



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ
РАКЕТНЫХ И АРТИЛЛЕРИЙСКИХ НАУК
ОПЕРАЦИОННАЯ БИБЛИОТЕКА ВЫСШАГО НАУЧНОГО УРОВНЯ

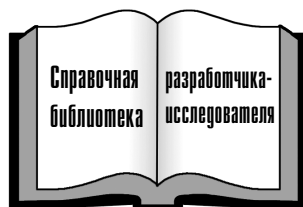
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИОННО- ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ
РАКЕТНЫХ
И АРТИЛЛЕРИЙСКИХ НАУК



**ВООРУЖЕНИЕ
И ВОЕННАЯ ТЕХНИКА**



10



Редколлегия Editorial Staff

- В.В. ПАНОВ** (председатель), академик РАН, д-р техн. наук, профессор
V.V. PANOV (chairman), Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor
- В.М. БУРЕНОК**, академик РАН, д-р техн. наук, профессор
V.M. BURENOK, Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor
- Г.И. ГОРЧИЦА**, академик РАН, д-р воен. наук, профессор
G.I. GORCHITSA, Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor
- Р.И. ИЛЬКАЕВ**, академик РАН, академик РАН, д-р физ.-мат. наук
R.I. ILKAYEV, Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Sciences, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences
- А.А. КАЛЛИСТОВ**, академик РАН, д-р техн. наук, профессор
A.A. KALLISTOV, Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor
- А.А. КОКОШИН**, академик РАН, академик РАН, д-р истор. наук, профессор
A.A. KOKOSHIN, Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Sciences, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor
- А.М. ЛИПАНОВ**, академик РАН, академик РАН, д-р техн. наук, профессор
A.M. LIPANOV, Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Sciences, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor
- С.П. НЕПОБЕДИМЫЙ**, чл.-кор. РАН, академик РАН, д-р техн. наук, профессор
S.P. NEPOBEDIMY, Doctor of Science, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor
- А.А. РАХМАНОВ**, академик РАН, д-р техн. наук, профессор
A.A. RAKHMANOV, Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor
- И.Б. ФЕДОРОВ**, академик РАН, академик РАН, д-р техн. наук, профессор
I.B. FEDOROV, Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Sciences, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor
- Е.А. ФЕДОСОВ**, академик РАН, академик РАН, д-р техн. наук, профессор
E.A. FEDOSOV, Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Sciences, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor
- К.Н. ШАМШЕВ**, чл.-кор. РАН, академик РАН, д-р техн. наук, профессор
K.N. SHAMSHEV, Doctor of Science, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor
- А.Г. ШИПУНОВ**, академик РАН, академик РАН, д-р техн. наук
A.G. SHIPUNOV, Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Sciences, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences
- Л.Н. ЛЫСЕНКО** (отв. секретарь), академик РАН, д-р техн. наук, профессор
L.N. LYSENKO (secretary), Doctor of Science, Academician of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Professor

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РАКЕТНЫХ И АРТИЛЛЕРИЙСКИХ НАУК



В.М. Буренок, В.Г. Найденов, В.И. Поляков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИОННО- ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ



Москва ♦ Машиностроение ♦ 2011

ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА

Издательство «Лань»  ЛАНЬ®

УДК 681.518.3
ББК 68.8
Б91

Авторы: В.М. Буренок, В.Г. Найденов, В.И. Поляков

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор В.Н. Минаев,
д-р техн. наук, профессор Б.И. Шахтарин

В.М. Буренок и др.
Б91 Математические методы и модели в теории информационно-измерительных систем / РАРАН: В.М. Буренок, В.Г. Найденов, В.И. Поляков; редкол. серии: В.В. Панов (пред.) и др. М.: Машиностроение, 2011. 336 с.: ил. (Справ. б-ка разработчика-исследователя).

ISBN 978-5-94275-608-6

Книга посвящена развитию методологии анализа и обоснования характеристик информационно-измерительных систем, используемых для обеспечения испытаний сложных технических комплексов. Рассмотрены математические методы и эффективные алгоритмы статистической обработки траекторной измерительной информации, основанные на принципах динамической фильтрации. Приведены математические модели радиотехнических и оптико-электронных траекторных измерительных систем, обобщенная модель виртуального траекторного измерительного комплекса, а также структура программно-алгоритмического комплекса априорной оценки точности траекторных информационно-измерительных систем.

Для ученых, аспирантов и специалистов, работающих в области исследования перспектив развития и разработки информационно-измерительных систем для испытаний сложных технических комплексов.

ББК 68.8

© В.М. Буренок, В.Г. Найденов, В.И. Поляков, 2011
ISBN 978-5-94275-608-6 © ООО «Издательство Машиностроение», 2011

RUSSIAN ACADEMY OF MISSILE AND ARTILLERY SCIENCES



V.M. Burenok, V.G. Naideonov, V.I. Polyakov

MATHEMATICAL METHODS AND MODELS IN INFORMATION- MEASURING SYSTEMS THEORY



Moscow ♦ Mashinostroyeniye ♦ 2011

ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА

Издательство «Лань»  ЛАНЬ®

Authors: V.M. Burenok, V.G. Naideonov, V.I. Polyakov

Burenok, V.M. et al.

Mathematical Methods and Models in Information-Measuring Systems Theory / RAMAS: V.M. Burenok, V.G. Naideonov, V.I. Polyakov; Editorial Staff: V.V. Panov (chairman) et al. Moscow: Mashinostroenie, 2011, 336 p. (Reference library for designers and developers).

ISBN 978-5-94275-608-6

The book is dedicated to the development of the information-measuring systems (applied in the sophisticated hardware testing) characteristics analysis and substantiation methodology. It explores statistical guidepath measuring data manipulation mathematical methods and effective algorithms, based on dynamic filtration principles. It contains mathematical models of the radio engineering and optic-electronic guidepath measuring systems, virtual guidepath hardware general model and the structure of the software-algorithmic complex, applied during guidepath information-measuring systems prior accuracy evaluation.

For the scientists, graduate students and specialists, working in field of the information-measuring systems (applied in the sophisticated hardware testing) development and future prospect research.

© V.M. Burenok, V.G. Naideonov, V.I. Polyakov, 2011
ISBN 978-5-94275-608-6 © Ltd Co «Mashinostroenie Publishing House», 2011

Предисловие

5 апреля 1994 г. Президент Российской Федерации подписал Указ № 661 «О воссоздании Российской академии ракетных и артиллерийских наук». Термином *воссоздание* подчеркивалось, что РАРАН является преемницей Академии артиллерийских наук, которая была организована в СССР вскоре после окончания Великой Отечественной войны и просуществовала до 1953 г.

Академия функционировала как высшее научное учреждение, отвечающее за развитие наук в области вооружения и военной техники, объединившее отечественных ученых, конструкторов и специалистов, работающих в оборонной отрасли, и крупных военачальников.

Первые шаги по воссозданию РАРАН были предприняты в 1993 г., когда, выражая озабоченность состоянием исследований, разработок и оснащения Вооруженных Сил России в области средств вооруженной борьбы, ведущие ученые страны, занимающиеся этими проблемами, выступили с инициативой создания отраслевой академии наук как преемницы и продолжателя традиций Академии артиллерийских наук.

Организационно (определение численности членов Академии и работников аппарата президиума, финансирования и т.д.) РАРАН была оформлена Постановлением Правительства Российской Федерации № 715 от 17 июля 1995 г. Постановлением Правительства РФ № 325 от 22 марта 1996 г. был утвержден Устав РАРАН, где Академия была определена как «самоуправляемая научно-творческая организация в форме государственного учреждения».

В состав первого президиума РАРАН вошли председатель Госкомитета по оборонным отраслям промышленности и его первый заместитель, первый заместитель министра обороны, начальник вооружения Вооруженных Сил РФ, ведущие ученые, специализирующиеся в области военно-технических наук.

Сегодня РАРАН является многопрофильной научной организацией, работающей в интересах всех видов Вооруженных Сил РФ, а также МВД, ФСБ и других силовых структур.

В целях сохранения научного наследия русской военной науки, совершенствования оборонного комплекса страны, обобщения опыта и знаний выдающихся ученых и специалистов России, сосре-

доточенных в РАРАН, принято решение об издании трудов членов Академии и сотрудников организаций — ассоциированных членов РАРАН в форме справочной библиотеки разработчика-исследователя вооружения и военной техники. Предлагаемая вниманию читателя книга является десятым томом в рамках этой библиотеки.

Процесс создания новых образцов сложных технических комплексов (СТК) неразрывно связан с их экспериментальной отработкой и испытаниями. Такие работы выполняются практически на всех стадиях жизненного цикла образцов СТК [6].

Для успешного проведения экспериментальной отработки и испытаний СТК необходимо использовать траекторные информационно-измерительные системы (ИИС), представляющие собой комплекс разнотипных средств траекторных измерений, используемых для получения первичной траекторной измерительной информации, а также систему статистической обработки этой информации с целью получения оценок параметров движения испытываемых летательных аппаратов.

Совершенствование траекторных информационно-измерительных систем, предназначенных для обеспечения испытаний сложных технических комплексов, невозможно без дальнейшего развития теории информационно-измерительных систем, разработки математических методов и моделей, позволяющих принимать научно-обоснованные решения при создании новых средств траекторных измерений, а также при проектировании и аттестации траекторных измерительных комплексов.

Целями данной книги являются дальнейшее развитие теории траекторных информационно-измерительных систем, разработка новых методов и математических моделей, позволяющих повысить точность и достоверность траекторных измерений, проводимых при испытаниях сложных технических комплексов.

Основные задачи книги:

дальнейшее совершенствование теории анализа точности траекторных информационно-измерительных систем для обеспечения испытаний СТК, что является основой для разработки комплекса новых методов анализа, обоснования характеристик и построения таких систем;

разработка методов динамической фильтрации для статистической обработки траекторной измерительной информации в режиме реального времени;

разработка методов динамической фильтрации для послеполетной статистической обработки траекторной измерительной информации;

разработка метода расчета начальных значений вектора оцениваемых параметров в уравнениях фильтра Калмана.

Авторы выражают глубокую признательность за помощь в разработке концепции книги, отработке ее материалов и подготовке к изданию Е.В. Гаврилину и А.И. Николаеву. Кроме того, авторы выражают благодарность сотрудникам Научно-исследовательского института Минобороны РФ за полезные советы, в том числе Г.А. Лавринову, Н.Н. Нежинскому, А.Ю. Кравченко и Л.Л. Мацуеву.

Все замечания и предложения по материалам, изложенным в книге, будут с благодарностью приняты ее авторами, изучены и учтены в дальнейшей работе по развитию теории траекторных информационно-измерительных систем, предназначенных для обеспечения испытаний сложных технических комплексов.

Введение

Создание современных технических комплексов представляет собой сложный и многоэтапный процесс. Одним из достаточно трудоемких и длительных является этап испытаний с целью оценки соответствия реальных значений тактико-технических характеристик и показателей эффективности этих комплексов значениям, которые определены заказывающими органами в технических заданиях.

Для всестороннего испытания новых образцов СТК используется комплекс, оснащенный средствами экспериментально-испытательной базы.

Ведущую роль в структуре экспериментально-испытательной базы играет измерительный комплекс (ИК), предназначенный для получения информации о параметрах функционирования испытываемых образцов сложных технических комплексов, от характеристик точности которого зависит достоверность оценки тактико-технических характеристик (ТТХ) испытываемых СТК. Составной частью такого ИК является траекторный измерительный комплекс (ТИК), относящийся к классу информационно-измерительных систем и предназначенный для оценки параметров движения летательных аппаратов (ЛА), входящих в состав испытываемых сложных технических комплексов.

При испытаниях современных сложных технических комплексов выдвигаются повышенные требования к точности оценки параметров движения испытываемых летательных аппаратов или ЛА, используемых для обеспечения испытаний новых или модернизируемых СТК. Точность траекторных измерительных комплексов можно повысить благодаря применению новых высокоточных траекторных измерительных средств, повышению эффективности специального программно-алгоритмического обеспечения статистической обработки измерительной информации, а также за счет использования более совершенных обеспечивающих средств, влияющих на точность измерительного комплекса, к которым, в частности, относятся средства единого времени.

В условиях, когда серийные поставки новых средств траекторных измерений крайне ограничены, для обеспечения требуемой точно-

сти оценки параметров движения ЛА необходимо совершенствовать математические методы статистической обработки траекторной измерительной информации. Кроме того, необходимо использовать адекватные математические модели анализа возможностей траекторных информационно-измерительных систем и обоснования требований к ним. Это позволит принимать научно обоснованные решения по оптимальному применению этих систем при испытаниях сложных технических комплексов.

Основной задачей системы обработки траекторной измерительной информации является оценка текущего значения вектора параметров движения ЛА по первичной траекторной измерительной информации, поступающей от наземных и бортовых средств траекторных измерений, а также получаемой с использованием сигналов спутниковых навигационных систем. Для решения этой задачи используются различные методы статистической обработки траекторной измерительной информации и реализованные на их базе алгоритмы.

Несмотря на большое разнообразие существующих методов обработки траекторной измерительной информации и соответствующих реализованных алгоритмов, в практике испытаний СТК имеют место случаи, когда существующие методы не позволяют решать стоящие задачи с требуемой эффективностью. Бывает необходимо получить высокоточные оценки параметров движения ЛА в условиях наличия временных невязок в привязке такой измерительной информации к единой шкале времени измерительного комплекса. Наличие этих временных невязок обусловлено конечной точностью стандартов частоты и хранителей времени, создающих местные шкалы времени траекторных измерительных комплексов.

Кроме того, представляет интерес задача совместной обработки разнородной траекторной информации, получаемой от наземных измерительных средств и от бортовых измерителей перегрузки, которая, как правило, имеет взаимные временные невязки в привязке к единой шкале времени. Эти невязки обусловлены тем, что информация о перегрузках на борту ЛА передается в вычислительный центр с использованием каналов радиотелеметрии, и поэтому имеет существенный временной сдвиг в привязке к шкале времени измерительного комплекса.

В настоящее время сохраняется актуальность создания удобных для практического применения при испытаниях сложных технических комплексов алгоритмов послеполетной сглаженной обработки траекторных измерений, основанных на методах динамической фильтрации, которые учитывали бы значения вероятностных характеристик всех исследуемых процессов. Такие сгла-

женные оценки до сих пор, как правило, проводятся с использованием подхода, предложенного еще Гауссом. Согласно этому подходу считается, что наиболее вероятным значением оцениваемого параметра является такое, при котором минимизируется сумма квадратов разностей между действительно наблюдаемыми значениями траекторных измерений и вычисляемыми значениями сглаживающих функций.

Проблему учета в алгоритмах обработки траекторной измерительной информации значений вероятностных характеристик всех исследуемых процессов решили такие ученые, как Р. Калман, Н. Винер, Р.Л. Стратонович [36–38, 112]. Большой вклад в развитие теории динамической фильтрации внесли В.С. Пугачев, Б.И. Шахтарин и другие видные отечественные ученые. Однако их работы в основном касались алгоритмов построения условных математических ожиданий законов распределения оцениваемых параметров при условии минимума дисперсии погрешности их оценок на моменты времени поступления измерительной информации, которые не позволяли получать сглаженные оценки интересующих исследователя параметров.

В трудах Дж. Медича [11, 77] по сглаживанию информации, в работах В.С. Пугачева и в фундаментальной монографии Р.Ш. Липцера и А.Н. Ширяева [48] была завершена разработка общей теории сглаженной обработки измерений для линеаризованных измерительных систем. Однако их алгоритмы сложны в реализации и практически не используются в практике испытаний сложных технических комплексов.

Большой интерес представляет идея «встречной» фильтрации, которая была высказана в трудах Р. Мехра, А. Вилски и Дж. Вола [114, 117]. «Встречная» фильтрация основана на использовании прямого и обратного фильтров Калмана, являющихся частным случаем уравнения Р.Л. Стратоновича, которые соответственно фильтруют информацию в прямом и обратном направлениях с получением независимых оценок искомых параметров. Далее эти оценки объединяются специальным образом. К сожалению, эта идея не получила практической реализации при испытаниях сложных технических комплексов.

Дальнейшее развитие алгоритмов динамического сглаживания статистической информации натолкнулось на ряд трудностей.

Во-первых, отсутствовали практически реализуемые алгоритмы идентификации параметров рекуррентных стохастических уравнений, описывающих случайные последовательности измерений и модели полезных сообщений по информации об их вероятностных характеристиках.

Во-вторых, оставалась нерешенной задача определения начальных значений оцениваемого вектора состояния стохастической измерительной системы для случая обработки произвольной выборки траекторных измерений, что нередко приводило к существенным погрешностям оценки параметров движения ЛА. Это обусловлено тем, что при обработке траекторных измерений на произвольно выбранном участке траектории ЛА не имеется априорной информации о начальных значениях вектора оцениваемых параметров движения ЛА в уравнениях фильтра Калмана. При использовании в расчетах произвольного начального значения этого вектора наблюдаются существенные ошибки фильтрации на достаточно больших начальных интервалах обработки траекторных измерений. О существовании данной проблемы неоднократно отмечалось в научно-технической литературе [4, 35, 77, 79], ее наличие приводило к сужению области практического применения алгоритмов динамической фильтрации при обработке статистической траекторной измерительной информации.

Не решена задача научного обоснования требований к точности взаимной синхронизации траекторных и радиотелеметрических измерений. Как правило, такие требования предъявляются эмпирически, исходя из обеспечения разумной достоверности сопоставления во времени этих двух видов измерительной информации, поэтому требования задаются приближенно и научно не обосновываются. Для решения данной задачи необходимо наличие математической модели оценки влияния погрешностей формирования выходной частотно-временной информации средств единого времени на точность оценки параметров движения испытываемых ЛА.

Необходимость создания новых методов и алгоритмов статистической обработки траекторных измерений потребовала дальнейшей разработки новых теоретических положений анализа точности стохастических траекторных информационно-измерительных систем, являющихся основой для разработки комплекса новых методов анализа, обоснования характеристик и построения ИИС, предназначенных для обеспечения испытаний сложных технических комплексов.

Кроме того, для проведения научных исследований по оценке показателей качества траекторных измерительных комплексов, а также для их проектирования необходимо наличие комплексной имитационной математической модели такого измерительного комплекса, включающей в себя ряд частных математических моделей имитации работы разнотипных траекторных измерительных средств, а также модели корреляционного анализа оценок погрешностей вектора параметров движения ЛА.

В настоящей книге сделана попытка решить перечисленные выше научные задачи в интересах дальнейшего развития теории траекторных информационно-измерительных систем, разработки новых методов и математических моделей, позволяющих повысить точность и достоверность траекторных измерений, проводимых при испытаниях сложных технических комплексов.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ И ИХ ТОЧНОСТИ В ИНФОР- МАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИСПЫТАНИЙ СТК

1.1. Анализ основных задач, решаемых ИИС при обеспечении испытаний СТК

Один из ключевых, достаточно трудоемких и длительных этапов создания сложных технических комплексов — их экспериментальная отработка и испытания.

Под испытаниями понимается процесс экспериментального определения (оценивания, контроля) количественных и качественных характеристик СТК при функционировании с учетом воздействия на него различных факторов, а также при моделировании поведения объекта испытаний с учетом воздействия на него таких факторов [99–101].

Для всесторонней отработки вновь разрабатываемых и модернизируемых СТК используются средства обеспечения испытаний, построенные на различных физических принципах и позволяющие проводить оценку их тактико-технических характеристик.

Сложность современных СТК обуславливает высокую трудоемкость и стоимость проведения натурных экспериментов и необходимость создания специальных автоматизированных систем измерения, способных осуществлять функции измерения, сбора, накопления и обработки измерительной информации, а также представления для анализа результатов эксперимента в заданном виде. Отмеченный перечень задач решают информационно-измерительные системы испытательных полигонов, к числу которых можно отнести траекторные измерительные комплексы и средства единого времени, обеспечивающие единство во времени полученных измерений [10].

Важнейшей задачей траекторного измерительного комплекса, состоящего из разнотипных средств

траекторных измерений и системы статистической обработки выдаваемой ими информации, является оценка параметров движения летательного аппарата на интервалах измерения и прогнозирования его последующего движения. Кроме того, важной задачей траекторного измерительного комплекса является управление средствами этого комплекса в процессе проведения измерительного эксперимента.

Возможности траекторного измерительного комплекса определяются его тактико-техническими характеристиками, к числу которых относятся [12, 42, 78, 102]:

- зона действия ТИК;

- класс летательных аппаратов, обслуживаемых комплексом;

- точность определения параметров движения ЛА на заданном участке измерений и точность прогнозирования его последующего движения;

- оперативность работы ТИК;

- пропускная способность, помехозащищенность и надежность ТИК;

- количество и расположение средств траекторных измерений;

- затраты на создание комплекса траекторных измерений и его эксплуатацию.

Решение задач, возлагаемых на траекторный измерительный комплекс, связано с реализацией ряда специфических требований, которые должны быть предъявлены к средствам ТИК, обеспечивающих определение параметров движения ЛА. К числу таких требований относятся [7, 42, 67, 107]:

- высокая точность определения текущих значений координат и составляющих вектора скорости ЛА на всем интервале траекторных измерений;

- широкий диапазон изменения текущих параметров движения ЛА;

- распределение измерительных средств вдоль всей трассы полета с учетом большой протяженности траекторий полета большинства ЛА;

- обязательная регистрация данных и привязка измеренных значений каждого из параметров к шкале времени измерительного комплекса;

- высокая оперативность выдачи результатов обработки данных, например, при коррекции орбиты, маневрах стыковки и посадки космических аппаратов;

- высокая пропускная способность, обеспечивающая наблюдение за всеми ЛА в зоне действия комплекса и определение их параметров движения;

- высокая надежность аппаратуры траекторных измерений, в особенности бортовой, при малом весе и малом потреблении энергии от источников питания;

независимость работы средств измерительного комплекса от метеорологических факторов, условий освещенности и т.д.

Неотъемлемой информационной системой траекторного измерительного комплекса является его система единого времени.

Основными задачами, которые решают существующие системы единого времени ТИК, являются [106]:

формирование местных шкал времени, образцовых сигналов различных частот и кодов времени в соответствии с существующими нормативными документами, что позволяет осуществлять совместную статистическую обработку траекторной измерительной информации, поступающей от территориально разнесенных средств траекторных измерений;

синхронизация местных шкал времени центрального и периферийных приемных пунктов системы единого времени измерительного комплекса по сигналам передающих средств государственной системы единого времени и эталонных частот или по кодограммам спутниковых навигационных систем для обеспечения единства шкал времени, используемых траекторными измерительными комплексами;

хранение местных шкал времени приемных пунктов единого времени ТИК с заданной точностью на определенном интервале времени подготовки и проведения измерительного эксперимента;

выдача потребителям (средствам траекторных измерений) точных шкал времени, образцовых частот и кодов времени в процессе проведения измерительного эксперимента;

контроль и регистрация расхождения положений шкал времени отдельных средств траекторных измерений относительно шкалы времени ТИК;

регистрация моментов времени совершения событий с обеспечением выдачи кодов времени в комплексы обработки траекторной измерительной информации.

Однако используемые при испытаниях СТК устаревшие средства единого времени не всегда обеспечивают выполнение предъявляемых к ним требований, что приводит к дополнительным ошибкам в оценке траекторными измерительными комплексами параметров движения испытываемых ЛА. Устранение этих ошибок является достаточно сложной научно-технической задачей и требует разработки специальных подходов и математических методов.

Сложная экономическая обстановка в нашей стране, ограниченное финансирование привели к деградации отечественных ТИК. Существующие ТИК состоят в основном из морально и физически устаревших средств, которые практически выработали свой техни-

ческий ресурс [7, 9]. Однако с них не снимаются задачи испытаний вновь разрабатываемых и модернизируемых образцов СТК. Это вызывает необходимость совершенствования средств траекторных измерений (ТИ).

Перспективным направлением совершенствования ТИК является широкое внедрение в практику испытаний малогабаритных высокоточных радиотехнических траекторных измерительных средств, функционирующих с использованием информационного поля спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС/GPS [7, 9, 10]. Широкое применение таких измерительных средств позволит получать высокоточные оценки координат и составляющих вектора скорости летательных аппаратов без применения наземного измерительного комплекса, что является особенно актуальным при проведении испытаний образцов СТК на необорудованных испытательных трассах.

Однако, как показывает опыт испытания сложных технических комплексов, обойтись без использования традиционных средств траекторных измерений не представляется возможным. Применение радиолокационных и оптико-электронных средств ТИ необходимо в случаях оценки параметров движения высокодинамичных и маневренных ЛА, оценки параметров промаха испытываемого изделия при стрельбе по мишени, проведения измерений по малогабаритным изделиям, на борту которых невозможно установить дополнительную аппаратуру, а также в ряде других случаев.

Важным направлением совершенствования средств траекторных измерений остается разработка многоканальных мобильных радиолокационных средств ТИ с использованием фазированных антенных решеток, позволяющих проводить измерения по большому числу ЛА в любых климатических и метеорологических условиях. При этом в таких средствах необходимо использовать сложные зондирующие сигналы, современные методы обработки радиолокационной информации, а также системы компенсации активных и пассивных помех [7, 28, 109, 115].

Разработка и широкое внедрение на полигонах высокоточных модульных оптико-электронных средств траекторных измерений с применением лазерных дальномеров остается одним из приоритетных направлений развития средств обеспечения испытаний образцов СТК. Применение на полигонах таких средств позволяет реализовать высокоточный однопунктный метод измерения параметров движения испытываемых ЛА, при котором исключается влияние погрешностей геодезической привязки территориально разнесенных средств измерений, а также ошибок взаимной временной привязки измерительной информации к единой шкале времени [7].

В ходе разработки таких измерительных средств необходимо оценить возможность применения в них наряду с телевизионным и ин-

фракрасным и лазерным каналами также радиолокационного дальномерного канала, работающего в миллиметровом диапазоне волн, что позволит повысить вероятность уверенного сопровождения дальномерным каналом высокодинамичных и маневренных ЛА практически без снижения точности измерений.

Важным направлением является широкое внедрение в практику полигонных испытаний бортовых радиолокационных и оптико-электронных средств измерения параметров взаимного расположения испытываемых летательных аппаратов и мишеней, а также современных средств единого времени, обеспечивающих высокоточную привязку результатов измерений к единой шкале времени измерительного комплекса.

Приоритетным направлением совершенствования отечественной испытательной базы, и в частности ТИК, является комплексная автоматизация процессов экспериментальной отработки и испытаний СТК, предполагающая создание комплексов средств автоматизации (КСА), включающих аппаратные и программные средства сбора, обработки и представления измерительной информации, а также управления измерительным и другими функциональными комплексами экспериментально-испытательной базы [7, 8]. При этом комплексы средств автоматизации должны разрабатываться на основе функциональных модулей, имеющих стандартизованные информационные, метрологические и эксплуатационные характеристики, обеспечивающие системную совместимость всех функциональных составных частей. Кроме того, важнейшим направлением автоматизации является разработка специального программного обеспечения КСА, в котором должны быть реализованы современные математические методы обработки измерительной информации.

Реализация основных направлений совершенствования ТИК позволит создать высокоточные измерительные средства и современные программно-алгоритмические комплексы обработки измерительной информации и повысить эффективность натурных испытаний перспективных образцов СТК.

1.2. Основные сведения о математическом аппарате, необходимом для построения стохастических моделей ИИС для обеспечения испытаний СТК

1.2.1. Основные сведения о стохастических дифференциальных уравнениях

В теории вероятностей [13, 27, 44, 68, 80] для учета случайных факторов в динамике движущихся объектов используется винеров-

ский процесс $W(t)$, у которого плотность совместных распределений задается формулой

$$P(s, W(s), t, W(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{[W(t)-W(s)]^2}{2(t-s)}},$$

где s, t — моменты времени ($t > s$); $W(s), W(t)$ — значения случайного винеровского процесса в моменты времени s и t соответственно.

Из данного определения винеровского процесса вытекают два следующих важных его свойства:

непрерывность винеровского процесса в вероятностном смысле:

$$P\{|W(t) - W(s)| \leq \varepsilon_1\} \geq 1 - \varepsilon_2,$$

для сколь угодно малых величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2$;

недифференцируемость винеровского процесса в вероятностном смысле:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P\left\{\left|\frac{W(t) - W(t + \Delta t)}{\Delta t}\right| > L\right\} = 1,$$

где L — сколь угодно большое число.

Таким образом, винеровский случайный процесс представляет собой последовательность бесконечно малых скачков («броуновское движение») и его производная принимает с вероятностью, равной единице, значения либо $+\infty$, либо $-\infty$.

Кроме того, винеровскому процессу присущи следующие свойства:

$$M(W(t)) = 0; M(W(t) \cdot W^T(t)) = t \text{ при условии } W(0) = 0.$$

На основе данного определения винеровского процесса разработана [13, 44, 68] специальная теория стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) вида

$$dy(t) = \alpha(t)y(t) + \beta(t)dW_t,$$

где $y(t)$ — одномерный случайный процесс; $\alpha(t), \beta(t)$ — коэффициенты, изменяющиеся во времени; W_t — винеровский случайный процесс.

В интегральном виде такое СДУ имеет следующий вид:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \alpha(s)y(s)ds + \int_0^t \beta(s)dW_s, \quad (1.1)$$

где $y(0)$ — начальное значение случайного процесса.

Как видно из выражения (1.1), для учета случайных явлений в уравнении используется стохастический интеграл вида $\int_0^t \beta(s) dW_s$, представляющий собой следующий предел интегральных сумм:

$$\int_0^t \beta(s) dW_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^I \beta(t_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})],$$

где i — шаг интегрирования процесса.

В теории стохастических дифференциальных уравнений [13, 44] доказываются следующие свойства стохастического интеграла:

$$M \left(\int_0^t \beta(s) dW_s \right) = 0; \quad M \left(\int_0^t \beta_1(s) dW_s \int_0^t \beta_2(s) dW_s \right) = M \left(\int_0^t \beta_1(s) \beta_2(s) ds \right).$$

Предложенная конструкция стохастических интегралов позволяет проводить совместный анализ случайных и детерминированных процессов. В частности, она позволяет описывать векторный случайный процесс $\mathbf{y}(t)$ в виде системы уравнений, записанной в матричном виде:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\alpha}(s) \cdot \mathbf{y}(s) ds + \int_0^t \boldsymbol{\beta}(s) \cdot d\mathbf{W}_s, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_N(t)]^T$ — векторный процесс, содержащий N компонент; $\mathbf{W}(t) = [W_1(t) \ W_2(t) \ \dots \ W_N(t)]^T$ — векторный процесс, содержащий N независимых винеровских процессов; $\boldsymbol{\alpha}(t)$, $\boldsymbol{\beta}(t)$ — квадратные матрицы размерности $(N \times N)$.

Для линейных уравнений вида (1.2) теория СДУ показывает [44, 48], что их решение можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}_y(t) \left[\mathbf{y}(0) + \int_0^t \mathbf{F}_y^{-1}(s) \cdot \boldsymbol{\beta}(s) \cdot d\mathbf{W}_s \right], \quad (1.3)$$

где $\mathbf{F}_y(t)$ — фундаментальная матрица, представляющая собой решение матричного уравнения

$$\frac{d\mathbf{F}_y(t)}{dt} = \boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \mathbf{F}_y(t) \quad \text{при} \quad \mathbf{F}_y(0) = \mathbf{I}.$$

При α , независимом от t , решением этого уравнения является матричный экспоненциал.

С использованием свойств стохастического интеграла математическое ожидание случайного процесса $y(t)$ определяется по формуле

$$M(y(t)) = M \left\{ F_y(t) \left[y(0) + \int_0^t F_y^{-1}(s) \cdot \beta(s) \cdot dW_s \right] \right\} = F_y(t) \cdot y(0),$$

а его ковариационная матрица $\gamma_y(t) = M(y(t) \cdot y^T(t))$ оценивается из решения матричного дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d\gamma_y(t)}{dt} = \alpha(t) \cdot \gamma_y(t) + \gamma_y(t) \cdot \alpha^T(t) + \beta(t) \cdot \beta^T(t) \quad (1.4)$$

при $\gamma_y(0) = M(y(0) \cdot y^T(0))$.

Матрица взаимной корреляции определяется по формуле

$$\gamma_y(s-t) = M(y(s) \cdot y^T(t)) = \gamma_y(t) \cdot F(s-t).$$

Необходимо отметить связь стохастических дифференциальных уравнений со спектральной теорией представления случайных процессов.

Спектральная теория представления случайных процессов широко используется в радиотехнике и автоматике, где вместо уравнения (1.2) применяют формальную символическую запись вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha(t) \cdot y(t) + \beta(t) \cdot \dot{W}(t), \quad (1.5)$$

имеющую удобную для инженерных приложений спектральную трактовку как представление результата прохождения производной от винеровского процесса $\dot{W}(t)$ через динамическую систему.

Входящую в (1.5) производную $\dot{W}(t)$ трактуют как белый шум, т.е. случайный процесс с единичной спектральной плотностью на всех частотах от нуля до бесконечности.

Для анализа относительно простых характеристик в радиотехнике такой подход был вполне достаточным, так как там в основном анализируются спектры процессов, проходящих через динамические системы. Но сама по себе запись (1.5) некорректна и требует большой осторожности при использовании. Это связано с тем, что по определению винеровский процесс представляет со-

бой процесс «броуновского движения» в виде постоянных бесконечно малых скачков, а следовательно, производная от винеровского процесса $\dot{\mathbf{W}}(t)$ может принимать значения $+\infty$ или $-\infty$. Следовательно, и запись (1.5) по своему физическому содержанию не имеет смысла и с этой записью нельзя проводить строгих математических преобразований.

Поэтому для анализа точности измерительных систем, где приходится проводить значительные преобразования, в основном используется представление случайных процессов в виде линейного стохастического дифференциального уравнения (1.2), которое абсолютно корректно и удобно для проведения необходимых преобразований.

Приведенные выше определения стохастических дифференциальных уравнений формализуют динамику изменения случайного процесса в прямом направлении времени, что будет далее обозначаться индексом « f ».

В частности, для случайных процессов, описываемых линейными уравнениями с постоянными во времени матричными коэффициентами вида

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\alpha}_f \cdot \mathbf{y}(s) ds + \int_0^t \boldsymbol{\beta}_f \cdot d\mathbf{W}_s^f, \quad (1.6)$$

уравнение (1.4) определяет значение ковариационной матрицы $\boldsymbol{\gamma}_y(t)$ процесса $\mathbf{y}(t)$ в текущий момент времени.

Довольно часто возникает необходимость решать обратную задачу, а именно определять характеристики случайного процесса в предыдущие моменты времени. Для этого предназначены обращенные СДУ вида

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(T) + \int_T^t \boldsymbol{\alpha}_r \cdot \mathbf{y}(s) ds + \int_T^t \boldsymbol{\beta}_r \cdot d\mathbf{W}_s^r; \quad T > t. \quad (1.7)$$

Это уравнение определяет статистическую зависимость текущего значения от последующих значений исследуемого случайного процесса.

Отметим ряд свойств прямых и обращенных СДУ, которые широко используются на практике.

Так, если уравнения (1.6) и (1.7) описывают один и тот же процесс, то между ними существует тесная взаимосвязь в виде следующих формул для матричных коэффициентов [13, 68]:

$$\boldsymbol{\alpha}_r = -\boldsymbol{\alpha}_f + \boldsymbol{\beta}_f \cdot \boldsymbol{\beta}_f^T \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yf(\infty)}^{-1}; \quad \boldsymbol{\beta}_r = \boldsymbol{\beta}_f,$$



где $\gamma_{yf(\infty)}$ является решением матричного алгебраического уравнения Ляпунова

$$\alpha_f \cdot \gamma_{yf} + \gamma_{yf} \cdot \alpha_f^T + \beta_f \cdot \beta_f^T = 0.$$

Кроме того, для уравнения (1.7) фундаментальная и ковариационная матрицы задаются следующими матричными дифференциальными уравнениями, аналогичными соответствующим уравнениям для прямых СДУ:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{yr}(t)}{dt} &= \alpha_r \cdot F_{yr}(t) \text{ при условии } F_{yr}(T) = I; \\ \frac{d\gamma_{yr}(t)}{dt} &= \alpha_r \cdot \gamma_{yr}(t) + \gamma_{yr}(t) \cdot \alpha^T + \beta_r \cdot \beta_r^T. \end{aligned}$$

Использование аппарата обращенных СДУ позволяет синтезировать более эффективные алгоритмы обработки статистической информации о траекторных измерениях, которые могут более полно использовать всю собранную траекторную информацию для оценки параметров движения ЛА с применением методов сглаживания информации.

1.2.2. Процедура объединения детерминированных и стохастических дифференциальных уравнений

Процедура объединения обыкновенных дифференциальных и стохастических дифференциальных уравнений применяется для описания сложных стохастических систем, например модели движения ЛА в пространстве состояний, учитывающей параметры состояния исходной системы, воздействие внешней среды на полет ЛА и заданные параметры управления для этого аппарата.

Например, как показано в работах [72, 85], модель движения ЛА с вектором состояния $\theta(t)$ в интегральном виде может быть записана следующим образом:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t A(s) \cdot \theta(s) ds + \int_0^t B(s) \cdot U(s) ds,$$

а в дифференциальном виде:

$$d\theta(t) / dt = A(t) \cdot \theta(t) + B(t) \cdot U(t), \quad (1.8)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — матричные коэффициенты; $U(t)$ — вектор детерминированного управления.

Для приближения модели движения ЛА к реальности необходимо учесть воздействие внешней среды на ЛА (пассивный полет), которое представляет собой стохастический процесс и при выбранном векторе состояния $\theta(t)$ отображается в выходных сигналах бортовых акселерометров, расположенных в трех взаимно перпендикулярных плоскостях.

Так, нормальные случайные процессы, характеризующие ускорения по осям координат ($\eta_x(t)$, $\eta_y(t)$, $\eta_z(t)$), можно считать стационарными (свободный полет тела), и поэтому они могут быть описаны системой из следующих трех стохастических дифференциальных уравнений в интегральном виде с постоянными во времени коэффициентами $c_x, c_y, c_z, d_x, d_y, d_z$:

$$\begin{aligned}\eta_x(t) &= \eta_x(1) + \int_0^t c_x \eta_x(s) ds + \int_0^t d_x dW_x; \\ \eta_y(t) &= \eta_y(0) + \int_0^t c_y \eta_y(s) ds + \int_0^t d_y dW_y; \\ \eta_z(t) &= \eta_z(0) + \int_0^t c_z \eta_z(s) ds + \int_0^t d_z dW_z.\end{aligned}\quad (1.9)$$

В дифференциальном виде система (1.9) может быть записана стохастическим уравнением вида

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \mathbf{C} \cdot \eta(t) + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{W}_\eta(t). \quad (1.10)$$

Введем расширенные случайные процессы $\Theta(t) = [\theta(t) | \eta(t)]^T$, $d\mathbf{W}(t) = [\mathbf{U}(t) | d\mathbf{W}_\eta(t)]^T$ и объединим уравнения (1.8) и (1.10) следующим образом:

$$d\Theta(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \cdot \Theta(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot d\mathbf{W}(t). \quad (1.11)$$

Введя обозначения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1(t) \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1(t),$$

из выражения (1.11) получим следующие дифференциальные уравнения динамической модели движения ЛА в пространстве



состояний в дифференциальной и интегральной формах соответственно:

$$d\Theta(t) = A_1(t) \cdot \Theta(t) + B_1(t) \cdot dW(t), \quad (1.12)$$

$$\Theta(t) = \Theta(0) + \int_0^t A_1(s) \cdot \Theta(s) ds + \int_0^t B_1(s) \cdot dW_s. \quad (1.13)$$

Более детальная структура динамической модели движения ЛА в пространстве состояний будет рассмотрена ниже.

Таким образом, выражения (1.12) и (1.13) представляют собой модель движения ЛА в пространстве состояний при воздействии на этот аппарат как детерминированного управления, так и случайных возмущений от внешней среды.

1.2.3. Алгоритм формирования матричных коэффициентов стохастических дифференциальных и рекуррентных стохастических уравнений для использования их в алгоритмах динамической фильтрации траекторных измерений

Как правило, с применением территориально разнесенных средств траекторных измерений проводятся измерения непрерывного случайного процесса движения летательного аппарата в дискретные моменты времени, в результате чего измерительными средствами регистрируется массив данных, привязанных к единой шкале времени и представляющих собой многомерный дискретный случайный процесс. Это, с одной стороны, позволяет упростить сбор измерительной информации в центр обработки и уменьшить объем запоминающих устройств, но, с другой стороны, приводит к необходимости применения сглаживающих фильтров (процедур) для полного восстановления во времени оцениваемых параметров движения ЛА.

Многомерный случайный дискретный процесс траекторных измерений $y(k)$ размерностью N для ограниченного участка траектории полета ЛА может быть описан рекуррентным стохастическим уравнением с постоянными матричными коэффициентами следующего вида:

$$y(k) = a \cdot y(k-1) + b \cdot e(k),$$

где a , b — матричные коэффициенты размерностью $(N \times N)$; $e(k)$ — N -мерный процесс белого шума; k — дискретные моменты времени.

Динамическая модель движения ЛА в пространстве состояний и погрешности средств траекторных измерений на отдельных интервалах времени описываются стохастическими дифференциальными

уравнениями с матричными коэффициентами, которые могут быть достаточно просто сформированы по имеющейся априорной информации.

Возможность однозначного описания стационарных случайных процессов с использованием стохастических дифференциальных уравнений и оценки матричных коэффициентов этих уравнений по данным вероятностных характеристик рассматриваемых случайных процессов показана в монографии [48]. Так, например, скалярный стационарный гауссов процесс $y(t)$ с $M[x(t)] = 0$ и ковариационной матрицей $\gamma(t, s) = D \exp\{-\tau(t-s)\}$ имеет дифференциал вида

$$dy(t) = -\tau y(t)dt + (2\tau D)^{1/2} dW_t, \quad (1.14)$$

где τ — величина, обратная времени корреляции стационарного случайного процесса $y(t)$; D — дисперсия этого процесса; W_t — случайный винеровский процесс, не зависящий от процесса $y(t)$.

То есть в скалярном стохастическом дифференциальном уравнении с постоянными коэффициентами α и β , описывающем процесс $y(t)$ и имеющем вид

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \alpha y(s)ds + \int_0^t \beta dW_s,$$

искомые коэффициенты определяются по формулам

$$\alpha = -\frac{1}{T}; \quad \beta = \sigma\sqrt{2|\alpha|},$$

где σ — среднее квадратическое отклонение случайного процесса $y(t)$; T — его время корреляции.

Одним из основных инструментов обработки траекторной измерительной информации являются алгоритмы динамической фильтрации многомерных траекторных измерений с использованием дискретного варианта фильтра Калмана. Как показано в монографиях [48, 105], основой для синтеза таких алгоритмов являются уравнения для частично наблюдаемых дискретных случайных процессов, в которых учитывается вся априорная информация о вероятностных характеристиках исследуемых процессов, описываемых рекуррентными стохастическими уравнениями.

На практике же динамическая модель движения ЛА в пространстве состояний и погрешности средств траекторных измерений на отдельных интервалах времени описываются стохастиче-

скими дифференциальными уравнениями с матричными коэффициентами, которые, как было показано выше, могут быть достаточно просто сформированы по имеющейся априорной информации о вероятностных характеристиках рассматриваемых случайных процессов. В связи с этим и является актуальным формирование матричных коэффициентов рекуррентных стохастических уравнений с использованием имеющихся значений матричных коэффициентов соответствующих стохастических дифференциальных уравнений.

Математически задача формирования матричных коэффициентов рекуррентных стохастических уравнений может быть записана в следующем виде [66].

Пусть N -мерный векторный непрерывный стационарный случайный процесс $\mathbf{y}(t)$ описан стохастическим дифференциальным уравнением с постоянными матричными коэффициентами вида

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{y}(s) ds + \int_0^t \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}_s, \quad (1.15)$$

где $\mathbf{y}(0)$ — начальное значение векторного случайного процесса $\mathbf{y}(t)$; $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ — известные матричные коэффициенты; $\mathbf{W}_t$ — N -мерный векторный винеровский случайный процесс.

Требуется определить матричные коэффициенты $\mathbf{a}(\Delta t)$ и $\mathbf{b}(\Delta t)$ рекуррентного стохастического уравнения вида

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{a}(\Delta t) \cdot \mathbf{y}(k-1) + \mathbf{b}(\Delta t) \cdot \mathbf{e}(k); \quad k = \overline{1, K}, \quad (1.16)$$

описывающего дискретный N -мерный случайный процесс $\mathbf{y}(k)$, получаемый в результате квантования по времени с заданным периодом Δt непрерывного случайного процесса $\mathbf{y}(t)$, задаваемого уравнением (1.15).

В уравнении (1.16) $\mathbf{e}(k)$ — векторный процесс белого шума с независимыми компонентами, которые распределены по нормальному закону с параметрами $N(0,1)$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся теорией случайных процессов [13, 48], согласно которой для случая, если N -мерный стационарный случайный процесс $\mathbf{y}(t)$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением в интегральном виде

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{y}(s) ds + \int_0^t \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}_s,$$

то в соответствии с теоремой 4.10 в работе [48] имеется его единственное решение $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, описываемое формулой

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}_0(t) \left\{ \mathbf{y}(0) + \int_0^t (\mathbf{F}_0(s))^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}_s \right\}, \quad (1.17)$$

где $\mathbf{F}_0(t)$ — фундаментальная матрица размерностью $(N \times N)$, определяемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{F}_0(t)}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{F}_0(t) \quad (1.18)$$

при начальных условиях $\mathbf{F}_0(0) = \mathbf{I}$.

Из выражения (1.17) вытекает, что математическое ожидание процесса $\mathbf{y}(t)$ определяется формулой

$$M[\mathbf{y}(t)] = \mathbf{F}_0(t) \cdot \mathbf{y}(0),$$

где $\mathbf{y}(0)$ — начальное значение процесса или известное его предыдущее значение.

Стохастическая составляющая процесса $\mathbf{y}(t)$ определяется как $\mathbf{V}(t) = \mathbf{y}(t) - M[\mathbf{y}(t)]$. Тогда из выражения (1.17) следует, что

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{F}_0(t) \left\{ \int_0^t [\mathbf{F}_0(s)]^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}_s \right\}.$$

Отсюда ковариационная матрица $\boldsymbol{\gamma}_y(t)$ процесса $\mathbf{y}(t)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_y(t) &= M[\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}^T(t)] = \\ &= \mathbf{F}_0(t) \left\{ M \left[\int_0^t [\mathbf{F}_0(s)]^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}_s \cdot \left(\int_0^t [\mathbf{F}_0(s)]^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}_s \right)^T \right] \right\} \cdot [\mathbf{F}_0(t)]^T. \end{aligned}$$

Поскольку компоненты векторного случайного процесса $\mathbf{W}(t)$ некоррелированы, то используя свойства, что

$$M \left[\int_0^t \mathbf{f}(s) \cdot d\mathbf{W}_s \right] = 0 \text{ и } M \left[\int_0^t \mathbf{f}_1(s) \cdot d\mathbf{W}_s \cdot \int_0^t \mathbf{f}_2(s) \cdot d\mathbf{W}_s \right] = M \left[\int_0^t \mathbf{f}_1(s) \cdot \mathbf{f}_2(s) ds \right],$$

получим



$$M \left[\int_0^t [\mathbf{F}_0(s)]^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}_s \cdot \left(\int_0^t [\mathbf{F}_0(s)]^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}_s \right)^T \right] = \int_0^t [\mathbf{F}_0(s)]^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \cdot \{[\mathbf{F}_0(s)]^{-1}\}^T ds.$$

Следовательно, ковариационная матрица $\boldsymbol{\gamma}_y(t)$ определяется соотношением

$$\boldsymbol{\gamma}_y(t) = \mathbf{F}_0(t) \cdot \left\{ \int_0^t [\mathbf{F}_0(s)]^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \cdot \{[\mathbf{F}_0(s)]^{-1}\}^T ds \right\} \cdot [\mathbf{F}_0(t)]^{-T}. \quad (1.19)$$

Для построения практически реализуемого алгоритма вычисления ковариационной матрицы $\boldsymbol{\gamma}_y(t)$ докажем следующую теорему.

Теорема. Для матричного экспоненциала $\mathbf{E}(t) = e^{t\boldsymbol{\Psi}}$ с блочной матрицей $\boldsymbol{\Psi}$ вида

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\alpha}^T \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

и при блочном представлении матрицы $\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11}(t) & \mathbf{E}_{12}(t) \\ \mathbf{E}_{21}(t) & \mathbf{E}_{22}(t) \end{bmatrix}$ справедливы следующие выражения:

$$\mathbf{E}_{21}(t) = \mathbf{0}, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{E}_{12}(t) \cdot \mathbf{E}_{11}^T(t) = \mathbf{F}_0(t) \cdot \left\{ \int_0^t \mathbf{F}_0^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \cdot [\mathbf{F}_0^{-1}(\tau)]^T d\tau \right\} \cdot \mathbf{F}_0^T(t). \quad (1.22)$$

Доказательство. Воспользуемся представлением матричного экспоненциала $\mathbf{E}(t)$ в виде

$$\mathbf{E}(t) = e^{t\boldsymbol{\Psi}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t\boldsymbol{\Psi})^i}{i!}, \quad (1.23)$$

где $\boldsymbol{\Psi}$ — квадратная матрица; t — скалярный аргумент.

Основываясь на свойствах блочных матриц, можно утверждать, что в выражении (1.23) при операциях умножения на скаляр, возведения в степень и суммирования, в которых принимает участие матрица $\boldsymbol{\Psi}$, имеющая верхнюю треугольную структуру, сохраняется такая же структура промежуточных результатов. Поэтому мат-

ричный экспоненциал $\mathbf{E}(t) = e^{t\psi}$ также будет иметь верхнюю треугольную структуру:

$$e^{t\psi} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_{11}(t) & \mathbf{E}_{12}(t) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E}_{22}(t) \end{array} \right], \quad (1.24)$$

где матрица $\mathbf{E}_{12}(t) = \mathbf{0}$, что и подтверждает справедливость выражения (1.21).

Далее, продифференцировав выражение (1.23), получим, что $d\mathbf{E}(t)/dt = \psi \cdot \mathbf{E}(t)$, и с учетом выражений (1.20) и (1.24) можно записать

$$\left[\begin{array}{c|c} \dot{\mathbf{E}}_{11}(t) & \dot{\mathbf{E}}_{12}(t) \\ \hline \mathbf{0} & \dot{\mathbf{E}}_{22}(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \\ \hline \mathbf{0} & -\boldsymbol{\alpha}^T \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_{11}(t) & \mathbf{E}_{12}(t) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E}_{22}(t) \end{array} \right].$$

Отсюда получим ряд матричных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{11}(t) &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}_{11}(t) \quad \text{при} \quad \mathbf{E}_{11}(0) = \mathbf{I}; \\ \dot{\mathbf{E}}_{22}(t) &= -\boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{E}_{22}(t) \quad \text{при} \quad \mathbf{E}_{22}(0) = \mathbf{I}; \\ \dot{\mathbf{E}}_{12}(t) &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}_{12}(t) + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{E}_{22}(t) \quad \text{при} \quad \mathbf{E}_{12}(0) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

в которой первые два уравнения являются однородными, а последнее — неоднородным. При этом первое уравнение системы по форме совпадает с дифференциальным уравнением (1.18) для фундаментальной матрицы.

Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений решение уравнений (1.25) имеет следующий вид:

$$\mathbf{E}_{11}(t) = e^{t\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{F}_0(t) = \mathbf{a}(t), \quad (1.26)$$

$$\mathbf{E}_{22}(t) = [\mathbf{F}_0^{-1}(t)]^T = [\mathbf{E}_{11}^{-1}(t)]^T,$$

$$\mathbf{E}_{12}(t) = \mathbf{F}_0(t) \cdot \int_0^t \mathbf{F}_0^{-1}(s) \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{E}_{22}(s) ds. \quad (1.27)$$

Умножив выражение (1.27) справа на матрицу $\mathbf{E}_{11}^T(t)$, получим второе утверждение теоремы в виде

$$\mathbf{E}_{12}(t) \cdot \mathbf{E}_{11}^T(t) = \mathbf{F}_0(t) \cdot \left\{ \int_0^t \mathbf{F}_0^{-1}(s) \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \cdot [\mathbf{F}_0^{-1}(s)]^T ds \right\} \cdot \mathbf{F}_0^T(t) = \boldsymbol{\gamma}_y(t).$$

Таким образом, теорема доказана.



Тогда с учетом формулы (1.19) для интервала времени Δt можно записать выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{12}(\Delta t) \cdot \mathbf{E}_{11}^T(\Delta t) &= \mathbf{F}_0(\Delta t) \cdot \left\{ \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_0^{-1}(\Delta s) \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \cdot [\mathbf{F}_0^{-1}(\Delta s)]^T ds \right\} \cdot \mathbf{F}_0^T(\Delta t) = \\ &= \boldsymbol{\gamma}_y(\Delta t) = \mathbf{b}(\Delta t) \cdot \mathbf{b}^T(\Delta t). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Таким образом, на основании выражений (1.26) и (1.28) искомая матрица $\mathbf{a}(\Delta t)$ и группа матриц $\mathbf{b}(\Delta t) \cdot \mathbf{b}^T(\Delta t)$ определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{a}(\Delta t) = \mathbf{E}_{11}(\Delta t), \quad (1.29)$$

$$\mathbf{b}(\Delta t) \cdot \mathbf{b}^T(\Delta t) = \mathbf{E}_{12}(\Delta t) \cdot \mathbf{E}_{11}^T(\Delta t). \quad (1.30)$$

Верхняя треугольная структура матрицы $\boldsymbol{\Psi}$ позволяет упростить вычислительный процесс оценки матриц $\mathbf{a}(\Delta t)$ и $\mathbf{b}(\Delta t)$ по формулам (1.29) и (1.30).

Так, предположим, что в выражении для матричного экспоненциала (1.23) компонента $(t\boldsymbol{\Psi})^i$ имеет верхнюю треугольную структуру вида

$$(t\boldsymbol{\Psi})^i = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Psi}_{11}(i) & \boldsymbol{\Psi}_{12}(i) \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}_{22}(i) \end{array} \right]$$

и, используя свойство, что $(t\boldsymbol{\Psi})^i = t\boldsymbol{\Psi}(t\boldsymbol{\Psi})^{i-1}$ [66, 70], для i -й итерации вычислительного процесса можно записать

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Psi}_{11}(i) & \boldsymbol{\Psi}_{12}(i) \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}_{22}(i) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} t\boldsymbol{\alpha} & t\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \\ \hline \mathbf{0} & -t\boldsymbol{\alpha}^T \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Psi}_{11}(i-1) & \boldsymbol{\Psi}_{12}(i-1) \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}_{22}(i-1) \end{array} \right].$$

Отсюда после ряда преобразований получим ряд уравнений [66]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_{11}(i) &= t\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{11}(i-1); \\ \boldsymbol{\Psi}_{12}(i) &= t\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{12}(i-1) + t\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T (-1)^i [\boldsymbol{\Psi}_{11}(i-1)]^T; \\ \boldsymbol{\Psi}_{22}(i) &= (-1)^i [\boldsymbol{\Psi}_{11}(i-1)]^T \end{aligned} \quad (1.31)$$

с начальными условиями $\boldsymbol{\Psi}_{11}(i=0) = t_1\boldsymbol{\alpha}$; $\boldsymbol{\Psi}_{12}(i=0) = t_1\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T$; $\boldsymbol{\Psi}_{22}(i=0) = -t_1\boldsymbol{\alpha}^T$.

Непосредственное вычисление матричной экспоненты $e^{t\Psi}$ по формуле (1.23) при ограниченном числе слагаемых имеет приемлемую точность только для достаточно малых интервалов времени t_1 .

Так, на основании свойства неравенства Коши является справедливым, что

$$\left\| \frac{(t\Psi)^i}{i!} \right\|_E \leq \frac{\|t\Psi\|_E^i}{i!}.$$

Поэтому при $\|t\Psi\|_E \leq 0,5$ для вычисления матричного экспоненциала (1.23) с достаточной точностью требуется не более 10...12 членов ряда.

В связи с этим при заданном периоде повторения Δt исследуемого дискретного случайного процесса выбирают начальный интервал дискретизации t_1 путем деления M раз на два интервала времени Δt ($t_1 = \Delta t / 2^M$) до выполнения условия

$$\|t_1\Psi\|_E \leq 0,5. \quad (1.32)$$

Для восстановления результатов расчета матричного экспоненциала на искомый интервал дискретизации Δt используется рекуррентный алгоритм удвоения интервала дискретизации с t_1 до Δt , построенный на основе свойства матричного экспоненциала, что $e^{2\Psi} = e^{\Psi} \cdot e^{\Psi}$ [21, 70], из которого следует, что

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_{11}(2t_1) & \mathbf{E}_{12}(2t_1) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E}_{22}(2t_1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_{11}(t_1) \cdot \mathbf{E}_{11}(t_1) & \mathbf{E}_{11}(t_1) \cdot \mathbf{E}_{12}(t_1) + \mathbf{E}_{12}(t_1) \cdot \mathbf{E}_{22}(t_1) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E}_{22}(t_1) \cdot \mathbf{E}_{22}(t_1) \end{array} \right].$$

Отсюда получаем следующие выражения:

$$\mathbf{a}(2t_1) = \mathbf{E}_{11}(2t_1) = \mathbf{E}_{11}(t_1) \cdot \mathbf{E}_{11}(t_1), \quad (1.33)$$

$$\mathbf{E}_{12}(2t_1) = \mathbf{E}_{11}(t_1) \cdot \mathbf{E}_{12}(t_1) + \mathbf{E}_{12}(t_1) \cdot \mathbf{E}_{22}(t_1). \quad (1.34)$$

С учетом полученных выше соотношений $\mathbf{E}_{22}(t) = [\mathbf{E}_{11}^{-1}(t)]^T$; $\mathbf{E}_{12}(t) = [\mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{b}^T(t)] \cdot [\mathbf{E}_{11}^T(t)]^{-1}$ и $\mathbf{E}_{11}(2t) = \mathbf{E}_{11}(t) \cdot \mathbf{E}_{11}(t)$ выражение (1.34) примет вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}(2t_1) \cdot \mathbf{b}^T(2t_1)] \cdot [\mathbf{E}_{11}^T(t_1)]^{-1} \cdot [\mathbf{E}_{11}^T(t_1)]^{-1} &= \mathbf{E}_{11}(t_1) \cdot [\mathbf{b}(t_1) \cdot \mathbf{b}^T(t_1)] \cdot [\mathbf{E}_{11}^T(t_1)]^{-1} + \\ &+ [\mathbf{b}(t_1) \cdot \mathbf{b}^T(t_1)] \cdot [\mathbf{E}_{11}^T(t_1)]^{-1} \cdot [\mathbf{E}_{11}^{-1}(t_1)]^T. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Умножив левую и правую части выражения (1.35) справа два раза на матрицу $\mathbf{E}_{11}^T(t_1)$, получим формулу для вычисления $\gamma_y(2t_1)$

$$\gamma_y(2t_1) = \mathbf{b}(2t_1) \cdot \mathbf{b}^T(2t_1) = \mathbf{E}_{11}(t_1) \cdot \mathbf{b}(t_1) \cdot \mathbf{b}^T(t_1) \cdot \mathbf{E}_{11}^T(t_1) + \mathbf{b}(t_1) \cdot \mathbf{b}^T(t_1). \quad (1.36)$$

Таким образом, вычисление коэффициентов $\mathbf{a}(\Delta t)$ и $\mathbf{b}(\Delta t)$ для интервала дискретизации Δt проводится итерационно согласно формулам (1.33) и (1.36).

В уравнениях для частично наблюдаемых процессов дискретного фильтра Калмана используются только произведения матриц $\mathbf{b}(\Delta t) \cdot \mathbf{b}^T(\Delta t)$, и поэтому, как правило, не требуется отыскивать значение матрицы $\mathbf{b}(\Delta t)$. Если же требуется вычислить значение этой матрицы, то это можно сделать по имеющемуся произведению матриц $\mathbf{b}(\Delta t) \cdot \mathbf{b}^T(\Delta t)$ с использованием алгоритма Халецкого.

Кроме того, в случае необходимости нахождения стационарного решения уравнения Ляпунова вида

$$\dot{\gamma}_y(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \gamma_y(t) + \gamma_y(t) \cdot \mathbf{a}^T(t) + \mathbf{\beta}(t) \cdot \mathbf{\beta}^T(t) \text{ при } \gamma_y(0) = \mathbf{0} \quad (1.37)$$

необходимо продолжать итерационную процедуру (1.36) до того момента, когда ковариационная матрица $\gamma_y(t_i) = \mathbf{b}(t_i) \cdot \mathbf{b}^T(t_i)$ практически перестанет изменяться, т.е.

$$\|\gamma_y(t_{i+1}) - \gamma_y(t_i)\|_E \leq \varepsilon. \quad (1.38)$$

Обобщенный алгоритм формирования матричных коэффициентов рекуррентных стохастических уравнений в алгоритмах динамической фильтрации траекторных измерений по априорной информации о вероятностных характеристиках исследуемых непрерывных случайных процессов приведен на рис. 1.1.

В блоке 1 рассматриваемого алгоритма формируется матрица Ψ , описываемая выражением (1.20), из коэффициентов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{\beta}$ стохастического дифференциального уравнения (1.15).

В блоке 2 рассчитывается начальный период дискретизации t_1 из условия $\|t_1 \Psi\|_E < 0,5$.

Далее, в блоках 3...6, проводится итерационный расчет матриц $\Psi_{11}(i)$, $\Psi_{12}(i)$ и $\Psi_{22}(i)$ по формулам (1.31) и окончательно формируется матрица Ψ для интервала времени t_1 .

В блоке 7 алгоритма проводится расчет матричного экспоненциала по формуле (1.23) для интервала времени t_1 , а в блоке 8 осуществляется вычисление матриц $\mathbf{a}(t_1)$ и $\mathbf{b}(t_1) \cdot \mathbf{b}^T(t_1)$ для интервала времени t_1 по формулам (1.29) и (1.30).

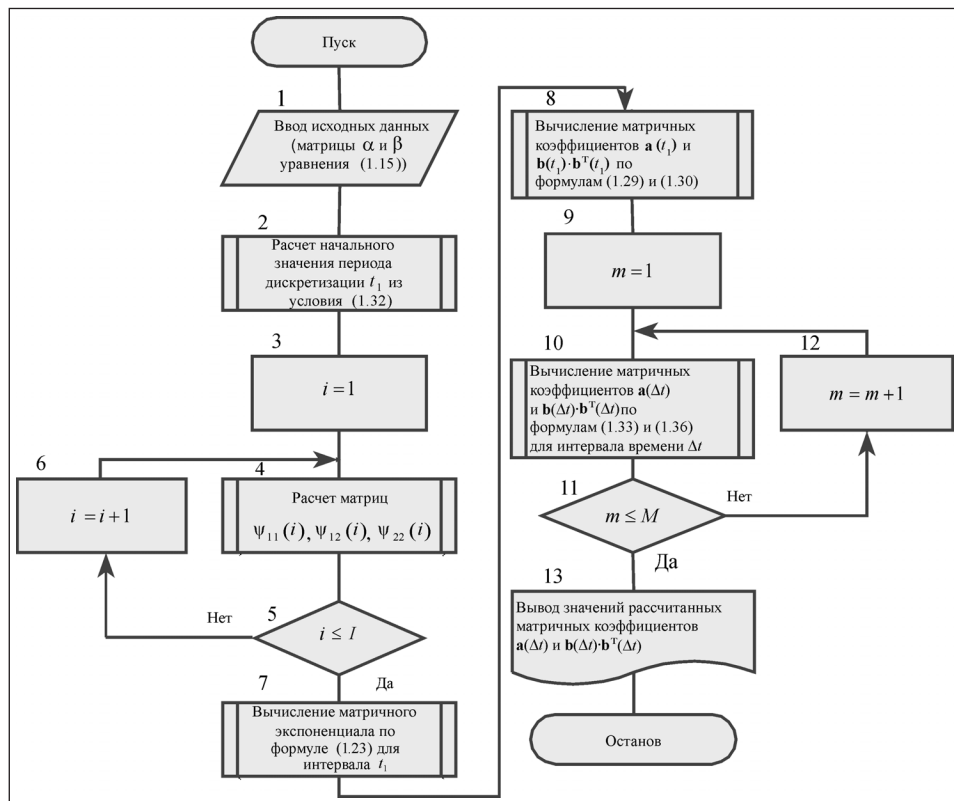


Рис. 1.1. Алгоритм формирования матричных коэффициентов рекуррентных стохастических уравнений

Далее, в блоках 9...12, проводится расчет элементов матриц $\mathbf{a}(\Delta t)$ и $\mathbf{b}(\Delta t) \cdot \mathbf{b}^T(\Delta t)$ для интервала дискретизации, равного Δt , по формулам (1.33) и (1.36).

Вычислительный процесс завершается работой блока 13, который обеспечивает вывод на печать результатов расчета матричного коэффициента $\mathbf{a}(\Delta t)$ и произведения коэффициентов $\mathbf{b}(\Delta t) \cdot \mathbf{b}^T(\Delta t)$ для рекуррентного уравнения вида (1.16).

В случае необходимости нахождения стационарного решения дифференциального уравнения Ляпунова вида (1.37) необходимо продолжать итерационную процедуру (1.36) до того момента, когда выполнится условие (1.38).

Апробация алгоритма была проведена на примере моделирования измерительного эксперимента с участием пяти измерительных средств, информация от которых поступала с временным интервалом, равным 0,5 с. При проведении эксперимента сделано предполо-

ложение, что в каждом измерительном канале полезный сигнал $x(t)$ аддитивно искажен двумя типами помех: медленноменяющейся $\delta_i(t)$ и быстроменяющейся $\eta_i(t)$, где $i = \overline{1, 5}$.

Тогда наблюдаемые компоненты $\xi_i(t)$ могут быть записаны в виде

$$\xi_i(t) = x(t) + \delta_i(t) + \eta_i(t); \quad i = \overline{1, 5}.$$

Корреляционные функции рассматриваемых типов помех имеют следующий вид:

$$K_{\delta i}(t) = \sigma_{\delta i}^2 e^{-\frac{t}{|T_{\delta i}|}}; \quad K_{\eta i}(t) = \sigma_{\eta i}^2 e^{-\frac{t}{|T_{\eta i}|}},$$

где $\sigma_{\delta i}^2, \sigma_{\eta i}^2$ — дисперсии медленноменяющейся и быстроменяющейся составляющих помехи соответственно; $T_{\delta i}, T_{\eta i}$ — времена корреляции медленноменяющейся и быстроменяющейся составляющих помехи соответственно.

Предполагаем, что стохастические дифференциальные уравнения, описывающие такие типы помех, являются скалярными и имеют вид

$$d\delta_i(t) = -\alpha_{\delta i} \delta_i(t) + \beta_{\delta i} dW_{\delta i}; \quad d\eta_i(t) = -\alpha_{\eta i} \eta_i(t) + \beta_{\eta i} dW_{\eta i}; \quad i = \overline{1, 5}.$$

Коэффициенты этих уравнений в соответствии с выражением (1.14) рассчитываются с использованием данных о средних квадратических погрешностях $\sigma_{\delta i}, \sigma_{\eta i}$ и времен корреляции $T_{\delta i}, T_{\eta i}$ составляющих помехи по следующим формулам:

$$\alpha_{\delta i} = -\frac{1}{T_{\delta i}}; \quad \alpha_{\eta i} = -\frac{1}{T_{\eta i}}; \quad \beta_{\delta i} = \sigma_{\delta i} \sqrt{2|\alpha_{\delta i}|}; \quad \beta_{\eta i} = \sigma_{\eta i} \sqrt{2|\alpha_{\eta i}|}.$$

Относительно полезного сигнала $x(t)$ сделано предположение, что он содержит сумму двух случайных процессов: $x_{ka1}(t), x_{ka2}(t)$, имеющих корреляционные функции в виде затухающей синусоиды, и одного медленноменяющегося процесса $x_{sa}(t)$, т.е.

$$x(t) = x_{ka1}(t) + x_{ka2}(t) + x_{sa}(t).$$

Корреляционные функции компонент сигнала $x(t)$ соответственно имеют следующий вид:

$$K_{ka1}(t) = \sigma_{ka1}^2 e^{-r_{ka1}t} \sin \omega_{ka1}t; \quad K_{ka2}(t) = \sigma_{ka2}^2 e^{-r_{ka2}t} \sin \omega_{ka2}t;$$

$$K_{sa}(t) = \sigma_{sa}^2 e^{-\frac{t}{|T_{sa}|}}, \quad (1.39)$$

где σ_{ka1}^2 , σ_{ka2}^2 , σ_{sa}^2 — дисперсии двух гармонических колебаний и медленноменяющегося процесса соответственно; ω_{ka1} , ω_{ka2} — циклические частоты гармонических колебаний $x_{ka1}(t)$ и $x_{ka2}(t)$ соответственно; r_{ka1} , r_{ka2} — декременты затухания гармонических колебаний; T_{sa} — время корреляции медленноменяющегося процесса $x_{sa}(t)$.

Из анализа корреляционных функций (1.39) следует, что СДУ компонент процесса $x(t)$ имеют вид

$$\begin{bmatrix} dx_{kaj}(t) \\ dv_{kaj}(t) \end{bmatrix} = \alpha_{kj} \begin{bmatrix} x_{kaj}(t) \\ v_{kaj}(t) \end{bmatrix} + \beta_{kj} \begin{bmatrix} dW_{kaj_1} \\ dW_{kaj_2} \end{bmatrix}; \quad dx_{sa}(t) = -\alpha_{sa} x_{sa}(t) + \beta_{sa} dW_{sa},$$

$$\text{где } \alpha_{kj} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(r_{kj}^2 + \omega_{kj}^2) & -2r_{kj} \end{bmatrix}; \quad \beta_{kj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{kj} \sqrt{4(r_{kj}^2 + \omega_{kj}^2)r_{kj}} \end{bmatrix}; \quad j = \overline{1, 2};$$

$$\alpha_{sa} = -\frac{1}{T_{sa}}; \quad \beta_{sa} = \sigma_{sa} \sqrt{2|\alpha_{sa}|}.$$

Введем расширенный вектор состояния системы $\mathbf{Z}(t)$ с размерностью, равной десяти, с компонентами

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_{ka1}(t); \quad z_2(t) = v_{ka1}(t); \quad z_3(t) = x_{ka2}(t); \\ z_4(t) &= v_{ka2}(t); \quad z_5(t) = x_{sa}(t); \quad z_{5+i}(t) = \delta_i(t), \quad i = \overline{1, 5}, \end{aligned}$$

а также расширенный винеровский случайный процесс $\mathbf{W}_z = [W_{zi}]_{i=\overline{1, 10}}$ со следующими компонентами:

$$\begin{aligned} W_{z1} &= W_{ka1}; \quad W_{z2} = W_{ka1v}; \quad W_{z3} = W_{ka2}; \\ W_{z4} &= W_{ka2v}; \quad W_{z5} = W_{sa}; \quad W_{zl} = W_l; \quad l = \overline{1, 5}. \end{aligned}$$

Кроме того, введем векторные процессы

$$\xi(t) = [\xi_i(t)]_{i=\overline{1, 5}}; \quad \eta(t) = [\eta_i(t)]_{i=\overline{1, 5}}; \quad \mathbf{W}_\eta = [W_{\eta i}]_{i=\overline{1, 5}}.$$

Тогда с учетом введенных обозначений матричная форма описания измерительного эксперимента принимает следующий вид:

$$d\mathbf{Z}(t) = \mathbf{A}_z \cdot \mathbf{Z}(t) + \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{W}_z, \quad (1.40)$$

$$\xi(t) = \mathbf{A}_\xi \cdot \mathbf{Z}(t) + \eta(t),$$

$$d\eta(t) = \mathbf{A}_\eta \cdot \eta(t) + \mathbf{B}_\eta \cdot d\mathbf{W}_\eta, \quad (1.41)$$

9.8562e-01	9.9450e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
-2.8679e-02	9.8423e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	9.8205e-01	9.9331e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	-3.5793e-02	9.8065e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	9.9900e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	9.9900e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	9.9900e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	9.9900e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	9.9900e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	9.9900e-01	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	9.9900e-01	0.0000e+00

Рис. 1.4. Экранная форма матричного коэффициента a_z рекуррентного стохастического уравнения (1.41)

6.6831e-02	-9.9826e-02	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
-9.9826e-02	1.9966e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	8.3387e-02	-1.2444e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	-1.2444e-01	2.4888e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	7.1928e-02	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	7.1928e-02	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	7.1928e-02	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	7.1928e-02	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	7.1928e-02	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	7.1928e-02	0.0000e+00	0.0000e+00
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	7.1928e-02	0.0000e+00

Рис. 1.5. Экранная форма группы матриц $b_z \cdot b_z^T$

ческих уравнений в алгоритмах динамической фильтрации траекторных измерений по априорной информации о вероятностных характеристиках исследуемых непрерывных случайных процессов.

1.3. Построение стохастической модели траекторной ИИС

Траекторный измерительный комплекс является составной частью экспериментально-испытательной базы испытательного комплекса и предназначен для получения оценок параметров движения ЛА, а также параметров орбит космических аппаратов.

ТИК используется для решения следующих двух основных задач:

регистрации информации о поведении исследуемого объекта на заданном участке траектории;

восстановления по собранным измерениям траекторий полета ЛА с оценкой необходимых испытателю параметров.

Траекторный измерительный комплекс является классическим примером нелинейной динамической системы. В состав такой системы входят источники первичных траекторных измерений (наземные и бортовые средства ТИ) и подсистема статистической обработки траекторной измерительной информации.

Систему уравнений (1.43) можно переписать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U}(t), \quad (1.44)$$

где коэффициент $\beta_n = 1/\alpha_n$.

Система уравнений (1.44) описывает одноканальную динамическую систему с вектором состояния $\mathbf{X}(t) = [x_1(t) x_2(t) \dots x_n(t)]^T$.

Уравнение динамической одноканальной системы в пространстве состояний (1.44) может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(t), \quad (1.45)$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — матрицы, структура которых показана в выражении (1.44).

Поскольку функция возмущений или управления $\mathbf{U}(t)$ может иметь скачки, то уравнение динамической одноканальной системы (1.45) более корректно записывать в виде уравнения дифференциалов

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t)dt + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{U}. \quad (1.46)$$

Тогда интегральная форма уравнения (1.46) примет следующий вид:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(0) + \int_0^t \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(s)ds + \int_0^t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{U}_s, \quad (1.47)$$

где $\mathbf{U}_s$ — вектор возмущающего воздействия или управления; $\mathbf{X}(0)$ — начальное значение непрерывного процесса $\mathbf{X}(t)$.

В такой форме описания стохастической динамической системы совокупность компонент вектора состояния $[x_1(t) x_2(t) \dots x_n(t)]^T$ задает фазовое пространство системы.

С использованием рассмотренных динамических моделей в пространстве состояний могут быть построены модели движения ЛА, которые учитывают влияние внешней среды или управляющих импульсов на летательный аппарат, что позволяет строить в простран-

стве состояний модели движения как баллистических, так и аэродинамических объектов.

Так, если через $\delta\ddot{x}(t)$ обозначить погрешность оценки ускорения по координате X движущегося ЛА, обусловленную воздействием внешней среды, то для погрешности оценки ускорения ЛА для стационарного случая может быть записано следующее уравнение:

$$\delta\ddot{x}(t) = \delta\ddot{x}(0) + \int_0^t -\frac{1}{T_{\delta\ddot{x}}} \delta\ddot{x}(s) ds + \int_0^t \sqrt{\frac{2\sigma_{\delta\ddot{x}}^2}{T_{\delta\ddot{x}}^2}} dW_s,$$

где $\sigma_{\delta\ddot{x}}^2$, $T_{\delta\ddot{x}}$ — дисперсия и время корреляции погрешности оценки ускорения по координате X , обусловленной воздействием внешней среды на ЛА; W_s — случайный процесс винеровского типа.

Тогда уравнение, описывающее движение ЛА в пространстве только по координате X при учете случайных воздействий на него внешней среды, запишется в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \delta\ddot{x}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \\ \ddot{x}(0) \\ \delta\ddot{x}(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \\ \ddot{x}(s) \\ \delta\ddot{x}(s) \end{bmatrix} ds + \\ &+ \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2\sigma_{\delta\ddot{x}}^2}{T_{\delta\ddot{x}}^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ dW_s \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — постоянные коэффициенты.

Дифференциальные уравнения типа (1.48) позволяют описывать движение баллистических объектов с учетом воздействия на них внешней среды.

С использованием СДУ можно описывать также движение в пространстве аэродинамических объектов с учетом воздействия на них не только случайных возмущений внешней среды, но и управляющих импульсов силы. Так, уравнение, описывающее движение ЛА в

пространстве только по координате X при учете воздействия на него случайных возмущений внешней среды и управляющего импульса силы $U(t)$, запишется в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \delta\ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \\ \ddot{x}(0) \\ \delta\ddot{x}(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{\ddot{x}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \\ \ddot{x}(s) \\ U(s) \\ \delta\ddot{x}(s) \end{bmatrix} ds +$$

$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2\sigma_{\ddot{x}}^2}{T_{\ddot{x}}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ dW_s \end{bmatrix}.$$

Обычно в моделях анализа эффективности ТИК в качестве компонент вектора состояния выбирается вектор вида

$$\theta^T = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z}], \quad (1.49)$$

где x, y, z — координаты центра масс объекта; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — проекции вектора скорости объекта на оси стартовой системы координат; $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ — проекции вектора ускорения объекта на оси стартовой системы координат.

Тогда многоканальная динамическая модель движения ЛА в интегральном виде для ограниченного участка траектории полета ЛА запишется как выражение

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \tilde{\mathbf{A}} \cdot \theta(s) ds + \int_0^t \tilde{\mathbf{B}} \cdot d\tilde{\mathbf{U}}_s, \quad (1.50)$$

а в дифференциальном виде система (1.50) будет иметь вид

$$d\theta(t) = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \theta(t) dt + \tilde{\mathbf{B}} \cdot d\tilde{\mathbf{U}}, \quad (1.51)$$

где $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ — матричные коэффициенты соответствующей размерности.

Системы уравнений (1.50) и (1.51) являются базовыми описаниями динамических моделей движения ЛА в пространстве состояний



и широко используются в моделях ИИС, а также в алгоритмах оценки точности таких систем.

В общем случае для непрерывного времени модель движения ЛА в пространстве состояний (ненаблюдаемый случайный процесс) может быть описана следующим стохастическим дифференциальным уравнением [77, 85]:

$$d\Theta(t) = A(t) \cdot \Theta(t) + B(t) \cdot dW, \quad (1.52)$$

где $\Theta(t)$ — расширенный вектор состояния динамической системы, в состав которого могут входить вектор оцениваемых параметров движения ЛА $\theta(t)$, вектор управления и другие компоненты; $A(t)$, $B(t)$ — матрицы заданной размерности; $W(t)$ — векторный винеровский случайный процесс соответствующей размерности.

Информация от N источников первичных траекторных измерений может быть формализована математической моделью случайного процесса, связанного со случайным процессом, характеризующим состояние летательного аппарата в пространстве. Такой N -мерный векторный случайный процесс называется наблюдаемым процессом, который для траекторных измерительных средств непрерывного действия будем обозначать как $\xi(t)$, а для средств траекторных измерений дискретного действия — как $\xi(k)$.

Очевидно, что наблюдения $\xi(t)$ являются функциями от времени и их можно рассматривать как процесс, связанный с исследуемым процессом движения рассматриваемого объекта некоторым функционалом. Для траекторных ИИС этот функционал получил название функционала сообщения.

Модель N -мерного наблюдаемого случайного процесса $\xi(t)$ (функционала сообщения) может быть записана в следующем виде:

$$\xi(t) = \psi(\Theta(t)) + \eta(t), \quad (1.53)$$

где $\psi(t)$ — многомерная нелинейная функция связи между оцениваемыми параметрами движения ЛА и наблюдаемым процессом траекторных измерений; $\eta(t)$ — векторный стационарный случайный процесс погрешностей траекторных измерений, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$d\eta(t) = C \cdot \eta(t)dt + D \cdot dW_{\eta}. \quad (1.54)$$

В выражении (1.54) C и D представляют собой матричные коэффициенты размерности $(N \times N)$.

Наблюдаемый векторный случайный процесс измерений $\xi(t)$ может быть достаточно легко линеаризован исходя из того, что измерения проводятся по объектам, находящимся на относительно больших расстояниях. Это позволяет применять в уравнениях наблюдения (1.53) разложение функции $\psi(\Theta(t))$ в ряд Тейлора, содержащий только два первых слагаемых, и получать уравнение наблюдений в линеаризованном виде

$$\xi(t) = \xi(0) + \mathbf{H}(t) \cdot \Theta(t) + \eta(t), \quad (1.55)$$

где $\xi(0)$ — начальное значение случайного процесса $\xi(t)$; $\mathbf{H}(t)$ — матрица частных производных функции $\psi(\Theta(t))$ по компонентам вектора параметров движения ЛА в конкретные моменты времени измерения. Например, матрица $\mathbf{H}(t)$ для фиксированного момента времени t_1 для случая оценки наклонной дальности до ЛА D при оцениваемом векторе параметров движения $\theta^T = [x \ y \ z]$ будет иметь вид

$$\mathbf{H}(t_1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial D(t_1)}{\partial x} & \frac{\partial D(t_1)}{\partial y} & \frac{\partial D(t_1)}{\partial z} \end{bmatrix},$$

где x, y, z — координаты ЛА в полигонной системе координат.

В условиях допустимости линеаризации процесса $\xi(t)$ можно говорить, что структурная схема устройства формирования средствами траекторных измерений сообщения о летательном аппарате с известными параметрами движения, построенная в соответствии с выражениями (1.52) и (1.56), имеет вид, представленный на рис. 1.6.

Данная схема содержит сумматоры S_1 и S_2 , матричные перемножители A , B и H , а также интегратор I_1 .

Чтобы иметь возможность изучать функционирование подсистемы статистической обработки траекторной измерительной инфор-

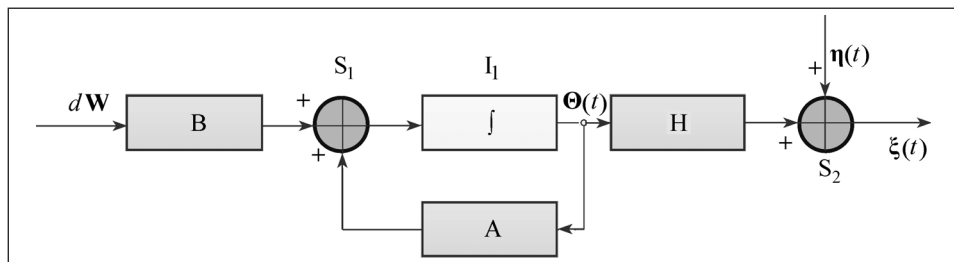


Рис. 1.6. Схема формирования сообщения средствами траекторных измерений по наблюдаемому ЛА

мации как сложной стохастической системы, являющейся составной частью траекторной ИИС, необходимо построить ее математическую модель. Для этого прежде всего требуется определить совокупность величин, которые могут служить количественными характеристиками функционирования такой подсистемы статистической обработки, а затем установить соотношения между этими величинами.

Кроме входных и выходных сигналов при построении математической модели многоканальной подсистемы статистической обработки траекторной измерительной информации приходится вводить еще ряд вспомогательных величин, в числе которых могут быть величины, характеризующие воздействие различных частей подсистемы друг на друга. Все эти величины, характеризующие состояние подсистемы в каждый момент времени, называются переменными состояния подсистемы или ее вектором состояния.

Множество всех возможных входных сигналов подсистемы статистической обработки траекторной измерительной информации будем называть ее пространством входных сигналов, множество всех возможных выходных сигналов системы — ее пространством выходных сигналов, а множество всех возможных векторов состояния — ее пространством состояний.

Обозначим через $\Omega(t)$ расширенный P -мерный вектор состояния рассматриваемой подсистемы, в состав которого входит и оцениваемый вектор параметров движения ЛА $\theta(t)$, через $\xi(t) = [\xi_1(t) \xi_2(t) \dots \xi_M(t)]$ — M -мерный векторный входной сигнал, а через $\Theta(t)$ — N -мерный векторный выходной сигнал подсистемы статистической обработки траекторной измерительной информации, в состав которого также входит оцениваемый вектор параметров движения ЛА $\theta(t)$. Тогда уравнения, описывающие поведение системы, в общем случае запишутся в виде [73]

$$\frac{d\Omega}{dt} = f(\Omega, \xi, t); \quad \hat{\Theta} = g(\Omega, t),$$

где f — P -мерная векторная функция векторов Ω , ξ и времени t ; g — M -мерная векторная функция вектора Ω и времени t ; $\hat{\Theta}$ — оценка N -мерного векторного выходного сигнала подсистемы статистической обработки траекторной измерительной информации.

Совокупность случайных процессов $\Theta(t)$ и $\xi(t)$, описывающих весь измерительный эксперимент, называется частично наблюдаемым процессом.

В сформулированных выше условиях задача восстановления траектории полета летательного аппарата по полученным в ходе

натурного эксперимента траекторным измерениям заключается в следующем.

Для математической модели ненаблюдаемого процесса $d\Theta(t) = A(t) \cdot \Theta(t) + B(t) \cdot dW$ и при наблюдаемом процессе измерений $\xi(t)$, который связан с ненаблюдаемым процессом уравнением наблюдения $\xi(t) = H(t) \cdot \Theta(t) + \eta(t)$, строятся с помощью специального преобразования оценки компонент ненаблюдаемого случайного процесса $\Theta(t)$.

Например, подсистему статистической обработки траекторной измерительной информации для рассмотренной математической модели сообщения в случае динамической фильтрации траекторных измерений можно формализовать классическим фильтром Калмана [77]. В этом случае структурная схема устройства, формализующего подсистему статистической обработки траекторной измерительной информации при заданных условиях, будет иметь вид, представленный на рис. 1.7.

Данная схема содержит сумматоры S_3 и S_4 , матричные перемножители K , A , H и интегратор I_2 .

На выходе подсистемы статистической обработки траекторных измерений получается оценка $\hat{\Theta}(t)$ вектора состояния этой подсистемы. Такая оценка получается в соответствии с уравнением фильтрации

$$d\hat{\Theta}(t) = A(t) \cdot \hat{\Theta}(t) + K(t) \cdot [\xi(t) - H(t) \cdot \hat{\Theta}(t)],$$

где $K(t)$ — матрица коэффициента усиления фильтра.

В качестве критерия качества восстановления траекторий полета ЛА (оценки параметров движения ЛА) в таких подсистемах статистической обработки траекторных измерений рассматривается минимальное значение средней квадратической погрешно-

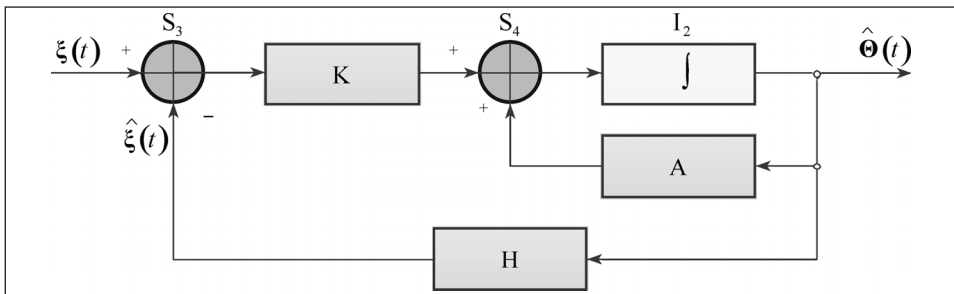


Рис. 1.7. Структурная схема подсистемы статистической обработки траекторных измерений для случая динамической фильтрации ТИ

сти отклонения оценки искомых параметров $\hat{\Theta}(t)$ от их реальных значений $\Theta_p(t)$, т.е.

$$\hat{\Theta}(t): \min \sigma\{\hat{\Theta}(t) - \Theta_p(t)\}.$$

Основная проблема в реализации моделей функционирования ТИК состоит в том, что многие компоненты в уравнениях для ненаблюдаемого процесса и в уравнениях наблюдения на момент обработки неизвестны. Это прежде всего характеристики внешних воздействий на испытываемый объект, имеющих место в ходе проведения натурного эксперимента, а также случайных процессов, приводящих к погрешностям измерений. Относительно этих компонент имеется только априорная информация в виде вероятностных характеристик их законов распределения, получаемая в результате статистической обработки результатов предыдущих экспериментов и специальных работ по калибровке и аттестации измерительных средств.

Необходимо отметить, что отсутствие такой достоверной априорной информации очень существенно влияет на точность оценки искомых параметров.

Таким образом, проведенная формализация задачи построения стохастической модели ТИК позволяет раскрыть содержание процессов, происходящих в ТИК, и обоснованно использовать требуемый для его анализа математический аппарат.

1.4. Построение математических моделей частично наблюдаемых случайных процессов траекторных измерений для реализации алгоритмов динамической фильтрации

Для оценки параметров движения ЛА методами динамической фильтрации, а также характеристик условных распределений ошибок ТИК необходимо иметь математические модели частично наблюдаемых случайных процессов. Статистика случайных процессов дает эффективные процедуры решения таких задач [27, 48, 105]. Для формирования математических моделей частично наблюдаемых случайных процессов необходимо по описанию траекторной ИИС построить следующую систему уравнений для прямого направления времени (отмечено индексом «f»):

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{Z}(k-1) + \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{e}_f(k); \quad (1.56)$$

$$\xi(k) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Z}(k) + \eta(k), \quad (1.57)$$

где $\mathbf{Z}(k)$ — обобщенный вектор состояния анализируемого дискретного случайного процесса размерностью M , который в

дальнейшем будем называть «базовым процессом»; $\mathbf{H}$ — матрица частных производных регистрируемых информационно-измерительной системой параметров по оцениваемому вектору состояния анализируемого дискретного случайного процесса размерностью $(N \times M)$ с постоянными элементами, что может быть справедливо для ограниченных участков траектории полета ЛА; $\xi(k)$ — N -мерный вектор наблюдаемых и регистрируемых случайных процессов; $\eta(k)$ — N -мерный вектор искажающих измерения процессов, который в дальнейшем будем называть «дополнительным процессом»; $\mathbf{a}_{zf}$, $\mathbf{b}_{zf}$ — матричные коэффициенты размерностью $(N \times N)$; $\mathbf{e}_{zf}(k)$ — N -мерный процесс белого шума.

Будем полагать справедливым, что в каждом n -м измерительном канале компонента векторного процесса $\eta(k)$ удовлетворяет скалярному уравнению

$$\eta_n(k) = a_{\eta f(n)} \eta_n(k-1) + b_{\eta f(n)} e_{\eta f(n)}(k), \quad (1.58)$$

где $a_{\eta f(n)}$, $b_{\eta f(n)}$ — постоянные коэффициенты; $e_{\eta f(n)}(k)$ — процесс белого шума.

При условии описания «дополнительного процесса» соотношением (1.58) можно из уравнения (1.57) определить этот процесс для момента времени $t = k-1$ в виде

$$\eta(k-1) = \xi(k-1) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{Z}(k-1). \quad (1.59)$$

Подставим правые части выражения (1.56), описывающего процесс $\mathbf{Z}(k)$, и выражения, которое описывает процесс $\eta(k)$, в уравнение (1.57) и получим

$$\xi(k) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}_{zf} \cdot \mathbf{Z}(k-1) + \mathbf{a}_{\eta f} \cdot \eta(k-1) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{b}_{zf} \cdot \mathbf{e}_{zf} + \mathbf{b}_{\eta f} \cdot \mathbf{e}_{\eta f}.$$

После подстановки в последнее уравнение правой части выражения (1.59) получим следующее рекуррентное уравнение для процесса $\xi(k)$:

$$\xi(k) = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{a}_{zf} - \mathbf{a}_{\eta f} \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{Z}(k-1) + \mathbf{a}_{\eta f} \cdot \xi(k-1) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{b}_{zf} \cdot \mathbf{e}_{zf} + \mathbf{b}_{\eta f} \cdot \mathbf{e}_{\eta f}.$$

В обобщенной форме последнее рекуррентное уравнение наблюдаемого процесса может быть записано в виде

$$\xi(k) = \mathbf{A}_{f0}(k) + \mathbf{A}_{f1} \cdot \mathbf{Z}(k-1) + \mathbf{B}_{f1} \cdot \mathbf{e}_{f1}(k) + \mathbf{B}_{f2} \cdot \mathbf{e}_{f2}(k).$$

Совместно с уравнением (1.56) это уравнение позволяет записать следующие рекуррентные стохастические уравнения для час-



точно наблюдаемого процесса $(\mathbf{Z}, \xi)$ в прямом направлении времени [48, 59]:

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{a}_{zf} \cdot \mathbf{Z}(k-1) + \mathbf{b}_{zf} \cdot \mathbf{e}_f(k);$$

$$\xi(k) = \mathbf{A}_{f0}(k) + \mathbf{A}_{f1} \cdot \mathbf{Z}(k-1) + \mathbf{B}_{f1} \cdot \mathbf{e}_{f1}(k) + \mathbf{B}_{f2} \cdot \mathbf{e}_{f2}(k),$$

где $\mathbf{A}_{f0}(k) = \mathbf{a}_{zf} \cdot \xi(k-1)$; $\mathbf{A}_{f1} = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{a}_{zf} - \mathbf{a}_{zf} \cdot \mathbf{H})$; $\mathbf{B}_{f1} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{b}_{zf}$; $\mathbf{B}_{f2} = \mathbf{b}_{zf}$.

Компоненты рекуррентных уравнений частично наблюдаемого процесса $(\mathbf{Z}, \xi)$ обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{B}_{f1} \cdot \mathbf{B}_{f1}^T = \mathbf{H} \cdot \mathbf{b}_{zf} \cdot \mathbf{b}_{zf}^T \cdot \mathbf{H}^T; \quad \mathbf{b}_{zf} \cdot \mathbf{B}_{f1}^T = \mathbf{b}_{zf} \cdot \mathbf{b}_{zf}^T \cdot \mathbf{H}; \quad \mathbf{B}_{f2} \cdot \mathbf{B}_{f2}^T = \mathbf{b}_{zf} \cdot \mathbf{b}_{zf}^T.$$

Таким образом, приведенные соотношения позволяют построить практически реализуемые математические модели частично наблюдаемых случайных процессов, позволяющие успешно применять классические соотношения калмановской фильтрации для статистической обработки случайных процессов траекторных измерений.

Одним из основных положений теории статистики случайных процессов является утверждение, состоящее в том, что если имеются рекуррентные стохастические уравнения частично наблюдаемого процесса $(\mathbf{Z}, \xi)$ следующего вида:

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{a}_{zf} \cdot \mathbf{Z}(k-1) + \mathbf{b}_{zf} \cdot \mathbf{e}_f(k), \quad (1.60)$$

$$\xi(k) = \mathbf{A}_{f0}(k) + \mathbf{A}_{f1} \cdot \mathbf{Z}(k-1) + \mathbf{B}_{f1} \cdot \mathbf{e}_{f1}(k) + \mathbf{B}_{f2} \cdot \mathbf{e}_{f2}(k), \quad (1.61)$$

где $\xi(k)$ — наблюдаемая компонента процесса; $\mathbf{Z}(k)$ — ненаблюдаемая компонента процесса, тогда согласно теории оптимальной фильтрации [48, 105] для частично наблюдаемого процесса (1.60) и (1.61) можно построить специальные процедуры определения условного математического ожидания процесса $\mathbf{Z}(k)$ для фиксированной последовательности наблюдений $\xi(k)$, где $k = 0, K$.

В основе этих процедур лежит рекуррентное уравнение [48, 105] для оценки условного математического ожидания $\mathbf{m}_{zf}(k)$ процесса $\mathbf{Z}(k)$ в момент времени $t = k$ при наличии измерений от начального момента времени до текущего момента $t = k$ включительно, которое имеет вид

$$\mathbf{m}_{zf}(k) = \mathbf{a}_{zf} \cdot \mathbf{m}_{zf}(k-1) + \mathbf{K}_f(k) \cdot [\xi(k) - \mathbf{A}_{f1} \cdot \mathbf{m}_{zf}(k-1)],$$

где $\mathbf{K}_f(k) = \mathbf{G}_f(k) \cdot \mathbf{S}_f^{-1}(k)$; $\mathbf{G}_f(k) = [\mathbf{b}_{zf} \cdot \mathbf{B}_{f1}^T + \mathbf{a}_{zf} \cdot \mathbf{\gamma}_{zf}(k-1) \cdot \mathbf{A}_{f1}^T]$; $\mathbf{S}_f(k) = [\mathbf{B}_{f1} \cdot \mathbf{B}_{f1}^T + \mathbf{B}_{f2} \cdot \mathbf{B}_{f2}^T + \mathbf{A}_{f1} \cdot \mathbf{\gamma}_{zf}(k-1) \cdot \mathbf{A}_{f1}^T]$; $\mathbf{\gamma}_{zf}(k) = \mathbf{a}_{zf} \cdot \mathbf{\gamma}_{zf}(k-1) \cdot \mathbf{a}_{zf}^T + \mathbf{b}_{zf} \cdot \mathbf{b}_{zf}^T - \mathbf{G}_f(k) \cdot \mathbf{S}_f^{-1}(k) \cdot \mathbf{G}_f^T(k)$.

Также имеет место следующее уравнение для оценки условного математического ожидания $\mathbf{m}_{\eta^r}(k)$ «дополнительного процесса» $\eta(k)$ в прямом направлении времени:

$$\mathbf{m}_{\eta^r}(k) = \xi(k) - \mathbf{A}_{f1} \cdot \mathbf{m}_{z^r}(k).$$

Аналогичные соотношения существуют и для частично наблюдаемого процесса, описываемого с помощью обращенных рекуррентных стохастических уравнений (используется индекс «r»), имеющего следующий вид:

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{a}_{z^r} \cdot \mathbf{Z}(k+1) + \mathbf{b}_{z^r} \cdot \mathbf{e}_{z^r}(k);$$

$$\xi(k) = \mathbf{A}_{r0}(k) + \mathbf{A}_{r1} \cdot \mathbf{Z}(k+1) + \mathbf{B}_{r1} \cdot \mathbf{e}_{r1}(k) + \mathbf{B}_{r2} \cdot \mathbf{e}_{r2}(k),$$

где $\mathbf{A}_{r0}(k) = \mathbf{a}_{\eta^r} \cdot \xi(k+1)$; $\mathbf{A}_{r1} = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{a}_{z^r} - \mathbf{a}_{\eta^r} \cdot \mathbf{H})$; $\mathbf{B}_{r1} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{b}_{z^r}$; $\mathbf{B}_{r2} = \mathbf{b}_{\eta^r}$; $\mathbf{B}_{r1} \cdot \mathbf{B}_{r1}^T = \mathbf{H} \cdot \mathbf{b}_{z^r} \cdot \mathbf{b}_{z^r}^T \cdot \mathbf{H}^T$; $\mathbf{b}_{z^r} \cdot \mathbf{B}_{r1}^T = \mathbf{b}_{z^r} \cdot \mathbf{b}_{z^r}^T \cdot \mathbf{H}$; $\mathbf{B}_{r2} \cdot \mathbf{B}_{r2}^T = \mathbf{b}_{\eta^r} \cdot \mathbf{b}_{\eta^r}^T$.

В этом случае рекуррентное уравнение для условного математического ожидания $\mathbf{m}_{z^r}(k)$ процесса $\mathbf{Z}(k)$ в момент времени $t = k$ при наличии измерений от данного момента времени включительно и до конца интервала времени измерений $t = T$ принимает вид [48, 105]

$$\mathbf{m}_{z^r}(k) = \mathbf{a}_{z^r} \cdot \mathbf{m}_{z^r}(k+1) + \mathbf{K}_r(k) \cdot [\xi_k - \mathbf{A}_{r0} - \mathbf{A}_{r1} \cdot \mathbf{m}_{z^r}(k+1)],$$

где $\mathbf{K}_r(k) = \mathbf{G}_r(k) \cdot \mathbf{S}_r^{-1}(k)$; $\mathbf{Y}_{z^r}(k) = \mathbf{a}_{z^r} \cdot \mathbf{Y}_{z^r}(k+1) \cdot \mathbf{a}_{z^r}^T + \mathbf{b}_{z^r} \cdot \mathbf{b}_{z^r}^T - \mathbf{G}_r(k) \cdot \mathbf{S}_r^{-1} \cdot \mathbf{G}_r^T(k)$; $\mathbf{G}_r(k) = [\mathbf{b}_{z^r} \cdot \mathbf{B}_{r1}^T + \mathbf{a}_{z^r} \cdot \mathbf{Y}_{z^r}(k+1) \cdot \mathbf{A}_{r1}^T]$; $\mathbf{S}_r(k) = [\mathbf{B}_{r1} \cdot \mathbf{B}_{r1}^T + \mathbf{B}_{r2} \cdot \mathbf{B}_{r2}^T + \mathbf{A}_{r1} \cdot \mathbf{Y}_{z^r}(k+1) \cdot \mathbf{A}_{r1}^T]$.

Также имеет место уравнение для оценки условного математического ожидания $\mathbf{m}_{\eta^r}(k)$ «дополнительного процесса» $\eta(k)$ при обратном направлении времени вида

$$\mathbf{m}_{\eta^r}(k) = \xi(k) - \mathbf{A}_{r1} \cdot \mathbf{m}_{z^r}(k).$$

Аналогично можно построить алгоритм средневзвешенной оценки (единичной фильтрации) вектора состояния многомерного процесса в случае, когда известны только стационарная ковариационная матрица данного процесса и его единичное измерение. Этому соответствуют следующие рекуррентные уравнения для частично наблюдаемого процесса ($\mathbf{Z}, \xi$):

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{b}_{ze} \cdot \mathbf{e}_{ze}(k);$$

$$\xi(k) = \mathbf{B}_{e1} \cdot \mathbf{e}_{e1}(k) + \mathbf{B}_{e2} \cdot \mathbf{e}_{e2}(k),$$



где $\mathbf{B}_{e1} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{b}_{ze}$; $\mathbf{B}_{e2} = \mathbf{b}_{ze}$; $\mathbf{B}_{e1} \cdot \mathbf{B}_{e1}^T = \mathbf{H} \cdot \mathbf{b}_{ze} \mathbf{b}_{ze}^T \cdot \mathbf{H}^T$; $\mathbf{b}_{ze} \cdot \mathbf{B}_{e1}^T = \mathbf{b}_{ze} \cdot \mathbf{b}_{ze}^T \cdot \mathbf{H}$; $\mathbf{B}_{e2} \cdot \mathbf{B}_{e2}^T = \mathbf{b}_{ze} \cdot \mathbf{b}_{ze}^T$.

Если применить теорему об условном математическом ожидании к такому представлению частично наблюдаемого процесса $(\mathbf{Z}, \xi)$, то получатся следующие уравнения для оценки процесса $\mathbf{Z}(k)$ в случае средней взвешенной обработки исходной статистической информации при изменяющейся во времени матрице частных производных:

$$\mathbf{m}_{ze}(k) = \mathbf{K}_{ze}(k) \cdot \xi(k); \quad \mathbf{K}_{ze}(k) = \mathbf{G}_{ze}(k) \cdot \mathbf{S}_{ze}^{-1}(k);$$

$$\mathbf{G}_{ze}(k) = \mathbf{b}_{ze} \cdot \mathbf{B}_{e1}^T; \quad \mathbf{S}_{ze}(k) = [\mathbf{B}_{e1} \cdot \mathbf{B}_{e1}^T + \mathbf{B}_{e2} \cdot \mathbf{B}_{e2}^T];$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{ze}(k) = \boldsymbol{\gamma}_{z(\infty)} - \mathbf{G}_{ze}(k) \cdot \mathbf{S}_{ze}^{-1}(k) \cdot \mathbf{G}_{ze}^T(k).$$

Также имеет место выражение вида $\mathbf{m}_{\eta e}(k) = \xi(k) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{m}_{ze}(k)$.

В целях обеспечения удобства и компактности записей уравнений частично наблюдаемых процессов и уравнений фильтра Калмана для случаев прямой, обратной и единичной фильтрации введем переменный параметр ∂ , который обозначает прямое, обратное или единичное представление случайных процессов, т.е. $\partial \in \{f, r, e\}$, и специальный символ $\psi(\partial, k)$, который обозначает следующие моменты времени:

$$\psi(f, k) = (k-1);$$

$$\psi(r, k) = (k+1);$$

$$\psi(e, k) = (\infty).$$

Эти параметры и символы позволяют записать все рассмотренные ранее уравнения фильтрации в довольно компактном виде.

Так, система рекуррентных стохастических уравнений частично наблюдаемых процессов будет иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\eta}(k) = \mathbf{a}_{\eta\partial} \cdot \boldsymbol{\eta}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{b}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{e}_{\eta\partial}(k);$$

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{a}_{z\partial} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{b}_{z\partial} \cdot \mathbf{e}_{z\partial}(k);$$

$$\xi(k) = \mathbf{A}_{\partial 0}(k) + \mathbf{A}_{\partial 1} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{B}_{\partial 1} \cdot \mathbf{e}_{\partial 1}(k) + \mathbf{B}_{\partial 2} \cdot \mathbf{e}_{\partial 2}(k),$$

где $\mathbf{A}_{\partial 0}(k) = \mathbf{a}_{\eta\partial} \cdot \xi(\psi(\partial, k))$; $\mathbf{A}_{\partial 1} = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{a}_{z\partial} - \mathbf{a}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{H})$; $\mathbf{B}_{\partial 1} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{b}_{z\partial}$; $\mathbf{B}_{\partial 2} = \mathbf{b}_{\eta\partial}$.

