная погрешность расчетной схемы уменьшается при увеличении количества заменяющих оболочек и приближении их геометрических параметров к параметрам соответствующих участков исходной оболочки, что дает возможность получать решения с любой степенью точности.

Сформулированы в матричном виде граничные условия в общем случае, когда края оболочки подкреплены упругими кольцами, находящимися под воздействием различных нагрузок. Учтено сопротивление контурных колец растяжению, изгибу в горизонтальной плоскости и кручению.

Рассмотрены различные случаи опирания колец: свободное кольцо; шарнирно подвижное и неподвижное опирание; кольцо, перемещающееся только в своей плоскости.

Разработанный матричный алгоритм решения задачи весьма просто осуществляется на электронных цифровых вычислительных машинах (ЭЦВМ), так как применение таких машин дает значительный эффект при решении задач, где многократно производится стандартный набор операций, которым в данном случае являются главным образом перемножение и суммирование матриц.

С другой стороны, при выполнении расчетов по предложенному методу на ЭЦВМ отпадает необходимость выполнять наиболее сложную в принципиальном отношении и трудоемкую часть задач теории оболочек — интегрирование разрешающих дифференциальных уравнений высоких порядков. Подготовительную работу, которая заключается в вычислении по элементарным алгебраическим формулам элементов исходных матриц, могут выполнять независимо друг от друга несколько расчетчиков любой квалификации. Однако и этот этап расчета может быть запрограммирован.

Практическое применение предложенного метода иллюстрировано примерами расчета реальных конструкций: ребристой оболочки конического резервуара водонапорной башни, находящегося под действием осесимметричной нагрузки, и ребристой оболочки камина градирни на действие гармонической нагрузки, изменяющейся вдоль меридиана скачкообразно.

Исследована сходимость метода на примере решения осесимметричной задачи для гладкой конической оболочки. Сравнение в этом случае результатов расчета, выполненного по предлагаемому и известным методам, показывает, что если погрешность расчетной схемы не превосходит 7%, получаемые расчетные величины практически являются точными. Найденные перемещения и усилия в сечениях оболочки камина градирни, достаточно удаленных от защемленного края, хорошо согласуются с соответствующими величинами, полученными по известной упрощенной полубезмоментной теории, что также указывает на точность описываемого метода.

Приведенные примеры свидетельствуют о эффективности предложенного алгоритма при решении наиболее сложных задач теории оболочек — исследовании коротких ребристых оболочек вращения переменной толщины, находящихся под действием произвольной нагрузки. Именно в подобных случаях раскрываются преимущества предложенного метода.

Естественно, область его применения не исчерпывается расчетом оболочек вращения. Модификации метода могут найти применение при решении других задач строительной механики, сводящихся к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

Специальная

1. Амбарцумян С. А., К расчету анизотропных цилиндрических оболочек вращения, подкрепленных поперечными ребрами, Изв. АН СССР ОТН, 1955, № 12.

2. Амбарцумян С. А., К общей теории анизотропных оболочек, ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.

3. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, М., Гостехтеориздат, 1958.

4. Бронштейн И. К., Семендяев К. А., Справочник по математике, Гостехтеориздат, 1954.

5. Булгаков Б. В., Колебания, Гостехтеориздат, 1954.

6. Вайнберг Д. В., Заруцький В. О, Ітенберг Б. З., Напружений стан циліндричних оболонок, підсилених ортогональною сіткою ребер, «Прикладна механіка», 1960, т. IV, вип. 6.

7. Вайнберг Д. В., Ітенберг Б. З., Несиметрична деформація конструктивно-ортотропних оболонок, «Доповіді АН УРСР», 1960, № 2.

8. Вайнберг Д. В., Синявский А. Л., Расчет оболочек, Госстройиздат УССР, 1961.

9. Вайнберг Д. В., Сазонов Р. М., Семенов П. И., Расчет гофрированных оболочек, «Расчет пространственных конструкций», 1962, вып. VII.

