

В.Д. БОЛЫШАНОВ, П.А. ГАЙДАЕВ

ТЕОРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ
ИЗМЕРЕНИЙ

magiclibrary.ru.ex6.ru

Большаков В. Д., Гайдаев П. А. Теория математической обработки геодезических измерений. Изд. 2, перераб. и доп. М., «Недра», 1977. 367 с.

Книга состоит из двух частей. Первая часть — «Теория ошибок измерений» — включает элементы теории вероятностей и математической статистики (главы I и II), основы теории ошибок измерений (глава III) и вопросы математической обработки многократных измерений одной величины (глава IV). Вторая часть — «Метод наименьших квадратов» — освещает сущность этого метода (глава V), основные и видоизмененные способы уравнивания результатов измерений нескольких величин с освещением вопросов оценки точности (главы VI—VIII). Рассматриваются вопросы интерполирования измеренных значений неизвестной функции (глава IX) и уравнивательных вычислений при большом числе неизвестных (глава X). Приведенные в книге способы и схемы вычислений для обработки геодезических измерений иллюстрируются примерами. В приложении даны вспомогательные таблицы, необходимые для расчетов точности.

Табл. 67 + 7 прил., ил. 16, список лит. — 63 назв.

Труд П. А. Гайдаева и В. Д. Большакова «Теория математической обработки геодезических измерений» соответствует дисциплине, называвшейся ранее в учебной литературе «Способ наименьших квадратов». Новое название точнее отражает содержание труда и учебной дисциплины.

Книга соответствует современному состоянию данной научной дисциплины и по содержанию существенно отличается от ранее изданных аналогичных учебников.

В книге изложено основное учебное материал предпосланы необходимые сведения из теории вероятностей и математической статистики, причем эти сведения используются как исходное математическое основание для изложения теории ошибок измерений и метода наименьших квадратов.

Вопросы классификации измерений и уравнительных вычислений изложены на новой методологической основе, в которой отсутствует разделение измерений на «непосредственные», «посредственные» и «условные», на чем основывалось изложение способов решения задачи уравнивания во многих учебниках и что весьма затрудняло изучение столь важной для инженера-геодезиста научной дисциплины. Такой методологический подход позволил устранить существовавший разрыв в изложении основных способов решения задачи уравнивания, трактовавшихся как «способ посредственных измерений» и «способ условных измерений». В книге для обоих способов дается их общая теория (глава V), базирующаяся на избыточных измерениях, что соответствует действительному порядку вещей при постановке и решении задачи уравнивания.

Кроме основных способов уравнивания (главы V—VI), в книге излагаются вспомогательные способы — параметрический способ с избыточными неизвестными, способ условий с дополнительными (неизмеренными) неизвестными и др. (глава VIII). Изложение всех способов уравнивания сопровождается тщательно и полно отработанными примерами.

Важный для геодезических работ вопрос оценки точности измерений базируется на принятом авторами положении, что математическое ожидание для ошибок измерений отличается от нуля, а следовательно, и предельное значение среднего арифметического отличается от истинного значения измеряемой величины по причине влияния систематических ошибок. В книге приведены рекомендации по борьбе с систематическими ошибками, являющимися в современных высокоточных измерениях основным препятствием для существенного повышения точности геодезических определений (главы III, IV и др.).

В отличие от записи алгоритма Гаусса, связанной с порядковым номером букв в латинском алфавите, в книге применяется запись, в которой коэффициенты уравнений обозначаются только буквами a (для исходной системы) и N (для преобразованных систем) с цифровыми индексами.

В книге с достаточной для учебника полнотой освещается вопрос уравнительных вычислений при большом числе неизвестных (глава X), имеющий важное значение для вычисления государственных геодезических сетей высших классов.

Математические сведения, необходимые для изучения дисциплины, не выходят за рамки основ дифференциального и интегрального исчисления. В теоретических выводах там, где это было целесообразно, использовались элементарные сведения из матричного исчисления.

Б. С. Кузьмин, В. Е. Гмурман

По содержанию данный учебник соответствует программе курса «Теория математической обработки геодезических измерений» для геодезических вузов и факультетов. Программа одобрена на заседаниях кафедры геодезии Московского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии (МИИГАиК) и кафедры геодезии и астрономии Военно-инженерной Краснознаменной и ордена Ленина академии им. В. В. Куйбышева и утверждена Учебно-методическим управлением по высшим учебным заведениям Министерства высшего и среднего специального образования СССР. Учебник предназначен для студентов вторых и третьих курсов очного, заочного и вечернего обучения геодезического, аэрофотогеодезического и картографического факультетов геодезических вузов и соответствующих специальностей негеодезических вузов.

При изложении учебного материала книги используется математический аппарат, в основном известный студенту 2-го курса технического вуза. Однако то обстоятельство, что данный курс изучается параллельно с курсом высшей математики, создает некоторые трудности и должно учитываться лектором. Что касается понятий из специальных дисциплин (геодезии и др.), используемых при изложении учебного материала курса, то они не создадут особых затруднений студентам, изучившим первую часть курса геодезии, и лишь в незначительной своей части потребуют некоторых дополнительных пояснений.

Во втором издании книги «Теория математической обработки геодезических измерений» заново написан § 52 «Допуски для результатов измерений и их функций» с учетом развития взглядов на эти важные для геодезии вопросы. В остальном содержание книги подверглось коррективам, связанным с устранением неточностей.

Изложение теоретического материала в книге, как правило, иллюстрируется примерами. Можно надеяться, что это позволит использовать учебник не только для обучения студентов, но и в топографо-геодезическом производстве.

Что касается степени участия авторов в создании учебника, то все его главы написаны при тесном и полном сотрудничестве авторов; поэтому оба автора в равной мере ответственны перед читателями за все содержание книги.

Авторы благодарны коллективам кафедры геодезии МИИГАиК и кафедры геодезии и астрономии академии им. В. В. Куйбышева за помощь и полезные советы при работе над программой курса и рукописью учебника.

Отзывы и критические замечания читателей книги авторами будут восприняты с должным вниманием.

Измерения играют весьма важную роль во всех областях техники, они доставляют исходную информацию для точных наук.

Измерения составляют основное содержание всех работ, выполняемых с целью картографо-геодезического изучения земной поверхности. Методы и средства измерений, связанных с изучением Земли, разрабатываются в геодезии, практической астрономии, гравиметрии, фотограмметрии, картометрии, космической геодезии и в других науках.

Измерение любой величины рассматривают с двух точек зрения: количественной, выражающей числовое значение измеренной величины, и качественной, характеризующей точность измерения.

С развитием науки и техники, в частности геодезии, повышается точность измерений и совершенствуются методы их математической обработки.

В измерениях не должно быть промахов и просчетов, или, как говорят, грубых ошибок. Для обнаружения последних в геодезической практике всегда делают не менее двух измерений каждой величины и, кроме того, используют математические зависимости между измеряемыми величинами (например, равенство суммы углов в плоском треугольнике 180° , равенство нулю суммы превышений в замкнутом высотном полигоне и т. п.).

Из опыта известно, что даже при самой тщательной и аккуратной работе многократные (повторные) измерения любой постоянной величины всегда дают несколько различные результаты, а результаты измерений математически связанных величин образуют невязки*. Порядок величины невязок и расхождений между результатами повторных измерений должен соответствовать точности измерений, что и является признаком отсутствия грубых ошибок в измерениях.

То обстоятельство, что и при отсутствии грубых ошибок результаты повторных измерений всегда в известных пределах различаются между собой, объясняется тем, что любые измерения всегда сопровождаются неизбежными малыми ошибками, т. е. отклонениями результатов измерений от точных значений измеряемых величин. Источниками этих ошибок являются неточности измерительных опе-

* Если математическую зависимость между измеряемыми величинами выразить равенством $\varphi(X_1, \dots, X_n) = 0$, то невязка W определится равенством $W = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, где x_i — результаты измерений.

раций наблюдателя, неточности изготовления и юстировки приборов, недостатки учета влияния непрерывно изменяющихся условий измерений и др.

«Поэтому их (т. е. неизбежные ошибки. — *Прим. авт.*) приходится терпеть в наблюдениях, по следует, по возможности, ослабить их влияние на полученные результаты путем искусного комбинирования...» *.

В вопросе о точности измерений и их математической обработки следует обратить внимание на одно важное обстоятельство. Но вдаваясь пока в способы числовой оценки качества результатов измерений, а priori можно утверждать, что результаты, содержащие меньшие ошибки, больше импонируют потребителю этих результатов. На этом основании иногда предъявляют явно завышенные требования к точности измерений, несоответствующие действительной необходимости и реальным возможностям. Однако излишняя точность измерений столь же нежелательна, как и недостаточная точность, так как это ведет к увеличению объема и сроков работ и к их удорожанию. Поэтому возникает задача определения целесообразной, т. е. необходимой и достаточной, точности измерений и обработки их результатов.

Изучением качества геодезических измерений, законов возникновения и действия неизбежных малых ошибок, разработкой правил оценки и расчетов необходимой точности измерений, а также методов и способов вычислений, позволяющих получать при экономных затратах вычислительного труда наилучшие окончательные результаты, и занимается теория математической обработки геодезических измерений.

Логическая структура книги показана на рис. 1; она состоит из двух частей: теории ошибок измерений и метода наименьших квадратов. Обе части основаны на элементах теории вероятностей; при этом надо иметь в виду, что «Теория вероятностей» как отдельный предмет в геодезических вузах не изучается. Небольшой раздел этой важной науки, включенный в программу курса высшей математики технических вузов, восполняет этот пробел лишь частично.

Авторы стремились учесть достижения советской геодезической школы в методологии и методике изложения способа наименьших квадратов, опираясь при этом на труды К. Ф. Гаусса (1777—1855).

Может возникнуть вопрос: почему традиционное название дисциплины «Способ наименьших квадратов» заменено на «Теорию математической обработки геодезических измерений»? Для ответа на этот вопрос следует обратиться к схеме логической структуры книги, откуда вытекает необходимость такой замены. Метод наименьших квадратов, предложенный Лежандром и Гауссом, более чем за 160-летний период его применения всесторонне проверен практикой, получил и получает все новое развитие. Тем не менее для подготовки

* К. Ф. Гаусс. Избранные сочинения, т. I. М., Геодезиздат, 1957 с. 18.

высококвалифицированных специалистов в области математической обработки геодезических измерений одного метода наименьших квадратов недостаточно. К этому выводу приходят многие геодезисты

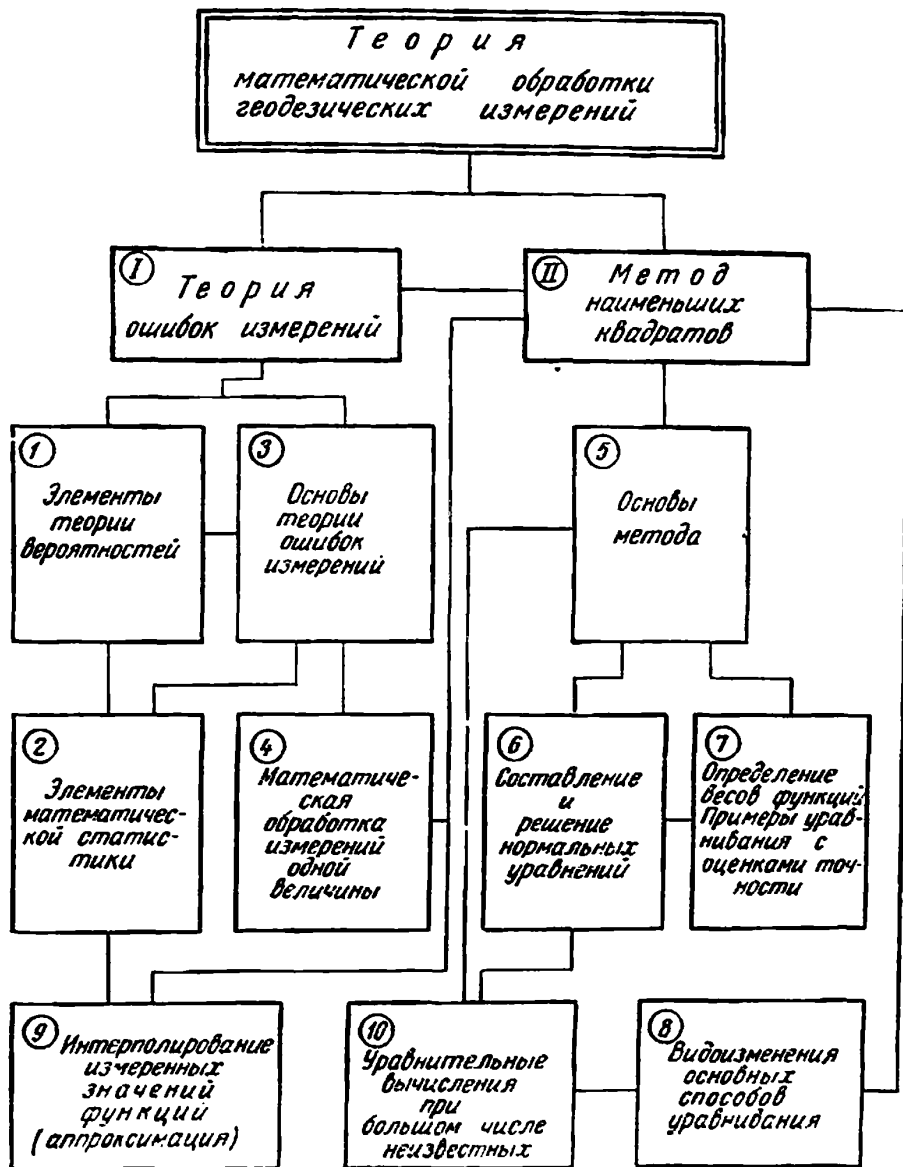


Рис. 1

Основы метода наименьших квадратов и теории ошибок были разработаны на рубеже XVIII и XIX столетий. К тому времени в астрономии и геодезии значительно повысилась точность измерений и накопился обширный материал наблюдений, который требовалось обработать методами, дающими наилучшие результаты. Задачи

теоретической и практической астрономии и геодезии настойчиво требовали создания научно обоснованного метода математической обработки результатов измерений.

Отвечая требованиям науки и практики, ученые выдвинули ряд предложений по математической обработке результатов измерений. В XVIII в. выдающиеся астрономы и математики того времени — член русской Академии наук Леонард Эйлер (1707—1783), П. Ламберт (1728—1777), П. Лаплас (1749—1827) и другие — предлагали различные способы, но все они не нашли применения по своей сложности.

В 1806 г. французский математик А. Лежандр (1752—1833) опубликовал работу «Новые методы определения кометных орбит», в которой предложил для математической обработки результатов наблюдений метод наименьших квадратов, проиллюстрировав его примером из геодезии (определение размеров Земли на основе градусных измерений).

В 1809 г. Карл Гаусс (1777—1855) опубликовал свою работу «Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям». В этой работе Гаусс блестяще развивает алгебраическую сторону метода наименьших квадратов. Достаточно сказать, что введенные им обозначения и символика сохранились и до настоящего времени. Это обстоятельство позволяет считать Гаусса наряду с Лежандром создателем метода наименьших квадратов.

В 1810 г. французский математик и астроном Лаплас, используя результаты Муавра (1667—1754), вывел формулу, позволяющую определять вероятности числа появлений случайных событий при многократных испытаниях. Эта формула значительно расширила возможности применения теории вероятностей в практике и, в частности, при обработке результатов наблюдений.

Значительное развитие теория вероятностей получила в работах русских математиков: академиков П. Л. Чебышева (1821—1894), А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпунова (1857—1918).

Работы П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова продолжили и развили советские ученые: С. Н. Бернштейн, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Н. В. Смирнов, В. И. Романовский, Ю. В. Линник, Б. В. Гнеденко и другие, создавшие передовую советскую школу теории вероятностей и математической статистики.

Широкое применение в геодезии метод наименьших квадратов нашел лишь в середине XIX в. после выхода в свет ряда руководств по практическому его применению. Характерно, что впервые практическое руководство по применению этого метода в геодезии было издано в России в 1836—1837 гг. русским военным геодезистом А. П. Болотовым. В Германии руководство такого рода было впервые издано лишь в 1843 г.

Разработкой методов уравнивательных вычислений* занимались главным образом астрономы и геодезисты. Из зарубежных ученых

* «Уравнивательными» называют вычисления, связанные с математической обработкой измерений по методу наименьших квадратов.

в первую очередь следует упомянуть немецких ученых Ф. Гесселя (1784—1846), Ф. Гельмерта (1843—1917), О. Шрейбера, Л. Крюгера.

Широкое применение в геодезических вычислениях метод наименьших квадратов получил в России. Академик А. Н. Савич (1811—1883) издал в 1857 г. книгу «Приложение теории вероятностей к вычислению наблюдений и геодезических измерений». Сразу же после выхода этой книги в свет она была переведена на немецкий язык и издана в Германии. Разработкой методов и приемов уравнивания занимаясь в России также военные геодезисты: проф. П. П. Померанцев (1847—1922), проф. В. В. Витковский (1956—1924) и др.

В годы социалистического строительства геодезические работы в СССР достигли невиданных до того объема и темпов выполнения. Уже к 1940 г. в СССР была создана грандиозная астрономо-геодезическая сеть с общим протяжением рядов триангуляции 1 класса свыше 75 000 км. Эта сеть покрывала собой площадь, в два раза большую, чем США. К настоящему времени объем выполненных работ значительно увеличен.

Перед советскими геодезистами встала прежде всего задача строгого уравнивания системы полигонов триангуляции 1 класса, покрывающих огромные пространства нашей Родины. Кроме этой задачи, перед советскими геодезистами встала и другая, не менее сложная задача — уравнивание сложившихся сетей 2 класса, заполняющих собой полигоны 1 класса. Уравнивание этих обширных сетей требовало теоретической и практической разработки новых приемов уравнивания, значительно упрощающих вычисления, без ущерба для строгости решения задачи.

Все эти задачи с успехом решались и решаются коллективными усилиями советских геодезистов. В связи с этим следует в первую очередь упомянуть члена-корреспондента Академии наук СССР проф. Ф. Н. Красовского (1878—1948) и проф. Н. А. Урмаева (1895—1959), создавших методы обработки астрономо-геодезической сети СССР. Предложенные Ф. Н. Красовским и Н. А. Урмаевым простые и в то же время достаточно строгие методы позволили практически разрешить задачу создания единой и высококачественной геодезической основы. В этом деле большие заслуги имеет также доц. Д. А. Ларин, в течение многих лет руководивший вычислительными работами по обработке основных сетей СССР.

В решении задачи обработки геодезических сетей, заполняющих полигоны триангуляции 1 класса, немалая заслуга принадлежит военному геодезисту И. М. Герасимову и полк. И. Ю. Прайс-Праневичу. Совместно с коллективами вычислителей они разработали эффективные способы уравнивания обширных заполняющих сетей и создали фундаментальные руководства по вычислению триангуляций, в которых подытожили многолетний вычислительный опыт русских и советских геодезистов.

Много сделал в области математической обработки результатов измерений заслуженный деятель науки и техники проф. А. С. Чеботарев, перу которого принадлежат наиболее популярные среди советских геодезистов руководства по способу наименьших квадра-

тов. Можно отметить также его труды в области уравнивания полигонометрии. Большие заслуги в создании различных методов математической обработки результатов измерений принадлежат профессорам П. И. Идельсону, Н. Г. Келлю и В. В. Попову.

Широко известны также имена профессоров В. В. Давилова, А. И. Дурнева, А. А. Изотова, М. М. Машимова, Г. А. Бурмистрова, П. И. Шилова, К. Л. Проворова, А. И. Мазмишвили, Е. Г. Ларченко, А. В. Гордеева, Ю. В. Кемлица, К. К. Скиданенко, Н. И. Купчинова, В. И. Гавышина, В. Г. Конусова, А. А. Влзгина, П. И. Лебедева, Н. Г. Видуева, докт. техн. наук А. З. Сазонова, профессоров Ю. И. Маркузе, Б. А. Литвинова, Ю. А. Гордеева, Е. Г. Бойко, Н. Д. Дроздова, доцентов Б. С. Кузьмина, Ю. М. Неймана и других советских ученых, работающих в области математической обработки результатов геодезических измерений.

Наличие передовой вычислительной школы позволило советским геодезистам в кратчайшие сроки (за 4—5 лет) выполнить поставленную перед ними Советским правительством грандиозную задачу по перевычислению всех триангуляций Советского Союза на новый референц-эллипсоид Красовского.

Появление современных электронных вычислительных машин открывает новые возможности развития методов уравнивательных вычислений и, в частности, обработки опорных геодезических сетей.

Предлагаемый читателю учебник «Теория математической обработки геодезических измерений» не претендует на исчерпывающее и строгое изложение всех затронутых в нем вопросов. Более того, при изложении основ теории вероятностей и математической статистики авторы ограничились лишь самыми элементарными сведениями, которые, однако, в приложении к геодезии позволяют, по мнению авторов, построить достаточно строгую теорию математической обработки геодезических измерений, обеспечивающую заданную точность вычислений. Так, например, при вероятностных расчетах в геодезии в преобладающем числе случаев достаточно обеспечить две и максимум три значащие цифры, так как эти расчеты относятся, как правило, не к результатам измерений, а к их ошибкам. По вполне понятным соображениям авторы не нашли возможным и нужным останавливаться также на анализе различных трактовок понятий и определений теории вероятностей и математической статистики, а привели лишь те из них, которые при элементарном изложении наиболее доходчивы и понятны и позволяют решать поставленную задачу.

Часть первая

ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИИ

Глава I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей — математическая дисциплина, изучающая количественные закономерности массовых случайных явлений, т. е. таких явлений, которые при многократном воспроизведении одного и того же опыта происходят каждый раз различно.

Все в мире закономерно, учил диалектический материализм. Ф. Энгельс пишет: «..., где на поверхности происходит игра случайности, там сама эта случайность всегда оказывается подчиненной внутренним, скрытым законам. Все дело лишь в том, чтобы открыть эти законы»*. Теория вероятностей разрабатывает методы установления этих законов, скрытых при рассмотрении отдельных случайных событий, путем изучения случайных явлений на основе большого числа наблюдений.

Для изучения разнообразных явлений реального мира производятся наблюдения, опыты и измерения.

Наблюдение — основа всех научных исследований; признаки наблюдаемого объекта, выявляемые при наблюдении, могут быть как качественными, так и количественными. Количественные признаки определяют либо путем точного дискретного счета, либо путем измерений, дающих, как правило, приближенные результаты. Так, например, число попаданий в мишень определяется точно, отклонение же пробоя от центра можно получить лишь приближенно.

Таким образом, теория вероятностей изучает не только случайные события, но и случайные величины. Случайной называют величину, которая при опыте принимает значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Кроме случайных событий и случайных величин, теория вероятностей изучает случайные функции.

* Ф. Энгельс. Людвиг Фейербах и конец классической немецкой философии. М., Госполитиздат, 1953, с. 42.

Измерением называется количественное сравнение определяемой физической величины с однородной ей величиной, значение которой известно. В результате измерения получают число, показывающее, во сколько раз определяемая физическая величина больше или меньше величины, с которой ее сравнивали, и в конечном итоге больше или меньше величины, принятой за меру измерения.

Нас будут интересовать закономерности тех случайных явлений, которые обладают относительной устойчивостью некоторых свойств (появляются в виду не единичные случайные события, а их массовое проявление). В жизни почти все случайные явления именно такого рода. Так, например, процент рождения мальчиков по отношению к общему числу рождения детей в больших городах в разные годы сохраняется довольно устойчиво (примерно 51,5%); в качестве других примеров можно привести число корреспонденций в течение определенных периодов и даже такие случайные явления, как несчастные случаи на улицах большого города: число таких случаев относительно устойчиво в определенные дни разных недель, в одни и те же месяцы разных годов. Заметим, кстати, что на изучении закономерностей таких случайных явлений, как несчастные случаи, пожары, град и другие стихийные бедствия, основывается страховое дело. Весьма устойчивы также средние значения таких случайных величин, как рост людей, месячная температура в определенных географических районах и т. п.

§ 2. СОБЫТИЯ

Осуществление каждого отдельного наблюдения, опыта или измерения называют **испытанием**. Результат испытания называют **событием**.

Примеры. 1. При бросании монеты могут произойти события: «появление герба», «появление цифры».

2. При измерении трех углов в плоском треугольнике сумма измеренных углов в зависимости от качества зрения наблюдателя, наличия инструментальных ошибок, влияния внешних условий и других причин будет отличаться от 180° либо в сторону увеличения, либо в сторону уменьшения, либо будет случайно совпадать с теоретической суммой. Это соответствует следующим событиям: «появление положительной ошибки (невязки) в сумме измеренных углов», «появление отрицательной ошибки в сумме измеренных углов», «отсутствие ошибки в сумме измеренных углов».

Совокупность условий, при которых производится данное испытание, называют **комплексом условий**.

Пример. При измерении углов теодолитом к комплексу условий могут быть отнесены: увеличение зрительной трубы инструмента, точность отсчетного приспособления, точность центрировочного устройства, качество изображения зримых целей, внешние условия, опытность наблюдателя и т. д.

Событие, которое при воспроизведении опыта (при осуществлении данного комплекса условий) может наступить, а может и не наступить, называют **случайным событием**.

Соответственно этому явление, которое при многократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз не-

сколько по-иному в зависимости от некоторой изменчивости условий, в которых производится опыт, называют **случайным явлением**.

Пример. Результатами стрельбы из орудия при одной и той же его установке являются случайные события: «попадание в цель» «недолет», «перелет», «отклонение влево», «отклонение вправо» и т. д. Эти результаты обусловлены тем, что, хотя стрельба производится и при одной установке орудия, неучтенные факторы (отклонение массы снаряда и заряда от расчетного, точность наведения, точность введения поправок и т. д.) оказывают свое влияние, и опыт протекает каждый раз несколько по-иному.

Как уже указывалось, при большом числе испытаний производимых в одинаковых условиях *, обнаруживаются вполне устойчивые закономерности, что является основополагающим при применении методов теории вероятностей и математической статистики к обработке массовых наблюдений.

Простым случайным событием назовем такой результат испытания, который полностью описывается одним (и только одним) событием. Простое событие не может быть разделено на составляющие события.

Сложным случайным событием назовем такое, которое составляется из двух или нескольких простых событий.

Обозначим через $A, B, C, \dots, W$ различные случайные события; в последующем будем писать: «событие A », «событие B » и т. д.

Пример. Выпадение герба или цифры при одном бросании монеты — простое событие; результат испытаний при десяти бросаниях монеты есть сложное событие.

1 Виды событий

Различают события: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое непременно произойдет, если осуществится определенный комплекс условий.

Пример. В урне имеются только белые шары. Событие A — появление белого шара при взятии одного шара — событие достоверное.

Достоверное событие принято обозначать буквой U . Следовательно,

$$A = U.$$

Событие, которое при осуществлении определенного комплекса условий не может произойти, называют **невозможным**.

Пример. В предыдущем случае невозможным событием является событие B — появление черного шара (комплекс условий определяется наличием в урне только белых шаров).

Невозможное событие принято обозначать буквой V . Следовательно,

$$B = V.$$

* Под одинаковыми условиями здесь и далее будем понимать условия, которые характеризуются примерно равными показателями основных действующих факторов (температуры, давления, влажности, силы и направления ветра при измерениях, географических условий и т. п.).

Как уже отмечено выше, с л у ч а й н ы м называют событие, которое при осуществлении определенного комплекса условий может либо произойти, либо не произойти.

Например, если производится измерение длины, точное значение которой известно, то ошибка измерения может быть либо со знаком плюс, либо со знаком минус, но с каким именно — заранее сказать нельзя, так как случайное событие есть результат действия многих причин (условия измерений, точность метода измерений, методика измерений и т. п.), учесть которые безошибочно невозможно.

Пример. При бросании монеты она может упасть кверху либо гербом, либо цифрой. Поэтому события: «при бросании монеты вышел герб», «при бросании монеты выпала цифра» — события случайные.

2. Виды случайных событий

Случайные события различают: совместные, несовместные, единственно возможные, равновозможные.

События называют с о в м е с т н ы м и, если при испытании они могут наступить все.

Если $A, B, C, \dots, W$ — совместные события и известно, что они наверняка произойдут, то пишут

$$A \cdot B \cdot C \cdot \dots \cdot W = U. \quad (1.1)^*$$

Пример. Попадание снаряда в цель и разрыв снаряда — события совместные.

События н е с о в м е с т н ы, если при одном испытании появление одного из них исключает появление других.

Примеры. 1. В урне имеются белые и черные шары. При одном испытании (взятии одного шара) событие A (появление белого шара) и событие B (появление черного шара) — несовместные события.

2. Производится один выстрел из орудия. События «разрыв снаряда» и «не разрыв снаряда» — несовместные события.

Е д и н с т в е н н о в о з м о ж н ы м и называют события, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием. Эти события попарно несовместны.

Пример. При бросании монеты единственно возможные события: «появился герб», «появилась цифра».

События р а в н о в о з м о ж н ы, если ни одно из них не является объективно возможным больше, чем любое другое, например выпадение герба или цифры при бросании монеты, выпадание карты любой масти из колоды.

3. Полная группа событий

Систему единственно возможных событий называют п о л н о й г р у п п о й с о б ы т и й. Таким образом, при испытании одно из событий полной группы обязательно появится.

* Формулы в книге обозначаются двумя индексами: номером главы и номером формулы в ней.

Пример. В урне лежат белые, черные и красные шары. При испытании (т. е. при вынимании одного шара) может появиться только белый, черный или красный шар. Три события: «появление белого шара», «появление черного шара», «появление красного шара» составляют полную группу событий.

Два единственно возможных события, образующих полную группу событий, называют **противоположными**. Событие, противоположное событию A , обозначается той же буквой, но с чертой наверху, т. е. $\bar{A}$ — событие, противоположное событию A (иногда говорят «не A »).

Примеры. 1. A — появление герба при бросании монеты;

$\bar{A}$ — появление цифры при бросании монеты.

2. B — попадание при выстреле;

$\bar{B}$ — промах при выстреле.

3. C — все попадания при N выстрелах;

$\bar{C}$ — хотя бы один промах при N выстрелах.

4. Появление некоторого события и его неоявление.

Последний пример имеет особое значение, так как к нему можно свести рассмотрение любого случайного события.

Таким образом, при одном испытании

$$(и\ A\ и\ \bar{A})\ A\bar{A}=1; \quad (1.2)$$

$$(или\ A,\ или\ \bar{A})=A+\bar{A}=1. \quad (1.3)$$

§ 3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА И ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Относительной частотой некоторого события называют отношение числа появлений этого события к числу всех испытаний при данном комплексе условий.

Пусть Q — относительная частота, k — число появлений события, n — число всех испытаний.

В соответствии с определением

$$Q = \frac{k}{n}. \quad (1.4)$$

Пример. Произведено 30 измерений одной и той же величины; при этом число отрицательных ошибок оказалось равным 12. Следовательно, $k = 12$, $n = 30$, относительная частота появления отрицательной ошибки $Q = 0,40$.

На основании самого определения понятия относительной частоты легко установить, что она не может быть отрицательной и что ее значение для любого события удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq Q \leq 1 \quad (\text{так как } 0 \leq k \leq n). \quad (1.5)$$

В § 1 отмечено, что при большом числе испытаний в одинаковых условиях обнаруживаются вполне устойчивые закономерности. Яркое проявление подобных закономерностей — свойство устойчивости относительной частоты однородных случайных событий, т. е. уменьшение разброса ее значений, получаемых в разных сериях испытаний,

Из изложенного следует, что для каждого события, исходя из практических соображений, необходимо установить как бы допустимую величину отклонения вероятности от единицы или нуля для того, чтобы можно было считать событие практически достоверным или, наоборот, практически невозможным.

Рассмотрим следствия, которые вытекают из определения вероятности.

1. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$p(V) = 0, \quad (1.8)$$

где V — невозможное событие.

Действительно, если в формуле (1.6) $M = 0$, то $p = 0$.

2. Вероятность достоверного события равна единице, т. е.

$$p(U) = 1, \quad (1.9)$$

где U — достоверное событие.

Действительно, если в формуле (1.6) $M = N \neq 0$, то $p = 1$.

3. Вероятность случайного события — всегда положительное число, заключенное между нулем и единицей, т. е.

$$0 < p < 1. \quad (1.10)$$

Вероятность любого события удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq p \leq 1. \quad (1.11)$$

Далее будем обозначать

$p(A) = p$ — вероятность появления события;

$p(\bar{A}) = q$ — вероятность не появления события.

С учетом принятых обозначений для (1.3) можем записать

$$p + q = 1. \quad (1.12)$$

§ 4. СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Суммой нескольких несовместных событий называют сложное событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Пусть даны несовместные события $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Если событие B — сложное событие, состоящее в появлении одного из этих несовместных событий, безразлично какого, то

$$B = (\text{или } A_1, \text{ или } A_2, \dots, \text{ или } A_n). \quad (1.13)$$

Более удобной записью выражения (1.13) могут служить равенства

$$B = A_1 + A_2 + \dots + A_n, \quad (1.14)$$

или

$$B = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (1.15)$$

1. Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий, безразлично каких, равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$p(B) = p(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n), \quad (1.16)$$

или

$$p\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i). \quad (1.17)$$

Доказательство. Введем обозначения:

N — общее число возможных элементарных исходов испытания;

M_1 — число исходов, благоприятствующих событию A_1 ;

M_2 — число исходов, благоприятствующих событию A_2 ;

M_n — число исходов, благоприятствующих событию A_n .

Число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события

$$B = A_1 + A_2 + \dots + A_n,$$

равно

$$M_B = M_1 + M_2 + \dots + M_n. \quad (1.18)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_n}{N} = \\ &= \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} + \dots + \frac{M_n}{N} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Учтя что

$$\frac{M_i}{N} = p(A_i) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.20)$$

получим

$$p(B) = p(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n), \quad (1.21)$$

или

$$p\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i). \quad (1.22)$$

Пример. В лотерее 1000 билетов, из них падает выигрышей: на один билет — 500 р.; на 10 билетов — по 100 р.; на 50 билетов — по 20 р.; на 100 билетов — по 5 р. Остальные билеты невыигрышные.

Найти при наличии одного билета вероятность: 1) выигрыша не менее 20 р. и 2) выигрыша любой суммы.

Решение. Обозначим события: B_1 — выигрыш не менее 20 р.; B_2 — выигрыш любой суммы; A_1 — выигрыш 20 р.; A_2 — выигрыш 100 р.; A_3 — выигрыш 500 р.; A_4 — выигрыш 5 р.

Согласно условию,

$$B_1 = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$B_2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

По теореме сложения вероятностей имеем

$$P(B_1) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{50}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = 0,061.$$

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = \\ &= [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)] + P(A_4) = 0,061 + \frac{100}{1000} = 0,161. \end{aligned}$$

2. Теорема о сумме вероятностей событий полной группы

Сумма вероятностей, образующих полную группу, равна единице.

Действительно, если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, то появление одного из этих событий достоверно и, следовательно,

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1.$$

Поскольку события полной группы попарно несовместны, применима теорема сложения

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

§ 5. НЕЗАВИСИМЫЕ И ЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ

Условная вероятность

Выводы теории вероятностей, касающиеся сложных событий, будут существенно различны в зависимости от характера связи между событиями. Поэтому целесообразно дать определения независимых и зависимых событий и понятие об условной вероятности.

Два события называются **независимыми**, если вероятность одного из них не зависит от того, появилось или не появилось другое событие.

Пример. Двумя наблюдателями взято два отсчета по шкале прибора при одной установке. Вероятность ошибки первого наблюдателя не зависит от ошибки второго наблюдателя и наоборот.

Несколько событий называются **попарно независимыми**, если каждые два из них независимы.

Пример. Монета брошена 4 раза. Пусть B, C, D, E — события, состоящие в появлении цифры соответственно в первом, втором, третьем и четвертом испытаниях. Очевидно, что каждые два из событий, взятые попарно (т. е. B и C , B и D , D и E , B и D , B и E , C и D), независимы. Таким образом, события B, C, D, E — попарно независимые.

Несколько событий называются **независимыми в совокупности**, если каждое из них и любое сложное событие (состоящее из комбинации всех остальных или какой-либо части) — события независимы. Так, например, если A_1, A_2, A_3 — события, независимые в совокупности, то независимыми являются события A_1 и A_2 , A_1 и A_3 , A_2 и A_3 , A_1A_2 и A_3 , A_1A_3 и A_2 , A_2A_3 и A_1 .

Независимость в совокупности не является следствием попарной независимости, иными словами, несколько событий могут быть попарно независимыми, но не быть независимыми в совокупности.

Два события называются **з а в и с и м ы м и**, если вероятность появления одного из них зависит от того, появилось или не появилось другое событие.

Пример. Если поражение цели достигается двумя попаданиями, то поражение цели при втором выстреле есть событие зависимое, так как оно может произойти лишь при условии первого попадания в цель.

Вероятность, вычисленная в предположении, что одно или несколько событий уже произошло, называется **у с л о в н о й в е р о я т н о с т ь ю**.

Введем обозначения:

$p(A/B)$ — условная вероятность события A , вычисленная в предположении, что произошло событие B ;

$p(A/B_1, B_2, B_3)$ — условная вероятность события A , вычисленная в предположении, что произошли события $B_1, B_2, B_3, \dots$

События A и B зависимы, если выполняются неравенства

$$p(A/B) \neq p(A); \quad p(B/A) \neq p(B). \quad (1.23)$$

В отличие от условной вероятности вероятность независимого события называют иногда безусловной вероятностью (когда эти понятия используются вместе). События A и B независимы, если выполняются условия

$$p(A/B) = p(A); \quad p(B/A) = p(B). \quad (1.24)$$

В приведенном выше примере условная вероятность поражения цели при втором выстреле равна вероятности попадания в случае, если первый выстрел сопровождался попаданием в цель, и равна нулю в случае промаха при первом выстреле.

§ 6. УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Одним из примеров сложного события является произведение событий.

П р о и з в е д е н и е двух или нескольких событий называется сложное событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Пример. Произведено три выстрела по цели. Пусть событие B — попадание при первом выстреле, событие C — попадание при втором выстреле, событие D — попадание при третьем выстреле. Тогда сложное событие — попадание всеми тремя выстрелами

$$A = B \cdot C \cdot D.$$

Таким образом, если A — сложное событие, состоящее в совместном появлении событий $B, C, D, \dots, W$, то произведение событий будет выражено

$$A = B \cdot C \cdot D \cdot \dots \cdot W. \quad (1.25)$$

Иногда пишут

$$A = (и B, и C, и D, и \dots, и W).$$

В последующем изложении для обозначения произведения событий принята запись (1.25) как более простая.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух или нескольких зависимых событий равна произведению безусловной вероятности одного из этих событий на условные вероятности других, т. е.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = \\ = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}). \quad (I.27)$$

В более удобном виде формулу (I.27) можно представить так:

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P\left(A_n \left/ \prod_{i=1}^{n-1} A_i \right.\right). \quad (I.28)$$

Для вероятности произведения двух зависимых событий A и B формула (I.28) принимает вид

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \quad (I.29)$$

Если события, составляющие произведение, независимы, то теорема умножения вероятностей упрощается, принимая следующую формулировку: вероятность произведения двух независимых или нескольких независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий.

Таким образом, если в формуле (I.28)

$$P(A_2/A_1) = P(A_2); \quad P(A_3/A_1 A_2) = P(A_3); \quad \dots; \quad P\left(A_n \left/ \prod_{i=1}^{n-1} A_i \right.\right) = P(A_n),$$

то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) \dots P(A_n). \quad (I.30)$$

Докажем теорему умножения вероятностей для двух независимых событий A и B .

Доказательство. Введем обозначения:

- N — число возможных элементарных исходов испытания, в которых событие A появляется или не появляется;
- N_1 — число исходов, благоприятствующих событию A ($N_1 \leq N$);
- M — число возможных элементарных исходов испытания, в которых событие B появляется или не появляется;
- M_1 — число исходов, благоприятствующих событию B ($M_1 \leq M$).

Общее число возможных элементарных исходов испытания (число возможных «пар»: и A и B , или и A и $\bar{B}$, или и $\bar{A}$ и B , или и $\bar{A}$ и $\bar{B}$) равно NM . Число элементарных исходов испытания, благоприятствующих совместному появлению A и B , равно $N_1 M_1$.

Таким образом, вероятность совместного появления событий A и B равна

$$P(AB) = \frac{N_1 M_1}{NM} = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{M_1}{M} \quad (I.31)$$

Но так как в правой части (I.31)

$$\frac{N_1}{N} = p(A) \quad \text{и} \quad \frac{M_1}{M} = p(B), \quad (\text{I.32})$$

то окончательно

$$p(AB) = p(A) p(B), \quad (\text{I.33})$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать теорему для всех независимых совокупности событий, а методом математической индукции — для произвольного числа событий, т. е.

$$p\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n p(A_i). \quad (\text{I.34})$$

Пример. В двух ящиках имеются шары: в первом — a_1 белых и b_1 черных; во втором — a_2 белых и b_2 черных. Из каждого ящика наудачу извлекают по одному шару. Определить вероятность того, что оба извлеченных шара окажутся белыми.

Решение. Введем обозначения событий:

A_1 — шар, извлеченный из первого ящика, белый;

A_2 — шар, извлеченный из второго ящика, белый;

A — оба извлеченных шара белые.

Очевидно,

$$A = A_1 A_2.$$

Поскольку события A_1 и A_2 независимы, применима теорема умножения

$$p(A) = p(A_1 A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2) = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b_2} = \frac{a_1 a_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}.$$

В частном случае, когда вероятности всех событий одинаковы и равны p (этот случай часто встречается при решении задач теории ошибок), формулу (I.34) можно записать так (для простоты записи левая часть этой формулы обозначена через P)

$$P = p^n. \quad (\text{I.35})$$

Примеры. 1. Игральная кость брошена 5 раз. Определить вероятность того, что во всех бросаниях выпадет грань с тремя очками.

Решение. Вероятность выпадения грани с тремя очками при одном бросании игральной кости равна

$$p = \frac{1}{6}.$$

Искомая вероятность по формуле (I.35) равна

$$P = \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{7776}.$$

2. В ящике имеется 25 белых и 36 черных шаров. Определить вероятность последовательного появления двух белых шаров при условии, что первый извлеченный из ящика шар обратно не возвращается.

Решение. Введем обозначения событий:

A_1 — появление первого белого шара,

A_2 — появление второго белого шара.

Поскольку вероятность события A_2 зависит от того, наступило или не наступило событие A_1 , применима теорема умножения вероятностей зависимых событий

$$p(A_1 A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1).$$

Найдем вероятность события A_1

$$P(A_1) = \frac{25}{61}.$$

Найдем условную вероятность события A_2 при условии, что событие A_1 наступило,

$$P(A_2/A_1) = \frac{25-1}{61-1} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

Искомая вероятность равна

$$P(A_1 A_2) = \frac{25 \cdot 2}{61 \cdot 5} \approx 0,164.$$

3. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна 0,20. Найти вероятность того, что при одном выстреле цель будет поражена, если 2% взрывателей дают отказы.

Решение. Введем обозначения событий:

A — цель поражена,

A_1 — попадание в цель,

A_2 — взрыватель не отказал.

Очевидно,

$$A = A_1 A_2.$$

Поскольку события A_1 и A_2 независимы, применима теорема умножения

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,20 (1 - 0,02) = 0,20 \cdot 0,98 = 0,196.$$

§ 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРИ МНОГОКРАТНЫХ ИСПЫТАНИЯХ (БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ)

При постановке многих экспериментов, например при исследовании новых инструментов или при проверке новых методов работ, испытания производятся многократно, при сохранении определенного комплекса условий. Испытателя в этом случае интересуют все возможные результаты предстоящих опытов и их сравнительная вероятностная характеристика. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Если производится серия испытаний, причем вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события A .

Допустим, что производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A известна, а именно равна p и постоянна. Поставим своей задачей определить вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях событие A появится ровно k раз, безразлично в какой последовательности. С этой целью проанализируем результаты испытаний последовательно: после одного испытания, после двух испытаний и т. д. и, наконец, после n испытаний.

После одного испытания событие A может появиться либо не появиться, т. е. возможны следующие два события, образующие полную группу:

$$\bar{A}, A.$$

Так как сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице, то

$$p(\bar{A}) + p(A) = 1,$$

или

$$q + p = 1.$$

После двух независимых испытаний возможны следующие сложные события:

$$\bar{A}\bar{A}, A\bar{A}, \bar{A}A, A\bar{A}.$$

Так как эти события образуют полную группу, то

$$p(\bar{A}\bar{A}) + p(A\bar{A}) + p(\bar{A}A) + p(AA) = 1. \quad (I.36)$$

Поскольку рассматриваемые события независимы, применима теорема умножения

$$\begin{aligned} p(\bar{A}\bar{A}) + p(A\bar{A}) + p(\bar{A}A) + p(AA) &= qq + pp + qp + pq = \\ &= q^2 + 2qp + p^2 = (q + p)^2 = 1. \end{aligned} \quad (I.37)$$

После трех независимых испытаний возможны следующие сложные события:

$$\bar{A}\bar{A}\bar{A}, A\bar{A}\bar{A}, \bar{A}A\bar{A}, \bar{A}\bar{A}A, A\bar{A}A, \bar{A}AA, A\bar{A}A, AAA.$$

Эти события образуют полную группу и независимы. поэтому сумма их вероятностей равна единице и к ним применима теорема умножения

$$\begin{aligned} p(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) + p(A\bar{A}\bar{A}) + p(\bar{A}A\bar{A}) + p(\bar{A}\bar{A}A) + p(A\bar{A}A) + p(\bar{A}AA) + p(A\bar{A}A) + \\ + p(AAA) &= q^3 + p^3 + q^2p + q^2p + q^2p + p^2q + p^2q + p^2q = \\ &= q^3 + 3q^2p + 3p^2q + p^3 = (q + p)^3 = 1. \end{aligned} \quad (I.38)$$

Аналогично рассуждая, для n испытаний можно получить, что

$$(q + p)^n = 1. \quad (I.39)$$

Разложив бином (I.39) на сумму $n + 1$ слагаемых, получим

$$(q + p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \dots + C_n^k q^{n-k} p^k + \dots + C_n^n q^0 p^n = 1. \quad (I.40)$$

Здесь C_n^k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) — биномиальные коэффициенты, причем

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

Первое слагаемое (I.40) определяет вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится 0 раз, т. е. ни разу не появится; второе слагаемое определяет вероятность того, что событие A появится 1 раз n , следовательно, не появится $n - 1$ раз; $\dots$; последнее слагаемое определяет вероятность того, что событие A появится n раз.

Итак, вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p , событие появится ровно k раз, определяется формулой

$$P_n(k) = C_n^k q^{n-k} p^k, \quad (1.41)$$

где $P_n(k)$ — вероятность появления события k раз в n испытаниях;

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k ;

q — вероятность неоявления события в одном испытании;

p — вероятность появления события в одном испытании.

Совокупность вероятностей $P_n(k)$ носит название биномиального распределения вероятностей ($k = 0, 1, \dots, n$).

При больших значениях n и k (больше 10) для упрощения вычисления факториалов применяют приближенную формулу Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right). \quad (1.42)$$

Чаще формула Стирлинга еще более упрощается и применяется в виде

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (1.43)$$

Абсолютная ошибка вычислений факториалов по формуле (1.43) увеличивается с увеличением n . Относительная же точность (характеризуемая отношением абсолютной ошибки к значению факториала и выражаемая обычно в процентах) повышается с увеличением n . По этой причине формула Стирлинга принадлежит к числу асимптотических формул. Сравнивая формулы (1.42) и (1.43), легко подсчитать, что при $n = 10$ относительная ошибка вычислений составит 0,8%, при $n = 20$ она будет равна 0,4%.

Иногда для определения биномиальных коэффициентов при вычислениях по формуле (1.41) целесообразно воспользоваться треугольником Паскаля (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

n	Коэффициенты C_n^k
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

Каждый биномиальный коэффициент в треугольнике Паскаля образуется сложением двух стоящих над ним слева и справа коэффициентов.

Заметим в заключение, что дополнительный контроль вычислений по формуле (1.40) может быть получен исходя из свойств биномиальных коэффициентов, а именно: коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца, равны, а сумма всех коэффициентов в биноме n -й степени равна 2^n .

Пример. Определить вероятность получения трех пробоя в мишени при четырех выстрелах, если вероятность поразить мишень при одном выстреле постоянна и равна 0,4.

Решение. Обозначим вероятность поражения мишени при одном выстреле через p , а вероятность получения трех пробоя в мишени при четырех выстрелах — через $P_4(3)$. По условию примера

$$p(A) = p = 0,4; \quad q = 1 - p = 0,6.$$

По формуле (1.41) имеем

$$P_4(3) = C_4^3 q^{4-3} p^3 = 4 \cdot (0,6)^1 \cdot (0,4)^3; \quad P_4(3) = 0,1536.$$

Этот результат может быть получен также путем применения теорем сложения и умножения вероятностей.

Событие «аналитиче в мишени трех пробоя» может наступить в следующих комбинациях (обозначив через A_i попадание при i -м выстреле):

$$1) B_1 = (A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_4); \quad 3) B_3 = (A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 \cdot A_4);$$

$$2) B_2 = (A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot A_4); \quad 4) B_4 = (\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4).$$

Применяя теорему умножения для независимых событий, получаем

$$1) p(B_1) = p(A_1) p(A_2) p(A_3) p(\bar{A}_4) = 0,0384;$$

$$2) p(B_2) = p(A_1) p(A_2) p(\bar{A}_3) p(A_4) = 0,0384;$$

$$3) p(B_3) = p(A_1) p(\bar{A}_2) p(A_3) p(A_4) = 0,0384;$$

$$4) p(B_4) = p(\bar{A}_1) p(A_2) p(A_3) p(A_4) = 0,0384.$$

Напомним, что

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = p(A_4) = 0,4.$$

По условию примера появление одного из сложных событий — произведений 1—4 будет означать наступление ожидаемого события. Следовательно, по теореме сложения имеем

$$P_4(3) = p(B_1) + p(B_2) + p(B_2) + p(B_3) + p(B_4),$$

или

$$P_4(3) = 0,1536.$$

Получен тот же результат, что и по формуле (1.41).

В практических целях полезно уметь вычислять вероятность появления хотя бы одного события из n событий, независимых в совокупности, если вероятность появления каждого из событий известна.

Пусть A — событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности.

Сложное событие $(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n)$, когда ни одно из событий не наступило, является противоположным событию A .

Следовательно,

$$p(A) + p(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n) = 1.$$

или

$$p(A) + p(\bar{A}_1) p(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot p(\bar{A}_n) = 1. \quad (1.44)$$

Из (1.44), обозначив

$$p(\bar{A}_1) = q_1, \quad p(\bar{A}_2) = q_2, \quad \dots, \quad p(\bar{A}_n) = q_n, \quad (1.45)$$

получим

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n. \quad (1.46)$$

т. е. вероятность появления хотя бы одного события из n событий, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий.

В частном случае, когда $p(A_1) = p(A_2) = \dots = p(A_n) = p$, вероятность появления события, хотя бы один раз, будет равна

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Так, в предыдущем примере

$$P(A) = 1 - 0,6^4 = 0,87.$$

т. е. вероятность поразить мишень хотя бы один раз из четырех выстрелов равна 0,87.

Использование той же идеи позволяет получить формулу сложения вероятностей для совместных событий.

Пусть имеется n совместных событий $A_1, \dots, A_n$ с вероятностями $p_1, \dots, p_n$. Вероятности не появления этих событий равны соответственно $q_1 = 1 - p_1, \dots, q_n = 1 - p_n$. Вероятность того, что ни одно из указанных событий не появится, равна $Q = \prod_1^n q_i$. И, наконец, вероятность того, что появится хотя бы одно из совместных событий, равна $P = 1 - Q$.

§ 8. ВЕРОЯТНЕЙШЕЕ ЧИСЛО ПОЯВЛЕНИЙ СОБЫТИЯ ПРИ МНОГОКРАТНЫХ ИСПЫТАНИЯХ

При постановке экспериментов и различных теоретических расчетах исследователь, естественно, ставит перед собой вопрос: какое число появлений ожидаемого события при многократных испытаниях наиболее возможно, если выполнен определенный комплекс условий, который в обобщающем виде характеризуется постоянством в процессе опыта вероятности появления события при одном испытании. Вычисляя все члены разложения в формуле (1.40) и зная из определения вероятности, что большая вероятность порождает большую уверенность в получении соответствующего результата опыта, определяем искомое число появлений события.

Пример. Произведено 8 независимых измерений одной и той же величины в одинаковых условиях. Вычислить вероятности появления отрицательных ошибок Δ : одной, двух, трех и т. д., восьми из восьми, полагая, что

$$p(\Delta < 0) = p(\Delta > 0) = \frac{1}{2}; \quad p(\Delta < 0) = q; \quad p(\Delta > 0) = p.$$

Решение. Составим табл. 2.

Из табл. 2 следует, что наибольшая вероятность $\left(\frac{70}{256}\right)$ соответствует появлению четырех отрицательных ошибок.

При большом n применение формулы (1.40) очень затруднительно. Получим более простое и общее решение, пригодное в одинаковой степени для любого конечного значения n .

Число появлений	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Конт- роль
n	$P_n(k)$									
	$\binom{8}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\binom{8}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\binom{8}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\binom{8}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\binom{8}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\binom{8}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\binom{8}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\binom{8}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\binom{8}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8$	N
S	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{256}{256}$

Обозначим вероятнейшее число появлений события при n испытаниях через k_0 . Для решения поставленной задачи используем формулу (I.41) биномиального распределения вероятностей. Так как это распределение прерывное (дискретное), аппарат математического анализа непригоден для исследования изменения вероятностей $P_n(k)$ в зависимости от изменения числа появлений события k . Поэтому решим задачу алгебраически.

По определению вероятнейшего числа появлений события должны выполняться неравенства

$$\left. \begin{aligned} P_n(k_0) &\geq P_n(k_0 + 1) \\ P_n(k_0) &\geq P_n(k_0 - 1) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{I.47})$$

Если условие (I.47) выполнено, k_0 — вероятнейшее число появлений события при многократных испытаниях.

Найдем k_0 , отвечающее первому из неравенств (I.47).

Для этого составим отношение

$$\frac{P_n(k_0 + 1)}{P_n(k_0)} \leq 1. \quad (\text{I.48})$$

Пользуясь формулой (I.41), раскрываем числитель и знаменатель левой части неравенства (I.48)

$$\frac{P_n(k_0 + 1)}{P_n(k_0)} = \frac{C_n^{k_0+1} \cdot q^{n-k_0-1} \cdot p^{k_0+1}}{C_n^{k_0} \cdot q^{n-k_0} p^{k_0}} = \frac{\frac{n!}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!} \cdot p}{\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} \cdot q}. \quad (\text{I.49})$$

Произведя соответствующие сокращения в (I.49) и имея в виду неравенство (I.48), получаем

$$\frac{n-k_0}{k_0+1} \cdot \frac{p}{q} \leq 1. \quad (\text{I.50})$$

Освободившись от знаменателя в левой части неравенства (1.50), запишем

$$(n - k_0) p \leq (k_0 - 1) q \quad (1.51)$$

или

$$np - k_0 p \leq k_0 q + q. \quad (1.52)$$

Далее имеем

$$np - q \leq k_0 (p + q).$$

Но, так как $p + q = 1$, то

$$np - q \leq k_0. \quad (1.53)$$

Таким образом, для выполнения первой части условия (1.47) достаточно определить k_0 под условием (1.53).

Найдем правую границу для k_0 , отвечающую второму неравенству (1.47), для чего составим отношение

$$\frac{P_n(k_0 - 1)}{P_n(k_0)} \leq 1. \quad (1.54)$$

После несложных преобразований получим

$$\frac{P_n(k_0 - 1)}{P_n(k_0)} = \frac{k_0}{n - k_0 - 1} \cdot \frac{q}{p} \leq 1.$$

или

$$k_0 q = k_0 (1 - p) = k_0 - k_0 p \leq np - k_0 p + p,$$

откуда

$$k_0 \leq np + p. \quad (1.55)$$

Окончательно, объединив неравенства (1.53) и (1.55), получим

$$np - (1 - p) \leq k_0 \leq np + p. \quad (1.56)$$

Неравенство (1.56) позволяет находить вероятнейшее число появлений события при многократных испытаниях, т. е. такое число, которое отвечает условиям (1.47), причем, если число $(np - q)$ — дробное, то двойное неравенство (1.56) определяет одно вероятнейшее число k_0 ; если же $(np - q)$ — целое число, то неравенство (1.56) определяет два вероятнейших числа: k_0 и $k_0 + 1$.

При числе испытаний достаточно большом и значении p , не близком к нулю, неравенство (1.56) можно превратить в равенство и для практических целей использовать для вычисления k_0 приближенную формулу

$$k_0 \approx np. \quad (1.57)$$

Из формулы (1.57) найдем $\frac{k_0}{n} \approx p$, что объясняет свойство устойчивости относительной частоты при большом числе испытаний и может служить некоторым обоснованием теоремы Я. Бернулли, приведенной в § 3.

Заметим, что если произведение np есть целое число, то приближенное равенство (1.57) становится точным.

§ 9. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЗАКОН МУАВРА — ЛАПЛАСА (НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРИ МНОГОКРАТНЫХ ИСПЫТАНИЯХ)

Биномальное распределение вероятностей более или менее пригодно для решения практических задач лишь при сравнительно небольшом числе испытаний (не более 10—20). С увеличением числа испытаний n вероятности отдельных значений числа появлений события уменьшаются и при большом n становятся ничтожно малыми. Это почти очевидно, если учесть, что число членов биномального распределения равно $n + 1$, а сумма его членов всегда равна единице.

При большом числе испытаний практический интерес может представить лишь решение следующей задачи: какова вероятность того, что событие совершится в пределах от a до b раз, т. е. совершится или a раз, или $a + 1$ раз, или $a + 2$ раза, или $a + 3$ раза, и т. д., или b раз. Согласно теореме сложения, вероятность такого сложного события (суммы событий) равна сумме вероятностей составляющих событий, т. е. $P_n(a) + P_n(a + 1) + P_n(a + 2) + \dots + P_n(b)$.

Но подсчет такой суммы вероятностей с использованием формулы (1.40) при большом n чрезвычайно сложен.

Значительно проще указанная задача решается на основе так называемого нормального закона распределения вероятностей, полный вывод которого впервые дан Лапласом, использовавшим для этого результаты, полученные ранее Муавром. Поэтому нормальный закон называют еще законом Муавра — Лапласа.

Нормальный закон распределения дает достаточно точные результаты лишь при большом числе испытаний. Но этой причине его относят к предельным законам. При $n \geq 20$ и значениях p , достаточно заметно отличающихся от 0 и от 1 (иными словами, не очень сильно отличающихся от 0,5), нормальный закон обеспечивает результаты, практически не отличающиеся от тех, которые дает биномальный закон*. Получим нормальный закон на основе биномального. При этом примем во внимание, что биномальный закон распределения имеет два существенных недостатка.

Во-первых, это закон дискретный, т. е. функция $P_n(k)$ не непрерывная, а изменяется дискретно (прерывно). Поэтому сумму вероятностей $P_n(a) + P_n(a + 1) + P_n(a + 2) + \dots + P_n(b) = \sum_{k=a}^b P_n(k)$ нельзя заменить интегралом даже при большом числе испытаний. Указанную сумму можно получить лишь непосредственным вычислением всех слагаемых.

Второй недостаток биномального распределения заключается в том, что ряд распределения $(q + p)^n$ зависит от двух параметров — n и p , что практически лишает возможности табулировать значения

* При значениях p , сильно отличающихся от 0,5, имеются другие законы.

вероятностей $P_n(k)$; для разных значений вероятности испытываемого события p и для разных значений числа испытаний n пришлось бы составлять множество таблиц.

Нормальный закон распределения не имеет указанных недостатков биномиального распределения. Кроме того, и это не менее важно, нормальный закон, как увидим ниже, распространяется на очень широкий класс случайных явлений и используется не только для подсчета вероятностей попадания в определенные пределы числа совершенных событий, но и в очень многих других практически важных случаях.

Перейдем к выводу нормального закона. Стремясь как можно лучше сохранить положительные свойства биномиального закона,

учтем следующие его особенности:

1) аргумент k биномиального распределения изменяется дискретно и равнопромежуточно, через единицу;

2) наибольшая вероятность соответствует значению $k_0 \approx np$. Изобразим графически некоторое биномиальное распределение $(q + p)^n$.

Для этого по оси X последовательно отложим отрезки, равные единице. На первом отрезке построим прямоугольник с высотой $h_0 = P_n(0)$, на втором — прямоугольник с высотой $h_1 = P_n(1)$, на третьем — с $h_2 = P_n(2)$ и т. д. до $h_n = P_n(n)$.

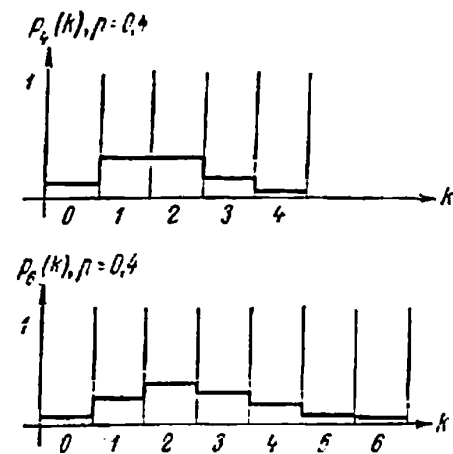


Рис. 2

Площадь, ограниченная снизу осью X , а сверху — ступенчатой ломаной, равна единице (сумма вероятностей полной группы). Характер распределения иллюстрируется верхней ступенчатой ломаной. С увеличением n высоты ступенек этой ломаной (т. е. разности вероятностей соседних значений) уменьшаются, а сама ломаная линия все более приближается к оси X , расширяясь вправо. Сказанное иллюстрировано на рис. 2 для функций $P_4(k)$ и $P_6(k)$ при $p = 0,4$.

В нормальном законе ступенчатая ломаная линия заменяется непрерывной плавной кривой, а выбором аргументов, соответствующих комплексу условий, этой кривой придается стандартный вид.

Конечная цель первого этапа вывода — получение такой функции $f(\xi)$, которая позволила бы вычислять искомую сумму вероятностей как интеграл

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi) d\xi, \text{ где } \xi = \varphi(k), \quad \xi_1 = \varphi(a), \quad \xi_2 = \varphi(b),$$

а $d\xi$ соответствует изменению k на единицу. В качестве аргумента функции $f(\xi)$ возьмем отклонение относительной частоты испытыве-

мого события от его вероятности. Такой выбор аргумента придает уже большую общность различным частным случаям.

В качестве аргумента искомой функции принят

$$\xi = \frac{k}{n} - p. \quad (1.58)$$

Тогда $d\xi$, соответствующее изменению k на единицу, будет равно

$$d\xi = \left(\frac{k+1}{n} - p \right) - \left(\frac{k}{n} - p \right) = \frac{1}{n},$$

или

$$d\xi = \frac{1}{n}. \quad (1.59)$$

Учитывая значение $d\xi$, напишем для искомой функции $y = f(\xi)$

$$y = nP_n(k), \quad (1.60)$$

откуда

$$P_n(k) = y \frac{1}{n},$$

или, согласно (1.59),

$$P_n(k) = y d\xi = f(\xi) d\xi. \quad (1.61)$$

Найдем вид функции $y = f(\xi)$. Для этого напишем два равенства

$$\left. \begin{aligned} y_{k+1} &= nP_n(k+1) \\ y_k &= nP_n(k) \end{aligned} \right\}. \quad (1.62)$$

Разделив y_{k+1} на y_k , получим

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{P_n(k+1)}{P_n(k)},$$

или, учитывая (1.41),

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{C_n^{k+1} q^{n-k-1} p^{k+1}}{C_n^k q^{n-k} p^k} = \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} \cdot \frac{p}{q}. \quad (1.63)$$

Так как

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} : \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1},$$

то

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}. \quad (1.64)$$

Обозначая $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$, можем написать

$$\frac{y_k + \Delta y_k}{y_k} = 1 + \frac{\Delta y_k}{y_k} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q},$$

или

$$\frac{\Delta y_k}{y_k} = \frac{(n-k)p - (k+1)q}{(k+1)q} = \frac{np - kp - kq - q}{kq + q} = \frac{np - q - k(q+p)}{kq + q}.$$

Но $q + p = 1$, поэтому

$$\frac{\Delta y_k}{y_k} = \frac{np - k - q}{kq + q}. \quad (1.65)$$

Желая получить функцию аргумента $\xi = \frac{k}{n} - p$, напомним равенство (1.65) в виде

$$\frac{\Delta y_k}{y_k} = - \frac{\frac{k}{n} - p + \frac{q}{n}}{\frac{k}{n} q + \frac{q}{n}}. \quad (1.66)$$

Так как предполагается, что n достаточно велико, то в числителе и знаменателе дроби (1.66) отбросим величину $\frac{q}{n}$. Тогда можно написать

$$\frac{\Delta y_k}{y_k} = - \frac{\xi}{q(p + \xi)}. \quad (1.67)$$

Теперь перейдем от дискретного биномиального закона распределения к непрерывной функции $y = f(\xi)$. Для этого, учтя, что $d\xi = \frac{1}{n}$ [см. (1.59)], напомним дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{y} = - \frac{n\xi}{q(p + \xi)} d\xi. \quad (1.68)$$

Из решения уравнения (1.68) получим непрерывную функцию $y = f(\xi)$, сглаживающую биномиальное распределение. Но предварительно выполним некоторые упрощения, используя разложение в ряд Тейлора *:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= - \frac{n\xi}{q(p + \xi)} d\xi = - \frac{n}{pq} \cdot \frac{\xi d\xi}{\left(1 + \frac{\xi}{p}\right)} = - \frac{n}{pq} \xi \left(1 + \frac{\xi}{p}\right)^{-1} d\xi = \\ &= - \frac{n}{pq} \xi \left(1 - \frac{\xi}{p} + \frac{\xi^2}{p^2} - \dots\right) d\xi = \\ &= - \frac{n}{pq} \xi d\xi + \frac{n}{p^2q} \xi^2 d\xi - \frac{n}{p^3q} \xi^3 d\xi + \dots \end{aligned}$$

или

$$\frac{dy}{y} = - \frac{n}{pq} \xi d\xi + \frac{n}{p^2q} \xi^2 d\xi - \frac{n}{p^3q} \xi^3 d\xi + \dots \quad (1.69)$$

Проинтегрировав уравнение (1.69), получим

$$\ln y = - \frac{n}{2pq} \xi^2 + \frac{n}{3p^2q} \xi^3 - \frac{n}{4p^3q} \xi^4 + \dots + \ln C \quad (1.70)$$

(постоянную интегрирования можно представлять в любом виде).

* Уравнение (1.68) можно было бы проинтегрировать и непосредственно, не прибегая к разложению в ряд, но тогда мы получили бы функцию, не удобную для практического применения.

Если иметь в виду, что значения p не очень сильно отличаются от 0,5, то в правой части равенства всеми членами разложения, кроме первого, можно пренебречь. Это следует из того, что абсолютные значения ξ при больших n значительно меньше единицы, поэтому ряд быстро сходится.

Теперь имеем

$$\ln y = -\frac{n}{2pq} \xi^2 + \ln C,$$

откуда

$$y = C \cdot e^{-\frac{n}{2pq} \xi^2}. \quad (1.71)$$

Так как величина $\frac{n}{pq}$ всегда положительна, то введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} h^2 &= \frac{n}{pq} \\ h &= + \sqrt{\frac{n}{pq}} \end{aligned} \right\}. \quad (1.72)$$

Итак,

$$y = C \cdot e^{-\frac{1}{2} h^2 \xi^2} \quad (1.73)$$

(коэффициент $1/2$ в показателе степени оставлен с учетом использования в дальнейшем существующих таблиц).

Кривая, выражаемая формулой (1.73), расположена выше оси абсцисс (показательная функция отрицательных значений не принимает) и симметрична относительно оси Y (функция четная). Ветви этой кривой асимптотически приближаются к оси X .

Определим значение постоянной C . Для этого вспомним, что площадь под ступенчатой ломаной линией биномиального распределения равна единице. Ввиду этого поставим условие, чтобы площадь под кривой нормального распределения также была равна единице

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} h^2 \xi^2} d\xi = 1 \quad (1.74)$$

(пределы $-\infty$ и $+\infty$ поставлены с учетом асимптотичности кривой).

Для определения значения интеграла в левой части равенства (1.74) введем обозначение

$$\frac{h\xi}{\sqrt{2}} = z, \quad (1.75)$$

откуда

$$d\xi = \frac{\sqrt{2}}{h} dz. \quad (1.76)$$

Теперь можно написать

$$C \frac{\sqrt{2}}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 1 \quad (1.77)$$

(пределы интегрирования, очевидно, не изменятся).

Учитывая, что интеграл в левой части этого равенства равен $\sqrt{\pi}$ (интеграл Пуассона), получаем

$$C \frac{\sqrt{2}}{h} \sqrt{\pi} = 1.$$

Отсюда

$$C = \frac{h}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.78)$$

Принимая во внимание (1.71), (1.72), (1.78), окончательно получаем искомую функцию $y = f(\xi)$ в виде

$$y = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} h^2 \xi^2}. \quad (1.79)$$

Для вероятности числа появлений события k и соответствующего ему значения $\xi = \frac{k}{n}$ — p имеем, учитывая (1.61),

$$P_n(k) = P_\xi = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} h^2 \xi^2} d\xi, \quad (1.80)$$

Выражение (1.80) показывает, что вероятности отдельных значений ξ будут ничтожно малы при n большом [см. (1.59)].

Заметим, что ординаты кривой (1.79) называют «плотностью вероятности» нормального распределения.

Функция (1.79) неудобна тем, что имеет переменный параметр

$$h = \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

вследствие чего ее нельзя изобразить одним графиком или табулировать таблицами с одним входом: фактически это функция двух переменных — ξ и h , а вид кривой $y = f(\xi)$ зависит от параметра h . Поэтому целесообразно ввести новую переменную

$$t = h\xi, \quad (1.81)$$

откуда

$$dt = h d\xi = \frac{h}{n} \quad (1.82)$$

Теперь выражение (1.80) примет вид

$$P_n(k) = P(\xi) = P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt. \quad (1.83)$$

Кривая распределения становится стандартной, а соответствующая ей функция $\psi(t)$ принимает вид

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (1.84)$$

Кривая (I.84) показана на рис. 3. Таблица значений функции (I.84) приведена в прил. 1. При помощи указанной таблицы значения $P_n(k)$ получают следующим образом.

1. Находят значение t по формулам

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{k}{n} - p \\ h &= \sqrt{\frac{n}{pq}} \\ t &= h\xi \end{aligned} \right\} \quad (I.85)$$

2. По таблице прил. 1 находят величину

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

3. В соответствии с формулами (I.59) и (I.82) вычисляют

$$dt = \frac{h}{n}. \quad (I.86)$$

4. Получают искомое значение

$$P_n(k) = \psi(t) dt. \quad (I.87)$$

Пример 1. Найти вероятность появления белого шара 6 раз при 10 испытаниях, если в урне имеется 4 белых шара и 6 черных (шары в урну возвращаются).

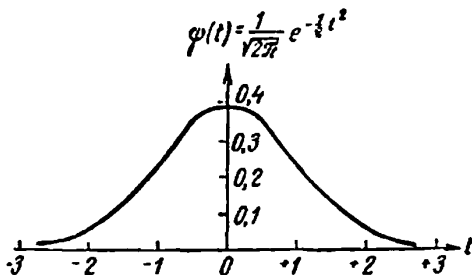


Рис. 3

Решение. Дано: $n = 10$; $k = 6$; $p = 0,4$; $q = 0,6$. Применяем формулы (I.85), (I.86), (I.87) и таблицу прил. 1.

$$1. \xi = \frac{6}{10} - 0,4 = 0,20; \quad h = \sqrt{\frac{10}{0,4 \cdot 0,6}} = 6,44;$$

$$t = 6,44 \cdot 0,20 = 1,288.$$

2. Из таблиц прил. 1 получаем $\psi(1,288) = 0,1740$.

$$3. dt = \frac{6,44}{10} = 0,644.$$

4. Ответ:

$$P_n(k) = 0,174 \cdot 0,644 = 0,112.$$

Биномиальное распределение дает

$$P_n(k) = C_{10}^6 (0,4)^6 \cdot (0,6)^4 = 0,112.$$

Пример 2. Найти вероятность выпадения герба 4 раза при 10 бросаниях монеты.

Решение. Дано:

$$n = 10; \quad k = 4; \quad p = 0,5; \quad q = 0,5.$$

$$1. \quad \xi = \frac{4}{10} - 0,5 = -0,10;$$

$$h = \sqrt{\frac{10}{0,5 \cdot 0,5}} = 6,32;$$

$$t = h\xi = 0,632.$$

2. $\psi(0,632) = 0,327$ [знак минус при аргументе t опущен, так как функция $\psi(t)$ четная, т. е. $\psi(-t) = \psi(t)$].

$$3. \quad dt = \frac{6,32}{10} = 0,632.$$

4. Ответ:

$$P_n(k) = \psi(t) \cdot dt = 0,327 \cdot 0,632 = 0,207.$$

Биномиальное распределение дает $P_n(k) = 0,205$.