При этом имеют место соотношения

$$\mathbf{B}_{\partial 1} \cdot \mathbf{B}_{\partial 1}^T = \mathbf{H} \cdot \mathbf{b}_{z\partial} \cdot \mathbf{b}_{z\partial}^T \cdot \mathbf{H}; \quad \mathbf{b}_{z\partial} \cdot \mathbf{B}_{\partial 1}^T = \mathbf{b}_{z\partial} \cdot \mathbf{b}_{z\partial}^T \cdot \mathbf{H}; \quad \mathbf{B}_{\partial 2} \cdot \mathbf{B}_{\partial 2}^T = \mathbf{b}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{b}_{\eta\partial}^T.$$

Система уравнений фильтрации в общем виде может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{m}_{z\partial}(k) = \mathbf{a}_{z\partial} \cdot \mathbf{m}_{z\partial}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{K}_{\partial} \cdot [\xi(k) - \mathbf{A}_{\partial 1} \cdot \mathbf{m}_{z\partial}(\psi(\partial, k))];$$

$$\text{где } \mathbf{K}_{\partial}(k) = \mathbf{G}_{\partial}(k) \cdot \mathbf{S}_{\partial}^{-1}(k); \quad \mathbf{G}_{\partial}(k) = [\mathbf{b}_{z\partial} \cdot \mathbf{B}_{\partial 1}^T + \mathbf{a}_{z\partial} \cdot \gamma_{z\partial}(\psi(\partial, k)) \cdot \mathbf{A}_{\partial 1}^T]; \quad \mathbf{S}_{\partial}(k) = [\mathbf{B}_{\partial 1} \cdot \mathbf{B}_{\partial 1}^T + \mathbf{B}_{\partial 2} \cdot \mathbf{B}_{\partial 2}^T + \mathbf{A}_{\partial 1} \cdot \gamma_{z\partial}(\psi(\partial, k)) \cdot \mathbf{A}_{\partial 1}^T]; \quad \gamma_{z\partial}(k) = \mathbf{a}_{z\partial} \cdot \gamma_{z\partial}(\psi(\partial, k)) \cdot \mathbf{a}_{z\partial}^T + \mathbf{b}_{z\partial} \cdot \mathbf{b}_{z\partial}^T - \mathbf{G}_{\partial}(k) \cdot \mathbf{S}_{\partial}^{-1}(k) \cdot \mathbf{G}_{\partial}^T(k).$$

Уравнения для сглаженных оценок имеют вид

$$\mathbf{m}_{zs}(k) = \gamma_{zs}(k) \cdot [\gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{zf}(k) + \gamma_{zr}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{zr}(k) - \gamma_{ze}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{ze}(k)];$$

$$\gamma_{zs}(k) = [\gamma_{zf}^{-1}(k) + \gamma_{zr}^{-1}(k) - \gamma_{ze}^{-1}(k)]^{-1}.$$

Вывод этого уравнения будет приведен ниже.

Таким образом, рассмотренные математические модели частично наблюдаемых случайных процессов позволяют реализовать алгоритмы калмановской фильтрации данных траекторных измерений при различных вариантах статистической обработки траекторной измерительной информации, которые могут широко применяться при экспериментальной отработке и испытаниях СТК.

1.5. Построение математических моделей экстраполяции и интерполяции случайных процессов траекторных измерений

Приведенные оценки процесса $\mathbf{Z}(k)$ для случая прямой и обратной фильтрации и средневзвешенной обработки исходной статистической измерительной информации обладают определенной независимостью друг от друга, что позволяет достаточно просто объединять их при построении сглаженных оценок вектора состояния частично наблюдаемого процесса.

Известно, что прогнозирование состояния случайных процессов может проводиться как в прямом, так и в обратном направлениях по следующим формулам [48, 110]:

$$\mathbf{m}_{zf}(k) = \mathbf{a}_{zf} \cdot \mathbf{m}_{zf}(k-1);$$

$$\gamma_{zf}(k) = \mathbf{a}_{zf} \cdot \gamma_{zf}(k-1) \mathbf{a}_{zf}^T + \mathbf{b}_{zf} \cdot \mathbf{b}_{zf}^T;$$

$$\mathbf{m}_{zr}(k) = \mathbf{a}_{zr} \cdot \mathbf{m}_{zr}(k+1);$$

$$\gamma_{zr}(k) = \mathbf{a}_{zr} \cdot \gamma_{zr}(k+1) \mathbf{a}_{zr}^T + \mathbf{b}_{zr} \cdot \mathbf{b}_{zr}^T,$$

где $\mathbf{m}_{zf}(k)$, $\mathbf{m}_{zr}(k)$ — условные математические ожидания случайного процесса $\mathbf{Z}(k)$ в момент времени $t = k$ для случая прямой и об-

ратной фильтрации соответственно; $\mathbf{y}_{\mathcal{F}}(k)$, $\mathbf{y}_{\mathcal{R}}(k)$ — ковариационные матрицы векторов $\mathbf{m}_{\mathcal{F}}(k)$ и $\mathbf{m}_{\mathcal{R}}(k)$ в момент времени $t=k$ соответственно.

В каждом из приведенных выше уравнений для условного математического ожидания случайного процесса $\mathbf{Z}(k)$ используется только часть собранной информации об исследуемом случайном процессе. Так, в уравнениях фильтрации в прямом направлении используется только та часть информации, которая поступила до момента времени, на который оценивается процесс, но не учитывается информация, поступившая после этого момента времени. В уравнениях фильтрации в обратном направлении используется только та часть информации, которая поступила после момента, на который оценивается процесс, но не учитывается информация, поступившая до этого момента времени.

Для объединения оценок, полученных при прямой и обратной фильтрации одного и того же процесса, в целях получения сглаженных оценок используется хорошо известное в статистике свойство независимых оценок [116, 117]. Суть этого свойства заключается в следующем. Если для случайного вектора $\mathbf{X}$ имеются две независимые оценки $\hat{\mathbf{X}}_1$ и $\hat{\mathbf{X}}_2$ с ковариационными матрицами $\mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_1}$ и $\mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_2}$ соответственно, то оценка, объединяющая информацию этих двух оценок, строится по следующему алгоритму [8, 108, 111, 117]:

$$\hat{\mathbf{X}}_3 = \mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_3} \cdot (\mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_1}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_1 + \mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_2}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_2), \quad (1.62)$$

а ковариационная матрица такой общей оценки, объединяющей информацию от этих двух частных оценок, задается формулой

$$\mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_3} = (\mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_1}^{-1} + \mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_2}^{-1})^{-1}. \quad (1.63)$$

Приведенное свойство позволяет создать специальную методику объединения информации, полученной при прямой и обратной фильтрации. Так, из формулы (1.63) следует, что

$$\mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_3}^{-1} = \mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_1}^{-1} + \mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_2}^{-1}.$$

Эта же формула позволяет определить ковариационную матрицу одной из исходных оценок ($\mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_1}$), если известны ковариационные матрицы результирующей ($\mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_3}$) и другой исходной оценки ($\mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_2}$), по формуле

$$\mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_1}^{-1} = \mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_3}^{-1} - \mathbf{y}_{\hat{\mathbf{X}}_2}^{-1}.$$

Кроме того, из формулы (1.62) можно выразить исходную оценку $\hat{\mathbf{X}}_1$ в следующем виде:

$$\mathbf{\gamma}_{\hat{\mathbf{X}}_1}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{\gamma}_{\hat{\mathbf{X}}_3}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_3 - \mathbf{\gamma}_{\hat{\mathbf{X}}_2}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_2.$$

Если за $\hat{\mathbf{X}}_3$ принять оценку процесса, полученную в результате прямой фильтрации, а за $\hat{\mathbf{X}}_2$ — оценку, полученную в результате обратной фильтрации, то $\hat{\mathbf{X}}_1$ будет представлять собой средневзвешенную оценку процесса по информации, поступившей только в момент времени $t = k$.

По отношению к средневзвешенной оценке исследуемого процесса результат обратной фильтрации является независимым, так как он получен по измерениям, поступившим после момента времени $t = k$.

При проведении обратной фильтрации траекторных измерений на момент времени $t = k$ существуют две независимые оценки. Первая оценка — это экстраполированное значение измерений ($\mathbf{m}_{x\bar{r}}(k)$) с момента времени $t = k + 1$ на момент времени $t = k$, а вторая — оценка единичной фильтрации ($\mathbf{m}_{xe}(k)$) на этот же момент времени, т.е. справедливо соотношение

$$\mathbf{\gamma}_{x\bar{r}}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{x\bar{r}}(k) = \mathbf{\gamma}_{xr}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{xr}(k) - \mathbf{\gamma}_{xe}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{xe}(k),$$

где $\mathbf{m}_{x\bar{r}}(k)$, $\mathbf{\gamma}_{x\bar{r}}(k)$ — условное математическое ожидание экстраполированного измерения и его ковариационная матрица соответственно; $\mathbf{m}_{xr}(k)$, $\mathbf{m}_{xe}(k)$ — условные математические ожидания случайного процесса $\mathbf{X}(k)$ в момент времени $t = k$ для случаев обращенной фильтрации и средневзвешенной обработки дискретной информации соответственно.

Условное математическое ожидание $\mathbf{m}_{xs}(k)$ сглаженной оценки процесса $\mathbf{X}(k)$ на момент времени $t = k$ определяется следующими двумя независимыми оценками. Первая оценка — это экстраполированное значение измерений ($\mathbf{m}_{x\bar{s}}(k)$) с момента времени $t = k + 1$ на момент времени $t = k$, а вторая — оценка прямой фильтрации ($\mathbf{m}_{xf}(k)$) на этот же момент времени. То есть может быть записано следующее выражение:

$$\mathbf{\gamma}_{xs}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{xs}(k) = \mathbf{\gamma}_{xf}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{xf}(k) + \mathbf{\gamma}_{x\bar{r}}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{x\bar{r}}(k).$$

Объединив две последние формулы, можно сформировать удобный алгоритм построения условного математического ожидания $\mathbf{m}_{xs}(k)$ и ковариационной матрицы $\mathbf{\gamma}_s(k)$ случайного про-

цесса $\mathbf{X}(k)$ по всей собранной информации, записываемый следующими формулами:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_{xs}(k) &= \gamma_{xs}(k) \cdot [\gamma_{xf}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{xf}(k) + \gamma_{xr}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{xr}(k) - \gamma_{xe}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{xe}(k)]; \\ \gamma_s(k) &= [\gamma_{xf}^{-1}(k) + \gamma_{xr}^{-1}(k) - \gamma_{xe}^{-1}(k)]^{-1}.\end{aligned}$$

Условное математическое ожидание «дополнительного процесса» $\eta(k)$ для процесса $\mathbf{X}(k)$ оценивается в ходе сглаживания по очевидной формуле

$$\mathbf{m}_{\eta s}(k) = \xi(k) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{m}_{xs}(k).$$

Последние три формулы составляют алгоритм оценки характеристик условного распределения исследуемого процесса по всей поступившей в сеанс измерений информации на моменты поступления измерений, т.е. получения сглаженных оценок исследуемого процесса.

Из приведенных формул достаточно просто строятся уравнения для расчета характеристик условного распределения интерполированных оценок исследуемого процесса, т.е. оценок, получаемых на моменты времени, когда отсутствуют измерения. Для вывода таких уравнений интерполяции сделаем предположение, что получено дополнительное значение измерения внутри интервала измерений Δt для момента времени $t = q$. Тогда согласно полученным выше результатам характеристики условного распределения интерполированных оценок сглаживания для исследуемого процесса задаются выражениями

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_{xs}(q) &= \gamma_{xs}(q) [\gamma_{xf}^{-1}(q^+) \cdot \mathbf{m}_{xf}(q^+) + \gamma_{xr}^{-1}(q^-) \cdot \mathbf{m}_{xr}(q^-) - \gamma_{xe}^{-1}(q^+) \cdot \mathbf{m}_{xe}(q^+)]; \\ \gamma_{xs}(q) &= [\gamma_{xf}^{-1}(q^+) + \gamma_{xr}^{-1}(q^-) - \gamma_{xe}^{-1}(q^+)]^{-1}.\end{aligned}$$

Входящие в эти выражения временные интервалы q^+ и q^- задаются формулами $q^+ = q - t_k$; $q^- = t_{k+1} - q$ и обладают свойством

$$q^- + q^+ = t_{k+1} - t_k = \Delta t.$$

Если у дополнительного измерения значения элементов матрицы наблюдения устремить к нулю (в момент времени $t = q$ измерения отсутствуют), то построенная выше сглаженная оценка сойдется к оптимальной оценке интерполяции. Алгоритм по-

строения этой оценки с учетом полученных результатов примет следующий вид:

$$\mathbf{m}_{xI}(q) = \gamma_{xI}(q) \cdot [\gamma_{xf}^{-1}(q^+) \cdot \mathbf{m}_{xf}(q^+) + \gamma_{xr}^{-1}(q^-) \cdot \mathbf{m}_{xr}(q^-)];$$

$$\gamma_{xI}(q) = [\gamma_{xf}^{-1}(q^+) + \gamma_{xr}^{-1}(q^-) - \gamma_{xe}^{-1}(q^+)]^{-1},$$

где $\mathbf{m}_{xf}(q^+) = \mathbf{a}_{xf}(q^+) \cdot \mathbf{m}_{xf}(k)$; $\mathbf{m}_{xr}(q^-) = \mathbf{a}_{xr}(q^-) \cdot \mathbf{m}_{xr}(k+1)$; $\gamma_{xf}(q^+) = \mathbf{a}_{xf}(q^+) \cdot \gamma_{xf}(k) \cdot \mathbf{a}_{xf}^T(q^+) + \mathbf{b}_{xf}(q^+) \cdot \mathbf{b}_{xf}^T(q^+)$; $\gamma_{xr}(q^-) = \mathbf{a}_{xr}(q^-) \cdot \gamma_{xr}(k+1) \cdot \mathbf{a}_{xr}^T(q^-) + \mathbf{b}_{xr}(q^-) \cdot \mathbf{b}_{xr}^T(q^-)$; $\gamma_{xe}(q^+) = \gamma_{x\infty}$.

Таким образом, приведенные выше уравнения определяют характеристики условного распределения интерполированных оценок исследуемых случайных процессов в любой момент времени внутри интервала измерений.

1.6. Построение математических моделей расчетных и реальных частично наблюдаемых случайных процессов и разработка обобщенной модели погрешности стохастической ИИС

Одна из основных проблем в задачах фильтрации связана с тем, что для обеспечения простоты расчетов или из-за отсутствия достаточной исходной информации выбирают упрощенные рекуррентные модели частично наблюдаемых процессов, что в ряде практических случаев бывает оправданным. Однако такие упрощения довольно часто приводят к значительным дополнительным погрешностям в оценках параметров полезных сообщений.

Теория статистики случайных процессов позволяет оценить допустимость тех или иных упрощений в описании частично наблюдаемых процессов [77]. Эта теория позволяет построить систему уравнений, определяющую результирующие погрешности оценок полезных сообщений в случаях когда модели реальных сообщений не совпадают с расчетными (заранее определенными) моделями, выбранными для построения алгоритма обработки. Построение таких уравнений для результирующих погрешностей оценивания полезных сообщений проводится по следующей схеме.

Предположим, что система рекуррентных стохастических уравнений реального частично наблюдаемого процесса имеет вид

$$\boldsymbol{\eta}(k) = \bar{\mathbf{a}}_{\eta\partial} \cdot \boldsymbol{\eta}(\partial, k) + \bar{\mathbf{b}}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{e}_{\eta\partial}(k);$$

$$\mathbf{Z}(k) = \bar{\mathbf{a}}_{z\partial} \cdot \mathbf{Z}(\partial, k) + \bar{\mathbf{b}}_{z\partial} \cdot \mathbf{e}_{z\partial}(k);$$

$$\boldsymbol{\xi}(k) = \bar{\mathbf{A}}_{z\partial}(k) + \bar{\mathbf{A}}_{\partial 1} \cdot \bar{\mathbf{Z}}(\partial, k) + \bar{\mathbf{B}}_{\partial 1} \cdot \mathbf{e}_{\partial 1}(k) + \bar{\mathbf{B}}_{\partial 2} \cdot \mathbf{e}_{\partial 2}(k),$$



где $\bar{\mathbf{A}}_{\partial 0}(k) = \bar{\mathbf{a}}_{\eta \partial} \cdot \xi(\psi(\partial, k))$; $\bar{\mathbf{A}}_{\partial 1} = (\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{z\partial} - \bar{\mathbf{a}}_{\eta \partial} \cdot \bar{\mathbf{H}})$; $\bar{\mathbf{B}}_{\partial 1} = \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{b}}_{z\partial}$; $\bar{\mathbf{B}}_{\partial 2} = \bar{\mathbf{b}}_{\eta \partial}$; $\bar{\mathbf{B}}_{\partial 1} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\partial 1}^T = \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{b}}_{z\partial} \cdot \bar{\mathbf{b}}_{z\partial}^T \cdot \bar{\mathbf{H}}^T$; $\bar{\mathbf{b}}_{z\partial} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\partial 1}^T = \bar{\mathbf{b}}_{z\partial} \cdot \bar{\mathbf{b}}_{z\partial}^T \cdot \bar{\mathbf{H}}^T$; $\bar{\mathbf{B}}_{\partial 2} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\partial 2}^T = \bar{\mathbf{b}}_{\eta \partial} \cdot \bar{\mathbf{b}}_{\eta \partial}^T$.

Здесь черта сверху указывает, что эти компоненты системы рекуррентных уравнений описывают реальный частично наблюдаемый процесс.

При обработке траекторных измерений, когда расчетная модель полезного сообщения не соответствует модели реального процесса, в уравнение фильтрации

$$\mathbf{m}_{z\partial}(k) = \mathbf{a}_{z\partial} \cdot \mathbf{m}_{z\partial}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{K}_{\partial}[\xi(k) - \mathbf{A}_{\partial 0}(k) - \mathbf{A}_{\partial 1} \cdot \mathbf{m}_{z\partial}(\psi(\partial, k))], \quad (1.64)$$

описывающее оптимальную обработку частично наблюдаемого процесса вида

$$\begin{aligned} \eta(k) &= \mathbf{a}_{\eta \partial} \cdot \eta(\psi(\partial, k)) + \mathbf{b}_{\eta \partial} \cdot \mathbf{e}_{\eta \partial}(k); \\ \mathbf{Z}(k) &= \mathbf{a}_{z\partial} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{b}_{z\partial} \cdot \mathbf{e}_{z\partial}(k); \\ \xi(k) &= \mathbf{A}_{\partial 0}(k) + \mathbf{A}_{\partial 1} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{B}_{\partial 1} \cdot \mathbf{e}_{\partial 1}(k) + \mathbf{B}_{\partial 2} \cdot \mathbf{e}_{\partial 2}(k) \end{aligned} \quad (1.65)$$

вместо наблюдаемого процесса, описываемого выражением

$$\xi(k) = \mathbf{A}_{\partial 0}(k) + \mathbf{A}_{\partial 1} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{B}_{\partial 1} \cdot \mathbf{e}_{\partial 1}(k) + \mathbf{B}_{\partial 2} \cdot \mathbf{e}_{\partial 2}(k),$$

будет поступать случайный наблюдаемый процесс вида

$$\xi(k) = \bar{\mathbf{A}}_{\partial 0}(k) + \bar{\mathbf{A}}_{\partial 1} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \bar{\mathbf{B}}_{\partial 1} \cdot \mathbf{e}_{\partial 1}(k) + \bar{\mathbf{B}}_{\partial 2} \cdot \mathbf{e}_{\partial 2}(k). \quad (1.66)$$

Поэтому подставим в уравнение для условного математического ожидания оцениваемого процесса с расчетной моделью сообщения (1.64) выражение для наблюдаемого процесса (1.66) с реальной моделью сообщения и получим следующее выражение для оценки условного математического ожидания векторного случайного процесса $\mathbf{Z}(k)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{z\partial}(k) &= \mathbf{a}_{z\partial} \cdot \mathbf{m}_{z\partial}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{K}_{\partial}[\bar{\mathbf{A}}_{\partial 0}(k) + \bar{\mathbf{A}}_{\partial 1} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \\ &+ \bar{\mathbf{B}}_{\partial 1} \cdot \mathbf{e}_{\partial 1}(k) + \bar{\mathbf{B}}_{\partial 2} \cdot \mathbf{e}_{\partial 2}(k) - \mathbf{A}_{\partial 0}(k) - \mathbf{A}_{\partial 1} \cdot \mathbf{m}_{z\partial}(\psi(\partial, k))]. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Введем понятие погрешности $\Delta_{z\partial}(k)$ оцениваемого случайного вектора $\mathbf{Z}(k)$, возникающей из-за рассогласования расчетной и реальной моделей полезного сообщения, в виде разности между математическим ожиданием оцениваемого процесса с расчетной моделью и реальной моделью сообщения:

$$\Delta_{z\partial}(k) = \mathbf{m}_{z\partial}(k) - \mathbf{Z}(k). \quad (1.68)$$

Тогда с использованием формул (1.65), (1.67), (1.68) и соотношения $\xi(k) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Z}(k) + \boldsymbol{\eta}(k)$ можем записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(k) + \Delta_{z\partial}(k) = & \mathbf{a}_{z\partial} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{a}_{z\partial} \cdot \Delta_{z\partial}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{K}_{\partial} [\bar{\mathbf{a}}_{\eta\partial} \cdot \bar{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \\ & + \bar{\mathbf{a}}_{\eta\partial} \cdot \boldsymbol{\eta}(\psi(\partial, k)) + \bar{\mathbf{A}}_{\partial 1}(k) \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \bar{\mathbf{B}}_{\partial 1} \cdot \mathbf{e}_{\partial 1}(k) + \bar{\mathbf{B}}_{\partial 2} \cdot \mathbf{e}_{\partial 2}(k) - \mathbf{a}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{H} \times \\ & \times \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) - \mathbf{a}_{\eta\partial} \cdot \boldsymbol{\eta}(\psi(\partial, k)) - \mathbf{A}_{\partial 1} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) - \mathbf{A}_{\partial 1} \cdot \Delta_{z\partial}(\psi(\partial, k))]. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Вычтем из уравнения (1.69) уравнение реальной модели сообщения

$$\mathbf{Z}(k) = \bar{\mathbf{a}}_{z\partial} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{e}_{z\partial}(k).$$

В результате получим следующее выражение для погрешности $\Delta_{z\partial}(k)$:

$$\begin{aligned} \Delta_{z\partial}(k) = & [\mathbf{a}_{z\partial} - \mathbf{K}_{\partial} \cdot \mathbf{A}_{\partial 1}] \cdot \Delta_{z\partial}(\psi(\partial, k)) + [(\mathbf{a}_{z\partial} - \bar{\mathbf{a}}_{z\partial}) + \mathbf{K}_{\partial} \cdot (\bar{\mathbf{a}}_{\eta\partial} \cdot \bar{\mathbf{H}} + \\ & + \bar{\mathbf{A}}_{\partial 1} - \mathbf{a}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{A}_{\partial 1})] \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{K}_{\partial} \cdot (\bar{\mathbf{a}}_{\eta\partial} - \mathbf{a}_{\eta\partial}) \cdot \boldsymbol{\eta}(\psi(\partial, k)) + \\ & + [\mathbf{K}_{\partial} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\partial 1} - \bar{\mathbf{b}}_{z\partial}] \cdot \mathbf{e}_{\partial 1}(k) + \mathbf{K}_{\partial} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\partial 2} \cdot \mathbf{e}_{\partial 2}(k). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Дополним уравнение (1.70) до системы уравнений известными уравнениями

$$\mathbf{Z}(k) = \bar{\mathbf{a}}_{z\partial} \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \bar{\mathbf{b}}_{z\partial} \cdot \mathbf{e}_{z\partial}(k), \quad (1.71)$$

$$\boldsymbol{\eta}(k) = \bar{\mathbf{a}}_{\eta\partial} \cdot \boldsymbol{\eta}(\psi(\partial, k)) + \bar{\mathbf{b}}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{e}_{\eta\partial}(k). \quad (1.72)$$

Система уравнений (1.70)...(1.72) описывает результирующую погрешность фильтрации процессов траекторных измерений для всех рассматриваемых видов обработки (прямой, обратной и единичной фильтрации).

Введем расширенный процесс вида $\mathbf{y}(k) = [\mathbf{Z}(k) \mid \boldsymbol{\eta}(k)]^T$ и получим уравнение

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta_{z\partial}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{z\partial}(\psi(\partial, k)) \\ \mathbf{y}(\psi(\partial, k)) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\partial} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\partial 1} - \bar{\mathbf{b}}_{z\partial} & \mathbf{K}_{\partial} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\partial 2} \\ \bar{\mathbf{b}}_{z\partial} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{b}}_{\eta\partial} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\partial 3} \\ \mathbf{e}_{\partial 4} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.73)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= [\mathbf{a}_{z\partial} - \mathbf{K}_{\partial} \cdot \mathbf{A}_{\partial 1}]; \\ \mathbf{K}_2 &= [(\mathbf{a}_{z\partial} - \bar{\mathbf{a}}_{z\partial}) + \mathbf{K}_{\partial} \cdot (\bar{\mathbf{a}}_{\eta\partial} \cdot \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{A}}_{\partial 1} - \mathbf{a}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{A}_{\partial 1}) | \mathbf{K}_{\partial} \cdot (\bar{\mathbf{a}}_{\eta\partial} - \mathbf{a}_{\eta\partial})]; \\ \mathbf{K}_3 &= \left[\begin{array}{c|c} \bar{\mathbf{a}}_{z\partial} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \bar{\mathbf{a}}_{\eta\partial} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

В более компактной форме уравнение (1.73) может быть записано в виде

$$\Delta_{z\partial}(k) = \mathbf{a}_{\Delta z\partial} \cdot \Delta_{z\partial}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{a}_{\Delta y\partial} \cdot \mathbf{y}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{b}_{\Delta y\partial} \mathbf{e}_{y\partial}(k).$$

Анализ уравнения (1.73) показывает, что в случае соответствия расчетной и реальной моделей сообщений элементы матрицы $\mathbf{K}_2$ будут равны нулю и уравнение для погрешности фильтрации запишется в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{z\partial}(k) &= [\mathbf{a}_{z\partial} - \mathbf{K}_{\partial} \cdot \mathbf{A}_{\partial 1}] \cdot \Delta_{z\partial}(\psi(\partial, k)) + \\ &+ [\mathbf{K}_{\partial} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\partial 1} - \bar{\mathbf{b}}_{z\partial}] \cdot \mathbf{e}_{\partial 3}(k) + [\mathbf{K}_{\partial} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\partial 2}] \cdot \mathbf{e}_{\partial 4}(k). \end{aligned} \quad (1.74)$$

В этом случае условное математическое ожидание оцениваемых параметров, описываемое однородным уравнением (1.74), не имеет смещения и погрешность оценки равна дисперсии фильтрации.

Далее определим уравнение результирующей погрешности сглаживания для случая рассогласования реальной и расчетной моделей полезного сообщения.

Известно, что сглаженная оценка $\mathbf{m}_{zs}(k)$ параметров движения полета ЛА может быть получена в соответствии с формулой

$$\mathbf{m}_{zs}(k) = \gamma_{zs}(k) \cdot [\gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{zf}(k) + \gamma_{zr}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{zr}(k) - \gamma_{ze}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{ze}(k)]. \quad (1.75)$$

Сделаем подстановку $\mathbf{m}_{z\partial}(k) = \mathbf{Z}(k) + \Delta_{z\partial}(k)$ в формулу (1.75) для $\partial \in \{s, f, r, e\}$. В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(k) + \Delta_{zs}(k) &= \gamma_{zs}(k) \cdot [\gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot (\mathbf{Z}(k) + \Delta_{fz}(k)) + \gamma_{zr}^{-1}(k) \cdot (\mathbf{Z}(k) + \Delta_{zr}(k)) - \\ &- \gamma_{ze}^{-1}(k) \cdot (\mathbf{Z}(k) + \Delta_{ze}(k))] = \gamma_{zs}(k) \cdot [\gamma_{zf}^{-1}(k) + \gamma_{zr}^{-1}(k) - \gamma_{ze}^{-1}(k)] \cdot \mathbf{Z}(k) + \\ &+ \gamma_{zs}(k) \cdot [\gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \Delta_{fz}(k) + \gamma_{zr}^{-1}(k) \cdot \Delta_{zr}(k) - \gamma_{ze}^{-1}(k) \cdot \Delta_{ze}(k)]. \end{aligned}$$

С учетом соотношения

$$\gamma_{zs}^{-1}(k) = \gamma_{zf}^{-1}(k) + \gamma_{zr}^{-1}(k) - \gamma_{ze}^{-1}(k)$$

получим искомое уравнение вида

$$\Delta_{zs}(k) = \gamma_{zs}(k) \cdot [\gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \Delta_{zf}(k) + \gamma_{zr}^{-1}(k) \cdot \Delta_{zr}(k) - \gamma_{ze}^{-1}(k) \cdot \Delta_{ze}(k)]. \quad (1.76)$$

Анализ показывает, что в уравнение (1.76) результирующей погрешности сглаживания для случая рассогласования реальной и расчетной моделей полезного сообщения не входят сами измерения. Поэтому его можно использовать для анализа информативности измерительного эксперимента и в алгоритмах априорной оценки точности ТИК. Кроме того, это уравнение является основой для построения как ковариационных матриц оцениваемых векторов параметров движения ЛА, так и корреляционных функций погрешностей оценки параметров движения ЛА для различных вариантов статистической обработки траекторной измерительной информации в случае рассогласования реальной и расчетной моделей полезного сообщения.

1.7. Построение алгоритмов корреляционного анализа погрешности оценки вектора параметров движения ЛА траекторным измерительным комплексом

1.7.1. Общий вид корреляционной функции погрешности сглаживания результатов траекторных измерений

Для глубокого анализа структуры погрешностей ТИК требуется применение обобщенных характеристик законов распределения погрешностей оценки такими комплексами полезных сообщений. В качестве таких характеристик могут выступать матричные корреляционные функции погрешности оценки траекторным измерительным комплексом параметров движения ЛА.

Определим выражение для корреляционной функции погрешности оценки вектора параметров движения ЛА траекторным измерительным комплексом при наличии рассогласования между реальной и расчетной моделями сообщения с использованием полученного ранее уравнения для результирующей погрешности сглаживания, имеющего вид

$$\Delta_{zs}(k) = \gamma_{zs}(k) \cdot [\gamma_{zf}^{-1} \cdot \Delta_{zf}(k) + \gamma_{zr}^{-1} \cdot \Delta_{zr}(k) - \gamma_{ze}^{-1} \cdot \Delta_{ze}(k)].$$

Тогда корреляционная функция погрешности оценки вектора параметров движения ЛА $\Delta_{zs}(k)$ для случая сглаженной обработки ре-

зультатов траекторных измерений будет описываться следующим выражением:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_z(k_1, k_2) = & M([\Delta_{zs}(k_1)] \cdot [\Delta_{zs}(k_2)]^T) = \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot [M([\Delta_{zf}(k_1)] \cdot [\Delta_{zf}(k_2)]^T)] \times \\
 & \times \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot [M([\Delta_{zf}(k_1)] \cdot [\Delta_{zf}(k_2)]^T)] \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \times \\
 & \times [M([\Delta_{zf}(k_1)] \cdot [\Delta_{ze}(k_2)]^T)] \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot [M([\Delta_{zf}(k_1)] \cdot [\Delta_{zf}(k_2)]^T)] \times \\
 & \times \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot [M([\Delta_{zf}(k_1)] \cdot [\Delta_{zf}(k_2)]^T)] \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \times \\
 & \times [M([\Delta_{zf}(k_1)] \cdot [\Delta_{ze}(k_2)]^T)] \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot [M([\Delta_{ze}(k_1)] \cdot [\Delta_{zf}(k_2)]^T)] \times \\
 & \times \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot [M([\Delta_{ze}(k_1)] \cdot [\Delta_{zf}(k_2)]^T)] \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{ze}^{-1} \times \\
 & \times [M([\Delta_{ze}(k_1)] \cdot [\Delta_{ze}(k_2)]^T)] \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T. \quad (1.77)
 \end{aligned}$$

Если обозначить $M([\Delta_{z\partial}(k_1)] \cdot [\Delta_{z\partial}(k_2)]^T) = \mathbf{K}(\Delta_{z\partial}(k_1), \Delta_{z\partial}(k_2))$, где $\partial \in \{f, r, e\}$, то выражение (1.77) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_z(k_1, k_2) = & \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \mathbf{K}(\Delta_{zf}(k_1), \Delta_{zf}(k_2)) \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \times \\
 & \times \mathbf{K}(\Delta_{zf}(k_1), \Delta_{zf}(k_2)) \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \mathbf{K}(\Delta_{zf}(k_1), \Delta_{ze}(k_2)) \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \\
 & + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \mathbf{K}(\Delta_{zf}(k_1), \Delta_{ze}(k_2)) \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \mathbf{K}(\Delta_{zf}(k_1), \Delta_{zf}(k_2)) \times \\
 & \times \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \mathbf{K}(\Delta_{zf}(k_1), \Delta_{ze}(k_2)) \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{ze}^{-1} \times \\
 & \times \mathbf{K}(\Delta_{ze}(k_1), \Delta_{zf}(k_2)) \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \mathbf{K}(\Delta_{ze}(k_1), \Delta_{zf}(k_2)) \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \\
 & + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \mathbf{K}(\Delta_{ze}(k_1), \Delta_{ze}(k_2)) \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T. \quad (1.78)
 \end{aligned}$$

Для стационарных случайных процессов выражение (1.78) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_z(\tau) = & \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{(z)ff}(\tau) \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{(z)fr}(\tau) \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \\
 & - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{(z)fe}(\tau) \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{(z)rf}(\tau) \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \\
 & + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{(z)rr}(\tau) \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{(z)re}(\tau) \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \\
 & - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{(z)ef}(\tau) \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T - \gamma_{zs} \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{(z)er}(\tau) \cdot \gamma_{zf}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T + \\
 & + \gamma_{zs} \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{(z)ee}(\tau) \cdot \gamma_{ze}^{-1} \cdot \gamma_{zs}^T, \quad (1.79)
 \end{aligned}$$

где $\tau = k_2 - k_1$.



Как видно из выражений (1.77)...(1.79), в состав матричной корреляционной функции погрешности оценки вектора параметров движения ЛА траекторным измерительным комплексом для случая сглаженной обработки результатов траекторных измерений входят компоненты, которые описывают корреляционные функции погрешности оценки такого вектора для случаев прямой и обратной фильтрации и средневзвешенной обработки траекторной информации, а также компоненты, описывающие взаимные корреляции погрешностей, имеющих место при различных вариантах обработки траекторной измерительной информации.

Для построения практически реализуемых алгоритмов вычисления матричных корреляционных функций погрешности оценки вектора параметров движения ЛА для различных вариантов статистической обработки результатов траекторных измерений требуется определение ряда сложных теоретических соотношений, которые будут рассмотрены ниже.

1.7.2. Основные теоретические соотношения для построения корреляционной функции погрешности оценки вектора параметров движения ЛА траекторным измерительным комплексом для различных вариантов обработки результатов измерений

Для построения практически реализуемых алгоритмов вычисления корреляционной функции погрешности оценки вектора параметров движения ЛА траекторным измерительным комплексом для различных вариантов обработки результатов измерений требуется предварительно доказать ряд лемм.

Лемма 1. Погрешность ТИК, задаваемую рекуррентным уравнением вида

$$\Delta_{z\partial}(k) = \mathbf{a}_{\Delta z\partial} \cdot \Delta_{z\partial}[\psi(\partial, k)] + \mathbf{a}_{\Delta y\partial} \cdot \mathbf{y}[\psi(\partial, k)] + \mathbf{b}_{\Delta y\partial} \cdot \mathbf{e}_{y\partial}(k), \quad (1.80)$$

можно представить в виде бесконечных сумм:

$$\Delta_{z\partial}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z\partial}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta y\partial} \cdot \mathbf{y}(k-i-1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z\partial}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta y\partial} \cdot \mathbf{e}_{y\partial}(k-i)]. \quad (1.81)$$

Доказательство леммы проведем путем последовательных подстановок на примере уравнения для погрешности прямой фильтрации

$$\Delta_{zf}(k) = \mathbf{a}_{\Delta zf} \cdot \Delta_{zf}(k-1) + \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k-1) + \mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k). \quad (1.82)$$



После подстановки в правую часть уравнения (1.82) значения Δ_{zf} на момент времени $(k-1)$ получим

$$\begin{aligned}\Delta_{zf}(k) &= \mathbf{a}_{\Delta zf} \cdot [\mathbf{a}_{\Delta zf} \cdot \Delta_{zf}(k-2) + \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k-2) + \mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k-1)] + \\ &+ \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k-1) + \mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k) = \mathbf{a}_{\Delta zf}^2 \cdot \Delta_{zf}(k-2) + \mathbf{a}_{\Delta zf} \cdot \{\mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k-2) + \\ &+ \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k-1) + \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k-1)]\} + \mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k).\end{aligned}$$

Повторив эту подстановку n раз, получим

$$\begin{aligned}\Delta_{zf}(k) &= \mathbf{a}_{\Delta zf}^n \cdot \Delta_{zf}(k-n) + \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k-i-1)] + \\ &+ \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k-i)].\end{aligned}\quad (1.83)$$

Поскольку при $n \rightarrow \infty$ евклидова норма устойчивой матрицы $\mathbf{a}_{\Delta zf}^n$ стремится к нулю, то уравнение для погрешности прямой фильтрации сводится к выражению

$$\Delta_{zf}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k-i-1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k-i)].\quad (1.84)$$

Таким образом, лемма доказана.

Проведя аналогичные преобразования, получим следующее уравнение для погрешности обратной фильтрации:

$$\Delta_{zr}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{y}(k+i+1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k+i)].\quad (1.85)$$

Так как при единичной фильтрации в уравнении (1.85) $\mathbf{a}_{\Delta ze}$ и $\mathbf{a}_{\Delta ye}$ равны нулю, то уравнение для погрешности единичной фильтрации имеет более простой вид:

$$\Delta_{ze}(k) = \mathbf{b}_{\Delta ye} \cdot \mathbf{e}_{ye}(k).\quad (1.86)$$

Выражения (1.83), (1.85) и (1.86) можно подставить в формулу (1.77) для вычисления корреляционной функции погрешности сглаживания.

Следует отметить, что компоненты $\mathbf{b}_{y\partial} \cdot \mathbf{e}_{y\partial}(k_1)$ и $\mathbf{y}(\psi(\partial, k_2))$ уравнения (1.80) для разных значений ∂ между собой коррелированы.

Величина корреляции между этими компонентами определяется следующей леммой.

Лемма 2. Для рекуррентного уравнения

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{a}_{y\partial} \cdot \mathbf{y}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{b}_{y\partial} \cdot \mathbf{e}_{y\partial}(k) \quad (1.87)$$

имеет место однозначное представление случайных последовательностей по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k) &= \mathbf{y}(k) - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}(k-1); \\ \mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k) &= \mathbf{y}(k) - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{y}(k+1); \\ \mathbf{b}_{ye} \cdot \mathbf{e}_{ye}(k) &= \mathbf{y}(k), \end{aligned} \quad (1.88)$$

а также следующие формулы взаимной корреляции:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) &= (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-k_2)} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} = \mathbf{y}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{(k_1-k_2)} \text{ при } k_1 \geq k_2; \\ M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) &= \mathbf{y}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2-k_1)} = (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2-k_1)} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} \text{ при } k_1 < k_2, \end{aligned} \quad (1.89)$$

из которых, в частности, следует часто используемое в дальнейшем тождество

$$\mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} = \mathbf{y}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T. \quad (1.90)$$

Доказательство. Соотношения (1.88) получаются путем перестановки соответствующих компонент в формуле (1.87) для различных значений ∂ .

Докажем справедливость выражения (1.89) для случая прямой фильтрации и при $k_1 \geq k_2$ путем последовательных подстановок в $\mathbf{y}(k_1)$ значений $\mathbf{y}(k_2)$ в требуемый момент времени.

Предположим, что время корреляции $\tau = k_1 - k_2$, тогда после первой и второй итераций получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) &= M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_1 - \tau)) = \\ &= M([\mathbf{a}_f \cdot \mathbf{y}(k_1 - 1) + \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{e}_f(k_1)] \cdot \mathbf{y}^T(k_1 - \tau)) = \\ &= M(\{\mathbf{a}_f \cdot [\mathbf{a}_f \cdot \mathbf{y}(k_1 - 2) + \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{e}_f(k_1 - 1)] + \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{e}_f(k_1)\} \cdot \mathbf{y}^T(k_1 - \tau)). \end{aligned}$$

После n -й итерации получим формулу вида

$$M\left(\left[\mathbf{a}_f^T \cdot \mathbf{y}(k_1 - \tau) + \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_f^{j-1} \cdot \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{e}_f(k_1 - j)\right] \cdot \mathbf{y}^T(k_1 - \tau)\right) =$$



$$\begin{aligned}
 &= M \left(\mathbf{a}_f^\tau \cdot \mathbf{y}(k_1 - \tau) \cdot \mathbf{y}^\tau(k_1 - \tau) + \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_f^{j-1} \cdot \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{e}_f(k_1 - j) \cdot \mathbf{y}^\tau(k_1 - \tau) \right) = \\
 &= \mathbf{a}_f^\tau \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - \tau) \cdot \mathbf{y}^\tau(k_1 - \tau)) + \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_f^{j-1} \cdot \mathbf{b}_f \cdot M(\mathbf{e}_f(k_1 - j) \cdot \mathbf{y}^\tau(k_1 - \tau)) = \mathbf{a}_f^\tau \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty}.
 \end{aligned}$$

Из анализа последней формулы можно сделать вывод, что справедливость выражения (1.89) для прямой фильтрации является доказанной. Аналогично доказывается выражение (1.89) для обратной фильтрации.

Таким образом, лемма считается доказанной.

Лемма 3. Решение уравнения Сильвестра

$$\boldsymbol{\gamma}_y(k) = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}_y(k-1) \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

может быть представлено в виде бесконечной суммы вида

$$\boldsymbol{\gamma}_{y\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{a})^i \cdot \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b})^i. \quad (1.91)$$

Доказательство проведем путем последовательных подстановок. Так, после первой подстановки получим выражение

$$\boldsymbol{\gamma}_y(k) = \mathbf{a}[\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}_y(k-2) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}] \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}^2 \cdot \boldsymbol{\gamma}_y(k-2) \cdot \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

После проведения n подстановок получим

$$\boldsymbol{\gamma}_y(k) = \mathbf{a}^n \cdot \boldsymbol{\gamma}_y(k-n) \cdot \mathbf{b}^n + \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{a})^i \cdot \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b})^i.$$

Если матрицы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются устойчивыми, то при $n \rightarrow \infty$ эвклидовы нормы этих матриц стремятся к нулю. Тогда можно записать решение уравнения Сильвестра в виде

$$\boldsymbol{\gamma}_{y\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{a})^i \cdot \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b})^i.$$

В дальнейшем для обеспечения удобства записи будем обозначать это стационарное решение как $\text{Svt}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$.



Отметим одно простое следствие этой леммы, которое будем использовать в дальнейшем:

$$\text{Svt}(\mathbf{a}, (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2), \mathbf{b}) = \text{Svt}(\mathbf{a}, (\mathbf{c}_1), \mathbf{b}) + \text{Svt}(\mathbf{a}, (\mathbf{c}_2), \mathbf{b}).$$

Таким образом, лемма считается доказанной.

Лемма 4. Прямые и обратные случайные гауссовы последовательности могут быть описаны уравнением Ляпунова вида

$$\boldsymbol{\gamma}_{y\partial}(k) = \mathbf{a}_{y\partial} \cdot \boldsymbol{\gamma}_y(\psi(\partial, k)) \cdot \mathbf{a}_{y\partial}^T + \mathbf{b}_{y\partial} \cdot \mathbf{b}_{y\partial}^T. \quad (1.92)$$

В этом случае для установившегося режима имеет место тождество

$$\boldsymbol{\gamma}_{y\partial} = \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{y\partial} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{y\partial}^T,$$

где $\boldsymbol{\gamma}_{y\infty}$ — стационарное значение ковариационной матрицы дискретного случайного процесса.

Доказательство основано на том, что для достаточно отдаленного момента времени, когда случайный процесс можно считать установившимся, произведение $\mathbf{b}_{y\partial} \cdot \mathbf{b}_{y\partial}^T$ будет равно ковариационной матрице векторного случайного процесса, т.е.

$$\boldsymbol{\gamma}_{y\partial} = \mathbf{b}_{y\partial} \cdot \mathbf{b}_{y\partial}^T.$$

В этом случае выражение (1.92) примет вид

$$\boldsymbol{\gamma}_{y\partial} = \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{y\partial} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{y\partial}^T.$$

Лемма считается доказанной.

Для вычисления значений компонент корреляционной функции, входящих в выражение (1.78), необходимо построить практически реализуемые алгоритмы.

Так, например, для взаимной корреляционной функции прямой и обратной фильтрации имеются следующие четыре компоненты:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\Delta_{zf}(k_1), \Delta_{zr}(k_2)) &= \mathbf{K}_{(z)fr}(\tau) = M((\Delta_{zf}(k_1)) \cdot (\Delta_{zr}(k_2))^T) = \\ &= M\left(\left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta_{zf}}^i \cdot (\mathbf{a}_{\Delta_{yf}} \cdot \mathbf{y}(k_1 - i - 1)) + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta_{zf}}^i \cdot (\mathbf{b}_{\Delta_{yf}} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k_1 - i))\right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta_{zr}}^i \cdot (\mathbf{a}_{\Delta_{yr}} \cdot \mathbf{y}(k_1 + \tau + i + 1)) + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta_{zr}}^i \cdot (\mathbf{b}_{\Delta_{yr}} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1 + \tau + i))\right]^T\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - i_1 - 1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau + i_2 + 1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_2})^T + \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - i_1 - 1) \cdot [\mathbf{e}_{y r}(k_1 + \tau + i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_2})^T + \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{e}_{y f}(k_1 - i_1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau + i_2 + 1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_2})^T + \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{e}_{y f}(k_1 - i_1) \cdot [\mathbf{e}_{y r}(k_1 + \tau + i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_2})^T.
 \end{aligned}$$

Для построения практически реализуемых алгоритмов вычисления таких компонент корреляционной матрицы используем приведенную ниже теорему, которую докажем с использованием доказанных выше лемм.

Теорема. Для уравнения погрешности оценки вектора состояния траекторной ИИС вида

$$\Delta_{z\partial}(k) = \mathbf{a}_{\Delta z\partial} \cdot \Delta_{z\partial}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{a}_{y\partial} \cdot \mathbf{y}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{b}_{y\partial} \cdot \mathbf{e}_{y\partial}(k)$$

имеют место следующие значения взаимных корреляций компонент этого уравнения:

$$M([\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_f(k_1)] \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) = \begin{cases} \mathbf{y}_{y f} \cdot [\mathbf{a}_{y f}^{(k_2 - k_1)}]^T & \text{при } k_2 \geq k_1; \\ \mathbf{0} & \text{при } k_2 < k_1, \end{cases} \quad (1.93)$$

$$M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_f(k_2)]^T) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } k_2 < k_1; \\ \mathbf{a}_{y f}^{(k_2 - k_1)} \cdot \mathbf{y}_{y f} & \text{при } k_2 \geq k_1, \end{cases} \quad (1.94)$$

$$M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{y r} \cdot \mathbf{e}_r(k_2)]^T) = \begin{cases} \mathbf{a}_{y r}^{(k_2 - k_1)} \cdot \mathbf{y}_{y r} & \text{при } k_1 \geq k_2; \\ \mathbf{0} & \text{при } k_1 < k_2, \end{cases} \quad (1.95)$$

$$M(\mathbf{b}_{y r} \cdot \mathbf{e}_r(k_1) \cdot [\mathbf{y}(k_2)]^T) = \begin{cases} \mathbf{a}_{y r}^{(k_2 - k_1)} \cdot \mathbf{y}_{y r} & \text{при } k_1 \geq k_2; \\ \mathbf{0} & \text{при } k_1 < k_2, \end{cases} \quad (1.96)$$

$$M(\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_f(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_f(k_2)]^T) = \begin{cases} \mathbf{y}_{y f} & \text{при } k_1 = k_2; \\ \mathbf{0} & \text{при } k_1 \neq k_2, \end{cases} \quad (1.97)$$

$$M(\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_2)]^T) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_{yr} & \text{при } k_1 = k_2; \\ \mathbf{0} & \text{при } k_1 \neq k_2, \end{cases} \quad (1.98)$$

$$M(\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{yf} \cdot \mathbf{e}_f(k_2)]^T) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } k_1 + 1 > k_2; \\ -\mathbf{a}_{yr} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yf} & \text{при } k_1 + 1 = k_2; \\ (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{a}_{yf}) \cdot \mathbf{a}_{yr}^{(k_2 - k_1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yr} & \text{при } k_1 + 1 < k_2, \end{cases} \quad (1.99)$$

$$M(\mathbf{b}_{yf} \cdot \mathbf{e}_f(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_2)]^T) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } k_1 < k_2 + 1; \\ -\mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yr} & \text{при } k_1 = k_2 + 1; \\ \boldsymbol{\gamma}_{yf} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^{(k_2 - k_1)})^T \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{a}_r)^T & \text{при } k_1 > k_2 + 1, \end{cases} \quad (1.100)$$

$$M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_{yf\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^{(k_2 - k_1)})^T & \text{при } k_2 \geq k_1; \\ \mathbf{a}_{yr}^{(k_2 - k_1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yf\infty} & \text{при } k_2 < k_1. \end{cases} \quad (1.101)$$

Доказательство. Докажем справедливость формулы (1.93), т.е. выражения

$$M([\mathbf{b}_{yf} \cdot \mathbf{e}_f(k_1)] \mathbf{y}^T(k_2)) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_{yf\infty} \cdot [\mathbf{a}_{yf}^{(k_2 - k_1)}]^T & \text{при } k_2 \geq k_1; \\ \mathbf{0} & \text{при } k_2 < k_1. \end{cases}$$

Используем выражение (1.88) для прямой фильтрации и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} M([\mathbf{b}_{yf} \cdot \mathbf{e}_f(k_1)] \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) &= M([\mathbf{y}(k_1) - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}(k_1 - 1)] \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) = \\ &= M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - \mathbf{a}_{yf} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - 1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)). \end{aligned}$$

При $k_1 \leq k_2$ на основании выражения (1.89) и леммы 4 имеем

$$\begin{aligned} M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - \mathbf{a}_{yf} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - 1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) &= \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2 - k_1)} - \\ - \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2 - k_1)} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T &= (\boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2 - k_1)} = \\ &= \boldsymbol{\gamma}_{yf} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2 - k_1)}. \end{aligned}$$

При $k_1 > k_2$ на основании формулы (1.89) можно записать выражение



$$\begin{aligned} & M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2) - \mathbf{a}_{yf}) \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - 1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) = \\ & = (\mathbf{a}_{yf})^{(k_2 - k_1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yf} \cdot (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1 - 1 - k_2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Докажем справедливость формулы (1.94).

Используем выражение (1.88) для прямой фильтрации и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{yf} \cdot \mathbf{e}_f(k_2)]^T) = M([\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}(k_2) - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}(k_2 - 1)]^T) = \\ & = M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2 - 1)) \cdot \mathbf{a}_{yf}^T. \end{aligned}$$

При $k_2 \geq k_1$ на основании формулы (1.89) можно записать выражение

$$\begin{aligned} & M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2 - 1)) \cdot \mathbf{a}_{yf}^T = (\mathbf{a}_{yf})^{(k_2 - k_1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \\ & - (\mathbf{a}_{yf})^{(k_2 - k_1)} \cdot \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T = (\mathbf{a}_{yf})^{(k_2 - k_1)} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) = \\ & = (\mathbf{a}_{yf})^{(k_2 - k_1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yf}. \end{aligned}$$

При $k_2 < k_1$ на основании формулы (1.89) можно записать выражение

$$\begin{aligned} & M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2 - 1)) \cdot \mathbf{a}_{yf}^T = \\ & = \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2 - k_1)} - \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2 - 1 - k_1)} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Докажем справедливость формулы (1.95).

Используем выражение (1.88) для обратной фильтрации и проведем преобразования

$$\begin{aligned} & M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_2)]^T) = M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{y}(k_2) - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{y}(k_2 + 1)]^T) = \\ & = M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2 + 1)) \cdot \mathbf{a}_{yr}^T. \end{aligned}$$

При $k_1 < k_2$ на основании формулы (1.89) и леммы 4 можно записать выражение

$$\begin{aligned} & M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2 + 1)) \cdot \mathbf{a}_{yr}^T = (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2 - k_1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \\ & - (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2 - k_1 + 1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T = (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2 - k_1)} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yr} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T) = (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2 - k_1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yr}. \end{aligned}$$

При $k_1 > k_2$ на основании формулы (1.89) можно записать выражение

$$\begin{aligned} & M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2 + 1)) \cdot \mathbf{a}_{yr}^T = \\ & = \mathbf{y}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{(k_1 - k_2)} - \mathbf{y}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{(k_1 - k_2 - 1)} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Докажем справедливость формулы (1.96).

Используем выражение (1.88) для обратной фильтрации и проведем преобразования

$$\begin{aligned} & M([\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_1)] \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) = M([\mathbf{y}(k_1) - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{y}(k_1 + 1)] \cdot \mathbf{y}(k_2)^T) = \\ & = M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - M(\mathbf{y}(k_1 + 1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) \cdot \mathbf{a}_{yr}^T. \end{aligned}$$

При $k_1 > k_2$ на основании формулы (1.89) и леммы 4 можно записать выражение

$$\begin{aligned} & M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - M(\mathbf{y}(k_1 + 1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) \cdot \mathbf{a}_{yr}^T = \\ & = (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2 - k_1)} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} - (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2 - k_1)} \cdot \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T = \\ & = (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2 - k_1)} \cdot (\mathbf{y}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T) = (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2 - k_1)} \cdot \mathbf{y}_{yr}. \end{aligned}$$

При $k_1 < k_2$ на основании формулы (1.89) можно записать выражение

$$\begin{aligned} & M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - M(\mathbf{y}(k_1 + 1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) \cdot \mathbf{a}_{yr}^T = \\ & = \mathbf{y}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{(k_2 - k_1)} - \mathbf{y}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{(k_2 - k_1 - 1)} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Доказательство справедливости формул (1.97) и (1.98) следует из свойств случайных гауссовых последовательностей.

Докажем справедливость формулы (1.99).

Используем выражение (1.88) для обратной фильтрации и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & M([\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_1)] \cdot [\mathbf{b}_{yf} \cdot \mathbf{e}_f(k_2)]^T) = \\ & = M([\mathbf{y}(k_1) - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{y}(k_1 + 1)] \cdot [\mathbf{y}(k_2) - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}(k_2 - 1)]^T) = \\ & = M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2 - 1)) \cdot \mathbf{a}_{yf}^T - M([\mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{y}(k_1 + 1)] \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) + \\ & + M([\mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{y}(k_1 + 1)] \cdot [\mathbf{y}^T(k_2 - 1)] \cdot \mathbf{a}_{yf}^T). \end{aligned}$$



При $k_2 > k_1 + 1$ на основании формулы (1.89) и леммы 4 можно записать выражение

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-k_2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-k_2+1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T - \mathbf{a}_{yr} \cdot (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1+1-k_2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} + \\ & + \mathbf{a}_{yr} \cdot (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1+1-k_2+1)} \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T = (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-k_2)} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) - \\ & - \mathbf{a}_{yr} \cdot (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1+1-k_2)} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) = (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{a}_{yf}) \cdot (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-k_2)} \times \\ & \times (\boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) = (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{a}_{yf}) \cdot (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-k_2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yr}. \end{aligned}$$

При $k_2 < k_1 + 1$ на основании формулы (1.89) можно записать выражение

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2-k_1)} - \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2-1-k_1)} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T - \mathbf{a}_{yr} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2-k_1-1)} + \mathbf{a}_{yr} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \times \\ & \times (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2-1-k_1-1)} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T = -\mathbf{a}_{yr} \cdot [\boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2-k_1-1)} - \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2-k_1-1)}] = 0. \end{aligned}$$

При $k_2 = k_1 + 1$ на основании формулы (1.89) и леммы 4 можно записать выражение

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T) - \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T - \mathbf{a}_{yr} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} + \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T = \\ & = -\mathbf{a}_{yr} (\boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) = -\mathbf{a}_{yr} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yf}. \end{aligned}$$

Докажем справедливость формулы (1.100).

Используем выражения (1.88) для прямой и обратной фильтраций и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & M([\mathbf{b}_{yf} \cdot \mathbf{e}_f(k_1)] \cdot [\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_2)]^T) = M([\mathbf{y}(k_1) - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}(k_1-1)] \cdot [\mathbf{y}(k_2) - \\ & - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{y}(k_2+1)]^T) = M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) - M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2+1)) \cdot \mathbf{a}_{yr}^T - \\ & - M([\mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}(k_1-1)] \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) + M([\mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}(k_1-1)] \cdot [\mathbf{y}^T(k_2+1)] \cdot \mathbf{a}_{yr}^T). \end{aligned}$$

При $k_1 < k_2 + 1$ на основании формулы (1.89) можно записать выражение

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-k_2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-k_2-1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T - \mathbf{a}_{yf} \cdot (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-1-k_2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} + \\ & + \mathbf{a}_{yf} \cdot (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-1-k_2-1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T = (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-k_2+1)} \cdot (\mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T) - \\ & - (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-k_2-1)} \cdot (\mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T) = 0. \end{aligned}$$

При $k_1 > k_2 + 1$ на основании формул (1.89) и (1.90) можно записать выражение

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2-k_1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2-1-k_1)} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T - \mathbf{a}_{yf} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{(k_2-k_1+1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} + \\ & + \mathbf{a}_{yf} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2+2-k_1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T = (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{a}_{yr}) \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2-k_1)} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yr} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T) = \\ & = (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{a}_{yr}) \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2-k_1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yr} = \boldsymbol{\gamma}_{yf} \cdot [(\mathbf{a}_{yf})^{(k_2-k_1)}]^T \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{a}_{yr})^T. \end{aligned}$$

При $k_1 = k_2 + 1$ на основании матричной корреляционной функции (1.89) можно записать выражение

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T - \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} + \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T \cdot \mathbf{a}_{yr}^T = \\ & = -\mathbf{a}_{yf} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yr} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T) = -\mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yr}. \end{aligned}$$

Докажем справедливость выражения (1.101).

Выражение (1.101) является подтверждением формулы (1.89), т.е.

$$M(\mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) = \begin{cases} (\mathbf{a}_{yf})^{(k_1-k_2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} = \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{(k_1-k_2)} & \text{при } k_1 \geq k_2; \\ \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(k_2-k_1)} = (\mathbf{a}_{yr})^{(k_2-k_1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} & \text{при } k_1 < k_2. \end{cases}$$

Таким образом, теорему можно считать доказанной.

Доказанная теорема позволяет избавиться от математических ожиданий в формуле (1.77) для корреляционной функции.

Далее, используя полученные выше результаты, проведем разработку алгоритма расчета компонент формулы (1.77). При этом будут использоваться доказанные выше соотношения

$$\Delta_{zf}(k) = \mathbf{a}_{\Delta zf} \cdot \Delta_{zf}(k-1) + \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k-1) + \mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k), \quad (1.102)$$

$$\Delta_{ze}(k) = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{b}_{ye} \cdot \mathbf{e}_{ye}(k) = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{y}(k). \quad (1.103)$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $k_1 < k_2$, так как корреляционная функция стационарных случайных процессов симметричная. Для удобства введем переменную $\tau = k_2 - k_1$.

Построение алгоритма определения компоненты $\mathbf{K}_{(z)ee}(\tau)$

Используя выражение (1.103), получим следующую формулу для вычисления значений функции $\mathbf{K}_{(z)ee}(\tau)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(z)ee}(\tau) &= M(\Delta_{ze}(k_1) \cdot [\Delta_{ze}(k_2)]^T) = M(\mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{b}_{ye} \cdot \mathbf{e}_{ye}(k_1)) \cdot [\mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{b}_{ye} \cdot \mathbf{e}_{ye}(k_2)]^T = \\ &= \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \{M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{y}(k_2)]^T)\} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{e\infty} \cdot (\mathbf{a}_y^T)^\tau \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T. \end{aligned}$$



Построение алгоритма определения компоненты $\mathbf{K}_{(z)ef}(\tau)$

Основываясь на результатах доказательства леммы 1 и формуле (1.103), свидетельствующих о том, что

$$\Delta_{zf}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k-i-1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k-i)];$$

$$\Delta_{ze}(k) = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{y}(k),$$

проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(z)ef}(\tau) &= M(\Delta_{ze}(k_1) \cdot [\Delta_{zf}(k_2)]^T) = \\ &= M \left(\mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{y}(k_1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k_2-i-1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k_2-i)] \right)^T \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot (M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{y}(k_1+\tau-i-1)]^T)) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^i)^T + \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot (M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k_1+\tau-i)]^T)) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^i)^T. \end{aligned}$$

Построим алгоритм вычисления первой составляющей приведенного соотношения с использованием формулы (1.101) и выводов леммы 3:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \sum_{i=0}^{\tau-1} \gamma_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{\tau-i-1} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^i)^T + \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \sum_{i=\tau}^{\infty} [(\mathbf{a}_{yf})^{\tau-i+1} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \times \\ \times (\mathbf{a}_{\Delta zf}^i)^T] = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \sum_{i=0}^{\tau-1} (\mathbf{a}_{yf}^T)^{\tau-i-1} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^i)^T + \mathbf{b}_{\Delta e} \times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{yf})^j \cdot \mathbf{a}_{yf} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^j)^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{\tau})^T = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \sum_{i=0}^{\tau-1} (\mathbf{a}_{yf}^T)^{\tau-i-1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^i)^T + \\ + \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yf}, \mathbf{a}_{yf} \cdot \gamma_{y\infty}, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{\tau})^T. \end{aligned}$$

Построим алгоритм вычисления второй составляющей компоненты $\mathbf{K}_{(z)ef}(\tau)$ с использованием формулы (1.94) и выводов леммы 3:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot (M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{b}_f \cdot \mathbf{e}_{yf}(k_1 + \tau - i)]^T)) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^i)^T = \\
 & = \sum_{i=\tau}^{\infty} \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{a}_{yf}^{\tau+i} \cdot \gamma_{yf} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^i)^T = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \left[\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{a}_{yf}^j \cdot \gamma_{yf} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^i)^T \right] \times \\
 & \quad \times (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{\tau})^T = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yf}, \mathbf{a}_{yf} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{\tau})^T.
 \end{aligned}$$

Тогда полное выражение для определения рассматриваемой компоненты корреляционной функции примет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{(z)ef}(\tau) = & \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \left[\gamma_{y\infty} \cdot \sum_{i=0}^{\tau-1} (\mathbf{a}_{yf}^T)^{\tau-i-1} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^i)^T + \right. \\
 & \left. + \text{Svt}(\mathbf{a}_{yf}, [\mathbf{a}_{yf} \cdot \gamma_{y\infty} + \gamma_{yf} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T], \mathbf{a}_{\Delta zf}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{\tau})^T \right].
 \end{aligned}$$

Построение алгоритма определения компоненты $\mathbf{K}_{(z)fe}(\tau)$

С помощью леммы 1 и формулы (1.103) проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{(z)fe}(\tau) &= M(\Delta_{zf}(k_1) \cdot [\Delta_{ze}(k_2)]^T) = \\
 &= M \left(\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k_1 - i - 1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k_1 - i)] \right\} \cdot [\mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{y}(k_2)]^T \right) = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - i - 1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot \mathbf{b}_{\Delta yf} \times \\
 & \quad \times \{M([\mathbf{b}_f \cdot \mathbf{e}_{yf}(k_1 - i)] \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau)]^T)\} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T. \quad (1.104)
 \end{aligned}$$

Выведем формулу для оценки первого слагаемого соотношения (1.104), основываясь на результатах доказательства леммы 3 и формуле (1.101):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)] \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^i \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{\tau} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T = \\
 & = \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T, \mathbf{a}_{yf}^T) \cdot (\mathbf{a}_{yf}^{\tau})^T \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом выведем формулу для оценки второй составляющей соотношения (1.104)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^i \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \gamma_{y_f} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{\tau+i} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^i \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \gamma_{y_f}) \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^i \right] \times$$

$$\times (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{\tau} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T = \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \gamma_{y_f}, \mathbf{a}_{y_f}^T) \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{\tau} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T.$$

С учетом проведенных выше преобразований получим следующий результат:

$$\mathbf{K}_{(z)fe}(\tau) = \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \gamma_{y_{\infty}} \cdot \mathbf{a}_{y_f}^T, \mathbf{a}_{y_f}^T) \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{\tau} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T +$$

$$+ \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \gamma_{y_f}, \mathbf{a}_{y_f}^T) \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{\tau} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T =$$

$$= \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, (\mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot \gamma_{y_{\infty}} \cdot \mathbf{a}_{y_f}^T + \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \gamma_{y_f}), \mathbf{a}_{y_f}^T) \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{\tau} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T.$$

Построение алгоритма определения компоненты $\mathbf{K}_{(z)er}(\tau)$

Для построения алгоритма расчета компоненты $\mathbf{K}_{(z)er}(\tau)$ используем соотношения

$$\Delta_{zr}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i [\mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{y}(k+i+1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i [\mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k+i)];$$

$$\Delta_{ze}(k) = \mathbf{b}_{\Delta ye} \cdot \mathbf{e}_{ye}(k).$$

Проведем преобразования вида

$$\mathbf{K}_{(z)er}(\tau) = M(\Delta_{ze}(k_1) \cdot [\Delta_{zr}(k_2)]^T) =$$

$$= M \left(\mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{y}(k_1) \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{y}(k_2 + i + 1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_2 + i)] \right\}^T \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \{ M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau + i + 1)]^T) \} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^i)^T +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \{ M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1 + \tau + i)]^T) \} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^i)^T.$$

Выведем формулу для оценки первой составляющей приведенного соотношения, основываясь на результатах доказательства леммы 3 и формуле (1.101):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{b}_{\Delta e} (\mathbf{a}_{yr})^{\tau+1} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^i \cdot \gamma_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^i)^T = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{\tau} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{yr})^i \cdot [\mathbf{a}_{yr} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T] \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^i)^T = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^{\tau}) \cdot \text{SvT}(\mathbf{a}_{yr}, \mathbf{a}_{yr} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr}^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T).$$

Вычисление второй составной части компоненты $\mathbf{K}_{(z)er}(\tau)$ проводится следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^{\tau+1} \cdot \gamma_{y\infty}) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^i)^T = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{a}_{yf}^{\tau} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{yr}^i \cdot \gamma_{y\infty} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^i)^T =$$

$$= \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{a}_{yf}^{\tau} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yr}, \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr}^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T).$$

Тогда полное выражение для определения рассматриваемой компоненты примет вид

$$\mathbf{K}_{(z)er}(\tau) = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{a}_{yf}^{\tau} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yr}, (\mathbf{a}_{yr} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr}^T + \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr}^T), \mathbf{a}_{\Delta zr}^T) \cdot \gamma_{yf} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{\tau}.$$

Построение алгоритма определения компоненты $\mathbf{K}_{(z)re}(\tau)$

Алгоритм определения этой компоненты аналогичен предыдущему. С использованием формул (1.85) и (1.86) выполняются преобразования

$$\mathbf{K}_{(z)re}(\tau) = M(\Delta_{zr}(k_1) \cdot [\Delta_{ze}(k_2)]^T) =$$

$$= M \left(\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{y}(k_1+i+1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1+i)] \right\} \cdot [\mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \mathbf{y}(k_2)]^T \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{y}(k_1+i+1) \cdot [\mathbf{y}(k_1+\tau)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr}) \cdot M(\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1+i) \cdot [\mathbf{y}(k_1+\tau)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T.$$

Определение первого слагаемого этого выражения проводится по формуле

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{y}(k_1+i+1) \cdot [\mathbf{y}(k_1+\tau)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta z_r}^i \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_r} \cdot (\mathbf{a}_{y_r}^{\tau-i-1} \cdot \gamma_{y_{\infty}}) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T + \sum_{i=\tau}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_r}^i \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_r} \cdot [\gamma_{y_{\infty}} \cdot (\mathbf{a}_{y_r}^{i+1-\tau})^T] \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T = \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta z_r}^i \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_r} \cdot \mathbf{a}_{y_r}^{\tau-i-1} \right) \cdot \gamma_{y_{\infty}} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_r}^{\tau} \cdot \mathbf{a}_{\Delta z_r}^j \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_r} \cdot (\gamma_{y_{\infty}} \mathbf{a}_{y_r}^{j+1}) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T = \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta z_r}^i \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_r} \cdot \mathbf{a}_{y_r}^{\tau-i-1} \right) \cdot \gamma_{y_{\infty}} \cdot \mathbf{b}_{\Delta e} + \mathbf{a}_{\Delta z_r}^{\tau} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_r}, \mathbf{a}_{\Delta y_r} \cdot \gamma_{y_{\infty}} \cdot \mathbf{a}_{y_r}^T, \mathbf{a}_{y_r}^T) \times \\
 &\quad \times (\mathbf{b}_{\Delta e})^T \cdot (\mathbf{a}_{y_r})^{\tau} \cdot \gamma_{y_r}.
 \end{aligned}$$

Определение второго слагаемого компоненты $\mathbf{K}_{(z)re}(\tau)$ проводится по формуле

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=\tau}^{\infty} [\mathbf{a}_{\Delta z_r}^i \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_r} \cdot (\mathbf{a}_{y_r})^{i-\tau} \cdot \gamma_{y_r}] \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T &= \sum_{j=0}^{\infty} [\mathbf{a}_{\Delta z_r}^{\tau} \cdot \mathbf{a}_{\Delta z_r}^j \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_r} \cdot (\mathbf{a}_{y_r})^j \cdot \gamma_{y_r}] \times \\
 &\quad \times (\mathbf{b}_{\Delta e})^T = \mathbf{a}_{\Delta z_r}^{\tau} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_r}, \mathbf{b}_{\Delta y_r}, \mathbf{a}_{y_r}) \cdot \gamma_{y_r} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T.
 \end{aligned}$$

Тогда полное выражение для определения рассматриваемой компоненты примет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{(z)re}(\tau) &= \left(\sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta z_r}^i \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_r} \cdot \mathbf{a}_{y_r}^{\tau-i-1} \right) \cdot \gamma_{y_{\infty}} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T \cdot \mathbf{a}_{\Delta z_r}^{\tau} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_r}, \mathbf{a}_{\Delta y_r} \times \\
 &\quad \times \gamma_{y_{\infty}} \cdot (\mathbf{a}_{y_r})^T, \mathbf{a}_{y_r}^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T + \mathbf{a}_{\Delta z_r}^{\tau} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_r}, \mathbf{b}_{\Delta y_r}, \mathbf{a}_{y_r}) \cdot \gamma_{y_r} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T.
 \end{aligned}$$

Построение алгоритма определения компоненты $\mathbf{K}_{(z)ff}(\tau)$

Известно, что

$$\Delta_{z_f}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot \mathbf{y}(k-i-1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \mathbf{e}_{y_f}(k-i)].$$

Тогда определение компоненты $\mathbf{K}_{(z)ff}(\tau)$ проводится путем преобразований

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{(z)ff}(\tau) &= M(\Delta_{z_f}(k_1) \cdot [\Delta_{z_f}(k_2)]^T) = \\
 &= M \left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot \mathbf{y}(k_1-i-1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \mathbf{e}_{y_f}(k_1-i)] \right) \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \mathbf{y}(k_1 + \tau - i - 1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta y f} \cdot \mathbf{e}_{y f}(k_1 + \tau - i)] \right\}^T = \\
 & = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - i_1 - 1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau - i_2 - 1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T + \\
 & + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - i_1 - 1) \cdot [\mathbf{b}_{y f} \mathbf{e}_{y f}(k_1 + \tau - i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T + \\
 & + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{e}_{y f}(k_1 - i_1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau - i_2 - 1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T + \\
 & + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{e}_{y f}(k_1 - i_1) \cdot [\mathbf{b}_{y f} \mathbf{e}_{y f}(k_1 + \tau - i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \\
 & = \mathbf{S}_{ff} 1 + \mathbf{S}_{ff} 2 + \mathbf{S}_{ff} 3 + \mathbf{S}_{ff} 4. \tag{1.105}
 \end{aligned}$$

Полученное выражение состоит из четырех компонент.

Первая компонента выражения (1.105) состоит из трех слагаемых:

$$\mathbf{S}_{ff} 1 = \mathbf{S}_{ff} 11 + \mathbf{S}_{ff} 12 + \mathbf{S}_{ff} 13. \tag{1.106}$$

Определение первого слагаемого выражения (1.106) проводится по формуле

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{ff} 11 &= \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \mathbf{y}_{y \infty} \cdot (\mathbf{a}_{y f}^T)^{\tau-i_2+i_1} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \mathbf{y}_{y \infty} \cdot (\mathbf{a}_{y f}^T)^{i_1} \cdot (\mathbf{a}_{y f}^T)^{\tau-i_2} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \\
 &= \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z f}, \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \mathbf{y}_{y \infty}, \mathbf{a}_{y f}^T) \sum_{i_2=0}^{\tau-1} (\mathbf{a}_{y f}^T)^{\tau-i_2} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2}.
 \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые выражения (1.106) определяются формулами

$$\mathbf{S}_{ff} 12 = \sum_{i_2=\tau}^{\infty} \sum_{i_1=i_2-\tau+1}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \mathbf{y}_{y \infty} \cdot (\mathbf{a}_{y f}^T)^{\tau-i_2+i_1} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T =$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=l_2+1}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot (\mathbf{a}_{y f}^T)^{l_2+i_1} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{\tau+l_2})^T = \\
 &= \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{l_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{l_1+l_2+1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot (\mathbf{a}_{y f}^T)^{1+l_1} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{\tau+l_2})^T = \\
 &= \sum_{l_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{l_2} \left(\sum_{l_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{l_1+1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot (\mathbf{a}_{y f}^T)^{1+l_1} \right) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{l_2})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{\tau})^T = \\
 &= \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z f}, \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z f}, \mathbf{a}_{\Delta z f} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot \mathbf{a}_{y f}^T, \mathbf{a}_{y f}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T, \mathbf{a}_{\Delta z f}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^T)^{\tau}; \\
 \mathbf{S}_{ff} 13 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=\tau+1}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot (\mathbf{a}_{y f}^T)^{i_2-\tau-i_1} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot (\mathbf{a}_{y f}^T)^{l_2} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{l_2})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{\tau})^T = \\
 &= \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z f}, \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z f}, \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f}^T, \mathbf{a}_{\Delta z f}^T), \mathbf{a}_{\Delta z f}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^T)^{\tau}.
 \end{aligned}$$

На основании свойства, что $M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_f(k_2)]^T) = (\mathbf{a}_{y f})^{(\tau+i_1+1-i_2)} \times \boldsymbol{\gamma}_{y f}$ при $k_1 - i_1 - 1 \geq k_1 + \tau - i_2$; $i_1 - 1 \geq \tau - i_2$; $i_2 \geq \tau + i_1 + 1$ и $M(\mathbf{y}(k_1) \times [\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_f(k_2)]^T) = \mathbf{0}$ при $i_2 \leq \tau + i_1 + 1$, определение второго слагаемого выражения (1.105) выполняется по формуле

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{ff} 2 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=\tau+i_1+1}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot (\mathbf{a}_{y f})^{(\tau+1+i_1-i_2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y f} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot (\mathbf{a}_{y f})^l \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y f} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot \mathbf{a}_{\Delta z f}^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^l)^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{\tau})^T = \\
 &= \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z f}, \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{y f}, \boldsymbol{\gamma}_{y f} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y f}^T \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f}^T, \mathbf{a}_{\Delta y f}^T), \mathbf{a}_{\Delta z f}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^T)^{\tau}.
 \end{aligned}$$

А на основании свойства, что

$$M([\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_f(k_1)] \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) = (\mathbf{a}_{y f})^{(\tau+i_1+1-i_2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y f} = \boldsymbol{\gamma}_{y f} \cdot (\mathbf{a}_{y f}^T)^{(\tau+i_1-i_2-1)}$$

при $k_1 - i_1 \leq k_1 + \tau - i_2 - 1$; $i_2 + 1 - \tau \leq i_1$ и $M([\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_f(k_1)] \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) = \mathbf{0}$ при $i_2 > \tau + i_1 - 1$, третья составляющая выражения (1.105) разбивается на две части:



$$\begin{aligned} S_{ff} 3 = & \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{(\tau+i_1-i_2-1)} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T + \\ & + \sum_{i_2=\tau}^{\infty} \sum_{i_1=i_2+1-\tau}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{(\tau+i_1-i_2-1)} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T = S_{ff} 31 + S_{ff} 32, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_{ff} 31 = & \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{(i_1)} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{(\tau-i_2-1)} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T = \\ & = \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f}, \mathbf{a}_{y_f}^T) \sum_{i_2=0}^{\tau-1} (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{(\tau-i_2-1)} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T; \\ S_{ff} 32 = & \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=i_2+1}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{(i_1-i_2-1)} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{\tau})^T = \\ & = \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2+1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{i_1} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{\tau})^T = \\ & = \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, \mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f}, \mathbf{a}_{y_f}^T) \cdot \mathbf{a}_{\Delta z_f}^T, \mathbf{a}_{\Delta z_f}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{\tau})^T. \end{aligned}$$

В соответствии с выражением (1.97) определение четвертой составной части компоненты $\mathbf{K}_{(z)ff}(\tau)$ проводится по формуле

$$\begin{aligned} S_{ff} 4 = & \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1+\tau})^T = \\ & = \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{\tau})^T = \\ & = \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f}, \mathbf{a}_{\Delta z_f}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{\tau})^T. \end{aligned}$$

Построение алгоритма определения компоненты $\mathbf{K}_{(z)rr}(\tau)$

Корреляционная функция обратной фильтрации находится аналогично корреляционной функции прямой фильтрации.

На основании формулы

$$\Delta_{z_r}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_r}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta y_r} \cdot \mathbf{y}(k+i+1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_r}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta y_r} \cdot \mathbf{e}_{y_r}(k+i)]$$

можно записать следующее выражение для корреляционной функции обратной фильтрации:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{(z)rr}(\tau) &= M(\Delta_{zr}(k_1) \cdot [\Delta_{zr}(k_2)]^T) = \\
 &= M \left(\left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{y}(k_1 + i + 1) + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1 + i) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1 + i) + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1 + \tau + i)]^T \right]^T \right) = \\
 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 + i_1 + 1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau + i_2 + 1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T + \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 + i_1 + 1) \cdot [\mathbf{b}_{yr} \mathbf{e}_{yr}(k_1 + \tau + i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T + \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{b}_{yr} \mathbf{e}_{yr}(k_1 + i_1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau + i_2 + 1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T + \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{b}_{yr} \mathbf{e}_{yr}(k_1 + i_1) [\mathbf{b}_{yr} \mathbf{e}_{yr}(k_1 + \tau + i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T = \\
 &= \mathbf{S}_{rr}1 + \mathbf{S}_{rr}2 + \mathbf{S}_{rr}3 + \mathbf{S}_{rr}4.
 \end{aligned}$$

Первая составляющая полученного выражения состоит из трех частей:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{rr}1 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 + i_1 + 1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau + i_2 + 1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T = \\
 &= \mathbf{S}_{rr}11 + \mathbf{S}_{rr}12 + \mathbf{S}_{rr}13.
 \end{aligned}$$

Используя ранее доказанное свойство, что $M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{y}(k_2)]^T) = \mathbf{y}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(\tau+i_2-i_1)} = (\mathbf{a}_{yr})^{(\tau+i_2-i_1)} \cdot \mathbf{y}_{y\infty}$ при $k_1 + i_1 + 1 \leq k_1 + \tau + i_2 + 1$; $i_1 \leq \tau + i_2$; $i_1 - \tau \leq i_2$, можно получить формулы для всех частей первой составляющей компоненты $\mathbf{K}_{(z)rr}(\tau)$:

$$\mathbf{S}_{rr}11 = \sum_{i_1=0}^{\tau-1} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{\tau+i_2-i_1} \cdot \mathbf{y}_{yst} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T =$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i_1=0}^{\tau-1} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \gamma_{yrf} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{\tau-i_1} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{i_2} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \gamma_{yrf} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{\tau-i_1} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta yr}, \mathbf{a}_{\Delta yr}, \mathbf{a}_{yrf}^T); \\
 S_{rr} 12 &= \sum_{i_1=\tau}^{\infty} \sum_{i_2=i_1-\tau+1}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{\tau-i_1+i_2} \cdot \gamma_{yrf} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{\tau} \cdot \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{i_2+1} \cdot \gamma_{yrf} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2+1})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1})^T = \\
 &= (\mathbf{a}_{\Delta zr})^{\tau} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yr}, \mathbf{a}_{yr} \cdot \gamma_{yrf} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr}^T \cdot \mathbf{a}_{\Delta zr}^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T), \mathbf{a}_{\Delta zr}^T).
 \end{aligned}$$

Используя ранее доказанное свойство, что $M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{y}(k_2)]^T) = (\mathbf{a}_{yrf})^{(i_1-i_2-\tau)} \cdot \gamma_{yrf} = \gamma_{yrf} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{(i_1-i_2-\tau)}$ при $k_1+i_1+1 \geq k_1+\tau+i_2+1$; $i_1 \geq \tau+i_2$, получим формулу

$$\begin{aligned}
 S_{rr} 13 &= \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=\tau+i_2}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \gamma_{yrf} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{i_1-i_2-\tau} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{\tau} \cdot \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2} \cdot \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \gamma_{yrf} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{i_1} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T = \\
 &= \mathbf{a}_{\Delta zr}^{\tau} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \gamma_{yrf} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T).
 \end{aligned}$$

Выражение для вычисления второй составной части компоненты имеет вид

$$S_{rr} 2 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{y}(k_1+i_1+1) \cdot [\mathbf{e}_{yr}(k_1+\tau+i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T.$$

Используя доказанное ранее свойство, что $M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_2)]^T) = (\mathbf{a}_{yr})^{(\tau+i_2-i_1-1)} \cdot \gamma_{yr}$ при $k_1+i_1+1 > k_1+\tau+i_2$; $i_1+1 > \tau+i_2$; $i_1 > \tau+i_2-1$ и $M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_2)]^T) = \mathbf{0}$ при $i_1 \leq \tau+i_2-1$, выведем формулы для оценки составных частей этой компоненты:

$$S_{rr} 21 = \sum_{i_1=0}^{\tau-1} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{a}_{yr}^{(\tau+i_2-i_1-1)} \cdot \gamma_{yr} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_2})^T =$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i_1=0}^{\tau-1} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{a}_{yr}^{(\tau-i_1-1)} \cdot \mathbf{a}_{yr}^{i_2} \cdot \gamma_{yr} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{i_1=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{a}_{yr}^{(\tau-i_1-1)} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta Zr}, \gamma_{yr}, \mathbf{a}_{\Delta Zr}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta Zr}^T)^\tau; \\
 S_{rr} 22 &= \sum_{i_1=\tau}^{\infty} \sum_{i_2=i_1+1-\tau}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{a}_{yr}^{(\tau+i_2-i_1-1)} \cdot \gamma_{yr} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=l_1+1}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta Zr}^\tau \cdot \mathbf{a}_{\Delta Zr}^{l_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{a}_{yr}^{(i_2-l_1-1)} \cdot \gamma_{yr} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_2})^T = \\
 &= \mathbf{a}_{\Delta Zr}^\tau \cdot \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta Zr}^{l_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{a}_{yr}^{l_2} \cdot \gamma_{yr} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta Zr}^{l_2})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta Zr}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta Zr}^{l_1})^T = \\
 &= \mathbf{a}_{\Delta Zr}^\tau \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta Zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yr}, \gamma_{yr} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T, \mathbf{a}_{\Delta Zr}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta Zr})^T, \mathbf{a}_{\Delta Zr}^T).
 \end{aligned}$$

Выражение для вычисления третьей составной части компоненты $\mathbf{K}_{(z)rr}(\tau)$ имеет вид

$$S_{rr} 3 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1+i_1) \cdot [\mathbf{y}(k_1+\tau+i_2+1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_2})^T.$$

С учетом доказанного ранее свойства, заключающегося в том, что $M([\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_1)] \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) = (\mathbf{a}_{yr})^{(i_1-i_2-\tau-1)} \cdot \gamma_{yr}$ при $k_1+i_1 \geq k_1+\tau+i_2+1$; $i_1 \geq \tau+i_2+1$ и $M([\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_r(k_1)] \cdot \mathbf{y}^T(k_2)) = \mathbf{0}$ при $i_1 < \tau+i_2+1$, это выражение может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 S_{rr} 3 &= \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=\tau+i_1+1}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \gamma_{yr} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{(i_1-1-i_2-\tau)} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{l_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta Zr}^{\tau+1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_2} \cdot \mathbf{a}_{\Delta Zr}^{l_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \gamma_{yr} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{l_1} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta Zr}^{i_2})^T = \\
 &= \mathbf{a}_{\Delta Zr}^{\tau+1} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta Zr}, \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta Zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \gamma_{yr}, \mathbf{a}_{yr}^T) \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr}^T, \mathbf{a}_{\Delta Zr}^T).
 \end{aligned}$$

Выражение для вычисления четвертой части компоненты $\mathbf{K}_{(z)rr}(\tau)$ имеет вид

$$\mathbf{S}_{rr} 4 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot M(\mathbf{b}_{y r} \cdot \mathbf{e}_{y r}(k_1 + i_1) \cdot [\mathbf{b}_{y r} \cdot \mathbf{e}_{y r}(k_1 + \tau + i_2)]^T) \times \\ \times (\mathbf{b}_{\Delta y r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_2})^T$$

и с учетом формулы (1.98) может быть записано в виде

$$\mathbf{S}_{rr} 4 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot \gamma_{y r} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1+\tau})^T = \\ = \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot \gamma_{y r} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{\tau})^T = \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z r}, \gamma_{y r}, \mathbf{a}_{\Delta z r}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^T)^{\tau}.$$

Построение алгоритма определения компоненты $\mathbf{K}_{(z)fr}(\tau)$

Функция взаимной корреляции $\mathbf{K}_{(z)fr}(\tau)$ между прямой и обратной фильтрациями строится по аналогичной схеме:

$$\mathbf{K}_{(z)fr}(\tau) = M(\Delta_{z f}(k_1) \cdot [\Delta_{z r}(k_2)]^T) = \\ = M\left(\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot \mathbf{y}(k_1 - i - 1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta y f} \cdot \mathbf{e}_{y f}(k_1 - i)]\right\} \times \right. \\ \left. \times \left\{\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta y r} \cdot \mathbf{y}(k_1 + \tau + i + 1)]\right\} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot \mathbf{e}_{y r}(k_1 + \tau + i)]^T\right) = \\ = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - i_1 - 1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau + i_2 + 1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_2})^T + \\ + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - i_1 - 1) \cdot [\mathbf{b}_{y r} \cdot \mathbf{e}_{y r}(k_1 + \tau + i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_2})^T + \\ + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_{y f}(k_1 - i_1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau + i_2 + 1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_2})^T + \\ + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y f} \cdot M(\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_{y f}(k_1 - i_1) \cdot [\mathbf{b}_{y r} \cdot \mathbf{e}_{y r}(k_1 + \tau + i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_2})^T = \\ = \mathbf{S}_{fr} 1 + \mathbf{S}_{fr} 2 + \mathbf{S}_{fr} 3 + \mathbf{S}_{fr} 4.$$



Выражение для первой составной части компоненты $\mathbf{K}_{(z)fr}(\tau)$

$$\mathbf{S}_{fr}1 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - i_1 - 1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau + i_2 + 1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_r}^{i_2})^T$$

с учетом формулы (1.101) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{fr}1 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y^{\infty}} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{\tau+i_2+i_1+2} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T = \\ &= \left[\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y^{\infty}} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{i_1} \right] \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{\tau+2} \cdot \left[\sum_{i_2=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T \right] = \\ &= \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, \mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y^{\infty}}, \mathbf{a}_{y_f}^T) \cdot \mathbf{a}_{y_f}^{\tau+2} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{y_f}^T, \mathbf{a}_{\Delta y_f}, \mathbf{a}_{\Delta z_f}^T). \end{aligned}$$

Выражение для второй составной части компоненты

$$\mathbf{S}_{fr}2 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot M(\mathbf{y}(k_1 - i_1 - 1) \cdot [\mathbf{b}_{y_r} \cdot \mathbf{e}_{y_r}(k_1 + \tau + i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y_r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_r}^{i_2})^T$$

с учетом формулы (1.95) запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{fr}2 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot (\mathbf{a}_{y_f})^{(\tau+1+i_1+i_2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T = \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot \mathbf{a}_{y_f} \cdot (\mathbf{a}_{y_f})^{i_1} \cdot (\mathbf{a}_{y_f})^{\tau+1} \cdot (\mathbf{a}_{y_f})^{i_2} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T = \\ &= \left[\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot \mathbf{a}_{y_f} \cdot (\mathbf{a}_{y_f})^{i_1} \right] \cdot (\mathbf{a}_{y_f})^{\tau+1} \cdot \left[\sum_{i_2=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{y_f})^{i_2} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T \right] = \\ &= \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, \mathbf{a}_{\Delta y_f} \cdot \mathbf{a}_{y_f}, \mathbf{a}_{y_f}) \cdot \mathbf{a}_{y_f}^{\tau+1} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{y_f}, \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f}^T, \mathbf{a}_{\Delta z_r}^T). \end{aligned}$$

Выражение для третьей составной части компоненты

$$\mathbf{S}_{fr}3 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot M(\mathbf{b}_{y_f} \cdot \mathbf{e}_{y_f}(k_1 - i_1) \cdot [\mathbf{y}(k_1 + \tau + i_2 + 1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_r}^{i_2})^T$$

с учетом формулы (1.93) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 S_{fr3} &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{(\tau+i_1+i_2+1)} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot \mathbf{a}_{y_f}^T \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{i_1} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{\tau} \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{i_2} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T = \\
 &= \left[\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot \mathbf{a}_{y_f}^T \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{i_1} \right] \cdot (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{\tau} \cdot \left[\sum_{i_2=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{y_f}^T)^{i_2} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y_f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_2})^T \right] = \\
 &= \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_f} \cdot \mathbf{a}_{y_f}^{\tau}, \mathbf{a}_{y_f}^{\tau}) \cdot \mathbf{a}_{y_f}^{\tau} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{y_f}^T, \mathbf{a}_{\Delta y_f}^T, \mathbf{a}_{\Delta z_f}^T).
 \end{aligned}$$

Выражение для четвертой составной части компоненты:

$$\begin{aligned}
 S_{fr4} &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot M(\mathbf{b}_{y_f} \cdot \mathbf{e}_{y_f}(k_1 - i_1) \cdot [\mathbf{b}_{y_r} \cdot \mathbf{e}_{y_r}(k_1 + \tau + i_2)]^T) \times \\
 &\quad \times (\mathbf{b}_{\Delta y_r})^T (\mathbf{a}_{\Delta z_r}^{i_2})^T
 \end{aligned}$$

с учетом формулы (1.100) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 S_{fr4} &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{y_f} \cdot \mathbf{a}_{y_r}) \cdot (\mathbf{a}_{y_r})^{\tau+i_1+i_2} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{y_{st}} - \mathbf{a}_{y_r} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_{\infty}} \cdot \mathbf{a}_{y_r}^T) \times \\
 &\quad \times (\mathbf{b}_{\Delta y_r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_r}^{i_2})^T = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{y_f} \cdot \mathbf{a}_{y_r}) \cdot (\mathbf{a}_{y_r})^{i_1} \cdot (\mathbf{a}_{y_r})^{\tau} \cdot (\mathbf{a}_{y_r})^{i_2} \times \\
 &\quad \times (\boldsymbol{\gamma}_{y_{\infty}} - \mathbf{a}_{y_r} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_{\infty}} \cdot \mathbf{a}_{y_r}^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y_r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_r}^{i_2})^T = \left[\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z_f}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_f} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{y_f} \cdot \mathbf{a}_{y_r}) \cdot (\mathbf{a}_{y_r})^{i_1} \right] \times \\
 &\quad \times (\mathbf{a}_{y_r})^{\tau} \cdot \left[\sum_{i_2=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{y_r})^{i_2} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{y_{st}} - \mathbf{a}_{y_r} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_{\infty}} \cdot \mathbf{a}_{y_r}^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y_r})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z_r}^{i_2})^T \right] = \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z_f}, \mathbf{b}_{\Delta y_f} \times \\
 &\quad \times (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{y_f} \cdot \mathbf{a}_{y_r}), \mathbf{a}_{y_r}) \cdot \mathbf{a}_{y_r}^{\tau} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{y_r}, (\boldsymbol{\gamma}_{y_{st}} - \mathbf{a}_{y_r} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y_{\infty}} \cdot \mathbf{a}_{y_r}^T) \cdot \mathbf{b}_{\Delta y_r}^T, \mathbf{a}_{\Delta z_r}^T).
 \end{aligned}$$

Построение алгоритма определения компоненты $K_{(z)rf}(\tau)$

Наиболее громоздким является алгоритм определения взаимной корреляции между погрешностями обратной и прямой фильтраций.



Общее выражение для расчета $\mathbf{K}_{(z)rf}(\tau)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{(z)rf}(\tau) &= M(\Delta_{zr}(k_1) \cdot [\Delta_{zf}(k_2)]^T) = \\
 &= M \left(\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{y}(k_1+i+1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1-i)] \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{y}(k_1+\tau-i-1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zf}^i \cdot [\mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k_1+\tau-i)] \right\}^T \right) = \\
 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{y}(k_1+i_1+1) \cdot [\mathbf{y}(k_1+\tau-i_2-1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T + \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{y}(k_1+i_1+1) \cdot [\mathbf{b}_{yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k_1+\tau-i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T + \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{b}_{yf} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1+i_1) \cdot [\mathbf{y}(k_1+\tau-i_2-1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T + \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1+i_1) \cdot [\mathbf{b}_{yf} \cdot \mathbf{e}_{yf}(k_1+\tau-i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T = \\
 &= \mathbf{S}_{rf1} + \mathbf{S}_{rf2} + \mathbf{S}_{rf3} + \mathbf{S}_{rf4}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим алгоритм вычисления первой составной части компоненты $\mathbf{K}_{(z)rf}(\tau)$ вида

$$\mathbf{S}_{rf1} = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{y}(k_1+i_1+1) \cdot [\mathbf{y}(k_1+\tau-i_2-1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T.$$

С учетом свойств, заключающихся в том, что $M(\mathbf{y}(k_1) \times [\mathbf{y}^T(k_2)]) = (\mathbf{a}_{yf})^{(i_1+i_2+2-\tau)} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} = \mathbf{y}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yr}^T)^{(i_1+i_2+2-\tau)}$ при $k_1+i_1+1 \geq k_1 + \tau - i_2 - 1$; $i_1 \geq \tau - i_2 - 2$ и $M(\mathbf{y}(k_1) \cdot [\mathbf{y}^T(k_2)]) = \mathbf{y}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{(\tau-i_2-i_1-2)} = (\mathbf{a}_{yr})^{(\tau-i_2-i_1-2)} \cdot \mathbf{y}_{y\infty}$ при $i_1 \leq \tau - i_2 - 2$, можем записать следующие соотношения:

$$\mathbf{S}_{rf11} = \sum_{i_1=0}^{\tau-3} \sum_{i_2=0}^{\tau-3-i_1} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yf}^T)^{\tau-2-i_2-i_1} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T =$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i_1=0}^{\tau-3} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y r} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \sum_{i_2=0}^{\tau-3-i_1} (\mathbf{a}_{y f}^T)^{i_2} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f}^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T; \\
 \mathbf{S}_{rf} 12 &= \sum_{i_2=\tau-2}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{a}_{y f})^{i_2+i_1+2-\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T + \\
 &+ \sum_{i_2=0}^{\tau-2} \sum_{i_1=\tau-i_2-2}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{a}_{y f})^{i_2+i_1+2-\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \mathbf{S}_{rf} 121 + \mathbf{S}_{rf} 122; \\
 \mathbf{S}_{rf} 121 &= \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{a}_{y f})^{l_2+i_1} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{l_2})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{\tau-2})^T = \\
 &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{a}_{y f})^{i_1} \cdot \sum_{l_2=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{y f})^{l_2} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{l_2})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{\tau-2})^T = \\
 &= \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z r}, \mathbf{a}_{\Delta y r}, \mathbf{a}_{y f}) \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{y f}, \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f}^T, \mathbf{a}_{\Delta z r}^T) (\mathbf{a}_{y f}^{\tau-2})^T; \\
 \mathbf{S}_{rf} 122 &= \sum_{i_2=0}^{\tau-2} \sum_{l_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{\tau-2-i_2} \cdot \mathbf{a}_{\Delta z r}^{l_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{a}_{y f})^{l_1} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{i_2=0}^{\tau-2} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{\tau-2-i_2} \cdot \left[\sum_{l_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{l_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{a}_{y f})^{l_1} \right] \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \\
 &= \sum_{i_2=0}^{\tau-2} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{\tau-2-i_2} \cdot [\text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z r}, \mathbf{a}_{\Delta y r}, \mathbf{a}_{y f})] \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T.
 \end{aligned}$$

Выражение для второй составной части компоненты вида

$$\mathbf{S}_{rf} 2 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y r} \cdot M(\mathbf{y}(k_1+i_1+1) \cdot [\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_{y f}(k_1+\tau-i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T$$

с учетом формулы (1.94) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{rf} 2 &= \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \sum_{i_1=\tau-1-i_2}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{a}_{y f})^{(1+i_1+i_2-\tau)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y f} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T + \\
 &+ \sum_{i_2=\tau}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{a}_{y f})^{(1+i_1+i_2-\tau)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y f} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \mathbf{S}_{rf} 21 + \mathbf{S}_{rf} 22.
 \end{aligned}$$



Составные части $\mathbf{S}_{rf} 21$ и $\mathbf{S}_{rf} 22$ этого выражения могут быть оценены по формулам

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{rf} 21 &= \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{(\tau-1-i_2)} \cdot \left[\sum_{l_1=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{\Delta zr})^{l_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{a}_{yf})^{l_1} \right] \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yf} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2}) = \\ &= \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{(\tau-1-i_2)} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr}, \mathbf{a}_{yf}) \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yf} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2}); \\ \mathbf{S}_{rf} 22 &= \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{a}_{yf})^{i_1} \cdot (\mathbf{a}_{yf})^{l_2} \cdot \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yf} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{l_2})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{\tau})^T = \\ &= \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr}, \mathbf{a}_{yf}) \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yf}, \mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yf} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yf}^T, \mathbf{a}_{\Delta zf}^{\tau}) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{\tau})^T.\end{aligned}$$

Выражение для третьей составной части компоненты $\mathbf{K}_{(z)rf}(\tau)$

$$\mathbf{S}_{rf} 3 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot M(\mathbf{b}_{yr} \cdot \mathbf{e}_{yr}(k_1+i_1) \cdot [\mathbf{y}(k_1+\tau-i_2-1)]^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T$$

с учетом формулы (1.96) запишется в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{rf} 3 &= \sum_{i_2=0}^{\tau} \sum_{i_1=\tau-1-i_2}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{(i_1+i_2+1-\tau)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yr} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T + \\ &+ \sum_{i_2=\tau}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{(i_1+i_2+1-\tau)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yr} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T = \mathbf{S}_{rf} 31 + \mathbf{S}_{rf} 32.\end{aligned}$$

Составные части этого выражения могут быть оценены по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{rf} 31 &= \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{\tau-1-i_2} \cdot \left[\sum_{l_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{l_1} \mathbf{b}_{\Delta yr} (\mathbf{a}_{yr})^{l_1} \right] \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yr} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T = \\ &= \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{\tau-1-i_2} \cdot [\text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{b}_{\Delta yr}, \mathbf{a}_{yr})] \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yr} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T; \\ \mathbf{S}_{rf} 32 &= \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{i_1+l_2+1} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{yr} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{l_2})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{\tau})^T =\end{aligned}$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{a}_{y r})^{i_1} \cdot \left[\sum_{i_2=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{y r})^{i_2} \cdot \mathbf{a}_{y r} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y r} \cdot (\mathbf{a}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T \right] \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{\tau})^T =$$

$$= \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta z r}, \mathbf{b}_{\Delta y r}, \mathbf{a}_{y r}) \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{y r}, \mathbf{a}_{y r} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y r} \cdot \mathbf{a}_{\Delta y f}^T, \mathbf{a}_{\Delta z f}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{\tau})^T.$$

Выражение для четвертой составной части компоненты $\mathbf{K}_{(z)rf}(\tau)$

$$\mathbf{S}_{rf} 4 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot M(\mathbf{b}_{y r} \cdot \mathbf{e}_{y r}(k_1 + i_1) \cdot [\mathbf{b}_{y f} \cdot \mathbf{e}_{y f}(k_1 + \tau - i_2)]^T) \times$$

$$\times (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T$$

с учетом формулы (1.99) запишется в виде

$$\mathbf{S}_{rf} 4 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot M(\mathbf{e}_{y r}(k_1 + i_1) \cdot [\mathbf{e}_{y f}(k_1 + \tau - i_2)]^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T =$$

$$= \mathbf{S}_{rf} 41 + \mathbf{S}_{rf} 42.$$

Составные части $\mathbf{S}_{rf} 41$ и $\mathbf{S}_{rf} 42$ этого выражения могут быть оценены по формулам

$$\mathbf{S}_{rf} 41 = \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{\tau-i_2} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot [-\mathbf{a}_{y r} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{y \infty} - \mathbf{a}_{y f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot \mathbf{a}_{y f}^T)] \cdot \mathbf{b}_{\Delta y f}^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T;$$

$$\mathbf{S}_{rf} 42 = \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \sum_{i_1=\tau-i_2}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{y r} \cdot \mathbf{a}_{y f}) \cdot (\mathbf{a}_{y r})^{i_1+i_2-\tau} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{y \infty} - \mathbf{a}_{y f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot \mathbf{a}_{y f}^T) \times$$

$$\times (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T + \sum_{i_2=\tau}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{y r} \cdot \mathbf{a}_{y f}) \cdot (\mathbf{a}_{y r})^{i_1+i_2-\tau} \times$$

$$\times (\boldsymbol{\gamma}_{y \infty} - \mathbf{a}_{y f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot \mathbf{a}_{y f}^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \mathbf{S}_{rf} 421 + \mathbf{S}_{rf} 422;$$

$$\mathbf{S}_{rf} 421 = \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \sum_{i_1=\tau-i_2}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{y r} \cdot \mathbf{a}_{y f}) \cdot (\mathbf{a}_{y r})^{i_1+i_2-\tau} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{y \infty} - \mathbf{a}_{y f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot \mathbf{a}_{y f}^T) \times$$

$$\times (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{\tau-i_2} \cdot \mathbf{a}_{\Delta z r}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{y r} \cdot \mathbf{a}_{y f}) \cdot (\mathbf{a}_{y r})^{i_1} \times$$

$$\times (\boldsymbol{\gamma}_{y \infty} - \mathbf{a}_{y f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y \infty} \cdot \mathbf{a}_{y f}^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta y f})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta z f}^{i_2})^T = \sum_{i_2=0}^{\tau-1} \mathbf{a}_{\Delta z r}^{\tau-i_2} \cdot \text{Svt}[\mathbf{a}_{\Delta z r}, \mathbf{b}_{\Delta y r} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{y r} \cdot$$



$$\begin{aligned}
 & \times \mathbf{a}_{yf}), \mathbf{a}_{yr}] \cdot (\mathbf{y}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T; \\
 S_{yf} 422 = & \sum_{i_2=\tau}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{a}_{yf}) \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{i_1+i_2-\tau} \cdot (\mathbf{y}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) \times \\
 & \times (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T = \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbf{a}_{\Delta zr}^{i_1} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{a}_{yf}) \cdot (\mathbf{a}_{yr})^{i_1+i_2} \cdot (\mathbf{y}_{y\infty} - \\
 & - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yf})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{i_2})^T \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{\tau})^T = \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{a}_{yf}), \mathbf{a}_{yr}) \times \\
 & \times \text{Svt}(\mathbf{a}_{yr}, (\mathbf{y}_{y\infty} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{y}_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) \cdot \mathbf{b}_{\Delta yf}^T, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zf}^{\tau})^T.
 \end{aligned}$$

Выражения для ковариационных матриц вектора оцениваемых параметров движения ЛА при динамической фильтрации, средней взвешенной и сглаженной обработке траекторной измерительной информации могут быть получены из соответствующих соотношений для корреляционных функций при временном интервале между сечениями $\tau=0$.

Таким образом, разработанная обобщенная математическая модель погрешности траекторной ИИС позволила построить соотношения для оценки ковариационных матриц вектора параметров движения ЛА и матричных корреляционных функций погрешностей оценки вектора параметров движения ЛА для случаев динамической фильтрации, средней взвешенной и сглаженной обработки траекторной измерительной информации. Эти соотношения позволяют проводить глубокий корреляционный анализ структуры погрешности оценки вектора параметров движения ЛА существующими траекторными измерительными комплексами, а также анализ эффективности проектируемых траекторных ИК и обеспечивающих их систем.