10. Вайнберг Д. В., Синявский А. Л., Дехтярюк Е. С., Итерационные алгоритмы и численные задачи теории пластин и оболочек, «Теория пластин и оболочек», Изд-во АН Арм. ССР, 1964.

11. Варвак П. М., Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч. I, К., Изд-во АН УССР, 1949; ч. II, К., Изд-во АН УССР, 1952.

12. Ватульян А. Х., Применение смешанного матричного метода к некоторым задачам о статической и динамической устойчивости и колебаниям упругих стержней, Диссертация, Новочеркасск, 1963.

13. Введенский С. А., Расчет колебаний разветвленных систем методом динамической жесткости в матричной форме, Диссертация, Л., 1956.

14. В л а с о в В. З., Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек, ПММ, 1944, т. VIII, вып. 2.

15. В л а с о в В. З., Общая теория оболочек и ее приложения в технике, Гостехиздат, 1949.

16. В л а с о в В. З., К теории безмоментных оболочек вращения, Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.

17. В л а с о в В. З., Тонкостенные пространственные системы, Госстройиздат, 1958.

18. Г а н т м а х е р Ф. Р., Теория матриц, Гостехтеориздат, 1953.

19. Г и л ь м а н Л. С., Б а с л а в с к и й И. А., Расчет башни, состоящей из конических оболочек, усиленных кольцами, на действие ветровой нагрузки, «Расчет пространственных конструкций», 1962, вып. VII.

20. Г р е б е н ь Е. С., Некоторые вопросы расчета многократно статически неопределимых стержневых систем в матричной форме, Диссертация, Л., 1961.

21. Г р и г о р е н к о Я. Ф., Антисиметричний напружений стан конічної оболонки змінної товщини, «Прикладна механіка», 1960, вип. 4.

22. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л., Теория упругих тонких оболочек, Гостехиздат, 1953.

23. Д и ш и н г е р Ф., Оболочки, Госстройиздат, 1932.

24. Ж д а н В. З., Решение линейных дифференциальных уравнений 4-го порядка с переменными коэффициентами, «Сборник научных трудов Киевского инженерно-строительного института», 1962, вып. 20.

25. Ж д а н В. З., Симметричная деформация конструктивно-ортотропных конических оболочек, «Труды Киевского политехнического института», 1963, т. XLIII.

26. Ж д а н В. З., Матричная форма расчета конструктивно-ортотропных оболочек вращения, «Труды Киевского политехнического института», 1963, т. XLIII.

27. З а р у ц к и й В. А., Уравнения равновесия ребристых цилиндрических оболочек, «Теория пластин и оболочек», Изд-во АН УССР, 1962.

28. І л ь ї н Л. А., Про антисиметричну деформацію тонкої ічної оболонки. «Прикладна механіка», 1956, т. 1, вип. 4.

29. І л ь ї н Л. А., Розрахунок тонких конічних оболонок на осесиметричне навантаження. «Прикладна механіка», 1959, т. 5, вип. 2.

30. И м м е р м а н А. Г., Расчет ортотропной круговой цилиндрической оболочки на поперечную нагрузку, «Расчет пространственных конструкций», 1955, вып. 3.

31. К а н С. Н., П а н о в к о Я. Г., Элементы строительной механики тонкостенных конструкций, Оборонгиз, 1952.

32. К а н С. Н., Строительная механика оболочек, изд-во «Машиностроение», 1966.

33. К а н С. Н., Прочность замкнутых и открытых цилиндрических оболочек, «Труды Харьковского высшего авиационно-инженерного военного училища», 1960, вып. 190.

34. К а н С. Н., Прочность оболочек двоякой кривизны, «Труды Харьковского высшего авиационно-инженерного военного училища», 1960, вып. 190.

35. К а н С. Н., Б а р а ш к о в Ю. И., Поперечный изгиб круговых цилиндрических оболочек, «Труды Харьковского высшего авиационно-инженерного военного училища», 1960, вып. 190.

36. К а н С. Н., Прочность, устойчивость и несущая способность конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек, «Расчет пространственных конструкций», 1962, вып. 8.