Пример 3. Найти вероятность выпадения четырех очков 2 раза при 10 бросаниях игральной кости.

Решение. Дано:

$$n = 10; \quad k = 2; \quad p = \frac{1}{6} = 0,1667; \quad q = 0,8333.$$

$$1. \quad \xi = 0,20 - 0,1667 = 0,0333;$$

$$h = \sqrt{\frac{10}{0,1667 \cdot 0,8333}} = 8,47;$$

$$t = 8,47 \cdot 0,0333 = 0,282.$$

$$2. \quad \psi(0,282) = 0,383.$$

$$3. \quad dt = \frac{8,47}{10} = 0,847.$$

$$4. \quad P_n(k) = 0,383 \cdot 0,847 \approx 0,32.$$

Биномиальный закон дает $P_n(k) \approx 0,29$. Здесь расхождение больше, так как вероятность p сильно отличается от 0,5 и n мало.

Как видим, даже при 10 испытаниях нормальный закон уже дает ответы, мало отличающиеся от биномиального распределения. При $n > 20$ и значениях p , не очень сильно отличающихся от 0,5, а также при ξ не очень больших результаты достаточно хорошие. Однако, как уже указано, при большом числе испытаний вероятности $P_n(k)$ становятся настолько малыми, что их вычисление теряет практический смысл.

§ 10. ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Как указывалось, при большом числе испытаний практический интерес может представить лишь подсчет значения P_a^b — вероятности того, что число совершенных событий попадет в пределы от a до b .

Преимущество нормального закона перед биномиальным заключается в том, что значение P_a^b можно получить как определенный ин-

теграл, не вычисляя значений всех $P_n(k)$ каждое отдельно. Иными словами, сумма вероятностей $\sum_{k=a}^b P_n(k)$ заменяется интегралом

$$P_a^b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_a}^{t_b} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt, \quad (1.88)$$

где пределы t_a и t_b можно получить как функцию a и b по формулам (1.85).

Определенный интеграл, как известно, есть функция пределов интегрирования. Чтобы уменьшить число аргументов этой функции до одного, один из пределов обычно делают стандартным, что позволяет табулировать значения интеграла вероятностей как функцию одного переменного.

Наиболее удобен интеграл вероятностей, симметричный относительно оси Y ,

$$P_{-\xi_0}^{+\xi_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt. \quad (1.89)$$

где $\pm \xi_0$ — заданные пределы отклонения относительной частоты от вероятности.

Выражение (1.89) показывает, что значение $P_{-\xi_0}^{+\xi_0}$ увеличивается при увеличении абсолютной величины t . По $t = \sqrt{\frac{n}{pq}} \xi_0$, откуда видно, что при заданном значении $\xi = \frac{k}{n} - p$, как бы оно мало не было, с увеличением n вероятность $P_{-\xi_0}^{+\xi_0}$ может стать как угодно близкой к единице. Тем самым доказана приведенная в § 3 теорема Я. Бернулли. Ввиду четности подынтегральной функции (1.89) можно написать

$$P_{-\xi_0}^{+\xi_0} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t). \quad (1.90)$$

Функцию (1.90) называют интегралом вероятностей. Нетрудно видеть, что этот интеграл есть функция одного переменного t , т. е. $P_{-\xi_0}^{+\xi_0} = \Phi(t)$, где $t = h|\xi_0|$, $-\xi_0 = \frac{k_0 - a}{n} - p$; $+\xi_0 = \frac{k_0 + a}{n} - p$; $\pm a$ — заданные пределы отклонений k от $k_0 = np$.

Таблица значений $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ приведена в прил. 2. Иногда удобнее применять таблицы интегралов

$$P_{-\infty}^{+\xi_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(t), \quad (1.91)$$

где t может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Функцию $F(t)$ называют иногда функцией нормального распределения. В прил. 3 дается таблица значений функции $F(t)$.

Так как функция $e^{-\frac{t^2}{2}}$ в элементарных функциях не интегрируется, то значения $\Phi(t)$ и $F(t)$ при составлении таблиц вычисляются путем разложения в ряд функции $e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Таким образом, все практические задачи можно решать при помощи таблиц значений $\Phi(t)$ и $F(t)$ (прил. 2 и 3). Покажем это на примерах*.

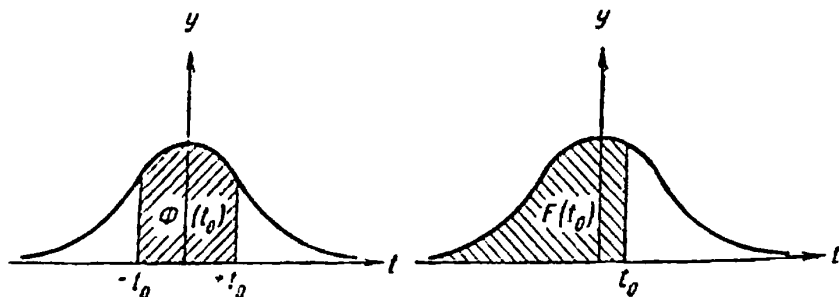


Рис. 4

Пример 1. Средний процент изделий 1-го сорта, выпускаемых заводом, равен 73%. Найти вероятность того, что из 100 наугад взятых изделий первосортных окажется не менее 69 и не более 77.

Решение. Дано: $n = 100$; $p = 0,73$; $q = 0,27$; $k_1 = 0,69$; $k_2 = 0,77$.

$$1. \xi_1 = 0,69 - 0,73 = -0,04;$$

$$\xi_2 = 0,77 - 0,73 = +0,04.$$

Так как $|\xi_1| = |\xi_2| = |\xi_0|$, то можно воспользоваться таблицами значений $\Phi(t)$.

$$2. h = \sqrt{\frac{100}{0,73 \cdot 0,27}} = 22,5.$$

$$3. t = h |\xi_0| = 22,5 \cdot 0,04 = 0,90.$$

4. Из таблиц прил. 2 получаем ответ

$$\Phi(t) = 0,63.$$

Пример 2. По условиям предыдущего примера найти вероятность того, что первосортных изделий будет получено не менее 70, т. е. 70 и более.

Решение. Найдем вначале вероятность противоположного события — вероятность того, что изделий 1-го сорта окажется менее 70 — от 0 до 69; это будет интеграл $F(-0,90)$; из таблицы прил. 3 получаем

* При решении примеров надо помнить, что интеграл численно равен площади, ограниченной сверху кривой, а слева и справа — ординатами пределов интегрирования. Графически интегралы $\Phi(t_0)$ и $F(t_0)$ показаны на рис. 4.

$$F(-0.90) = 0.184.$$

Искомая вероятность равна $1 - 0.184 = 0.816$.

Пример 3. Найти вероятность того, что при 100 бросаниях монеты число выпадений герба будет находиться в пределах 45—60.

Решение. Здесь также применима функция $F(t)$:

$$\xi_1 = \frac{45}{100} - 0.50 = -0.05; \quad \xi_2 = \frac{60}{100} - 0.50 = +0.10;$$

$$h = \sqrt{\frac{100}{0.5 \cdot 0.5}} = 20; \quad t_1 = 20 \cdot (-0.05) = -1;$$

$$t_2 = 20 \cdot 0.10 = 2.$$

Ответ

$$P_{45}^{60} = F(2) - F(1) = 0.977 - 0.159 = 0.818.$$

Интеграл вероятностей можно получить путем нных рассуждений. Приведем соответствующий вывод.

В качестве исходной возьмем формулу

$$P(a < k < b) = \sum_{k=a}^b P_n(k). \quad (1.92)$$

Значения $P_n(k)$, как известно, можно получить по формуле (1.41)

$$P_n(k) = C_n^k q^{n-k} p^k,$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

откуда

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} q^{n-k} p^k. \quad (1.93)$$

Подставив в формулу (1.93) факториалы $n!$, $k!$, $(n-k)!$, соответствующие формуле (1.43), получим

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} q^{n-k} p^k = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi (n-k)} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} q^{n-k} p^k. \end{aligned} \quad (1.94)$$

После сокращений имеем

$$P_n(k) = \frac{\sqrt{n} n^n}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k(n-k)} k^k (n-k)^{n-k}} q^{n-k} p^k. \quad (1.95)$$

Приняв

$$n^n = n^k n^{n-k},$$

перепишем выражение (1.95)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (1.96)$$

В § 8 для вероятнейшего числа k , появлений события при многократных испытаниях была выведена формула (1.57), в соответствии с которой $k_0 \approx np$.

Вместо числа появлений события k будем рассматривать отклонение его от k_0 , т. е.

$$\Delta k = k - np. \quad (1.97)$$

Учитывая (1.97), преобразуем формулу (1.96)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{npq \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Delta k}{np}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right)^{-np-\Delta k} \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)^{-nq+\Delta k}}} \cdot \quad (1.98)$$

В предположении, что p и q не близки ни к нулю, ни к единице, при числе испытаний достаточно большом дроби $\frac{\Delta k}{np}$ и $\frac{\Delta k}{nq}$ будут малыми величинами а следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right) \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)}} \approx 1. \quad (1.99)$$

Упростим в (1.98) последние два множителя, для чего сначала найдем их логарифмы

$$\left. \begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right)^{-np-\Delta k} &= -(np + \Delta k) \ln \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right) \\ \ln \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)^{-nq+\Delta k} &= (-nq + \Delta k) \ln \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right) \end{aligned} \right\}. \quad (1.100)$$

Раскладывая в ряды

$$\ln \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right) \text{ и } \ln \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)$$

по степеням $\frac{\Delta k}{np}$ и $\frac{\Delta k}{nq}$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right) &= -\frac{\Delta k}{np} - \frac{\Delta k^2}{2n^2p^2} + \dots \\ \ln \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right) &= -\frac{\Delta k}{nq} - \frac{\Delta k^2}{2n^2q^2} + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (1.101)$$

Подставляя (1.101) в (1.100), имеем

$$\left. \begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right)^{-np-\Delta k} &= -(np + \Delta k) \left(\frac{\Delta k}{np} - \frac{\Delta k^2}{2n^2p^2} + \dots \right) = \\ &= -\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} \dots \\ \ln \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)^{-nq+\Delta k} &= -(nq - \Delta k) \left(-\frac{\Delta k}{nq} - \frac{\Delta k^2}{2n^2q^2} + \dots \right) = \\ &= \Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} \dots \end{aligned} \right\}. \quad (1.102)$$

Используя определение логарифма, можно (1.102) записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right)^{-(np+\Delta k)} &= e^{-\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} + \dots} \\ \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)^{-(nq-\Delta k)} &= e^{\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} + \dots} \end{aligned} \right\}. \quad (1.103)$$

Подставляя соответствующие значения последних двух сомножителей в (I.98) из (I.03), получаем

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} + \dots} e^{\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} + \dots}. \quad (\text{I.104})$$

Учитывая, что

$$-\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} + \Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} = \frac{-q \Delta k^2 - p \Delta k^2}{2npq} = \quad (\text{I.105})$$

$$= \frac{-(1-p) \Delta k^2 - p \Delta k^2}{2npq} = -\frac{\Delta k^2}{2npq}, \quad (\text{I.105})$$

получаем

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{\Delta k^2}{2npq}}. \quad (\text{I.106})$$

Подставим в (I.106) вместо Δk^2 выражение $(k - np)^2$, тогда

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}. \quad (\text{I.107})$$

Формула (I.107) может служить для вычисления вероятности появления события k раз при n испытаниях.

В (I.107) примем

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \quad (\text{I.108})$$

Увеличим число появлений k на единицу и при этом условии по формуле (I.108) определим приращение новой переменной x

$$\left. \begin{aligned} x + \Delta x &= \frac{k - np + 1}{\sqrt{npq}} \\ x &= \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{I.109})$$

Вычитая в (I.109) из верхнего выражения нижнее, получаем

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{npq}}. \quad (\text{I.110})$$

Формула (I.107) с учетом (I.108) и (I.110) примет вид

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Delta x. \quad (\text{I.111})$$

Подставим значение $P_n(k)$ из (I.111) в (I.92)

$$P(a < k_i < b) = \sum_{k=a}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Delta x. \quad (\text{I.112})$$

Переходя от дискретной функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ к сглаживающей непрерывной функции, можно в (I.112) знак суммы заменить знаком интеграла и написать

$$P(a < k_i < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (\text{I.113})$$

Если принять $\alpha = -t$, $\beta = +t$, то интеграл вероятностей с учетом (I.113) примет вид

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \quad (I.114)$$

В формуле (I.113) пределы суммы a и b , относящиеся к переменной k , заменены пределами интегрирования, относящимися к переменной x ,

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{a - np}{\sqrt{npq}} \\ \beta &= \frac{b - np}{\sqrt{npq}} \end{aligned} \right\}. \quad (I.115)$$

Нетрудно показать, что переменная x в формуле (I.113) та же, что и переменная t в (I.88).

Если числитель и знаменатель правой части формулы (I.108) разделим на n , то получим

$$x = \frac{\frac{k}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \left(\frac{k}{n} - p \right) \sqrt{\frac{n}{pq}} = h\xi,$$

т. е., согласно (I.81), $t = h\xi$.

Особенностью нормального закона распределения является асимптотичность кривой распределения относительно оси t . Вследствие этого полная группа событий соответствует изменению t от $-\infty$ до $+\infty$, в то время как заведомо известно, что значения ξ изменяются в конечных пределах. Действительно, наименьшими и наибольшими значениями $\xi = \frac{k}{n} - p$ будут

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\min} &= \frac{0}{n} - p = -p \\ \xi_{\max} &= \frac{n}{n} - p = 1 - p = q \end{aligned} \right\}. \quad (I.116)$$

Однако практически эта особенность нормального закона при достаточно больших значениях n и при p , не очень сильно отличающихся от 0,5, существенного влияния на результаты не оказывает. Чтобы убедиться в этом, вычислим интегралы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-hp}^{+hq} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(hq) - F(-hp)$$

для некоторых примеров.

Примеры. 1. Дано: $n = 20$; $p = 0,2$; $q = 0,8$.

Решение.

$$h = \sqrt{\frac{20}{0,16}} = \sqrt{125}; \quad h = 11,2;$$

$$hq = 9; \quad -hp = -2,24; \quad F(9) - F(-2,24) = 1,000 - 0,013 = 0,987.$$

2. Дано: $n = 10$; $p = 0,4$; $q = 0,6$.

Решение.

$$h = \sqrt{\frac{10}{0,24}} = 6,4; \quad hq = 3,84; \quad -hp = -2,56;$$

$$F(3,84) - F(-2,56) = 0,995.$$

3. Дано: $n = 100$; $p = 0,4$; $q = 0,6$.

Решение. $h = 33$; $hq = 30$; $-hp = 3,3$ и искомая вероятность $P = 0,9995$.

Как видим, при больших n значения p могут заметно отличаться от 0,5, а если p близко к 0,5, то нормальный закон дает точные результаты даже при 10 испытаниях.

§ 11. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной называют переменную величину, численно характеризующую случайное явление и отражающую многообразие неучтенных колебаний условий, при которых производятся испытания. Таким образом, при проведении опыта приходится иметь дело со случайной величиной, конкретное значение которой неизвестно. Совокупность всех возможных значений случайной величины составляет полную группу случайных событий (очевидно, значения случайной величины, получаемые при испытаниях, должны рассматриваться как случайные события).

Примеры случайных величин:

1. Число появлений события или относительная частота при многократных испытаниях.

2. Число зерен в колосьях пшеницы определенного сорта.

3. Число попаданий при стрельбе по мишеням.

4. Результаты измерений одной и той же величины в одинаковых условиях; при этом точное значение измеряемой величины известно. Результаты измерений будут колебаться около точного значения, причем заранее нельзя назвать ни одного результата; можно лишь, исходя из опыта аналогичных измерений, указать границы изменения наблюдаемых значений случайной величины — результатов измерений или их отклонений от точного значения.

Из приведенных примеров первый занимает особое место и подробно рассмотрен выше. Особенность относительной частоты события как случайной величины заключается в том, что ее свойства вполне определяются заданной вероятностью события и числом испытаний. Для определения свойств любой случайной величины требуются более общие характеристики, о которых пойдет речь ниже. Эти обобщенные характеристики будут пригодны и для относительной частоты события. Таким образом, введение понятия случайной величины целесообразно для дальнейшего обобщения понятий теории вероятностей.

Среди различных типов случайных величин наибольший интерес представляют прерывные (дискретные) и непрерывные случайные величины.

П р е р ы в н о й называют случайную величину, которая может принимать отдельные, изолированные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений прерывной случайной величины может быть конечным и бесконечным. Рассмотрим лишь прерывные случайные величины с конечным числом возможных значений, которые можно заранее указать (например, число попаданий при трех выстрелах: 0, 1, 2, 3; относительная частота попаданий при трех выстрелах: 0, 1/3, 2/3, 1; число появлений отрицательной ошибки при пяти измерениях: 0, 1, 2, 3, 4, 5; число появлений события при многократных испытаниях).

П о л у п р е р ы в н о й называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторые конечные или бесконечные промежутки.

Пример. Производится стрельба по цели, представляющей квадрат со стороной a . Начало координат совпадает с центром квадрата. Событию «попадание в цель» соответствует условие

$$\left. \begin{aligned} |x| &\leq \frac{a}{2} \\ |y| &\leq \frac{a}{2} \end{aligned} \right\}.$$

Таким образом, если случайное событие «попадание в цель» произойдет, можно утверждать, что координаты точки попадания x и y заключены в пределах от $-\frac{a}{2}$ до $+\frac{a}{2}$, но нельзя перечислить возможные значения координат точек попадания.

Разумеется, конкретные значения случайной величины при ограниченном числе испытаний могут заметно отличаться одно от другого, и в этом смысле она не кажется непрерывной, хотя эти значения и нельзя перечислить заранее. Однако речь идет о возможных значениях случайной величины, т. е. о таких, которые она может принимать в процессе опыта. Число наблюдаемых значений случайной величины всегда конечное.

§ 12. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для полной характеристики прерывной случайной величины недостаточно знать возможные ее значения; необходимо также знать вероятности, соответствующие этим значениям.

Соотношение, при помощи которого устанавливается связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называют **з а к о н о м р а с п р е д е л е н и я с л у ч а й н о й в е л и ч и н ы**.

Закон распределения прерывной случайной величины может быть задан: 1) аналитически, 2) численно и 3) графически.

1. Примером аналитического выражения закона распределения для прерывных случайных величин может служить вероятность появления событий k раз при n испытаниях, вычисляемая по формуле (1.41).

В этой формуле каждому возможному значению числа появлений события k_i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) ставится в соответствие вероятность $P_n(k)$.

2. Закон распределения прерывной случайной величины можно задать численно в виде таблицы распределения, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности,

x	x_1	x_2	x_3	x_n
P	P_1	P_2	P_3	P_n

Таблицу распределения часто называют также рядом распределения случайной величины X .

3. Закон распределения прерывной случайной величины графически можно задать в виде многоугольника распределения. Для построения многоугольника распределения в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i) ($i = 1, \dots, n$), где x_i — возможные значения случайной величины X , p_i — соответствующие им вероятности. Построенные точки соединяют отрезками прямых. Полученную фигуру называют многоугольником распределения.

Пример. Построить многоугольник распределения по данным табл. 2.

Решение. Отложим на оси абсцисс значения x_i , приняв масштаб 0,47 см для одного появления ошибки; отложим на оси ординат вероятности p_i , приняв масштаб

0,47 см для $p = \frac{10}{256}$. Построив точки (x_i, p_i) и соединив их отрезками прямых, получим искомый многоугольник распределения (рис. 5).

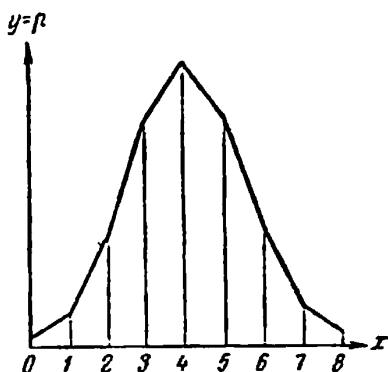


Рис. 5

Очевидно, составить таблицу распределения или построить многоугольник распределения для непрерывной случайной величины невозможно, поскольку непрерывная величина имеет бесконечное (точнее, счетное) множество возможных значений. Следовательно, возникает необходимость получить способ выражения закона распределения, который был бы пригоден как для прерывных, так и для непрерывных случайных величин.

С этой целью вводят функцию распределения вероятностей случайной величины X (или, в другой терминологии, интегральную функцию). До сих пор мы рассматривали вероятность события $X = x$. Теперь же будем рассматривать вероятность события $X < x$, т. е. вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, меньшее определенного действительного числа x (можно показать, что для непрерывной случайной величины вероятность события $X = x$ равна нулю, поэтому рассмотрение вероятностей таких событий не представляет интереса). Очевидно, что если x изменяется, то изменяется соответственно и вероятность $P(X < x)$, т. е. $P(X < x)$ есть функция от x ; эту функцию и называют функцией распределения и обозначают через $F(x)$.

Итак, функция распределения определяется равенством

$$F(x) = P(X < x). \quad (1.117)$$

Исходя из определения функции распределения, легко доказать, что она обладает следующими свойствами:

- 1) значения функции распределения принадлежат отрезку $[0; 1]$;
- 2) функция распределения неубывающая;
- 3) если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b) , то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a; \quad F(x) = 1 \text{ при } x \geq b.$$

Функция распределения непрерывной случайной величины непрерывна (и непрерывно дифференцируема), поэтому такую функцию распределения можно дифференцировать.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины * называют производную от ее функции распределения, т. е. плотность вероятности определяется равенством

$$f(x) = F'(x).$$

Можно доказать, что плотность вероятности $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1. Плотность вероятности есть не отрицательная функция, т. е.

$$f(x) \geq 0.$$

2. Несобственный интеграл от плотности вероятности в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

В частности, если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b) , то

$$\int_a^b f(x) dx = 1.$$

3. Вероятность того, что непрерывная случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , определяется равенством

$$P_a^b = \int_a^b f(x) dx.$$

В данной работе будем рассматривать главным образом случайные величины, подчиняющиеся нормальному закону распределения. Почти все случайные величины, с которыми приходится иметь дело геодезисту, распределены нормально.

* Иногда ее называют «дифференциальная функция распределения», «дифференциальный закон распределения».

§ 13. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ (ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ) СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Свойства случайной величины могут характеризоваться несколькими параметрами. Важнейшие из них — математическое ожидание случайной величины, которое обозначим через $M(X)$, и дисперсия $D(X) = \sigma^2(X)$, корень квадратный из которой $\sigma(X)$ называют стандартом, или средним квадратическим отклонением. Остальные параметры случайных величин рассматриваются в главе II.

1. Математическое ожидание

Математическим ожиданием $M(X)$ прерывной случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности.

Таким образом, при наличии таблицы распределения по определению математического ожидания и при условии, что число возможных значений случайной величины X конечное, можно записать

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (I.118)$$

где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, поскольку появление одного из возможных значений x_i есть достоверное событие.

Если выражение математического ожидания (I.118) распространить на дискретные величины, имеющие бесконечное число возможных значений x_i , то

$$M(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (I.119)$$

причем предполагается, что ряд (I.119) сходится абсолютно.

Учитывая, что в (I.118) и (I.119) $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, иногда пишут

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}. \quad (I.120)$$

Формула (I.120) позволяет дать механическую интерпретацию математического ожидания: $M(X)$ — абсцисса центра тяжести системы точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы, помещенные в эти точки, равны соответствующим вероятностям.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx, \quad (I.121)$$

причем предполагается, что интеграл сходится абсолютно; здесь $f(x)$ — плотность вероятности распределения случайной величины X .

Пример. Вероятность попадания в цель при выстреле $p = 0,5$. Определить математическое ожидание числа попаданий при четырех выстрелах.

Решение. Вероятности возможного числа попаданий 0, 1, 2, 3, 4 соответственно равны

$$P_4(0) = C_4^0 q^4 p^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(0) = 0,0625.$$

$$P_4(1) = C_4^1 q^3 p^1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(1) = 0,2500.$$

$$P_4(2) = C_4^2 q^2 p^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(2) = 0,3750.$$

$$P_4(3) = C_4^3 q^1 p^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(3) = 0,2500.$$

$$P_4(4) = C_4^4 q^0 p^4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(4) = 0,0625.$$

$$\text{Контроль: } \sum_{k=0}^4 P_4(k) = 1,0000.$$

Математическое ожидание числа попаданий при четырех выстрелах

$$M(X) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,250 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,250 + 4 \cdot 0,0625 = 2.$$

Реальный смысл математического ожидания станет яснее, если установить его связь со средним арифметическим. Заметим, что средним арифметическим называют величину, вычисляемую по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (I.122)$$

Покажем, что при неограниченно большом числе испытаний пределом среднего арифметического является математическое ожидание случайной величины. Рассуждения будем вести применительно к формуле (I.118), т. е. для прерывных случайных величин, отметив при этом, что все полученные выводы можно распространить и на непрерывные случайные величины, пользуясь формулой (I.121).

Пусть в результате N испытаний случайная величина x принимала следующие значения:

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{появилось} & m_1 \text{ раз} \\ x_2 & \text{»} & m_2 \text{ »} \\ x_3 & \text{»} & m_3 \text{ »} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & \text{»} & m_n \text{ »} \end{array}$$

причем

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = N.$$

На основании формулы (I.122) можем записать

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{N}, \quad (\text{I.123})$$

или

$$\bar{x} = x_1 \frac{m_1}{N} + x_2 \frac{m_2}{N} + \dots + x_n \frac{m_n}{N}. \quad (\text{I.124})$$

Здесь дроби

$$\frac{m_1}{N}, \quad \frac{m_2}{N}, \quad \dots, \quad \frac{m_n}{N},$$

по определению (I.4), есть относительные частоты, т. е.

$$\frac{m_1}{N} = Q_1, \quad \frac{m_2}{N} = Q_2, \quad \dots, \quad \frac{m_n}{N} = Q_n.$$

Следовательно,

$$\bar{x} = x_1 Q_1 + x_2 Q_2 + \dots + x_n Q_n. \quad (\text{I.125})$$

На основании теоремы Бернулли (§ 3), заменяя в (I.125) значения Q_i соответствующими значениями p_i , получаем

$$\text{вер. } \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} \rightarrow M(X). \quad (\text{I.126})$$

Таким образом, математическое ожидание $M(X)$ — «теоретическое среднее значение случайной величины».

Учитывая это, в дальнейшем изложении будем иногда обозначать

$$M(X) = \bar{X}^*. \quad (\text{I.127})$$

Рассмотрим свойства математического ожидания. Эти свойства справедливы как для прерывных, так и для непрерывных величин. Для упрощения ограничимся доказательством свойств математического ожидания для прерывных величин.

Первое свойство. Математическое ожидание имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

Доказательство. Очевидно, возможные значения случайной величины имеют размерность, совпадающую с размерностью случайной величины. Как следует из (I.118), возможные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ умножаются на соответствующие вероятности, которые являются отвлеченными числами. Отсюда и вытекает справедливость доказываемого свойства.

Второе свойство. Математическое ожидание может быть как положительным, так и отрицательным числом.

* Таким образом, $\bar{X} = \bar{x}$; обозначение $\bar{x}$ будем понимать как среднее арифметическое при N конечном. В § 17 дано более строгое доказательство рассмотренного свойства (I.126). Значение $\bar{X}$ называют еще «генеральным средним».

Доказательство. Свойство следует из того, что возможные значения случайной величины могут быть положительными и отрицательными числами.

Третье свойство. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной, т. е.

$$M(C) = C.$$

Это свойство очевидно.

Четвертое свойство. (теорема сложения математических ожиданий). Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, т. е.

$$M(X + Y + \dots + W) = M(X) + M(Y) + \dots + M(W). \quad (I.128)$$

В частности, для двух случайных величин

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y). \quad (I.129)$$

Для упрощения докажем четвертое свойство для двух случайных величин, т. е. докажем справедливость формулы (I.129).

Доказательство. По определению математического ожидания выражение (I.129) можно представить в виде

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_i + y_j) p_{ij}, \quad (I.130)$$

где p_{ij} — вероятность совместного появления x_i и y_j .

Выражение (I.130) можно написать так:

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^k p_{ij} + \sum_{j=1}^k y_j \sum_{i=1}^n p_{ij}. \quad (I.131)$$

Приняв во внимание, что $\sum_{j=1}^k p_{ij}$ есть вероятность p_i того, что

X примет значение x_i , $\sum_{i=1}^n p_{ij}$ есть вероятность p_j того, что Y примет значение y_j , получим

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^n x_i p_i + \sum_{j=1}^k y_j p_j. \quad (I.132)$$

Учитывая, что первое слагаемое (I.132) есть $M(X)$, а второе — $M(Y)$, окончательно получим

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y). \quad (I.133)$$

Нетрудно распространить это доказательство на любое число слагаемых методом математической индукции.

Прежде чем перейти к пятому свойству, заметим, что две случайные величины называют независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла вторая величина. Соответственно несколько случайных величин называют

взаимно независимыми, если законы распределения любого из них не зависят от того, какие значения приняли остальные величины.

Пятое свойство (теорема умножения математических ожиданий). Математическое ожидание двух или нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин, т. е.

$$M(XY) = M(X) M(Y), \quad (I.134)$$

$$M(X \cdot Y \dots W) = M(X) M(Y) \dots M(W). \quad (I.135)$$

Доказательство. На основании определения математического ожидания можно записать

$$M(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k x_i y_j p(x_i y_j), \quad (I.136)$$

где x_i и y_j — возможные значения величин X и Y соответственно; $p(x_i y_j)$ — вероятность произведения $x_i y_j$.

Для независимых случайных величин имеем

$$p(x_i y_j) = p(x_i) p(y_j),$$

поэтому

$$M(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k x_i y_j p(x_i) p(y_j) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \sum_{j=1}^k y_j p(y_j). \quad (I.137)$$

Пользуясь определением математического ожидания, окончательно получаем

$$M(XY) = M(X) M(Y). \quad (I.138)$$

Доказанное свойство легко распространить на любое число взаимно независимых случайных величин методом математической индукции.

Шестое свойство. Математическое ожидание произведения случайной величины на постоянную C равно произведению математического ожидания случайной величины на постоянную величину, т. е.

$$M(CX) = CM(X). \quad (I.139)$$

Доказательство. На основании пятого свойства

$$M(CX) = M(C) M(X).$$

По третьему свойству

$$M(C) = C.$$

Следовательно,

$$M(CX) = CM(X).$$

На практике в качестве приближенного значения $M(X)$ принимают $\bar{x}$. С увеличением числа испытаний значение $\bar{x}$ все больше приближается по вероятности к $M(X)$.

2. Дополнительные характеристики случайной величины

Для полной характеристики распределения случайной величины, кроме основных характеристик ($\bar{X}$ и σ^2), применяют и другие. К их числу, в частности, относятся асимметрия (мера «скошенности») и эксцесс (мера «крутости», т. е. островершинности, или плосковершинности распределения). Все эти характеристики являются частными случаями более общего понятия — моментов.

Различают начальные и центральные моменты.

Н а ч а л ь н ы м м о м е н т о м п о р я д к а k случайной величины X называют математическое ожидание k -й степени этой случайной величины, т. е.

$$\nu_k = \bar{X}^k = M(X^k). \quad (I.140)$$

Ц е н т р а л ь н ы м м о м е н т о м п о р я д к а k называют математическое ожидание k -й степени отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т. е.

$$\mu_k = M[(X - \bar{X})^k]. \quad (I.141)$$

Практически указанные моменты (их называют теоретическими) вычисляют по эмпирическим формулам

$$\nu'_k = \bar{x}^k = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n}, \quad (I.142)$$

$$\mu'_k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k}{n}, \quad (I.143)$$

где n — число наблюдений, а штрих служит для обозначения эмпирического момента*.

В дальнейшем будем иметь в виду главным образом эмпирические значения моментов, полученные по формулам (I.142) и (I.143).

Исходя из формул (I.140) и (I.141) и используя свойства математического ожидания, легко установить соотношения

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \nu_0 &= 1 \\ \text{б) } \mu_0 &= 1 \\ \text{в) } \nu_1 &= \bar{X} \\ \text{г) } \mu_1 &= 0 \\ \text{д) } \mu_2 &= \nu_2 - \nu_1^2 \\ \text{е) } \mu_3 &= \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 \end{aligned} \right\} \quad (I.144)$$

* Эмпирические моменты называют еще статистическими.

Основные характеристики $\bar{X}$ и $D(X)$ равны соответственно

$$\bar{X} = v_1 \text{ и } \mu_2 = D(X).$$

При нормальном законе распределения для центральных четных моментов существует общее соотношение

$$\mu_{2i+2} = (2i+1) \mu_{2i} \mu_2. \quad (1.145)$$

Равенства (1.144) и (1.145) теоретические. Если же иметь в виду эмпирические значения моментов, получаемые по формулам (1.142) и (1.143), то из указанных равенств точно соблюдаются только (1.144, а, б, г, д, е). Равенство (1.145) может служить для проверки статистических распределений в смысле их соответствия нормальному, при условии очень большого числа наблюдений.

3. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение (стандарт)

Дисперсия как одна из важнейших числовых характеристик случайной величины дает возможность оценить разброс возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания, вызываемый свойствами случайной величины или наличием при опыте ошибок наблюдений, колебанием условий опыта и другими факторами.

Однако частные значения отклонений $X - M(X)$ сами по себе мало что характеризуют, а математическое ожидание отклонения случайной величины, как легко убедиться, равно нулю вследствие взаимной компенсации положительных и отрицательных значений отклонений. Среднее значение из абсолютных значений этих отклонений также не всегда дает хороший результат при оценке разброса, так как результаты сильно сглаживаются и большие отклонения становятся мало ощутимыми, особенно при значительном числе испытаний.

С целью устранения указанных недостатков принято рассматривать не сами отклонения, а их вторые степени. В этом случае большие отклонения сказываются на конечном результате оценки значительно больше, чем малые. Привлечение для этой цели более высоких степеней $X - M(X)$, а именно: четвертой, шестой и т. д., вызывает необходимость увеличения числа испытаний, в противном случае снижается надежность определения числовых характеристик.

Д и с п е р с и я $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения значения случайной величины от ее математического ожидания, т. е.

$$D(X) = M \{ [X - M(X)]^2 \}. \quad (1.146)$$

Для прерывной случайной величины X

$$D(X) = \sum_{i=1}^n \{x_i - M(X)\}^2 p_i.$$

Дисперсию можно получить еще по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (I.147)$$

Действительно, используя свойства математического ожидания, получаем

$$\begin{aligned} D(X) &= M\{[X - M(X)]^2\} = M\{X^2 - 2XM(X) + [M(X)]^2\} = \\ &= M(X^2) - 2M(X)M(X) + [M(X)]^2 = M(X^2) - [M(X)]^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Для непрерывной случайной величины X

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{X - M(X)\}^2 \cdot f(X) dX. \quad (I.148)$$

В соответствии с (I.147) выражению (I.148) можно придать вид

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2. \quad (I.149)$$

Величину $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ называют средним квадратическим, или стандартным, отклонением, а чаще — просто стандартom. Среднее квадратическое отклонение обладает по сравнению с дисперсией одним несомненным преимуществом: оно имеет ту же размерность, что и случайная величина. Отметим, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины.

Иногда пользуются относительной числовой характеристикой разброса или так называемым коэффициентом вариации v , представляющим отношение среднего квадратического отклонения к математическому ожиданию, выраженное в процентах, т. е.

$$v = \frac{\sigma}{M(X)} 100\%, \quad (I.150)$$

исключая, конечно, случай, когда $M(X) = 0$, или очень малю по сравнению с σ .

Практически дисперсию получают по формуле

$$D(X) \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (I.151)$$

Эта формула обоснована в § 20.

Очевидно, что надежность полученного по формуле (I.151) значения дисперсии находится в зависимости от числа N .

4. Математическое ожидание относительной частоты появлений события

Несомненный интерес представляет получение математического ожидания относительной частоты, если иметь в виду соотношение (1.126), которое для рассматриваемого случая примет вид

$$M\left(\frac{k}{n}\right) \approx \left(\frac{\bar{k}}{n}\right), \quad (1.152)$$

где n — число испытаний в многократно повторенных сериях испытаний.

Последнее равенство надо понимать так: математическое ожидание относительной частоты весьма близко к среднему арифметическому из множества значений относительной частоты, полученных в соответствующих сериях испытаний, в каждой из которых число испытаний n конечно и одинаково.

Для решения поставленной задачи воспользуемся биномиальным законом.

Согласно определению математического ожидания,

$$\begin{aligned} M\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{0}{n} P_n(0) + \frac{1}{n} P_n(1) + \frac{2}{n} P_n(2) + \dots \\ &\dots + \frac{k}{n} P_n(k) + \dots + \frac{n}{n} P_n(n). \end{aligned} \quad (1.153)$$

Подставляя в выражение (1.153) значения $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ (вероятность относительной частоты равна вероятности соответствующего числа появлений события), получаем

$$\begin{aligned} M\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n} n p q^{n-1} + \frac{2}{n} \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} p^2 q^{n-2} + \\ &+ \dots + \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} + \dots + p^n. \end{aligned} \quad (1.154)$$

$$\begin{aligned} M\left(\frac{k}{n}\right) &= p \left\{ q^{n-1} + (n-1) p q^{n-2} + \right. \\ &+ \dots + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \{(n-1)-(k-1)\}!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} + \dots + p^{(n-1)} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (1.155)$$

Нетрудно видеть, что в фигурных скобках правой части (1.155) представлено разложение бинома $(p + q)^{n-1}$, поэтому сумма членов в фигурных скобках равна единице и, следовательно,

$$M\left(\frac{k}{n}\right) = p. \quad (1.156)$$

Итак, математическое ожидание относительной частоты равно вероятности события.

Пользуясь шестым свойством математического ожидания, получаем

$$p = M\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} M(k),$$

отсюда

$$M(k) = np \approx k_0. \quad (1.157)$$

где k_0 — вероятнейшее число появлений события (см. § 8).

Таким образом, мы установили, что наибольшей вероятностью обладает среднее значение числа появлений события из множества серий испытаний. Из (1.156) следует, что математическое ожидание ξ отклонения относительной частоты от вероятности равно нулю. Действительно, используя свойства математического ожидания, можно написать

$$M(\xi) = M\left(\frac{k}{n} - p\right) = M\left(\frac{k}{n}\right) - p = 0. \quad (1.158)$$

§ 14. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Почти все случайные величины, с которыми приходится иметь дело в геодезии, подчиняются нормальному закону распределения вероятностей. Для относительной частоты появлений события мы получили этот закон в виде

$$p \frac{\frac{k_2}{n}}{\frac{k_1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где

$$t_i = h \xi_i; \quad \xi_i = \frac{k_i}{n} - p, \quad h = \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Установили также, что $p = M\left(\frac{k}{n}\right)$, поэтому в целях соблюдения общности воспользуемся той же формой выражения нормального закона, что и для относительной частоты, и напишем для любой нормально распределенной случайной величины

$$p_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (1.159)$$

где

$$\left. \begin{aligned} t_i &= h' \xi_i \\ \xi_i &= x_i - M(X) \end{aligned} \right\}. \quad (1.160)$$

Заметим, что $M(\xi) = M(X) - M(X) = 0$, следовательно,

$$M(t) = h' M(\xi) = 0,$$

т. е.

$$M(t) = 0. \quad (1.161)$$

Однако, если для относительной частоты известен параметр h , для любой другой нормально распределенной случайной величины параметр h' остается пока неизвестным.

Таким образом, задача свелась к нахождению формулы для вычисления параметра h' , позволяющего находить $t_i = h' \xi_i$ для любой нормально распределенной случайной величины.

Для решения поставленной задачи получим вначале формулу дисперсии переменной t , введение которой позволило придать стандартный вид нормальному закону для любых нормально распределенных случайных величин. По определению дисперсии и учитывая (I.161),

$$D(t) = \sigma^2(t) = M(t^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (\text{I.162})$$

Заменим переменную интегрирования

$$\left. \begin{aligned} t &= z \sqrt{2} \\ t^2 &= 2z^2 \\ dt &= \sqrt{2} dz \end{aligned} \right\}. \quad (\text{I.163})$$

Пределы интегрирования не изменятся, и мы получим

$$\sigma^2(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2z^2 e^{-\frac{2z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2z^2 e^{-z^2} dz. \quad (\text{I.164})$$

Возьмем интеграл (I.164). Так как $de^{-z^2} = -2ze^{-z^2} dz$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2z^2 e^{-z^2} dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} z de^{-z^2}. \quad (\text{I.165})$$

Интегрируя по частям, получаем

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} z de^{-z^2} = -ze^{-z^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz. \quad (\text{I.166})$$

Второе слагаемое правой части (I.166) есть интеграл Пуассона, равный $\sqrt{\pi}$. Поэтому

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} z de^{-z^2} = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^{z^2}} + \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{z}{e^{z^2}} + \sqrt{\pi}. \quad (\text{I.167})$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^{z^2}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2ze^{z^2}} = 0.$$

То же получим и для

$$z \rightarrow -\infty.$$

Теперь имеем

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} z de^{-z^2} = \sqrt{\pi} \quad (\text{I.168})$$

и, наконец, принимая во внимание (I.164), (I.165) и (I.168), получаем

$$\sigma^2(t) = 1. \quad (\text{I.169})$$

Согласно шестому свойству математического ожидания,

$$\sigma^2(t) = M(t^2) = M\{(h')^2 \xi^2\} = (h')^2 M(\xi^2). \quad (I.170)$$

Если учесть (I.160), то $M(\xi^2)$ есть дисперсия случайной величины X , т. е. $\sigma^2(X)$. Поэтому, имея в виду (I.169) и (I.170), получаем

$$(h')^2 \sigma^2(X) = 1,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} (h')^2 &= \frac{1}{\sigma^2(X)} \\ h' &= \frac{1}{\sigma(X)} \end{aligned} \right\}. \quad (I.171)$$

Теперь для любой нормально распределенной случайной величины можно написать

$$P_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (I.172)$$

где

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{\xi}{\sigma(X)} \\ \xi &= X - M(X) \end{aligned} \right\}. \quad (I.173)$$

Безразмерные величины $\frac{\xi_l}{\sigma(X)} = t_l$ называют нормированными значениями случайной величины ξ . Из (I.171) и (I.172) имеем для дисперсии и стандарта относительной частоты

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2(Q) &= \frac{1}{h^2} = \frac{pq}{n} \\ \sigma(Q) &= \sqrt{\frac{pq}{n}} \end{aligned} \right\}. \quad (I.174)$$

Формулы (I.172) и (I.173) имеют исключительно важное значение для практики, позволяя пользоваться таблицами вероятностей при решении задач с любыми нормально распределенными случайными величинами. Для этого надо знать две основные характеристики этих величин: $M(X)$ и $\sigma(X)$. Напоминаем, что практически вместо указанных характеристик пользуются их приближенными значениями, т. е.

$$M(X) \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

и

$$\sigma(X) \approx \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

где n^* — конечное число.

Надежность полученных характеристик зависит от числа n : чем больше n , тем надежнее характеристики (см. главу II).

Отметим одно свойство случайных величин, подчиняющихся любому симметричному закону распределения, а следовательно, и нормальному закону: математическое ожидание любой нечетной степени отклонения $\xi = X - M(X)$ равно нулю. Это свойство следует из симметричности кривой распределения относительно оси Y . Если рассматривать математическое ожидание случайной величины как предельное среднее значение, то каждому положительному значению $+\xi_i^{2n+1}$ должно соответствовать такое же отрицательное значение $-\xi_i^{2n+1}$, так как число их появлений в пределе должно быть одинаковым, из-за чего произойдет полная компенсация. В частности,

$$M(\xi) = 0. \quad (1.175)$$

Несоблюдение отмеченного свойства нечетных степеней ξ служит одним из основных признаков отклонения рассматриваемого распределения от нормального закона.

Приведем несколько примеров применения полученных формул (1.173) и таблиц значений $F(t)$ и $\Phi(t)$ (см. прил. 2 и 3).

Пример 1. $M(X) = 145,3$; $\sigma(X) = 2,1$; найти вероятность попадания значения случайной величины при одном испытании в пределах от 143,2 до 147,4. Решение. Вычислим ξ_1 , ξ_2 , t_1 и t_2

$$\xi_1 = 143,2 - 145,3 = -2,1;$$

$$\xi_2 = 147,4 - 145,3 = +2,1; \quad t_1 = \frac{-2,1}{2,1} = -1; \quad t_2 = \frac{+2,1}{2,1} = +1.$$

Так как $|t_1| = |t_2| = 1$, то по таблице значений функции $\Phi(t)$ (прил. 2) найдем

$$\Phi(1) = 0,683.$$

Пример 2. Средний процент выпуска брака продукции на заводе, полученный за много дней, равен 1,80%. Стандарт этой величины $\sigma = 0,20\%$.

Найти вероятность того, что в отдельные дни процент брака будет находиться в пределах от 1,5 до 2%.

Решение. По условию $x_{cp} = 1,80$; $\sigma = 0,20$, откуда

$$1. \xi_1 = 1,50 - 1,80 = -0,30; \quad \xi_2 = 2,00 - 1,80 = +0,20;$$

$$t_1 = -\frac{0,30}{0,20} = -1,50; \quad t_2 = +\frac{0,20}{0,20} = +1,00.$$

Здесь применим таблицу для $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (прил. 3).

$$2. F(+1) = 0,841; \quad F(-1,50) = 0,067.$$

Ответ: $0,841 - 0,067 = 0,774$.

Полученный ответ означает, что из каждых 100 дней работы приблизительно 77 дней процент брака продукции на заводе находится в пределах 1,5—2%.

Пример 3. Используя исходные данные предыдущей задачи, найти тот предел, которого не превысит выпуск брака продукции завода с вероятностью $P = 0,4$.

Дано:

$$x_{cp} = 1,80; \quad \sigma = 0,20; \quad P = 0,40; \quad x_1 = 0; \quad \xi_1 = -1,80.$$

Найти:

$$x_2 = ?$$

Решение. $t_1 = -\frac{1,80}{0,20} = -9$. Практически можно считать, что $t_1 = -\infty$. Поэтому воспользуемся таблицами интегралов $F(t)$. Потенцируя, находим t_2 , соответствующее $F(t_2) = 0,40$.

$$t_2 = -0,254; \xi_2 = \sigma \cdot t_2 = -0,20 \cdot 0,254 = -0,05.$$

Ответ:

$$x_2 = 1,75\%, \text{ т. е. } (1,80 - 0,05).$$

Ответ означает, что приблизительно 4 дна из 10 выпуск брака на заводе не превысит 1,75%.

Пример 4. Для установления процентного соотношения размеров выпускаемых обувной промышленностью солдатских ботинок был произведен обмер ступней солдат в одной из частей и получены следующие результаты: средняя длина ступни $x_{\text{ср}} = 25,5$ см, стандарт $\sigma = 2$ см. Значению $x_{\text{ср}} = 25,5$ см соответствует размер ботинок № 41. Изменению размера на один номер соответствует изменение длины ступни на 1 см.

Найти наиболее правильное процентное распределение по померам выпускаемых ботинок. Здесь удобно воспользоваться таблицей $\Phi(t)$.

Решение. Ступени измерения x следующие:

от 20 см до 21 см — ботинки № 36			
» 21 »	» 22 »	— »	№ 37
» 22 »	» 23 »	— »	№ 38
» 23 »	» 24 »	— »	№ 39
» 24 »	» 25 »	— »	№ 40
» 25 »	» 26 »	— »	№ 41
» 26 »	» 27 »	— »	№ 42
» 27 »	» 28 »	— »	№ 43
» 28 »	» 29 »	— »	№ 44
» 29 »	» 30 »	— »	№ 45
» 30 »	» 31 »	— »	№ 46

Найдем теперь ступени измерения $\pm t = \pm \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$

№ 36 и № 46 —	от $\pm 2,25$ до $\pm 2,75$
№ 37 » № 45 —	» $\pm 1,75$ » $\pm 2,25$
№ 38 » № 44 —	» $\pm 1,25$ » $\pm 1,75$
№ 39 » № 43 —	» $\pm 0,75$ » $\pm 1,25$
№ 40 » № 42 —	» $\pm 0,25$ » $\pm 0,75$
№ 41 »	± 0 $\pm 0,25$

Далее при помощи таблицы $\Phi(t)$ (прил. 2) получим, что необходимо выпускать

№ 36 и № 46 по	0,9%
№ 37 » № 45 »	2,8%
№ 38 » № 44 »	7,1%
№ 39 » № 43 »	11,6%
№ 40 » № 42 »	17,4%
№ 41	19,8%

Кроме того, 0,6% необходимо выпускать по специальным заказам, поступающим из частей.

§ 15. О НЕКОТОРЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ, ОТЛИЧАЮЩИХСЯ ОТ НОРМАЛЬНОГО

1. Равномерное распределение

При обработке результатов наблюдений часто приходится иметь дело со случайными величинами, плотность вероятности которых имеет постоянное значение в некотором конечном интервале.

Указанное распределение носит название равномерного. Плотность равномерного распределения случайной величины X выражается функцией (рис. 6)

$$f_r(x) = \left\{ \frac{1}{2\alpha} \text{ при } a - \alpha \leq x \leq a + \alpha \right\}, \quad (1.176)$$

где $a \pm \alpha$ — пределы изменения x , a — абсцисса центра интервала.

Таким распределением обладают, например, ошибки округлений.

График функции $f_r(x)$ показан на рис. 6. Так как график функции $f_r(x)$ изображается прямоугольником, распределение часто называют прямоугольным.

Функция распределения $F_r(x)$ имеет вид

$$F_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a - \alpha \\ \frac{x + \alpha - a}{2\alpha} & \text{при } a - \alpha < x \leq a + \alpha \\ 1 & \text{при } x > a + \alpha \end{cases}.$$

(1.177)

Рис. 6

Убедимся в том, что, если возможные значения равномерно распределенной случайной величины X принадлежат интервалу $(a - \alpha, a + \alpha)$, то вероятность попадания X в этот интервал равна единице:

$$P(a - \alpha \leq X \leq a + \alpha) = \int_{a - \alpha}^{a + \alpha} \frac{dx}{2\alpha} = \frac{(a + \alpha) - (a - \alpha)}{2\alpha} = \frac{2\alpha}{2\alpha} = 1.$$

Найдем числовые характеристики равномерного распределения: математическое ожидание и стандарт. По определению математического ожидания

$$M(X) = \int_{a - \alpha}^{a + \alpha} x \frac{dx}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \int_{a - \alpha}^{a + \alpha} x dx = \frac{x^2}{4\alpha} \Big|_{a - \alpha}^{a + \alpha} = \frac{1}{4\alpha} [(a + \alpha)^2 - (a - \alpha)^2],$$

или

$$M(X) = a. \quad (1.178)$$

Вычислим дисперсию, а затем стандарт равномерного распределения

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (1.179)$$

Найдем

$$M(X^2) = \frac{1}{2\alpha} \int_{a - \alpha}^{a + \alpha} x^2 dx = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{a - \alpha}^{a + \alpha} = \frac{1}{6\alpha} [(a + \alpha)^3 - (a - \alpha)^3].$$

Сделав элементарные выкладки, получим

$$M(X^2) = \frac{\alpha^2}{3} + a^2. \quad (1.180)$$

Принимая во внимание (I.178), (I.179) и (I.180), окончательно получаем

$$\left. \begin{aligned} D(X) &= \frac{\alpha^2}{3} \\ \sigma(X) &= \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} \quad (I.181)$$

Напомним, что α — наибольшая величина, на которую может отклониться значение случайной величины от ее математического ожидания, т. е. α — абсолютное значение предельного отклонения.

2. Закон распределения Пуассона

При выводе нормального закона распределения для отклонений частоты от вероятности предполагалось, что p — вероятность испытываемого события — не очень сильно отличается от 0,5. Для p , близких к нулю или к единице, нормальный закон плохо обоснован. В этих случаях лучше применять закон распределения Пуассона для событий с малой вероятностью p . Если событие имеет вероятность, близкую к единице, то закон Пуассона применяют для противоположного события с вероятностью $q = 1 - p$. Очевидно, вероятность числа k появлений события равна вероятности числа $(n - k)$ появления противоположного события при числе испытаний n .

Закон распределения Пуассона выражается формулой

$$P(k) = \frac{k_0^k}{k!} e^{-k_0}, \quad (I.182)$$

где $k_0 = np$, т. е. величина, постоянная при заданном n .

Величина k может принимать только целочисленные значения, теоретически ничем не ограниченные, но, конечно, $k \leq n$. Очевидно, что вероятность попадания числа k в пределы от 0 до a равна

$$P_0^a = e^{-k_0} \sum_{k=0}^a \frac{k_0^k}{k!},$$

а от a_1 до a_2

$$P_{a_1}^{a_2} = e^{-k_0} \sum_{k=a_1}^{k=a_2} \frac{k_0^k}{k!}.$$

Если потребуется получить вероятность

$$P(k > a) = \sum_{k=a+1}^{\infty} \frac{k_0^k}{k!} e^{-k_0},$$

то, разумеется, выгоднее получить вначале

$$P(k \leq a) = e^{-k_0} \sum_{k=0}^a \frac{k_0^k}{k!},$$

а затем

$$P(k > a) = 1 - P(k \leq a).$$

Проверим, удовлетворяет ли закон Пуассона основному условию любого закона распределения вероятностей

$$P_0^{n \rightarrow \infty} = e^{-k_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k_0^k}{k!} = 1. \quad (1.183)$$

Но, как известно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k_0^k}{k!} = e^{k_0},$$

поэтому

$$P_0^{n \rightarrow \infty} = e^{-k_0} e^{k_0} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины k (числа появлений события при n испытаниях), подчиняющейся закону распределения Пуассона.

По определению математического ожидания,

$$\begin{aligned} M(k) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{k_0^k}{k!} e^{-k_0} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{k_0^k}{k!} e^{-k_0} = k_0 e^{-k_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_0^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= k_0 e^{-k_0} e^{k_0} = k_0, \end{aligned}$$

т. е.

$$M(k) = k_0 = np. \quad (1.184)$$

Найдем дисперсию. Согласно (1.147),

$$D(k) = M(k^2) - [M(k)]^2.$$

Принимая во внимание (1.184), получаем

$$D(k) = M(k^2) - k_0^2. \quad (1.185)$$

Найдем

$$\begin{aligned} M(k^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{k_0^k}{k!} e^{-k_0} = k_0 \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{k_0^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k_0} = \\ &= k_0 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{k_0^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k_0} = \\ &= k_0 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{k_0^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k_0} + k_0 e^{-k_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_0^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Обозначив $k-1 = m$, получим

$$M(k^2) = k_0 \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{k_0^m}{m!} e^{-k_0} + k_0 e^{-k_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_0^m}{m!} = k_0 k_0 + k_0 e^{-k_0} e^{k_0}$$

или

$$M(k^2) = k_0^2 + k_0. \quad (1.186)$$

Учитывая теперь (1.185) и (1.186), имеем

$$D(k) = k_0 = np. \quad (1.187)$$

Таким образом, мы получили для распределения Пуассона

$$\left. \begin{aligned} M(k) &= np \\ D(k) &= np \\ \sigma(k) &= \sqrt{np} \end{aligned} \right\}. \quad (1.188)$$

Имея в виду (1.188), а также (1.151) и приближенное равенство $M(k) \approx k$, гипотезу о том, что распределение действительно соответствует закону Пуассона, можно проверять наблюдением приближенного равенства

$$D(k) \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2. \quad (1.189)$$

Пример *. Предполагая, что число частиц золота, находящихся в взвешенном состоянии в растворе, распределяется по закону Пуассона, найти выражение этого закона по распределению частиц золота, наблюдавшемуся через 2 с в оптически изолированной части пространства (табл. 3).

Т а б л и ц а 3

Количество частиц	Количество интервалов	Вычисления		
x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x}) n_i$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
0	381	-1,42703	-543,7	775,9
1	568	-0,42703	-242,6	103,6
2	357	+0,57297	+204,6	117,2
3	175	+1,57297	+275,3	433,0
4	67	+2,57297	+172,4	443,6
5	28	+3,57297	+100,0	357,3
6	5	+4,57297	+22,9	104,7
7	2	+5,57297	+11,1	61,9
Итого	1583	Контроль	-786,3	2397,2

$$\sum x_i n_i = 2259$$

$$\bar{x} = 1,42703$$

$$\begin{aligned} &+786,3 \\ &\underline{\quad} = 0,0 \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Вычислим среднее арифметическое и приближенную дисперсию случайной величины. В соответствии с данными табл. 3 имеем

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{2259}{1583} \approx 1,43;$$

$$D(x) \approx \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 n_i \approx \frac{2397,2}{1583} \approx 1,51.$$

* Пример заимствован из книги А. И. Карасева «Основы математической статистики». Росвузиздат, 1962. 358 с. с ил.

Довольно хорошее совпадение x и приближенного значения дисперсии $D(X)$, равных 1,43 и 1,51 соответственно, подтверждает предположение о наличии распределения Пуассона. Выражение для закона Пуассона в данном случае примет вид

$$P(X=k) = \frac{(1.43)^k e^{-1.43}}{k!}, \quad (1.190)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ — возможное количество частиц золота, находящихся во взвешенном состоянии в растворе, наблюдавшееся через 2 с в оптически изолированной части пространства. По формуле (1.190) можно вычислить вероятность для заданного числа k . Таблицу распределения Пуассона см. в прил. 4.

§ 16. ПОНЯТИЕ О МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СИСТЕМ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Систему случайных величин можно понимать как совокупность n случайных величин, определяющих собой случайное положение точки в n -мерном пространстве. В частности, двумерная система определяет случайное положение точки на плоскости, трехмерная — в пространстве (например, место разрыва снаряда на земле или точка разрыва зенитного снаряда в воздухе).

Приведем без доказательства следующую теорему:

Плотность распределения системы независимых случайных величин равна произведению плотностей распределения отдельных величин, входящих в систему.

Предположим, что плотности распределения (т. е. ординаты кривых распределения) независимых случайных величин X, Y, Z, U есть $f_1(x), f_2(y), f_3(z), f_4(u)$. Тогда плотность распределения системы

$$f(x, y, z, u) = f_1(x) f_2(y) f_3(z) f_4(u). \quad (1.191)$$

Вероятность попадания в окрестность точки $K(x, y, z, u)$

$$P_K = f_1(x) f_2(y) f_3(z) f_4(u) dx dy dz du. \quad (1.192)$$

Вероятность попадания в область Q вычисляют по формуле

$$P_Q = \int_Q f_1(x) f_2(y) f_3(z) f_4(u) dx dy dz du. \quad (1.193)$$

Для двумерного нормального распределения вероятность попадания точки в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, равна

$$P_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} = \frac{1}{\pi} \int_{\xi_1/\sigma(X)}^{\xi_2/\sigma(X)} \int_{\eta_1/\sigma(Y)}^{\eta_2/\sigma(Y)} e^{-\left(\frac{t_X^2}{2} + \frac{t_Y^2}{2}\right)} dt_X dt_Y,$$

где

$$t_X = \frac{\xi}{\sigma(X)}; \quad t_Y = \frac{\eta}{\sigma(Y)}; \quad (1.194)$$

$$\xi_i = x_i - \bar{X}; \quad \eta_i = y_i - \bar{Y}.$$

При трехмерном нормальном распределении вероятность попадания точки в параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям, равна

$$P_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{\xi_1/\sigma(X)}^{\xi_2/\sigma(X)} \int_{\eta_1/\sigma(Y)}^{\eta_2/\sigma(Y)} \int_{\xi_3/\sigma(Z)}^{\xi_4/\sigma(Z)} e^{-\frac{1}{2} \left(t_X^2 + t_Y^2 + t_Z^2 \right)} dt_X dt_Y dt_Z,$$

где

$$t_X = \frac{\xi}{\sigma(X)}; \quad t_Y = \frac{\eta}{\sigma(Y)}; \quad t_Z = \frac{\xi}{\sigma(Z)};$$

$$\xi_i = x_i - \bar{X}; \quad \eta_i = y_i - \bar{Y}; \quad \xi_i = z_i - \bar{Z}.$$

Для вычисления вероятности попадания точки в заданную область произвольной формы на плоскости или в заданную пространственную область должны быть известны границы этих областей в виде соответствующих уравнений. Тогда придется вычислять кратные интегралы с переменными границами наименьших пределов интегрирования.

При равномерном законе распределения вероятностей у всех аргументов вероятность попадания точки в область пропорциональна площади этой области при двумерном распределении и пропорциональна объему — при трехмерном.

Случай зависимых случайных величин и комбинации разных распределений рассматривать не будем.

§ 17. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ

1. Закон больших чисел

Теория вероятностей основывается на математической интерпретации реальных свойств массовых случайных явлений или, как говорят, статистических закономерностей. Одним из важнейших математических выражений этих закономерностей является закон больших чисел. Согласно этому закону, среднее значение случайной величины с увеличением числа наблюдений сходится по вероятности к математическому ожиданию. В такой формулировке закон больших чисел называют теоремой Чебышева. В виде формулы эта теорема выглядит так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{x} - \bar{X}| < \varepsilon) > 1 - \delta, \quad (1.196)$$

где ε и δ — сколь угодно малые положительные числа.

В частности, имея в виду, что $M\left(\frac{k}{n}\right) = p$, получаем теорему Бернулли

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\left|\left(\frac{k}{n}\right) - p\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \delta, \quad (1.197)$$

где N — число серий испытаний, в каждой из которых выполнено n опытов.

Теорему Чебышева доказывают на основе следующего неравенства Чебышева:

$$P(|x - \bar{X}| > \alpha) < \frac{D(X)}{\alpha^2}, \quad (1.198)$$

где α — любое положительное конечное число.

Докажем справедливость неравенства (1.198)

$$P(|x - \bar{X}| \geq \alpha) = \int_{-\infty}^{\bar{X} - \alpha} f(x) dx + \int_{\bar{X} + \alpha}^{+\infty} f(x) dx, \quad (1.199)$$

где $f(x)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины.

Далее введем

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{X}|^2 f(x) dx > \int_{-\infty}^{\bar{X}-\alpha} |x - \bar{X}|^2 f(x) dx + \\ + \int_{\bar{X}+\alpha}^{+\infty} |x - \bar{X}|^2 f(x) dx. \quad (1.200)$$

Заменяя переменную величину $|x - \bar{X}|$ ее нижним пределом α , мы усилим неравенство (1.200). Поэтому

$$D(X) > \alpha^2 \int_{-\infty}^{\bar{X}-\alpha} f(x) dx + \alpha^2 \int_{\bar{X}+\alpha}^{+\infty} f(x) dx = \\ = \alpha^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\bar{X}-\alpha} f(x) dx + \int_{\bar{X}+\alpha}^{+\infty} f(x) dx \right\},$$

или, принимая во внимание (1.199),

$$D(X) > \alpha^2 P(|x - \bar{X}| > \alpha).$$

откуда получается неравенство (1.198).

Заменяя везде знак интеграла знаком суммы, а $f(x) dx$ — соответствующими значениями вероятностей, легко доказать справедливость неравенства Чебышева для дискретных случайных величин. Заметим, что неравенство Чебышева указывает лишь верхнюю границу вероятности отклонения $|x - \bar{X}|$ на заданную положительную величину α при любом законе распределения. Если же закон распределения известен, то вероятность отклонения $|x - \bar{X}|$ можно оценить более точно.

Рассмотрим следующую задачу.

Известны случайная величина X и ее основные характеристики: $M(X)$ и $D(X)$. Произведено n наблюдений и получено n значений x_i ($i = 1, \dots, n$). Из n значений X взято среднее арифметическое $\bar{x}$. В свою очередь, полученное значение $\bar{x}$ может рассматриваться как одно из значений некоторой случайной величины Y , причем совокупность значений этой случайной величины есть всевозможные средние арифметические значения в разных сериях наблюдений, в каждой из которых произведено n наблюдений. Требуется найти основные характеристики случайной величины Y , т. е.

$$M(Y) \text{ и } D(Y).$$

Будем рассуждать так: наблюдаемые значения X можно рассматривать как результаты наблюдений n независимых случайных величин $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, имеющих одинаковые характеристики: $\bar{X}$ и $D(X)$.

Тогда

$$Y = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n), \quad (1.201)$$

т. е. Y можно рассматривать как среднее арифметическое одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин. На основании (1.201) сразу получаем

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} (\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n).$$

Но по условию $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \dots = \bar{X}_n = \bar{X}$, поэтому

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} n \bar{X},$$

т. е.

$$\bar{Y} = \bar{X}. \quad (1.202)$$

Найдем дисперсию $D(Y) = D(\bar{x})$, пользуясь тем, что постоянный множитель можно вывести за знак дисперсии, возведя его в квадрат,

$$D(Y) = D(\bar{x}) = D \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right] = \frac{1}{n^2} D \left(\sum_{i=1}^n x_i \right). \quad (1.203)$$

Учитывая, что рассматриваемые величины одинаково распределены, т. е. $D(x_1) = D(x_2) = \dots = D(x_n) = D(x)$, а также свойство дисперсии

$$D(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = D(x_1) + D(x_2) + \dots + D(x_n),$$

получаем *

$$D(Y) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(x_i) = \frac{nD(x)}{n^2} = \frac{D(x)}{n}.$$

*

$$\begin{aligned} D \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) &= M \left\{ \left(\sum_{i=1}^n x_i - M \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right\} = \\ &= M \left\{ \left(\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{X}_i \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\bar{X}_i = \bar{X} = \text{const}$, и пользуясь свойствами математического ожидания, напишем

$$\begin{aligned} D \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) &= M \left\{ \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\bar{X} \right)^2 \right\} = M \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}) \right\}^2 = \\ &= M \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - \bar{X})(x_j - \bar{X}) \right\} = \sum_{i=1}^n M [(x_i - \bar{X})^2] + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M (x_i - \bar{X})(x_j - \bar{X}) = \sum_{i=1}^n D(x), \\ &\quad (i \neq j), \end{aligned}$$

так как $M(x_i - \bar{X}) = 0$, окончательно получим

$$D \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = nD(x).$$

Итак,

$$D(Y) = D(\bar{x}) = \frac{D(x)}{n}. \quad (1.204)$$

Теперь имеются все предпосылки для доказательства теоремы Чебышева в предположении, что рассматриваемые величины попарно независимы и имеют равномерно ограниченные (т. е. ограниченные одним и тем же числом) дисперсии,

$$P_{n \rightarrow \infty} (|\bar{x} - \bar{X}| < \varepsilon) > 1 - \delta, \quad (1.205)$$

где ε и δ — сколь угодно малые положительные числа.

Применим к случайной величине $\bar{x}$ неравенство Чебышева, полагая $\varepsilon = \alpha$,

$$P_{n \rightarrow \infty} (|\bar{x} - \bar{X}| > \varepsilon) < \frac{D(\bar{x})}{\varepsilon^2} = \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}. \quad (1.206)$$

Рассматривая неравенство (1.206), убеждаемся, что как бы мало ни было заданное число ε , всегда можно подобрать число n столь большим, чтобы соблюдалось неравенство

$$\frac{D(X)}{n\varepsilon^2} < \delta.$$

Поэтому можно написать

$$P_{n \rightarrow \infty} (|\bar{x} - \bar{X}| > \varepsilon) < \delta,$$

а переходя к противоположному событию,

$$P_{n \rightarrow \infty} (|\bar{x} - \bar{X}| < \varepsilon) > 1 - \delta,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, математическое ожидание приближенно можно заменять средним значением из n наблюдений и с тем большим основанием, чем больше число наблюдений.

2. Понятие о центральной предельной теореме Ляпунова

Важность закона больших чисел для практических применений теории вероятностей очевидна. Не менее важны для практики теоремы, объединенные общим названием «центральная предельная теорема». Если закон больших чисел устанавливает статистические свойства среднего значения случайной величины, то центральная предельная теорема устанавливает условия, при которых возникает нормальный закон распределения.

Наибольший вклад в разработку этой теоремы внесли русские математики П. Л. Чебышев, А. А. Марков и А. М. Ляпунов. Так как строгое доказательство центральной предельной теоремы дано А. М. Ляпуновым, то ее чаще всего называют теоремой Ляпунова. Строгое доказательство этой теоремы требует значительного расширения рамок данного курса. Поэтому ограничимся лишь изложением основной идеи этой теоремы и приведем упрощенное ее доказательство, в известной мере иллюстрирующее основную идею строгого доказательства.

Сущность центральной предельной теоремы заключается в следующем. Если некоторое случайное явление есть результат действия достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных явлений, каждое из которых оказывает малое воздействие на окончательный результат, то закон распределения вероятностей указанного сложного явления близок к нормальному.

Применительно к случайным величинам теорему Ляпунова можно сформулировать так:

Если некоторая случайная величина есть сумма достаточно большого числа других случайных независимых величин, отклоняющихся от своих математических ожиданий на весьма малые величины по сравнению с отклонениями суммарной величины, то закон распределения этой суммарной случайной величины будет близок к нормальному.

Приведем упрощенное доказательство теоремы Ляпунова для случайных величин.

Предположим, что случайная величина Y есть сумма n независимых случайных величин X_i ($i = 1, \dots, n$), т. е.

$$Y = X_1 + \dots + X_n. \quad (1.207)$$

Представим (1.207) так

$$\bar{Y} + \eta = (\bar{X}_1 + \xi_1) + \dots + (\bar{X}_n + \xi_n).$$

Так как

$$\bar{Y} = \bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n,$$

то

$$\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad (1.208)$$

т. е. случайное отклонение суммы является суммой случайных отклонений слагаемых.

Представим теперь, что каждое из слагаемых ξ_i составлено, в свою очередь, из некоторых элементарных слагаемых ε , равных по абсолютной величине, но принимающих с одинаковой вероятностью знаки плюс и минус. Ввиду бесконечного разнообразия взаимных связей в природе такое допущение возможно, так как каждое из слагаемых, в свою очередь, является результатом сложения многих влияний, и этот ход рассуждений можно вести сколь угодно долго.

Как следствие указанного упрощения, величину η можно представить как сумму большого числа N элементарных слагаемых ε с одинаковой вероятностью $p = 0,5$, принимающих знаки плюс или минус, т. е.

$$\eta = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i, \quad (1.209)$$

где $|\varepsilon| = \text{const}$, а слагаемые ε различаются только знаками.

Конкретное значение случайной величины η будет зависеть от числа положительных слагаемых ε в данном испытании. Предположим, таких положительных слагаемых окажется k . Тогда конкретное значение η будет

$$\eta_i = k |\varepsilon| - (N - k) |\varepsilon| \quad (1.210)$$

(очевидно, что отрицательных слагаемых окажется при этом $N - k$). Далее получим

$$\begin{aligned}\eta_i &= k|\varepsilon| - N|\varepsilon| + k|\varepsilon| = 2k|\varepsilon| - N|\varepsilon| = \\ &= 2N|\varepsilon|\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

т. е.

$$\eta_i = 2N|\varepsilon|\left(\frac{k}{N} - 0.5\right). \quad (1.211)$$

$2N|\varepsilon|$ — величина постоянная, а в скобках правой части равенства (1.211) мы получили отклонение относительной частоты события от вероятности. Но так как отклонение относительной частоты от вероятности подчиняется нормальному закону распределения, то тем самым теорема Ляпунова доказана, разумеется, при тех упрощениях, которые нами сделаны в начале рассуждений.

Теорема Ляпунова имеет важное значение для теории ошибок измерений.

Глава II

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 18. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

При изложении главы I предполагалось, что законы распределения случайных величин и параметры этих законов известны. Однако при решении практических задач указанные допущения никогда полностью не соблюдаются. Как правило, бывает известен лишь закон распределения, а его параметры определяются по результатам наблюдений. Иногда по результатам наблюдений приходится определять и закон распределения.

Обе задачи — определение закона распределения и определение его параметров — можно решить точно, если получены из наблюдений все значения случайной величины, которые называют генеральной статистической совокупностью. Однако для непрерывных случайных величин это принципиально невозможно, а для дискретных величин в большинстве случаев практически невозможно. Поэтому на практике применяют так называемый выборочный метод. Сущность этого метода заключается в том, что из генеральной совокупности получают лишь часть значений или, как говорят, делают статистическую выборку и на ее основе решают задачу. Разумеется, при этом получают приближенные ответы.

Методами приближенного решения вероятностных задач на основе выборки занимается математическая статистика.

Выборку стараются делать так, чтобы она распределялась равномерно по генеральной совокупности и, таким образом, наилучшим образом отражала свойства случайной величины. Приведем примеры.

Пример 1. Для определения запаса древесины на некоторой площади леса прокладывают выборочный обмер высоты и диаметра ствола (на высоте груди) некоторых типичных или средних деревьев на равномерно расположенных по лесу площадках размером 50×50 м и, кроме того, подсчитывают число деревьев

на этих площадках. В результате получают «средний» объем дренесимы на «средней» площадке. Умножив полученный результат на $\frac{P \text{ га}}{0,25 \text{ га}}$, где $P \text{ га}$ — площадь всего леса, получают приближенное решение задачи. Математическая статистика позволяет при этом дать и вероятностную оценку полученного результата.

Пример 2. Для того чтобы быстро определить распределение роста мобилизованных солдат и получить на складе обмундирование с правильным соотношением его размеров, выстраивают солдат по росту («по росту») и делают обмер каждого десятого в строю. Этих данных оказывается достаточно для удовлетворительного решения вопроса, особенно если учтены еще и возможные отклонения полученных статистических параметров и соответственно получены запасные комплекты.