2.1. Выбор и обоснование показателей точности траекторных измерительных комплексов для обеспечения испытаний сложных технических систем

2.1.1. Анализ показателей, применяемых для оценки точности существующих ТИК

При обосновании технических требований к траекторным измерительным комплексам, оценке их показателей точности, проектировании новых и модернизации существующих комплексов, а также при планировании натурных измерительных экспериментов важное значение имеет правильный выбор показателей точности ТИК. Анализ литературы [12, 29, 42], посвященной оценке показателей качества ТИК, показывает, что в настоящее время не существует достаточно полного показателя точности такого комплекса, который бы с наибольшей достоверностью отражал его возможности по выполнению основной функции — высокоточной оценки параметров движения ЛА.

В работе [29] в качестве показателей точности ТИК рассматривается ряд оценок такого комплекса. В этой работе показано, что в результате оценки вектора параметров движения ЛА $\hat{\theta}(k) = [q_1(k) q_2(k) \dots q_n(k)]^T$ для момента времени $t = k$ вся информация о векторе $\hat{\theta}(k)$ заключена в его плотности распределения вероятности $f(\hat{\theta}(k))$.

В случае когда плотность распределения вероятности вектора $\hat{\theta}(k)$ подчинена нормальному закону распределения, точность оценки вектора $\hat{\theta}(k)$ характеризуется его математическим ожиданием $M(\hat{\theta}(k))$ и ковариационной матрицей $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ [16]. Однако не-

посредственное использование матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ в качестве показателя точности достаточно затруднительно. Поэтому в монографии [29] предлагается использовать различные скалярные характеристики этой матрицы. Так, в качестве показателя точности $K_1(k)$ траекторного измерительного комплекса для момента времени $t=k$ предлагается использовать значение следа ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$, т.е. $K_1(k) = \text{Sp}(\gamma_{\hat{\theta}}(k))$. Этот показатель характеризуется суммой дисперсий оценок параметров движения ЛА. Однако показатель точности $K_1(k)$ является слишком обобщенным и не дает физическую оценку составляющим вектора $\hat{\theta}(k)$ по координатам, составляющим вектора скорости и ускорения ЛА. При этом след матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ не имеет конкретной физической размерности и не может сравниваться с требованиями к показателю точности ИК, выдвигаемыми разработчиками СТК. Кроме того, этот показатель характеризует только случайную составляющую погрешности ТИК и не оценивает его систематическую составляющую.

В качестве другого показателя точности $K_2(k)$ траекторного измерительного комплекса для момента времени $t=k$ предлагается [29] использовать определитель ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$, т.е. $K_2(k) = \det \gamma_{\hat{\theta}}(k)$.

Показатель $K_2(k)$ точности ТИК тоже характеризует только случайную составляющую погрешности измерительного комплекса. Кроме того, этот показатель не имеет конкретной физической размерности, и поэтому его использование в практике оценки готовности измерительного комплекса к проведению испытаний конкретных образцов СТК крайне затруднительно.

В качестве еще одного показателя точности траекторного измерительного комплекса предлагается [29] показатель $K_3(k)$, который определяется максимальным собственным числом ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$, т.е. $K_3(k) = \lambda_{\max}(\gamma_{\hat{\theta}}(k))$. Этот показатель характеризует максимальную ось корреляционного эллипсоида рассеяния ошибок ТИК. Однако показатель $K_3(k)$ точности траекторного измерительного комплекса тоже характеризует только случайную составляющую погрешности, и причем только одну составляющую точности комплекса — максимальную ось корреляционного эллипсоида рассеяния ошибок измерений. Поэтому он тоже не может полноценно использоваться при оценке точности ТИК.

Кроме того, в качестве показателя точности $K_4(k)$ измерительного комплекса в работе [29] предлагается выбрать значение вероятно-

сти P нахождения оценки вектора $\hat{\theta}(k)$ в пределах заданной области пространства, т.е.

$$K_4(k) = P(|\hat{\theta}(k) - \theta_0(k)| < \varepsilon), \quad (2.1)$$

где ε — заранее заданная область малого объема; $\theta_0(k)$ — истинное значение вектора параметров движения ЛА в момент времени $t = k$.

Анализ показателя $K_4(k)$ точности ТИК показал, что он представляет обобщенную интервальную оценку точности комплекса, однако характеризует только случайную составляющую погрешности оценки вектора $\hat{\theta}(k)$. Кроме того, разработчики СТК не обосновывают такую величину, как допустимое значение вероятности попадания вектора $\hat{\theta}(k)$ в заданную область, да и сама эта область, как правило, не задается. Несмотря на это показатель $K_4(k)$ достаточно часто используется в теории траекторных измерений и практике проектирования ТИК.

Проведенные исследования [42 78, 90] показали, что рассмотренные показатели точности траекторного измерительного комплекса не удовлетворяют в полном объеме предъявляемым к ним требованиям. В связи с этим возникла необходимость разработки новых показателей точности ТИК, которые бы полно и всесторонне характеризовали качество оцениваемого измерительного комплекса и которые можно было бы применять на практике.

2.1.2. Комплексный показатель точности ТИК

Рассмотрим комплексный показатель точности траекторного измерительного комплекса, который позволяет учитывать как систематическую и случайную составляющие погрешности, так и полную погрешность этого комплекса, а также правильно сравнивать априорные оценки точности ТИК с требованиями, которые предъявляются к этому комплексу разработчиками СТК.

Известно, что графической иллюстрацией точности ТИК является многомерный эллипсоид рассеяния погрешности оценки этим комплексом вектора параметров движения ЛА, который изменяет свою ориентацию в пространстве вдоль траектории полета ЛА. Использование для сравнения с предъявляемыми требованиями проекций полуосей этого эллипсоида рассеяния на оси полигонной системы координат является неправомерным, поскольку в требованиях на ТИК не задается опорная система координат, к которой и относятся задаваемые требования.

Предположим, что вектор $\theta(k)$ параметров движения ЛА для заданной точки траектории его полета имеет нормальное распределение и задается в виде

$$\theta = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z}]^T = [\theta_1 | \theta_2 | \theta_3]^T,$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — вектор координат ЛА и составляющие вектора скорости и вектора ускорения ЛА в полигонной системе координат соответственно.

Известно, что в случае нормального закона распределения случайного вектора оценки параметров движения ЛА $\hat{\theta}$ в качестве обобщенного показателя точности ТИК, характеризующего случайную составляющую погрешности оценки этого вектора, выступает его ковариационная матрица $\mathbf{Y}_{\hat{\theta}}$. При этом рассматриваются три априорно оцениваемые ковариационные матрицы $\mathbf{Y}_{\hat{\theta}_1}, \mathbf{Y}_{\hat{\theta}_2}$ и $\mathbf{Y}_{\hat{\theta}_3}$ соответствующих векторов θ_1, θ_2 и θ_3 , характеризующие случайную составляющую погрешности оценки вектора θ и имеющие следующие структуры:

$$\mathbf{Y}_{\hat{\theta}_1} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & k_{12(1)} & k_{13(1)} \\ k_{21(1)} & \sigma_y^2 & k_{23(1)} \\ k_{31(1)} & k_{32(1)} & \sigma_z^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y}_{\hat{\theta}_2} = \begin{bmatrix} \sigma_{\dot{x}}^2 & k_{12(2)} & k_{13(2)} \\ k_{21(2)} & \sigma_{\dot{y}}^2 & k_{23(2)} \\ k_{31(2)} & k_{32(2)} & \sigma_{\dot{z}}^2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Y}_{\hat{\theta}_3} = \begin{bmatrix} \sigma_{\ddot{x}}^2 & k_{12(3)} & k_{13(3)} \\ k_{21(3)} & \sigma_{\ddot{y}}^2 & k_{23(3)} \\ k_{31(3)} & k_{32(3)} & \sigma_{\ddot{z}}^2 \end{bmatrix}.$$

На рис. 2.1 приведено графическое изображение характеристик случайной и систематической составляющих погрешности оценки вектора θ_1 , характеризующего координаты ЛА. Так, на рис. 2.1 в системе координат $OXYZ$ изображен эллипсоид рассеяния погрешности оценки вектора координат ЛА $\hat{\theta}_1 = [\hat{x} \ \hat{y} \ \hat{z}]^T$ с главными осями рассеяния $X_{(\text{эл})}, Y_{(\text{эл})}, Z_{(\text{эл})}$, причем система координат $OXYZ$ не совпадает с системой координат $OX_{(\text{эл})}Y_{(\text{эл})}Z_{(\text{эл})}$ эллипсоида рассеяния. При этом считается, что летательный аппарат находится в начале системы координат $OXYZ$.

Отрезок прямой линии, соединяющей центр эллипсоида рассеяния погрешности оценки вектора θ_1 с началом системы координат $OXYZ$, имеет проекции на оси полигонной системы координат $M(\Delta\hat{x}), M(\Delta\hat{y}), M(\Delta\hat{z})$, которые являются составляющими вектора

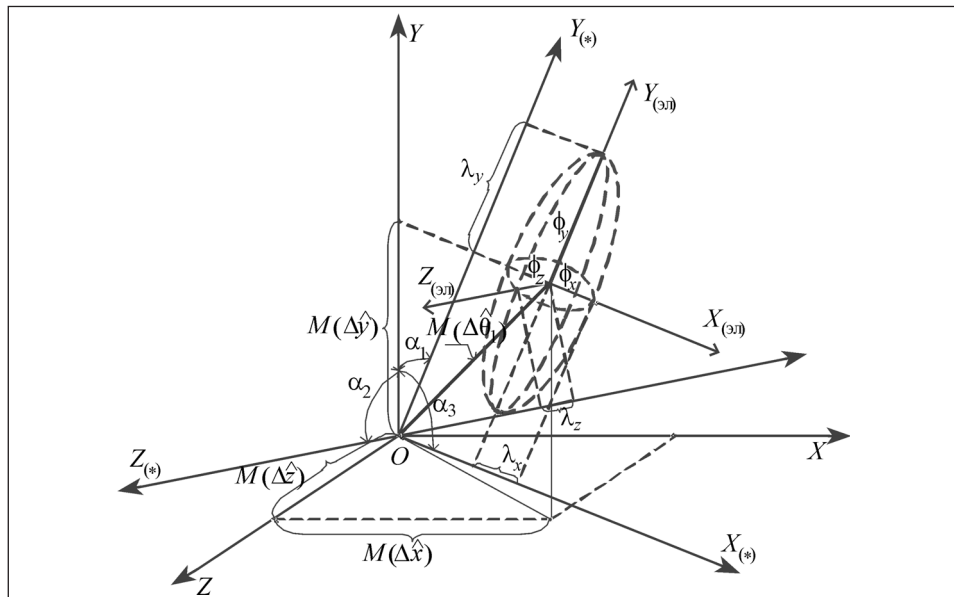


Рис. 2.1. Характеристики случайной и систематической составляющих погрешности оценки вектора координат полета ЛА $\hat{\theta}_1 = [\hat{x} \ \hat{y} \ \hat{z}]^T$ в трехмерном пространстве:

X, Y, Z — оси системы координат; $M(\Delta\hat{x}), M(\Delta\hat{y}), M(\Delta\hat{z})$ — проекции вектора $M(\Delta\hat{\theta}_1)$ систематической погрешности оценки координат полета ЛА на оси системы координат $OXYZ$; $X_{(эл)}, Y_{(эл)}, Z_{(эл)}$ — оси системы координат, связанной с эллипсоидом рассеяния погрешностей оценки координат ЛА; ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z — полуоси эллипсоида рассеяния погрешностей оценки координат ЛА; $\sigma_{\hat{x}}^2, \sigma_{\hat{y}}^2, \sigma_{\hat{z}}^2$ — проекции случайной погрешности оценки координат полета ЛА на оси системы координат $OX_{(*)}Y_{(*)}Z_{(*)}$, которые параллельны соответствующим осям системы координат $OX_{(эл)}Y_{(эл)}Z_{(эл)}$

$M(\Delta\hat{\theta}_1)$, характеризующего систематическую составляющую погрешности оценки вектора θ_1 .

Поскольку требования к точности траекторного измерительного комплекса, как правило, задаются несколькими показателями, а именно требуемыми значениями среднего квадратического отклонения погрешности оценки координат полета ЛА $\sigma_{x,y,z(\text{треб})}$, составляющих вектора скорости $\sigma_{\dot{x},\dot{y},\dot{z}(\text{треб})}$ и ускорения $\sigma_{\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}(\text{треб})}$ ЛА, то в качестве показателей случайной составляющей погрешности ТИК вводятся три диагональные ковариационные матрицы вектора $\hat{\theta}$ оценок параметров движения ($\tilde{Y}_{\hat{\theta}_i}$ где $i=1,2,3$): по координатам ($i=1$), составляющим вектора скорости ($i=2$) и составляющим век-

тора ускорения ($i=3$) ЛА. При этом в диагоналях данных матриц стоят собственные значения априорно определяемых ковариационных матриц $\gamma_{\hat{\theta}_1}$, $\gamma_{\hat{\theta}_2}$ и $\gamma_{\hat{\theta}_3}$ векторов $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$ оценок параметров движения соответственно по координатам, составляющим вектора скорости и ускорения ЛА.

Оценки искомых диагональных матриц находятся путем приведения соответствующих трех ковариационных матриц $\gamma_{\hat{\theta}_i}$ ($i=1,2,3$) вектора параметров движения ЛА к их каноническому виду согласно выражению

$$\tilde{\gamma}_{\hat{\theta}_i} = \begin{bmatrix} \lambda_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{z_i} \end{bmatrix} =$$

$$= [U_{\hat{\theta}_i}^{(1)} | U_{\hat{\theta}_i}^{(2)} | U_{\hat{\theta}_i}^{(3)}]^T \cdot \gamma_{\hat{\theta}_i} \cdot [U_{\hat{\theta}_i}^{(1)} | U_{\hat{\theta}_i}^{(2)} | U_{\hat{\theta}_i}^{(3)}]; i=1,2,3,$$

где $U_{\hat{\theta}_i}^{(1)}$, $U_{\hat{\theta}_i}^{(2)}$ и $U_{\hat{\theta}_i}^{(3)}$ — собственные векторы ковариационных матриц $\gamma_{\hat{\theta}_i}$; λ_{x_i} , λ_{y_i} , λ_{z_i} — собственные значения этих матриц.

В этом случае квадраты значений главных средних квадратических отклонений $(\sigma_{x_i}^\circ)^2$, $(\sigma_{y_i}^\circ)^2$, $(\sigma_{z_i}^\circ)^2$ погрешности оценки вектора параметров движения ЛА численно равны собственным значениям λ_{x_i} , λ_{y_i} , λ_{z_i} ковариационных матриц $\gamma_{\hat{\theta}_i}$ ($i=1,2,3$).

Тогда в качестве показателей точности ТИК по оценке случайной составляющей погрешности могут рассматриваться значения средних квадратических погрешностей оценок векторов θ_1 , θ_2 и θ_3 , определяемые следующим образом:

$$\sigma_{\hat{\theta}_1} = \max\{\sigma_x^\circ, \sigma_y^\circ, \sigma_z^\circ\}; \sigma_{\hat{\theta}_2} = \max\{\sigma_x^\circ, \sigma_y^\circ, \sigma_z^\circ\}; \sigma_{\hat{\theta}_3} = \max\{\sigma_x^\circ, \sigma_y^\circ, \sigma_z^\circ\}.$$

Полученные с помощью такого алгоритма величины $\sigma_{\hat{\theta}_1}$, $\sigma_{\hat{\theta}_2}$ и $\sigma_{\hat{\theta}_3}$ могут сравниваться с традиционно предъявляемыми требованиями следующим образом:

$$\sigma_{\hat{\theta}_1} \leq \sigma_{x,y,z(\text{треб})}; \sigma_{\hat{\theta}_2} \leq \sigma_{\dot{x},\dot{y},\dot{z}(\text{треб})}; \sigma_{\hat{\theta}_3} \leq \sigma_{\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}(\text{треб})}.$$

Однако в связи с возможным наличием неточности юстировки средств траекторных измерений, несоответствием параметров выбранной динамической модели движения ЛА ее реальным свойствам имеет место и систематическая составляющая по-

грешности оценки вектора параметров движения ЛА. В качестве показателя точности ТИК, характеризующего систематическую составляющую погрешности оценки вектора θ , может выступать математическое ожидание $M(\Delta\hat{\theta})$ вектора $\Delta\hat{\theta} = \hat{\theta} - \theta_0$, описывающего погрешность оценки вектора θ , где θ_0 — реальное значение вектора параметров движения ЛА. Тогда рассматриваются следующие три вектора:

$$M(\Delta\hat{\theta}_1) = [M(\Delta\hat{x}) \ M(\Delta\hat{y}) \ M(\Delta\hat{z})]^T;$$

$$M(\Delta\hat{\theta}_2) = [M(\Delta\hat{x}) \ M(\Delta\hat{y}) \ M(\Delta\hat{z})]^T;$$

$$M(\Delta\hat{\theta}_3) = [M(\Delta\hat{x}) \ M(\Delta\hat{y}) \ M(\Delta\hat{z})]^T,$$

которые характеризуют систематическую составляющую погрешности оценки составных частей вектора параметров движения ЛА $\hat{\theta}$.

В качестве обобщенных показателей систематической составляющей погрешности оценки вектора параметров движения ЛА могут рассматриваться математические ожидания $M(\Delta\hat{\theta}_1)$, $M(\Delta\hat{\theta}_2)$ и $M(\Delta\hat{\theta}_3)$, рассчитываемые следующим образом:

$$M(\Delta\hat{\theta}_1) = \sqrt{[M(\Delta\hat{x})]^2 + [M(\Delta\hat{y})]^2 + [M(\Delta\hat{z})]^2};$$

$$M(\Delta\hat{\theta}_2) = \sqrt{[M(\Delta\hat{x})]^2 + [M(\Delta\hat{y})]^2 + [M(\Delta\hat{z})]^2};$$

$$M(\Delta\hat{\theta}_3) = \sqrt{[M(\Delta\hat{x})]^2 + [M(\Delta\hat{y})]^2 + [M(\Delta\hat{z})]^2}.$$

Тогда требования к точности траекторного измерительного комплекса в части систематической составляющей погрешности оценки вектора θ могут проверяться путем сравнения значений математических ожиданий $M(\Delta\hat{\theta}_1)$, $M(\Delta\hat{\theta}_2)$ и $M(\Delta\hat{\theta}_3)$ с требуемыми значениями, т.е. должны выполняться соотношения

$$M(\Delta\hat{\theta}_1) \leq M(\Delta\hat{\theta}_{1(\text{треб})}); \ M(\Delta\hat{\theta}_2) \leq M(\Delta\hat{\theta}_{2(\text{треб})}); \ M(\Delta\hat{\theta}_3) \leq M(\Delta\hat{\theta}_{3(\text{треб})}).$$

Однако часто требуется получать обобщенные оценки точности траекторного измерительного комплекса с учетом случайной и систематической составляющих погрешности оценки вектора параметров движения ЛА.

В качестве показателей полной погрешности ТИК вводятся величины δ_{x_i} , δ_{y_i} , δ_{z_i} ($i=1,2,3$), характеризующие суммарную погрешность комплекса по координатам, составляющим векторов скорости и ускорения соответственно.

Оценка показателей точности ТИК для характеристики полной погрешности измерений проводится в соответствии с выражениями [87]

$$\delta_{\hat{x}_i}^2 = [M(\Delta\hat{x}_{0i})]^2 + \lambda_{x_i}; \quad \delta_{\hat{y}_i}^2 = [M(\Delta\hat{y}_{0i})]^2 + \lambda_{y_i};$$

$$\delta_{\hat{z}_i}^2 = [M(\Delta\hat{z}_{0i})]^2 + \lambda_{z_i}; \quad i=1,2,3,$$

где $M(\Delta\hat{x}_{0i})$, $M(\Delta\hat{y}_{0i})$, $M(\Delta\hat{z}_{0i})$ — проекции систематической составляющей погрешности оценки векторов $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ и $\hat{\theta}_3$ соответственно в системе координат, образованной главными осями эллипсоида рассеяния погрешности оценки вектора параметров движения ЛА. При этом используется следующее ортогональное преобразование значений систематической составляющей погрешности компонент вектора параметров движения ЛА из системы координат $OXYZ$ в систему координат, образованную главными осями эллипсоида рассеяния погрешности оцениваемого вектора:

$$\begin{bmatrix} M(\Delta\hat{x}_{0i}) \\ M(\Delta\hat{y}_{0i}) \\ M(\Delta\hat{z}_{0i}) \end{bmatrix} = [\mathbf{U}_{\hat{\theta}_i}^{(1)} | \mathbf{U}_{\hat{\theta}_i}^{(2)} | \mathbf{U}_{\hat{\theta}_i}^{(3)}] \cdot \begin{bmatrix} M(\Delta\hat{x}_i) \\ M(\Delta\hat{y}_i) \\ M(\Delta\hat{z}_i) \end{bmatrix}; \quad i=1,2,3,$$

где $\Delta\hat{x}_i$, $\Delta\hat{y}_i$ и $\Delta\hat{z}_i$ — проекции систематической составляющей погрешности оценки векторов $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ и $\hat{\theta}_3$ в полигонной системе координат.

Таким образом, разработанный комплексный показатель точности траекторного измерительного комплекса имеет практическое значение. Он позволяет достоверно сравнивать возможности исследуемого ТИК с предъявляемыми к нему требованиями, а также определять не только случайную и систематическую составляющие погрешности оценки вектора параметров движения ЛА, но и суммарную погрешность оценки этого вектора.

2.1.3. Соотношения для оценки значений интервального показателя точности ТИК

В практике проектирования траекторных измерительных комплексов часто используется рассмотренный выше интервальный показатель точности траекторного измерительного комплекса $K_4(k)$, описываемый выражением (2.1), который дает единую обобщенную оценку точности ТИК по всему оцениваемому век-

тору $\hat{\theta}(k)$ параметров движения ЛА для определенной точки траектории его полета.

Показатель точности $K_4(k)$ измерительного комплекса, как показано выше, определяет значение вероятности P нахождения оценки вектора параметров движения ЛА $\hat{\theta}(k)$ в заданной области пространства, т.е. $K_4(k) = P(|\hat{\theta}(k) - \theta_0(k)| < \varepsilon)$, где $\theta_0(k)$ — истинное значение вектора параметров движения ЛА; ε — заранее заданная область малого объема.

Однако вычисление значения вероятности P нахождения оценки вектора параметров движения ЛА в пределах области многомерного пространства различной конфигурации представляет собой достаточно сложную задачу. Поэтому рассмотрим основные математические соотношения, позволяющие строить практически реализуемые алгоритмы вычисления интервального показателя точности траекторного измерительного комплекса для некоторых видов доверительных областей многомерного пространства.

Если проведена оценка N -мерного вектора θ параметров движения ЛА для фиксированного момента времени путем статистической обработки первичных траекторных измерений и вектор оценки имеет структуру $\hat{\theta} = [\hat{x}_1 \hat{x}_2 \dots \hat{x}_N]^T$, то вероятность попадания вершины случайного вектора $\hat{\theta}$ в произвольную область D N -мерного пространства выражается интегралом по области D [16, 17, 39, 71]:

$$P\{\hat{\theta} \in D\} = \int_D (N) \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N,$$

где $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ — плотность распределения случайного вектора $\hat{\theta}$.

В случае нормального закона распределения случайного вектора $\hat{\theta}$ размерности N его функция плотности распределения определяется выражением [16, 30, 94]

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\Delta_{\gamma_{\hat{\theta}}}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}^{(-1)} (x_i - M_{\hat{x}_i})(x_j - M_{\hat{x}_j}) \right\},$$

где γ_{ij} — элементы ковариационной матрицы случайного вектора $\hat{\theta}$; $\Delta_{\gamma_{\hat{\theta}}}$ — детерминант ковариационной матрицы случайного вектора $\hat{\theta}$; $M_{\hat{x}_i}$ — математическое ожидание i -й компоненты случайного вектора $\hat{\theta}$.

В качестве области D N -мерного пространства может быть выбран N -мерный прямоугольный параллелепипед (в частном случае

куб) R_N или N -мерный гиперэллипсоид равной плотности B_N , уравнение которого можно получить из условия $f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \text{const}$. Тогда искомое уравнение гиперэллипсоида будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - M_{\hat{x}_i}}{\sigma_{\hat{x}_i}} \right)^2 = k^2. \quad (2.2)$$

В выражении (2.2) коэффициент k представляет собой отношение полуосей N -мерного гиперэллипсоида к соответствующим средним квадратическим отклонениям компонентов вектора $\hat{\theta}$.

На рис. 2.2 приведено графическое изображение доверительных областей R_3 и B_3 требований к ТИК в трехмерном пространстве для решения задачи вычисления вероятности попадания вершин

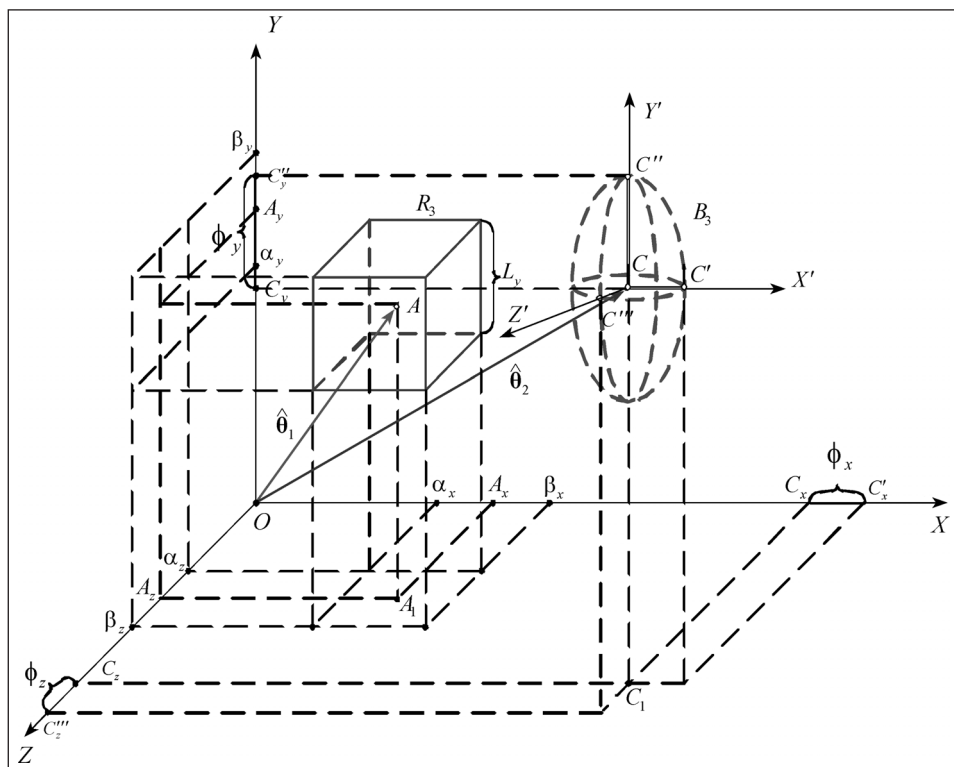


Рис. 2.2. Графическое изображение доверительных областей R_3 и B_3 требований к ТИК в трехмерном пространстве

случайных векторов $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ в области R_3 и B_3 соответственно. Векторы $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ имеют следующую структуру:

$$\hat{\theta}_1 = [\hat{x}_1 \ \hat{y}_1 \ \hat{z}_1]; \ \hat{\theta}_2 = [\hat{x}_2 \ \hat{y}_2 \ \hat{z}_2].$$

Поскольку N -мерные области R_N и B_N являются доверительными областями требований к траекторному измерительному комплексу, то разумным будет считать, что соответствующие грани N -мерного параллелепипеда и оси N -мерного гиперэллипсоида параллельны осям полигонной декартовой системы координат. Это вытекает из того факта, что по траектории полета ЛА оси эллипсоида рассеяния вектора погрешности оценки параметров движения ЛА будут постоянно изменять свою ориентацию в полигонной системе координат. Поэтому практически невозможно задавать определенные требования к доверительной области в случае ее различной ориентации в N -мерном пространстве.

В случае нормального закона распределения случайного вектора $\hat{\theta}$ с независимыми компонентами и при наличии доверительной области D , представляющей собой N -мерный параллелепипед R_N со сторонами, параллельными координатным осям полигонной системы координат, вероятность попадания вершины вектора $\hat{\theta}$ в эту область выражается через функцию Лапласа [16, 17]:

$$P\{\hat{\theta} \in R_N\} = \prod_{i=1}^N \left[\Phi\left(\frac{\beta_i - M_{\hat{x}_i}}{\sigma_{\hat{x}_i}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_i - M_{\hat{x}_i}}{\sigma_{\hat{x}_i}}\right) \right], \quad (2.3)$$

где $\Phi(z)$ — функция Лапласа; α_i, β_i — координаты границ прямоугольного параллелепипеда R_N в направлении оси OX_i ($\alpha_i < \beta_i$).

В выражении (2.3) в качестве величин $M_{\hat{x}_i}$ ($i = \overline{1, N}$) могут быть использованы значения компонент вектора $\hat{\theta}$.

Поскольку требования к точности траекторного измерительного комплекса задаются в виде средних квадратических погрешностей для компонент вектора $\hat{\theta}$, т.е. $\sigma_{\hat{x}_i(\text{треб})}$ ($i = \overline{1, N}$), то абсолютные размеры области R_N могут задаваться выражением

$$L_{x_i(\text{треб})} = C \sigma_{\hat{x}_i(\text{треб})} \quad \forall i = \overline{1, N},$$

где C — коэффициент, определяющий размер зоны дозволённости отклонения вершины вектора оценки параметров движения ЛА от реальной точки для конкретного момента времени.

Так, для случая оценки координат ЛА и при задании зоны дозволённости в виде куба с размерами ребер, равными $6\sigma_{\hat{x}_i(\text{треб})}$ (правило «трех сигм»), выражение для подсчета вероятности $P\{\hat{\theta} \in R_3\}$ при отсутствии систематической погрешности измерений может быть записано в виде

$$P\{\hat{\theta} \in R_3\} = \left[\Phi\left(\frac{3,0\sigma_{\hat{x}_i(\text{треб})}}{\sigma_{\hat{x}_i}}\right) - \Phi\left(\frac{-3,0\sigma_{\hat{x}_i(\text{треб})}}{\sigma_{\hat{x}_i}}\right) \right]^3.$$

Поскольку при нормальном законе распределения вектора $\hat{\theta}$ вектор погрешностей его оценки $\Delta\hat{\theta}$ равномерно распределен внутри гиперэллипсоида рассеяния для заданного значения коэффициента k , то интересным случаем является определение вероятности попадания рассматриваемой системы случайных величин, т.е. вершины вектора $\hat{\theta}$, в гиперэллипсоид требований пространства B_N .

Рассмотрим решение такой задачи для случая N -мерного вектора $\hat{\theta}$ и N -мерного гиперэллипсоида B_N с полуосями, имеющими размеры

$$\lambda_i = \sigma_{\hat{x}_i} k \quad \forall i = \overline{1, N}.$$

В предположении, что в векторе $\hat{\theta}$ отсутствует систематическая составляющая погрешности, на примере трехмерного пространства проведем перенос начала системы координат $OXYZ$ из точки O в точку C , т.е. совместим систему координат $OXYZ$ с системой координат $C X'Y'Z'$ (см. рис. 2.2). Для N -мерного случая доверительная область B_N опишется уравнением

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{x'_i}{\sigma_{\hat{x}_i}} \right)^2 = k^2.$$

Найдем вероятность попадания случайной точки $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ в N -мерный гиперэллипсоид B_N по формуле [17]

$$P_N = P\{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N) \in B_N\} = \int_{(B_N)} (N) \int f(x'_1, x'_2, \dots, x'_N) dx'_1 dx'_2 \dots dx'_N.$$

Введем в N -мерном пространстве $(x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ преобразование координат вида

$$\frac{x'_i}{\sqrt{2}\sigma_{\hat{x}_i}} = rV_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}),$$

где $r = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x'_i / \sigma_{\hat{x}_i})^2 \right]^{1/2}$ — расстояние от начала координат до точ-

ки $(x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ в N -мерном пространстве; $V_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$ — некоторая функция углов поворота $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}$ осей координат $OX'_1, OX'_2, \dots, OX'_N$.

Этим преобразованием N -мерный гиперэллипсоид превращается в N -мерную гиперсферу. Якобиан преобразования

$$J = r^{N-1} (\sqrt{2})^N \prod_{i=1}^N \sigma_{\hat{x}_i} \omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}),$$

где $\omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1})$ — некоторая функция углов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}$.

Таким образом, задача нахождения вероятности попадания случайной точки $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ в гиперэллипсоид B_N сведена к задаче нахождения вероятности попадания вершины случайного N -мерного вектора $\hat{\theta}$ в пределы гиперсферы, т.е.

$$\begin{aligned} P_N &= P\{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N) \in B_N\} = \\ &= \int_0^{k/\sqrt{2}} \left\{ \int_{D_\varphi} (N-1) \int r^{N-1} \cdot (\sqrt{2})^N \prod_{i=1}^N \sigma_{\hat{x}_i} \omega(\varphi_1, \dots, \varphi_N) d\varphi_1 \dots d\varphi_N \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ e^{-r^2} / \left[(2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N \sigma_{\hat{x}_i} \right] \right\} dr = \int_0^{k/\sqrt{2}} b_N r^{N-1} e^{-r^2} dr, \end{aligned}$$

где D_φ — область изменения углов поворота осей координат; $b_N = \int_{D_\varphi} (N-1) \int (\sqrt{2})^N \prod_{i=1}^N \sigma_{\hat{x}_i} \omega(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1} / \left[(\sqrt{2})^{N/2} \prod_{i=1}^N \sigma_{\hat{x}_i} \right]$.

Если неограниченно увеличивать гиперэллипсоид ($k \rightarrow \infty$), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N) \in B_N(k)\} = 1.$$

Следовательно, $\int_0^\infty b_N r^{N-1} e^{-r^2} dr = 1$, откуда $b_N = 1 / \int_0^\infty r^{N-1} e^{-r^2} dr$.

Проведем замену переменных в интеграле:

$$r^2 = t; r = \sqrt{t}; dr = (t^{-1/2} dt) / 2,$$

тогда

$$\int_0^{\infty} r^{N-1} e^{-r^2} dr = \int_0^{\infty} [t^{(N-1)/2} t^{-1/2} e^{-t} dt] / 2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{N}{2}-1} e^{-t} dt.$$

Полученный интеграл представляет собой гамма-функцию, поэтому

$$b_N = 2 / [\Gamma(N/2)].$$

На основании свойств гамма-функции

$$b_N = \begin{cases} 2 / \left(\left(\frac{N}{2} - 1 \right)! \right) & \text{при четном } N (N \geq 2); \\ \sqrt{2^{N+1}} / [\sqrt{\pi} (N-2)!!] & \text{при нечетном } N (N \geq 3), \end{cases}$$

где $(N-2)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots \cdot (N-2)$; $(N/2-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot (N/2-1)$.

При четном $N (N \geq 2)$ имеем

$$\begin{aligned} P\{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N) \in B_N\} &= \int_0^{k^2/2} x^{N/2-1} e^{-x} dx / (N/2-1)! = \\ &= 1 - R(N/2-1; k^2/2), \end{aligned}$$

где $R(m; a) = \sum_{i=0}^m a^i e^{-a} / i!$ — функция, описывающая распределение вероятностей случайной величины $\hat{\theta}$, распределенной по закону Пуассона с параметром a .

При нечетном $N (N \geq 3)$ вероятность попадания в гиперэллипсоид B_N

$$P\{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N) \in B_N\} = 2\Phi(k) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2/2} \sum_{m=1}^{N-2} \frac{k^m}{m!!},$$

где сумма определяется только для нечетных индексов $m = 1, 3, 5, \dots, (N-2)$, а $\Phi(k)$ — функция Лапласа.

Как и в случае доверительной области R_N , задаваемой в виде N -мерного параллелепипеда, абсолютные размеры области B_N определяются исходя из требований к точности оценки N -мерного вектора $\hat{\theta}$, которые задаются в виде средних квадратических значений компонентов этого вектора $(\sigma_{\hat{x}_{i(\text{треб})}} \forall i = \overline{1, N})$.

Размеры полуосей λ_i ($i = \overline{1, N}$) N -мерного гиперэллипсоида задаются соотношением $\lambda_i = 3\sigma_{\hat{x}_{i(\text{треб})}}$ ($i = \overline{1, N}$). При этом значение коэффициента k вычисляется по формуле

$$k = \max_{i=\overline{1, N}} \left\{ \frac{3\sigma_{\hat{x}_{i(\text{треб})}}}{\sigma_{\hat{x}_i}} \right\}.$$

Рассмотренный интервальный показатель точности траекторного измерительного комплекса вида $P\{\hat{\theta} \in D\}$ может быть использован для оценки точности такого комплекса с помощью следующего неравенства:

$$P\{\hat{\theta} \in D\} \leq P_0, \quad (2.4)$$

где P_0 — значение доверительной вероятности, при котором вершина случайного вектора $\hat{\theta}$ оценки параметров движения ЛА с нулевым математическим ожиданием попадет в доверительную область D .

Поскольку вероятность попадания вершины случайного вектора $\hat{\theta}$ в допустимую область ошибок D равносильна вероятности попадания погрешности оценки этого вектора $\Delta\hat{\theta}$ в данную область, то выражение (2.4) аналогично неравенству:

$$P\{\Delta\hat{\theta} \in \varepsilon(\Xi_{\text{треб}})\} \leq P_0,$$

где P_0 — значение доверительной вероятности, при которой вектор погрешности $\Delta\hat{\theta}$ оценки параметров движения ЛА будет лежать внутри доверительной области $\varepsilon(\Xi_{\text{треб}})$ требований к точности траекторного измерительного комплекса.

Рассмотренный интервальный показатель точности траекторного измерительного комплекса может широко использоваться в качестве критерия при обосновании рациональных вариантов ТИК, а также в качестве ограничений по точности в оптимизационных задачах проектирования измерительных систем.

2.1.4. Интегральный показатель точности ТИК в задачах выбора рациональных вариантов построения траекторных информационно-измерительных систем

При проектировании траекторных измерительных комплексов возникает задача выбора варианта построения измерительной системы, который бы наилучшим образом удовлетворял требованиям, предъявляемым к проектируемому комплексу.

Рассмотренные выше показатели точности ТИК характеризуют его точность в конкретной точке пространства на траектории полета ЛА. Однако эти показатели не позволяют правильно проводить количественную оценку точности комплекса по всей траектории полета ЛА, т.е. получать интегральную оценку качества работы ТИК.

Такой интегральный показатель точности может быть построен на основе рассмотренного выше комплексного показателя точности ТИК, который позволяет учитывать как систематическую и случайную составляющие погрешности, так и полную погрешность этого комплекса. Как было отмечено выше, при использовании такого комплексного показателя точности появляется возможность правильно сравнивать оценки показателя точности ТИК с требованиями, которые предъявляются к нему разработчиками СТК.

В комплексном показателе точности траекторного измерительного комплекса в качестве показателей случайной составляющей погрешности ТИК вводятся три диагональные ковариационные матрицы $(\tilde{\gamma}_{\hat{\theta}_i})$, где $i=1,2,3$ по положению ($i=1$), скорости ($i=2$) и ускорению ($i=3$) ЛА, которые являются каноническим видом соответствующих трех ковариационных матриц $\gamma_{\hat{\theta}_i}$ ($i=1,2,3$) вектора параметров движения ЛА, полученных с использованием известных методик априорной оценки точности ТИК. При этом в диагоналях матриц $\tilde{\gamma}_{\hat{\theta}_i}$ стоят собственные значения априорно определяемых ковариационных матриц $\gamma_{\hat{\theta}_1}$, $\gamma_{\hat{\theta}_2}$ и $\gamma_{\hat{\theta}_3}$ векторов $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$ оценок параметров движения по положению, скорости и ускорению ЛА соответственно.

В качестве показателей полной погрешности ТИК вводятся величины $\delta_{\hat{x}_i}, \delta_{\hat{y}_i}, \delta_{\hat{z}_i}$ ($i=1,2,3$), характеризующие суммарную погрешность оценки параметров движения ЛА траекторным измерительным комплексом по положению, скорости и ускорению соответственно.

Конечно, данный показатель точности может быть успешно применен только для конкретной точки траектории полета ЛА. Однако

при проектировании траекторных измерительных комплексов на протяженных испытательных трассах требуется проводить оценки точности траекторных измерений не только в интересующих точках траекторий полета ЛА, но и делать интегральные оценки качества выполнения стоящей перед измерительным комплексом задачи по всей траектории полета ЛА. При этом необходимо учитывать, что требования к ТИК могут иметь разные значения для различных участков траектории полета ЛА. Например, для начального, основного и конечного участков траектории предъявляются различные требования по точности оценки координат, составляющих векторов скорости и ускорения ЛА.

В результате проектирования ТИК должен быть выбран такой вариант его построения, который бы наилучшим образом удовлетворял предъявляемым требованиям по всей траектории полета летательного аппарата.

На рис. 2.3 показан пример задания требований к траекторному измерительному комплексу по оценке координаты x , предъявляемых в виде среднего квадратического отклонения (СКО) погрешности оценки этой координаты, вдоль траектории полета ЛА для двух вариантов построения ТИК, имеющих различную структуру и состав измерительных средств. Кроме того, здесь же приведены значения СКО погрешности оценки координаты x для двух вариантов построения комплекса.

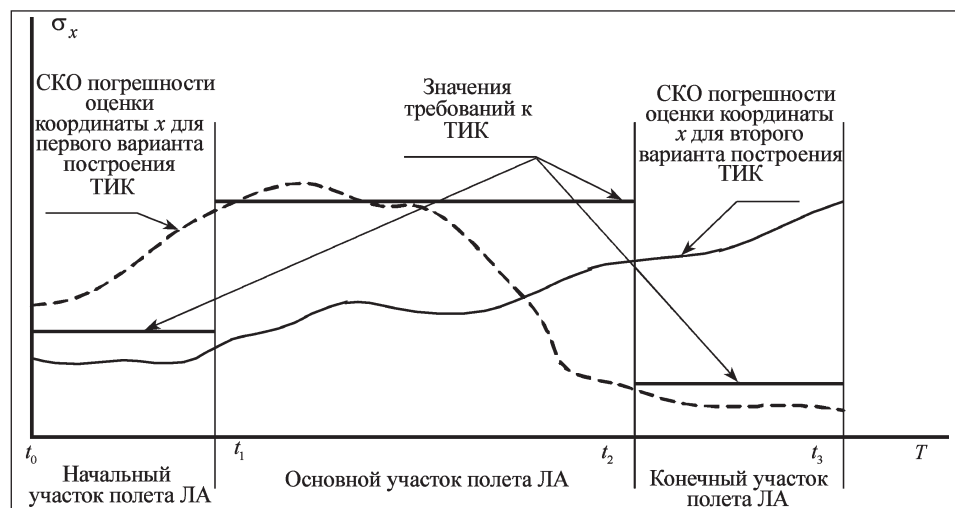


Рис. 2.3. Сравнительная оценка возможностей двух вариантов построения траекторного измерительного комплекса с предъявляемыми к ним требованиями по оценке координаты x

Видно, что ТИК, построенный по первому варианту, не удовлетворяет требованиям по точности оценки координаты x на начальном и основном участках траектории полета ЛА, а второй вариант построения комплекса позволяет выполнить предъявляемые к нему требования на этих двух участках траектории полета, однако при этом не выполняются требования на конечном участке траектории полета ЛА.

Для выбора рационального варианта построения ТИК по оценке координат и составляющих вектора скорости ЛА предлагается интегральный показатель точности такого измерительного комплекса, суть которого заключается в следующем.

В случае сглаживания результатов траекторных измерений с использованием полиномов оценки координат и составляющих вектора скорости полета ЛА $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ представляют собой непрерывные функции от времени. При этом в качестве критерия выбора рационального q -го варианта построения ТИК по оценке координат полета ЛА может быть выбран коэффициент штрафа P_q , определяемый как

$$P_q = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \int_{t_j}^{t_{j+m_j}} |\hat{S}_i(t) - T_{in}| dt, \quad (2.5)$$

где $\hat{S}_i(t)$ — оценки координат полета ЛА ($\hat{S}_1(t) = \hat{x}(t)$ при $i=1$; $\hat{S}_2(t) = \hat{y}(t)$ при $i=2$; $\hat{S}_3(t) = \hat{z}(t)$ при $i=3$) на момент времени t ; T_{in} — значения требований к оценке i -й координаты для n -го участка траектории полета ЛА; t_j — момент времени, соответствующий началу нарушения выполнения требований по оценке координат ЛА; t_{j+m_j} — момент времени, соответствующий концу нарушения выполнения требований по оценке координат полета ЛА; J — число участков на траектории полета ЛА, где имеют место нарушения требований по оценке координат испытываемого ЛА; N — число участков на траектории полета ЛА, на которых имеют место различные значения требований к точности оценки координат ЛА.

В качестве интегрального показателя точности траекторного измерительного комплекса при выборе рационального варианта построения траекторного ИК по оценке составляющих вектора скорости ЛА может быть выбран коэффициент штрафа $\dot{P}_q$ вида

$$\dot{P}_q = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{J_1} \int_{t_j}^{t_{j+m_j}} (\hat{S}_i(t) - \dot{T}_{in}) dt, \quad (2.6)$$

где $\hat{S}_i(t)$ — проекции вектора скорости полета ЛА ($\hat{S}_1(t) = \hat{x}(t)$ при $i=1$; $\hat{S}_2(t) = \hat{y}(t)$ при $i=2$; $\hat{S}_3(t) = \hat{z}(t)$ при $i=3$) на момент времени t ; J_1 — число участков на траектории полета ЛА, где имеют место нарушения требований по оценке проекций вектора скорости испытываемого ЛА; N_1 — число участков на траектории полета ЛА, на которых имеют место различные значения требований к точности оценки проекций вектора скорости ЛА.

Существует два случая выбора рационального варианта $Q_{\text{рац}}$ построения траекторного измерительного комплекса для обеспечения испытаний рассматриваемого СТК. В первом случае $Q_{\text{рац}(1)}$ выбирается исходя из условия, что он с минимальным штрафом обеспечивает выполнение требований по оценке координат ЛА и составляющих вектора скорости ЛА, а во втором случае $Q_{\text{рац}(2)}$ выбирается исходя из условия, что он с минимальным штрафом обеспечивает выполнение требований или по оценке координат ЛА, или по оценке составляющих вектора скорости ЛА. Условия выбора рационального варианта построения такого траекторного измерительного комплекса могут быть формализованы в следующем виде:

$$Q_{\text{рац}(1)}: \min_{q=1, Q} P_q \wedge \min_{q=1, Q} \dot{P}_q, \quad (2.7)$$

$$Q_{\text{рац}(2)}: \min_{q=1, Q} P_q \vee \min_{q=1, Q} \dot{P}_q. \quad (2.8)$$

Условие (2.8) предполагает выбор одного из двух вариантов построения траекторных измерительных комплексов, который наилучшим образом удовлетворяет выполнению требований по точности оценки координат ЛА или по точности оценки составляющих вектора скорости ЛА. При этом отдается предпочтение тому варианту, который имеет в конкретном случае более высокий приоритет.

При совместной обработке траекторной измерительной информации с использованием метода динамической фильтрации оценки координат и составляющих вектора скорости полета ЛА ($x(k)$, $y(k)$, $z(k)$, $\dot{x}(k)$, $\dot{y}(k)$, $\dot{z}(k)$) представляют собой случайные последовательности при дискретном времени $t=k$ ($k=1, K$). В этом случае выражение для коэффициента штрафа по оценке координат полета ЛА имеет вид

$$R_q = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^P [\hat{S}_{ijp}(k) - T_{in}], \quad (2.9)$$

где $\hat{S}_{ijp}(k)$ — p -е значение оценки координаты полета ЛА ($\hat{S}_{i=1}(k) = \hat{x}(k)$ при $i=1$; $\hat{S}_{i=2}(k) = \hat{y}(k)$ при $i=2$; $\hat{S}_{i=3}(k) = \hat{z}(k)$ при $i=3$)

для j -го участка нарушения требований; T_{in} — значения требований к оценке i -й координаты для n -го участка траектории полета ЛА; J — число участков на траектории полета ЛА, где имеют место нарушения требований по оценке координат испытываемого ЛА; N — число участков на траектории полета ЛА, на которых имеют место различные значения требований к точности оценки координат ЛА.

В качестве критерия выбора рационального варианта построения ТИК по оценке проекций вектора скорости ЛА может быть выбран коэффициент штрафа $\dot{R}_q$, определяемый следующим образом:

$$\dot{R}_q = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{J_2} \sum_{p=1}^{P_2} [\hat{S}_{ijp}(k) - \dot{T}_{in}], \quad (2.10)$$

где $\hat{S}_{ijp}(k)$ — p -е значение оценки проекций вектора скорости ЛА ($\hat{S}_1(k) = \hat{x}(k)$ при $i=1$; $\hat{S}_2(k) = \hat{y}(k)$ при $i=2$; $\hat{S}_3(k) = \hat{z}(k)$ при $i=3$) для j -го участка нарушения требований; $\dot{T}_{in}$ — значения требований к оценке i -й проекции вектора скорости для n -го участка траектории полета ЛА; J_2 — число участков на траектории полета ЛА, где имеют место нарушения требований по оценке проекции вектора скорости испытываемого ЛА; N_2 — число участков на траектории полета ЛА, на которых имеют место различные значения требований к точности оценки проекции вектора скорости ЛА.

Как и при сглаживании результатов траекторных измерений с использованием полиномов, здесь также существуют два случая выбора рационального варианта $Q_{\text{рац}}$ построения траекторного измерительного комплекса для обеспечения испытаний рассматриваемого СТК. В первом случае $Q_{\text{рац}(3)}$ выбирается исходя из условия, что комплекс с минимальным штрафом обеспечивает выполнение требований по оценке как координат ЛА, так и составляющих вектора скорости ЛА, а во втором случае $Q_{\text{рац}(4)}$ выбирается исходя из условия, что он с минимальным штрафом обеспечивает выполнение требований или по оценке координат ЛА, или по оценке составляющих вектора скорости ЛА. Условия выбора рационального варианта построения траекторного измерительного комплекса, использующего алгоритмы динамической фильтрации первичных траекторных измерений, могут быть формализованы в следующем виде:

$$Q_{\text{рац}(3)}: \min_{q=1, Q} R_q \wedge \min_{q=1, Q} \dot{R}_q, \quad (2.11)$$

$$Q_{\text{рац}(4)}: \min_{q=1, Q} R_q \vee \min_{q=1, Q} \dot{R}_q. \quad (2.12)$$

С использованием коэффициентов штрафа (2.5), (2.6), (2.9) и (2.10) и условий (2.7), (2.8), (2.11) и (2.12) можно выбрать рациональный вариант построения траекторного измерительного комплекса на протяженных испытательных трассах при заданных к нему требованиях по точности оценки параметров движения ЛА.

Таким образом, представленный интегральный показатель точности траекторного измерительного комплекса позволяет с использованием программно-алгоритмического комплекса априорной оценки точности ТИК выбрать рациональный вариант построения измерительного комплекса, который способен наилучшим образом решить задачу оценки параметров движения ЛА на заданной протяженной траектории его полета.

2.2. Методический подход к оценке потенциальной точности траекторного измерительного комплекса при динамической фильтрации результатов траекторных измерений

Задача оценки потенциальной точности вектора состояния системы траекторных измерений (в нашем случае — вектора параметров движения ЛА) с использованием динамической фильтрации является достаточно сложной и в практическом плане недостаточно освещена в научно-технической литературе.

Теоретическое исследование асимптотического поведения ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(t)$ оценки вектора состояния стохастической системы $\hat{\theta}$ при $t \rightarrow \infty$ частично проведено в монографии [48]. В ней показано, что при определенных ограничениях, предъявляемых к матричным коэффициентам известного рекуррентного уравнения для ковариационной матрицы оцениваемого вектора $\gamma_{\hat{\theta}}(t)$, предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_{\hat{\theta}}(t) = \gamma_{\infty}$ существует и при этом $0 < \text{Sp } \gamma_{\infty} < \infty$. Факт существования такого предела имеет важные практические приложения, поскольку в этом случае оптимальная в среднем квадратическом смысле оценка $\hat{\theta}$ при $t \geq 0$ «отслеживает» истинное значение вектора состояния стохастической системы с конечной ошибкой даже тогда, когда $\sum_{j=1}^k M(\hat{\theta}_j(t))^2 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ [48].

Важным практическим применением знаний об асимптотическом поведении ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(t)$ оценки вектора состояния стохастической системы является их использование для решения задачи оценки потенциальной точности траекторного измерительного комплекса при динамической фильтрации результатов траекторных измерений.

Так, для априорной оценки точности ТИК использование значений ковариационной матрицы вектора оценки параметров движения ЛА, получаемых из рекуррентного уравнения динамической фильтрации, не всегда является правильным. Это связано с тем, что при фильтрации разнообразной траекторной измерительной информации как в случае отсутствия информации о начальных значениях оцениваемого вектора параметров движения, так и в случае обработки измерительной информации по высокодинамичным ЛА нет полной уверенности в том, что фильтр Калмана будет работать в стационарном режиме и получаемые с его помощью оценки будут близки к истинным значениям оцениваемых параметров.

Пояснение методического подхода к оценке потенциальной точности траекторного измерительного комплекса при динамической фильтрации результатов траекторных измерений проведем в два этапа. На первом этапе построим алгоритм определения рекуррентного значения ковариационной матрицы оцениваемого вектора состояния стохастической системы траекторных измерений, характеризующей текущее значение погрешности фильтрации результатов траекторных измерений при заданных параметрах такой системы. На втором этапе построим практически реализуемый алгоритм нахождения стационарного значения ковариационной матрицы оцениваемого вектора состояния системы траекторных измерений, характеризующей ее потенциальную точность.

Рекуррентное значение ковариационной матрицы оцениваемого вектора состояния стохастической системы траекторных измерений найдем в результате решения задачи, заключающейся в построении дискретной зависимости, суть которой заключается в следующем.

Требуется определить для каждой k -й точки траектории полета ЛА дискретную зависимость значений ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ вектора оценки параметров движения ЛА $\hat{\theta}(k)$ от значений вероятностных характеристик погрешностей средств траекторных измерений. Искомая дискретная зависимость может быть формализована в следующем виде:

$$\gamma_{\hat{\theta}}(k) = \varphi_1\{\Xi_l, \tau_l, k\}; \quad k = \overline{1, K},$$

где Ξ_l, τ_l — N -мерные векторы средних квадратических погрешностей и времени корреляции дискретного случайного процесса первичных траекторных измерений соответственно; K — общее число дискретных измерений по летательному аппарату.

Наблюдаемый векторный процесс $\xi(k)$ траекторных измерений, поступающих от всех средств ТИ, может быть представлен в следующем виде:

$$\xi(k) = A_0(k, \xi) + H(k) \cdot \theta(k) + \eta(k),$$

где $A_0(k, \xi)$ — вектор начального значения наблюдаемого N -мерного векторного процесса траекторных измерений; $\theta(k)$ — M -мерный вектор оцениваемых параметров движения ЛА; $H(k)$ — матрица частных производных измеряемых параметров средствами ТИ по оцениваемым параметрам движения ЛА размерностью $(N \times M)$; $\eta(k)$ — N -мерный коррелированный по времени вектор погрешностей измерений средств ТИ.

Модель траектории движения ЛА в пространстве состояний на ограниченном участке траектории полета может быть описана в виде

$$\theta(k) = U(k) + \lambda(k), \quad (2.13)$$

где $U(k)$ — M -мерный вектор детерминированной составляющей динамической модели движения ЛА; $\lambda(k)$ — M -мерный вектор стохастической составляющей динамической модели движения ЛА, который может быть описан рекуррентным стохастическим уравнением с постоянными матричными коэффициентами вида

$$\lambda(k) = a \cdot \lambda(k-1) + b \cdot \varepsilon(k), \quad (2.14)$$

где a и b — матрицы постоянных коэффициентов размерностью $(M \times M)$; $\varepsilon(k)$ — M -мерный гауссов вектор с независимыми компонентами с параметрами $N(0, 1)$.

Тогда с использованием выражения (2.14) проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \theta(k) &= U(k) + \lambda(k) = U(k) + a \cdot \lambda(k-1) + b \cdot \varepsilon(k) = \\ &= U(k) + a \cdot [\theta(k-1) - U(k-1)] + b \cdot \varepsilon(k) = \\ &= U(k) - a \cdot U(k-1) + a \cdot \theta(k-1) + b \cdot \varepsilon(k). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Модель погрешности средств траекторных измерений можно представить как сумму двух составляющих: медленноменяющейся $\eta_1(k)$ и быстроменяющейся (шумовой) $\eta_2(k)$. Поэтому можно записать следующее выражение:

$$\xi(k) = A_0(k, \xi) + H(k) \cdot \theta(k) + \eta_1(k) + \eta_2(k). \quad (2.16)$$

Составляющие погрешности средств траекторных измерений можно описать рекуррентными стохастическими уравнениями вида

$$\boldsymbol{\eta}_i(k) = \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_i(k-1) + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{l}_i(k); \quad i=1,2, \quad (2.17)$$

где $\mathbf{l}_i(k)$ — M -мерные гауссовы векторы с независимыми компонентами с параметрами $N(0,1)$.

Тогда с учетом соотношений (2.15) и (2.17) выражение для наблюдаемого процесса траекторных измерений может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \xi(k) = & \mathbf{A}_0(k, \xi) + \mathbf{H}(k) \{ [\mathbf{U}(k) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{U}(k-1)] + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\theta}(k-1) + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k) \} + \\ & + \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_1(k-1) + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{l}_1(k) + \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_2(k-1) + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{l}_2(k). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Используя выражение (2.17), из уравнения (2.16) определим быстроменяющуюся составляющую погрешностей измерения средствами ТИ для момента времени $t = k-1$:

$$\boldsymbol{\eta}_2(k-1) = \xi(k-1) - \mathbf{A}_0(k-1, \xi) - \mathbf{H}(k-1) \cdot \boldsymbol{\theta}(k-1) - \boldsymbol{\eta}_1(k-1). \quad (2.19)$$

Подставив выражение (2.19) в (2.18), получим уравнение для наблюдаемого процесса траекторных измерений

$$\begin{aligned} \xi(k) = & \mathbf{A}_0(k, \xi) + \mathbf{H}(k) \{ [\mathbf{U}(k) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{U}(k-1)] + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\theta}(k-1) + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k) \} + \\ & + \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_1(k-1) + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{l}_1(k) + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{l}_2(k) + \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \xi(k-1) - \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \mathbf{A}_0(k-1, \xi) - \\ & - \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \mathbf{H}(k-1) \cdot \boldsymbol{\theta}(k-1) - \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_1(k-1). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Введем расширенный оцениваемый вектор состояния стохастической системы траекторных измерений в следующем виде:

$$\boldsymbol{\Theta}(k) = [\boldsymbol{\theta}(k) \mid \boldsymbol{\eta}_1(k)]^T.$$

Тогда с использованием выражений (2.15) и (2.17), можно записать расширенный случайный процесс в виде

$$\boldsymbol{\Theta}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(k) \\ \boldsymbol{\eta}_1(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(k) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{U}(k-1) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\rho}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(k-1) \\ \boldsymbol{\eta}_1(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}(k) \\ \mathbf{l}_1(k) \end{bmatrix}.$$

В обобщенном виде случайный процесс $\boldsymbol{\Theta}(k)$ можно записать как

$$\boldsymbol{\Theta}(k) = \mathbf{a}_0(k) + \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\Theta}(k-1) + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{e}(k), \quad (2.21)$$

где векторы и матрицы $\mathbf{a}_0(k)$, $\mathbf{e}(k)$, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_1$ имеют следующие структуры:

$$\mathbf{a}_0(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(k) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{U}(k-1) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}(k) \\ \mathbf{l}_1(k) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\rho}_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r}_1 \end{bmatrix}.$$

Проведем группирование слагаемых в правой части выражения (2.20) и с учетом расширенного вектора $\boldsymbol{\Theta}(k)$ запишем следующую формулу:

$$\boldsymbol{\xi}(k) = \mathbf{A}_n(k, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \boldsymbol{\Theta}(k-1) + \mathbf{B}_1(k) \cdot \mathbf{e}(k) + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{l}_2(k), \quad (2.22)$$

где $\mathbf{A}_n(k, \boldsymbol{\xi}) = [\mathbf{A}_0(k, \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \mathbf{A}_0(k, \boldsymbol{\xi})] + \mathbf{H} \cdot [\mathbf{U}(k) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{U}(k-1)] + \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \boldsymbol{\xi}(k-1)$;
 $\mathbf{A}_1(k) = [(\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \mathbf{H}(k)) \mid \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2]$; $\mathbf{B}_1(k) = [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} \mid \mathbf{r}_1]$; $\mathbf{B}_2 = \mathbf{r}_2$.

Согласно положениям общей теории динамической фильтрации [48, 105] для частично наблюдаемого процесса (2.21) и (2.22) алгоритм оптимальной фильтрации имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) \\ \hat{\boldsymbol{\eta}}_1(k) \end{bmatrix} = \mathbf{a}_0(k) + \mathbf{a}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \\ &+ \mathbf{K}(k) \cdot [\boldsymbol{\xi}(k) - \mathbf{A}_n(k, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{A}_1(k) \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1)], \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $\mathbf{K}(k)$ — матрица коэффициента усиления фильтра, определяемая выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k) &= [\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k-1) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)] \times \\ &\times [\mathbf{B}_1(k) \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{B}_2^T + \mathbf{A}_1(k) \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k-1) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)]^{-1}, \end{aligned}$$

в котором $\boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k)$ — ковариационная матрица составного вектора $\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k)$, определяемая рекуррентным уравнением вида

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k) & \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_1}(k) \\ \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}_1, \hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k) & \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}_1}(k) \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k-1) \cdot \mathbf{a}_1^T + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1^T] - \\ &- [\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k-1) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)] \cdot [\mathbf{B}_1(k) \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{B}_2^T + \mathbf{A}_1(k) \times \\ &\times \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k-1) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)]^{-1} \cdot [\mathbf{b}_1(k) \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k-1) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)]^T. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из выражения (2.23) видно, что рассматриваемая математическая модель способна оценивать не только вектор параметров движения ЛА ($\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$), но и вектор оценки медленноменяющейся составляющей погрешности измерения первичных измерительных



параметров средствами ТИ ($\hat{\eta}_1(k)$) при учете в параметрах фильтра предполагаемых вероятностных характеристик этих погрешностей. Программно-алгоритмическая реализация данного уравнения оптимальной фильтрации может быть успешно использована для оценки медленноменяющихся (систематических) погрешностей реальных средств траекторных измерений при проведении их автономной аттестации.

Далее приведен алгоритм, позволяющий определить стационарное значение ковариационной матрицы оцениваемого вектора состояния стохастической динамической системы траекторных измерений γ_∞ для получения оценок потенциальной точности траекторного измерительного комплекса.

Как показано в работе [48], рекуррентное уравнение (2.24) для ковариационной матрицы оцениваемого вектора состояния стохастической динамической системы траекторных измерений можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \gamma_{\hat{\Theta}}(k) = & \mathbf{a} \cdot \gamma_{\hat{\Theta}}(k-1) \cdot \mathbf{a}^T + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T - \mathbf{a} \cdot \gamma_{\hat{\Theta}}(k-1) \cdot \mathbf{A}^T \times \\ & \times [\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \cdot \gamma_{\hat{\Theta}}(k-1) \cdot \mathbf{A}^T]^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \gamma_{\hat{\Theta}}(k-1) \cdot \mathbf{a}^T, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - (\tilde{\mathbf{b}} \circ \tilde{\mathbf{B}}) \cdot (\tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \cdot \mathbf{A}_1$; $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$; $\mathbf{b} = [(\tilde{\mathbf{b}} \circ \tilde{\mathbf{b}}) - (\tilde{\mathbf{b}} \circ \tilde{\mathbf{B}}) \cdot (\tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \times (\tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{B}})^T]^{1/2}$; $\mathbf{B} = (\tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{B}})^{-1/2}$.

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\tilde{\mathbf{b}} \circ \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2^T + \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2^T; \quad \tilde{\mathbf{b}} \circ \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{B}_1^T + \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{B}_2^T; \quad \tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2^T.$$

Используем для (2.25) лемму об обращении матриц [29] вида

$$\mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}^T \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}^T + \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{W})^{-1},$$

где $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ — квадратные неособенные матрицы размерностью $(n \times n)$ и $(m \times m)$ соответственно.

Тогда, считая, что в выражении (2.25) $\gamma_{\hat{\Theta}}(k-1) = \mathbf{C}$, $\mathbf{A} = \mathbf{W}^T$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{R}$, получим для ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\Theta}}(k)$ выражение

$$\gamma_{\hat{\Theta}}(k) = \mathbf{a} \cdot [\gamma_{\hat{\Theta}}^{-1}(k-1) + \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{a}^T + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T.$$

Если обозначить $\mathbf{J}_g = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{A}$, то получим выражение

$$\gamma_{\hat{\Theta}}(k) = \mathbf{a} \cdot [\gamma_{\hat{\Theta}}^{-1}(k-1) + \mathbf{J}_g]^{-1} \cdot \mathbf{a}^T + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T.$$



Используя условие, что матрицы $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}$ являются невырожденными, проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k) &= \mathbf{a} \cdot \{[\mathbf{I} + \mathbf{J}_g \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1)] \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}^{-1}(k-1)\}^{-1} \cdot \mathbf{a}^T + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T = \\ &= \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1) \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{J}_g \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1)]^{-1} \cdot \mathbf{a}^T + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T = \\ &= \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1) \cdot [(\mathbf{a}^{-1})^T + (\mathbf{a}^{-1})^T \cdot \mathbf{J}_g \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1)]^{-1} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T.\end{aligned}$$

Умножив это уравнение справа на матрицу $[(\mathbf{a}^{-1})^T + (\mathbf{a}^{-1})^T \cdot \mathbf{J}_g \times \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1)]$, получим рекуррентное уравнение Риккати в виде

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k) \cdot [(\mathbf{a}^{-1})^T + (\mathbf{a}^{-1})^T \cdot \mathbf{J}_g \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1)] &= \\ = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot [(\mathbf{a}^{-1})^T + (\mathbf{a}^{-1})^T \cdot \mathbf{J}_g \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1)],\end{aligned}$$

которое легко приводится к формату

$$\boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k) \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1) + \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k) \cdot \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1) - \hat{\mathbf{D}} = 0, \quad (2.26)$$

где $\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{a}^{-1}) \cdot \mathbf{J}_g$; $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{a}^{-1})^T$; $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T) \cdot (\mathbf{a}^{-1})^T \cdot \mathbf{J}_g$; $\hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T) \cdot (\mathbf{a}^{-1})^T$.

Для оценки потенциальной точности траекторного измерительного комплекса при динамической фильтрации результатов траекторных измерений необходимо определить стационарное решение уравнения Риккати $\boldsymbol{\gamma}_{\infty}$, при котором $\boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k) = \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(k-1)$ и уравнение (2.26) обратится в тождество

$$\boldsymbol{\gamma}_{\infty} \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\infty} + \boldsymbol{\gamma}_{\infty} \cdot \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\infty} - \hat{\mathbf{D}} = 0. \quad (2.27)$$

Для решения этого уравнения использовался метод преобразования матрица-знак [2], основанный на свойстве, что матрица $\boldsymbol{\gamma}_{\infty}$ должна удовлетворять следующим матричным уравнениям:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{\gamma}_{\infty} & \mathbf{I} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\infty} & \hat{\mathbf{A}} \\ \hline \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}} - \boldsymbol{\gamma}_{\infty} \cdot \hat{\mathbf{A}} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline -\boldsymbol{\gamma}_{\infty} & \mathbf{I} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{A}} \\ \hline \hat{\mathbf{D}} & \hat{\mathbf{C}} \end{array} \right]; \quad (2.28)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\infty} & \hat{\mathbf{A}} \\ \hline \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}} - \boldsymbol{\gamma}_{\infty} \cdot \hat{\mathbf{A}} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\infty} & \hat{\mathbf{A}} \\ \hline \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}} - \boldsymbol{\gamma}_{\infty} \cdot \hat{\mathbf{A}} \end{array} \right], \quad (2.29)$$

где $\mathbf{Q}$ — решение уравнения.



Делая подстановку (2.29) в (2.28), получаем составную матрицу $\mathbf{F}$, которая получила название гамильтониана и имеет вид

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{A}} \\ \hat{\mathbf{D}} & \hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_2 \cdot \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \cdot \gamma_\infty & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}} - \gamma_\infty \cdot \hat{\mathbf{A}} \end{array} \right] \cdot \mathbf{V}_2^{-1},$$

где

$$\mathbf{V}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \gamma_\infty & \mathbf{I} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & -\mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & -\mathbf{Q} \\ \hline \gamma_\infty & -\gamma_\infty \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{I} \end{array} \right]; \quad (2.30)$$

$$\mathbf{V}_2^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline -\gamma_\infty & \mathbf{I} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} - \mathbf{Q} \cdot \gamma_\infty & \mathbf{Q} \\ \hline -\gamma_\infty & \mathbf{I} \end{array} \right]. \quad (2.31)$$

Положим, что имеется возможность представить матрицу $\mathbf{F}$ в виде

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}) = \mathbf{V}_2 \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \cdot \mathbf{V}_2^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \hline \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right]. \quad (2.32)$$

Тогда с учетом выражений (2.30) и (2.31) матрица $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{F}) &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & -\mathbf{Q} \\ \hline \gamma_\infty & -\gamma_\infty \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{I} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} - \mathbf{Q} \cdot \gamma_\infty & \mathbf{Q} \\ \hline -\gamma_\infty & \mathbf{I} \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} - \mathbf{Q} \cdot \gamma_\infty & \mathbf{Q} \\ \hline \gamma_\infty \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q} \cdot \gamma_\infty) & \gamma_\infty \cdot \mathbf{Q} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Если матрицу $\mathbf{F}$ свести к виду (2.33) путем проведения итерационного процесса, который будет рассмотрен ниже, а также поскольку в матрице будут однозначно вычислены матричные коэффициенты $\mathbf{S}_{11}$, $\mathbf{S}_{12}$, $\mathbf{S}_{21}$, $\mathbf{S}_{22}$, то γ_∞ может быть определено из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{11} &= \mathbf{I} - \mathbf{Q} \cdot \gamma_\infty; \\ \mathbf{S}_{21} &= \gamma_\infty \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q} \cdot \gamma_\infty). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Решая систему уравнений (2.34), получим

$$\gamma_\infty = \mathbf{S}_{21} \cdot (\mathbf{S}_{11})^{-1}. \quad (2.35)$$

Матрицу $\mathbf{F}$ можно преобразовать к виду (2.33) благодаря ее свойству, которое заключается в том, что в непрерывном случае собственные числа матрицы $\mathbf{A}_1 = \hat{\mathbf{C}} - \gamma_\infty \cdot \hat{\mathbf{A}}$ являются положительными, а матрицы $\mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{B}} - \gamma_\infty \cdot \hat{\mathbf{A}}$ — отрицательными. В дискретном случае у матрицы $\mathbf{A}_1$ корни лежат внутри единичного круга, а у матрицы $\mathbf{B}_1$ — вне этого круга.

Для реализации итерационного процесса преобразования матрицы $\mathbf{F}$ к матрице $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ было использовано конформное преобразование вида

$$\mathbf{F}_g = (\mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{F})^{-1}. \quad (2.36)$$

Введя обозначение $\mu = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \cdot \gamma_\infty & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}} - \gamma_\infty \cdot \hat{\mathbf{A}} \end{array} \right]$, в первой итерации конформного преобразования получим выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_g(n=1) &= (\mathbf{V}_2 \cdot \mu \cdot \mathbf{V}_2^{-1} - \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2^{-1})^{-1} \cdot (\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2^{-1} - \mathbf{V}_2 \cdot \mu \cdot \mathbf{V}_2^{-1})^{-1} = \\ &= \mathbf{V}_2 \cdot (\mu - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{V}_2^{-1} \cdot [\mathbf{V}_2 \cdot (\mathbf{I} + \mu) \cdot \mathbf{V}_2^{-1}]^{-1} = \mathbf{V}_2 \cdot (\mu - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{V}_2^{-1} \cdot \mathbf{V}_2 \cdot (\mathbf{I} + \mu)^{-1} \cdot \mathbf{V}_2^{-1} = \\ &= \mathbf{V}_2 \cdot (\mu - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{I} + \mu)^{-1} \cdot \mathbf{V}_2^{-1}. \end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что в процессе преобразований матрицы $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_2^{-1}$ не изменяются, а меняется только внутренняя матрица $\mathbf{L} = (\mu - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{I} + \mu)^{-1}$. Матрица $\mathbf{L}$ может быть сведена к матрице вида $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{array} \right]$ путем применения итерационной процедуры алгоритма Робертса [70] вида

$$\mathbf{F}(n) = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_g(n-1) + \mathbf{F}_g^{-1}(n-1)]. \quad (2.37)$$

Из выражения (2.37) видно, что на каком-то n -м шаге матрица $\mathbf{F}(n)$ будет равна матрице $\mathbf{F}(n-1)$.

Завершается итерационная процедура (2.37) при выполнении условия

$$\|\mathbf{F}(n) - \mathbf{F}(n-1)\| \leq \varepsilon, \quad (2.38)$$

где ε — абсолютно малое число.

Для того чтобы преобразовать матрицу $\mathbf{F}(n)$ к виду (2.33) при выполнении условия (2.38), проводится следующая операция:

$$\begin{aligned}
S'(F) &= [F(n) + I] = V_2 \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \cdot V_2^{-1} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = V_2 \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \cdot V_2^{-1} + V_2 \cdot V_2^{-1} = \\
&= V_2 \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \cdot V_2^{-1} + V_2 \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot V_2^{-1} = V_2 \cdot \begin{bmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot V_2^{-1}. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Тогда

$$S(F) = \frac{1}{2} S'(F) = V_2 \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot V_2^{-1}. \quad (2.40)$$

Определив матрицу $S(F)$ согласно формуле (2.40), получим асимптотическое значение ковариационной матрицы погрешности фильтрации по формуле $\gamma_\infty = S_{21} \cdot (S_{11})^{-1}$.

Алгоритм решения уравнения Риккати в обобщенном виде состоит в следующем:

из коэффициентов уравнения (2.27) составляется матрица гамильтониана H ;

находится конформное преобразование в соответствии с соотношением (2.36);

организуется итерационная процедура (2.37) и (2.38) приведения матрицы H к виду, описываемому выражением (2.32);

определяется матрица $S'(F)$ в соответствии с выражением (2.39), а затем и $S(F)$ по формуле (2.40);

из элементов матрицы $S(F)$ в соответствии с (2.35) определяется асимптотическое (стационарное) значение ковариационной матрицы погрешности фильтрации траекторных измерений.

Таким образом, рассмотренный методический подход, позволяет определить стационарное значение ковариационной матрицы оцениваемого вектора состояния стохастической системы траекторных измерений γ_∞ для получения оценок потенциальной точности траекторного измерительного комплекса.

2.3. Структура программно-алгоритмического комплекса априорной оценки точности траекторного измерительного комплекса при динамической фильтрации результатов траекторных измерений

Необходимо отметить, что организация подготовки к испытаниям новых образцов СТК проводится в неразрывной связи с оценкой возможностей существующих траекторных измерительных комплексов и разработкой предложений по их совершенствованию. Предложения по совершенствованию траекторных измерительных

комплексов разрабатываются после установления факта о том, что возможности существующих комплексов не соответствуют требованиям, предъявляемым со стороны разработчиков образцов СТК, планируемых к проведению испытаний.

Для проведения априорной оценки возможностей ТИК существует соответствующий методический аппарат в виде методик априорной оценки точности таких комплексов. Рассмотрим основные положения наиболее часто используемой на практике методики априорной оценки точности траекторного измерительного комплекса [22].

Предположим, что модель измерений средств ТИ имеет вид

$$\xi(t) = \xi_{\text{ист}}(t) + \xi_{\text{п}}(t),$$

где $\xi(t)$, $\xi_{\text{ист}}(t)$ — соответственно реальное и истинное значения вектора результатов траекторных измерений, поступающих от средств ТИ на момент времени t , размерностью I ; $\xi_{\text{п}}(t)$ — вектор погрешностей измерений, составляющие компоненты которого не коррелированы по времени и имеют параметры $N(0, \sigma_{\xi_i}^2)$, $i = \overline{1, I}$.

Тогда вектор $\Delta\xi(t)$ погрешностей траекторных измерений определится как

$$\Delta\xi(t) = \xi_{\text{п}}(t). \quad (2.41)$$

Так как вектор траекторных измерений $\xi(t)$ в общем случае связан нелинейной зависимостью с вектором оцениваемых параметров движения $\theta(t)$, то расчет погрешности оценки вектора параметров движения ЛА $\hat{\theta}(t)$ в предположении, что статистическая обработка траекторной информации проводится с использованием метода наименьших квадратов, ведется по линеаризованной схеме в соответствии со следующим алгоритмом [22]:

$$\Delta\hat{\theta}(t) = [\mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{W}^T(t)]^{-1} \cdot \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{P} \cdot \Delta\xi(t),$$

где $\mathbf{W}(t)$ — матрица частных производных измеряемых параметров средствами ТИ по оцениваемым параметрам движения ЛА; $\mathbf{P}$ — «весовая» матрица первичных траекторных измерений.

Введем обозначение $[\mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{W}^T(t)]^{-1} \cdot \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{H}(t)$. Тогда с учетом выражения (2.41) ковариационная матрица оцениваемого вектора параметров движения ЛА $\mathbf{y}_{\hat{\theta}}(t)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\hat{\theta}}(t) &= M(\Delta\hat{\theta}(t) \cdot \Delta\hat{\theta}^T(t)) = M([\mathbf{H}(t) \cdot \xi_{\text{п}}(t)] \cdot [\mathbf{H}(t) \cdot \xi_{\text{п}}(t)]^T) = \\ &= \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{y}_{\xi_{\text{п}}}(t) \cdot \mathbf{H}^T(t), \end{aligned}$$

где $\gamma_{\xi_{\text{ин}}}(t)$ — ковариационная матрица вектора погрешностей первичных траекторных измерений.

Анализ рассмотренных математических соотношений методики априорной оценки точности траекторного измерительного комплекса показывает, что она имеет следующие недостатки:

априорная оценка точности ИК проводится в предположении, что модель погрешности измерений средств ТИ описывается не как случайный процесс, а в виде системы случайных величин, причем эта система случайных величин является некоррелированной;

в основе алгоритма совместной обработки траекторной измерительной информации лежит метод наименьших квадратов с получением средневзвешенных оценок параметров движения ЛА по траекториям их полета, что не охватывает всего спектра математических методов, используемых при испытаниях СТК;

не учитываются вид и степень используемого при статистической обработке траекторной информации полинома;

отсутствует учет воздействия на ЛА внешней среды и других управляющих сил.

Рассмотренный выше методический подход к оценке потенциальной точности траекторного измерительного комплекса при динамической фильтрации результатов траекторных измерений имеет широкий спектр практического применения. В частности, этот подход может быть положен в основу построения программно-алгоритмического комплекса априорной оценки точности ТИК при динамической фильтрации траекторных измерений, имеющего ряд преимуществ перед другими существующими аналогичными программно-алгоритмическими комплексами.

На рис. 2.4 приведена структура программно-алгоритмического комплекса априорной оценки точности траекторной измерительной системы при динамической фильтрации результатов траекторных измерений, в основе которого лежит рассмотренный выше методический подход к оценке потенциальной точности траекторного измерительного комплекса. В состав этого программно-алгоритмического комплекса входят следующие блоки:

программный модуль формирования идеальных измерений средствами траекторных измерений (блок 1);

программный модуль формирования кинематической модели движения ЛА в полигонной системе координат (блок 2);

модуль исходных данных о дислокации и тактико-технических характеристиках средств траекторных измерений, а также параметрах динамической модели движения ЛА (блок 3);

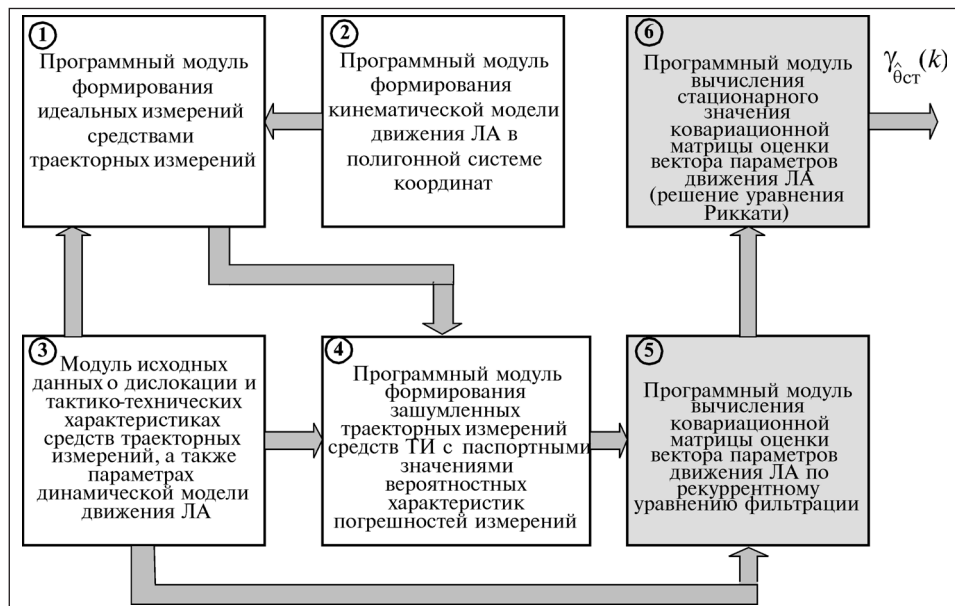


Рис. 2.4. Структура программно-алгоритмического комплекса априорной оценки точности траекторной измерительной системы при динамической фильтрации результатов траекторных измерений

программный модуль формирования зашумленных траекторных измерений средств ТИ с паспортными значениями вероятностных характеристик погрешностей измерений первичных параметров (блок 4);

программный модуль вычисления значений ковариационной матрицы оценки вектора параметров движения ЛА по рекуррентному уравнению фильтрации (блок 5);

программный модуль вычисления стационарного значения ковариационной матрицы оценки вектора параметров движения ЛА путем решения соответствующего алгебраического уравнения Риккати (блок 6).

Математическая модель оценки потенциальной точности траекторного измерительного комплекса при динамической фильтрации результатов траекторных измерений реализована в блоках 5 и 6 и является основой всего программно-алгоритмического комплекса. Однако для ее реализации необходимо иметь данные о траектории полета летательного аппарата и данные о первичных траекторных измерениях по ЛА, поступающих от средств ТИ. Для этого в блоке 2 реализуется кинематическая модель движения ЛА. По данным о кинематической модели движения ЛА и исходным данным о дис-

локации и тактико-технических характеристиках средств траекторных измерений, имеющих в блоке 3, в блоке 1 формируются идеальные измерения от средств траекторных измерений. Затем в блоке 4 из идеальных измерений формируются зашумленные траекторные измерения средств ТИ с паспортными значениями вероятностных характеристик погрешностей измерений, которые затем поступают в блок 5.

В блоке 5 вычисляются значения ковариационной матрицы оценки вектора параметров движения ЛА по рекуррентному уравнению фильтрации, а в блоке 6 — стационарное значение ковариационной матрицы оценки вектора параметров движения ЛА путем решения соответствующего алгебраического уравнения Риккати.

На выходе программно-алгоритмического комплекса априорной оценки точности траекторной измерительной системы при динамической фильтрации результатов траекторных измерений (блок 6) наблюдается последовательность стационарных значений ковариационной матрицы вектора оценки параметров движения ЛА $\gamma_{\hat{\theta}_{\text{ст}}}(k)$ для конкретных значений времени.

Рассмотренный комплекс априорной оценки точности траекторной измерительной системы при динамической фильтрации результатов траекторных измерений имеет следующие преимущества по сравнению с комплексом, реализующим приведенный выше [22] подход к априорной оценке точности ТИК:

модель погрешности первичных измерений средств ТИ описывается как случайный процесс с учетом временной корреляции измерений;

используется динамическая модель движения ЛА в пространстве состояний, которая учитывает воздействие на ЛА внешней среды и других управляющих сил;

в основе алгоритма совместной обработки траекторной измерительной информации лежит метод динамической фильтрации, который реально используется при испытаниях ряда СТК, и при этом исключается неоднозначность получаемых оценок, которая имеет место в рассмотренной выше методике [22] из-за отсутствия учета вида и степени используемого при статистической обработке траекторной информации полинома.

Таким образом, рассмотренный программно-алгоритмический комплекс априорной оценки точности траекторного измерительного комплекса при динамической фильтрации траекторных измерений имеет ряд преимуществ перед применяемыми в настоящее время на практике соответствующими методиками и может быть успешно использован при отработке и испытаниях некоторых видов СТК.

2.4. Математическая модель оценки влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средствами единого времени измерительного комплекса на точность оценки параметров движения ЛА

2.4.1. Исследование механизма влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средствами единого времени ИК на точность оценки параметров движения ЛА

Исследование механизма влияния погрешностей формирования частотно-временной информации (ЧВИ) средствами единого времени (СЕВ) ИК на точность оценки эталонных параметров движения ЛА показало [8], что существуют два рода погрешностей, вносимых в оценки параметров движения аппаратурой единого времени, которые имеют различные характеры проявления в эталонных параметрах движения ЛА, получаемых в результате математической обработки результатов траекторных измерений.

Первый род ошибок в параметрах движения ЛА возникает за счет конечных значений стабильности частотной информации, потребляемой фазометрическими измерительными средствами от аппаратуры единого времени. Нестабильность частотной информации приводит к дополнительным погрешностям в измеряемых параметрах фазометрических измерительных средств. Эти погрешности суммируются с инструментальными погрешностями фазометрических измерительных средств.

Второй род ошибок в оценке параметров движения ЛА возникает из-за временных сдвигов шкал времени, к которым привязывается выходная измерительная информация средств траекторных измерений. Эти временные погрешности не проявляются непосредственно в результатах измерений, а трансформируются в дополнительные погрешности оценки параметров движения ЛА при совместной статистической обработке результатов измерений.

Механизм проявления второго рода ошибок в оценке параметров движения ЛА можно показать на следующем простом примере.

Предположим, что имеются три идеальных радиодальномера, находящихся в одной точке A и проводящих измерения дальности с идеальной точностью $D_{ид}$ по одному летательному аппарату B , который движется со скоростью V и имеет радиальную скорость V_R по отношению к радиодальномерам (рис. 2.5).

На рис. 2.6 изображены три равномерные шкалы времени, причем две последние шкалы имеют временные сдвиги Δt_2 и Δt_3 по отношению к первой.

Пусть выходная информация о дальности D_1, D_2 и D_3 первого, второго и третьего радиодальномеров привязывается соответствен-

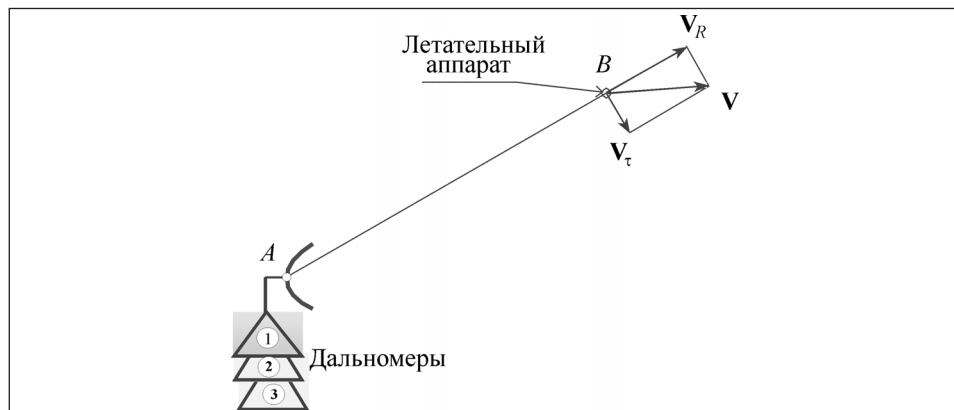


Рис. 2.5. Пример совмещенной дальномерной измерительной системы

но к первой, второй и третьей временным шкалам. Тогда три идеальных радиодальномера зарегистрируют в момент времени t^* следующие значения дальности:

$$\begin{aligned} D_1 &= D_{\text{ид}}; \\ D_2 &= D_{\text{ид}} + V_R \Delta t_2 = D_{\text{ид}} + \Delta D_2; \\ D_3 &= D_{\text{ид}} - V_R \Delta t_3 = D_{\text{ид}} - \Delta D_3. \end{aligned}$$

Проведя простейшую совместную статистическую обработку (определение среднего арифметического значения дальности $D_{\text{ср}}$ до летательного аппарата), получим

$$D_{\text{ср}} = \frac{D_1 + D_2 + D_3}{3} = D_{\text{ид}} + \Delta D,$$

где ΔD и есть дополнительная погрешность в определении среднего арифметического значения дальности до ЛА, вызванная временными невязками в привязке отождествленной измерительной информации к единой шкале времени (здесь под отождествленной информацией понимается измерительная информация, полученная по одному и тому же летательному аппарату и отнесенная к одним и тем же оцифрованным меткам времени).

Факт наличия дополнительных погрешностей в оцениваемых параметрах движения ЛА за счет временных невязок между отождествленной измерительной информацией является справедливым и для любого другого вида совместной статистической обработки информации.

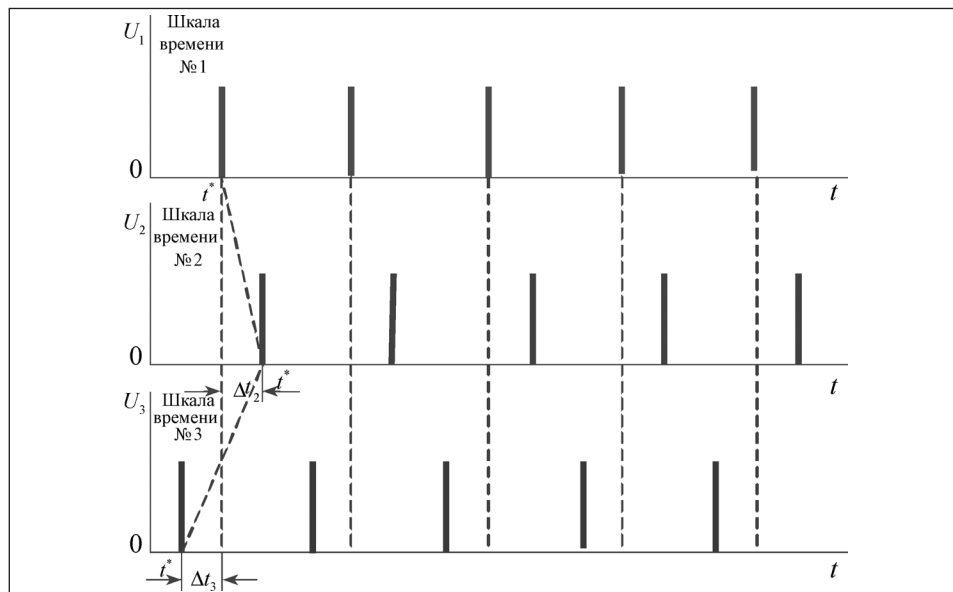


Рис. 2.6. Энтропы трех шкал времени, имеющих взаимные временные сдвиги

Наличие временных невязок между отождествленной измерительной информацией, поступающей в совместную статистическую обработку, в ряде случаев [58, 59, 61] приводит к существенным погрешностям в оценке вектора параметров движения ЛА по результатам траекторных измерений. Этот факт необходимо учитывать при проектировании траекторных измерительных комплексов и их систем единого времени.

2.4.2. Модель оценки показателей точности ТИК с учетом ошибок привязки измерений к единым моментам времени при дискретной линейной фильтрации результатов траекторных измерений

Для планирования работы траекторных измерительных средств и обоснования требований к средствам траекторных измерений используются математические модели оценки влияния состава и расположения измерительных средств, их количества и точности измерений, характеристик используемой модели движения ЛА, а также других факторов на точность оценки траекторным измерительным комплексом параметров движения ЛА. Однако существующие математические модели непригодны для оценки показателей точности ТИК в условиях наличия временных погрешностей в привязке первичных траекторных измерений к единой шкале времени траекторного измерительного комплекса. Требуется матема-

тическая модель, позволяющая получить «отклик» погрешностей формирования частотно-временной информации средствами единого времени ИК в значениях показателей качества траекторного измерительного комплекса.

Наличие математической модели оценки показателей точности ТИК, учитывающей влияние погрешностей в привязке первичных траекторных измерений к единой шкале времени на точность оцениваемых параметров движения ЛА, требуется при проектировании траекторных измерительных комплексов, при обосновании требований к точности формирования местных шкал времени траекторного измерительного комплекса, а также при решении других задач планирования измерительных экспериментов.

Как показано в работах [8, 29], при нормальном законе распределения оцениваемых параметров движения ЛА в качестве показателей точности ТИК для k -й точки траектории полета ЛА могут выступать ковариационная матрица $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ вектора $\hat{\theta}(k)$ оценок параметров движения ЛА, а также математическое ожидание $M(\Delta\hat{\theta}(k))$ погрешности оценки этого вектора. Поэтому математическая постановка задачи построения модели оценки показателей точности ТИК при наличии временных невязок в привязке N -мерных отождествленных траекторных измерений к единой шкале времени может быть сформулирована следующим образом: определить для k -й точки траектории полета ЛА дискретные зависимости значений ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ вектора $\hat{\theta}(k)$ и математического ожидания $M(\Delta\hat{\theta}(k))$ погрешности оценки этого вектора от вероятностных характеристик погрешностей средств траекторных измерений и временных невязок в привязке измерительной информации к единой шкале времени.

Искомые дискретные зависимости могут быть формализованы следующей записью:

$$\gamma_{\hat{\theta}}(k) = \psi_1 \{\Xi_l, \tau_l, \Xi_{\Delta T}, \tau_{\Delta T}, k\}, \quad (2.42)$$

$$M(\Delta\hat{\theta}(k)) = \psi_2 \{\Xi_l, \tau_l, \Xi_{\Delta T}, \tau_{\Delta T}, k\}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (2.43)$$

где Ξ_l, τ_l — N -мерные векторы средних квадратических погрешностей и времен корреляции дискретного случайного процесса первичных траекторных измерений соответственно; $\Xi_{\Delta T}, \tau_{\Delta T}$ — соответственно N -мерные векторы средних квадратических погрешностей и времен корреляции дискретного случайного процесса временных невязок в привязке измерительной информации средств траекторных измерений к единой шкале времени.

Построение математической модели оценки показателей точности траекторного измерительного комплекса при наличии погрешностей в привязке первичных траекторных измерений к единой шкале времени будем проводить с использованием классического аппарата динамической фильтрации.

Проведенные исследования механизма влияния временных невязок между моментами времени привязки к единой шкале времени отождествленных измерений на точность оценки вектора параметров движения ЛА показали [59], что наблюдаемый дискретный N -мерный векторный случайный процесс траекторных измерений $\xi(k)$ можно представить следующей моделью:

$$\xi(k) = \mathbf{H}_1(k) \cdot \theta(k) + \Delta\xi(k) + \eta(k), \quad (2.44)$$

где $\mathbf{H}_1(k)$ — матрица частных производных измеряемых параметров по оцениваемым параметрам движения летательных аппаратов; $\theta(k)$ — оцениваемый вектор параметров движения ЛА; $\Delta\xi(k)$ — дополнительная составляющая в наблюдаемом случайном процессе $\xi(k)$, обусловленная временными невязками в привязке компонент этого процесса к единой шкале времени; $\eta(k)$ — N -мерный случайный процесс погрешностей средств траекторных измерений (шум измерений).

Дополнительную составляющую $\Delta\xi(k)$ в наблюдаемом случайном процессе $\xi(k)$, обусловленную временными невязками в привязке компонент этого процесса к единой шкале времени, с достаточной точностью можно описать в виде

$$\Delta\xi(k) \approx \mathbf{H}_2(k) \cdot \Delta\mathbf{T}(k),$$

где $\mathbf{H}_2(k)$ — диагональная матрица скоростей изменения первичных траекторных измерений размерностью $(N \times N)$, элементы которой могут быть определены априорно с использованием модели планирования измерительного эксперимента; $\Delta\mathbf{T}(k)$ — N -мерный дискретный случайный процесс временных невязок в привязке измерительной информации средств траекторных измерений к единой шкале времени.

Структура матрицы $\mathbf{H}_2(k)$ может быть следующей:

$$\mathbf{H}_2(k) = \text{diag} \left[\frac{\xi_1(k-1) - \xi_1(k)}{\Delta t} \quad \dots \quad \frac{\xi_n(k-1) - \xi_n(k)}{\Delta t} \quad \dots \quad \frac{\xi_N(k-1) - \xi_N(k)}{\Delta t} \right],$$

где Δt — период повторения дискретной траекторной измерительной информации.

Уравнение для наблюдаемого многомерного дискретного процесса траекторных измерений представим линейной моделью вида [60]

$$\xi(k) = \mathbf{H}_1(k) \cdot \theta(k) + \mathbf{H}_2(k) \cdot \Delta \mathbf{T}(k) + \eta(k). \quad (2.45)$$

Вектор $\theta(k)$ оцениваемых параметров движения ЛА на ограниченном интервале траектории полета ЛА может быть описан рекуррентным стохастическим уравнением вида

$$\theta(k) = \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{b} \cdot \varepsilon_1(k), \quad (2.46)$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — матричные коэффициенты, структура которых определяется выбранной моделью движения ЛА в пространстве состояний; $\varepsilon_1(k) = [\varepsilon_{11}(k), \varepsilon_{12}(k), \dots, \varepsilon_{1M}(k)]^T$ — векторный процесс белого шума.

Вектор временных невязок $\Delta \mathbf{T}(k)$ между моментами времени привязки к единой шкале времени отождествленных траекторных измерений на ограниченном интервале проведения измерений является стационарным медленноменяющимся процессом, который может быть описан следующим рекуррентным стохастическим уравнением [59, 63]:

$$\Delta \mathbf{T}(k) = \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{T}(k-1) + \mathbf{b} \cdot \varepsilon_2(k), \quad (2.47)$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — матрицы постоянных коэффициентов размерностью $(N \times N)$; $\varepsilon_2(k) = [\varepsilon_{21}(k), \varepsilon_{22}(k), \dots, \varepsilon_{2N}(k)]^T$ — векторный процесс белого шума.

Векторный дискретный процесс $\eta(k)$ погрешностей измерительных каналов средств траекторных измерений представим суммой двух стационарных случайных процессов $\eta_1(k)$ и $\eta_2(k)$, характеризующих соответственно медленноменяющуюся и быстроменяющуюся составляющие рассматриваемого процесса.

Составляющие векторного процесса $\eta(k)$ могут быть описаны рекуррентными стохастическими уравнениями вида

$$\eta_i(k) = \mathbf{p}_i \cdot \eta_i(k-1) + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{l}_i(k); \quad i=1,2, \quad (2.48)$$

где $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{r}_i$ — матрицы постоянных коэффициентов размерностью $(N \times N)$; $\mathbf{l}_i(k)$ — векторный процесс белого шума.

Тогда наблюдаемый процесс траекторных измерений $\xi(k)$ может быть представлен в виде

$$\xi(k) = \mathbf{H}_1(k) \cdot \theta(k) + \mathbf{H}_2(k) \cdot \Delta \mathbf{T}(k) + \eta_1(k) + \eta_2(k) \quad (2.49)$$

или в развернутой форме с учетом выражений (2.46)...(2.48)

$$\xi(k) = \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \epsilon_1(k) + \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{T}(k-1) + \\ + \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \epsilon_2(k) + \rho_1 \cdot \eta_1(k-1) + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{l}_1(k) + \rho_2 \cdot \eta_2(k-1) + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{l}_2(k). \quad (2.50)$$

Из выражения (2.49) для дискретного момента времени $t = k-1$ выразим быстроменяющуюся составляющую $\eta_2(k)$ шума измерений:

$$\eta_2(k-1) = \xi(k-1) - \mathbf{H}_1(k-1) \cdot \theta(k-1) - \mathbf{H}_2(k-1) \cdot \Delta \mathbf{T}(k-1) - \eta_1(k-1). \quad (2.51)$$

Введем два расширенных случайных процесса вида

$$\Theta(k) = [[\theta(k) | \eta_1(k)] | \Delta \mathbf{T}(k)]^T; \quad \epsilon(k) = [[\epsilon_1(k) | \mathbf{l}_1(k)] | \epsilon_2(k)]^T. \quad (2.52)$$

Подставив в формулу (2.50) соотношение (2.51), получим следующее выражение для наблюдаемого процесса измерений $\xi(k)$:

$$\xi(k) = \mathbf{A}_0(k, \xi) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \Theta(k-1) + \mathbf{B}_1(k) \cdot \epsilon(k) + \mathbf{B}_2(k) \cdot \mathbf{l}_2(k), \quad (2.53)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0(k, \xi) &= \rho_2 \cdot \xi(k-1); \\ \mathbf{A}_1(k) &= [[\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \rho_2 \cdot \mathbf{H}_1(k-1) | \rho_1 - \rho_2] | \mathbf{H}_2(k-1) \cdot \mathbf{a} - \rho_2 \cdot \mathbf{H}_2(k-1)]; \\ \mathbf{B}_1(k) &= [[\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} | \mathbf{r}_1] | \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{b}]; \\ \mathbf{B}_2(k) &= \mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

Построим расширенный процесс модели полезного сообщения с использованием соотношений (2.52):

$$\Theta(k) = \begin{bmatrix} \theta(k) \\ \eta_1(k) \\ \Delta \mathbf{T}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta(k-1) \\ \eta_1(k-1) \\ \Delta \mathbf{T}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_1(k) \\ \mathbf{l}_1(k) \\ \epsilon_2(k) \end{bmatrix}.$$

В более компактной форме это выражение примет вид

$$\Theta(k) = \mathbf{a}_1 \cdot \Theta(k-1) + \mathbf{b}_1 \cdot \epsilon(k). \quad (2.54)$$

Для частично наблюдаемого процесса (2.53) и (2.54) в соответствии с теорией стохастического оценивания [48, 105] оптимальная в

среднем квадратическом смысле оценка вектора $\Theta(k)$ определяется уравнением вида

$$\hat{\Theta}(k) = \mathbf{a}_1 \cdot \hat{\Theta}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [\xi(k) - \mathbf{A}_0(k, \xi) - \mathbf{A}_1(k) \cdot \hat{\Theta}(k-1)]. \quad (2.55)$$

В уравнении оптимальной фильтрации (2.55) матрица $\mathbf{K}(k)$ коэффициента усиления фильтра описывается выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k) = & [\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{a}_1 \cdot \gamma_{\hat{\Theta}}(k) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)] \times \\ & \times [\mathbf{B}_1(k) \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{B}_2(k) \cdot \mathbf{B}_2^T(k) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \gamma_{\hat{\Theta}}(k) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)]^{-1}, \end{aligned}$$

где $\gamma_{\hat{\Theta}}(k)$ — ковариационная матрица составного вектора $\hat{\Theta}(k)$, которая определяется соответствующим рекуррентным уравнением [48].

Поскольку в алгоритмах динамической фильтрации, используемых при статистической обработке траекторной измерительной информации, не учитывается априорная информация о вероятностных характеристиках случайного процесса $\Delta \mathbf{T}(k)$, то реальный уровень погрешности фильтрации наблюдаемого процесса траекторных измерений будет выше, чем это имеет место при оптимальной фильтрации, когда он определяется значением ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\Theta}}(k)$. Сам же фильтр, в параметрах которого отсутствует такая априорная информация, является субоптимальным при условии фильтрации случайного процесса, описываемого выражением (2.49).

Для определения элементов ковариационной матрицы вектора оценки параметров движения ЛА $\gamma_{\hat{\Theta}}(k)$ для случая такого субоптимального фильтра необходимо построить уравнение для погрешности $\Delta \Theta(k)$ оценки расширенного вектора $\Theta(k)$, вызванной отсутствием в параметрах фильтра априорной информации о вероятностных характеристиках случайного процесса $\Delta \mathbf{T}(k)$ временных невязок в привязке первичной траекторной информации к единой шкале времени, в соответствии с выражением

$$\Delta \hat{\Theta}(k) = \hat{\mathbf{D}}(k) - \Theta(k). \quad (2.56)$$

Здесь $\hat{\mathbf{D}}(k)$ — оценка вектора $\Theta(k)$, описываемая формулой вида

$$\hat{\mathbf{D}}(k) = \mathbf{a}_1 \cdot \hat{\mathbf{D}}(k-1) + \mathbf{K}_1(k) \cdot [\xi(k) - \rho_2 \cdot \xi(k-1) - \mathbf{G}(k) \cdot \hat{\mathbf{D}}(k-1)], \quad (2.57)$$

где

$$\mathbf{G}(k) = [[\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \rho_2 \cdot \mathbf{H}_1(k-1) | \rho_1 - \rho_2] | \mathbf{0}];$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(k) = & [\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{R}^T(k) + \mathbf{a}_1 \cdot \gamma_{\text{ст}} \cdot \mathbf{G}^T(k)] \times \\ & \times [\mathbf{R}(k) \cdot \mathbf{R}^T(k) + \mathbf{B}_2(k) \cdot \mathbf{B}_2^T(k) + \mathbf{G}(k) \cdot \gamma_{\text{ст}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^T(k)]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

В выражении (2.58) матрица $\mathbf{R}(k) = [[\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b}^T | \mathbf{r}_1] | \mathbf{0}]$.