37. К а п л а н Ю. И., Расчет цилиндрических многопролетных оболочек и складок при наличии поперечных ребер, «Труды Харьковского высшего авиационно-инженерного военного училища», 1960, вып. 190.

38. К и л ь ч е в с к и й Н. А., Основные уравнения равновесия упругих оболочек и некоторые методы их интегрирования, «Сб. трудов Института математики АН УССР», № 4—6, К., Изд-во АН УССР, 1940.

39. К и л ь ч е в с к и й Н. А., Приближенные методы определения перемещений в цилиндрических оболочках, «Сб. трудов Института математики АН УССР», № 8, К., Изд-во АН УССР, 1946

40. К и л ь ч е в с к и й Н. А. Исследования некоторых вопросов теории упругости, Изв. Киевского политехнического института, т. XV, К., Изд-во Киевского университета, 1954.

41. К и л ь ч е в с к и й Н. А., Интегродифференциональные и интегральные уравнения равновесия тонких упругих оболочек, ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.

42. К і л ь ч е в с ь к и й М. О., Т к а ч у к Г. І., Про деякі особливості інтегральних рівнянь, складених на основі теореми взаємності робіт. «Прикладна механіка», 1959, т. V, вип. 2.

43. К и з и м а Г. А., Исследование напряженного состояния ребристых оболочек нулевой Гауссовой кривизны, «Теория пластин и оболочек», Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1964.

44. К о в а л е н к о А. Д., Пластины и оболочки в роторах турбомашин, К., Изд-во АН УССР, 1955.

45. К о р о л е в и ч Ю. С., Асимптотичне рішення задачі симетричної деформації конічної оболочки з лінійно змінною товщиною, «Прикладна механіка», 1959, т. 5, вип. 1.

46. К у з н е ц о в Э. Н., Практический способ расчета произвольных оболочек вращения на осесимметричную нагрузку, Научные доклады высшей школы, Строительство, 1958, № 3.

47. Л а п п о - Д а н и л е в с к и й И. А., Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехтеориздат, 1957.

48. Л а щ е н и к о в Б. Я., Интерполирование и матричные алгоритмы в задачах устойчивости и колебаний упругих систем, Диссертация, М., 1962.

49. Л у р ь е А. И., Статика тонкостенных упругих оболочек, Гостехтеориздат, 1947.

50. Л я в А., Математическая теория упругости, ОНТИ, 1935.

51. Л ь в и н Я. Б., Сопротивление конических оболочек краевым циклическим воздействиям, «Расчет пространственных конструкций», 1962, вып. VII.

52. М е й е р Р., Х а р м а н М., Метод конических сегментов для исследования нагруженных по краям усеченных конических оболочек вращения, «Ракетная техника», 1963, № 4.

53. М а л а х о в с к и й Р. А., Расчет круговых ортотропных конических оболочек, Изв. вузов, Авиационная техника, 1960, № 2.

54. М и т к е в и ч В. М., Симметричная деформация конической оболочки, подкрепленной ребрами, «Труды конференции по теории пластин и оболочек». Казань, Казанский университет, 1961.

55. М у ш т а р и Х. М., Некоторые обобщения теории тонких оболочек, Изв. физико-математического общества Казанского университета, 1938, т. XI, сер. 8.

56. Н о в о ж и л о в В. В., Ф и н к е л ь ш т е й н Р. М., О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек, ПММ, 1943, т. VII вып. 5.

57. Н о в о ж и л о в В. В., Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1962.

58. О в е ч к и н А. М., Расчет железобетонных круглых резервуаров, Стройиздат, 1950.

59. П у с т ы н н и к о в В. И., Практическая схема решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, «Труды Харьковского инженерно-строительного института», вып. 16, т. 5, Изд-во Харьковского университета, 1961

60. П ы ж е н к о в И. А., Матричный метод исследования устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней, Диссертация, М., 1955.