Аналогично на основе выборок определяют урожайность злаков, количество выпавших осадков, точность измерений и т. п.

Приближенные значения основных характеристик случайной величины (математического ожидания и дисперсии) получают по формулам

$$M(X) \approx \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (11.1)$$

$$D(X) \approx D'(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \quad (11.2)$$

где n — число наблюдений.

Ясно, что полученные статистические (эмпирические) параметры распределения тем точнее, чем больше произведено наблюдений и чем лучше сделана выборка.

Приближенная картина характера распределения случайной величины представляется «эмпирической кривой распределения». Для построения этой кривой вычисляют по материалам выборки относительные частоты наблюдаемых значений случайной величины в некоторых «равнопромежуточных» интервалах. Далее последовательно откладывают по оси X равные между собой интервалы изменения X и строят на этих интервалах прямоугольники с высотами, численно равными соответствующим относительным частотам. В результате получают ступенчатую линию («гистограмму»). Сглаживая эту ступенчатую линию, получают плавную эмпирическую кривую распределения.

§ 19. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫБОРОК

1. Экссесс

Экссессом E называют величину, вычисляемую по формуле

$$E = \frac{\mu'_4}{(\mu'_2)^2} - 3. \quad (11.3)$$

В случае точного соблюдения нормального закона распределения в выборке величина E должна равняться нулю, что следует из со-

отношения (1.145). Для эмпирических значений μ'_2 и μ'_4 эксцесс, как правило, нулю равен не будет.

Отклонение эксцесса эмпирического распределения от его теоретического значения, т. е. от нуля, указывает на отклонение эмпирического распределения от нормального, причем, если $E > 0$, распределение «высоковершинное», если $E < 0$ — «низковершинное» (рис. 7).

Не требует пояснений утверждение, что эмпирическое распределение может точно совпасть с нормальным случайно или при числе испытаний, неограниченно большом. Таким образом, исследователь практически всегда при вычислении эксцесса эмпирического распределения получит величину, отличную от нуля. Но можно ли считать полученное значение эксцесса несущественным при данных условиях, а следовательно, отклонение вершины кривой эмпирического распределения от нормальной кривой — допустимым?

Для этой цели применяют следующую формулу, позволяющую вычислять среднее квадратическое отклонение эксцесса:

$$\sigma'(E) \approx \sqrt{\frac{24}{n}}, \quad (11.4)$$

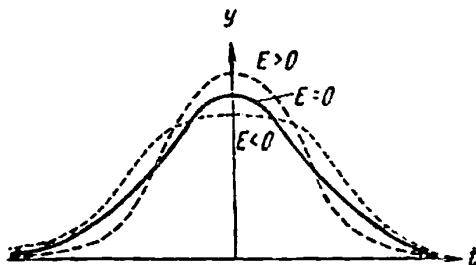


Рис. 7

где n — число наблюдений (испытаний).

Если число наблюдений не очень велико ($20 < n < 50$), то эксцесс можно считать несущественным при условии

$$|E| \leq 3\sigma'(E); \quad (11.5)$$

здесь $|E|$ — абсолютное значение эксцесса;

$\sigma'(E)$ — среднее квадратическое отклонение эксцесса (эмпирическое).

2. Асимметрия

В практике встречаются случаи, когда эмпирическая кривая распределения является как бы скошенной. В качестве числовой характеристики в этом случае применяют так называемый показатель асимметрии

$$Sk = \frac{\mu'_3}{(\sigma')^3}, \quad (11.6)$$

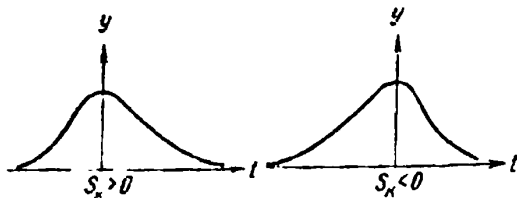
где Sk — показатель асимметрии (Sk — первые буквы слова skewness — скошенность);

μ'_3 — третий центральный момент;

$(\sigma')^3$ — третья степень среднего квадратического отклонения (очевидно, $\sigma^3 = \mu_2^{\frac{3}{2}}$ для теоретических значений).

Для симметричных распределений, каким является и нормальное, очевидно, что теоретическое значение $Sk = 0$, так как суммы положительных и отрицательных кубов отклонений при вычислении μ_3 по формуле (1.141) взаимно компенсируются. Когда Sk окажется больше нуля, кривая будет скошена влево, а когда Sk окажется меньше нуля — вправо (рис. 8).

Для нормального распределения при большом числе испытаний n среднее квадратическое отклонение показателя асимметрии может быть вычислено по эмпирической формуле



$$\sigma'(Sk) \approx \sqrt{\frac{6}{n}}. \quad (11.7)$$

Если будет выполнено условие

Рис. 8

$$|Sk| \leq 3\sigma'(Sk), \quad (11.8)$$

то эмпирическое распределение можно считать практически симметричным.

Иногда вместо показателя асимметрии Sk применяют постоянную Пирсона β_1 , называемую мерой скошенности, равную

$$\beta_1 = (Sk)^2 = \frac{(\mu'_3)^2}{(\mu'_2)^3}.$$

Нетрудно установить, что

$$[\sigma'(\beta_1)]^2 \approx 4(Sk)^2 [\sigma'(Sk)]^2; \quad \sigma'(\beta_1) \approx \sqrt{\beta_1} \sqrt{\frac{24}{n}}.$$

Условию (11.7) аналогично условие

$$|\beta_1| \leq 3\sigma'(\beta_1).$$

Недопустимые отклонения Sk от нуля в большинстве случаев означают наличие в результатах наблюдений односторонние действующие ошибки. Понятие односторонние действующих ошибок доступно без дополнительных пояснений, однако к ним еще вернемся ниже.

Пример. При исследовании светодальномера одна и та же линия была измерена 16 раз. Пользуясь данными, помещенными в табл. 4, вычислить центральные моменты $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4$, дисперсию $D'(X)$, среднее квадратическое отклонение σ' , эксцесс E , среднее квадратическое отклонение эксцесса $\sigma'(E)$, асимметрию Sk и среднее квадратическое отклонение асимметрии $\sigma'(Sk)$. В графе «Вычисления» табл. 4 приведен расчет числовых характеристик.

Как нетрудно видеть из результатов вычислений, эксцесс и асимметрию здесь можно считать несущественными, а эмпирическое распределение — практически нормальным.

результаты измерений S_i , м	$\delta S_i = S_i - S_{\text{ср}}$, мм	δS_i^2	δS_i^3	вычисление
6994.911	+17.8	316.84	+5639.8	$\mu'_1 = \frac{-0.2}{16} = 0.0;$
890	-3.2	10.24	-32.8	$\mu'_2 = \frac{1186}{16} = 74.2;$
879	-14.2	201.64	-2863.3	$\mu'_3 = \frac{+653}{16} = 40.8;$
895	+1.8	3.24	+5.8	$\mu'_4 = \frac{199\,313}{16} = 12\,457;$
882	-11.2	125.44	-1404.9	$D' = \frac{1186}{15} = 79.0;$
898	+4.8	23.04	+110.6	$\sigma' = \sqrt{D'} = 8.9 \text{ мм};$
885	-8.2	67.24	-551.4	$E = \frac{\mu'_1}{(\mu'_2)^2} - 3;$
883	-10.2	104.04	-1061.2	$E = \frac{12\,457}{5506} - 3;$
902	+8.8	77.44	+681.5	$E = -0.74;$
901	+7.8	60.84	+474.6	$\sigma'_{(E)} = \sqrt{\frac{24}{16}} = 1.22;$
895	+1.8	3.24	+5.8	$ E < \sigma'_{(E)};$
894	+0.8	0.64	+0.5	$Sk = \frac{\mu'_3}{(\sigma')^3};$
896	+2.8	7.84	+22.0	$Sk = \frac{40.8}{703} = 0.06;$
883	-10.2	104.04	-1061.2	$\sigma'_{(Sk)} = \sqrt{\frac{6}{n}} = 0.61;$
895	+1.8	3.24	+5.8	$ Sk < \sigma'_{(Sk)}.$
902	+8.8	77.44	+681.5	
$S_{\text{ср}} = 6994.8932$	$\Sigma = -0.2$	$\Sigma = 1186.4$	$\Sigma = +653.1$	$\Sigma \delta S_i^4 = 199\,313$

§ 20. ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Рассмотрим способы вероятностных оценок приближенного значения математического ожидания, получаемого как среднее, т. е. значения $\bar{x}$. В основу решения поставленной задачи положим метод «доверительных интервалов». Сущность этого метода состоит в следующем.

Задаваясь «доверительной вероятностью» β , определяют доверительные интервалы, ~~отражаемые~~ откладываемые в обе стороны от $\bar{x}$ (т. е.

в сторону уменьшения и в сторону увеличения), в пределах которых находится значение $\bar{X}$ с вероятностью β .

При этом рассмотрим два случая:

1-й случай: точное значение стандарта σ известно.

Зная точное значение $D(X) = \sigma^2(X)$, получаем точное значение дисперсии среднего

$$D(\bar{x}) = \frac{D(X)}{n}$$

и стандарт среднего

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{D(\bar{x})} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}. \quad (11.9)$$

Далее рассуждаем так. Случайная величина $\bar{x}$ имеет параметры распределения: $M(\bar{x}) = \bar{X}$ и $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$. Вероятность того, что конкретное значение случайной величины попадает в интервал от $(\bar{X} - \xi_i)$ до $(\bar{X} + \xi_i)$, как известно, равна

$$P_{-t_i}^{+t_i} = \Phi\left(\frac{\xi_i}{\sigma(\bar{x})}\right) = \Phi(t_i),$$

где

$$\xi_i = |\bar{x}_i - \bar{X}|.$$

Нам задано $P_{-t_i}^{+t_i} = \beta$ и известно $\sigma(\bar{x})$. Пользуясь таблицами $\Phi(t_i)$ (прил. 2), по заданному значению β находим

$$t_i = \frac{|\bar{x}_i - \bar{X}|}{\sigma(\bar{x})}$$

и, наконец, $|\bar{x}_i - \bar{X}| = t_i \sigma(\bar{x})$.

Вопрос о том, какой доверительной вероятностью следует задаваться, решается в каждом конкретном случае, исходя из тех или иных соображений, причем субъективный подход здесь неизбежен. В большинстве случаев будем задаваться значением $\beta = 0,99$ и $\beta = 0,68$.

Строго говоря, точное значение стандарта при обработке результатов наблюдений — абстракция. Однако опытом установлено, что значение стандарта можно считать практически точным, если оно получено по формуле

$$\sigma'(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad (11.10)$$

где $n \geq 20$.

Формула (11.10) вытекает из формулы (11.2). Поэтому в дальнейшем изложении будем считать, что стандарт известен практически точно, если его значение получено из 20 наблюдений и более.

Перейдем теперь к выводу формулы (11.2).

Как известно, $D(X) = \mu_2$. Посмотрим, можно ли вычислять приближенное значение дисперсии по формуле

$$D'(X) = \mu'_2?$$

Для приближенного значения параметра естественно поставить условие, чтобы его математическое ожидание равнялось точному значению. Поэтому вычисляем $M(\mu'_2)$.

На основании (I.144, д)

$$\mu'_2 = v'_2 - (v'_1)^2,$$

откуда

$$M(\mu'_2) = M(v'_2) - M[(v'_1)^2]. \quad (II.11)$$

Но

$$M(v'_2) = M\left(\frac{\sum_1^n x_i^2}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_1^n M(x_i^2) = M(x^2) = v_2. \quad (II.12)$$

Получим

$$\begin{aligned} M[(v'_1)^2] &= M\left[\left(\frac{\sum_1^n x_i}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} M\left[\left(\sum_1^n x_i\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{n^2} M\left\{\sum_1^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j\right\} = \\ &= \frac{1}{n^2} \{n(\bar{X}^2) + n(n-1)(\bar{X})^2\} = \frac{1}{n} \{(\bar{X})^2 + n(\bar{X})^2 - (\bar{X})^2\} = \\ &= \frac{1}{n} (v_2 - v_1^2 + nv_1^2). \end{aligned}$$

На основании (I.144, д) можно написать

$$M[(v'_1)^2] = \frac{1}{n} (\mu_2 + nv_1^2) = \frac{1}{n} [D(X) + nv_1^2] = \frac{D(X)}{n} + v_1^2,$$

т. е.

$$M[(v'_1)^2] = \frac{D(X)}{n} + v_1^2. \quad (II.13)$$

Принимая во внимание (II.11), (II.12) и (II.13), получаем

$$M(\mu'_2) = v_2 - v_1^2 - \frac{D(X)}{n} = \mu_2 - \frac{D(X)}{n},$$

или

$$M(\mu'_2) = D(X) - \frac{D(X)}{n} = \frac{n-1}{n} D(X). \quad (II.14)$$

Равенство (II.14) показывает, что, вычисляя приближенные дисперсии по формуле

$$D'(X) = \mu'_2,$$

допускаем систематическое уменьшение значений $D'(X)$.

Из (II.14) следует

$$D(X) = \frac{n}{n-1} M(\mu_2') = \frac{n}{n-1} M\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}\right) =$$

$$= \frac{M\left\{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right\}}{n-1}.$$

Поэтому приближенное значение дисперсии вычисляют по формуле (II.2)

$$D'(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Пример 1*. Случайная величина X наблюдалась 20 раз. Результаты наблюдений приведены в табл. 5.

Т а б л и ц а 5

i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	10,5	6	10,6	11	10,6	16	10,9
2	10,8	7	10,9	12	11,3	17	10,8
3	10,9	8	11,0	13	10,5	18	10,7
4	11,2	9	10,3	14	10,7	19	10,9
5	10,4	10	10,8	15	10,8	20	11,0

Требуется найти доверительный интервал для математического ожидания, соответствующий доверительной вероятности $\beta = 0,99$.

Р е ш е н и е.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = 10,78;$$

$$D'(X) = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - 10,78)^2}{19} = 0,064; \quad \sigma'(X) = 0,253,$$

$$\sigma'(\bar{x}) = \sqrt{\frac{0,064}{20}} = 0,056.$$

В прил. 2 находим по $\beta = \Phi(t_\beta) = 0,99$ значение

$$t_\beta = 2,57,$$

откуда

$$\sigma'(\bar{x}) t_\beta = 0,056 \cdot 2,57 = 0,14.$$

* Пример заимствован из книги Е. С. Вентцеля «Теория вероятностей». М., «Наука», 1969. 576 с. с пл.

Доверительные границы: $10,64 \pm 0,14$ и $10,92 \pm 0,14$.
т. е. с вероятностью $p = 0,99$ можно утверждать, что математическое ожидание наблюдаемой случайной величины находится в пределах $10,64 \div 10,92$.

2-й случай: имеется менее 20 результатов наблюдений и стандарт неизвестен.

Если известно, что наблюдаемая случайная величина подчинена нормальному закону распределения, то в рассматриваемом случае используется так называемое «распределение Стьюдента» для безразмерной случайной величины

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\sigma'(\bar{x})}, \quad (II.15)$$

где

$$\sigma'(\bar{x}) = \sqrt{\frac{D'(X)}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)n}}.$$

Очевидно, что случайная величина t — функция трех случайных величин: x , $\bar{x}$ и $\sigma'(\bar{x})$. Закон Стьюдента вытекает из нормального закона. Плотность вероятности в законе распределения Стьюдента выражается формулой, которую приведем без вывода,

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad (II.16)$$

где $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$ — «гамма-функция».

Таблица значений

$$\Phi'(t) = 2 \int_0^t S_{n-1}(t) dt = \beta \quad (II.17)$$

дана в прил. 5.

Приведем примеры использования закона распределения Стьюдента.

Пример 2. Используя данные примера 1, получаем доверительные границы по закону Стьюдента.

Решение. Для $\beta = 0,99$ и $r = n - 1 = 19$ в таблице $\Phi'(t)$ (прил. 5) находим $t_\beta = 2,86$, откуда

$$t_\beta \sigma'(\bar{x}) = 2,86 \cdot 0,056 = 0,16.$$

Доверительные границы 10,62 и 10,94.

При использовании нормального закона доверительные границы оказались равными 10,64 и 10,92, т. е. оба распределения при $n = 20$ различаются мало.

Пример 3. $\bar{x} = 23,64$; $\sigma'(\bar{x}) = 0,092$; $n = 7$; доверительная вероятность $\beta = 0,99$.

Решение. По таблице прил. 5 получим

$$t_\beta = 3,71; \quad t_\beta \sigma'(\bar{x}) = 0,34.$$

Доверительные границы 23,30 и 23,98.

Для нормального закона $t_{\beta} = 2,57$ и $t_{\beta} \sigma'(\bar{x}) = 0,24$, т. е. доверительный интервал значительно меньше.

Таким образом, мы убедились, что при $n < 20$ следует пользоваться распределением Стьюдента. При $n \geq 20$ можно пользоваться нормальным законом распределения.

Следует, однако, учитывать, что при $n < 10$ и распределение Стьюдента не дает надежной оценки среднего.

Определение доверительных границ для неизвестной вероятности события, если известна его относительная частота

Рассмотрим такую задачу. Вероятность некоторого случайного события определялась статистическим путем, причем было сделано более 20 наблюдений. Тогда $p' = Q$, где Q — относительная частота события: $\sigma(p') \approx \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}$ на основании (I.174).

Доверительными границами будут

$$Q - t_{\beta} \sigma(p') \text{ и } Q + t_{\beta} \sigma(p').$$

Пример. Пропроведено 100 опытов и испытываемое событие совершилось 42 раза. Тогда

$$p' = Q = \frac{42}{100} = 0,42;$$

$$\sigma(p') = \sqrt{\frac{0,42 \cdot 0,58}{100}} = \sqrt{\frac{0,244}{100}} = 0,049.$$

Задаваясь доверительной вероятностью $\beta = 0,9$, чему соответствует $t_{\beta} = 1,64$, получаем доверительные границы: $0,42 - 1,64 \cdot 0,049 = 0,42 - 0,08 = 0,34$ и $0,42 + 0,08 = 0,50$, т. е. с вероятностью 0,9 точное значение вероятности появления испытываемого события находится в пределах $0,34 \div 0,50$. Можно написать

$$p \approx 0,4.$$

§ 21. ОЦЕНКА ЭМПИРИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ ДИСПЕРСИИ

Здесь, как и в § 20, предполагается, что наблюдаемая случайная величина распределена по нормальному закону.

Приведем без вывода формулу стандарта эмпирической дисперсии

$$\sigma(D') = D' \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \quad (II.18)$$

При $n \geq 20$ для решения задачи достаточно формулы (II.18). При $n < 20$ для построения доверительного интервала дисперсии используют случайную величину

$$V = \frac{(n-1) D'}{D}, \quad (II.19)$$

имеющую так называемое «распределение χ^2 », плотность которого выражается формулой

$$k_{n-1}(v) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} v^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{v}{2}}. \quad (\text{II.20})$$

Из (II.19) следует, что

$$D' = v \frac{D}{n-1}. \quad (\text{II.21})$$

Так как кривая $k_{n-1}(v)$, согласно (II.20), несимметрична относительно вершины (рис. 9), то необходимо условиться о том, как располагать доверительные границы в обе стороны относительно эмпирического значения $D'(X)$. Принято доверительный интервал строить так, чтобы вероятности попадания точной дисперсии за пределы доверительных границ в сторону меньшую и в сторону большую были равны между собой. Для установления соответствующих доверительных границ в прил. 6 дается таблица таких значений χ^2_i , вероятности которых удовлетворяют условию (II.22),

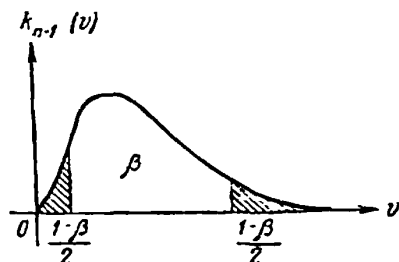


Рис. 9

$$P(v > \chi^2_i) = p_i, \quad (\text{II.22})$$

где p_i — некоторая вероятность, о которой будет сказано ниже.

Порядок действий при этом следующий.

Вычисляют значение $\alpha = 1 - \beta$, где β — заданная доверительная вероятность. Далее в прил. 6 получают χ^2_1 и χ^2_2 , соответствующие вероятностям $p_1 = \frac{\alpha}{2}$ и $p_2 = 1 - \frac{\alpha}{2}$ и числу «степеней свободы» $r = n - 1$, где n — число наблюдений.

Доверительные границы

$$\frac{D'(n-1)}{\chi^2_1} \text{ и } \frac{D'(n-1)}{\chi^2_2}.$$

Пример. По данным примера 1 § 20 найти доверительные границы для $D'(X) = 0,064$ и $\sigma'(X) = 0,253$ с использованием: а) нормального закона; б) распределения χ^2 . Доверительная вероятность $\beta = 0,8$.

Решение. а) по нормальному закону $t = 1,28$;

$$\sigma(D') = D' \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0,064 \sqrt{\frac{2}{19}} = 0,021,$$

в соответствии с (II.18): $t_p \sigma(D') = 0,027$. Доверительные границы

для $D'(X)$ 0,037 и 0,091;

для $\sigma'(X)$ 0,19 и 0,30;

б) по закону распределения χ^2

$$\alpha = 1 - \beta = 0.2;$$

$$r_1 = \frac{\alpha}{2} = 0.1;$$

$$r_2 = 1.0 - 0.1 = 0.9.$$

Далее в прил. 6 находим $\chi_1^2 = 27.2$ и $\chi_2^2 = 11.65$ (по аргументам $r = n - 1 = 19$, $p_1 = 0.1$ и $p_2 = 0.9$) и вычисляем

$$\frac{D'(n-1)}{\chi_1^2} = \frac{0.064 \cdot 19}{27.2} = 0.045 \quad \text{и} \quad \frac{D'(n-1)}{\chi_2^2} = 0.104.$$

Доверительные границы:

для дисперсии 0.045 и 0.104;

для стандарта 0.21 и 0.32.

Напомним: доверительные границы для $\sigma(X)$ на основании нормального закона 0.19 и 0.30.

Как видим, при $n = 20$ доверительные границы для $\sigma(X)$, полученные по нормальному закону распределения и по закону распределения χ^2 , практически почти не отличаются. Подводя итоги всему сказанному в § 20 и 21, можно сформулировать следующие правила.

При $n \geq 20$ для оценки эмпирических основных параметров нормального распределения случайной величины можно пользоваться таблицами интегралов вероятностей $\Phi(t)$ в прил. 2, не прибегая к распределениям Стьюдента и χ^2 , которыми, однако, предпочтительнее пользоваться при $n < 20$. Однако при $n < 10$ надежных оценок эмпирических параметров получить вообще нельзя.

§ 22. СРАВНЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ТЕОРЕТИЧЕСКИМ

Заметим прежде всего, что если проверяется нормальное распределение, то в большинстве случаев оказывается достаточным вычисление эксцесса (II.3) и асимметрии (II.6) и их оценка по формулам (II.4) и (II.5), а также (II.7) и (II.8).

В общем случае для сравнения эмпирического распределения с теоретическим можно использовать таблицу χ^2 в прил. 6. Исследование статистического ряда начинается с графического построения эмпирической кривой распределения (см. § 18). Из построения полученной кривой выдвигается гипотеза о возможном теоретическом распределении. Затем в равных между собой интервалах изменения случайной величины подсчитывается число наблюдавшихся значений k_i и число значений, соответствующих теоретическому распределению, т. е. np_i , где n — число всех наблюдений, p_i — вероятность попадания значения случайной величины в данный интервал.

Для получения вероятностей p_i необходимо предварительно вычислить $\bar{x}$ и $\sigma'(X)$ и поставить условие, чтобы $\sum p_i = 1$, т. е. чтобы

крайние интервалы охватывали все оставшиеся значения. Далее вычисляют

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i} \quad (11.23)$$

и «число степеней свободы»

$$r = m - 3,$$

где m — число интервалов (разрядов), 3 — число поставленных условий (совпадение $\bar{x}$ с $\bar{X}$, $\sigma'(X)$ с $\sigma(X)$ и $\sum_{i=1}^m p = 1$).

Степень согласованности эмпирического распределения с теоретическим («критерий согласия») оценивается вероятностью p , полученной из прил. 6 по аргументу r и табличной величине χ^2 (значение p — один из входов в таблицу). Если $p < 0,1$, то согласие считается неудовлетворительным. В этом случае выдвигается другая гипотеза или проверяется правильность эксперимента.

Пример *. Произведено 500 измерений боковой ошибки при стрельбе с самолета по наземной цели. Результаты измерений (в тысячных долях радиана) сведены в статистический ряд, показанный в первой и второй строках табл. 6.

Таблица 6

I_i ($x_i; x_{i+1}$)	-4; -3	-3; -2	-2; -1	-1; 0	0; +1	+1; +2	+2; +3	+3; +4
k_i	6	25	72	133	120	88	46	10
np_i	6,2	26,2	71,2	122,2	131,8	90,5	38,2	10,5
$k_i - np_i$	-0,2	-1,2	+0,8	+10,8	-11,8	-2,5	+7,8	-0,5

$$\bar{x} = 0,168; \quad \sigma'(\bar{X}) = 1,448.$$

Значения x_i разбивают на разряды I_i так, чтобы в любой разряд попало не менее пяти наблюдаемых значений, а число разрядов было не менее восьми.

Значение $\bar{x}$ в примере вычислено по приближенной формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 \frac{1}{2} (x_{i+1} + x_i) k_i}{500} = \frac{84}{500} = 0,168.$$

Значение $\sigma'(X)$ вычислено по формуле

$$\sigma'(X) = \sqrt{D'(X)},$$

где

$$D'(X) = v_2' - (v_1')^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 \left(\frac{1}{2} (x_i + x_{i+1}) \right)^2 \cdot k_i}{500} - (\bar{x})^2 = 2,126 - 0,028 = 2,098.$$

* Заимствован из книги Е. С. Вентцеля «Теория вероятностей». М., «Наука», 1969. 576 с. с пл.

Упрощение заключается в том, что в каждом разряде все значения считаются одинаковыми и равными $\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$.

Далее получаем

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(k_i - n p_i)^2}{n p_i} = 3,75,$$

число степеней свободы

$$r = 8 - 3 = 5.$$

По таблице χ^2 (прил. 6) находим в строке $r = 5$ для $\chi^2 = 3,00$ значение $p = 0,70$ и для $\chi^2 = 4,35$ значение $p = 0,50$. Интерполируя, получаем для $\chi^2 = 3,75$ значение $p = 0,59$.

Так как $p > 0,5$, то согласно эмпирического распределения с нормальным следует признать отличным. При $0,3 \leq p < 0,5$ согласие признают хорошим, при $0,1 \leq p < 0,3$ — удовлетворительным. Напоминаем, что при $p < 0,1$ согласие считается неудовлетворительным.

§ 23. ПОНЯТИЕ О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВЯЗЯХ

При математической обработке результатов наблюдений, производимых при исследовании новых инструментов и методов работ, а также при решении ряда других научно-технических задач часто приходится устанавливать зависимость полученных результатов от какой-либо главной причины (фактора) или от главного источника ошибок. Если зависимость между результатами наблюдений установлена и выражена формулой, то ее можно использовать при предвычислении ожидаемой точности исследуемого прибора или для надлежащей организации наблюдений и обработки их результатов. При этом могут встретиться две формы связи между количественными или качественными признаками: функциональная и статистическая. Ограничимся рассмотрением связей лишь между двумя величинами.

Между двумя переменными величинами x и y функциональной связью называют такую, при которой каждому значению x соответствует определенное значение y . Так, например, между объемом шара V и его радиусом R существует функциональная связь

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Статистической связью между двумя переменными x и y называют такую связь, при которой каждому значению x соответствует распределение значений y , изменяющееся вместе с изменением x .

Пример. При испытании светодальномера СВВ-1 в 1953 г. были получены результаты, приведенные в табл. 7.

Если бы вместо табл. 7 привести все значения ошибок для каждого наблюдения, связь между D и Δ вообще не усматривалась бы. По данным табл. 7, в которой выписаны средние значения ошибок, можно видеть, что с увеличением D от 0,4 до 2,7 ошибка Δ растет и только при переходе D от 2,7 к 4,5 уменьшается. Следовательно, несмотря на имеющееся отклонение от выявленной закономерности,

Таблица 7

№ серии	Число наблюдений в серии	Расстояние, измеренное СВВ-1, D, км	Средняя ошибка одного приема, вычисленная как среднее арифметическое на абсолютных значениях ошибок в серии, Δ, см
1	30	0,4	21
2	106	0,8	31
3	91	1,0	35
4	131	2,7	52
5	36	4,5	40

можно утверждать, что с увеличением измеряемого расстояния абсолютное значение средней ошибки имеет тенденцию увеличиваться.

Выше рассмотрен пример, когда между средними значениями двух переменных величин существует статистическая корреляционная связь. Задача исследователя сводится к тому, чтобы установить тесноту связи, т. е. оценить степень близости корреляционной связи к функциональной и установить форму этой связи, выражаемую формулой, позволяющей предвычислять средние значения одной переменной по заданным значениям другой. Различают линейные и нелинейные корреляционные связи; рассмотрим пока только линейные связи; о нелинейных связях будет сказано в конце второй части курса.

§ 24. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Коэффициент корреляции является мерой тесноты линейной корреляционной связи и вычисляется по формуле

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1) \sigma'(X) \sigma'(Y)}, \quad (11.24)$$

где

$$\frac{x_i}{y_i} \left| \frac{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}{y_1 y_2 y_3 \dots y_n} \right.$$

— различные значения переменных x_i и y_i , полученные из наблюдений

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ — среднее арифметическое величины X ; $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$ — среднее арифметическое величины Y ; n — число наблюдений

* Величину $\left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right\} : (n-1)$ называют «корреляционным моментом».

(значений x_i, y_i); $\sigma'(X)$ — эмпирическое среднее квадратическое отклонение X (стандарт X); $\sigma'(Y)$ — эмпирическое среднее квадратическое отклонение Y (стандарт Y).

Величины $\sigma'(X)$ и $\sigma'(Y)$ вычисляются по формуле (II.2)

$$\sigma'(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}},$$

$$\sigma'(Y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}.$$

Таким образом, если предварительные графические построения покажут, что связь между X и Y близка к линейной (точки на графике располагаются вблизи прямой линии), то вычисляют средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$, разности $x_i - \bar{x}$ и $y_i - \bar{y}$ и по ним, пользуясь формулой (II.2), вычисляют средние квадратические отклонения $\sigma'(X)$ и $\sigma'(Y)$ и, наконец, по формуле (II.24) вычисляют коэффициент корреляции.

§ 26. СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ. УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ

Рассмотрим основные свойства коэффициента корреляции.

1. Коэффициент корреляции изменяется в пределах от -1 до $+1$, т. е.

$$-1 \leq r \leq +1^*.$$

2. Когда коэффициент корреляции равен $+1$ или -1 , между X и Y существуют точные прямолинейные связи, т. е.

$$Y = aX + c,$$

$$X = bY + d.$$

* Из (II.24) легко получить формулу

$$r^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \eta_i^2 \right)},$$

где $\xi_i = x_i - \bar{x}$ и $\eta_i = y_i - \bar{y}$.

Но в алгебре доказывается неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \eta_i^2 \right).$$

откуда следуют неравенства

$$-1 \leq r \leq +1.$$

При $r = \pm 1$ с увеличением или уменьшением X увеличивается или уменьшается Y . В случае, когда $r = -1$, с увеличением X уменьшается Y и с уменьшением X увеличивается Y .

3. Если $r = 0$, то между X и Y прямой корреляционной связи не существует (нелинейная связь может существовать).

Чем ближе коэффициент корреляции r к ± 1 или -1 , тем ближе корреляционная связь между переменными X и Y к функциональной; чем ближе коэффициент корреляции к 0, тем соответственно менее связаны между собой переменные X и Y .

Естественно возникает вопрос, с какой надежностью вычисляется само значение коэффициента корреляции и при каком минимальном абсолютном его значении еще можно считать связь существующей.

При числе наблюдений $n \geq 50$ В. И. Романовский [47, с. 184] рекомендует для среднего квадратического отклонения коэффициента корреляции применять формулу

$$\sigma(r) \approx \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}. \quad (11.25)$$

Связь считается установленной, если выполняется условие

$$|r| \geq 3\sigma(r). \quad (11.26)$$

Пример. Пусть при вычислениях коэффициент корреляции оказался равным $r = +0,26$; $n = 394$.

Оценим точность коэффициента корреляции

$$\sigma(r) = \frac{1-(0,26)^2}{\sqrt{394}} = 0,047,$$

так как $|r| > 3\sigma(r)$ ($0,26 > 0,14$), то наличие линейной корреляционной связи можно считать установленным.

Для оценки надежности коэффициента корреляции при $n < 50$ пользуются специальной функцией, так называемым критерием Фишера [23, с. 242]

$$z = \frac{1}{2} \{ \ln(1+|r|) - \ln(1-|r|) \}, \quad (11.27)$$

которая подчиняется закону нормального распределения. Среднее квадратическое отклонение величины z вычисляют по формуле

$$\sigma(z) = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (11.28)$$

Значения величин z по вычисленным из опыта значениям коэффициента корреляции r могут быть вычислены непосредственно по формуле или по таблицам, приведенным в прил. 7. Применение критерия Фишера покажем на примере.

Пример. В табл. 8 помещены результаты испытания СВВ-1 в 1955 г. Определить коэффициент корреляции, характеризующий тесноту связи между измеренными длинами линий D и их ошибками $|m_{20}|$, и оценить точность коэффициента корреляции, используя критерий Фишера. На основании данных табл. 8 имеем

$$\sigma'(D) = 2,25; \quad \sigma'(m) = 1,85; \quad r = 0,60; \quad z = 0,69$$

(найдем по таблицам прил. 7)

$$\sigma(z) = \frac{1}{\sqrt{9-3}} = 0,41.$$

Результаты наблюдений		Вычисление				
$D, \text{ км}$	$ m_i , \text{ см}$	$\delta D = D_i - \bar{D}$	$\delta m = m_i - \bar{m}$	δD^2	δm^2	$\delta D \delta m$
3,0	2,0	-2,6	-2,2			
3,6	5,0	-2,0	+0,8			
4,2	3,0	-1,4	-1,2			
4,6	4,0	-1,0	-0,2			
5,6	6,0	0,0	+1,8			
5,7	3,0	+0,1	-1,2			
5,8	3,0	+0,2	-1,2			
8,0	4,0	+2,4	-0,2			
10,2	8,0	+4,6	+3,8			
$\bar{D} = 5,6$	$ \bar{m} = 4,2$	-7,0 +7,3	-6,2 +6,4	$\Sigma 40,7$	27,6	+22,6

С вероятностью 0,68 ($t = 1$) величина z может принять значения

$$0,28 \leq z \leq 1,10. \quad (\text{II.29})$$

По той же таблице (прил. 7), пользуясь крайними значениями z из (II.29), находим соответствующие им значения коэффициента корреляции

$$+0,27 \leq r \leq +0,80. \quad (\text{II.30})$$

Так как доверительный интервал, равный $0,80 - 0,27 = 0,53$, меньше абсолютного значения коэффициента корреляции (0,60), то наличие линейной корреляции можно считать установленным. Разумеется, при $n = 9$ вопрос нельзя считать решенным достаточно надежно. Вообще при $n < 20$ трудно говорить о надежном установлении корреляционных связей.

Для вывода эмпирической формулы, отражающей прямолинейную корреляционную связь между переменными X и Y , применяется уравнение

$$y_i - \bar{y} = \rho_{Y/X} (x_i - \bar{x}), \quad (\text{II.31})$$

где $\rho_{Y/X}$ — коэффициент регрессии Y на X , вычисляемый по формуле

$$\rho_{Y/X} = r \frac{\sigma'(Y)}{\sigma'(X)}.$$

При прямолинейной корреляционной связи между переменными существует уравнение регрессии, имеющее вид

$$x_i - \bar{x} = \rho_{X/Y} (y_i - \bar{y}), \quad (\text{II.32})$$

где $\rho_{X/Y}$ — коэффициент регрессии X на Y , равный

$$\rho_{X/Y} = r \frac{\sigma'(X)}{\sigma'(Y)}.$$

Однако во многих случаях уравнение вида (II.32), если исследовалась зависимость Y от X , не имеет смысла; например, никто не станет по ошибкам измерений m_D (в рассмотренном выше примере) определять расстояние D .

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов регрессии при большом n вычисляют по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\rho_{Y/X}) &= \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}} \\ \sigma(\rho_{X/Y}) &= \frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.33})$$

Уравнение (II.31) при практическом использовании целесообразно привести к виду

$$\bar{y}_i = \rho_{Y/X} x_i + (\bar{y} - \rho_{Y/X} \bar{x}). \quad (\text{II.34})$$

Из формулы (II.34) легко видеть, что коэффициент регрессии — это тангенс угла наклона прямой, а постоянное слагаемое $(\bar{y} - \rho_{Y/X} \bar{x})$ — это отрезок, отсекаемый этой прямой на оси ординат.

Пример. В табл. 9 приведены расстояния D , измеренные светодальномером СВВ-1, и ошибки этих сторон Δ .

По данным табл. 9 вычислить коэффициент корреляции, коэффициент регрессии, оценить их точность с вероятностью $\beta = 0,68$ и составить уравнение регрессии.

По данным, полученным при вычислении в табл. 9, имеем

$$\sigma'(D) = \sqrt{\frac{61,47}{19}} = 1,80; \quad \sigma'(\Delta) = \sqrt{\frac{39,20}{19}} = 1,42;$$

коэффициент корреляции по (II.30) равен

$$r = \frac{+38,54}{19 \cdot 1,80 \cdot 1,42} = +0,79.$$

Оценим надежность коэффициента корреляции. Так как число наблюдений n сравнительно небольшое, для оценки надежности применим критерий Фишера z .

По таблице прил. 7, пользуясь коэффициентом корреляции $r = +0,79$ как аргументом, находим

$$z = 1,071.$$

Оценим надежность z по формуле (II.28)

$$\sigma(z) = \frac{1}{\sqrt{20-3}} = 0,243.$$

С вероятностью 0,68 ($t = 1$) величина z может принять значения

$$\begin{aligned} 1,071 - \sigma'(z) &\leq z \leq 1,071 + \sigma'(z); \\ 0,828 &\leq z \leq 1,314. \end{aligned}$$

Таблица 9

Результаты наблюдений		Вычисления				
D , км	$ \Delta $, см	δD	$\delta \Delta$	δD^2	$\delta \Delta^2$	$\delta D \cdot \delta \Delta$
8,7	7,0	+3,8	+3,2	14,44	10,24	+12,16
3,7	3,0	-1,2	-0,8	1,44	0,64	+0,96
6,0	4,0	+1,1	+0,2	1,21	0,04	-0,22
3,3	3,0	-1,6	-0,8	2,56	0,64	+1,28
5,1	4,0	+0,2	+0,2	0,04	0,04	+0,04
6,1	4,0	+1,2	+0,2	1,44	0,04	+0,24
2,7	3,0	-2,2	-0,8	4,84	0,64	+1,76
4,9	4,0	0,0	+0,2	0,0	0,04	0,00
3,1	4,0	-1,8	+0,2	3,24	0,04	-0,36
3,7	2,0	-1,2	-1,8	1,44	3,24	+2,16
5,7	6,0	+0,8	+2,2	0,64	4,84	+1,76
4,9	5,0	0,0	+1,2	0,0	1,44	0,00
5,6	3,0	+0,7	-0,8	0,49	0,64	-0,56
7,6	4,0	+2,7	+0,2	7,29	0,04	+0,54
4,2	3,0	-0,7	-0,8	0,49	0,64	+0,56
2,0	2,0	-2,9	-1,8	8,41	3,24	+5,22
4,0	2,0	-0,9	-1,8	0,81	3,24	+1,62
6,5	5,0	+1,6	+1,2	2,56	1,44	+1,92
7,2	6,0	+2,3	+2,2	5,29	4,84	+5,06
2,7	2,0	-2,2	-1,8	4,84	3,24	+3,96
4,9	3,80	+14,4 -14,7	+11,2 -11,2	$\Sigma = 61,47$	39,20	+38,54
		$\Sigma = -0,3$	0,0			

На таблицы прил. 7 находим соответствующие крайним значениям z (0,83 и 1,31) значения коэффициента корреляции

$$\pm 0,68 < r < \pm 0,86. \quad (11.35)$$

Следовательно, с вероятностью $\beta = 0,68$ действительный коэффициент корреляции может быть заключен между $+0,68$ и $+0,86$. Так как доверительный интервал для r меньше абсолютного значения r ($0,86 - 0,68 < 0,79$), то прямолинейную корреляционную связь можно считать установленной.

Составим уравнение регрессии Δ на D

$$\Delta_i - \bar{\Delta} = r_{\Delta/D} (D_i - \bar{D}),$$

$$\Delta_i = r_{\Delta/D} D_i + (\bar{\Delta} - r_{\Delta/D} \bar{D}). \quad (11.36)$$

Подставляя в (11.36) численные значения r , σ_D , $\bar{\Delta}$, $\bar{D}$, получаем

$$\Delta_i = +0,79 \frac{1,42}{1,80} D_i + \left(3,8 - 0,79 \frac{1,42}{1,80} 4,9 \right);$$

$$\Delta_i = (0,62 D_i + 0,76) \text{ см}$$

(D_i — расстояния в километрах).

Оценим приближенно надежность коэффициента регрессии $\rho_{\Delta/D} = 0,62$

$$\sigma(\rho_{\Delta/D}) = \left(\frac{\sigma'(\Delta)}{\sigma'(D)} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}} \right),$$

$$\sigma(\rho_{\Delta/D}) = \left(\frac{1,42}{1,80} \sqrt{\frac{1-0,79^2}{20-3}} \right) = 0,12.$$

Следовательно,

$$\rho_{\Delta/D} \pm \sigma(\rho_{\Delta/D}) = 0,62 \pm 0,12$$

с вероятностью $\beta = 0,68$.

Глава III

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

§ 26. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Известно, что любые измерения, как бы тщательно они ни выполнялись, всегда сопровождаются ошибками, т. е. отклонениями измеренных значений от истинных. Совершенствование методики измерений и конструкций измерительных инструментов и приборов, повышение квалификации наблюдателя может повысить точность измерений, т. е. уменьшить отклонения получаемых результатов от их истинных значений. Получить же совершенно безошибочные результаты измерений невозможно. Поэтому в практике измерения производят таким образом, чтобы результаты получились с некоторой заданной точностью. Понятие «заданная точность» должно сопровождаться определенными численными критериями, которые должны представлять собой вероятностную характеристику возможных отклонений полученных результатов обработки измерений от их истинных значений. Основными задачами теории ошибок измерений являются: установление указанных критериев, разработка способов их получения и оценки.

Основные вопросы и ряд частных вопросов, рассматриваемых в теории ошибок измерений, можно сформулировать следующим образом:

1) изучение законов возникновения и распределения ошибок измерений и вычислений;

2) установление допусков, т. е. критериев, указывающих на наличие недопустимых отклонений результатов измерений (грубых ошибок);

3) отыскание наиболее точного по вероятности значения определяемой величины из результатов ее многократных измерений;

4) предвычисление ожидаемой точности и оценка точности полученных результатов измерений;

5) характеристика точности окончательных значений определяемых величин по результатам математической обработки измерений.

§ 27. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ

Все величины, с которыми имеют дело в геодезии, можно разделить на **измеренные**, приближенные значения которых получают в результате измерений, и **вычисленные**, т. е. найденные путем вычислений как функции измеренных величин.

Под **измерением** какой-либо величины понимают сравнение ее с однородной с ней величиной, принятой в качестве единицы меры. Это сравнение обычно производится путем выполнения ряда операций, зачастую довольно сложных. К такому ряду операций относятся: эталонирование мерного прибора, визирование, совмещение пикетсов, производство отсчетов и т. д. Под **результатом измерения** понимают конечный результат, полученный в итоге всех операций.

Для обнаружения промахов, а также повышения точности результатов измерения в геодезии всегда бывают многократными.

По точности результаты измерений разделяют на **равноточные** и **неравноточные**.

Под **равноточными** понимают однородные результаты, полученные при измерениях одним и тем же инструментом (или разными инструментами, но одного и того же класса точности), одним и тем же или равноценными методами, одинаковым числом приемов и в одинаковых условиях.

Неравноточными называют результаты измерений, если указанные условия равноточности не соблюдены.

Примеры равноточных измерений: 1) измерение горизонтальных или вертикальных углов теодолитами одинаковой точности, одинаковым способом и одним и тем же числом приемов; равноточно измеряют углы в триангуляции одного и того же класса; 2) измерение длины линии одним и тем же мерным прибором, одинаковым способом; 3) измерение атмосферного давления барометрами одной и той же конструкции и точности, по одной и той же программе.

Заметим, что в последнем примере речь идет об измерении переменной величины, поэтому результаты измерений должны быть отнесены к определенным моментам времени.

Примеры неравноточных измерений: 1) измерение углов одним и тем же способом и числом приемов, но инструментами разной точности; 2) измерение углов одинаковым способом, одинаковыми инструментами, но разным числом приемов; 3) измерение длины линии мерными приборами разной точности, например, 20-метровой стальной лентой по земле и 48-метровой стальной подвесной лентой. В более сложных случаях о равноточности или неравноточности измерений судят по полученным из опыта числовым критериям точности.

Очевидно, в отношении точности сравнивать между собой можно измерения только однородных величин, т. е. одинаково именованных.

Важное значение в вопросах математической обработки измерений имеют понятия **необходимых** и **избыточных** измеренных величин.

Для решения геодезических задач обычно необходимо измерить несколько величин. Например, для определения всех шести элементов плоского треугольника нужно знать не менее трех его элементов, в числе которых должна быть хотя бы одна сторона. Подобно этому примеру для решения какой-либо геодезической задачи на местности нужно измерить некоторый минимум величин.

Число минимально необходимых для решения поставленной задачи измеренных величин будем называть **числом необходимых величин**; часто его называют «числом необходимых измерений», но такое название нельзя признать правильным, если учесть, что каждая величина всегда измеряется много раз. Поэтому число измерений, как правило, больше числа необходимых величин. Заметим, что понятие «необходимые величины» условно, так как в качестве таковых в одной и той же задаче можно выбрать различные комбинации измеренных величин. Например, в плоском треугольнике можно взять: три стороны или одну сторону и два угла и т. д.

Разность числа всех измеренных и числа необходимых величин называют **числом избыточных величин**. По указанной выше причине неправильно называть его «числом избыточных измерений».

В геодезических работах избыточные измеренные величины обязательны: они позволяют обнаруживать промахи в измерениях и вычислениях и повышают точность результатов определений искомых величин.

При измерении одной величины необходимо одно измерение, остальные — избыточные.

§ 28. ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Как указано выше, любые измерения сопровождаются ошибками, т. е. отклонениями результатов измерений от истинных значений измеренных величин.

В чем причина появления этих ошибок?

В процессе измерения, кроме объекта измерения, участвуют наблюдатель, инструменты и приборы, внешняя среда. Весь этот комплекс условий непрерывно изменяется и учесть эти изменения безошибочно не представляется возможным. Поэтому результаты измерений и отклоняются от истинных значений, причем каждый раз по-разному.

Называя совокупность факторов, влияющих на результаты измерений, т. е. объект измерений, наблюдателя, инструменты и приборы, внешнюю среду, **условиями измерений**, можно сказать, что колебания результатов измерений отражают собой непрерывные изменения условий измерений.

Для изучения свойств (закономерностей появления) ошибок измерений целесообразнее всего воспользоваться истинными значениями измеряемых величин. В качестве истинного можем принять известное нам с высокой точностью, т. е. с пренебрежимо малой ошибкой

по сравнению с ошибками самих измерений, значение измеряемой величины. Некоторые функции измеренных величины могут быть нам известны и безошибочно (например, сумма углов в треугольнике). Обозначим истинное значение измеряемой величины через X , результаты измерения через x_i . Разности результатов измерений и истинных значений, в смысле «измеренное минус истинное», называют п с т и н н ы м и о ш б к а м и измерений θ_i , т. е.

$$\theta_i = x_i - X. \quad (III.1)$$

Имея истинные ошибки в большом количестве, можно изучать закономерности их возникновения. Однако в большинстве случаев практики, если не считать редких случаев специальных исследований, истинное значение измеряемой величины, а следовательно, и истинные ошибки остаются неизвестными. Поэтому для изучения свойств ошибок измерений чаще применяют косвенные методы исследований, например, изучение законов распределения результатов измерений и законов распределения невязок.

Причинами возникновения неизбежных ошибок измерений являются: влияние внешних условий, неточности изготовления и юстировки инструментов и приборов, неточности выполнения операций наблюдателем и, наконец, не поддающиеся учету непрерывные изменения всех этих условий измерений. В свою очередь, каждый из указанных источников ошибок есть результат воздействия многих факторов. При этом каждый из этих факторов оказывает малое влияние на результат измерения по сравнению с суммарным влиянием всех факторов. Так, например, на результат измерения горизонтального направления со столбика геодезического сигнала действуют следующие источники ошибок: многократное преломление лучей, идущих от визирного цилиндра к глазу наблюдателя, неравномерное освещение объекта визирования, неустойчивость сигнала, вращение его вследствие нагревания солнцем («кручение»), неустойчивость теодолита на столбике сигнала и в подъемных винтах, температурные и другие изменения в инструменте, ошибки юстировки инструмента, ошибки деления горизонтального круга, ошибки отсчетного приспособления, личные ошибки наблюдателя при визировании и отсчитывании по кругу, ошибки определения элементов центрировки и редукции и т. д. Каждый из указанных источников ошибок, как правило, оказывает незначительное влияние на окончательный результат по сравнению с суммарным влиянием всех источников и изменяет свое действие от приема к приему.

В свою очередь, каждый из перечисленных источников ошибок может быть подразделен на ряд более мелких источников. Например, ошибка юстировки инструмента подразделяется на коллимационную ошибку, ошибку наклона горизонтальной оси, ошибку наклона вертикальной оси, ошибку привелирования инструмента и т. д.

Аналогичная картина вырисовывается при других геодезических измерениях.

Таким образом, отклонение измеренного значения от точного есть результат воздействия большого числа причин, каждая из ко-

торых, если иметь в виду высокоточные измерения, сказывается пренебрегаемо мало на результате отдельного измерения по сравнению с суммарным влиянием всех причин. Поэтому на основании центральной предельной теоремы Ляпунова можно утверждать, что результаты измерений должны подчиняться нормальному закону распределения. Опыт полностью подтверждает это заключение.

Итак, результаты измерений одной величины можно рассматривать как отдельные значения некоторой непрерывной случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения. Имея это в виду, для характеристики свойств результатов измерений необходимо знать основные параметры распределения указанной случайной величины: математическое ожидание и стандарт. Как известно, приближенные значения и доверительные границы для этих параметров с заданной доверительной вероятностью могут быть получены из наблюдений. В этом отношении затруднений не возникает. Однако для оценки точности среднего арифметического из результатов многократных измерений одной величины необходимо указать доверительные границы для ее истинного значения. Для получения доверительных границ, в пределах которых с заданной доверительной вероятностью находится истинное значение определяемой величины, требуется знать, кроме характеристики возможных отклонений результатов измерений от их математического ожидания, еще характеристику возможного отклонения математического ожидания от истинного значения измеряемой величины. Последнее составляет главную трудность решения задачи. В связи с этим возникает необходимость более подробного рассмотрения характера и свойств различных источников ошибок.

§ 29. КЛАССИФИКАЦИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

По источникам возникновения ошибки измерений подразделяют на инструментальные, внешние, или ошибки среды, и личные.

Эта классификация имеет большое значение для дисциплин, изучающих приборы и методы измерений. Для теории ошибок она имеет второстепенное значение. Значительная же роль в теории ошибок принадлежит классификации ошибок по закономерностям их появления.

Грубые ошибки. Теория математической обработки измерений не рассматривает грубых ошибок, вызванных промахами или просчетами наблюдателя, неисправностями инструментов и приборов, резким ухудшением внешних условий и пр. Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, необходимо выявлять и отбрасывать. Вопросы отбраковки измерений требуют специального рассмотрения (см. § 33 и 52).

Случайные и систематические ошибки. Из множества элементарных ошибок, составляющих в сумме общую ошибку измерения, выделяют две основные категории ошибок:

случайные и систематические. Так как элементарные ошибки при повторении измерений, как правило, изменяют свою величину, то, в свою очередь, можно рассматривать их как значения случайных величин, имеющих свои параметры распределения; математическое ожидание и стандарт.

Элементарные ошибки, представляющие собой значения случайных величин с математическим ожиданием, пренебрегаемо мало отличающимся от нуля, называют *случайными*.

Элементарные ошибки, представляющие собой значения случайных величин, имеющих математические ожидания, заметно отличающиеся от нуля, называют *систематическими*.

Разумеется, указанные признаки случайных и систематических ошибок в известной мере условны и резко разграничить их невозможно.

В частности, систематические ошибки могут быть постоянными, т. е. такими, которые сохраняют при измерениях и знак (направление), и величину*.

С изменением условий некоторые источники систематических ошибок могут превращаться в источники случайных ошибок и, наоборот, источники ошибок случайных — в источники систематических, вследствие чего изменяются и параметры распределения элементарных ошибок.

Источников случайных ошибок всегда значительно больше, чем систематических, но действие каждого из них, как правило, невелико. При высокоточных измерениях главное внимание должно быть уделено борьбе с влиянием систематических ошибок (см. § 38—39 и главу IV). Здесь приведем для иллюстрации лишь несколько примеров систематических ошибок.

1. Ошибки в измеренном значении длины линии на местности из-за отклонения мерной ленты от створа.

2. Ошибка в определении длины мерной ленты (ошибка компарирования). Эта ошибка постоянна и действует пропорционально измеренному расстоянию.

3. Боковая рефракция, среднее значение которой отклоняет результат измерения направления. Однако в геодезической сети, например, действие боковой рефракции на разные направления различно и для сети в целом носит в основном случайный характер.

4. Систематические ошибки нанесения штрихов лимба теодолита. При перестановках лимба эти ошибки приобретают периодический характер и их влияние на среднее значение из приемов измерения угла в значительной мере ослабляется.

5. Ошибки определения поправок за температуру мерной стальной ленты, расположенной на земле. Обычно измеряют температуру воздуха и принимают ее за температуру ленты, допуская тем самым

* Формально рассуждая, необходимо было бы рассматривать и систематические ошибки с математическим ожиданием, равным нулю, как ошибки, возникающие по периодическому закону (например, ошибки диаметров лимба). Однако ошибки такого рода практически можно относить к категории случайных, тем более что строгой периодичности в них, как правило, нет.

систематическую по знаку ошибку в поправке за температуру ленты. Такие ошибки называют односторонними.

В качестве примеров случайных ошибок можно привести ошибку отсчитывания по угломерному кругу; часть ошибки взвешивания, обусловленную колебаниями изображения; случайные ошибки напесення штрихов лимба; влияние вибрации сигнала; ошибки отсчитывания по инверсионной рейке; ошибки за округление чисел при вычислениях и при отсчитывании по шкалам и т. п.

§ 30. КРИТЕРИИ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Для оценки точности отдельного измерения некоторой величины необходимо определить, в вероятностном смысле, возможные отклонения результатов измерения этой величины от ее истинного значения. Отклонение измеренного значения какой-либо величины от ее истинного значения будем выражать посредством двух величин: отклонения измеренного значения от математического ожидания и отклонения математического ожидания от истинного значения. Первое отклонение — следствие действия случайных ошибок, а второе — систематических. Соответственно для оценки точности полученного результата требуется знать две характеристики. Если же измерения содержат только случайные ошибки, достаточно первой характеристики.

Известно (см. § 28), что результаты измерений, если они получены примерно в равных условиях, подчиняются нормальному закону распределения. Что касается математического ожидания результатов измерений, то при практически неизменном комплексе условий оно будет постоянной величиной, поэтому постоянно и его отклонение от истинного значения, причем это отклонение обусловлено систематическими ошибками. Отсюда следует, что для ослабления влияния источников систематических ошибок следует изменять соответственно условия измерений, например, выполнять серии измерений разными приборами, в различных внешних условиях, разными наблюдателями.

Для установления закономерностей отклонений математических ожиданий от истинных значений и ослабления влияния этих отклонений на точность определяемых величин необходимо глубоко знать свойства всех факторов, участвующих в измерениях. Эта задача может быть успешно решена лишь специалистом той области науки и техники, которая занимается наблюдениями.

Опыт показывает, что отклонения математических ожиданий измеренных значений от истинных при многократном и разнообразном изменении условий, как правило, подчиняются нормальному закону распределения, и в среднем эти отклонения в значительной степени взаимно компенсируются. Поэтому отклонение математического ожидания от истинного значения измеренной величины при данном комплексе условий можно считать конкретным значением случайной величины с математическим ожиданием, близким нулю, если учесть

в виду все возможные изменения комплекса условий *. Таким образом, отклонения результатов измерения от истинного значения можно рассматривать как значения суммы двух случайных величин: отклонения результата измерения от его математического ожидания и отклонения математического ожидания от истинной величины.

1. Средняя квадратическая ошибка измерения

Введем обозначения:

- θ — случайная величина, характеризующая возможные отклонения результата одного измерения от истинного значения X измеряемой величины (истинная ошибка);
- x — случайная величина, характеризующая возможные результаты измерений при некотором комплексе условий;
- $\delta = M(x) - X$ — случайная величина, характеризующая возможные отклонения математического ожидания от истинной величины;
- $\xi = x - M(x)$ — случайная величина, характеризующая отклонения результатов измерений от математического ожидания при неизменном комплексе условий.

Отсюда

$$\theta = x - X = x - M(x) + M(x) - X,$$

или

$$\theta = \xi + \delta. \quad (III.2)$$

В качестве основной характеристики точности измерений в геодезии принята так называемая средняя квадратическая ошибка m , точное значение которой соответствует формуле

$$m^2 = M(\theta^2). \quad (III.3)$$

Принимая во внимание формулу (III.2), можно написать

$$m^2 = M(\theta^2) = M\{(\xi + \delta)^2\} = M(\xi^2 + \delta^2 + 2\xi\delta);$$

$$m^2 = M(\xi^2) + M(\delta^2) + 2M(\xi)M(\delta).$$

Так как

$$M(\xi) = 0, \quad (III.4)$$

то

$$m^2 = M(\xi^2) + M(\delta^2). \quad (III.5)$$

Первое слагаемое правой части равенства (III.5) есть дисперсия, т. е. квадрат стандарта случайной величины ξ , второе — квадрат стандарта случайной величины δ , поскольку $M(\delta) \approx 0$.

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} M(\xi^2) &= m_{\Delta}^2 \\ M(\delta^2) &= m_{\delta}^2 \end{aligned} \right\}, \quad (III.6)$$

* При исследовании этого вопроса подвергаются анализу и результаты наблюдений разных физических величин того же рода.

выражение (III.5) перепишем

$$m^2 = m_{\Delta}^2 + m_{\delta}^2 \quad (\text{III.7})$$

$$m = \sqrt{m_{\Delta}^2 + m_{\delta}^2}. \quad (\text{III.8})$$

Средняя квадратическая ошибка одного измерения m характеризует совместное влияние на него m_{Δ} — случайных ошибок и влияние m_{δ} — систематических ошибок измерений.

На основании формулы (III.3) приближенное значение средней квадратической ошибки m можно вычислять по формуле

$$m \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \theta_i^2}{n}}, \quad (\text{III.9})$$

где n — число равнооточных измерений величины X .

Приближенное значение величины m_{Δ} можно получить по формуле

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad (\text{III.10})$$

где x_i — отдельные измерения, $i = 1, 2, \dots, n$;

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Для m_{δ} на основании выражения (III.7) можно написать

$$m_{\delta} = \sqrt{m^2 - m_{\Delta}^2}. \quad (\text{III.11})$$

Вопросы определения величин m , m_{Δ} и m_{δ} являются одними из основных в теории ошибок измерений.

2. Средняя и вероятная ошибки и их связь со средней квадратической ошибкой

Кроме основной характеристики m_{Δ} , характеризующей влияние случайных ошибок на результаты измерений, иногда применяют дополнительные характеристики, а именно среднюю ошибку и вероятную ошибку.

Средней ошибкой θ называется математическое ожидание абсолютных значений отклонений ξ результатов измерений какой-либо величины от математического ожидания для этих результатов, т. е.

$$\theta = M(|\xi|). \quad (\text{III.12})$$

Приближенное значение средней ошибки находят как среднее арифметическое из абсолютных значений отклонений ϑ результатов измерений от их среднего арифметического, т. е.

$$\vartheta = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{n}, \quad (III.13)$$

где n — число измерений; $v_i = x_i - \bar{x}$.

Установим связь между величинами ϑ и m_Δ .

По определению

$$\vartheta = M(|\xi|).$$

Обозначив

$$\frac{\xi}{m_\Delta} = t, \quad (III.14)$$

напишем

$$M\left(\frac{|\xi|}{m_\Delta}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Возьмем интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt &= - \int_0^\infty de^{-\frac{1}{2}t^2} = \\ &= - \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} = - \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{t^2}{2}}} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{t^2}{2}}} \right\} = \\ &= -(0-1)=1, \text{ т. е. } \int_0^\infty t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1. \end{aligned} \quad (III.15)$$

Следовательно,

$$M\left(\frac{|\xi|}{m_\Delta}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (III.16)$$

Но

$$M\left(\frac{|\xi|}{m_\Delta}\right) = \frac{1}{m_\Delta} M(|\xi|) = \frac{\vartheta}{m_\Delta}, \quad (III.17)$$

откуда получим

$$\vartheta = m_\Delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.80 m_\Delta \quad (III.18)$$

и

$$m_\Delta = \vartheta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.25 \vartheta. \quad (III.19)$$

Вероятной ошибкой называют абсолютную величину, вероятность которой определяется формулой

$$\Phi\left(\frac{r}{m_\Delta}\right) = 0.5, \quad (III.20)$$

где Φ — интеграл вероятностей, значения которого даны в таблице прил. 2.

Потенцированием по величине $\Phi(t) = 0,5$ получаем

$$t = \frac{r}{m_{\Delta}} = 0,6745 \dots$$

откуда

$$r \approx 0,67 m_{\Delta}. \quad (\text{III.21})$$

Приближенно вероятную ошибку можно получить следующим образом.

Уклонение v_i результатов измерений от среднего арифметического располагают в ряд по возрастанию абсолютных значений v_i . После этого величина $|v_i|$, находящаяся в середине этого ряда, будет приближенным значением вероятной ошибки r' . Это следует из формулы (III.20), если вероятность заменить относительной частотой. Если число наблюдений четное, то r' получают как среднее из двух величин $|v|$, расположенных в середине ряда. Величину r' , полученную указанным эмпирическим путем, называют еще *срединной ошибкой*.

Соотношения (III.18) и (III.21) чисто теоретические. Степень соблюдения этих равенств зависит от числа измерений и является одним из признаков соответствия действительного распределения нормальному, так как интеграл вероятностей взят для нормального распределения.

§ 31. АБСОЛЮТНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ОШИБКИ

А б с о л ю т н ы м и о ш и б к а м и называют среднюю квадратическую m , среднюю θ , вероятную r , истинную θ .

О т н о с и т е л ь н о й о ш и б к о й называют отношение соответствующей абсолютной ошибки к полученному значению измеренной величины. **О т н о с и т е л ь н у ю о ш и б к у** обычно выражают в виде дроби с числителем, равным единице. Относительную ошибку определяют по соответствующей абсолютной ошибке.

Пусть x — полученное значение некоторой величины.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{m}{x} &= \frac{1}{N_1} \text{ — средняя квадратическая относительная ошибка этой величины;} \\ \frac{\theta}{x} &= \frac{1}{N_2} \text{ — средняя относительная ошибка;} \\ \frac{r}{x} &= \frac{1}{N_3} \text{ — вероятная относительная ошибка;} \\ \frac{\theta}{x} &= \frac{1}{N_4} \text{ — истинная относительная ошибка.} \end{aligned}$$

Знаменатель относительной ошибки целесообразно округлять до двух значащих цифр с нулями.

Примеры.

$$m_x = 0,25 \text{ м}, \quad x = 196,0 \text{ м}; \quad \frac{m_x}{x} = \frac{1}{780};$$

$$m_x = 0,17 \text{ м}, \quad x = 484,5 \text{ м}; \quad \frac{m_x}{x} = \frac{1}{2800};$$

$$m_x = 0,037 \text{ м}, \quad x = 810,314 \text{ м}; \quad \frac{m_x}{x} = \frac{1}{22000}.$$

§ 32. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ m_Δ

Рассмотрим вопрос оценки точности приближенного значения средней квадратической ошибки в зависимости от числа измерений n .

Обозначим:

m_m — искомое значение средней квадратической ошибки приближенного значения m_Δ ;

m_Δ^0 — истинное значение средней квадратической ошибки, соответствующее данным условиям измерений;

m_Δ — приближенная средняя квадратическая ошибка, вычисленная по данным результатам n измерений.

Истинная ошибка величины m_Δ

$$\Delta m_\Delta = m_\Delta - m_\Delta^0.$$

Эта ошибка будет случайной, так как

$$M(m_\Delta) = m_\Delta^0, \quad M(\Delta m_\Delta) = 0.$$

На основании определения (III.3) напишем

$$m_m^2 = M(\Delta m_\Delta^2) = M\{(m_\Delta - m_\Delta^0)^2\},$$

или

$$m_m^2 = M(m_\Delta^2 - 2m_\Delta m_\Delta^0 + m_\Delta^{02}) = M(m_\Delta^2) - 2m_\Delta^0 M(m_\Delta) + m_\Delta^{02} =$$

$$= M(m_\Delta^2) - 2m_\Delta^0 m_\Delta^0 + m_\Delta^{02} = M(m_\Delta^2) - m_\Delta^{02}, \text{ т. е.}$$

$$m_m^2 = M(m_\Delta^2) - m_\Delta^{02}. \quad (\text{III.22})$$

Предположим, что значения m_Δ вычисляли по формуле (III.19)

$$m_\Delta \approx 1,250 \approx 1,25 \frac{\sum_{i=1}^n |\xi_i|}{n}.$$

Тогда формулу (III.22) можно переписать

$$m_m^2 = 1,25^2 M (\vartheta^2) - m_\Delta^0{}^2. \quad (\text{III.23})$$

Но

$$M (\vartheta^2) = M \left\{ \frac{\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| \right)^2}{n^2} \right\} = \frac{1}{n^2} M \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| \right)^2 \right\}.$$

Найдем

$$\begin{aligned} M \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| \right)^2 \right\} &= M \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(|\xi_i| \sum_{j=i+1}^n |\xi_j| \right) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n M (\xi_i^2) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(M |\xi_i| \cdot M \sum_{j=i+1}^n |\xi_j| \right) \approx n \cdot m_\Delta^2 + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(M |\xi_i| \sum_{j=i+1}^n M |\xi_j| \right) \approx n \cdot m_\Delta^2 + n(n-1) \vartheta^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$M \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| \right)^2 \right\} \approx n m_\Delta^2 + n(n-1) \vartheta^2.$$

Теперь равенство (III.23) примет вид

$$\begin{aligned} m_m^2 &= 1,25^2 \frac{1}{n^2} \{ n m_\Delta^2 + n(n-1) \vartheta^2 \} - m_\Delta^0{}^2 = \\ &= 1,25^2 \left(\frac{m_\Delta^2}{n} + \frac{n-1}{n} \vartheta^2 \right) - m_\Delta^0{}^2, \end{aligned}$$

а принимая во внимание выражение (III.19),

$$m_m^2 = 1,25^2 \frac{m_\Delta^2}{n} + \frac{n-1}{n} m_\Delta^2 - m_\Delta^0{}^2.$$

Заменяя неизвестное нам значение m_Δ^0 на его приближенное значение m_Δ , получаем

$$\begin{aligned} m_m^2 &\approx 1,25^2 \frac{m_\Delta^2}{n} + \frac{n-1}{n} m_\Delta^2 - m_\Delta^2 = \\ &= \frac{m_\Delta^2}{n} (1,25^2 - 1), \end{aligned}$$

т. е.

$$m_m^2 = \frac{0,56 m_\Delta^2}{n},$$

или

$$m_m \approx \frac{0,75 m_\Delta}{\sqrt{n}}. \quad (\text{III.24})$$

$$m_m \approx \frac{m_\Delta}{\sqrt{2n}}. \quad (III.25)$$

В практике часто пользуются формулой (III.25). Мы будем использовать более точную формулу (III.24). При $n \geq 20$ формула (III.24) позволяет установить доверительные границы сразу для стандарта, не вычисляя их предварительно для дисперсии, как это сделано в § 21. При этом пользуются нормальным законом распределения. Для примера, приведенного в § 21, получим

$$m_{\sigma'} = \frac{0.75 \times 0.253}{\sqrt{20}} = 0.0423.$$

Доверительными границами при $\beta = 0,8$ (т. е. $t = 1,28$) будут

$$0.253 - 1,28 \times 0.0423 = 0.253 - 0.054 \approx 0.20$$

и

$$0.253 + 0.054 \approx 0.31.$$

Практически получен тот же ответ, что и в § 21.

Однако при $n < 20$ следует пользоваться распределением χ^2 (см. § 21).

Формулу (III.25) используют для определения необходимого числа значащих цифр в вычисленном значении σ' и m_Δ . Так, например, если приближенное значение стандарта $\sigma' = 1,66$ получено из 50 наблюдений, то $m_{\sigma'} \approx \frac{1.7}{\sqrt{100}} = 0.17$. Очевидно, что нет смысла для σ' сохранять сотые доли и следует писать $\sigma' = 1.7$. Заметим, кстати, что почти во всех случаях практики для приближенного значения стандарта и для средней квадратической ошибки достаточно сохранять две значащие цифры.

§ 33. ИССЛЕДОВАНИЕ РЯДОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Для определения точности результатов измерений и закономерностей распределения их ошибок, полученных в тех или иных условиях, проводят исследования рядов измерений. При этом ставится эксперимент или анализируются результаты производственных работ.

Исследуемый ряд измерений может относиться как к многократным измерениям одной величины, так и к измерениям нескольких однородных величин, выполненных примерно в одинаковых условиях.

Конкретными задачами исследования ряда измерений являются, во-первых, отбраковка грубых измерений, во-вторых, определение точности одного измерения и, если возможно, характеристик систематических влияний и, наконец, определение критериев согласия с нормальным распределением. Заметим, что первая и вторая задачи тесно связаны между собой.

Полное исследование рядов измерений имеет смысл лишь при наличии достаточно большого числа результатов, во всяком случае,

при их числе $n \geq 50$. При $n < 50$ можно решить лишь частные задачи исследования.

Если истинные значения измеренных величин неизвестны, то из исследования ряда измерений можно вывести суждение о влиянии лишь случайных ошибок, параметры которых характеризуются отклонениями результатов измерений от среднего арифметического. Влияние же систематических ошибок в этом случае полностью выявить нельзя.

Если истинные значения измеренных величин известны, то проводят исследование ряда истинных ошибок измерений, которое рассмотрим в первую очередь.

Для выявления измерений, содержащих грубые ошибки, необходимо знать среднюю квадратическую ошибку m одного измерения

$$m^2 = m_{\Delta}^2 + m_{\delta}^2,$$

где m_{Δ} — средняя квадратическая ошибка, характеризующая влияние случайных ошибок;

m_{δ} — средняя квадратическая ошибка, характеризующая влияние систематических ошибок.

В этом случае применяют правило утроенной средней квадратической ошибки (правило «трех сигм»), по которому ошибки, превышающие по абсолютной величине $3m$, следует считать грубыми. Значение $3m$ называют предельной допустимой ошибкой. Если средняя квадратическая ошибка m неизвестна, то для выявления грубых ошибок поступают следующим образом.

1. Вычисляют среднее значение $\bar{\theta}$ из ряда истинных ошибок θ_i

$$\bar{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \theta_i}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

в отклонения

$$\xi_i = \theta_i - \bar{\theta}. \quad (III.26)$$

Заметим, что

$$\xi_i = x_i - \bar{x},$$

где x_i — результаты измерений, а $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$. Действительно, обозначив через X истинное значение измеренной величины, напишем

$$\theta_i - \bar{\theta} = (x_i - X) - \frac{\sum (x_i - X)}{n} = (x_i - X) - (\bar{x} - X) = x_i - \bar{x}.$$

2. Вычисляют приближенное значение средней квадратической ошибки

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i)^2}{n-1}}. \quad (III.27)$$

$$\xi_{\text{пред}} = 3m_{\Delta}.$$

Уклонения ξ_i , абсолютные значения которых больше $\xi_{\text{пред}}$, указывают на недопустимые ошибки; соответствующие результаты измерений должны быть проанализированы, а ошибки, превышающие $\xi_{\text{пред}}$, отброшены*.

Далее вычисляют по формуле (III.27) окончательное значение m_{Δ} , пользуясь оставшимися после отбраковки результатами измерений. Полученная величина m_{Δ} является характеристикой случайной ошибки одного измерения.

Что касается параметра m_{σ} , то для надежного получения его значения требуется выполнить достаточно большое число измерений при самых разнообразных комплексах условий и получить ряд истинных ошибок. Полученные ошибки разбивают на группы с учетом соответствующих комплексов условий. Для каждой группы ошибок вычисляют средние значения $\bar{\theta}_i$ и рассматривают их как конкретные значения случайной величины δ . Далее получают

$$m_{\sigma}^2 \approx \frac{\sum_{j=1}^K (\bar{\theta}_j)^2}{K}, \quad (\text{III.28})$$

где K — число групп.