Матрицы $\mathbf{G}(k)$ и $\mathbf{R}(k)$ отличаются соответственно от матриц $\mathbf{A}_1(k)$ и $\mathbf{B}_1(k)$ тем, что у них внутренняя матрица $\mathbf{H}_2(k)$ имеет все нулевые элементы. В случае $\|\mathbf{H}_2(k)\|_E = 0$ в параметрах фильтра не будет учитываться априорная информация о вероятностных характеристиках временных невязок в привязке траекторной измерительной информации к единой шкале времени.

В выражении (2.58) стационарное значение ковариационной матрицы $\gamma_{\text{ст}}$ составного вектора $\hat{\mathbf{D}}(k)$ определяется решением соответствующего алгебраического уравнения Риккати [2], в котором норма внутренней матрицы $\mathbf{H}_2(k)$ равна нулю ($\|\mathbf{H}_2(k)\|_E = 0$).

В соответствии с выражением (2.56) с использованием соотношений (2.53), (2.54) и (2.57) получим формулу для вычисления вектора $\Delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k)$ погрешности оценки вектора $\boldsymbol{\Theta}(k)$:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = & [\mathbf{K}_1(k) \cdot \mathbf{G}(k) - \mathbf{a}_1] \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \mathbf{K}_1(k) \cdot [\mathbf{A}_1(k) - \mathbf{G}(k)] \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \\ & + [\mathbf{K}_1(k) \cdot \mathbf{B}_1(k) - \mathbf{b}_1(k)] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k) + \mathbf{K}_1(k) \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{l}_2(k). \end{aligned}$$

В более компактной форме эта формула запишется как

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = \mathbf{V}(k) \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \mathbf{W}(k) \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \mathbf{Q}(k) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k) + \mathbf{L}(k) \cdot \mathbf{l}_2(k), \quad (2.59)$$

где матрицы $\mathbf{V}(k)$, $\mathbf{W}(k)$, $\mathbf{Q}(k)$ и $\mathbf{L}(k)$ имеют следующие структуры:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(k) = & [\mathbf{K}_1(k) \cdot \mathbf{G}(k) - \mathbf{a}_1]; \quad \mathbf{W}(k) = \mathbf{K}_1(k) \cdot [\mathbf{A}_1(k) - \mathbf{G}(k)]; \\ \mathbf{Q}(k) = & [\mathbf{K}_1(k) \cdot \mathbf{B}_1(k) - \mathbf{b}_1(k)]; \quad \mathbf{L}(k) = \mathbf{K}_1(k) \cdot \mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

Систематическая составляющая погрешности оценки вектора параметров движения ЛА $\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k)$ будет характеризоваться математическим ожиданием расширенного вектора погрешности $\Delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k)$, определяемым выражением

$$\begin{aligned} M(\Delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k)) = & [\mathbf{K}_1(k) \cdot \mathbf{G}(k) - \mathbf{a}_1] \cdot M(\Delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1)) + \\ & + \mathbf{K}_1(k) \cdot [\mathbf{A}_1(k) - \mathbf{G}(k)] \cdot M(\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1)). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Выражение (2.60) представляет собой неоднородную линейную систему уравнений, решение которой асимптотически не сходит-

ся к нулю и позволяет рекуррентно оценить математическое ожидание $M(\Delta\hat{\theta}(k))$ погрешности оценки вектора параметров движения ЛА.

В свою очередь, ковариационная матрица $\gamma_{\Delta\hat{\theta}}(k)$ определяется соотношением

$$\gamma_{\Delta\hat{\theta}}(k) = M(\Delta\hat{\theta}(k) \cdot \Delta\hat{\theta}^T(k)).$$

С учетом выражения (2.59) можно записать

$$\begin{aligned} \gamma_{\Delta\hat{\theta}}(k) = & V(k) \cdot \gamma_{\Delta\hat{\theta}}(k-1) \cdot V^T(k) + V(k) \cdot \gamma_{\Delta\hat{\theta}, \hat{\theta}}(k-1) \cdot W^T(k) + \\ & + W(k) \cdot \gamma_{\hat{\theta}, \Delta\hat{\theta}}(k-1) \cdot V^T(k) + W(k) \cdot \gamma_{\hat{\theta}}(k-1) \cdot W^T(k) + \\ & + Q(k) \cdot Q^T(k) + L(k) \cdot L^T(k). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Рекуррентное уравнение (2.61) может быть представлено в более компактной форме:

$$\Gamma(k) = S(k) \cdot \Gamma(k-1) \cdot S^T(k) + P(k) \cdot P^T(k), \quad (2.62)$$

где составные матрицы $\Gamma(k)$, $S(k)$, $P(k)$ имеют следующие структуры:

$$\Gamma(k) = \left[\begin{array}{c|c} \gamma_{\hat{\theta}}(k) & \gamma_{\Delta\hat{\theta}, \hat{\theta}}(k) \\ \hline \gamma_{\Delta\hat{\theta}, \hat{\theta}}(k) & \gamma_{\Delta\hat{\theta}}(k) \end{array} \right]; \quad S(k) = [W(k) \mid V(k)]; \quad P(k) = [Q(k) \mid L(k)].$$

Уравнение (2.62) представляет собой рекуррентное уравнение Ляпунова, которое определяет ковариационную матрицу $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ вектора оцениваемых параметров.

Таким образом, могут быть получены зависимости значений ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ вектора оценки параметров движения ЛА и математического ожидания $M(\Delta\hat{\theta}(k))$ погрешности оценки этого вектора от вероятностных характеристик погрешностей средств траекторных измерений и временных невязок в привязке измерительной информации к единой шкале времени, т.е. решены задачи нахождения искомых дискретных зависимостей $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, описываемых выражениями (2.42) и (2.43).

Анализ выражения (2.60) показывает, что систематическая погрешность в оценке вектора параметров движения ЛА состоит из двух составляющих. Первая составляющая определяется значением математического ожидания $M(\Delta\hat{\theta}(k-1))$ погрешности оценки составного вектора, а вторая составляющая — значением матема-

тического ожидания $M(\hat{\Theta}(k-1))$ самого оцениваемого составного вектора.

Введя обозначения $\mathbf{J}(k)=[\mathbf{K}_1(k) \cdot \mathbf{G}(k) - \mathbf{a}_1]$ и $\Delta \mathbf{U}(k)=[\mathbf{A}_1(k) - \mathbf{G}(k)]$, перепишем выражение (2.60) в виде

$$M(\Delta \hat{\Theta}(k)) = \mathbf{J}(k) \cdot M(\Delta \hat{\Theta}(k-1)) + \mathbf{K}_1(k) \cdot \Delta \mathbf{U}(k) \cdot M(\hat{\Theta}(k-1)). \quad (2.63)$$

С использованием соотношения (2.63) выражение для стационарного значения математического ожидания $M(\Delta \hat{\Theta}_{\text{ст}}(k))$ погрешности оцениваемого составного вектора при $t = k-1$ имеет вид

$$M(\Delta \hat{\Theta}_{\text{ст}}(k)) = [\mathbf{I} - \mathbf{J}(k)]^{-1} \cdot \mathbf{K}_1(k) \cdot \Delta \mathbf{U}(k) \cdot M(\hat{\Theta}(k)).$$

Для получения стационарного значения $\gamma_{\hat{\Theta}_{\text{ст}}}(k)$ ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\Theta}}(k)$ вектора оценки параметров движения ЛА рекуррентное уравнение (2.62) необходимо преобразовать в соответствующее алгебраическое уравнение для случая, когда значение ковариационной матрицы $\Gamma(k)$ не будет изменяться.

Далее проводится решение указанного алгебраического уравнения Ляпунова с использованием алгоритма, приведенного в работе [8]. В результате может быть получено стационарное значение ковариационной матрицы вектора оценки параметров движения ЛА $\gamma_{\hat{\Theta}_{\text{ст}}}(k)$ с учетом влияния временных погрешностей в привязке траекторных измерений к единой шкале времени.

Стационарные значения ковариационной матрицы вектора оценки параметров движения ЛА и математического ожидания погрешности оценки этого вектора могут быть использованы для определения других показателей точности исследуемого траекторного измерительного комплекса.

Для реализации математической модели оценки влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средствами единого времени измерительного комплекса на точность оценки вектора параметров движения ЛА используется специальный программно-алгоритмический комплекс (рис. 2.7).

В состав этого программно-алгоритмического комплекса входят следующие блоки:

программный модуль формирования идеальных измерений средствами траекторных измерений (блок 1);

программный модуль формирования кинематической модели движения ЛА в полигонной системе координат (блок 2);

модуль исходных данных о параметрах частотно-временной информации средств единого времени и параметрах динамической модели движения ЛА в пространстве состояний (блок 3);

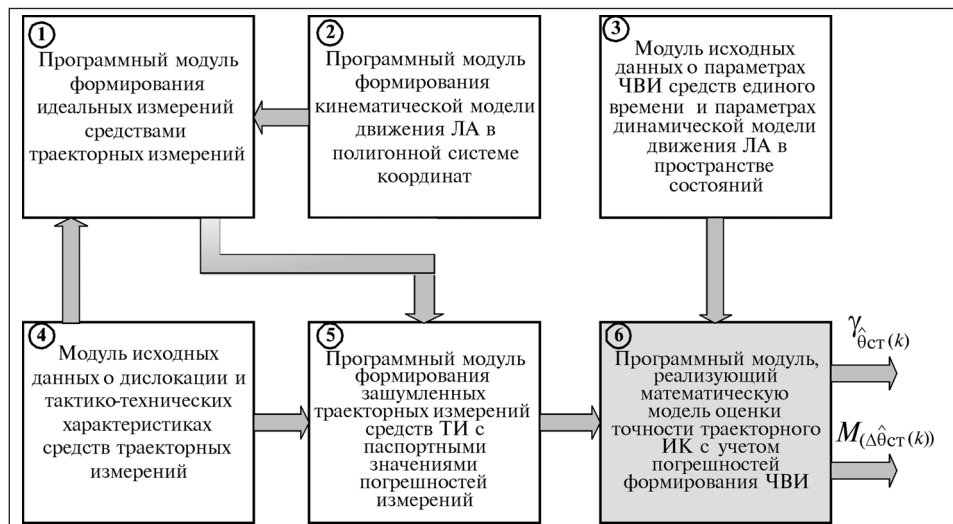


Рис. 2.7. Структура программно-алгоритмического комплекса оценки влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средствами единого времени на точность оценки параметров движения ЛА

модуль исходных данных о дислокации и тактико-технических характеристиках средств траекторных измерений (блок 4);

программный модуль формирования зашумленных траекторных измерений средств ТИ с паспортными значениями вероятностных характеристик погрешностей измерений (блок 5);

программный модуль оценки точности ТИК с учетом погрешностей формирования ЧВИ (блок 6).

Математическая модель оценки влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средствами единого времени измерительного комплекса на точность оценки параметров движения ЛА реализована в блоке 6 и является основой всего программно-алгоритмического комплекса. Однако для ее реализации необходимо иметь данные о траектории полета ЛА и данные о первичных траекторных измерениях по летательному аппарату, поступающих со средств ТИ. Для этого в блоке 2 реализуется кинематическая модель движения ЛА, а в блоке 3 хранятся значения параметров динамической модели движения ЛА в пространстве состояний.

По данным о кинематической модели движения ЛА и исходным данным о дислокации и тактико-технических характеристиках средств траекторных измерений, имеющихся в блоке 4, в блоке 1 формируются идеальные измерения, поступающие от средств ТИ. Затем в блоке 5 из идеальных измерений формируются зашумленные траекторные измерения средств ТИ с паспортными значениями

вероятностных характеристик погрешностей измерений, которые затем поступают в блок 6. Кроме того, в блок 6 поступают данные о параметрах ЧВИ средств единого времени для формирования матричных коэффициентов соответствующих рекуррентных стохастических уравнений.

На выходе программно-алгоритмического комплекса оценки влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средствами единого времени измерительного комплекса на точность оценки параметров движения ЛА (блок 6) наблюдаются стационарные значения ковариационной матрицы вектора оценки параметров движения ЛА и математического ожидания погрешности оценки этого вектора.

Рассмотренный программно-алгоритмический комплекс оценки влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средствами единого времени измерительного комплекса на точность оценки параметров движения ЛА может быть использован как в исследовательских целях, так и для обоснования требований к техническим характеристикам средств единого времени, а также в методах синтеза систем единого времени измерительных комплексов по обобщенным технико-экономическим критериям.

2.4.3. Алгоритмы формирования ковариационных матриц вектора оцениваемых параметров движения ЛА для различных вариантов обработки траекторной измерительной информации при наличии погрешностей в привязке первичных измерений к единой шкале времени

Как показано в разд. 1, погрешность $\Delta_{zs}(k)$ сглаженной оценки составного вектора $\hat{\mathbf{Z}}(k)$ состояния стохастической системы траекторных измерений для случая дискретного поступления измерительной информации может быть определена соотношением

$$\Delta_{zs}(k) = \gamma_{zs}(k) \cdot [\gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \Delta_{zf}(k) + \gamma_{zr}^{-1}(k) \cdot \Delta_{zr}(k) - \gamma_{ze}^{-1}(k) \cdot \Delta_{ze}(k)], \quad (2.64)$$

где $\gamma_{zf}(k)$, $\gamma_{zr}(k)$, $\gamma_{ze}(k)$ — ковариационные матрицы вектора $\hat{\mathbf{Z}}(k)$ соответственно при прямой, обратной и единичной оптимальной фильтрации; $\Delta_{zf}(k)$, $\Delta_{zr}(k)$, $\Delta_{ze}(k)$ — погрешности оценок составного вектора $\hat{\mathbf{Z}}(k)$ соответственно при прямой, обратной и единичной фильтрации; $\gamma_{zs}(k)$ — ковариационная матрица сглаженной оптимальной обработки измерительной информации, которая может быть определена из соотношения $\gamma_{zs}(k) = [\gamma_{zf}^{-1}(k) + \gamma_{zr}^{-1}(k) - \gamma_{ze}^{-1}(k)]^{-1}$.

Тогда с учетом выражения (2.64) ковариационная матрица погрешности субоптимальной сглаженной обработки измерительной информации γ_z , как показано в разд 1, запишется в виде

$$\begin{aligned} \gamma_z(k) = & \gamma_{zs}(k) \cdot \gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \gamma_{(z)ff}(k) \cdot \gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \gamma_{zs}^T(k) + \gamma_{zs}(k) \cdot \gamma_{zf}^{-1}(k) \times \\ & \times \gamma_{(z)fr}(k) \cdot \gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \gamma_{zs}^T(k) - \gamma_{zs}(k) \cdot \gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \gamma_{(z)fe}(k) \cdot \gamma_{ze}^{-1}(k) \times \\ & \times \gamma_{zs}^T(k) + \gamma_{zs}(k) \cdot \gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \gamma_{(z)rf}(k) \cdot \gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \gamma_{zs}^T(k) + \gamma_{zs}(k) \times \\ & \times \gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \gamma_{(z)rr}(k) \cdot \gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \gamma_{zs}^T(k) - \gamma_{zs}(k) \cdot \gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \gamma_{(z)re}(k) \cdot \gamma_{ze}^{-1}(k) \times \\ & \times \gamma_{zs}^T(k) - \gamma_{zs}(k) \cdot \gamma_{ze}^{-1}(k) \cdot \gamma_{(z)ef}(k) \cdot \gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \gamma_{zs}^T(k) - \gamma_{zs}(k) \cdot \gamma_{ze}^{-1}(k) \times \\ & \times \gamma_{(z)er}(k) \cdot \gamma_{zf}^{-1}(k) \cdot \gamma_{zs}^T(k) + \gamma_{zs}(k) \cdot \gamma_{ze}^{-1}(k) \cdot \gamma_{(z)ee}(k) \cdot \gamma_{ze}^{-1}(k) \cdot \gamma_{zs}^T(k), \end{aligned}$$

где $\gamma_{(z)\partial_1, \partial_2}(\tau) = M(\Delta_{z\partial_1}(k) \cdot [\Delta_{z\partial_2}(k)]^T)$, $\partial_1, \partial_2 \in \{f, r, e\}$.

Как показано выше, наблюдаемый процесс траекторных измерений (2.49) с учетом погрешностей, вносимых системой единого времени ИК, для случая дискретного поступления измерительной информации можно записать следующим образом:

$$\xi(k) = \mathbf{H}_1(k) \cdot \boldsymbol{\theta}(k) + \mathbf{H}_2(k) \cdot \Delta \mathbf{T}(k) + \boldsymbol{\eta}_1(k) + \boldsymbol{\eta}_2(k), \quad (2.65)$$

а расширенный процесс модели сообщения может быть представлен как

$$\boldsymbol{\Theta}(k) = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\theta}(k) \\ \boldsymbol{\eta}_1(k) \\ \Delta \mathbf{T}(k) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{p}_1 & \\ \hline \mathbf{0} & & \alpha \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\theta}(k-1) \\ \boldsymbol{\eta}_1(k-1) \\ \Delta \mathbf{T}(k-1) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b} & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{r}_1 & \\ \hline \mathbf{0} & & \beta \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}_1(k) \\ \mathbf{l}_1(k) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2(k) \end{array} \right].$$

В более компактной форме он может быть записан в виде

$$\boldsymbol{\Theta}(k) = \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\Theta}(k-1) + \mathbf{b}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k). \quad (2.66)$$

Тогда для частично наблюдаемого процесса (2.65) и (2.66), как показано выше, имеем следующую формулу для вычисления погрешности $\Delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k)$ оценки вектора $\boldsymbol{\Theta}(k)$:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = & [\mathbf{K}_1(k) \cdot \mathbf{G}(k) - \mathbf{a}_1] \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \mathbf{K}_1(k) \cdot [\mathbf{A}_1(k) - \mathbf{G}(k)] \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \\ & + [\mathbf{K}_1(k) \cdot \mathbf{B}_1(k) - \mathbf{b}_1(k)] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k) + \mathbf{K}_1(k) \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{l}_2(k). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Согласно выражению (1.70) при векторе сообщения $\Theta(k) = \mathbf{Z}(k)$ формула (2.67) для расчета погрешности оценки этого вектора в случаях фильтрации траекторных измерений, средневзвешенной обработки и обратной фильтрации измерений имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{z\partial}(k) = & [\mathbf{a}_{z\partial} - \mathbf{K}_{\partial} \cdot \mathbf{A}_{\partial 1}] \cdot \Delta_{z\partial}(\psi(\partial, k)) + \\ & + [(\mathbf{a}_{z\partial} - \bar{\mathbf{a}}_{z\partial}) + \mathbf{K}_{\partial} \cdot (\bar{\mathbf{a}}_{\eta\partial} \cdot \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{A}}_{\partial 1} - \mathbf{a}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{A}_{\partial 1})] \cdot \mathbf{Z}(\psi(\partial, k)) + \\ & + [\mathbf{K}_{\partial} \cdot (\bar{\mathbf{a}}_{\eta\partial} - \mathbf{a}_{\eta\partial})] \cdot \boldsymbol{\eta}(\psi(\partial, k)) + [\mathbf{K}_{\partial} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\partial 1} - \mathbf{b}_{z\partial}] \cdot \mathbf{e}_{\partial 1}(k) + \\ & + \mathbf{K}_{\partial} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\partial 2} \cdot \mathbf{e}_{\partial 2}(k). \end{aligned}$$

В более компактной форме это выражение может быть записано в виде

$$\Delta_{z\partial}(k) = \mathbf{a}_{\Delta z\partial} \cdot \Delta_{z\partial}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{a}_{\Delta y\partial} \cdot \mathbf{y}(\psi(\partial, k)) + \mathbf{b}_{\Delta y\partial} \mathbf{e}_{y\partial}(k), \quad (2.68)$$

где $\partial \in \{f, r, e\}$.

Отсюда видно, что ковариационные матрицы вектора оцениваемых параметров движения ЛА для различных вариантов обработки траекторной измерительной информации при наличии погрешностей в привязке первичных измерений к единой шкале времени могут быть вычислены с использованием алгоритмов, разработанных в разд. 1, но при условии, что $k_2 - k_1 = \tau = 0$.

Ковариационные матрицы $\boldsymbol{\gamma}_{z\partial}(k)$, ($\partial \in \{f, r, e\}$) для случаев прямой и обратной фильтрации траекторных измерений и средневзвешенной обработки измерений могут быть вычислены с использованием известной формулы

$$M((\Delta_{z\partial_1}(k)) \cdot (\Delta_{z\partial_2}(k))^T) = \boldsymbol{\gamma}_{(z)\partial_1, \partial_2}(k),$$

где $\partial \in \{f, r, e\}$.

Ковариационные матрицы взаимной корреляции $\boldsymbol{\gamma}_{(z)ef}(\tau)$, $\boldsymbol{\gamma}_{(z)fe}(\tau)$, $\boldsymbol{\gamma}_{(z)er}(\tau)$, $\boldsymbol{\gamma}_{(z)re}(\tau)$, $\boldsymbol{\gamma}_{(z)fr}(\tau)$, $\boldsymbol{\gamma}_{(z)rf}(\tau)$, $\boldsymbol{\gamma}_{(z)ff}(\tau)$, $\boldsymbol{\gamma}_{(z)rr}(\tau)$, $\boldsymbol{\gamma}_{(z)ee}(\tau)$ могут быть вычислены с использованием численных алгоритмов, представленных в разд. 1, которые использовались для вычисления корреляционных функций взаимной корреляции. В основе этих алгоритмов лежат уравнения (2.68). Учитывая в выведенных формулах, что $k_2 - k_1 = \tau = 0$, получим следующие выражения для оценки искомых ковариационных матриц взаимной корреляции:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_{(z)ee}(\tau) &= \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T; \\ \boldsymbol{\gamma}_{(z)ef}(\tau) &= \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yf}, [\mathbf{a}_{yf} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\infty} + \boldsymbol{\gamma}_{yf}(\mathbf{b}_{\Delta yf})^T], \mathbf{a}_{\Delta zf}^T); \end{aligned}$$

$$\gamma_{(z)fe}(\tau) = \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, (\mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T + \mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \gamma_{yf}), \mathbf{a}_{yf}^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T;$$

$$\gamma_{(z)er}(\tau) = \mathbf{b}_{\Delta e} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yr}, (\mathbf{a}_{yr} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yr}^T + \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr}^T), \mathbf{a}_{\Delta zr}^T) \cdot \gamma_{yf};$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(z)re}(\tau) = & \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot (\mathbf{a}_{yr})^T, \mathbf{a}_{yr}^T) \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{b}_{\Delta yr}, \mathbf{a}_{yr}) \cdot \gamma_{yr} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta e})^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(z)ff}(\tau) = & \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T, \mathbf{a}_{yf}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yf})^T, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yf}^T, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T), \mathbf{a}_{\Delta zf}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yf}, \gamma_{yf} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yf}^T \cdot \mathbf{a}_{\Delta zf}^T, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T), \mathbf{a}_{\Delta zf}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \gamma_{yf}, \mathbf{a}_{yf}^T) \cdot \mathbf{a}_{\Delta zf}^T, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \gamma_{yf}, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(z)rr}(\tau) = & \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta yr})^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yr}, \gamma_{yr} \cdot (\mathbf{b}_{\Delta yr})^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T) \cdot (\mathbf{a}_{\Delta zr})^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr} \cdot \gamma_{yr}, \mathbf{a}_{yr}^T) \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr}^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T) + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \gamma_{yr}, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(z)fr}(\tau) = & \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yf}^T, \mathbf{a}_{\Delta yf}, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \mathbf{a}_{\Delta yf} \cdot \mathbf{a}_{yf}, \mathbf{a}_{yf}) \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yf}, \gamma_{yf} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yf}^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot \gamma_{yf}, \mathbf{I}) \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yf}^T, \mathbf{a}_{\Delta yf}^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zf}, \mathbf{b}_{\Delta yf} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \mathbf{a}_{yr}), \mathbf{a}_{yr}) \times \\ & \times \text{Svt}(\mathbf{a}_{yr}, (\gamma_{y\infty} - \mathbf{a}_{rr} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yr}^T) \cdot \mathbf{b}_{\Delta yr}^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(z)rf}(\tau) = & \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr}, \mathbf{a}_{yf}) \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yf}, \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yf}^T, \mathbf{a}_{\Delta zr}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{a}_{\Delta yr}, \mathbf{a}_{yf}) \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yf}, \mathbf{a}_{yf} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{b}_{\Delta yf}^T, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{b}_{\Delta yr}, \mathbf{a}_{yr}) \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yr}, \mathbf{a}_{yr} \cdot \gamma_{yr} \cdot \mathbf{a}_{\Delta yf}^T, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T) + \\ & + \text{Svt}(\mathbf{a}_{\Delta zr}, \mathbf{b}_{\Delta yr} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{a}_{yr} \cdot \mathbf{a}_{yf}), \mathbf{a}_{yr}) \cdot \text{Svt}(\mathbf{a}_{yr}, (\gamma_{y\infty} - \mathbf{a}_{yf} \cdot \gamma_{y\infty} \cdot \mathbf{a}_{yf}^T) \cdot \mathbf{b}_{\Delta yf}^T, \mathbf{a}_{\Delta zf}^T). \end{aligned}$$



Таким образом, с использованием математического аппарата динамической линейной фильтрации могут быть получены корреляционные матрицы оценки вектора параметров движения ЛА для всех рассматриваемых вариантов обработки измерительной информации с учетом дополнительных погрешностей, обусловленных ошибками формирования частотно-временной информации средствами единого времени.

2.4.4. Результаты моделирования по исследованию влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средств единого времени ИК на точность определения вектора параметров движения ЛА

Разработанная математическая модель была использована при проведении исследований характера влияния рассмотренных погрешностей формирования выходной частотно-временной информации средств системы единого времени ИК на точность оценки вектора параметров движения ЛА. Цель таких исследований — выявить какие виды погрешностей вносят существенный вклад в погрешность оценки вектора параметров движения ЛА и тем самым выявить показатели качества средств единого времени, к которым следует предъявлять требования при проектировании системы единого времени ИК.

Поскольку точность оценки параметров движения летательного аппарата с учетом погрешностей, вносимых системой единого времени ИК, зависит от многих факторов: взаимного расположения измерительных средств и ЛА, инструментальных погрешностей измерительных средств, величины погрешностей формирования выходной частотно-временной информации средствами единого времени и числа обрабатываемых измерительных каналов, то для наглядности изучения характера такого влияния использовались конкретные варианты построения траекторной измерительной системы.

При проведении исследований рассматривались все виды погрешностей выходной частотно-временной информации средств единого времени ИК и варианты проведения измерений, когда наблюдается максимально возможная с точки зрения практической реализации динамика ЛА, а также имеют место реальные значения погрешностей формирования выходной ЧВИ существующими и перспективными средствами единого времени.

Исследования проводились для трех видов обработки измерительной информации: фильтрации, средних взвешенных и сглаженных оценок вектора параметров движения ЛА.

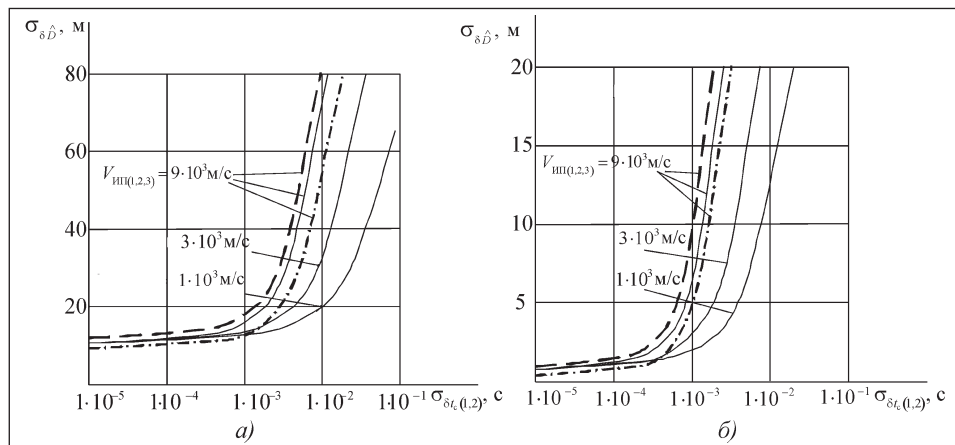


Рис. 2.8. Семейства зависимостей $\sigma_{\delta\hat{D}} = \Psi(\sigma_{\delta t_c(1,2)})$ при $\sigma_{\delta D_{\text{ИК}(1,2,3)}} = 14 \text{ м}$ (а) и $\sigma_{\delta D_{\text{ИК}(1,2,3)}} = 1,2 \text{ м}$ (б):

— — — средневзвешенная оценка; ——— фильтрация; - · - · - · - сглаженная оценка

На рис. 2.8 представлены два семейства зависимостей погрешности оценки дальности до ЛА ($\delta\hat{D}$) для трехканальной дальномерной измерительной системы при различных значениях инструментальных средних квадратических погрешностей дальномеров ($\sigma_{\delta D_{\text{ИК}(1,2,3)}} = 14 \text{ м}$ и $\sigma_{\delta D_{\text{ИК}(1,2,3)}} = 1,2 \text{ м}$) от двух равных погрешностей синхронизации шкал времени $\sigma_{\delta t_c(1,2)}$ аппаратуры двух приемных пунктов по эталонным сигналам времени, передаваемым по каналам связи с третьего приемного пункта. Эти зависимости построены для случаев фильтрации траекторных измерений, средневзвешенных и сглаженных оценок вектора параметров движения ЛА.

Из анализа зависимостей, представленных на рис. 2.8, можно сделать следующие выводы:

зависимости $\sigma_{\delta\hat{D}} = \Psi(\sigma_{\delta t_c(1,2)})$ имеют явно выраженный нелинейный характер и являются монотонными;

из характера представленных зависимостей видно, что при увеличении значений погрешностей $\sigma_{\delta t_c(1,2)}$ наступает момент, когда происходит резкое увеличение погрешности оценки наклонной дальности до ЛА $\sigma_{\delta\hat{D}}$;

резкое увеличение погрешности оценки наклонной дальности до ЛА $\sigma_{\delta\hat{D}}$ объясняется превышением доли погрешности $\sigma_{\delta\hat{D}}$, обусловленной погрешностями синхронизации шкал времени $\sigma_{\delta t_c(1,2)}$ аппаратуры двух приемных пунктов, над уровнем доли погрешности в

оценке параметров движения ЛА, вносимой за счет инструментальных погрешностей дальномеров;

для высокоточных измерительных средств при прочих равных условиях резкое увеличение погрешности оценки параметров движения ЛА происходит при меньших значениях временных невязок между моментами привязки измерений к единой шкале времени;

при прочих равных условиях более высокий уровень погрешности оценки дальности до ЛА наблюдается при более высоких значениях скорости изменения первичных измеряемых параметров $V_{\text{ип}(1,2,3)}$;

различные варианты статистической обработки измерительной информации при прочих равных условиях дают разную величину погрешности оценки вектора параметров движения ЛА. Так, вариант сглаженной обработки информации дает наименьший уровень погрешности в оценке вектора параметров движения (в частности, дальности до ЛА), а вариант средневзвешенной обработки информации — наибольший уровень погрешности;

при обосновании требований к показателям качества средств единого времени должна учитываться такая паспортная характеристика, как погрешность синхронизации шкалы времени аппаратуры единого времени по эталонным сигналам времени.

На рис. 2.9 представлены зависимости средней квадратической погрешности оценки дальности до ЛА $\sigma_{\delta\hat{D}}$ для трехканальной дальномерной измерительной системы от значений двух равных погрешностей $\sigma_{\delta\Omega_e(1,2)}$ долговременной относительной нестабильности выходной частотной информации аппаратуры двух приемных пунк-

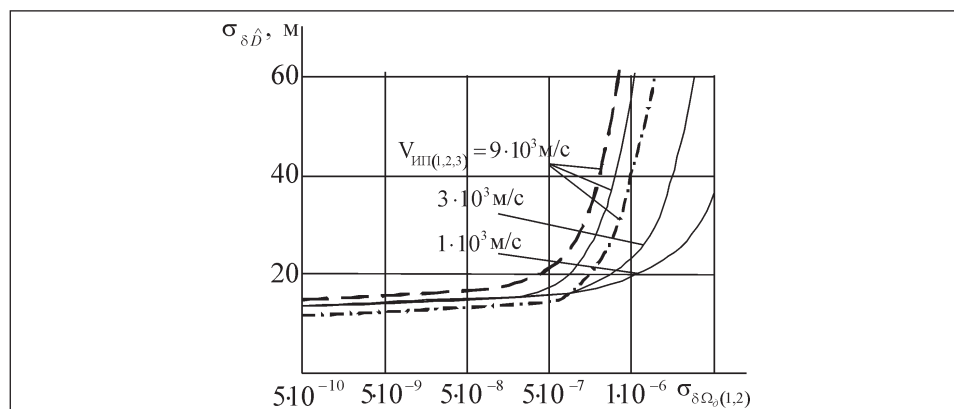


Рис. 2.9. Семейство зависимостей $\sigma_{\delta\hat{D}} = \Psi(\sigma_{\delta\Omega_e(1,2)})$ при $\sigma_{\delta L_{\text{ИК}(1,2,3)}} = 15 \text{ м}$ и $T_{\text{ХШ}} = 10 \text{ ч}$:

— — — средневзвешенная оценка; ——— фильтрация; - · - · - сглаженная оценка

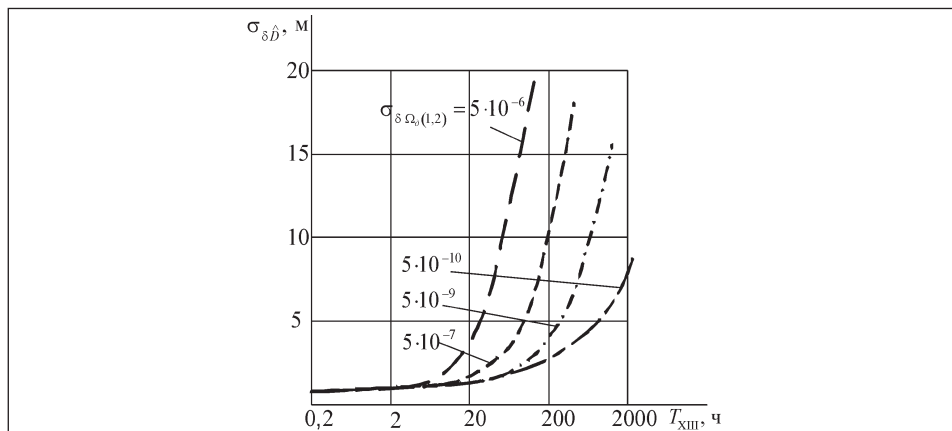


Рис. 2.10. Семейство зависимостей $\sigma_{\delta\hat{D}} = \Psi(T_{ХШ})$ при $\sigma_{\delta D_{ИК(1,2,3)}} = 15$ м и $V_{ИП(1,2,3)} = 5 \cdot 10^5$ м/с

тов при различных значениях скорости изменения измеряемых первичных параметров $V_{ИП(1,2,3)}$. Зависимости построены при средних квадратических значениях инструментальной погрешности для трех дальномеров ($\sigma_{\delta D_{ИК(1,2,3)}}$), равных 15 м, и периоде хранения шкалы времени аппаратуры единого времени ($T_{ХШ}$), равном 10 ч.

На рис. 2.10 представлены зависимости средней квадратической погрешности оценки дальности до ЛА $\sigma_{\delta\hat{D}}$ от периода хранения шкалы времени $T_{ХШ1,2}$ аппаратурой единого времени для первого и второго дальномеров при различных значениях погрешности долговременной относительной нестабильности выходной частотной информации этой аппаратуры единого времени $\sigma_{\delta\Omega_0(1,2)}$, а также при $V_{ИП(1,2,3)} = 5 \cdot 10^3$ м/с и $\sigma_{\delta D_{ИК(1,2,3)}} = 15$ м. Рассматриваемые зависимости представлены для случая, когда оценка вектора параметров движения ЛА проводится путем динамической фильтрации результатов измерений трех дальномеров.

Из анализа зависимостей, представленных на рис. 2.9 и 2.10, можно сделать выводы, аналогичные выводам, сделанным в предшествующем случае. Кроме того, можно отметить, что долговременная нестабильность выходной частотной информации средств единого времени приводит к смещению во времени местных шкал времени, что в ряде случаев оказывает существенное влияние на точность оценки вектора параметров движения ЛА. Поэтому эта характеристика точности средств единого времени должна учитываться при обосновании требований к показателям качества этих средств.

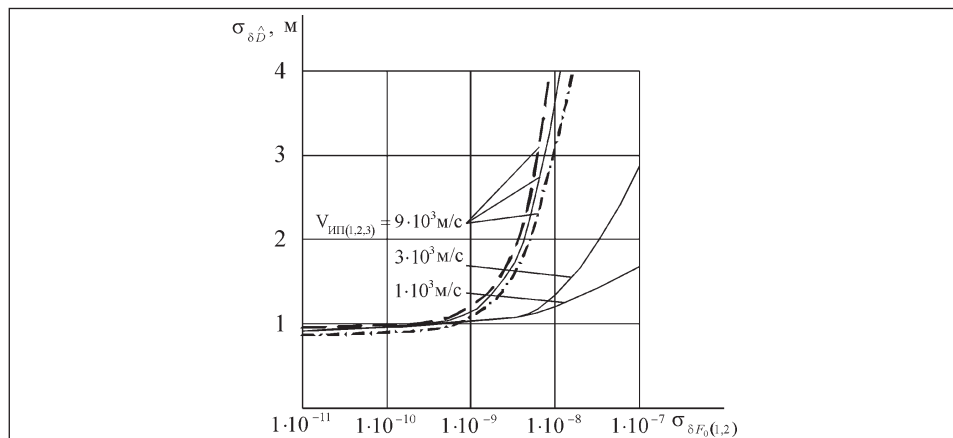


Рис. 2.11. Семейство зависимостей $\sigma_{\delta\hat{D}} = \psi(\sigma_{\delta F_0(1,2)})$ при $\sigma_{\delta L_{ик(1,2,3)}} = 1,2$ м и $T_{ХШ} = 10$ ч:

— — — средневзвешенная оценка; ——— фильтрация; — · — · — сглаженная оценка

Кроме того, при проектировании систем единого времени измерительных комплексов должна обосновываться и такая характеристика аппаратуры, как значение средней квадратической погрешности хранения шкалы времени на заданном временном интервале $\sigma_{\delta t_{ХШ}}$, обусловленной нестабильностью стандарта частоты аппаратуры единого времени.

На рис. 2.11 представлены зависимости средней квадратической погрешности оценки дальности до ЛА $\sigma_{\delta\hat{D}}$ от двух равных относительных погрешностей установки действительного значения частоты двух опорных генераторов аппаратуры единого времени первого и второго дальномеров $\sigma_{\delta F_0(1,2)}$ при $\sigma_{\delta L_{ик(1,2,3)}} = 1,2$ м и $T_{ХШ} = 10$ ч. Зависимости построены при различных значениях скорости изменения первичных измеряемых параметров $V_{ип(1,2,3)}$.

Из анализа зависимостей, приведенных на рис. 2.11, можно сделать вывод, что погрешность установки действительного значения частоты опорных генераторов средств единого времени приводит к смещению во времени местных шкал времени, что в ряде случаев оказывает существенное влияние на точность оценки вектора параметров движения ЛА. Поэтому эта характеристика средств единого времени также должна учитываться при обосновании требований к показателям качества данных средств.

На рис. 2.12 представлены зависимости погрешности оценки радиальной скорости ЛА $\sigma_{\delta\hat{V}_R}$ по измерениям доплеровского измерителя от долговременной относительной нестабильности выходной частотной информации аппаратуры единого времени $\delta\Omega_\phi$ при радиальной скорости полета ЛА V_R , равной $9 \cdot 10^3$ м/с. Зависимости по-

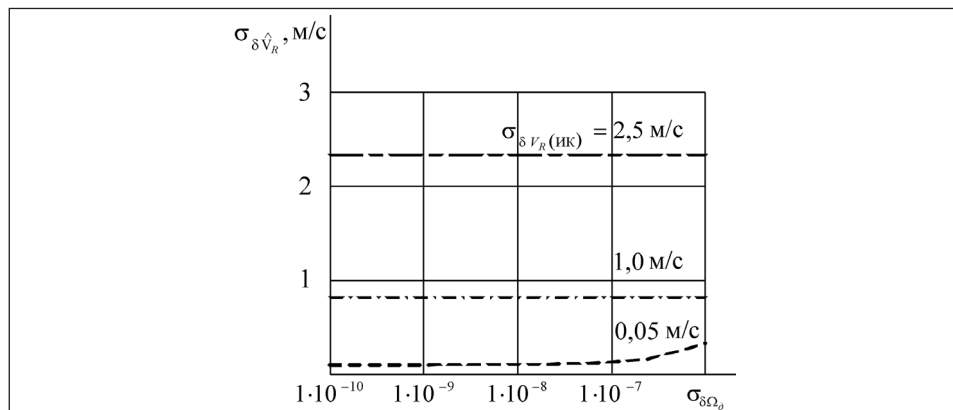


Рис. 2.12. Семейство зависимостей $\sigma_{\delta \hat{V}_R} = \psi(\sigma_{\delta \Omega_0})$ при $V_{R(ИК)} = 9 \cdot 10^3$ м / с

строены при различных значениях средних квадратических погрешностей доплеровского измерителя скорости.

Из анализа зависимостей, приведенных на рис. 2.12, можно сделать вывод о том, что при существующих и перспективных средствах единого времени влиянием долговременной нестабильности их выходной частотной информации на погрешность оценки скоростных параметров движения ЛА можно пренебречь в связи с незначительной степенью такого влияния.

На рис. 2.13 и 2.14 представлены зависимости погрешностей $\sigma_{\delta V_R(З)}$ и $\sigma_{\delta V_R(БЗ)}$ соответственно для запросных и беззапросных доплеровских систем измерения радиальной скорости ЛА от кратковременной относительной нестабильности выходной частотной

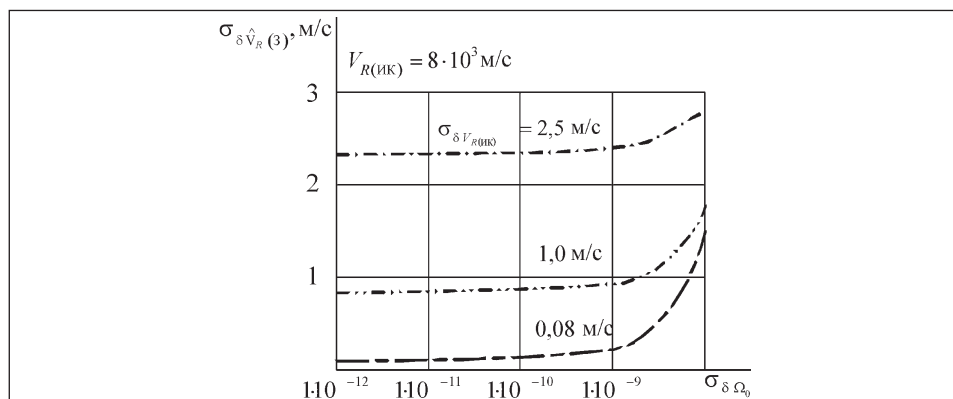


Рис. 2.13. Семейство зависимостей $\sigma_{\delta \hat{V}_R(З)} = \psi(\sigma_{\delta \Omega_0})$

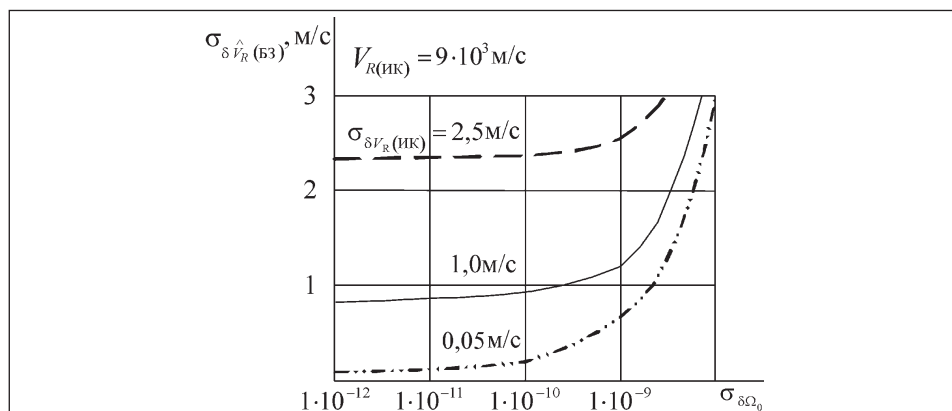


Рис. 2.14. Семейство зависимостей $\sigma_{\delta \hat{V}_R} \text{ (БЗ)} = \psi(\sigma_{\delta \Omega_0})$

информации аппаратуры единого времени $\sigma_{\delta \Omega_0}$. Зависимости построены для различных значений погрешности доплеровского измерителя радиальной скорости $\sigma_{\delta V_R(ИК)}$.

Анализ графиков, приведенных на рис. 2.13 и 2.14, показал, что кратковременная нестабильность выходной частотной информации средств единого времени оказывает существенное влияние на точность оценки скоростных параметров движения ЛА, получаемых при статистической обработке результатов измерений радиальной скорости с помощью доплеровских систем. При этом более существенное влияние на точность оценки этих параметров оказывает кратковременная нестабильность выходной частотной информации средств единого времени для беззапросных доплеровских измерителей скорости по сравнению с запросными.

Обобщая результаты анализа исследования влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средствами единого времени на точность определения вектора параметров движения ЛА, можно сделать следующие выводы:

все исследованные зависимости имеют нелинейный вид, носят непрерывный и монотонный характер;

при проектировании систем единого времени измерительных комплексов необходимо учитывать такие показатели качества аппаратуры единого времени, как средняя квадратическая погрешность синхронизации шкалы времени аппаратуры по эталонным сигналам времени, средняя квадратическая погрешность хранения шкалы времени на заданном временном интервале, обусловленная нестабильностью стандартов частоты аппаратуры единого времени и погрешностью установки номинального значения их частот;

для измерительных комплексов, имеющих в своем составе доплеровские измерители скорости, при обосновании требований к показателям качества аппаратуры единого времени необходимо учитывать такой ее показатель, как кратковременная относительная нестабильность выходных сигналов образцовых частот.

Таким образом, результаты проведенных исследований подтверждают работоспособность рассмотренной математической модели оценки показателей точности траекторного измерительного комплекса в условиях наличия погрешностей в привязке первичных траекторных измерений к единой шкале времени, что дает основание рекомендовать ее для оценки возможностей траекторных измерительных комплексов при их аттестации и проектировании, для обоснования требований к средствам единого времени, а также при решении других задач планирования измерительных экспериментов.

2.5. Метод обоснования требований к точности временной привязки результатов радиотелеизмерений к единой шкале времени измерительного комплекса

Для комплексирования в системе статистической обработки разнородной измерительной информации, а также при синтезе систем единого времени измерительных комплексов необходимо решать задачу обоснования требований к точности взаимной привязки к единой шкале времени траекторной измерительной информации, поступающей от наземных средств траекторных измерений, и данных от бортовых средств измерения перегрузок, передаваемых по каналам радиотелеметрии. Эта задача эквивалентна задаче обоснования требований к точности временной привязки результатов радиотелеизмерений к единой шкале времени измерительного комплекса.

В настоящее время такие требования предъявляются эмпирически, исходя из обеспечения разумной достоверности сопоставления во времени этих двух видов измерительной информации. Критериев достоверности сопоставления таких видов информации не существует, и поэтому требования к взаимной привязке траекторной информации, полученной от наземных средств и бортовых измерителей перегрузок, задаются приближенно и научно не обосновываются.

Предлагается новый метод обоснования требований к точности взаимной привязки двух видов измерительной информации, вытекающий из требований обеспечения заданной точности измерительного комплекса при комплексировании траекторной измери-

тельной информации, поступающей от наземных средств ТИ и по каналам радиотелеметрии.

Известно [29, 42], что использование в совместной статистической обработке высокоточной информации с бортовых акселерометров о перегрузках по осям скоростной системы координат ЛА позволяет повысить точность оценки наземным измерительным комплексом параметров движения ЛА. Однако наличие временных невязок (Δt) между моментами времени привязки отождествленных траекторных измерений, поступающих от наземных средств и бортовых измерителей перегрузок, приводит к снижению точности оценки измерительным комплексом параметров движения ЛА.

При постановке задачи обоснования требований к точности взаимной временной привязки траекторной измерительной информации от наземных средств и бортовых измерителей перегрузок необходимо ввести показатели точности траекторного измерительного комплекса.

Так, в качестве показателя точности ТИК можно рассматривать представленный выше комплексный показатель, оценивающий как случайную составляющую погрешности оценки вектора параметров движения ЛА, так и ее систематическую составляющую.

В качестве показателей точности ТИК по оценке случайной составляющей погрешности могут рассматриваться значения средних квадратических погрешностей оценок вектора координат ЛА $\sigma_{\hat{\theta}_1}$, составляющих вектора скорости $\sigma_{\hat{\theta}_2}$ и составляющих вектора ускорения $\sigma_{\hat{\theta}_3}$, определяемые следующим образом:

$$\sigma_{\hat{\theta}_1} = \max\{\sigma_x^\circ, \sigma_y^\circ, \sigma_z^\circ\}; \quad \sigma_{\hat{\theta}_2} = \max\{\sigma_{\dot{x}}^\circ, \sigma_{\dot{y}}^\circ, \sigma_{\dot{z}}^\circ\}; \quad \sigma_{\hat{\theta}_3} = \max\{\sigma_{\ddot{x}}^\circ, \sigma_{\ddot{y}}^\circ, \sigma_{\ddot{z}}^\circ\},$$

где σ_i° ($i=1,6$) — главные средние квадратические отклонения погрешности оценки рассмотренных векторов.

Полученные оценки $\sigma_{\hat{\theta}_1}$, $\sigma_{\hat{\theta}_2}$ и $\sigma_{\hat{\theta}_3}$ могут сравниваться с традиционно предъявляемыми требованиями, т.е

$$\sigma_{\hat{\theta}_1} \leq \sigma_{x,y,z(\text{треб})}; \quad \sigma_{\hat{\theta}_2} \leq \sigma_{\dot{x},\dot{y},\dot{z}(\text{треб})}; \quad \sigma_{\hat{\theta}_3} \leq \sigma_{\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}(\text{треб})}. \quad (2.69)$$

В качестве показателей точности траекторного ИК по оценке систематической составляющей погрешности могут рассматриваться значения математических ожиданий погрешностей оценок вектора координат ЛА $M(\Delta\hat{\theta}_{\text{коорд}})$, составляющих вектора скорости $M(\Delta\hat{\theta}_{\text{скор}})$ и составляющих вектора ускорения $M(\Delta\hat{\theta}_{\text{ускор}})$, вычисляемые следующим образом:

$$M(\Delta\hat{\theta}_{\text{коорд}}) = \max\{M(\Delta\hat{x}), M(\Delta\hat{y}), M(\Delta\hat{z})\};$$

$$M(\Delta\hat{\theta}_{\text{скор}}) = \max\{M(\Delta\hat{x}), M(\Delta\hat{y}), M(\Delta\hat{z})\};$$

$$M(\Delta\hat{\theta}_{\text{ускор}}) = \max\{M(\Delta\hat{x}), M(\Delta\hat{y}), M(\Delta\hat{z})\}.$$

Тогда требования к точности траекторного измерительного комплекса в части систематической составляющей погрешности оценки вектора параметров движения ЛА θ могут проверяться путем сравнения значений математических ожиданий $M(\Delta\hat{\theta}_{\text{коорд}})$, $M(\Delta\hat{\theta}_{\text{скор}})$ и $M(\Delta\hat{\theta}_{\text{ускор}})$ с допустимыми их значениями, т.е.

$$\begin{aligned} M(\Delta\hat{\theta}_{\text{коорд}}) &\leq M\left(\Delta\hat{\theta}_{\text{коорд}}^{\text{(треб)}}\right); \quad M(\Delta\hat{\theta}_{\text{скор}}) \leq M\left(\Delta\hat{\theta}_{\text{скор}}^{\text{(треб)}}\right); \\ M(\Delta\hat{\theta}_{\text{ускор}}) &\leq M\left(\Delta\hat{\theta}_{\text{ускор}}^{\text{(треб)}}\right). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Для обеспечения проверки выполнения условий неравенств (2.69) и (2.70) необходимо построить математическую модель оценки влияния средних квадратических значений временных невязок в привязке радиотелеизмерений к единой шкале времени $\sigma_{\Delta t}$ на значение ковариационной матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ вектора $\hat{\theta}(k)$, а также на точность оценки систематической составляющей погрешности оценки вектора параметров движения ЛА ($M(\Delta\hat{\theta}(k))$). То есть необходимо построить функциональные зависимости:

$$\gamma_{\hat{\theta}}(k) = \varphi(\sigma_{\Delta t}, k), \quad (2.71)$$

$$M(\Delta\hat{\theta}(k)) = \psi(\sigma_{\Delta t}, k), \quad (2.72)$$

где k — дискретный момент времени.

Построение функциональных зависимостей (2.71) и (2.72) будем проводить на основе анализа алгоритма оптимальной фильтрации разнородной траекторной измерительной информации, поступающей от наземных средств, и бортовых измерителей перегрузок, действующих на ЛА.

При решении рассматриваемой задачи наблюдаемый векторный дискретный процесс разнородных измерений $\xi(k)$ может быть представлен в виде

$$\xi(k) = H(k) \cdot \theta(k) + l(k) \quad (2.73)$$

или записан в следующей развернутой форме:

$$\begin{bmatrix} \xi_n(k) \\ \xi_6(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_n(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_6(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{l}_n(k) \\ \mathbf{l}_6(k) \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Здесь $\xi_n(k)$, $\xi_6(k)$ — наблюдаемые векторные процессы первичных измерений, поступающих соответственно от наземных средств ТИ и от бортовых средств измерения перегрузок; $\theta_1 = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ — оцениваемый вектор параметров движения ЛА по положению и скорости; $\theta_2 = [\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z}]^T$ — оцениваемый вектор параметров движения ЛА по ускорению; $\mathbf{H}_n(k)$ — матрица частных производных измеряемых параметров положения и составляющих скорости ЛА по компонентам вектора $\theta_1(k)$; $\mathbf{H}_6(k)$ — матрица, имеющая структуру $\mathbf{H}_6(k) = \text{diag}[g^{-1}(k) \ g^{-1}(k) \ g^{-1}(k)]$, где g — ускорение свободного падения.

В выражении (2.74) вектор $\mathbf{l}_n(k)$ представляет собой многомерный случайный процесс погрешностей измерения наземными средствами ТИ, а вектор $\mathbf{l}_6(k)$ — многомерный случайный процесс погрешностей измерения перегрузок бортовыми акселерометрами.

Входящая в выражения (2.73) динамическая модель движения ЛА в пространстве состояний для ограниченного участка траектории полета ЛА может быть описана рекуррентным стохастическим уравнением вида

$$\theta(k) = \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{b} \cdot \epsilon_1(k),$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — матрицы, структура которых определяется выбранной динамической моделью движения ЛА в пространстве состояний; $\epsilon_1(k)$ — M -мерный гауссов вектор с независимыми компонентами и с параметрами $N(0,1)$.

Кроме того, M -мерный коррелированный во времени случайный процесс погрешностей измерений первичных параметров средствами траекторных измерений $\mathbf{l}(k)$, входящий в выражение (2.73), может быть описан рекуррентным стохастическим уравнением

$$\mathbf{l}(k) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{l}(k-1) + \mathbf{r} \cdot \epsilon_2(k),$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ — матричные постоянные коэффициенты размерностью $(M \times M)$; $\epsilon_2(k)$ — M -мерный гауссов вектор с независимыми компонентами и с параметрами $N(0,1)$.

На рис. 2.15 представлены временные графики поступления в совместную статистическую обработку разнородной траекторной измерительной информации.

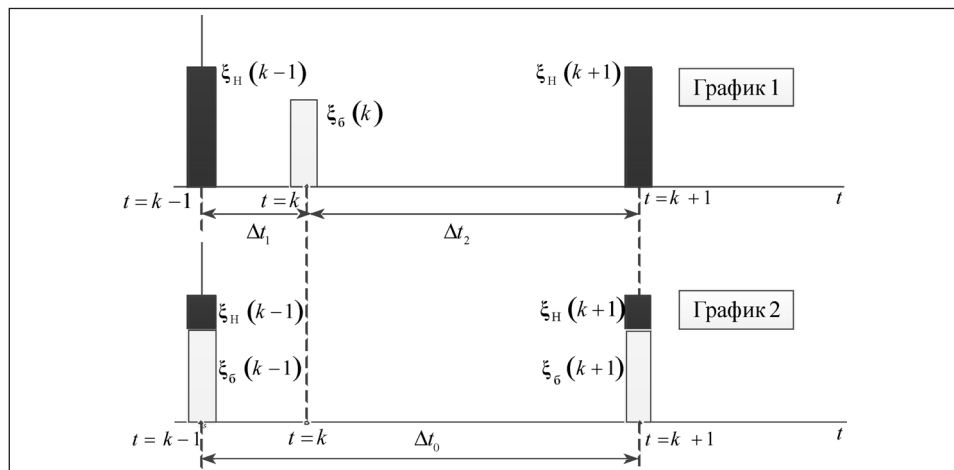


Рис. 2.15. Временные графики поступления в совместную статистическую обработку разнородной траекторной измерительной информации

На графике 1 показана временная эпюра поступления случайных последовательностей $\xi_n(k)$ и $\xi_6(k)$ в оптимальный фильтр Калмана, который поэтапно фильтрует информацию от наземных и бортовых средств ТИ с временным сдвигом между ними, равным Δt_1 . В таком фильтре используются две реальные модели полезного сигнала, каждая из которых осуществляет прогнозирование вектора параметров движения ЛА на интервал, равный Δt_1 , и на последующий интервал Δt_2 .

На графике 2 показана временная эпюра поступления разнородной траекторной измерительной информации $\xi_n(k)$ и $\xi_6(k)$ в фильтр, в котором динамическая модель полезного сигнала учитывает только одновременное поступление информации от наземных и бортовых средств ТИ с периодом, равным Δt_0 . Будем считать, что фильтр, работающий в таком режиме, имеет расчетную модель полезного сигнала.

Для оптимального фильтра и интервалов прогнозирования Δt_1 и Δt_2 модели полезного сигнала имеют следующий вид:

$$\theta(k) = \mathbf{a}(\Delta t_1) \cdot \theta(k-1) + \mathbf{b}(\Delta t_1) \cdot \varepsilon_1(k), \quad (2.75)$$

$$\theta(k+1) = \mathbf{a}(\Delta t_2) \cdot \theta(k) + \mathbf{b}(\Delta t_2) \cdot \varepsilon_1(k+1), \quad (2.76)$$

а уравнения для медленноменяющейся погрешности измерительных средств на указанных интервалах запишем в виде

$$\mathbf{l}(k) = \mathbf{p}(\Delta t_1) \cdot \mathbf{\eta}(k-1) + \mathbf{r}(\Delta t_1) \cdot \varepsilon_2(k);$$

$$\mathbf{l}(k+1) = \mathbf{p}(\Delta t_2) \cdot \mathbf{\eta}(k) + \mathbf{r}(\Delta t_2) \cdot \varepsilon_2(k).$$

Тогда наблюдаемые процессы измерений для интервалов Δt_1 и Δt_2 будут описываться следующими уравнениями [48, 105]:

$$\xi(k) = \mathbf{A}_{01}(k) + \mathbf{A}_{11}(k) \cdot \theta(k-1) + \mathbf{B}_{11}(k) \cdot \varepsilon_{11}(k) + \mathbf{B}_{21}(k) \cdot \varepsilon_{21}(k), \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \xi(k+1) = & \mathbf{A}_{02}(k+1) + \mathbf{A}_{12}(k+1) \cdot \theta(k) + \\ & + \mathbf{B}_{12}(k+1) \cdot \varepsilon_{12}(k+1) + \mathbf{B}_{22}(k+1) \cdot \varepsilon_{22}(k+1), \end{aligned} \quad (2.78)$$

где $\mathbf{A}_{01}(k) = \mathbf{p}(\Delta t_1) \cdot \xi(k-1)$; $\mathbf{A}_{11}(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a}(\Delta t_1) - \mathbf{p}(\Delta t_1) \cdot \mathbf{H}(k-1)$; $\mathbf{B}_{11}(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b}(\Delta t_1)$; $\mathbf{B}_{21}(k) = \mathbf{r}(\Delta t_1)$; $\mathbf{A}_{02}(k+1) = \mathbf{p}(\Delta t_2) \cdot \xi(k)$; $\mathbf{A}_{12}(k+1) = \mathbf{H}(k+1) \times \times \mathbf{a}(\Delta t_2) - \mathbf{p}(\Delta t_2) \cdot \mathbf{H}(k)$; $\mathbf{B}_{12}(k+1) = \mathbf{H}(k+1) \cdot \mathbf{b}(\Delta t_2)$; $\mathbf{B}_{22}(k+1) = \mathbf{r}(\Delta t_2)$; $\varepsilon_{11}(k)$, $\varepsilon_{21}(k)$, $\varepsilon_{12}(k)$, $\varepsilon_{22}(k)$ — многомерные гауссовы векторы с независимыми компонентами, имеющие параметры $N(0, 1)$.

Матрицы частных производных измеряемых траекторных параметров по оцениваемым параметрам движения ЛА для фильтра с реальными моделями движения для моментов времени $t = k-1$, $t = k$ и $t = k+1$ имеют следующие структуры:

$$\mathbf{H}(k-1) = \mathbf{H}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H \\ -\frac{\mathbf{H}_H}{\mathbf{H}_6} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_6 \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Тогда при реальных моделях полезного сигнала уравнения для оптимальных оценок вектора параметров движения ЛА для интервалов Δt_1 и Δt_2 будут иметь вид

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) = & \mathbf{a}(\Delta t_1) \cdot \hat{\theta}(k-1) + \mathbf{K}_1(\mathbf{a}(\Delta t_1), \mathbf{b}(\Delta t_1), \mathbf{p}(\Delta t_1), \mathbf{r}(\Delta t_1), \mathbf{H}_6) \times \\ & \times [\xi(k) - \mathbf{p}(\Delta t_1) \cdot \xi(k-1) - \mathbf{A}_{11}(k) \cdot \hat{\theta}(k-1)]; \\ \hat{\theta}(k+1) = & \mathbf{a}(\Delta t_2) \cdot \hat{\theta}(k) + \mathbf{K}_2(\mathbf{a}(\Delta t_2), \mathbf{b}(\Delta t_2), \mathbf{p}(\Delta t_2), \mathbf{r}(\Delta t_2), \mathbf{H}_H) \times \\ & \times [\xi(k+1) - \mathbf{p}(\Delta t_2) \cdot \xi(k) - \mathbf{A}_{12}(k+1) \cdot \hat{\theta}(k)]. \end{aligned}$$

Матрицы частных производных в фильтре с расчетной моделью полезного сигнала для моментов времени $t = k-1$, $t = k$ и $t = k+1$ имеют следующую структуру:

$$\mathbf{H}(k-1) = \mathbf{H}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H \\ -\frac{\mathbf{H}_H}{\mathbf{H}_6} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_6 \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

Для фильтра с расчетной моделью полезного сигнала уравнения оценок вектора параметров движения ЛА будут иметь вид

$$\hat{\theta}_{\text{расч}}(k) = \mathbf{a}(\Delta t_1) \cdot \hat{\theta}(k-1), \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{расч}}(k+1) = \mathbf{a}(\Delta t_2) \cdot \hat{\theta}(k) + \mathbf{K}_2 \left(\mathbf{a}(\Delta t_2), \mathbf{b}(\Delta t_2), \boldsymbol{\rho}(\Delta t_2), \mathbf{r}(\Delta t_2), \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} \right) \times \\ \times [\xi(k+1) - \boldsymbol{\rho}(\Delta t_2) \cdot \xi(k) - \mathbf{A}_{12}(k+1) \cdot \hat{\theta}(k)], \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\text{где } \mathbf{A}_{12}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H(k+1) \\ \mathbf{H}_6(k+1) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}(\Delta t_2) - \boldsymbol{\rho}(\Delta t_2) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H(k) \\ \mathbf{H}_6(k) \end{bmatrix}.$$

С учетом формул (2.80) и соотношений (2.77) и (2.78) наблюдаемые процессы измерений для фильтра с реальными моделями движения на интервалах Δt_1 и Δt_2 можно записать в виде

$$\begin{aligned} \xi(k) = \boldsymbol{\rho}(\Delta t_1) \cdot \xi(k-1) + \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}(\Delta t_1) - \boldsymbol{\rho}(\Delta t_1) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} \right\} \cdot \theta(k-1) + \\ + \mathbf{B}_{11}(k) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{11}(k) + \mathbf{B}_{21}(k) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{21}(k), \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \xi(k+1) = \boldsymbol{\rho}(\Delta t_2) \cdot \xi(k) + \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}(\Delta t_2) - \boldsymbol{\rho}(\Delta t_2) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \cdot \theta(k) + \\ + \mathbf{B}_{12}(k+1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{12}(k+1) + \mathbf{B}_{22}(k+1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{22}(k+1). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Тогда с учетом соотношений (2.80) уравнения для оценок вектора параметров движения ЛА в фильтре с расчетной моделью полезного сигнала будут иметь вид

$$\hat{\theta}_{\text{расч}}(k) = \mathbf{a}(\Delta t_1) \cdot \hat{\theta}(k-1), \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{расч}}(k+1) = \mathbf{a}(\Delta t_2) \cdot \hat{\theta}(k) + \mathbf{K}_2 \left(\mathbf{a}(\Delta t_2), \mathbf{b}(\Delta t_2), \boldsymbol{\rho}(\Delta t_2), \mathbf{r}(\Delta t_2), \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} \right) \times \\ \times \left(\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}(\Delta t_2) - \boldsymbol{\rho}(\Delta t_2) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \cdot \theta(k) + \mathbf{B}_{12}(k+1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{12}(k+1) + \mathbf{B}_{22}(k+1) \times \right. \\ \left. \times \boldsymbol{\varepsilon}_{22}(k+1) - \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}(\Delta t_2) - \boldsymbol{\rho}(\Delta t_2) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} \right\} \cdot \hat{\theta}(k) \right). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Для оценки погрешности алгоритма фильтрации разнородной траекторной измерительной информации с расчетной моделью полезного сигнала, предполагающей одновременное поступление измерительной траекторной информации от наземных и бортовых средств ТИ, построим с учетом выражений (2.85) и (2.86) уравнения

для погрешности $\Delta\hat{\theta}(t)$ оценки вектора $\theta(k)$ для интервалов Δt_1 и Δt_2 следующего вида:

$$\Delta\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}_{\text{расч}}(k) - \theta(k);$$

$$\Delta\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}_{\text{расч}}(k+1) - \theta(k+1).$$

Используя соотношения (2.75), (2.76), (2.85), (2.86) и сделав подстановку $\hat{\theta}(k) = \theta(k) + \Delta\hat{\theta}(k)$, получим следующие уравнения для погрешностей $\Delta\hat{\theta}(k)$ и $\Delta\hat{\theta}(k+1)$:

$$\Delta\hat{\theta}(k) = \mathbf{a}(\Delta t_1) \cdot \Delta\hat{\theta}(k-1) - \mathbf{b}(\Delta t_1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1(k), \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\theta}(k+1) = & \mathbf{W}(\Delta t_2) \cdot \Delta\hat{\theta}(k) + \mathbf{V}(\Delta t_2) \cdot \theta(k) + \theta(k+1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3(k+1) - \\ & - \mathbf{L}(\Delta t_2) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1(k+1), \end{aligned} \quad (2.88)$$

где

$$\mathbf{W}(\Delta t_2) = \mathbf{a}(\Delta t_2) - \mathbf{K}_2 \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{H}_6 \end{array} \right] \cdot \mathbf{a}(\Delta t_2) - \boldsymbol{\rho}(\Delta t_2) \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{H}_6 \end{array} \right];$$

$$\mathbf{V}(\Delta t_2) = \mathbf{K}_2 \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \cdot \mathbf{a}(\Delta t_2) - \boldsymbol{\rho}(\Delta t_2) \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{0} \end{array} \right] -$$

$$- \mathbf{K}_2 \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{H}_6 \end{array} \right] \cdot \mathbf{a}(\Delta t_2) - \boldsymbol{\rho}(\Delta t_2) \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_H \\ \mathbf{H}_6 \end{array} \right];$$

$$\mathbf{Q}(k+1) = [\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{B}_{21}(k+1) \mid \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{B}_{22}(k+1)]; \quad \mathbf{L}(\Delta t_2) = \mathbf{b}(\Delta t_2);$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3(k+1) = [\boldsymbol{\varepsilon}_{12}(k+1) \mid \boldsymbol{\varepsilon}_{22}(k+1)]^T.$$

Используя уравнения (2.76) и (2.88), запишем уравнение для расширенного случайного процесса $\Theta(k+1) = [\Delta\hat{\theta}(k+1) \mid \theta(k+1)]^T$ в виде

$$\begin{aligned} \Theta(k+1) = & \left[\begin{array}{c} \Delta\hat{\theta}(k+1) \\ \theta(k+1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W}(\Delta t_2) & \mathbf{V}(\Delta t_2) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{a}(\Delta t_2) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta\theta(k) \\ \theta(k) \end{array} \right] + \\ & + \left[\begin{array}{c|c} \theta(k+1) & -\mathbf{L}(\Delta t_2) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{L}(\Delta t_2) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}_3(k+1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1(k+1) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Запишем выражение для математического ожидания расширенного процесса $\Theta(k+1)$.

$$M(\Theta(k+1)) = M \left[\frac{\Delta\hat{\theta}(k+1)}{\theta(k+1)} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W}(\Delta t_2) & \mathbf{V}(\Delta t_2) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{a}(\Delta t_2) \end{array} \right] \cdot M \left[\frac{\Delta\hat{\theta}(k)}{\theta(k)} \right]. \quad (2.89)$$

Из выражений (2.87) и (2.88) определим систематическую составляющую погрешности оценки вектора $\hat{\theta}(t)$ параметров движения ЛА для моментов времени $t=k$ и $t=k+1$, которые будут характеризоваться математическим ожиданием процессов $\Delta\hat{\theta}(k)$ и $\Delta\hat{\theta}(k+1)$:

$$M(\Delta\hat{\theta}(k)) = \mathbf{a}(\Delta t_1) \cdot M(\Delta\hat{\theta}(k-1)), \quad (2.90)$$

$$M(\Delta\hat{\theta}(k+1)) = \mathbf{W}(\Delta t_2) \cdot M(\Delta\hat{\theta}(k)) + \mathbf{V}(\Delta t_2) \cdot M(\theta(k)). \quad (2.91)$$

Выражение (2.91) представляет собой неоднородную линейную систему уравнений, решение которой асимптотически не сходится к нулю и позволяет рекуррентно оценивать математическое ожидание погрешности оценки вектора параметров движения ЛА $M(\Delta\hat{\theta}(k+1))$.

В свою очередь, ковариационные матрицы $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ и $\gamma_{\hat{\theta}}(k+1)$ вектора $\hat{\theta}$ для моментов времени $t=k$ и $t=k+1$ определяются соотношениями

$$\gamma_{\hat{\theta}}(k) = M(\Delta\hat{\theta}(k) \cdot \Delta\hat{\theta}^T(k)); \quad \gamma_{\hat{\theta}}(k+1) = M(\Delta\hat{\theta}(k+1) \cdot \Delta\hat{\theta}^T(k+1)).$$

С использованием уравнений (2.90) и (2.91) получим следующие формулы:

$$\gamma_{\hat{\theta}}(k) = \mathbf{a}(\Delta t_1) \cdot \gamma_{\hat{\theta}}(k-1) \cdot \mathbf{a}^T(\Delta t_1) + \mathbf{b}(\Delta t_1) \cdot \mathbf{b}^T(\Delta t_1), \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\hat{\theta}}(k+1) = & \mathbf{W}(\Delta t_2) \cdot \gamma_{\Delta\hat{\theta}}(k) \cdot \mathbf{W}^T(\Delta t_2) + \mathbf{V}(\Delta t_2) \cdot \gamma_{\hat{\theta}, \Delta\hat{\theta}}(k) \cdot \mathbf{W}^T(\Delta t_2) + \\ & + \mathbf{W}(\Delta t_2) \cdot \gamma_{\Delta\hat{\theta}, \hat{\theta}}(k) \cdot \mathbf{V}^T(\Delta t_2) + \mathbf{V}(\Delta t_2) \cdot \gamma_{\hat{\theta}}(k) \cdot \mathbf{V}^T(\Delta t_2) + \\ & + \mathbf{Q}(k+1) \cdot \mathbf{Q}^T(k+1) + \mathbf{L}(\Delta t_2) \cdot \mathbf{L}^T(\Delta t_2). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Рекуррентное уравнение (2.93) может быть представлено в более компактной форме:

$$\Gamma(k+1) = \mathbf{S}(\Delta t_2) \cdot \Gamma(k) \cdot \mathbf{S}^T(\Delta t_2) + \mathbf{P}(k+1) \cdot \mathbf{P}^T(k+1), \quad (2.94)$$



где составные матрицы $\Gamma(k)$, $S(\Delta t_2)$ и $P(k)$ имеют следующие структуры:

$$\Gamma(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\hat{\theta}}(k) & | & \mathbf{y}_{\Delta\hat{\theta},\hat{\theta}}(k) \\ \hline \mathbf{y}_{\hat{\theta},\Delta\hat{\theta}}(k) & | & \mathbf{y}_{\Delta\hat{\theta}}(k) \end{bmatrix};$$

$$S(\Delta t_2) = [\mathbf{W}(\Delta t_2) | \mathbf{V}(\Delta t_2)]; \quad \mathbf{P}(k) = [\mathbf{Q}(k) | \mathbf{L}(k)].$$

Уравнения (2.92) и (2.93) представляют собой рекуррентные уравнения Ляпунова, которые определяют ковариационную матрицу вектора оценки параметров движения ЛА для двух интервалов обработки разнородной траекторной измерительной информации при наличии временной невязки в привязке к единой шкале времени измерений, полученных от наземных и бортовых измерительных средств.

Таким образом, были получены зависимости оценок ковариационных матриц оцениваемого вектора параметров движения ЛА $\mathbf{y}_{\hat{\theta}}(k)$ и $\mathbf{y}_{\hat{\theta}}(k+1)$, а также систематической погрешности оценки этих параметров $M(\Delta\hat{\theta}(k))$ и $M[\Delta\hat{\theta}(k+1)]$ для двух интервалов обработки разнородной траекторной измерительной информации от временной невязки в привязке к единой шкале времени измерений с наземных средств и бортовых измерителей перегрузок, поступающих в центр обработки по каналам радиотелеметрии. Это дает решение задачи нахождения искомых дискретных зависимостей $\varphi(\sigma_{\Delta t}, k)$ и $\psi(\sigma_{\Delta t}, k)$ в следующем виде:

$$\sigma_{\hat{\theta}_1}(k) = \varphi_1(\sigma_{\Delta t}, k); \quad \sigma_{\hat{\theta}_2}(k) = \varphi_2(\sigma_{\Delta t}, k); \quad \sigma_{\hat{\theta}_3}(k) = \varphi_3(\sigma_{\Delta t}, k), \quad (2.95)$$

$$M(\Delta\hat{\theta}_{\text{коорд}}(k)) = \psi_1(\sigma_{\Delta t}, k); \quad M(\Delta\hat{\theta}_{\text{скор}}(k)) = \psi_2(\sigma_{\Delta t}, k);$$

$$M(\Delta\hat{\theta}_{\text{ускор}}(k)) = \psi_3(\sigma_{\Delta t}, k). \quad (2.96)$$

Далее определяются такие значения требований к точности взаимной привязки траекторной измерительной информации от наземных средств и бортовых измерителей перегрузок $\sigma_{\Delta t_i}$ ($i = \overline{1,6}$) в выражениях (2.95) и (2.96), при которых выполняются условия равенства в формулах (2.69) и (2.70).

Тогда требования $\sigma_{\Delta t(\text{треб})}$ к точности взаимной привязки траекторной измерительной информации наземных средств и бортовых измерителей перегрузок определяются из условия

$$\sigma_{\Delta t(\text{треб})} = \min\{\sigma_{\Delta t_i}\}; \quad i = \overline{1,6}.$$

Таким образом, может быть проведено обоснование требований к точности взаимной привязки к единой шкале времени траектор-

ной измерительной информации, поступающей от наземных средств траекторных измерений, и данных от бортовых средств измерения перегрузок, принимаемых по каналам радиотелеметрии, что позволяет обеспечить заданную точность измерительного комплекса при комплексировании таких двух видов измерительной информации.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ТРАЕКТОРНОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

При испытаниях сложных технических комплексов все чаще возникают задачи статистической обработки траекторной измерительной информации в режиме реального времени. Как правило, их необходимо решать при построении автоматизированных систем управления испытаниями СТК, когда требуется оценивать в режиме реального времени координаты и вектор скорости сопровождаемых измерительным комплексом летательных аппаратов для расчета данных целеуказаний следящим средствам траекторных измерений, а также для управления испытываемыми и привлекаемыми к испытаниям ЛА.

Известно, что при создании систем обработки информации реального времени приходится решать проблемы цифровой привязки траекторных измерений к местным шкалам времени, своевременного получения и освобождения вычислительных ресурсов, синхронизации вычислительных процессов, буферизации потоков данных и т.д. Системы реального времени обычно используют специализированное оборудование (например, аппаратуру единого времени) и соответствующее общее и специальное программное обеспечение.

В системах обработки информации реального времени в качестве общего программного обеспечения используются операционные системы реального времени, а в качестве специального программного обеспечения — программно-реализованные алгоритмы, в основе которых лежат математические методы статистической обработки траекторных измерений в масштабе текущего времени.

Наиболее предпочтительным методом статистической обработки траекторной измерительной информации в режиме реального времени является динамическая фильтрация, которая в последнее время все

более широко используется при испытаниях сложных технических комплексов.

В данном разделе рассмотрены математические методы обработки траекторной измерительной информации, которые позволяют проводить совместную статистическую обработку такой информации при наличии временных невязок в привязке первичных измерений к местным шкалам времени измерительных пунктов, а также получать высокоточные целеуказания следящим средствам траекторных измерений при реализации автоматизированных систем управления измерительными комплексами.

3.1. Метод оптимальной фильтрации многомерных случайных процессов результатов измерения координат ЛА с несинхронными во времени компонентами

Существует много разновидностей программно-реализованных фильтров, которые обеспечивают оптимальную фильтрацию полезных векторных случайных процессов (многоканальных траекторных измерений) на фоне шумов в предположении, что компоненты полезного многомерного процесса не имеют взаимных невязок между моментами времени привязки его компонент к единой шкале времени.

Однако на практике при проведении натурных экспериментов возникает задача совместной статистической обработки многоканальных траекторных измерений, полученных от разнородных измерителей, которые могут иметь взаимные невязки между моментами времени привязки этих измерений к единой шкале времени.

Наличие рассматриваемых временных невязок обусловлено конечной точностью стандартов частоты и хранителей времени, создающих местные шкалы времени траекторных измерительных комплексов, а также ошибками персонала, обслуживающего аппаратуру единого времени. Временные невязки между моментами времени привязки к единой шкале времени траекторного измерительного комплекса отождествленных измерений приводят к дополнительным погрешностям в оценке вектора параметров движения испытываемых ЛА при совместной статистической обработке таких измерений.

Исследования показали [58, 61, 63], что влияние временных невязок между моментами времени привязки к шкале времени отождествленных измерений на точность оценки вектора параметров движения ЛА может быть снижено использованием специально синтезированного фильтра Калмана, в параметрах которого учитываются значения вероятностных характеристик законов распределения рассматриваемых временных невязок.

Тогда задачу оптимальной фильтрации многомерных случайных процессов траекторных измерений с несинхронными во времени компонентами можно сформулировать следующим образом.

Требуется определить оптимальную оценку вектора параметров движения ЛА $\hat{\theta}_{\text{opt}}(t) = [\hat{q}_{1\text{opt}} \ \hat{q}_{2\text{opt}} \ \dots \ \hat{q}_{N\text{opt}}]$ размерностью N при условии получения минимальной дисперсии этих оцениваемых параметров $(\min D_{\hat{q}_1}, \min D_{\hat{q}_2}, \dots, \min D_{\hat{q}_N})$ в случае наличия временных невязок между моментами времени привязки к единой шкале времени отождествленных траекторных измерений, описываемых случайным вектором $\Delta \mathbf{T}(t)$.

Математически такая задача запишется следующим образом: определить

$$\hat{\theta}_{\text{opt}}(t) : \{\min D_{\hat{q}_1}(t), \min D_{\hat{q}_2}(t), \dots, \min D_{\hat{q}_N}(t)\} \text{ при } \Delta \mathbf{T}(t) \neq \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

Решение задачи (3.1) будем искать путем синтеза модифицированного фильтра Калмана с использованием классических соотношений динамической фильтрации.

3.1.1. Алгоритм оптимальной фильтрации многомерных случайных процессов результатов измерения координат ЛА с несинхронными во времени компонентами

Исследования механизма влияния временных невязок между моментами времени привязки к единой шкале времени отождествленных измерений на точность оценки вектора параметров движения ЛА показали [8], что наблюдаемый N -мерный векторный случайный процесс траекторных измерений ξ можно представить в следующем виде:

$$\xi(t) = \mathbf{H}_1(t) \cdot \theta(t) + \Delta \xi(t) + \eta(t), \quad (3.2)$$

где $\mathbf{H}_1(t)$ — матрица частных производных измеряемых параметров по оцениваемым параметрам движения ЛА; $\theta(t)$ — вектор параметров движения ЛА; $\Delta \xi(t)$ — вектор дополнительной составляющей в наблюдаемом случайном процессе $\xi(t)$, обусловленной временными невязками в привязке компонент этого процесса к единой шкале времени; $\eta(t)$ — векторный процесс шума траекторных измерений.

Как известно, погрешность в n -й компоненте наблюдаемого процесса $\Delta \xi(t)$, вызванная временной невязкой δt_n , определяется выражением

$$\delta \xi_n(t) = \xi_n^{(1)}(t) \delta t_n + \xi_n^{(2)}(t) \frac{\delta t_n^2}{2} + \dots + \xi_n^{(m)}(t) \frac{\delta t_n^m}{m!},$$

где $\xi_n^{(m)}$ — производная m -го порядка от процесса ξ_n .

Учитывая в компоненте $\Delta\xi(t)$ процесса (3.2) составляющую, обусловленную только скоростью изменения наблюдаемого процесса, представим выражение (3.2) в виде

$$\xi(t) = \mathbf{H}_1(t) \cdot \theta(t) + \mathbf{H}_2(t) \cdot \Delta\mathbf{T}(t) + \eta(t), \quad (3.3)$$

где $\mathbf{H}_2(t)$ — диагональная матрица скоростей изменения первичных траекторных измерений размерностью $(N \times N)$, элементы которой могут быть определены априорно с использованием модели планирования измерительного эксперимента.

Опишем вектор $\theta(t)$ интегральным уравнением вида

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \mathbf{A} \cdot \theta(s) ds + \int_0^t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{W}_1(s), \quad (3.4)$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — матричные коэффициенты, структура которых определяется выбранной моделью движения ЛА в пространстве состояний; $\mathbf{W}_1(t)$ — векторный винеровский случайный процесс.

В наблюдаемом случайном N -мерном процессе траекторных измерений $\xi(t)$ в качестве векторного случайного процесса $\eta(t)$ выступают коррелированные во времени погрешности измерений средств ТИ, которые могут быть описаны стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t \mathbf{p} \cdot \eta(s) ds + \int_0^t \mathbf{r} \cdot d\mathbf{W}_0(s), \quad (3.5)$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ — диагональные матрицы с постоянными коэффициентами размерностью $(N \times N)$; $\mathbf{W}_0(t)$ — N -мерный векторный винеровский случайный процесс.

Вектор временных невязок $\Delta\mathbf{T}(t)$ между моментами времени привязки к единой шкале времени отождествленных траекторных измерений на ограниченном интервале времени проведения измерений является стационарным медленноменяющимся процессом, который может быть описан интегральным стохастическим уравнением

$$\Delta\mathbf{T}(t) = \Delta\mathbf{T}(0) + \int_0^t \mathbf{\alpha} \cdot \Delta\mathbf{T}(s) ds + \int_0^t \mathbf{\beta} \cdot d\mathbf{W}_2(s), \quad (3.6)$$

где $\mathbf{\alpha}$, $\mathbf{\beta}$ — матрицы постоянных коэффициентов размерностью $(N \times N)$; $\mathbf{W}_2(t)$ — N -мерный векторный винеровский процесс.

При отсутствии корреляции между компонентами вектора $\Delta\mathbf{T}(t)$ с учетом того, что погрешность в привязке первого измерительного канала к единой шкале времени равна нулю, выражение (3.6) может быть представлено в следующем виде [8, 63]:

$$\begin{bmatrix} \delta t_1(t) \\ \delta t_2(t) \\ \vdots \\ \delta t_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta t_2(0) \\ \vdots \\ \delta t_N(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_{\delta t_2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{\delta t_N}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \delta t_2(s) \\ \vdots \\ \delta t_N(s) \end{bmatrix} ds +$$

$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2\sigma_{\delta t_2}^2}{T_{\delta t_2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2\sigma_{\delta t_N}^2}{T_{\delta t_N}}} \end{bmatrix} \cdot d\mathbf{W}(s),$$

где $\sigma_{\delta t_n}^2$, $T_{\delta t_n}$ — соответственно дисперсия и время корреляции случайного процесса невязок между моментами времени привязки отождествленных измерений в n -м измерительном канале и в опорном, например, первом по номеру измерительном канале.

Далее получим дифференциал процесса $\xi(t)$ с учетом процессов, описанных выражениями (3.3)...(3.6). Для этого используем формулу замены переменных Ито [48, 68], суть которой заключается в следующем.

Пусть $\mathbf{Z}(t)$ — векторный случайный процесс, имеющий стохастический дифференциал вида

$$d\mathbf{Z}(t) = \mathbf{a}dt + \mathbf{b} \cdot d\mathbf{W}(t),$$

где $\mathbf{W}(t)$ — векторный винеровский случайный процесс; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — матричные постоянные коэффициенты.

Тогда имеется взаимосвязь случайных процессов $\xi(t) = \mathbf{h}(\mathbf{Z}(t))$. При этом процесс $\xi(t, \mathbf{Z})$ также имеет дифференциал вида

$$d\xi(t, \mathbf{Z}) = \left[\mathbf{h}^{(1)}(t, \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^{(2)}(t, \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{b}^2 \right] dt + \mathbf{h}^{(1)}(t, \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{b} \cdot d\mathbf{W}(t). \quad (3.7)$$

В нашем случае для построения дифференциала $d\xi(t, \mathbf{Z})$ наблюдаемого случайного процесса измерений запишем дифференциалы процессов $\theta(t)$, $\Delta\mathbf{T}(t)$ и $\eta(t)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}d\theta(t) &= \mathbf{A} \cdot \theta(t)dt + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{W}_1(t); \\d\Delta\mathbf{T}(t) &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta\mathbf{T}(t)dt + \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}_2(t); \\d\eta(t) &= \boldsymbol{\rho} \cdot \eta(t)dt + \mathbf{r} \cdot d\mathbf{W}_0(t).\end{aligned}\tag{3.8}$$

С использованием дифференциалов случайных процессов $\theta(t)$, $\Delta\mathbf{T}(t)$ и $\eta(t)$, описанных выражениями (3.8), построим дифференциал расширенного случайного процесса $\mathbf{Z}(t)$ следующего вида:

$$d\mathbf{Z}(t) = \text{diag}[\mathbf{A} \mid \boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\rho}] \cdot \mathbf{Z}(t)dt + \text{diag}[\mathbf{B} \mid \boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{r}] \cdot d\mathbf{W}(t),\tag{3.9}$$

где $\mathbf{Z}(t) = [[\theta(t) \mid \Delta\mathbf{T}(t) \mid \eta(t)]^T$; $d\mathbf{W}(t) = [[d\mathbf{W}_1(t) \mid d\mathbf{W}_2(t) \mid d\mathbf{W}_0(t)]^T$.

Наблюдаемый случайный процесс траекторных измерений $\xi(t)$ выразим через расширенный вектор $\mathbf{Z}(t)$ следующим образом:

$$\xi(t) = [[\mathbf{H}_1(t) \mid \mathbf{H}_2(t)] \mid \mathbf{I}] \cdot \mathbf{Z}(t),$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Тогда согласно формуле (3.7) с использованием дифференциала составного процесса $\mathbf{Z}(t)$, описываемого выражением (3.9), построим дифференциал наблюдаемого случайного процесса $\xi(t)$ в виде

$$\begin{aligned}d\xi(t, \mathbf{Z}) &= [[\mathbf{H}_1(t) \mid \mathbf{H}_2(t)] \mid \mathbf{I}] \cdot \{\text{diag}[\mathbf{A} \mid \boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\rho}] \cdot \mathbf{Z}(t)\}dt + \\&+ [[\mathbf{H}_1(t) \mid \mathbf{H}_2(t)] \mid \mathbf{I}] \cdot \{\text{diag}[\mathbf{B} \mid \boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{r}] \cdot d\mathbf{W}(t)\}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Интегрируя дифференциал (3.10) в пределах от 0 до t , получим следующее выражение для наблюдаемого векторного случайного процесса $\xi(t)$ траекторных измерений:

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \xi(0) + \int_0^t \mathbf{H}_1(s) \cdot \mathbf{A} \cdot \theta(s)ds + \int_0^t \mathbf{H}_2(s) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta\mathbf{T}(s)ds + \int_0^t \boldsymbol{\rho} \cdot \eta(s)ds + \\&+ \int_0^t \mathbf{H}_1(s) \cdot \mathbf{B} \cdot d\mathbf{W}_1(s) + \int_0^t \mathbf{H}_2(s) \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}_2(s) + \int_0^t \mathbf{r} \cdot d\mathbf{W}_0(s).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Из выражения (3.3) для момента времени $t = s$ выразим случайный процесс шума траекторных измерений $\eta(t)$:

$$\eta(s) = \xi(s) - \mathbf{H}_1(s) \cdot \theta(s) - \mathbf{H}_2(s) \cdot \Delta\mathbf{T}(s)$$

и подставим его в формулу (3.11).



Введя расширенные векторы $\Theta(t) = [\theta(t) \mid \Delta T(t)]^T$ и $dW_3(t) = [dW_1(t) \mid dW_2(t)]^T$, в результате очевидных преобразований получим следующее выражение для наблюдаемого процесса $\xi(t)$:

$$\begin{aligned} \xi(t) = \xi(0) + \int_0^t [\rho \cdot \xi(s)] ds + \int_0^t [H_1(s) \cdot A - \rho \cdot H_1(s) \mid H_2(s) \cdot \alpha - \rho \cdot H_2(s)] \cdot \Theta(s) ds + \\ + \int_0^t [H_1(s) \cdot B \mid H_2(s) \cdot \beta] \cdot dW_3(s) + \int_0^t r \cdot dW_0(s). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Построим с использованием векторов $\Theta(t)$ и $dW_3(t)$ следующую модель полезного сообщения:

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \Delta T(t) \end{bmatrix} = \Theta(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \Theta(s) ds + \int_0^t \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \cdot dW_3(s). \quad (3.13)$$

В предположении частично наблюдаемого процесса (3.12) и (3.13) в соответствии с теорией динамической фильтрации [48, 104, 105] дифференциал оптимальной оценки вектора состояния $\hat{\Theta}(t) = [\hat{\theta}_{\text{opt}}(t) \mid \hat{\Delta T}(t)]^T$ и решение задачи (3.1) определяются соотношением вида:

$$\begin{aligned} d\hat{\Theta}(t) = \left[\frac{d\hat{\theta}_{\text{opt}}(t)}{d\hat{\Delta T}(t)} \right] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \hat{\Theta}(t) dt + K(t) \cdot \{ d\xi(t) - \rho \cdot \xi(t) dt - \\ - [H_1(t) \cdot A - \rho \cdot H_1(t) \mid H_2(t) \cdot \alpha - \rho \cdot H_2(t)] \cdot \hat{\Theta}(t) dt \} \end{aligned} \quad (3.14)$$

или в интегральной форме

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{\text{opt}}(t) \\ \hat{\Delta T}(t) \end{bmatrix} = \hat{\Theta}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \hat{\Theta}(s) \cdot ds + K(t) \times \\ \times \left\{ \int_0^t d\xi(s) - \int_0^t \rho \cdot \xi(s) ds - [H_1(s) \cdot A - \rho \cdot H_1(s) \mid H_2(s) \cdot \alpha - \rho \cdot H_2(s)] \cdot \hat{\Theta}(s) ds \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где составная матрица $K(t)$ коэффициента усиления фильтра определяется выражением

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1(t) \\ \mathbf{K}_2(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{H}_1^T(t) \\ \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{H}_2^T(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(t) \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_1(t) \cdot \mathbf{A} - \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{H}_1(t)]^T \\ [\mathbf{H}_2(t) \cdot \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{H}_2(t)]^T \end{bmatrix} \right\} \times \\ \times \{ [\mathbf{H}_1(t) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{H}_1^T(t) + \mathbf{H}_2(t) \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{H}_2^T(t)] + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T \}^{-1}. \quad (3.16)$$

В выражении (3.16) $\boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(t)$ представляет собой ковариационную матрицу оцениваемого составного вектора $\hat{\Theta}(t)$, которая определяется дифференциальным уравнением вида [48]

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\hat{\Theta}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{11}(t) & \dot{\gamma}_{12}(t) \\ \dot{\gamma}_{21}(t) & \dot{\gamma}_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(t) + \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(t) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}^T \end{bmatrix} - \mathbf{K}(t) \times \\ \times \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{H}_1^T(t) \\ \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{H}_2^T(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\Theta}}(t) \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_1(t) \cdot \mathbf{A} - \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{H}_1(t)]^T \\ [\mathbf{H}_2(t) \cdot \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{H}_2(t)]^T \end{bmatrix} \right\}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Согласно выражению (3.14) была построена структурная схема модифицированного фильтра Калмана [63], реализующего фильтрацию многомерного случайного процесса с временными невязками в привязке его компонент к единой шкале времени, которая показана на рис. 3.1.

Устройство для оптимальной фильтрации многомерных случайных процессов с несинхронными во времени компонентами работает следующим образом.

Информационный N -мерный случайный процесс измерений $\xi(t)$ поступает на вход матричного умножителя ρ , а также на входы блока дифференцирования (БД).

С выхода матричного умножителя ρ N -мерный сигнал поступает на вход «уменьшаемое» первого блока вычитателей S_1 , а на его второй вход «вычитаемое» поступает с блока дифференцирования процесс $d\xi(t)$, являющийся дифференциалом случайного процесса измерений $\xi(t)$.

С выхода блока вычитателей S_1 сигнал поступает на вход «вычитаемое» вычитателей S_2 , а на его второй и третий входы «уменьшаемое» — соответствующие прогнозируемые измерения $\mathbf{Q}_1(t, \hat{\theta}(t))$ и $\mathbf{Q}_2(t, \Delta \hat{\mathbf{T}}(t))$, которые образуются на выходе соответственно третьего и четвертого блоков вычитателей и описываются соотношениями

$$\mathbf{Q}_1(t, \hat{\theta}(t)) = \mathbf{H}_1(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\theta}(t) - \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{H}_1(t) \cdot \hat{\theta}(t); \\ \mathbf{Q}_2(t, \Delta \hat{\mathbf{T}}(t)) = \mathbf{H}_2(t) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta \hat{\mathbf{T}}(t) - \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{H}_2(t) \cdot \Delta \hat{\mathbf{T}}(t),$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{p}$ — матричные постоянные коэффициенты; $\hat{\mathbf{\theta}}(t)$, $\hat{\Delta\mathbf{T}}(t)$ — соответственно оценки вектора параметров движения ЛА и вектора временных погрешностей между моментами времени привязки компонент случайного процесса измерений $\xi(t)$ к единой шкале времени.

$$\varepsilon(t) = d\xi(t) - \rho \cdot \xi(t) - Q_1(t, \hat{\theta}(t)) - Q_2(t, \Delta \hat{T}(t)).$$

На блоке сумматоров S_5 происходит сложение предсказанной оценки $A \cdot \hat{\theta}(t)$, поступающей с выхода матричного умножителя A , с поправкой $R_1(t, \hat{\theta}(t))$, поступающей с выхода матричного умножителя K_1 , которая определяется выражением

$$\mathbf{R}_1(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) = \mathbf{K}_1(t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

Оценка полезного сигнала $\hat{\theta}(t)$ формируется интегрированием в первом блоке интеграторов сигнала, поступающего с выхода блока сумматоров S_5 .

Прогнозируемое измерение $Q_1(t, \hat{\theta}(t))$ формируется из сигнала $\hat{\theta}(t)$ с использованием двух матричных умножителей (H_1), матричных умножителей A , ρ и блока вычитателей S_3 , а прогнозируемое измерение $Q_2(t, \Delta\hat{T}(t))$ формируется из сигнала $\Delta\hat{T}(t)$ с помощью двух матричных переумножителей H_2 , матричных умножителей α , ρ и блока вычитателей S_4 .

Для формирования вектора оценки временных погрешностей $\Delta\hat{T}(t)$ между моментами привязки компонент многомерного процесса измерений $\xi(t)$ к единой шкале времени используется сигнал с выхода матричного умножителя α , который суммируется на втором блоке сумматоров S_4 с предсказанной оценкой $\alpha \cdot \Delta\hat{T}(t)$, поступающей с выхода матричного умножителя K_2 , а затем интегрируется во втором блоке интеграторов.

Наличие прогнозируемого измерения $Q_2(t, \Delta\hat{T}(t))$ наряду с прогнозируемым измерением $Q_1(t, \hat{\theta}(t))$ позволяет получить скорректированное значение «обновляющего» процесса $\epsilon(t)$ и тем самым повысить точность фильтрации многомерного случайного процесса измерений $\xi(t)$ при наличии временных невязок между моментами привязки его компонент к единой шкале времени.

Таким образом, на выходе первого блока интеграторов образуется оптимальная в среднем квадратическом смысле оценка полезного сигнала $\hat{\theta}(t)$ при наличии временных невязок между моментами привязки компонент входного многомерного сигнала измерений к единой шкале времени.

На синтезированный модифицированный фильтр Калмана для фильтрации многомерных случайных процессов траекторных измерений с несинхронными во времени компонентами выдано авторское свидетельство на изобретение «Устройство для оптимальной фильтрации многомерных стационарных случайных процессов» (№ 1699292, 1991 г.).

Поскольку источники траекторной измерительной информации, как правило, выдают измерения дискретно, то исследование метода оптимальной фильтрации многомерных случайных процессов измерения координат ЛА с несинхронными во времени компонентами было проведено с использованием дискретного аналога синтезированного модифицированного фильтра Калмана.

Как было показано выше, наблюдаемый N -мерный векторный дискретный случайный процесс траекторных измерений $\xi(k)$ можно представить аддитивной моделью

$$\xi(k) = \mathbf{H}_1(k) \cdot \theta(k) + \Delta\xi(k) + \eta(k), \quad (3.18)$$

где $\mathbf{H}_1(k)$ — матрица частных производных измеряемых параметров по оцениваемым параметрам движения летательных аппаратов; $\theta(k)$ — оцениваемый вектор параметров движения ЛА; $\Delta\xi(k)$ — дополнительная составляющая в наблюдаемом случайном процессе $\xi(k)$, обусловленная временными невязками в привязке компонент этого процесса к единой шкале времени; $\eta(k)$ — случайный процесс коррелированных во времени погрешностей средств траекторных измерений (вектор шума измерений).

Дополнительную составляющую $\Delta\xi(k)$ с достаточной точностью можно описать следующим образом:

$$\Delta\xi(k) \approx \mathbf{H}_2(k) \cdot \Delta\mathbf{T}(k),$$

где $\mathbf{H}_2(k)$ — диагональная матрица скоростей изменения первичных траекторных измерений размерностью $(N \times N)$, элементы которой могут быть определены априорно с использованием модели планирования измерительного эксперимента; $\Delta\mathbf{T}(k)$ — дискретный случайный процесс временных невязок в привязке измерительной информации средств траекторных измерений к единой шкале времени.

Тогда наблюдаемый линеаризованный многомерный дискретный процесс траекторных измерений представим моделью вида

$$\xi(k) = \mathbf{H}_1(k) \cdot \theta(k) + \mathbf{H}_2(k) \cdot \Delta\mathbf{T}(k) + \eta(k). \quad (3.19)$$

Вектор $\theta(k)$ оцениваемых параметров движения ЛА на ограниченном участке траектории может быть описан в пространстве состояний рекуррентным стохастическим уравнением вида

$$\theta(k) = \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{b} \cdot \varepsilon_1(k), \quad (3.20)$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — матричные постоянные коэффициенты, структура которых определяется выбранной моделью движения ЛА в пространстве состояний; $\varepsilon_1(k) = [\varepsilon_{11}(k), \varepsilon_{12}(k), \dots, \varepsilon_{1M}(k)]$ — векторный процесс белого шума, компоненты которого имеют параметры $N(0,1)$.

Временные невязки $\Delta\mathbf{T}(k)$ между моментами времени привязки к единой шкале времени отождествленных траекторных измерений

на ограниченном интервале проведения измерений являются стационарным медленноменяющимся процессом, который может быть описан рекуррентным стохастическим уравнением [58, 63]

$$\Delta T(k) = \alpha \cdot \Delta T(k-1) + \beta \cdot \varepsilon_2(k), \quad (3.21)$$

где α, β — матричные постоянные коэффициенты размерностью $(N \times N)$; $\varepsilon_2(k) = [\varepsilon_{21}(k), \varepsilon_{22}(k), \dots, \varepsilon_{2N}(k)]$ — векторный процесс белого шума, компоненты которого имеют параметры $N(0,1)$.

Векторный дискретный процесс $\eta(k)$ погрешности измерительных каналов средств траекторных измерений представим суммой двух стационарных случайных процессов $\eta_1(k)$ и $\eta_2(k)$, характеризующих соответственно медленноменяющуюся и быстроменяющуюся составляющие рассматриваемого процесса.

Составляющие векторного процесса $\eta(k)$ могут быть описаны рекуррентными стохастическими уравнениями вида

$$\eta_i(k) = \rho_i \cdot \eta_i(k-1) + r_i \cdot l_i(k), \quad i=1,2, \quad (3.22)$$

где ρ_i, r_i — матрицы постоянных коэффициентов размерностью $(N \times N)$; $l_i(k)$ — векторный процесс белого шума, компоненты которого имеют параметры $N(0,1)$.

Тогда наблюдаемый процесс измерений $\xi(k)$ может быть представлен выражением

$$\xi(k) = H_1(k) \cdot \theta(k) + H_2(k) \cdot \Delta T(k) + \eta_1(k) + \eta_2(k) \quad (3.23)$$

или в развернутой форме с учетом выражений (3.20)...(3.22) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \xi(k) = & H_1(k) \cdot a \cdot \theta(k-1) + H_1(k) \cdot b \cdot \varepsilon_1(k) + H_2(k) \cdot \alpha \cdot \Delta T(k-1) + \\ & + H_2(k) \cdot \beta \cdot \varepsilon_2(k) + \rho_1 \cdot \eta_1(k-1) + r_1 \cdot l_1(k) + \rho_2 \cdot \eta_2(k-1) + r_2 \cdot l_2(k). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Используя выражение (3.23) для дискретного момента времени $t = k-1$, определим быстроменяющуюся составляющую $\eta_2(k)$ шума измерений:

$$\eta_2(k-1) = \xi(k-1) - H_1(k-1) \cdot \theta(k-1) - H_2(k-1) \cdot \Delta T(k-1) - \eta_1(k-1). \quad (3.25)$$

Введем два расширенных случайных процесса вида

$$\Theta(k) = [[\theta(k) | \eta_1(k) | \Delta T(k)]^T; \quad \varepsilon(k) = [\varepsilon_1(k) | l_1(k) | \varepsilon_2(k)]^T. \quad (3.26)$$

Подставив в формулу (3.24) соотношение (3.25), получим следующее выражение для наблюдаемого процесса измерений $\xi(k)$:

$$\xi(k) = \mathbf{A}_0(k, \xi) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \boldsymbol{\Theta}(k-1) + \mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k) + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{l}_2(k), \quad (3.27)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0(k, \xi) &= \rho_2 \cdot \xi(k-1); \\ \xi(k) &= \mathbf{A}_0(k, \xi) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \boldsymbol{\Theta}(k-1) + \mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k) + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{l}_2(k); \\ \mathbf{A}_1(k) &= [[\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \rho_2 \cdot \mathbf{H}_1(k-1) \mid (\rho_1 - \rho_2)] \mid \mathbf{H}_2(k-1) \cdot \mathbf{a} - \rho_2 \cdot \mathbf{H}_2(k-1)]; \\ \mathbf{B}_1(k) &= [[\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \mid \mathbf{r}_1] \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \boldsymbol{\beta}]; \\ \mathbf{B}_2(k) &= \mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

Используя соотношения (3.26), построим расширенный процесс модели полезного сообщения вида

$$\boldsymbol{\Theta}(k) = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Theta}(k) \\ \hline \boldsymbol{\eta}_1(k) \\ \hline \Delta \mathbf{T}(k) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \rho_1 \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Theta}(k-1) \\ \hline \boldsymbol{\eta}_1(k-1) \\ \hline \Delta \mathbf{T}(k-1) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\varepsilon}_1(k) \\ \hline \mathbf{l}_1(k) \\ \hline \boldsymbol{\varepsilon}_2(k) \end{array} \right],$$

или в более компактной форме

$$\boldsymbol{\Theta}(k) = \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\Theta}(k-1) + \mathbf{b}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k), \quad (3.28)$$

$$\text{где } \mathbf{a}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \rho_1 \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{array} \right]; \quad \mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} \end{array} \right].$$

Для частично наблюдаемого процесса (3.27) и (3.28) в соответствии с теорией динамической фильтрации [48, 105] оптимальная в среднем квадратическом смысле оценка вектора $\boldsymbol{\Theta}(k)$ определяется уравнением

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = \mathbf{a}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [\xi(k) - \mathbf{A}_0(k, \xi) - \mathbf{A}_1(k) \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1)]. \quad (3.29)$$

В уравнении оптимальной фильтрации (3.29) матрица $\mathbf{K}(k)$ коэффициента усиления фильтра определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k) &= [\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)] \times \\ &\times [\mathbf{B}_1(k) \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{B}_2(k) \cdot \mathbf{B}_2^T(k) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)]^{-1}, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k)$ — ковариационная матрица составного вектора $\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k)$, которая определяется соответствующим рекуррентным уравнением вида



$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\hat{\Theta}}(k) = & [\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{y}_{\hat{\Theta}}(k-1) \cdot \mathbf{a}_1^T + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1^T] - [\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{y}_{\hat{\Theta}}(k-1) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)] \times \\ & \times [\mathbf{B}_1(k) \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{B}_2(k) \cdot \mathbf{B}_2^T(k) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \mathbf{y}_{\hat{\Theta}}(k-1) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)]^{-1} \times \\ & \times [\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{B}_1^T(k) + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{y}_{\hat{\Theta}}(k-1) \cdot \mathbf{A}_1^T(k)]^T. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Рекуррентное уравнение (3.30) определяет текущее значение ковариационной матрицы оцениваемого вектора параметров движения ЛА, используемой в уравнении оптимальной фильтрации (3.29).