61. Р е м і з о в а Н. І., Розрахунок циліндричних оболонок на міцність методом інтегральних рівнянь, «Прикладна механіка», 1958, т. IV, вип. 3.

62. Р е м і з о в а Н. І., Визначення пружних переміщень циліндричних оболонок методом інтегральних рівнянь, «Доповіді АН УРСР», 1958, № 3.

63. Р е м и з о в а Н. И., Интегральные уравнения равновесия тонких упругих цилиндрических оболочек, ПММ, 1959, XXIII, вып. 3.

64. Р и в к и н С. А., Практический метод расчета конических оболочек постоянной толщины, «Сб. научных трудов Киевского инженерно-строительного института», № 9, Гостехиздат Украины, 1951.

65. Р о з и н Л. А., Метод расчленения в теории оболочек, ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.

66. С е г а л ь А. И., Практические методы расчета тонкостенных конических оболочек, «Расчет пространственных конструкций», 1951, вып. 2.

67. С е г а л ь А. И., Некоторые итоги решения циклических задач, «Расчет пространственных конструкций», 1955, вып. III.

68. С и б и р я к о в В. А., Расчет ортотропной конической оболочки на произвольную внешнюю нагрузку по методу В. З. Власова, Изв. вузов, Авиационная техника, 1959, № 2.

69. С м и р н о в А. Ф., Статическая и динамическая устойчивость сооружений, Трансжелдориздат, 1947.

70. С м и р н о в А. Ф., Устойчивость и колебания сооружений, Трансжелдориздат, 1958.

71. Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем, Сб. статей, Судпромгиз, 1961.

72. Т л е г е н о в К. Б., Механизация численного решения дифференциальных уравнений, Диссертация, Баку, 1960.

73. Т и м о ш е н к о С. П., Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948.

74. У м а н с к и й А. А., Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций, Оборонгиз, 1939.

75. Ф а д д е е в Д. К., Ф а д д е е в В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1960.

76. Ф р а д л і н Б. Н., Ш а х н о в с ь к и й С. М., Про скла-

дання інтегродиференціальних рівнянь пологих оболонок, «Доповіді АН УРСР», 1958, № 4.

77. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИЛ, 1950.

78. Филин А. П., Расчет оболочек произвольного очертания на основе дискретной расчетной схемы, «Труды конференции по теории пластин и оболочек», Казань, Казанский университет, 1961.

79. Черных К. Ф., Линейная теория оболочек, ч. 1, Изд-во Ленинградского университета, 1962.

80. Чудновский В. Г., Рымар И. М., Расчет ребристых тонкостенных купольных покрытий, «Расчет пространственных конструкций», 1962, вып. VII.

81. Шайкевич В. Д., О некоторых вопросах применения теории матриц к расчету статически неопределимых систем, Диссертация, Днепропетровск, 1955.

82. Шевляков Ю. А., Безпалько Л. А., Расчет конической оболочки, жестко защемленной у основания, «Научные записки Днепропетровского государственного университета», 1958, 73.

83. Шнелль В., Определение усилий в подкрепленных круговых цилиндрических оболочках, «Механика», 1958, № 4.

84. Штаерман И. Я., О применении метода асимптотического интегрирования к расчету упругих оболочек, Изв. Киевского политехнического института, 1924, кн. 1.

85. Штаерман И. Я., К теории симметричной деформации анизотропных упругих оболочек, Изв. Киевского политехнического института, 1924, кн. 1.

86. Штаерман И. Я., Об интегрировании дифференциальных уравнений равновесия упругих оболочек, Изв. Киевского политехнического института, 1927, кн. 2.

87. Экстрем Д. Э., Тонкостенные симметричные купола, ОНТИ, 1936.

88. Cassaci S., Elexion des coques de revolution soumises a des chamaps axisymetriques de forces et de temperatures, «Publs scient. et techn. Ministere air», 1962, N 382.