Для суждения о надежности полученной характеристики влияния систематических ошибок необходимо еще вычислить общее среднее $\theta_{\text{ср}}$ из ошибок, т. е.

$$\theta_{\text{ср}} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \bar{\theta}_j.$$

Соблюдение неравенства

$$\theta_{\text{ср}} < \frac{m_{\sigma}}{\sqrt{K}} \quad (\text{III.29})$$

является одним из признаков того, что разнообразие условий учтено достаточно хорошо.

Разумеется, надежность параметра m_{σ} зависит и от числа групп (желательно, чтобы $K \geq 20$), и от правильности учета разнообразия условий.

При отсутствии истинных ошибок на группы разбивают результаты измерений, руководствуясь при этом теми же соображениями, что и при исследовании ряда истинных ошибок. В каждой группе получают среднее $\bar{x}_j$. Эти величины $\bar{x}_j$ рассматривают как конкретные

* Абсолютной величиной $\xi_{\text{пред}} = 3m_{\Delta}$ соответствует доверительная вероятность $\beta = 0,997$.

№ хода	Длина хода L , км	Приведенная невязка $\theta = \frac{f_h}{\sqrt{L}}$, мм	№ хода	Длина хода L , км	Приведенная невязка $\theta = \frac{f_h}{\sqrt{L}}$, мм
1	22,3	+10,36	46	62,3	+19,01
2	33,8	+3,10	47	33,2	+0,17
3	14,0	-2,14	48	6,5	-8,66
4	42,8	0,00	49	29,3	+19,40
5	29,7	-5,11	50	20,6	-14,75
6	35,6	+11,56	51	30,6	-8,50
7	9,8	-7,03	52	28,6	+19,44
8	43,9	-9,50	53	42,0	-8,95
9	19,1	+0,23	54	46,6	-6,88
10	10,5	+19,91	55	70,0	+1,91
11	20,0	+10,74	56	13,6	+10,57
12	22,1	-11,70	57	36,9	+6,42
13	21,7	+1,07	58	29,8	+4,94
14	46,6	-8,20	59	38,3	-10,18
15	14,6	-0,79	60	61,0	+8,45
16	34,2	+1,02	61	34,0	-1,03
17	25,8	+10,83	62	18,3	-4,91
18	16,4	-5,29	63	31,7	-14,39
19	29,8	+3,84	64	40,6	+10,06
20	27,9	+2,46			
21	20,9	+5,67			
22	21,3	-2,60	65	23,5	-0,21
23	14,0	-4,80	66	23,9	-5,32
			67	32,8	-5,24
24	22,9	-14,85	68	13,1	+9,67
25	21,1	+10,85	69	21,3	-4,76
26	15,8	-13,84	70	36,5	+7,78
27	36,7	+19,28	71	35,8	+4,01
28	29,3	-18,80	72	17,6	-7,86
29	48,2	+14,10	73	28,7	+0,56
30	57,0	-15,60	74	19,8	+8,31
31	41,1	+2,33	75	26,4	-3,89
32	29,5	-3,68	76	17,2	-4,33
33	53,9	+4,50	77	29,3	+9,61
34	50,7	+3,37	78	53,3	-1,51
35	56,4	-3,59	79	31,3	+1,61
36	12,6	+9,54	80	20,0	-3,80
37	17,6	+9,28	81	15,0	-1,03
38	25,9	+7,57			
39	24,2	-6,89	82	37,3	-5,89
40	33,8	-6,87	83	30,4	-4,36
41	22,5	-4,42	84	41,3	-1,09
42	22,8	0,0	85	42,4	+14,28
			86	23,7	-6,78
43	15,9	-19,04	87	20,0	+11,41
44	31,0	-12,02	88	48,8	+11,44
45	15,7	-4,29	89	24,9	-15,23
			90	53,3	-4,38

№ хода	Длина хода L , км	Приведенная невязка $\theta = \frac{f_h}{\sqrt{L}}$, мм	№ хода	Длина хода L , км	Приведенная невязка $\theta = \frac{f_h}{\sqrt{L}}$, мм
91	21,3	-9,74	98	37,9	+5,36
92	20,2	+8,02	99	41,1	-3,59
93	18,7	+0,69	100	32,9	+11,85
94	44,7	+6,13	101	32,5	-6,32
95	21,0	-11,13	102	31,5	+5,88
			103	20,7	+15,60
			104	24,0	+2,24
96	15,6	-12,91	105	31,0	-12,75
97	21,8	-5,57	106	21,2	-1,96

значения некоторой случайной величины. Далее вычисляют общее среднее $\bar{x}$, затем уклоны $\xi_j = \bar{x}_j - \bar{x}$ и, наконец,

$$m_\delta^2 = \frac{\sum_{j=1}^K \xi_j^2}{K-1}, \quad (III.30)$$

где K — число групп.

Более надежный способ получения параметра m_δ изложен в главе IV.

После определения значения m_δ и $m = \sqrt{m_\Delta^2 + m_\delta^2}$ проводят исследование ряда θ_i или ξ_j на нормальное распределение, как изложено в § 22.

Пример. Даны 106 приведенных * невязок ходов нивелирования IV класса, проложенных между реперами и марками нивелирования высших классов (табл. 10). Выполнить исследование ряда невязок на нормальное распределение.

Исследование:

I. Все невязки по принципу принадлежности к второклассным полигонам были разделены на шесть групп (I группа — с 1 по 23, II группа — с 24 по 42, III группа — с 43 по 64, IV группа — с 65 по 81, V группа — с 82 по 95, VI группа — 96 по 106). Для последующих исследований вычислены данные, помещенные в табл. 11.

II. По данным табл. 10—11 вычислены: общая средняя квадратическая ошибка, средняя и вероятная ошибки, коэффициенты их соотношения; эксцесс, показатель асимметрии. Результаты вычислений помещены в табл. 12.

Кроме того, вычислим m_δ и оценим ее надежность

$$m_\delta = \sqrt{\frac{1,82}{6-1}} = \sqrt{0,364} \approx 0,6 \text{ мм.}$$

Так как $\bar{\theta} = 0$, то m_δ имеет доверительные границы, обусловленные только числом групп.

* Невязки ходов нивелирования IV класса приведены к условным невязкам на 1 км в предположении, что их накопление происходит пропорционально корню квадратному из длины хода (в км).

Таблица 11

Группа	$[0]$, мм	$[0^2]$	$[0]$, мм	$[0^3]$	$[0^4]$	n	$\bar{0}_I$	$(\bar{0}_I)^2$
I	+24	1368	138	-9567	250 873	23	+1,0	1,00
II	-8	2109	169	-3710	485 784	19	-0,4	0,16
III	-13	2823	214	+6325	718 854	22	-0,6	0,36
IV	+4	526	79	+818	32 652	17	+0,2	0,04
V	-7	1138	111	+122	163 404	14	-0,5	0,25
VI	-2	869	84	+3126	137 931	11	-0,1	0,01
Без разделения на группы	-2	8833	795	-2886	1 789 498	106	0	1,82

Таблица 12

Группа	Общая средняя квадратическая ошибка m , мм	Средняя ошиб- ка σ , мм	Вероятная ошибка τ , мм	Коэффици- енты соотно- шения		Экспесс и его точность		Показатель асимметрии и его точность	
				$\frac{m}{\sigma}$	$\frac{m}{\tau}$	E	σ'_E	$\beta_1 = (Sk)^2$	σ'_{β_1}
I	7,7	6,0	5,3	1,28	1,45	+0,12	1,02	0,82	0,92
II	10,5	8,9	7,6	1,18	1,38	-0,89	1,12	0,03	0,19
III	11,3	9,7	8,7	1,17	1,30	-1,10	1,05	0,037	0,20
IV	5,6	4,7	4,3	1,19	1,30	-2,98	1,19	0,008	0,034
V	9,0	7,9	6,8	1,14	1,32	-1,23	1,31	0,0001	0,013
VI	8,9	7,6	5,9	1,17	1,51	-0,99	1,48	0,17	0,61
Без разде- ления на группы	9,1	7,5	6,3	1,21	1,44	-0,55	0,48	0,0012	0,17

Условия $|E| \leq 3\sigma'_E$ и $\beta_1 \leq 3\sigma'_{\beta_1}$ выполнены во всех группах.

§ 34. ПАРАМЕТРЫ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Известно, что ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения, который в этом случае называется законом Гаусса, так как им он впервые был установлен для ошибок измерений.

Если ряд ошибок получен с учетом возможного разнообразия условий, то можно считать, что

$$M(\theta) = 0.$$

Тогда в формуле для плотности вероятности

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t^2}, \quad (III.31)$$

значение

$$t_i = \frac{\theta_i}{m},$$

где m — средняя квадратическая ошибка, равная

$$m = \sqrt{m_{\Delta}^2 + m_{\delta}^2}.$$

Величины $\frac{\theta_i}{m}$ называют нормированными ошибками. Если в измерениях заметно систематическое влияние, что обнаруживается несоблюдением неравенства (III.29), то под t в формуле (III.31) следует подразумевать $t_i = \frac{\xi_i}{m_{\Delta}}$, причем величины ξ_i вычисляются по (III.26). Очевидно, такой же смысл переменная t имеет в законе распределения результатов измерений.

При помощи прил. 2 легко установить, что число ошибок от 0 до m (по абсолютной величине) следует ожидать около 68%; от 0 до $2m$ — около 95%; от 0 до $3m$ — около 100%.

Ошибки, превышающие по абсолютной величине $3m$, принято считать грубыми.

Такое же распределение имеет место для отклонений ξ_i по отношению к m_{Δ} .

В первом приближении указанное процентное соотношение достаточно для проверки нормального распределения.

§ 35. СРЕДНИЕ КВАДРАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ ФУНКЦИЙ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

В геодезии искомые величины нередко находят вычислениями как функции измеренных величин. Очевидно, что ошибка функции зависит от ошибок аргументов, по которым она вычислена, и от вида функции.

Истинные ошибки измеренных аргументов обычно остаются неизвестными, и истинные ошибки функций могут быть найдены лишь в случаях, когда известна теоретическая величина функции, например: сумма измеренных углов треугольника, сумма превышений в замкнутом высотном полигоне. В этих случаях ошибку функции можно получить как разность между величиной функции, вычисленной с измеренными значениями аргументов, и ее теоретической величиной. Эта разность в геодезии называется *невязкой*.

Рассмотрим вопросы вычисления средних квадратических ошибок функций по известным средним квадратическим ошибкам аргументов. При решении этой задачи могут встретиться два случая: *коррелированные* и *некоррелированные* аргументы.

Две или несколько случайных величин называют коррелированными, если коэффициенты корреляции парной статистической связи не равны нулю; в противном случае они некоррелированы. Так, например, случайные величины x, y, z считаются некоррелированными, если коэффициенты корреляции $r_{xy} = r_{xz} = r_{yz} = 0$, и коррелированными, если $r_{xy} \neq 0$, $r_{xz} \neq 0$, $r_{yz} \neq 0$.

1. Средняя квадратическая ошибка функции коррелированных аргументов

Пусть дана функция

$$F = f(x, y, z, \dots, u), \quad (\text{III.32})$$

где $x, y, z, \dots, u$ — коррелированные аргументы, полученные из наблюдений со средними квадратическими ошибками $m_x, m_y, m_z, \dots, m_u$ соответственно.

Предположим, что $X, Y, Z, \dots, U$ — истинные (точные) значения аргументов. Необходимо определить среднюю квадратическую ошибку m_F функции F .

Пусть $\theta_x, \theta_y, \theta_z, \dots, \theta_u$ — истинные ошибки аргументов, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= x - X \\ \theta_y &= y - Y \\ \theta_z &= z - Z \\ \vdots &\vdots \\ \theta_u &= u - U \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.33})$$

Тогда истинная ошибка функции будет

$$\theta_F = f(x, y, z, \dots, u) - f(X, Y, Z, \dots, U).$$

В соответствии с (III.33)

$$\theta_F = f(x, y, z, \dots, u) - f(x - \theta_x, y - \theta_y, z - \theta_z, \dots, u - \theta_u). \quad (\text{III.34})$$

Так как ошибки измерений — обычно величины малые по сравнению с самими измеренными величинами, то, применяя к формуле (III.34) разложение в ряд Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} \theta_F &= f(x, y, z, \dots, u) - f(x - \theta_x, y - \theta_y, z - \theta_z, \dots, u - \theta_u) = \\ &= f(x, y, z, \dots, u) - f(x, y, z, \dots, u) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \theta_x + \\ &\quad + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \theta_y + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0 \theta_z + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_0 \theta_u + R, \end{aligned}$$

где R — остаточный член разложения, равный сумме всех нелинейных членов ряда Тейлора.

Для подавляющего большинства случаев, встречающихся в геодезической практике, остаточными членами R в рядах Тэйлора при оценке точности можно пренебречь и написать

$$\theta_F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \theta_x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \theta_y + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \theta_z + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 \theta_u. \quad (\text{III.35})$$

По аналогии с определением средней квадратической ошибки измерений определим среднюю квадратическую ошибку функции (III.32) через математическое ожидание квадрата ее истинной ошибки, т. е.

$$m_F^2 = M(\theta_F^2). \quad (\text{III.36})$$

Найдем $M(\theta_F^2)$.

$$\begin{aligned} M(\theta_F^2) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 M(\theta_x^2) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 M(\theta_y^2) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0^2 M(\theta_z^2) + \dots \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0^2 M(\theta_u^2) + 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 M(\theta_x \cdot \theta_y) + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Значения производных по соответствующим аргументам практически остаются постоянными и могут быть вычислены по приближенным значениям аргументов $x_0, y_0, z_0, \dots, u_0$, в качестве которых можно взять любые результаты измерений. Для этих производных достаточно сохранить в значениях $x_0, y_0, z_0, \dots, u_0$ по две-три значащие цифры.

Определим, чему равны $M(\theta_x \cdot \theta_y)$, $M(\theta_x \cdot \theta_z)$ и т. д. в правой части формулы (III.37). Из корреляционного анализа известно, что коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{M\{(x - \bar{X})(y - \bar{Y})\}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

с учетом чего, приравняв

$$\sigma_x = m_x, \sigma_y = m_y, x - \bar{X} = \theta_x, y - \bar{Y} = \theta_y,$$

имеем

$$r_{xy} = \frac{M(\theta_x \theta_y)}{m_x m_y}. \quad (\text{III.38})$$

Теперь формула (III.37) с учетом (III.36) и (III.38) примет вид

$$\begin{aligned} m_F^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0^2 m_z^2 + \dots \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0^2 m_u^2 + 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 r_{xy} m_x m_y + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

Окончательно

$$\begin{aligned} m_F &= \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0^2 m_z^2 + \dots} \\ &+ \dots + 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 r_{xy} m_x m_y + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Для практического использования формулы (III 40) коэффициенты корреляции должны быть определены из специальных исследований.

2. Средняя квадратическая ошибка функции некоррелированных аргументов

При организации наблюдений одно из основных требований — обеспечение таких условий, при которых результаты многократных измерений одной и той же величины или разных величин, по возможности, были бы между собой независимы. Любая методика геодезических измерений в той или иной мере рассчитана на выполнение этого требования.

Так как для некоррелированных аргументов коэффициенты корреляции в формуле (III.40) равны нулю, то из формулы как частный случай вытекает

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0^2 m_z^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0^2 m_u^2}. \quad (\text{III.41})$$

Таким образом, средняя квадратическая ошибка функции некоррелированных аргументов равна корню квадратному из суммы квадратов произведений частных производных функций по каждому из аргументов на средние квадратические ошибки соответствующих аргументов.

3. Примеры подсчета средних квадратических ошибок функций

Пример 1. Дана линейная функция в общем виде

$$F = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n + k_0, \quad (\text{III.42})$$

где коэффициенты k_i — некоторые постоянные числа, а x_i — измеренные величины со средними квадратическими ошибками m_i соответственно, k_0 — постоянное.

Решение. Применяя формулу (III.41), получим

$$m_F^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \dots + k_n^2 m_n^2. \quad (\text{III.43})$$

Если в выражении (III.42) $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$, т. е. если

$$F_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad (\text{III.44})$$

то

$$m_{F_1} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2}. \quad (\text{III.45})$$

Следовательно, средняя квадратическая ошибка алгебраической суммы равна корню квадратному из суммы квадратов средних квадратических ошибок слагаемых при любых знаках последних.

Если в формуле (III.44) $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$, то

$$m_{F_1} = m \sqrt{n}. \quad (\text{III.46})$$

Пример 2. Средняя квадратическая ошибка среднего арифметического.
Дана функция

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

причем $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$.

Решение. Так как

$$\bar{x} = \frac{1}{n} x_1 + \frac{1}{n} x_2 + \dots + \frac{1}{n} x_n,$$

то по формуле (III.45) найдем

$$m_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2} m^2 n$$

или

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}. \quad (\text{III.47})$$

Следовательно, простое среднее арифметическое точнее одного слагаемого в корень квадратный из числа слагаемых.

Нетрудно видеть, что формула (III.47) есть частный случай применения формулы (I.204).

Пример 3. Дана функция

$$F = \frac{x \cdot y}{z}, \quad (\text{III.48})$$

где x, y, z — некоррелированные аргументы, полученные измерениями со средними квадратическими ошибками m_x, m_y, m_z . Требуется определить m_F .

Решение. Прологарифмировав по основанию e , напомним

$$\ln F = \ln x + \ln y - \ln z.$$

Далее, учитывая, что $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ и т. д., получаем

$$\left(\frac{m_F}{F}\right)^2 = \left(\frac{m_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{z}\right)^2, \quad (\text{III.49})$$

т. е. квадрат относительной ошибки функции вида (III.48) равен сумме квадратов относительных ошибок аргументов.

Далее имеем

$$m_F^2 = F^2 \left(\frac{m_x}{x}\right)^2 + F^2 \left(\frac{m_y}{y}\right)^2 + F^2 \left(\frac{m_z}{z}\right)^2$$

и, наконец,

$$m_F = F \sqrt{\left(\frac{y}{z}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{xy}{z^2}\right)^2 m_z^2}.$$

Пример 4. Найти m_F для функции $F = \lg x$, где $\lg$ — десятичный логарифм.

Решение. Напишем

$$F = \mu \ln x,$$

где $\mu = 0,4343$ — модуль десятичных логарифмов;

$$m_F^2 = m_{\lg x}^2 = \mu^2 \frac{m_x^2}{x^2};$$

$$m_{\lg x} = \mu \frac{m_x}{x}. \quad (\text{III.50})$$

Пример 5. Коэффициент K нитяного дальномера теодолита определяется на базе длиной $S = 250,00$ м, измеренном со средней квадратической ошибкой $m_S = 0,052$ м.

Из многократных измерений получен средний дальномерный отчет $l = 249,0$ см со средней квадратической ошибкой $m_l = 0,30$ см.

Определить $K = \frac{S}{l}$ (постоянное слагаемое дальномера $c = 0$) и m_K .

Р е ш е н и е.

$$K = \frac{25000}{249} = 100,40.$$

По формуле (III.49) напишем

$$\left(\frac{m_K}{K}\right)^2 = \left(\frac{m_S}{S}\right)^2 + \left(\frac{m_l}{l}\right)^2,$$

откуда

$$m_K = 100,4 \sqrt{\left(\frac{5,2}{25 \cdot 10^3}\right)^2 + \left(\frac{0,3}{249}\right)^2} = \frac{100,4}{2490} \sqrt{0,52^2 + 3^2} = \frac{330}{2490},$$

или

$$m_K = 0,12.$$

Пример 6. Определить среднюю квадратическую ошибку превышения, полученного по формуле

$$h = S \operatorname{tg} \alpha,$$

где горизонтальное проложение $S = 143,5$ м; угол наклона $\alpha = +2^\circ 30'$; $h = 6,27$ м, если $m_S = 0,5$ м; $m_\alpha = 1,0'$.

Р е ш е н и е.

$$m_h = \sqrt{m_S^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{S^2}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}},$$

$$m_h = \sqrt{(0,5 \cdot 0,044)^2 + \left(\frac{144}{0,997} \cdot \frac{1'}{3438'}\right)^2},$$

$$m_h = \sqrt{4,8 \cdot 10^{-4} + 17,9 \cdot 10^{-4}},$$

$$m_h = 4,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}, m_h = 4,8 \text{ см}.$$

Пример 7. Определить среднюю квадратическую ошибку вычисленной длины волны модулированного светового потока λ , если известны: скорость света $c = 299\,792,5$ км/с со средней квадратической ошибкой $m_c = 0,4$ км/с и частота $f = 10\,000,0$ кГц со средней квадратической ошибкой $m_f = 0,15$ кГц.

Р е ш е н и е. Так как

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

то

$$m_\lambda = \sqrt{\frac{m_c^2}{f^2} + \frac{c^2}{f^4} \cdot m_f^2}$$

или

$$m_\lambda = \frac{1}{f} \sqrt{m_c^2 + \lambda^2 m_f^2}.$$

Теперь вычислим

$$m_{\lambda} = \frac{1}{10^4} \sqrt{(0,4)^2 + (30 \cdot 0,15)^2} \approx \frac{30 \cdot 0,15}{10\,000},$$

$$m_{\lambda} = 0,00045 \text{ м}; \quad \frac{m_{\lambda}}{\lambda} = \frac{0,00045}{30} \approx \frac{1}{67\,000}.$$

С вероятностью 0,95 точное значение длины волны будет находиться в пределах $29,978 \text{ м} \leq \lambda \leq 29,980 \text{ м}$.

Пример 8. Сторона треугольника вычислена по теореме синусов

$$a = b \frac{\sin A}{\sin B},$$

где b , A , B получены из независимых измерений со средними квадратическими ошибками m_b , m_A , m_B соответственно.

Определить среднюю квадратическую ошибку m_a вычисленной стороны a .

Решение. По формуле (II.41) напишем

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2 m_A^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial B}\right)^2 m_B^2},$$

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{\sin A}{\sin B} \cdot m_b\right)^2 + \left(b \cdot \frac{\cos A}{\sin B} \cdot \frac{m_A}{\rho}\right)^2 + \left(-\frac{b \sin A \cos B}{\sin^2 B} \cdot \frac{m_B}{\rho}\right)^2}.$$

Пример 9. Известна средняя квадратическая ошибка измерения угла способом повторений $m_{\beta} = 6''$. Определить среднюю квадратическую ошибку суммы двух смежных углов β_1 и β_2 .

Решение. Составим функцию

$$f(\beta_1, \beta_2) = \beta_1 + \beta_2.$$

Известно, что ошибки значений смежных углов, измеренных способом повторений, коррелятивно связаны (через систематическую ошибку общего направиления). Коэффициент $r_{\beta_1, \beta_2} = -0,25$. Применяя для оценки точности формулу (III.39) для функции (III.44), записываем

$$M_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_1}\right)^2 m_{\beta}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_2}\right)^2 m_{\beta}^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_2}\right) r_{\beta_1, \beta_2} \cdot m_{\beta}^2,$$

или

$$M_f = \sqrt{2m_{\beta}^2 - 2 \cdot 0,25m_{\beta}^2} = m_{\beta} \sqrt{1,5} \approx 7,3''.$$

Без учета корреляции ошибок получим

$$M_f = 8,5''.$$

§ 36. ОШИБКИ ОКРУГЛЕНИЙ

Ошибки округлений возникают при вычислениях и измерениях.

При вычислениях результаты округляют до удерживаемого в каждой вычислительной операции десятичного знака. Если отбрасываемая часть меньше или больше 0,5 единицы удерживаемого (последнего) десятичного знака, то округление производят соответственно с сохранением или увеличением цифры этого знака на единицу. Если же отбрасывают точно 0,5 единицы удерживаемого знака, то по предложенному Гауссом правилу округление производят до четной цифры. Правило Гаусса исключает одностороннее накопление

ошибок за округление и позволяет иметь совершенно идентичные результаты, когда одни и те же вычисления выполняют разные лица. Ошибку округления содержит каждый результат вычислительных операций с дробными числами.

При измерениях ошибки округлений возникают при отсчетах по мерным шкалам отсчетных приборов в случаях, когда десятые доли деления шкалы отбрасывают и отсчет производят с округлением до ближайшего целого деления шкалы. Но если десятые доли деления шкалы определяют на глаз, т. е. если их глазомерно измеряют, то ошибка отсчета будет ошибкой измерения, а не округления.

Опытом установлено, что ошибки округлений характеризуются следующими свойствами:

1) предельная ошибка одного округления $\alpha = 0,5$ единицы последнего удерживаемого десятичного знака;

2) положительные и отрицательные ошибки округлений равновозможны;

3) математическое ожидание ошибок округлений Δ равно нулю, т. е. $M(\Delta) = 0$;

4) большие и малые ошибки округлений равновозможны.

Последнее свойство ошибок округлений существенно отличает их от случайных ошибок измерений. Ошибки округлений полностью подчиняются закону равномерного распределения, с центром распределения $a = 0$. В § 15 установлено, что стандарт равномерного распределения, т. е. в данном случае среднее квадратическое значение m_0 ошибки округления, может быть найден по формуле

$$m_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad (\text{III.51})$$

где α — предельная ошибка округления.

Рассмотрим еще один путь вывода соотношения (III.51).

Очевидно, что ошибки округления могут принимать любые значения от 0 до $\pm\alpha$. Выберем достаточно малый интервал ε , чтобы записать возможные значения ошибок. Пусть

$$\varepsilon = \frac{|\alpha|}{k},$$

где k — целое число, которое можно выбрать как угодно большим. Напишем ряд ошибок округлений от $-\alpha$ до $+\alpha$: $-\alpha, -(k-1)\varepsilon, \dots, -3\varepsilon, -2\varepsilon, -\varepsilon, 0, +\varepsilon, +2\varepsilon, +3\varepsilon, \dots, +(k-1)\varepsilon, +\alpha$. Написанный ряд — ряд истинных значений ошибок, поэтому среднюю квадратическую ошибку m_0 одного округления получим так:

$$m_0^2 = \frac{2[\varepsilon^2 + (2\varepsilon)^2 + \dots + (k\varepsilon)^2]}{2k+1} = \frac{2\varepsilon^2}{2k+1} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2).$$

Так как

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

то

$$m_0^2 = \frac{\varepsilon^2 k(k+1)}{3}.$$

Но

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{k},$$

Так как число k можно выбрать сколь угодно большим, то $\frac{1}{k}$ может быть сколь угодно малой величиной. Поэтому можно написать окончательно

$$m_0 = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{3}}.$$

При округлении результатов вычислительных операций, выполняемых при математической обработке результатов измерений, возникает вопрос о рациональном соотношении между точностью вычислений и точностью измерений. Удержание лишнего числа знаков при вычислениях сопряжено с большими затратами средств и времени, а при недостаточном количестве знаков можно снизить точность конечных результатов. Практикой выработано по этому вопросу простое правило: ошибка, приносимая в конечные результаты вычислений, должна быть не более $\frac{1}{3}$ суммарного влияния ошибок измерений.

Если, например, влияние ошибок измерений при определении некоторой величины характеризуется величиной $m = 0,5$ см, то при округлениях следует удерживать миллиметры, и предельная ошибка округления будет равна 0,5 мм (т. е. 0,5 единицы последнего знака). Тогда средняя квадратическая ошибка одного округления

$$m_0 = \frac{0,5 \text{ мм}}{\sqrt[3]{3}} = 0,29 \text{ мм}.$$

Совместное влияние ошибок измерений и округлений будет выражаться величиной

$$m_1 = \sqrt[3]{5^3 + (0,29)^3} = \sqrt[3]{5,01} \text{ мм},$$

где $\sqrt[3]{}$ — коэффициент, зависящий от алгоритма вычислений.

Как видно, m_1 не будет существенно отличаться от характеристики влияния ошибок измерений.

Ко всему сказанному выше об ошибках округления следует добавить, что если закон их распространения при обработке измерений одной и той же величины легко проследить, то при совместной обработке многих зависимых величин, в частности — по методу наименьших квадратов, законы распространения и накопления ошибок округлений изучены слабо вследствие чрезвычайной трудности этой задачи.

Пример. Для иллюстрации свойств ошибок округлений проведено следующее исследование: из таблиц семизначных логарифмов выбрано 500 значений мантисс логарифмов чисел от 1000 до 1500 и все эти мантиссы округлены до пяти значащих цифр. Составлены разности «округленное минус точное», т. е. получено 500 значений ошибок округлений.

Результаты исследований приведены в табл. 13.

	число ошибок
1—10	106
11—20	103
21—30	95
31—40	89
41—50	107
Всего	500

II. По знакам ошибки округлений распределялись следующим образом:
положительных (включая и нулевые) 238
отрицательных 262

III. Сумма положительных ошибок . . . +5911 ед. 7-го знака
Сумма отрицательных ошибок . . . -6517 ед. 7-го знака
Алгебраическая сумма: -606 ед. 7-го знака

Среднее арифметическое из алгебраической суммы ошибок -1,2 ед. 7-го знака.

IV. Далее все ошибки округлений сгруппированы в 17 групп, в шестнадцать по 30 ошибок и в одной 20 ошибок. Для каждой группы вычислена средняя квадратическая ошибка округления (табл. 14).

Таблица 14

№ группы	Сумма квадратов ошибок по группам $\left[\Delta^2_0 \right]$	Число ошибок в группе	Средняя квадратическая ошибка округления m_0	Вес групп
1	21 837	30	27	1,0
2	24 247	30	28	1,0
3	23 618	30	28	1,0
4	31 006	30	32	1,0
5	30 674	30	32	1,0
6	26 547	30	30	1,0
7	29 044	30	31	1,0
8	22 830	30	28	1,0
9	22 556	30	28	1,0
10	21 272	30	27	1,0
11	32 205	30	33	1,0
12	21 009	30	27	1,0
13	25 295	30	29	1,0
14	26 963	30	30	1,0
15	24 904	30	29	1,0
16	24 740	30	29	1,0
17	12 511	20	25	0,7
	421 258	500		

Средняя квадратическая ошибка округления, полученная по группам, как весовое среднее 29,0 ед. 7-го знака.

Теоретическое (точное) значение средней квадратической ошибки

$$\frac{\alpha}{1/\sqrt{3}} = \frac{50}{1/3} = 28,9 \text{ ед. 7-го знака.}$$

Средняя квадратическая ошибка округления, полученная без подразделения на группы, ... 29,0 ед. 7-го знака.

V. Нетрудно доказать, что коэффициенты k_1 и k_2 перехода от средней и вероятной ошибок округления к средней квадратической должны быть равны между собой и $k_1 (\text{окр}) = k_2 (\text{окр}) = 1,15$.

В данном примере получена средняя ошибка округления 24,9 ед. 7-го знака (теоретическое значение ошибки округления равно 25) *. Из опыта коэффициент

$$k_1 (\text{окр}) = \frac{29,0}{24,9} \approx 1,17 \text{ (должен быть 1,15).}$$

Для отыскания вероятной ошибки все ошибки были расположены в ряд по возрастанию их абсолютной величины. В середине этого ряда оказалась ошибка, равная 25 ед. 7-го знака. Таким образом, вероятная ошибка округления из опыта $r = 25$ ед. 7-го знака (теоретическое значение также равно 25 ед. 7-го знака). Соответствующий коэффициент k_2 из опыта

$$k_2 (\text{окр}) = 1,15.$$

§ 37. ВЛИЯНИЕ ОШИБОК ОКРУГЛЕНИЙ АРГУМЕНТОВ НА ТОЧНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Пусть имеем функцию

$$F = f(x, y, z, \dots, u).$$

Подсчет ошибки функции Δ_F , обусловленной ошибками округлений аргументов $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \dots, \Delta_u$, может быть произведен по известной формуле Тейлора

$$\Delta_F = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 \Delta z + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_0 \Delta u. \quad (111.52)$$

Заметим, что вопроса о коррелированности аргументов для ошибок округлений не возникает.

Пример. Дана функция

$$F = -\frac{H}{R} \cdot S,$$

причем $H = 278,53$ м, $R = 6371,11$ км, $S = 15\,785,784$ м,

где H — средняя высота линии над уровнем моря,

R — средний радиус Земли,

S — расстояние между двумя точками, приведенное к горизонту,

F — поправка за приведение длины линии S к уровню моря.

* Теоретическое значение средней ошибки округления ϑ_0 подсчитаем как сумму членов числового ряда $0, 1, 2, 3, \dots, 50$, деленную на число ошибок, равное 51, т. е.

$$\vartheta = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 50}{51} = \frac{(50 + 1) \cdot 50}{2 \cdot 51} = 25 \text{ ед. 7-го знака.}$$

Определим ошибку функций F , если H , R и S округлены до значений: $H = 279$ м ($\Delta_H = +0,47$ м); $R \approx 6370$ км ($\Delta_R = -1,11$ км); $S \approx 15\,800$ м ($\Delta_S = +14,216$ м).

Решение. По формуле (III.52) найдем

$$\Delta_F = \frac{H}{H^2} S \cdot \Delta_R - \frac{S}{R} \cdot \Delta_H - \frac{H}{R} \Delta_S.$$

Подставляя значения H , R , S и ошибки округлений, получаем

$$\Delta_F = \frac{0,279 \cdot 15,8}{6370^2} (-1110 \text{ м}) - \frac{15,8}{6370} (+0,47 \text{ м}) - \frac{0,279}{6370} (+14,22 \text{ м});$$

$$\Delta_F = -0,12 - 1,17 - 0,62 = -1,9 \text{ мм.}$$

При помощи расчетов, аналогичных приведенным в примере, можно установить необходимое число значащих цифр, что обеспечит вычисления конечного результата с заданной точностью. Если ошибки округлений неизвестны, то расчет по формуле (III.52) можно выполнить, задаваясь их средними квадратическими ошибками, и вычислить среднюю квадратическую ошибку функции по формуле

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_0^2 m_n^2, \quad (\text{III.53})$$

где m_x , m_y , ..., m_n — средние квадратические ошибки округлений аргументов.

Рассмотрим влияние ошибок округления аргументов на функции для некоторых наиболее часто встречающихся в практике случаев.

1. Алгебраическое сложение

При суммировании слагаемых, округленных одинаково (т. е. до одного и того же десятичного знака), средняя квадратическая ошибка суммы M_Σ , обусловленная ошибками округлений слагаемых, получается

$$M_\Sigma = 0,5 \sqrt{\frac{n}{3}} \quad (\text{в единицах последнего удерживаемого знака}), \quad (\text{III.54})$$

где n — число слагаемых.

При суммировании слагаемых, округленных до разных десятичных знаков, в большинстве случаев нет смысла сохранять как в слагаемых, так и в сумме больше одного лишнего десятичного знака по сравнению с наиболее грубо округленными слагаемыми. Пусть, например, сумма состоит из двух групп слагаемых: k слагаемых, округленных до некоторого десятичного знака, и l слагаемых, округленных точнее на один знак. Среднюю квадратическую ошибку суммы подсчитаем по формуле

$$M_\Sigma = \sqrt{\left(\frac{0,5}{\sqrt{3}} \sqrt{k} \right)^2 + \left(\frac{0,05}{\sqrt{3}} \sqrt{l} \right)^2}.$$

Поставив условие

$$\frac{0,05}{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{l} \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{0,5}{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{k},$$

получим

$$l \leq 4k. \quad (\text{III.55})$$

Следовательно, более точно округленные слагаемые необходимо принимать во внимание при подсчете ошибки суммы лишь в том случае, если их количество в четыре раза больше числа менее точных слагаемых.

2. Умножение и деление

Имеется функция

$$F = \frac{x_1 x_2 \dots x_m}{z_1 z_2 \dots z_n}.$$

Прологарифмировав и применив затем (III.49), получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_F}{F}\right)^2 &= \left(\frac{m_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{m_{x_2}}{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{m_{x_m}}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{m_{z_1}}{z_1}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{m_{z_2}}{z_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{m_{z_n}}{z_n}\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

Для ошибок округлений формула (III.56) примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_F}{F}\right)^2 &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{\alpha_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_{x_2}}{x_2}\right)^2 + \dots \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\alpha_{x_m}}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_{z_1}}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_{z_2}}{z_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\alpha_{z_n}}{z_n}\right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{III.57})$$

где α обозначает предельные ошибки округлений.

3. Возвышение в степень

Имеется функция

$$F = x^n.$$

Прологарифмировав, легко найдем

$$\frac{m_F}{F} = n \frac{m_x}{x}. \quad (\text{III.58})$$

Предельная относительная ошибка округления

$$\left(\frac{\Delta_F}{F}\right)_{\text{пред}} = n \frac{\alpha_x}{x}, \quad (\text{III.59})$$

где α_x — предельная ошибка округления x .

При $n = 2$, т. е. для

$$F = x^2,$$

получается простая зависимость

$$\left(\frac{\Delta_F}{F}\right)_{\text{пред}} = 2 \frac{\alpha_x}{x},$$

$$\Delta_F = 2x\alpha_x.$$

Если $\alpha_x = 0,5$ единицы удерживаемого десятичного знака, то

$$(\Delta_F)_{\text{пред}} = x \quad (\text{III.60})$$

в единицах последнего десятичного знака основания степени.

Например, предельная ошибка округления числа, равного $(0,14)^2$, полученного с предельной ошибкой округления $\alpha_x = 0,005$, равна $2 \cdot 0,14 \cdot 0,005 = 0,0014$, т. е. $0,14 \cdot 0,01 = 0,0014$. Если же $F = 14^2$, то $(\Delta_F)_{\text{пред}} = 14$.

4. Извлечение корня

Имеем функцию

$$F = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}.$$

По формуле (III.58), учитывая, что $n = \frac{1}{k}$, получаем

$$\frac{m_F}{F} = \frac{m_x}{k \cdot x}. \quad (\text{III.61})$$

Предельная ошибка округления равна

$$(\Delta_F)_{\text{пред}} = \frac{\alpha_x}{k \cdot x} \sqrt[k]{x}. \quad (\text{III.62})$$

5. Предельная ошибка потенцирования

Дан $\lg x$, требуется найти ошибку Δx в числе x , если $\lg x$ содержит ошибку $\Delta \lg x$.

Имеем

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta \lg x}{0,43 \cdot 10^n}, \quad (\text{III.63})$$

причем $\Delta \lg x$ выражена в единицах n -го знака мантиссы логарифма.

Для ошибок округления $(\Delta \lg x)_{\text{пред}} = 0,5$ единицы последнего знака мантиссы. Следовательно, для ошибок округления приближенно

$$(\Delta x)_{\text{пред}} \approx \frac{x}{10^n}, \quad (\text{III.64})$$

где n — число табличных знаков мантиссы логарифма.

Например, предельная ошибка числа x , полученного по шестизначным таблицам логарифмов, равна $x \cdot 10^{-6}$.

§ 38. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Влияние систематических ошибок на точность результатов измерений

Закономерности возникновения случайных и систематических ошибок измерений существенно различаются между собой. Случайные ошибки измерений подчиняются так называемой статистической закономерности. Что касается систематических ошибок измерений, то их закономерности зависят от источников возникновения ошибок и могут быть обнаружены из специальных исследований.

Выявить закономерности возникновения систематических ошибок непросто, однако существенное повышение точности измерений возможно лишь при соответствующей борьбе с влиянием этих ошибок.

Следует различать влияние систематических ошибок на точность отдельных результатов измерений и на точность функций результатов измерений.

Рассмотрим сначала действие систематических ошибок на отдельные результаты измерений.

При наличии систематических ошибок общую ошибку измерения θ можно представить в виде суммы

$$\theta = \Delta + \delta, \quad (\text{III.65})$$

где Δ — случайная часть ошибки θ , δ — систематическая часть. (Здесь θ , Δ и δ рассматриваются как случайные величины).

Возведем обе части этого равенства в квадрат и возьмем математические ожидания

$$M(\theta^2) = M(\Delta^2) + M(\delta^2) + 2M(\Delta \cdot \delta).$$

Так как $M(\Delta \cdot \delta) = M(\Delta) \cdot M(\delta)$ и $M(\Delta) = 0$, то для искомой общей средней квадратической ошибки m получим

$$m^2 = m_{\Delta}^2 + m_{\delta}^2, \quad (\text{III.66})$$

где m_{Δ} — средняя квадратическая случайная ошибка;

m_{δ} — средняя квадратическая систематическая ошибка.

В геодезии принято считать, что если один из двух источников ошибок характеризуется средней квадратической ошибкой, не превышающей $\frac{1}{3}$ средней квадратической ошибки, характеризующей другой источник, то первым источником ошибок можно пренебречь при оценке точности результатов измерений.

Действительно, положим

$$m_{\delta} = \frac{m_{\Delta}}{3}.$$

Тогда

$$m = \sqrt{m_{\Delta}^2 + \frac{m_{\Delta}^2}{9}} = m_{\Delta} \sqrt{1,11} \approx 1,05 m_{\Delta},$$

т. е. значение m , если пренебречь систематической ошибкой, уменьшится на 5%. При $m_{\delta} = \frac{m_{\Delta}}{5}$ значение m уменьшится всего лишь на 2%.

Таким образом, если систематические влияния характеризуются средней квадратической величиной, не превышающей $1/3 - 1/5$ среднего квадратического значения случайных ошибок, то такие систематические влияния пренебрегаемы для оценки точности отдельных результатов измерений.

Рассмотрим совместное действие случайных и систематических ошибок на функции результатов измерений.

2. Средняя квадратическая ошибка функции результатов измерений,отягощенных случайными и систематическими ошибками

Средняя квадратическая ошибка функции в случае совместного действия случайных и систематических ошибок измерений будет

$$M_F = \sqrt{M_\Delta^2 + M_\delta^2}.$$

Для M_Δ^2 получена формула (III.41).

Вывести общую формулу для систематической части средней квадратической ошибки функции, т. е. для M_δ , невозможно, так как закономерности влияния систематических ошибок могут быть, в отличие от случайных ошибок, самые различные. Поясним эту мысль.

Истинные ошибки функции $F = f(x, y, \dots, u)$, обусловленные систематическими ошибками аргументов, можно выразить так же, как и случайные части ошибок, — в виде дифференциала

$$\delta_F = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \delta_x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \delta_y + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_0 \delta_u.$$

Средняя квадратическая систематическая ошибка функции

$$\begin{aligned} M_\delta^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0^2 m_{\delta_x}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0^2 m_{\delta_y}^2 + \dots \\ &\dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_0^2 m_{\delta_u}^2 + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \frac{(\delta_x \cdot \delta_y)}{n} + \dots \quad (\text{III.67}) \end{aligned}$$

В отличие от действия только случайных ошибок, члены, содержащие математические ожидания произведений систематических ошибок, т. е. $[\delta_i \delta_k]$, отбрасывать нельзя, так как эти суммы свойств компенсации не обладают.

Рассмотрим действие систематических ошибок на точность некоторых функций.

Действие систематических ошибок на точность среднего значения многократно измеренной величины. При наличии систематических ошибок в отдельных результатах измерений можно написать

$$X = x_1 - \Delta_1 - \delta_1,$$

$$X = x_2 - \Delta_2 - \delta_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X = x_n - \Delta_n - \delta_n,$$

где X — точное значение измеренной величины, а x_i — результат i -го измерения.

Сложив левые и правые части этих равенств и разделив суммы на n , получим

$$X = \frac{[x]}{n} = \frac{[\Delta]}{n} + \frac{[\delta]}{n},$$

или

$$X = \bar{x} - \Delta_{\text{ср}} - \delta_{\text{ср}}. \quad (\text{III.68})$$

Порядок величины $\Delta_{\text{ср}}$ характеризуется, как известно, формулой

$$\Delta_{\text{ср}} \approx \frac{m_{\Delta}}{\sqrt{n}},$$

где m_{Δ} — среднее квадратическое значение случайной ошибки одного измерения. Последнее равенство показывает, что случайная ошибка простого среднего арифметического уменьшается с увеличением числа измерений.

Что касается $\delta_{\text{ср}}$, то в каждом конкретном случае структура этой величины может быть разная. В частности, если систематическая ошибка постоянна и равна δ_0 , то формула (III.68) принимает вид

$$X = \bar{x} - \Delta_{\text{ср}} - \delta_0,$$

откуда видно, что увеличение числа приемов измерений будет давать реальное повышение точности лишь до тех пор, пока значение

$$\Delta_{\text{ср}} \approx \frac{m_{\Delta}}{\sqrt{n}}$$

не станет пренебрежимо малым по сравнению с δ_0 . Дальнейшее увеличение числа приемов не будет иметь смысла.

Средняя квадратическая ошибка суммы равноточно измеренных слагаемых при совместном действии случайных и систематических ошибок. Пусть слагаемые суммы $y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ измерены с одинаковой средней квадратической ошибкой m_{Δ} и постоянной систематической ошибкой δ_0 . Тогда в формуле

$$M_y^2 = M_{\Delta}^2 + M_{\delta}^2$$

значения M_{Δ} и M_{δ} будут

$$M_{\Delta} = m_{\Delta} \sqrt{n}$$

и

$$M_{\delta} = n\delta_0,$$

а средняя квадратическая ошибка суммы y будет

$$M_y = \sqrt{nm_{\Delta}^2 + n^2\delta_0^2}. \quad (\text{III.69})$$

Сравним влияние случайных и систематических ошибок в рассмотренном случае.

В современном высокоточном геометрическом нивелировании систематическая часть общей ошибки нивелирования 1 км составляет примерно $\frac{1}{10}$ среднего квадратического значения случайных ошибок. Если эта систематическая часть будет постоянна, то на основании формулы (III.69) для средней квадратической ошибки M превышения, полученного из нивелирного хода, можно написать

$$M = \sqrt{Sm_{\Delta}^2 + \frac{S^2}{100} m_{\Delta}^2}, \quad (\text{III.70})$$

где S — протяженность нивелирного хода в километрах; m_{Δ} — средняя квадратическая ошибка нивелирования 1 км.

Вычислим случайную и систематическую части квадрата средней квадратической ошибки нивелирования ходов разной протяженности:

1) на 10 км $Sm_{\Delta}^2 = 10m_{\Delta}^2$,

$$\frac{S^2}{100} \cdot m_{\Delta}^2 = m_{\Delta}^2;$$

2) на 100 км $Sm_{\Delta}^2 = 100m_{\Delta}^2$,

$$\frac{S^2}{100} \cdot m_{\Delta}^2 = 100m_{\Delta}^2;$$

3) на 300 км $Sm_{\Delta}^2 = 300m_{\Delta}^2$,

$$\frac{S^2}{100} \cdot m_{\Delta}^2 = 900m_{\Delta}^2.$$

Из приведенных подсчетов видно, что если в ходе протяженностью 10 км систематическая часть пренебрегается по сравнению со случайной, то уже при нивелирном ходе в 100 км систематическое влияние становится равным случайному, а если протяженность хода 300 км — меньшим становится случайное влияние.

Значения δ остаются постоянными лишь на ограниченных участках ходов, протяженность которых в среднем 200—300 км. При большей длине ходов эти значения будут другими и δ могут стать случайными для всех ходов такого протяжения в совокупности.

§ 39. НЕКОТОРЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО УМЕНЬШЕНИЮ ВЛИЯНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Для уменьшения влияния систематических ошибок в практике геодезических измерений чаще всего применяют следующие способы:

1) устанавливают закон появления систематической ошибки, после чего ошибку уменьшают введением поправки в результаты измерений;

2) применяют соответствующую методику измерений, рассчитанную таким образом, чтобы систематические ошибки действовали по односторонне, а изменяли знаки;

3) используют определенную методику обработки результатов измерений.

В качестве иллюстрации 1-го способа, направленного на уменьшение влияния систематических ошибок, можно привести следующие примеры:

а) эталонирование мерного линейного прибора и введение затем поправок за его длину и температуру при измерении длины линий;

б) исследование отсчетного прибора для отсчитывания по угломерному кругу и введение соответствующих поправок в отсчеты (поправок за длину верньера, поправок за рен отсчетного микроскопа и т. п.).

Примерами 2-го способа ослабления влияния систематических ошибок могут служить:

а) отсчитывание по диаметрально противоположным штрихам лимба при измерении теодолитом горизонтальных направлений, чем исключают влияние эксцентриситета алидады;

б) перестановка лимба между приемами на угол $\frac{180^\circ}{n}$, где n — число приемов; при этом ослабляется влияние систематических ошибок штрихов лимба;

в) распределение программы наблюдений при высокоточных измерениях горизонтальных направлений примерно поровну на дневное и вечернее время и на длительный период, в результате чего наблюдения производят в различных атмосферных условиях, чем и ослабляется влияние боковой рефракции;

г) определение прямых и обратных превышений точек при тригонометрическом нивелировании; в результате ослабляется влияние систематических ошибок, обусловленных неточным значением коэффициента вертикальной рефракции и систематическими ошибками измерения вертикальных углов.

Приведем пример 3-го способа, также уменьшающего влияние систематических ошибок измерений.

Обычный порядок вычислений, при котором углы и координаты вытянутого теодолитного хода уравнивают отдельно, упрощая вычисления, ведет к ослаблению влияния систематических ошибок угловых и линейных измерений. Предварительное распределение угловой невязки поровну на углы поворота ослабляет влияние систематических ошибок измерений углов на поперечный сдвиг хода; распределение на втором этапе уравнивания продольного сдвига пропорционально длинам сторон ослабляет влияние систематических ошибок линейных измерений на точность положения точек хода.

Рассмотрим еще один пример борьбы с влиянием систематических ошибок.

Если определяемую величину получают как функцию результатов измерений, можно иногда установить закономерность систематических ошибок измерений по характеру изменений значений функ-

ной. Широту Парижской обсерватории определяли по многократным измерениям зенитных расстояний разных звезд в меридиане. Широту φ вычисляли по формуле $\varphi = \delta - z$, где δ — склонение звезды, известное из каталога. Из наблюдений разных звезд были определены значения широты (табл. 15). Полученный разброс значений широты явно не соответствовал точности измеренных зенитных расстояний z , определенной по внутренней сходимости, и точности склонений δ . Исходя из этих данных, можно было ожидать значительно меньшего разброса вычисленных значений широты φ .

При внимательном рассмотрении результатов было обнаружено, что значения широты находятся в явной зависимости от значений зенитных расстояний звезд: большим значениям z соответствуют и большие значения φ . Для подтверждения этого предположения результаты в табл. 16 (графы 1 и 2) расположим в соответствующем порядке.

Зависимость значений φ от величины z свидетельствует, что результаты измерений зенитных расстояний имеют систематические ошибки, являющиеся функциями зенитных расстояний. Специальными исследованиями была установлена формула для вычисления поправок r_z в зенитные расстояния

$$r_z = -3'' \cdot \sin z.$$

После введения соответствующих поправок (см. табл. 16, графу 3) значения широт были исправлены и их дисперсия значительно уменьшилась.

Вопросы действия систематических ошибок на функции результатов измерений редко могут быть разрешены с достаточной полнотой методами теории ошибок измерений и часто требуют привлечения выводов, изложенных во второй части данной книги.

Таблица 15

z	φ
10°	48° 50' 11,8"
63	13,5
0	10,9
74	14,3
40	13,2
22	11,9
31	12,1
53	13,3

Таблица 16

z	φ измеренные	r_z	φ исправленные
1	2	3	4
0°	48° 50' 10,9"	0	48° 50' 10,9"
10	11,8	—0,5	11,3
22	11,9	—1,1	10,8
31	12,1	—1,5	10,6
40	13,2	—1,9	11,3
53	13,3	—2,4	10,9
63	13,5	—2,7	10,8
74	14,3	—2,9	11,4

Наиболее надежный путь обнаружения и исследования систематических ошибок — получение истинных ошибок, что далеко не всегда возможно. Чаще систематические ошибки измерений обнаруживаются посредством истинных ошибок функций результатов измерений (см. § 40 и 46).

Ошибки систематические при определенных условиях могут оказаться случайными при других условиях и наоборот: ошибку, по своему происхождению случайную, при других обстоятельствах можно рассматривать как систематическую. Например, боковая рефракция дает систематическую ошибку измеренного направления, которая, как правило, сохраняет знак во всех приемах наблюдений. Однако при обработке сплошной триангуляции эта ошибка в совокупности с такими же ошибками других направлений приобретает случайный характер. Определение постоянной поправки барометра или эталонной поправки в длину мерного линейного прибора сопровождается случайными ошибками этих определений. В дальнейшем при барометрическом нивелировании или при измерении расстояний эти ошибки становятся систематическими.

Глава IV

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 40. НАИБОЛЕЕ НАДЕЖНОЕ ЗНАЧЕНИЕ МНОГОКРАТНО И РАВНОТОЧНО ИЗМЕРЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

В § 27 дано понятие о равноточных и неравноточных измерениях. С точки зрения числовых оценок точности, под равноточными понимают однородные измерения, характеризуемые одинаковой средней квадратической ошибкой; при различных средних квадратических ошибках однородные измерения будут неравноточными.

В практике нередко возникает необходимость суждения о равноточности или неравноточности измерений, не имея их средних квадратических ошибок. В таких случаях решение выносится на основании сравнения таких условий измерений, о которых можно судить вполне определенно: числа приемов измерений, класса точности инструментов, способов измерений и т. п.

Пусть некоторая величина, истинное значение которой равно X , измерена равноточно n раз и получены результаты: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Требуется найти наиболее надежное значение измеренной величины, используя данную совокупность (ряд) измерений. Естественно стремление получить значение, возможно более близкое по вероятности к истинному.

Мы знаем, что точность искомой величины характеризуется, во-первых, отклонением этой величины от математического ожидания результатов измерений; во-вторых, отклонением математического

ожидания $M(x)$ от истинного значения, обусловленным наличием систематических ошибок в измерениях. Что касается отклонения $M(x)$ от X , то оно при обработке ряда измерений не может быть уменьшено. Остается одна задача: получить наилучшее приближение к математическому ожиданию. Как нам уже известно, этим наилучшим приближением для ряда равнозначных результатов является среднее арифметическое этих результатов. Поэтому в качестве наиболее надежного значения для ряда равнозначных результатов принимают среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}. \quad (\text{IV.1})$$

В формуле (IV.1) применено обозначение суммы, введенное Гауссом,

$$[x] = \sum_{i=1}^n x_i.$$

При рассмотрении вопросов математической обработки многократных измерений одной величины будем применять следующие обозначения сумм произведений различных значений этой величины.

Пусть имеем два ряда величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

$$p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Алгебраическую сумму произведений в гауссовом обозначении записывают так:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = [xp].$$

Аналогично

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = [x^2];$$

$$\frac{x_1 y_1}{z_1} + \frac{x_2 y_2}{z_2} + \dots + \frac{x_n y_n}{z_n} = \left[\frac{xy}{z} \right].$$

Основное свойство сумм в гауссовом обозначении состоит в том, что все множители каждого слагаемого имеют один и тот же значок, поэтому суммы произведений вида

$$x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots$$

в обозначении Гаусса записаны быть не могут.

Рассмотрим вопрос об оценке точности среднего арифметического.

Под оценкой или характеристикой точности, строго говоря, понимают установление доверительных границ для интервала, в котором вероятно истинное значение измеренной величины. Для этого требуется знать среднюю квадратическую ошибку.

Обозначим через M_1 среднюю квадратическую ошибку среднего арифметического равнозначных измерений при некотором постоянном комплексе условий и напишем

$$M_1^2 = M_{\Delta}^2 + m_0^2, \quad (\text{IV.2})$$

где M_{Δ} — среднее квадратическое отклонение среднего арифметического от математического ожидания для измеренной величины;

m_{δ} — средняя квадратическая ошибка математического ожидания, характеризующая влияние на него систематических ошибок при данном комплексе условий измерений.

Если среднее арифметическое получено из n равнозначных измерений, то на основании формулы (III.47) величину M_{Δ}^2 можно вычислить по формуле

$$M_{\Delta}^2 = \frac{m_{\Delta}^2}{n}, \quad (IV.3)$$

где m_{Δ}^2 — среднее квадратическое значение влияния случайных ошибок на отдельное измерение. Приближенно величину m_{Δ}^2 можно подсчитать по формуле (III.10).

Учитывая выражение (IV.3), равенство (IV.2) принимает вид

$$M_1^2 = \frac{m_{\Delta}^2}{n} + m_{\delta}^2. \quad (IV.4)$$

Из равенства (IV.4) следует, что если систематические влияния при некотором неизменном комплексе условий измерений характеризуются величиной m_{δ} , то увеличение числа измерений n будет эффективно лишь до известного предела. Если, например:

$$m_{\delta} = \frac{m_{\Delta}}{3},$$

то

$$M_1^2 = \frac{m_{\Delta}^2}{n} + m_{\delta}^2 = \frac{m_{\Delta}^2}{n} + \frac{m_{\Delta}^2}{9}$$

и уже при $n = 10$ окажется, что

$$\frac{m_{\Delta}^2}{n} < m_{\delta}^2.$$

Следовательно, при $m_{\delta} = \frac{m_{\Delta}}{3}$ увеличение числа n сверх 10 при данных условиях измерений будет малоэффективно.

Из сказанного следует, что при необходимости существенного повышения точности измеряемой величины следует выполнить несколько рядов измерений при возможно более разнообразных условиях. При надлежаще выбранных комплексах условий можно ожидать, что систематическое влияние на разные ряды измерений будет носить случайный характер, и при числе различных комплексов, равном K , можно полагать, что среднее квадратическое значение систематических влияний на конечный результат при некоторых средних условиях измерений будет в $\sqrt{K}$ меньше, т. е. $\frac{m_{\delta}}{\sqrt{K}}$. Конечно, на произведении число K не может быть большим.

Если в каждом из K комплексов условий выполнено $\frac{n}{K}$ измерений, то для средней квадратической ошибки M среднего арифметического из $\frac{n}{K} \cdot K = n$ равнозначных измерений, т. е. для среднего арифметического из результатов измерений во всех K комплексах, имеем

$$M^2 = \frac{m_{\Delta}^2}{n} + \frac{m_{\delta}^2}{K}. \quad (IV.5)$$

Вопросы выбора различных комплексов условий рассматриваются обычно в тех разделах геодезии, в которых изучают соответствующие измерения. Здесь же можно заметить, что, например, при высокоточных угловых геодезических измерениях целесообразно выбирать время наблюдений в утренние, вечерние и ночные часы. Для большего повышения точности полезно измерения выполнять различными инструментами и приборами, но одного и того же класса точности, разными наблюдателями и т. п.

Можно заметить еще, что при применении формулы (IV.5) число измерений в разных комплексах, которое при выводе этой формулы полагалось равным $\frac{n}{K}$, может быть равно этому числу лишь приблизительно. Например, при $n = 12$ и $K = 2$ в группах может быть 5 и 7 измерений и даже 4 и 8.

Получив величину M , можно установить доверительные границы для истинного значения. Но здесь возникает некоторое затруднение.

Дело в том, что надежность получения величин $\frac{m_{\Delta}^2}{n}$ и $\frac{m_{\delta}^2}{K}$ может быть существенно различной. Если величина m_{Δ} вычислена на основе ряда наблюдений при $n < 20$, то, устанавливая доверительные границы для математического ожидания, следует применять распределение Стьюдента. С другой стороны, величина m_{δ} обычно определяется из большого числа наблюдений и при установлении доверительных интервалов для истинного значения, отсчитанных от математического ожидания, должен применяться нормальный закон распределения. Однако перекрывающиеся доверительные интервалы практически неудобны. Поэтому можно рекомендовать следующее решение.

1. Если $n \geq 20$, то доверительные границы для истинного значения устанавливают на основе нормального закона, пользуясь средней квадратической ошибкой

$$M = \sqrt{\frac{m_{\Delta}^2}{n} + \frac{m_{\delta}^2}{K}}.$$

2. Если $n < 20$, то сначала вычисляют величину

$$N = n \div n \left(\frac{m_{\delta}^2}{K} : \frac{m_{\Delta}^2}{n} \right) = n \div n (M_{\delta}^2 : M_{\Delta}^2)$$

и при $N \geq 20$ применяется нормальный закон; при $N < 20$ — распределение Стьюдента.

Величина M может быть получена непосредственно по псевдокам из производственного материала. В этом случае применяется нормальный закон или Стьюдента, в зависимости от числа псевдокам.

Пример 1. Значение $\bar{x}$ получено из 20 приемов; $m_{\Delta} = 2$; $m_{\sigma} = 0,70$; $K = 2$.

$$\frac{m_{\Delta}^2}{n} = \frac{2^2}{20} = 0,20; \quad \frac{m_{\sigma}^2}{K} = \frac{0,71^2}{2} \approx 0,25;$$

$$M = \sqrt{0,20 + 0,25} \approx 0,66.$$

Так как $n = 20$, то воспользуемся нормальным законом. Доверительные границы для истинного значения при $\beta = 0,99$: $\bar{x} - 2,57 \cdot 0,66 = \bar{x} - 1,69$ и $\bar{x} + 1,69$.

Пример 2. Значение $\bar{x}$ получено из 12 приемов

$$\frac{m_{\Delta}^2}{n} = \frac{2^2}{12} = 0,33; \quad \frac{m_{\sigma}^2}{K} = \frac{0,71^2}{2} \approx 0,25;$$

$$M = \sqrt{0,33 + 0,25} = 0,76.$$

Так как $n < 20$, то получим сначала N

$$N = 12 + 12 (0,25 : 0,33) = 21.$$

Так как $N > 20$, то следует применить нормальный закон.

Доверительные границы при $\beta = 0,99$: $\bar{x} - 2,57 \cdot 0,76 = \bar{x} - 1,95$ и $\bar{x} + 1,95$.

Пример 3. Значение $\bar{x}$ получено из 8 приемов

$$\frac{m_{\Delta}^2}{n} = \frac{2^2}{8} = 0,50; \quad \frac{m_{\sigma}^2}{K} = \frac{0,71^2}{2} = 0,25;$$

$$M = \sqrt{0,50 + 0,25} = 0,87.$$

Так как $n < 20$, то получим сначала N . $N = 8 + 8 (0,25 : 0,50) = 12$. Так как $N < 20$, то применим распределение Стьюдента.

Доверительные границы при $\beta = 0,99$: $\bar{x} - 3,11 \cdot 0,87 = \bar{x} - 2,71$ и $\bar{x} + 2,71$.

Таким образом, для оценки точности среднего арифметического недостаточно знать только величину средней квадратической ошибки, необходимо еще знать, как она была получена.

Условимся в следующих обозначениях.

Число эквивалентных измерений назовем N . Если $N \geq 20$, то среднюю квадратическую ошибку обозначим через M ; если $N < 20$, то через $M_{(N)}$. Например, $M_{(12)}$ означает, что M получено из 12 эквивалентных измерений и для установления доверительных границ необходимо применять распределение Стьюдента. В геодезии применяется еще обозначение $\bar{x} \pm M$: в данной книге будем применять его лишь при $N \geq 20$. Например, $20^{\circ} 35' 13'' \pm 7''$ означает, что результат $20^{\circ} 35' 13''$ имеет среднюю квадратическую ошибку $M = 7''$, полученную из $N \geq 20$ измерений.

§ 41. ПОРЯДОК ОБРАБОТКИ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В практике геодезических работ важное значение имеет надежный контроль результатов вычислений.

При вычислении среднего арифметического контроль осуществляется по уклонам отдельных результатов x_i от их среднего арифметического $\bar{x}$. Разности $x_i - \bar{x}$ в геодезии называют уклонами от среднего, а $\bar{x} - x$ — поправками и обозначают последние обычно v . С этими обозначениями напишем

$$v_i = \bar{x} - x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (IV.6)$$

Возьмем сумму этих равенств

$$[v] = \bar{x} \cdot n - [x].$$

Но

$$\bar{x} \cdot n = \frac{[x]}{n} \cdot n = [x].$$

Следовательно,

$$[v] = 0. \quad (IV.7)$$

В практике вычислений среднее арифметическое обычно получают с округлением его до удерживаемого десятичного знака. По этой причине равенство (IV.7) точно не выполняется.

Обозначим округленное значение среднего арифметического через $\bar{x}_0$, а ошибку округления через Δ_0 и напишем $\bar{x}_0 = \bar{x} + \Delta_0$.

Величины v_i^0 находят с округленным значением $\bar{x}_0$, т. е.

$$v_i^0 = \bar{x}_0 - x_i = \bar{x} + \Delta_0 - x_i = v_i + \Delta_0.$$

Взяв сумму всех v_i^0 , получим $[v^0] = [v] + \Delta_0 n$.

Так как $[v] = 0$, то

$$[v^0] = \Delta_0 n. \quad (IV.8)$$

Полученное равенство может служить контролем правильности вычислений $\bar{x}_0$ и v_i^0 .

Вычисление среднего арифметического можно облегчить следующим приемом.

Каждый результат измерений x_i представляют в виде суммы

$$x_i = x_0 + \varepsilon_i, \quad (IV.9)$$

где x_0 — некоторое округленное число, выбираемое с таким расчетом, чтобы все ε_i были малые положительные числа.

Тогда

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}. \quad (IV.10)$$

Получим еще формулу для контролирования вычислений уклонов v_i и $[v^2]$.

Имеем

$$v_i = \bar{x} - x_i = \frac{[\varepsilon]}{n} - \varepsilon_i.$$

Отсюда

$$[v^2] = [\varepsilon^2] + n \frac{[\varepsilon]^2}{n^2} - 2 \frac{[\varepsilon]^2}{n}$$

и окончательно

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}. \quad (IV.11)$$

Последовательность вычислений при обработке ряда равнооточных измерений:

- 1) выбирают x_0 и вычисляют $\varepsilon_i = x_i - x_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$);
- 2) вычисляют

$$\bar{x}_0 = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}$$

и ошибку округления

$$\Delta_0 = \bar{x}_0 - \bar{x}.$$

Величина Δ_0 получена тоже с некоторой ошибкой округления, которой можно пренебречь;

- 3) вычисляют $v_i^0 = \bar{x}_0 - x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$);
- 4) осуществляют контроль

$$[v^0] = \Delta_0 n^*;$$

- 5) вычисляют

$$[v^{02}], [\varepsilon^2], \frac{[\varepsilon]^2}{n};$$

- 6) осуществляют контроль

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n};$$

7) вычисляют среднюю квадратическую ошибку одного измерения

$$m_\Delta = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}};$$

- 8) вычисляют

$$M_\Delta = \frac{m_\Delta}{\sqrt{n}}$$

и, если имеются соответствующие данные, то и

$$M = \sqrt{M_\Delta^2 + M_\delta^2} = \sqrt{\frac{m_\Delta^2}{n} + \frac{m_\delta^2}{K}}.$$

Указанный порядок обработки приведен в табл. 17 и 18.

* В случае обнаружения и отбрасывания грубо ошибочных измерений (см. § 33) пункты 1, 2, 3 и 4 рекомендуемого порядка вычислений повторяют.

Результаты измерений, x_i	ε_i	ε_i^2	v_i	v_i^2	Решение
$\bar{x} = 57^\circ 23' 44''$	+4	16	+0.7	0.49	Контроль: 1) $[v^0] = \Delta_0 n = 0.03'' \cdot 12 \approx \pm 0.4''$; 2) $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$, $[v^2] = 334 - \frac{56^2}{12} = 72$. Оценка точности: 1) $m_\Delta = \sqrt{\frac{72.9}{11}} = 2.6''$; 2) $M_\Delta = \frac{2.6''}{\sqrt{12}} = 0.75''$; $m_{M_\Delta} = 0.15''$; 3) $m_\delta = 0.85''$, $M_\delta^2 = \frac{0.85^2}{2} = 0.36''$; 4) $M = \sqrt{0.56 + 0.36} = 0.96''$; $N = 12 + 12 \quad (0.36 : 0.56) = 20$.
40	0	0	+4.7	22.1	
43	+3	9	+1.7	2.89	
45	+5	25	-0.3	0.09	
46	+6	36	-1.3	1.69	
43	+3	9	+1.7	2.89	
48	+8	64	-3.3	10.9	
45	+5	25	-0.3	0.09	
48	+8	64	-3.3	10.9	
46	+6	36	-1.3	1.69	
47	+7	49	-2.3	5.29	
41	+1	1	+3.7	13.7	
$\bar{x} = 57^\circ 23' 40''$	+56	334	-12.5	72.9	Ответ: $\bar{x} = 57^\circ 23' 44.7'' \pm 0.96''$
$\bar{x} = 57^\circ 23' 44.666$			-12.1		
$\bar{x} = 57^\circ 23' 44.70$			+0.4''		
$\Delta x = \pm 0.03''$					

Пример. Даны результаты (табл. 17) равноточных измерений одного и того же угла, выполненных в двух комплексах: утром и вечером. $n=12$.

Определить $\bar{x}_0$, m_Δ , M_Δ и M (m_δ задано и равно $0,85''$, $K=2$).

Пример *. В табл. 18 приведены результаты равноточных измерений сопротивления при эталонировании платинового термометра № 318 (ВНИИМ) в точке кипения кислорода (при $t = -182,97^\circ \text{C}$). Вычислить окончательный результат и оценить его точность. $n=46$.

Таким образом, в результате математической обработки получено значение сопротивления термометра в точке кипения кислорода

$$\bar{R} = 6,21141 \pm 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ Ом},$$

соответствующее условиям опыта.

* Числовые данные примера заимствованы из книги: А. Д. Бродский, В. Л. Кан. «Краткий справочник по математической обработке результатов измерений». М., Стандартгиз, 1960, 167 с. с ил.

Сопротивление $R_i, \text{Ом}$ ($R_i = x_i$)	$\varepsilon_i = x_i -$ $-x_0$	ε_i^2	$\varepsilon_i^0 = x_0 -$ $-x_i$	$\varepsilon_i^{0^2}$	Решение
6.2114	$+14 \times$ $\times 10^{-4}$		$\div 0.1 \times$ $\times 10^{-4}$		Контроль: 1) $[\varepsilon^0] = -301 \cdot 10^{-8} \times$ $\times 46 = -1.4 \cdot 10^{-4}$;
111	$\div 11$		$\div 3.1$		2) $[\varepsilon^{0^2}] = 1.149 \cdot 10^{-4} -$ $\frac{(650 \cdot 10^{-4})^2}{46}$
099	-1		$\div 15.1$		$[\varepsilon^{0^2}] = 0.23 \cdot 10^{-4}$.
092	-8		$\div 22.1$		Оценка точности:
125	$+25$		-10.9		1) $m_{\Delta} = \sqrt{\frac{0.23 \cdot 10^{-4}}{45}} =$
126	$\div 26$		-11.9		$= 10^{-3} \sqrt{\frac{23}{45}}$
127	$\div 27$		-12.9		$m_{\Delta} = 7.1 \cdot 10^{-4} \text{ Ом};$
125	-25		-10.9		2) $M_{\Delta} = \frac{7.1 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}}{\sqrt{46}}$
116	$\div 16$		-1.9		$M_{\Delta} = 1.05 \cdot 10^{-4} \text{ Ом};$
112	$\div 12$		$\div 2.1$		3) $m_{M_{\Delta}} \approx \frac{1.05 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{92}}$
110	-10		$\div 4.1$		$m_{M_{\Delta}} \approx 0.11 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}$
112	$\div 12$		$\div 2.1$		Примечание.
114	$\div 14$		$\div 0.1$		Систематическая ошиб-
105	$\div 5$		$\div 9.1$		ка m_{δ} не определялась.
115	$\div 15$		-0.9		
116	$\div 16$		-1.9		
117	$\div 17$		-2.9		
116	$\div 16$		-1.9		
112	$\div 12$		$\div 2.1$		
125	$\div 25$		-10.9		
120	$\div 20$		-5.9		
121	$\div 21$		-6.9		
122	$\div 22$		-7.9		
129	$\div 29$		-14.9		
114	$\div 14$		$\div 0.1$		
109	$\div 9$		$\div 5.1$		
6.2119	$\div 19 \times$ $\times 10^{-1}$		$-4.9 \times$ $\times 10^{-4}$		
110	$\div 10$		$\div 4.1$		
108	$\div 8$		$\div 6.1$		
111	$\div 11$		$\div 3.1$		
111	$\div 11$		$\div 3.1$		
113	$\div 13$		$\div 1.1$		
116	$\div 16$		-1.9		
111	$\div 11$		$\div 3.1$		
113	$\div 13$		$\div 1.1$		
103	$\div 3$		$\div 11.1$		
111	$\div 11$		$\div 3.1$		
106	$\div 6$		$\div 8.1$		
114	$\div 14$		$\div 0.1$		
110	$\div 10$		$\div 4.1$		
112	$\div 12$		$\div 2.1$		
113	$\div 13$		$\div 1.1$		
113	$\div 13$		$\div 1.1$		

Сопротивление R_i , Ом ($R_i = x_i$)	$\varepsilon_i = x_i - x_0$	ε_i^2	$v_i^0 = x_0 - x_i$	v_i^{02}	Решение
121 115 116	+21 +15 +16		-6.9 -0.9 -1.9		
$x_0 = 6.2100$ $\frac{ \varepsilon }{n} = 0.00141$ $\bar{x} = 6.21141$ $\bar{x} - \bar{x} = \Delta_0 = -304 \cdot 10^{-5}$ ($\bar{x} = 6.21141304$)	$+650 \times 10^{-4}$	1.149×10^{-1}	$+117.7$ -119.1 $[v_0] = -1.4 \times 10^{-1}$	0.230×10^{-4}	

С вероятностью 0,9973 математическое ожидание $M(R)$ заключено в границах

$$6.21141 - 3 \cdot 1,05 \cdot 10^{-4} \leq M(R) \leq 6.21141 + 3 \cdot 1,05 \cdot 10^{-4},$$

$$6.21110 \text{ Ом} \leq M(R) \leq 6.21172 \text{ Ом},$$

где $M(R)$ — наиболее вероятное значение сопротивления из имеющейся информации при доверительной вероятности $\beta = 0,997$.