Таким образом, учет в модели наблюдений дополнительной априорной информации о значениях вероятностных характеристик законов распределения временных невязок между моментами времени привязки к единой шкале времени отождествленных траекторных измерений позволил синтезировать модифицированный дискретный фильтр Калмана с расширенным вектором состояния системы, который способен уменьшить влияние рассматриваемых временных невязок на точность оценки вектора параметров движения ЛА. Применение такого фильтра позволит повысить эффективность системы обработки траекторной измерительной информации в условиях наличия временных ошибок в привязке измерений к единой шкале времени измерительного комплекса.

3.1.2. Результаты исследования синтезированного модифицированного фильтра Калмана для фильтрации результатов измерения координат ЛА с несинхронными во времени компонентами

Для апробации предложенного метода оптимальной фильтрации результатов измерения координат ЛА с несинхронными во времени компонентами был использован дискретный вариант синтезированного модифицированного фильтра Калмана.

В проводимом модельном эксперименте в качестве исходной информации использовались первичные траекторные измерения от трех дальномерных каналов территориально разнесенных радиолокационных станций траекторных измерений (РЛС ТИ).

Результаты исследования потенциальных возможностей разработанного модифицированного фильтра Калмана приведены на рис. 3.2...3.4.

На рис. 3.2 представлено семейство зависимостей средней квадратической погрешности оценки дальности до ЛА $\sigma_{\delta\hat{D}}$ от расчетных значений двух равных средних квадратических погрешностей $\sigma_{\delta r \text{ расч}(2,3)}$ привязки измерений второго и третьего

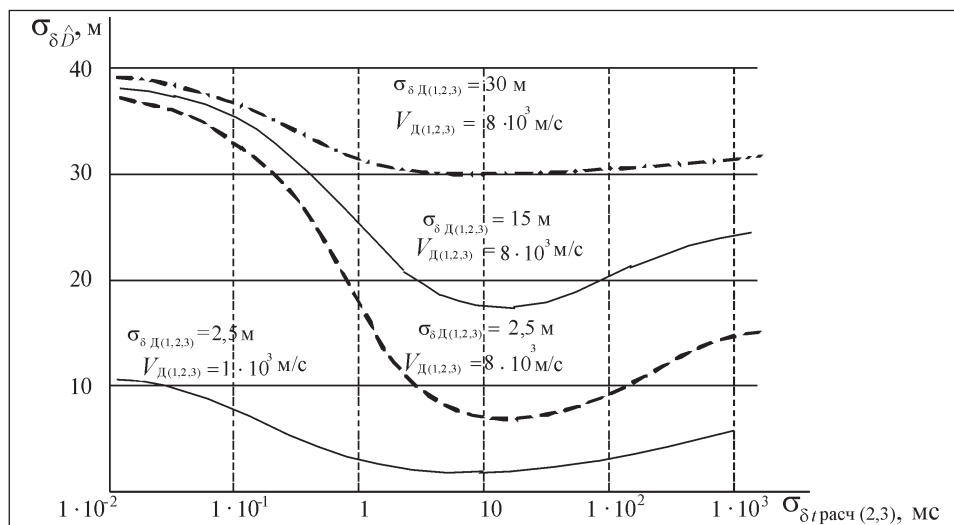


Рис. 3.2. Зависимости погрешности оценки дальности до ЛА от параметра фильтра $\sigma_{\delta t \text{ расч}}(2,3)$

дальномеров по отношению к соответствующим измерениям первого дальномера, заложенных в параметры алгоритма фильтрации, при фактических значениях погрешностей временных невязок $\sigma_{\delta t \text{ факт}}(2,3)$, равных 10 мс.

Семейство зависимостей построено при изменяющихся, но равных для всех дальномеров инструментальных погрешностях $\sigma_{\delta D(1,2,3)}$ и значениях скорости изменения дальности до ЛА для трех дальномеров $V_{D(1,2,3)}$, равных $1 \cdot 10^3$ и $8 \cdot 10^3$ м/с.

Из анализа приведенных зависимостей видно, что минимальный уровень погрешности фильтрации наблюдается при равенстве расчетной временной погрешности $\sigma_{\delta t \text{ расч}}(2,3)$, заложенной в алгоритм фильтрации, и фактической $\sigma_{\delta t \text{ факт}}(2,3)$, т.е. при условии оптимальной фильтрации. При невыполнении указанного условия происходит увеличение погрешности оценки дальности до ЛА $\sigma_{\delta D}$.

При прочих равных условиях эффективность модифицированного фильтра Калмана возрастает в случае фильтрации более точных траекторных измерений. Так, при погрешностях дальномеров $\sigma_{\delta D(1,2,3)}$, равных 2,5 м, использование рассматриваемого оптимального фильтра дает снижение погрешности фильтрации на 70 % по сравнению с фильтром, построенным без учета значений вероятностных характеристик погрешностей между моментами времени привязки измерений к единой шкале времени. При погрешностях дальномеров $\sigma_{\delta D(1,2,3)}$, равных 30 м, и прочих равных условиях использо-

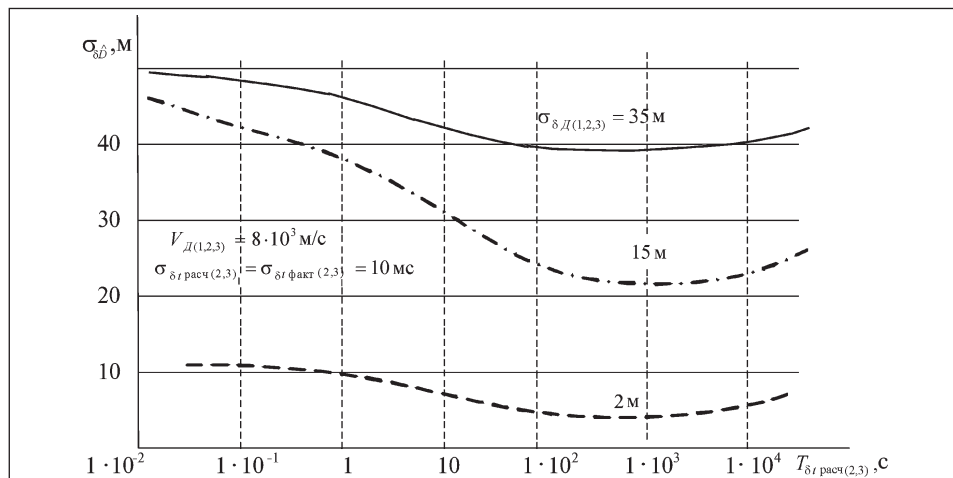


Рис. 3.3. Зависимости погрешности оценки дальности до ЛА от параметра фильтра $\sigma_{\delta t \text{ расч } i}$, $i = 2, 3$

вание синтезированного оптимального фильтра дает снижение погрешности фильтрации на 25 %, что обеспечивает существенный выигрыш в точности оценки искомых параметров.

На рис. 3.3 приведены зависимости погрешности оценки наклонной дальности до ЛА $\sigma_{\delta \hat{D}}$ от априорных значений времен корреляции $T_{\delta t \text{ расч } i}$, $i = 2, 3$, рассмотренных выше временных невязок. Предполагается, что значения времен корреляции этих временных невязок одинаковы, а фактические их значения $T_{\delta t \text{ факт } i}$, $i = 2, 3$, равны 1000 с.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что минимальный уровень погрешности фильтрации наблюдается при равенстве априорных (расчетных) значений вероятностных характеристик временных невязок $\sigma_{\delta t \text{ расч } i}$, $T_{\delta t \text{ расч } i}$ ($i = 2, 3$) и их фактических значений, т.е. при условии оптимальной фильтрации. При невыполнении этого условия происходит увеличение погрешности фильтрации, особенно быстро при $\sigma_{\delta t \text{ расч } i} \ll \sigma_{\delta t \text{ факт } i}$ или при $T_{\delta t \text{ расч } i} \ll T_{\delta t \text{ факт } i}$ ($i = 2, 3$), т.е. когда в параметрах фильтра практически не учитывается априорная информация о значениях вероятностных характеристик рассматриваемых временных невязок.

Полученные результаты свидетельствуют также о том, что по сравнению с классическим фильтром при наличии временных невязок между моментами привязки компонент векторного процесса траекторных измерений к единой шкале времени синтезированный алгоритм дает выигрыш тем больший, чем точнее выполняются измерения.

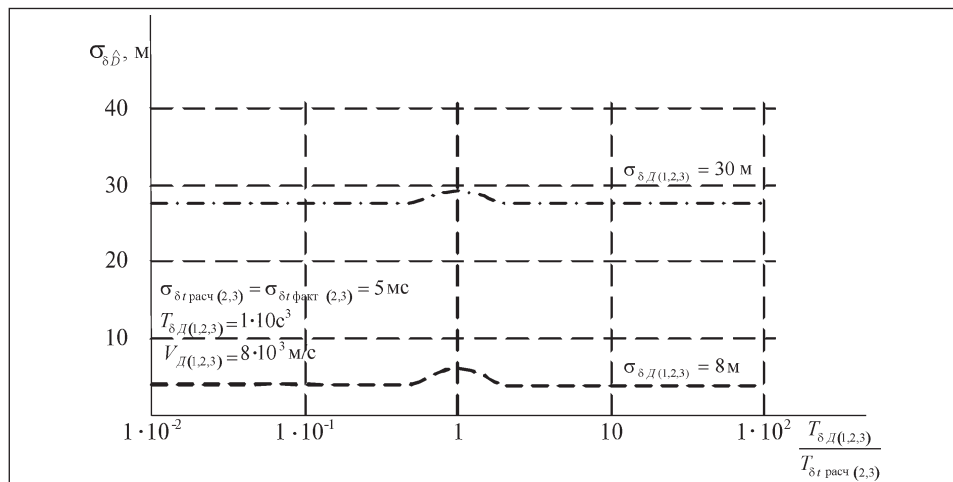


Рис. 3.4. Зависимости погрешности оценки дальности до ЛА от соотношения времен корреляции составляющих наблюдаемого процесса траекторных измерений

На рис. 3.4 приведены результаты исследования зависимости погрешности оценки наклонной дальности до ЛА $\sigma_{\delta D}$, полученной по измерениям от трех дальномеров, от соотношения времен корреляции случайных процессов погрешностей измерений этих трех дальномеров $T_{\delta D(1,2,3)}$ и времен корреляции процессов невязок между моментами времени привязки к единой шкале времени измерений второго и третьего дальномеров по отношению к измерениям первого дальномеров $T_{\delta t \text{ расч}(2,3)}$ и при условии равенства расчетных и фактических значений погрешностей между моментами времени привязки измерений к единой шкале времени ($\sigma_{\delta t \text{ расч}(2,3)} = \sigma_{\delta t \text{ факт}(2,3)}$). Приведенные на рис. 3.4 зависимости построены при $\sigma_{\delta t \text{ расч}(2,3)} = \sigma_{\delta t \text{ факт}(2,3)} = 5 \text{ мс}$, $T_{\delta D(1,2,3)} = 1 \cdot 10^3 \text{ с}$, значениях скорости изменения дальности до ЛА для трех дальномеров $V_{D(1,2,3)}$, равных $8 \cdot 10^3 \text{ м/с}$, и при различных значениях погрешностей дальномеров $\sigma_{\delta D(1,2,3)}$. Из анализа этих зависимостей видно, что при совпадении значений времен корреляции случайных процессов погрешностей измерения дальности до ЛА рассматриваемыми дальномерами и времен корреляции невязок между моментами времени привязки измерений к единой шкале времени происходит увеличение погрешности оптимальной фильтрации значения наклонной дальности до ЛА. Для рассматриваемого случая это увеличение составляет не более чем 10 %. Поэтому для эффективной работы синтезированного модифицированного фильтра Калмана требуется разнос значений вероят-

ностных характеристик законов распределения оценок погрешностей рассматриваемых компонент наблюдаемого процесса траекторных измерений.

Таким образом, проведенные исследования синтезированного модифицированного фильтра Калмана подтверждают высокую эффективность предложенного метода оптимальной фильтрации результатов измерения координат ЛА с несинхронными во времени компонентами, что дает основание рекомендовать его для использования при обработке результатов траекторных измерений при испытаниях сложных технических комплексов.

3.2. Метод субоптимальной нелинейной фильтрации многомерных случайных процессов траекторных измерений по высокоманевренным ЛА при наличии временных невязок в привязке компонент таких процессов к единой шкале времени

Известно, что наличие временных невязок между моментами времени привязки к единой шкале времени траекторного измерительного комплекса результатов отождествленных измерений приводит при их совместной статистической обработке к дополнительным погрешностям в оценке вектора параметров движения испытываемых летательных аппаратов [8].

Ранее было показано [58, 61], что снижение влияния временных ошибок между моментами времени привязки к единой шкале времени отождествленных траекторных измерений на точность оценки вектора параметров движения ЛА может быть обеспечено использованием специально синтезированного модифицированного фильтра Калмана [63], использующего линейную модель наблюдаемого процесса. При этом в параметрах синтезированного фильтра содержалась дополнительная априорная информация о значениях вероятностных характеристик законов распределения рассматриваемых временных невязок. Используемая модель наблюдаемого процесса учитывала только скорости изменения измеряемых средствами траекторных измерений первичных параметров.

Однако на практике при испытаниях динамичных и высокоманевренных ЛА необходимо учитывать также ускорения изменения измеряемых средствами траекторных параметров. Отсутствие такой возможности в ряде случаев приводит к дополнительным погрешностям в оценке вектора параметров движения ЛА по результатам высокоточных измерений.

Исследования механизма влияния временных невязок между моментами времени привязки к единой шкале времени результатов отождествленных траекторных измерений на точность оценки вектора параметров движения ЛА показали [8, 59], что N -мерный наблюдаемый случайный процесс траекторных измерений $\xi(t)$ можно представить в виде

$$\xi(t) = \xi_{\text{ист}}(t) + \Delta\xi(t) + \eta(t) \quad (3.31)$$

где $\xi_{\text{ист}}(t)$ — вектор истинных значений наблюдаемого процесса; $\Delta\xi(t)$ — вектор дополнительных погрешностей в наблюдаемом процессе, вызванных временными невязками в привязке первичной измерительной информации к единой шкале времени; $\eta(t)$ — вектор коррелированных по времени погрешностей измерений.

Как известно [42, 59], погрешность в i -й компоненте непрерывного наблюдаемого процесса $\xi_i(t)$, вызванная временной невязкой δt_i , определяется выражением

$$\Delta\xi_i(t) = \frac{d\xi_i(t)}{dt} \delta t_i + \frac{d^2\xi_i(t)}{dt^2} \frac{\delta t_i^2}{2!} + \dots + \frac{d^{(n)}\xi_i(t)}{dt^{(n)}} \frac{\delta t_i^{(n)}}{n!}. \quad (3.32)$$

В выражении (3.32) первое слагаемое в правой части — дополнительная погрешность в i -й компоненте наблюдаемого процесса $\Delta\xi(t)$, обусловленная скоростью изменения измеряемого средством ТИ параметра, а второе слагаемое — дополнительная погрешность в i -й компоненте процесса $\Delta\xi(t)$, вызванная ускорением изменения измеряемого траекторного параметра.

В описанном выше методе оптимальной линейной фильтрации векторного случайного процесса с несинхронными во времени компонентами в наблюдаемом случайном процессе измерений учитывается только первое слагаемое выражения (3.32). Однако в практике траекторных измерений по динамичным и высокоманевренным ЛА, когда наблюдаются высокие скорости и большие ускорения таких объектов, необходимо учитывать и второе слагаемое выражения (3.32), что особенно важно при оценке скоростных составляющих вектора параметров движения таких ЛА.

Поскольку в практике испытаний образцов СТК траекторные измерения, как правило, являются дискретными во времени, то будет рассмотрен алгоритм оптимальной фильтрации векторного N -мерного дискретного случайного процесса $\xi(k)$, в модель которого входят дополнительные погрешности измерений, обусловленные временными невязками в привязке компонент этого случайного процесса к единой шкале времени, вы-

званными скоростями и ускорениями изменений измеряемых средствами ТИ параметров. Такая модель наблюдаемого случайного процесса траекторных измерений описывается выражением

$$\xi(k) = \xi_0(k) + \mathbf{H}_1(k) \cdot \theta(k) + \mathbf{H}_2(k) \cdot \begin{bmatrix} \delta t_1(k) \\ \vdots \\ \delta t_n(k) \\ \vdots \\ \delta t_N(k) \end{bmatrix} + \mathbf{H}_3(k) \cdot \begin{bmatrix} \delta t_1^2(k) \\ \vdots \\ \delta t_n^2(k) \\ \vdots \\ \delta t_N^2(k) \end{bmatrix} + \eta(k). \quad (3.33)$$

В более компактной форме выражение (3.33) запишется в виде

$$\xi(k) = \xi_0(k) + \mathbf{H}_1(k) \cdot \theta(k) + \mathbf{H}_2(k) \cdot \Delta \mathbf{T}(k) + \mathbf{H}_3(k) \cdot [\Delta \mathbf{T}^{<2>}(k)] + \eta(k). \quad (3.34)$$

Составляющие выражений (3.33) и (3.34) имеют следующий смысл:

$\mathbf{H}_1(k)$ — матрица частных производных параметров, измеряемых средствами ТИ, по оцениваемым параметрам движения ЛА размерностью $(N \times M)$;

$\theta(k)$ — вектор оцениваемых параметров движения ЛА в пространстве состояний, который может быть на ограниченном участке траектории описан рекуррентным стохастическим уравнением вида

$$\theta(k) = \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{b} \cdot \epsilon_1(k), \quad (3.35)$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — матричные постоянные коэффициенты размерностью $(M \times M)$; $\epsilon_1(k)$ — M -мерный вектор с независимыми компонентами, имеющими параметры $N(0,1)$; $\Delta \mathbf{T}(\mathbf{k})$ — N -мерный вектор вида $\Delta \mathbf{T}(k) = [\delta t_1(k) \dots \delta t_n(k) \dots \delta t_N(k)]^T$, обозначающий временные невязки между моментами времени привязки компонент векторного процесса $\xi(k)$ к единой шкале времени, который на интервале проведения траекторных измерений может быть описан следующим рекуррентным стохастическим уравнением:

$$\Delta \mathbf{T}(k) = \mathbf{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{T}(k-1) + \mathbf{\beta} \cdot \epsilon_2(k), \quad (3.36)$$

где $\mathbf{\alpha}$, $\mathbf{\beta}$ — диагональные матрицы с постоянными коэффициентами размерностью $(N \times N)$; $\epsilon_2(k)$ — N -мерный вектор вида

$\epsilon_2(k) = [\epsilon_{21}(k) \dots \epsilon_{2n}(k) \dots \epsilon_{2N}(k)]^T$ с независимыми компонентами, имеющими параметры $N(0,1)$.

N -мерный дискретный процесс коррелированного по времени шума измерений $\eta(k)$ может быть описан следующим рекуррентным стохастическим уравнением:

$$\eta(k) = \rho \cdot \eta(k-1) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}(k), \quad (3.37)$$

где ρ , $\mathbf{r}$ — матрицы постоянных коэффициентов размерностью $(N \times N)$; $\mathbf{l}(k)$ — N -мерный вектор с независимыми компонентами, имеющими параметры $N(0,1)$.

Матрицы скоростей $\mathbf{H}_2(k)$ и ускорений $\mathbf{H}_3(k)$ изменения измеряемых параметров средствами ТИ имеют следующую структуру:

$$\mathbf{H}_2(k) = \text{diag} \left[\frac{\xi_1(k-1) - \xi_1(k)}{\Delta t} \dots \frac{\xi_n(k-1) - \xi_n(k)}{\Delta t} \dots \frac{\xi_N(k-1) - \xi_N(k)}{\Delta t} \right],$$

$$\mathbf{H}_3(k) = \text{diag} \left[\frac{\xi_1^{(1)}(k-1) - \xi_1^{(1)}(k)}{2\Delta t} \dots \frac{\xi_n^{(1)}(k-1) - \xi_n^{(1)}(k)}{2\Delta t} \dots \frac{\xi_N^{(1)}(k-1) - \xi_N^{(1)}(k)}{2\Delta t} \right],$$

где $\xi_n^{(1)}(k) = \frac{\xi_n(k-1) - \xi_n(k)}{\Delta t}$; Δt — период следования траекторной измерительной информации.

Тогда задачу оптимальной фильтрации многомерного случайного процесса траекторных измерений высокоманевренных ЛА с несинхронными во времени отождествленными компонентами можно сформулировать следующим образом.

Требуется определить оптимальную оценку вектора параметров движения ЛА вида $\hat{\theta}(k) = [\hat{x}(k) \ \hat{y}(k) \ \hat{z}(k) \ \hat{\dot{x}}(k) \ \hat{\dot{y}}(k) \ \hat{\dot{z}}(k)]^T$ при условии достижения минимальных значений дисперсий оценок компонент этого вектора в случае наличия временных невязок между моментами времени привязки к единой шкале времени отождествленных измерений, поступающих от территориально разнесенных средств траекторных измерений, т.е. когда вектор временных ошибок $\Delta\mathbf{T}(t)$ не равен нулю.

Математически такая задача запишется следующим образом [60]: определить

$$\hat{\theta}(k)_{\text{opt}} : \{ \min D_{\hat{x}}(k), \min D_{\hat{y}}(k), \min D_{\hat{z}}(k), \min D_{\hat{\dot{x}}}(k), \min D_{\hat{\dot{y}}}(k), \min D_{\hat{\dot{z}}}(k) \} \quad (3.38)$$

при условии, что вектор временных невязок $\Delta\mathbf{T}(t) \neq 0$.

Решение задачи (3.38) будем искать путем синтеза субоптимального нелинейного фильтра Калмана с использованием классических соотношений динамической фильтрации и с формированием соответствующих частично наблюдаемых случайных процессов, описанных в монографии [48].

3.2.1. Алгоритм решения задачи субоптимальной нелинейной фильтрации многомерных случайных процессов результатов измерения траекторий высокоманевренных ЛА

Поскольку математическая модель (3.34), описывающая наблюдаемый дискретный случайный процесс $\xi(k)$, является нелинейной по отношению к вектору временных невязок $\Delta T(k)$, то задача (3.38) может быть решена путем синтеза алгоритма специального субоптимального нелинейного дискретного фильтра Калмана.

Для линеаризации уравнения наблюдаемого процесса (3.34) вектор временных невязок $\Delta T(k)$ представим в следующем виде:

$$\Delta T(k) = \hat{\Delta T}(k) + \delta T(k), \quad (3.39)$$

где $\hat{\Delta T}(k)$ — оценка вектора временных невязок $\Delta T(k)$; $\delta T(k)$ — вектор погрешности оценки вектора $\Delta T(k)$.

Вектор $\delta T(k)$ может быть описан рекуррентным стохастическим уравнением

$$\delta T(k) = \alpha_3 \cdot \delta T(k-1) + \beta_3 \cdot \epsilon_3(k), \quad (3.40)$$

где α_3, β_3 — матричные постоянные коэффициенты размерностью $(N \times N)$; $\epsilon_3(k)$ — N -мерный вектор вида $\epsilon_3(k) = [\epsilon_{31}(k) \dots \epsilon_{3n}(k) \dots \epsilon_{3N}(k)]^T$ с независимыми компонентами, имеющими параметры $N(0,1)$.

С учетом выражения (3.39) для вектора $\hat{\Delta T}(k)$ можно записать следующие выражения:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta T}(k) &= M(\alpha \cdot \Delta T(k-1) + \beta \cdot \epsilon_2(k)) = \alpha \cdot \hat{\Delta T}(k-1), \\ \Delta T(k) &= \alpha \cdot \hat{\Delta T}(k-1) + \delta T(k). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Будем полагать, что компоненты вектора $\delta T(k)$ являются величинами более высокого порядка малости по сравнению с компонентами вектора $\Delta T(k)$. Тогда согласно формуле (3.41) с учетом выражений (3.33) и (3.34) вектор $\Delta T^{<2>}(k)$ в развернутом виде может быть представлен соотношением

$$\Delta \mathbf{T}^{<2>}(k) = \begin{bmatrix} \delta t_1^2(k) \\ \vdots \\ \delta t_n^2(k) \\ \vdots \\ \delta t_N^2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_{11} \hat{\delta t}_1(k-1)]^2 \\ \vdots \\ [\alpha_{nn} \hat{\delta t}_n(k-1)]^2 \\ \vdots \\ [\alpha_{NN} \hat{\delta t}_N(k-1)]^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\alpha_{11} \hat{\delta t}_1(k-1) \delta t_1(k) \\ \vdots \\ 2\alpha_{nn} \hat{\delta t}_n(k-1) \delta t_n(k) \\ \vdots \\ 2\alpha_{NN} \hat{\delta t}_N(k-1) \delta t_N(k) \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

В матричной форме выражение (3.42) примет вид

$$\Delta \mathbf{T}^{<2>}(k) = [\mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1)]_N^{<2>} + \text{diag}^{[\cdot, \cdot]} [2 \cdot \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \delta \mathbf{T}(k), \quad (3.43)$$

где $\mathbf{E}_{(1 \times N)}$ — единичная матрица-строка размерностью $(1 \times N)$; $\text{diag}^{[\cdot, \cdot]}[\Psi]$ — диагональная матрица, полученная из квадратной матрицы Ψ путем удаления всех недиагональных элементов.

С учетом выражений (3.34)...(3.37), (3.39), (3.40) и (3.43) модель наблюдаемого процесса $\xi(k)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \xi(k) = & \xi_0(k) + \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \varepsilon_1(k) + \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{T}(k-1) + \\ & + \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \varepsilon_2(k) + \mathbf{H}_3(k) \cdot [\mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1)]_N^{<2>} + \text{diag}^{[\cdot, \cdot]} [2 \cdot \mathbf{H}_3(k) \cdot \mathbf{a} \times \\ & \times \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \alpha_3 \cdot \delta \mathbf{T}(k-1) + 2 \cdot \mathbf{H}_3(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{b} \cdot \varepsilon_3(k) + \\ & + \mathbf{p} \cdot \eta(k-1) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}(k). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Определим из выражения (3.34) величину $\eta(k)$ на момент времени $t = k-1$ и подставим ее в формулу (3.44). Тогда модель наблюдаемого процесса может быть представлена выражением

$$\begin{aligned} \xi(k) = & \xi_0(k) + \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \varepsilon_1(k) + \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{T}(k-1) + \\ & + \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \varepsilon_2(k) + \mathbf{H}_3(k) \cdot [\mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1)]_N^{<2>} + \text{diag}^{[\cdot, \cdot]} [2 \cdot \mathbf{H}_3(k) \cdot \mathbf{a} \times \\ & \times \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \alpha_3 \cdot \delta \mathbf{T}(k-1) + \text{diag}^{[\cdot, \cdot]} [2 \cdot \mathbf{H}_3(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \times \\ & \times \mathbf{b} \cdot \varepsilon_3(k) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}(k) + \xi(k-1) - \mathbf{p} \cdot \xi_0(k-1) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_1(k-1) \cdot \theta(k-1) - \\ & - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_2(k-1) \cdot \Delta \mathbf{T}(k-1) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_3(k-1) \cdot [\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{T}(k-2)]_N^{<2>} - \\ & - \text{diag}^{[\cdot, \cdot]} [2 \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_3(k-1) \cdot \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-2) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \delta \mathbf{T}(k-1). \end{aligned}$$

В более компактной форме модель наблюдаемого процесса будет иметь вид

$$\xi(k) = \mathbf{A}_0(k, \xi) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \Theta(k-1) + \mathbf{B}_1(k) \cdot \varepsilon(k) + \mathbf{B}_2(k) \cdot \mathbf{l}(k). \quad (3.45)$$



Здесь

$$\mathbf{A}_0(k, \xi) = \xi_0(k) - \rho \cdot \xi_0(k-1) + \rho \cdot \xi(k-1) + \mathbf{H}_3(k) \cdot [\alpha \cdot \Delta \hat{\mathbf{T}}(k-1)]_N^{<2>} - \\ - \rho \cdot \mathbf{H}_3(k-1) \cdot [\alpha \cdot \Delta \mathbf{T}(k-2)]_N^{<2>}, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{A}_1(k) = [[\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \rho \cdot \mathbf{H}_1(k-1) \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \alpha - \rho \cdot \mathbf{H}_2(k-1)] \mid \\ \mid \text{diag}^{[\cdot \cdot]}[2\mathbf{H}_3(k) \cdot \alpha \cdot \Delta \hat{\mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \alpha_3 - \\ - \text{diag}^{[\cdot \cdot]}[2\rho \cdot \mathbf{H}_3(k-1) \cdot \alpha \cdot \Delta \hat{\mathbf{T}}(k-2) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}]], \quad (3.47)$$

$$\mathbf{B}_1(k) = [[\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \beta] \mid \text{diag}^{[\cdot \cdot]}[2\mathbf{H}_3(k) \cdot \alpha \cdot \Delta \hat{\mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \beta_3]; \\ \mathbf{B}_2(k) = \mathbf{r}, \quad (3.48)$$

$$\Theta(k) = \begin{bmatrix} \theta(k) \\ \Delta \mathbf{T}(k) \\ \delta \hat{\mathbf{T}}(k) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(k) \\ \varepsilon_2(k) \\ \varepsilon_3(k) \end{bmatrix}.$$

Модель полезного сигнала запишется в следующей форме:

$$\Theta(k) = \mathbf{a}_1 \cdot \Theta(k-1) + \mathbf{b}_1 \cdot \varepsilon(k), \quad (3.49)$$

$$\text{где } \mathbf{a}_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \alpha & \\ \hline \mathbf{0} & & \alpha_3 \end{array} \right]; \quad \mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b} & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \beta & \\ \hline \mathbf{0} & & \beta_3 \end{array} \right].$$

С использованием полученной модели наблюдаемого процесса (3.45) и модели полезного сигнала (3.49) выражения для частично наблюдаемого процесса примут следующий вид:

$$\Theta(k) = \mathbf{a}_1 \cdot \Theta(k-1) + \mathbf{b}_1 \cdot \varepsilon(k), \quad (3.50)$$

$$\xi(k) = \mathbf{A}_0(k, \xi) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \Theta(k-1) + \mathbf{B}_1(k) \cdot \varepsilon(k) + \mathbf{B}_2(k) \cdot \mathbf{l}(k). \quad (3.51)$$

Для частично наблюдаемого процесса (3.50) и (3.51) в соответствии с теорией динамической фильтрации [48, 105] и полученными выражениями (3.46)...(3.49) решение задачи (3.38) может быть представлено уравнением

$$\hat{\Theta}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}(k) \\ \Delta \hat{\mathbf{T}}(k) \\ \delta \hat{\hat{\mathbf{T}}}(k) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \alpha & \\ \hline \mathbf{0} & & \alpha_3 \end{array} \right] \cdot \hat{\Theta}(k-1) + \mathbf{K}(k)[\xi(k) - \{\xi_0(k) - \rho \cdot \xi_0(k-1) +$$



$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}(k-1) + [\mathbf{H}_3(k) \cdot [\mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1)]_N^{(2)}] - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_3(k-1) \cdot [\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{T}(k-2)]_N^{(2)} \} - \\
 & - \{ [\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_1(k-1)] \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_2(k-1) \} \mid \text{diag}^{\Gamma \cdot \Gamma} [2\mathbf{H}_3(k) \times \\
 & \times \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \mathbf{a}_3 - \text{diag}^{\Gamma \cdot \Gamma} [2\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_3(k-1) \cdot \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-2) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \} \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) \}.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

В уравнении (3.52) составная матрица $\mathbf{K}(k)$ коэффициента усиления фильтра определяется выражением [29, 48].

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1(k) \\ \mathbf{K}_2(k) \\ \mathbf{K}_3(k) \end{bmatrix}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}_3 \end{array} \right] \cdot \{ [\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \boldsymbol{\beta}] \mid \\
 & \mid \text{diag}^{\Gamma \cdot \Gamma} [2\mathbf{H}_3(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \boldsymbol{\beta}_3 \}^T + \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{a}_3 \end{array} \right] \cdot \boldsymbol{\gamma}(k-1) \times \\
 & \times \{ [\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_1(k-1)] \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_2(k-1) \} \mid \text{diag}^{\Gamma \cdot \Gamma} [2\mathbf{H}_3(k) \cdot \mathbf{a} \times \\
 & \times \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \mathbf{a}_3 - \text{diag}^{\Gamma \cdot \Gamma} [2\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_3(k-1) \cdot \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-2) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \}^T \times \\
 & \times \{ [\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \boldsymbol{\beta}] \mid \text{diag}^{\Gamma \cdot \Gamma} [2\mathbf{H}_3(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \boldsymbol{\beta}_3 \} \times \\
 & \times \{ [\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \boldsymbol{\beta}] \mid \text{diag}^{\Gamma \cdot \Gamma} [2\mathbf{H}_3(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \boldsymbol{\beta}_3 \}^T + \\
 & + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T + \{ [\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_1(k-1)] \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_2(k-1) \} \mid \text{diag}^{\Gamma \cdot \Gamma} [2\mathbf{H}_3(k) \times \\
 & \times \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \mathbf{a}_3 - \text{diag}^{\Gamma \cdot \Gamma} [2\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_3(k-1) \cdot \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-2) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \} \times \\
 & \times \boldsymbol{\gamma}(k-1) \cdot \{ [\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_1(k-1)] \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_2(k-1) \} \mid \text{diag}^{\Gamma \cdot \Gamma} [2\mathbf{H}_3(k) \times \\
 & \times \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \cdot \mathbf{a}_3 - \text{diag}^{\Gamma \cdot \Gamma} [2\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_3(k-1) \cdot \mathbf{a} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-2) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)}] \}^T \Big]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Значение ковариационной матрицы оцениваемого составного вектора $\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k)$ определяется из следующего рекуррентного уравнения [48]:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k) &= [\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}(k-1) \cdot \mathbf{a}_1^T + \mathbf{b} \circ \mathbf{b}] - [\mathbf{b} \circ \mathbf{B} + \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}(k-1) \cdot \mathbf{A}_1^T] \times \\
 & \times [\mathbf{B} \circ \mathbf{B} + \mathbf{A}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}(k-1) \cdot \mathbf{A}_1^T]^{-1} \cdot [\mathbf{b} \circ \mathbf{B} + \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}(k-1) \cdot \mathbf{A}_1^T]^T,
 \end{aligned} \tag{3.54}$$



где

$$\mathbf{b} \circ \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}_3 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \boldsymbol{\beta} \end{array} \right] \cdot \text{diag}^{[\cdot, \cdot]} \left[2 \cdot \mathbf{H}_3(k) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)} \right] \cdot \boldsymbol{\beta}_3 \mathbf{]}^T;$$

$$\mathbf{b} \circ \mathbf{b} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}_3 \cdot \boldsymbol{\beta}_3^T \end{array} \right];$$

$$\mathbf{B} \circ \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \boldsymbol{\beta} \end{array} \right] \cdot \text{diag}^{[\cdot, \cdot]} \left[2 \mathbf{H}_3(k) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)} \right] \cdot \boldsymbol{\beta}_3 \mathbf{]} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \boldsymbol{\beta} \end{array} \right] \cdot \text{diag}^{[\cdot, \cdot]} \left[2 \mathbf{H}_3(k) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\Delta \mathbf{T}}(k-1) \cdot \mathbf{E}_{(1 \times N)} \right] \cdot \boldsymbol{\beta}_3 \mathbf{]}]^T + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T.$$

Таким образом, соотношения (3.52)...(3.54) описывают синтезированный субоптимальный нелинейный дискретный фильтр Калмана и дают решение задачи (3.38).

Поскольку в уравнениях разработанного субоптимального нелинейного дискретного фильтра Калмана используются предшествующие оценки компонентов составного вектора состояния стохастической системы на моменты времени $t = k - 1$ и $t = k - 2$, то для устойчивой работы этого фильтра на начальном этапе целесообразно использовать методы априорного расчета начальных значений вектора оцениваемых параметров в уравнениях фильтра Калмана при обработке траекторной измерительной информации.

3.2.2. Результаты исследования алгоритма субоптимальной нелинейной фильтрации многомерных случайных процессов результатов измерения траекторий высокоманевренных ЛА

Исследование разработанного метода субоптимальной нелинейной фильтрации многомерных случайных процессов измерений траекторий высокоманевренных летательных аппаратов при наличии временных ошибок в привязке компонент таких процессов к единой шкале времени было проведено на примере анализа результатов моделирования двух измерительных экспериментов.

В первом измерительном эксперименте выполнялась совместная обработка измерений от трех одинаковых территориально разнесенных дальномеров со средней квадратической погрешностью измерений $\sigma_{\delta d(1,2,3)}$. По результатам, полученным от дальномеров, проводилась оценка средней квадратической погрешности $\sigma_{\delta \hat{d}}$ измерения

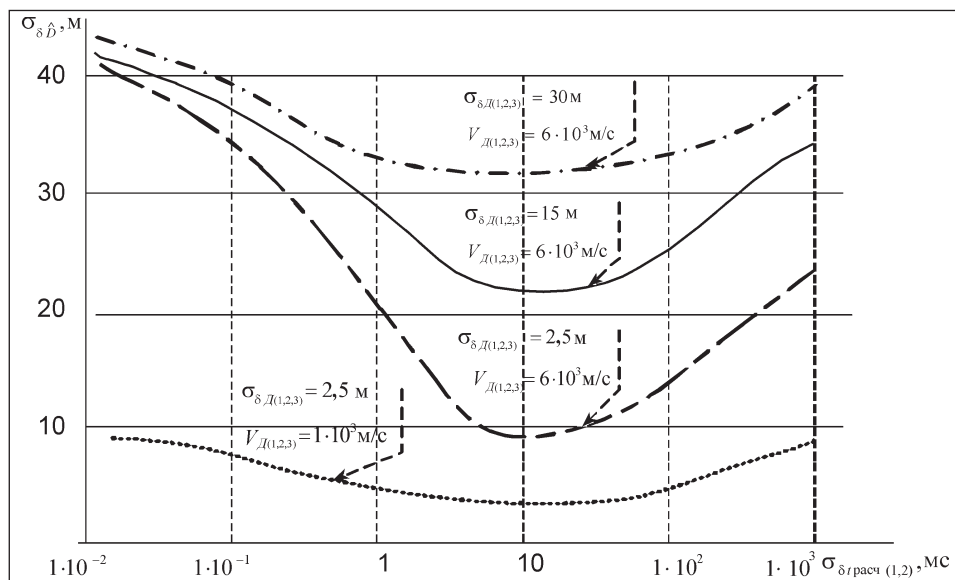


Рис. 3.5. Зависимости погрешности оценки наклонной дальности до ЛА от параметра фильтра $\sigma_{\delta t \text{ расч } (1,2)}$

наклонной дальности от начала прямоугольной полигонной системы координат до ЛА.

При исследовании предполагалось, что измерения первого и второго дальномеров имеют одинаковые временные погрешности $\sigma_{\delta t(1,2)}$ в привязке этих измерений к шкале времени третьего (опорного) дальномера.

Результаты исследования синтезированного субоптимального нелинейного фильтра для первого измерительного эксперимента приведены на рис. 3.5.

На этом рисунке представлено семейство зависимостей погрешности оценки дальности до ЛА $\sigma_{\delta \hat{D}}$ от расчетных значений двух равных средних квадратических погрешностей $\sigma_{\delta t \text{ расч } (1,2)}$ привязки во времени измерений первого и второго дальномеров по отношению к соответствующим измерениям третьего дальномера. Принято, что фактические значения погрешностей этих временных невязок $\sigma_{\delta t \text{ факт } (1,2)} = 10 \text{ мс}$.

Зависимости построены при разных, но равных для всех дальномеров инструментальных погрешностях $\sigma_{\delta D(1,2,3)}$, значениях скорости изменения наклонной дальности до ЛА для трех дальномеров $V_{D(1,2,3)}$, равных $1 \cdot 10^3$ и $6 \cdot 10^3 \text{ м/с}$, а также значениях радиального ускорения ЛА для трех дальномеров, равных 500 м/с^2 .

Из анализа приведенных зависимостей видно, что минимальный уровень погрешности фильтрации наблюдается при равенстве расчетной временной погрешности $\sigma_{\delta t \text{ расч } (1,2)}$, заложенной в алгоритм фильтрации, и фактической $\sigma_{\delta t \text{ факт } (1,2)}$, т.е. при условии оптимальной фильтрации. При невыполнении отмеченного условия погрешность оценки наклонной дальности до ЛА $\sigma_{\delta \hat{D}}$ увеличивается.

При прочих равных условиях эффективность синтезированного фильтра Калмана возрастает в случае фильтрации более точных траекторных измерений. Так, при погрешностях дальномеров $\sigma_{\delta D(1,2,3)} = 2,5$ м использование рассматриваемого оптимального фильтра дает снижение погрешности фильтрации на 65 % по сравнению с фильтром, построенным без учета априорных значений вероятностных характеристик законов распределения погрешностей привязки во времени измерений к единой шкале времени.

Во втором измерительном эксперименте проводилась совместная обработка измерений от трех одинаковых территориально разнесенных измерителей радиальной составляющей скорости, работающих по одному и тому же объекту, с целью оценки погрешности модуля вектора скорости этого объекта. Этот измерительный эксперимент позволяет показать преимущество синтезированного субоптимального нелинейного фильтра для обработки векторного случайного процесса измерений траекторий высокоманевренных летательных аппаратов при наличии погрешностей в привязке компонент такого процесса к единой шкале времени по сравнению с приведенным выше аналогичным линейным модифицированным фильтром Калмана [63]. Именно в условиях оценки скоростных составляющих вектора параметров движения ЛА более существенно проявляется влияние временных невязок на точность измерительного комплекса, учитываемых во втором слагаемом уравнения (3.32).

Результаты исследования синтезированного субоптимального нелинейного фильтра для второго измерительного эксперимента приведены на рис. 3.6. На этом рисунке представлено семейство зависимостей погрешностей оценки модуля скорости ЛА $\sigma_{\delta \hat{V}_0}$ от двух равных расчетных средних квадратических погрешностей $\sigma_{\delta t \text{ расч } (1,2)}$ временной привязки измерений первого и второго измерителей радиальной скорости ЛА по отношению к соответствующим измерениям третьего измерителя скорости.

Предполагается, что фактические погрешности этих временных невязок $\sigma_{\delta t \text{ факт } (1,2)} = 10$ мс.

Зависимости построены для разных, но равных для всех измерителей радиальной скорости ЛА инструментальных погрешностях

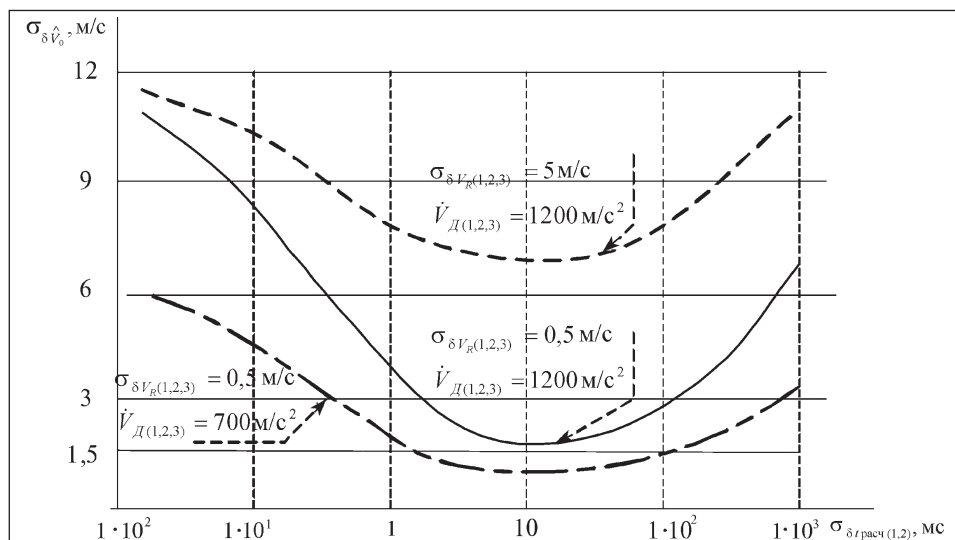


Рис. 3.6. Зависимости погрешности оценки модуля вектора скорости ЛА от параметра фильтра $\sigma_{\delta t \text{ расч}}(1,2)$

$\sigma_{\delta V_R(1,2,3)}$ и значениях радиального ускорения ЛА для трех дальнометров $\dot{V}_{D(1,2,3)}$, равных 1200 и 700 м/с².

Из анализа приведенных зависимостей видно, что минимальный уровень погрешности фильтрации наблюдается при равенстве расчетной временной погрешности $\sigma_{\delta t \text{ расч}}(1,2)$, заложенной в алгоритм фильтрации, и фактической $\sigma_{\delta t \text{ факт}}(1,2)$, т.е. при условии оптимальной фильтрации. При невыполнении этого условия погрешность оценки модуля вектора скорости ЛА $\sigma_{\delta \hat{V}_0}$ увеличивается.

При прочих равных условиях эффективность разработанного фильтра возрастает в случае фильтрации более точных измерений радиальной скорости. Так, при погрешностях измерителей радиальной скорости $\sigma_{\delta V_R(1,2,3)} = 0,5$ м/с использование рассматриваемого субоптимального нелинейного фильтра дает снижение погрешности фильтрации на 70 % по сравнению с фильтром, построенным без учета в его параметрах априорных значений вероятностных характеристик законов распределения временных погрешностей в привязке измерений, полученных от территориально разнесенных измерителей скорости, к единой шкале времени.

Таким образом, проведенные исследования приведенного алгоритма подтверждают высокую эффективность предложенного метода субоптимальной нелинейной фильтрации многомерного случай-

ного процесса измерений траекторий высокоманевренных ЛА, в котором учитывается дополнительная априорная информация о вероятностных характеристиках законов распределения погрешностей в привязке компонент такого процесса к единой шкале времени, что дает основание рекомендовать его для обработки результатов траекторных измерений при испытаниях сложных технических комплексов.

3.3. Способ контроля местных шкал времени траекторного измерительного комплекса и управления ими в процессе проведения натуральных экспериментов

Несмотря на наличие высокоточной аппаратуры единого времени, используемой в составе траекторных измерительных комплексов, сохраняется необходимость постоянного или периодического контроля положения шкал времени периферийных хранителей времени (ХВ) по отношению к шкале времени ведущего хранителя, создающего шкалу времени измерительного комплекса [3, 106].

Необходимость контроля шкал времени ИК объясняется конечной стабильностью используемых стандартов частоты, сбоями в работе аппаратуры единого времени и ее энергопитания, а также ошибками обслуживающего персонала.

Для решения задачи коррекции местных шкал времени ИК могут использоваться аппаратные средства синхронизации, которые позволяют обеспечивать по каналам связи принудительную периодическую «подбивку» шкал времени периферийных хранителей времени. Однако применение таких средств синхронизации требует специальных каналов связи. Кроме того, они являются эффективными при ограниченных расстояниях между ведущим и ведомым хранителями времени (несколько десятков километров) и практически «не прижились» в составе систем единого времени измерительных комплексов. Функции контроля местных шкал времени, создаваемых периферийными хранителями времени измерительного комплекса, в настоящее время практически не реализуются.

Задача контроля местных шкал времени ИК и управления ими в процессе проведения натуральных экспериментов может быть решена с использованием принципиально нового подхода, суть которого заключается в следующем.

Исследования показали, что в результате совместной статистической обработки траекторной измерительной информации могут быть получены наряду с оптимальными оценками параметров движения ЛА также и оптимальные оценки вектора временных невязок

в привязке траекторной измерительной информации к единой шкале времени измерительного комплекса.

Такие оценки вектора временных невязок могут быть получены с помощью модифицированного фильтра Калмана, в параметрах которого учитываются априорные значения вероятностных характеристик законов распределения временных невязок в привязке траекторной измерительной информации к единой шкале времени ИК. Этот фильтр должен входить в состав специального программного обеспечения комплекса средств автоматизации (КСА) траекторного измерительного комплекса.

Для раскрытия сути предлагаемого способа контроля местных шкал времени траекторного измерительного комплекса и управления ими в процессе проведения натурных экспериментов проведем синтез упрощенного варианта модифицированного фильтра Калмана, позволяющего решать такие задачи.

Временные погрешности привязки траекторной измерительной информации к единой шкале времени ИК (шкале ведущего хранителя времени) на интервале проведения измерений можно считать медленноменяющимся коррелированным во времени N -мерным процессом $\Delta T(k)$, который на ограниченном интервале проведения измерений можно описать рекуррентным стохастическим уравнением вида

$$\Delta T(k) = \alpha \cdot \Delta T(k-1) + \beta \cdot \epsilon_1(k), \quad (3.55)$$

где α , β — матричные постоянные коэффициенты размерностью $(N \times N)$; $\epsilon_1(k)$ — векторный процесс белого шума, компоненты которого имеют параметры $N(0,1)$.

Размерность N случайного дискретного процесса $\Delta T(k)$ определяется числом измерительных каналов средств траекторных измерений, информация которых привязывается к шкалам времени периферийных и ведущего хранителей времени.

Поставим задачу нахождения оценки вектора оптимального управления $\hat{\Delta T}_{y(\text{opt})}(k)$ шкалами времени территориально разнесенных хранителей времени в предположении, что векторный случайный процесс временных погрешностей в привязке траекторной измерительной информации к шкале времени ведущего ХВ описывается уравнением (3.55).

Математически такая задача запишется следующим образом: определить искомый вектор из условия вида

$$\begin{aligned} \hat{\Delta T}_{y(\text{opt})}(k) : \{ \min D_{\hat{q}_1}(k), \min D_{\hat{q}_2}(k), \dots, \min D_{\hat{q}_N}(k), \\ \min D_{\hat{\delta t}_1}(k), \min D_{\hat{\delta t}_2}(k), \dots, \min D_{\hat{\delta t}_N}(k) \}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

где $D_{\hat{q}_i}(k)$ — дискретные значения дисперсии $\hat{q}_i$ -й компоненты вектора $\hat{\theta}(k)$ оценки параметров движения ЛА; $D_{\delta\hat{t}_i}(k)$ — дискретные значения дисперсии погрешности оценки i -й компоненты вектора временных невязок в привязке ТИ на момент времени $t = k$ к единой шкале времени ИК.

Решение задачи нахождения оптимальной оценки вектора управления шкалами времени $\hat{\Delta T}_{y(opt)}(k)$ будем искать в предположении, что наблюдаемый N -мерный дискретный процесс траекторных измерений $\xi(k)$ может быть описан моделью

$$\xi(k) = \mathbf{H}_1(k) \cdot \theta(k) + \mathbf{H}_2(k) \cdot \Delta T(k) + \eta(k); \quad k = \overline{1, K}, \quad (3.57)$$

где $\mathbf{H}_1(k)$ — матрица частных производных первичных параметров, измеряемых средствами ТИ, по оцениваемым параметрам движения ЛА; $\mathbf{H}_2(k)$ — матрица скоростей изменения первичных параметров, измеряемых средствами ТИ; $\theta(k)$ — вектор состояния динамической модели движения ЛА в пространстве состояний; $\eta(k)$ — дискретный процесс шума траекторных измерений.

Динамическая модель движения ЛА в пространстве состояний для ограниченного участка траектории, а также стационарный дискретный процесс шума измерений можно описать следующими стохастическими уравнениями с постоянными матричными коэффициентами:

$$\theta(k) = \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{b} \cdot \varepsilon_2(k), \quad (3.58)$$

$$\eta(k) = \mathbf{p} \cdot \eta(k-1) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}(k), \quad (3.59)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — матричные коэффициенты, структура которых определяется выбранной моделью движения ЛА; $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ — матрицы постоянных коэффициентов размерностью $(M \times M)$; $\varepsilon_2(k), \mathbf{l}(k)$ — векторные процессы белого шума, компоненты которых имеют параметры $N(0, 1)$.

Диагональная матрица $\mathbf{H}_2(k)$ скоростей изменения измеряемых параметров имеет структуру

$$\mathbf{H}_2(k) = \text{diag} \left[\frac{\xi_1(k-1) - \xi_1(k)}{\Delta t} \quad \dots \quad \frac{\xi_2(k-1) - \xi_2(k)}{\Delta t} \quad \dots \quad \frac{\xi_N(k-1) - \xi_N(k)}{\Delta t} \right],$$

где Δt — временной интервал поступления измерительной информации.

С учетом выражений (3.55), (3.58) и (3.59) модель наблюдаемого процесса $\xi(k)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\xi(k) = & \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\theta}(k-1) + \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2(k) + \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{T}(k-1) + \\ & + \mathbf{H}_2(k) \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1(k) + \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\eta}(k-1) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}(k).\end{aligned}\quad (3.60)$$

Выражение (3.60) с использованием соотношений (3.57)...(3.59) может быть преобразовано к виду

$$\xi(k) = \mathbf{A}_0(\xi, k) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \boldsymbol{\Theta}(k-1) + \mathbf{B}_1(k) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k) + \mathbf{B}_2(k) \cdot \mathbf{l}(k),$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_0(\xi, k) &= \boldsymbol{\rho} \cdot \xi(k-1); \\ \mathbf{A}_1(k) &= [\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{H}_1(k-1) \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} - \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{H}_2(k-1)]; \\ \mathbf{B}_1(k) &= [\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b}(k) \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \boldsymbol{\beta}]; \quad \mathbf{B}_2(k) = \mathbf{r}; \\ \boldsymbol{\Theta}(k-1) &= \left[\frac{\boldsymbol{\theta}(k-1)}{\Delta \mathbf{T}(k-1)} \right]; \quad \boldsymbol{\varepsilon}(k) = \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2(k)}{\boldsymbol{\varepsilon}_1(k)} \right].\end{aligned}$$

Тогда с использованием рекуррентных уравнений (3.55), (3.57) (3.58)...(3.59) построим следующий частично наблюдаемый процесс:

$$\boldsymbol{\Theta}(k) = \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\Theta}(k-1) + \mathbf{b}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k); \quad (3.61)$$

$$\xi(k) = \mathbf{A}_0(\xi, k) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \boldsymbol{\Theta}(k-1) + \mathbf{B}_1(k) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(k) + \mathbf{B}_2(k) \cdot \mathbf{l}(k),$$

где $\mathbf{a}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{array} \right]; \quad \mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} \end{array} \right].$

Для частично наблюдаемого процесса (3.61) в соответствии с теорией динамической фильтрации [48, 105] оптимальная в среднем квадратическом смысле оценка составного вектора $\boldsymbol{\Theta}(k)$ определяется уравнением

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) &= \left[\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)}{\Delta \hat{\mathbf{T}}_{\text{opt}}(k)} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{array} \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot \{ \xi(k) - \boldsymbol{\rho} \cdot \xi(k-1) - \\ &- [\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{H}_1(k-1) \mid \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} - \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{H}_2(k-1)] \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) \}. \quad (3.62)\end{aligned}$$

В уравнении оптимальной фильтрации (3.62) составная матрица $\mathbf{K}(k)$ коэффициента усиления фильтра определяется выражением

$$\mathbf{K}(k) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{K}_1(k) \\ \hline \mathbf{K}_2(k) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}_1^T(k) \\ \hline \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{H}_2^T(k) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{array} \right] \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}(k-1) \times$$

$$\times \left[\frac{[\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_1(k-1)]^T}{[\mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_2(k-1)]^T} \right] \cdot \mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}_1^T(k) + \\ + \mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{\beta} \cdot \mathbf{\beta}^T \cdot \mathbf{H}_2^T(k) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T + [\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_1(k-1)] \cdot \\ \cdot [\mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_2(k-1)] \gamma_{\hat{\Theta}}(k-1) \cdot \left[\frac{[\mathbf{H}_1(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_1(k-1)]^T}{[\mathbf{H}_2(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_2(k-1)]^T} \right]^{-1},$$

где $\gamma_{\hat{\Theta}}(k)$ — ковариационная матрица составного вектора $\hat{\Theta}(k)$, которая определяется соответствующим рекуррентным уравнением [105].

Выражение (3.62) определяет оптимальную оценку вектора погрешности привязки траекторной измерительной информации к единой шкале времени ведущего хранителя времени $\hat{\Delta T}_{(\text{opt})}(k)$, которая может использоваться в качестве вектора оптимального управления этими шкалами времени $\hat{\Delta T}_{y(\text{opt})}(k)$.

Входной информацией для синтезированного модифицированного фильтра Калмана является траекторная измерительная информация, поступающая с территориально разнесенных наземных средств траекторных измерений по каналам передачи данных в комплекс средств автоматизации траекторного измерительного комплекса. В качестве параметров синтезированного модифицированного фильтра Калмана используется априорная информация о значениях вероятностных характеристик законов распределения погрешностей привязки измерительной информации к единой шкале времени измерительного комплекса, которая может быть получена в процессе аттестации системы единого времени с использованием транспортируемых квантовых часов. Кроме того, используется также априорная информация о значениях вероятностных характеристик погрешностей траекторной измерительной информации, которая может быть получена в процессе аттестации траекторного измерительного комплекса.

Как видно из выражения (3.62), синтезированный модифицированный фильтр Калмана содержит расширенный вектор состояния $\Theta(k) = [\theta(k) | \Delta T(k)]^T$, что обеспечивает новое качество этого фильтра — способность оценивания вектора невязок в привязке траекторной измерительной информации к единой шкале времени измерительного комплекса.

Использование в составе специального математического обеспечения комплекса средств автоматизации траекторного ИК такого синтезированного модифицированного фильтра Калмана позволяет

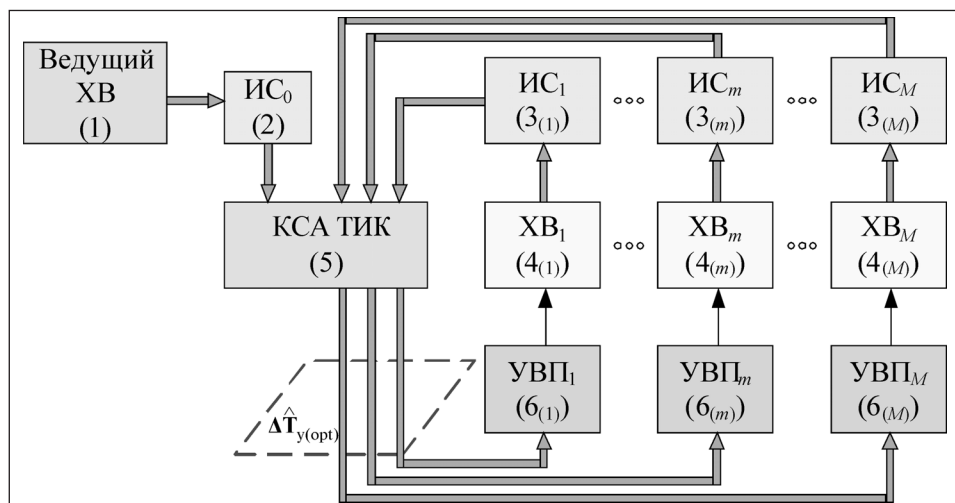


Рис. 3.7. Схема контроля шкал времени траекторного измерительного комплекса и управления ими в ходе проведения натуральных экспериментов:

1 — ведущий хранитель времени; 2 — средство ТИ, синхронизируемое от ведущего ХВ; $3_{(1)}...3_{(M)}$ — средства ТИ, расположенные на измерительных пунктах полигона; $4_{(1)}...4_{(M)}$ — хранители времени, расположенные на измерительных пунктах полигона; 5 — комплекс средств автоматизации ТИК; $6_{(1)}...6_{(M)}$ — устройства для ввода временных поправок в хранители времени

реализовать новую схему контроля шкал времени периферийных ХВ и управления ими в процессе проведения натуральных испытаний, которая приведена на рис. 3.7.

Согласно схеме, представленной на рис. 3.7, со средств траекторных измерений (2, $3_{(1)}...3_{(M)}$), участвующих в обеспечении натурального эксперимента, измерительная информация в режиме реального времени по каналам передачи данных поступает в комплекс средств автоматизации ТИК, где проводится ее совместная обработка синтезированным модифицированным фильтром Калмана.

В результате обработки получаются оценки значений вектора временных невязок $\hat{\Delta T}_{y(opt)}(k)$ в привязке траекторной измерительной информации к единой шкале времени ИК. На основании этих оценок формируется кодограмма управления шкалами времени периферийных ХВ, т.е. информация о векторе $\hat{\Delta T}_{y(opt)}(k)$, и по каналам передачи данных передается на устройства ввода поправок в периферийные хранители времени.

В случае если один хранитель времени обеспечивает временной информацией несколько измерительных средств, расположенных

на одном измерительном пункте, то компонента вектора $\hat{\Delta T}_{y(\text{opt})}(k)$ для m -го хранителя времени формируется путем усреднения соответствующих компонент вектора $\hat{\Delta T}_{y(\text{opt})}(k)$, которые принадлежат тем измерительным каналам, которые имеются на m -м измерительном пункте.

Необходимо отметить, что подобный подход используется в спутниковой навигационной системе «Навстар» для контроля положения шкал времени на борту спутников по отношению к шкале времени системы и периодической их коррекции.

Для апробации предложенного способа контроля местных шкал времени траекторного измерительного комплекса и управления ими в процессе проведения натурных экспериментов было проведено моделирование рассмотренного модифицированного фильтра Калмана.

В частности, было исследовано влияния неточного задания в параметрах фильтра априорных данных о вероятностных характеристиках законов распределения временных невязок в привязке траекторной измерительной информации к единой шкале времени на точность оценки фильтром этих временных невязок.

На рис. 3.8 приведено семейство зависимостей погрешности оценки двух временных невязок $\sigma_{\delta \hat{t}_i}$ ($i=1,2$) между моментами времени

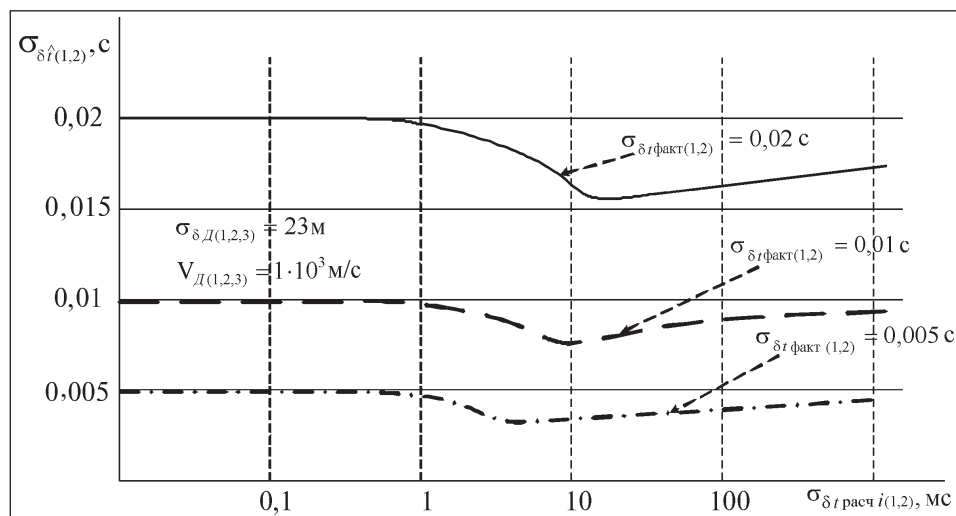


Рис. 3.8. Семейство зависимостей средней квадратической погрешности оценки временных невязок в привязке результатов траекторных измерений к единой шкале времени от параметра фильтра $\sigma_{\delta t \text{ расч } i}(i=1,2)$

привязки информации первого и второго дальномеров по отношению к соответствующим измерениям третьего дальномера, синхронизируемого от ведущего хранителя времени, от априорно известных значений этих временных невязок $\sigma_{\delta t_{расч}i}$, $i=1,2$, заложенных в параметры фильтра. Предполагается, что все три дальномера одинаковы и имеют инструментальную среднюю квадратическую погрешность измерения дальности до ЛА $\sigma_{\delta L(1,2,3)} = 23$ м. Кроме того, при проведении исследований учитывалось, что скорости изменения измеряемых дальномерами параметров V_{Di} , ($i=1,2,3$) равны 1000 м/с, значения рассматриваемых двух временных невязок равны между собой, а фактические средние квадратические значения рассматриваемых временных невязок также одинаковы и равны 0,02, 0,01 и 0,005 с.

Полученные результаты исследования свидетельствуют о том, что минимальный уровень погрешности оценки двух временных невязок $\sigma_{\delta ti}$ ($i=1,2$) наблюдается при равенстве априорных значений $\sigma_{\delta t_{расч}i}$ ($i=1,2$), заложенных в параметры фильтра, и фактических значений $\sigma_{\delta t_{факт}i}$ ($i=1,2$), т.е. при условии оптимальной фильтрации.

Результаты моделирования показали эффективность синтезированного модифицированного фильтра Калмана для оценки временных невязок в привязке траекторной измерительной информации к единой шкале времени. Данные оценки могут успешно использоваться для коррекции положения шкал времени периферийных ХВ по отношению к шкале времени ведущего хранителя времени.

Таким образом, синтезированный модифицированный оптимальный фильтр Калмана и предложенная схема контроля местных шкал времени ТИК и управления ими в процессе проведения натурных экспериментов позволяют создавать системы единого времени автоматизированных траекторных измерительных комплексов, в которых с высокой надежностью может обеспечиваться единство местных шкал времени территориально разнесенных хранителей времени без применения дополнительных специальных средств контроля и принудительной синхронизации этих хранителей времени.

3.4. Алгоритм фильтрации многомерных разнородных траекторных измерений от разнотипных измерительных средств для формирования данных целеуказаний средствам траекторного измерительного комплекса

Одной из основных задач, решаемых автоматизированной системой управления траекторным измерительным комплексом, является выдача на следящие средства этого комплекса данных целеуказа-

ний (дальности, азимута и угла места) для поиска и сопровождения ими летательных аппаратов. Такие данные необходимы для обеспечения бесперебойной работы средств траекторных измерений следящего типа [42].

В существующих автоматизированных системах управления ТИК данные целеуказаний вырабатываются путем использования выходной измерительной информации от одной из радиолокационных станций траекторных измерений, обладающей максимальным уровнем приоритета. Как правило, уровень приоритета определяется наилучшими условиями приема радиосигнала (отсутствие наблюдения ЛА на предельной дальности действия или под малыми углами места). Однако такой подход к формированию информации целеуказаний не лишен ряда недостатков, к числу которых можно отнести следующие:

используемая информация от одной РЛС ТИ не позволяет оценить координаты ЛА с точностью, необходимой для получения данных целеуказаний высокоточным оптико-электронным средствам ТИ;

в случае наличия у выбранного в качестве источника информации для целеуказаний средства ТИ параметрического отказа (ошибки измерений превышают паспортные значения) полученная выходная информация может быть непригодной для формирования целеуказаний средствам ТИ следящего типа;

внезапные отказы средства ТИ, выбранного в качестве источника информации для целеуказаний, или сбои в системе сбора траекторной измерительной информации могут привести к кратковременной потере данных целеуказаний и срыву работы ТИК.

Для устранения этих недостатков предлагается в состав автоматизированной системы управления траекторным ИК ввести программный модуль, реализующий совместную фильтрацию в режиме реального времени разнородных измерений от всех средств ТИ, наблюдающих в данный момент времени летательный аппарат, с получением на выходе этого модуля текущих оценок вектора параметров движения ЛА, которые используются далее для формирования целеуказаний средствам ТИ следящего типа [65, 109].

В теоретическом плане вопросы совместной обработки разнородной измерительной информации ранее рассматривались в ряде научных работ [19, 81, 93, 103], однако в них не была решена задача высокоточного расчета в режиме реального времени матричных коэффициентов динамической модели движения ЛА для обеспечения правильного предсказания оцениваемых параметров на моменты времени поступления в обработку последующих измерений.

На практике же в существующих автоматизированных системах управления траекторными ИК программные модули совместной обработки разнородной траекторной измерительной информации для получения высокоточных целеуказаний следящим средствам ТИ до настоящего времени реализованы не были.

В основу рассматриваемого программного модуля предлагается положить алгоритм фильтрации многомерных разнородных траекторных измерений от разнотипных измерительных средств для формирования данных целеуказаний средствам ТИК [115].

Задача оптимальной фильтрации разнородной траекторной измерительной информации от разнотипных средств ТИ измерительно-го комплекса формулируется следующим образом.

Рассматривается M -мерный гауссов векторный дискретный случайный процесс $\xi(k)$ траекторных измерений для моментов времени $k = \overline{1, K}$ о положении ЛА в пространстве и о векторе его скорости, поступающих от разнотипных средств ТИ, имеющих в общем случае различные периоды времени выдачи выходной измерительной информации $\Delta t_1, \dots, \Delta t_m, \dots, \Delta t_M$, где M — число измерительных каналов ТИК.

Требуется определить оптимальную оценку вектора параметров движения ЛА $\hat{\theta}_{\text{opt}}(k) = [\hat{x}_{\text{opt}}(k) \ \hat{y}_{\text{opt}}(k) \ \hat{z}_{\text{opt}}(k) \ \hat{\dot{x}}_{\text{opt}}(k) \ \hat{\dot{y}}_{\text{opt}}(k) \ \hat{\dot{z}}_{\text{opt}}(k)]$ ($k = \overline{1, K}$) по результатам обработки векторного дискретного случайного процесса $\xi(k)$, компоненты которого могут иметь различные временные интервалы следования, при условии получения минимальной дисперсии этих оцениваемых параметров, т.е.

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{opt}}(k) : \{ \min D_{\hat{x}}(k), \min D_{\hat{y}}(k), \min D_{\hat{z}}(k), \\ \min D_{\hat{\dot{x}}}(k), \min D_{\hat{\dot{y}}}(k), \min D_{\hat{\dot{z}}}(k) \}; \ k = \overline{1, K}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

где $D_j(k)$ — дисперсия j -й компоненты вектора $\hat{\theta}(k)$.

Далее по полученным значениям вектора $\hat{\theta}_{\text{opt}}(k)$ должен проводиться расчет данных целеуказаний средствам ТИ следящего типа.

3.4.1. Методика решения задачи совместной фильтрации многомерных разнородных траекторных измерений

Как известно, в существующих автоматизированных системах управления траекторными ИК вся передаваемая по территориальной вычислительной сети траекторная измерительная информация и команды управления сформированы в формате кадра Ethernet [20]. Такой принцип построения системы сбора траекторной измерительной информации позволяет в режиме реально-

го времени передавать выходную информацию от средств ТИ в вычислительный центр, где имеется возможность выделить первичные траекторные измерения с привязкой их к единой шкале времени. При этом можно установить номер средства ТИ, которому принадлежат измерения, и номер ЛА, по которому проводятся измерения.

При решении задачи (3.63) M -мерный наблюдаемый векторный дискретный процесс измерений $\xi(k)$ для дискретного момента времени $t = k$ может быть представлен в виде

$$\xi(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \theta(k) + \mathbf{l}(k) \quad (3.64)$$

или в развернутой форме

$$\begin{bmatrix} \xi_p(k) \\ \xi_s(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_p(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_s(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_p(k) \\ \theta_s(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{l}_p(k) \\ \mathbf{l}_s(k) \end{bmatrix},$$

где $\xi_p(k)$, $\xi_s(k)$ — наблюдаемые векторные случайные процессы первичных измерений координат ЛА и составляющих вектора его скорости соответственно; $\theta_p(k)$, $\theta_s(k)$ — случайные векторы оцениваемых параметров движения ЛА по положению и составляющих вектора его скорости соответственно, имеющие следующую структуру: $\theta_p(k) = [x \ y \ z]^T$, $\theta_s(k) = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$; $\mathbf{H}_p(k)$ — матрица частных производных измеряемых средствами ТИ параметров (например, наклонной дальности до ЛА, угла места, азимута этого ЛА и т.д.) по соответствующим компонентам вектора $\theta_p(k)$; $\mathbf{H}_s(k)$ — матрица частных производных измеряемых скоростных параметров (например, скорости изменения радиальной дальности до ЛА, скорости изменения направляющих косинусов ЛА) по компонентам вектора $\theta_s(k)$; $\mathbf{l}_p(k)$, $\mathbf{l}_s(k)$ — коррелированные во времени векторные дискретные случайные процессы погрешностей измерения средствами траекторных измерений первичных параметров положения ЛА в пространстве и его скоростных параметров соответственно.

Случайный вектор $\theta(k)$ оцениваемых параметров движения ЛА, входящих в выражение (3.64), может быть описан во времени динамической моделью движения ЛА в пространстве состояний в виде рекуррентного стохастического уравнения вида [85]

$$\theta(k) = \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{b} \cdot \varepsilon_1(k), \quad (3.65)$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — матричные коэффициенты, структура которых определяется выбранной моделью движения ЛА и временным интерва-

лом Δt поступления траекторных измерений; $\epsilon_1(k)$ — векторный процесс белого шума с независимыми компонентами, имеющими параметры $N(0,1)$.

Кроме того, M -мерный случайный процесс коррелированных по времени погрешностей средств траекторных измерений $\mathbf{I}(k)$ в выражении (3.64) может быть описан рекуррентным стохастическим уравнением вида

$$\mathbf{I}(k) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{I}(k-1) + \mathbf{r} \cdot \epsilon_2(k), \quad (3.66)$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ — матрицы постоянных коэффициентов размерностью $(M \times M)$; $\epsilon_2(k)$ — M -мерный процесс белого шума с независимыми компонентами, имеющими параметры $N(0,1)$.

Решение задачи (3.63) проведем путем синтеза оптимального дискретного фильтра Калмана для обработки в режиме реального времени рассматриваемой разнородной траекторной информации на фоне коррелированных шумов измерений. Для пояснения принципов построения такого фильтра Калмана проведем вначале синтез оптимального фильтра для обработки в режиме реального времени траекторной измерительной информации в предположении, что вся информация от средств ТИ поступает в обработку синхронно с одним и тем же временным интервалом следования.

Подставив выражения (3.65) и (3.66) в формулу (3.64), получим выражение для наблюдаемого процесса $\xi(k)$ вида

$$\xi(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \epsilon_1(k) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{I}(k-1) + \mathbf{r} \cdot \epsilon_2(k). \quad (3.67)$$

Далее из формулы (3.64) получим выражение для процесса $\mathbf{I}(k-1)$ и подставим его в соотношение (3.67).

В результате таких преобразований получим следующее выражение для наблюдаемого процесса $\xi(k)$:

$$\xi(k) = \mathbf{A}_0(k, \xi) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \theta(k-1) + \mathbf{B}_1(k) \cdot \epsilon_1(k) + \mathbf{B}_2(k) \cdot \epsilon_2(k), \quad (3.68)$$

где $\mathbf{A}_0(k, \xi) = \mathbf{p} \cdot \xi(k-1)$; $\mathbf{A}_1(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)$; $\mathbf{B}_1(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b}$; $\mathbf{B}_2(k) = \mathbf{r}$.

Тогда для частично наблюдаемого процесса (3.65) и (3.68) алгоритм оптимальной фильтрации траекторных измерений будет иметь вид [29, 48]

$$\hat{\theta}(k) = \mathbf{a} \cdot \hat{\theta}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot \{\xi(k) - \mathbf{p} \cdot \xi(k-1) - [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)] \cdot \hat{\theta}(k-1)\}. \quad (3.69)$$

В выражении (3.69) коэффициент усиления фильтра $\mathbf{K}(k)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k) = & \{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{a} \cdot \gamma(k-1) \cdot [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)]^T\} \times \\ & \times \{\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T + [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)]\} \times \\ & \times \gamma(k-1) \cdot \{\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)]^T\}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Ковариационная матрица $\gamma(k)$ вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ в выражении (3.70) определяется рекуррентным уравнением вида

$$\begin{aligned} \gamma(k) = & [\mathbf{a} \cdot \gamma(k-1) \cdot \mathbf{a}^T + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T] - \{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{a} \cdot \gamma(k-1) \cdot [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \times \\ & \times \mathbf{H}(k-1)]^T\} \cdot \{\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T + [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)] \cdot \gamma(k-1) \times \\ & \times [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)]^T\}^{-1} \cdot \{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{a} \cdot \gamma(k-1) \times \\ & \times [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)]^T\}^T. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Фильтр Калмана, описываемый соотношениями (3.69)...(3.71), позволяет проводить оптимальную обработку отождествленной по времени измерительной информации от средств ТИ, поступающей в обработку синхронно с одним и тем же временным интервалом следования.

Рассмотрим особенности построения фильтра Калмана в случае поступления измерительной информации от разнотипных средств ТИ с разными временными интервалами следования на примере обработки информации от трех дальномеров. При этом один дальномер выдает информацию с частотой повторения, равной 1 Гц, а два других — с частотой, равной 4 Гц (рис. 3.9).

Для рассматриваемого случая вектор измерений $\xi_p(k)$ может иметь следующие две различные структуры:

$\xi_p(k) = [\xi_{p1}(k) \ \xi_{p2}(k) \ \xi_{p3}(k)]^T$ — для значения времени k , равного t_1 или t_5 ;

$\xi_p(k) = [0 \ \xi_{p2}(k) \ \xi_{p3}(k)]^T$ — для значения времени k , равного t_2, t_3 или t_4 .

В соответствии с размерностью вектора измерений $\xi_p(k)$ на указанные дискретные моменты времени матрица частных производных $\mathbf{H}_p(k)$ в уравнениях фильтрации должна иметь следующие две структуры:

$$\mathbf{H}_{p1}(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_{p1}(t)}{\partial x} & \frac{\partial \xi_{p1}(t)}{\partial y} & \frac{\partial \xi_{p1}(t)}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_{p2}(t)}{\partial x} & \frac{\partial \xi_{p2}(t)}{\partial y} & \frac{\partial \xi_{p2}(t)}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_{p3}(t)}{\partial x} & \frac{\partial \xi_{p3}(t)}{\partial y} & \frac{\partial \xi_{p3}(t)}{\partial z} \end{bmatrix}_{t=k}, \quad (3.72)$$

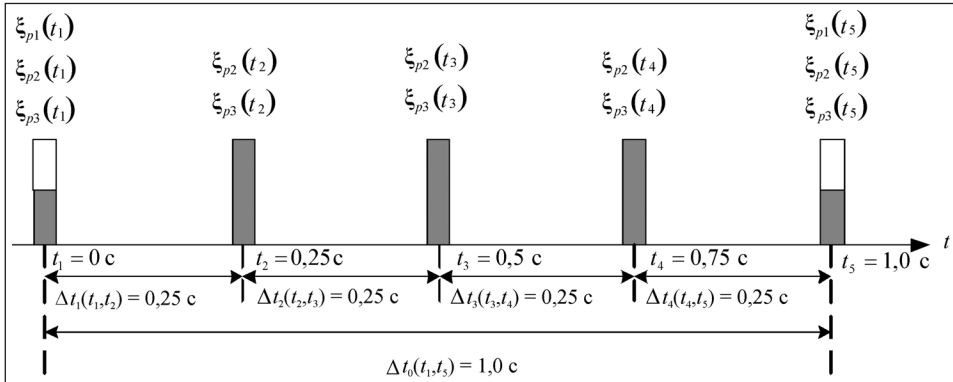


Рис. 3.9. Временной график поступления траекторной измерительной информации от трех дальнометров с разной частотой выдачи измерений:

$\xi_{p1}(t_i)$, $\xi_{p2}(t_i)$, $\xi_{p3}(t_i)$ — измерения от первого, второго и третьего дальнометров соответственно для i -го момента времени; $\Delta t_0(t_1, t_5)$ — период поступления измерительной информации от первого дальнометра; $\Delta t_i(t_j, t_j)$ — периоды поступления измерительной информации от второго и третьего дальнометров

$$\mathbf{H}_{p2}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \xi_{p2}(t)}{\partial x} & \frac{\partial \xi_{p2}(t)}{\partial y} & \frac{\partial \xi_{p2}(t)}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_{p3}(t)}{\partial x} & \frac{\partial \xi_{p3}(t)}{\partial y} & \frac{\partial \xi_{p3}(t)}{\partial z} \end{bmatrix}_{t=k}. \quad (3.73)$$

Матрица $\mathbf{H}_{p1}(k)$, описываемая выражением (3.72), используется в уравнениях фильтрации при значении времени k , равном t_1 или t_5 , а матрица $\mathbf{H}_{p2}(k)$, описываемая выражением (3.73), используется в этих уравнениях при значении времени k , равном t_2 , t_3 или t_4 .

В общем случае формирование различных структур матрицы частных производных позволяет изменять размерность синтезированного фильтра Калмана в зависимости от размерности процесса первичных траекторных измерений, поступающего на вход фильтра в данный момент времени.

Важной особенностью фильтрации многомерных траекторных измерений, поступающих с различными временными интервалами, является формирование для этих интервалов (Δt) адекватной модели движения ЛА в пространстве состояний путем расчета матричных коэффициентов $\mathbf{a}(\Delta t)$ и $\mathbf{b}(\Delta t)$ для рекуррентного уравнения вида

$$\boldsymbol{\theta}(k) = \mathbf{a}(\Delta t) \cdot \boldsymbol{\theta}(k-1) + \mathbf{b}(\Delta t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1(k). \quad (3.74)$$

Величина интервала времени предсказания Δt оцениваемых параметров на моменты времени поступления последующих измерений определяется разностью между моментами времени прихода соседних измерений, т.е. $\Delta t = t_k - t_{k-1}$.

Формирование рекуррентного уравнения (3.74) модели движения ЛА в пространстве состояний может быть осуществлено с использованием алгоритма, приведенного в работе [66]. В соответствии с этим алгоритмом формирование рекуррентного уравнения модели движения ЛА в пространстве состояний вида (3.74) для текущих значений интервалов времени $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ проводится исходя из известной формы непрерывной модели движения, которая может быть однозначно описана для конкретной точки траектории полета ЛА стохастическим дифференциальным уравнением вида [13]

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \int_0^t \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\theta}(s) ds + \int_0^t \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}(s), \quad (3.75)$$

где $\mathbf{a}$, $\boldsymbol{\beta}$ — матричные коэффициенты, характеризующие детерминированную и стохастическую составляющие модели движения ЛА соответственно, которые могут быть определены с использованием известных значений дисперсий и времен корреляции случайных процессов, действующих на ЛА в полете [48]; $\mathbf{W}(t)$ — случайный винеровский процесс.

Искомые матрицы $\mathbf{a}(\Delta t)$ и $\mathbf{b}(\Delta t)$ рекуррентного уравнения (3.74) определяются через решение следующих двух матричных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{F}}(\Delta t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}(\Delta t) \text{ при } \mathbf{F}(0) = \mathbf{I}, \quad (3.76)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\Delta t) = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}(\Delta t) + \boldsymbol{\gamma}(\Delta t) \cdot \mathbf{a}^T + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \text{ при } \boldsymbol{\gamma}(0) = 0, \quad (3.77)$$

компоненты которых непосредственно входят в рекуррентное уравнение (3.74) в следующем виде:

$$\mathbf{a}(\Delta t) = \mathbf{F}(\Delta t); \quad \mathbf{b}(\Delta t) \cdot \mathbf{b}^T(\Delta t) = \boldsymbol{\gamma}(\Delta t),$$

где $\boldsymbol{\gamma}(t)$ — ковариационная матрица оцениваемого вектора параметров движения ЛА.

Уравнения (3.76) и (3.77) хорошо известны в линейной алгебре. Первое уравнение называется уравнением для фундаментальной матрицы $\mathbf{F}(\Delta t)$ линейной системы, а второе получило название матричного дифференциального уравнения Ляпунова. Эффективные алгоритмы решения этих уравнений приведены в работе [8].

Исходя из проведенных рассуждений был разработан обобщенный алгоритм, реализующий метод совместной фильтрации много-

мерных разнородных траекторных измерений от разнотипных измерительных средств для формирования данных целеуказаний средствам траекторного измерительного комплекса в режиме реального времени, который показан на рис. 3.10.

В блоке 1 алгоритма осуществляется ввод с автоматизированного рабочего места оператора системы сбора информации данных о траекторных измерениях в формате стека протоколов ТСР/IP, а в блоке 3 — выделение из этого стека протоколов информации о траекторных измерениях и моментов времени их совершения t_k .

В блоке 4 алгоритма проводятся отождествление выделенной траекторной информации по сопровождаемому ЛА и формирование вектора траекторных измерений $\xi(k)$ с привязкой его к единой шкале времени.

В блоке 5 проводится анализ структуры вектора $\xi(k)$ и в соответствии с ней формируется структура матрицы частных производных $\mathbf{H}(k)$, значения которой используются в уравнениях фильтрации.

В блоке 6 вычисляется текущий интервал времени между соседними измерениями $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Затем в блоке 7 решаются уравнение для фундаментальной матрицы (3.76) и алгебраическое уравнение Ляпунова (3.77).

В результате этих действий вычисляются матричные коэффициенты $\mathbf{a}(\Delta t)$ и $\mathbf{b}(\Delta t)$ рекуррентного уравнения (3.74).

Далее, в блоках 8...10, последовательно проводится расчет ковариационной матрицы $\mathbf{\gamma}(k)$ вектора $\hat{\mathbf{\theta}}(k)$ в соответствии с выражением (3.71), значения коэффициента усиления фильтра $\mathbf{K}(k)$ в соответствии с уравнением (3.70) и оптимальной оценки вектора параметров движения ЛА $\hat{\mathbf{\theta}}(k)$ на момент времени t_k в соответствии с уравнением (3.69).

В блоке 12 алгоритма последовательно для всех J средств ТИ проводится пересчет значений координат ЛА из полигонной системы координат в местную систему координат стояния j -го средства ТИ в соответствии выражением

$$\begin{bmatrix} x_j(k) \\ y_j(k) \\ z_j(k) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_p(k) \\ \hat{y}_p(k) \\ \hat{z}_p(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}; \quad k = \overline{1, K}, \quad (3.78)$$

где $\hat{x}_p(k)$, $\hat{y}_p(k)$, $\hat{z}_p(k)$ — оценки координат ЛА в полигонной системе координат; $x_j(k)$, $y_j(k)$, $z_j(k)$ — оценки координат ЛА в системе координат стояния j -го средства ТИ; $\mathbf{M}$ — матрица разворота осей полигонной системы координат по отношению к местной системе координат с началом в точке стояния средства ТИ; x_0 , y_0 , z_0 — значения базы между точками начала двух систем координат.

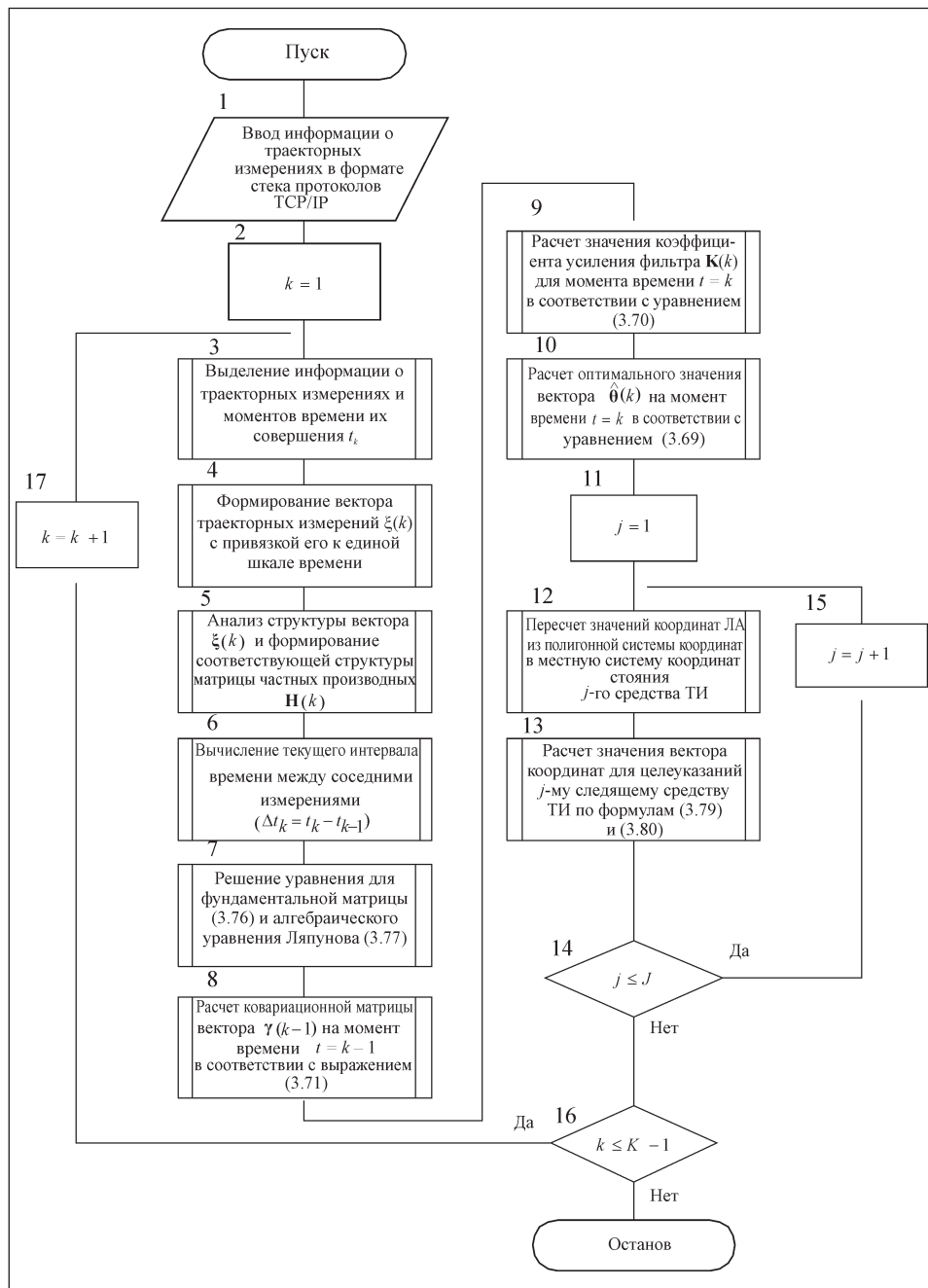


Рис. 3.10. Обобщенный алгоритм, реализующий метод совместной фильтрации многомерных разнородных траекторных измерений от разнотипных измерительных средств

В блоке 13 представленного алгоритма последовательно для всех J средств траекторных измерений по значениям вектора $\theta_{pj}(k) = [x_j(k) \ y_j(k) \ z_j(k)]^T$ вычисляются координаты пролонгированной траектории полета ЛА $\theta_{pj}(t_{\text{расч}})$ на расчетный момент времени $t_{\text{расч}}$, определяемый по формуле

$$t_{\text{расч}} = k + \Delta t_{\text{зад}},$$

где $\Delta t_{\text{зад}}$ — суммарное время задержки формирования данных целеуказаний.

Вычисление значений координат пролонгированной траектории полета ЛА на момент времени $t = t_{\text{расч}}$ возможно провести с использованием метода полиномиального скользящего сглаживания.

Например, по последним пяти дискретным оценкам вектора $\theta_{pj}(k)$ для моментов времени $t = k - 4, k$ с использованием полиномов четвертой степени и метода наименьших квадратов проводится скользящее сглаживание значений координат ЛА в системе координат j -го средства ТИ по формулам

$$\begin{aligned} x_j(t) &= \hat{a}_{0x_j} + \hat{a}_{1x_j}t + \hat{a}_{2x_j}t^2 + \hat{a}_{3x_j}t^3 + \hat{a}_{4x_j}t^4; \\ y_j(t) &= \hat{a}_{0y_j} + \hat{a}_{1y_j}t + \hat{a}_{2y_j}t^2 + \hat{a}_{3y_j}t^3 + \hat{a}_{4y_j}t^4; \\ z_j(t) &= \hat{a}_{0z_j} + \hat{a}_{1z_j}t + \hat{a}_{2z_j}t^2 + \hat{a}_{3z_j}t^3 + \hat{a}_{4z_j}t^4. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Затем с использованием оценок коэффициентов полиномов $\hat{a}_{0x_j}, \hat{a}_{1x_j}, \hat{a}_{2x_j}, \hat{a}_{0y_j}, \hat{a}_{1y_j}, \hat{a}_{2y_j}, \hat{a}_{0z_j}, \hat{a}_{1z_j}, \hat{a}_{2z_j}$ вычисляются значения координат пролонгированной траектории полета ЛА в системе координат j -го средства ТИ на момент времени $t = t_{\text{расч}}$ согласно формулам

$$\begin{aligned} x_{pj}(t_{\text{расч}}) &= [1 \ \Delta t_{\text{зад}} \ \Delta t_{\text{зад}}^2 / 2] \cdot [\hat{a}_{0x_j} \ \hat{a}_{1x_j} \ 2\hat{a}_{2x_j}]^T; \\ y_{pj}(t_{\text{расч}}) &= [1 \ \Delta t_{\text{зад}} \ \Delta t_{\text{зад}}^2 / 2] \cdot [\hat{a}_{0y_j} \ \hat{a}_{1y_j} \ 2\hat{a}_{2y_j}]^T; \\ z_{pj}(t_{\text{расч}}) &= [1 \ \Delta t_{\text{зад}} \ \Delta t_{\text{зад}}^2 / 2] \cdot [\hat{a}_{0z_j} \ \hat{a}_{1z_j} \ 2\hat{a}_{2z_j}]^T. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Тогда вектор $\theta_{pj}(t_{\text{расч}})$ координат пролонгированной траектории полета ЛА на момент времени $t = t_{\text{расч}}$ будет иметь следующую структуру:

$$\theta_{pj}(t_{\text{расч}}) = [x_{pj}(t_{\text{расч}}) \ y_{pj}(t_{\text{расч}}) \ z_{pj}(t_{\text{расч}})]^T.$$

Далее рассмотренные операции повторяются для последующих моментов времени поступления измерений.

3.4.2. Результаты исследования разработанного алгоритма фильтрации разнородных траекторных измерений для формирования данных целеуказаний средствам ТИК

Исследование разработанного метода проведем на примере анализа погрешностей оценки координат одного и того же ЛА тремя траекторными измерительными комплексами, имеющими следующие варианты построения:

ИК состоит из одной РЛС ТИ, работающей в режиме с активным ответом, с частотой выдачи измерений, равной 1 Гц;

ИК состоит из трех РЛС ТИ, причем первая РЛС работает с частотой измерений, равной 1 Гц, а вторая и третья — с частотой измерений, равной 0,5 Гц;

ИК состоит из трех РЛС ТИ, которые работают с одной частотой измерений, равной 1 Гц.

Все РЛС ТИ одинаковы и имеют следующие технические характеристики:

средняя квадратическая погрешность измерения наклонной дальности $\sigma_D = 12$ м;

средние квадратические погрешности измерения азимута σ_β и угла места σ_ϵ ЛА равны 3';

средняя квадратическая погрешность измерения скорости изменения наклонной дальности $\sigma_{\dot{D}} = 10$ см/с.

На рис. 3.11 показаны погрешности оценок координат ЛА, полученных как по измерениям одной РЛС ТИ, работающей в режиме с активным ответом, на дальности от 400 до 1200 км от точки ее стояния, так и при совместной обработке измерений, полученных от измерительного комплекса, построенного по второму варианту. На рис. 3.12 показаны аналогичные погрешности оценок координат ЛА, полученных по измерениям одной РЛС ТИ, а также погрешности оценки параметров при совместной обработке измерений, полученных от измерительного комплекса, построенного по третьему варианту.

Из анализа результатов исследований, приведенных на рис. 3.11 и 3.12, можно сделать следующие выводы:

точность оценки координат ЛА измерительным комплексом, состоящим из трех РЛС ТИ, выше точности измерения одной РЛС ТИ координат ЛА в азимутальной и угломестной плоскостях практически на два порядка при дальности до ЛА свыше 400 км и в 1,8...3 раза выше точности измерений РЛС наклонной дальности до ЛА;

при равных прочих условиях точность оценки координат ЛА траекторным ИК, состоящим из трех РЛС ТИ, выше в случае более вы-

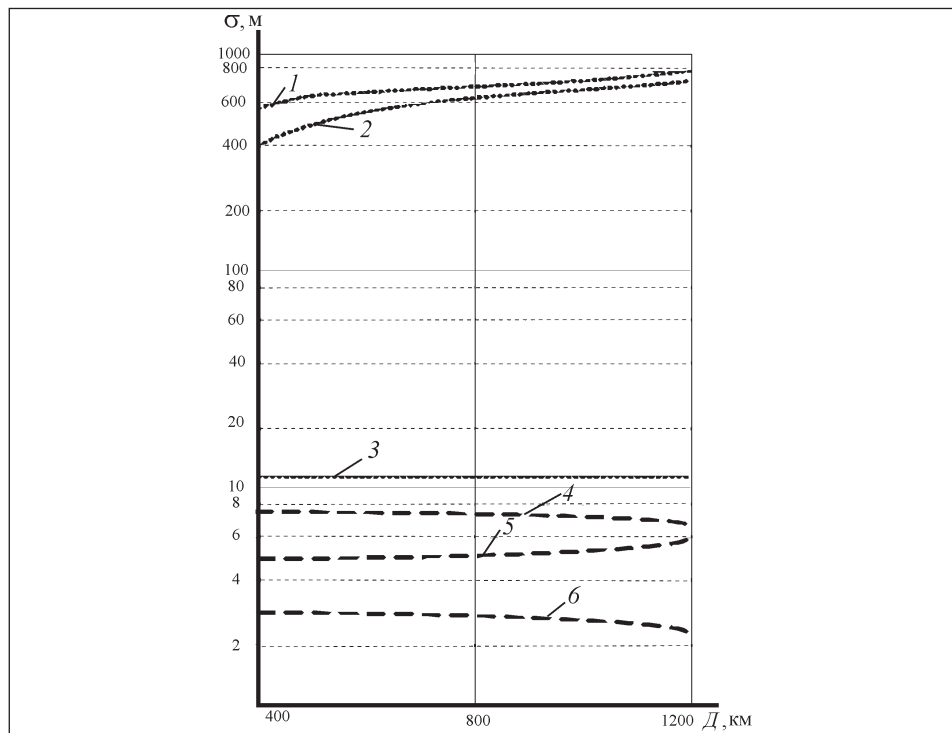


Рис. 3.11. Результаты оценок координат ЛА траекторными ИК, построенными по первому и второму вариантам:

1, 2 — СКО погрешностей измерения РЛС ТИ координат ЛА в азимутальной и угломестной плоскостях соответственно; 3 — СКО погрешности измерения РЛС ТИ наклонной дальности до ЛА; 4...6 — СКО погрешностей оценки соответственно большой, средней и малой полуосей эллипсоида рассеяния ошибок измерений ИК, построенного по второму варианту

сокой частоты выдачи станциями выходной измерительной информации;

использование программного модуля, реализующего разработанный алгоритм совместной фильтрации многомерных разнородных траекторных измерений, позволяет получить значительно более точные оценки параметров движения ЛА, а значит и более высокоточные исходные данные для алгоритма формирования целеуказаний средствам ТИ следящего вида.

Таким образом, рассмотренный алгоритм фильтрации многомерных разнородных траекторных измерений от разнотипных измерительных средств для формирования данных целеуказаний средствам траекторного измерительного комплекса позволяет в значительной степени повысить точность и надежность оценки ТИК параметров

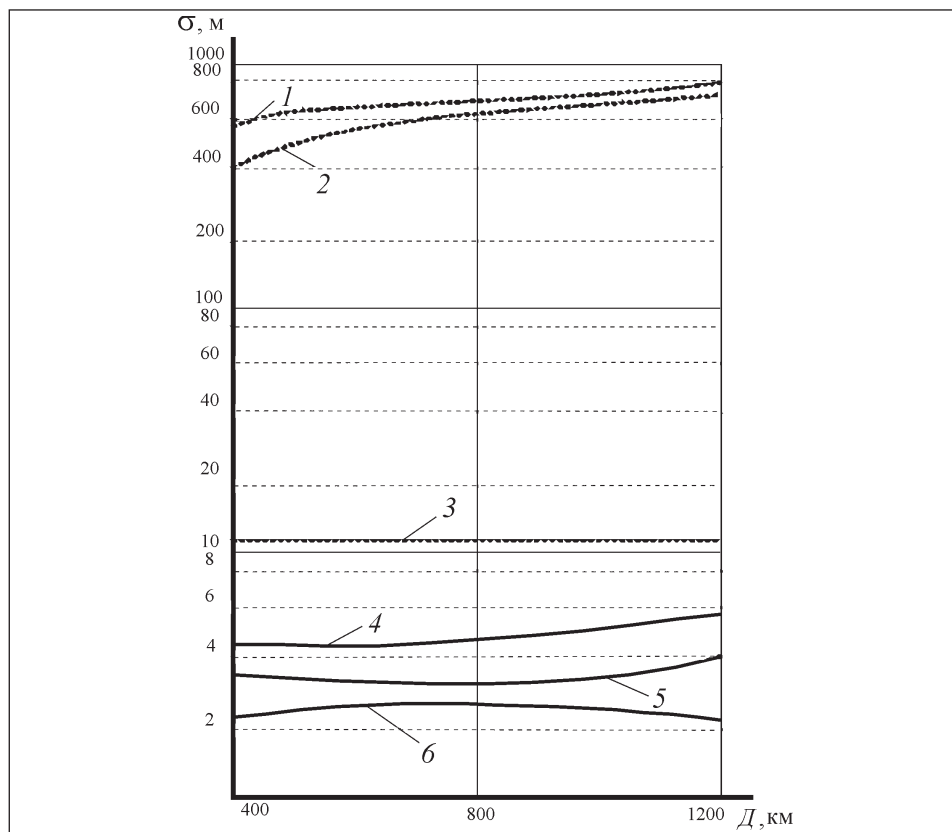


Рис. 3.12. Результаты оценок координат ЛА траекторными ИК, построенными по первому и третьему вариантам:

1, 2 — СКО погрешностей измерения РЛС ТИ координат ЛА в азимутальной и угломестной плоскостях соответственно; 3 — СКО погрешности измерения РЛС ТИ наклонной дальности до ЛА; 4..6 — СКО погрешностей оценки соответственно большой, средней и малой полуосей эллипсоида рассеяния ошибок измерений ИК, построенного по третьему варианту

движения сопровождаемых ЛА и, как следствие, повысить точность целеуказаний средствам траекторных измерений следящего типа, а также надежность функционирования всего траекторного измерительного комплекса.

Известно, что основной задачей системы обработки траекторного измерительного комплекса является оценка текущего значения вектора параметров движения ЛА $\hat{\theta}(t)$ по первичной траекторной измерительной информации наземных и бортовых средств траекторных измерений. Для выполнения данной задачи используются различные методы статистической обработки траекторной измерительной информации и созданные на их базе программно-реализованные алгоритмы. При этом рассматриваются две следующие задачи обработки траекторной измерительной информации:

- восстановление траекторий полета ЛА по полученной информации в режиме реального времени с целью получения прогноза поведения ЛА и выработки управляющих воздействий;

- послеполетная обработка траекторной измерительной информации для оценки качества испытуемого ЛА.

Наиболее жесткие требования по качеству получаемых оценок параметров движения ЛА предъявляются к результатам послеполетной обработки траекторной измерительной информации. В этом случае оценки текущего значения вектора $\theta(t)$ параметров движения ЛА могут проводиться с учетом информации от всей выборки измерений на временном интервале $T=[t_1...t_n]$ с получением высокоточных сглаженных значений параметров движения летательных аппаратов. При проведении послеполетной обработки траекторной измерительной информации возможны и другие приемы и способы повышения точности оценки искомого вектора оценки параметров движения ЛА.

4.1. Метод получения сглаженных оценок параметров движения ЛА по информации многоканальных траекторных измерений с использованием динамической фильтрации

4.1.1. Краткий анализ существующих методов получения сглаженных оценок параметров движения ЛА с использованием аппарата динамической фильтрации

Традиционно сглаженные оценки параметров движения ЛА получают при испытаниях сложных технических комплексов с использованием подхода, предложенного Гауссом. Согласно этому подходу считается, что наиболее вероятным значением оцениваемого параметра является такое, при котором минимизируется сумма квадратов разностей между действительно наблюдаемыми значениями траекторных измерений и вычисляемыми значениями сглаживающей функции в заданные моменты времени.