89. Southwell R. V., Relaxation Methods in Engineering Science, Oxford University Press, 1949.

90. Flügge W., Static und Dynamik der Schalen, Verl. I., Springer, 1934.

91. Thurston Gaylen A., A numerical solution for thin conical shells under asymmetrical loads, «Proc. 4th Midwest. Conf. Solid Mech.», Austin Texas, 1959.

92. Wilson B., Asymmetrical bending of conical shells, «J.Engng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs», 86, N 3, 1960.

93. Wittneber H. G., Ein Beitrag Zur Berechnung rotationssymmetrischer Behälter, Bautechnik, N 10, 1960.

94. Kirchhoff G., Vorlesungen über mathematische Physik, Bd. 1, Mechanik, 1876.

95. Hoff N. G., Thin circular conical shells under arbitrary loads, J. Appl. Mech, 22, N 4, 1955.

96. Pasternak P., Vereinfachte Berechnung der Biegebeanspruchung in dünnwändigen, kreisrunden Behaltern, verhandlungen d2 Intern. Kongr. f. techn. Mech., IX 1926, Zürich, 1927.

97. Pasternak P., Die Praktische Berechnung biegfester

Kugelshalen kreisrunder Fundamensplatten auf elastischer Bettung und Kreiszylindrisher Wandnagen in gegenseitiger monolither verbindung, ZAMM, 1926.
98. S t u i v e r W i l l e m, An approximate solution for the symmetrical end problem of conical shells, J. Aero/Space Sci., 28, N 1, 1961.
99. H r i b a r J o h n A., Au Tung, An evaluation of the general theory of thin elastic shells revolution, Developm. Mech. Vol. 1, 1961.
100. W i t t r i c k W. H., Edge stresses in thin shells of revolution, Austral. J. Appl. Sci., 8, N 4, 1957.
101. M c. I l r o y M. D., Lenear deformations of conial shells, J. Aero/Space Sci., 26, N 4, 1959.
102. Z a r e m b a W. A., Elastic interactions at the junction of an assembly of axi — symmetric shells, J. Mech. Engng. Sci, 1, N 3, 1959.

Обзорная

103. В о л ь м и р А. С., Обзор исследований по теории гибких пластинок и оболочек за период с 1941 г. по 1957 г., «Расчет пространственных конструкций», 1958, вып. 4.
104. К и л ь ч е в с к и й Н. А., Интегро-дифференциальные и интегральные уравнения статики и динамики тонких упругих оболочек, «Теория пластин и оболочек», Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1964.
105. К о в а л е н к о А. Д., Обзор достижений теории пластин и оболочек применительно к роторам турбомашин, «Прикладна механiка», 1955, 1, № 2.
106. Н а г д и П. Обзор современного прогресса в теории упругих оболочек, «Механика», 1959, № 1.
107 Н о в о ж и л о в В. В., Развитие метода комплексного преобразования в линейной теории оболочек за 50 лет, «Теория пластин и оболочек», Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1964.
108. О н и а ш в и л и О. Д., Расчет оболочек и других тонкостенных пространственных конструкций, «Строительная механика в СССР (1917—1957)», Госстройиздат, 1959.

Вайнберг Давид Вениаминович
Ждан Владимир Зотикович

Матричные алгоритмы
в теории оболочек вращения

Редактор *Костенко Ю. И.*
Художник *Львов А. Ф.*
Художественный редактор *Духленко С. П.*
Технический редактор *Гурджиян А. К.*
Корректор *Луценко Н. Я.*

Сдано в набор 8/VI 1967 г. БФ 13778. Зак. № 227. Формат бумаги $84 \times 108^1/_{32}$. Физич. печ. листов 5,125. Услов. печ. листов 8,61. Учетно-издат. листов 8,2. Бум. листов 2,5625. Подписано к печати 14/XI 1967 г. Бумага типограф. № 2. Цена 49 коп. Тираж 4200.

Издательство Киевского университета, Киев, Героев. революции,
Свод. Т. П. Издат. Киев., Львов., Харьк. ун-тов, 1967, поз. 84.

Киевская книжная типография № 5 Комитета по печати при Совете Министров УССР, Киев, Репіна, 4