§ 42. НАИБОЛЕЕ НАДЕЖНОЕ ЗНАЧЕНИЕ МНОГОКРАТНО И НЕРАВНОТОЧНО ИЗМЕРЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть некоторая величина, истинное значение которой равно X , измерена многократно и неравноточно и получены результаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ со средними квадратическими ошибками соответственно $m_1, m_2, \dots, m_n$. Требуется найти наиболее надежное значение $\bar{x}$ измеренной величины на основе имеющейся информации.

Выразим искомую величину $\bar{x}$ в виде линейной функции

$$\bar{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n, \quad (\text{IV.12})$$

где коэффициенты k_i являются некоторой функцией соответствующих величин m_i и связаны условием

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1. \quad (\text{IV.13})$$

Необходимость условий (IV.12) и (IV.13) вытекает из следующих соображений:

1. Равноточные измерения должны рассматриваться как частный случай неравноточных, поэтому для случая равноточных измерений будем иметь

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = m, \text{ откуда } k_1 = k_2 = \dots = k_n = k,$$

и формула (IV.12) примет вид

$$\bar{x} = k(x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

а условие (IV.13) будет $nk = 1$, откуда

$$k = \frac{1}{n}.$$

Формулу (IV.13) можно теперь представить так:

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n},$$

т. е. ранее полученная формула (IV.1) для равноточных измерений есть частный случай формул (IV.12) и (IV.13), когда $k_1 = k_2 = \dots = k_n$.

2. Если все результаты измерений случайно окажутся равными между собой, т. е. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, то, очевидно, будем иметь

$$\bar{x} = x. \quad (\text{IV.14})$$

По формуле (IV.12) для этого случая напомним

$$\bar{x} = x(k_1 + k_2 + \dots + k_n),$$

но, учитывая равенство (IV.14),

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1;$$

это еще раз подтверждает необходимость соблюдения условия (IV.13).

Коэффициенты $k_1, k_2, \dots, k_n$ найдем при условии, чтобы величина $\bar{x}$ была получена с наибольшей точностью, т. е. с возможно меньшей средней квадратической ошибкой.

Согласно формулам (IV.12) и (III.43) и принимая результаты x_i независимыми, получаем

$$m_x^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \dots + k_n^2 m_n^2. \quad (\text{IV.15})$$

Таким образом, задача свелась к задаче на условный экстремум: требуется найти минимум функции

$$m_x^2 = f(k_1, k_2, \dots, k_n) = m_1^2 k_1^2 + \dots + m_n^2 k_n^2,$$

есть переменные $k_1, k_2, \dots, k_n$ связаны условием

$$[k] - 1 = 0. \quad (\text{IV.16})$$

Задачу решим по методу Лагранжа. Напишем функцию Лагранжа

$$\Phi(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = m_1^2 k_1^2 + m_2^2 k_2^2 + \dots + m_n^2 k_n^2 - 2\lambda(k_1 + k_2 + \dots + k_n - 1),$$

где λ — подлежащий определению коэффициент, называемый множителем Лагранжа. Далее возьмем частные производные функции Φ по всем переменным k_i и приравняем их нулю

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k_i} = 2m_i^2 k_i - 2\lambda = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (IV.17)$$

откуда

$$k_i = \lambda \frac{1}{m_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (IV.18)$$

Возьмем теперь сумму этих равенств

$$[k] = \lambda \left[\frac{1}{m^2} \right].$$

Но, согласно (IV.16), сумма $[k] = 1$, поэтому

$$\lambda = \frac{1}{\left[\frac{1}{m^2} \right]}$$

и равенства (IV.18) примут вид

$$k_i = \frac{\frac{1}{m_i^2}}{\left[\frac{1}{m^2} \right]}. \quad (IV.19)$$

Выразив в линейной функции (IV.12) коэффициенты k_i через найденные для них значения, получим

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{m_i^2} x_i \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i^2}}. \quad (IV.20)$$

Формула (IV.20) решает поставленную задачу. Однако она может оказаться неудобной для вычислений, если величины m_i будут сильно отличаться от единицы. Для удобства вычислений выбирают безразмерный коэффициент μ^2 , на который умножают числитель и знаменатель правой части формулы (IV.20), после чего она примет вид

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu^2}{m_i^2} x_i \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{\mu^2}{m_i^2}}. \quad (IV.21)$$

Величину μ^2 выбирают с таким расчетом, чтобы отношения $\frac{\mu^2}{m_i^2}$ были возможно ближе к единице.

Для удобства вычислений измеренные величины выражают в таких единицах меры, чтобы величины m_i также были возможно ближе к единице. Так, например, если средние квадратические ошибки измеренных расстояний имеют порядок от 5 до 10 см, то расстояния и их средние квадратические ошибки удобнее выражать в дециметрах.

Величины $\frac{\mu^2}{m_i^2}$ называют весами соответствующих результатов x_i и обозначают через p_i , т. е.

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}. \quad (\text{IV.22})$$

С учетом выражения (IV.22) формула (IV.21) примет вид

$$\bar{x} = \frac{[px]}{[p]}. \quad (\text{IV.23})$$

Величину $\bar{x}$, полученную по формуле (IV.23), называют **весовым средним** или **общей арифметической средной**. Нетрудно видеть, что среднее весовое не изменит своей величины, если все веса будут умножены на какое-либо постоянное, не равное нулю, число. Отсюда следует, что для получения наиболее надежного значения неравноточно измеренной величины достаточно знать соотношения средних квадратических ошибок; сами же величины m_i могут оставаться неизвестными. Поясним это положение.

Предположим, нам известны отношения

$$\frac{m_r}{m_1} = g_1, \quad \frac{m_r}{m_2} = g_2, \quad \dots, \quad \frac{m_r}{m_r} = g_r = 1, \quad \dots, \quad \frac{m_r}{m_n} = g_n.$$

где m_r — средняя квадратическая ошибка некоторого результата x_r . Величины m_i ($i = 1, 2, \dots, r, \dots, n$) нам неизвестны. Приняв $\mu = cm_r$, где c также неизвестно, можно написать

$$g_i^2 = \frac{m_r^2}{m_i^2} = \frac{c^2 m_r^2}{c^2 m_i^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\mu^2}{m_i^2} = \frac{1}{c^2} p_i,$$

откуда

$$p_i = c^2 g_i^2. \quad (\text{IV.24})$$

Теперь формуле (IV.23) можно придать вид

$$\bar{x} = \frac{[px]}{[p]} = \frac{c^2 [g^2 x]}{c^2 [g^2]},$$

т. е.

$$x = \frac{[g^2 x]}{[g^2]}. \quad (\text{IV.25})$$

Таким образом, для вычисления $\bar{x}$ достаточно знать лишь отношения средних квадратических ошибок, т. е.

$$q_i = \frac{m_i}{m_l},$$

причем квадраты этих отношений будут играть роль весов. Однако останется неизвестным коэффициент μ , необходимый, как убедимся ниже, для оценки точности.

§ 43. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕСАХ; ОШИБКА ЕДИНИЦЫ ВЕСА

Веса являются вспомогательными числами при совместной обработке неравноточных или разнородных измерений.

В § 42 сказано, что если m_i — средняя квадратическая ошибка результата измерений, то вес p_i этого результата находят по формуле

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \quad (\text{IV.26})$$

где μ^2 — безразмерный коэффициент.

Изложенное понятие веса для измеренной величины принято и для любой функции F измеренных величин: вес P_F функции F при известной ее средней квадратической ошибке m_F вычисляют по формуле

$$P_F = \frac{\mu^2}{m_F^2}. \quad (\text{IV.27})$$

Таким образом, веса результатов измерений и их функций являются положительными числами, обратно пропорциональными квадратам их средних квадратических ошибок.

Если $p_i = 1$, то численно $\mu = m_i$. На этом основании величину μ называют «о ш и б к о й е д и н и ц ы в е с а». Она равна численному значению средней квадратической ошибки результата, вес которого численно равен единице и размерность может быть любой.

Согласно (IV.27), напишем

$$m_F = \frac{\mu}{\sqrt{P_F}} \quad (\text{IV.28})$$

и

$$\mu = m_F \sqrt{P_F}. \quad (\text{IV.29})$$

В соответствии с формулами (IV.26)–(IV.28) при вычислениях с весами в практике встречаются два типа задач:

- 1) установление весов неравноточных или разнородных результатов с целью совместной обработки этих результатов;
- 2) отыскание весов функций неравноточных или разнородных результатов для получения затем по формуле (IV.28) средней

квадратической ошибки m_F функции F , т. е. для оценки точности этой функции.

Как видно из формул (IV.26) и (IV.27), для установления весов по известным средним квадратическим ошибкам достаточно установить величину μ . Так как все веса в каждой конкретной задаче можно умножить или разделить на любое положительное не равное нулю число, то, очевидно, выбор величины μ при установлении весов ничем не ограничен ни в отношении ее числового значения, ни в отношении размерности. Поэтому величину μ проще всего считать безразмерной (отвлеченной). Отсюда следует еще, на основании формул (IV.26) и (IV.27), что размерность веса обратна размерности квадрата средней квадратической ошибки (дисперсии).

Формула (IV.28) является основной при оценке точности функций измеренных величин. Если коэффициент μ известен, то для подсчета средней квадратической ошибки m_F функции этих результатов нужно определить вес этой функции.

Веса однородных результатов являются относительными числами, и в тех случаях, когда неизвестны средние квадратические ошибки этих результатов, их веса можно устанавливать, используя соотношения средних квадратических ошибок, исходя, например, из числа измерений. В подобных случаях для получения оценок вычисленных значений функции обычно возникает необходимость определения ошибки единицы веса μ и весов вычисленных значений функций. Таким образом, задача оценки точности функций измеренных величин подразделяется на две задачи: определение ошибки единицы веса и определение весов функций.

§ 44. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕСОВ ФУНКЦИЙ

Задача определения весов функций является одной из основных задач теории ошибок.

Рассмотрим, как определить вес функции $F = f(x, y, \dots, u)$ по известным весам $p_x, p_y, \dots, p_u$ некоррелированных аргументов.

Вспользуемся формулой (III.41) для средней квадратической ошибки m_F функции F

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_0^2 m_u^2.$$

Разделив обе части последнего равенства на μ^2 , получим

$$\frac{m_F^2}{\mu^2} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0^2 \frac{m_x^2}{\mu^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0^2 \frac{m_y^2}{\mu^2} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_0^2 \frac{m_u^2}{\mu^2}.$$

Так как

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \quad (IV.30)$$

то окончательно напишем

$$\frac{1}{p_F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0^2 \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0^2 \frac{1}{p_y} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_0^2 \frac{1}{p_u}. \quad (IV.31)$$

Величину, обратную весу, называют обратным весом и обозначают обычно буквой q .

Для случая коррелированных аргументов, в соответствии с (III.40),

$$\frac{1}{P_F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \frac{1}{p_y} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_0 \frac{1}{p_u} + \\ + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \frac{r_{x,y}}{\sqrt{p_x \cdot p_y}} + \dots \quad (IV.32)$$

Примеры подсчетов весов функций.

1. Вес суммы неравноточных слагаемых

$$F = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

имеющих обратные веса соответственно $q_1, q_2, \dots, q_n$. По формуле (IV.32) напишем

$$q_F = q_1 + q_2 + \dots + q_n = [q]. \quad (IV.33)$$

Следовательно, обратный вес суммы неравноточных слагаемых равен сумме обратных весов слагаемых.

2. Вес и средняя квадратическая ошибка среднего весового. Представим формулу (IV.23) в виде

$$\bar{x} = \frac{p_1}{[p]} x_1 + \frac{p_2}{[p]} x_2 + \dots + \frac{p_n}{[p]} x_n.$$

Теперь применим формулу (IV.30)

$$\frac{1}{P_{\bar{x}}} = \frac{p_1^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_1} + \frac{p_2^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{p_n^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_n} = \frac{[p]}{[p]^2} = \frac{1}{[p]},$$

или

$$P_{\bar{x}} = [p]. \quad (IV.34)$$

т.е. вес среднего весового равен сумме весов результатов измерений.

Средняя квадратическая ошибка M среднего весового, согласно формулам (IV.28) и (IV.34), будет равна

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \quad (IV.35)$$

О способах получения ошибки единицы веса μ сказано в § 46.

3. Веса звеньев в системе высотных ходов.

Под системой высотных ходов будем понимать систему ходов геометрического или тригонометрического нивелирования, в которых высоты передаются через короткие стороны.

Напишем для звена между узловыми пунктами

$$(H_2 - H_1)_i = h_1 + h_2 + \dots + h_{n_i}$$

где $(H_2 - H_1)_i$ — измеренное значение разности высот концов i -го звена, имеющего n_i передач высот, h — измеренное значение превышения по одной передаче.

Считая точность одной передачи высоты по одной стороне или между двумя рейками одинаковой по всем звеньям и полагая ее вес равным p , легко найдем вес P_i звена, содержащего n_i передач,

$$\frac{1}{P_i} = \left[\frac{1}{p} \right]_i = \frac{n_i}{p},$$

или

$$P_i = \frac{p}{n_i}.$$

Так как все веса в одной задаче можно умножить на любое положительное не равное нулю число, то окончательно получим

$$P_i = \frac{c}{n_i}. \quad (\text{IV.36})$$

Коэффициент c подбирают так, чтобы веса звеньев P_i были близки к единице.

Для равнинной местности, когда можно считать, что длины сторон или расстояния между рейками приблизительно равны между собой, можно написать

$$P_i = \frac{c}{L_i}, \quad (\text{IV.37})$$

где L_i — длина хода.

4. Вес превышения, полученного тригонометрическим нивелированием.

Решая поставленную задачу, считаем источником ошибок тригонометрического нивелирования только ошибку измерения вертикальных углов. Тогда для установления весов можно учитывать только главный член формулы тригонометрического нивелирования

$$h = S \operatorname{tg} \alpha.$$

Если угол α невелик, то можно написать

$$h \approx S \cdot \alpha,$$

где угол α выражен в радианной мере.

Сторону S будем считать безошибочной. Тогда

$$\frac{1}{P_h} = S^2 \frac{1}{P_\alpha}.$$

Полагая точность измерения углов наклона одинаковой, получаем

$$P_h = \frac{c}{S^2}. \quad (\text{IV.38})$$

Число c подбирают так, чтобы веса P_h оказались близкими к единице.

5. Веса средних арифметических. В практике геодезических работ нередки случаи, когда приходится иметь дело с однородными величинами x_i , каждая из которых получена как среднее арифметическое из n_i приемов одинаковой точности, и систематические влияния не учитываются. В таких случаях среднюю квадратическую ошибку M_i величин x_i находят по формуле

$$M_i = \frac{m}{\sqrt{n_i}}, \quad (\text{IV.39})$$

где m — средняя квадратическая ошибка одного приема.

На основании равенства (IV.39) найдем

$$n_i = \frac{m^2}{M_i^2}.$$

Полагая $\mu^2 = cm^2$, находим

$$cn_i = \frac{cm^2}{M_i^2} = \frac{\mu^2}{M_i^2} = p_i$$

или

$$P_i = cn_i. \quad (\text{IV.40})$$

т. е. вес среднего арифметического пропорционален числу приемов при условии, если систематические ошибки измерений отсутствуют*. Как видно, систему весов в некоторых случаях практики можно устанавливать, не зная средних квадратических ошибок величин, участвующих в обработке.

При наличии систематических ошибок формула (IV.40) неприемлема и веса средних арифметических необходимо устанавливать по формуле

$$P_i = \frac{\mu^2}{M_i^2}, \quad (\text{IV.41})$$

где

$$M_i^2 = \frac{m_\Delta^2}{n_i} + \frac{m_\delta^2}{K_i},$$

для чего, конечно, необходимо знать характеристики систематических влияний m_δ и K_i [см. формулу (IV.5)].

Все полученные формулы для весов функций верны лишь при некоррелированных результатах измерений. Если же результаты измерений коррелированы, то веса определяют по формуле

$$P_F = \frac{\mu^2}{M_F^2},$$

где величина M_F должна определяться по формуле (III.40).

§ 46. ИССЛЕДОВАНИЕ РЯДА НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При исследовании ряда ошибок неравноточных однородных измерений эти ошибки предварительно нормируют, т. е. получают отношения $\frac{\theta_i}{m_i} = t_i$, сохраняя для t_i знаки θ_i . Ряд нормированных ошибок исследуют так же, как ряд ошибок равноточных измерений.

Если средние квадратические ошибки неизвестны, то нормированные выполняют по формуле (см. табл. 10)

$$u_i = \theta_i / \sqrt{p_i}.$$

* Что бывает весьма редко.

Так как

$$u_i = \theta_i \sqrt{\frac{\mu^2}{m_i^2}} = \mu \frac{\theta_i}{m_i} = \mu t_i, \quad (\text{IV.42})$$

то величины $u_i = \mu t_i$ рассматривают в дальнейшем как ошибки равногочных измерений. Очевидно, что умножение всех нормированных ошибок на некоторый постоянный коэффициент μ не изменит характера распределения ошибок.

§ 46. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОШИБКИ ЕДИНИЦЫ ВЕСА

Рассмотрим способы вычисления ошибки единицы веса μ , применяемые в геодезической практике.

1. Вычисление μ при установлении весов по известным средним квадратическим ошибкам измерений m_i . В этом случае веса устанавливают по формуле

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} = \frac{k}{m_i^2},$$

в которой коэффициент k назначается, и ошибку единицы веса μ вычисляют по формуле

$$\mu = \sqrt{k}. \quad (\text{IV.43})$$

2. Вычисление μ по известным средним квадратическим ошибкам и весам однородных результатов. Пусть известны средние квадратические ошибки m_i однородных результатов и независимо от средних квадратических ошибок m_i были одинаковым образом установлены веса p_i этих результатов, как, например, при выводе формул (IV.37) и (IV.40).

В этом случае для каждого результата вычисляют ошибку единицы веса μ_i

$$\mu_i = m_i \sqrt{p_i} \quad (\text{IV.44})$$

и окончательное значение μ находят по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_n^2}{n}}, \quad (\text{IV.45})$$

где n — число результатов, для которых были установлены m_i и p_i , причем предполагают, что надежность значений m_i примерно одинакова.

3. Вычисление μ по известным истинным ошибкам θ_i величин, независимо полученных измерениями, и весам p_i этих величин; $i = 1, 2, \dots, n$.

Возьмем математическое ожидание случайной величины $p\theta^2$

$$M(p\theta^2) = M\left(\frac{\mu^2}{m^2} \theta^2\right) = \mu^2 M\left(\frac{\theta^2}{m^2}\right),$$

но

$$\frac{\theta}{m} = t,$$

где t — нормированная ошибка.

Поэтому

$$M(p\theta^2) = \mu^2 M(t^2).$$

В § 14 показано, что дисперсия $D(t)$

$$M(t^2) = 1.$$

Следовательно,

$$\mu^2 = M(p\theta^2). \quad (IV.46)$$

Для практического применения напомним

$$\mu^2 = \frac{[P\theta^2]}{n}$$

и

$$\mu = \sqrt{\frac{[P\theta^2]}{n}}. \quad (IV.47)$$

Формула (IV.47) имеет исключительно важное значение в практике геодезических работ, так как позволяет наиболее надежно характеризовать точность измерений.

В качестве истинных ошибок θ_i чаще всего используют невязки, т. е. истинные ошибки функций, теоретические значения которых известны.

Пусть $x, y, \dots, u$ — измеренные значения величин, истинные значения которых $X, Y, \dots, U$ функционально связаны между собой следующим образом:

$$\varphi(X, Y, \dots, U) = 0. \quad (IV.48)$$

Для истинной ошибки θ_φ этой же функции с измеренными значениями, т. е. для $\varphi(x, y, \dots, u)$, напомним

$$\theta_\varphi = \varphi(x, y, \dots, u) - \varphi(X, Y, \dots, U).$$

Как видно, если какая-либо функция φ приведена к виду (IV.48), т. е. к равенству, в котором все его члены — в левой части, а в правой части — нуль, то значение этой функции с измеренными значениями аргументов будет ее истинной ошибкой, называемой в геодезии невязкой и обозначаемой обычно буквой W_φ , т. е.

$$\varphi(x, y, \dots, u) = W_\varphi.$$

Вес P_φ функции φ находят по правилам, изложенным в § 44.

Если имеется n функций, т. е. n значений невязок W , то по формуле (IV.47) можно вычислить среднюю квадратическую ошибку единицы веса μ , т. е.

$$\mu = \sqrt{\frac{[PW^2]}{n}}. \quad (IV.49)$$

В качестве функций φ необходимо брать такие, которые не содержат исходных данных. В противном случае невязки будут функциями не только результатов измерений, но и исходных данных, и на образование невязок будут действовать не только ошибки измерений, но и ошибки исходных данных. Так, например, для оценки точности измеренного угла в триангуляции следует использовать невязки суммы углов треугольников, но не рекомендуется пользоваться азимутными и координатными условными уравнениями.

В качестве примера использования формулы (IV.49) приведем вывод формулы итальянского геодезиста Ферреро, общепринятой для оценки точности измерения углов в триангуляции.

Обозначив через β углы сферического треугольника, напишем для любого i -го треугольника

$$W_i = \varphi_i(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)_i - \varepsilon_i - 180^\circ,$$

где ε_i — сферический избыток треугольника ($i = 1, 2, \dots, n$).

Считая углы равноточными с весом измеренного значения угла $p = 1$, т. е. считая ошибкой единицы веса значение средней квадратической ошибки измеренного угла, находим вес P_i функции φ_i

$$\frac{1}{P_i} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$P_i = \frac{1}{3}.$$

Пользуясь формулой (IV.49), находим

$$\mu = \sqrt{\frac{[PW^2]}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}[W^2]}{n}}$$

и окончательно

$$\mu = m_\beta = \sqrt{\frac{[W^2]}{3n}}, \quad (\text{IV.50})$$

где m_β — искомая средняя квадратическая ошибка измерения углов.

Формулу (IV.50) называют *формулой Ферреро*.

Используя формулы (IV.49) и (IV.5), можно получить характеристику систематических влияний m_δ для тех случаев, когда все измеренные величины однородны, измерялись одинаковым числом приемов n , делившихся на примерно одинаковое число групп K . В таких случаях значение μ , полученное по формуле (IV.49), будет в формуле (IV.5) величиной M , а именно

$$M^2 = \frac{m_\Delta^2}{n} + \frac{m_\delta^2}{K}.$$

Зная M , среднюю квадратическую ошибку одного приема m_Δ (по внутренней сходимости приемов), n и K , нетрудно получить из (IV.5) величину m_δ . Чаще всего используют именно такой путь получения характеристики m_δ .

4. Вычисление по внутренней сходимости результатов измерений. Рассмотрим случай, когда известны только результаты измерений и их веса, полученные косвенным путем; средние квадратические ошибки измерений неизвестны.

Напишем два равенства

$$\theta_i = x_i - X,$$

$$v_i = \bar{x} - x_i,$$

где X — истинное значение измеряемой величины, x_i — результат измерения одним приемом и $\bar{x}$ — среднее весовое из n приемов ($i = 1, 2, \dots, n$).

Сложим эти равенства

$$\theta_i + v_i = \bar{x} - X = \theta_{\bar{x}},$$

где $\theta_{\bar{x}}$ — истинная ошибка среднего весового.

Далее напишем

$$\theta_i = \theta_{\bar{x}} - v_i;$$

$$p_i \theta_i^2 = p_i \theta_{\bar{x}}^2 + p_i v_i^2 - 2 \theta_{\bar{x}} p_i v_i;$$

$$[p \theta^2] = \theta_{\bar{x}}^2 [p] + [p v^2] - 2 \theta_{\bar{x}} [p v]. \quad (\text{IV.51})$$

В последнем равенстве сумма $[p v]$ равна нулю. Действительно,

$$v_i = \bar{x} - x_i,$$

$$p_i v_i = p_i \bar{x} - p_i x_i,$$

$$[p v] = \bar{x} [p] - [p x];$$

принимая во внимание (IV.23), получаем

$$[p v] = 0. \quad (\text{IV.52})$$

Теперь равенство (IV.51) можно написать так:

$$[p \theta^2] = [p v^2] + \theta_{\bar{x}}^2 [p]. \quad (\text{IV.53})$$

Рассмотрим математическое ожидание левой и правой частей равенства (IV.53)

$$M([p \theta^2]) = \sum_{i=1}^n M(p_i \theta_i^2) = n M(p \theta^2).$$

На основании (IV.46) напишем

$$M([p \theta^2]) = n \mu^2. \quad (\text{IV.54})$$

Далее с учетом (IV.53)

$$M([p v^2]) + [p] M(\theta_{\bar{x}}^2) = n M(p v^2) + [p] M(\theta_{\bar{x}}^2). \quad (\text{IV.55})$$

Так как $\theta_{\bar{x}}$ — истинная ошибка $\bar{x}$ то, очевидно.

$$M(\theta_{\bar{x}}^2) = M^2.$$

где M — средняя квадратическая ошибка весового среднего $\bar{x}$.
Следовательно, на основании формулы (IV.35)

$$M(\theta_{\bar{x}}^2) = \frac{\mu^2}{[p]}. \quad (\text{IV.56})$$

Принимая во внимание равенства (IV.53), (IV.54), (IV.55) и (IV.56), получаем

$$n\mu^2 = nM(pv^2) + [p] \frac{\mu^2}{[p]},$$

или

$$\mu^2 = M(pv^2) + \frac{\mu^2}{n},$$

откуда

$$\mu^2 \cdot \frac{n-1}{n} = M(pv^2)$$

и

$$\mu^2 = \frac{n}{n-1} M(pv^2). \quad (\text{IV.57})$$

Величину $M(pv^2)$ заменим приближенно на $\frac{[pv^2]}{n}$. Тогда

$$\mu^2 \approx \frac{n}{n-1} \cdot \frac{[pv^2]}{n} = \frac{[pv^2]}{n-1}.$$

И, наконец,

$$\mu \approx \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}. \quad (\text{IV.58})$$

Формула (IV.58) решает поставленную задачу. Эту формулу называют формулой Бесселя.

Сравнительная характеристика различных способов вычисления ошибки единицы веса

Наиболее просто ошибку единицы веса можно определить по формуле (IV.43), когда известны средние квадратические ошибки результатов измерений.

Надежно величину μ можно получить по формуле (IV.49), по связкам IV, неотягощенным ошибками исходных данных, и если число невязок достаточно большое.

Сравним формулы (IV.58) и (IV.49). Каждая из них имеет свои достоинства и недостатки. Если число невязок большое, например порядка нескольких сотен, то доверительные границы для ошибки единицы веса, полученной по формуле (IV.49), будут достаточно тесными. Однако доверительные интервалы будут относиться к некоторому среднему комплексу условий и не будут отражать различие условий, т. е. конкретность разных комплексов. В этом отноше-

нии формула (IV.58) имеет преимущество, так как она отражает конкретные условия измерений. Недостатком этой формулы является обычно малый объем используемой информации. Следует учесть еще то обстоятельство, что на оценке точности по внутренней сходимости неблагоприятно отражаются односторонние действующие ошибки измерений, уменьшающие получаемые ошибки единицы веса. Но, с другой стороны, указанное обстоятельство позволяет выполнять анализ различных источников ошибок. Отсюда следует, что при наличии ошибки единицы веса, определенной по формуле (IV.49), необходимо применять и формулу (IV.58) с целью получения материала для анализа систематических влияний и влияния ошибок исходных данных.

§ 47. УСТАНОВЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ПРИ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Доверительные границы для истинного значения измеряемой величины и ее средней квадратической ошибки устанавливают также в зависимости от заданной доверительной вероятности и закона распределения ошибок. В свою очередь, закон распределения принимается в зависимости от числа «степеней свободы», использованных при получении ошибки единицы веса. Обозначим это число через r .

При оценке точности по внутренней сходимости $r = n - 1$.

При оценке точности по формуле (IV.49) число степеней свободы равно числу независимых связей. Независимыми связями являются ошибки независимых функций, т. е. таких функций, ни одна из которых не может быть получена как следствие остальных. Так, например, в двух смежных замкнутых нивелирных полигонах $r = 2$. Если эти полигоны имеют общую границу, то невязка по внешнему замкнутому контуру этих полигонов не является независимой, так как может быть получена как сумма двух невязок смежных полигонов. Однако для вычисления ошибки единицы веса следует использовать все возникающие невязки.

§ 48. ПОРЯДОК ОБРАБОТКИ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рекомендуется следующий порядок вычислений (табл. 19).

1. В графу 2 выписывают результаты измерений x_i и в графу 3 — их веса p_i . Вычисляют $[p]$.

2. Выбирают некоторое приближенное значение измеряемой величины x_0 и вычисляют разности $x_i - x_0 = \varepsilon_i$, записывая их в графу 4. Значение x_0 выбирают так, чтобы все разности ε_i были положительными.

3. В графе 6 вычисляют произведения $p_i \varepsilon_i$ и сумму $[p\varepsilon]$.

4. Вычисляют

$$\bar{x}_0 = x_0 + \frac{[p\varepsilon]}{p},$$

ошибку округления $\Delta_0 = \bar{x}_0 - \bar{x}$, где $\bar{x}$ — точное (неокругленное) значение.

5. В графе 5 вычисляют $v_i^0 = \bar{x}_0 - x_i$ и в графе 7 — произведения $p_i v_i^0$.

6. Вычисляют сумму $[p v^0]$ и проверяют контрольное равенство $[p v^0] \approx \Delta_0 [p]$.

Таблица 19
(Форма)

№ изме- рения	x_i	p_i	ε_i	v_i^0	$p_i \varepsilon_i$	$p_i v_i^0$	$p_i \varepsilon_i^2$	$p_i v_i^{0^2}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\frac{x_0}{[p \varepsilon]} - \frac{x_0}{[p]} - \bar{x}_0$ Δ_0	$[p]$			$[p \varepsilon]$	$[p v^0] \approx$ $\approx \Delta_0 [p]$	$\frac{[p \varepsilon^2]}{[p]}$	$\frac{[p v^{0^2}]}{[p]} \approx$ $\approx \frac{[p \varepsilon^2]}{[p]} - \frac{[p \varepsilon]^2}{[p]}$

7. В графе 8 вычисляют сумму

$$[p \varepsilon^2] = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i) (p_i \varepsilon_i)$$

и в графе 9 — сумму

$$[p v^{0^2}] = \sum_{i=1}^n (v_i^0) (p_i v_i^0).$$

8. Проверяют контрольное равенство

$$[p v^{0^2}] \approx [p \varepsilon^2] - \frac{[p \varepsilon]^2}{[p]}.$$

но

$$v_i^0 = \bar{x}_0 - x_i = x_0 + \frac{[p \varepsilon]}{[p]} - x_i = (x_0 - x_i) + \frac{[p \varepsilon]}{[p]},$$

Следовательно,

$$x_0 - x_i = -\varepsilon_i.$$

$$v_i^0 = \frac{[p \varepsilon]}{[p]} - \varepsilon_i.$$

Далее

$$[p v^{0^2}] = \sum_{i=1}^n p_i \left\{ \frac{[p \varepsilon]}{[p]} - \varepsilon_i \right\}^2 = \sum_{i=1}^n p_i \left\{ \frac{[p \varepsilon]^2}{[p]^2} + \varepsilon_i^2 - 2\varepsilon_i \frac{[p \varepsilon]}{[p]} \right\},$$

или

$$[p v^{0^2}] = \frac{[p \varepsilon]^2}{[p]} + [p \varepsilon^2] - 2 \frac{[p \varepsilon]^2}{[p]} = [p \varepsilon^2] - \frac{[p \varepsilon]^2}{[p]}.$$

9. Вычисляют ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^0]}{n-1}}.$$

Пример. На геополигоне МИИГАиК одна и та же линия измерена светодальномером ДС-2 15 раз (табл. 20) в разное время, разным числом приемов (n_i). Приписывая веса отдельных измерений пропорциональными числу приемов, вычисляют среднее весовое и его среднюю квадратическую ошибку (определить характеристику систематических влияний не удалось).

Таблица 20

x_i , м	n_i 10	$x_i - x_0$, см	$x_i^0 - x_i$, см	$n_i v_i$	$n_i v_i^0$	$n_i v_i^2$	$n_i v_i^0$
736,30	0,6	+5	+9,5	+3,0	+5,7		
736,25	0,6	0	+14,5	0	+8,7		
736,37	1,0	+12	+2,5	+12,0	+2,5		
736,48	0,5	+23	-8,5	+11,5	-4,2		
736,26	1,0	+1	+13,5	+1,0	+13,5		
736,48	1,0	+23	-8,5	+23,0	-8,5		
736,39	0,6	+14	+0,5	+8,4	+0,3		
736,37	1,0	+12	+2,5	+12,0	+2,5		
736,36	1,2	+11	+3,5	+13,2	+4,2		
736,48	0,3	+23	-8,5	+6,9	-2,6		
736,50	1,2	+25	-10,5	+30,0	-12,6		
736,52	0,6	+27	-12,5	+16,2	-7,5		
736,37	0,6	+12	+2,5	+7,2	+1,5		
736,40	0,6	+15	-0,5	+9,0	-0,3		
736,50	0,3	+25	-10,5	+7,5	-3,2		
$x_0 =$ = 736,25 м	$[p] =$ = 11,1			$[pv] =$ = +160,9	$-38,9$ + 38,9 $[pv^0] = 0$	$[pv^2] =$ = +3115,3 $\frac{[pv]^2}{[p]} =$ = 2332,3	$[pv^0] =$ = 783,5
$\frac{[pv]}{[p]} =$ = +14,5 см							
$x_0 =$ = 736,395 м							
$\Delta_0 =$ = +0,005 см							

Контроль:

$$[pv^0] = [pv^2] - \frac{[pv]^2}{[p]} = 3115,3 - 2332,3 = 783,0.$$

$$[pv^0] = \Delta_0 [p] = 0,005 \text{ см} \cdot 11,1 \approx 0.$$

$$\mu = \sqrt{\frac{783,5}{14}} = 7,5 \text{ см.}$$

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{7,5}{\sqrt{11,1}} = 2,3 \text{ см.}$$

§ 49. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В практике геодезических измерений нередко приходится измерять большое число однородных величин, причем каждую величину измеряют для контроля только два раза. Удовлетворительно оценить точность каждой измеренной величины при числе измерений $n = 2$ невозможно. Легко показать, что применение распределения Стьюдента при $n = 2$ для установления доверительных интервалов с принятой выше (0,99) надежностью дает лишь формальный ответ.

Возникает вопрос, нельзя ли, пользуясь всеми разностями двойных измерений однородных величин, оценить точность измерений?

Пусть некоторые однородные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ измерены каждая дважды и получено в результате измерений

$$\left. \begin{array}{l} \text{первого} \quad x'_1, x'_2, \dots, x'_n \\ \text{второго} \quad x''_1, x''_2, \dots, x''_n \end{array} \right\}. \quad (\text{IV.59})$$

Пользуясь рядами (IV.59), можно вычислить разности двойных измерений

$$\left. \begin{array}{l} d_1 = x'_1 - x''_1 \\ d_2 = x'_2 - x''_2 \\ \dots \dots \dots \\ d_n = x'_n - x''_n \end{array} \right\} \quad (\text{IV.60})$$

и использовать эти разности для оценки точности.

В практике обычно встречаются два случая: все измерения x'_i и x''_i равноточны и случай, когда измерения в парах равноточны, но пары между собой неравноточны.

Рассмотрим первый случай.

Пусть все величины x'_i и x''_i в рядах (IV.59) равноточны. Если бы измерения были безошибочными, то, очевидно, разности $x'_i - x''_i$ в правой части каждого равенства (IV.60) были бы равны нулю. Следовательно, каждая разность d_i есть истинная ошибка самой разности и для средней квадратической ошибки m_d разности d можно написать

$$m_d^2 = M(d^2)$$

и приближенно

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \quad (\text{IV.61})$$

где n — число всех разностей.

Обозначим среднюю квадратическую ошибку одного измерения через m_Δ и по правилу для средней квадратической ошибки алгебраической суммы равноточных слагаемых напомним

$$m_d = m_\Delta \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$m_\Delta \sqrt{2} = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}},$$

откуда

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (IV.62)$$

Наиболее надежные значения $\bar{x}_i$ величин X_i , каждая из которых измерена два раза, вычисляют как средние арифметические из соответствующих результатов измерений x'_i и x''_i , т. е.

$$\bar{x}_i = \frac{x'_i + x''_i}{2}.$$

Так как $m_{x'} = m_{x''} = m_{\Delta}$, то на основании формулы (IV.62) для средней квадратической ошибки $m_{\bar{x}}$ вычисленных значений величин X_i напишем

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_{\Delta}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \quad (IV.63)$$

Если имеем два равноточных результата измерений одной и той же величины, выполненных одинаково, то можно полагать, что их систематические ошибки близки одна к другой и систематическое влияние разности таких результатов будет в значительной мере погашаться. Поэтому систематические ошибки в разностях d_i двойных результатов измерений называют остаточными систематическими ошибками.

При достаточно большом числе n двойных измерений среднюю величину $\delta_{\text{ср}}$ остаточной систематической ошибки в разностях d_i на основании компенсационного свойства случайных ошибок находят как среднее арифметическое из этих разностей, т. е.

$$\delta_{\text{ср}} = \frac{[d]}{n}. \quad (IV.64)$$

Величину $\delta_{\text{ср}}$ при обработке двойных измерений исключают из разностей d_i и находят величины ε_i

$$\varepsilon_i = d_i - \delta_{\text{ср}}. \quad (IV.65)$$

По свойству уклонений отдельных чисел от их среднего арифметического будем иметь

$$[\varepsilon] = 0, \quad (IV.66)$$

в чем на основании равенства (IV.64) легко убедиться:

$$[\varepsilon] = [d] - \delta_{\text{ср}}n = 0.$$

Так как величины d_i получены из измерений, то уклонения ε_i можно рассматривать как уклонение от средней разностей d_i и по известной формуле Бесселя (IV.58) для средней квадратической ошибки m_d любой разности d_i написать

$$m_d = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n-1}}; \quad (IV.67)$$

для средней квадратической ошибки m_{Δ} одного измерения отсюда легко получим

$$m_{\Delta} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[\epsilon^2]}{2(n-1)}}. \quad (\text{IV.68})$$

Вычисление суммы $[\epsilon^2]$ контролируется по формуле

$$[\epsilon^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}, \quad (\text{IV.69})$$

вывод которой аналогичен выводу формулы (IV.11).

Для вычисления средней квадратической ошибки m_{Δ} одного измерения мы получили формулы (IV.62) и (IV.68). Поэтому возникает вопрос: при каком систематическом влиянии $\delta_{\text{ср}}$ следует пользоваться формулой (IV.68)?

Если в качестве условия, при котором можно не применять формулы (IV.65) и (IV.69), принять неравенство

$$|\delta_{\text{ср}}| \leq \frac{1}{5} m_d,$$

то на основании соотношения между средней и средней квадратической ошибками напишем

$$|\delta_{\text{ср}}| = \frac{|[d]|}{n} \leq 1.25 \frac{|[d]|}{5n}$$

или

$$|[d]| \leq 0.25 |[d]|, \quad (\text{IV.70})$$

где $|[d]| = |d_1| + |d_2| + \dots + |d_n|$.

Если условие (IV.70) окажется выполненным, то для получения характеристики m_{Δ} случайных влияний на одно измерение следует пользоваться формулой (IV.62).

Заметим, что если $|\delta_{\text{ср}}| \geq \frac{1}{5} m_d$, т. е. если $|[d]| \geq 0.25 |[d]|$, то причины появления такого значения систематических влияний и способы их учета необходимо специально исследовать. Можно отметить также, что по величине $\delta_{\text{ср}}$ нельзя судить о систематических ошибках измерений x' и x'' , так как $\delta_{\text{ср}}$ представляет собой среднее значение лишь остаточных систематических ошибок.

Таким образом, по двойным измерениям можно получить оценку лишь случайных влияний, т. е. только m_{Δ} .

§ 50. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Пусть каждая из однородных величин X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) измерена дважды и независимо, причем измерения в каждой паре равноточны, а пары между собой неравноточны. Вычислим разности d_i в каждой паре измерений

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= x'_1 - x''_1 \\ d_2 &= x'_2 - x''_2 \\ &\dots \dots \dots \\ d_n &= x'_n - x''_n \end{aligned} \right\}. \quad (\text{IV.71})$$

Обозначим через p_i веса измерений в i -й паре, т. е.

$$p_i = p_{x_i'} = p_{x_i''}. \quad (\text{IV.72})$$

Веса P_i разностей d_i легко найдем

$$P_i = \frac{p_i}{2}. \quad (\text{IV.73})$$

Величины d_i являются истинными ошибками каждой i -й разности. Следовательно, по формуле (IV.47) для средней квадратической ошибки единицы веса μ можно написать

$$\mu = \sqrt{\frac{d_1^2 \frac{p_1}{2} + d_2^2 \frac{p_2}{2} + \dots + d_n^2 \frac{p_n}{2}}{n}},$$

или

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}. \quad (\text{IV.74})$$

Наиболее надежные значения $\bar{x}_i$ искоемых величин X_i получим, очевидно, как простые средние арифметические

$$\bar{x}_i = \frac{x_i' + x_i''}{2},$$

причем вес $P_{\bar{x}_i}$ каждого из значений $\bar{x}_i$ будет

$$P_{\bar{x}_i} = 2p_i.$$

Следовательно, средние квадратические ошибки $m_{\bar{x}_i}$ значений $\bar{x}_i$ найдем по формуле

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \quad (\text{IV.75})$$

Среднее значение $\delta_{\text{ср}}$ систематических ошибок, влияющих на разности d_i , может быть вычислено по формуле

$$\delta_{\text{ср}} = \frac{[Pd]}{P}. \quad (\text{IV.76})$$

Аналогично выражению (IV.70) критерием применимости формулы (IV.74) может служить неравенство

$$|[d\sqrt{P}]| \leq 0.25 |[d\sqrt{P}]|, \quad (\text{IV.77})$$

где

$$|[d\sqrt{P}]| = |d_1| \sqrt{P_1} + |d_2| \sqrt{P_2} + \dots + |d_n| \sqrt{P_n}.$$

Если условие (IV.77) не выполнено, то по формуле (IV.76) вычисляют $\delta_{\text{ср}}$, затем

$$\varepsilon_i = d_i - \delta_{\text{ср}} \quad (\text{IV.78})$$

и, наконец,

$$\mu = \sqrt{\frac{[P\epsilon^2]}{2(n-1)}}. \quad (IV.79)$$

Заметим, что вычисление ϵ_i по формуле (IV.78) правомерно в том случае, когда все разности d_i содержат примерно одинаковые систематические ошибки. Более сложные случаи будут рассмотрены во второй части данной главы.

В практике при обработке двойных измерений встречаются также случаи, когда измерения в парах неравноточны, т. е. когда

$$p_{x_i'} \neq p_{x_i''} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В таких случаях веса P_i разностей d_i находят так:

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_{x_i'}} + \frac{1}{p_{x_i''}} = \frac{p_{x_i'} + p_{x_i''}}{p_{x_i'} \cdot p_{x_i''}}$$

или

$$P_i = \frac{p_{x_i'} \cdot p_{x_i''}}{p_{x_i'} + p_{x_i''}}. \quad (IV.80)$$

Весовые средние значения $\bar{x}_i$ измеренных величин и их средние квадратические ошибки $m_{\bar{x}_i}$ при неравноточных измерениях в парах будут

$$\bar{x}_i = \frac{x_i' p_{x_i'} + x_i'' p_{x_i''}}{p_{x_i'} + p_{x_i''}}; \quad (IV.81)$$

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{x_i'} + p_{x_i''}}}, \quad (IV.82)$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{[Pd^2]}{n}}. \quad (IV.83)$$

§ 51. ПРИМЕРЫ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Пример 1. Двумя наблюдателями произведены измерения одних и тех же линий топографическим светодальномером СТ-61. Вычислить среднюю квадратическую ошибку одного измерения одним наблюдателем и среднее из двух измерений, полагая измерения равноточными*.

Решение.

1. Критерий допустимости $\delta_{\text{ср}}: 0,25 [d] = 0,25 \cdot 29 = 7,2$;
 $[d] > 0,25 \times [d] \quad (23,6 > 7,2).$

Величиной $\delta_{\text{ср}}$ пренебрегать нельзя.

2. Остаточное влияние систематических ошибок

$$\delta_{\text{ср}} = \frac{+23.6}{7} = +3.4 \text{ см.}$$

* Специальными исследованиями установлено, что абсолютная ошибка светодальномерных измерений практически одинакова для линий от 0,2 до 3—4 км.

Таблица 21

результаты измерений S_i , м		Разность d_i , см	e_i , см	e_i^2
1-й наблюдатель	2-й наблюдатель			
967,480	967,398	+9,1	+5,7	32,5
752,468	752,412	+5,6	+2,2	4,8
692,223	692,250	-2,7	-6,1	37,2
1023,536	1023,536	0,0	-3,4	11,6
808,457	808,444	+1,3	-2,1	4,4
612,692	612,665	+2,7	-0,7	0,5
675,158	675,082	+7,6	+4,2	17,6
		+26,3 -2,7	-0,2	108,6
		$[d] = 29,0$ $[d] = +23,6$ $\delta_{\text{ср}} = +3,4$		

3. Средняя квадратическая ошибка одного измерения

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{[e^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{108,6}{12}} = 3,0 \text{ см.}$$

4. Средняя квадратическая ошибка средних из двух измерений

$$m_{\bar{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{108,6}{6}}, \quad m_{\bar{x}} = 2,1 \text{ см.}$$

5. Относительные ошибки

$$\frac{m_{\Delta}}{S_{\text{ср}}} = \frac{3,0 \text{ см}}{79\,000 \text{ см}}; \quad \frac{m_{\Delta}}{S_{\text{ср}}} = \frac{1}{26\,000};$$

$$\frac{m_{\bar{x}}}{S_{\text{ср}}} = \frac{2,1 \text{ см}}{79\,000 \text{ см}}; \quad \frac{m_{\bar{x}}}{S_{\text{ср}}} = \frac{1}{38\,000}.$$

П р и м е ч а н и е. При дальнейших исследованиях было обнаружено, что величина $\delta_{\text{ср}}$ есть личная ошибка второго наблюдателя при определении постоянной прибора. Она устойчиво держалась на протяжении целого сезона работ и оказалась равной $\delta_{\text{ср}} = +3,0$ см.

Пример 2. Превышения на 10 станциях нивелирного хода определяли при двух горизонтах инструмента. Найти средние квадратические ошибки превышения на станции, измеренного при одном горизонте, при двух горизонтах, и отсчета по рейке (табл. 22).

Р е ш е н и е.

1. Критерий допустимости $\delta_{\text{ср}}$: $0,25 [d] = 6,2$; $[d] < 0,25 [d]$, так как $1 < 6,2$. Систематическими влияниями при оценке точности можно пренебречь.

2. Средняя квадратическая ошибка разности d_i

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} = \sqrt{\frac{65}{10}}, \quad m_d = 2,5 \text{ мм.}$$

Таблица 22

№ станции	Превышение, мм		d_i , мм	d_i^2
	h'	h''		
1	-1561	-1564	+3	9
2	-1484	-1482	-2	4
3	-1370	-1373	+3	9
4	+102	+105	-3	9
5	+2184	+2182	+2	4
6	+1219	+1222	-3	9
7	-100	-102	+2	4
8	-153	-151	-2	4
9	+1201	+1198	+3	9
10	+157	+159	-2	4
			+13 -12 [d] = 25 [d] = +1	65

3. Средняя квадратическая ошибка превышения, измеренного при одном горизонте.

$$m_h = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \frac{2.5 \text{ мм}}{\sqrt{2}}, \quad m_h = 1.8 \text{ мм.}$$

4. Средняя квадратическая ошибка превышения, измеренного при двух горизонтах,

$$h_{\text{ср}} = \frac{h'_i - h''_i}{2};$$

$$m_{h_{\text{ср}}} = \frac{1.8 \text{ мм}}{\sqrt{2}} = 1.3 \text{ мм.}$$

5. Средняя квадратическая ошибка отсчета по рейке ($h = a - b$, где a и b — отсчеты): $m_h^2 = m_a^2 + m_b^2$; $m_a = m_b = m_0$, где m_0 — средняя квадратическая ошибка отсчета,

$$m_0 = \frac{m_h}{\sqrt{2}} = \frac{1.8 \text{ мм}}{\sqrt{2}}, \quad m_0 = 1.3 \text{ мм.}$$

Пример 3. Даны разности суммы превышений в нивелирных ходах в прямом и обратном направлениях и число станций по ходам (табл. 23). Определить среднюю квадратическую ошибку одиночного хода в 10 станций (одни условный километр) и двойного хода той же длины.

Решение.

1. Критерий допустимости

$$0.25 \|[d]\sqrt{P}\| = 0.25 \cdot 78.9 \approx 19; \quad \|[d]\sqrt{P}\| < 0.25 \|[d]\sqrt{P}\|,$$

так как $6.1 < 19$.

Следовательно, систематическими влияниями при оценке точности можно пренебречь.

Таблица 23

№ хода	Разность d_i , мм	Число станций k_i	Вес разности $P_i = \frac{10}{k_i}$	$d_i \sqrt{P_i}$	$P_i d_i$	$P_i d_i^2$
1	+4	7	1,43	+4,8	+5,7	
2	-14	27	0,37	-8,5	-5,2	
3	-9	13	0,77	-7,9	-6,9	
4	+15	25	0,40	+9,5	+6,0	
5	-12	32	0,31	-6,7	-3,7	
6	+11	15	0,67	+9,0	+7,4	
7	-12	19	0,53	-8,7	-6,4	
8	+13	18	0,56	+9,7	+7,3	
9	+12	16	0,62	+9,5	+7,4	
10	-7	23	0,43	-4,6	-3,0	
			6,09	+42,5 -36,4	+33,8 -25,2	665
			[d \sqrt{P}] = +6,1		+8,6	
			[d \sqrt{P}] = +78,9			

2. Средняя квадратическая ошибка одиночного хода в 10 станций

$$\mu_{10} = \sqrt{\frac{655}{2 \cdot 10}}; \quad \mu_{10} = 5,7 \text{ мм.}$$

3. Средняя квадратическая ошибка $\mu_{10(\text{ср})}$ двойного хода, т. е. среднего из двух ходов, в 10 станций

$$\mu_{10(\text{ср})} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{655}{10}}; \quad \mu_{10(\text{ср})} = 4,0 \text{ мм.}$$

Пример 4. 37 линий измерены светодальномером СТ-61 двумя наблюдателями и позднее — проволоками. В результате получены разности двойных измерений и истинные ошибки измерений (табл. 24). Произвести оценку точности по разностям двойных измерений и по истинным ошибкам.

Решение.

1. Критерий допустимости для $||d||$

$$0,25 ||d|| = 0,25 \cdot 94,4 \approx 24; \quad ||d|| < 0,25 ||d||,$$

так как $22,8 < 24$.

2. Средняя квадратическая ошибка одного измерения длины линии светодальномером, подсчитанная по разностям d_i ,

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{356}{2 \cdot 37}}; \quad m_{\Delta} = 2,2 \text{ см.}$$

Таблица 24
(форма)

Длина линии S_i измеренная, м			Истинная ошибка θ_i , см		Разность $d_i = S_i' - S_i''$, см	θ_i^2	θ_i^{*2}	d_i^2
СТ-61 1-й наблю- датель	СТ-61 2-й наблю- датель	прово- локам (точная)	1-й наблю- датель, θ_i'	2-й наблю- датель, θ_i''				
214,945	214,951	214,940	+0,5	+1,1	-0,6			
231,408	231,406	231,417	-0,9	-1,1	+0,2			
243,021	243,041	243,006	+1,5	+3,5	-2,0			
247,370	247,362	247,330	+4,0	+3,2	+0,8			
267,394	267,367	267,411	-1,7	-4,4	+2,7			
275,732	275,792	275,786	-5,4	+0,6	-6,0			
276,375	276,396	276,408	-3,3	-1,2	-2,1			
292,277	292,297	292,306	-2,9	-0,9	-2,0			
324,436	324,466	324,503	-6,7	-3,7	-3,0			
347,305	347,336	347,358	-5,3	-2,2	-3,1			
350,447	350,435	350,467	-2,0	-3,2	+1,2			
368,915	368,926	368,943	-2,8	-1,7	-1,1			
370,545	370,543	370,543	+0,2	0,0	+0,2			
370,846	370,832	370,853	-0,7	-2,1	+1,4			
371,942	371,960	371,963	-2,1	-0,3	-1,8			
375,150	375,196	375,188	-3,8	+0,8	-4,6			
399,253	399,322	399,264	-1,1	+5,8	-6,9			
406,203	406,218	406,185	+1,8	+3,3	-1,5			
411,919	411,961	412,004	-8,5	-4,3	-4,2			
420,192	420,154	420,175	+1,7	-2,1	+3,8			
440,358	440,358	440,354	+0,4	+0,4	0,0			
463,794	463,822	463,826	-3,2	-0,4	-2,8			
471,458	471,420	471,474	-1,6	-5,4	+3,8			
509,738	509,754	509,790	-5,2	-3,6	-1,6			
517,504	517,487	517,525	-2,4	-4,1	+1,7			
551,857	551,854	551,849	+0,8	+0,5	+0,3			
575,273	575,300	575,298	-2,5	+0,2	-2,7			
592,023	592,042	592,037	-1,4	+0,5	-1,9			
593,343	593,305	593,315	+2,8	-1,0	+3,8			
608,190	608,164	608,200	-1,0	-3,6	+2,6			
612,672	612,675	612,704	-3,2	-2,9	-0,3			
675,138	675,092	675,116	+2,2	-2,4	+4,6			
692,203	692,260	692,208	-0,5	+5,2	-5,7			
752,448	752,422	752,436	+1,2	-1,4	+2,6			
808,437	808,454	808,447	-1,0	+0,7	-1,7			
967,469	967,408	967,437	+3,3	-2,8	+6,1			
1023,516	1023,546	1023,528	-1,2	+1,8	-3,0			
					-58,6 +35,8	348	280	356
$[d] = -22,8$ $[d] = 94,4$								

3. Средняя квадратическая ошибка среднего из двух измерений $\bar{d}_1$ длины линии, подсчитанная по разностям d_1 ,

$$m_{\bar{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{356}{37}}, \quad m_{\bar{x}} = 1,6 \text{ см.}$$

4. Средняя квадратическая ошибка m одного измерения, вычисленная по истинным ошибкам обоих наблюдателей,

$$m = \sqrt{\frac{[\theta'^2] + [\theta''^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{628}{74}};$$

$$m = 2,9 \text{ см.}$$

5. Средняя квадратическая ошибка $m_{\text{ср}}$ среднего из двух измерений, подсчитанная по истинным ошибкам,

$$m_{\text{ср}} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{2,9 \text{ см}}{\sqrt{2}}, \quad m_{\text{ср}} = 2,1 \text{ см.}$$

Величина m_{Δ} , полученная по разностям двойных измерений и равная 2,2 см. характеризует влияние случайных ошибок на одно измерение. Средняя квадратическая ошибка m , полученная по истинным ошибкам и равная 2,9 см, характеризует совместное влияние случайных и систематических ошибок. Следовательно, среднее квадратическое значение влияния систематических ошибок на одно измерение длины линии

$$m_{\delta} = \sqrt{(2,9)^2 - (2,2)^2} = 1,9 \text{ см.}$$

Заметим, что величина $m_{\bar{x}} = 1,6$ см, подсчитанная по разностям двойных измерений, оказалась меньше $m_{\text{ср}}$, подсчитанной по истинным ошибкам и равной 2,1 см. что и следовало ожидать.

§ 52. ДОПУСКИ ДЛЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ФУНКЦИЙ

Допуски назначают для определения сомнительных результатов измерений, содержащих возможные грубые ошибки. Такие ошибки могут возникать из-за незамеченных в процессе измерения промахов наблюдателя (в самих измерениях либо в записях их результатов), или аномальных нарушений условий измерений.

Задача установления допусков решается на основе метода доверительных интервалов. Поэтому прежде всего необходимо условиться о доверительной вероятности β . В геодезической практике общепринята доверительная вероятность $\beta = 0,99$, что соответствует значению $t = 2,6$ при нормальном законе распределения (т. е. когда известно достаточно точное значение m). Для распределения Стьюдента (т. е. когда приходится пользоваться приближенным значением m') величина t' будет зависеть от числа результатов измерений: доверительную вероятность и в этом случае будем брать такую же, т. е. $\beta = 0,99$.

Понятие «грубая ошибка», если не было своевременно замечено очевидного промаха, в известной степени условно и зависит

от принятой доверительной вероятности. Мы приняли $\beta = 0,99$, т. е. уровень значимости $\alpha = 0,01$. Это означает, что при массовых измерениях вместе с грубыми ошибками будет забракован 1% доброкачественных результатов, с чем приходится мириться, поскольку теория вероятностей других решений не дает.

Допуски устанавливаются как для внутренней сходимости результатов измерений одной величины, так и для невязок, т. е. для погрешностей функций измеренных величин.

1. Допуски для внутренней сходимости

При многократных измерениях одной величины в геодезической практике применяют допуски «на размах» в серии измерений. Размахом называют разность $R_n = x_n - x_1$, где x_n — наибольший результат в серии, x_1 — наименьший. Если результаты измерений подчиняются нормальному закону распределения, то нормированный размах $\frac{R_n}{m_\Delta} = \frac{x_n - x_1}{m_\Delta}$ также подчиняется определенному закону «распределения размаха», т. е. распределения вероятностей размаха, зависящих от n — числа измерений в сериях (см. [50], табл. III приложений). Таким образом, распределение размаха можно применять для отбраковки результатов по их внутренней сходимости, когда известно с достаточной точностью значение $\sigma = m_\Delta$. Конечно, величина m_Δ должна быть определена, во всяком случае, не менее как из 20 измерений.

Применяя для отбраковки распределение размаха, надо учитывать следующие обстоятельства:

1) это распределение достаточно обосновано лишь при $n \leq 12$, а при $n > 12$ его применять нельзя;

2) при заметном изменении комплекса условий почти всегда изменяется и математическое ожидание результатов измерений;

3) при недопустимом размахе (т. е. когда он выходит за пределы доверительного интервала) бракуют и бисерируют, как правило, только один из крайних результатов, а не всю серию результатов.

Учитывая указанные обстоятельства, отбраковку результатов по внутренней сходимости многократных измерений одной величины рекомендуется делать следующим образом:

1) ряд измерений подразделяется на несколько серий, выполненных в однородных условиях (утренние или вечерние наблюдения углов, наблюдения в пасмурную, в солнечную, в тихую или ветреную погоду, измерения расстояния на разных частотах, астрономические определения в разные дни и т. д.); в каждой серии число $n \leq 12$;

2) отбраковку результатов производят в каждой серии отдельно, не учитывая результаты других серий;

3) при использовании таблицей распределения размаха в качестве входного аргумента (кроме числа n) берется не заданная доверительная вероятность $\beta = 0,99$, а вероятность $\beta' = 1 - 0,01n$, т. е. уровень значимости $\alpha = 0,01n$; в этом случае при k сериях по n измере-

ний в каждой будет забраковано в среднем $0,01kn$ измерений, т. е. $\frac{1}{100}$, что и требуется.

Ниже приведены значения нормированного размаха $\frac{x_n - x_1}{m_\Delta} = \frac{R_n}{m_\Delta}$ при вероятности $\beta' = 1 - 0,01n^*$. Исключение составляет случай, когда $n = 2$. Тогда $\beta' = \beta = 0,99$, поскольку при недопустимом размахе бракуются оба результата.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{R_n}{m_\Delta}$	3,64	3,6	3,8	3,9	4,0	4,0	4,1	4,1	4,1	4,2	4,2

Получив $\frac{R_n}{m_\Delta}$, далее вычисляют допустимый размах

$$(x_n - x_1)_{\text{доп}} = \left(\frac{R_n}{m_\Delta} \right) m_\Delta.$$

Пример. При измерениях горизонтальных углов величина $m_\Delta \approx 1,5''$. При первой видимости выполнено 7 приемов. Отсюда допустимый размах $(x_n - x_1)_{\text{доп}} = 4,0 \cdot 1,5'' = 6''$.

2. Способ последовательного анализа

Если точность измерений неизвестна, то можно поставить условие достижения определенной точности для среднего значения $\bar{x}$. Однако в основу решения принимается доверительный интервал для математического ожидания, т. е. учитывается только влияние случайных ошибок измерений. При наличии заметных систематических влияний предлагаемое решение требует корректив.

Предположим, что при измерении величины X задано значение σ_X , которого мы стремимся достичь. Тогда доверительный интервал (при $\beta = 0,99$) будет равен $2,6\sigma_X$.

Ставим задачу: выполнять измерения до тех пор, пока доверительный интервал по Стьюденту не станет равным или меньше величины $2,6\sigma_X$, т. е. пока не будет удовлетворено неравенство

$$t' \frac{m'_\Delta}{\sqrt{n}} \leq 2,6\sigma_X, \quad (\text{IV.84})$$

где m'_Δ находят по формуле (II.16), т. е.

$$m'_\Delta = \sqrt{\frac{[(x - \bar{x})^2]}{n-1}},$$

а t' получают из прил. 5 по аргументам $\beta = 0,99$ и $r = n - 1$. Исключение измерений с грубыми ошибками может производиться

* При наличии периодических инструментальных ошибок, которые компенсируются в значении $\bar{x}$, допуск на размах должен быть соответственно увеличен.

по размаху лишь после того, как число измерений станет не менее 20. Необходимо, однако, как уже указывалось, иметь в виду, что точность полученного результата x будет зависеть в значительной мере от систематических ошибок. Поэтому выполнение условия (IV.84) недостаточно. Чтобы реально повысить точность среднего значения $\bar{x}$, необходимо еще разнообразить комплекс условий измерений, о чем говорилось при выводе формулы (IV.5).

3. Допуски для невязок

Как известно, невязкой называется погрешность функции $\varphi(X_1, \dots, X_n) = 0$, где X — истинные значения аргументов, т. е. величина $W = \varphi(x_1, \dots, x_n)$; здесь x — измеренные значения аргументов.

Если известны средние квадратические ошибки аргументов m , что почти всегда бывает в геодезическом производстве, где эти характеристики находят из обширного статистического материала, то допуски для невязок получают следующим образом:

1) вычисляют

$$W_{\text{ср}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 \cdot m_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)^2 \cdot m_n^2}; \quad (\text{IV.85})$$

2) получают допустимое значение невязки

$$W_{\text{доп}} = 2,6W_{\text{ср}}. \quad (\text{IV.86})$$

В тех случаях, когда точность аргументов неизвестна (например, при исследовании новых приборов и инструментов), задачу отбраковки невязок можно решить только для односторонних невязок (например, для невязок треугольников, все углы которых измерены равноточно). В таких случаях используется для отбраковки распределение Стьюдента и задача решается следующим образом:

1) получают среднее значение невязок

$$\bar{W} = \frac{[W]}{n}; \quad (\text{IV.87})$$

2) вычисляют

$$W'_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{[(W - \bar{W})^2]}{n-1}}; \quad (\text{IV.88})$$

3) получают допустимую невязку

$$W'_{\text{доп}} = t' \cdot W'_{\text{ср}}, \quad (\text{IV.89})$$

где величину t' выбирают из прил. 5 по аргументам

$$\beta = 0,99 \text{ и } r = n - 1*.$$

Необходимо иметь в виду, однако, что при малом объеме статистического материала исследований отбраковка результатов требует

* При отбраковке невязок доверительный интервал откладывается от $M(W) = 0$.

особого внимания и большой осторожности, так как ценность каждого результата при этом значительно повышается — он может внести ценную информацию.

Тщательный анализ результатов измерений общих аргументов недопустимых невязок и сопоставление этих невязок поможет обнаружить сомнительные измерения, которые необходимо повторить.

В заключение заметим, что наиболее надежный путь установления допусков как для внутренней сходимости, так и для невязок — достаточно обширный производственный материал и вывод на основе этого соответствующих характеристик случайных и систематических влияний. При малом опыте применения новых измерительных средств установление допусков — задача, которую можно выполнить только приближенно. Если процент забракованных результатов сильно отличается от 1%, то это признак неудачного установления допусков. Последовательным уточнением допусков необходимо добиваться, чтобы средний процент отсеянных результатов приближался к 1%, поскольку принято $\beta = 0,99$.

Часть вторая

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Глава V

ОСНОВЫ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§ 53. СУЩНОСТЬ ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОГО УРАВНИВАНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Теория ошибок измерений дает правила математической обработки многократных измерений одной величины. По этим правилам задача обработки измерений решалась бы полностью, если бы для достижения цели измеряли только необходимые величины (например, в треугольнике с одной известной стороной измерены только два угла). Однако в геодезической практике, кроме необходимых, измеряют всегда избыточные величины, связанные математическими соотношениями с необходимыми (например, в треугольнике измеряют три угла). Избыточные измерения повышают точность определяемых величин и позволяют производить наиболее надежную оценку их точности на основании математических связей между измеренными величинами. Кроме того, получаемые невязки обеспечивают надежный контроль измерений и их отбраковку.

Правила теории ошибок для получения наиболее надежных значений из многократных измерений отдельных величин не учитывают математических связей между этими величинами. Поэтому вычисленные по формулам теории ошибок значения измеренных величин приходится при совместной их обработке исправлять, учитывая при этом математические связи между ними. В этом и заключается основная задача второй части данного курса.

Заметим, что отыскание значений измеренных величин по правилам второй части курса и называется **уравнением**. Иногда «уравновешиванием», но этот термин представляется неудачным, так как после «уравновешивания» даже равноточно измеренные величины почти всегда становятся неравноточными.

Естественно, возникает вопрос: нельзя ли задачи, решаемые первой и второй частями курса, объединить? Это сделать можно, но задача значительно усложнится, а выгоды не получим никакой. Дело заключается в том, что принятый раздельный порядок уравнивания,

вязки W_i в уравнениях (V.2). Следствием устранения невязок будет однозначность, т. е. равенство между собой значений каждой искомой величины, безошибочно вычисляемой различными путями, чем объясняется и само название задачи. Кроме ликвидации невязок, цель уравнительных вычислений — повышение точности определяемых значений всех искомых величин.

§ 54. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Для решения поставленной выше задачи выясним некоторые вероятностные свойства абсолютных значений ошибок измерений, которые можно использовать при нахождении системы искомых поправок. При этом будем учитывать только случайные ошибки измерений.

Найдем вероятность некоторой совокупности ошибок $\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Согласно теореме умножения вероятностей, искомая вероятность равна

$$P(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_1^2}{m_1^2} + \dots + \frac{\Delta_n^2}{m_n^2} \right)} \frac{d\Delta_1}{m_1}, \dots, \frac{d\Delta_n}{m_n}. \quad (\text{V.4})$$

Спрашивается, какая из всего множества возможных совокупностей ошибок, образующих данную систему невязок, будет наиболее вероятной? Из равенства (V.4) нетрудно получить ответ на поставленный вопрос: наибольшему значению величины $P(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ соответствует наименьшее абсолютное значение показателя степени в правой части равенства (V.4), т. е. соответствует соблюдение условия

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i^2}{m_i^2} = \min. \quad (\text{V.5})$$

Учитывая полученное условие (V.5), приходим к такому решению: если для поправок v_i поставить условие

$$\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{m_i^2} = \min, \quad (\text{V.6})$$

то можно ожидать, что совокупность абсолютных значений поправок v_i в вероятностном отношении будет наилучшим образом приближаться к совокупности абсолютных значений ошибок. А так как по условиям (V.3) поправки должны ликвидировать невязки, являющиеся истинными ошибками функций f_i , то можно ожидать, что и по знаку поправки в большинстве своем должны быть противоположны истинным ошибкам соответствующих результатов измерений.

Условие (V.6) удобнее представить в следующем виде, умножив все величины $\frac{v_i^2}{m_i^2}$ на μ^2

$$\left[\frac{\mu^2}{m_i^2} v_i^2 \right] = [pv_i^2] = \min. \quad (\text{V.7})$$

Умножение функции на постоянную величину не изменит координат точки минимума. Как известно, величины $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$ называются весами измеренных величин.

Условие (V.7) является математическим выражением принципа наименьших квадратов.

Итак, из всего множества возможных решений системы уравнений (V.3) мы выбрали решение, удовлетворяющее условию (V.7), т. е. удовлетворяющее принципу наименьших квадратов. Принцип наименьших квадратов дает однозначное решение уравнений (V.3) и обладает рядом преимуществ. К обоснованию этого принципа мы вернемся в § 60. Здесь же отметим следующие его достоинства:

1) наличие в условии минимума вторых степеней v_i ограничивает крупные поправки, поэтому при равноточно измеренных величинах поправки более или менее равномерно распределяются между результатами измерений;

2) при неравноточных результатах измерений веса p_i при v_i^2 уменьшают поправки к более точным n , наоборот, увеличивают поправки к менее точным результатам.

Оба отмеченных свойства вполне согласуются с требованиями здравого смысла, что, несомненно, есть убедительный довод в пользу принципа наименьших квадратов.

Простейшей иллюстрацией того, что отыскание уравненных значений неизвестных по принципу наименьших квадратов приводит к наилучшим результатам, может служить следующий вывод формулы весового среднего, полученной в первой части книги на основании других соображений (см. § 42).

Пусть некоторая величина X измерена n раз и получены результаты $x_1, \dots, x_n$ с весами соответственно $p_1, \dots, p_n$. Найдём наиболее надёжное значение x по принципу наименьших квадратов, т. е. под условием $[p v^2] = \min$.

Так как

$$v_i = x - x_i,$$

то условие (V.7) можно представить так:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i (x - x_i)^2 = \min.$$

Как известно, для выполнения этого условия необходимо, чтобы

$$\frac{df}{dx} = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^n 2p_i (x - x_i) = 0.$$

Теперь нетрудно получить

$$2x \sum_{i=1}^n p_i - 2 \sum_{i=1}^n p_i x_i = 0$$

и

$$x = \frac{[px]}{[p]} = \bar{x}$$

т. е. формулу для весового среднего.

Как видим, к преимуществам метода наименьших квадратов можно отнести еще его общность.

Важное достоинство метода наименьших квадратов еще в том, что задача уравнивания решается на его основе наиболее просто по сравнению с другими методами уравнивания.

§ 55. ОСНОВНЫЕ ПУТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УРАВНИВАНИЯ

Итак, совместное уравнивание измерений нескольких величин по методу наименьших квадратов является задачей на условный экстремум.

Требуется найти минимум функции

$$[p\epsilon^2] = \min,$$

если переменные v_i связаны независимыми условными уравнениями (V.3).

Для решения этой задачи применяют два основных способа: способ Лагранжа с неопределенными множителями и способ абсолютного экстремума, для применения которого все измеренные величины X_i представляют в виде функций некоторых независимых неизвестных параметров.

Существуют и комбинированные способы.

Первый способ уравнивания, основанный на способе Лагранжа, будем называть *коррелятивным*. Этот способ ранее называли в литературе еще *способом условий*.

Сущность второго способа заключается в следующем.

Выбирают такие независимые неизвестные $T_1, \dots, T_k$ — параметры*, функциями которых могут быть выражены все измеренные величины X_i ($i = 1, \dots, n$). Пусть указанными функциями будут

$$X_i = f_i(T_1, \dots, T_k) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (V.8)$$

Тогда можно написать

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (V.9)$$

где x_i — измеренное значение величины X_i ; t_v — уравниваемые (не истинные!) значения выбранных параметров ($v = 1, 2, \dots, k$).

Далее напишем

$$v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) - x_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (V.10)$$

* Независимость неизвестных $T_1, \dots, T_k$ следует понимать в том смысле, что они не связаны между собой никакими математическими соотношениями.

Подставляя во 2-ю группу равенств (V.11) вместо $T_1, \dots, T_k$ найденные в (V.12) их выражения F_v , получаем $n - k$ уравнений, связывающих между собой неизвестные X_i . Но в § 53 установлено, что число независимых условных уравнений, включаемых в систему (V.1), должно быть равно числу избыточно измеренных величин, т. е. r .

Поэтому

$$n - k = r, \quad (V.13)$$

что и требовалось доказать.

Вывод, полученный в равенстве (V.13), можно сформулировать и таким образом: число необходимых неизвестных T , независимо от того, выбирают их из числа измеренных или неизмеренных величин, должно быть равно числу величин X , которые необходимо измерить, чтобы однократно найти значения всех искомых величин.

Пусть, например, требуется определить на плоскости положение пункта относительно двух пунктов, заданных плоскими прямоугольными координатами x_1, y_1 и x_2, y_2 . В этом случае могут быть измерены пять элементов треугольника — три угла и две стороны, из которых, очевидно, необходимо измерить любые два элемента. В качестве необходимых неизвестных T можно выбрать любые два элемента треугольника, но можно выбрать, например, искомые абсциссу x_3 и ординату y_3 определяемой вершины треугольника, т. е. тоже две величины.