Как правило, существующие алгоритмы сглаживания строятся с использованием полиномов от второй до шестой степени путем минимизации функционала невязок между статистической траекторной информацией и прогнозируемыми значениями полинома на основе метода наименьших квадратов. Используются и другие методы минимизации функционала невязок, например метод максимального правдоподобия и метод наименьших модулей [24, 47, 50, 56, 92].

Методы полиномиального сглаживания имеют ряд преимуществ по сравнению с другими, к которым относятся простота реализации и наличие в испытательных организациях большого числа разнообразных реализующих их алгоритмов.

Для высокодинамичных и маневренных ЛА наиболее приемлемым методом сглаживания является сплайн-аппроксимация с использованием сплайнов второго и третьего порядков. При этом кусочными полиномами проводится сглаживание статистической информации на ограниченных интервалах времени, а затем она сшивается по условию неизменности второй или третьей производной от функций изменения компонент оцениваемого вектора $\hat{\theta}(t)$ во времени [23, 43].

Однако все эти методы получения сглаженных оценок вектора параметров движения ЛА не в полной мере учитывают стохастическую составляющую погрешности получаемой статистической траекторной измерительной информации, а также случайный характер задания параметров модели движения ЛА.

Как уже было отмечено ранее, проблему учета в методах обработки траекторной измерительной информации рассмотрен-

ных стохастических составляющих решили такие выдающиеся ученые, как Н. Винер, А.Н. Колмогоров, Боде, К.Э. Шеннон, Р.Л. Стратонович, Р. Калман и В.С. Пугачев для случая стохастических систем, заданных в пространстве состояний. Однако работы этих ученых в основном касались алгоритмов построения условных математических ожиданий законов распределения оцениваемых параметров при условии минимума дисперсии погрешности их оценок на моменты времени поступления измерительной информации, которые не позволяли получать сглаженные оценки интересующих исследователя параметров [35–38, 53].

Дж. Медич, опубликовавший ряд фундаментальных работ по сглаживанию статистической информации, первый четко определил три следующих вида задач сглаживания: сглаживание с фиксированным интервалом, с фиксированной точкой, а также с фиксированной задержкой. Кроме того, он дал для непрерывного случая непосредственный вывод уравнения для сглаживания с фиксированной точкой, воспользовавшись уравнением Винера–Хопфа [113].

В работах Э. Сейджа и Дж. Мелса [77] были получены практически реализуемые алгоритмы получения сглаженных оценок параметров движения ЛА для трех отмеченных видов сглаживания, которые позволяют оценивать интересующие параметры в моменты времени поступления статистической траекторной измерительной информации.

Наибольший интерес в теории траекторных измерений представляет дискретный алгоритм сглаживания с фиксированным интервалом для послеполетной обработки траекторной измерительной информации [77]. В этом алгоритме считается, что модель сообщения $\theta(k)$ с вектором состояния размерностью l и наблюдаемый случайный процесс $\xi(k)$ размерностью N описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\theta(k+1) &= \mathbf{F}(k+1, k) \cdot \theta(k) + \mathbf{G}(k) \cdot \varepsilon_1(k); \\ \xi(k) &= \mathbf{H}(k) \cdot \theta(k) + \varepsilon_2(k),\end{aligned}$$

где $\mathbf{F}(k+1, k)$, $\mathbf{G}(k)$ — матрицы размерностью $(l \times l)$; $\mathbf{H}(k)$ — матрица размерностью $(N \times l)$; $\varepsilon_1(k)$, $\varepsilon_2(k)$ — векторные процессы белого шума с нулевыми средними и единичными дисперсиями.

Тогда дискретный алгоритм сглаживания с фиксированным интервалом (алгоритм обратного сглаживания) по M наблюдениям имеет вид

$$\hat{\theta}(k, M) = \hat{\theta}(k) + \mathbf{K}(k) \cdot [\hat{\theta}(k+1, M) - \mathbf{F}(k+1, k) \cdot \hat{\theta}(k)]; \quad k = \overline{1, M}, \quad (4.1)$$

где коэффициент усиления фильтра определяется выражением

$$\mathbf{K}(k) = \gamma_{\hat{\theta}}(k) \cdot \mathbf{F}^T(k+1, k) \cdot \gamma_{\hat{\theta}}^{-1}(k+1, k).$$

В последнем выражении матрица $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ представляет собой ковариационную матрицу ошибок сглаживания.

Вычисление матрицы дисперсий ошибок сглаживания $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ проводится по формуле

$$\gamma_{\hat{\theta}}(k, M) = \gamma_{\hat{\theta}}(k) + \mathbf{K}(k) \cdot [\gamma_{\hat{\theta}}(k+1, M) - \gamma_{\hat{\theta}}(k+1, k)] \cdot \mathbf{K}^T(k). \quad (4.2)$$

Так как оценка вектора состояния $\hat{\theta}(k)$ используется в уравнении (4.1), то решение задачи фильтрации наблюдений предварительно должно быть получено и сохранено в памяти электронной вычислительной машины (ЭВМ) для использования при сглаживании измерительной информации.

Вычисление дисперсии ошибки сглаживания с фиксированным интервалом также требует знания дисперсии ошибки фильтрации. Так как уравнение (4.2) требуется решить в обратном направлении по времени, то необходимо предварительно вычислить и запомнить значения дисперсий $\gamma_{\hat{\theta}}(k)$ и $\gamma_{\hat{\theta}}(k, k-1)$.

Таким образом, рассмотренный алгоритм сложен в реализации и практически не используется в практике испытаний сложных технических комплексов.

Аналогичный алгоритм сглаживания приведен и в монографии И.Н. Сеницына [79].

В работах отечественных ученых Р.Ш. Липцера и А.Н. Ширяева [48, 104, 105] была обобщена теория динамической фильтрации для получения сглаженных оценок вектора состояния дискретной стохастической системы на моменты времени поступления измерений. Данные алгоритмы основаны на использовании прямых и обратных уравнений фильтрации и также очень сложны для реализации на ЭВМ.

Следует отметить, что во всех этих работах не были в достаточной степени рассмотрены вопросы интерполяции оценок вектора состояния стохастической системы на произвольный момент времени внутри интервала регистрации первичной траекторной измерительной информации, что не позволяло получать высокоточное сглаживание при большом периоде следования траекторных измерений.

Таким образом, существующие алгоритмы сглаживания обладают рядом серьезных недостатков, основными из которых являются следующие:

громоздкость в вычислениях и сложность для практического применения;

ввод в алгоритмы исходной априорной информации о вероятностных характеристиках исследуемых случайных процессов затруднен в связи с отсутствием эффективных моделей идентификации параметров рекуррентных стохастических уравнений, описывающих эти процессы;

сохраняется проблема определения начальных значений оцениваемого вектора состояния в уравнениях фильтрации, что приводит к неоптимальной работе фильтра Калмана и дополнительным погрешностям при получении сглаженных оценок параметров движения ЛА.

Преодолеть отмеченные недостатки позволил предлагаемый метод оценивания параметров движения ЛА, который основан на разработанных авторами положениях теории оценки точности траекторных измерительных систем, идее «встречной» фильтрации и предлагаемом методе определения начальных значений оцениваемого вектора состояния динамической модели движения ЛА в уравнениях фильтрации.

Идея «встречной» фильтрации была разработана в трудах Р. Мехра, А. Вилски, Дж. Волла [114, 117]. Метод «встречной» фильтрации основан на использовании прямого и обратного фильтров Калмана, которые фильтруют информацию соответственно в прямом и обратном направлениях с получением независимых оценок, которые далее объединяются специальным образом.

4.1.2. Структура метода получения сглаженных оценок параметров движения ЛА по информации многоканальных траекторных измерений

На рис. 4.1 приведена структурная схема, поясняющая предлагаемый метод получения сглаженных оценок вектора параметров движения ЛА. Рассматриваемый метод получения сглаженных оценок параметров движения ЛА обладает следующими возможностями:

позволяет учитывать всю априорную информацию о вероятностных характеристиках исследуемых процессов;

имеется возможность рассчитывать начальные значения вектора состояния в уравнениях фильтра Калмана как при прямой, так и при обратной фильтрации измерительной информации;

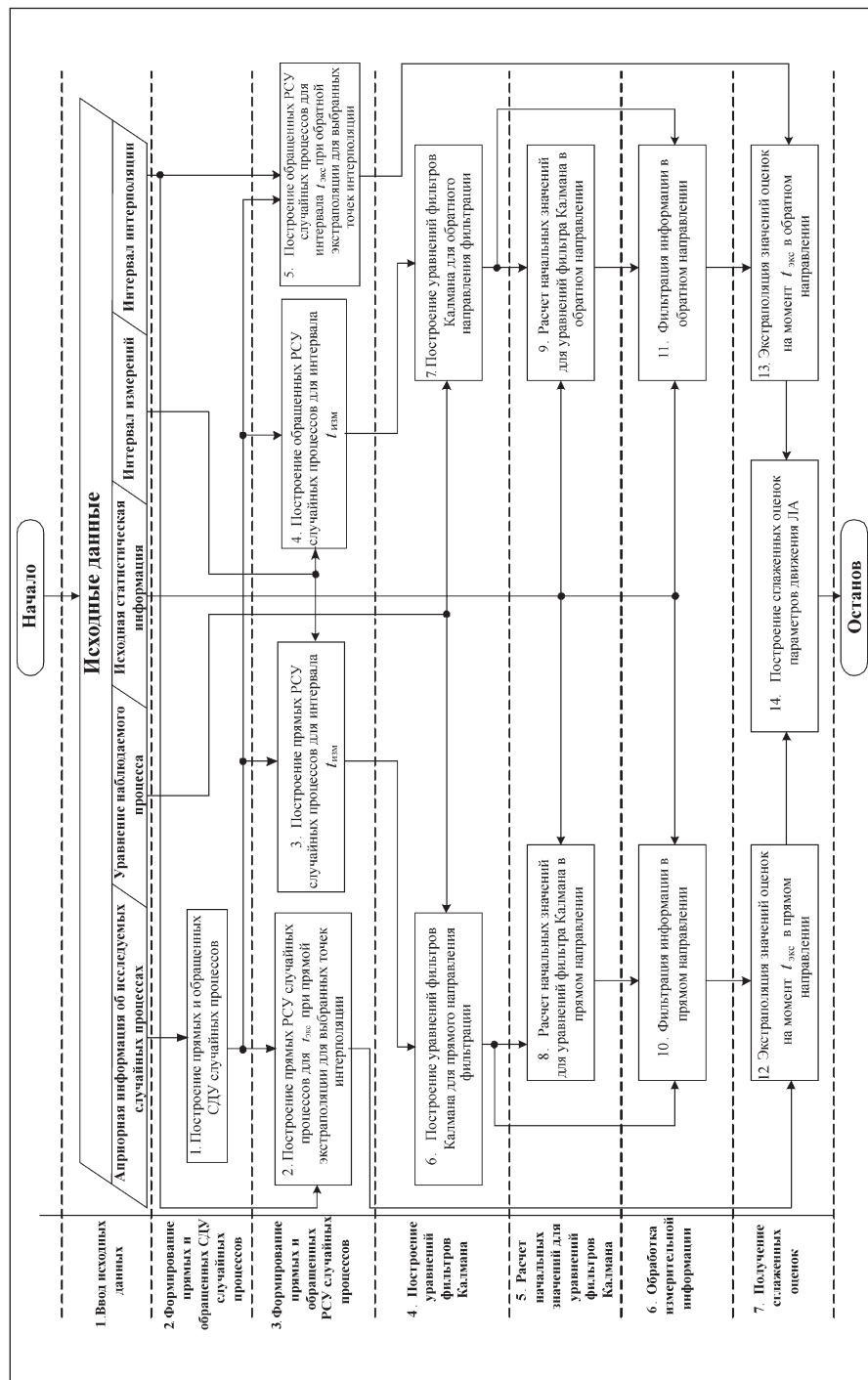


Рис. 4.1. Структура метода получения сглаженных оценок параметров движения ЛА с использованием динамической фильтрации

позволяет получить сглаженные оценки вектора параметров движения ЛА на моменты времени поступления измерительной информации, а также сглаженные интерполированные значения оцениваемого вектора в заданные моменты времени внутри интервала измерений.

В основу рассматриваемого алгоритма оценки условного математического ожидания вектора параметров движения ЛА на заданный момент времени t положена идея «встречной» фильтрации, основанная на известной в математической статистике теореме, рассмотренной в разд. 1. Суть этой теоремы заключается в том, что если для искомого вектора $\theta(t)$ имеются две независимые оценки $\hat{\theta}_1(t)$ и $\hat{\theta}_2(t)$ с ковариационными матрицами $\gamma_{\hat{\theta}_1}(t)$ и $\gamma_{\hat{\theta}_2}(t)$ соответственно, то обобщенная оценка этого вектора $\hat{\theta}_3(t)$ строится по формуле

$$\hat{\theta}_3(t) = \gamma_{\hat{\theta}_3}(t) \cdot [\gamma_{\hat{\theta}_1}^{-1}(t) \cdot \hat{\theta}_1(t) + \gamma_{\hat{\theta}_2}^{-1}(t) \cdot \hat{\theta}_2(t)],$$

где $\gamma_{\hat{\theta}_3}(t)$ — ковариационная матрица результирующей оценки, определяемая по формуле $\gamma_{\hat{\theta}_3}(t) = [\gamma_{\hat{\theta}_1}^{-1}(t) + \gamma_{\hat{\theta}_2}^{-1}(t)]^{-1}$.

Весь алгоритм, реализующий метод получения сглаженных оценок вектора параметров движения ЛА по информации многоканальных траекторных измерений, можно разделить на следующие семь основных процедур, представленных в виде отдельных уровней:

ввод исходных данных, в качестве которых используются априорная информация о значениях вероятностных характеристик исследуемых случайных процессов, вид уравнения наблюдения траекторной измерительной системы, интервалы поступления траекторных измерений и интерполяции получаемых оценок, а также исходная траекторная измерительная информация, подлежащая статистической обработке;

формирование матриц прямых и обращенных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) исследуемых случайных процессов по исходной априорной информации о значениях вероятностных характеристик этих процессов;

идентификация параметров прямых и обращенных рекуррентных стохастических уравнений (РСУ) исследуемых случайных процессов по сформированным матричным коэффициентам стохастических дифференциальных уравнений;

построение уравнений фильтров Калмана для прямого и обратного направлений фильтрации;

расчет начальных значений оцениваемого вектора параметров движения ЛА в уравнениях фильтрации для прямого и обратного направлений фильтрации;

непосредственная фильтрация исходной статистической траекторной измерительной информации в прямом и обратном направлениях;

построение условных математических ожиданий оцениваемого вектора параметров движения ЛА по всей собранной траекторной измерительной информации с использованием разработанных соотношений, позволяющих объединять независимые оценки, полученные при прямой и обратной фильтрациях траекторных измерений, а также проводить интерполяцию оценок вектора параметров движения ЛА внутри интервала измерения.

Рассмотрим предлагаемый метод получения сглаженных оценок параметров движения ЛА с использованием аппарата динамической фильтрации, поясняя алгоритмы и процедуры, показанные на рис. 4.1.

4.1.3. Процедура построения прямых и обращенных стохастических дифференциальных уравнений, описывающих непрерывные во времени случайные процессы

Процедура построения прямых и обращенных стохастических дифференциальных уравнений непрерывных во времени случайных процессов основывается на подходе, изложенном в разд. 1.

Предложенный выше алгоритм получения сглаженных оценок параметров движения ЛА основывается на возможности представления реакции линейных формирующих фильтров на процесс белого шума в виде решения стохастического дифференциального уравнения, записанного в математически корректной интегральной форме [13, 44, 68]. При этом рассматриваются два вида уравнений. Первый вид уравнений — это прямые СДУ, описывающие исследуемый случайный векторный процесс $\mathbf{y}(t)$ в прямом направлении времени: от 0 до t , следующего вида:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\alpha}_{yf} \cdot \mathbf{y}(s) ds + \int_0^t \boldsymbol{\beta}_{yf} \cdot d\mathbf{W}_{f(s)}, \quad (4.3)$$

где $\mathbf{y}(0)$ — начальное значение описываемого случайного процесса; $\boldsymbol{\alpha}_{yf}$, $\boldsymbol{\beta}_{yf}$ — квадратные матрицы постоянных коэффициентов; $\mathbf{W}_{f(s)}$ — векторный винеровский случайный процесс.

Второй вид уравнений — это система обращенных СДУ исследуемого случайного векторного процесса $\mathbf{y}(t)$ в обратном направлении времени: от T до t ($T > t$) следующего вида:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(T) + \int_T^t \boldsymbol{\alpha}_{yr} \cdot \mathbf{y}(s) ds + \int_T^t \boldsymbol{\beta}_{yr} \cdot d\mathbf{W}_{r(s)}, \quad (4.4)$$

где $\mathbf{y}(T)$ — значение описываемого случайного процесса в момент времени T ; $\boldsymbol{\alpha}_{yr}$, $\boldsymbol{\beta}_{yr}$ — квадратные матрицы постоянных коэффициентов; $\mathbf{W}_{r(s)}$ — обращенный векторный винеровский случайный процесс.

Уравнение (4.3) определяет статистическую зависимость текущего значения процесса от его предыдущих значений, а уравнение (4.4) — от последующих значений. Для краткости дальнейшего изложения будем использовать двойную индексацию компонент этих уравнений. Так, первый индекс будет обозначать сам случайный процесс, который описывается стохастическим дифференциальным уравнением, а второй индекс — направление СДУ, в котором описывается случайный процесс (индекс « f » — случайный процесс описывается в прямом направлении, а « r » — в обратном направлении). Это позволяет при изложении материала использовать переменные индексы для направлений интегрирования ($\partial \in \{f, r\}$) рассматриваемых случайных процессов. Когда используется уравнение с индексом « ∂ », то это означает, что нужно рассматривать два уравнения: одно с индексом « f », а другое с индексом « r ». Тогда уравнения (4.3) и (4.4) для N -мерного случайного процесса можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(\varphi(\partial)) + \int_{\varphi(\partial)}^t \boldsymbol{\alpha}_{y\partial} \cdot \mathbf{y}(s) ds + \int_{\varphi(\partial)}^t \boldsymbol{\beta}_{y\partial} \cdot d\mathbf{W}_{\partial(s)}, \quad (4.5)$$

где $\varphi(\partial)$ — символьная функция со значениями $\varphi(f) = 0$ или $\varphi(r) = T$; $\mathbf{y}(t) = \{y_j(t)\}^N$ — случайный N -мерный векторный процесс; $\mathbf{W}_{\partial}(t) = \{w_{\partial j}(t)\}^N$ — векторный N -мерный винеровский процесс, состоящий из независимых одномерных винеровских процессов, производные от которых понимаются как белый шум; $\boldsymbol{\alpha}_{y\partial}$, $\boldsymbol{\beta}_{y\partial}$ — квадратные матрицы постоянных коэффициентов размерностью $(N \times N)$.

При построении прямых и обращенных стохастических дифференциальных уравнений для непрерывных во времени случайных процессов необходимо учитывать следующее:

1. Решение уравнений вида (4.5) имеет вид [48]

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}_{y\partial}(t) \cdot \left[\mathbf{y}(\psi(\partial)) + \int_{\varphi(\partial)}^t \mathbf{F}_{y\partial}^{-1}(s) \cdot \boldsymbol{\beta}_{y\partial} \cdot d\mathbf{W}_{\partial(s)} \right], \quad (4.6)$$

где $\mathbf{F}_{y\partial}(t)$ — фундаментальная матрица, представляющая собой решение матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{F}_{y\partial}(t)}{dt} = \boldsymbol{\alpha}_{y\partial} \cdot \mathbf{F}_{y\partial}(t) \quad (4.7)$$

с начальным условием $\mathbf{F}_{y\partial}(\varphi(\partial)) = \mathbf{I}$. При этом величина $\psi(\partial) = (k-1)$ при $\partial = f$ и $\psi(\partial) = (k+1)$ при $\partial = r$.

2. Математические ожидания случайных процессов определяются в соответствии с формулой

$$M(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{F}_{y\partial}(t) \cdot M(\mathbf{y}(\psi(\partial))). \quad (4.8)$$

3. Ковариационные матрицы процессов $\boldsymbol{\gamma}_{y\partial}(t) = M(\mathbf{y}(t) \cdot \mathbf{y}^T(t))$ определяются как решение матричных дифференциальных уравнений Ляпунова

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}_{y\partial}(t)}{dt} = \boldsymbol{\alpha}_{y\partial} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{y\partial}(t) + \boldsymbol{\gamma}_{y\partial}(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}_{y\partial}^T + \boldsymbol{\beta}_{y\partial} \cdot \boldsymbol{\beta}_{y\partial}^T \quad (4.9)$$

с начальным условием $\boldsymbol{\gamma}_{y\partial}(\varphi(\partial)) = 0$.

4. Элементы матриц $\boldsymbol{\alpha}_y$ и $\boldsymbol{\beta}_y$ в случае независимых компонент N -мерного процесса $\mathbf{y}(t)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_y &= \text{diag}[-T_{y_1}^{-1} \dots -T_{y_n}^{-1} \dots -T_{y_N}^{-1}]; \\ \boldsymbol{\beta}_y &= \text{diag} \left[\sqrt{\frac{2\sigma_{y_1}^2}{T_{y_1}}} \dots \sqrt{\frac{2\sigma_{y_n}^2}{T_{y_n}}} \dots \sqrt{\frac{2\sigma_{y_N}^2}{T_{y_N}}} \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\sigma_{y_n}^2$, T_{y_n} — дисперсия и время корреляции соответственно n -й компоненты случайного процесса $\mathbf{y}(t)$.

Как показано в разд. 1, если уравнения (4.3) и (4.4) описывают один и тот же процесс, то между ними существует взаимосвязь [48] в виде следующих формул представления матричных коэффициентов обращенных стохастических дифференциальных уравнений через матрицы коэффициентов прямых СДУ:

$$\alpha_{yr} = -\alpha_{yf} + \beta_{yf} \cdot \beta_{yf}^T \cdot \gamma_{y\infty}^T; \quad \beta_{yr} = \beta_{yf}, \quad (4.11)$$

где $\gamma_{y\infty}$ — стационарное значение ковариационной матрицы $\gamma_y(t)$, которая является решением алгебраического уравнения Ляпунова вида

$$\alpha_{yf} \cdot \gamma_{yf}(t) + \gamma_{yf}(t) \cdot \alpha_{yf}^T + \beta_{yf} \cdot \beta_{yf}^T = 0. \quad (4.12)$$

Расчет параметров исходных СДУ по априорной статистической информации проводится в соответствии с выражением (4.10).

Таким образом, исходными данными обобщенного алгоритма построения прямых и обращенных СДУ случайных процессов являются матрицы α_y и β_y постоянных коэффициентов, а результатом выполнения алгоритма — матрицы $\alpha_{y\partial}$ и $\beta_{y\partial}$ уравнения (4.5).

На первом шаге алгоритма построения прямых и обращенных СДУ формируются матрицы прямого СДУ в соответствии с формулами

$$\alpha_{yf} = \alpha_y; \quad \beta_{yf} = \beta_y. \quad (4.13)$$

Далее решается алгебраическое матричное уравнение Ляпунова (4.12) и определяется ковариационная матрица исследуемого процесса $\gamma_{y\infty}$.

Известно, что такое уравнение Ляпунова разрешено только в случаях, когда собственные числа матрицы α_{yf} лежат в отрицательной полуплоскости [8]. Если это условие не выполняется, то необходимо скорректировать описание исходных стохастических дифференциальных уравнений.

На третьем шаге алгоритма формируются матрицы обращенных СДУ согласно формулам (4.11).

4.1.4. Процедура построения прямых и обращенных рекуррентных стохастических уравнений, описывающих дискретные случайные процессы

Поскольку первичные траекторные измерения представляют собой, как правило, дискретные во времени случайные процессы, то возникает необходимость их адекватного описания соответствующим

щими математическими моделями. В качестве таких моделей в предлагаемом алгоритме использованы рекуррентные стохастические уравнения.

Подробный алгоритм перехода от стохастических дифференциальных уравнений к рекуррентным стохастическим уравнениям приведен в разд. 1.

Приведем обобщенный алгоритм такого перехода применительно к двум рассматриваемым стохастическим уравнениям: прямым и обратным.

Как показано в разд. 1, для случайного процесса имеется возможность описать в рекуррентном виде взаимосвязь значений процесса в моменты времени, разнесенные на интервал дискретизации Δt :

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{a}_{y\partial}(\Delta t) \cdot \mathbf{y}(\psi(\partial)) + \mathbf{b}_{y\partial}(\Delta t) \cdot \mathbf{e}_{y\partial}(k), \quad (4.14)$$

где $\mathbf{e}_{y\partial}(k)$ — последовательность гауссовых векторов с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (векторный процесс белого шума); $\mathbf{a}_{y\partial}(\Delta t)$, $\mathbf{b}_{y\partial}(\Delta t)$ — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами.

Из решений уравнений (4.7) и (4.9) вытекают следующие формулы для определения матриц рекуррентного стохастического уравнения (4.14):

$$\mathbf{a}_{y\partial}(\Delta t) = \mathbf{F}_{y\partial}(\Delta t), \quad (4.15)$$

$$\mathbf{b}_{y\partial}(\Delta t) \cdot \mathbf{b}_{y\partial}^T(\Delta t) = \mathbf{\gamma}_{y\partial}(\Delta t). \quad (4.16)$$

Таким образом, исходными данными в алгоритме построения прямых и обращенных рекуррентных стохастических уравнений являются матрицы $\mathbf{a}_{y\partial}$ и $\mathbf{b}_{y\partial}$ уравнения (4.5), а результатом выполнения алгоритма — матрицы $\mathbf{a}_{y\partial}(\Delta t)$ и $\mathbf{b}_{y\partial}(\Delta t)$ уравнения (4.14).

На первом шаге алгоритма построения прямых и обращенных РСУ формируются два типа (прямые и обращенные) матричных дифференциальных уравнений вида (4.3) и (4.4), матрицы которых входят в уравнение (4.7) для фундаментальной матрицы $\mathbf{F}_{y\partial}(t)$, а также в матричное дифференциальное уравнение Ляпунова (4.9).

На втором шаге алгоритма решаются сформированные на первом шаге уравнения для заданного интервала дискретизации, т.е. находятся матрицы $\mathbf{F}_{y\partial}(\Delta t)$ и $\mathbf{\gamma}_{y\partial}(\Delta t)$.

На третьем шаге проводится оценка матрицы $\mathbf{a}_{y\partial}(\Delta t)$ по формуле (4.15) и матрицы $\mathbf{b}_{y\partial}(\Delta t)$ путем решения уравнения (4.16).

4.1.5. Процедура построения уравнений экстраполяции, описывающих случайные процессы траекторных измерений

Из уравнения для математического ожидания случайного процесса (4.8), матричного дифференциального уравнения Ляпунова (4.9) и формулы (4.16) вытекают формулы экстраполяции значений условного математического ожидания $\mathbf{m}_{yf}^3(t^3)$ и ковариационной матрицы $\mathbf{y}_{yf}^3(t^3)$ оцениваемого случайного процесса от исходного момента времени t_k на произвольный момент времени t^3 с интервалом экстраполяции Δt_3

$$\mathbf{m}_{y\partial}^3(t_\partial^3) = \mathbf{F}_{y\partial}(\Delta t_3) \cdot \mathbf{m}_{y\partial}(t_k), \quad (4.17)$$

$$\mathbf{y}_{y\partial}^3(t_\partial^3) = \mathbf{F}_{y\partial}(\Delta t_3) \cdot \mathbf{y}_{y\partial}(t_k) \cdot \mathbf{F}_{y\partial}^T(\Delta t_3) + \mathbf{y}_{y\partial}(\Delta t_3), \quad (4.18)$$

где $t_f^3 = t_k + \Delta t_3$; $t_r^3 = t_k - \Delta t_3$; t_k — опорный дискретный момент времени.

Рассмотрим алгоритм оценки экстраполированных значений условного математического ожидания $\mathbf{m}_{yf}^3(t^3)$ и ковариационной матрицы $\mathbf{y}_{yf}^3(t^3)$ случайного вектора $\mathbf{y}(t)$.

Исходными данными алгоритма построения уравнений экстраполяции, описывающих исследуемые случайные процессы траекторных измерений, являются матрицы $\mathbf{a}_{y\partial}$, $\mathbf{b}_{y\partial}$ уравнения (4.5), а его результатом — матрицы $\mathbf{F}_{y\partial}(\Delta t_3)$ и $\mathbf{y}_{y\partial}(\Delta t_3)$ уравнений (4.17) и (4.18).

На первом шаге алгоритма формируются матричные дифференциальные уравнения (4.7) и (4.9) по матрицам исходных стохастических дифференциальных уравнений (4.5).

Второй шаг алгоритма связан с решением сформированных на первом шаге уравнений для заданного интервала экстраполяции Δt_3 и определением матриц $\mathbf{F}_{y\partial}(\Delta t_3)$ и $\mathbf{y}_{y\partial}(\Delta t_3)$.

Если шаг экстраполяции равен интервалу регистрации измерений Δt , то уравнения экстраполяции можно представить через компоненты дискретного представления процесса в следующем виде [13, 68]:

$$\mathbf{m}_{p\partial}^3(k) = \mathbf{a}_{p\partial}(\Delta t) \cdot \mathbf{m}_{p\partial}(\psi(\partial));$$

$$\mathbf{y}_{p\partial}^3(k) = \mathbf{a}_{p\partial}(\Delta t) \cdot \mathbf{y}_{p\partial}(\psi(\partial)) \cdot \mathbf{a}_{p\partial}^T(\Delta t) + \mathbf{b}_{p\partial}(\Delta t) \cdot \mathbf{b}_{p\partial}^T(\Delta t);$$

$$p \in \{\theta, \eta\}.$$

Эти уравнения часто называются алгоритмами прямой и обратной экстраполяции процессов $\theta(k), \eta(k)$ на один временной интервал измерений Δt .

4.1.6. Процедура построения уравнений фильтров Калмана в прямом и обратном направлениях фильтрации дискретной измерительной информации

Построение уравнений фильтров Калмана для прямой и обратной фильтрации измерительной информации проведем на основе теоретических выкладок, приведенных в разд. 1.

Для существующих траекторных измерительных систем можно считать, что каждую компоненту N -мерного наблюдаемого случайного процесса измерений $\xi_n(t)$ можно описать линеаризованным уравнением наблюдения вида

$$\xi_n(t) = A_{0n} + \mathbf{H}_n(t) \cdot \boldsymbol{\theta}(t) + \eta_n(t); \quad n = \overline{1, N},$$

где A_{0n} — начальное значение n -й компоненты наблюдаемого процесса траекторных измерений; $\mathbf{H}_n(t)$ — вектор-строка, состоящая из частных производных первичных измеряемых параметров по оцениваемым параметрам движения ЛА, которые можно считать постоянными на ограниченном участке траектории полета ЛА; $\boldsymbol{\theta}(t)$ — оцениваемый вектор параметров движения ЛА; $\eta_n(t)$ — погрешность измерения n -го измерительного канала средства траекторных измерений.

Дискретный N -мерный наблюдаемый векторный процесс измерений $\xi(k)$ всех средств ТИ, участвующих в натурном эксперименте, может быть представлен в виде

$$\xi(k) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{H}(k) \cdot \boldsymbol{\theta}(k) + \boldsymbol{\eta}(k), \quad (4.19)$$

где $\mathbf{A}_0$ — вектор начального значения наблюдаемого векторного процесса траекторных измерений; $\mathbf{H}(k)$ — матрица частных производных первичных параметров, измеряемых средствами ТИ, по оцениваемым параметрам движения ЛА; $\boldsymbol{\theta}(k)$ — оцениваемый дискретный вектор параметров движения ЛА; $\boldsymbol{\eta}(k)$ — вектор погрешностей измерения средствами ТИ.

При построении рекуррентных уравнений для условного математического ожидания вектора оцениваемых параметров движения ЛА необходимо иметь уравнения для наблюдаемого процесса $\xi(k)$ [48, 105]. Уравнение для наблюдаемого процесса $\xi(k)$ в соответствии с соотношениями, приведенными в разд. 1, имеет вид

$$\xi(k) = \mathbf{A}_{0\partial}(k) + \mathbf{A}_{1\partial} \cdot \theta(\psi(\partial)) + \mathbf{B}_{\theta\partial}(k) \cdot \mathbf{e}_{\theta\partial}(k) + \mathbf{B}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{e}_{\eta\partial}(k), \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0\partial}(k) &= \mathbf{a}_{\eta\partial} \cdot \xi(\psi(\partial)); \\ \mathbf{A}_{1\partial}(k) &= \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a}_{\theta\partial} - \mathbf{a}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{H}(k); \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{B}_{\theta\partial}(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b}_{\theta\partial}; \quad \mathbf{B}_{\eta\partial} = \mathbf{b}_{\eta\partial}. \quad (4.22)$$

Отметим, что для компонент уравнения (4.20) имеют место тождества

$$\mathbf{B}_{1\partial} \cdot \mathbf{B}_{1\partial}^T = \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b}_{\theta\partial} \cdot \mathbf{b}_{\theta\partial}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \gamma_{\theta\partial}(\Delta t) \cdot \mathbf{H}^T(k);$$

$$\mathbf{b}_{\theta\partial} \cdot \mathbf{B}_{\theta\partial}^T(k) = \mathbf{b}_{\theta\partial} \cdot \mathbf{b}_{\theta\partial}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) = \gamma_{\theta\partial}(\Delta t) \cdot \mathbf{H}^T(k);$$

$$\mathbf{B}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{B}_{\eta\partial}^T = \mathbf{b}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{b}_{\eta\partial}^T = \gamma_{\eta\partial}(\Delta t),$$

где Δt — период повторения измерительной информации.

Согласно соотношениям, полученным в разд. 1, при принятых обозначениях теорема об условном математическом ожидании оцениваемого вектора искомых параметров формулируется следующим образом [48]: если уравнения для частично наблюдаемого процесса (θ, ξ) имеют вид

$$\theta(k) = \mathbf{a}_{\theta\partial} \cdot \theta(\psi(\partial)) + \mathbf{b}_{\theta\partial} \cdot \mathbf{e}_{\theta\partial}(k), \quad (4.23)$$

$$\xi(k) = \mathbf{A}_{0\partial}(k) + \mathbf{A}_{1\partial}(k) \cdot \theta(\psi(\partial)) + \mathbf{B}_{\theta\partial}(k) \cdot \mathbf{e}_{\theta\partial}(k) + \mathbf{B}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{e}_{\eta\partial}(k),$$

где $\xi(k)$ — наблюдаемая компонента случайного процесса ТИ; $\theta(k)$ — ненаблюдаемая компонента случайного процесса, то уравнения для условных математических ожиданий случайных процессов $\theta(k)$ и $\eta(k)$, которые определяются по обработанной траекторной измерительной информации, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\theta\partial}(k) &= \mathbf{a}_{\theta\partial} \cdot \mathbf{m}_{\theta\partial}(\psi(\partial)) + \mathbf{K}_{\theta\partial}(k) \cdot [\xi(k) - \mathbf{A}_{1\partial}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta\partial}(\psi(\partial))]; \\ \mathbf{m}_{\eta\partial}(k) &= \xi(k) - \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta\partial}(k); \\ \mathbf{K}_{\theta\partial}(k) &= \mathbf{G}_{\theta\partial}(k) \cdot \mathbf{S}_{\theta\partial}^{-1}(k); \\ \mathbf{G}_{\theta\partial}(k) &= [\mathbf{b}_{\theta\partial} \cdot \mathbf{B}_{\theta\partial}^T(k) + \mathbf{a}_{\theta\partial} \cdot \gamma_{\theta\partial}(\psi(\partial, k)) \cdot \mathbf{A}_{1\partial}^T(k)]; \\ \mathbf{S}_{\theta\partial}(k) &= [\mathbf{B}_{\theta\partial}(k) \cdot \mathbf{B}_{\theta\partial}^T(k) + \mathbf{B}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{B}_{\eta\partial}^T + \mathbf{A}_{1\partial}(k) \cdot \gamma_{\theta\partial}(\psi(\partial, k)) \cdot \mathbf{A}_{1\partial}^T(k)]; \\ \gamma_{\theta\partial}(k) &= \mathbf{a}_{\theta\partial} \cdot \gamma_{\theta\partial}(\psi(\partial, k)) \cdot \mathbf{a}_{\theta\partial}^T + \mathbf{b}_{\theta\partial} \cdot \mathbf{b}_{\theta\partial}^T - \mathbf{G}_{\theta\partial}(k) \cdot \mathbf{S}_{\theta\partial}^{-1}(k) \cdot \mathbf{G}_{\theta\partial}^T(k). \end{aligned} \quad (4.24)$$



Исходными данными в алгоритме построения уравнений фильтров Калмана в прямом и обратном направлениях являются матрица $\mathbf{H}(k)$ частных производных измеряемых средствами ТИ параметров по компонентам вектора оцениваемых параметров движения ЛА, входящая в уравнение (4.19), и матрицы $\mathbf{a}_{\theta\partial}$, $\mathbf{b}_{\theta\partial}$, входящие в рекуррентное стохастическое уравнение вида (4.14). Результатом выполнения алгоритма является матрица коэффициента усиления фильтра $\mathbf{K}_{\theta\partial}(k)$, входящая в уравнения (4.24).

На первом шаге алгоритма определения условных математических ожиданий случайных процессов $\theta(k)$ и $\eta(k)$ формируются компоненты $\mathbf{A}_{1\partial}(k)$, $\mathbf{B}_{\theta\partial}(k)$, $\mathbf{B}_{\eta\partial}$ по формулам (4.21) и (4.22) для уравнения (4.20). Далее проводятся расчеты по формулам (4.24).

Если интервал дискретизации Δt устремить в бесконечность, то из условия устойчивости случайных процессов следует, что $\|\mathbf{a}_{\theta\partial}\|_E \rightarrow 0$ и система уравнений (4.23) примет вид

$$\begin{aligned}\theta(k) &= \mathbf{b}_{\theta e} \cdot \mathbf{e}_{\theta e}(k); \\ \xi(k) &= \mathbf{B}_{\theta e}(k) \cdot \mathbf{e}_{\theta e}(k) + \mathbf{B}_{\eta e} \cdot \mathbf{e}_{\eta e}(k),\end{aligned}\tag{4.25}$$

где $\mathbf{B}_{\theta e}(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b}_{\theta e}$; $\mathbf{B}_{\eta e} = \mathbf{b}_{\eta e}$; $\mathbf{B}_{\theta e}(k) \cdot \mathbf{B}_{\theta e}^T(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b}_{\theta e} \cdot \mathbf{b}_{\theta e}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \beta_{\theta\infty} \cdot \mathbf{H}^T(k)$; $\mathbf{b}_{\theta e} \cdot \mathbf{B}_{\theta e}^T(k) = \mathbf{b}_{\theta e} \cdot \mathbf{b}_{\theta e}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) = \gamma_{\theta\infty} \cdot \mathbf{H}^T(k)$; $\mathbf{B}_{\eta e} \cdot \mathbf{B}_{\eta e}^T = \mathbf{b}_{\eta e} \cdot \mathbf{b}_{\eta e}^T = \gamma_{\eta\infty}$.

Применив к системе уравнений (4.25) формулы для условных математических ожиданий оцениваемых процессов (4.24), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_{\theta e}(k) &= \mathbf{K}_{\theta e}(k) \cdot \xi(k); \\ \mathbf{m}_{\eta e}(k) &= \xi(k) - \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta e}(k); \\ \mathbf{K}_{\theta e}(k) &= \mathbf{G}_{\theta e}(k) \cdot \mathbf{S}_{\theta e}^{-1}(k); \\ \mathbf{G}_{\theta e}(k) &= \mathbf{b}_{\theta e} \cdot \mathbf{B}_{\theta e}^T(k); \\ \mathbf{S}_{\theta e}(k) &= \mathbf{B}_{\theta e}(k) \cdot \mathbf{B}_{\theta e}^T(k) + \mathbf{B}_{\eta e} \cdot \mathbf{B}_{\eta e}^T; \\ \gamma_{\theta e}(k) &= \gamma_{\theta\infty} - \mathbf{G}_{\theta e}(k) \cdot \mathbf{S}_{\theta e}^{-1}(k) \cdot \mathbf{G}_{\theta e}^T(k).\end{aligned}\tag{4.26}$$

Система уравнений (4.26) обычно трактуется как алгоритм оценивания основного и дополнительного процессов для случая, когда известны только стационарные ковариационные матрицы этих процессов $\gamma_{\theta\infty}$ и $\gamma_{\eta\infty}$, а также результаты измерений в один фиксированный момент времени t_k (единичная фильтрация).

4.1.7. Методический подход к расчету начальных значений вектора оцениваемых параметров в уравнениях фильтра Калмана для прямой и обратной фильтрации траекторных измерений

При построении практически реализуемых алгоритмов оценки параметров движения летательных аппаратов методами динамической фильтрации важное значение имеет правильный расчет начальных значений вектора состояния динамической модели исследуемого процесса в уравнениях фильтра Калмана. Проблема заключается в том, что при обработке траекторных измерений с произвольно выбранного участка траектории полета ЛА не имеется априорной информации о начальных значениях вектора θ_0 оцениваемых параметров движения ЛА в уравнении фильтра Калмана, а при использовании в расчетах произвольных начальных значений этого вектора наблюдаются существенные ошибки фильтрации на достаточно больших начальных интервалах обработки траекторных измерений. Эта проблема неоднократно отмечалась в научно-технической литературе [35, 48, 77] и нередко приводила к сужению области практического применения алгоритмов динамической фильтрации при обработке статистической траекторной измерительной информации.

Рассматриваемая проблема еще более усугубляется [64, 77] в случае реализации алгоритмов сглаживания с использованием «встречной» фильтрации, когда необходимо проводить фильтрацию траекторной информации как в прямом, так и в обратном направлениях. Отсутствие априорной информации о начальных значениях вектора параметров движения ЛА может привести к двойным ошибкам в оценке этого вектора как при прямой, так и при обратной фильтрации исходной измерительной информации.

Исследования показали [64], что имеется возможность достаточно точно оценить начальные значения вектора состояния динамической модели исследуемого процесса по специально разработанному алгоритму, используя статистическую информацию о результатах обработки траекторных измерений с произвольным начальным значением оцениваемого вектора $\theta(k)$. В основе разработанного методического подхода лежит функция правдоподобия, учитывающая априорную информацию о значениях вероятностных характеристик вектора состояния динамической модели оцениваемого процесса (θ_0) и шума траекторных измерений (η_0) в начальный момент времени получения измерений ($k=0$), учитывающая вектор значений невязок $v(k)$ ($k=\overline{0, K}$) между вектором реальных измерений $\xi(k)$, поступивших в моменты времени

$t = k$ ($k = \overline{0, K}$), размерностью M и прогнозами измерений на эти же моменты времени, а также вектор значений невязок $\lambda(k)$ ($k = \overline{0, K}$) между вектором $\eta(k)$ реальных значений шума измерений, поступивших в моменты времени $t = k$ ($k = \overline{0, K}$), размерностью M и прогнозами значений шума измерений на эти же моменты времени.

Алгоритм расчета начальных значений вектора оцениваемых параметров в уравнениях фильтра Калмана

Для удобства изложения введем ряд обозначений. Так, если дискретные моменты времени поступления информации ($k = \overline{0, K}$) обозначить $\psi(\partial)$, то при прямой фильтрации $\psi(f) = k - 1$, а при обратной фильтрации $\psi(r) = k + 1$. Если для случая «встречной» фильтрации траекторных измерений начальный момент времени поступления измерений обозначить через φ , то при прямой фильтрации $\varphi = 0$, а при обратной фильтрации $\varphi = K$.

Разработанный методический подход к определению начальных значений оцениваемого вектора $\theta_{\varphi\partial}$ параметров движения ЛА в уравнениях «встречной» фильтрации по статистической информации о траекторных измерениях основан на использовании метода максимального правдоподобия. Функция правдоподобия для условного математического ожидания $\mathbf{m}_{\theta\partial}(\psi(\partial))$ оцениваемого вектора $\theta_{\varphi\partial}$ размерностью N была построена на основе следующих свойств вектора невязок $\mathbf{v}_{\partial}(k)$ между реальными измерениями $\xi(k)$ и прогнозом измерений в уравнениях фильтрации, а также свойств вектора невязок $\lambda_{\partial}(k)$ между реальными значениями шума измерений $\eta(k)$ и прогнозом значений шума измерений на одни и те же моменты времени [48, 64, 77]:

случайные процессы, описывающие изменение векторов $\mathbf{v}_{\partial}(k)$ и $\lambda_{\partial}(k)$ во времени, имеют нормальное распределение;

математические ожидания процессов, описывающих изменение векторов $\mathbf{v}_{\partial}(k)$ и $\lambda_{\partial}(k)$ во времени, равны нулю: $M(\mathbf{v}_{\partial}(k)) = 0$, $M(\lambda_{\partial}(k)) = 0$;

векторы невязок прогноза измерений для различных моментов времени между собой независимы: $M(\mathbf{v}_{\partial}(k_i) \cdot \mathbf{v}_{\partial}^T(k_j)) = 0$ для $i \neq j$;

векторы невязок между реальным значением шума измерений $\eta(k)$ и прогнозом значения шума измерений для различных моментов времени между собой независимы: $M(\lambda_{\partial}(k_i) \cdot \lambda_{\partial}^T(k_j)) = 0$ для $i \neq j$.

При разработке алгоритма определения начальных значений оцениваемого вектора параметров движения ЛА учитывалось, что условное математическое ожидание $\mathbf{m}_{\theta\partial}(k)$ исследуемого процесса

$\theta(k)$ и вектор невязок прогноза измерений описываются соответственно выражениями

$$\mathbf{m}_{\theta\partial}(k) = \mathbf{a}_{\theta\partial} \cdot \mathbf{m}_{\theta\partial}(\psi(\partial)) + \mathbf{K}_{\theta\partial} \cdot [\xi_{\partial}(k) - \mathbf{A}_{1\partial} \cdot \mathbf{m}_{\theta\partial}(\psi(\partial))], \quad (4.27)$$

$$\mathbf{v}_{\partial}(k) = [\xi_{\partial}(k) - \mathbf{A}_{1\partial} \cdot \mathbf{m}_{\theta\partial}(\psi(\partial))], \quad (4.28)$$

где $\mathbf{K}_{\theta\partial}$ — матрица коэффициента усиления фильтра размерностью $(N \times M)$; $\mathbf{A}_{1\partial}$ — матрица размерностью $(M \times N)$.

Из отмеченных свойств вектора $\mathbf{v}_{\partial}(k)$ невязок прогноза измерений следует, что вероятность $p(\mathbf{v}_{\partial}(k) \in \Delta_{\mathbf{v}}^M)$ попадания отдельных невязок прогноза измерений в M -мерный куб с размерами ребер, позволяющими считать плотность распределения невязки прогноза измерений внутри куба постоянной, рассчитывается по формуле

$$p(\mathbf{v}_{\partial}(k) \in \Delta_{\mathbf{v}}^M) \approx \left[\frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det(\mathbf{\gamma}_{\mathbf{v}\partial}(k))}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{v}_{\partial}(k)]^T \cdot \mathbf{\gamma}_{\mathbf{v}\partial}^{-1}(k) \cdot [\mathbf{v}_{\partial}(k)] \right\} \right] \Delta_{\mathbf{v}}^M, \quad (4.29)$$

где M — размерность вектора невязок прогноза измерений, равная размерности наблюдаемого случайного процесса траекторных измерений; $\mathbf{\gamma}_{\mathbf{v}\partial}(k)$ — ковариационная матрица вектора $\mathbf{v}_{\partial}(k)$ невязок прогноза измерений; $\Delta_{\mathbf{v}}^M$ — объем M -мерного куба с размерами ребер, позволяющими считать плотность распределения невязки прогноза измерений внутри куба постоянной.

Из независимости векторов невязок прогноза измерений для различных моментов времени следует, что вероятность $P(\mathbf{v}_{\partial}(k) \in \Delta_{\mathbf{v}}^M)$ попадания фиксированной последовательности невязок в объем $\Delta_{\mathbf{v}}^M$ M -мерного куба для всех моментов времени поступления измерений можно представить как произведение вероятностей $P(\mathbf{v}_{\partial}(k) \in \Delta_{\mathbf{v}}^M)$ попадания отдельных невязок прогноза измерений для всех k -х измерений в такой M -мерный куб:

$$P(\mathbf{v}_{\partial}(k) \in \Delta_{\mathbf{v}}^M) = \prod_{k=1}^K p(\mathbf{v}_{\partial}(k) \in \Delta_{\mathbf{v}}^M),$$

где K — полученное количество невязок прогноза измерений.

Исследования показали [64], что по известным величинам вектора невязок $\mathbf{v}_{\partial}(k)$ прогноза измерений для $k=0, K$, а также значению вектора состояния динамической системы $(\theta_{\phi\partial})$ в начальный дис-

кретный момент времени можно однозначно восстановить измерения. Аналогично по известным величинам вектора невязок $\lambda_{\delta}(k)$ между реальными значениями шума измерений и прогнозом значений шума измерений на одни и те же моменты времени, а также по значению вектора $\eta_{\varphi\delta}$ шума измерений в начальный дискретный момент времени $k=\varphi$ можно однозначно восстановить дополнительный процесс $\eta(k)$.

Поэтому можно считать, что вероятность получения правильных оценок вектора состояния стохастической системы траекторных измерений P_0 равна вероятности появления события, состоящего в получении минимальных невязок между векторами прогноза измерений и реальных значений измерений на одни и те же моменты времени, в получении минимальных невязок между векторами реальных значений шума измерений и прогнозов значений шума измерений на одни и те же моменты времени, а также вероятности правильного задания начального значения вектора состояния полезного процесса $\theta_{\varphi\delta}$ при известном значении шума измерений $\eta_{\varphi\delta}$ в начальный дискретный момент времени $k=\varphi$. Таким образом, вероятность P_0 может быть определена по формуле

$$P_0 = P(\mathbf{v}_{\delta}(k) \in \Delta_{\mathbf{v}}^M) \cdot P(\theta_{\varphi\delta} \in \Delta_{\theta_{\varphi}}^N) \cdot P(\eta_{\varphi\delta} \in \Delta_{\eta_{\varphi}}^M) \cdot P(\lambda_{\varphi\delta} \in \Delta_{\lambda_{\varphi}}^M), \quad (4.30)$$

где $P(\theta_{\varphi\delta} \in \Delta_{\theta_{\varphi}}^N)$ — вероятность правильного задания начального значения вектора состояния полезного процесса, т.е. события, что вектор $\theta_{\varphi\delta}$ попадает в N -мерный куб объемом $\Delta_{\theta_{\varphi}}^N$ с размерами ребер, позволяющими считать плотность распределения внутри этого куба постоянной; $P(\eta_{\varphi\delta} \in \Delta_{\eta_{\varphi}}^M)$ — вероятность правильного задания вектора шума измерений $\eta_{\varphi\delta}$ в начальный дискретный момент времени $k=\varphi$, т.е. события, что вектор $\eta_{\varphi\delta}$ попадает в M -мерный куб объемом $\Delta_{\eta_{\varphi}}^M$ с размерами ребер, позволяющими считать плотность распределения внутри этого куба постоянной; $P(\lambda_{\varphi\delta} \in \Delta_{\lambda_{\varphi}}^M)$ — вероятность попадания значения вектора невязок $\lambda_{\delta}(k)$ между реальными значениями шума измерений $\eta(k)$ и прогнозом значений шума измерений на одни и те же моменты времени в M -мерный куб с размерами ребер, позволяющими считать плотность распределения внутри этого куба постоянной.

Известно, что фильтр Калмана позволяет оценить и дополнительный процесс шума измерений $\eta(k)$ по формуле

$$\mathbf{m}_{\eta\delta}(k) = \xi_{\delta}(k) - \mathbf{H}_{\delta}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta\delta}(k), \quad (4.31)$$

где $\mathbf{H}_\partial(k)$ — матрица частных производных измеряемых параметров по компонентам оцениваемого вектора параметров движения ЛА размерностью $(M \times N)$. При этом вектор невязок $\lambda_\partial(k)$ между реальными значениями шума измерений $\eta(k)$ и прогнозом значений шума измерений на одни и те же моменты времени оценивается по формуле

$$\lambda_\partial(k) = \mathbf{m}_{\eta\partial}(k) - \mathbf{a}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{m}_{\eta\partial}(\psi(\partial)). \quad (4.32)$$

Из отмеченных выше свойств вектора $\lambda_\partial(k)$ невязок между реальными значениями шума измерений $\eta(k)$ и прогнозом значений шума измерений на одни и те же моменты времени следует, что

$$p(\lambda_\partial(k) \in \Delta_\lambda^M) \approx \left[\frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det(\gamma_{\lambda\partial}(k))}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\lambda_\partial(k)]^T \cdot \gamma_{\lambda\partial}^{-1}(k) \cdot [\lambda_\partial(k)] \right\} \right] \Delta_\lambda^M, \quad (4.33)$$

где M — размерность вектора невязок между реальными значениями шума измерений $\eta(k)$ и прогнозом значений шума измерений, равная размерности наблюдаемого случайного процесса траекторных измерений; $\gamma_{\lambda\partial}(k)$ — ковариационная матрица вектора $\lambda_\partial(k)$ невязок между реальными значениями шума измерений $\eta(k)$ и прогнозом значений шума измерений; Δ_λ^M — объем M -мерного куба с размерами ребер, позволяющими считать плотность распределения вектора невязок между реальными значениями шума измерений $\eta(k)$ и прогнозом значений шума измерений внутри куба постоянной.

Из независимости векторов невязок между реальными значениями шума измерений $\eta(k)$ и прогнозом значений шума измерений для различных моментов времени следует, что вероятность $P(\lambda_\partial(k) \in \Delta_\lambda^M)$ попадания фиксированной последовательности невязок в объем Δ_λ^M M -мерного куба для всех моментов времени поступления измерений можно представить как произведение вероятностей $p(\lambda_\partial(k) \in \Delta_\lambda^M)$ попадания отдельных невязок для всех k -х измерений в такой M -мерный куб:

$$P(\lambda_\partial(k) \in \Delta_\lambda^M) = \prod_{k=1}^K p(\lambda_\partial(k) \in \Delta_\lambda^M),$$

где K — число полученных невязок между реальными значениями шума измерений $\eta(k)$ и прогнозом значений шума измерений.

Значения вероятностей $P(\theta_{\varphi\partial} \in \Delta_{\theta_{\varphi}}^N)$ и $P(\eta_{\varphi\partial} \in \Delta_{\eta_{\varphi}}^M)$ могут быть рассчитаны по формулам

$$P(\theta_{\varphi\partial} \in \Delta_{\theta_{\varphi}}^N) \approx \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det(\gamma_{\theta_{\varphi\partial}})}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\theta_{\varphi\partial})^T \cdot \gamma_{\theta_{\varphi\partial}}^{-1} \cdot (\theta_{\varphi\partial}) \right] \right\} \Delta_{\theta_{\varphi}}^N, \quad (4.34)$$

$$P(\eta_{\varphi\partial} \in \Delta_{\eta_{\varphi}}^M) \approx \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det(\gamma_{\eta_{\varphi\partial}})}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{1}{2} (\xi_{\varphi\partial} - \mathbf{H}_{\varphi\partial} \cdot \theta_{\varphi\partial})^T \cdot \gamma_{\eta_{\varphi\partial}}^{-1} \cdot (\xi_{\varphi\partial} - \mathbf{H}_{\varphi\partial} \cdot \theta_{\varphi\partial}) \right] \right\} \Delta_{\eta_{\varphi}}^M, \quad (4.35)$$

где $\mathbf{H}_{\varphi\partial}$ — матрица размерностью $(M \times N)$.

Тогда функция правдоподобия запишется следующим образом:

$$L(\mathbf{v}_{\partial}, \theta_{\varphi\partial}, \eta_{\varphi\partial}, \lambda_{\varphi\partial}) = \\ = P(\mathbf{v}_{\partial}(k) \in \Delta_{\mathbf{v}}^M) \cdot P(\theta_{\varphi\partial} \in \Delta_{\theta_{\varphi}}^N) \cdot P(\eta_{\varphi\partial} \in \Delta_{\eta_{\varphi}}^M) \cdot P(\lambda_{\varphi\partial} \in \Delta_{\lambda_{\varphi}}^M). \quad (4.36)$$

Поскольку в функции правдоподобия (4.36) основным представляющим интерес параметром является вектор $\theta_{\varphi\partial}$, то будем рассматривать следующую запись функции правдоподобия $L(\theta_{\varphi\partial})$.

Используя выражения (4.30), (4.33)...(4.35), построим логарифмический функционал правдоподобия [96]

$$J_{\varphi} = \ln[L(\theta_{\varphi\partial})] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \mathbf{v}_{\partial}^T(k) \cdot \gamma_{\mathbf{v}_{\partial}}^{-1}(k) \cdot \mathbf{v}_{\partial}(k) + \frac{1}{2} (\theta_{\varphi\partial})^T \cdot \gamma_{\theta_{\varphi\partial}}^{-1} \cdot \theta_{\varphi\partial} + \\ + \frac{1}{2} (\xi_{\varphi\partial} - \mathbf{H}_{\varphi\partial} \cdot \theta_{\varphi\partial})^T \cdot \gamma_{\eta_{\varphi\partial}}^{-1} \cdot (\xi_{\varphi\partial} - \mathbf{H}_{\varphi\partial} \cdot \theta_{\varphi\partial}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \lambda_{\varphi\partial}^T(k) \cdot \gamma_{\lambda_{\varphi\partial}}^{-1}(k) \cdot \lambda_{\varphi\partial}(k). \quad (4.37)$$

Видно, что функционал (4.37) состоит из четырех слагаемых:

$$J_{\varphi} = J_{\mathbf{v}_{\partial}} + J_{\varphi\theta} + J_{\varphi\eta} + J_{\lambda_{\varphi\partial}}, \quad (4.38)$$

где

$$J_{\mathbf{v}_{\partial}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \mathbf{v}_{\partial}^T(k) \cdot \gamma_{\mathbf{v}_{\partial}}^{-1}(k) \cdot \mathbf{v}_{\partial}(k);$$

$$J_{\varphi\theta} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta})^T \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\theta\varphi\theta}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta});$$

$$J_{\varphi\eta} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\xi}_{\varphi\theta} - \mathbf{H}_{\varphi\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta})^T \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\eta\varphi\theta}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\xi}_{\varphi\theta} - \mathbf{H}_{\varphi\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta});$$

$$J_{\lambda\delta} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\lambda}_{\delta}^T(k) \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\lambda\delta}^{-1}(k) \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\delta}(k).$$

Анализ функционала (4.38) показал, что он является квадратичным относительно искомого вектора начальных значений $\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta}$ размерностью N .

Для отыскания оценок максимального правдоподобия (значений компонентов вектора $\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta}$) нужно решить систему однородных уравнений вида

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta})_n} = 0, \quad (4.39)$$

где $n = \overline{1, N}$.

Систему уравнений правдоподобия (4.39) решим с использованием численного метода Ньютона [15, 54, 55, 87].

Поскольку функционал (4.37) является квадратичным, то согласно методу Ньютона точка экстремума определится за один шаг согласно выражению

$$\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta(\text{opt})} = \boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta(0)} - [J_{\varphi}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta})]^{-1} \cdot J_{\varphi}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta}), \quad (4.40)$$

где $\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta(0)}$ — произвольно выбранное начальное значение вектора $\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta}$; $J_{\varphi}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta})$ — вектор первых частных производных по искомым компонентам вектора $\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta}$; $J_{\varphi}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta})$ — матрица вторых частных производных по искомым компонентам вектора $\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta}$; $\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta(\text{opt})}$ — вектор оптимальных значений компонент вектора $\boldsymbol{\theta}_{\varphi\theta}$.

Для реализации алгоритма, описываемого выражением (4.40), необходимо вывести ряд формул для вычисления рассматриваемых частных производных. Для их вывода используются следующие свойства из матричного анализа.

Свойство 1. Для произвольной квадратной симметричной матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{z}$ с размерностями соответственно $(N \times N)$ и $(N \times 1)$ справедливо тождество [97]

$$\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} = \text{Sp}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) = \text{Sp}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}),$$

где $\mathbf{D}$ — симметричная квадратная матрица, элементы которой определяются по формуле $d_{ij} = z_i z_j$.

Свойство 2. Производная от следа матрицы $\mathbf{A}$ по параметру λ равна следу матрицы, являющейся производной от исходной матрицы по тому же параметру, т.е.

$$\frac{d(\text{Sp}(\mathbf{A}))}{d\lambda} = \text{Sp}\left(\frac{d\mathbf{A}}{d\lambda}\right).$$

Выведем выражения для вектора $J_{\Phi}^{(1)}(\theta_{\Phi\partial})$ первых частных производных и матрицы $J_{\Phi}^{(2)}(\theta_{\Phi\partial})$ вторых частных производных в выражении (4.40).

В соответствии с выражением (4.38) такой вектор и такая матрица частных производных определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{\Phi}}{\partial \theta_{\Phi\partial}} &= \frac{\partial J_{\mathbf{v}\partial}}{\partial \theta_{\Phi\partial}} + \frac{\partial J_{\Phi\theta}}{\partial \theta_{\Phi\partial}} + \frac{\partial J_{\Phi\eta}}{\partial \theta_{\Phi\partial}} + \frac{\partial J_{\Phi\lambda}}{\partial \theta_{\Phi\partial}}; \\ \frac{\partial^2 J_{\Phi}}{\partial \theta_{\Phi\partial}^2} &= \frac{\partial^2 J_{\mathbf{v}\partial}}{\partial \theta_{\Phi\partial}^2} + \frac{\partial^2 J_{\Phi\theta}}{\partial \theta_{\Phi\partial}^2} + \frac{\partial^2 J_{\Phi\eta}}{\partial \theta_{\Phi\partial}^2} + \frac{\partial^2 J_{\Phi\lambda}}{\partial \theta_{\Phi\partial}^2}. \end{aligned}$$

С использованием уравнения (4.27) для условного математического ожидания $\mathbf{m}_{\partial\partial}(k)$ исследуемого процесса $\theta(k)$ и уравнения (4.28) для вектора невязок прогноза измерений строится цепочка формул, необходимых для вычисления частных производных $J_{\Phi}^{(1)}(\theta_{\Phi\partial})$ и $J_{\Phi}^{(2)}(\theta_{\Phi\partial})$.

При выводе формулы для вычисления $\frac{\partial J_{\mathbf{v}\partial}}{\partial \theta_{\Phi\partial_i}} (i = \overline{1, N})$ воспользуемся разностным уравнением

$$J_{\mathbf{v}\partial}(k) = J_{\mathbf{v}\partial}(k-1) + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{v}_{\partial}^{\text{T}}(k) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{v}\partial}^{-1}(k) \cdot \mathbf{v}_{\partial}(k).$$

Тогда формула для вычисления первых частных производных $\frac{\partial J_{\mathbf{v}\partial}(k)}{\partial \theta_{\Phi\partial_i}}$ запишется в виде

$$\frac{\partial J_{\mathbf{v}\partial}(k)}{\partial \theta_{\Phi\partial_i}} = \frac{\partial J_{\mathbf{v}\partial}}{\partial \theta_{\Phi\partial_i}} [\Psi(\partial)] + \text{Sp} \left\{ \mathbf{v}_{\mathbf{v}\partial}^{-1}(k) \cdot \mathbf{v}_{\partial}(k) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{v}_{\partial}(k)}{\partial \theta_{\Phi\partial_i}} \right]^{\text{T}} \right\} \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad (4.41)$$

где на основании выражений (4.27) и (4.28)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}_{\partial}(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} &= -\mathbf{A}_{1\partial} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_{\theta \partial}(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}}; \\ \frac{\partial \mathbf{m}_{\theta \partial}(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} &= \mathbf{a}_{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_{\theta \partial}(\psi(\partial))}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} - \mathbf{K}_{\theta \partial} \cdot \mathbf{A}_{1\partial} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{\partial}(\psi(\partial))}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}}.\end{aligned}\quad (4.42)$$

Выражение для вычисления $\frac{\partial^2 J_{\mathbf{v}\partial}(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}^2}$ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 J_{\mathbf{v}\partial}(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i} \partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_j}} = \frac{\partial^2 J_{\mathbf{v}\partial}(\psi(\partial))}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i} \partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_j}} + \text{Sp} \left\{ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{v}\partial}^{-1}(k) \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_{\partial}(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_j}} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{v}_{\partial}(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} \right]^T \right\} \right\}, \quad (4.43)$$

где $i, j = \overline{1, N}$.

Производные $\frac{\partial J_{\varphi \theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}}$ и $\frac{\partial^2 J_{\varphi \theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i} \partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_j}}$ ($i, j = \overline{1, N}$) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{\varphi \theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} &= \text{Sp} \left\{ \boldsymbol{\gamma}_{\theta \varphi}^{-1} \cdot \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} \right)^T \right\}; \\ \frac{\partial^2 J_{\varphi \theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i} \partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_j}} &= \text{Sp} \left\{ \boldsymbol{\beta}_{\theta \varphi}^{-1} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_j}} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} \right)^T \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.44)$$

Выражения для вычисления $\frac{\partial J_{\varphi \eta}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}}$ и $\frac{\partial^2 J_{\varphi \eta}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i} \partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_j}}$ ($i, j = \overline{1, N}$) имеют вид

$$\frac{\partial J_{\varphi \eta}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} = -\text{Sp} \left\{ \boldsymbol{\gamma}_{\eta \varphi}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\xi}_{\varphi \partial} - \mathbf{H}_{\varphi \partial} \cdot \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} \right)^T \cdot \mathbf{H}_{\varphi \partial}^T \right\}, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial^2 J_{\varphi \eta}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i} \partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_j}} = \text{Sp} \left[\boldsymbol{\gamma}_{\eta \varphi}^{-1} \cdot \mathbf{H}_{\varphi \partial} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_j}} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} \right)^T \cdot \mathbf{H}_{\varphi \partial}^T \right], \quad (4.46)$$

где $\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_j}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} = 1$ при $i = j$ и $\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_j}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{\varphi \partial_i}} = 0$ при $i \neq j$.



При выводе формулы для вычисления $\frac{\partial J_{\lambda\delta}}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}} \ (i = \overline{1, N})$ воспользуемся разностным уравнением

$$J_{\lambda\delta}(k) = J_{\lambda\delta}(k-1) + \frac{1}{2} \cdot \lambda_{\delta}^T(k) \cdot \gamma_{\lambda\delta}^{-1}(k) \cdot \lambda_{\delta}(k).$$

Тогда формула для вычисления первых частных производных $\frac{\partial J_{\lambda\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}}$ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial J_{\lambda\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}} = \frac{\partial J_{\lambda\delta}}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}}(\psi(\delta)) + \text{Sp} \left\{ \gamma_{\lambda\delta}^{-1}(k) \cdot \lambda_{\delta}(k) \cdot \left[\frac{\partial \lambda_{\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}} \right]^T \right\} \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad (4.47)$$

где на основании выражений (4.31) и (4.32)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}} &= \frac{\partial \mathbf{m}_{\eta\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}} - \mathbf{a}_{\eta\delta} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_{\eta\delta}(\psi(\delta))}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}}; \\ \frac{\partial \mathbf{m}_{\eta\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}} &= -\mathbf{H}_{\delta}(k) \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_{\theta\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}}; \\ \frac{\partial \lambda_{\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}} &= -\mathbf{H}_{\delta}(k) \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_{\theta\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}} - \mathbf{a}_{\eta\delta} \cdot \mathbf{H}_{\delta}(k) \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_{\theta\delta}(\psi(\delta))}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Выражение для вычисления $\frac{\partial^2 J_{\lambda\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}^2}$ запишется в виде

$$\frac{\partial^2 J_{\lambda\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i} \partial \theta_{\varphi\delta_j}} = \frac{\partial^2 J_{\lambda\delta}(\psi(\delta))}{\partial \theta_{\varphi\delta_i} \partial \theta_{\varphi\delta_j}} + \text{Sp} \left\{ \gamma_{\lambda\delta}^{-1}(k) \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_{\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_j}} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{v}_{\delta}(k)}{\partial \theta_{\varphi\delta_i}} \right]^T \right\} \right\}, \quad (4.49)$$

где $i, j = \overline{1, N}$.

На основе изложенного можно сформировать следующий обобщенный алгоритм определения начальных значений вектора состояния динамической модели исследуемого процесса в алгоритмах «встречной» фильтрации.

Исходными данными в алгоритме являются уравнения фильтрации (4.27) для частично наблюдаемых процессов с определенными в них матрицами и набор полученных измерений $\xi(k) \ \forall k = 0, K$.



Результатом выполнения алгоритма являются начальные оптимальные значения вектора параметров движения ЛА $\theta_{\varphi\partial(\text{opt})}$.

На первом шаге определяются ковариационные матрицы $\gamma_{\theta\varphi\partial}$ и $\gamma_{\eta\varphi\partial}$ вектора состояния полезного процесса $\theta_{\varphi\partial}$ и вектора шума измерений $\eta_{\varphi\partial}$ соответственно в начальный дискретный момент времени $k = \varphi$. Для этого необходимо найти ковариационные матрицы двух случайных процессов для моментов времени $k = \varphi$, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}\theta_{\partial}(t) &= \theta_{\partial}(\varphi(\partial)) + \int_{\varphi(\partial)}^t \alpha_{\theta\partial} \cdot \theta_{\partial}(s) ds + \int_{\varphi(\partial)}^t \beta_{\theta\partial} \cdot dW_s^{\partial}; \\ \eta_{\partial}(t) &= \eta_{\partial}(\varphi(\partial)) + \int_{\varphi(\partial)}^t \alpha_{\eta\partial} \cdot \eta_{\partial}(s) ds + \int_{\varphi(\partial)}^t \beta_{\eta\partial} \cdot dW_s^{\partial},\end{aligned}$$

где матрицы $\alpha_{\theta\partial}$, $\alpha_{\eta\partial}$, $\beta_{\theta\partial}$ и $\beta_{\eta\partial}$ имеют размерность $(M \times M)$.

Такие ковариационные матрицы определяются в результате решения следующих двух дифференциальных уравнений Ляпунова по алгоритму, приведенному в монографии [8]:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_{\theta\partial}(t)}{dt} &= \alpha_{\theta\partial} \cdot \gamma_{\theta\partial}(t) + \gamma_{\theta\partial}(t) \cdot \alpha_{\theta\partial}^T + \beta_{\theta\partial} \cdot \beta_{\theta\partial}^T; \\ \frac{d\gamma_{\eta\partial}(t)}{dt} &= \alpha_{\eta\partial} \cdot \gamma_{\eta\partial}(t) + \gamma_{\eta\partial}(t) \cdot \alpha_{\eta\partial}^T + \beta_{\eta\partial} \cdot \beta_{\eta\partial}^T.\end{aligned}$$

На втором шаге алгоритма проводится расчет значений ковариационной матрицы вектора невязок прогноза измерений в соответствии с формулой

$$M(v_{\partial}(k) \cdot v_{\partial}^T(k)) = \gamma_{v\partial}(k) = [B_{\theta\partial} \cdot B_{\theta\partial}^T + B_{\eta\partial} \cdot B_{\eta\partial}^T + A_{1\partial} \cdot \gamma_{v\partial}(\psi(\partial)) \cdot A_{1\partial}^T],$$

где матрицы $B_{\theta\partial}$ и $B_{\eta\partial}$ имеют размерность $(M \times M)$.

На третьем шаге выполняется расчет значений вектора первых $J_{\varphi}^{(1)}(\theta_{\varphi\partial})$ и матрицы вторых частных производных $J_{\varphi}^{(2)}(\theta_{\varphi\partial})$ по формулам (4.41)...(4.49).

На четвертом шаге алгоритма рассчитываются величины двух векторов $\theta_{\varphi\partial(\text{opt})}$ ($\partial = f, r$) по формуле $\theta_{\varphi\partial(\text{opt})} = \theta_{\varphi\partial(0)} - [J_{\varphi}^{(2)}(\theta_{\varphi\partial})]^{-1} \times J_{\varphi}^{(1)}(\theta_{\varphi\partial})$, т.е. определяются оптимальные начальные значения оцениваемых векторов $\theta_{\varphi f}$ и $\theta_{\varphi r}$ соответственно при прямой и при обратной фильтрации наблюдаемого случайного процесса.

Результаты исследования разработанного алгоритма расчета начальных значений вектора оцениваемых параметров в уравнениях фильтра Калмана

Исследование разработанного метода расчета начальных значений вектора оцениваемых параметров в уравнениях фильтра Калмана проведено с использованием модели траекторных измерений, показанной на рис. 4.2. При этом модель траектории ЛА прикрыта сложными шумами, состоящими из шести компонент с максимальной амплитудой от 50 до 100 м и временем корреляции от 5 до 1000 с.

На рис. 4.3 на фоне модели траектории ЛА показаны результаты обработки траекторных измерений при фильтрации с нулевым начальным значением вектора состояния ($\theta_{0f} = 0$) и при фильтрации с заранее рассчитанным значением вектора $\theta_{0f} = \theta_{0f(\text{opt})}$ с использованием разработанного алгоритма. Анализ результатов исследований, приведенных на рис. 4.3, показывает, что фильтрация траекторных измерений с произвольно выбранным начальным значением оцениваемого вектора состояния динамической модели исследуемого процесса приводит к грубым ошибкам в оценивании искомых параметров. В то же время использование разработанного алгоритма расчета начальных значений вектора оцениваемых параметров позволяет рассчитать оптимальное начальное значение этого вектора $\theta_{0f(\text{opt})}$ для момента времени $k = 0$, а использование его в уравнениях

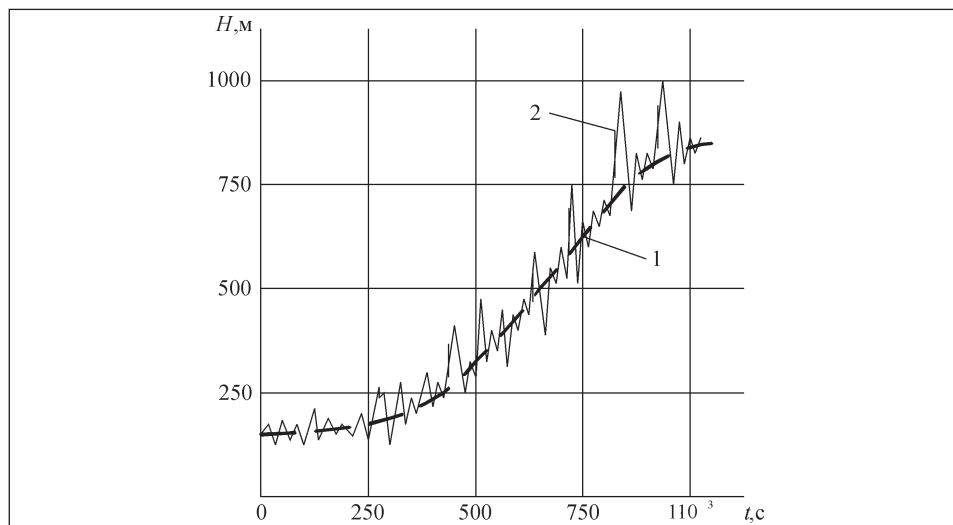


Рис. 4.2. Зависимости высоты H полета ЛА от времени t для заданной модели траектории ЛА и имитируемых траекторных измерений:

1 — модель траектории ЛА; 2 — модель траекторных измерений

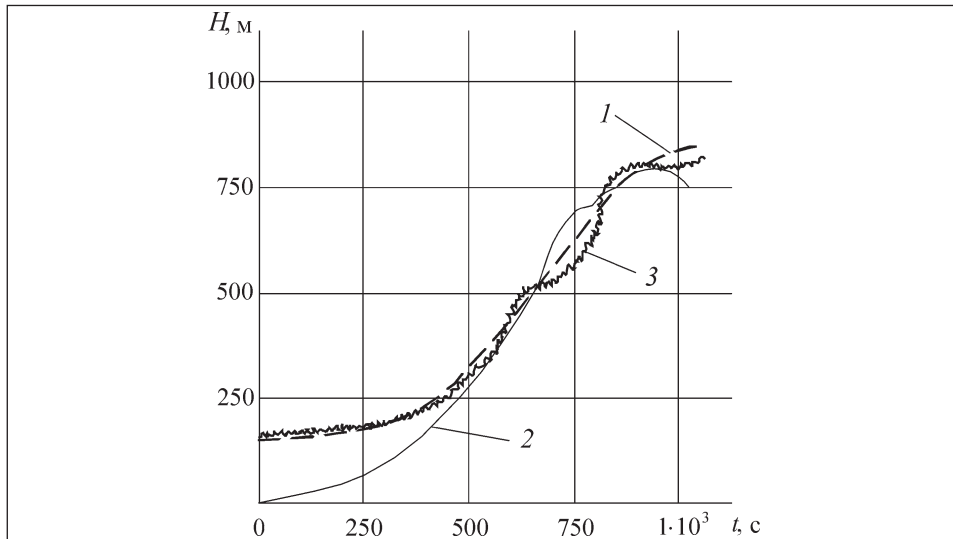


Рис. 4.3. Результаты фильтрации ТИ при нулевом значении вектора θ_{0f} и с уточненным значением этого вектора на фоне модели траектории ЛА:
 1 — модель траектории ЛА; 2 — результаты фильтрации ТИ при $\theta_{0f} = 0$; 3 — результаты фильтрации ТИ при $\theta_{0f} \neq 0$

фильтра Калмана позволяет с достаточно высокой степенью точности оценить имитируемую модель траектории полета ЛА.

Таким образом, разработанный методический подход к расчету начальных значений вектора оцениваемых параметров в уравнениях фильтра Калмана при послеполетной обработке траекторной измерительной информации позволяет с использованием статистической информации о траекторных измерениях и априорных данных о вероятностных характеристиках наблюдаемого процесса и полезного сообщения провести уточнение начальных значений оцениваемого вектора состояния динамической системы. Использование программного модуля, разработанного на базе предложенного алгоритма, позволит повысить точность получаемых оценок параметров движения ЛА и в целом повысить эффективность систем обработки траекторной измерительной информации.

4.1.8. Процедура получения smoothed значений условных математических ожиданий оцениваемых параметров движения ЛА по всему объему траекторной измерительной информации

В разд. 1 показано, что условное математическое ожидание $m_{\theta_s}(k)$ smoothed оценки случайного процесса $\theta(k)$ на момент времени $t = k$ определяется следующими двумя независимыми оценка-

ми. Первая оценка — это значение измерений $\mathbf{m}_{\theta_3}(k)$, экстраполированное с момента времени $t = k + 1$ на момент времени $t = k$, а вторая — оценка прямой фильтрации $\mathbf{m}_{\theta_f}(k)$ на этот же момент времени, что может быть записано выражением

$$\gamma_{\theta_s}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta_s}(k) = \gamma_{\theta_f}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta_f}(k) + \gamma_{\theta_{3r}}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta_{3r}}(k). \quad (4.50)$$

При проведении обратной фильтрации траекторных измерений на момент времени $t = k$ существуют две независимые оценки. Первая оценка — это значение измерений $\mathbf{m}_{\theta_3}(k)$, экстраполированное с момента времени $t = k + 1$ на момент времени $t = k$, а вторая — оценка единичной фильтрации $\mathbf{m}_{\theta_e}(k)$ на этот же момент времени, т.е. справедливо соотношение

$$\gamma_{\theta_{3r}}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta_{3r}}(k) = \gamma_{\theta_r}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta_r}(k) - \gamma_{\theta_e}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta_e}(k),$$

где $\mathbf{m}_{\theta_{3r}}(k)$, $\gamma_{\theta_{3r}}(k)$ — соответственно условное математическое ожидание экстраполированного измерения и его ковариационная матрица.

Тогда реализуется следующий алгоритм определения значений условных математических ожиданий $\mathbf{m}_{\theta_s}(k)$ и $\mathbf{m}_{\eta_s}(k)$ соответственно процессов $\theta(k)$ и $\eta(k)$ по всей собранной информации на моменты регистрации измерений $t = k$:

$$\mathbf{m}_{\theta_s}(k) = \gamma_{\theta_s}(k) \cdot [\gamma_{\theta_f}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta_f}(k) + \gamma_{\theta_r}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta_r}(k) - \gamma_{\theta_e}^{-1}(k) \cdot \mathbf{m}_{\theta_e}(k)], \quad (4.51)$$

$$\gamma_{\theta_s}(k) = [\gamma_{\theta_f}^{-1}(k) + \gamma_{\theta_r}^{-1}(k) - \gamma_{\theta_e}^{-1}(k)]^{-1}, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{m}_{\eta_s}(k) = \xi(k) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{m}_{\theta_s}(k). \quad (4.53)$$

Для получения характеристик условного распределения процессов $\theta(t)$ и $\eta(t)$ внутри интервала измерения (уравнений интерполяции) был использован следующий подход.

Предположим, что внутри интервала измерений ($t_k < q < t_{k+1}$) получено дополнительное значение измерения $\xi(q)$, описываемое выражением

$$\xi(q) = \mathbf{H}(q) \cdot \theta(q) + \eta(q), \quad (4.54)$$

тогда уравнения для сглаженной оценки (4.51) и (4.52) примут вид

$$\mathbf{m}_{\theta_s}(q) = \gamma_{\theta_s}(q) \cdot [\gamma_{\theta_f}^{-1}(q^+) \cdot \mathbf{m}_{\theta_f}(q^+) + \gamma_{\theta_r}^{-1}(q^-) \cdot \mathbf{m}_{\theta_r}(q^-) - \gamma_{\theta_e}^{-1}(q^+) \cdot \mathbf{m}_{\theta_e}(q^+);$$

$$\gamma_{\theta_s}(q) = [\gamma_{\theta_f}^{-1}(q^+) + \gamma_{\theta_r}^{-1}(q^-) - \gamma_{\theta_e}^{-1}(q^+)]^{-1},$$

где временные интервалы интерполяции в прямом q^+ и обратном q^- направлениях задаются формулами

$$q^+ = q - t_k; \quad q^- = t_{k+1} - q, \quad (4.55)$$

а значение $\mathbf{m}_{\theta\partial}(q)$ определяется выражением

$$\mathbf{m}_{\theta\partial}(q) = \mathbf{a}_{\theta\partial}(q) \cdot \mathbf{m}_{\theta\partial}(\psi(\partial)) + \mathbf{K}_{\theta\partial}(q) \cdot [\xi_{\partial}(k) - \mathbf{A}_{1\partial}(q) \cdot \mathbf{m}_{\theta\partial}(\psi(\partial))].$$

В этом уравнении компоненты $\mathbf{a}_{\theta\partial}(q)$, $\mathbf{K}_{\theta\partial}(q)$, $\mathbf{A}_{1\partial}(q)$ рассчитываются по приведенным выше алгоритмам с временными интервалами интерполяции, задаваемыми формулами (4.55), и матрицей наблюдения $\mathbf{H}(q)$.

Если у дополнительного измерения (4.54) значения элементов матрицы наблюдения $\mathbf{H}(q)$ устремить к нулю (процесс $\theta(t)$ становится ненаблюдаемым), то матрица $\mathbf{K}_{\theta\partial}(q)$ станет нулевой. Поэтому предельное значение сглаженной оценки для точки q можно рассматривать как интерполяционную оценку значения процесса в этой точке, откуда вытекают следующие формулы для интерполяции процесса $\theta(k)$ внутри интервала измерений:

$$\mathbf{m}_{\theta I}(q) = \gamma_{\theta I}(q) \cdot [\gamma_{\theta f}^{-1}(q^+) \cdot \mathbf{m}_{\theta f}(q^+) + \gamma_{\theta r}^{-1}(q^-) \cdot \mathbf{m}_{\theta r}(q^-)], \quad (4.56)$$

$$\gamma_{\theta I}(q) = [\gamma_{\theta f}^{-1}(q^+) + \gamma_{\theta r}^{-1}(q^-) - \gamma_{\theta e}^{-1}(q^+)]^{-1}, \quad (4.57)$$

где

$$\mathbf{m}_{\theta f}(q^+) = \mathbf{a}_{\theta f}(q^+) \cdot \mathbf{m}_{\theta f}(k); \quad (4.58)$$

$$\mathbf{m}_{\theta r}(q^-) = \mathbf{a}_{\theta r}(q^-) \cdot \mathbf{m}_{\theta r}(k+1); \quad (4.59)$$

$$\gamma_{\theta f}(q^+) = \mathbf{a}_{\theta f}(q^+) \cdot \gamma_{\theta f}(k) \cdot \mathbf{a}_{\theta f}^T(q^+) + \mathbf{b}_{\theta f}(q^+) \cdot \mathbf{b}_{\theta f}^T(q^+); \quad (4.60)$$

$$\gamma_{\theta r}(q^-) = \mathbf{a}_{\theta r}(q^-) \cdot \gamma_{\theta r}(k+1) \cdot \mathbf{a}_{\theta r}^T(q^-) + \mathbf{b}_{\theta r}(q^-) \cdot \mathbf{b}_{\theta r}^T(q^-); \quad (4.61)$$

$$\gamma_{\theta e}(q^+) = \gamma_{\theta \infty}. \quad (4.62)$$

Таким образом, с использованием приведенных математических соотношений могут быть получены оптимальные сглаженные значения условных математических ожиданий оцениваемых параметров движения ЛА по всей собранной траекторной измерительной информации.



4.1.9. Обобщенный алгоритм определения сглаженных оценок вектора параметров движения ЛА с использованием аппарата динамической фильтрации

Алгоритм построения сглаженных параметров движения ЛА по всей собранной траекторной измерительной информации с использованием динамической фильтрации состоит в следующем.

Исходными данными алгоритма являются матрица частных производных $\mathbf{H}(k)$, которая имеет постоянные коэффициенты на ограниченном интервале времени, интервал измерения процесса $\xi(k)$, число точек интерполяции внутри каждого интервала наблюдения и зарегистрированный набор измерений ($\xi(k)$, $k = \overline{1, K}$).

Результатом выполнения алгоритма является последовательность оценок вектора состояния стохастической системы траекторных измерений $\mathbf{m}_{\theta s}(k)$, $k = \overline{1, K}$, для моментов времени измерений и последовательность $\mathbf{m}_{\theta s}(q)$, $q = \overline{1, Q}$, для заданных точек интерполяции.

На первом шаге алгоритма формируются матрицы прямых и обращенных СДУ процессов $\theta(t)$ и $\eta(t)$ по приведенному выше алгоритму.

На втором шаге строятся матрицы прямых и обращенных рекуррентных стохастических уравнений (4.14) с использованием соотношений (4.3) и (4.4) для заданного временного интервала регистрации информации Δt по приведенному выше алгоритму.

На третьем шаге алгоритма по формулам (4.21) и (4.22) определяются матрицы $\mathbf{A}_{1\partial}$, $\mathbf{B}_{\theta\partial}$, $\mathbf{B}_{\eta\partial}$ для уравнения наблюдаемого процесса траекторных измерений.

На четвертом шаге алгоритма рассчитываются матрицы $\mathbf{K}_{\theta\partial}$, $\gamma_{\theta\partial}$ для системы уравнений фильтрации (4.24) в предположении, что фильтр вышел в стационарный режим (выполняется условие $\gamma_{\theta\partial}(k) = \gamma_{\theta\partial}(\psi(\partial))$). При этом вначале решается алгебраическое уравнение Риккати вида

$$\gamma_{\theta\partial}(k) = \mathbf{a}_{\theta\partial} \cdot \gamma_{\theta\partial}(k-1) \cdot \mathbf{a}_{\theta\partial}^T + \mathbf{b}_{\theta\partial} \cdot \mathbf{b}_{\theta\partial}^T - \mathbf{G}_{\theta\partial}(k) \cdot \mathbf{S}_{\theta\partial}^{-1}(k) \cdot \mathbf{G}_{\theta\partial}^T(k)$$

$$\text{при } \gamma_{\theta\partial}(k) = \gamma_{\theta\partial}(k-1),$$

где

$$\mathbf{G}_{\theta\partial}(k) = [\mathbf{b}_{\theta\partial} \cdot \mathbf{B}_{\theta\partial}^T + \mathbf{a}_{\theta\partial} \cdot \gamma_{\theta\partial}(k) \cdot \mathbf{A}_{1\partial}^T];$$

$$\mathbf{S}_{\theta\partial}(k) = [\mathbf{B}_{\theta\partial} \cdot \mathbf{B}_{\theta\partial}^T + \mathbf{B}_{\eta\partial} \cdot \mathbf{B}_{\eta\partial}^T + \mathbf{A}_{1\partial} \cdot \gamma_{\theta\partial}(k) \cdot \mathbf{A}_{1\partial}^T].$$

Затем определяется матрица $\mathbf{K}_{\theta\partial}$ коэффициента усиления фильтра по соответствующей формуле системы уравнений (4.24).

Матрицы $\mathbf{K}_{\theta e}(k)$ и $\gamma_{\theta e}(k)$ рассчитываются непосредственно по формулам (4.26).

На пятом шаге алгоритма проводится расчет двух начальных значений вектора состояния оцениваемого полезного процесса $\theta_{\phi\partial(\text{opt})}$.

Затем выполняется обработка собранных измерений по рекуррентным алгоритмам прямой, обратной (4.24) и единичной фильтрации (4.26) с запоминанием последовательностей значений условных математических ожиданий $\mathbf{m}_{fe}(k)$, $\mathbf{m}_{or}(k)$ и $\mathbf{m}_{oe}(k)$, а также соответствующих значений ковариационных матриц $\gamma_{fe}(k)$, $\gamma_{or}(k)$ и $\gamma_{oe}(k)$.

На следующем шаге алгоритма с использованием полученных матриц $\gamma_{\phi\partial}(k)$, $\gamma_{oe}(k)$ и $\gamma_{oe}(k)$ рассчитывается матрица $\gamma_{os}(k)$ по формуле (4.52), а затем проводится обработка по алгоритму, описываемому формулами (4.51) и (4.53), последовательностей значений условных математических ожиданий $\mathbf{m}_{of}(k)$, $\mathbf{m}_{or}(k)$, $\mathbf{m}_{oe}(k)$, полученных на предыдущем шаге алгоритма для определения сглаженных значений условных математических ожиданий основного и дополнительного случайных процессов. Полученные значения последовательностей $\mathbf{m}_{os}(k)$ и $\mathbf{m}_{\eta s}(k)$ запоминаются как один из результатов работы алгоритма.

На последнем шаге алгоритма проводится интерполяция значений параметров движения ЛА на определенный момент времени $t = q$. При этом выполняются следующие действия:

определяются границы временного интервала t_k, t_{k+1} , где выполняется условие $q \in [t_k, t_{k+1}]$;

по формулам (4.55) определяются значения временных интервалов q^+ и q^- ;

рассчитываются компоненты рекуррентных уравнений (4.5) в прямом направлении времени для интервала q^+ и обращенных для интервала времени q^- ;

проводится оценка значений условных математических ожиданий $\mathbf{m}_{of}(q^+)$ и $\mathbf{m}_{or}(q^-)$ по формулам (4.58) и (4.59), а также ковариационных матриц $\gamma_{of}(q^+)$, $\gamma_{or}(q^-)$ и $\gamma_{oe}(q^+)$ в соответствии с выражениями (4.60)...(4.62);

вычисляется значение обобщенной ковариационной матрицы в соответствии с выражением (4.57);

определяются значения вектора параметров движения ЛА $\mathbf{m}_{of}(q)$ для заданных временных точек интерполяции по формуле (4.56).

Таким образом, разработанный комплексный алгоритм получения сглаженных оценок параметров движения ЛА по информации многоканальных траекторных измерений позволяет определить оценки условного математического ожидания вектора параметров движения ЛА в любой заданный момент времени t с учетом всей априорной информации о вероятностных характеристиках исследуемых случайных процессов траекторных измерений.

4.2. Метод совместной оптимальной фильтрации несинхронных во времени разнородных траекторных измерений от наземных средств и бортовых измерителей перегрузок

4.2.1. Алгоритм оптимальной фильтрации несинхронных во времени разнородных траекторных измерений

При проведении испытаний сложных технических комплексов возникает задача совместной статистической обработки траекторной измерительной информации о полете летательного аппарата, поступающей от наземного траекторного измерительного комплекса, и информации о бортовых перегрузках, принимаемой с борта этого ЛА. Известно, что, учитывая высокую точность измерения бортовых перегрузок ЛА, получаемых с помощью акселерометров, можно уточнить оценки значений параметров движения ЛА, получаемые по информации от наземного траекторного измерительного комплекса [4, 5].

Однако информация о перегрузках на борту ЛА, передаваемая по каналам радиотелеметрии на наземный измерительный пункт, может иметь существенный временной сдвиг в привязке ее к единой шкале времени измерительного комплекса [18, 51, 52]. Основными составляющими этого временного сдвига между отождествленными траекторными измерениями и радиотелеизмерениями бортовых перегрузок являются время преобразования телеметрической информации на борту ЛА $t_{3,6}$, время передачи телеметрического сигнала с борта ЛА на наземную приемно-регистрирующую радиотелеметрическую станцию (РТС) $t_{3,р}$, а также время обработки и декодирования телеметрического сигнала на наземной станции $t_{3,н}$. Причем если первая и третья составляющие рассматриваемого временного сдвига измеряются десятками микросекунд, то вторая составляющая в зоне прямой видимости ЛА наземных средств траекторных измерений и радиотелеизмерений может достигать десяти и более миллисекунд, что является существенной величиной.

Отсутствие учета такого временного сдвига между отождествленными траекторными измерениями наземного измерительного комплекса и измерениями перегрузок на борту ЛА при их совместной статистической обработке может привести к существенным погрешностям в оценке вектора параметров движения ЛА. Действительно при скорости ЛА, равной $3 \cdot 10^3$ м/с, он пролетит за 10 мс расстояние в 30 м и в новой точке траектории его полета значения перегрузок могут существенно отличаться от предполагаемых расчетных значений.

В связи с этим является актуальным построение алгоритма совместной статистической обработки траекторных измерений от наземного траекторного ИК и от бортовых измерителей перегрузок ЛА, оптимально учитывающего временной сдвиг между двумя этими видами информации, обусловленный временем распространения радиотелеметрического сигнала от ЛА до наземной радиотелеметрической приемно-регистрирующей станции, а также фиксированными для каждого типа радиотелеметрических систем задержками по преобразованию и обработке телеметрического сигнала в бортовой и наземной аппаратуре.

На рис. 4.4 показана схема сбора и статистической обработки разнородной траекторной измерительной информации в типовой информационно-измерительной системе.

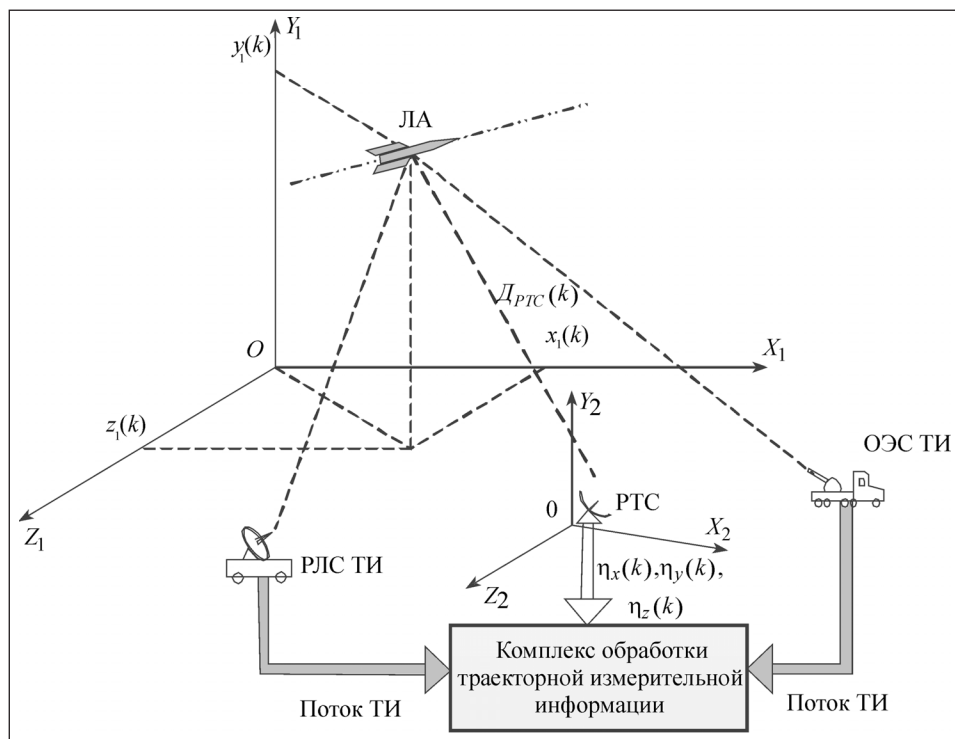


Рис. 4.4. Схема сбора и статистической обработки разнородной траекторной измерительной информации:

РЛС ТИ — радиолокационная станция траекторных измерений; ОЭС ТИ — оптико-электронная станция ТИ; ПТС — наземная радиотелеметрическая станция; $OX_1Y_1Z_1$ — полигонная система координат; $OX_2Y_2Z_2$ — местная система координат, в начале которой расположена наземная ПТС; $\eta_x(k)$, $\eta_y(k)$, $\eta_z(k)$ — текущие значения перегрузок, действующие на ЛА; $D_{PTC}(k)$ — текущая дальность от ЛА до ПТС

Для решения поставленной задачи предлагается новый алгоритм послеполетной совместной статистической обработки траекторных измерений от наземных средств ТИ и информации от бортовых акселерометров, основанный на теории оптимальной динамической фильтрации случайных процессов [62].

Для пояснения принципов построения такого алгоритма с использованием теории частично наблюдаемых случайных процессов проведем вначале синтез оптимального дискретного фильтра Калмана для обработки в масштабе реального времени рассматриваемой разнородной траекторной измерительной информации на фоне коррелированных шумов в предположении, что траекторная информация от наземных средств и бортовые измерения перегрузок идеально правильно привязаны к единой шкале времени.

Синтез такого оптимального дискретного фильтра будем проводить для постоянного интервала измерений Δt_0 между соседними моментами времени поступления разнородной траекторной измерительной информации $t = k$ и $t = k + 1$.

При решении такой задачи наблюдаемый векторный дискретный процесс измерений $\xi(k)$ для момента времени $t = k$ может быть представлен в виде

$$\xi(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \theta(k) + \mathbf{l}(k) \quad (4.63)$$

или в развернутой форме

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(k) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2(k) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_3(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \\ \theta_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1(k) \\ \mathbf{l}_2(k) \\ \mathbf{l}_3(k) \end{bmatrix},$$

где $\xi_1(k)$, $\xi_2(k)$, $\xi_3(k)$ — наблюдаемые векторные случайные процессы соответственно измерения параметров положения ЛА, скоростных параметров ЛА, а также перегрузок по осям скоростной системы координат ЛА, пересчитанных в наземную стартовую систему координат; $\theta_1(k)$, $\theta_2(k)$, $\theta_3(k)$ — векторы оцениваемых параметров движения ЛА по положению, скорости и по ускорению ЛА соответственно, имеющие следующие структуры: $\theta_1(k) = [x \ y \ z]^T$; $\theta_2(k) = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$; $\theta_3(k) = [\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z}]^T$; $\mathbf{H}_1(k)$ — матрица частных производных измеряемых параметров положения ЛА (например, наклонной дальности до ЛА, угла места, азимута этого ЛА и т.д.) по соответствующим компонентам вектора $\theta_1(k)$; $\mathbf{H}_2(k)$ — матрица частных производных измеряемых скоростных параметров (например, скорости изменения радиальной дальности

сти до ЛА) по компонентам вектора $\theta_2(k)$; $\mathbf{H}_3(k)$ — матрица вида $\mathbf{H}_3(k) = \text{diag}[g^{-1} g^{-1} g^{-1}]$, g — ускорение свободного падения.

Поскольку с одного комплекта акселерометров снимаются значения перегрузок: $\xi_X^*(k)$, $\xi_Y^*(k)$, $\xi_Z^*(k)$ по осям X^* , Y^* , Z^* скоростной системы координат, то для использования этой информации в совместной статистической обработке требуется пересчитать эти измерения в земную стартовую систему координат в соответствии с преобразованием

$$\begin{bmatrix} \xi_X(k) \\ \xi_Y(k) \\ \xi_Z(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \chi(k) \cdot \cos \psi_c(k) & -\sin \chi(k) \cdot \cos \psi_c(k) & \sin \psi_c(k) \\ \sin \chi(k) & \cos \chi(k) & 0 \\ -\cos \chi(k) \cdot \sin \psi_c(k) & \sin \chi(k) \cdot \sin \psi_c(k) & \cos \psi_c(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_X^*(k) \\ \xi_Y^*(k) \\ \xi_Z^*(k) \end{bmatrix},$$

где $\chi(k)$ — текущее дискретное значение угла между вектором скорости ЛА и местной горизонтальной плоскостью (угол наклона траектории); $\psi_c(k)$ — текущее дискретное значение угла между проекцией вектора скорости на местную горизонтальную плоскость и осью X стартовой системы координат (угол курса).

Значения углов $\chi(k)$ и $\psi_c(k)$ снимаются с бортовых гироскопов и передаются по радиотелеметрическим каналам на наземную приемно-регистрирующую станцию.

Входящий в выражение (4.63) вектор $\theta(k)$ оцениваемых параметров движения ЛА на ограниченном участке траектории полета может быть описан во времени рекуррентным стохастическим уравнением вида

$$\theta(k) = \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{b} \cdot \epsilon_1(k), \quad (4.64)$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — матрицы, структура которых определяется выбранной моделью движения ЛА в пространстве состояний; $\epsilon_1(k)$ — многомерный гауссов вектор с независимыми компонентами, имеющими параметры $N(0,1)$.

Кроме того, M -мерный случайный процесс коррелированных во времени погрешностей средств траекторных измерений $\mathbf{l}(k)$, входящий в выражение (4.63), может быть описан рекуррентным стохастическим уравнением вида

$$\mathbf{l}(k) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{l}(k-1) + \mathbf{r} \cdot \epsilon_2(k), \quad (4.65)$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ — матрицы постоянных коэффициентов размерностью $(M \times M)$; $\epsilon_2(k)$ — M -мерный гауссов вектор с независимыми компонентами, имеющими параметры $N(0,1)$.

Подставив выражения (4.64) и (4.65) в формулу (4.63), получим выражение для наблюдаемого процесса $\xi(k)$

$$\xi(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} \cdot \theta(k-1) + \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \epsilon_1(k) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{l}(k-1) + \mathbf{r} \cdot \epsilon_2(k). \quad (4.66)$$

Далее выразим $\mathbf{l}(k-1)$ из формулы (4.65) и подставим в выражение (4.66).

В результате преобразований получим следующее выражение для наблюдаемого процесса $\xi(k)$:

$$\xi(k) = \mathbf{A}_0(k, \xi) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \theta(k-1) + \mathbf{B}_1(k) \cdot \epsilon_1(k) + \mathbf{B}_2(k) \cdot \epsilon_2(k), \quad (4.67)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0(k, \xi) &= \mathbf{p} \cdot \xi(k-1); \\ \mathbf{A}_1(k) &= \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1); \\ \mathbf{B}_1(k) &= \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b}; \\ \mathbf{B}_2(k) &= \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Тогда для частично наблюдаемого процесса (4.64) и (4.67) алгоритм оптимальной фильтрации вектора параметров движения ЛА будет иметь вид [48, 105]

$$\hat{\theta}(k) = \mathbf{a} \cdot \hat{\theta}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot \{\xi(k) - \mathbf{p} \cdot \xi(k-1) - [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)] \cdot \hat{\theta}(k-1)\}. \quad (4.68)$$

Коэффициент усиления фильтра $\mathbf{K}(k)$ в выражении (4.68) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k) &= \{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{a} \cdot \gamma(k-1) \cdot [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)]^T\} \cdot \{\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \times \\ &\times \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T + [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)] \cdot \gamma(k-1) \cdot [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)]^T\}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

В выражении (4.69) ковариационная матрица $\gamma(k)$ вектора $\hat{\theta}(k)$ определяется рекуррентным уравнением вида

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= [\mathbf{a} \cdot \gamma(k-1) \cdot \mathbf{a}^T + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T] - \{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{a} \cdot \gamma(k-1) \cdot [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \\ &- \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)]^T\} \cdot \{\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T + [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)] \times \\ &\times \gamma(k-1) \cdot [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)]^T\}^{-1} \cdot \{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{a} \cdot \gamma(k-1) \times \\ &\times [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{H}(k-1)]^T\}^T. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Фильтр Калмана, описываемый соотношениями (4.68)...(4.70), позволяет проводить оптимальную обработку отождествленной разнородной измерительной информации при условии ее синхронного во времени поступления.

Для оптимальной фильтрации несинхронных во времени разнородных траекторных измерений предлагается следующий метод их обработки, суть которого поясним на примере работы обобщенного алгоритма, представленного на рис. 4.5.

В блоке 1 алгоритма проводится ввод отождествленной траекторной измерительной информации от наземного траекторного измерительного комплекса ($\xi_1(k)$ и $\xi_2(k)$), а также от бортовых измерителей перегрузок ЛА ($\xi_3(k)$), привязанной к местным шкалам времени. Число дискретных поступлений такой разнородной информации равно K .

В блоке 2 проводится совместная статистическая обработка измерений от наземных радиотехнических, радиолокационных и оптико-электронных средств ТИ ($\xi_1(k)$, $k=\overline{1, K}$) с использованием оптимального фильтра Калмана, описываемого уравнениями (4.68)...(4.70). В результате такой обработки оцениваются координаты ЛА ($x_1(k)$, $y_1(k)$, $z_1(k)$) для $k=\overline{1, K}$ в полигонной системе координат.