Как указывалось в первой части курса, в измерительной практике никогда не ограничиваются измерениями необходимых величин, а всегда измеряют и избыточные. Так, в геодезических работах стремятся в треугольнике измерить три угла, хотя для его решения при наличии одной известной стороны достаточно двух; теодолитные, высотные и нивелирные ходы всегда опираются не менее чем на два опорных пункта; прямую засечку осуществляют не менее чем тремя направлениями, хотя достаточно двух; обратная засечка осуществляется не менее чем четырьмя направлениями, в то время как достаточно трех; в сплошной сети триангуляции выполняют вдвое больше необходимых измерений и т. д.

Разумеется, число необходимых и число избыточных величин зависят от условий и постановки задачи, от того, что требуется получить в результате уравнивания.

Многократные измерения отдельных величин, как известно, повышают их точность лишь до известной степени, после чего измерения становятся малоэффективными из-за того, что влияние некоторых источников систематических ошибок полностью исключить или компенсировать невозможно. Измерение же избыточных величин является следующим существенным шагом в повышении точности определяемых величин, так как оно позволяет использовать для определения искомых величин результаты измерений, выполненных в других условиях. Например, измерение третьего угла в треугольнике существенно повышает точность всех углов, если учесть, что для каждого угла можно получить два значения: непосредственно

измеренное и вычисленное как дополнение до 180° к сумме остальных двух углов плоского треугольника. Рассмотрим подробнее основные способы уравнивания.

§ 56. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

Выбирают необходимые неизвестные $T_1, \dots, T_k$, через которые выражают измеренные величины $X_1, \dots, X_n$ в виде функций

$$X_i = f_i(T_1, \dots, T_k) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (V.14)$$

Равенства такого вида называют параметрическими уравнениями связи.

Выбор необходимых неизвестных — важный момент в этом способе уравнивания, так как от него зависит степень сложности решаемых уравнений, а следовательно, и объем вычислительных работ.

Обозначим уравненные значения измеренных величин через $x'_i = x_i + v_i$, где v_i — поправки к измеренным значениям x_i , полученные из уравнивания, а уравненные значения необходимых неизвестных — через t и напишем

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (V.15)$$

или

$$v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) - x_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (V.16)$$

Теперь условие

$$[pv^2] = \min$$

можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^n p_i \{f_i(t_1, \dots, t_k) - x_i\}^2 = \min. \quad (V.17)$$

В левой части выражения (V.17) неизвестны только величины t , поэтому его можно написать в виде некоторой функции $F(t_1, \dots, t_k)$. т. е.

$$F(t_1, \dots, t_k) = \min. \quad (V.18)$$

Таким образом, решение задачи уравнивания по способу условного экстремума свелось путем введения необходимых неизвестных T к задаче на абсолютный экстремум. Для этого нужно, как известно, составить определенную систему уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial t_v} = 0 \quad (v=1, \dots, k), \quad (V.19)$$

из которой могут быть получены неизвестные $t_1, \dots, t_k$.

Однако, если уравнения (V.19) имеют нелинейный вид, то решение их почти всегда оказывается практически невозможным. Поэтому задачу решают следующим образом.

Для параметров t_v находят тем или иным путем приближенные значения t_v^0 , причем с такой точностью, чтобы можно было привести функции $f_i(t_1, \dots, t_k) = x_i + v_i$ к линейному виду путем разложения в ряд Тейлора, в котором можно пренебречь членами разло-

жения второго и высших порядков. Это, как увидим дальше, делает задачу уравнивания всегда разрешимой и, кроме того, приводит к алгоритму решения, т. е. к определенному, всегда одинаковому порядку вычислений.

Представим неизвестные $t_1, \dots, t_k$ в виде

$$t_v = t_v^0 + \tau_v \quad (v = 1, \dots, k), \quad (\text{V.20})$$

где t_v^0 — приближенные значения, τ_v — неизвестные поправки к ним.

Подставив эти значения t_v в равенства (V.16), получим

$$v_i = f_i(t_1^0 + \tau_1, \dots, t_k^0 + \tau_k) - x_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{V.21})$$

Разлагая функцию f_i в ряд Тейлора, находим

$$v_i = f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \dots + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k + R - x_i, \quad (\text{V.22})$$

где R — сумма всех членов разложения, кроме линейных *. Приближенные значения $t_1^0, \dots, t_k^0$ должны быть найдены с такой точностью, чтобы можно было пренебрегать величиной R . Иными словами, все поправки τ_v должны быть настолько малы, чтобы можно было пренебречь нелинейными членами разложения.

Заметим, что получить достаточно точные значения t_v^0 иногда бывает довольно сложно, например, при уравнивании обширных сетей триангуляции.

Пренебрегая в равенстве (V.22) величиной R , получаем

$$v_i = \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \dots + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k + \{f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i\}. \quad (\text{V.23})$$

Введем обозначения

$$\left.\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 &= a_{i1}, \quad \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_2}\right)_0 = a_{i2}, \dots, \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik} \\ f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i &= x_i^0 - x_i = l_i \end{aligned}\right\}\right. \quad (\text{V.24})$$

Теперь можем написать систему равенств

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{V.25})$$

Линейные равенства (V.25) есть параметрические уравнения поправок, но мы для краткости будем их называть «параметрические уравнения поправок», а иногда и просто «уравнения поправок» **.

Если функции $f_i(t_1, \dots, t_k)$ имеют линейный вид, то приближенные значения t_v^0 можно не вычислять.

* Рассматривая выражение (V.22), следует учитывать, что $f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) \approx x_i$. Напомним также, что коэффициентами при неизвестных τ являются приближенные значения частных производных.

** Часто их неудачно называют «уравнениями погрешностей».

Пусть уравнения (V.9) имеют вид

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) = a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \dots + a_{ik}t_k + L_i.$$

Тогда

$$l_i = L_i - x_i,$$

и уравнения поправок примут вид

$$v_i = a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \dots + a_{ik}t_k + l_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (V.26)$$

Однако в практике уравнивательных вычислений приближенные значения t_v^0 часто вычисляют и в тех случаях, когда параметрические уравнения имеют линейный вид.

Тогда

$$l_i = a_{i1}t_1^0 + a_{i2}t_2^0 + \dots + a_{ik}t_k^0 + L_i - x_i,$$

и уравнения поправок примут вид (V.25). Это облегчает дальнейшие уравнивательные вычисления, так как легче вычислять малые поправки τ вместо величин l .

Учитывая равенства (V.25), условие $[p\tau^2] = \min$ можно записать так:

$$[p\tau^2] = \sum_{i=1}^n p_i (a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i)^2 = F(\tau_1, \dots, \tau_k) = \min. \quad (V.27)$$

Задача решается определенной системой уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_v} = 0 \quad (v = 1, \dots, k). \quad (V.28)$$

Возьмем частные производные и приравняем их нулю

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = 2p_1v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} + \dots + 2p_nv_n \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = 0. \quad (V.29)$$

Учитывая выражение (V.25), находим

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau_1} = a_{i1}.$$

Теперь, сократив равенство (V.29) на 2, напомним

$$\frac{\partial F}{2 \partial \tau_1} = \sum_{i=1}^n p_i v_i a_{i1} = [pa_1v] = 0. \quad (V.30)$$

На основании тех же равенств (V.25) получим

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau_2} = a_{i2}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \tau_3} = a_{i3}, \dots, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \tau_k} = a_{ik}$$

и аналогично тому, как было получено выражение (V.30),

$$[pa_2v] = 0, \quad [pa_3v] = 0, \dots, \quad [pa_kv] = 0.$$

Итак, получены равенства

$$\left. \begin{aligned} [pa_1v] &= 0 \\ [pa_2v] &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ [pa_kv] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{V.31})$$

Подставив в равенства (V.31) вместо v_i правые части уравнений поправок (V.25), получим k линейных уравнений с k неизвестными $\tau_1, \dots, \tau_k$.

Напишем еще раз систему параметрических уравнений поправок (V.25)

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i3}\tau_3 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i=1, \dots, n).$$

Умножив обе части каждого из этих уравнений на p_1a_{i1} соответственно и просуммировав затем результаты, получим

$$p_1a_{11}v_1 + p_2a_{21}v_2 + p_3a_{31}v_3 + \dots + p_na_{n1}v_n = [pa_1v] = [pa_1a_1]\tau_1 + \\ + [pa_1a_2]\tau_2 + [pa_1a_3]\tau_3 + \dots + [pa_1a_k]\tau_k + [pa_1l].$$

Умножая те же равенства (V.25) на p_1a_{i2} , находим

$$[pa_2v] = [pa_1a_2]\tau_1 + [pa_2a_2]\tau_2 + [pa_2a_3]\tau_3 + \dots + [pa_2a_k]\tau_k + [pa_2l].$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} [pa_3v] &= [pa_1a_3]\tau_1 + \dots + [pa_3a_3]\tau_3 + \dots + [pa_3a_k]\tau_k + [pa_3l] \\ \dots\dots\dots \\ [pa_kv] &= [pa_1a_k]\tau_1 + \dots + [pa_ka_k]\tau_k + [pa_kl]. \end{aligned}$$

Теперь равенства (V.31) примут вид уравнений

$$\left. \begin{aligned} [pa_1a_1]\tau_1 + [pa_1a_2]\tau_2 + \dots + [pa_1a_k]\tau_k + [pa_1l] &= 0 \\ [pa_1a_2]\tau_1 + [pa_2a_2]\tau_2 + \dots + [pa_2a_k]\tau_k + [pa_2l] &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ [pa_1a_k]\tau_1 + [pa_2a_k]\tau_2 + \dots + [pa_ka_k]\tau_k + [pa_kl] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{V.32})$$

Уравнения (V.32) называют нормальными уравнениями; они представляют собой определенную систему k линейных уравнений с k неизвестными. Из решения этой системы получают поправки τ_v к приближенным значениям необходимых неизвестных.

Линейная система нормальных уравнений отличается следующими особенностями:

1. По диагонали, расположенной слева вниз направо, стоят коэффициенты, которые всегда положительны: их называют квадратичными, а указавшую диагональ — квадратичной.
2. Остальные, не квадратичные, коэффициенты располагаются симметрично относительно квадратичной диагонали.

Оба свойства системы нормальных уравнений облегчают ее решение.

Получив поправки $\tau_1, \dots, \tau_k$, далее при помощи уравнений поправок (V.25) находят поправки v_i и затем уравненные значения измеренных величин $x'_i = x_i + v_i$ и неизвестных $t_v = t_v^0 + \tau_v$.

Для контроля уравнительных вычислений могут служить уравнения (V.15), а именно

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \\ (i = 1, \dots, n).$$

Пользуясь уравнениями (V.31), покажем, что при независимости многократных измерений отдельных величин X_i уравнивание можно выполнять двумя этапами: сначала получить средние весовые для каждой многократно измеренной величины, а затем уравнивать полученные в первом этапе значения измеренных величин, учитывая веса этих значений и математическую связь между ними.

Пусть $v_i = v_i' + v_i''$, где v_i' — поправки результатов измерений, полученные после первого этапа уравнивания, v_i'' — вторичные поправки, получаемые из совместного уравнивания всех измеренных величин. Очевидно, что поправка v_i' по все результаты измерений одной и той же величины будет одна и та же.

Совместное уравнивание всех результатов измерений приведет к уравнениям (V.31), которые можно представить в виде

$$0 = [p a_{\nu} v] = [p a_{\nu} v'] + [p a_{\nu} v''] \quad (\nu = 1, \dots, k).$$

Но

$$[p a_{\nu} v'] = a_{1\nu} [pv']_1 + \dots + a_{n\nu} [pv']_n,$$

где суммы $[pv']_i$ — для многократных измерений отдельных величин X_i . Для этих измерений каждой величины X_i коэффициенты a_i будут одинаковы.

Из теории ошибок (см. формулу (IV.52) известно, что $[pv']_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), поэтому $[p a_{\nu} v'] = 0$, и мы получим

$$[p a_{\nu} v] = [p a_{\nu} v'']. \quad (V.33)$$

Рассмотрим сумму $[p a_{\nu} v'']$.

Так как коэффициенты a_i и поправки v_i'' для одних и тех же многократно измеренных величин в уравнениях поправок будут постоянны, то можем написать

$$[p a_{\nu} v''] = a_{1\nu} v''_1 [p]_1 + \dots + a_{n\nu} v''_n [p]_n.$$

Но $[p]_i$ — веса средних весовых, т. е. веса уравниваемых в первом этапе значений измеренных величин. Поэтому, обозначая $[p]_i = P_i$ и учитывая формулу (V.33), окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^N p_j a_{j\nu} v_j = \sum_{i=1}^n P_i a_{i\nu} v_i'' \quad (\nu = 1, \dots, k),$$

где N — число всех измерений, n — число измеренных величин (конечно, $N > n$).

Таким образом, уравнивание с соблюдением условия $[pv^2] = \min$, где применяются в виду все результаты измерений, равнозначно уравниванию с соблюдением условий $[pv^2] = \min$ для предварительно исправленных по правилам теории ошибок значений измеренных величин, т. е. поправки $v = v' + v''$ будут удовлетворять уравнениям (V.31), вытекающим из условия $[pv^2] = \min$ *.

Задачу уравнивания параметрическим способом решают в такой последовательности.

1. Измеренные значения величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ (а следовательно, и вычисляемые поправки к ним v_i) выражаются в таких мерах, чтобы значения средних квадратических ошибок m_i величин x_i были по возможности близки к единице. Линейные величины выражают, например, в дециметрах или в сантиметрах, угловые — в секундах, а малоточные измерения углов — в минутах.

* В приведенном доказательстве везде под v подразумеваются правые части уравнений (V.25).

Коэффициент k для вычисления весов по формуле

$$p_i = \frac{k}{m_i^2}$$

выбирают так, чтобы и веса были по возможности близки к единице. Все это облегчает вычисления.

2. Выбирают необходимые неизвестные $t_1, \dots, t_k$ таким образом, чтобы параметрические уравнения поправок (V.25) имели наиболее простой вид. Неизвестные не должны иметь математических связей между собой, а все измеренные величины должны выражаться через выбранные неизвестные. В качестве неизвестных могут быть как измеренные, так и неизмеренные величины.

3. Все измеренные величины выражают в виде функций

$$x'_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i = 1, \dots, n),$$

где $x'_i = x_i + v_i$.

4. Находят приближенные значения неизвестных $t_1^0, \dots, t_k^0$ и выражают их с тем числом десятичных знаков, с которым будут выражать их уравненные значения. По формулам (V.24) находят коэффициенты и свободные члены уравнений поправок (V.25). Для неизвестных t должны быть установлены такие размерности, при которых порядок величин коэффициентов уравнений поправок был бы по возможности близок к единице.

5. Составляют и решают систему нормальных уравнений (V.32), в результате чего получают поправки $\tau_1, \dots, \tau_k$.

6. Вычисляют значения поправок v_i ($i = 1, \dots, n$) при помощи уравнений (V.25).

7. Получают уравненные значения измеренных величин из равенств $x'_i = x_i + v_i$ ($i = 1, \dots, n$) и уравненные значения неизвестных t из равенств $t_v = t_v^0 + \tau_v$ ($v = 1, \dots, k$).

8. Контролируют все вычисления равенствами

$$x'_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Необходимо иметь в виду, что несоблюдение этих контрольных равенств может происходить не только из-за ошибок вычислений, но и вследствие недостаточной точности приближенных значений неизвестных $t_1^0, \dots, t_k^0$, признаком чего будут недопустимо большие абсолютные значения поправок $\tau_1, \dots, \tau_k$, т. е. такие поправки, при которых нельзя пренебрегать членными членами разложения функций $f_i(t_1^0 + \tau_1, \dots, t_k^0 + \tau_k)$.

В таком случае полученные после уравнивания величины $t_1, \dots, t_k$ следует рассматривать лишь как уточненные приближенные значения и с ними повторить все уравнивание*.

Иногда с самого начала уравнивания видно, что получить достаточно точные значения $t_1^0, \dots, t_k^0$ невозможно. Тогда при первом

* Указанный вычислительный прием эффективен при уравнивании на электроно-счетных машинах методом приближений, так как позволяет значительно уменьшить объем промежуточной информации и не требует высокой точности для начальных приближенных значений неизвестных, т. е. для t_v^0 .

уравнивания, которое является по существу лишь уточнением величин $l_1^0, \dots, l_k^0$, можно допускать различные упрощения и вычисления выполнять с меньшим числом десятичных знаков по сравнению с вычислениями при окончательном уравнивании.

§ 57. ПРИМЕРЫ УРАВНИВАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Пример 1. В треугольнике, в котором известны координаты пункта A , сторона c и ее дирекционный угол α_{AB} , равнооточно измерены углы X_1, X_2, X_3 для определения положения вершины C (рис. 10) и получены результаты измерений x_1, x_2, x_3 .

Для решения треугольника с известной стороной необходимо иметь два угла. Так как измерены три угла, которые связаны уравнением

$$x_1' + x_2' + x_3' - 180^\circ = 0^*.$$

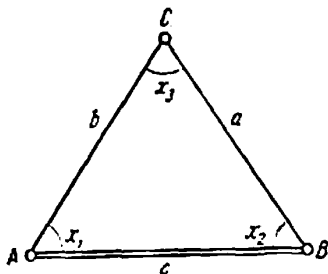


Рис. 10

то возникает задача уравнивания. Решенье будем выполнять в последовательности, указанной в § 56.

1. В качестве необходимых неизвестных выберем дирекционные углы направлений AC и BC . Число этих неизвестных должно быть $k = n - r = 3 - 1 = 2$.

Обозначим

$$\alpha_{AC} = l_1.$$

$$\alpha_{BC} = l_2.$$

Очевидно, что дирекционные углы не связаны между собой никакими математическими соотношениями.

2. Выразим измеренные величины в виде функций необходимых неизвестных

$$x_1' = \alpha_{AB} - l_1.$$

$$x_2' = l_2 - \alpha_{AB} \pm 180^\circ.$$

$$x_3' = l_1 - l_2.$$

3. В качестве приближенных значений необходимых неизвестных примем

$$l_1^0 = \alpha_{AB} - x_1.$$

$$l_2^0 = \alpha_{AB} \pm 180^\circ + x_2.$$

Вычислим коэффициенты и свободные члены уравнений поправок [см. формулы (V.24)]

$$a_{11} = \frac{\partial x_1'}{\partial l_1} = -1;$$

$$a_{12} = \frac{\partial x_1'}{\partial l_2} = 0;$$

$$l_1 = \alpha_{AB} - l_1^0 - x_1 = \alpha_{AB} - (\alpha_{AB} - x_1) - x_1 = 0;$$

* Все задачи будем решать на плоскости.

$$a_{21} = \frac{\partial x'_2}{\partial l_1} = 0; \quad a_{22} = \frac{\partial x'_2}{\partial l_2} = +1;$$

$$l_2 = \{ l_2^0 - (\alpha_{AB} \pm 180^\circ) \} - x_2 - \alpha_{AB} \pm 180^\circ - x_2 - \alpha_{AB} \mp 180^\circ - x_2 = 0;$$

$$a_{31} = \frac{\partial x'_3}{\partial l_1} = 1;$$

$$a_{32} = \frac{\partial x'_3}{\partial l_2} = -1;$$

$$l_3 = l_1^0 - l_2^0 - x_3 = \alpha_{AB} - x_1 - \alpha_{AB} \pm 180^\circ - x_2 - x_3 = 180^\circ - x_1 - x_2 - x_3 = -W,$$

где W — невязка треугольника.

Напишем теперь параметрические уравнения поправок

$$v_1 = -\tau_1;$$

$$v_2 = +\tau_2;$$

$$v_3 = +\tau_1 - \tau_2 - W.$$

4. Вычислим коэффициенты и свободные члены нормальных уравнений, число которых будет равно двум,

$$[a_1 a_1] = 2; \quad [a_1 a_2] = -1; \quad [a_1 l] = -W;$$

$$[a_2 a_2] = 2; \quad [a_2 l] = +W.$$

Напишем нормальные уравнения

$$2\tau_1 - \tau_2 - W = 0; \quad -\tau_1 + 2\tau_2 + W = 0.$$

Сложив уравнения, получим

$$\tau_1 + \tau_2 = 0, \quad (V.34)$$

откуда

$$\tau_2 = -\tau_1. \quad (V.35)$$

Взяв теперь сумму 1-го нормального уравнения и равенство (V.34), получим

$$3\tau_1 - W = 0,$$

откуда

$$\tau_1 = +\frac{W}{3}.$$

и, учитывая равенство (V.35), находим

$$\tau_2 = -\frac{W}{3}.$$

5. Подставив τ_1 и τ_2 в уравнения поправок, получим поправки в углы

$$v_1 = -\frac{W}{3};$$

$$v_2 = -\frac{W}{3};$$

$$v_3 = +\frac{W}{3} + \frac{W}{3} - W = -\frac{W}{3}.$$

Таким образом, невязка треугольника в случае равнооточных измерений должна быть распределена на три угла треугольника поровну с обратным знаком.

Пример 2. Решим предыдущую задачу для случая неравноточных измерений.

Положим, что углы X_1, X_2, X_3 измерены с весами p_1, p_2, p_3 .

Уравнения поправок будут такие же, как и в предыдущем примере, но при составлении нормальных уравнений необходимо учесть веса измерений. Получим

$$v_1 = -\tau_1 \text{ с весом } p_1;$$

$$v_2 = +\tau_1 \text{ с весом } p_2;$$

$$v_3 = +\tau_1 - \tau_2 - W \text{ с весом } p_3.$$

Коэффициенты нормальных уравнений будут

$$[pa_1a_1] = (p_1 + p_3); \quad [pa_1a_2] = -p_3;$$

$$[pa_1l] = -p_3W;$$

$$[pa_2a_2] = (p_2 + p_3); \quad [pa_2l] = +p_3W.$$

Напишем нормальные уравнения

$$(p_1 + p_3)\tau_1 - p_3\tau_2 - p_3W = 0;$$

$$-p_3\tau_1 + (p_2 + p_3)\tau_2 + p_3W = 0.$$

Возьмем сумму уравнений

$$p_1\tau_1 + p_2\tau_2 = 0,$$

откуда

$$\tau_2 = -\frac{p_1}{p_2}\tau_1. \quad (V.36)$$

Разделив первое уравнение на p_3 и учитывая выражение (V.36), получим

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{p_1}{p_3}\right)\tau_1 - \tau_2 - W &= \left(1 + \frac{p_1}{p_3}\right)\tau_1 + \frac{p_1}{p_2}\tau_1 - W = \\ &= \left(\frac{p_1}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_1}{p_3}\right)\tau_1 - W = 0. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{p_1} = q_1, \quad \frac{1}{p_2} = q_2, \quad \frac{1}{p_3} = q_3.$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = \sum q.$$

Величины q называют обратными весами. Теперь получим

$$\frac{\sum q}{q_1}\tau_1 = W,$$

откуда

$$\tau_1 = \frac{q_1}{\sum q} W,$$

а, согласно выражению (V.36),

$$\tau_2 = -\frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{q_1}{\sum q} W = -\frac{q_2}{\sum q} W.$$

Вычислим поправки в углы

$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q} W;$$

$$v_2 = -\frac{q_2}{\sum q} W;$$

$$v_3 = -\frac{q_3}{\sum q} W.$$

т. е. поправки в углы треугольника при неравноточных измерениях распределяются пропорционально обратным весам измерений.

Пример 3. Измерены три угла X_1 , X_2 и X_3 , образованные тремя направлениями (рис. 11), и получены результаты измерений

x_1 с весом p_1 ;

x_2 » » p_2 ;

x_3 » » p_3 .

Для определения взаимного положения трех направлений необходимо знать два угла. Поэтому в качестве необходимых неизвестных выберем углы $t_1 = x'_1$ и $t_2 = x'_2$. Параметрические уравнения связи будут

$$x'_1 = t_1;$$

$$x'_2 = t_2;$$

$$x'_3 = t_1 + t_2.$$

Приближенные значения необходимых неизвестных примем равными их измеренным значениям, т. е.

$$t_1^0 = x_1;$$

$$t_2^0 = x_2.$$

Вычислим свободные члены уравнений поправок

$$l_1 = t_1^0 - x_1 = 0;$$

$$l_2 = t_2^0 - x_2 = 0;$$

$$l_3 = t_1^0 + t_2^0 - x_3 = x_1 + x_2 - x_3.$$

Напишем уравнения поправок

$$v_1 = +\tau_1 \quad \text{с весом } p_1;$$

$$v_2 = +\tau_2 \quad \text{» » } p_2;$$

$$v_3 = +\tau_1 + \tau_2 + l_3 \quad \text{» » } p_3.$$

Нормальные уравнения будут иметь вид

$$(p_1 + p_3) \tau_1 + p_3 \tau_2 + p_3 l_3 = 0;$$

$$p_3 \tau_1 + (p_2 + p_3) \tau_2 + p_3 l_3 = 0.$$

Вычтем второе уравнение из первого

$$p_1 \tau_1 - p_2 \tau_2 = 0,$$

откуда

$$\tau_2 = + \frac{p_1}{p_2} \tau_1. \quad (V.37)$$

Разделив первое нормальное уравнение на p_3 и учитывая выражение (V.37), получим

$$\left(1 - \frac{p_1}{p_3}\right) \tau_1 + \tau_2 + l_3 = \left(1 - \frac{p_1}{p_3}\right) \tau_1 + \frac{p_1}{p_2} \tau_1 + l_3 = 0.$$

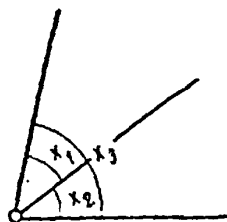


Рис. 11

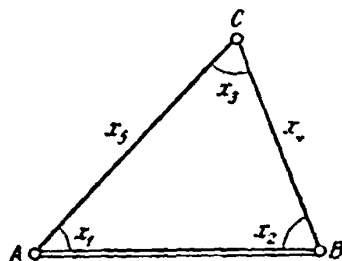


Рис. 12

Далее найдем

$$\left(\frac{p_1}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_1}{p_3}\right) \tau_1 + l_3 = 0.$$

Вводя обратные веса, получим

$$\tau_1 = \frac{-q_1}{\sum q} l_3;$$

$$\tau_2 = -\frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{q_1}{\sum q} \cdot l_3 = -\frac{q_2}{\sum q} l_3$$

и, наконец, определим поправки к результатам измерений

$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q} l_3;$$

$$v_2 = -\frac{q_2}{\sum q} l_3;$$

$$v_3 = +\frac{q_3}{\sum q} l_3,$$

где

$$l_3 = x_1 + x_2 - x_3.$$

Пример 4. В треугольнике дана сторона $AB = c = 1000,000$ м и измерены остальные две стороны и три угла. Требуется найти уравненные значения измеренных величин.

Обозначения исходных и измеренных величин показаны на рис. 12.

Углы измерены со средней квадратической ошибкой $m'' = 10''$.

Средние квадратические ошибки измерения сторон соответствуют формуле

$$m_i^{\text{см}} = \left(\frac{S_i^{\text{см}}}{30\,000} + 2 \text{ см} \right).$$

Получены результаты измерений

$$x_1 = 46^\circ 25' 13'';$$

$$x_2 = 68^\circ 01' 25'';$$

$$x_3 = 65^\circ 33' 07'';$$

$$x_4 = 795,881 \text{ м};$$

$$x_5 = 1018,660 \text{ м}.$$

Вычислим средние квадратические ошибки измерения сторон

$$m_4^{\text{см}} = \frac{79\,588 \text{ см}}{30\,000} + 2 \text{ см} = 4,6 \text{ см};$$

$$m_5^{\text{см}} = \frac{101\,866 \text{ см}}{30\,000} + 2 \text{ см} = 5,4 \text{ см}.$$

Веса вычислим по формуле

$$p_i = \left(\frac{10}{m_i} \right)^2,$$

тогда веса углов будут

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1 \frac{1}{(n)^2}.$$

Выражая средние квадратические ошибки сторон в сантиметрах, получаем

$$p_4 = \left(\frac{10}{4,6 \text{ см}} \right)^2 = 4,7 \frac{1}{(\text{см})^2},$$

$$p_5 = \left(\frac{10}{5,4 \text{ см}} \right)^2 = 3,4 \frac{1}{(\text{см})^2}.$$

Выражать средние квадратические ошибки сторон не в сантиметрах, а в других единицах, невыгодно, так как веса при этом будут или очень малы или, наоборот, очень велики.

Заметим, что в дальнейших вычислениях все линейные величины должны выражаться также в сантиметрах.

В качестве необходимых неизвестных удобнее всего выбрать два угла X_1 и X_2 (для решения треугольника, в котором известна одна сторона, необходимо иметь две измеренные величины).

Положим

$$t_1 = x'_1;$$

$$t_2 = x'_2.$$

Далее выразим все измеренные величины в виде функций необходимых неизвестных

$$x'_1 = t_1;$$

$$x'_2 = t_2;$$

$$x'_3 = 180^\circ - t_1 - t_2;$$

$$x'_4 = c \frac{\sin t_1}{\sin (180^\circ - t_1 - t_2)} = c \frac{\sin x'_1}{\sin x'_3};$$

$$x'_5 = c \frac{\sin t_2}{\sin (180^\circ - t_1 - t_2)} = c \frac{\sin x'_2}{\sin x'_3}.$$

Вычислим приближенные значения неизвестных. Для их уточнения связь треугольника распределим с обратным знаком на три угла треугольника (табл. 25).

Т а б л и ц а 25

Угол	Результат измерения	Поправка (вспомогательная)	Исправленный угол
X_1	46° 25' 13"	+5"	46° 25' 18"
X_2	68 01 25	+5	68 01 30
X_3	65 33 07	+5	65 33 12
$\Sigma =$ H	179° 59' 45" -15	+15"	180° 00' 00"

Теперь примем $t_1^0 = 46^\circ 25' 18''$, $t_2^0 = 68^\circ 01' 30''$, откуда, заметим,

$$180^\circ - t_1^0 - t_2^0 = 65^\circ 33' 12''.$$

Далее вычислим свободные члены всех уравнений поправок и коэффициенты последних двух уравнений (коэффициенты остальных уравнений очевидны) в соответствии с формулами (V.24).

$$l_1 = t_1^0 - x_1 = 46^\circ 25' 18'' - 46^\circ 25' 13'' = +5'';$$

$$l_2 = t_2^0 - x_2 = 68^\circ 01' 30'' - 68^\circ 01' 25'' = +5'';$$

$$l_3 = 180^\circ - t_1^0 - t_2^0 - x_3 = 65^\circ 33' 12'' - 65^\circ 33' 07'' = +5'';$$

$$l_4^{cm} = 100\,000 \frac{\sin 46^\circ 25' 18''}{\sin 65^\circ 33' 12''} - 79\,588,1 = 79\,577,6 - 79\,588,1 = -10,5 \text{ см};$$

$$l_5^{cm} = 100\,000 \frac{\sin 68^\circ 01' 30''}{\sin 65^\circ 33' 12''} - 101\,866,0 = 101\,867,5 - 101\,866,0 = +1,5 \text{ см};$$

$$\frac{\partial x'_4}{\partial t_1} = c \frac{\cos t_1 \cdot \sin (t_1 + t_2) - \sin t_1 \cdot \cos (t_1 + t_2)}{\sin^2 (t_1 + t_2)} =$$

$$= c \frac{\sin t_2}{\sin^2 x'_3} = c \frac{\sin x'_2}{\sin x'_3} \cdot \frac{1}{\sin x'_3} = \frac{x'_5}{\sin x'_3};$$

$$\frac{\partial x'_4}{\partial t_2} = c \frac{-\sin t_1 \cos (t_1 + t_2)}{\sin^2 x'_3} = c \frac{\sin t_1 \cdot \cos (180^\circ - t_1 - t_2)}{\sin^2 x'_3} =$$

$$= c \frac{\sin x'_1}{\sin x'_3} \cdot \frac{\cos x'_3}{\sin x'_3} = \frac{x_4}{\lg x'_3};$$

$$\frac{\partial x'_5}{\partial t_1} = c \frac{-\sin t_2 \cos (t_1 + t_2)}{\sin^2 x'_3} = c \frac{\sin x'_2}{\sin x'_3} \cdot \frac{\cos x'_3}{\sin x'_3} = \frac{x'_5}{\operatorname{tg} x'_3};$$

$$\frac{\partial x'_5}{\partial t_2} = c \frac{\cos t_2 \cdot \sin (t_1 + t_2) - \sin t_2 \cdot \cos (t_1 + t_2)}{\sin^2 x'_3} =$$

$$= c \frac{\sin t_1}{\sin x'_3} \cdot \frac{1}{\sin x'_3} = \frac{x'_4}{\sin x'_3}.$$

Напишем теперь одно из уравнений поправок для линейных измерений

$$v_1^{\text{см}} = \left(\frac{\partial x'_4}{\partial t_1} \right)_0 \tau_1 + \left(\frac{\partial x'_4}{\partial t_2} \right)_0 \tau_2 + l_1^{\text{см}}.$$

Так как дифференцирование производится только по угловым аргументам, выраженным в радиационной мере, а поправки τ практически выражаются в секундах, то последнее уравнение следует написать так:

$$v_1^{\text{см}} = \left(\frac{\partial x'_4}{\partial t_1} \right)_0 \cdot \frac{\tau''}{\rho''} + \left(\frac{\partial x'_4}{\partial t_2} \right)_0 \cdot \frac{\tau''}{\rho''} + l_1^{\text{см}}.$$

Теперь получим при поправках τ'' следующие коэффициенты уравнений поправок для линейных измерений:

$$a_{41} = \frac{x_5^{\text{см}}}{\rho''} \operatorname{cosec} x_3 = \frac{101\,866}{206\,265} \operatorname{cosec} 65^\circ 33' = +0.54;$$

$$a_{42} = \frac{x_4^{\text{см}}}{\rho''} \operatorname{ctg} x_3 = \frac{79\,588}{206\,265} \operatorname{ctg} 65^\circ 33' = +0.18;$$

$$a_{51} = \frac{x_5^{\text{см}}}{\rho''} \operatorname{ctg} x_3 = \frac{101\,866}{206\,265} \operatorname{ctg} 65^\circ 33' = +0.22;$$

$$a_{52} = \frac{x_4^{\text{см}}}{\rho''} \operatorname{cosec} x_3 = \frac{79\,588}{206\,265} \operatorname{cosec} 65^\circ 33' = +0.42.$$

Эти коэффициенты вычислены на логарифмической линейке.

Вычисления коэффициентов нормальных уравнений в соответствии с формулой (V.32) удобно выполнять при помощи таблицы коэффициентов (табл. 26), в верхней части которой выписывают коэффициенты уравнений поправок, а в нижней, отделенной горизонтальной чертой, вычисляют коэффициенты нормальных уравнений.

Напишем нормальные уравнения

$$\begin{aligned} 3.54\tau_1 + 1.77\tau_2 - 25.54 &= 0 \\ 1.77\tau_1 + 2.75\tau_2 - 6.78 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma = 5.31\tau_1 + 4.52\tau_2 - 32.32 = 0.$$

Решим нормальные уравнения способом определителей на арифмометре. Детерминант $D = +6.60$

$$\tau_1 = \frac{+25.54 \cdot 2.75 - 6.78 \cdot 1.77}{6.60} = +8.8'';$$

$$\tau_2 = \frac{+3.54 \cdot 6.78 - 1.77 \cdot 25.54}{6.60} = -3.2''.$$

Таблица 26

№ измеренной величины	p	$a_{i1} + 8,8''$	$a_{i2} - 3,2''$	l	v
1	1	+1,00	0	+5,00"	+13,8"
2	1	0	+1,00	+5,00"	+1,8"
3	1	-1,00	-1,00	+5,00"	-0,6"
4	4,7	+0,54	+0,18	-10,50 см	-6,3 см
5	3,4	+0,22	+0,42	+1,50 см	+2,1 см
$[pa_1]$		3,54	+1,77	-25,54	
$[pa_2]$		+1,77	2,75	-6,78	

Для контроля правильности вычислений подставим полученные значения τ_1 и τ_2 в сумму нормальных уравнений

$$5,31 \cdot 8,8 - 4,52 \cdot 3,2 - 32,32 = -0,06.$$

Остаточная погрешность пренебрегаема.

Для удобства вычислений поправок v значения τ выписывают в заголовки графы 3 и 4 табл. 26. Перемножая величины τ_1 и τ_2 на коэффициенты a в соответствующих строках и прибавляя к сумме этих произведений величины l , получают поправки v , которые выписывают в графу 6.

Далее получим значения измеренных величин $x'_i = x_i + v_i$.

$$x'_1 = 46^\circ 25' 13'' + 13,8'' = 46^\circ 25' 26,8''$$

$$x'_2 = 68^\circ 01' 25'' + 1,8'' = 68^\circ 01' 26,8''$$

$$x'_3 = 65^\circ 33' 07'' - 0,6'' = 65^\circ 33' 06,4''$$

$$\Sigma = 180^\circ 00' 00,0''$$

$$x'_4 = 79\,588,1 \text{ см} - 6,3 \text{ см} = 795,818 \text{ м.}$$

$$x'_5 = 101\,866,0 \text{ см} + 2,1 \text{ см} = 1018,681 \text{ м.}$$

Для окончательного контроля всех уравнительных вычислений была подсчитана сумма углов треугольника, которая оказалась равной в точности 180° , и, кроме того, были вычислены стороны $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ по уравнившимся углам от исходной стороны c ; при этом должны быть получены величины $x_4 + v_4$ и $x_5 + v_5$.

$$\overline{BC} = 1000,000 \text{ м} \cdot \frac{\sin 46^\circ 25' 26,8''}{\sin 65^\circ 33' 06,4''} = 795,819 \text{ м; } x'_4 = 795,818 \text{ м;}$$

$$\overline{AC} = 1000,000 \text{ м} \cdot \frac{\sin 68^\circ 01' 26,8''}{\sin 65^\circ 33' 06,4''} = 1018,681 \text{ м; } x'_5 = 1018,681 \text{ м.}$$

Контроль подтверждает правильность уравнительных вычислений, так как несогласия соответствуют точности вычислений.

Все вычисления были выполнены на арифмометре с шестизначными таблицами и на логарифмической линейке.

Пример 5. Требуется произвести оценку точности по двойным неравноточным измерениям, в которых предполагается наличие остаточных систематических ошибок, возникающих по закону

$$\sigma_i = k_i \sigma_0.$$

где $\sigma_0 = \text{const}$, а коэффициенты k_i , зависящие от условий измерений, известны (например, расхождения результатов измерения длин линий в теодолитном ходе двумя лептами, длины которых точно неизвестны. В этом случае коэффициент $k_i = s_i$, где s_i — длина линии).

Рассматривая разности двойных измерений d_i как результаты измерений величин σ_i (при отсутствии систематических ошибок величины d_i будут случайными ошибками разностей двойных измерений, так как их истинные значения равны нулю), получаем уравнения поправок $v_i = k_i \sigma_0 - d_i$ ($i = 1, \dots, n$), где σ_0 — неизвестное. Ввиду малости этого неизвестного можно не вводить его приближенного значения. Тогда коэффициенты уравнений поправок $a_{i1} = k_i$, свободные члены $l_i = -d_i$.

Величина σ_0 будет получена из нормального уравнения

$$[Pkk] \sigma_0 - [Pkd] = 0,$$

откуда

$$\sigma_0 = \frac{[Pkd]}{[Pkk]},$$

где P — веса разностей двойных измерений.

Далее, вычислив значение $v_i = d_i - k_i \sigma_0$, получим

$$\mu_\Delta = \sqrt{\frac{[Pv^2]}{2(n-1)}}.$$

§ 58. КОРРЕЛАТНЫЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

Сущность уравнивания коррелятным способом заключается в том, что задачу нахождения минимума функции зависимых переменных $[rv^2]$ решают способом Лагранжа, вводя вспомогательные множители независимых условных уравнений.

Пусть измерено n величин $X_1, \dots, X_n$, связанных между собой независимыми условными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(X_1, \dots, X_n) &= 0 \\ \varphi_2(X_1, \dots, X_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_r(X_1, \dots, X_n) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{V.38})$$

Необходимо представлять уравнения (V.38) всегда в таком виде, чтобы в правых частях стояли нули.

Пусть для величин X_i получены результаты измерений $x_1, \dots, x_n$ с весами соответственно $p_1, \dots, p_n$.

Так как значения x_i отягощены ошибками измерений, то при подстановке этих результатов в левые части условных уравнений в правых их частях, как правило, получатся не нули, а невязки W , являющиеся истинными ошибками функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$.

Соответствующие равенства имеют вид

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = W_j \quad (j = 1, 2, \dots, r). \quad (\text{V.39})$$

При уравнивании прежде всего ставится требование устранить все невязки. Поэтому исправленные результаты измерений должны удовлетворять равенствам

$$\varphi_j(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r). \quad (\text{V.40})$$

Как известно, из всего множества возможных решений неопределенной системы (V.40) выберут такое, при котором $[pv^2]$ принимает наименьшее значение.

В математическом смысле решаемую задачу можно сформулировать так: найти

$$[pv^2] = \min,$$

если переменные $v_1, \dots, v_n$ связаны между собой уравнениями (V.40). Как указывалось, эту задачу на условный экстремум в корреляционном способе решают по правилам Лагранжа при помощи неопределенных множителей условных уравнений.

Уместно напомнить, что в параметрическом способе эта же задача на условный экстремум решается при помощи вспомогательных независимых неизвестных, позволяющих перейти от условного экстремума к абсолютному.

Функция Лагранжа будет иметь вид

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = [pv^2] + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_r \varphi_r,$$

где

$$\varphi_j = \varphi_j(x_1 + v_1 + \dots + x_n + v_n) \quad (j = 1, \dots, r)$$

и

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_r \varphi_r = 0.$$

Введение r неопределенных множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ позволяет рассматривать функцию Лагранжа как функцию независимых переменных. Тогда искомые значения поправок v должны удовлетворять равенствам вида

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{V.41})$$

Присоединяя к равенствам (V.41) равенства (V.40), получаем $n + r$ уравнений с $n + r$ неизвестными (поправками $v_1, \dots, v_n$ и неопределенными множителями $\lambda_1, \dots, \lambda_r$).

Такова схема решения задачи.

Однако, если условные уравнения будут иметь нелинейный вид, то задача станет практически неразрешимой, так как математика не дает способов решения систем нелинейных уравнений произвольного вида.

Для того чтобы сделать задачу уравнивания разрешимой и получить алгоритм ее решения, приведем равенства (V.40) к линейному виду, воспользовавшись тем, что поправки v всегда достаточно малы.

Пренебрегая нелинейными членами разложения функций φ_i в ряд Тейлора, можно написать

$$\varphi_j(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n) + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \right)_0 v_1 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} \right)_0 v_n.$$

Обозначая

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)_0 = a_{ij} \quad (\text{V.42})$$

и учитывая равенства (V.39), получаем

$$a_1/v_1 + \dots + a_n/v_n + W_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

T. E.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n + W_1 &= 0 \\ a_{12}v_1 + \dots + a_{n2}v_n + W_2 &= 0 \\ \vdots &\quad \vdots \\ a_{1r}v_1 + \dots + a_{nr}v_n + W_r &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{V.43})$$

или в сокращенной записи

$$\left. \begin{aligned} [a_1 v] + W_1 &= 0 \\ [a_2 v] + W_2 &= 0 \\ &\vdots \\ [a_r v] + W_r &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{V.44})$$

Равенства (V.43) и (V.44) называют условными уравнениями поправки. Невязки W_j являются свободными членами этих уравнений.

Если условные уравнения будут с самого начала заданы в линейном виде, то формулы (V.42) не потребуются, так как коэффициенты a_{11} , a_{12} , ..., a_{1r} будут известны.

Теперь решаемую задачу можно сформулировать так. Требуется найти минимум функции $[pr^2]$, если переменные r связаны между собой уравнениями (V.43).

Для удобства вычислений множители Лагранжа обозначим так: $\lambda_1 = -2k_1$, $\lambda_2 = -2k_2$, ..., $\lambda_r = -2k_r$. Множители $k_1, k_2, \dots, k_r$ называют коррелатами.

Функция Лагранжа теперь примет вид

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = [pv^2] - 2k_1([a_1v] + W_1) - \dots - 2k_r([a_rv] + W_r).$$

Далее напишем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_l} = 2p_l v_l - 2k_1 a_{l1} - 2k_2 a_{l2} - \dots - 2k_r a_{lr} = 0,$$

откуда

$$v_i = q_i a_{i1} k_1 + q_i a_{i2} k_2 + \dots + q_i a_{ir} k_r \quad (i=1, \dots, n), \quad (\text{V.45})$$

где

$$q_i = \frac{1}{p_i}$$

U:1 M

$$v_i = \frac{a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{ir}k_r}{p_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{V.46})$$

Равенства (V.45) и (V.46) назовем коррелятными уравнениями поправки. Из этих равенств могут быть найдены искомые поправки v_i , если будут известны корреляты k_j .

Определим корреляты.

Напишем систему равенств (V.45).

$$v_i = q_1 a_{i1} k_1 + q_2 a_{i2} k_2 + \dots + q_r a_{ir} k_r \quad (i = 1, \dots, n).$$

«I», так как свободными членами нормальных уравнений коррелат являются свободные члены условных уравнений.

Значения невязок $W_1, W_2, \dots, W_r$ выписывают в строке под коэффициентами, в графе соответствующего условного уравнения.

Заметим еще, что в нормальных уравнениях коррелат фигурируют не веса p , а обратные веса q .

5. Решают нормальные уравнения, в результате чего получают коррелаты k .

6. Выписав предварительно значения коррелат в заголовки соответствующих граф таблицы коэффициентов, вычисляют поправки v по формулам (V.46).

7. Вычисляют уравненные значения измеренных величин $x'_i = x_i + v_i$, после чего выполняют окончательные контрольные вычисления, заключающиеся в подстановке уравненных значений x'_i в условные уравнения (V.40); при отсутствии ошибок в вычислениях эти уравнения должны удовлетворяться.

Практически важно еще соблюдать следующий порядок заполнения таблицы коэффициентов. В первые слева графы этой таблицы нужно выписывать коэффициенты более простых уравнений с меньшим числом членов и с коэффициентами, равными ± 1 . В правые графы выписывают коэффициенты более сложных уравнений. Это облегчает решение нормальных уравнений.

Пронумлюстрируем выведенные формулы примерами, которые были приведены в § 57 (кроме примера 5, который коррелатным способом решать нецелесообразно).

§ 59. ПРИМЕРЫ УРАВНИВАНИЯ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

Пример 1. В треугольнике с известной стороной c (см. рис. 10) равноточно измерены углы X_1, X_2, X_3 и получены результаты измерений x_1, x_2, x_3 . Требуется найти уравненные значения углов.

Решение будем выполнять в указанной выше последовательности:

1) так как $n = 3, k = 2$ (число необходимых величин), то должно быть составлено одно условное уравнение

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 - 180^\circ = 0;$$

2) все коэффициенты условных уравнений поправок равны единице; свободный член равен

$$W = x_1 + x_2 + x_3 - 180^\circ;$$

3) напомним условное уравнение поправок

$$v_1 + v_2 + v_3 + W = 0;$$

4) единственная коррелата определится из уравнения

$$[aa] k + W = 0,$$

т. е.

$$3k + W = 0,$$

откуда

$$k = -\frac{W}{3};$$

5) поправки получим по формулам (V.45), учитывая при этом, что $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 1$ и измерения равнозначны,

$$r_1 = -\frac{W}{3};$$

$$r_2 = -\frac{W}{3};$$

$$r_3 = -\frac{W}{3}.$$

Ответ получен такой же, как и в параметрическом способе.

Пример 2. Решим первую задачу для случая неравнозначных измерений. Положим, что углы измерены с весами p_1, p_2, p_3 . Обратные веса обозначим соответственно через q_1, q_2 и q_3 .

Условное уравнение поправок будет такое же, как в первом примере, но при составлении уравнения для коррелаты необходимо учесть веса (см. уравнение (V.47)).

Напишем это уравнение, учитывая, что $[qa_1a_1] = q_1 + q_2 + q_3$,

$$(q_1 + q_2 + q_3)k + W = 0.$$

откуда

$$k = -\frac{W}{q_1 + q_2 + q_3} = -\frac{W}{\sum q}.$$

Поправки получим по формулам (V.45)

$$r_1 = -\frac{q_1}{\sum q} W;$$

$$r_2 = -\frac{q_2}{\sum q} W;$$

$$r_3 = -\frac{q_3}{\sum q} W.$$

Ответ получен такой же, как и в § 57, т. е. при решении параметрическим способом.

Пример 3. Измерено три угла, образованных тремя направлениями (см. рис. 11), и получены результаты измерений

$$x_1 \text{ с весом } p_1;$$

$$x_2 \text{ » » } p_2;$$

$$x_3 \text{ » » } p_3.$$

Для определения взаимного положения трех направлений необходимо знать два угла. Поэтому имеется одно избыточное измерение и возникает задача уравнивания.

Условное уравнение можно написать в виде

$$x'_1 + x'_2 - x'_3 = 0.$$

Свободный член

$$W = x_1 + x_2 - x_3$$

Условное уравнение поправок

$$v_1 + v_2 - v_3 + W = 0.$$

Уравнение коррелаты

$$(q_1 + q_2 + q_3)k + W = 0,$$

откуда

$$k = -\frac{W}{\sum q}.$$

Поправки к результатам измерений получим

$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q} W, \quad v_2 = -\frac{q_2}{\sum q} W,$$

$$v_3 = +\frac{q_3}{\sum q} W,$$

т. е. те же, что и в примере 3 § 57.

Пример 4. В треугольнике дана сторона $c = AB = 1000,000$ м и измерения остальных две стороны и три угла. Обозначения измеренных величин показаны на рис. 13.

В соответствующем примере 4 § 57 была установлена система размерностей и весов.

Получены следующие результаты измерений:

$$x_1 = 46^\circ 25' 13'' \text{ с весом } p_1 = 1;$$

$$x_2 = 68^\circ 01' 25'' \text{ » » } p_2 = 1;$$

$$x_3 = 65^\circ 33' 07'' \text{ » » } p_3 = 1;$$

$$x_4 = 79\,588,1 \text{ см » » } p_4 = 4,7;$$

$$x_5 = 101\,866,0 \text{ см » » } p_5 = 3,4.$$

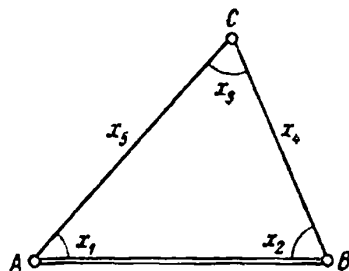


Рис. 13

Составим условные уравнения.

Так как число необходимых величин $k = 2$, а число всех измерений $n = 5$, то число условных уравнений будет

$$r = n - k = 5 - 2 = 3.$$

Выберем условные уравнения наиболее простого вида

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + 180^\circ = 0;$$

$$c \frac{\sin x'_1}{\sin x'_3} - x'_4 = 0;$$

$$c \frac{\sin x'_2}{\sin x'_3} - x'_5 = 0.$$

Можно было бы составить и такие уравнения:

$$f_1(c, x'_4, x'_5) - x'_1 = 0,$$

$$f_2(c, x'_4, x'_5) - x'_2 = 0,$$

$$f_3(c, x'_4, x'_5) - x'_3 = 0.$$

где функции f — выражения для углов через стороны. Но такие уравнения будут иметь вид более сложный по сравнению с уравнениями, выбранными нами.

Второе и третье уравнения представим в логарифмическом виде. Окончательно имеем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= x'_1 + x'_2 + x'_3 - 180^\circ = 0 \\ \varphi_2 &= \lg c + \lg \sin x'_1 - \lg \sin x'_3 - \lg x'_4 = 0 \\ \varphi_3 &= \lg c + \lg \sin x'_2 - \lg \sin x'_5 - \lg x'_6 = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (V.48)$$

Подставляя в уравнения (V.48) результаты измерений, получаем свободные члены

$$W_1 = 46^\circ 25' 13'' + 68^\circ 01' 25'' + 65^\circ 33' 07'' - 180^\circ = -15,0'';$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \lg 100\,000 + \lg \sin 46^\circ 25' 13'' - \lg \sin 65^\circ 33' 07'' - \lg 79\,588,1 = \\ &= 5,000\,000 + 9,859\,988 - 9,959\,202 - 4,900\,848 = -62,0 \cdot 10^{-6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_3 &= \lg 100\,000 + \lg \sin 68^\circ 01' 25'' - \lg \sin 65^\circ 33' 07'' - \lg 101\,866,0 = \\ &= 5,000\,000 + 9,967\,238 - 9,959\,202 - 5,008\,029 = +7,0 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Коэффициенты первого условного уравнения поправок равны $\div 1$.

Найдем коэффициенты второго и третьего уравнений.

Так как для логарифмов имеются таблицы значений через малые интервалы аргументов, то коэффициенты этих условных уравнений поправок выгодно получать как отношение приращений $\frac{\Delta \lg x}{\Delta x}$, где Δx — разность соседних значений аргументов. Так как Δx в таблицах логарифмов достаточно малы, то можно полагать, что

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Таким образом, коэффициенты последних двух условных уравнений будут получены при помощи таблиц логарифмов как изменение логарифма на единицу аргумента, т. е. на $1''$ для $\lg \sin x$ и на 1 см для $\lg x_4$ и $\lg x_6$.

Для удобства вычислений свободные члены W_2 и W_3 , а также коэффициенты уравнений $\varphi_2 = 0$ и $\varphi_3 = 0$ (т. е. перемены логарифмов) будем выражать в единицах 6-го знака мантиис логарифмов (вычисления выполняются с 6-значными таблицами логарифмов).

Коэффициенты выписаны в таблицу коэффициентов (табл. 27). Нормальные уравнения решены способом Краковичон в табл. 28 (способы решения нормальных уравнений описаны в главе VI).

Т а б л и ц а 27

Номер измерения	$a = \frac{1}{p}$	a_{i1} $k_1 = +2,11$	a_{i2} $k_2 = +5,33$	a_{i3} $k_3 = -1,67$	s	v
1	1	+1,0	+2,0		+3,0	+13,8"
2	1	+1,0			+1,8	+1,8"
3	1	+1,0	-1,0	+0,8	-1,0	-0,6"
4	0,21		-5,5	-1,0	-5,5	-6,2 см
5	0,29			-4,3	-4,3	+2,1 см
W		-15,0	-62,0	+7,0	-70,0	
$\{qa_1$		3,0	+1,00	-0,20	+3,80	
$\{qa_2$		+1,00	11,37	+1,00	+13,37	
$\{qa_3$		-0,20	+1,00	7,00	+7,80	

Название строки	k_1	k_2	k_3	W	$S = \sum W$	Контроль
N_1	3,00	-1,00	+0,20	+15,00	+11,20	
N_2		11,37	-1,00	+62,00	+48,63	
N_3			7,00	-7,00	-14,80	
K_1	1,732	-0,577	+0,116	+8,661	+6,468	+6,467
K_2		3,322	-0,321	+17,159	+13,516	+13,515
K_3			2,624	4,384	-7,008	-7,008
k	+3,114	+5,327	-1,671			

Подставим полученные корреляты в сумму нормальных уравнений (суммы коэффициентов и $\sum W$ даны в графе «S» табл. 27)

$$+3,80 \cdot 3,114 + 13,37 \cdot 5,327 - 7,80 \cdot 1,671 - 70,00000 = 0,02.$$

Остаточная погрешность пренебрегается.

Выписав теперь корреляты в графы « a_{i1} », « a_{i2} », « a_{i3} » табл. 27, вычислим по формуле (V.46) поправки η_i . Эти поправки совпадают с теми, которые получены в примере § 57, ввиду чего контрольных вычислений производить не будем (вычисления см. в примере § 57).

Все решения в настоящем параграфе примеры подтверждают эквивалентность двух основных способов уравнивания.

§ 60. ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ПО МАТЕРИАЛАМ УРАВНИВАНИЯ

Под оценкой точности понимают определение средних квадратических ошибок измерений и функций измеренных величин после уравнивания.

В общем случае средняя квадратическая ошибка любой величины определяется по формуле

$$M_i = \mu \sqrt{\frac{1}{P_i}}, \quad (V.4)$$

где μ — ошибка единицы веса;

P_i — в.с.с. оцениваемой величины.

Таким образом, задача оценки точности распадается на две частные задачи: определение ошибки единицы веса и определение в.с.с. оцениваемой величины.

Так как значение μ по материалам уравнивания может отличаться от того значения, которое было принято до уравнивания установления системы весов результатов измерений по фор

$$P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2},$$

то и величины M_i , вычисляемые по формуле (V.49) после уравнивания, могут отличаться от предвычисленных до уравнивания.

Возникает вопрос, какое из двух значений μ заслуживает предпочтения: принятое до уравнивания для формулы (V.50) или полученное после уравнивания по формулам, которые будут выведены ниже? Этот вопрос должен решаться конкретно в каждом отдельном случае в зависимости от величины доверительного интервала для истинного значения отброски единицы веса. Очевидно, что предпочтение должно быть отдано значению μ с более узким доверительным интервалом.

Итак, для решения задачи оценки точности необходимо, во-первых, определить ошибку единицы веса μ , во-вторых, найти способы определения весов оцениваемых величин.

Вторая задача решается следующим образом: оцениваемая величина y представляется в виде функции результатов измерений

$$y = f(x_1, \dots, x_n), \quad (\text{V.51})$$

после чего применяется известная формула теории ошибок измерений

$$\frac{1}{p_y} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{p_i}, \quad (\text{V.52})$$

где p_i — веса измерений.

Главная трудность оценки точности при совместном уравнивании нескольких величин заключается в получении формулы (V.51), т. е. в представлении оцениваемой величины непосредственно через результаты измерений. Во всех способах уравнивания эта задача решается посредством обращения матрицы коэффициентов нормальных уравнений в сочетании с алгоритмами решения этих уравнений. Подробное изложение этих вопросов и описание соответствующих вычислительных приемов приведено в последующих главах.

Здесь рассмотрим лишь способы вычисления ошибки единицы веса.

1. Определение ошибки единицы веса

Для определения ошибки единицы веса можно воспользоваться, во-первых, формулой теории ошибок

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}}.$$

В качестве истинных ошибок измерений θ берут невязки W . Веса невязок вычисляют по формуле

$$\frac{1}{p} = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{p_i} \right],$$

где φ — левые части условных уравнений, выражающих зависимости между измеренными величинами.

Тогда получим формулу для вычисления ошибки единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[PW^2]}{N}}, \quad (\text{V.53})$$

где N — число всех возникающих невязок.

В формуле (V.53) используются невязки всех возникающих условных уравнений, а не только независимых условий, поэтому $N > r$. Однако при установлении доверительных границ число «степеней свободы» должно приниматься равным числу избыточных измеренных величин $r = n - k$.

Ошибка единицы веса может быть определена также при помощи поправок v в результаты измерений; эти поправки, очевидно, зависят от точности измерений. Получим соответствующую формулу.

Так как уравнивание производят с соблюдением условия

$$[pv^2] = \min,$$

то мы вправе написать неравенство

$$[p\Delta^2] > [pv^2],$$

где Δ — истинные ошибки измерений.

Разделив обе части этого неравенства на число измерений, получим

$$\frac{[p\Delta^2]}{n} = \mu^2 > \frac{[pv^2]}{n},$$

где μ — эмпирическое значение (точное значение $\mu^2 = M(p\Delta^2)$).

Для того чтобы последнее неравенство превратить в равенство, знаменатель его правой части нужно уменьшить на неизвестную пока положительную величину x , после чего можно написать равенство

$$\mu^2 = \frac{[pv^2]}{n-x} \quad (V.54)$$

Задача сводится к нахождению значения x . При этом можно рассуждать так. Во-первых, число измеренных величин n не может быть меньше числа необходимых величин k , т. е. $r \geq k$.

Отсюда следует, что

$$x \leq k. \quad (V.55)$$

Действительно, при $x > k$ знаменатель равенства (V.54) может стать отрицательным, что невозможно, так как μ^2 и $[pv^2]$ — величины безусловно положительные, чем и доказывается справедливость неравенства (V.55).

Но x не может быть и меньше k , что доказывается следующим рассуждением от противного.

Предположим, что $x < k$. Тогда при $n = k$ в знаменателе равенства (V.54) будет некоторое положительное число. Однако, если $n = k$, т. е. если измерены только необходимые величины, то невязок результатов измерений не возникает, а следовательно, не будет и поправок в эти результаты. Но тогда $[pv^2] = 0$ и равенство (V.54) не будет удовлетворено, так как $\mu^2 \neq 0$. Поэтому x не может быть и меньше k .

Таким образом, формула (V.54) может иметь смысл и отвечать требованиям общности в единственном случае, когда $x = k$.

Учитывая сказанное, получаем формулу ошибки единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}, \quad (\text{V.56})$$

где $n - k = r$ — число избыточно измеренных величин;

v — поправки, полученные из уравнивания;

p — веса измеренных величин, принятые до уравнивания.

Из формулы (V.56) как частный случай вытекает формула для ошибки единицы веса при многократных измерениях одной величины, т. е. формула теории ошибок измерений

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}.$$

Очевидно, что в этом случае число необходимых величин $k = 1$.

Поучительно рассмотреть случай, когда были измерены только необходимые величины, число которых равно k , т. е. когда $n = k$. В этом случае в результаты измерений поправки не вносят, и мы вынуждены будем принять $v_i = 0$ и $[pv^2] = 0$; но $\mu \neq 0$, и в данном случае (при $n = k$) можно сказать только, что суждение о величине μ вынести невозможно, т. е. величина μ неопределенна. Следовательно, в формуле (V.54) должно быть $n - k = 0$, т. е. $x = k$, и мы будем иметь неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Таким образом, формула (V.54) примет вид выражения (V.56).

Необходимо иметь в виду еще следующее обстоятельство.

Формулы (V.53) и (V.56) дают правильную оценку точности измерений лишь в тех случаях, когда невязки не зависят от ошибок исходных данных. Например, высот исходных реперов в нивелирных ходах, или когда эти ошибки пренебрегаемы. При наличии непренебрегаемых ошибок исходных данных точность измерений наиболее правильно оценивается формулой (V.53), если в ней использованы только те невязки, которые не зависят от исходных данных, например, невязки треугольников. Если значение μ , вычисленное по формуле (V.56), существенно больше значения, подсчитанного по формуле (V.53) без участия исходных данных, то это свидетельствует о недостаточной точности исходных данных по отношению к точности измерений. Такое заключение можно сделать, если оба значения μ получены с достаточной надежностью.

Вернемся к вопросу о степени доверия к величине ошибки единицы веса, полученной после уравнивания по формуле (V.56). При этом необходимо учитывать число использованных независимых невязок, т. е. $r = n - k$, так как невязки являются истинными ошибками функций. Поэтому при установлении доверительных границ должно приниматься во внимание число r (число «степеней свободы»).

При $r \geq 19$ вычисляется значение

$$m_\mu = \frac{0.75\mu}{\sqrt{r}}$$

и применяется нормальный закон распределения.

При $r < 19$ применяется распределение χ^2 (см. § 21).

2. Способы вычисления (pv^2) при уравнивании параметрическим способом

1. При помощи таблицы коэффициентов. Поправки v_i вычисляют в таблице коэффициентов, пользуясь уравнениями поправок (V.25). Таким способом эти поправки вычислены в табл. 26.

Имея все поправки v_i , нетрудно вычислить $[pv^2]$.

2. По формуле $[pv^2] = [pvl]$. Эта формула практически почти не применяется, но имеет большое теоретическое значение.

Напишем уравнения поправок

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Умножим эти равенства на $p_i v_i$ и сложим их. Тогда

$$[pv^2] = [pa_1v]\tau_1 + \dots + [pa_kv]\tau_k + [plv]. \quad (\text{V.57})$$

Но, согласно равенствам (V.31),

$$[pa_1v] = [pa_2v] = \dots = [pa_kv] = 0,$$

поэтому из равенства (V.57) имеем

$$[pv^2] = [plv]. \quad (\text{V.58})$$

3. По формуле

$$[pv^2] = [pa_1l]\tau_1 + \dots + [pa_kl]\tau_k + [pll].$$

Умножив все уравнения поправок

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

на $p_i l_i$ и сложив результаты, получим

$$[plv] = [pa_1l]\tau_1 + \dots + [pa_kl]\tau_k + [pll].$$

Принимая теперь во внимание равенство (V.58), можем написать

$$[pv^2] = [pa_1l]\tau_1 + \dots + [pa_kl]\tau_k + [pll]. \quad (\text{V.59})$$

4. В схеме решения нормальных уравнений. Присоединяя равенство (V.59) к системе нормальных уравнений, получаем

$$[pa_1a_1]\tau_1 + \dots + [pa_1a_k]\tau_k + [pa_1l] = 0.$$

$$\dots \dots \dots$$

$$[pa_1a_k]\tau_1 + \dots + [pa_ka_k]\tau_k + [pa_kl] = 0.$$

$$[pa_1l]\tau_1 + \dots + [pa_kl]\tau_k + [pll] = [pv^2].$$

Вновь полученная система уравнений сохраняет все свойства нормальных уравнений, поэтому решение этой системы осложнений не вызовет.

После исключения всех неизвестных τ получим значение $[pv^2]$ (подробности этого решения см. в главе VI).

3. Способы вычисления (pv^2) при уравнивании коррелятным способом

1. При помощи таблицы коэффициентов. Поправки v_i вычисляют в таблице коэффициентов (см. табл. 27) по формуле (V.46). Получив все поправки, вычисляют $[pv^2]$.

2. По формуле

$$-[pv^2] = W_1 k_1 + W_2 k_2 + \dots + W_r k_r.$$

Напишем коррелятные уравнения поправок

$$v_i = \frac{a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{ir}k_r}{p_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Умножим эти уравнения на $p_i v_i$ и возьмем их сумму. Тогда получим

$$[pv^2] = [a_1 v] k_1 + [a_2 v] k_2 + \dots + [a_r v] k_r. \quad (V.60)$$

Принимая во внимание условные уравнения поправок, т. е. равенства (V.44), имеем

$$[a_1 v] = -W_1,$$

$$[a_2 v] = -W_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$[a_r v] = -W_r.$$

вследствие чего равенство (V.60) примет вид

$$-[pv^2] = W_1 k_1 + W_2 k_2 + \dots + W_r k_r. \quad (V.61)$$

3. По схеме решения нормальных уравнений коррелят. Присоединив к системе нормальных уравнений коррелят равенство (V.61), получим

$$[qa_1 a_1] k_1 + \dots + [qa_1 a_r] k_r + W_1 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$[qa_r a_r] k_1 + \dots + [qa_r a_r] k_r + W_r = 0,$$

$$W_1 k_1 + \dots + W_r k_r = -[pv^2].$$

Последняя система уравнений сохраняет все свойства системы нормальных уравнений, поэтому ее решение не представит трудностей. Исключив из этой системы все корреляты, получим значение $[pv^2]$ (решение см. в главе VI).

4. Алгебраическое обоснование принципа наименьших квадратов

Полученная формула (V.58) позволяет дать еще одно обоснование принципа наименьших квадратов. При помощи этой формулы можно показать, что после уравнивания по методу наименьших квадратов точность измеренных величин в среднем всегда повышается.

Напишем равенств

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= x_i - X_i \\ v_i &= x'_i - x_i \end{aligned} \right\}, \quad (\text{V.62})$$

где θ_i — истинные ошибки измерений;
 x'_i — уравненные по методу наименьших квадратов значения измеренных величин.

Возьмем сумму равенств (V.62)

$$\theta_i + v_i = x'_i - X_i.$$

Так как X_i — истинное значение измеренной величины, то разность $x'_i - X_i$ — истинная ошибка уравненного значения. Обозначим эти ошибки через δ_i . Тогда можем написать

$$\delta_i = \theta_i + v_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Далее имеем

$$[p\delta^2] = [p\theta^2] + [pv^2] + 2[p\theta v]. \quad (\text{V.63})$$

Величина $[p\theta^2]$ характеризует точность измерений. Поэтому вполне логично считать, что величина $[p\delta^2]$ характеризует точность уравненных значений измеренных величин. Из равенства (V.63) следует, что для получения величины $[p\delta^2]$ необходимо найти величину $[p\theta v]$. Для этого воспользуемся формулами параметрического способа уравнивания.

Предположим, что в качестве приближенных значений неизвестных t взяты их истинные значения T , т. е. $t_i^0 = T_i$ ($i = 1, \dots, k$). Тогда свободные члены параметрических уравнений поправок в соответствии с формулой (V.24) можно вычислять по формуле

$$l_i = f_i(T_1, \dots, T_k) - x_i.$$

Но, очевидно,

$$f_i(T_1, \dots, T_k) = X_i.$$

поэтому

$$l_i = X_i - x_i = -\theta_i.$$

Теперь формула (V.58) примет вид

$$[pv^2] = -[p\theta v]. \quad (\text{V.64})$$

Так как результаты уравнивания не зависят от принятой системы приближенных значений неизвестных, то формула (V.64) имеет универсальное значение.

Обращаясь теперь к формуле (V.63), получаем, учитывая выражение (V.64),

$$[p\delta^2] = [p\theta^2] - [pv^2]. \quad (\text{V.65})$$

Формула (V.65) позволяет не только утверждать, что после уравнивания по методу наименьших квадратов точность измеренных величин всегда повышается, но и судить о степени этого повышения точности. Для этого разделим обе части равенства (V.65) на n

$$\frac{[p\delta^2]}{n} = \frac{[p\theta^2]}{n} - \frac{[pv^2]}{n}.$$

Но $\frac{[p\delta^2]}{n} \approx \mu^2$.² Поэтому можно написать

$$\frac{[p\delta^2]}{n} \approx \mu^2 - \frac{n-k}{n} \cdot \frac{[pv^2]}{n-k} \approx \mu^2 - \frac{n-k}{n} \mu^2 = \frac{k}{n} \mu^2,$$

или

$$\frac{[p\delta^2]}{n} \approx \frac{k}{n} \mu^2. \quad (V.66)$$

Полагая, что величина $\frac{[p\delta^2]}{n} = M^2$ — ошибка единицы веса, характеризующая точность уравненных значений, а μ^2 — характеристика точности измерений, находим

$$M^2 \approx \frac{k}{n} \mu^2$$

или

$$\frac{\mu^2}{M^2} \approx \frac{n}{k}.$$

Но так как квадраты средних квадратических ошибок обратно пропорциональны весам, то окончательно можно написать

$$\left(\frac{P}{p}\right)_{\text{ср}} \approx \frac{n}{k}, \quad (V.67)$$

т. е. отношение весов уравненных значений измеренных величин к весам измеренных значений в среднем равно $\frac{n}{k}$. Выражение (V.67) называется формулой «среднего отношения весов». Она играет большую роль в оценке точности уравненных величин*.

Заметим, что приведенное выше обоснование метода наименьших квадратов не потребовало обязательного нормального распределения для результатов измерений. Формулы (V.65) и (V.67) будут верны при любом распределении. Таким образом, ко многим достоинствам метода наименьших квадратов можно еще добавить его полную универсальность.

Глава VI

СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 61. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В матричной форме систему нормальных уравнений можно записать так:

$$NZ = -L, \quad (VI.1)$$

где N — квадратная матрица коэффициентов;

Z — матрица-столбец неизвестных;

L — матрица-столбец свободных членов.

* Формула (V.67) получена другим путем в § 76.

В развернутом виде выражение (VI.1) выглядит так:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{m1} & \dots & X_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_m \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.2})$$

При уравнивании параметрическим способом число уравнений $m = k$, т. е. равно числу необходимых величин, в коррелятном способе $m = r$, т. е. числу избыточных величин.

Коэффициенты нормальных уравнений имеют, по сути дела, одну и ту же структуру в обоих способах, а именно:

$N_{sj} = [pa_{sj}]$ — в параметрическом способе,

$N_{sj} = [qa_{sj}]$ — в коррелятном способе.

$z_j = \tau_j$ и $L_i = [pa_i]$ — в параметрическом способе,

$z_j = k_j$ и $L_i = W_i$ — в коррелятном способе.

Обозначим прямоугольную матрицу коэффициентов параметрических уравнений поправок или коррелятных уравнений поправок через

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad (\text{VI.3})$$

где $n > m$.

В дальнейшем эту матрицу будем называть *исходной*. Исходными назовем и соответствующие уравнения*.

Обозначив транспонированную матрицу через A^T , а диагональную матрицу весов или обратных весов — через p или q , можно написать

$$\left. \begin{aligned} N &= A^T p A \text{ — для параметрического способа} \\ N &= A^T q A \text{ — для коррелятного способа}^{**} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VI.4})$$

Как установлено, а также следует из равенств (VI.4), матрица N — квадратная и симметричная относительно главной, квадратичной диагонали, вследствие чего $N_{sj} = N_{js}$. Поэтому таблицу коэффициентов нормальных уравнений можно писать сокращенно следующим образом:

$$\left. \begin{array}{cccccc} N_{11} & N_{12} & N_{13} & \dots & N_{1m} \\ & N_{22} & N_{23} & \dots & N_{2m} \\ & & N_{33} & \dots & N_{3m} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & N_{mm} \end{array} \right\}, \quad (\text{VI.5})$$

* В геодезической литературе элементы разных столбцов исходной матрицы часто обозначают разными буквами латинского алфавита; при этом номер столбца обозначается порядковым номером буквы в алфавите, а номер строки — единичным подстрочным индексом. Например, элементы 4-й строки пишутся a_4 , b_4 , c_4 и т. д.

** В транспонированной матрице коэффициентов условных уравнений поправок в строках будут располагаться коэффициенты коррелятных уравнений поправок.