В блоке 4 алгоритма проводится пересчет полученных координат ЛА в местную систему координат $OX_2Y_2Z_2$ расположения наземной приемно-регистрирующей радиотелеметрической станции в соответствии со следующим преобразованием:

$$\begin{bmatrix} x_2(k) \\ y_2(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ y_1(k) \\ z_1(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}; \quad k=\overline{1, K},$$

где $x_2(k)$, $y_2(k)$, $z_2(k)$ — координаты ЛА в системе координат $OX_2Y_2Z_2$; $\mathbf{M}$ — матрица разворота осей системы координат $OX_1Y_1Z_1$ по отношению к осям систем $OX_2Y_2Z_2$; x_0 , y_0 , z_0 — значения базы между началами двух систем координат.

Тогда расчет временных невязок $t_{в.н}$ в привязке траекторной информации от наземных средств и от измерителей бортовых перегрузок к единой шкале времени для момента времени $t=k$ проводится в соответствии с формулой

$$t_{в.н}(k) = \frac{\sqrt{x_2^2(k) + y_2^2(k) + z_2^2(k)}}{C} + t_{3.б} + t_{3.н},$$

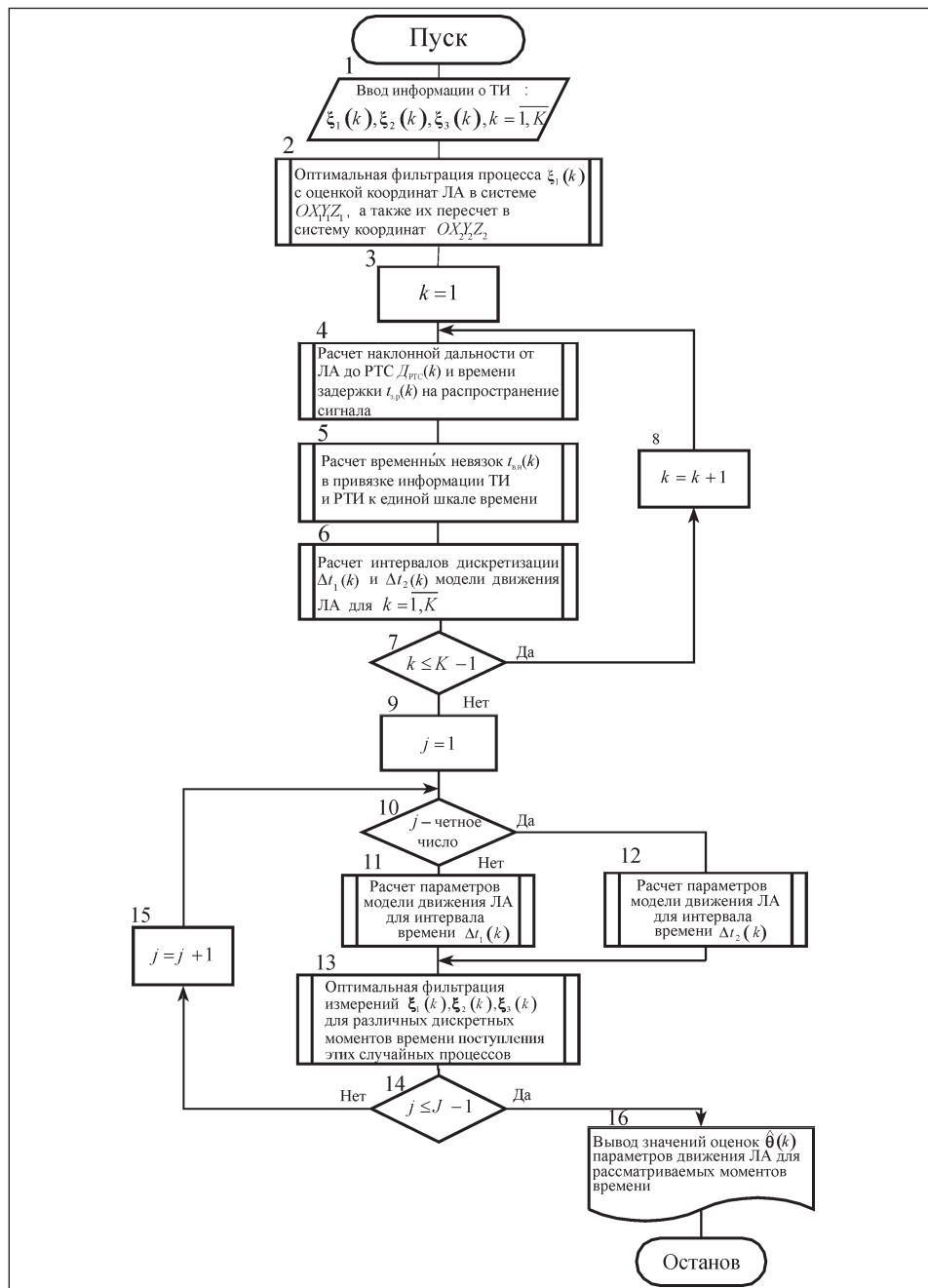


Рис. 4.5. Обобщенный алгоритм статистической обработки разнородной траекторной измерительной информации

где $t_{3,б}$, $t_{3,н}$ — временная задержка телеметрического сигнала в бортовой и наземной аппаратуре радиотелеметрической системы соответственно; C — скорость света.

В блоке 6 проводится расчет интервалов предсказания (дискретизации) динамической модели движения ЛА. Так, если предположить, что отождествленная информация от наземных средств ТИ поступает с периодом Δt_0 , а информация о бортовых перегрузках имеет задержку, равную $t_{б,н}(k)$, то при совместной обработке этой информации должны рассматриваться следующие два интервала предсказания для динамической модели движения ЛА в пространстве состояний: $\Delta t_1(k) = t_{б,н}(k)$ и $\Delta t_2(k) = \Delta t_0 - t_{б,н}(k)$ для $k = \overline{1, K}$.

Значение интервала дискретизации $\Delta t_1(k)$ используется для построения в рекуррентной форме динамической модели движения ЛА, которая обеспечивает правильное предсказание оценки параметров движения ЛА на момент времени поступления очередного дискретного значения процесса $\xi_3(k)$, а значение интервала дискретизации $\Delta t_2(k)$ — для построения динамической модели движения ЛА, обеспечивающей правильное предсказание оценки вектора $\hat{\theta}(k)$ на момент поступления очередных дискретных значений процессов $\xi_1(k+1)$ и $\xi_2(k+1)$.

На рис. 4.6 показана временная эпюра, отображающая картину несинхронного во времени приема траекторной измерительной информации от наземного траекторного ИК и от бортового измерите-

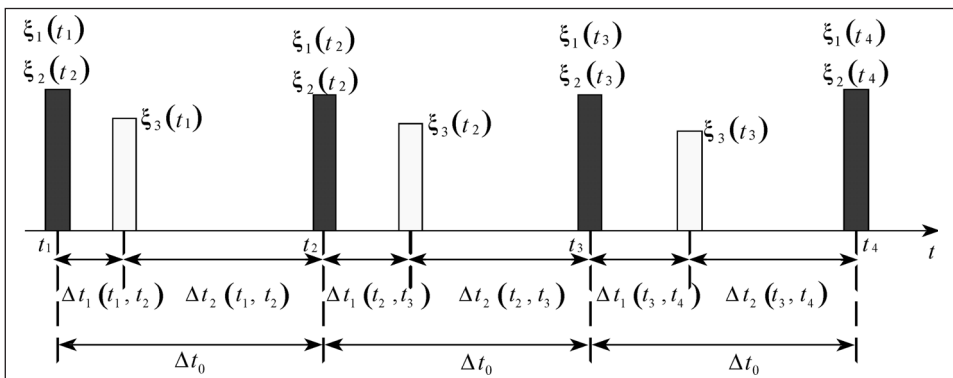


Рис. 4.6. Временной график регистрации разнородной несинхронной во времени траекторной измерительной информации:

Δt_0 — период следования измерительной информации о положении и скорости движения ЛА; $\Delta t_1(t_i, t_j)$, $\Delta t_2(t_i, t_j)$ — временные сдвиги между моментами времени поступления измерений о перегрузках ЛА и моментами времени поступления измерительной информации о положении и скорости движения ЛА

ля перегрузок, действующих на ЛА, а также расположение текущих значений интервалов дискретизации $\Delta t_1(k)$ и $\Delta t_2(k)$.

В блоках 11 и 12 рассматриваемого обобщенного алгоритма проводится формирование рекуррентного уравнения модели движения ЛА в пространстве состояний вида

$$\boldsymbol{\theta}(k) = \mathbf{a}(\Delta t) \cdot \boldsymbol{\theta}(k-1) + \mathbf{b}(\Delta t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1(k) \quad (4.71)$$

для текущих значений интервалов дискретизации $\Delta t_1(k)$ и $\Delta t_2(k)$ исходя из известной непрерывной модели, которая может быть однозначно описана стохастическим дифференциальным уравнением в интегральной форме вида

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \int_0^t \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\theta}(s) ds + \int_0^t \boldsymbol{\beta} \cdot d\mathbf{W}_s, \quad (4.72)$$

где $\mathbf{a}$, $\boldsymbol{\beta}$ — матричные постоянные коэффициенты, характеризующие соответственно детерминированную и стохастическую составляющие модели движения ЛА; $\mathbf{W}_s$ — векторный винеровский процесс.

Для преобразования стохастического дифференциального уравнения (4.72) модели движения ЛА в рекуррентное (4.71) воспользуемся следующим численным алгоритмом, основанным на свойствах матричной экспоненты [8, 66].

Исходными данными в алгоритме являются матрицы $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\beta}$ уравнения (4.72), а результатом выполнения алгоритма — матрицы $\mathbf{a}(\Delta t)$ и $\mathbf{b}(\Delta t)$ рекуррентного стохастического уравнения (4.71).

Искомые матрицы $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\beta}$ рекуррентного уравнения (4.71) определяются через решения следующих двух матричных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}(t) \text{ при } \mathbf{F}(0) = \mathbf{I}, \quad (4.73)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}(t)}{dt} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\lambda}(t) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{a}^T + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \text{ при } \boldsymbol{\lambda}(0) = \mathbf{0}, \quad (4.74)$$

компоненты которых непосредственно входят в формулы для вычисления матриц рекуррентного представления описываемых случайных процессов вида

$$\mathbf{a}(\Delta t) = \mathbf{F}(\Delta t); \quad \mathbf{b}(\Delta t) \cdot \mathbf{b}^T(\Delta t) = \boldsymbol{\lambda}(\Delta t).$$

Уравнения (4.73) и (4.74) — хорошо известны в линейной алгебре. Первое уравнение называется уравнением для фундаментальной матрицы линейной системы, а второе получило название матричного дифференциального уравнения Ляпунова. Эффективные алгоритмы решения этих уравнений приведены в работе [8].

Имея рекуррентные модели движения ЛА вида

$$\theta_1(k) = \mathbf{a}(\Delta t_1) \cdot \theta(k-1) + \mathbf{b}(\Delta t_1) \cdot \varepsilon_1(k), \quad (4.75)$$

$$\theta_2(k) = \mathbf{a}(\Delta t_2) \cdot \theta(k-1) + \mathbf{b}(\Delta t_2) \cdot \varepsilon_1(k), \quad (4.76)$$

можно организовать совместную обработку несинхронной во времени отождествленной разнородной траекторной измерительной информации с использованием оптимального фильтра Калмана, описываемого выражениями (4.68)...(4.70), в котором поочередно используются динамические модели полета ЛА вида (4.75) и (4.76).

Такой вычислительный процесс реализуется блоками 9...15 алгоритма, изображенного на рис. 4.5.

Для формирования уравнений оптимальной фильтрации в алгоритме поочередной обработки информации от наземных средств ТИ и от бортовых измерителей перегрузок, которая имеет взаимный временной сдвиг, введем следующие два расширенных случайных процесса:

$$\xi_{\text{н.с}}(k) = \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \xi_{\text{б.с}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \xi_3(k) \end{bmatrix},$$

где $\xi_{\text{н.с}}(k)$, $\xi_{\text{б.с}}(k)$ — векторные дискретные процессы измерений, получаемых соответственно от наземных средств траекторного ИК и от бортовых измерителей перегрузок.

При этом будут рассматриваться две блочные матрицы частных производных $\mathbf{H}_{\text{н.с}}(k)$ и $\mathbf{H}_{\text{б.с}}(k)$, первая из которых будет использоваться в уравнении фильтрации при обработке информации наземных средств ТИ, а вторая — при обработке информации, поступающей от бортовых средств измерения перегрузок. Эти матрицы имеют следующую структуру:

$$\mathbf{H}_{\text{н.с}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(k) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_{\text{б.с}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_3(k) \end{bmatrix}.$$

Считая, что в моменты времени $t = k_1$ и $t = k_2$ проводится фильтрация траекторной информации от наземных средств ТИ, а в моменты времени $t = k_1 + \Delta t_1$ и $t = k_1 - \Delta t_2$ обработке подвергается информация от бортовых измерителей перегрузок, построим два уравнения оптимальной фильтрации для таких двух видов входной информации.

При фильтрации информации от бортовых измерителей перегрузок уравнение фильтра Калмана имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t = k_1 + \Delta t_1) = & \alpha(\Delta t_1) \cdot \hat{\theta}(t = k_1) + \\ & + K_1(t = k_1 + \Delta t_1) \{ \xi_{6.c}(t = k_1 + \Delta t_1) - \rho \cdot \xi_{6.c}(t = k_1 - \Delta t_2) - \\ & - [H_{6.c}(t = k_1 + \Delta t_1) \cdot \alpha(\Delta t_1) - \rho \cdot H_{6.c}(t = k_1 - \Delta t_2)] \cdot \hat{\theta}(t = k_1) \}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Для фильтрации информации от наземных средств траекторных измерений используется алгоритм, описываемый уравнением

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t = k_2) = & \alpha(\Delta t_2) \cdot \hat{\theta}(t = k_1 + \Delta t_1) + \\ & + K_2(t = k_2) \{ \xi_{н.с}(t = k_2) - \rho \cdot \xi_{н.с}(t = k_1) - [H_{н.с}(t = k_2) \cdot \alpha(\Delta t_2) - \\ & - \rho \cdot H_{н.с}(t = k_1)] \cdot \hat{\theta}(t = k_1 + \Delta t_1) \}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

В уравнениях (4.77) и (4.78) $K_1(k)$ и $K_2(k)$ — соответствующие коэффициенты усиления фильтров.

Блок 16 алгоритма обеспечивает вывод значений оптимальных оценок вектора параметров движения ЛА $\hat{\theta}(k)$ для дискретных моментов времени приема траекторных измерений от наземного ИК и бортовых измерителей перегрузок, имеющих взаимный временной сдвиг.

Для данного случая погрешность оценки параметров движения ЛА с использованием синтезированного фильтра определяется классическими рекуррентными уравнениями для ковариационной матрицы $\gamma_{\theta}(k)$ вектора $\hat{\theta}(k)$.

4.2.2. Результаты исследования метода совместной оптимальной фильтрации несинхронных во времени разнородных траекторных измерений от наземных средств и бортовых измерителей перегрузок

Представленный алгоритм слепополетной совместной статистической обработки траекторных измерений от наземных средств ТИ и информации от бортовых акселерометров, имеющих взаимный временной сдвиг, построенный на основе теории оптимальной динамической фильтрации случайных процессов,

был апробирован путем его программной реализации на персональной ЭВМ.

Исследование разработанного метода было проведено на примере совместной обработки измерительной информации от РЛС ТИ типа «Кама-Н» ($D(k)$, $\beta(k)$, $\varepsilon(k)$) и информации от трех акселерометров, установленных на сопровождаемом ЛА в трех взаимно-перпендикулярных плоскостях с СКО погрешности измерения ускорений, равным $0,03 \text{ м/с}^2$ и временем корреляции, равным $2,5 \text{ с}$.

Наблюдаемые процессы $\xi_i(k)$ в измерительных каналах РЛС ТИ описываются выражением

$$\xi_i(k) = x_i(k) + \omega_i(k) + \eta_i(k); \quad i = \overline{1,3}. \quad (4.79)$$

При этом считается, что в каждом измерительном канале наблюдения за реальным процессом $x_i(k)$ аддитивно искажены двумя типами помех: медленноменяющейся $\omega_i(k)$ и быстроменяющейся $\eta_i(k)$.

Ковариационные функции этих помех имеют вид

$$K_{\omega_i}(t) = \sigma_{\omega_i}^2 e^{-\frac{|t|}{T_{\omega_i}}}; \quad K_{\eta_i}(t) = \sigma_{\eta_i}^2 e^{-\frac{|t|}{T_{\eta_i}}}.$$

Параметры стохастических дифференциальных уравнений, описывающих погрешности РЛС ТИ, приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Параметры погрешностей траекторных измерений РЛС ТИ

Измеряемая величина	Медленноменяющаяся составляющая		Быстроменяющаяся составляющая	
	СКО погрешности	Время корреляции погрешности, с	СКО погрешности	Время корреляции погрешности, с
Дальность D	15 м	200	10 м	0,2
Азимут β	3 '	100	2 '	0,5
Угол места ε	3 '	80	1 '	1,2

Кроме того, при моделировании считалось, что временной сдвиг между измерениями РЛС ТИ и акселерометров постоянный на всем интервале измерений и равен 10 мс .

Результаты моделирования приведены на рис. 4.7 и 4.8.

При моделировании использовались два типа фильтра. Первый тип фильтра, описываемый уравнениями (4.68) и (4.69), предназна-

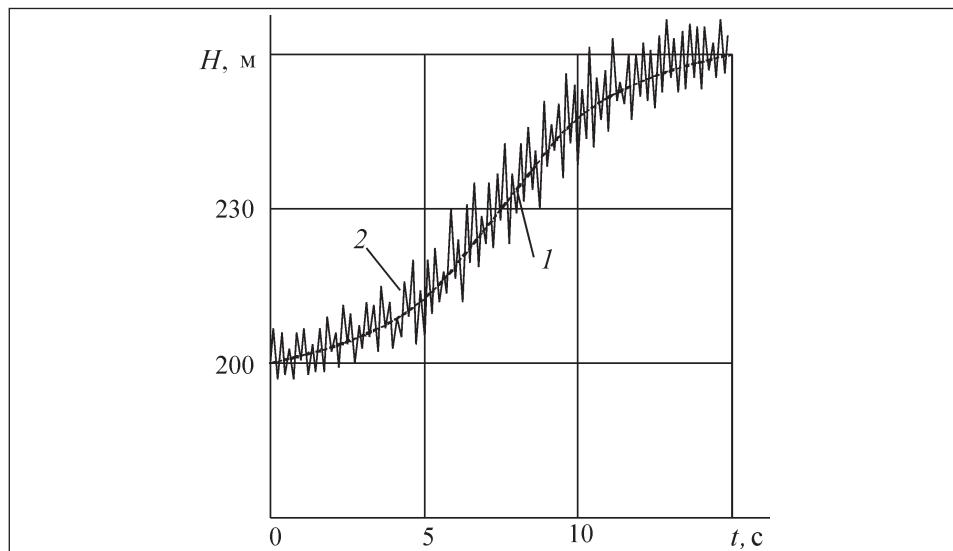


Рис. 4.7. Зависимость высоты полета ЛА от времени его полета:

1 — модель траектории полета ЛА; 2 — модель измерений РЛС ТИ

чен для оптимальной фильтрации рассматриваемых разнородных траекторных измерений, которые точно привязаны к единым моментам времени. Второй тип фильтра, описываемый уравнениями (4.77) и (4.78), имеет возможность оптимально фильтровать такую информацию в случае наличия временных невязок в ее привязке к единым моментам времени.

На рис. 4.8 на фоне модели траектории полета ЛА показаны результаты обработки траекторных измерений при использовании двух типов фильтров, которые позволяют оценить преимущества использования фильтра второго типа для обработки несинхронных во времени разнородных траекторных измерений.

Количественная оценка преимущества использования фильтра второго типа в сравнении с фильтром первого типа проводилась в моменты времени t_1, t_2, t_3 по значениям СКО погрешности оцениваемого параметра, которые вычислялись по соответствующим рекуррентным уравнениям для ковариационной матрицы оцениваемого вектора параметров движения ЛА.

Так, для момента времени $t = t_2$ СКО погрешности оценки высоты полета ЛА для фильтра первого типа составило 8 м, а для фильтра второго типа — 2,7 м.

Анализ данных, приведенных на рис. 4.7, показывает высокую эффективность синтезированного фильтра для совместной статистической обработки траекторных измерений наземного ИК и бор-

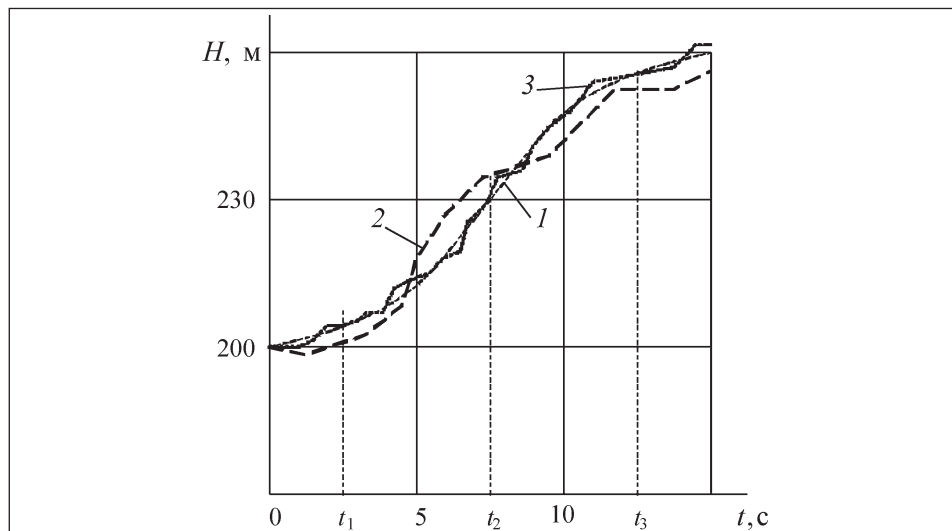


Рис. 4.8. Результаты совместной фильтрации измерений РЛС ТИ и трех бортовых акселерометров:

1 — модель траектории полета ЛА; 2 — результаты обработки измерений фильтром первого типа при наличии временных невязок между измерениями РЛС ТИ и акселерометров; 3 — результаты обработки измерений фильтром второго типа при наличии отмеченных временных невязок; t_1, t_2, t_3 — наблюдаемые моменты времени

товых измерений перегрузок ЛА при наличии временного сдвига в привязке этих измерений к единой шкале времени.

Таким образом, рассмотренный метод оптимальной фильтрации несинхронных во времени отождествленных разнородных траекторных измерений позволяет решить проблемную задачу совместной статистической обработки разнородных потоков траекторной измерительной информации, имеющих временные невязки в их привязке к единой шкале времени, а также повысить точность оценки параметров движения ЛА. Этот метод может получить широкое применение в современных информационно-измерительных системах.

5.1. Основные сведения о математическом моделировании траекторных ИИС

Как известно, при испытаниях сложных технических комплексов широкое распространение получило математическое моделирование как составных частей этих комплексов, так и условий проведения их испытаний.

Кроме того, при испытаниях СТК применяется математическое моделирование траекторных информационно-измерительных систем, что позволяет обеспечить комплексное моделирование испытываемых на полигонах опытных образцов СТК. Такое моделирование может проводиться в целях использования дополнительной траекторной измерительной информации от измерительного комплекса для расширения границ информационного поля испытываемых образцов СТК [57].

При разработке новых и модернизации существующих средств траекторных измерений для правильного формирования их облика и выбора правильных технических решений, а также при проектировании траекторных измерительных комплексов (ТИК) для обеспечения испытаний образцов СТК необходимо использовать математические модели средств траекторных измерений различных типов, а также модели траекторных измерительных комплексов.

Применение виртуальных траекторных измерительных комплексов позволяет реализовать новый подход к априорной оценке точности ТИК, заключающийся в имитации разнотипными измерительными средствами идеальных траекторных измерений, в зашумлении их с параметрами, соответствующими их паспортным значениям, в совместной обработке моделируемых измерений с использованием реальных алгоритмов обработки информации, а также оценке погрешностей вектора оцениваемых параметров дви-

жения ЛА путем сравнения полученных оценок с параметрами идеальной траектории полета ЛА.

Такой подход к априорной оценке точности траекторных измерительных комплексов имеет ряд преимуществ по сравнению с существующими методиками, поскольку он позволяет:

- учитывать параметры моделей движения ЛА и сложную структуру погрешностей средств траекторных измерений;

- использовать реальные алгоритмы совместной обработки траекторной измерительной информации, применяемые при испытаниях конкретных СТК;

- проводить глубокий корреляционный анализ погрешностей оценки траекторным измерительным комплексом параметров движения летательных аппаратов.

Структура виртуальной траекторной информационно-измерительной системы (траекторного измерительного комплекса) приведена на рис. 5.1. Видно, что в состав виртуального траекторного измерительного комплекса входят следующие программные модули:

- программный модуль имитации модели движения ЛА, который генерирует координаты летательного аппарата в полигонной декартовой системе координат с формированием в требуемые моменты времени значений вектора параметров движения ЛА $\theta(t)$;

- программный модуль имитации работы радиолокационных средств траекторных измерений;

- программный модуль имитации работы радиотехнических средств траекторных измерений;

- программный модуль имитации работы оптико-электронных средств траекторных измерений;

- программный модуль имитации работы бортовых средств траекторных измерений;

- сменный модуль совместной обработки траекторной измерительной информации, который выбирается в соответствии с тем алгоритмом, который используется при испытаниях того или иного СТК. На выходе этого модуля наблюдаются текущие значения вектора оценки параметров движения ЛА $\hat{\theta}(t)$.

Кроме того, в составе виртуального траекторного измерительно-го комплекса предусмотрены блоки ввода значений вероятностных характеристик погрешностей измеряемых параметров средствами траекторных измерений, а также точек их стояния в географической системе координат. Имеется также блок ввода значений параметров траекторий полета ЛА, к которым относятся:

- параметры, определяющие запрограммированный характер полета ЛА;

- параметры, определяющие случайный характер полета ЛА, обусловленный возмущениями гравитационного поля Земли и атмосферы.

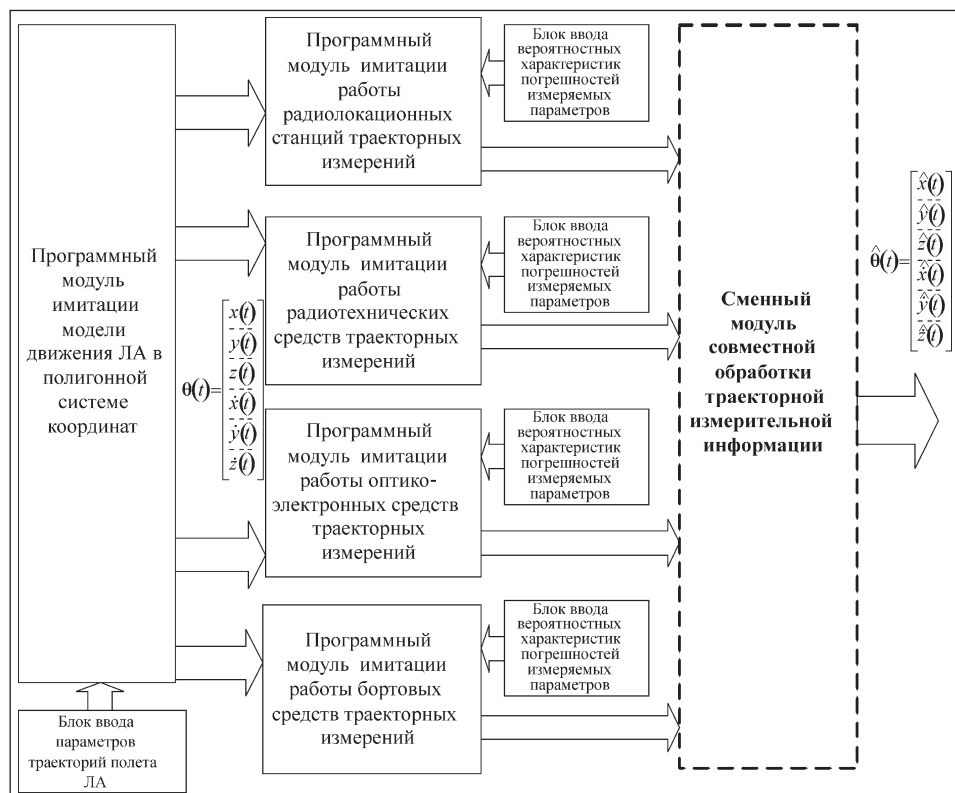


Рис. 5.1. Структура виртуальной траекторной информационно-измерительной системы (траекторного измерительного комплекса)

Ниже рассмотрен ряд алгоритмов программных модулей, входящих в состав виртуального траекторного измерительного комплекса, в том числе алгоритм кинематической модели движения летательных аппаратов, обобщенный алгоритм формирования результатов измерений радиолокационными станциями траекторных измерений и обобщенный алгоритм формирования результатов измерений оптическими и оптико-электронными системами ТИ следающего и патрульного типа.

5.2. Алгоритм кинематической модели движения летательных аппаратов

Обычно траектории движения летательных аппаратов описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих параметры, значения которых, как правило, неизвест-

ны. Это создает трудности для адекватного моделирования процесса полета ЛА.

В случае разработки математических моделей формирования результатов измерений различными средствами ТИ достаточно использовать кинематические модели движения ЛА, которые описывают движения материальных тел в пространстве без учета их инертности (массы) и действующих на них сил. В то же время для имитации кинематической модели движения ЛА необходимо использовать ряд исходных данных [25].

Рассмотрим набор исходных данных, используемых при разработке базовой кинематической модели движения ЛА, который содержит следующую информацию:

координаты точек r ($r = \overline{1, R}$) траектории полета ЛА, снятые с топографической карты и заданные в географической системе координат (B_r — широта; L_r — долгота; H_r — превышение над эллипсоидом Красовского);

высоты полета ЛА ($H_{\text{ЛА}(r)}$) над поверхностью Земли для точек r ($r = \overline{1, R}$);

моменты времени t_r ($r = \overline{1, R}$), соответствующие моментам нахождения ЛА в заданных точках траектории;

координаты начала полигонной системы координат $OX_0Y_0Z_0$ в географической системе координат (B_0, L_0, H_0), где B_0 — широта; L_0 — долгота; H_0 — превышение над эллипсоидом Красовского.

На рис. 5.2 показаны исходные данные для построения кинематической модели движения летательного аппарата.

Кинематическая модель движения ЛА может быть построена следующим образом. Сначала необходимо провести пересчет всех заданных точек траектории полета ЛА ($B_r, L_r, H_r, H_{\text{ЛА}(r)}$) в полигонную систему координат $OX_0Y_0Z_0$ для $r = \overline{1, R}$. Пересчет проводится в соответствии с преобразованием

$$\begin{bmatrix} x_0^r \\ y_0^r \\ z_0^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{0r} \\ y_{0r} \\ z_{0r} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

где x_0^r, y_0^r, z_0^r — координаты ЛА в полигонной системе координат $OX_0Y_0Z_0$ ($r = \overline{1, R}$); x_r, y_r, z_r — координаты ЛА в местных географических системах координат, начала которых находятся в точках проекций ЛА на поверхность Земли ($r = \overline{1, R}$); $m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{21}, m_{22}, m_{23}, m_{31}, m_{32}, m_{33}$ — коэффициенты матрицы разворота мест-

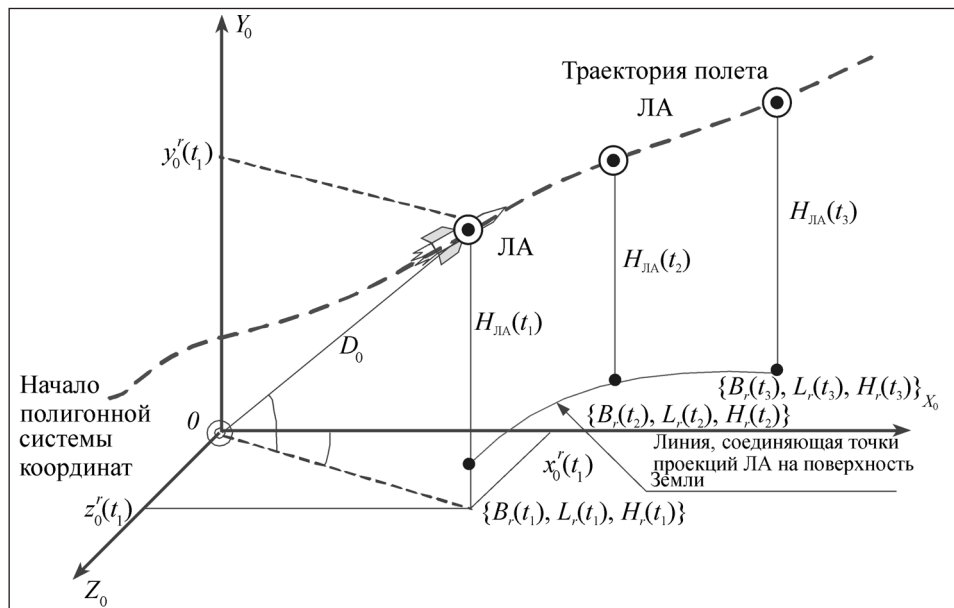


Рис. 5.2. Исходные данные для построения кинематической модели движения ЛА

ных географических систем координат, начала которых находятся в точках проекций ЛА на поверхность Земли; x_{0r} , y_{0r} , z_{0r} — значения баз между местными географическими системами координат, начала которых находятся в точках проекций ЛА на поверхность Земли, и полигональной системой координат $OX_0Y_0Z_0$ для точек $r = \overline{1, R}$.

Поскольку для нашего случая пересчет координат заданных точек траектории полета ЛА в полигональную систему координат сводится к определению базы между полигональной системой координат $OX_0Y_0Z_0$ и местными географическими системами координат, начала которых находятся в точках проекций ЛА на поверхность Земли, то выражение (5.1) примет вид

$$\begin{bmatrix} x_0^r \\ y_0^r \\ z_0^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0r} \\ y_{0r} \\ z_{0r} \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

где коэффициенты матрицы базы определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}x_{0r} &= e^2 (N_0 \sin B_0 - N_r \sin B_r) \cos B_0 + (N_r + H_r + H_{\text{ЛА}(r)}) m_{12}; \\y_{0r} &= e^2 (N_0 \sin B_0 - N_r \sin B_r) \sin B_0 + (N_r + H_r + H_{\text{ЛА}(r)}) m_{22} - (N_0 + H_0); \\z_{0r} &= (N_r + H_r + H_{\text{ЛА}(r)}) m_{32};\end{aligned}\quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}m_{12} &= -\sin B_0 \cos L_0 \cos B_r \cos L_r - \sin B_0 \sin L_0 \sin L_r \cos B_r + \cos B_0 \sin B_r; \\m_{22} &= \cos B_0 \cos L_0 \cos B_r \cos L_r + \cos B_0 \sin L_0 \cos B_r \sin L_r + \sin B_0 \sin B_r; \\m_{32} &= -\sin L_0 \cos B_r \cos L_r + \cos L_0 \cos B_r \sin L_r.\end{aligned}$$

Радиусы кривизны Земли N_0 , N_r определяются следующими формулами:

$$N_0 = \frac{R_3}{(1 - e^2 \sin^2 B_0)^{1/2}}; \quad N_r = \frac{R_3}{(1 - e^2 \sin^2 B_r)^{1/2}},$$

где R_3 — усредненный радиус Земли, $R_3 = 6378245$ м; e — эксцентриситет эллипсоида, $e = 0,0066934216$.

Поскольку каждой точке траектории полета ЛА с координатами x_0^r , y_0^r , z_0^r в системе координат $OX_0Y_0Z_0$ соответствует момент времени t_r ($r = \overline{1, R}$), то можно провести аппроксимацию траектории по времени t для каждой из координат.

Анализ траекторий полета ЛА показал, что для обеспечения высокой точности аппроксимации траекторий при построении их математических моделей достаточно использовать полиномы от третьей до шестой степени. Для упрощения вычислений выберем полином третьей степени вида

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^3 a_n t^n.$$

Коэффициенты полинома a_n определяются из матричного уравнения

$$\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\Psi}(t_r); \quad r = \overline{1 \dots R}, \quad (5.4)$$

где $\hat{\mathbf{A}}$, $\boldsymbol{\Psi}(t_r)$ — вектор оценок коэффициентов полинома и вектор координат точек траектории ЛА в полигонной системе координат соответственно, которые имеют следующий вид:

$$\hat{\mathbf{A}}^T = [\hat{a}_0 \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3]; \quad \boldsymbol{\Psi}^T = [\psi(t_0) \psi(t_1) \dots \psi(t_{R-1})];$$

$\mathbf{T}$ — матрица, имеющая структуру

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{R-1} & t_{R-1}^2 & t_{R-1}^3 \end{bmatrix}.$$

Введя обозначения $\mathbf{B} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}$; $\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{H}$, из выражения (5.4) получим соотношение

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{D}. \quad (5.5)$$

При решении матричного уравнения (5.5) для трех координат могут быть получены следующие аппроксимационные зависимости:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^3 \hat{a}_{nx} t^n; \quad \hat{y}(t) = \sum_{n=0}^3 \hat{a}_{ny} t^n; \quad \hat{z}(t) = \sum_{n=0}^3 \hat{a}_{nz} t^n. \quad (5.6)$$

Значения проекций вектора скорости ЛА на оси полигонной системы координат могут быть определены путем дифференцирования по времени выражений (5.6).

Таким образом, можно получить аналитические зависимости, определяющие траектории движения рассматриваемых летательных аппаратов.

На рис. 5.3 представлен обобщенный алгоритм программного модуля формирования кинематической модели движения ЛА.

В блоке 1 этого алгоритма вводятся следующие исходные данные:

координаты точек r ($r = \overline{1, R}$) траектории полета ЛА, снятые с топографической карты и заданные в географической системе координат (B_r — широта; L_r — долгота; H_r — высота превышения над эллипсоидом Красовского);

высота полета ЛА $H_{\text{ЛА}(r)}$ над поверхностью Земли для точек r ($r = \overline{1, R}$);

моменты времени t_r ($r = \overline{1, R}$), соответствующие моментам нахождения ЛА в заданных точках траектории;

координаты начала полигонной системы координат $OX_0Y_0Z_0$ в географической системе координат (B_0, L_0, H_0).

В блоке 2 проводится пересчет координат всех точек траектории полета ЛА ($B_r, L_r, H_r + H_{\text{ЛА}(r)}$) в полигонную систему координат.

В блоке 3 проводится аппроксимация координат точек траектории полета ЛА с использованием математических полино-

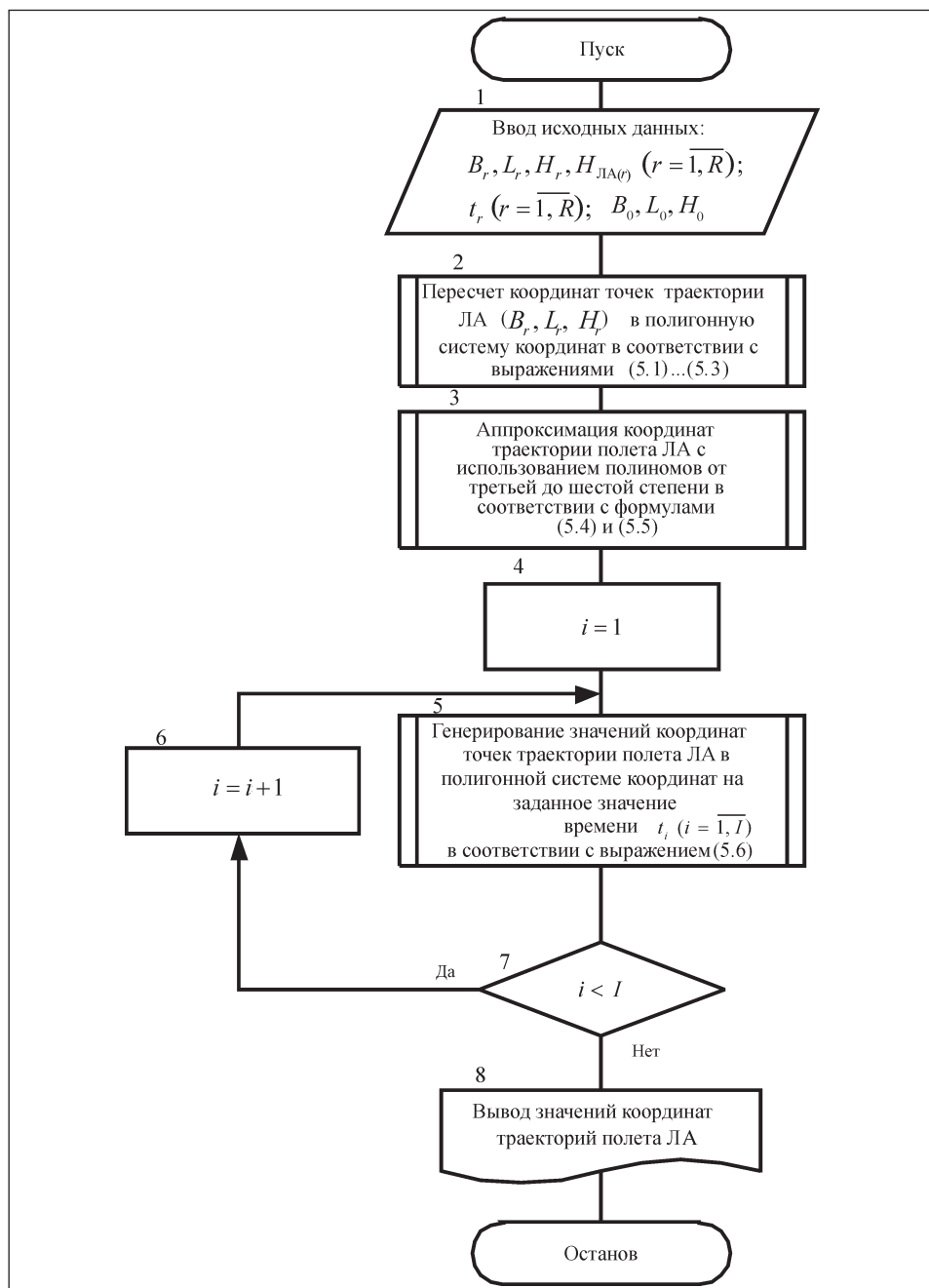


Рис. 5.3. Обобщенный алгоритм программного модуля формирования кинематической модели движения ЛА

мов различных степеней с применением метода наименьших квадратов.

Блоки 4...6 алгоритма обеспечивают генерирование значений координат траектории ЛА в любой момент времени t .

В блоке 7 обеспечивается вывод значений координат точек траектории полета ЛА в полигонной системе координат на любой момент времени в требуемом формате.

5.3. Комплекс алгоритмов формирования результатов измерений радиолокационными станциями траекторных измерений

5.3.1. Обобщенный алгоритм формирования результатов измерений радиолокационными станциями траекторных измерений

Составной частью виртуального траекторного измерительного комплекса является алгоритм формирования результатов измерений радиолокационными станциями траекторных измерений.

Основными функциями РЛС ТИ, которые должны имитироваться алгоритмом формирования результатов измерений этими станциями, являются:

- априорная оценка дальности обнаружения ЛА как в режиме работы с активным ответом, так и в режиме локации объектов без бортового приемопередатчика;

- априорная оценка зоны наблюдения ЛА радиолокационной станцией для заданной траектории полета этого объекта;

- генерирование в цифровом виде идеальной выходной измерительной информации о наклонной дальности до ЛА, азимуте, угле места этого аппарата, а также о радиальной скорости движения аппарата с заданным периодом повторения;

- зашумление идеальных измерений РЛС ТИ сигналами с параметрами, соответствующими паспортным значениям вероятностных характеристик погрешностей измерения станцией траекторных параметров.

Обобщенный алгоритм формирования результатов измерений радиолокационными станциями ТИ должен реализовываться с помощью следующих программных модулей:

- оценки дальности обнаружения и автоматического сопровождения летательных аппаратов радиолокационными станциями ТИ в режиме активного запроса, когда на борту испытываемых ЛА устанавливаются специальные приемопередатчики;

- оценки дальности обнаружения и автоматического сопровождения летательных аппаратов радиолокационными станциями ТИ при отсутствии бортового приемопередатчика;

- оценки зоны наблюдения летательных аппаратов РЛС ТИ;

формирования идеальных траекторных измерений радиолокационными средствами ТИ;

формирования реальных траекторных измерений радиолокационными средствами ТИ с паспортными значениями вероятностных характеристик погрешностей измерений.

Реализующий рассмотренные функции алгоритм работы РЛС ТИ по формированию результатов траекторных измерений приведен на рис. 5.4.

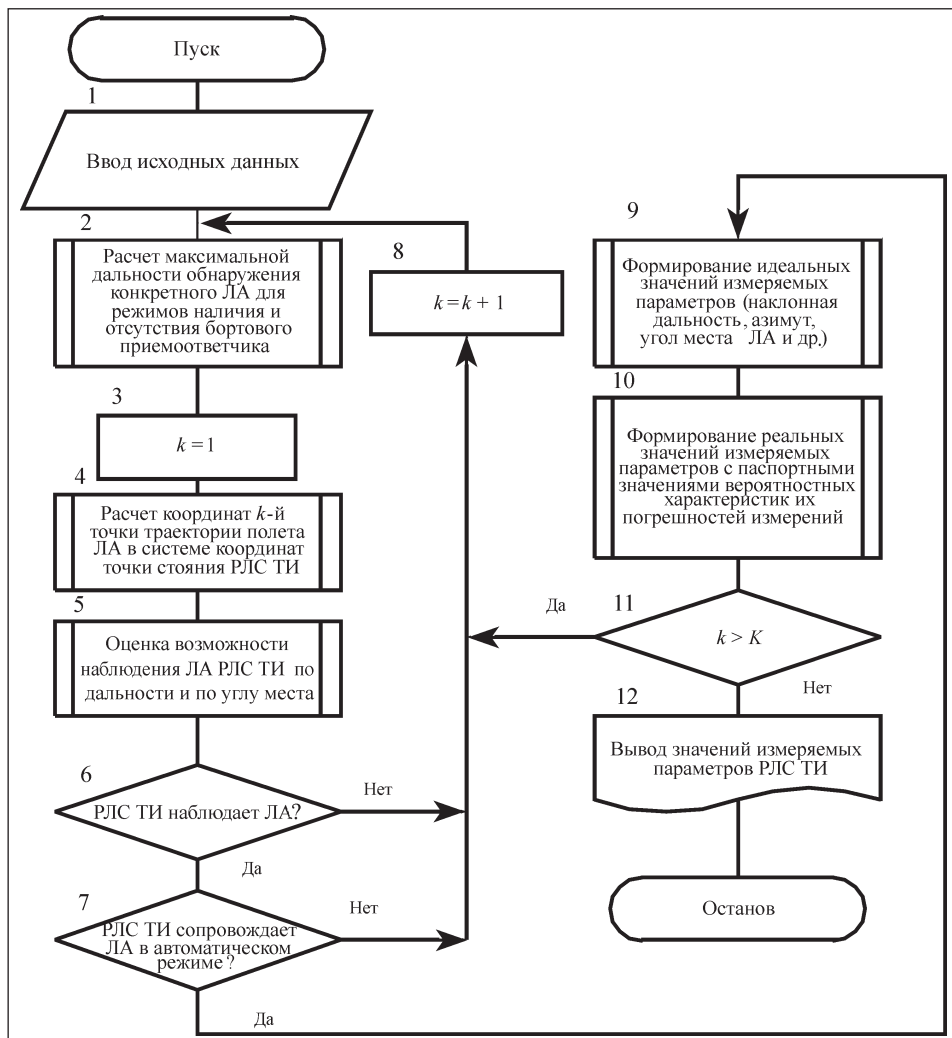


Рис. 5.4. Обобщенный алгоритм работы РЛС ТИ по формированию результатов траекторных измерений

В блоке 1 алгоритма вводятся исходные данные, к числу которых относятся радиолокационные характеристики ЛА, ряд технических характеристик РЛС ТИ, а также координаты точки ее стояния в географической системе координат.

В блоке 2 проводится расчет максимальной дальности обнаружения конкретного ЛА для режимов наличия и отсутствия бортового приемопередатчика.

В блоке 4 рассчитываются координаты для k -й точки траектории полета ЛА в системе координат точки стояния РЛС ТИ.

В блоках 5...7 проверяются условие нахождения ЛА в зоне наблюдения РЛС ТИ по дальности, а также возможность систем автосопровождения летательных аппаратов по углу места, азимуту и дальности.

В блоке 9 алгоритма формируются идеальные траекторные измерения радиолокационным средством траекторных измерений путем генерирования с заданным темпом данных о дальности до ЛА, азимуте и угле места этого аппарата.

В блоке 10 формируются реальные значения измеряемых параметров с паспортными значениями вероятностных характеристик погрешностей измерений этих параметров. Это делается путем суммирования значений идеальных измерений с паспортными значениями погрешностей измерения первичных выходных параметров РЛС ТИ.

Блок 12 обеспечивает вывод значений измеряемых параметров РЛС ТИ, таких как наклонная дальность до ЛА, азимут и угол места этого аппарата, а также радиальная скорость его движения ($D_{\text{ЛА}}$, $\beta_{\text{ЛА}}$, $\varepsilon_{\text{ЛА}}$, $\dot{D}_{\text{ЛА}}$).

5.3.2. Алгоритм программного модуля оценки максимальной дальности обнаружения ЛА радиолокационными станциями траекторных измерений

Под дальностью действия РЛС ТИ понимают максимальное расстояние $D = D_{\text{max}}$, на котором принимаемый сигнал достигает минимально допустимого (порогового) уровня $P_c = P_{c_{\text{min}}}$, еще достаточно для выполнения системами станции основных функций с качественными показателями не хуже заданных.

Поскольку радиолокационные станции траекторных измерений имеют возможность работать в режиме с активным ответом, а также в режиме без использования бортового приемопередатчика, то рассмотрим расчет максимальной дальности действия радиолиний, применяемых в РЛС ТИ для двух таких режимов [33, 75, 83, 89, 101].

Предположим, что в радиолинию связи излучаются радиоволны длиной $\lambda_{\text{и}}$, мощность излучаемых передающей антенной колебаний равна $P_{\text{и}}$, коэффициент усиления передающей антенны — $G_{\text{и}}$, коэф-

коэффициент усиления приемной антенны — $G_{\text{п}}$, а чувствительность приемника (мощность порогового сигнала) — $P_{\text{сmin}}$.

Плотность потока мощности Π , создаваемого излучаемым сигналом в месте расположения приемной антенны, на расстоянии D от передающей антенны находится по формуле [69, 75]

$$\Pi = \frac{P_{\text{и}} G_{\text{и}}}{4\pi D^2},$$

а мощность сигнала в приемной антенне $P_{\text{с}}$ определяется как

$$P_{\text{с}} = \Pi A_{\text{п}} = \frac{P_{\text{и}} G_{\text{и}} A_{\text{п}}}{4\pi D^2} = \frac{P_{\text{и}} G_{\text{и}} G_{\text{п}} \lambda_{\text{и}}^2}{(4\pi)^2 D^2},$$

где $A_{\text{п}} = \lambda_{\text{и}}^2 G_{\text{п}} / (4\pi)$ — эффективная площадь приемной антенны.

При увеличении дальности D мощность принимаемого сигнала падает и достигает порогового уровня $P_{\text{с}} = P_{\text{сmin}}$, ограничивающего максимальное значение дальности радиолинии, определяемой как

$$D_{\text{max}} = \sqrt{\frac{P_{\text{и}} G_{\text{и}} G_{\text{п}} \lambda_{\text{и}}^2}{(4\pi)^2 P_{\text{сmin}}}}. \quad (5.7)$$

Мощность $P_{\text{сmin}}$ должна быть достаточной для извлечения информации с заданной достоверностью при наличии помех, включая и собственный шум приемника, приведенный к его входу.

Рассмотрим структуру радиолинии РЛС ТИ с активным ответом. Радиолиния с активным ответом (рис. 5.5) состоит из двух радиолиний связи: линии запроса и линии ответа.



Рис. 5.5. Структура радиолинии с активным ответом

Для каждой радиолинии связи можно найти максимальную дальность действия по формуле (5.7), присвоив параметрам, относящимся к линиям запроса и ответа, соответствующие индексы [75, 84, 89]:

$$D_{з_{\max}} = \sqrt{\frac{P_{из} G_{из} G_{пз} \lambda_{из}^2}{(4\pi)^2 P_{сз_{\min}}}}, \quad (5.8)$$

$$D_{о_{\max}} = \sqrt{\frac{P_{ио} G_{ио} G_{по} \lambda_{ио}^2}{(4\pi)^2 P_{со_{\min}}}}. \quad (5.9)$$

Результирующая дальность действия системы определяется радиолинией с меньшей дальностью действия. Обычно стремятся сделать каналы запроса и ответа одинаково надежными, а систему — сбалансированной, т.е. обеспечить $D_{з_{\max}} = D_{о_{\max}}$.

Если в запросчике и ответчике для передачи и приема используют одну антенну, а частоты запросного и ответного сигналов близки, т.е. $\lambda_{из} \approx \lambda_{ио}$, то $G_{из} \approx G_{по}$ и $G_{пз} \approx G_{ио}$ и, следовательно, $G_{из} \cdot G_{пз} \approx G_{ио} \cdot G_{по}$. Отсюда найдем условие баланса системы:

$$\frac{P_{из}}{P_{сз_{\min}}} \approx \frac{P_{ио}}{P_{со_{\min}}}.$$

Рассмотрим структуру радиолинии РЛС ТИ без использования бортовых приемоответчиков. В этом случае ответный сигнал создается при рассеянии радиоволн облучаемым объектом с ЭПР, равной $\sigma_{ц}$, а запросчиком является передатчик РЛС ТИ или радиовысотомера. Предположим, что РЛС излучает зондирующий сигнал мощностью $P_{и}$, коэффициент усиления ее передающей антенны равен $G_{и}$, приемной антенны — $G_{п}$, эффективная площадь приемной антенны определяется соотношением $A_{п} = \lambda_{и}^2 G_{п} / (4\pi)$, а чувствительность приемника равна $P_{с_{\min}}$. При расстоянии от РЛС ТИ до цели, равном D , плотность потока мощности у цели определяется как $\Pi_1 = \frac{P_{и} G_{и}}{4\pi D^2}$, а мощность, перехватываемая целью, равна [14, 75]

$$P_1 = \Pi_1 \sigma_{ц} = \frac{P_{и} G_{и} \sigma_{ц}}{4\pi D^2}.$$

Если вся эта мощность рассеивается целью изотропно, то плотность потока мощности у антенны РЛС на расстоянии D от цели определяется как

$$P_2 = \frac{P_1}{4\pi D^2} = \frac{P_{\text{и}} G_{\text{и}} \sigma_{\text{ц}}}{(4\pi)^2 D^4},$$

а мощность сигнала в антенне РЛС ТИ определяется соотношением

$$P_{\text{с}} = P_2 A_{\text{п}} = \frac{P_1}{4\pi D^2} = \frac{P_{\text{и}} G_{\text{и}} \sigma_{\text{ц}} A_{\text{п}}}{(4\pi)^2 D^4} = \frac{P_{\text{и}} G_{\text{и}} G_{\text{п}} \lambda_{\text{и}}^2 \sigma_{\text{ц}}}{(4\pi)^3 D^4}.$$

При увеличении дальности D мощность сигнала $P_{\text{с}}$ падает, достигая порогового уровня $P_{\text{с}} = P_{\text{сmin}}$ при

$$D = D_{\text{max}} = \sqrt[4]{\frac{P_{\text{и}} G_{\text{и}} G_{\text{п}} \lambda_{\text{и}}^2 \sigma_{\text{ц}}}{(4\pi)^3 P_{\text{сmin}}}}. \quad (5.10)$$

Выражение (5.10) отражает связь дальности действия РЛС ТИ с ее основными параметрами и ЭПР цели $\sigma_{\text{ц}}$. Параметры $P_{\text{сmin}}$ и $\sigma_{\text{ц}}$ имеют статистический характер и зависят от многих факторов.

Необходимо отметить, что в рассмотренном основном уравнении радиолокации (5.10) не учитываются потери при распространении сигнала, потери в антенно-фидерном и других устройствах РЛС при формировании, приеме и обработке сигнала.

Рассмотрим алгоритм программного модуля оценки максимальной дальности обнаружения летательного аппарата радиолокационными станциями траекторных измерений. Такой алгоритм имеет две основные ветви, а его структура представлена на рис. 5.6.

В блоке 1 алгоритма вводятся исходные данные, в число которых входят:

- $P_{\text{из}}$ — мощность излучения передатчика РЛС ТИ;
- $P_{\text{ио}}$ — мощность излучения передатчика бортового ответчика;
- $G_{\text{из}}$ — коэффициент усиления антенны РЛС ТИ при излучении сигнала запроса;
- $G_{\text{пз}}$ — коэффициент усиления антенны РЛС ТИ при приеме сигнала от ответчика;
- $\lambda_{\text{из}}$ — длина волны, излучаемой передатчиком РЛС ТИ;
- $\lambda_{\text{ио}}$ — длина волны, излучаемой передатчиком бортового ответчика;

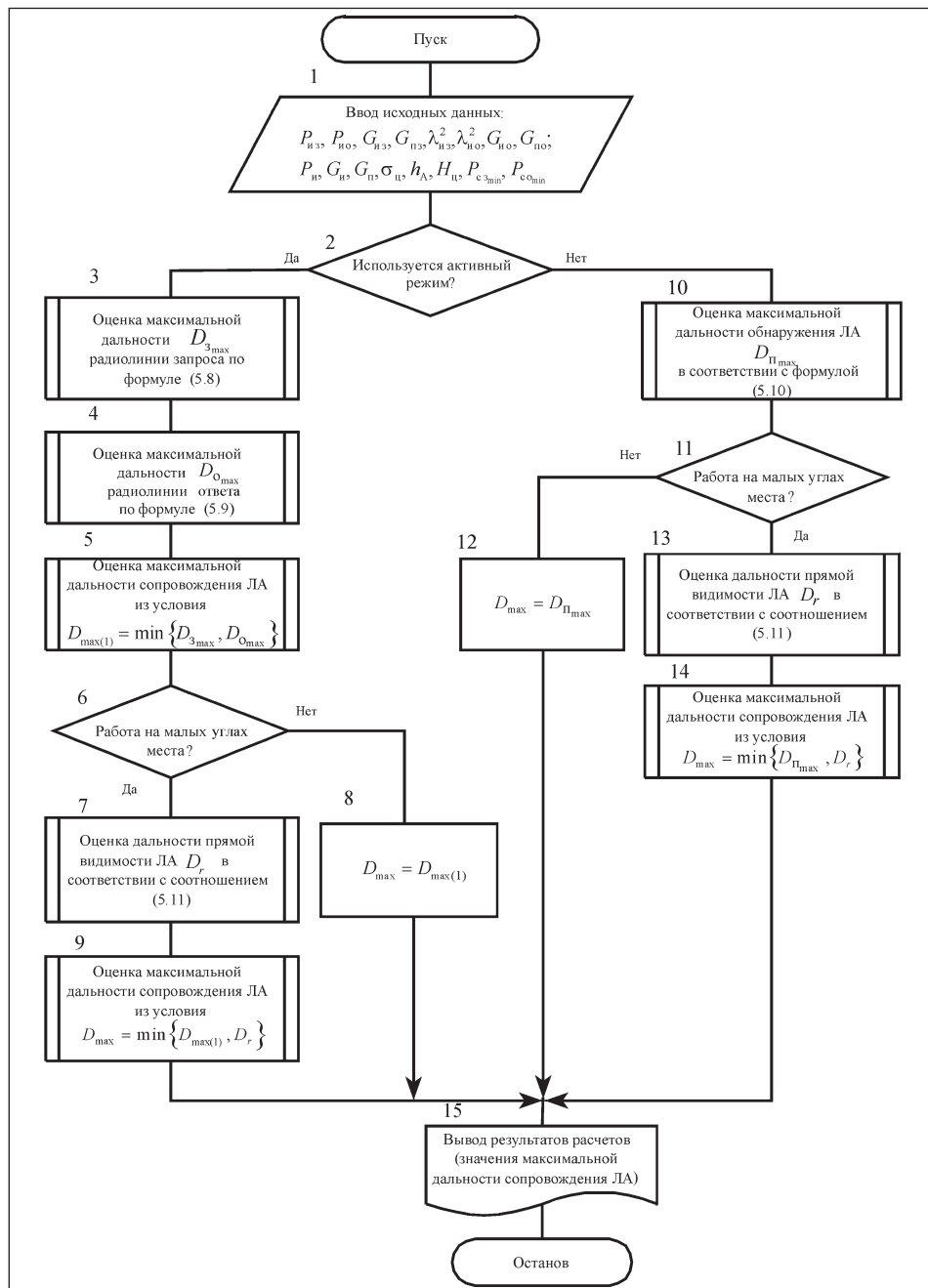


Рис. 5.6. Обобщенный алгоритм программного модуля оценки максимальной дальности обнаружения ЛА радиолокационными станциями траекторных измерений

$G_{\text{ио}}$ — коэффициент усиления антенны бортового ответчика при излучении сигнала;

$G_{\text{по}}$ — коэффициент усиления антенны бортового ответчика при приеме сигнала от РЛС ТИ;

$P_{\text{и}}$ — мощность передатчика РЛС ТИ при работе с пассивным ответом;

$G_{\text{и}}$ — коэффициент усиления антенны РЛС ТИ при излучении сигнала при работе с пассивным ответом;

$G_{\text{п}}$ — коэффициент усиления антенны РЛС ТИ при приеме сигнала при работе с пассивным ответом;

$\sigma_{\text{ц}}$ — площадь эффективной отражающей поверхности цели;

$h_{\text{А}}$ — высота подъема антенны РЛС над поверхностью Земли;

$H_{\text{ц}}$ — высота полета цели;

$P_{\text{сзmin}}$ — чувствительность приемника РЛС ТИ;

$P_{\text{соmin}}$ — чувствительность приемника бортового ответчика.

В случае работы РЛС ТИ с активным ответом включается левая ветвь алгоритма. При этом в блоке 3 проводится оценка максимальной дальности радиолинии запроса $D_{\text{зmax}}$, а в блоке 4 — оценка максимальной дальности радиолинии ответа $D_{\text{оmax}}$.

В блоке 5 алгоритма проводится оценка максимальной дальности сопровождения ЛА из условия

$$D_{\text{max}(1)} = \min\{D_{\text{зmax}}, D_{\text{оmax}}\}.$$

В блоке 6 алгоритма проводится проверка условия работы РЛС ТИ на малых углах места. В случае работы РЛС ТИ на больших углах места в блоке 8 проводится присвоение $D_{\text{max}} = D_{\text{max}(1)}$, а блок 15 обеспечивает вывод результатов расчета значений максимальной дальности обнаружения РЛС ТИ летательного аппарата конкретного класса.

При работе РЛС ТИ на малых углах места в блоке 7 алгоритма проводится оценка дальности прямой видимости ЛА D_r по формуле

$$D_r = \sqrt{\frac{8R_3}{3}} (\sqrt{H_{\text{ц}}} + \sqrt{h_{\text{А}}}), \quad (5.11)$$

где $H_{\text{ц}}$ — высота полета цели; $h_{\text{А}}$ — высота подъема антенны; R_3 — радиус Земли.

В блоке 8 проводится оценка максимальной дальности сопровождения ЛА из условия $D_{\text{max}} = \min\{D_{\text{max}(1)}, D_r\}$.

В случае работы РЛС ТИ с пассивным ответом включается правая ветвь алгоритма. При этом в блоке 10 алгоритма проводится оценка максимальной дальности сопровождения ЛА в пассивном режиме работы $D_{\text{пmax}}$, а в блоке 12 делается присвоение $D_{\text{max}} = D_{\text{пmax}}$ и далее,

в блоке 15, обеспечивается вывод результатов расчетов значений максимальной дальности сопровождения РЛС ТИ летательного аппарата.

В случае работы РЛС ТИ на малых углах места в блоке 13 алгоритма проводится оценка дальности прямой видимости ЛА D_r . Далее, в блоке 14, проводится оценка максимальной дальности сопровождения ЛА из условия

$$D_{\max} = \min\{D_{\pi}, D_r\},$$

а блок 15 обеспечивает вывод результатов расчетов значений максимальной дальности сопровождения РЛС ТИ для рассматриваемого летательного аппарата.

5.3.3. Алгоритм программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА радиолокационными станциями траекторных измерений следающего типа

При разработке алгоритма программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА радиолокационными станциями траекторных измерений следающего типа необходимо иметь координаты точек траекторий полета этих аппаратов в местных географических системах координат рассматриваемых РЛС ТИ.

Зону наблюдения РЛС ТИ можно представить в виде полушеры с радиусом $D_{\max}$ (рис. 5.7). При этом необходимо рас-

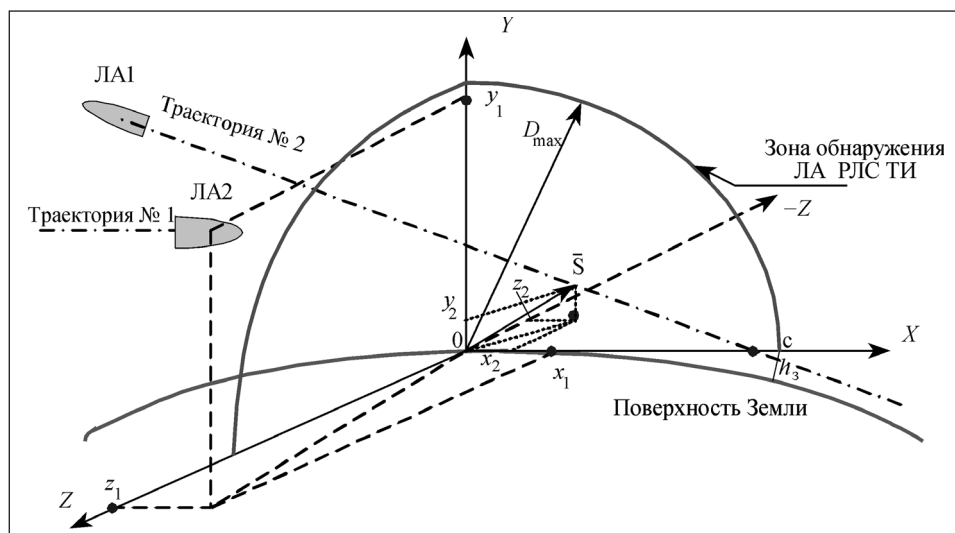


Рис. 5.7. Система координат для оценки зоны сопровождения РЛС ТИ следающего типа

смотреть два варианта прохождения зоны РЛС ТИ летательным аппаратом.

Первый вариант (траектория № 1) предполагает вход ЛА в зону наблюдения радиолокационным средством траекторных измерений и выход из нее на высотах, превышающих высоты закрытия h_3 , определяемые углами закрытия из-за кривизны поверхности Земли и дальней зоной обнаружения РЛС ТИ. В этом случае для каждой i -й точки траектории полета ЛА вычисляется расстояние D_i от этой точки до точки стояния РЛС ТИ по формуле

$$D_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}; \quad i = \overline{1, I}, \quad (5.12)$$

где x_i, y_i, z_i — координаты i -й точки траектории полета этого ЛА в местной географической системе координат рассматриваемой РЛС ТИ.

Далее проводится сравнение расстояния D_i с максимальной дальностью обнаружения РЛС ТИ $D_{\max}$ и принимается одно из следующих двух условий:

$D_i > D_{\max}$ — ЛА не находится в зоне наблюдения РЛС ТИ;

$D_i \leq D_{\max}$ — ЛА находится в зоне наблюдения РЛС ТИ.

Второй вариант (траектория № 2) предполагает вход ЛА в зону наблюдения радиолокационным средством траекторных измерений или выход из нее на высотах, не превышающих высоты закрытия h_3 . Данный вариант соответствует полету целей на малых и предельно малых высотах. При этом для i -й точки траектории полета ЛА и для конкретного средства ТИ проверяется выполнение условия $y_i < 0$. В случае выполнения такого условия РЛС ТИ не наблюдает цель и выдачи траекторной информации с этой станции не производится.

При выполнении условия $y_i \geq 0$ и при расстоянии от рассматриваемой точки траектории, меньшем $D_{\max}$ ($D_i \leq D_{\max}$), ЛА войдет в зону наблюдения РЛС ТИ. Цель будет оставаться в зоне наблюдения РЛС ТИ до тех пор, пока модуль вектора $\vec{S}$ будет меньше величины $D_{\max}$, а также при выполнении условия $y_i \geq 0$. При этом модуль вектора $\vec{S}$ для траектории № 2 рассчитывается по формуле

$$|\vec{S}_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}; \quad i = \overline{1, I}.$$

В общем случае при подлете ЛА к зоне обнаружения и сопровождения РЛС ТИ одновременно должны работать два алгоритма, предполагающих отработку варианта № 1 и варианта № 2 прохождения зоны РЛС летательным аппаратом.

Кроме того, при проверке наблюдаемости ЛА радиолокационной станцией траекторных измерений слеящего типа необходимо сравнить потенциальные возможности автоматической системы РЛС

ТИ по сопровождению ЛА на траектории его полета по углам и по дальности с реальными значениями скоростей и ускорений изменения угла места и азимута ЛА, а также скорости изменения дальности до этого аппарата. При этом возможность автоматического сопровождения ЛА определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} V_{\beta_{\text{РЛС}}} &\geq V_{\beta_{\text{max}}} ; & V_{\varepsilon_{\text{РЛС}}} &\geq V_{\varepsilon_{\text{max}}} ; \\ \dot{V}_{\beta_{\text{РЛС}}} &\geq \dot{V}_{\beta_{\text{max}}} ; & \dot{V}_{\varepsilon_{\text{РЛС}}} &\geq \dot{V}_{\varepsilon_{\text{max}}} ; \\ V_{D_{\text{РЛС}}} &\geq V_{D_{\text{max}}} , \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $V_{\beta_{\text{РЛС}}}$, $V_{\varepsilon_{\text{РЛС}}}$ — реальные значения скоростей изменения соответственно азимута и угла места сопровождаемого РЛС летательного аппарата; $\dot{V}_{\beta_{\text{РЛС}}}$, $\dot{V}_{\varepsilon_{\text{РЛС}}}$ — реальные значения ускорений изменения соответственно азимута и угла места сопровождаемого РЛС летательного аппарата; $V_{D_{\text{РЛС}}}$, $V_{D_{\text{max}}}$ — соответственно реальное значение скорости изменения дальности до ЛА и значение ТТХ по максимальной скорости изменения дальности для автоматической системы сопровождения РЛС ТИ; $V_{\beta_{\text{max}}}$, $V_{\varepsilon_{\text{max}}}$ — значения ТТХ автоматической системы сопровождения РЛС ТИ по максимальным скоростям сопровождения целей соответственно по азимуту и по углу места; $\dot{V}_{\beta_{\text{max}}}$, $\dot{V}_{\varepsilon_{\text{max}}}$ — значения ТТХ автоматической системы сопровождения РЛС ТИ по максимальным ускорениям сопровождения целей РЛС ТИ соответственно по азимуту и по углу места.

При выполнении перечисленных условий будут обеспечиваться наблюдаемость и осуществляться автоматическое сопровождение РЛС ТИ летательных аппаратов на траекториях их полета.

На рис. 5.8 представлен обобщенный алгоритм программного модуля оценки зон наблюдения летательных аппаратов радиолокационными средствами траекторных измерений следящего типа.

В блоке 1 алгоритма вводятся следующие исходные данные:

$x_{i\text{пол}}, y_{i\text{пол}}, z_{i\text{пол}}$ ($i = \overline{1, I}$) — координаты точек траектории полета ЛА в полигонной системе координат;

D_{max} — максимальная дальность сопровождения РЛС ТИ летательного аппарата;

V_{β} , V_{ε} , V_D — скорости изменения измеряемых РЛС ТИ параметров (азимута, угла места, дальности);

$\dot{V}_{\beta}$, $\dot{V}_{\varepsilon}$ — ускорения изменения измеряемых РЛС ТИ параметров (азимута, угла места).

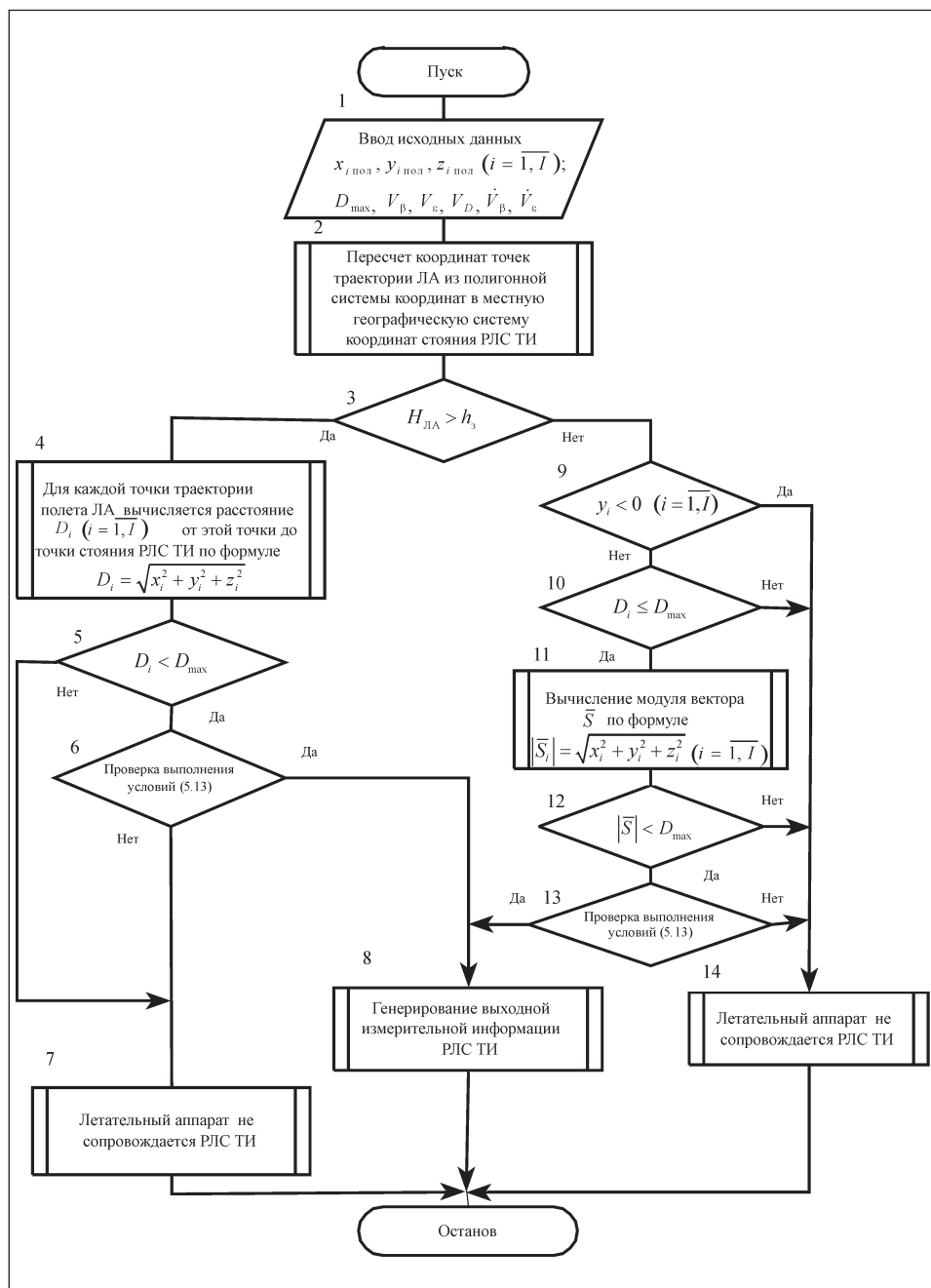


Рис. 5.8. Обобщенный алгоритм программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА радиолокационными средствами траекторных измерений следящего типа

Далее, в блоке 2, проводится пересчет координат точек траектории ЛА из полигонной системы координат в местную географическую систему координат стояния РЛС ТИ (формулы пересчета приведены в следующем подразделе).

Поскольку пролет ЛА через зону сопровождения РЛС ТИ может проходить по двум основным вариантам, описанным выше, то алгоритм оценки зоны наблюдения летательных аппаратов радиолокационными средствами траекторных измерений следящего типа в зоне их обзора имеет две основные ветви. Поэтому в блоке 3 алгоритма проводится проверка условия $H_{\text{ЛА}} > h_3$.

В блоке 4 для каждой точки траектории полета ЛА вычисляется расстояние от этой точки до точки стояния РЛС ТИ, а в блоке 5 проводится сравнение расстояния D_i с максимальной дальностью обнаружения РЛС ТИ D_{max} , т.е. проверяется условие $D_i < D_{\text{max}}$. В случае выполнения этого условия в блоке 6 проводится проверка возможности автоматического сопровождения РЛС ТИ летательного аппарата по азимуту, углу места и дальности путем проверки выполнения условий (5.13). В случае невыполнения условий, проверяемых в блоке 6, принимается решение о том, что ЛА не сопровождается РЛС ТИ.

В случае выполнения условий (5.13) управление передается на блок 8, в котором проводится генерирование выходной измерительной информации РЛС ТИ.

При невыполнении условия, проверяемого в блоке 3, управление передается на блок 9, в котором проверяется условие $y_i < 0$. При выполнении этого условия принимается решение о том, что летательный аппарат не сопровождается РЛС ТИ. В противном случае проверяется дополнительное условие $D_i < D_{\text{max}}$. При выполнении этого условия можно констатировать факт попадания ЛА в зону сопровождения РЛС ТИ.

В блоке 11 алгоритма проводится вычисление для каждой точки траектории полета ЛА модуля вектора $\vec{S}$ по формуле $|\vec{S}_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$, $i = \overline{1, I}$. При этом, если выполняется условие $|\vec{S}_i| < D_{\text{max}}$, то ЛА продолжает полет в зоне наблюдения РЛС ТИ. В этом случае в блоке 13 проводится проверка возможности автоматического сопровождения РЛС ТИ летательного аппарата по азимуту, углу места и дальности путем проверки выполнения условий (5.13). Если в блоке 13 принято положительное решение, то управление передается на блок 8, в котором проводится генерирование выходной измерительной информации РЛС ТИ. На этом обобщенный алгоритм оценки зон наблюдения летательных аппаратов радиолокационными средствами траекторных измерений следящего типа заканчивает свою работу.

5.3.4. Алгоритм программного модуля формирования выходной траекторной измерительной информации радиолокационной станции траекторных измерений

Алгоритм программного модуля формирования выходной траекторной измерительной информации РЛС ТИ реализует функции генерирования с заданным темпом идеальных значений параметров, измеряемых РЛС, а также формирования реальных (зашумленных) измерений с погрешностями, соответствующими вероятностным характеристикам погрешностей, записанных в паспорте для конкретного типа РЛС ТИ.

Для разработки алгоритма формирования выходной траекторной измерительной информации РЛС ТИ используется комплекс систем координат, приведенный на рис. 5.9. На этом рисунке показана полигонная система координат $OX_0Y_0Z_0$, а также три местных системы координат ($OX_1Y_1Z_1$, $OX_2Y_2Z_2$, $OX_3Y_3Z_3$), начала которых расположены в точках стояния трех РЛС ТИ.

Для построения математической модели формирования идеальных выходных траекторных измерений средствами ТИ проводится пересчет координат точек траектории полета ЛА из полигонной

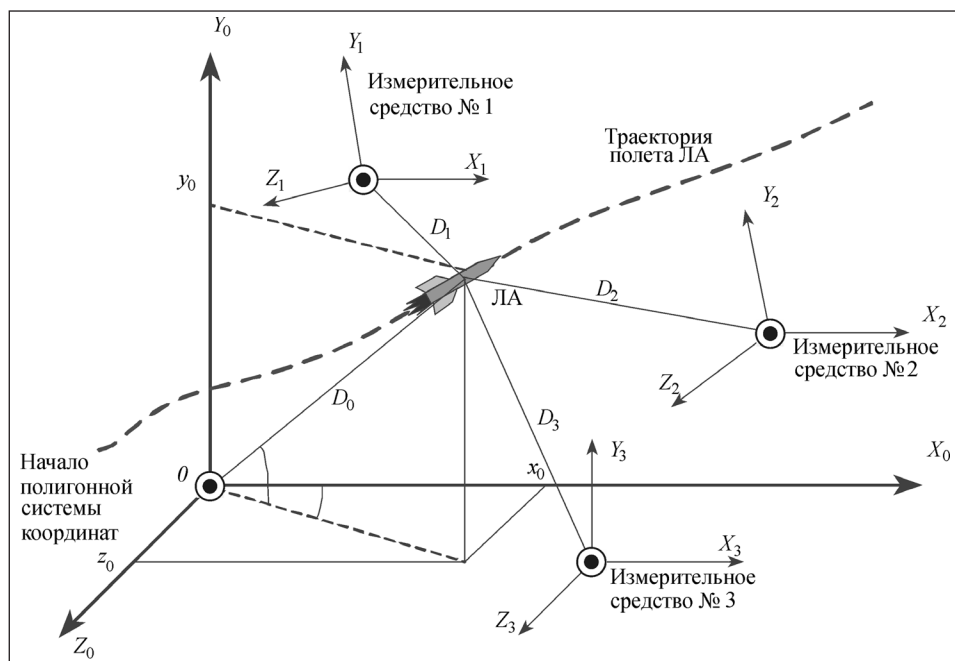


Рис. 5.9. Комплекс систем координат для построения алгоритма формирования выходной траекторной измерительной информации РЛС ТИ

системы координат в местную систему координат n -го измерительного средства в соответствии с преобразованием

$$\begin{bmatrix} x_n(t) \\ y_n(t) \\ z_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{0n} \\ y_{0n} \\ z_{0n} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

где x_{0n}, y_{0n}, z_{0n} — коэффициенты базы между местными географическими системами координат, начала которых находятся в точках стояния РЛС ТИ, и полигонной системой координат $OX_0Y_0Z_0$.

Коэффициенты матрицы разворота осей n -й системы координат относительно системы координат $OX_0Y_0Z_0$ в выражении (5.14) определяются следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \sin B_n \cos L_n \sin B_0 \cos L_0 + \sin B_n \sin L_n \sin B_0 \sin L_0 + \cos B_n \cos B_0; \\ m_{12} &= -\sin B_n \cos L_n \cos B_0 \cos L_0 - \sin B_n \sin L_n \sin B_0 \cos L_0 + \cos B_n \sin B_0; \\ m_{13} &= \sin B_n \cos L_n \sin L_0 - \sin B_n \sin L_n \cos L_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{21} &= -\cos B_n \cos L_n \sin B_0 \cos L_0 - \cos B_n \sin L_n \sin B_0 \sin L_0 + \cos B_n \cos B_0; \\ m_{22} &= \cos B_n \cos L_n \cos B_0 \cos L_0 + \cos B_n \sin L_n \cos B_0 \sin L_0 + \sin B_n \sin B_0; \\ m_{23} &= -\cos B_n \cos L_n \sin L_0 + \cos B_0 \sin L_n \cos L_0; \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} m_{31} &= \sin B_0 \cos L_0 \sin L_n - \sin B_0 \sin L_n \cos L_n; \\ m_{32} &= -\sin L_n \cos B_0 \cos L_n + \cos L_0 \cos B_0 \sin L_n; \\ m_{33} &= \sin L_n \sin L_0 + \cos L_n \cos L_0. \end{aligned}$$

Элементы матрицы базы в выражении (5.14) определяются с помощью формул

$$\begin{aligned} x_{0n} &= e^2 (N_n \sin B_n - N_0 \sin B_0) \cos B_n + (N_0 + H_0) m_{12}; \\ y_{0n} &= e^2 (N_n \sin B_n - N_0 \sin B_0) \sin B_n + (N_0 + H_0) m_{22} - (N_n + H_n); \\ z_{0n} &= (N_0 + H_0) m_{32}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Текущие значения азимута, угла места и дальности до ЛА для n -го измерительного средства определяются по формулам

$$\beta_n(t) = \arctg \frac{z_n(t)}{x_n(t)}, \quad (5.17)$$

$$\varepsilon_{\omega}(t) = \arctg \frac{y_n(t)}{[x_n^2(t) + z_n^2(t)]^{1/2}}, \quad (5.18)$$

$$D_n(t) = [x_n^2(t) + y_n^2(t) + z_n^2(t)]^{1/2}. \quad (5.19)$$

Текущие значения направляющих косинусов для РЛС, имеющих фазометрические измерительные базы (типа «Вега»), определяются выражениями

$$K_x(t) = x_n(t)[D_n(t)]^{-1}; \quad K_z(t) = z_n(t)[D_n(t)]^{-1}. \quad (5.20)$$

Для оценки возможностей РЛС ТИ по автоматическому сопровождению ЛА на траекториях их полета необходимо рассчитать значения возможных скоростей изменения измеряемых параметров по углам и по наклонной дальности до ЛА и сравнить их с тактико-техническими характеристиками автоматических систем слежения РЛС ТИ. Такие оценки находятся путем дифференцирования по времени правых частей соотношений (5.17)... (5.19). В результате дифференцирования получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_n(t) &= \frac{x_n(t)\dot{z}_n(t) - z_n(t)\dot{x}_n(t)}{x_n^2(t)\{1 + [z_n(t)x_n^{-1}(t)]^2\}}; \\ \dot{\varepsilon}_n(t) &= \frac{[x_n^2(t) + z_n^2(t)]\dot{y}_n(t) - y_n(t)[x_n(t)\dot{x}_n(t) + z_n(t)\dot{z}_n(t)]}{[x_n^2(t) + z_n^2(t) + y_n^2(t)][x_n^2(t) + z_n^2(t)]^{1/2}}; \\ \dot{D}_n(t) &= \frac{x_n(t)\dot{x}_n(t) + y_n(t)\dot{y}_n(t) + z_n(t)\dot{z}_n(t)}{[x_n^2(t) + y_n^2(t) + z_n^2(t)]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Для оценки значений возможных скоростей изменения направляющих косинусов воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \dot{K}_x(t) &= \frac{[x_n^2(t) + y_n^2(t) + z_n^2(t)]\dot{x}_n(t) - [x_n(t)\dot{x}_n(t) + y_n(t)\dot{y}_n(t) + z_n(t)\dot{z}_n(t)]x_n(t)}{[x_n^2(t) + y_n^2(t) + z_n^2(t)][x_n^2(t) + y_n^2(t) + z_n^2(t)]^{1/2}}; \\ \dot{K}_z(t) &= \frac{[x_n^2(t) + y_n^2(t) + z_n^2(t)]\dot{z}_n(t) - [x_n(t)\dot{x}_n(t) + y_n(t)\dot{y}_n(t) + z_n(t)\dot{z}_n(t)]z_n(t)}{[x_n^2(t) + y_n^2(t) + z_n^2(t)][x_n^2(t) + y_n^2(t) + z_n^2(t)]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

В этих формулах значения $\dot{x}_n(t)$, $\dot{y}_n(t)$ и $\dot{z}_n(t)$ определяются в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned}
\dot{x}_n(t) &= m_{11}(\hat{a}_{1x} + 2\hat{a}_{2x}t + 3\hat{a}_{3x}t^2) + m_{12}(\hat{a}_{1y} + 2\hat{a}_{2y}t + 3\hat{a}_{3y}t^2) + \\
&\quad + m_{13}(\hat{a}_{1z} + 2\hat{a}_{2z}t + 3\hat{a}_{3z}t^2); \\
\dot{y}_n(t) &= m_{21}(\hat{a}_{1x} + 2\hat{a}_{2x}t + 3\hat{a}_{3x}t^2) + m_{22}(\hat{a}_{1y} + 2\hat{a}_{2y}t + 3\hat{a}_{3y}t^2) + \\
&\quad + m_{23}(\hat{a}_{1z} + 2\hat{a}_{2z}t + 3\hat{a}_{3z}t^2); \\
\dot{z}_n(t) &= m_{31}(\hat{a}_{1x} + 2\hat{a}_{2x}t + 3\hat{a}_{3x}t^2) + m_{32}(\hat{a}_{1y} + 2\hat{a}_{2y}t + 3\hat{a}_{3y}t^2) + \\
&\quad + m_{33}(\hat{a}_{1z} + 2\hat{a}_{2z}t + 3\hat{a}_{3z}t^2).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Для создания эффекта работы реальных радиолокационных средств ТИ при моделировании на идеальную выходную измерительную информацию РЛС должны накладываться помехи, чтобы создать эффект наличия погрешностей, вносимых в измерения средствами траекторных измерений. При этом должна учитываться следующая информация о погрешностях измерений средствами ТИ:

дисперсии погрешностей измерений выходных параметров; времена корреляции выходных измерений как по быстроменяющейся, так и по медленноменяющейся составляющим погрешности средств траекторных измерений.

Для придания результатам траекторных измерений характера случайности используется блок зашумления идеальных измерений со значениями вероятностных характеристик погрешностей ТИ, присущих конкретным средствам траекторных измерений.

В практике полигонных испытаний принимается, что погрешности траекторных измерений могут быть описаны стационарными случайными процессами. В этом случае случайные процессы погрешностей ТИ имеют ковариационную функцию $K(\tau)$ следующего вида [48]:

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{T}}, \tag{5.24}$$

где σ^2 — дисперсия стационарного случайного процесса погрешности траекторных измерений; T — время корреляции случайного процесса погрешности траекторных измерений.

В этом случае одномерный случайный процесс коррелированно-го шума измерений $\eta(t)$ можно описать стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\eta(t) = \alpha_\eta \eta(t)dt + \beta_\eta dW_t, \tag{5.25}$$

где α_η , β_η — постоянные коэффициенты; dW — дифференциал винеровского процесса.

Как показано в монографии [48], коэффициенты α_η и β_η уравнения (5.25) определяются выражениями

$$\alpha_\eta = -\frac{1}{T}; \quad \beta_\eta = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{T}}. \quad (5.26)$$

Основная часть траекторных измерительных средств в силу специфики своей работы выдает результаты измерений в дискретные моменты времени. Это позволяет упростить сбор измерительной информации в центр обработки и уменьшить объем памяти запоминающих устройств. Поскольку траекторные измерения формируются на измерительных средствах с дискретностью по времени Δt , то при моделировании дискретных траекторных измерений необходимо учитывать, что дискретный случайный процесс погрешности траекторных измерений имеет ту же ковариационную функцию вида (5.24) с теми же параметрами.

Одномерный случайный процесс погрешности траекторных измерений $\eta(k)$ для дискретных моментов времени $k = 1, \bar{K}$ может быть описан рекуррентным стохастическим уравнением вида [95]

$$\eta(k) = a_\eta \eta(k-1) + b_\eta \varepsilon(k), \quad (5.27)$$

где a_η , b_η — постоянные коэффициенты; $\varepsilon(k)$ — процесс белого шума.

Коэффициенты a_η и b_η рекуррентного уравнения (5.27) могут быть определены по известным значениям дисперсии σ^2 и времени корреляции T непрерывного стационарного случайного процесса погрешности траекторных измерений. Тогда рекуррентное уравнение (5.27) может быть записано в виде [48, 88]

$$\eta(k) = \rho \eta(k-1) + \sigma \sqrt{1-\rho^2} \varepsilon(k), \quad (5.28)$$

где $\rho = e^{-\frac{\Delta t}{T}}$.

Таким образом, i -я компонента векторного дискретного процесса измерений $\xi(k)$ при моделировании может быть представлена в виде суммы вида

$$\xi_i(k) = \xi_{i(\text{идеал})}(k) + \eta_i(k), \quad (5.29)$$

где $\xi_{i(\text{идеал})}(k)$ — значение i -й компоненты многомерных идеальных траекторных измерений в k -й момент времени.

Процесс белого шума $\varepsilon(k)$ легко реализовать на ЭВМ путем генерирования датчиком случайных чисел с нормальным распределением и параметрами $N(0,1)$.

В уравнении (5.29) начальное значение процесса шума измерения $\eta_i(k)$ можно определить следующим образом:

$$\eta_i(0) = \sigma_i \varepsilon_i(0),$$

где $\varepsilon_i(0)$ — начальное значение датчика случайных чисел.

Последующие значения процесса измерений $\xi_i(k)$ формируются в соответствии с выражениями (5.28) и (5.29).

Иногда случайный процесс коррелированной по времени погрешности траекторных измерений можно описать только в виде суммы медленноменяющегося и быстроменяющегося случайных процессов. В такой ситуации случайный процесс погрешности траекторных измерений $\eta(k)$ для дискретных моментов времени $k = \overline{1, K}$ может быть описан рекуррентным стохастическим уравнением вида

$$\eta(k) = a_{\eta(m)} \eta(k-1) + b_{\eta(m)} \varepsilon_1(k) + a_{\eta(b)} \eta(k-1) + b_{\eta(b)} \varepsilon_2(k), \quad (5.30)$$

где $a_{\eta(m)}$, $b_{\eta(m)}$, $a_{\eta(b)}$, $b_{\eta(b)}$ — постоянные коэффициенты; $\varepsilon_1(k)$, $\varepsilon_2(k)$ — процессы белого шума.

Алгоритм зашумления идеальных измерений с требуемыми значениями вероятностных характеристик погрешностей траекторных измерений в целом остается прежним.

На рис. 5.10 представлен обобщенный алгоритм программного модуля формирования выходной траекторной измерительной информации радиолокационным средством траекторных измерений.

В блоке 1 алгоритма вводятся исходные данные, к числу которых относятся:

k ($k = \overline{1, K}$) — дискретные моменты времени проведения измерений радиолокационной станцией ТИ;

$\hat{x}(k)$, $\hat{y}(k)$, $\hat{z}(k)$ — координаты ЛА в дискретные моменты времени проведения измерений в полигонной системе координат;

σ_β , σ_ε , σ_D — средние квадратические погрешности измерения РЛС ТИ соответственно азимута, угла места и дальности;

T_β , T_ε , T_D — времена корреляции погрешности измерения РЛС ТИ соответственно азимута, угла места и дальности.

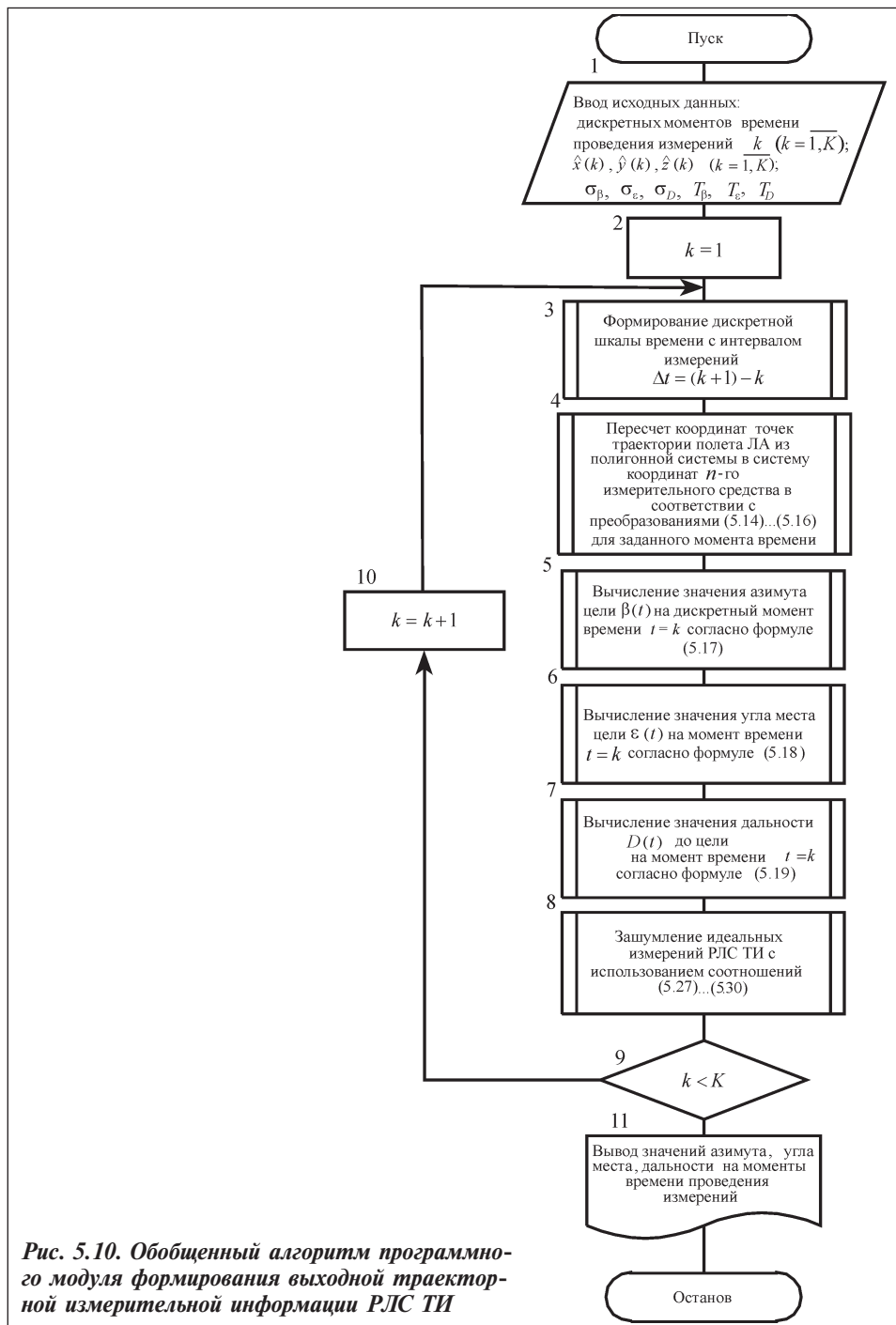


Рис. 5.10. Обобщенный алгоритм программного модуля формирования выходной траекторной измерительной информации РЛС ТИ

В блоке 3 алгоритма формируется дискретная шкала времени с интервалом Δt .

Далее, в блоке 4, проводится пересчет координат точек траектории полета ЛА из полигонной системы в систему координат n -го измерительного средства в соответствии с преобразованиями (5.14)...(5.16) для заданного момента времени k .

В блоках 5...7 выполняется вычисление азимута, угла места и дальности в соответствии с выражениями (5.17)...(5.19) для момента времени k .

В блоке 8 проводится зашумление сформированных идеальных измерений РЛС ТИ для момента времени k с заданными значениями вероятностных характеристик. Для этого используются соотношения (5.27)...(5.30).

Далее формируются измерения РЛС ТИ для всех остальных дискретных моментов времени.

Блок 11 обеспечивает вывод всех значений азимута, угла места, дальности, полученных с РЛС ТИ, на моменты времени проведения измерений. На этом заканчивается работа алгоритма программного модуля формирования выходной траекторной измерительной информации радиолокационным средством траекторных измерений.

Таким образом, рассмотренный обобщенный алгоритм позволяет имитировать результаты измерений радиолокационных станций ТИ и отдельных радиотехнических систем траекторных измерений по различным летательным аппаратам и может использоваться как составная часть виртуального траекторного измерительного комплекса.

5.4. Комплекс математических моделей и алгоритмов формирования результатов измерений оптическими и оптико-электронными средствами траекторных измерений следащего типа

5.4.1. Математические модели и алгоритм программного модуля оценки максимальной дальности обнаружения ЛА оптическими и оптико-электронными системами траекторных измерений

Современные оптико-электронные системы траекторных измерений, как правило, имеют несколько измерительных каналов. В их составе могут быть оптический, инфракрасный, телевизионный и лазерный каналы. В связи с этим для построения алгоритма оценки максимальной дальности обнаружения ЛА оптическими и оптико-электронными системами ТИ требуется разработка четырех моделей априорной оценки максимальной дальности обнаружения ЛА такими измерительными каналами.

Модель оценки максимальной дальности обнаружения ЛА оптическим измерительным каналом

Дальность действия оптического измерительного канала в условиях прозрачной атмосферы по летательному аппарату, имеющему определенные геометрические размеры ($l \times l$), можно определить исходя из разрешающей способности фотоносителя μ , фокусного расстояния объектива f , светочувствительности фотоматериала для фото- и киноплёнок $S_{\text{ф.м.}}$.

Размер фотолinii (пикселя) h можно вычислить по формуле $h = 1/\mu$. Тогда угловой предел разрешения γ оптического измерительного канала будет определяться соотношением [31, 32]

$$\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{f}. \quad (5.31)$$

В этом случае при достаточно больших дальностях до наблюдаемого объекта ($D > 500$ м) справедливо выражение [31]

$$D_{\max(\text{ОК})} = \frac{l}{\operatorname{tg} \gamma}, \quad (5.32)$$

где $D_{\max(\text{ОК})}$ — предельно максимальное расстояние до ЛА, при котором оптический канал позволит зарегистрировать объект в одном пикселе фотоносителя.

Выражение (5.32) имеет практическое применение, оно позволяет достаточно точно априорно оценить потенциально максимальную дальность действия используемого оптического измерительного средства ТИ исходя из углового предела разрешения γ .

Однако максимальная дальность действия используемого оптического измерительного средства ТИ зависит не только от углового предела разрешения γ , но и от способности фотоматериала фото- и киноплёнок зарегистрировать отметку о цели в размере одного пикселя при предельном угловом значении разрешения γ .

Учитывая, что освещенность фотоматериала E связана с яркостью летательного аппарата B зависимостью $E = \frac{Bq^2}{1,4} \tau_{\text{опт}}$, и принимая $\tau_{\text{опт}} = 0,5$, получим [31, 32]

$$B_{\min} = 2,8 \cdot 10^{-4} \frac{1}{q^2 S t_3}, \quad (5.33)$$

где $B_{\min}$ — наименьшая яркость летательного аппарата, необходимая для получения его фотографического изображения при задан-

ных значениях относительного отверстия оптической системы q , светочувствительности фотоматериала S и времени экспозиции t_s . Если яркость ЛА, равная $B_{\min}$, для расстояния $D_{\max(\text{ОК})}$ не обеспечивает фотографического изображения объекта, то необходимо уменьшить зону обнаружения ЛА оптическим измерительным средством по дальности.

Модель оценки максимальной дальности обнаружения ЛА лазерным измерительным каналом при равномерном распределении энергии в сечении пучка лазера

Приведем приемлемые для теории и практики соотношения для расчета дальности действия активных лазерных измерительных каналов ОЭС, показанные в работах [1, 45, 91]. Так, применительно к активным оптико-электронным приборам оптико-электронных средств (ОЭП) с лазерами, для которых имеет место равномерное распределение энергии в сечении пучка лазера, может быть использовано следующее выражение для максимальной дальности действия $D_{\max_1}(\text{ЛК диф.р})$ при диффузном рассеивании излучения:

$$D_{\max_1}(\text{ЛК диф.р}) = \sqrt[4]{\frac{\Phi_{\text{л}} A_0 A_{\text{вх}} \tau_{\text{п}} \tau_0 \tau_c^2 \tau_{\text{ф}} \rho_g \cos^2 \alpha}{\pi \omega_{\text{п}} m \Phi_{\text{э.п}} \kappa(\Delta f)}}, \quad (5.34)$$

где $\Phi_{\text{л}}$, $\Phi_{\text{э.п}}$ — мощность лазера и пороговый поток приемника по излучению эталонного приемника на единицу полосы частот соответственно; $\omega_{\text{п}}$ — телесный угол расходимости лазерного излучения на выходе передающей части активного ОЭП; $\tau_{\text{п}}$, τ_0 — коэффициенты пропускания передающей и приемной частей прибора соответственно; τ_c — коэффициент пропускания слоя атмосферы между объектом и прибором; $\tau_{\text{ф}}$ — коэффициент пропускания фильтра; ρ_g — диффузный коэффициент отражения поверхности лоцируемого объекта; α — угол между нормалью к поверхности объекта и оптической осью приемной части прибора (при выводе выражения (5.34) считалось, что оптические оси передающей и приемной частей прибора совпадают); $A_{\text{вх}}$ — площадь входного зрачка прибора, на который опирается телесный угол $\omega_{\text{п}}$; A_0 — площадь поверхности объекта, которая полностью освещается лучами лазера передающей части прибора; $\kappa(\Delta f)$ — коэффициент, учитывающий изменение частоты модуляции и ширины полосы пропускания усилителя по сравнению со значениями при эталонных условиях измерения; m — отношение сигнал—шум.

В случаях, когда угол $\omega_{\text{п}}$ не превышает угловых размеров объекта, отраженное от объекта излучение будет поступать на приемник

излучения не со всей поверхности объекта, а только с его облучаемой части. При этом выражение для максимальной дальности действия принимает другой вид [45]:

$$D_{\max_2}(\text{ЛК диф.р}) = \sqrt{\frac{\Phi_{\text{л}} A_{\text{вх}} \tau_{\text{п}} \tau_{\text{с}}^2 \tau_{\text{ф}} \rho_{\text{г}} \cos \alpha}{\pi m \Phi_{\text{э.п}} \kappa(\Delta f)}}. \quad (5.35)$$

Иногда в целях увеличения дальности действия приборов на объектах устанавливают специальные уголковые отражатели (катафоты). При их использовании дальность действия ОЭП для случая локаторования сферического объекта радиусом R рассчитывается по формуле [45, 91]

$$D_{\max}(\text{ЛК катаф}) = \sqrt[4]{\frac{16 \Phi_{\text{л}} R^2 A_{\text{отр}} A_{\text{вх}} \rho_{\text{от}} \tau_{\text{п}} \tau_{\text{с}}^2 \tau_{\text{ф}} \cos \alpha \cdot 10^8}{m \Phi_{\text{э.п}} \pi^2 \theta_{\text{л}}^2 \left(\frac{\lambda}{\alpha \cos d} + 0,05 \delta \right)^{1/2} \kappa(\Delta f)}}, \quad (5.36)$$

где λ — длина волны лазера; d — линейный размер входной грани одного элемента отражателя; $A_{\text{отр}}$ — площадь отражающей поверхности всего блока уголковых отражателей; $\rho_{\text{от}}$ — коэффициент отражения катафота; δ — расходимость в секундах отраженного пучка из-за неточности изготовления отражателя; $\theta_{\text{л}}$ — плоский угол расходимости лазерного пучка предающей части прибора.

Таким образом можно рассчитать дальность действия оптико-электронного локатора по объекту, снабженному блоком уголковых отражателей.

Модель оценки максимальной дальности обнаружения ЛА телевизионным измерительным каналом

Обнаружение ЛА с использованием телевизионного канала осуществляется в условиях, когда объект имеет контраст и проецируется на излучающем фоне. Основными факторами, влияющими на расчет максимальной дальности действия телевизионного измерительного канала средства ТИ, являются параметры фоточувствительной матрицы, характеристики фотообъектива, коэффициент превышения контраста ЛА по отношению к излучающему фону.

Предельно максимальную дальность действия телевизионного измерительного канала по ЛА, зарегистрированному в одном пикселе фоточувствительной матрицы, имеющему геометрические размеры $(l \times l)$, по аналогии с фотоканалом возможно опре-

делить исходя из следующих исходных данных: разрешающей способности фоточувствительной матрицы λ , фокусного расстояния объектива f .

При этом размер фотопикселя h можно вычислить по формуле $h = 1/\lambda$.

Тогда угловой предел разрешения γ оптического измерительного канала будет определяться соотношением [31]

$$\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{f}. \quad (5.37)$$

В случае достаточно больших дальностей до наблюдаемого объекта ($D > 500$ м) справедливо выражение

$$D_{\max(\text{ТВ раз})} = \frac{l}{\operatorname{tg} \gamma}, \quad (5.38)$$

где $D_{\max(\text{ТВ раз})}$ — предельно максимальное расстояние до ЛА, при котором телевизионный канал позволит зарегистрировать объект в одном пикселе фоточувствительной матрицы.

В пределах максимального расстояния до ЛА $D_{\max(\text{ТВ раз})}$ можно определить максимальное расстояние до ЛА $D_{\max(\text{ТВ})_1}$ с учетом параметров фоточувствительной матрицы, параметров атмосферы и коэффициента превышения контраста летательного аппарата по отношению к излучающему фону.

Рассмотрим соотношения для расчета порогового потока чувствительного элемента фоточувствительной матрицы (коэффициента превышения контраста ЛА по отношению к излучающему фону).

Если объект и фон находятся в поле зрения телевизионного канала, то освещенность в изображении объекта и фона на фоточувствительной матрице, расположенной в фокальной плоскости объектива, $E_{o(\phi)}$, лк, связана с яркостью объекта B_o и яркостью фона B_ϕ соотношением [31, 91]

$$E_{o(\phi)} = B_{o(\phi)} \frac{\pi \tau_0 K_\beta \cos^4 \beta (D/f)^2}{4(1+V)^2}, \quad (5.39)$$

где τ — коэффициент пропускания атмосферы; τ_0 — коэффициент пропускания объектива; K_β — коэффициент виньетирования оптической системы; β — угол между оптической осью канала и направлением на объект; V — линейное увеличение оптической системы, равное отношению заднего отрезка объектива к расстоянию до объ-

екта; D — диаметр входного зрачка объектива; f — фокусное расстояние объектива.

Для удаленных объектов (дальность более 500 м) $V = 0$ и для упрощения формулы примем $K_\beta \approx 1$ и $\cos^4 \beta \approx 1$. В итоге формула (5.39) примет вид [31, 91]

$$E_{o(\Phi)} = B_{o(\Phi)} \frac{\pi \tau \tau_0 (D/f)^2}{4}. \quad (5.40)$$

С учетом выражения (5.40) для вычисления максимальной дальности действия телевизионного измерительного канала $D_{\max(TB)_1}$ получено соотношение [31, 91]

$$D_{\max_1(TB)} = \sqrt{\frac{B_o \kappa_p}{0,05 B_\Phi \omega_{зр} \kappa_\Phi h}}, \quad (5.41)$$

где B_o — яркость объекта; κ_p — коэффициент прозрачности атмосферы; B_Φ — яркость фона; $\omega_{зр}$ — угол поля зрения прибора; κ_Φ — коэффициент использования потока от фона; h — глубина модуляции флюктуации потока излучения от фона.

Модель оценки максимальной дальности обнаружения ЛА инфракрасным (тепловизионным) измерительным каналом

Максимальная дальность обнаружения и распознавания ЛА является одним из важнейших показателей качества работы измерительных приборов с инфракрасным (тепловизионным) измерительным каналом.

Существует множество методик расчета дальности обнаружения ЛА инфракрасным измерительным каналом, однако практически все они носят полуэмпирический характер и дают лишь приближенное решение.

Основными факторами, влияющими на расчет максимальной дальности действия тепловизионного измерительного канала средства ТИ, являются параметры фоточувствительной матрицы инфракрасного (ИК) диапазона, характеристики фотообъектива, инфракрасные характеристики объекта наблюдения.

Предельно максимальную дальность действия тепловизионного измерительного канала по ЛА, зарегистрированному в одном пикселе фоточувствительной матрицы ИК-диапазона и имеющему геометрические размеры ($l \times l$), возможно определить таким же образом, как это было сделано для телевизионного канала, исходя из разрешающей способности фоточувствительной матрицы ИК-диапазона и фокусного расстояния объектива.

Наиболее простыми соотношениями для расчета дальности действия $D_{\max_1}$ (ИК) и пороговой чувствительности E_{Π} на входном зрачке прибора тепловизионного измерительного канала обнаружения и сопровождения для случая работы при отсутствии фона являются [49, 86, 91]

$$D_{\max_1}(\text{ИК}) = \left[\frac{IA_{\text{вх}}\kappa_p}{m\Phi_{\text{э.п}}\kappa(\Delta f)\kappa_{\text{э}}} \right]^{1/2}, \quad (5.42)$$

$$E_{\Pi} = \frac{m\Phi_{\text{э.п}}\kappa(\Delta f)\kappa_{\text{э}}}{A_{\text{вх}}\kappa_p}, \quad (5.43)$$

где I — интегральная сила излучения объекта в направлении прибора; κ_p — коэффициент использования приемником излучения объекта с учетом ослабления средой (атмосферой) и деталями оптической системы; $\kappa_{\text{э}}$ — коэффициент использования приемником излучения эталонного источника; $A_{\text{вх}}$ — площадь входного зрачка объектива ОЭП; $\Phi_{\text{э.п}}$ — пороговый поток приемника по излучению эталонного источника на единицу полосы частот; m — отношение сигнал—шум; $\kappa(\Delta f)$ — коэффициент, учитывающий изменение частоты модуляции и ширины полосы усилителя по сравнению со значениями в эталонных условиях.

При использовании выражений (5.42) и (5.43) следует принять во внимание, что параметры κ_p и $\kappa_{\text{э}}$ рассчитываются по формулам [49, 86]

$$\kappa_p = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S(\lambda)\Phi_o(\lambda)\tau_o(\lambda)\tau_a(\lambda)d\lambda}{\int_0^{\infty} \Phi_o(\lambda)d\lambda}, \quad (5.44)$$

$$\kappa_{\text{э}} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S(\lambda)\Phi_{\text{э}}(\lambda)d\lambda}{\int_0^{\infty} \Phi_{\text{э}}(\lambda)d\lambda}, \quad (5.45)$$

где $S(\lambda)$ — относительная спектральная чувствительность приемника излучения; λ_1, λ_2 — длины волн левой и правой границ спектральной чувствительности приемника излучения соответственно;



$\Phi_o(\lambda)$ — спектральный поток излучения объекта; $\Phi_s(\lambda)$ — спектральный поток излучения эталонного источника; τ_o, τ_a — спектральный коэффициент пропускания соответственно оптической системы ОЭП и слоя атмосферы между объектом наблюдения и прибором.

Коэффициент $\kappa(\Delta f) = \sqrt{\Delta f}$ в случае, когда ширина полосы частот Δf усилителя мала по сравнению с частотой модуляции f_m . В тех случаях, когда частота f_m отличается от эталонной частоты модуляции f_0 потока излучения, указанный коэффициент вычисляют по формуле

$$\kappa(\Delta f) = [(f_0 / f_m) \Delta f]^{1/2}. \quad (5.46)$$

В случае наблюдения объекта на равномерно излучающем фоне для вычисления дальности действия тепловизионного измерительного канала $D_{\max_2}(\text{ИК})$ и пороговой чувствительности E_{Π} на входном зрачке прибора используются выражения [49, 86]

$$D_{\max_2}(\text{ИК}) = \left[\frac{A_{\text{вх}} A_o (L_p \kappa_p - L_{\Phi} \kappa_{\Phi})}{m \Phi_{\text{э.п}} \kappa(\Phi_{\Phi}) \kappa(\Delta f) \kappa_{\text{э}}} \right]^{1/2}, \quad (5.47)$$

$$E_{\Pi} = \frac{m \Phi_{\text{э.п}} \kappa(\Delta f) \kappa(\Phi_{\Phi}) \kappa_{\text{э}}}{A_{\text{вх}} \kappa_p}, \quad (5.48)$$

где L_p, L_{Φ} — интегральные яркости излучения объекта и фона соответственно; κ_{Φ} — коэффициент использования приемником излучения фона; $\kappa(\Phi_{\Phi})$ — коэффициент, характеризующий ухудшение чувствительности приемника излучения при засветке фоном; A_o — площадь проекции объекта на направление наблюдения.

Интересным является наблюдение объекта на неравномерно излучающем фоне. Для этого случая получено следующее выражение для дальности действия тепловизионного измерительного канала $D_{\max_3}(\text{ИК})$ [49, 86]:

$$D_{\max_3}(\text{ИК}) = \left[\frac{L_p A_o \kappa_p}{m n L_{\Phi} \kappa_{\Phi} \omega_{\text{зр}}} \right]^{1/2}, \quad (5.49)$$

где n — глубина модуляции потока излучения от фона; $\omega_{\text{зр}}$ — телесный угол поля зрения оптической системы ОЭП.

Из приведенной формулы видно, что дальность действия ОЭП при их работе на неравномерном фоне в отличие от дальности при работе на равномерном фоне не зависит от площади входного зрачка $A_{\text{вх}}$.

Алгоритм программного модуля оценки максимальной дальности обнаружения ЛА оптическими и оптико-электронными системами траекторных измерений

Суть алгоритма программного модуля оценки максимальной дальности обнаружения летательного аппарата оптическими и оптико-электронными системами траекторных измерений заключается в оценке максимальной дальности обнаружения конкретного типа ЛА оптическим, телевизионным, инфракрасным или лазерным измерительным каналом выбранной системы траекторных измерений.

Поскольку, как правило, в одной системе траекторных измерений одновременно не существует четырех видов измерительных каналов, то этот алгоритм должен в качестве исходных данных включать число и виды имеющихся в выбранной системе измерительных каналов. При задании таких исходных данных алгоритм поочередно проводит расчет максимальной дальности обнаружения ЛА каждым измерительным каналом, имеющимся в ОЭС. Так, для оптических измерительных систем проводится оценка потенциальной дальности обнаружения ЛА оптическим измерительным каналом $D_{\max(\text{ОК})}$ по допустимому разрешению в соответствии с формулой (5.32). Для ОЭС, имеющих лазерный измерительный канал, проводится оценка максимальной дальности обнаружения ЛА таким каналом для случая диффузного рассеивания излучения $D_{\max(\text{ЛК диф.р})}$ по формулам (5.34) и (5.35), а также вычисляется максимальная дальность обнаружения ЛА лазерным измерительным каналом для случая применения на борту катафотов $D_{\max(\text{ЛК катаф})}$ по формуле (5.36).

При необходимости в алгоритме проводится оценка максимальной дальности обнаружения ЛА телевизионным измерительным каналом по допустимому разрешению $D_{\max(\text{ТВ раз})}$ в соответствии с формулой (5.38), а также оценка максимальной дальности обнаружения ЛА телевизионным измерительным каналом по допустимому контрасту $D_{\max(\text{ТВ})_1}$ в соответствии с формулой (5.41).

Окончательная оценка максимальной дальности обнаружения ЛА телевизионным измерительным каналом $D_{\max(\text{ТВ})}$ проводится из условия

$$D_{\max(\text{ТВ})} = \min\{D_{\max_1(\text{ТВ})}, D_{\max(\text{ТВ раз})}\}.$$

При наличии в ОЭС инфракрасного измерительного канала в алгоритме проводится оценка максимальной дальности обнаружения

ЛА таким измерительным каналом $D_{\max(\text{ИК})}$ с учетом заданных условий проведения измерительного эксперимента в соответствии с выражениями (5.42)...(5.49).

Таким образом, в результате работы алгоритма может оцениваться следующий набор данных: $D_{\max(\text{ОК})}$, $D_{\max(\text{ЛК диф.р})}$, $D_{\max(\text{ЛК катаф})}$, $D_{\max(\text{ТВ})}$, $D_{\max(\text{ИК})}$.

5.4.2. Алгоритмы программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА оптическими и оптико-электронными средствами траекторных измерений следящего типа

Практически все оптические и оптико-электронные средства траекторных измерений следящего типа имеют зону обнаружения и сопровождения ЛА в виде полусферы. Однако поскольку эти измерительные средства имеют, как правило, несколько измерительных каналов, то одно оптико-электронное средство будет иметь несколько зон обнаружения ЛА в виде полусфер, но с разными радиусами. Это объясняется тем, что для одного оптико-электронного средства различные измерительные каналы имеют разные дальности действия.

Модель оценки зоны обнаружения ЛА любым измерительным каналом ОЭС в зоне их обзора практически не отличается от аналогичной модели для радиолокационных средств ТИ. Однако в связи с наличием достаточно широкого ряда разнотипных ОЭС, имеющих различные наборы измерительных каналов, возникает необходимость в разработке нескольких алгоритмов оценки зон обнаружения ЛА оптико-электронными средствами ТИ.

Для решения этой задачи необходимо рассмотреть несколько вариантов комплектации различных типов оптико-электронных средств ТИ.

Вариант № 1 — ОЭС имеет фотоканал с дальностью действия $D_{\text{фк}}$, ТВ-канал с дальностью действия $D_{\text{ТВ}}$ и ИК-канал с дальностью действия $D_{\text{ИК}}$, что реализовано в ОЭС типа «Янтарь». При этом соблюдается условие $D_{\text{ИК}} > D_{\text{фк}} > D_{\text{ТВ}}$.

Тогда если дальность до ЛА ($D_{\text{ЛА}}$) будет меньше $D_{\text{ТВ}}$, т.е. $D_{\text{ЛА}} < D_{\text{ТВ}}$, то ОЭС будет сопровождать ЛА в автоматическом режиме и выдавать информацию по ТВ-каналу и фотоканалу.

Если $D_{\text{ИК}} > D_{\text{фк}} > D_{\text{ЛА}} > D_{\text{ТВ}}$, то ОЭС будет сопровождать ЛА в автоматическом режиме и выдавать информацию только с фотоканала. При этом будет отсутствовать выдача измерительной информации в режиме реального времени (РРВ).

Если $D_{\text{фк}} < D_{\text{ЛА}} < D_{\text{ИК}}$, то ОЭС будет сопровождать ЛА в автоматическом режиме по угловым координатам за счет работы ИК-канала, однако точность выдачи траекторной информации будет низкой из-за отсутствия работы высокоточных измерительных каналов.

При $D_{ИК} < D_{ЛА}$ ОЭС не сможет сопровождать ЛА и выдавать какую-либо траекторную информацию.

Вариант № 2 — ОЭС имеет ТВ-канал с дальностью действия $D_{ТВ}$, ИК-канал с дальностью действия $D_{ИК}$ и канал лазерного дальномера с дальностью действия $D_{ЛД}$, что реализовано в ОЭС типа «Вереск». При этом соблюдается следующее условие: $D_{ИК} > D_{ТВ} > D_{ЛД}$.

Тогда при $D_{ЛА} < D_{ЛД}$ ОЭС такого типа может реализовывать однопунктный метод измерения параметров траекторий полета ЛА с высокой точностью.

При $D_{ИК} > D_{ТВ} > D_{ЛА} > D_{ЛД}$ ОЭС будет сопровождать ЛА в автоматическом режиме и выдавать информацию по ТВ-каналу.

Если $D_{ИК} > D_{ЛА} > D_{ТВ} > D_{ЛД}$, то данное измерительное средство сможет сопровождать ЛА в автоматическом режиме за счет работы ИК-канала, но будет выдавать измерения с низкой точностью из-за отсутствия работы высокоточных измерительных каналов.

Вариант № 3 — ОЭС имеет фотоканал с дальностью действия $D_{фк}$ и ИК-канал с дальностью действия $D_{ИК}$, что реализовано в ОЭС типа «Висмутин». При этом соблюдается условие $D_{фк} > D_{ИК}$.

В этом случае при $D_{ЛА} < D_{ИК}$ ОЭС будет работать в режиме автоматического сопровождения ЛА по угловым координатам и выдавать информацию по фотоканалу в режиме слепополетной обработки.

Если же $D_{фк} > D_{ЛА} > D_{ИК}$, то прибор может работать в режиме сопровождения ЛА с использованием оптических визиров и выдавать информацию по фотоканалу в режиме слепополетной обработки.

Возможны также и другие варианты работы ОЭС в зависимости от их типов и комплектации.

Кроме того, для обеспечения наблюдаемости летательных аппаратов оптическими и оптико-электронными средствами ТИ следящего типа необходимо проверить потенциальные возможности их систем автоматического сопровождения по отслеживанию ЛА на траекториях его полета.

При этом возможность сопровождения ЛА на траекториях его полета определяется условиями

$$V_{\beta_{ОЭС}} \geq V_{\beta_{\max}}; V_{\epsilon_{ОЭС}} \geq V_{\epsilon_{\max}}; \dot{V}_{\beta_{ОЭС}} \geq \dot{V}_{\beta_{\max}}; \dot{V}_{\epsilon_{ОЭС}} \geq \dot{V}_{\epsilon_{\max}}, \quad (5.50)$$

где $V_{\beta_{ОЭС}}$, $V_{\epsilon_{ОЭС}}$ — реальные значения скоростей изменения соответственно азимута и угла места сопровождаемого оптико-электронным средством ЛА; $\dot{V}_{\beta_{ОЭС}}$, $\dot{V}_{\epsilon_{ОЭС}}$ — реальные значения ускорений изменения соответственно азимута и угла места сопровождаемого оптико-электронным средством ЛА; $V_{\beta_{\max}}$, $V_{\epsilon_{\max}}$ — приведенные в ТТХ автоматической системы сопровождения ОЭС значения

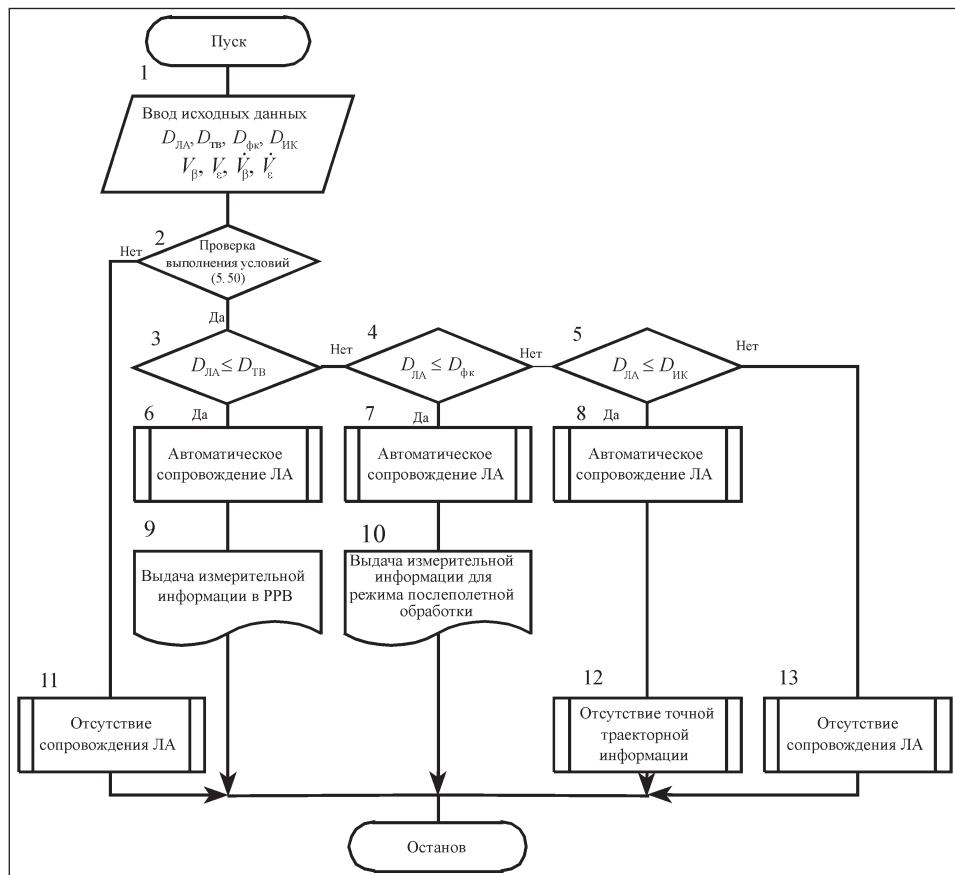


Рис. 5.11. Обобщенный алгоритм программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА оптико-электронным средством ТИ типа ОЭС «Янтарь»

максимальной скорости сопровождения целей по азимуту и по углу места соответственно; $\dot{V}_{\beta_{\max}}$, $\dot{V}_{\epsilon_{\max}}$ — приведенные в ТТХ автоматической системы сопровождения ОЭС значения максимального ускорения сопровождения целей по азимуту и по углу места соответственно.

При выполнении перечисленных условий будут осуществляться наблюдаяемость и отслеживание оптическими и оптико-электронными средствами ТИ следящего типа летательных аппаратов на траекториях их полета.

Обобщенные алгоритмы программных модулей оценки зон наблюдения ЛА оптико-электронными средствами ТИ типа ОЭС «Янтарь», «Вереск» и «Висмутин» приведены на рис. 5.11...5.13.

Обобщенный алгоритм программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА оптико-электронным средством ТИ типа ОЭС «Янтарь» (рис. 5.11). В блоке 1 этого алгоритма вводятся исходные данные:

$D_{\text{ЛА}}$ — расстояние от ЛА до точки стояния ОЭС;

$D_{\text{ТВ}}$ — максимальная дальность обнаружения ЛА телевизионным каналом;

$D_{\text{фк}}$ — максимальная дальность обнаружения ЛА фотоканалом;

$D_{\text{ИК}}$ — максимальная дальность обнаружения ЛА инфракрасным каналом;

$V_{\text{ОЭС}}, V_{\text{ОЭС}}$ — реальные значения скоростей изменения соответственно азимута и угла места сопровождаемого оптико-электронным средством объекта;

$\dot{V}_{\text{ОЭС}}, \dot{V}_{\text{ОЭС}}$ — реальные значения ускорений изменения соответственно азимута и угла места сопровождаемого оптико-электронным средством объекта.

В блоке 2 алгоритма проводится проверка возможности сопровождения ЛА по допустимой динамике автоматической системы слежения средства ТИ. При положительном решении выполняется последовательная проверка возможности сопровождения ОЭС летательного аппарата телевизионным каналом, фотоканалом или инфракрасным каналом. В противном случае принимается решение о невозможности сопровождения ЛА рассматриваемым оптико-электронным средством.

Далее, в блоке 3, проверяется возможность сопровождения ЛА телевизионным измерительным каналом. При выполнении условия $D_{\text{ЛА}} \leq D_{\text{ТВ}}$ принимается решение о том, что ОЭС проводит автоматическое сопровождение ЛА, а блок 9 алгоритма обеспечивает выдачу измерительной информации в режиме реального времени. В противном случае в блоке 5 проводится проверка возможности сопровождения ЛА фотоканалом.

При выполнении условия $D_{\text{ЛА}} \leq D_{\text{фк}}$ принимается решение о том, что ОЭС проводит автоматическое сопровождение ЛА телевизионным каналом, а блок 9 алгоритма обеспечивает выдачу измерительной информации для режима послеполетной обработки. При невыполнении условия, проверяемого в блоке 4, в блоке 5 алгоритма проводится проверка возможности сопровождения ЛА инфракрасным каналом оптико-электронного средства.

При выполнении условия $D_{\text{ЛА}} \leq D_{\text{ИК}}$ принимается решение о том, что ОЭС проводит автоматическое сопровождение ЛА инфракрасным каналом, однако измерительное средство будет выдавать информацию с низкой точностью из-за отсутствия поправок на отклонение ЛА от оптической оси ОЭС. В противном случае прини-

мается решение о невозможности сопровождения ЛА рассматриваемым оптико-электронным средством.

Обобщенный алгоритм программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА оптико-электронным средством ТИ типа ОЭС «Вереск» (рис. 5.12). В блоке 1 этого алгоритма вводятся исходные данные:

$D_{\text{ЛА}}$ — расстояние от ЛА до точки стояния ОЭС;

$D_{\text{ТВ}}$ — максимальная дальность обнаружения ЛА телевизионным каналом;

$D_{\text{ЛД}}$ — максимальная дальность обнаружения ЛА лазерным измерительным каналом;

$D_{\text{ИК}}$ — максимальная дальность обнаружения ЛА инфракрасным каналом;

$V_{\text{ОЭС}}, V_{\text{ОЭС}}$ — реальные значения скоростей изменения соответственно азимута и угла места сопровождаемого оптико-электронным средством объекта;

$\dot{V}_{\text{ОЭС}}, \dot{V}_{\text{ОЭС}}$ — реальные значения ускорений изменения соответственно азимута и угла места сопровождаемого оптико-электронным средством объекта.

В блоке 2 алгоритма проводится проверка возможности сопровождения ЛА по допустимой динамике автоматической системы слежения средства ТИ. При положительном решении выполняется последовательная проверка возможности сопровождения ОЭС летательного аппарата лазерным, телевизионным или инфракрасным измерительным каналом. В противном случае принимается решение о невозможности сопровождения ЛА рассматриваемым оптико-электронным средством.

В блоке 3 проверяется возможность сопровождения ЛА лазерным дальномером. При выполнении условия $D_{\text{ЛА}} \leq D_{\text{ЛД}}$ принимается решение о том, что ОЭС проводит автоматическое сопровождение ЛА; блок 8 обеспечивает выдачу измерительной информации в режиме реального времени для реализации однопунктного метода измерения координат ЛА. В противном случае в блоке 4 проводится проверка возможности сопровождения ЛА телевизионным измерительным каналом.

При выполнении условия $D_{\text{ЛА}} \leq D_{\text{ТВ}}$ принимается решение о том, что ОЭС проводит автоматическое сопровождение ЛА телевизионным измерительным каналом; блок 8 алгоритма обеспечивает выдачу измерительной информации об угловых координатах летательного аппарата в режиме реального времени. При невыполнении условия, проверяемого в блоке 4, в блоке 5 алгоритма проводится проверка возможности сопровождения ЛА инфракрасным измерительным каналом оптико-электронного средства.

При выполнении условия $D_{\text{ЛА}} \leq D_{\text{ИК}}$ принимается решение о том, что ОЭС проводит автоматическое сопровождение ЛА инфра-

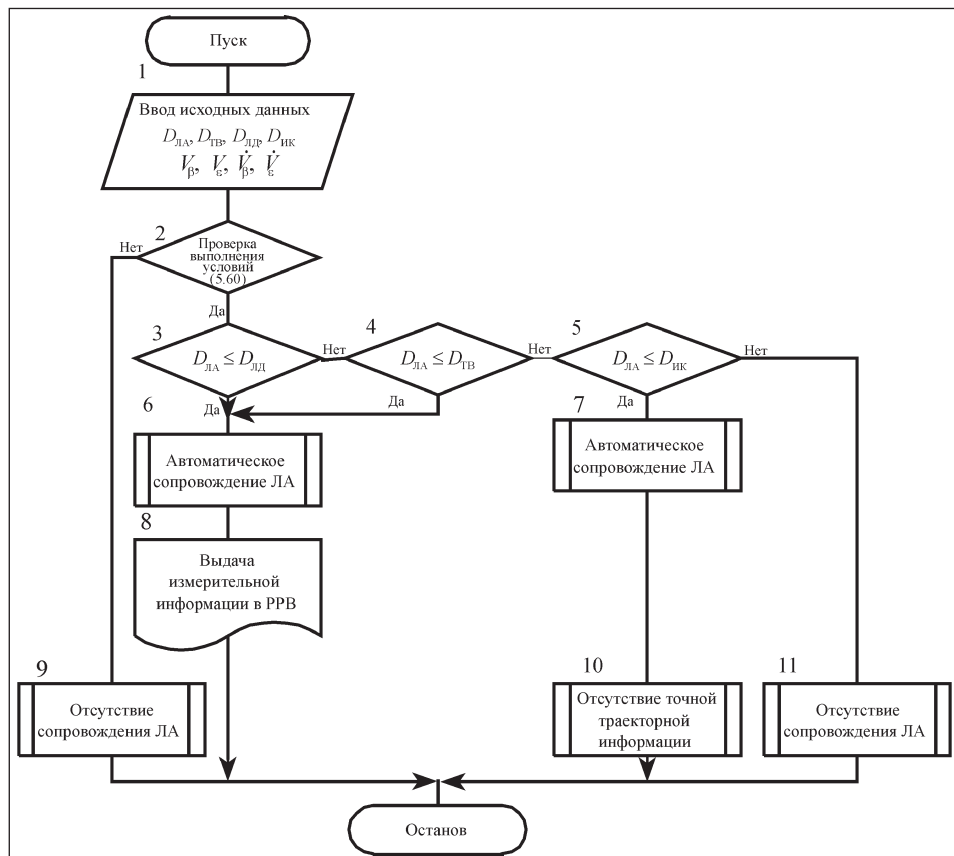


Рис. 5.12. Обобщенный алгоритм программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА оптико-электронным средством ТИ типа ОЭС «Вереск»

красным каналом, однако измерительное средство будет выдавать информацию с низкой точностью из-за отсутствия поправок на отклонение ЛА от оптической оси ОЭС. В противном случае принимается решение о невозможности сопровождения ЛА рассматриваемым оптико-электронным средством.

Обобщенный алгоритм программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА оптико-электронным средством ТИ типа ВКТ «Висмутин» (рис. 5.13). В блоке 1 этого алгоритма вводятся исходные данные:

$D_{\text{ЛА}}$ — расстояние от ЛА до точки стояния ОЭС;
 $D_{\text{фк}}$ — максимальная дальность обнаружения ЛА фотоканалом;
 $D_{\text{ИК}}$ — максимальная дальность обнаружения ЛА инфракрасным каналом;

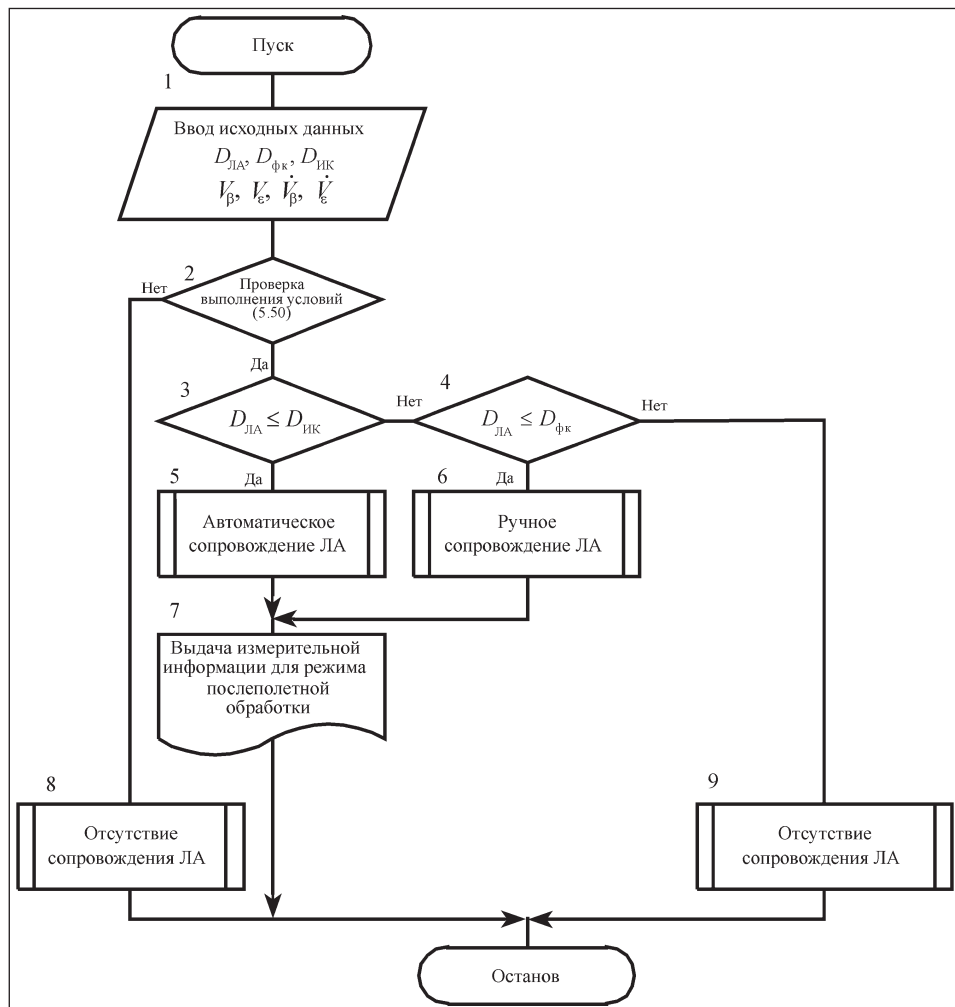


Рис. 5.13. Обобщенный алгоритм программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА оптико-электронным средством ТИ типа ВКТ «Висмутин»

$V_{\beta_{\text{оэс}}}, V_{\varepsilon_{\text{оэс}}}$ — реальные значения скоростей изменения соответственно азимута и угла места сопровождаемого оптико-электронным средством объекта;

$\dot{V}_{\beta_{\text{оэс}}}, \dot{V}_{\varepsilon_{\text{оэс}}}$ — реальные значения ускорений изменения соответственно азимута и угла места сопровождаемого оптико-электронным средством объекта.

В блоке 2 алгоритма проводится проверка возможности сопровождения ЛА по допустимой динамике автоматической сис-

темы слежения средства ТИ. При положительном решении проводится последовательная проверка возможности сопровождения ОЭС летательного аппарата фотоканалом или инфракрасным каналом. В противном случае принимается решение о невозможности сопровождения ЛА рассматриваемым оптико-электронным средством.

В блоке 3 проверяется возможность автоматизированного сопровождения ЛА инфракрасным каналом. При выполнении условия $D_{\text{ЛА}} \leq D_{\text{ИК}}$ принимается решение о том, что ОЭС проводит автоматическое сопровождение ЛА; блок 7 обеспечивает выдачу измерительной информации для режима слепополетной обработки информации. В случае невыполнения условия, проверяемого в блоке 3, в блоке 4 проводится проверка возможности сопровождения ЛА фотоканалом.

При выполнении условия $D_{\text{ЛА}} \leq D_{\text{фк}}$ принимается решение о том, что ОЭС проводит ручное сопровождение ЛА с помощью оптических визиров; блок 7 алгоритма обеспечивает выдачу измерительной информации для режима слепополетной обработки информации.

При невыполнении условия, проверяемого в блоке 4, принимается решение о невозможности сопровождения летательного аппарата рассматриваемым оптико-электронным средством.

Обобщенный алгоритм программного модуля формирования выходной информации оптико-электронных средств ТИ. Математическая модель имитации работы оптико-электронных средств ТИ в части формирования выходной траекторной измерительной информации аналогична соответствующей модели имитации работы радиолокационных средств ТИ. Однако при испытаниях СТК используются как ОЭС, которые могут измерять только угловые координаты ЛА, так и ОЭС, измеряющие еще и наклонную дальность до ЛА. Объем и вид имитируемой выходной информации ОЭС в этих двух случаях будет разным. Поэтому на рис. 5.14 представлен обобщенный алгоритм программного модуля имитации формирования выходной траекторной измерительной информации оптико-электронными средствами траекторных измерений для таких двух классов ОЭС.

В блоке 1 алгоритма вводятся исходные данные:

$t = k$ ($k = 1, K$) — дискретные моменты времени проведения измерений ОЭС ТИ;

$\hat{x}(k), \hat{y}(k), \hat{z}(k)$ — координаты ЛА в дискретные моменты времени проведения измерений в полигонной системе координат;

$\sigma_\beta, \sigma_\varepsilon, \sigma_D$ — средние квадратические погрешности измерения конкретным типом ОЭС азимута, угла места и дальности соответственно;

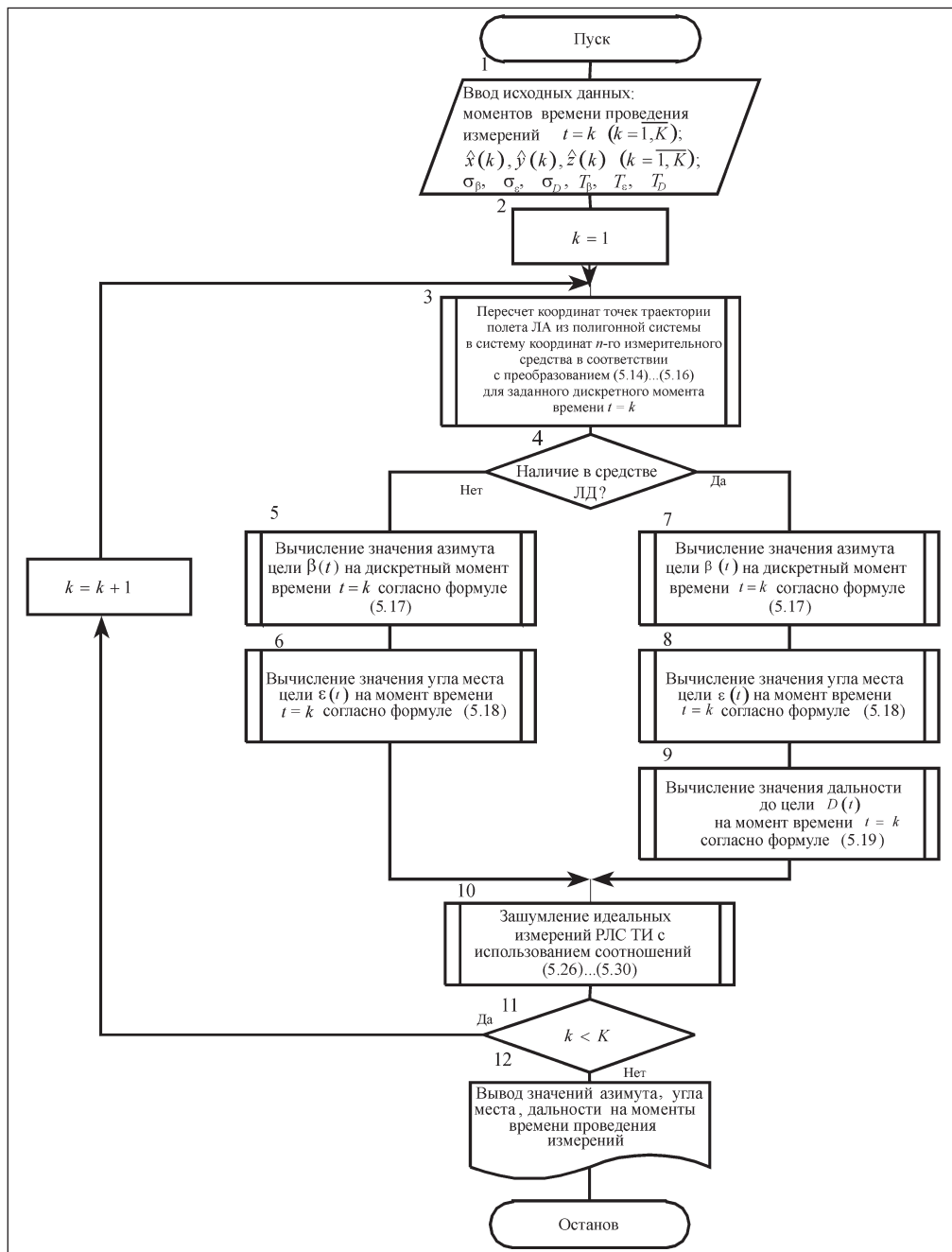


Рис. 5.14. Обобщенный алгоритм программного модуля имитации формирования выходной траекторной измерительной информации оптико-электронными средствами ТИ

$T_\beta, T_\varepsilon, T_D$ — времена корреляции погрешности измерения конкретным типом ОЭС азимута, угла места и дальности соответственно.

В блоке 3 алгоритма проводится пересчет координат точек траектории полета ЛА из полигонной системы в систему координат n -го измерительного средства в соответствии с преобразованиями (5.14)...(5.16) для заданного дискретного момента времени $t = k$.

В блоке 4 выполняется проверка наличия в измерительном средстве канала лазерного дальномера.

В случае наличия лазерного дальномера в блоках 7...9 вычисляются азимут, угол места и дальность в соответствии с выражениями (5.17)...(5.19) для момента времени $t = k$.

При отсутствии в ОЭС канала лазерного дальномера в блоках 5 и 6 вычисляются только азимут и угол места в соответствии с выражениями (5.17) и (5.18) для момента времени $t = k$.

Затем, в блоке 10 алгоритма, проводится зашумление сформированных идеальных измерений оптико-электронных средств ТИ для момента времени $t = k$ погрешностями с заданными значениями вероятностных характеристик.

Далее проводится имитация измерений оптико-электронных средств ТИ для всех остальных дискретных моментов времени, а блоком 12 обеспечивается вывод всех сгенерированных значений азимута, угла места и дальности для этих средств на моменты времени проведения измерений. На этом завершается работа алгоритма программного модуля имитации работы оптико-электронных средств траекторных измерений в части формирования выходной траекторной измерительной информации.

5.5. Особенности моделирования работы фоторегистрирующих станций траекторных измерений патрульного типа

При испытаниях сложных технических комплексов широко используются фоторегистрирующие станции траекторных измерений (ФРС ТИ) патрульного типа, которые перед проведением натурных экспериментов заранее устанавливают для наблюдения определенного участка пространства, в пределах которого должны пролететь интересующие испытателей летательные аппараты. Зона наблюдения фоторегистрирующей станции траекторных измерений патрульного типа имеет вид рупора с раскрывом в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Способ определения параметров движения ЛА в пространстве с помощью таких фоторегистрирующих станций основан на принципе пространственной засечки положения летательного аппарата, для чего ведется одно-

временное фотографирование этого аппарата с трех точек местности, расположенных по углам базисного треугольника. Такое расположение фоторегистрирующих станций позволяет получать текущие значения координат перемещающегося в пространстве ЛА. Для обеспечения синхронной засечки положения ЛА в пространстве на фотопленку в момент фотографирования печатаются кодированное направление визирной оси камеры в пространстве в момент фотографирования и показания фотохронографа, обеспечивающие привязку момента фотографирования к шкале единого времени.

В последнее время проведена частичная модернизация фоторегистрирующих станций с заменой измерительного фотоканала на телевизионный канал, что позволило автоматизировать процесс сбора и обработки выходной траекторной измерительной информации.

На рис. 5.15 приведена структура математической модели имитации работы фоторегистрирующих станций траекторных измерений.

В соответствии с назначением фоторегистрирующей станции, принципами функционирования и ее тактико-техническими характеристиками в состав математической модели имитации работы этого средства траекторных измерений должны входить:

программный модуль оценки максимальной дальности обнаружения фоторегистрирующей станцией летательных аппаратов оптическим или телевизионным измерительным каналом;

программный модуль оценки попадания летательных аппаратов в зону наблюдения фоторегистрирующей станции;

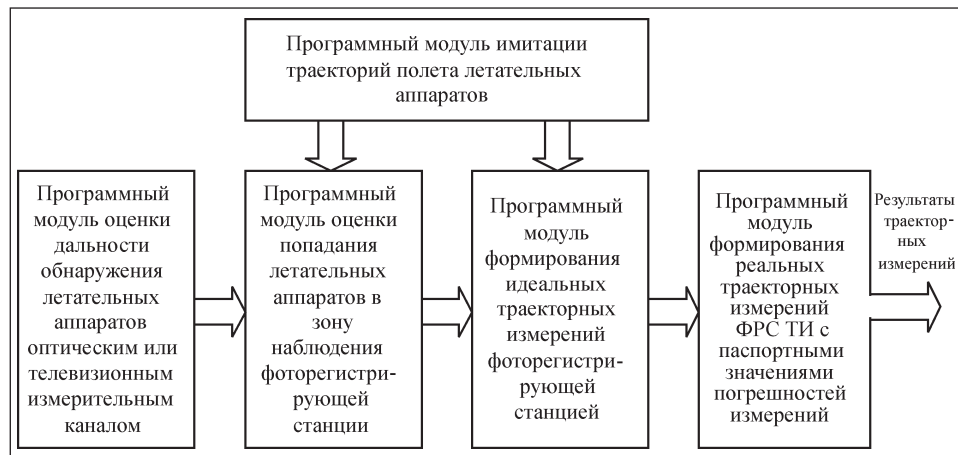


Рис. 5.15. Структура математической модели имитации работы фоторегистрирующей станции траекторных измерений

программный модуль формирования идеальных траекторных измерений фоторегистрирующими станциями (в случае наличия телевизионного измерительного канала);

программный модуль формирования реальных траекторных измерений фоторегистрирующими станциями ТИ с паспортными значениями вероятностных характеристик погрешностей измерений (в случае наличия телевизионного измерительного канала);

программный модуль имитации траекторий полета летательных аппаратов, который является источником информации о координатах полета ЛА и необходим для функционирования всего комплекса программных модулей имитации работы фоторегистрирующей станции траекторных измерений патрульного типа.

Поскольку в различных вариантах исполнения фоторегистрирующих станций используется фотоканал или телевизионный измерительный канал, то в состав рассматриваемого комплекса программных модулей входит модуль оценки дальности обнаружения летательных аппаратов оптическим или телевизионным измерительным каналом.

В программном модуле математической модели оценки попадания летательных аппаратов в зону наблюдения фоторегистрирующей станции проводится проверка условия наблюдения станцией ЛА по максимальной дальности обнаружения, а также проверка выполнения условий попадания ЛА в зону наблюдения по минимальным и максимальным значениям азимута и угла места зоны наблюдения фоторегистрирующей станции.

Программный модуль математической модели формирования идеальных траекторных измерений фоторегистрирующими станциями ТИ проводит генерирование с заданным темпом данных об азимуте и угле места сопровождаемого ЛА, а в программном модуле формирования реальных траекторных измерений ФРС ТИ проводится зашумление идеальных измерений (азимута и угла места наблюдаемого летательного аппарата) с паспортными значениями вероятностных характеристик погрешностей измерений.

ФРС ТИ имеют существенное отличие от оптических и оптико-электронных средств траекторных измерений следящего типа в построении программного модуля оценки попадания летательных аппаратов в зону наблюдения этой станции. Поэтому ниже подробно рассмотрены математические соотношения, позволяющие реализовать такой программный модуль.

Исходными данными для разработки математической модели оценки зоны обнаружения фоторегистрирующими станциями траекторных измерений ЛА являются:

дальность действия фотоканала или телевизионного канала фоторегистрирующей станции $D_{\text{ФРС}}$;

$$\begin{aligned}x'_{\Pi} &= l_1 x_{\Pi} + m_1 y_{\Pi} + n_1 z_{\Pi}; \\y'_{\Pi} &= l_2 x_{\Pi} + m_2 y_{\Pi} + n_2 z_{\Pi}; \\z'_{\Pi} &= l_3 x_{\Pi} + m_3 y_{\Pi} + n_3 z_{\Pi},\end{aligned}\tag{5.51}$$

где l_i, m_i, n_i ($i=\overline{1,3}$) — направляющие косинусы между осями двух систем координат.

Для рассматриваемого случая направляющие косинусы будут следующими:

$$\begin{aligned}l_1 &= \cos \beta; \quad l_2 = \cos 90^\circ = 0; \quad l_3 = -\sin \beta; \\m_1 &= \cos 90^\circ = 0; \quad m_2 = \cos 0^\circ = 1; \quad m_3 = \cos 90^\circ = 0; \\n_1 &= \sin \beta; \quad n_2 = \cos 90^\circ = 0; \quad n_3 = \cos \beta.\end{aligned}\tag{5.52}$$

С учетом (5.52) получим систему уравнений для пересчета координат

$$\begin{aligned}x_{\Pi}^* &= \cos \beta \cdot x_{\Pi} - \sin \beta \cdot z_{\Pi}; \\y_{\Pi}^* &= y_{\Pi}; \\z_{\Pi}^* &= \sin \beta \cdot x_{\Pi} + \cos \beta \cdot z_{\Pi}.\end{aligned}\tag{5.53}$$

Используя рис. 5.16, сформулируем условия попадания цели в зону наблюдения станции для ее верхней и нижней граничных плоскостей.

Одним из условий попадания цели в рупор зоны наблюдения станции является непревышение допустимой дальности $D_{\text{ФРС}}$ обнаружения станцией цели:

$$0 \leq z_{\Pi}^* \leq D_{\text{ФРС}}.$$

Условие того, что цель пройдет выше нижней грани рупора зоны наблюдения станции, запишется в виде

$$\left(\operatorname{tg} \angle \gamma = \frac{y_{\Pi}^*}{z_{\Pi}^*} \right) > \left[\operatorname{tg} \angle \varepsilon_{\min} = \operatorname{tg} \left(\varepsilon - \frac{\angle \varphi}{2} \right) \right].$$

Условие того, что цель пройдет ниже верхней грани рупора зоны наблюдения станции:

$$\left(\operatorname{tg} \angle \gamma = \frac{y_{\Pi}^*}{z_{\Pi}^*} \right) < \left[\operatorname{tg} \angle \varepsilon_{\max} = \operatorname{tg} \left(\varepsilon + \frac{\angle \varphi}{2} \right) \right].$$

Используя рис. 5.17, сформулируем ряд условий попадания цели в рупор рассматриваемой зоны наблюдения для ее левой и правой граничных плоскостей.

$$\left(\operatorname{tg} \angle \theta = \frac{z_{\text{II}}^*}{x_{\text{II}}^*} \right) > \operatorname{tg} \frac{\angle \chi}{2}.$$
$$\left(\operatorname{tg} \angle \theta = \frac{z_{\Pi}^*}{x_{\Pi}^*} \right) < \operatorname{tg} \left(-\frac{\angle \chi}{2} \right).$$

309

паратов фоторегистрирующими станциями траекторных измерений.

На рис. 5.18 представлен обобщенный алгоритм программного модуля оценки зоны наблюдения летательных аппаратов фоторегистрирующими станциями траекторных измерений.

В блоке 1 алгоритма вводятся исходные данные:

$D_{\text{ФРС}}$ — дальность действия фоторегистрирующей станции;

$\angle\varphi$ — угол раскрыва зоны наблюдения станции по углу места;

$\angle\chi$ — угол раскрыва зоны наблюдения станции по азимуту;

ε — угол места установки оси фотообъектива фоторегистрирующей станции в местной географической системе координат;

β — азимут оси установки фотообъектива фоторегистрирующей станции в местной географической системе координат;

$x_{\text{ц}}, y_{\text{ц}}, z_{\text{ц}}$ — координаты ЛА в местной системе координат с началом в точке стояния ФРС ТИ.

В блоке 2 выполняются поворот местной системы координат с началом в точке стояния ФРС ТИ на угол β и пересчет в эту систему координат ЛА в соответствии с выражениями (5.51)...(5.53).

В блоке 3 проверяется выполнение условия $0 \leq z_{\text{ц}}^* \leq D_{\text{ФРС}}$, т.е. возможности наблюдения ЛА станцией с учетом максимальной дальности обнаружения цели.

В следующем блоке алгоритма проверяется выполнение условия, состоящего в том, что ЛА пройдет выше нижней грани рупора зоны наблюдения станции, т.е. условия

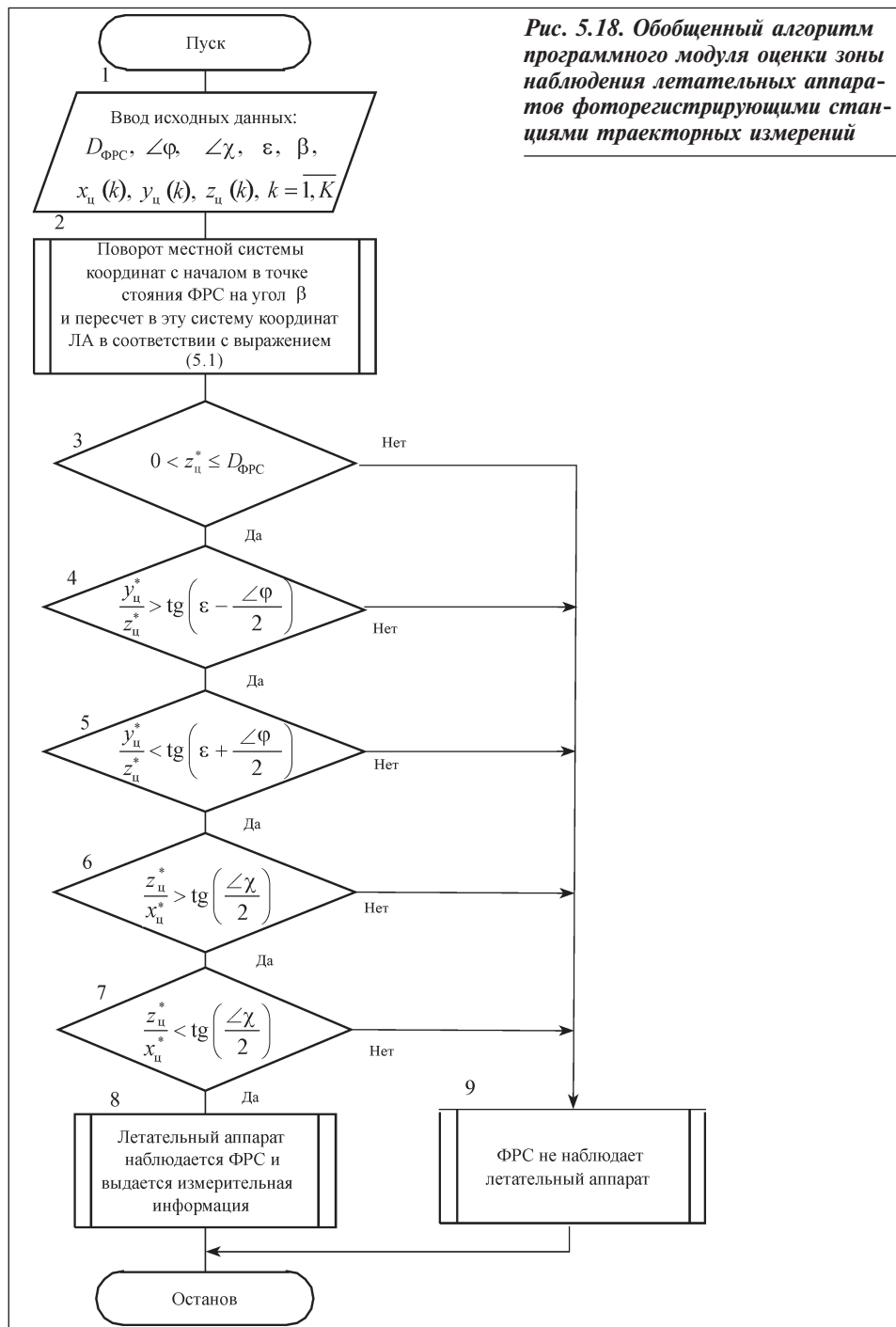
$$\frac{y_{\text{ц}}^*}{z_{\text{ц}}^*} > \operatorname{tg}\left(\varepsilon - \frac{\angle\Delta\varphi}{2}\right).$$

В блоке 5 проверяется выполнение условия, состоящего в том, что ЛА пройдет ниже нижней грани рупора зоны наблюдения станции, т.е. условия

$$\frac{y_{\text{ц}}^*}{z_{\text{ц}}^*} < \operatorname{tg}\left(\varepsilon - \frac{\angle\Delta\varphi}{2}\right).$$

В блоке 6 проверяется выполнение условия, состоящего в том, что цель пройдет левее правой грани рупора зоны наблюдения станции, т.е. условия

$$\frac{z_{\text{ц}}^*}{x_{\text{ц}}^*} > \operatorname{tg} \frac{\angle\chi}{2}.$$



Затем, в блоке 7, проверяется выполнение условия, состоящего в том, что цель пройдет правее левой грани рупора зоны наблюдения станции, т.е. условия

$$\frac{z_{\Pi}^*}{x_{\Pi}^*} < \operatorname{tg}\left(-\frac{\angle\chi}{2}\right).$$

При выполнении всех этих условий в блоке 8 алгоритма принимается решение о том, что летательный аппарат наблюдается ФРС ТИ и станция может выдавать измерительную информацию потребителю. В противном случае, в блоке 9 принимается решение о том, что ФРС траекторных измерений не наблюдает летательный аппарат. На этом алгоритм заканчивает свою работу.

5.6. Программно-алгоритмический комплекс априорной оценки точности траекторных информационно-измерительных систем

Важнейшим показателем эффективности территориально распределенных траекторных информационно-измерительных систем является точность оценки параметров движения испытываемых летательных аппаратов. Поэтому при проектировании новых и модернизации существующих траекторных измерительных комплексов важным инструментом являются программно-алгоритмические комплексы априорной оценки их точности [118].

Существующие методики и реализующие их программы априорной оценки точности траекторных измерительных комплексов, как правило, основаны на простейших унитарных преобразованиях [22, 29] и имеют следующие недостатки:

затруднительно учесть сложную структуру погрешностей траекторных измерительных средств;

в этих методиках предполагается, что совместная обработка траекторной информации проводится, как правило, с использованием метода наименьших квадратов, при этом не учитываются степень аппроксимирующего полинома и вид полинома (сплошной полином, сплайн и т.д.);

невозможно проводить корреляционный анализ погрешностей оценки траекторным измерительным комплексом параметров движения летательных аппаратов для проведения подробного изучения структуры этих погрешностей.

Использование рассмотренных выше математических моделей и алгоритмов имитации выходной информации от средств траекторных измерений позволяет с использованием программных мо-

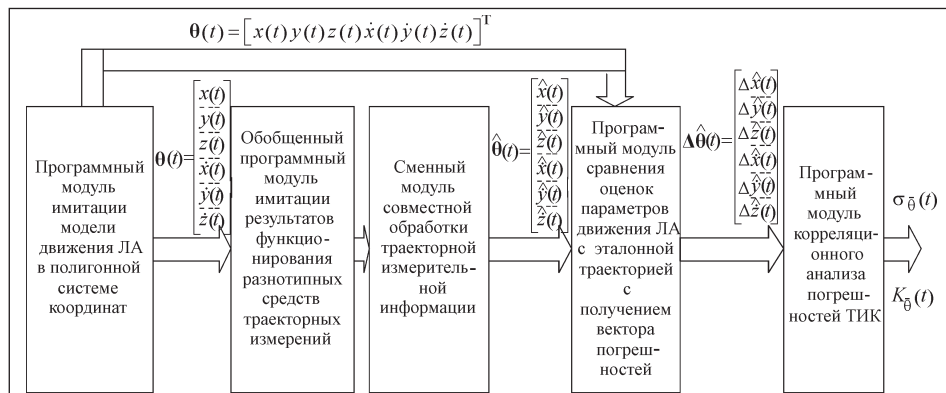


Рис. 5.19. Структура программного комплекса оценки точности территориально распределенных траекторных измерительных комплексов

дулей совместной обработки координатной информации, реализующих различные методы обработки траекторных измерений, применяемые для обеспечения испытаний сложных технических комплексов, создать программно-алгоритмический комплекс, способный проводить высокоточную априорную оценку точности проектируемых траекторных измерительных комплексов. Структура такого программно-алгоритмического комплекса приведена на рис. 5.19.

В состав программного комплекса оценки точности территориально распределенных траекторных измерительных комплексов входят:

программный модуль имитации модели движения ЛА в полигональной системе координат;

обобщенный программный модуль имитации результатов функционирования разнотипных средств траекторных измерений, который обеспечивает имитацию работы радиолокационных, радиотехнических, оптико-электронных и бортовых средств траекторных измерений в части формирования их выходной измерительной информации;

сменный модуль совместной обработки траекторной измерительной информации, который выбирается в соответствии с алгоритмом, который используется при испытаниях того или иного СТК;

программный модуль сравнения оценок параметров движения ЛА с эталонной, заранее заданной траекторией полета ЛА;

программный модуль корреляционного анализа погрешностей измерения траекторным ИК параметров движения ЛА.

Суть предлагаемого подхода по созданию программно-алгоритмического комплекса высокоточной априорной оценки точности

проектируемых траекторных измерительных комплексов заключается в создании алгоритма виртуального траекторного измерительного комплекса, который способен имитировать многомерный случайный процесс координатной измерительной информации от всех средств ТИ, используемых при обеспечении испытаний конкретного СТК.

Далее эта координатная информация поступает в программный модуль совместной обработки траекторной измерительной информации, в котором реализован математический метод, планируемый для реализации в алгоритмах при обеспечении испытаний конкретного образца СТК. На выходе этого модуля получаются оценки вектора параметров движения ЛА $\hat{\theta}(t)$.

Оценки вектора параметров движения ЛА поступают в программный модуль сравнения оценок параметров движения ЛА с эталонной траекторией, который используется для определения погрешностей оцениваемого вектора $\Delta\hat{\theta}(t)$.

Полученные значения погрешностей оцениваемого вектора параметров движения ЛА поступают в программный модуль корреляционного анализа погрешностей измерения траекторным ИК параметров движения ЛА, который и позволяет получить оценки точности рассматриваемого комплекса.

В программном комплексе оценки точности территориально распределенных траекторных измерительных комплексов предусмотрены также блоки ввода значений вероятностных характеристик погрешностей измеряемых параметров средствами траекторных измерений и координат точек стояния этих средств в географической системе координат.

Программный модуль имитации модели движения ЛА в полигонной системе координат позволяет формировать требуемые траектории полета ЛА в виде последовательности значений координат точек, в которых находится летательный аппарат с заданными временными промежутками.

Программные модули имитации работы радиолокационных, радиотехнических, оптико-электронных средств траекторных измерений, а также бортовых средств траекторных измерений реализуют следующие основные функции:

априорную оценку дальности обнаружения ЛА разнотипными средствами траекторных измерений;

априорную оценку зон наблюдения и сопровождения ЛА средствами ТИ для заданной траектории;

генерирование в цифровом виде идеальной выходной измерительной информации о регистрируемых средством ТИ параметрах (например, о наклонной дальности до ЛА, азимуте, угле места, на-

правляющих косинусов этого аппарата, его радиальной скорости движения и др.) с заданным периодом повторения;

зашумление идеальных измерений средств ТИ сигналами с параметрами, соответствующими паспортным значениям вероятностных характеристик погрешностей измерения этими средствами первичных траекторных параметров для создания эффекта работы реальных средств траекторных измерений.

Структуры программных модулей имитации результатов функционирования средств траекторных измерений были подробно рассмотрены выше.

На выходе обобщенного программного модуля имитации результатов функционирования разнотипных средств траекторных измерений наблюдается объединенный векторный случайный процесс $\Xi(k)$ первичных измерений, поступающих со средств траекторных измерений со следующей структурой:

$$\Xi(k) = [\xi_1(k) | \xi_2(k) | \dots | \xi_n(k) | \dots | \xi_N(k)],$$

где $\xi_i(k)$ — векторный дискретный случайный процесс измерений, регистрируемых i -м средством ТИ для дискретных моментов времени $k = \overline{1, K}$; N — число измерительных средств.

Объединенный векторный случайный процесс $\Xi(k)$ первичных измерений поступает на вход сменного модуля совместной обработки траекторной измерительной информации, где происходит его совместная обработка с использованием алгоритмов, реализующих тот или иной метод обработки измерительной информации. Именно использование сменных модулей совместной обработки траекторной измерительной информации, реализующих применяемые на конкретном полигоне методы обработки траекторных измерений, позволяет создать программно-алгоритмический комплекс, способный проводить высокоточную априорную оценку точности конкретных проектируемых траекторных измерительных комплексов, который может быть полностью адекватным условиям проведения натурных измерительных экспериментов.

Модуль совместной обработки траекторной измерительной информации реализует преобразование объединенного векторного случайного процесса $\Xi(k)$ первичных измерений в оценки вектора параметров движения ЛА $\hat{\theta}(t)$ в соответствии с преобразованием

$$\hat{\theta}(t) = \Psi(\Xi(k)),$$

где $\Psi(\Xi(k))$ — преобразование, характеризующее тот или иной метод совместной обработки траекторных измерений.

На выходе модуля совместной обработки траекторной измерительной информации образуется вектор оценок параметров движения ЛА вида

$$\hat{\theta}(t) = [\hat{x}(t) \ \hat{y}(t) \ \hat{z}(t) \ \hat{\dot{x}}(t) \ \hat{\dot{y}}(t) \ \hat{\dot{z}}(t)]^T. \quad (5.54)$$

Составляющие вектора (5.54) представляют собой оценки во времени координат ЛА и составляющих его вектора скорости в полигонной системе координат.

Далее в программном модуле сравнения оценок параметров движения ЛА с эталонной траекторией его полета вычисляются текущие значения вектора $\hat{\Delta\theta}(t)$ погрешности оценки параметров движения ЛА в соответствии с соотношением $\hat{\Delta\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta(t)$.

На основании текущих значений вектора погрешности оценки параметров движения ЛА $\hat{\Delta\theta}(t)$ в программном модуле корреляционного анализа погрешностей траекторного ИК проводится построение статистических корреляционных функций по каждому параметру движения ЛА, которые являются наиболее интегрированной вероятностной характеристикой случайных процессов погрешностей оценки параметров движения ЛА.

Построение статистических корреляционных функций $\hat{K}_N(k, \Delta\hat{q})$ ($\Delta\hat{q} = \overline{1, Q}$) погрешностей оценки параметров движения ЛА проводится в соответствии с выражением [41, 74, 76, 104, 105]

$$\hat{K}_N(k, \Delta\hat{q}) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} \Delta\hat{q}_{|k|+n} \Delta\hat{q}_{|k|},$$

где N — количество статистики (число наблюдений); $\Delta\hat{q}_k$ — значение погрешности оценки конкретного параметра движения летательного аппарата (координаты ЛА или составляющих вектора его скорости в полигонной системе координат) в дискретный момент времени k ; n — дискретные значения по оси абсцисс рассматриваемых корреляционных функций.

В целях сжатия информации о значениях статистических корреляционных функций $\hat{K}_N(k, \Delta\hat{q})$ ($\forall \Delta\hat{q} = \overline{1, Q}$) и для оценки их параметров проводится аппроксимация этих корреляционных функций с использованием линейной комбинации конечного числа функций. Если случайный процесс погрешности оценки параметров движения ЛА является стационарным, линейная

комбинация конечного числа функций может быть записана в виде [29]

$$K_{\Delta\hat{q}}(\tau) = \sum_{j=0}^m C_j \varphi_j(\tau),$$

где $\varphi_j(\tau)$ — выбранная система линейно независимых функций; C_j — некоторые постоянные вещественные числа, определяемые из условия минимизации суммы квадратов разностей между $\hat{K}_N(k, \Delta\hat{q})$ и $K_{\Delta\hat{q}}(\tau)$ на всем интервале задания величины τ .

При этом возникает проблема выбора наиболее целесообразного вида аналитической зависимости, которая должна удовлетворять следующим требованиям:

аппроксимирующие функции $\varphi_j(\tau)$ по возможности должны представлять собой семейство ортогональных функций, что обеспечивает простоту контроля ошибки приближения в среднем квадратическом смысле;

аппроксимирующие функции $\varphi_j(\tau)$ должны удовлетворять предельному соотношению $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi_j(\tau) = 0$, что вытекает из поведения

корреляционной функции при больших значениях аргумента τ ;

в некоторых случаях аппроксимирующие функции должны отражать колебательный характер изменения корреляционной функции. Для этого случая в качестве аппроксимирующей функции $\varphi_j(\tau)$ выбирают затухающую экспоненту вида [29]

$$\varphi_j(\tau) = e^{-\alpha_j |\tau|} \cos \beta_j \tau,$$

где α_j, β_j — положительные вещественные числа.

При выборе вида аналитической зависимости для аппроксимации значений статистической корреляционной функции $\hat{K}_N(k, \Delta\hat{q})$ ошибок траекторных измерений надо учитывать результаты предшествующих теоретических и экспериментальных исследований. Результаты таких исследований показали, что в случае использования в разработанной модели траекторной информационно-измерительной системы предложенной кинематической модели движения ЛА, и если случайный процесс погрешностей оценок параметров движения ЛА является стационарным, то статистические корреляционные функции погрешностей оценки параметров движения ЛА можно аппроксимировать выражениями

$$K_{\Delta\hat{q}}(\tau) = C_1 e^{-\alpha_1 |\tau|} + C_2 e^{-\alpha_2 |\tau|}, \quad (5.55)$$

$$K_{\Delta\hat{q}}(\tau) = C_1 e^{-\alpha_1 |\tau|}. \quad (5.56)$$

Вид корреляционной функции (5.55) свидетельствует о наличии в погрешности оценки конкретного параметра движения ЛА наряду с быстроменяющейся погрешностью также и медленноменяющейся составляющей погрешности траекторных измерений, а вид корреляционной функции (5.56) свидетельствует о наличии только быстроменяющейся составляющей погрешности траекторных измерений.

Рассмотрим методики аппроксимации значений статистической корреляционной функции $\hat{K}_N(k, \Delta\hat{q})$ функциями вида (5.55) и (5.56).

В качестве исходной информации служат значения статистической корреляционной функции $\hat{K}_N(k, \Delta\hat{q})$. Параметры $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ выражения (5.55) найдем из условия минимизации функционала вида

$$\Phi(C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=1}^K [\hat{K}_N(k, \Delta\hat{q}) - C_1 e^{-\alpha_1 |\tau_k|} - C_2 e^{-\alpha_2 |\tau_k|}]^2.$$

Дифференцируя функцию $\Phi(C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2)$ по $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ и приравнявая нулю полученные производные, получаем систему трансцендентных уравнений вида [29]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} &= \sum_{k=1}^K \hat{K}_N(k, \Delta\hat{q}) e^{-\alpha_1 |\tau_k|} - C_1 \sum_{k=1}^K e^{-2\alpha_1 |\tau_k|} - C_2 \sum_{k=1}^K e^{-\alpha_1 |\tau_k|} e^{-\alpha_2 |\tau_k|} = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} &= \sum_{k=1}^K \hat{K}_N(k, \Delta\hat{q}) e^{-\alpha_2 |\tau_k|} - C_1 \sum_{k=1}^K e^{-\alpha_1 |\tau_k|} e^{-\alpha_2 |\tau_k|} - C_2 \sum_{k=1}^K e^{-2\alpha_2 |\tau_k|} = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C_1} &= C_1 \sum_{k=1}^K \hat{K}_N(k, \Delta\hat{q}) e^{-\alpha_2 |\tau_k|} - C_1^2 \sum_{k=1}^K e^{-2\alpha_1 |\tau_k|} \tau_k - \\ &\quad - C_1 C_2 \sum_{k=1}^K e^{-\alpha_1 |\tau_k|} e^{-\alpha_2 |\tau_k|} \tau_k = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} &= C_2 \sum_{k=1}^K \hat{K}_N(k, \Delta\hat{q}) e^{-\alpha_2 |\tau_k|} - C_1 C_2 \sum_{k=1}^K e^{-\alpha_1 |\tau_k|} e^{-\alpha_2 |\tau_k|} \tau_k - \\ &\quad - C_2^2 \sum_{k=1}^K e^{-2\alpha_2 |\tau_k|} \tau_k = 0. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Для численного решения системы трансцендентных уравнений (5.57) может быть с успехом использован метод Ньютона

или другой метод нелинейного математического программирования.

Параметры $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ выражения (5.55) имеют следующие значения:

C_1, C_2 — дисперсии медленноменяющейся и быстроменяющейся составляющих оценки погрешности q -го параметра движения ЛА соответственно;

α_1, α_2 — соответственно величины, обратные значениям времен корреляции медленноменяющейся T_1 и быстроменяющейся T_2 составляющих оценки погрешности q -го параметра движения ЛА, т.е. $T_1 = (\alpha_1)^{-1}$ и $T_2 = (\alpha_2)^{-1}$.

Определение параметров α_1 и C_1 эмпирической формулы (5.56) проводится с использованием метода наименьших квадратов. Согласно этому методу наилучшими коэффициентами α_1 и C_1 считаются те, для которых наблюдается минимум функционала

$$\Phi(\alpha_1, C_1) = \sum_{k=1}^K [\hat{K}_N(k, \Delta \hat{q}) - C_1 e^{-\alpha_1 |\tau_k|}]^2. \quad (5.58)$$

Функция (5.56), линеаризованная путем логарифмирования, может быть представлена в виде

$$\ln K_{\Delta \hat{q}}(\tau) = \ln C_1 - \alpha_1 |\tau|.$$

С вводом обозначений $\ln C_1 = B$ и $\ln[\hat{K}_N(k, \Delta \hat{q})] = R_L(k)$ функционал (5.58) примет вид

$$\tilde{\Phi}(\alpha_1, C_1) = \sum_{k=1}^K [R_L(k) - B + \alpha_1 |\tau_k|]^2.$$

Из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial B} &= \sum_{k=1}^K \hat{R}_L(K) + \alpha \sum_{k=1}^K |\tau_k| - K \cdot B = 0; \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \alpha} &= \sum_{k=1}^K \hat{R}_L(K) |\tau_k| + \alpha \sum_{k=1}^K |\tau_k|^2 - B \sum_{k=1}^K |\tau_k| = 0 \end{aligned}$$

определяются искоемые коэффициенты α_1 и C_1 эмпирической формулы (5.58):

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{k=1}^K |\tau_n| \left| \sum_{k=1}^K R_L(k) - K \sum_{k=1}^K R_L(k) \right| |\tau_k|}{K \cdot \sum_{k=1}^K |\tau_k|^2 - \sum_{k=1}^K |\tau_k| \left| \sum_{k=1}^K \tau_k \right|};$$

$$C_1 = \text{ant} \ln \left[\sum_{k=1}^K R_L(k) + \alpha \sum_{k=1}^K |\tau_k| K^{-1} \right].$$

При этом параметры C_1 и α_1 выражения (5.58) имеют следующие значения:

C_1 — значение дисперсии быстроменяющейся составляющей оценки погрешности q -го параметра движения ЛА;

α_1 — величина, обратная значению времени корреляции T_1 быстроменяющейся составляющей оценки погрешности q -го параметра движения ЛА, т.е. $T_1 = (\alpha_1)^{-1}$.

Анализ статистической корреляционной функции конкретного оцениваемого параметра движения ЛА позволяет выявить структуру погрешности оцениваемого параметра (наличие медленноменяющейся и быстроменяющейся составляющих), оценить дисперсии и времена корреляции этих составляющих погрешности. Кроме того, при наличии явных колебаний значений ковариационной функции по отношению к оси абсцисс можно зафиксировать период этих колебаний и определить их декремент.

Разработанный программно-алгоритмический комплекс оценки точности территориально распределенных траекторных информационно-измерительных систем позволяет провести высокоточную априорную оценку точности траекторного измерительного комплекса для любых вариантов обработки траекторной измерительной информации и может быть использован при проведении научных исследований, а также при проектировании новых и модернизации существующих траекторных измерительных комплексов, используемых для обеспечения испытаний сложных технических комплексов.

Заключение

Основные научные результаты исследований, представленных в книге:

1. Развита теория анализа точности траекторных информационно-измерительных систем для обеспечения испытаний сложных технических комплексов. Разработаны комплексный и интегральный показатели точности траекторного измерительного комплекса, а также теоретические основы построения математической модели оценки погрешностей траекторного измерительного комплекса для различных вариантов обработки измерительной информации с использованием аппарата «встречной» фильтрации и модели формирования корреляционных функций вектора погрешности оценки параметров движения летательных аппаратов. Это позволяет с большей достоверностью оценивать показатели точности таких комплексов и проводить корреляционный анализ погрешностей траекторных измерительных комплексов для случая сглаженной обработки траекторной информации.

2. Разработаны методы оптимальной линейной и субоптимальной нелинейной фильтрации многомерных траекторных измерений по летательным аппаратам с несинхронными во времени компонентами, позволяющие повысить точность оценки вектора параметров движения ЛА в условиях наличия ошибок в привязке измерений к единой шкале времени за счет учета в модели наблюдений дополнительной априорной информации о вероятностных характеристиках рассматриваемых временных ошибок.

3. Предложен метод оптимальной фильтрации несинхронных во времени разнородных траекторных измерений от наземных средств и бортовых измерителей перегрузок с использованием двух синтезированных фильтров Калмана, работающих в двухтактном режиме. Метод отличается от ранее известных учетом в моделях сообщения ошибок в привязке таких измерений к единой шкале времени ИК и позволяет повысить точность оценки вектора параметров движения ЛА.

4. Разработан метод расчета начальных значений вектора оцениваемых параметров в уравнениях фильтра Калмана при обработке траекторной измерительной информации. Метод отличается от ра-

нее известных возможностью в режиме слепополетной обработки траекторной измерительной информации с высокой степенью достоверности (вероятностью не менее 0,85) оценить начальное значение искомого вектора состояния системы траекторных измерений и в конечном итоге повысить точность получаемых оценок за счет учета дополнительной априорной информации о вероятностных характеристиках погрешностей задания модели движения ЛА и погрешностей средств траекторных измерений.

5. Разработаны математическая модель оценки влияния погрешностей выходной частотно-временной информации СЕВ ИК на точность определения вектора параметров движения ЛА и основанный на ее использовании метод обоснования требований к точности привязки информации радиотелеизмерений к единой шкале времени ИК.

6. Предложен метод получения сглаженных оценок параметров движения ЛА по информации многоканальных траекторных измерений, основанный на разработанных положениях теории анализа точности траекторных информационно-измерительных систем, идее «встречной» фильтрации и разработанном методе расчета начальных значений оцениваемого вектора параметров движения ЛА в уравнениях фильтра Калмана.

Научная новизна полученных результатов заключается в разработке комплекса методологически взаимосвязанных новых методов и моделей, включающего:

математическую модель оценки погрешностей траекторного измерительного комплекса для случая динамической фильтрации траекторных измерений, средневзвешенной и сглаженной обработки траекторной информации с учетом ошибок в задании априорных данных о параметрах моделей наблюдаемого сигнала и полезного сообщения, являющуюся основой для разработки комплекса новых научных методов;

математическую модель формирования корреляционных функций погрешностей траекторного измерительного комплекса для случая сглаженной обработки траекторной информации, позволяющую проводить корреляционный анализ погрешностей оценки траекторным ИК вектора параметров движения ЛА;

методы оптимальной фильтрации многомерных траекторных измерений по ЛА с несинхронными во времени компонентами, а также метод оптимальной фильтрации несинхронных во времени разнородных траекторных измерений от наземных средств и бортовых измерителей перегрузок, позволяющие решить проблемную задачу статистической обработки траекторных измерений в условиях наличия временных невязок в привязке измерений к единой шкале времени;

метод расчета начальных значений вектора оцениваемых параметров в уравнениях фильтра Калмана при обработке траекторной измерительной информации.

К числу прикладных результатов представленных исследований следует отнести разработку:

нового способа и схемы контроля местных шкал времени траекторного измерительного комплекса и управления ими в процессе проведения натурных экспериментов. Этот способ позволяет создать системы единого времени автоматизированных траекторных измерительных комплексов, обеспечивающие единство территориально разнесенных местных шкал времени без применения дополнительных специальных средств;

алгоритма фильтрации многомерных разнородных траекторных измерений от разнотипных измерительных средств для формирования данных целеуказаний средствам траекторного измерительного комплекса, позволяющего повысить точность наведения следящих средств на ЛА и надежность их сопровождения;

алгоритмов математического моделирования траекторных измерительных средств различного типа, а также программно-алгоритмического комплекса оценки точности территориально распределенных траекторных информационно-измерительных систем, который позволяет провести высокоточную априорную оценку точности траекторного измерительного комплекса для любых вариантов обработки траекторной измерительной информации и может быть использован при проведении научных исследований, а также при проектировании новых и модернизации существующих траекторных измерительных комплексов, применяемых для обеспечения испытаний сложных технических комплексов.

Полученные результаты могут быть использованы в научно-исследовательских организациях Минобороны РФ и Минпромторга РФ при создании новых средств ТИ, для проведения анализа возможностей проектируемых траекторных измерительных комплексов, а также на испытательных полигонах этих министерств в автоматизированных системах обработки результатов полигонных испытаний для статистической обработки результатов траекторных измерений. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для обеспечения учебного процесса в вузах Минобороны РФ и Минобрнауки РФ.

Список литературы

1. **Андрусенко А.М.** Методы и средства лазерной прецизионной дальнометрии. М.: Радио и связь, 1987.
2. **Алиев Ф.А., Вордлюг Б.А., Ларин В.Б.** Методы решения матричных уравнений Риккати. Баку, Институт физики Академии наук Аз.ССР, 1986.
3. **Бакулин И.И., Блинов Н.С.** Служба единого времени. М.: Наука, 1977.
4. **Белов Ю.А., Диденко В.П., Козлов Н.Н.** Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 1. Киев: Наук. думка, 1983.
5. **Белов Ю.А., Диденко В.П., Козлов Н.Н.** Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 2. Киев: Наук. думка, 1984.
6. **Буренок В.М., Ляпунов В.М., Мудров В.И.** Теория и практика планирования и управления развитием вооружения. М.: Изд-во. Вооружение. Политика. Конверсия, 2004.
7. **Буренок В.М., Найденов В.Г.** Испытательная база: выход из кризиса // Воздушно-космическая оборона. 2009. № 1 (44).
8. **Буренок В.М., Найденов В.Г.** Методы повышения эффективности применения средств и систем обеспечения испытаний вооружения, военной и специальной техники. М.: Изд. дом «Граница», 2006.
9. **Буренок В.М., Найденов В.Г.** Требуется модернизация полигонов // Воздушно-космическая оборона. 2009. № 4 (47).
10. **Буренок В.М., Найденов В.Г., Орлов П.П.** Некоторые направления реформирования испытательного комплекса МО РФ // Военная мысль. 2004. № 9.
11. **Буренок В.М., Найденов В.Г., Шукин А.Н.** Методический подход к программно-целевому планированию развития средств траекторных измерений испытательных полигонов для долгосрочных программных документов // Электронный журнал «Вооружение и экономика». 2010. № 2 (http://www.mil.files/vie2_10.pdf).
12. **Бычков С.И., Лукьянов Д.П. и др.** Космические радиотехнические комплексы. М.: Советское радио, 1967.
13. **Ватанабэ С., Икэда Н.** Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / пер. с англ; под ред. А.Н. Ширяева М.: Наука, 1986.
14. **Великанов В.Д. и др.** Радиотехнические системы в ракетной технике. М.: Воениздат, 1974.
15. **Вентцель Е.С.** Исследование операций. М.: Советское радио, 1972.

16. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей. М.: Наука, 1964.
17. **Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.** Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Высш. шк., 2007.
18. **Воздушно-космическая** телеметрия: Сб. материалов / пер. с англ.; под ред. К. Трофимова. М.: Воениздат, 1968.
19. **Ворошилин Е.П., Миронов М.В., Громов В.А.** Определение координат источников радиоизлучения разностно-дальномерным методом с использованием группировки низкоорбитальных малых космических аппаратов // Докл. ТУСУРа. № 1 (21). Ч. 2, 2010.
20. **Галкин В.А., Григорьев Ю.А.** Телекоммуникации и сети: Учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.
21. **Гантмахер Р.Ф.** Теория матриц. М.: Наука, 1966.
22. **Гальцов Е.М., Минаев В.Н., Тунгушпаев А.Т.** Методология обоснования задач испытаний и перспектив развития полигонного испытательного комплекса МО РФ: М., ФГУП «ВИМИ», 2007.
23. **Грановский В.А., Сирая Т.Н.** Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. СПб.: Энергоатомиздат, 1990.
24. **Демидов Б.А.** Методы военно-научных исследований. Ч. 1–3. Харьков, Изд-е ВИРТА ПВО, 1988.
25. **Динамика ракет** / под ред. В.П. Мишина М.: Машиностроение, 1990.
26. **Дэвис М.Х.** Линейное оценивание и стохастическое управление. М.: Наука, 1984.
27. **Жакод Ж., Ширяев А.Н.** Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2 / пер. с англ. М.: Физматлит, 1994.
28. **Жандаров А.М.** Идентификация и фильтрация измерений состояния стохастических систем. М.: Наука, 1979.
29. **Жданюк Б.Ф.** Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Советское радио, 1978.
30. **Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А.** Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970.
31. **Изнар А.Н.** Электронно-оптические приборы. М.: Машиностроение, 1977.
32. **Изнар А.Н., Павлов А.В., Федоров Б.Ф.** Оптико-электронные приборы космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1972.
33. **Испытания РЛС** / под ред. А.И. Леонова М.: Радио и связь, 1990.
34. **Казаков И.Е., Мальчиков С.В.** Анализ стохастических систем в пространстве состояний. М.: Наука, 1983.
35. **Каллианпур Г.** Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 1987.
36. **Калман Р.** Об общей теории систем управления / пер. с англ. // В кн. Труды первого международного конгресса ИФАК, изд-е АН СССР, Т. 2, 1961.
37. **Калман Р., Бьюси Р.** Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания: пер. с англ. // Техническая механика. Сер. Д. № 1. 1961.

38. **Калман Р., Фабл П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем / пер. с англ. М.: Мир, 1971.
39. **Калмыков С.А. и др.** Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
40. **Карнаухов Г.З.** Справочник по основам инфракрасной техники. М.: Советское радио, 1978.
41. **Кендалл М.Дж., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973.
42. **Космические** траекторные измерения. Радиотехнические методы измерений и математическая обработка данных / под ред. П.А. Агаджанова, В.Е. Дулевича, А.А. Коростелева. М.: Советское радио, 1969.
43. **Крамер Г.** Математические методы статистики / пер. с англ., 2-е изд. М.: Мир, 1975.
44. **Крылов Н.В.** Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.
45. **Лазерная** локация / под ред. Н.Д. Устинова. М.: Машиностроение, 1984.
46. **Ли Р.** Оптимальные оценки, определение характеристик и управление / пер. с англ. М.: Наука, 1966.
47. **Линник Ю.В.** Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962.
48. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
49. **Лойд Дж.** Системы тепловидения / пер. с англ.; под ред. А.И. Горячего. М.: Мир, 1978.
50. **Лоусон Ч., Хенсон Р.** Численное решение задач метода наименьших квадратов / пер. с англ. М.: Наука, 1986.
51. **Мановцев А.П.** Введение в цифровую радиотелеметрию. М.: Энергия, 1967.
52. **Мановцев А.П.** Основы теории радиотелеметрии. М.: Энергия, 1973.
53. **Мачулин В.В., Пятибратов А.П.** Эффективность систем обработки информации. М.: Советское радио, 1972.
54. **Моисеев Н.Н.** Методы оптимизации. М.: Наука, 1977.
55. **Моисеев Н.Н.** Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1974.
56. **Мудров В.И., Кушко В.Л.** Методы обработки измерений: квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь, 1983.
57. **Найденев В.Г.** Алгоритм кластеризации средств траекторных измерений в задачах программно-целевого развития средств обеспечения испытаний // Вооружение и экономика. 2008. № 4.
58. **Найденев В.Г.** Метод оптимальной линейной фильтрации векторного случайного процесса с несинхронными во времени компонентами // Сб. науч. материалов «Корреляционно-экстремальные системы». № 10. Томский ГУ. 1990.
59. **Найденев В.Г.** Модель априорной оценки показателей точности траекторного измерительного комплекса с учетом ошибок привязки измере-

ний к единым моментам времени // Информационно-измерительные и управляющие системы. № 1. Т. 6, 2008.

60. **Найденев В.Г.** Метод субоптимальной нелинейной фильтрации многомерных случайных процессов измерений траекторий высокоманевренных летательных объектов при наличии временных ошибок в привязке компонент таких процессов к единой шкале времени // Нелинейный мир. № 6. Т. 7. 2009.

61. **Найденев В.Г.** Оптимальная фильтрация многомерных случайных процессов траекторных измерений с несинхронными во времени компонентами // Информационно-измерительные и управляющие системы. № 9. Т. 5. 2007.

62. **Найденев В.Г.** Оптимальная фильтрация несинхронных во времени разнородных траекторных измерений // Информационно-измерительные и управляющие системы. № 5. Т. 6. 2008.

63. **Найденев В.Г. и др.** Устройство оптимальной фильтрации стационарных случайных процессов: А. с. на изобретение № 1699292, 1992.

64. **Найденев В.Г., Поляков В.И.** Метод расчета начальных значений вектора оцениваемых параметров в уравнениях фильтра Калмана при обработке траекторной измерительной информации // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 2.

65. **Найденев В.Г., Поляков В.И.** Метод фильтрации многомерных разнородных траекторных измерений от разнотипных измерительных средств для формирования данных целеуказаний средствам траекторного измерительного комплекса // Успехи современной радиоэлектроники. 2011. № 3.

66. **Найденев В.Г., Поляков В.И.** Метод формирования матричных коэффициентов рекуррентных стохастических уравнений в алгоритмах динамической фильтрации траекторных измерений // Информационно-измерительные и управляющие системы. № 10. Т. 7. 2009.

67. **Новопашенный Г.Н.** Информационно-измерительные системы. М.: Высш. шк., 1977.

68. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложение / пер. с англ. М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003.

69. **Основы испытаний летательных аппаратов** / под ред. Е.И. Кринецкого М.: Машиностроение, 1989.

70. **Портер У.** Современные обоснования общей теории систем / пер. с англ.; под ред. С.В. Емельянова М.: Наука, 1971.

71. **Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.** Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.

72. **Пугачев В.С., Силицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990.

73. **Пугачев В.С., Силицын И.Н.** Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004.

74. **Пустыльник Е.И.** Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука, 1968.

75. **Радиотехнические системы** / под ред. Ю.М. Казаринова М.: Высш. шк., 1990.

76. **Рас С.Р.** Линейные статистические методы и их применение. М.: Физматгиз, 1968.
77. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
78. **Сильвестров И.В.** Структура космических измерительных систем. М.: Советское радио, 1979.
79. **Синицын И.Н.** Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Университетская книга, Логос, 2006.
80. **Скорород А.В.** Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1986.
81. **Слока В.К.** Вопросы обработки радиолокационных сигналов. М.: Советское радио, 1970.
82. **Смоляк С.А., Титаренко Б.П.** Устойчивые методы оценивания. М.: Статистика, 1980.
83. **Современная радиолокация** / пер. с англ.; под ред. Ю.Б. Кобзарева М.: Советское радио, 1969.
84. **Справочник** по основам радиолокационной техники / под ред. В.В. Дружинина. М.: Воениздат, 1967.
85. **Стрейц В.** Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. М.: Наука, 1985.
86. **Тарасов Е.В., Якушенков Ю.Г.** Инфракрасные системы смотрящего типа. М.: Логос, 2004.
87. **Таха Х.** Введение в исследование операций. В 2 кн. М.: Мир, 1985.
88. **Тейлор Дж.** Введение в теорию ошибок / пер. с англ. М.: Мир, 1985.
89. **Теоретические основы радиолокации** / под ред. Я.Д. Ширмана. М.: Советское радио, 1970.
90. **Точность** измерения параметров движения космических аппаратов радиотехническими методами / под ред. С.Д. Сильвестрова. М.: Советское радио, 1970.
91. **Тымкул В.М.** Методы энергетического расчета оптико-электронных приборов и систем. Новосибирск, Сибирская государственная геодезическая академия, 1993.
92. **Устойчивые** статистические методы оценки данных / под ред. Р. Лонера, Г. Уилкинсона. М.: Машиностроение, 1984.
93. **Федоров И.Б., Слукин Г.П., Дмитриев Д.Д.** Обнаружение объектов в контролируемой зоне системой радиолокационных станций // Вестник МГТУ. № 3. 1991.
94. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения / пер. с англ. М.: Мир, 1984.
95. **Фрумкин В.Д., Рубичев Н.А.** Теория вероятностей и статистика в метрологии и измерительной технике. М.: Машиностроение, 1987.
96. **Химмельблау Д.** Анализ процессов статистическими методами. М.: Мир, 1973.
97. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1998.
98. **Черняк В.С.** Многопозиционная радиолокация. М.: Радио и связь, 1993.

99. **Шаракшанэ А.С., Железнов И.Г.** Испытания сложных систем. М.: Высш. шк., 1974.
100. **Шаракшанэ А.С. и др.** Оценка характеристик сложных автоматизированных систем. М.: Машиностроение, 1993.
101. **Шаракшанэ А.С. и др.** Сложные системы. М.: Высш. шк., 1977.
102. **Шахтарин Б.И.** Фильтры Винера и Калмана. М.: Гелиос АРВ, 2008.
103. **Ширман Я.Д., Манжос В.И.** Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981.
104. **Ширяев А.Н.** Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.
105. **Ширяев А.Н.** Вероятность. М.: Наука, 1980.
106. **Шполянский В.А.** Хронометрия. М.: Машиностроение, 1974.
107. **Эльясберг П.Е.** Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976.
108. **Anderson B.D., Moore J.B.** Optimal Filtering. New Jersey: Prentice-Hall, 1979.
109. **Alonso J.F., Benavente C., Pardo J. M.** Wide area font 128 multilateration modeling and simulation. Department universidad politécnica de Madrid, Research report, 2007.
110. **Balzer L.A.** Accelerated convergence of matrix sign-function of solving Lyapunov, Riccati and other matrix equation // Int. Journ of Control. Vol. 32. № 6. 1980.
111. **Kallianpur G.** Stochastic filtering theory, Springer, 1980.
112. **Kitagava G.** The two-filter formula for smoothing and implementation of Gaussian-sum smoother // Annals Institute of Statistical Mathematics 46(4), 1994.
113. **Meditch J.S.** A successive approximation procedure for nonlinear data smoothing // Proc. Symp. Inform. Processing. Purdue university, 1969.
114. **Mehra R.K.** On optimal and suboptimal linear smoothing // Nat. Electron. Conf., 1968.
115. **Ralph Bucher, Misra D.** A synthesizable VHDL model of the exact solution for three-dimensional hyperbolic positioning system. Department of electrical and computer engineering, New jersey center for wireless and telecommunication. Vol. 15 (2). 2002.
116. **Weiner H.L.** Fixed interval smoothing for State Space Models. Kluwer Academic Publishers, 2001.
117. **Wilsky A.S., Wall J.E., Sandell N.R.** Fixed interval smoothing problem. Stochastic, 1981.
118. **Zirari S., Canalda P., Spies F.** Modelling and emulations of an extended GDOP for hybrid and combined positioning system. Research report, 2010.

Список сокращений

БД	— блок дифференцирования
ИИС	— информационно-измерительные системы
ИК	— измерительный комплекс; инфракрасный
ИС	— измерительное средство
КСА	— комплекс средств автоматизации
ЛА	— летательный аппарат
ОЭП	— оптико-электронный прибор
ОЭС ТИ	— оптико-электронное средство траекторных измерений
РЛС ТИ	— радиолокационная станция траекторных измерений
РТИ	— радиотелеметрическая информация
РТС	— радиотелеметрическая станция
РСУ	— рекуррентное стохастическое уравнение
СДУ	— стохастическое дифференциальное уравнение
СЕВ	— средства единого времени
СИ	— средство измерений
СКО	— среднее квадратическое отклонение
СТК	— сложный технический комплекс
ТВ	— телевизионный канал
ТИ	— траекторные измерения
ТИК	— траекторный измерительный комплекс
ТТХ	— тактико-технические характеристики
УВП	— устройство ввода поправок
ФРС	— фоторегистрирующая система
ХВ	— хранитель времени
ЦС	— центр синхронизации
ЧВИ	— частотно-временная информация
ШВ	— шкала времени
ЭВМ	— электронно-вычислительная машина
ЭПР	— эффективная поверхность рассеяния

Содержание

Предисловие	7
Введение	10
Раздел 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППА- РАТОВ И ИХ ТОЧНОСТИ В ИНФОРМАЦИОННО- ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИСПЫТАНИЙ СТК	15
1.1. Анализ основных задач, решаемых ИИС при обеспечении испытаний СТК	15
1.2. Основные сведения о математическом аппарате, необходимом для построения стохастических моделей ИИС для обеспечения испытаний СТК	19
1.2.1. Основные сведения о стохастических дифференциаль- ных уравнениях	19
1.2.2. Процедура объединения детерминированных и стохастических дифференциальных уравнений	24
1.2.3. Алгоритм формирования матричных коэффициентов стохастических дифференциальных и рекуррентных стохастических уравнений для использования их в алгоритмах динамической фильтрации траекторных измерений	26
1.3. Построение стохастической модели траекторной ИИС	39
1.4. Построение математических моделей частично наблюдаемых случайных процессов траекторных измерений для реализации алгоритмов динамической фильтрации	48
1.5. Построение математических моделей экстраполяции и интерполяции случайных процессов траекторных измерений	53
1.6. Построение математических моделей расчетных и реальных частично наблюдаемых случайных процессов и разработка обобщенной модели погрешности стохастической ИИС	57
1.7. Построение алгоритмов корреляционного анализа погрешности оценки вектора параметров движения ЛА траекторным измерительным комплексом	61
1.7.1. Общий вид корреляционной функции погрешности сглаживания результатов траекторных измерений	61
1.7.2. Основные теоретические соотношения для построения корреляционной функции погрешности оценки вектора параметров движения ЛА траекторным измерительным комплексом для различных вариантов обработки результатов измерений	63

Раздел 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИСПЫТАНИЙ СТК	93
2.1. Выбор и обоснование показателей точности траекторных измерительных комплексов для обеспечения испытаний сложных технических систем	93
2.1.1. Анализ показателей, применяемых для оценки точности существующих ТИК	93
2.1.2. Комплексный показатель точности ТИК	95
2.1.3. Соотношения для оценки значений интервального показателя точности ТИК	100
2.1.4. Интегральный показатель точности ТИК в задачах выбора рациональных вариантов построения траекторных информационно-измерительных систем	108
2.2. Методический подход к оценке потенциальной точности траекторного измерительного комплекса при динамической фильтрации результатов траекторных измерений	113
2.3. Структура программно-алгоритмического комплекса априорной оценки точности траекторного измерительного комплекса при динамической фильтрации результатов траекторных измерений	122
2.4. Математическая модель оценки влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средствами единого времени измерительного комплекса на точность оценки параметров движения ЛА	127
2.4.1. Исследование механизма влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средствами единого времени ИК на точность оценки параметров движения ЛА	127
2.4.2. Модель оценки показателей точности ТИК с учетом ошибок привязки измерений к единым моментам времени при дискретной линейной фильтрации результатов траекторных измерений	129
2.4.3. Алгоритмы формирования ковариационных матриц вектора оцениваемых параметров движения ЛА для различных вариантов обработки траекторной измерительной информации при наличии погрешностей в привязке первичных измерений к единой шкале времени	139
2.4.4. Результаты моделирования по исследованию влияния погрешностей формирования частотно-временной информации средств единого времени ИК на точность определения вектора параметров движения ЛА	143
2.5. Метод обоснования требований к точности временной привязки результатов радиотелеизмерений к единой шкале времени измерительного комплекса	150

Раздел 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ТРАЕКТОРНОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ	161
3.1. Метод оптимальной фильтрации многомерных случайных процессов результатов измерения координат ЛА с несинхронными во времени компонентами	162
3.1.1. Алгоритм оптимальной фильтрации многомерных случайных процессов результатов измерения координат ЛА с несинхронными во времени компонентами	163
3.1.2. Результаты исследования синтезированного модифицированного фильтра Калмана для фильтрации результатов измерения координат ЛА с несинхронными во времени компонентами	174
3.2. Метод субоптимальной нелинейной фильтрации многомерных случайных процессов траекторных измерений по высокоманевренным ЛА при наличии временных невязок в привязке компонент таких процессов к единой шкале времени	178
3.2.1. Алгоритм решения задачи субоптимальной нелинейной фильтрации многомерных случайных процессов результатов измерения траекторий высокоманевренных ЛА	182
3.2.2. Результаты исследования алгоритма субоптимальной нелинейной фильтрации многомерных случайных процессов результатов измерения траекторий высокоманевренных ЛА	186
3.3. Способ контроля местных шкал времени траекторного измерительного комплекса и управления ими в процессе проведения натурных экспериментов	190
3.4. Алгоритм фильтрации многомерных разнородных траекторных измерений от разнотипных измерительных средств для формирования данных целеуказаний средствам траекторного измерительного комплекса	197
3.4.1. Методика решения задачи совместной фильтрации многомерных разнородных траекторных измерений	199
3.4.2. Результаты исследования разработанного алгоритма фильтрации разнородных траекторных измерений для формирования данных целеуказаний средствам ТИК	208
Раздел 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ПОСЛЕПОЛЕТНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ТРАЕКТОРНОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ	211
4.1. Метод получения сглаженных оценок параметров движения ЛА по информации многоканальных траекторных измерений с использованием динамической фильтрации	212

4.1.1.	Краткий анализ существующих методов получения сглаженных оценок параметров движения ЛА с исполь- зованием аппарата динамической фильтрации	212
4.1.2.	Структура метода получения сглаженных оценок параметров движения ЛА по информации многоканальных траекторных измерений	215
4.1.3.	Процедура построения прямых и обращенных стохастических дифференциальных уравнений, описывающих непрерывные во времени случайные процессы	218
4.1.4.	Процедура построения прямых и обращенных рекуррентных стохастических уравнений, описывающих дискретные случайные процессы	221
4.1.5.	Процедура построения уравнений экстраполяции, описывающих случайные процессы траекторных измерений	223
4.1.6.	Процедура построения уравнений фильтров Калмана в прямом и обратном направлениях фильтрации дискретной измерительной информации . . .	224
4.1.7.	Методический подход к расчету начальных значений вектора оцениваемых параметров в уравнениях фильтра Калмана для прямой и обратной фильтрации траекторных измерений	227
4.1.8.	Процедура получения сглаженных значений условных математических ожиданий оцениваемых параметров движения ЛА по всему объему траекторной измерительной информации	239
4.1.9.	Обобщенный алгоритм определения сглаженных оценок вектора параметров движения ЛА с исполь- зованием аппарата динамической фильтрации	242
4.2.	Метод совместной оптимальной фильтрации несинхронных во времени разнородных траекторных измерений от наземных средств и бортовых измерителей перегрузок	244
4.2.1.	Алгоритм оптимальной фильтрации несинхронных во времени разнородных траекторных измерений . . .	244
4.2.2.	Результаты исследования метода совместной оптималь- ной фильтрации несинхронных во времени разнород- ных траекторных измерений от наземных средств и бортовых измерителей перегрузок	254
Раздел 5.	МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕ- ЛИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРНЫХ ИНФОРМАЦИОННО- ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ	258
5.1.	Основные сведения о математическом моделировании траекторных ИИС	258



5.2. Алгоритм кинематической модели движения летательных аппаратов	260
5.3. Комплекс алгоритмов формирования результатов измерений радиолокационными станциями траекторных измерений	266
5.3.1. Обобщенный алгоритм формирования результатов измерений радиолокационными станциями траекторных измерений	266
5.3.2. Алгоритм программного модуля оценки максимальной дальности обнаружения ЛА радиолокационными станциями траекторных измерений	268
5.3.3. Алгоритм программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА радиолокационными станциями траекторных измерений следающего типа	274
5.3.4. Алгоритм программного модуля формирования выходной траекторной измерительной информации радиолокационной станции траекторных измерений	279
5.4. Комплекс математических моделей и алгоритмов формирования результатов измерений оптическими и оптико-электронными средствами траекторных измерений следающего типа	286
5.4.1. Математические модели и алгоритм программного модуля оценки максимальной дальности обнаружения ЛА оптическими и оптико-электронными системами траекторных измерений	286
5.4.2. Алгоритмы программного модуля оценки зоны наблюдения ЛА оптическими и оптико-электронными средствами траекторных измерений следающего типа	295
5.5. Особенности моделирования работы фоторегистрирующих станций траекторных измерений патрульного типа	304
5.6. Программно-алгоритмический комплекс априорной оценки точности траекторных информационно-измерительных систем	312
Заключение	321
Список литературы	324
Список сокращений	330

Справочное издание

**Буренок Василий Михайлович, Найденов Владимир Герасимович,
Поляков Валентин Иванович**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ
В ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИОННО-
ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

Главный редактор *Л.А. ГИЛЬБЕРГ*

Редактор *И.Н. Мырина*

Переплет художника *В.Н. Погорелова*

Технический редактор *В.Г. Верховзин*

Корректоры *Л.И. Сажина, Л.Е. Соношкина*

Сдано в набор 18.10.2011 г. Подписано в печать 23.11.11 г.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура NewtonC.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 27,3. Уч.-изд. л. 21,43.
Тираж 1000 экз. Заказ .

ООО «Издательство Машиностроение»
107076, Москва, Стромынский пер., 4

Отпечатано в ГУП ППП «Типография «Наука» РАН»
121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-94275-608-6



9 785942 756086