2. Приведение уравнений к равноточному виду

При равноточных измерениях коэффициенты и свободные члены нормальных уравнений имеют вид $[a_1 a_1]$, $[a_1 a_2]$, ..., $[a_1 l]$, т. е. представляют собой суммы произведений двух множителей. Практически весьма важно, что на вычислительных машинах такие суммы произведений можно получать без промежуточных записей отдельных произведений. Однако суммы произведений вида $[pa_1 a_1]$, $[pa_1 a_2]$, ..., $[pa_1 l]$ и т. п. указанным путем получать труднее, что усложняет вычисления. В связи с этим и приводят уравнения к равноточному виду («к весу единица»). Это преобразование заключается в том, что все коэффициенты и свободные члены параметрических уравнений поправок умножают на $\sqrt{p_i}$, где i — индекс соответствующего измерения.

После умножения на $\sqrt{p_i}$ редуцированные уравнения можно рассматривать как уравнения для равноточных измерений. Действительно, обозначив

$$a_{i1} \sqrt{p_i} = a'_{i1}, \quad a_{i2} \sqrt{p_i} = a'_{i2}, \quad \dots \quad a_{ik} \sqrt{p_i} = a'_{ik}, \quad l_i \sqrt{p_i} = l'_i,$$

получим

$$[a'_1 a'_1] = [pa_1 a_1], \quad [a'_1 a'_2] = [pa_1 a_2], \quad \dots \quad [a'_1 l'] = [pa_1 l],$$

что и требовалось доказать.

Для приведения к равноточному виду коррелятных уравнений поправок коэффициенты этих уравнений умножают на $\sqrt{q_i}$.

При редуцировании уравнений к равноточному виду таблицу коэффициентов дополняют вправо графами $a'_1, \dots, a'_r, \dots, l', s'$. В нижней части этих дополнительных граф выписывают значения

$$[a'_1 a'_1], [a'_1 a'_2], \dots [a'_1 l] \text{ и т. д.}$$

Если коэффициенты уравнений равны по абсолютной величине единице, то редуцировать их к равноточному виду нецелесообразно.

Приведем формы таблиц коэффициентов для двух основных способов уравнивания (табл. 29 и 30) в наиболее общем виде. Назначение граф F в табл. 30 объяснено в главе VII.

П о я с н е н и я к т а б л. 29 (параметрический способ).

1. В графу s' выписывают точные суммы редуцированных коэффициентов и свободных членов уравнений поправок, которые контролируют равенствами $\Sigma_i' = a'_{i1} + a'_{i2} + \dots + a'_{ik} + l'_i \approx s_i \sqrt{p_i}$.

2. В нижней части таблицы в ту же графу s' также выписывают точные значения Σ сумм коэффициентов и свободных членов нормальных уравнений, контролируя эти суммы равенствами

$$\Sigma_1 \approx [a'_1 s'], \quad \Sigma_2 \approx [a'_2 s'] \text{ и т. д.}$$

3. Вычисление поправок v контролируют следующим образом: получают $v'_i = a'_{i1} \tau_1 + \dots + a'_{ik} \tau_k + l'$ и затем проверяют равенство $v'_i \approx v_i \sqrt{p_i}$.

Таблица 29
(форма)

№ измерения	p	a_1 (τ_1)	a_2 (τ_2)	...	a_k (τ_k)	l	v	s	a'_1 (τ_1)	a'_2 (τ_2)	...	a'_k (τ_k)	l'	v'	s'
i	p_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	l_1	v_1	s_1	a'_{11}	a'_{12}	...	a'_{1k}	l'_1	v'_1	s'_1
.	.	.	.	...	.	.	.	.	.	.	...	.	.	.	.
.	.	.	.	...	.	.	.	.	.	.	...	.	.	.	.
.	.	.	.	...	.	.	.	.	.	.	...	.	.	.	.
n	p_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nk}	l_n	v_n	s_n	a'_{n1}	a'_{n2}	...	a'_{nk}	l'_n	v'_n	s'_n
								$[a'_1]$	$[a'_1 a'_1]$	$[a'_1 a'_2]$	...	$[a'_1 a'_k]$	$[a'_1 l']$	$[pv^{(2)}]$	$\sum_1$
								$[a'_2]$	$[a'_2 a'_1]$	$[a'_2 a'_3]$	...	$[a'_2 a'_k]$	$[a'_2 l']$		$\sum_2$
								...							
								$[a'_k]$				$[a'_k a'_1]$	$[a'_k l']$		$\sum_k$
								$[l']$					$[l' l']$		$\sum_l$

Таблица 36
(Дорман)

№ п/п	ρ	q	a_1 (k_1)	a_2 (k_2)	$\dots$	a_r (k_r)	v	F_1	F_2	s	a_1 (k_1)	$\dots$	a_r (k_r)	v'	F'_1	F'_2	s'
1	ρ_1	q_1	a_{11}	a_{12}		a_{1r}	v_1	F'_{11}	F'_{12}	s_1	a'_{11}	$\dots$	a'_{1r}	v'_1	F'_{11}	F'_{12}	s'_1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	ρ_n	q_n	a_{n1}	a_{n2}		a_{nr}	v_n	F'_{n1}	F'_{n2}	s_n	a'_{n1}	$\dots$	a'_{nr}	v'_n	F'_{n1}	F'_{n2}	s'_n
			W_1	W_2	$\dots$	W_r	$[W]$										
										$[a'_1]$	$[a'_1 a'_1]$	$\dots$	$[a'_1 a'_r]$		$[a'_1 F'_1]$	$[a'_1 F'_2]$	Σ'_1
										$[a'_2]$	$[a'_2 a'_1]$	$\dots$	$[a'_2 a'_r]$		$[a'_2 F'_1]$	$[a'_2 F'_2]$	Σ'_2
										$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$
										$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$
										$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$
										$[a'_r]$	$[a'_r a'_1]$	$\dots$	$[a'_r a'_r]$		$[a'_r F'_1]$	$[a'_r F'_2]$	Σ'_r
										$[F'_1]$	$[F'_1 F'_1]$				$[F'_1 F'_1]$	$[F'_1 F'_2]$	$\Sigma'_{F'_1}$
										$[F'_2]$	$[F'_2 F'_1]$				$[F'_2 F'_1]$	$[F'_2 F'_2]$	$\Sigma'_{F'_2}$

Петрудно убедиться, что $[pr^2] = [e'e']$. Контролем служит вычисление $[pr^2]$ в схеме решения нормальных уравнений в графе свободных членов.

П о я с н е н и я к т а б л. 30 (коррелятивный способ)

1. В сумму s_i входят величины F_{i1} и F_{i2} ; в сумму s'_i — величины

$$F'_{i1} \text{ и } F'_{i2} \left(F_i - \frac{\partial F}{\partial x_i} \right),$$

где F — некоторая функция переменных $x_1, \dots, x_n$.

2. $[pr^2] = [e'e']$. Кроме того, $[pr^2] = -[kW]$. Третий раз $[pr^2]$ получают в схеме решения нормальных уравнений коррелят, в графе «W», по правилу, которое будет получено ниже.

В остальном к табл. 30 относятся все замечания, данные в пояснениях к табл. 29.

Сделаем еще одно важное замечание, касающееся заполнения как одной, так и другой таблицы.

Неизвестные в параметрических уравнениях поправок и условные уравнения поправок необходимо нумеровать так, чтобы левые графы «a» таблиц были заполнены меньше, чем правые, т. е. в этих графах должно быть больше нулевых коэффициентов. При прочих равных условиях коэффициенты, равные ± 1 , также нужно располагать возможно левее.

Для коэффициентов исходных уравнений, как правило, оказывается достаточно сохранять три значащие цифры, а для свободных членов — две-три. Для коэффициентов и свободных членов нормальных уравнений всегда достаточно иметь три значащие цифры.

Соблюдение всех рекомендаций, которые даются в пояснениях к таблицам коэффициентов, существенно облегчает уравнительные вычисления.

Напомним, что при равноточных измерениях, а также в случае, если все коэффициенты по абсолютной величине равны единице, правые части таблиц (отделенные двойной чертой) не нужны.

§ 62. РЕШЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Алгоритм Гаусса

Решение системы нормальных уравнений, как правило, — наиболее трудоемкая часть уравнительных вычислений, поэтому заслуживает особого внимания. Осуществить это решение можно разными способами.

К. Гаусс подробно разработал способ решения, основанный на методе последовательного исключения неизвестных, и ввел очень удобную систему обозначений, облегчающую решение. Этот способ, который называют а л г о р и т м о м Г а у с с а, подробно рассмотрим. Отметим, что при наиболее эффективных способах решения больших систем нормальных уравнений в той или иной степени используют алгоритм Гаусса.

Способ определителей, как показывает практика, имеет несомненные преимущества лишь при решении двух уравнений. При решении больших систем способ определителей едва ли сможет конкурировать с алгоритмом Гаусса. То же можно сказать и о многих других способах линейной алгебры для решения систем нормальных уравнений.

При наличии вычислительной машины типа арифмометра количество записей при решении системы нормальных уравнений алгоритмом Гаусса можно значительно сократить.

Еще более эффективен способ Крамера, в наибольшей степени использующий возможности вычислительных машин, особенно электронно-цифровых.

При решении очень больших систем, состоящих из многих десятков и даже сотен уравнений, применяют метод приближений; при решении большого числа уравнений, распадающихся на частично независимые системы, может быть применен способ Прансе-Прансе-вича. Вопросы решения больших систем нормальных уравнений рассмотрены в главе X.

Рассмотрим алгоритм Гаусса.

Как указано, в основе алгоритма Гаусса лежит метод последовательного исключения неизвестных. Гаусс ввел удобную систему обозначений, облегчающую теоретическое рассмотрение вопросов и запоминание порядка действий; единообразие последовательных действий и надежный контроль правильности промежуточных результатов вычислений являются большим достоинством этого способа.

Рассмотрим алгоритм Гаусса на примере решения систем четырех нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} N_{11}z_1 + N_{12}z_2 + N_{13}z_3 + N_{14}z_4 + L_1 &= 0 \\ N_{21}z_1 + N_{22}z_2 + N_{23}z_3 + N_{24}z_4 + L_2 &= 0 \\ N_{31}z_1 + N_{32}z_2 + N_{33}z_3 + N_{34}z_4 + L_3 &= 0 \\ N_{41}z_1 + N_{42}z_2 + N_{43}z_3 + N_{44}z_4 + L_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (VI.7)$$

Напомним, что система нормальных уравнений обладает симметричностью неквадратичных коэффициентов относительно главной, квадратичной, диагонали, т. е. $N_{ij} = N_{ji}$.

Выразим первое неизвестное через другие из первого уравнения

$$z_1 = -\frac{N_{12}}{N_{11}}z_2 - \frac{N_{13}}{N_{11}}z_3 - \frac{N_{14}}{N_{11}}z_4 - \frac{L_1}{N_{11}}. \quad (VI.8)$$

Равенство (VI.8) называют элиминационным уравнением (слово «элиминационный» происходит от латинского слова *elimino*, означающего «выносить за порог», исключать).

Подставим значение z_1 из (VI.8) во второе, третье и четвертое уравнения системы (VI.7), после чего, учитывая симметричность коэффициентов, получим

$$\begin{aligned} &\left(N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}}\right)z_2 + \left(N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}}\right)z_3 + \\ &+ \left(N_{24} - \frac{N_{12}N_{14}}{N_{11}}\right)z_4 + \left(L_2 - \frac{N_{12}L_1}{N_{11}}\right) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}} \right) z_2 + \left(N_{33} - \frac{N_{13}N_{13}}{N_{11}} \right) z_3 + \\
& + \left(N_{34} - \frac{N_{13}N_{14}}{N_{11}} \right) z_4 + \left(L_3 - \frac{N_{13}L_1}{N_{11}} \right) = 0; \\
& \left(N_{21} - \frac{N_{12}N_{14}}{N_{11}} \right) z_2 + \left(N_{31} - \frac{N_{13}N_{14}}{N_{11}} \right) z_3 + \\
& + \left(N_{41} - \frac{N_{14}N_{14}}{N_{11}} \right) z_4 + \left(L_4 - \frac{N_{14}L_1}{N_{11}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Преобразованная после исключения первого неизвестного система уравнений сохраняет свойство симметричности пеквадратичных коэффициентов (что является следствием симметричности коэффициентов первоначальной системы).

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned}
N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}} &= N_{22}^{(1)}, & N_{33} - \frac{N_{13}N_{13}}{N_{11}} &= N_{33}^{(1)} \\
N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}} &= N_{23}^{(1)}, & N_{31} - \frac{N_{13}N_{14}}{N_{11}} &= N_{31}^{(1)} \\
N_{21} - \frac{N_{12}N_{14}}{N_{11}} &= N_{21}^{(1)}, & L_3 - \frac{N_{13}L_1}{N_{11}} &= L_3^{(1)} \\
L_2 - \frac{N_{12}L_1}{N_{11}} &= L_2^{(1)}, & N_{41} - \frac{N_{14}N_{14}}{N_{11}} &= N_{41}^{(1)} \\
& & L_4 - \frac{N_{14}L_1}{N_{11}} &= L_4^{(1)}
\end{aligned} \right\}. \quad (V.1.9)$$

Знак ⁽¹⁾ обозначает, что исключено первое неизвестное.

Теперь преобразованная система примет вид

$$\left. \begin{aligned}
N_{22}^{(1)}z_2 + N_{23}^{(1)}z_3 + N_{21}^{(1)}z_4 + L_2^{(1)} &= 0 \\
N_{23}^{(1)}z_2 + N_{33}^{(1)}z_3 + N_{31}^{(1)}z_4 + L_3^{(1)} &= 0 \\
N_{21}^{(1)}z_2 + N_{31}^{(1)}z_3 + N_{41}^{(1)}z_4 + L_4^{(1)} &= 0
\end{aligned} \right\}. \quad (V.1.10)$$

Исключив из этой системы уравнений второе неизвестное, получим второе элиминационное уравнение

$$z_2 = - \frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} z_3 - \frac{N_{21}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} z_4 - \frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \quad (V.1.11)$$

и вторую преобразованную систему уравнений

$$\begin{aligned}
& \left(N_{33}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \right) z_3 + \left(N_{31}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}N_{21}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \right) z_4 + \left(L_3^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \right) = 0, \\
& \left(N_{31}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}N_{21}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \right) z_3 + \left(N_{41}^{(1)} - \frac{N_{21}^{(1)}N_{21}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \right) z_4 + \left(L_4^{(1)} - \frac{N_{21}^{(1)}L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Последняя система уравнений также сохраняет симметричность коэффициентов.

Далее введем обозначения

$$N_{33}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)} N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} = N_{33}^{(2)}, \quad N_{44}^{(1)} - \frac{N_{24}^{(1)} N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} = N_{44}^{(2)}.$$

$$N_{34}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)} N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} = N_{34}^{(2)}, \quad L_3^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)} L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} = L_3^{(2)},$$

$$L_4^{(1)} - \frac{N_{24}^{(1)} L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} = L_4^{(2)}.$$

после чего вторая преобразованная система уравнений примет вид

$$\left. \begin{aligned} N_{33}^{(2)} z_3 + N_{34}^{(2)} z_4 + L_3^{(2)} &= 0 \\ N_{34}^{(2)} z_3 + N_{44}^{(2)} z_4 + L_4^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VI.12})$$

Теперь получим третье элиминационное уравнение

$$z_3 = - \frac{N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} z_4 - \frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \quad (\text{VI.13})$$

в третью преобразованную систему

$$\left(N_{44}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \right) z_4 + \left(L_4^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \right) = 0,$$

или применительно к обозначениям Гаусса *

$$N_{44}^{(3)} z_4 + L_4^{(3)} = 0, \quad (\text{VI.14})$$

откуда

$$z_4 = - \frac{L_4^{(3)}}{N_{44}^{(3)}}. \quad (\text{VI.15})$$

Вычислив z_4 , обратимся к элиминационному уравнению (VI.13), из которого получим z_3 . Далее, подставляя z_3 и z_4 в уравнение (VI.11), находим z_2 и, наконец, при помощи уравнения (VI.8) получим z_1 .

Нетрудно видеть, что для отыскания неизвестных необходимо иметь только элиминационные уравнения (VI.8), (VI.11), (VI.13) и (VI.15), которые получаются из первых уравнений систем (VI.7), (VI.10), (VI.12) и (VI.14).

Решение системы нормальных уравнений рассматриваемым способом и заключается в получении и с р в ы х уравнений преобразованных систем, а из них — элиминационных уравнений. Остальные

* Мы изменили внешний вид обозначений, введенных Гауссом. У Гаусса: $N_{22}^{(1)} = [pbb \cdot 1]$ или $N_{22}^{(1)} = [qbb \cdot 1]$; $L_2^{(1)} = [pbl \cdot 1]$ или $[Wb \cdot 1]$; $N_{33}^{(2)} = [pcc \cdot 2]$ или $N_{33}^{(2)} = [qcc \cdot 2]$; $L_3^{(2)} = [pcl \cdot 2]$ или $L_3^{(2)} = [Wc \cdot 2]$ и т. д.

уравнения преобразованных систем оказываются ненужными. Чтобы в этом убедиться, выписав коэффициенты и свободные члены первоначальной системы нормальных уравнений, а в нижней части табл. 31 — коэффициенты и свободные члены первых уравнений первоначальной и преобразованных систем и элиминационных уравнений, применяя для последних обозначения $E_j(j+1)$, $E_j(j+2)$, $E_j(j+3)$ и т. д. (для j -го уравнения).

Теперь нетрудно видеть, что любой элемент нижней части табл. 31 можно получить, используя данные верхней части табл. 31 и учитывая структуру равенств (VI.8), (VI.11), (VI.13) и (VI.15).

Таблица 31

N_{11}	N_{12} N_{21}	N_{13} N_{22} N_{31}	N_{14} N_{23} N_{32} N_{41}	L_1 L_2 L_3 L_4
N_{11}	N_{12} E_{12} $N_{22}^{(1)}$	N_{13} E_{13} $N_{23}^{(1)}$ E_{23} $N_{33}^{(2)}$	N_{14} E_{14} $N_{24}^{(1)}$ E_{24} $N_{34}^{(2)}$ E_{34} $N_{44}^{(3)}$	L_1 E_{1L} $L_2^{(1)}$ E_{2L} $L_3^{(2)}$ E_{3L} $L_4^{(3)}$ $E_{4L} = Z_1$

Заметим, что табл. 31, по существу, и лежит в основе вычислительной схемы решения нормальных уравнений алгоритмом Гаусса.

Первые уравнения всех систем в совокупности образуют эквивалентную систему, имеющую вид

$$\left. \begin{aligned} N_{11}z_1 + N_{12}z_2 + N_{13}z_3 + N_{14}z_4 + L_1 &= 0 \\ N_{22}^{(1)}z_2 + N_{23}^{(1)}z_3 + N_{24}^{(1)}z_4 + L_2^{(1)} &= 0 \\ N_{33}^{(2)}z_3 + N_{34}^{(2)}z_4 + L_3^{(2)} &= 0 \\ N_{44}^{(3)}z_4 + L_4^{(3)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (VI.16)$$

Теперь становится ясна принятая система обозначений. В каждой преобразованной системе коэффициент при первом неизвестном в первом уравнении имеет те же нижние индексы, что и квадратичного коэффициента при том же неизвестном в первоначальной системе. Нижние

индексы остальных коэффициентов такие же, как и при соответствующих неизвестных в уравнениях того же номера первоначальной системы. Верхние индексы, в скобках, показывают число исключенных неизвестных до получения данной системы.

Теперь легко написать любую преобразованную систему уравнений. Так, например, после исключения пяти неизвестных из системы восьми уравнений будет получено

$$\Lambda_{66}^{(5)} z_6 + \Lambda_{67}^{(5)} z_7 + \Lambda_{68}^{(5)} z_8 + L_6^{(5)} = 0,$$

$$\Lambda_{67}^{(5)} z_6 + \Lambda_{77}^{(5)} z_7 + \Lambda_{78}^{(5)} z_8 + L_7^{(5)} = 0,$$

$$\Lambda_{68}^{(5)} z_6 + \Lambda_{78}^{(5)} z_7 + \Lambda_{88}^{(5)} z_8 + L_8^{(5)} = 0.$$

Без затруднений можно написать выражение для последнего неизвестного

$$z_8 = - \frac{L_8^{(7)}}{\Lambda_{88}^{(7)}}.$$

В общем случае

$$z_m = - \frac{L_m^{(m-1)}}{\Lambda_{mm}^{(m-1)}},$$

где m — число неизвестных.

Не составит труда написать остальные элиминационные уравнения, например,

$$z_4 = - \frac{\Lambda_{43}^{(3)}}{\Lambda_{41}^{(3)}} z_3 - \frac{\Lambda_{46}^{(3)}}{\Lambda_{11}^{(3)}} z_6 - \frac{\Lambda_{47}^{(3)}}{\Lambda_{41}^{(3)}} z_7 - \frac{\Lambda_{48}^{(3)}}{\Lambda_{43}^{(3)}} z_8 - \frac{L_4^{(3)}}{\Lambda_{44}^{(3)}}.$$

В общем случае

$$z_i = - \frac{\Lambda_{i(i+1)}^{(i-1)}}{\Lambda_{ii}^{(i-1)}} z_{i+1} - \frac{\Lambda_{i(i+2)}^{(i-1)}}{\Lambda_{ii}^{(i-1)}} z_{i+2} - \dots - \frac{\Lambda_{im}^{(i-1)}}{\Lambda_{ii}^{(i-1)}} z_m - \frac{L_i^{(i-1)}}{\Lambda_{ii}^{(i-1)}},$$

или

$$z_i = E_{i(i+1)} \cdot z_{i+1} + E_{i(i+2)} \cdot z_{i+2} + \dots + E_{im} \cdot z_m + E_{iL}. \quad (VI.17)$$

Обозначения коэффициентов и свободных членов преобразованных уравнений раскрываются по следующему правилу.

Коэффициент (свободный член) преобразованной системы равен коэффициенту (свободному члену) предыдущей преобразованной системы с теми же нижними индексами минус дробь, в знаменателе которой стоит первый квадратичный коэффициент предыдущей системы, а в числителе — произведение двух коэффициентов, у которых первые индексы такие же, как в знаменателе, вторые — повторяют

индексы уменьшаемого. Некоторые особенности раскрытия обозначения свободного члена покажем на примерах

$$N_{78}^{(5)} = N_{78}^{(4)} - \frac{N_{57}^{(4)} N_{38}^{(4)}}{N_{55}^{(4)}}; \quad N_{38}^{(3)} = N_{38}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{38}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}};$$

$$N_{78}^{(4)} = N_{78}^{(3)} - \frac{N_{17}^{(3)} N_{18}^{(3)}}{N_{44}^{(3)}}; \quad N_{44}^{(3)} = N_{44}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$$

и т. д.

Свободные члены раскрываются так:

$$L_7^{(3)} = L_7^{(2)} - \frac{N_{37}^{(2)} L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}},$$

$$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - \frac{N_{23} L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}.$$

В общем случае

$$\left. \begin{aligned} N_{ij}^{(p)} &= N_{ij}^{(p-1)} - \frac{N_{pi}^{(p-1)} N_{pj}^{(p-1)}}{N_{pp}^{(p-1)}} \\ L_i^{(p)} &= L_i^{(p-1)} - \frac{N_{pi}^{(p-1)} L_p^{(p-1)}}{N_{pp}^{(p-1)}} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VI.18})$$

причем всегда $j \geq i > p$.

Раскрывая по указанным правилам коэффициенты и свободный член любого уравнения эквивалентной системы, убеждаемся, что для этого требуется только первоначальная система уравнений и предыдущие уравнения эквивалентной системы, т. е. из преобразованных систем нужны только первые уравнения. На этом и основан алгоритм Гаусса.

Покажем теперь, что коэффициенты, расположенные на главной диагонали любой преобразованной системы, всегда положительны, так как представляют собой сумму квадратов.

Рассмотрим систему исходных уравнений

$$a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \dots + a_{im}z_m + w_i = v'_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{VI.19})$$

Под «исходной» системой будем понимать редуцированные к равнозначному виду параметрические уравнения поправок или коррелятивные уравнения поправок. Во втором случае $w_i = 0$.

Исключим из уравнения (VI.19) при помощи первого элиминационного уравнения неизвестное z_1 . Тогда получим

$$a_{i2}^{(1)}z_2 + \dots + a_{im}^{(1)}z_m + w_i^{(1)} = v_i'. \quad (\text{VI.20})$$

Так как правые части уравнений (VI.20) остаются без изменений, то из этих уравнений, исходя из условия $\{pv^2\} = \min$, можно получить систему нормальных уравнений

$$[a_2^{(1)} a_2^{(1)}] z_2 + \dots + [a_2^{(1)} a_m^{(1)}] z_m + [a_2^{(1)} w^{(1)}] = 0$$

и т. д.

Раскроем сумму $[a_2^{(1)} a_2^{(1)}]$.

Так как

$$a_{i2}^{(1)} = a_{i2} - \frac{N_{12}}{N_{11}} a_{i1},$$

то

$$a_{i2}^{(1)} a_{i2}^{(1)} = \left(a_{i2} - \frac{N_{12}}{N_{11}} a_{i1} \right)^2 = a_{i2} a_{i2} - 2 a_{i1} a_{i2} \frac{N_{12}}{N_{11}} + a_{i1} a_{i1} \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11} N_{11}}.$$

Далее имеем

$$[a_2^{(1)} a_2^{(1)}] = [a_2 a_2] - 2[a_1 a_2] \frac{N_{12}}{N_{11}} + [a_1 a_1] \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11} N_{11}}.$$

Учитывая обозначения коэффициентов нормальных уравнений, последнее равенство переписываем так:

$$[a_2^{(1)} a_2^{(1)}] = N_{22} - 2 \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11}} + N_{11} \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11} N_{11}} = N_{22} - \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11}},$$

или

$$[a_2^{(1)} a_2^{(1)}] = N_{22} - \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11}},$$

а согласно формулам (VI.18)

$$[a_2^{(1)} a_2^{(1)}] = \Lambda_{22}^{(1)},$$

т. е. коэффициент $\Lambda_{22}^{(1)}$ — сумма квадратов, что и требовалось доказать.

Нетрудно убедиться, что

$$[a_2^{(1)} a_3^{(1)}] = \Lambda_{23}^{(1)},$$

$$[a_2^{(1)} \omega^{(1)}] = L_2^{(1)}$$

и т. п.

Исключив аналогично при помощи второго элиминационного уравнения из системы (VI.20) неизвестное z_2 , получим

$$\Lambda_{33}^{(2)} = [a_3^{(2)} a_3^{(2)}]$$

и т. д.

Таким образом, установлено, что преобразованные системы нормальных уравнений сохраняют все свойства первоначальной системы, а именно: по главной диагонали стоят квадратичные коэффициенты, остальные коэффициенты располагаются симметрично относительно квадратичной диагонали. Это обстоятельство — большое достоинство метода последовательного исключения неизвестных для решения системы нормальных уравнений.

2. Обусловленность системы нормальных уравнений

Важнейший показатель обусловленности системы линейных уравнений — определитель системы D .

Определитель системы нормальных уравнений легко получить из системы эквивалентных уравнений. Матрица коэффициентов этой системы треугольная. Из теории матриц известно, что определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов. Таким образом,

$$D = N_{11} \cdot N_{22}^{(1)} \cdot N_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot N_{mm}^{(m-1)}. \quad (VI.24)$$

Отсюда видно, что значение D всегда положительно. Для одно- и двух- и т. д. систем одного и того же порядка и одинаковой размерности коэффициентов исходных уравнений чем больше D , тем лучше обусловленность системы.

Для полной характеристики обусловленности системы необходимо произвести весьма громоздкие вычисления «собственных чисел» матрицы коэффициентов и найти «собственные решения». Практически это неприменимо.

Приведем следующие признаки хорошей обусловленности системы нормальных уравнений:

1. Квадратичные коэффициенты заметно превосходят по абсолютной величине неквадратичные. Идеальным считается случай, когда все неквадратичные коэффициенты равны нулю, т. е. когда матрица коэффициентов диагональная.

2. Неквадратичные коэффициенты группируются вблизи главной диагонали, остальные элементы матрицы равны нулю. Такая матрица называется **б л и з д и а г о н а л ь н о й**.

3. Свободные члены невелики.

Указанные признаки очевидны и не нуждаются в доказательствах: очевидно также, что при прочих равных условиях * обусловленность ухудшается с увеличением системы.

3. Способы контроля решения нормальных уравнений

1. **К о н т р о л ь н о в с п о м о г а т е л ь н ы м и з в е с т н ы м**. Введем неизвестные

$$u_i = z_i - 1 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (VI.22)$$

Тогда $z_i = u_i + 1$ ($i = 1, \dots, m$) и можно написать

$$N_{j1}(u_1 + 1) + N_{j2}(u_2 + 1) + \dots + N_{jm}(u_m + 1) + L_j =$$

$$= N_{j1}u_1 + N_{j2}u_2 + \dots + N_{jm}u_m + (N_{j1} + N_{j2} + \dots + N_{jm} + L_j) = 0.$$

По

$$N_{j1} + N_{j2} + \dots + N_{jm} + L_j = \Sigma_j.$$

* Обусловленность системы уравнений характеризует точность ее решения. При плохой обусловленности неизвестные будут отягощены большими ошибками, зависящими от округлений в процессе вычислений.

поэтому можно написать систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} X_{11}u_1 + \dots + X_{1m}u_m + \Sigma_1 = 0 \\ \vdots \\ X_{1m}u_1 + \dots + X_{mm}u_m + \Sigma_m = 0 \end{array} \right\}. \quad (\text{VI.23})$$

Получен следующий результат: если повторить решение уравнений со свободными членами, равными Σ_i ($i = 1, \dots, m$), то получим контрольные неизвестные, отличающиеся от основных на единицу, согласно равенству (VI.22).

Заметим, что для этого контроля придется повторять преобразования только в одной, дополнительной, графе, в которую нужно выписать суммы коэффициентов и свободного члена уравнения, а также вычислить новые неизвестные.

2. Промежуточные контроли. Трудности решения системы уравнений заключаются не только в большом объеме вычислений, но и в том, что почти все последующие действия основываются на результатах предыдущих, из-за чего допущенная в вычислениях ошибка может сделать неверными все последующие результаты. Поэтому в решении нормальных уравнений особую важность приобретает контроль промежуточных результатов вычислений.

Первый контроль в начале очередного преобразования — это контроль элиминационного уравнения при помощи равенства

$$-1 - \frac{N_i^{(l-1)}}{N_{ii}} - \frac{N_i^{(l-1)}}{N_{ii}} - \dots - \frac{N_{im}^{(l-1)}}{N_{ii}} - \frac{L_i^{(l-1)}}{N_{ii}} \approx -\frac{z_i^{(l-1)}}{N_{ii}}, \quad (\text{VI.24})$$

где $\Sigma_i^{(i-1)}$ — сумма коэффициентов и свободного члена i -го уравнения эквивалентной системы.

Заметим, что в графу Σ схемы решения следует выписывать точное значение левой части равенства (VI.24). Правое, контрольное, значение не выписывается нигде.

Основным промежуточным контролем служит контроль правильности вычисления коэффициентов и свободного члена каждого очередного уравнения эквивалентной системы (контроль «по суммарным строкам»), осуществляемый равенствами типа

$$N_{i1}^{(i-1)} + N_{i(i+1)}^{(i-1)} + \dots + N_{im}^{(i-1)} + L_i^{(i-1)} \approx \Sigma_i^{(i-1)}, \quad (\text{VI.25})$$

где $\Sigma_i^{(l-1)}$ — результат преобразования величины Σ .

Для осуществления этого контроля с величинами Σ выполняют такие же преобразования, как и в других графах. Заметим, что в графу Σ выписывают точные значения левой части равенства (VI.25).

Докажем справедливость равенства (VI.25).

Принимая во внимание (VI.23), можно написать два равенства

$$N_{ii}^{(i-1)}z_i + N_{i(i+1)}^{(i-1)}z_{i+1} + \dots + N_{im}^{(i-1)}z_m + l_i^{(i-1)} = 0,$$

$$N_{il}^{(i-1)}u_l + N_{i(i+1)}^{(i-1)}u_{i+1} + \dots + N_{im}^{(i-1)}u_m = -\frac{N_{il}^{(i-1)}}{z_i}.$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее и имея в виду равенство (VI.22), получаем

$$N_{ii}^{(i-1)} + N_{i(i+1)}^{(i-1)} + \dots + N_{im}^{(i-1)} + L_i^{i-1} = \Sigma_i^{(i-1)},$$

что и требовалось доказать.

При решении нормальных уравнений в параметрическом способе уравнивания в схему выписывают еще значения $[pli]$ и $[pls]$; обозначим их так:

$$\left. \begin{aligned} [pli] &= N_{(k-1)(k+1)} \\ [pls] &= \Sigma_{k+1} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VI.26})$$

Тогда получим заключительное контрольное равенство решения нормальных уравнений

$$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = \Sigma_{k+1}^{(k)}.$$

Ниже показано, что

$$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = [pv^2].$$

3. К о н т р о л ь н о $[pv^2]$. Присоединим к системе нормальных уравнений, образующейся при уравнивании параметрическим способом, равенство (V.59) с учетом принятых нами общих обозначений для коэффициентов и свободных членов нормальных уравнений

$$N_{11}\tau_1 + \dots + N_{1k}\tau_k + L_1 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$N_{1k}\tau_1 + \dots + N_{kk}\tau_k + L_k = 0,$$

$$L_1\tau_1 + \dots + L_k\tau_k + N_{(k+1)(k+1)} = [pv^2],$$

где

$$N_{(k+1)(k+1)} = [pli].$$

Вновь полученная система $k+1$ уравнений с $k+1$ неизвестными сохраняет все свойства нормальных уравнений. Поэтому, исключив из этой системы все неизвестные τ , получим

$$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = [pv^2]. \quad (\text{VI.27})$$

Так как величина $N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = [pli]$ стоит на главной диагонали и играет в преобразованиях роль квадратичного коэффициента, то значение $N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = [pv^2]$ раскрывается так:

$$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = N_{(k+1)(k+1)} + E_{1L}L_1 + E_{2L}L_2^{(1)} + E_{3L}L_3^{(2)} + \dots + E_{kL}L_k^{(k-1)}$$

или

$$[pv^2] = [pli] + \sum_{i=1}^k E_{iL}L_i^{(i-1)}. \quad (\text{VI.28})$$

Выражение (VI.28) в виде правила можно сформулировать так: величина $[pv^2]$ равна $[pli]$ плюс сумма произведений чисел, стоящих в схеме решения на

пересечении i -й строки с гра-
фой L , на вышестоящие числа.

Заметим, что по этому же правилу вычисляют все квадратичные коэффициенты $N_{ii}^{(i-1)}$ эквивалентных уравнений, если вместо графы L пользоваться графой N_{ii} .

Вычисленное по формуле (VI.28) значение $[pv^2]$ должно в пределах точности вычислений равняться тому значению этой же величины, которое будет получено в таблице коэффициентов.

Почти такой же контроль осуществляется при уравнивании коррелятным способом.

Присоединим к системе нормальных уравнений, образующейся при уравнивании коррелятным способом, равенство (V.61)

$$N_{11}k_1 + \dots + N_{1r}k_r + W_1 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$N_{1rk_1} + \dots + N_{rr}k_r + W_r = 0,$$

$$W_1k_1 + \dots + W_rk_r + N_{(r+1)(r+1)} = -[pv^2],$$

где

$$N_{(r+1)(r+1)} = 0.$$

Вновь полученная система также сохраняет свойства нормальных уравнений. Поэтому, исключив из нее все неизвестные k , получим

$$-[pv^2] = N_{(r+1)(r+1)}^{(r)} = N_{(r+1)(r+1)} + E_{1W} \cdot W_1 + E_{2W} \cdot W_2^{(1)} + \dots,$$

или

$$-[pv^2] = \sum_{i=1}^r E_{iW} W_i^{(i-1)}, \quad (\text{VI.29})$$

т. е. величина $[pv^2]$ равна сумме произведений чисел, стоящих в схеме решения на пересечениях элиминационных строк с графой W , на вышестоящие числа. Полученное по этому правилу значение $[pv^2]$ сравнивается с двумя значениями, полученными затем в графе « w » таблицы коэффициентов и по формуле (V.61).

4. К о н т р о л ь н е и з в е с т н ы х. После нахождения всех неизвестных выполняют следующий контроль по сумме уравнений:

$$(\Sigma_1 - L_1) z_1 + (\Sigma_2 - L_2) z_2 + \dots + (\Sigma_m - L_m) z_m + [L] = 0. \quad (\text{VI.30})$$

Однако при решении больших систем уравнений контроль необходимо выполнять подстановкой неизвестных в эквивалентные уравнения после получения каждого очередного неизвестного из соответствующего элиминационного уравнения либо вычислять контрольные неизвестные $u = z - 1$, пользуясь суммами коэффициентов и L .

Для окончательного контроля результатов уравнительных вычислений проверяют, ликвидированы ли невязки в математических соотношениях между измеренными величинами, для чего составляют эти соотношения с уравненными значениями измеренных величин. Если уравнивание выполнялось параметрическим способом, то, кроме

того, проверяют справедливость равенств, выражающих измеренные величины через выбранные при уравнивании необходимые неизвестные.

Кроме этих проверок правильности решения уравнений, полученные результаты уравнивания анализируют в отношении качества измерений и исходных данных, о чем судят по величинам поправок и их распределению в геодезической сети. Нормально поправки v не должны превышать по абсолютной величине установленных предельных значений ошибок измерений, а распределение их по абсолютным величинам должно быть более или менее равномерным. Исходно допустимо большие поправки v являются признаком существенного влияния ошибок исходных данных либо систематических ошибок измерений. Распределение же крупных ошибок преимущественно вблизи исходных данных также может свидетельствовать о существенном влиянии ошибок исходных данных.

§ 63. ПОЛНАЯ И СОКРАЩЕННАЯ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АЛГОРИТМОМ ГАУССА

1. Полная схема

Ниже приведена наиболее полная вычислительная схема алгоритма Гаусса, которую обычно называют схемой Гаусса — Дулитля. Эту схему можно применять при вычислениях с логарифмической линейкой. Заметим, что при работе на арифмометре применяют более компактную схему.

Для того чтобы показать порядок вычислений в схеме, не прибегая к подробным пояснениям, дадим сначала эту схему в обозначениях, соответствующих формулам алгоритма Гаусса для решения трех уравнений (табл. 32).

Пояснение к схеме (табл. 32).

1. Все вычисления производят последовательно сверху вниз. Элиминационные строки выписывают следующим образом. Получив значение $1/N_{11}$ (или $1/N_{22}^{(1)}$ и т. п.), умножают это число на остальные коэффициенты уравнений эквивалентной системы. Так же получают строки $E_{12}N$, $E_{13}N$, $E_{14}N$, $E_{23}N^{(1)}$ и т. п., умножая соответствующий коэффициент элиминационного уравнения на коэффициенты вышестоящего уравнения эквивалентной системы. Заметим, что числа элиминационной строки имеют всегда знаки, противоположные знакам вышестоящих чисел (под «вышестоящими» строками и числами будем понимать строки и числа, стоящие непосредственно выше над данной строкой или числом).

2. Коэффициенты эквивалентной системы, которые выписывают под горизонтальной чертой, получают как сумму чисел данной графы, стоящих ниже ближайшей верхней элиминационной строки.

3. В графу Σ выписывают точные значения сумм коэффициентов и свободных членов соответствующих уравнений. Для основной системы уравнений в схеме следует применять сокращенную систему записи, т. е. выписывать только коэффициенты, начиная

действий	τ_1	τ_2	τ_3	L	Σ	Примечание
0	1	2	3	4	5	6
N_{11}	N_{11}	N_{11}	N_{13}	L_1	Σ_1	
E_1	-1	$-\frac{N_{12}}{N_{11}}$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}}$	$-\frac{L_1}{N_{11}}$	ΣE_1	
N_{21}		N_{22}	N_{23}	L_2	Σ_2	
$E_{12}N$		$-\frac{N_{12}}{N_{11}} N_{12}$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}} N_{13}$	$-\frac{N_{12}}{N_{11}} L_1$	$-\frac{N_{12}}{N_{11}} \Sigma_1$	
$N_{21}^{(1)}$		$N_{22}^{(1)}$	$N_{23}^{(1)}$	$L_2^{(1)}$	$\Sigma N_2^{(1)}$	
E_2		-1	$\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	$-\frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	ΣE_2	
N_{31}			N_{33}	L_3	Σ_3	
$E_{13}N$			$-\frac{N_{13}}{N_{11}} N_{13}$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}} L_1$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}} \Sigma_1$	
$E_{23}N^{(1)}$			$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} N_{23}^{(1)}$	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} L_2^{(1)}$	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \Sigma N_2^{(1)}$	
$N_{31}^{(2)}$			$N_{33}^{(2)}$	$L_3^{(2)}$	$\Sigma N_3^{(2)}$	
E_3			-1	$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$	ΣE_3	
N_1				$[p l]$	Σ_1	
$E_{11}N$				$-\frac{L_1}{N_{11}} L_1$	$-\frac{L_1}{N_{11}} \Sigma_1$	
$E_{21}N^{(1)}$				$-\frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} L_2^{(1)}$	$-\frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \Sigma N_2^{(1)}$	
$E_{31}N^{(2)}$				$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} L_3^{(2)}$	$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \Sigma N_3^{(2)}$	
$N_{41}^{(3)}$				$N_{41}^{(3)}$	$\approx \Sigma_1^{(3)} \approx [p^2]$	
			$\tau_3 =$	$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$		
		$\tau_2 =$	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \tau_3$	$-\frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$		
τ_1		$-\frac{N_{12}}{N_{11}} \tau_2$	$\frac{N_{13}}{N_{11}} \tau_3$	$-\frac{L_1}{N_{11}}$		

Таблица 33

Действия	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	L	Σ	Контроль
0	1	2	3	4	5	6	7
N_{1i} E_1 N_{2i} $E_{12}N$	3,00 -1	+0,39 -0,130 2,53 -0,05	-0,28 +0,093 +0,20 +0,04	-0,26 +0,087 -0,17 +0,03	+3,36 -1,120 +3,34 -0,44	+6,21 -2,070 +6,29 -0,81	-2,070
$N_{2i}^{(1)}$ E_2 N_{3i} $E_{13}N$ $E_{23}N^{(1)}$		2,48 -1	+0,24 -0,097 1,08 -0,03 -0,02	-0,14 +0,055 +0,29 -0,02 +0,01	+2,90 -1,170 -2,62 +0,31 -0,28	+5,48 -2,212 -1,33 +0,58 -0,53	+5,48 -2,210
$N_{3i}^{(2)}$ E_3 N_{4i} $E_{14}N$ $E_{24}N^{(1)}$ $E_{34}N^{(2)}$			1,03 -1	+0,28 -0,272 1,60 -0,02 -0,01 -0,08	-2,59 +2,516 +2,99 +0,29 +0,16 +0,70	-1,28 +1,244 +4,45 +0,54 +0,31 +0,35	-1,28 +1,244
$N_{4i}^{(3)}$ E_4 N_5 $E_{15}N$ $E_{25}N^{(1)}$ $E_{35}N^{(2)}$ $E_{45}N^{(3)}$				1,49 -1	+4,14 -2,780 35,68 -3,76 -3,39 -6,50 -11,51	+5,63 -3,780 42,75 -6,96 -6,40 -3,23 -15,65	+5,65 -3,780
$N_5^{(4)}$							
	-0,85	-1,65 +0,21	+3,28 -0,32 +0,30	-2,78 +0,76 -0,16 -0,24	10,52 +2,52 -1,17 -1,12	+10,51 = $[pt^2]$	

Примечание. Обычно графу «Контроль» не делают. В табл. 33 эта графа помещена с целью облегчить читателю усвоение порядка вычислений.

с квадратичного. Контрольные значения $\Sigma_2^{(1)}$, $\Sigma_3^{(2)}$, $\Sigma_4^{(2)}$ и т. д. куда не выписывают. Исключение в этом отношении составляет только величина $\Sigma_{(k+1)}^{(k)}$ в параметрическом способе.

4. Значения неизвестных находят при помощи элиминационных строк E_3 , E_2 и E_1 . Для выделения этих строк их обычно записывают другими чернилами и эти строки делают пропуск.

Нижнюю часть схемы, в которой вычисляют значения неизвестных, принято называть «горкой».

5. В коэффициентах элиминационных строк сохраняют обычно на один-два десятичных знака больше, чем в остальных строках.

В табл. 33 приведен пример решения четырех нормальных уравнений по схеме Гаусса — Дунтля на логарифмической линейке.

Задана система уравнений в суммы Σ

$$\begin{aligned} 3,00\tau_1 + 0,39\tau_2 - 0,28\tau_3 - 0,26\tau_4 + 3,36 &= 0; & \Sigma_1 &= +6,21; \\ +0,39\tau_1 + 2,53\tau_2 + 0,20\tau_3 - 0,17\tau_4 + 3,34 &= 0; & \Sigma_2 &= +6,29; \\ -0,28\tau_1 + 0,20\tau_2 + 1,08\tau_3 + 0,29\tau_4 - 2,62 &= 0; & \Sigma_3 &= -1,33; \\ -0,26\tau_1 - 0,17\tau_2 + 0,29\tau_3 + 1,80\tau_4 + 2,99 &= 0; & \Sigma_4 &= +4,45; \\ [pl] &= 35,68; & \Sigma_5 &= 42,75 \approx [pls]. \end{aligned}$$

Для окончательного контроля вычислений подставим найденные неизвестные в суммарное уравнение для чего вычислим его коэффициенты и свободный член (см. формулу VI.30),

$$\begin{aligned} \Sigma_1 - L_1 &= +6,21 - 3,36 = +2,85; \\ \Sigma_2 - L_2 &= +6,29 - 3,34 = +2,95; \\ \Sigma_3 - L_3 &= -1,33 + 2,62 = +1,29; \\ \Sigma_4 - L_4 &= +4,45 - 2,99 = +1,46; \\ \Sigma_5 - [pl] &= +42,75 - 35,68 = +7,07. \end{aligned}$$

Теперь получим

$$\begin{aligned} -2,85 \cdot 0,85 - 2,95 \cdot 1,65 + 1,29 \cdot 3,28 - 1,46 \cdot 2,78 + 7,07 &= \\ = -2,42 - 4,87 + 4,23 - 4,06 + 7,07 &= -0,05. \end{aligned}$$

Остаточная погрешность пренебрегаемо мала.

2. Сокращенная схема для вычислений на настольной вычислительной машине ЭВМ

При вычислениях на арифмометре коэффициенты преобразованных уравнений, являющиеся суммами коэффициентов уравнений (N) в произведений двух множителей, можно получать сразу на арифмометре без промежуточных записей. Тогда в схему решения нужно выписывать только коэффициенты основных, преобразованных и элиминационных уравнений. Все произведения чисел элиминационных строк на числа вышестоящих строк (т. е. $E_{12}N$, $E_{13}N$, $E_{23}N^{(1)}$ и т. п.)

выписывать не следует. Так же без промежуточных записей можно получить и неизвестные.

Точность вычислений на арифмометре указанным способом значительно повышается по сравнению с вычислениями на логарифмической линейке, так как, во-первых, на арифмометре вычисления можно производить с большим числом десятичных знаков, и, во-вторых, совсем не будут влиять ошибки округлений промежуточных результатов.

В табл. 34 показана сокращенная схема решения нормальных уравнений на арифмометре, для чего взят решенный уже на линейке пример. В этой таблице вычислены контрольные неизвестные $u = z - 1$. Как видно, сходимость этих равенств точная.

Т а б л и ц а 34

Действия	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	L	Σ	Контроль
0	1	2	3	4	5	6	7
N_{11} E_1 N_{21}	3.000 -1	$\div 0.390$ -0.1300 2.530	-0.280 $\div 0.0933$ $\div 0.200$	-0.260 -0.0867 -0.170	+3.360 -1.1200 +3.340	+6.210 -2.0700 +6.290	-2.0700
$N_{21}^{(1)}$ E_2 N_{31}		2.479 -1	$\div 0.236$ -0.0952 1.080	-0.138 $\div 0.0557$ $\div 0.290$	+2.903 -1.1710 -2.620	+5.480 -2.2105 -1.330	+5.482 -2.2106
$N_{31}^{(2)}$ E_3 N_{41}			1.081 -1	+0.279 -0.2706 1.600	-2.583 +2.5053 +2.990	-1.273 +1.2347 +4.450	-1.272 +1.2347
$N_{41}^{(3)}$ E_4 N_5				1.494 -1	+4.142 -2.7724 35.680	+5.636 -3.7724 +42.750	+5.638 -3.7724
$N_5^{(4)}$ $\tau =$	-0.844	-1.635	+3.255	-2.772	10.563	+10.563	-0.007
$u =$	-1.844	-2.635	+2.255	-3.772			

Подставляя найденные неизвестные в суммарное уравнение, получаем остаточную погрешность, равную -0,007.

Значительно более точна сходимость контрольных результатов при вычислениях на арифмометре по сравнению с вычислениями

на логарифмической линейке. Это преимущество арифмометра является тем больше, чем больше число уравнений.

Однако логарифмическая линейка очень часто вполне обеспечивает практически необходимую точность.

§ 64. СПОСОБ КРАКОВЯНОВ

Для последовательного исключения неизвестных при работе с НВМ эффективен способ краковянов, разработанный польским астрономом Бапахевичем *. При этом способе в наибольшей степени используют возможности арифмометра; наименьшим образом влияют ошибки округлений; вычисления укладываются в весьма компактную схему.

Сущность способа заключается в том, что на арифмометре или другой вычислительной машине такого типа получают без промежуточных записей коэффициенты уравнений эквивалентной системы, деленные на корень квадратный из квадратичных коэффициентов этих уравнений. Соответствующие строки назовем «краковяновыми». Нетрудно убедиться в том, что произведения элементов элиминационных уравнений на элементы эквивалентных уравнений, которые (произведения) суммируют в процессе преобразований в алгоритме Гаусса, равны произведениям чисел краковяновых строк, стоящих в тех же графах.

Покажем в гауссовых обозначениях решение трех уравнений способом краковянов.

Схема решения приведена в табл. 35, в которой буквами K обозначены краковяновые строки.

Для удобства вычислений все величины строк N (т. е. основных уравнений), кроме квадратичных коэффициентов, выписывают в схему с обратными знаками.

Порядок получения строки K_{11} в пояснениях не нуждается; $\sqrt{N_{11}}$ получают на арифмометре следующим образом.

Взяв на логарифмической линейке или по таблицам приближенное значение корня (до 3—4 значащих цифр), ставят его на рычагах и делят на него величину N_{11} ; искомое значение корня будет равно среднему арифметическому из полученного частного и делителя. Иными словами, корень получают по формуле

$$\sqrt{a} = \frac{x_0 + a/x_0}{2},$$

где x_0 — приближенное значение корня.

Заметим также, что остальные величины строки K_{1i} выгоднее вычислять на арифмометре по обычным делением, а с п о с о б о м у м н о ж е н и я.

* Советским геодезистам способ краковянов известен еще как способ квадратных корней, а также как способ Холецкого. Приоритет способа принадлежит Холецкому, однако Бапахевич получил этот способ как частный случай разработанного им краковянового исчисления.

Таблица 35

Действия	τ_1	τ_2	τ_3	L	Σ	Контроль
а	1	2	3	4	5	6
N_{1i}	N_{11}	$-N_{12}$	$-N_{13}$	$-L_1$	$-\Sigma_1$	
N_{2i}		N_{22}	$-N_{23}$	$-L_2$	$-\Sigma_2$	
N_{3i}			N_{33}	$-L_3$	$-\Sigma_3$	
N_{4i}				$[p11]$	$-\Sigma_4$	
K_{1i}	$\sqrt{N_{11}}$	$\frac{-N_{12}}{\sqrt{N_{11}}}$	$\frac{-N_{13}}{\sqrt{N_{11}}}$	$\frac{-L_1}{\sqrt{N_{11}}}$	$-\Sigma K_1$	$\frac{-\Sigma_1}{\sqrt{N_{11}}}$
K_{2i}		$\sqrt{N_{22}^{(1)}}$	$\frac{-N_{23}^{(1)}}{\sqrt{N_{22}^{(1)}}}$	$\frac{-L_2^{(1)}}{\sqrt{N_{22}^{(1)}}}$	$-\Sigma K_2$	$\frac{-\Sigma_2^{(1)}}{\sqrt{N_{22}^{(1)}}}$
K_{3i}			$\sqrt{N_{33}^{(2)}}$	$\frac{-L_3^{(2)}}{\sqrt{N_{33}^{(2)}}}$	$-\Sigma K_3$	$\frac{-\Sigma_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$
$N_{4i}^{(3)}$				$N_{41}^{(3)}$	$-\Sigma_4^{(3)}$	
Неизвестные	τ_1	τ_2	τ_3	$\frac{-L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$		

Величина $N_{22}^{(1)}$ получается как разность

$$N_{22} - \left(\frac{-N_{12}}{\sqrt{N_{11}}} \right)^2$$

или, в обозначениях схемы, $N_{22} - K_{12}^{(2)}$ (при установке на арифмометре величины N_{22} нужно, конечно, учитывать число десятичных знаков квадрата величины $K_{12} = \frac{-N_{12}}{\sqrt{N_{11}}}$). Нетрудно видеть, что в результате будет получена величина

$$N_{22}^{(1)} = N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}}.$$

Не снимая полученной величины $N_{22}^{(1)}$ с каретки арифмометра, извлекают из нее корень описанным выше способом и результаты выписывают в строку K_{2i} .

Числители дробей строки K_{2i} вычисляют по формулам

$$-N_{23}^{(1)} = -N_{23} + K_{12}K_{13};$$

$$-L_2^{(1)} = -L_2 + K_{12}K_{14};$$

$$-N_{26} = -\Sigma_2 + K_{12}K_{15}.$$

Величины $-\Sigma K_1$ и ΣK_2 получают как сумму влево расположенных чисел, придавая крайнему слева числу знак минус.

Значение $N_{33}^{(2)}$ находят по формуле

$$N_{33}^{(2)} = N_{33} - K_{13}^2 - K_{23}^2.$$

Перед извлечением корня из величины $N_{33}^{(2)}$ ее (а вообще — квадратичный коэффициент последнего уравнения эквивалентной системы) выписывают внизу в графе « L », в строке «Неизвестные», как показано в табл. 35. Так же поступают и с величиной — $L_3^{(2)}$ (в общем случае с величиной — $L_k^{(k-1)}$).

Числители строки K_{3i} получают по формулам

$$-L_3^{(2)} = -L_3 + K_{13}K_{11} + K_{23}K_{21};$$

$$-\Sigma_3^{(2)} = -\Sigma_3 + K_{13}K_{15} + K_{23}K_{25}.$$

Вычисление всех значений краковяновых строк, включая извлечение корня и деление на $\sqrt{N_{22}^{(1)}}$, $\sqrt{N_{33}^{(2)}}$ и пр., выполняют на арифмометре без промежуточных записей. Так, получив на арифмометре сумму $-\Sigma_3 + K_{13}K_{15} + K_{23}K_{25}$, не снимая с каретки, сразу делят ее на величину $\sqrt{N_{33}^{(2)}}$, выписавшую ранее слева в строке K_{3i} . В схему вычислений выписывают лишь окончательные результаты.

По аналогичным правилам получают величины

$$N_{44}^3 = [II] - K_{14}^2 - K_{24}^2 - K_{34}^2;$$

$$-\Sigma_4^{(3)} = -\Sigma_4 + K_{14}K_{15} + K_{24}K_{25} + K_{34}K_{35}.$$

Заметим следующие различия. При получении первых слева величин краковяновых строк от величин строк N вычитают квадраты чисел краковяновых строк; при вычислении же остальных величин краковяновых строк числа верхней части таблицы а л г с б р а н ч е с к и с у м м и р у ю т с произведениями чисел краковяновых строк.

Контроль по строкам K такой же, как и по строкам эквивалентных уравнений в схеме Гаусса — Дунгтя, если брать первые слева числа со знаком минус (эти числа в схеме всегда положительны).

Последнее неизвестное (в нашем примере τ_3) получают по обычной формуле

$$\tau_3 = \frac{-L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}},$$

а в общем случае

$$\tau_k = \frac{-L_k^{(k-1)}}{N_{kk}^{(k-1)}}.$$

Остальные неизвестные получают на арифмометре без промежуточных записей при помощи краковяновых строк по формулам

$$\tau_2 = \frac{K_{21} + K_{23}\tau_3}{\sqrt{N_{22}^{(1)}}};$$

$$\tau_1 = \frac{K_{11} + K_{13}\tau_3 + K_{12}\tau_2}{\sqrt{N_{11}}},$$

т. е. почти так же, как в схеме Гаусса — Дунтия из элиминационных строк; здесь добавляется лишь деление на корни из квадратичных коэффициентов.

В табл. 36 приведен пример решения четырех нормальных уравнений способом краковянов. Взята ранее дважды решенная система уравнений. Напомним, что все величины этой системы, кроме квадратичных коэффициентов, выписывают в схему с обратными знаками.

Т а б л и ц а 36

Действия	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	L	Σ	Контроль
0	1	2	3	4	5	6	7
N_1	3,00	-0,39	+0,28	+0,26	-3,36	-6,21	
N_2		2,53	-0,20	+0,17	-3,34	-6,29	
N_3			1,08	-0,29	+2,62	+1,33	
N_4				1,60	-2,99	-4,45	
N_5					35,68	-42,75	
K_1	1,732	-0,225	+0,162	+0,150	-1,940	-3,585	-3,585
K_2		1,575	-0,150	+0,087	-1,843	-3,481	-3,482
K_3			1,016	-0,274	+2,542	+1,252	+1,251
K_4				1,223	-3,383	-4,606	-4,606
				$[pv^2] = 10,613$		10,615	
Неизвестные	-0,844	-1,632	+3,248	-2,768 =	$\frac{-4,138}{1,495}$		-0,001

При подстановке найденных неизвестных в суммарное уравнение получена остаточная погрешность, равная всего -0,001.

Несмотря на то что в краковяновых строках сохранено на один десятичный знак меньше, чем в элиминационных строках табл. 34, сходимость контрольных результатов при решении способом краковянов, как видим, не хуже, чем при решении алгоритмом Гаусса на арифмометре. При одинаковом числе десятичных знаков ошибки округлений в способе краковянов будут влиять на точность результатов в среднем меньше, чем в алгоритме Гаусса. Это объясняется тем, что числа элиминационных строк по абсолютной величине, как

правило, меньшие соответствующих чисел краковяновых строк *, а следовательно, и относительные ошибки округлений элиминационных коэффициентов больше ошибок соответствующих коэффициентов краковяновых строк. Поэтому ошибки округлений сумм произведений, которые и являются главным источником ошибок при решении нормальных уравнений, в способе краковянов, как правило, меньше (при одинаковом числе десятичных знаков).

Особенно эффективен способ краковянов для вычислений на ЭВМ, так как в этом способе почти в два раза меньше промежуточной информации, чем в алгоритме Гаусса (две строки заменяются одной).

Заметим, что $[pv^2]$ в табл. 36 вычислено как $[pll]$ минус сумма квадратов краковяновых строк, т. е.

$$[pv^2] = [pll] - K_{13}^2 - K_{23}^2 - K_{33}^2 - K_{43}^2 \\ ([pll] = 35,68).$$

Отметим еще, что определитель системы в табл. 36 вычисляются по формуле

$$D = K_{11}^2 \cdot K_{22}^2 \cdot K_{33}^2 \cdot K_{44}^2.$$

§ 65. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СПОСОБОМ ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Небольшие и хорошо обусловленные системы уравнений (до 20—30 уравнений) выгодно решать способом простой итерации (способ Гаусса — Зейделя).

Последовательность действия в этом способе такова:

1. Каждое неизвестное выражают через остальные, пользуясь для этого тем уравнением, в которое определяемое неизвестное входит с квадратичным коэффициентом. Для трех уравнений имеем

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= -\frac{N_{12}}{N_{11}} z_2 - \frac{N_{13}}{N_{11}} z_3 - \frac{L_1}{N_{11}} \\ z_2 &= -\frac{N_{22}}{N_{22}} z_1 - \frac{N_{23}}{N_{22}} z_3 - \frac{L_2}{N_{22}} \\ z_3 &= -\frac{N_{33}}{N_{33}} z_1 - \frac{N_{33}}{N_{33}} z_2 - \frac{L_3}{N_{33}} \end{aligned} \right\}. \quad (VI.31)$$

Эти уравнения назовем итерационными.

2. В процессе итерации (приближений) получают очередное значение каждого неизвестного путем подстановки последних значений остальных неизвестных в соответствующее итерационное уравнение. В первом приближении при нахождении z_1 значения z_2 и z_3 , а при нахождении z_2 значения z_3 принимают равными нулю.

Сходимость указанного процесса итерации доказана в § 75.

* Квадратичные коэффициенты уравнений почти всегда больше единицы.

Схема I

Таблица 37

E	E_{i1}^0	E_{i2}^0	E_{i3}^0	E_{i4}^0
E_{1i}^0		-0.154	+0.259	+0.162
E_{2i}^0	-0.130		-0.185	+0.106
E_{3i}^0	+0.093	-0.079		-0.181
E_{4i}^0	+0.087	+0.067	-0.269	
L_{Ei}	-1.12000	-1.32000	+2.42600	-1.86900
ΣE_i	-1.070	-1.486	+2.231	-1.782
$-\frac{\Sigma f}{N_{ii}}$	-2.070	-2.486	+1.231	-2.781

Примечание. Контроль вычисления коэффициентов и свободных членов итерационных уравнений осуществляется по формуле $\Sigma E_i - 1 \sim \frac{\Sigma f}{N_{ii}}$, где ΣE_i —сумма коэффициентов и свободного члена итерационного уравнения.

Таблица 38

Схема II

-1.12	-0.98	-0.87	-0.85	-0.85			τ_1
-1.15	-1.53	-1.62	-1.63	-1.63			τ_2
+2.35	+3.15	+3.24	+3.25	+3.25			τ_3
-2.60	-2.76	-2.77	-2.77	-2.77			τ_4

$$[pv^2] = -3.36 \cdot 0.85 - 3.34 \cdot 1.63 - 2.62 \cdot 3.25 - 2.99 \cdot 2.77 + 35.68 = 10.58.$$

Вычисления выполняют при помощи двух схем, располагаемых на двух листах бумаги.

В первую схему (табл. 37) выписывают коэффициенты и свободные члены правых частей итерационных уравнений, располагая их в столбцах сверху вниз. Во вторую схему (табл. 38) выписывают очередные значения неизвестных, располагая их также сверху вниз.

При вычислении очередного значения неизвестного левый край второй схемы прикладывают к правому краю соответствующей графы первой схемы, после чего суммируют на арифмометре произведения соответствующих множителей и свободный член итерационного уравнения. По мере заполнения граф второй схемы ее левые графы отрезают. Приближения продолжают до тех пор, пока очередные значения неизвестных не будут повторяться.

В табл. 37 показано решение системы уравнений, которая трижды решена ранее другими методами. Значение $[pv^2]$ вычислено по формуле

$$[pv^2] = L_1\tau_1 + L_2\tau_2 + L_3\tau_3 + L_4\tau_4 + [pll].$$

Система уравнений

$$3,00\tau_1 + 0,39\tau_2 - 0,28\tau_3 - 0,26\tau_4 + 3,36 = 0; \quad \Sigma_1 = +6,21;$$

$$+0,39\tau_1 + 2,53\tau_2 + 0,20\tau_3 - 0,17\tau_4 + 3,34 = 0; \quad \Sigma_2 = +6,29;$$

$$-0,28\tau_1 + 0,20\tau_2 + 1,08\tau_3 + 0,29\tau_4 - 2,62 = 0; \quad \Sigma_3 = -1,33;$$

$$-0,26\tau_1 - 0,17\tau_2 + 0,29\tau_3 + 1,60\tau_4 + 2,99 = 0; \quad \Sigma_4 = +4,45;$$

$$[pll] = 35,68.$$

Неизвестные, полученные способом простой итерации, оказались точнее, чем их значения, полученные по полной схеме на логарифмической линейке.

Отметим важное преимущество способа итерации в том, что ошибки в процессе приближений лишь увеличивают число приближений, не отражаясь на конечных результатах. Однако этот способ выгоден лишь для хорошо обусловленных систем. При плохой обусловленности число приближений велико, и способ становится нецелесообразным.

Сделаем еще два замечания по поводу применения способа простой итерации.

1. При большом числе уравнений в схеме I их следует располагать так, чтобы левее оказались больше по абсолютной величине свободные члены L_{Fi} . Так, в нашей схеме следовало бы расположить уравнения в такой последовательности: 3-е, 4-е, 2-е, 1-е. При малом числе уравнений порядок расположения практического значения не имеет.

2. Неизвестные нужно подставлять для контроля во все уравнения. Мы этого не делали, так как значения неизвестных определены ранее.

СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕСОВ ФУНКЦИЙ.
ПРИМЕРЫ УРАВНИВАНИЯ С ОЦЕНКОЙ ТОЧНОСТИ§ 66. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕСОВ ФУНКЦИЙ
ПРИ УРАВНИВАНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Как указано выше, для оценки точности любой величины необходимо представить ее в виде функции результатов измерений x_i , после чего можно применить известную формулу теории ошибок

$$\frac{1}{P_\Phi} = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{P} \right].$$

Величина, вес которой требуется найти, может быть по условиям задачи выражена явно либо через уравненные значения необходимых неизвестных t , либо через уравненные значения x'_i измеренных величин. Обозначим оцениваемую величину через F .

В первом случае это будет

$$F = F(t_1, \dots, t_k),$$

во втором

$$F = \psi(x'_1, \dots, x'_n).$$

Но так как все измеренные величины выражаются через необходимые неизвестные в виде равенств

$$x'_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i=1, \dots, n),$$

то второй случай легко сводится к первому. Поэтому рассмотрим только первый случай.

Итак, имеем

$$F = F(t_1, \dots, t_k)$$

и требуется найти вес величины F . Величины t — не результаты измерений. Поэтому рассуждаем так: $t = t^0 + \tau$ и величину F можно рассматривать как функцию неизвестных τ , т. е. неизвестных системы нормальных уравнений. Если эти неизвестные выразим через результаты измерений, то задача будет решена: величина F будет представлена в виде функции результатов измерений.

Для этого поступим следующим образом. Вначале выразим неизвестные τ в виде линейных функций свободных членов нормальных уравнений. Так как эти свободные члены являются суммами $[ra_1l]$, $[ra_2l]$, ..., $[ra_kl]$, то не составит труда выразить неизвестные в виде линейных функций l , т. е. свободных членов уравнений поправок. Таким образом, задача будет решена, если учесть, что вес величины $l_i = f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i = x_i^0 - x_i$ равен, очевидно, весу результата измерения, т. е. что величины l_i при оценке точности играют роль результатов измерений.

Неизвестные τ легко выразить в виде линейных функций свободных членов нормальных уравнений при помощи обратной матрицы. Напишем систему нормальных уравнений в матричной форме

$$N\tau = -L,$$

Отсюда

$$\tau = -N^{-1}L.$$

Обозначим

$$N^{-1} = Q$$

и соответственно элементы обратной матрицы через Q_{js} , где j — номер строки, s — номер столбца. Тогда

$$\tau = -QL.$$

или

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -L_1 \\ \vdots \\ -L_k \end{pmatrix}.$$

Для любого неизвестного τ_j можно записать

$$\tau_j = -Q_{j1}L_1 - Q_{j2}L_2 - \dots - Q_{jk}L_k. \quad (\text{VII.1})$$

Элементы обратной матрицы коэффициентов нормальных уравнений в параметрическом способе принято еще называть весовыми коэффициентами.

1. Вычисление весовых коэффициентов по способу дополнительных граф

Весовые коэффициенты Q_{jj} , т. е. диагональные элементы обратной матрицы, называют **к в а д р а т и ч н ы м и**. Ниже показано, что они всегда положительны. Остальные весовые коэффициенты называют **н е к в а д р а т и ч н ы м и**.

Неквадратичные коэффициенты обладают свойством симметрии относительно главной (квадратичной) диагонали, т. е.

$$Q_{js} = Q_{sj}. \quad (\text{VII.2})$$

Докажем справедливость этого равенства.

Из теории матриц известна теорема для квадратных матриц

$$(N^T)^{-1} = (N^{-1})^T, \quad (\text{VII.3})$$

т. е. действия транспонирования и обращения квадратной матрицы можно переставлять местами.

Для матрицы коэффициентов нормальных уравнений вследствие ее симметричности можно написать

$$N^T = N; \quad (\text{VII.4})$$

поэтому, имея в виду (VII.3) и (VII.4), получим

$$(N^T)^{-1} = N^{-1},$$

откуда

$$N^{-1} = (N^{-1})^T,$$

III

$$Q = Q^T,$$

т. е. обратная матрица также симметрична относительно главной диагонали, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь способы вычисления весовых коэффициентов. Эти способы основаны на известном соотношении

$$N^{-1}N = N N^{-1} = E, \quad (\text{VI.5})$$

где E — единичная матрица. Для матриц X и Q равенство (VII.5) в развернутом виде выглядит так:

$$= \begin{pmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} & \dots & N_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ N_{k1} & \dots & N_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11} & \dots & N_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ N_{k1} & \dots & N_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.6})$$

В соответствии с правилами перемножения матриц и с учетом симметричности неквадратичных элементов матриц N и Q можно написать для любой j -й строки (столбца) весовых коэффициентов следующую систему уравнений:

[illegible]

Получена система нормальных уравнений, отличающаяся от основной системы (для неизвестных τ) только свободными членами. В системе (VII.7) все свободные члены равны нулю, за исключением j -го уравнения, имеющего свободный член, равный -1 .

Для того чтобы найти s -ю строку весовых коэффициентов, нужно решить почти такую же систему уравнений, как и система (VII.7), но свободный член, равный -1 , поставить в s -м уравнении (в остальных свободные члены будут нули).

Система уравнений (VII.7) лежит в основе вычисления весовых коэффициентов по способу дополнительных графов. Этот способ заключается в следующем.

В схеме решения нормальных уравнений для каждой искомой j -й строки весовых коэффициентов делается дополнительная графа, в которой пишется -1 в строке j -го уравнения основной системы. В дополнительных графах выполняют такие же преобразования, как и в графе L .

После завершения всех преобразований вычисляют весовые коэффициенты так же, как и неизвестные, но пользуются для этого не графой L , а соответствующей дополнительной графой.

Способ вычисления весовых коэффициентов при помощи дополнительных граф применяется в тех случаях, когда требуется определить лишь некоторые строки обратной матрицы. Если же требуется найти все элементы обратной матрицы, то выгоднее применять способ Ганзена.

2. Вычисление весовых коэффициентов по способу Ганзена

Если последовательно вычислять все строки обратной матрицы, начиная с последней и кончая первой, то дополнительных граф не требуется. Для определения всех весовых коэффициентов достаточно иметь элиминационные уравнения основной системы нормальных уравнений. Такое решение возможно вследствие свойства симметричности весовых коэффициентов относительно квадратичной диагонали.

Вычисление весовых коэффициентов способом Ганзена покажем на примере четырех нормальных уравнений.

В первую очередь определяем последнюю строку весовых коэффициентов. Напишем соответствующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} N_{11}Q_{41} + N_{12}Q_{42} + N_{13}Q_{43} + N_{14}Q_{44} &= 0 \\ N_{12}Q_{41} + N_{22}Q_{42} + N_{23}Q_{43} + N_{24}Q_{44} &= 0 \\ N_{13}Q_{41} + N_{23}Q_{42} + N_{33}Q_{43} + N_{34}Q_{44} &= 0 \\ N_{14}Q_{41} + N_{24}Q_{42} + N_{34}Q_{43} + N_{44}Q_{44} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.8})$$

Так как свободные члены первых трех уравнений равны нулю, то свободный член последнего уравнения после исключения первых трех неизвестных останется без изменения, в результате чего получим

$$N_{11}^{(3)}Q_{41} - 1 = 0,$$

откуда

$$Q_{41} = \frac{1}{N_{11}^{(3)}}.$$

В общем случае

$$Q_{kk} = \frac{1}{N_{kk}^{(k-1)}}. \quad (\text{VII.9})$$

Весовые коэффициенты Q_{43} , Q_{42} и Q_{41} легко найти при помощи элиминационных строк схемы решения нормальных уравнений. В этих строках свободные члены нужно принимать равными нулю, что следует из рассмотрения системы (VII.8). Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} Q_{43} &= E_{31}Q_{41} \\ Q_{42} &= E_{23}Q_{43} + E_{21}Q_{41} \\ Q_{41} &= E_{12}Q_{42} + E_{13}Q_{43} + E_{14}Q_{44} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.10})$$

Напишем систему уравнений для третьей строки обратной матрицы

$$\left. \begin{aligned} N_{11}Q_{31} + N_{12}Q_{32} + N_{13}Q_{33} + N_{14}Q_{34} &= 0 \\ N_{12}Q_{31} + N_{22}Q_{32} + N_{23}Q_{33} + N_{24}Q_{34} &= 0 \\ N_{13}Q_{31} + N_{23}Q_{32} + N_{33}Q_{33} + N_{34}Q_{34} - 1 &= 0 \\ N_{14}Q_{31} + N_{24}Q_{32} + N_{34}Q_{33} + N_{44}Q_{34} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.11})$$

Из четырех неизвестных системы (VII.11) последнее уже определено, так как $Q_{34} = Q_{43}$.

Для определения остальных неизвестных имеем

$$\left. \begin{aligned} Q_{33} &= E_{31}Q_{31} + \frac{1}{N_{33}^{(2)}} \\ Q_{32} &= E_{23}Q_{33} + E_{21}Q_{34} \\ Q_{31} &= E_{12}Q_{32} + E_{13}Q_{33} + E_{14}Q_{34} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.12})$$

Вторая строка весовых коэффициентов определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Q_{21} &= Q_{32} \\ Q_{23} &= Q_{32} \\ Q_{22} &= E_{23}Q_{23} + E_{24}Q_{24} + \frac{1}{N_{22}^{(1)}} \\ Q_{21} &= E_{12}Q_{22} + E_{13}Q_{23} + E_{14}Q_{24} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.13})$$

Наконец, для вычисления весовых коэффициентов первой строки получим формулы

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= Q_{41} \\ Q_{13} &= Q_{31} \\ Q_{12} &= Q_{21} \\ Q_{11} &= E_{12}Q_{12} + E_{13}Q_{13} + E_{14}Q_{14} + \frac{1}{N_{11}} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.14})$$

Контроль осуществляется после получения каждой очередной j -й строки обратной матрицы по формуле

$$(\Sigma_1 - L_1) Q_{j1} + (\Sigma_2 - L_2) Q_{j2} + \dots + (\Sigma_k - L_k) Q_{jk} = 1. \quad (\text{VII.15})$$

Эту формулу легко получить, сложив уравнения любой системы уравнений для весовых коэффициентов.

Все вычисления по способу Ганзена выполняются на настольной вычислительной машине без промежуточных записей.

3. Вычисление весов неизвестных τ

На основании (VII.1) можно написать

$$\tau_j = -[p_{a_1 l}] Q_{j1} - [p_{a_2 l}] Q_{j2} - \dots - [p_{a_k l}] Q_{jk}.$$

Раскрывая скобки и группируя члены по свободным членам l_i ($i = 1, 2, \dots, n$), получаем

$$\begin{aligned} \tau_j = & -p_1 (a_{11}Q_{j1} + a_{12}Q_{j2} + \dots + a_{1k}Q_{jk})l_1 - \dots - \\ & - p_n (a_{n1}Q_{j1} + a_{n2}Q_{j2} + \dots + a_{nk}Q_{jk})l_n, \end{aligned}$$

или

$$\tau_j = - \sum_{i=1}^n p_i (a_{i1}Q_{j1} + a_{i2}Q_{j2} + \dots + a_{ik}Q_{jk}) l_i. \quad (\text{VII.16})$$

Обозначим

$$p_i (a_{i1}Q_{j1} + \dots + a_{ik}Q_{jk}) = \alpha_{ij}. \quad (\text{VII.17})$$

Тогда

$$\tau_j = - \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} l_i = -[\alpha_j l] \quad (\text{VII.18})$$

$$(j = 1, \dots, k).$$

Итак, мы выразили неизвестные в виде линейных функций свободных членов l . Ранее мы установили, что при оценке точности величины l_i играют роль измеренных значений и имеют веса p_i .

Теперь на основании (VII.18) имеем

$$\frac{1}{P_j} \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^2 \frac{1}{p_i} = \left[\frac{\alpha_j \alpha_j}{p} \right], \quad (\text{VII.19})$$

где P_j — вес неизвестного τ_j .

Вычисления величин α довольно сложны. Однако дело значительно упрощается тем, что между величинами α и весовыми коэффициентами Q существует простая связь. Установим ее.

Напишем систему равенств

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= p_i (a_{i1}Q_{j1} + \dots + a_{ik}Q_{jk}) \\ (i &= 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Умножим все эти равенства на величины $\frac{\alpha_{is}}{p_i}$ и сложим их

$$\left[\frac{\alpha_j \alpha_s}{p} \right] = [a_1 \alpha_s] Q_{j1} + \dots + [a_s \alpha_s] Q_{js} + \dots + [a_k \alpha_s] Q_{jk}. \quad (\text{VII.20})$$

Найдем суммы $[a_1 \alpha_s], \dots, [a_s \alpha_s], \dots, [a_k \alpha_s]$, для чего напишем систему равенств

$$\begin{aligned} \alpha_{is} &= p_i (a_{i1}Q_{s1} + \dots + a_{ik}Q_{sk}) \\ (i &= 1, \dots, n). \end{aligned}$$

4. Веса двух последних неизвестных (способ Энке)

Немецкий геодезист Энке предложил простые формулы для двух последних неизвестных в системе нормальных уравнений, в которых используются преобразованные коэффициенты. Во многих случаях практики этих формул оказывается вполне достаточно.

На основании формул (VII.9) и (VII.24) имеем

$$\frac{1}{P_k} = \frac{1}{N_{kk}^{(k-1)}},$$

откуда

$$P_k = N_{kk}^{(k-1)}, \quad (\text{VII.25})$$

т. е. вес последнего неизвестного равен квадратичному коэффициенту в последнем уравнении эквивалентной системы.

Формулу для веса предпоследнего неизвестного получим на примере четырех уравнений. Предпоследним неизвестным здесь будет τ_3 .

Переставим местами неизвестные τ_3 и τ_4 (конечно, с соответствующими коэффициентами). Тогда, учитывая, что N_{33} и N_{44} меняются ролями, можно написать

$$P_3 = N_{33}^{(3)} = N_{33}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{44}^{(2)}} = \frac{N_{33}^{(2)}}{N_{44}^{(2)}} \left(N_{44}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \right).$$

Но

$$N_{44}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} = N_{44}^{(3)},$$

поэтому

$$P_3 = \frac{N_{33}^{(2)}}{N_{44}^{(2)}} N_{44}^{(3)}, \quad (\text{VII.26})$$

или, имея в виду (VII.25),

$$P_3 = \frac{N_{33}^{(2)}}{N_{44}^{(2)}} P_4. \quad (\text{VII.27})$$

Величины $N_{33}^{(2)}$ и $N_{44}^{(3)} = P_4$ легко найти в любой схеме решения нормальных уравнений.

Величину $N_{44}^{(2)}$ вычисляют по формуле

$$N_{44}^{(2)} = N_{44}^{(3)} - \left(- \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \right). \quad (\text{VII.28})$$

Все величины формулы (VII.28) имеются или их легко вычислить в любой схеме решения. Заметим, что в полной схеме решения (табл. 32 и 33) величина $-\frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$ имеется. Так, например, в табл. 33: $N_{44}^{(2)} = 1,49 + 0,08 = 1,57$.

Таким образом, мы получили два способа вычисления весов неизвестных:

1) обратный вес любого неизвестного равен квадратичному весовому коэффициенту с соответствующими индексами, т. е.

$$\frac{1}{p_i} = Q_{ii};$$

2) веса двух последних неизвестных легко получить по формулам (VII.25), (VII.26) или (VII.27), а также (VII.28).

Имеется еще один способ вычисления обратного веса неизвестного, о котором будет сказано ниже.

5. Вычисление весов функций

Пусть дана функция $F(t_1, \dots, t_k)$ и требуется оценить ее точность. Так как ошибка единицы веса предполагается известной, то задача сводится к определению веса функции. Эту задачу можно решить достаточно просто, если учесть уже полученные результаты. Прежде всего приведем функцию к линейному виду

$$\begin{aligned} F(t_1, \dots, t_k) &= F(t_1^0 + \tau_1, \dots, t_k^0 + \tau_k) = \\ &= F(t_1^0, \dots, t_k^0) + \left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k + R, \end{aligned} \quad (\text{VII.29})$$

где R — сумма всех нелинейных членов разложения.

Так как для приближенных значений $t_1^0, \dots, t_k^0$ ставится условие, чтобы их точность была достаточной для линеаризации любых функций, с которыми приходится иметь дело в геодезии, то величиной R можно пренебречь.

На основании (VII.29) и с учетом обозначений

$$\left. \begin{aligned} F(t_1^0, \dots, t_k^0) &= F_0 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial t_i}\right)_0 &= F_i \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.30})$$

получим

$$F(t_1, \dots, t_k) = F_0 + F_1 \tau_1 + \dots + F_k \tau_k. \quad (\text{VII.31})$$

Принимая теперь во внимание (VII.18), можно написать

$$F(t_1, \dots, t_k) = F_0 - F_1 [\alpha_1 l] - \dots - F_k [\alpha_k l].$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые по свободным членам l , получаем

$$F(t_1, \dots, t_k) = F_0 - \sum_{i=1}^n (\alpha_{i1} F_1 + \dots + \alpha_{ik} F_k) l_i. \quad (\text{VII.32})$$

Напомним, что при оценке точности величины l_i играют роль измеренных значений. Поэтому правую часть равенства (VII.32)

7. Вес уравненного значения измеренной величины x'_i

Вес величины x'_i получается как вес функции

$$x'_i = f_i(t_1, \dots, t_k).$$

Вычисления облегчаются тем, что все частные производные нам уже известны: $F_{ij} = a_{ij}$.

8. Вычисление веса неизвестного t_j в дополнительной графе

Написав равенство

$$t_j - F(t_1, \dots, t_j, \dots, t_k),$$

получим

$$F_1 - F_2 = \dots = F_{j-1} = 0,$$

$$F_j = 1,$$

$$F_{j+1} = F_{j+2} = \dots = F_k = 0.$$

Отсюда вытекает правило: для вычисления обратного веса неизвестного t_j выписывают в дополнительной графе $F_j = -1$ в строке j -го уравнения основной системы и далее действуют так же, как при получении обратного веса функции.

9. Оценка точности

Получив вес некоторой уравненной величины y , ее среднюю квадратическую ошибку вычисляем по формуле

$$M_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}},$$

где μ — ошибка единицы веса.

Доверительные интервалы для истинного значения величины Y получаем по формуле

$$Y = y \pm t M_y,$$

где коэффициент t зависит от принятой доверительной вероятности, закона распределения и от числа «степеней свободы», т. е. числа избыточных измерений, или числа независимых истинных ошибок (невязок), использованных для получения ошибки единицы веса. Следует учесть, что ошибку единицы веса необязательно брать ту, которая получена по результатам уравнивания. Она может быть определена другим путем, например из обработки более обширного материала ранее выполненных измерений или специально поставленного эксперимента. Анализ производственного материала, если он достаточно обширен, дает всегда более надежные результаты.

§ 67. ПРИМЕРЫ УРАВНИВАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ С ОЦЕНКАМИ ТОЧНОСТИ

Пример 1. Ниже выполнено уравнивание системы нивелирных ходов, показанных на рис. 14, в котором применены все полученные нами формулы оценок точности. Высоты марок 18, 22 и 96 являются исходными, высоты грунтовых реперов 86, 02, 93 и 12 — определяемыми. На рис. 14 выписаны суммы превышений в звеньях ходов и исходные высоты; направления звеньев показаны стрелками. В кружках показаны номера звеньев. В табл. 39 приведены длины ходов в километрах и веса измеренных величин.

В качестве измеренных величин примем суммы превышений в звеньях. Их веса, как известно из теории ошибок измерений, можно принять обратно пропорциональными длинам ходов.

Чтобы получить веса близкими к единице, их вычислили по формуле

$$p = 15/s.$$

Для удобства вычислений превышения и высоты будем выражать в миллиметрах.

Т р е б у е т с я:

1) произвести уравнивание параметрическим способом и получить высоты реперов 86, 02, 93 и 12;

2) получить средние квадратические ошибки:

- а) высот определяемых реперов;
- б) разностей высот ($H_{93} - H_{86}$) и ($H_{12} - H_{02}$);
- в) одного километра нивелирования.

Для контроля вычислений, а также для иллюстрации полученных формул веса оцениваемых величин определим по два раза различными способами.

В качестве необходимых неизвестных выберем определяемые высоты, которые обозначим следующим образом:

$$H_{86} = t_1;$$

$$H_{02} = t_2;$$

$$H_{93} = t_3;$$

$$H_{12} = t_4.$$

Очевидно, что необходимых измерений в данном случае будет четыре. Наметим следующий план определения весов неизвестных и их функций.

Прежде всего вычислим все весовые коэффициенты.

Веса всех неизвестных получим как величины, обратные квадратичным весовым коэффициентам. Кроме того, веса высот $H_{12} = t_4$ и $H_{93} = t_3$ получим как веса двух последних неизвестных, а веса высот $H_{86} = t_1$ и $H_{02} = t_2$ — в дополнительных графах схемы решения нормальных уравнений.

Веса функций

$$F_1 = H_{93} - H_{86} = t_3 - t_1$$

и

$$F_2 = H_{12} - H_{02} = t_4 - t_2$$

будут получены также по два раза: один раз в дополнительных графах и второй по формуле (VII.33).

Номер звена	Длины хода S , км	Вес $p=15/S$
1	12,6	1,2
2	16,4	0,9
3	14,1	1,1
4	10,0	1,5
5	16,3	0,9
6	20,4	0,7
7	12,0	1,2
8	13,2	1,1
9	15,4	1,0

Выразим теперь измеренные величины, т. е. суммы превышений в звеньях, через необходимые неизвестные; при этом измеренной величиной x'_i будет придан номер i -го звена.

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= l_1 - 183\,506 & x'_5 &= l_2 - l_1 \\ x'_2 &= l_1 - l_2 & x'_6 &= l_4 - l_1 \\ x'_3 &= l_4 - 192\,353 & x'_7 &= l_2 - 191\,890 \\ x'_4 &= l_2 - l_3 & x'_8 &= l_4 - l_2 \\ & & x'_9 &= l_1 - 191\,890 \end{aligned} \right\} \quad (VII.38)$$

Приближенные значения неизвестных, т. е. высот определяемых точек, получим путем распределения пелюшек в ходах от марки 96 до марок 18 и 22

$$\begin{aligned} l_1^0 &= 186\,297; & l_3^0 &= 189\,627; \\ l_2^0 &= 190\,990; & l_4^0 &= 197\,941. \end{aligned}$$

Далее вычислим значения свободных членов уравнений поправок, учитывая формулы (V.24). Результаты измерений выписаны на рис. 14.

$$\begin{aligned} l_1 &= 189\,627 - 183\,506 - 6125 = 6121 - 6125 = -4 \text{ мм.} \\ l_2 &= 197\,941 - 189\,627 - 8320 = 8314 - 8320 = -6 \text{ мм.} \\ l_3 &= 197\,941 - 192\,353 - 5580 = 5588 - 5580 = +8 \text{ мм.} \\ l_4 &= 190\,990 - 189\,627 - 1368 = 1363 - 1368 = -5 \text{ мм.} \\ l_5 &= 190\,990 - 186\,297 - 4694 = 4693 - 4694 = -1 \text{ мм.} \\ l_6 &= 197\,941 - 186\,297 - 11\,652 = 11\,644 - 11\,652 = -8 \text{ мм.} \\ l_7 &= 190\,990 - 191\,890 + 905 = -900 + 905 = +5 \text{ мм.} \\ l_8 &= 197\,941 - 190\,990 - 6944 = 6951 - 6944 = +7 \text{ мм.} \\ l_9 &= 186\,297 - 191\,890 + 5585 = -5593 + 5585 = -8 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Составим таблицу коэффициентов (табл. 40) и вычислим коэффициенты и свободные члены нормальных уравнений. Так как измеренные величины связаны с необходимыми неизвестными линейными функциями простейшего вида, то коэффициенты уравнений поправок будем выписывать сразу в таблицу, учитывая равенства (VII.38).

Поправки	Вес p	a_{i1} +0,62	a_{i2} +1,25	a_{i3} -2,10	a_{i4} -1,17	l	S	r	$v' = v\sqrt{p}$
1	1,2			+1		-4	-3	-6,10	6,69
2	0,9			-1	+1	-6	-6	-5,37	5,09
3	1,1				+1	+8	+9	+6,53	6,85
4	1,5		+1	-1		-5	-5	-1,65	2,02
5	0,9	-1	+1			-1	-1	-0,37	0,35
6	0,7	-1			+1	-8	-8	-10,09	8,43
7	1,2		+1			+5	+6	+6,25	6,85
8	1,1		-1		+1	+7	+7	+4,28	4,50
9	1,0	+1				-8	-7	-7,38	7,38
$\{pa_1$		2,6	-0,9	0	-0,7	-1,5	-0,5	$[pv^2] = 314,5$	
$\{pa_2$			4,7	-1,5	-1,1	-10,1	-8,9		
$\{pa_3$				3,6	-0,9	+8,1	+9,3		
$\{pa_4$					3,8	+5,5	+6,6		
$\{p_l$						353,1	355,1		

В графе v' табл. 40 выписаны поправки, приведенные к равноточному виду по формуле

$$v' = v \sqrt{p}.$$

В нижней части таблицы вычислены коэффициенты нормальных уравнений.

В табл. 41 дано решение нормальных уравнений на логарифмической линейке с нахождением всех весов и весовых коэффициентов согласно заданию. В графу N выписаны суммы коэффициентов соответствующих уравнений, включая и частные производные, необходимые для оценки точности.

Вес неизвестного t_4 равен $N_{44}^{(1)} = 2,61$. Вес предпоследнего неизвестного t_3 равен

$$2,61 \frac{N_{33}^{(2)}}{N_{44}^{(2)}} = 2,61 \frac{3,09}{2,61 - 0,101} = 2,52.$$

Обратимся теперь к таблице коэффициентов (см. табл. 40). Выписав в заголовках граф этой таблицы значения поправок t для необходимых неизвестных, найдем по формуле (N.25) поправки v и затем $[pv^2] = 314,5$.

Для получения $[pv^2]$ сразу на арифмометре, без промежуточных записей, предварительно вычисляют значения $v' = v \sqrt{p}$, после чего получают

$$[pv^2] = [v'^2].$$

Это значение почти совпадает с тем, которое получено в графе l табл. 41 внизу, что является одним из основных контролей правильности уравнительных вычислений.

Необходимо иметь в виду, что вычисления в табл. 41, расположенные ниже строки E_4 , не контролируются в графе S , поэтому их нужно выполнять в две руки. Вычисления неизвестных в «горке» контролируют суммарным уравнением. Получим теперь системы весовых коэффициентов по способу Ганзена.

4-я система

$$Q_{11} = 1/2,61 = 0,383.$$

$$Q_{43} = 0,140 \cdot 0,383 = +0,168.$$

$$Q_{12} = -0,342 \cdot 0,168 + 0,306 \cdot 0,383 = -0,078 + 0,118 = +0,176.$$

$$Q_{11} = -0,316 \cdot 0,176 + 0,269 \cdot 0,383 = -0,061 + 0,103 = +0,164.$$

Контроль

$$= 1,0 \cdot 0,164 + 1,2 \cdot 0,176 + 1,2 \cdot 0,168 + 1,1 \cdot 0,383 = 0,164 + 0,211 + 0,202 + 0,421 = 0,998.$$

3-я система

$$Q_{31} = Q_{33} + 0,168,$$

$$Q_{33} = +0,440 - 0,168 + 1/3,09 = -0,074 - 0,324 = -0,398.$$

$$Q_{32} = +0,342 - 0,398 + 0,306 \cdot 0,168 = -0,136 + 0,051 = -0,187.$$

$$Q_{31} = +0,346 \cdot 0,187 + 0,269 \cdot 0,168 = +0,065 + 0,045 = 0,110.$$

Контроль

$$+0,110 + 0,224 + 0,478 + 0,185 = +0,997.$$

2-я система

$$Q_{21} = Q_{12} = +0,176.$$

$$Q_{23} = Q_{32} = +0,187.$$

$$Q_{22} = -0,342 \cdot 0,187 + 0,306 \cdot 0,176 + 1/4,39 = +0,064 + 0,054 + 0,228 = +0,346.$$

$$Q_{21} = +0,346 \cdot 0,346 + 0,269 \cdot 0,176 = +0,120 + 0,047 = +0,167.$$

Контроль

$$+0,167 + 0,415 + 0,224 + 0,194 = +1,000.$$

1-я система

$$Q_{11} = Q_{11} = +0,164.$$

$$Q_{13} = Q_{31} = -0,110.$$

$$Q_{12} = Q_{21} = +0,167.$$

$$Q_{11} = +0,346 \cdot 0,167 + 0,269 \cdot 0,164 + 1/2,60 = +0,058 + 0,014 + 0,385 = +0,487.$$

Контроль

$$+0,487 + 0,200 + 0,132 + 0,180 = 0,999.$$

Визу, под строкой «Контроль по суммарному уравнению», вычислена система весовых коэффициентов Q_{ij} ($i = 1, \dots, 4$) при помощи дополнительной графы, в качестве которой послужила графа t_1 . Результаты сходятся со способом Гамзена. Нетрудно убедиться, что в этой графе выполнены точно такие же действия, как и для получения указанных весовых коэффициентов.

Вычисления в «горке» такие же, как и при получении неизвестных t , по в качестве графы l при вычислении значений Q_{ij} служит графа t_1 .

Для получения величин Q_{2i} могла бы послужить графа t_2 . Получим теперь обратные веса функций по формуле (VII.33).

Для $F_1 = t_3 - t_1$

$$\frac{1}{P} = Q_{11} - 2Q_{13} + Q_{33} = 0,487 - 0,220 + 0,398 = +0,665.$$

Для

$$F_2 = t_3 - t_2$$

$$\frac{1}{P} = Q_{22} - 2Q_{24} + Q_{44} = 0,346 - 0,352 + 0,383 = 0,377.$$

Сравним обратные веса, полученные разными способами.

Обратные веса неизвестных:

в дополнительной графе — $1/P_1 = 0,48$; $Q_{11} = 0,487$;

то же — $1/P_2 = 0,35$; $Q_{22} = 0,346$;

$1/P_3 = 1/2,52 = 0,397$, где 2,52 — вес предпоследнего неизвестного; $Q_{33} = 0,398$;

$1/P_4 = 1/2,61 = 0,383$, где 2,61 — вес последнего неизвестного. Эта величина явилась исходной для вычисления всех весовых коэффициентов.

Уравне- ния	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
N_1 E_1 N_2	2,60	$-0,90$ $+0,346$ $+4,70$ $-0,31$	0 0 $-1,50$ 0	$-0,70$ $+0,269$ $-1,10$ $-0,24$
$N_2^{(1)}$ E_2 N_3		4,39	$-1,50$ $+0,342$ $3,60$ 0 $-0,51$	$-1,34$ $+0,306$ $-0,90$ 0 $-0,46$
$N_3^{(2)}$ E_3 N_4			3,09	$-1,36$ $+0,440$ $3,80$ $-0,18$ $-0,41$ $-0,60$

Таблица 44

t	$F_1 = t_1 - t_2$	$F_2 = t_1 - t_2$	t_1	t_2	S	Контроль
-1.50 +0.577 -10.10 -0.52	+1.00 -0.385 0 +0.35	0 0 +1.00 0	-1.00 +0.385 0 -0.35	0 0 -1.00 0	-0.50 +0.192 -8.90 -0.17	+0.192
-10.62 +2.420 +8.10 0 -3.62	+0.35 -0.080 -1.00 0 +0.10	+1.00 -0.228 0 0 +0.34	-0.35 +0.080 0 0 -0.10	-1.00 +0.228 0 0 -0.34	-9.07 +2.068 +8.30 0 -3.10	-9.07 +2.070
+4.48 -1.451 +5.50 -0.39 -3.25 +1.97	-0.90 +0.291 0 +0.27 +0.11 -0.40	+0.34 -0.110 -1.00 0 +0.31 +0.15	-0.10 +0.032 0 -0.27 -0.11 -0.04	-0.34 +0.110 0 0 -0.31 -0.15	+5.21 -1.687 +5.60 -0.13 -2.77 +2.90	+5.20 -1.688

Обратные веса функций:

Для $F_1 = t_3 - t_1$: $\frac{1}{P} = 0,665$ — по формуле (VII.33); $\frac{1}{P} = 0,67$ — в доп. нительной графе.

Для $F_2 = t_4 - t_2$: $\frac{1}{P} = 0,377$ — по формуле (VII.33); $\frac{1}{P} = 0,38$ — в доп. нительной графе.

Найдем теперь средние квадратические ошибки.

Вычислим сначала ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{314,4}{9-4}} = 7,9 \text{ мм.}$$

где 9 — число измеренных величин, 4 — число необходимых величин.

Средние квадратические ошибки неизвестных

$$m_1 = 7,9 \sqrt{Q_{11}} = 6 \text{ мм;}$$

$$m_2 = 7,9 \sqrt{Q_{22}} = 5 \text{ мм;}$$

$$m_3 = 7,9 \sqrt{Q_{33}} = 5 \text{ мм;}$$

$$m_4 = 7,9 \sqrt{Q_{44}} = 5 \text{ мм.}$$

Средние квадратические ошибки разностей высот

$$M_{3-1} = 7,9 \sqrt{0,67} = 6,5 \text{ мм;}$$

$$M_{4-2} = 7,9 \sqrt{0,38} = 4,9 \text{ мм.}$$

Следует иметь в виду, что при пяти избыточных измерениях точность вычисления средних квадратических ошибок будет характеризоваться ошибкой $m \sqrt{10} \approx 0,3m$, т. е. в нашем случае величинами порядка 2 мм *. Однако соотношения весов будут сохраняться.

Средняя квадратическая ошибка инвектирования одного километра

$$m_{1 \text{ км}} = 7,9 : \sqrt{15} = 2 \text{ мм,}$$

так как вес хода протяжением $S = 1 \text{ км}$ равен 15.

Внесем поправки в результаты измерений ($x'_i = x_i + v_i$) и в приближенные значения неизвестных ($t_i = t_i^0 + \tau_i$) и проверим справедливость равенств

$$x'_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$t_1 = t_1^0 + \tau_1 = 186\,297 + 0,6 = 186\,297,6 \text{ мм;}$$

$$t_2 = t_2^0 + \tau_2 = 190\,990 + 1,2 = 190\,991,2 \text{ мм;}$$

$$t_3 = t_3^0 + \tau_3 = 189\,627 - 2,1 = 189\,624,9 \text{ мм;}$$

$$t_4 = t_4^0 + \tau_4 = 197\,944 - 1,5 = 197\,939,5 \text{ мм.}$$

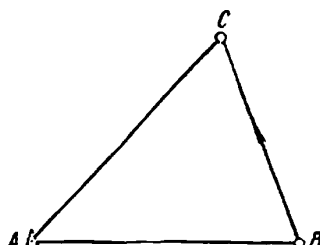
* При установлении доверительных границ здесь удовлетворительных результатов получить нельзя, так как при $r = n - k < 6$ непригодно и распределение Стьюдента. Для ошибки единицы веса следовало бы получить значение на основе предыдущего опыта применения инвектирования. Однако полученное значение $m_{1 \text{ км}} = 2 \text{ мм}$ согласуется с этим опытом, поэтому мы оставили без изменений.

Далее, учитывая равенства (VII.38), получаем

$$\begin{aligned}x_1 + v_1 &= +6125 - 6,4 = +6118,9; & x'_1 &= 189\,624,9 - 183\,506 = +6118,9; \\x_2 + v_2 &= +8320 - 5,4 = +8314,6; & x'_2 &= 197\,939,5 - 189\,624,9 = +8314,6; \\x_3 + v_3 &= 5580 + 6,5 = +5586,5; & x'_3 &= 197\,939,5 - 192\,353 = +5586,5; \\x_4 + v_4 &= 1368 - 1,6 = +1366,4; & x'_4 &= 190\,991,2 - 189\,624,9 = +1366,3; \\x_5 + v_5 &= +4694 - 0,4 = +4693,6; & x'_5 &= 190\,991,2 - 186\,297,6 = +4693,6; \\x_6 + v_6 &= 11\,652 - 10,1 = +11\,641,9; & x'_6 &= 197\,939,5 - 186\,297,6 = +11\,641,9; \\x_7 + v_7 &= -905 + 6,2 = -898,8; & x'_7 &= 190\,991,2 - 191\,890 = -898,8; \\x_8 + v_8 &= +6944 + 4,3 = +6948,3; & x'_8 &= 197\,939,5 - 190\,991,2 = +6948,3; \\x_9 + v_9 &= -5585 - 7,4 = -5592,4; & x'_9 &= 186\,297,6 - 191\,890 = -5592,4.\end{aligned}$$

За исключением одного случая, контрольные равенства удовлетворяются точно. Расхождение же в 0,1 мм, конечно, вполне допустимо.

Рис. 15



Пример 2. В треугольнике ABC (рис. 15) известны координаты вершины A . Для определения координат двух других вершин измерены: дирекционный угол стороны BC (α_{BC}), три угла ($\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$) и три стороны (s_{AB} , s_{BC} и s_{CA}), всего семь величин.

Обозначим

$$\begin{aligned}\alpha_{BC} &= x_1; \\ \angle A &= x_2; & s_{AB} &= x_5; \\ \angle B &= x_3; & s_{BC} &= x_6; \\ \angle C &= x_4; & s_{CA} &= x_7.\end{aligned}$$

Получены следующие результаты измерений:

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= 338^\circ 01' 43''; \\ x_2 &= 46^\circ 25' 15''; \\ x_3 &= 68^\circ 01' 27''; \\ x_4 &= 65^\circ 33' 09''\end{aligned} \right\} W = -9'';$$

$$\begin{aligned}x_5 &= 1000,000 \text{ м}; \\ x_6 &= 795,881 \text{ м}; \\ x_7 &= 1018,660 \text{ м}.\end{aligned}$$

Дирекционный угол x_1 получен через азимут Лапласа, определенный двумя комплектами гиротеодолитов в прямом и обратном направлениях (из этих определений взято среднее). Точность определения характеризуется средней квадра-

тической ошибкой $m_1 = 8''$. Углы измерены со средней квадратической ошибкой $m_\beta = m_2 = m_3 = m_4 = 5''$.

Средние квадратические ошибки измерения сторон соответствуют формуле

$$m_i^{\text{см}} = \sqrt{\left(\frac{s_i^{\text{см}}}{50\,000}\right)^2 + (3\text{ см})^2}.$$

Вычислим средние квадратические ошибки измерения длин сторон

$$m_5 = \sqrt{\left(\frac{100\,000\text{ см}}{50\,000}\right)^2 + (3\text{ см})^2} \approx 3,6\text{ см}.$$

$$m_6 = \sqrt{\left(\frac{70\,588\text{ см}}{50\,000}\right)^2 + (3\text{ см})^2} \approx 3,4\text{ см}.$$

$$m_7 = \sqrt{\left(\frac{101\,866\text{ см}}{50\,000}\right)^2 + (3\text{ см})^2} \approx 3,6\text{ см}.$$

Ввиду весьма малых различий значений m_5 , m_6 , m_7 примем, что

$$m_5 = m_6 = m_7 \approx 3,5\text{ см}.$$

Веса вычислим по формуле

$$p_i = \frac{5^2}{m_i^2}.$$

Тогда получим

$$p_1 = \left(\frac{5}{8''}\right)^2 \approx 0,4;$$

$$p_2 = p_3 = p_4 = 1;$$

$$p_5 = p_6 = p_7 = \left(\frac{5}{3,5\text{ см}}\right)^2 \approx 2,0.$$

В дальнейших вычислениях длины сторон должны выражаться в сантиметрах. В качестве необходимых неизвестных выберем

$$\alpha_{BA} = t_1, \quad \angle C = t_3,$$

$$\angle A = t_2, \quad s_{AB} = t_4.$$

Очевидно, что для решения поставленной задачи необходимо не менее четырех величин, из них не менее одной стороны и одного дирекционного угла.

Напишем выражения измеренных величин через выбранные необходимые неизвестные

$$x'_1 = t_1 + 180^\circ - t_2 - t_3; \quad x'_2 = t_2;$$

$$x'_3 = 180^\circ - t_2 - t_3; \quad x'_4 = t_3; \quad x'_5 = t_3;$$

$$x'_6 = t_3 \frac{\sin t_2}{\sin t_3}; \quad x'_7 = t_3 \frac{\sin (180^\circ - t_2 - t_3)}{\sin t_3} = t_3 \frac{\sin (t_2 + t_3)}{\sin t_3}.$$

Получим приближенные значения необходимых неизвестных

$$t_1^0 - x_1 - x_3 = 338^\circ 01' 43'' - 68^\circ 01' 27'' - 270^\circ 00' = 16.0'';$$

$$t_2^0 - x_2 = 46^\circ 25' 18.0''.$$

$$t_3^0 - x_1 + 3'' = 65^\circ 33' 12.0'';$$

$$t_4^0 - x_5 = 100\,000.0 \text{ см.}$$

Далее вычислим свободные члены всех уравнений поправок и коэффициенты последних двух уравнений. Коэффициенты остальных уравнений ввиду простоты выписаны сразу в таблицу коэффициентов.

В соответствии с (V.24) имеем

$$l_1 = t_1^0 + 180^\circ - t_2^0 - t_3^0 - x_1 - 270^\circ 00' 16'' + 68^\circ 01' 30'' - 338^\circ 01' 43'' = +3'';$$

$$l_2 = t_2^0 - x_2 = 46^\circ 25' 18'' - 46^\circ 25' 15'' = +3'';$$

$$l_3 = 180^\circ - t_2^0 - t_3^0 - x_3 = 68^\circ 01' 30'' - 68^\circ 01' 27'' = +3'';$$

$$l_4 = t_3^0 - x_4 = 65^\circ 33' 12'' - 65^\circ 33' 09'' = +3'';$$

$$l_5 = t_4^0 - x_5 = 100\,000 \text{ см} - 100\,000 \text{ см} = 0;$$

$$l_6 = t_4^0 \frac{\sin t_2^0}{\sin t_3^0} - x_6 = 100\,000 \frac{\sin 46^\circ 25' 18''}{\sin 65^\circ 33' 12''} - 79\,588.1 \text{ см} = -10.5 \text{ см};$$

$$l_7 = t_4^0 \frac{\sin(t_2^0 + t_3^0)}{\sin t_3^0} - x_7 = 100\,000 \frac{\sin 111^\circ 58' 30''}{\sin 65^\circ 33' 12''} - 101\,866.0 \text{ см} = +1.5 \text{ см};$$

$$a_{61} = 0;$$

$$a_{62} = \left(\frac{\partial x_6'}{\partial t_2^0} \right)_0 = \left(t_4 \frac{\cos t_2}{\sin t_3} \right)_0 \frac{1}{\rho''} = \left(t_4 \frac{\sin t_2}{\sin t_3} \right)_0 \frac{\cos t_2^0}{\sin t_2^0} \frac{1}{\rho''},$$

или

$$a_{62} = x_6^0 \operatorname{ctg} t_2^0 \frac{1}{\rho''} = \frac{79\,588}{206\,265} \operatorname{ctg} 46^\circ 25' = +0.37;$$

$$a_{63} = \left(\frac{\partial x_6'}{\partial t_3^0} \right)_0 = \left(-t_4 \frac{\sin t_2 \cdot \cos t_3}{\sin^2 t_3} \right)_0 \frac{1}{\rho''} = \left(-t_4 \frac{\sin t_2}{\sin t_3} \right)_0 \frac{1}{\rho''} \frac{\cos t_3^0}{\sin t_3^0},$$

или

$$a_{63} = -\frac{79\,588}{206\,265} \operatorname{ctg} 65^\circ 33' = -0.18;$$

$$a_{61} = \left(\frac{\partial x_6'}{\partial t_1^0} \right)_0 = \left(\frac{\sin t_2}{\sin t_3} \right)_0 = \left(t_4 \frac{\sin t_2}{\sin t_3} \cdot \frac{1}{t_1} \right)_0 = \frac{x_6^0}{t_1^0} = \frac{79\,588}{100\,000} = +0.80;$$

$$a_{71} = \left(\frac{\partial x_7'}{\partial t_1^0} \right)_0 = 0; \quad a_{72} = \left\{ t_4 \frac{\cos(t_2 + t_3)}{\sin t_3} \right\}_0 \frac{1}{\rho''} = \frac{101\,866}{206\,265} \operatorname{ctg} 111^\circ 58' = -0.20;$$

$$a_{73} = \left\{ t_4 \frac{\cos(t_2 + t_3) \sin t_3 - \sin(t_2 + t_3) \cos t_3}{\sin t_3^2} \right\}_0 \frac{1}{\rho''} = \left\{ t_1 \frac{-\sin t_2}{\sin t_3^2} \right\}_0 \frac{1}{\rho''} =$$

$$= - \left\{ t_4 \frac{\sin t_2}{\sin t_3} \right\}_0 \cdot \frac{1}{\sin t_3^0} \frac{1}{\rho''} = - \frac{x_6'}{\sin t_3^0} \cdot \frac{1}{\rho''} = \frac{79\,588}{206\,265 \cdot \sin 65^\circ 33'} ,$$

или

$$a_{73} = -0,42; \quad a_{71} = \left\{ \frac{\sin(t_2 + t_3)}{\sin t_3} \right\}_0 = \frac{\sin 111^\circ 58'}{\sin 65^\circ 33'} = +1,02.$$

Свободные члены вычислены на арифмометре; коэффициенты — на логарифмической линейке.

Все данные выписаны в таблицу коэффициентов (табл. 42), в которой сделано приведение уравнений поправок к равноточному виду и вычислены коэффициенты нормальных уравнений.

Нормальные уравнения решены в табл. 43 на арифмометре по сокращенной схеме Гаусса. В дополнительной графе F получен обратный вес площади треугольника, для чего в эту графу выписаны соответствующие частные производные с обратными знаками. Так как при $m = 3,5$ см ошибка площади будет иметь порядок десятков квадратных метров ($3,5 \cdot 100\,000 \text{ см}^2 = 35 \text{ м}^2$), то площадь удобно выражать в квадратных метрах. Тогда площадь треугольника как функция независимых неизвестных примет вид

$$F \text{ м}^2 = S \text{ см}^2 \cdot 10^{-4}, \quad (\text{VII.39})$$

так как $1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ см}^2$.

Но

$$S \text{ см}^2 = \frac{1}{2} t_1 t_4 \frac{\sin t_2 \sin(180^\circ - t_2 - t_3)}{\sin t_3} = \frac{t_4^2 \sin t_2 \sin(180^\circ - t_2 - t_3)}{2 \sin t_3}. \quad (\text{VII.40})$$

Возьмем частные производные от $S \text{ см}^2$

$$\frac{\partial S}{\partial t_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial t_2} = \frac{t_4^2}{2} \cdot \frac{-\sin t_2 \cos(180^\circ - t_2 - t_3) + \cos t_2 \sin(180^\circ - t_2 - t_3)}{\sin t_3} =$$

$$= \frac{t_4^2}{2} \cdot \frac{\sin(180^\circ - 2t_2 - t_3)}{\sin t_3} = \frac{t_4^2}{2} \cdot \frac{\sin(2t_2 + t_3)}{\sin t_3};$$

при этом угол t_2 выразим в секундах

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = \frac{t_4^2}{2\rho''} \cdot \frac{\sin(2t_2 + t_3)}{\sin t_3}. \quad (\text{VII.41})$$

Учитывая (VII.39), получаем

$$F_2 = \frac{10^{5 \cdot 2}}{2\rho'' 10^4} \cdot \frac{\sin(2t_2 + t_3)}{\sin t_3} = +2,42 \frac{\sin(92^\circ 51' + 65^\circ 33')}{\sin 65^\circ 33'} = +0,98,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_3} = \frac{t_4^2}{2 \sin t_2} \frac{-\cos(180^\circ - t_2 - t_3) \sin t_3 - \sin(180^\circ - t_2 - t_3) \cos t_3}{\sin^2 t_3} =$$

$$= \frac{t_4^2 \cdot \sin t_2}{2} \cdot \frac{-\sin t_2}{\sin^2 t_3} = -\frac{1}{2} \left(t_1 \frac{\sin t_2}{\sin t_3} \right) \cdot \left(t_1 \frac{\sin t_2}{\sin t_3} \right) = -\frac{x_6^2}{2}.$$

i	p_i	a_{i1} -0,66	a_{i2} +4,20	a_{i3} -1,86	a_{i4} +2,04	l_i	v_i	S_i	a'_{i1} -0,66	a'_{i2} +4,20	a'_{i3} -1,86	a'_{i4} +2,04	l'_i	v'_i	Σi
1	0,4	+1	-1	-1		+3	0	+2	+0,63	-0,63	-0,63		+1,90	+0,01	+1,27
2	1	+1	+1	-1		+3	+7,20	+4	+1,00	+1,00	-0,63		+3,00	+7,20	+4,00
3	1	-1	-1	-1		+3	+0,66	+1	-1,00	-1,00	-1,00		+3,00	+0,66	+1,00
4	1		+1	+1		+3	+1,14	+4			+1,00		+3,00	+1,14	+4,00
5	2				+1	0	+2,04	+1				+1,41	0	+2,88	+1,41
6	2	+0,37	-0,37	-0,18	+1	-10,50	-6,98	-9,51	+0,52	+0,52	-0,25	+1,41	-14,88	-9,93	-13,48
7	2	-0,20	-0,42	-0,42	+1	+1,50	+3,52	+1,90	-0,28	-0,28	-0,59	+1,44	+2,12	+4,98	+2,69
								$[\alpha'_1]$	0,40	-0,40	-0,40	0	+1,20	185,3	+0,80
								$[\alpha'_2]$		2,75	-1,43	+0,18	-0,53	[pr^2]	-5,57
								$[\alpha'_3]$			2,81	-1,13	+1,27		+3,98
								$[\alpha'_4]$				5,34	-13,76		-0,37
								$[l']$					256,52		+235,70

Уравне- ние	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	L	F	S
N_1 E_1 N_2	0,40	-0,40 +1,000 2,75	-0,40 +1,000 +1,43	0 0 +0,18	+1,20 -3,000 -9,53	0 - +0,98	+0,80 -2,000 -4,59
$N_2^{(1)}$ E_2 N_3		2,35	+1,03 -0,438 2,81	+0,18 -0,077 -1,13	-8,33 +3,545 +1,27	+0,98 -0,417 -1,53	-3,79 +1,613 +2,45
$N_3^{(2)}$ E_3 N_4			1,96	-1,21 +0,617 5,34	+0,12 -3,122 -13,76	-1,96 +1,000 +7,38	+4,91 -2,504 -1,99
$N_4^{(3)}$ E_4 N_5				4,58	-9,34 +2,039 256,52	+6,10 -1,332	+1,34 -0,293
				$[pv^2] = 185,2$		$10,5 = \frac{1}{p_F}$	
τ	-0,66	+4,20	-1,86	+2,04			

В графу S выписаны значения $\sum_i -F_i$.

Принимая во внимание (VII.39) и выражая угол t_3 в секундах, находим

$$F_3 = -\frac{79\,588^2}{26'' \cdot 10^4} = -\frac{796^2}{413\,000} = -1,53.$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_3} = \frac{2t_3}{2} \cdot \frac{\sin t_2 \cdot \sin (180^\circ - t_2 - t_3)}{\sin t_3} = t_3 \cdot \frac{\sin t_2 \cdot \sin (t_2 + t_3)}{\sin t_3}.$$

Теперь получим

$$F_4 = \frac{100\,000}{10^4} \cdot \frac{\sin 46^\circ 25' \cdot \sin 68^\circ 02'}{\sin 65^\circ 33'} = 10 \cdot \frac{\sin 46^\circ 25' \cdot \sin 68^\circ 02'}{\sin 65^\circ 33'},$$

т. е.

$$F_4 = +7,38.$$

Контроль по суммарному уравнению

$$(\sum_1 - L_1) \tau_1 + (\sum_2 - L_2) \tau_2 + (\sum_3 - L_3) \tau_3 + (\sum_4 - L_4) \tau_4 + [L] = (-0,40) \cdot (-0,66) + 3,96 \cdot 4,20 + 2,71 \cdot (-1,86) + 4,89 \cdot 2,04 - 20,82 = -0,01.$$

Контроль выполняется хорошо.

Далее обращаемся к табл. 42, где вычисляем поправки v_i и значения v'_i . С контролем $v' = v/\sqrt{p}$. Затем вычисляем $[pv^2] = [v'^2]$ и получается 185,3, что почти в точности совпадает со значением $[pv^2] = 185,2$ в графе L схемы решения нормальных уравнений.

Контролем правильности применения принципа наименьших квадратов служат равенства

$$[a'_1 v'] - [a'_2 v'] \quad [a'_3 v'] - [a'_4 v'] = 0.$$

Эти равенства в нашем примере хорошо соблюдаются.

Теперь получим уравненные значения необходимых неизвестных и измеренных величин и выполним заключительный контроль вычислений

$$t_1 = t_1^0 + v_1 = 270^\circ 00' 16,0'' - 0,7'' = 270^\circ 00' 15,3'';$$

$$t_2 = 46^\circ 25' 18,0'' + 4,2'' = 46^\circ 25' 22,2'';$$

$$t_3 = 65^\circ 33' 12,0'' - 1,9'' = 65^\circ 33' 10,1'';$$

$$t_4 = 100\,000,0 \text{ см} + 2,0 \text{ см} = 100\,002,0 \text{ см};$$

$$x'_1 = x_1 + v_1 = 338^\circ 01' 43,0'';$$

$$x'_2 = x_2 + v_2 = 46^\circ 25' 15'' + 7,2'' = 46^\circ 25' 22,2'';$$

$$x'_3 = 68^\circ 01' 27'' + 0,7'' = 68^\circ 01' 27,7'';$$

$$x'_4 = 65^\circ 33' 09'' + 1,1'' = 65^\circ 33' 10,1'';$$

$$x'_5 = 100\,000,0 \text{ см} + 2,0 \text{ см} = 100\,002,0 \text{ см};$$

$$x'_6 = 79\,588,1 \text{ см} - 7,0 \text{ см} = 79\,581,1 \text{ см};$$

$$x'_7 = 101\,866,0 \text{ см} + 3,5 \text{ см} = 101\,869,5 \text{ см}.$$

Контроль по сумме углов треугольника

$$x'_2 = 46^\circ 25' 22,2''$$

$$x'_3 = 68^\circ 01' 27,7''$$

$$\frac{x'_4 = 65^\circ 33' 10,1''}{180^\circ 00' 00,0''}$$

Контроль по соблюдению равенств, выражающих измеренные величины через выбранные необходимые неизвестные,

$$x'_1 = f_1(t_1, \dots, t_4) = 270^\circ 00' 15,3'' + 68^\circ 01' 27,7'' = 338^\circ 01' 43,0'';$$

$$x'_2 = f_2(t_1, \dots, t_4) = 46^\circ 25' 22,2'';$$

$$x'_3 = f_3(t_1, \dots, t_4) = 180^\circ - 46^\circ 25' 22,2'' - 65^\circ 33' 10,1'' =$$

$$= 180^\circ - 111^\circ 58' 32,3'' = 68^\circ 01' 27,7'';$$

$$x'_4 = f_4(t_1, \dots, t_4) = t_3 = 65^\circ 33' 10,1'';$$

$$x'_5 = f_5(t_1, \dots, t_4) = t_4 = 100\,002,0 \text{ см};$$

$$x'_6 = 100\,002,0 \frac{\sin 46^\circ 25' 22,2''}{\sin 65^\circ 33' 10,1''} = \frac{100\,002,0 \cdot 0,724\,446}{0,910\,343} = 79\,581,0 \text{ см};$$

$$x'_7 = 100\,002,0 \frac{\sin 68^\circ 01' 27,7''}{\sin 65^\circ 33' 10,1''} = \frac{100\,002,0 \cdot 0,927\,343}{0,910\,343} = 101\,869,6 \text{ см}.$$

Все равенства соблюдаются практически совершенно точно.

Вычислим теперь площадь треугольника и оценим точность ее определения. Обратный вес площади, выраженной в квадратных метрах, равен 10,5 (см. графу F табл. 43). Ошибку единицы веса примем равной $\mu = 5$, поскольку это значение (число секунд средней квадратической ошибки измерения углов, квадрат которого мы приняли в качестве коэффициента μ^2 при вычислении весов по формуле $P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$) получено на основе использования обильного производственного опыта*. Тогда

$$M_F = 5 \sqrt{10,5} = 16 \text{ м}^2.$$

Площадь треугольника равна

$$S \text{ м}^2 = \frac{1}{2} s_{AB} h = \frac{1}{2} x_5 \cdot x_6 \cdot \sin x_3 = \frac{100\,002,0 \text{ см} \cdot 79\,581,1 \text{ см} \cdot 0,927\,343}{2} =$$

$$= 397\,913 \text{ м}^2 \cdot 0,927\,343 = 369\,002 \text{ м}^2.$$

Итак, получено

$$S = 369\,002 \text{ м}^2 \pm 16 \text{ м}^2.$$

§ 68. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕСОВ ФУНКЦИЙ ПРИ УРАВНИВАНИИ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

В коррелятном способе, так же как и в параметрическом, для оценки точности любой величины необходимо представить ее в виде функции результатов измерений $F = \Phi(x_1, \dots, x_n)$, после чего применяется формула теории ошибок измерений

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_\Phi} = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{1}{p} \right].$$

Последовательность вывода необходимых формул примем такую:

- 1) функция линеаризуется;
- 2) поправки v выражаются через корреляты, после чего величина F представляется как функция результатов измерений и коррелят, т. е.

$$F = \psi(x_1, \dots, x_n, k_1, \dots, k_r);$$

- 3) при помощи элементов обратной матрицы коэффициентов специальной системы уравнений функция ψ преобразуется в функцию величин $x_1, \dots, x_n$ и невязок W , являющихся, как известно, функциями результатов измерений.

Таким образом, поставленная задача будет решена.

Приступим к решению задачи.

Пусть дана функция уравненных значений измеренных величин, т. е. $F(x'_1, \dots, x'_n)$, и требуется оценить ее точность.

Так как $x'_i = x_i + v_i$ ($i = 1, \dots, n$), то

$$F(x'_1, \dots, x'_n) = F(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n).$$

* Очевидно, что значение μ , вычисленное по внутренней сходимости при $7-4 = 3$ избыточных величинах, не должно приниматься во внимание.

разлагая функцию в ряд Тейлора, получаем

$$F(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = F(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial F}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} v_n + R,$$

где R — сумма всех членов разложения, кроме линейных.
Пренебрегая величиной R и вводя обозначения

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = F_i \quad (i=1, \dots, n),$$

имеем

$$F(x'_1, \dots, x'_n) = F(x_1, \dots, x_n) + F_1 v_1 + \dots + F_n v_n,$$

или

$$F(x'_1, \dots, x'_n) = F(x_1, \dots, x_n) + [Fv]. \quad (\text{VII.42})$$

Для нахождения $[Fv]$ возьмем систему коррелятных уравнений поправок (V.45)

$$v_i = q_i a_{i1} k_1 + \dots + q_i a_{ir} k_r \\ (i=1, \dots, n).$$

Умножив эти уравнения на F_i ($i=1, \dots, n$) соответственно и затем сложив их, получим

$$[Fv] = [q a_1 F] k_1 + \dots + [q a_r F] k_r. \quad (\text{VII.43})$$

С учетом (VII.43) напомним систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} [q a_1 a_1] k_1 + \dots + [q a_1 a_r] k_r + 0 (-[Fv]) &= -W_1 \\ [q a_1 a_r] k_1 + \dots + [q a_r a_r] k_r + 0 (-[Fv]) &= -W_r \\ [q a_1 F] k_1 + \dots + [q a_r F] k_r + 1 (-[Fv]) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.44})$$

Обозначим элементы последней строки обратной матрицы коэффициентов системы уравнений (VII.44) через $\rho_1, \dots, \rho_{r+1}$. Тогда неизвестное $(-[Fv])$ определится равенством

$$\left. \begin{aligned} -[Fv] &= -\rho_1 W_1 - \dots - \rho_r W_r + \rho_{r+1} 0 \\ [Fv] &= \rho_1 W_1 + \dots + \rho_r W_r \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.45})$$

На основании известного равенства из теории матриц

$$N^{-1} N = E$$

получим для определения искоемых элементов обратной матрицы коэффициентов системы (VII.44), т. е. для элементов $\rho_1, \dots, \rho_{r+1}$, систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} [q a_1 a_1] \rho_1 + \dots + [q a_1 a_r] \rho_r + [q a_1 F] \rho_{r+1} &= 0 \\ [q a_1 a_r] \rho_1 + \dots + [q a_r a_r] \rho_r + [q a_r F] \rho_{r+1} &= 0 \\ 0 \cdot \rho_1 + \dots + 0 \cdot \rho_r + 1 \cdot \rho_{r+1} &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Из последнего уравнения имеем

$$\rho_{r+1} = 1,$$

поэтому можно написать

$$\left. \begin{aligned} [qa_1a_1]\rho_1 + \dots + [qa_1a_r]\rho_r + [qa_1F] &= 0 \\ [qa_1a_r]\rho_1 + \dots + [qa_ra_r]\rho_r + [qa_rF] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.46})$$

Таким образом, возможно следующее решение задачи.

Из системы (VII.46) находим элементы обратной матрицы $\rho_1, \dots, \rho_r$, затем при помощи равенства (VII.45) выражаем сумму $[Fv]$ через невязки ρ , наконец, из (VII.42) получаем искомую функцию результатов измерений, учитывая, что $W_i = \Phi_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, r$). Однако такой путь решения весьма громоздок и практически неприменим. Имеется более простое решение, применяющееся на практике. Это решение заключается в вычислении обратного веса функций в дополнительной графе.

Рассмотрим этот способ.

1. Вычисление веса функции в дополнительной графе

Имея в виду (VII.45), равенство (VII.42) перепишем следующим образом:

$$F(x'_1, \dots, x'_n) = F(x_1, \dots, x_n) + \rho_1 W_1 + \dots + \rho_r W_r,$$

или

$$F(x'_1, \dots, x'_n) = F(x_1, \dots, x_n) + \rho_1 \Phi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \rho_r \Phi_r(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_1, \dots, x_n). \quad (\text{VII.47})$$

Теперь имеем

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_\Phi} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{P_i}$$

или, обозначая

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

и учитывая, что $\frac{1}{P} = q$, получаем

$$\frac{1}{P_F} = [q\Phi^2]. \quad (\text{VII.48})$$

Найдем частные производные $\Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$), имея в виду (VII.47)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} &= \frac{\partial F}{\partial x_i} + \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} + \dots + \rho_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i}, \\ \Phi_i &= a_{i1}\rho_1 + \dots + a_{ir}\rho_r + F_i. \end{aligned} \quad (\text{VII.49})$$

Для нахождения искомой величины $\frac{1}{P_F} = [q\Phi^2]$ умножим все равенства (VII.49) на $q_i \Phi_i$ ($i = 1, \dots, n$) и затем сложим их

$$[q\Phi^2] = [qa_1\Phi]\rho_1 + \dots + [qa_r\Phi]\rho_r + [qF\Phi]. \quad (\text{VII.50})$$

Найдем коэффициенты при $\rho_1, \dots, \rho_r$ в равенстве (VII.50), для чего опять воспользуемся равенством (VII.49),

$$[qa_1\Phi] = [qa_1a_1]\rho_1 + \dots + [qa_1a_r]\rho_r + [qa_1F];$$

$$[qa_r\Phi] = [qa_1a_r]\rho_1 + \dots + [qa_ra_r]\rho_r + [qa_rF].$$

Но из равенств (VII.46) следует, что правые части последних равенств равны нулю, поэтому в левые части этих равенств также равны нулю, т. е.

$$[qa_1\Phi] = [qa_2\Phi] = \dots = [qa_r\Phi] = 0,$$

в (VII.50) примет вид

$$[q\Phi^2] = [qF\Phi]. \quad (\text{VII.51})$$

Для определения значения $[qF\Phi]$ вновь обратимся к равенствам (VII.49)

$$[qF\Phi] = [qa_1F]\rho_1 + \dots + [qa_rF]\rho_r + [qFF]. \quad (\text{VII.52})$$

Принимая теперь во внимание (VII.48), (VII.51) и (VII.52), можно написать

$$\frac{1}{P_F} = [qa_1F]\rho_1 + \dots + [qa_rF]\rho_r + [qFF].$$

Присоединив последнее равенство к системе уравнений (VII.46), напишем

$$\left. \begin{aligned} [qa_1a_1]\rho_1 + \dots + [qa_1a_r]\rho_r + [qa_1F] &= 0 \\ [qa_2a_1]\rho_1 + \dots + [qa_2a_r]\rho_r + [qa_2F] &= 0 \\ &\vdots \\ [qa_ra_1]\rho_1 + \dots + [qa_ra_r]\rho_r + [qa_rF] &= 0 \\ [qa_1F]\rho_1 + \dots + [qa_rF]\rho_r + [qFF] &= \frac{1}{P_F} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.53})$$

Система уравнений (VII.53), содержащая $r+1$ уравнений с $r+1$ неизвестными, обладает всеми свойствами системы нормальных уравнений*. Поэтому перепишем эту систему так:

$$\left. \begin{aligned} N_{11}\rho_1 + \dots + N_{1r}\rho_r + L_1 &= 0 \\ N_{21}\rho_1 + \dots + N_{2r}\rho_r + L_2 &= 0 \\ &\vdots \\ N_{r1}\rho_1 + \dots + N_{rr}\rho_r + L_r &= 0 \\ L_1\rho_1 + \dots + L_r\rho_r + N_{(r+1)(r+1)} &= \frac{1}{P_F} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VII.54})$$

где

$$L_1 = [qa_1F]; \quad L_2 = [qa_2F]; \quad \dots; \quad L_r = [qa_rF]; \quad N_{(r+1)(r+1)} = [qFF].$$

Исключая из системы уравнений (VII.54) неизвестные $\rho_1, \dots, \rho_r$, получаем, наконец,

$$\frac{1}{P_F} = N_{(r+1)(r+1)}^{(r)}, \quad (\text{VII.55})$$

* Имеются в виду свойства, используемые при преобразованиях по алгоритму Гаусса. Очевидно, что коэффициент при неизвестном $\frac{1}{P_F}$ преобразовываться не будет.

где $N_{(r+1)(r+1)} = [qFF]$, или, в развернутом виде,

$$\frac{1}{P_F} = [qFF] - \frac{L_1}{N_{11}} L_1 - \frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} L_2^{(1)} - \dots - \frac{L_r^{(r-1)}}{N_{rr}^{(r-1)}} L_r^{(r-1)}. \quad (\text{VII.56})$$

Формула (VII.56) показывает, что вес любой функции измеренных величин после уравнивания всегда повышается, так как первый член правой части этой формулы есть обратный вес функции до уравнивания, остальные члены, являющиеся произведениями элементов элиминационных строк в графе L на выстоявшие числа, отрицательны. Заметим, кстати, что это есть еще один довод в пользу принципа наименьших квадратов. Формулу (VII.56) можно выразить в виде правила следующим образом.

Для получения обратного веса функций $F(x'_1, \dots, x'_n)$ в таблице коэффициентов делают дополнительную графу F , в которую выписывают частные производные

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

в строках с соответствующими индексами i . Попутно с вычислениями коэффициентов нормальных уравнений вычисляют значения $[qa_1F]$, $[qa_2F]$, $\dots$, $[qa_rF]$ и $[qFF]$.

В схеме решения нормальных уравнений также делают дополнительную графу F , в которую выписывают величины $[qa_1F]$, $\dots$, $[qa_rF]$ в строках $N_1, \dots, N_r$ и ниже — величину $[qFF]$. В этой графе в процессе решения выполняют такие же преобразования, как и в графе W .

После завершения всех преобразований обратный вес функции получают как алгебраическую сумму значения $[qFF]$ и произведений чисел, стоящих на пересечениях строк E с графой F , на выстоявшие числа.

Очевидно, что число дополнительных граф должно равняться числу оцениваемых функций.

Сформулированные выше правила можно получить еще следующим образом, прибегая к алгебраическим аналогиям.

Сравнивая равенства (VII.49) с параметрическими уравнениями поправок

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

а нормальные уравнения (VII.46) — с нормальными уравнениями для неизвестных τ

$$\begin{aligned} [pa_1a_1]\tau_1 + \dots + [pa_1a_k]\tau_k + [pa_1l] &= 0, \\ [pa_2a_1]\tau_1 + \dots + [pa_2a_k]\tau_k + [pa_2l] &= 0, \\ &\vdots \\ [pa_ka_1]\tau_1 + \dots + [pa_ka_k]\tau_k + [pa_kl] &= 0. \end{aligned}$$

нетрудно видеть, что значение $\frac{1}{P_F} = [q\Phi^2]$ имеет такой же алгебраический смысл, как и значение $[pv^2]$. Отсюда следует, что величина $\frac{1}{P_F} = [q\Phi^2]$ может быть получена по тем правилам, по которым получают величину $[pv^2]$ при помощи графы l таблицы коэф-

коэффициентов и графы L схемы решения нормальных уравнений. Для этого вводится графа F в таблице коэффициентов условных уравнений и дополнительная графа F' в схеме решения нормальных уравнений коррелят. При этом роль l_i играют частные производные F_i , а веса p_i заменяются обратными весами: $q_i = \frac{1}{p_i}$.

2. Вес уравненного значения измеренной величины

Написав равенство

$$x'_i = F(x'_1, \dots, x'_n).$$

получим решение.

Поскольку в данном случае $F_1 = F_2 = \dots = F_{l-1} = 0$;

$$F_l = 1; F_{l+1} = F_{l+2} = \dots = F_n = 0,$$

то решение можно сформулировать в виде следующего правила: для получения обратного веса уравненной величины x'_i в таблицу коэффициентов вводится дополнительная графа x_i , в которой выписывается $+1$ в i -й строке. Далее поступают точно так же, как при вычислении обратного веса функции.

§ 69. ПРИМЕРЫ УРАВНИВАНИЯ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ С ОЦЕНКАМИ ТОЧНОСТИ

Пример 1. Возьмем тот же пример, который решен в § 67, т. е. систему нивелирных ходов, показанных на рис. 14.

Напомним, что марки 18, 22 и 96 являются исходными, грунтовые реперы 86, 02, 98 и 12 — определяемыми. На рис. 14 выписаны исходные высоты и суммы превышений, которые считаются измеренными величинами; направления звеньев показаны стрелками; в кружках обозначены номера звеньев. В табл. 44 приведены обратные веса измеренных значений, вычисленные по формуле

$$q = \frac{1}{p} = \frac{S}{15}.$$

При уравнивании высоты и их разности (превышения) будем выражать в миллиметрах.

Требуется произвести уравнивание системы нивелирных ходов коррелятным способом и получить средние квадратические ошибки уравненного значения разности высот ($H_{86} - H_{98}$) и уравненной высоты репера 12.

Т а б л и ц а 44

Номер звена	Обратный вес	Номер звена	Обратный вес
1	0,8	6	1,4
2	1,1	7	0,8
3	0,9	8	0,9
4	0,7	9	1,0
5	1,1		

Составим условные уравнения. Число независимых уравнений будет равно

$$r = n - k = 9 - 4 = 5$$

(необходимых измеренных величин будет четыре). Выберем следующие условные уравнения:

$$1) \varphi_1 = x'_5 - x'_7 + x'_8 = 0;$$

$$2) \varphi_2 = x'_5 + x'_8 - x'_6 = 0;$$

$$3) \varphi_3 = x'_2 - x'_8 - x'_4 = 0;$$

$$4) \varphi_4 = 191\,890 + x'_9 + x'_6 - x'_3 - 192\,353 = 0;$$

$$5) \varphi_5 = 183\,506 + x'_1 + x'_3 - x'_3 - 192\,353 = 0.$$

Коэффициенты условных уравнений поправок очевидны. Вычислим свободные члены этих уравнений

$$W_1 = 4694 + 905 - 5585 = +14;$$

$$W_2 = 4694 + 6944 - 11\,652 = -14;$$

$$W_3 = 8320 - 6944 - 1368 = +8;$$

$$W_4 = 191\,890 - 5585 + 11\,652 - 5580 - 192\,353 = +24;$$

$$W_5 = 183\,506 + 6125 + 8320 - 5580 - 192\,353 = +18.$$

В табл. 45 необходимо предусмотреть графы для частных производных функций, точности которых нужно оценить, т. е.

$$F_1 = H_{80} - H_{83} = x'_2 - x'_6;$$

$$F_2 = H_{12} = H_{22}^0 + x'_3.$$

Очевидно, что средняя квадратическая ошибка H_{12} равна средней квадратической ошибке превышения x_3 , так как высота H_{22}^0 — исходная.

Напомним дальнейший ход действий при оценке точности функций. Полученные в таблице коэффициентов (см. табл. 45) значения $[qa_1F]$, $[qa_2F]$, $\dots$, $[qa_3F]$ и $[qFF]$ выписывают в дополнительную графу схемы решения нормальных уравнений, после решения которых получают обратный вес функции по формуле

$$\frac{1}{p_F} = N_{66}^{(5)} = [qFF] - \frac{[qa_1F]}{N_{11}} [qa_1F] - \frac{[qa_1F \cdot 1]}{N_{22}^{(1)}} [qa_2F \cdot 1] - \dots,$$

где

$$[qa_2F \cdot 1] = [qa_2F] - \frac{[qa_1F]}{N_{11}} [qa_1F].$$

Нормальные уравнения решены способом краковянов в табл. 46.

Выписав полученные значения коррелят в заголовки граф « a_1 », « a_2 », $\dots$, « a_3 », вычислим поправки v_i и величину $-[kW]$, которая должна сходиться со значением $+[pv^2]$, полученным как сумма графы « $[pv^2]$ ». Та же величина $[pv^2]$ получена в графе « W » схемы решения нормальных уравнений. Все три значения $[pv^2]$ совпадают в пределах точности вычислений, что свидетельствует о правильности уравнительных вычислений. Значения обратных весов функций F_1 и F_2 совпадают с теми, которые получены в способе необходимых неизвестных. Значение ошибки единицы веса $\mu = \sqrt{\frac{320}{5}} = 8,0$ мм также почти совпадает с тем, которое получено ранее.

Номер измерений	$q = \frac{1}{p}$	a_1 -7,73	a_2 +7,60	a_3 +2,57	a_4 +0,26	a_5 -7,52	F	Σs	s	ν	$\rho_{\Sigma s} = \frac{\nu^2}{q}$
1	0,8								+1	-6,02	45,4
2	1,1								+3	-5,45	27,0
3	0,9			+1	-1			+1	-1	+6,53	47,5
4	0,7			-1					-1	-1,80	4,6
5	1,1	+1	+1						+2	-0,36	0,1
6	1,4	-1	-1		+1				-1	-10,00	71,6
7	0,8	-1							-1	+6,18	47,9
8	0,9	+1	+1	-1					0	+4,35	21,0
9	1,0				+1				+2	-7,47	55,8
ΣW		+16	-14	+8	+24	+18			-[kw] = 320,4		320,9
$[qa_1]$		2,9	+1,1	0	+1,0	0	0	0	+5,0		
$[qa_2]$			3,4	-0,9	-1,4	0	+1,4	0	+3,6		
$[qa_3]$				2,7	0	+1,1	+1,1	0	+4,0		
$[qa_4]$					3,3	+0,9	-1,4	-0,9	+1,5		
$[qa_5]$						2,8	+1,1	-0,9	+5,0		
$[qF_1]$							2,5				
$[qF_2]$								0,9			

Таблица 46

Строки	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	W	F	x_3	$S = s + W$	Контроль
N_1	2,0	-1,1	0	-1,0	0	-14,0	0	0	-19,0	
N_2		3,4	+0,9	+1,4	0	+14,0	-1,4	0	+10,4	
N_3			2,7	0	-1,1	-8,0	-1,1	0	-12,0	
N_4				3,3	-0,9	-24,0	+1,4	+0,9	-25,5	
N_5					2,8	-18,0	-1,1	+0,9	-23,0	
N_6							2,5	0,9		
K_1	1,703	-0,646	0	-0,587	0	-8,221	0	0	-11,157	-11,157
K_2		1,727	+0,521	+1,030	0	+11,182	-0,811	0	+10,195	+10,195
K_3			1,558	+0,344	-0,706	-1,395	-0,977	0	-4,292	-4,293
K_4				1,333	-0,857	-6,104	+0,171	+0,675	-7,448	-7,447
K_5					1,252	-9,412	-0,445	-0,257	-10,852	-10,853
Неизвестные	-7,73	+7,40	+2,57	+0,26	-7,52	-11,784 1,567				
$-[pv^2] = -320; \frac{1}{P_F} = 0,66$										
0,38										

Контроль по суммарному уравнению: $-5,0 \cdot 7,73 + 2,2 \cdot 7,40 + 2,9 \cdot 2,57 + 3,8 \cdot 0,26 - 4,8 \cdot 7,52 + 50,000 = -0,02$.

В заключение получим уравненные значения измеренных величин; проверим условные уравнения

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + v_1 = 6125 - 6,0 = 6119,0 \text{ мм;} \\x'_2 &= x_2 + v_2 = 8320 - 5,4 = 8314,6 \text{ мм;} \\x'_3 &= x_3 + v_3 = 5580 + 6,5 = 5586,5 \text{ мм;} \\x'_4 &= x_4 + v_4 = 1368 - 1,8 = 1366,2 \text{ мм;} \\x'_5 &= x_5 + v_5 = 4694 - 0,4 = 4693,6 \text{ мм;} \\x'_6 &= x_6 + v_6 = 11\,652 - 10,0 = 11\,642,0 \text{ мм;} \\x'_7 &= x_7 + v_7 = -905 - 6,2 = -898,8 \text{ мм;} \\x'_8 &= x_8 + v_8 = 6944 + 4,4 = 6948,4 \text{ мм;} \\x'_9 &= x_9 + v_9 = -5585 - 7,5 = -5592,5 \text{ мм;} \\ \varphi_1 &= x'_5 - x'_7 + x'_9 = -0,1 \text{ мм;} \\ \varphi_2 &= x'_5 + x'_8 - x'_6 = 0; \\ \varphi_3 &= x'_2 = x'_8 - x'_4 = 0; \\ \varphi_4 &= 191\,890 + x'_9 + x'_6 - x'_3 - 192\,353 = 0; \\ \varphi_5 &= 183\,506 + x'_1 + x'_2 - x'_3 - 192\,353 = +0,1 \text{ мм.}\end{aligned}$$

В пределах точности округлений все условные уравнения удовлетворяются, а уравненные значения измеренных величин совпадают с полученными параметрическим способом.

Таким образом, еще раз убеждаемся в эквивалентности двух основных способов уравнивания: параметрического и коррелятивного.

Пример 2. Решим пример 2, приведенный в § 67, коррелятивным способом. Напоминаем условие задачи и некоторые данные. В треугольнике ABC (см. рис. 15) известны координаты вершины A . Для определения положения двух других вершин измерено семь величин:

дирекционный угол α_{BC}	$x_1 = 338^\circ 01' 43''$;
углы $\angle A$	$x_2 = 46^\circ 25' 15''$;
» B	$x_3 = 68^\circ 01' 27''$;
» C	$x_4 = 65^\circ 33' 09''$;
стороны s_{AB}	$x_5 = 100000,0$ см;
» s_{BC}	$x_6 = 79588,1$ см;
» s_{CA}	$x_7 = 101866,0$ см.

Веса равны

$$\begin{aligned}p_1 &= 0,4; \\ p_2 &= p_3 = p_4 = 1; \\ p_5 &= p_6 = p_7 = 2.\end{aligned}$$

Ошибка единицы веса $\mu = 5$; число измеренных величин $n = 7$; число необходимых величин $k = 4$; число избыточных величин $r = 3$.

Таким образом, независимых условных уравнений должно быть три. В этих условных уравнениях будут фигурировать только величины x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 и x_7 .

Дирекционный угол α_{BC} в математических соотношениях между измеренными величинами p , следовательно, в условных уравнениях не участвует, поэтому поправки не получит. Заметим, что в примере 2 § 67 уравнение поправок для $x_1 = \alpha_{BC}$ было составлено, но поправка оказалась равной нулю, что соответствует логике задачи: при одном дирекционном угле никаких невязок в ориентировании возникнуть не может. Если бы в треугольнике была измерена только одна сторона, то и она поправки не получила бы.

Составим условные уравнения

$$\varphi_1 = x'_2 + x'_3 + x'_4 - 180^\circ = 0;$$

$$\varphi_2 = x'_5 \frac{\sin x'_3}{\sin x'_4} - x'_7 = 0;$$

$$\varphi_3 = x'_5 \frac{\sin x'_2}{\sin x'_4} - x'_6 = 0.$$

Вычислим невязки

$$W_1 = 179^\circ 59' 51'' - 180^\circ = -9'';$$

$$W_2 = 100\,000,0 \frac{\sin 68^\circ 01' 27''}{\sin 65^\circ 33' 09''} - 101\,866,0 \text{ см} = +1,6 \text{ см};$$

$$W_3 = 100\,000,0 \frac{\sin 46^\circ 25' 15''}{\sin 65^\circ 33' 09''} - 79\,588,1 \text{ см} = -11,1 \text{ см}.$$

Получим частные производные функций φ_2 и φ_3

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = a_{22} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = x_5 \frac{\sin x_3}{\sin x_4} \cdot \frac{\cos x_3}{\sin x_3};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \right)_0 = \frac{x_5^{\text{см}}}{\rho''} \operatorname{ctg} x_3, \text{ т. е. } a_{32} = \frac{101\,900}{\rho''} \operatorname{ctg} 68^\circ 01' = 0,20;$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} = -x_5 \frac{\sin x_3}{\sin x_4} \cdot \frac{\cos x_4}{\sin x_4}; \quad \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} \right)_0 = \frac{-x_5^{\text{см}}}{\rho''} \operatorname{ctg} x_4,$$

т. е.

$$a_{42} = -\frac{101\,900}{\rho''} \operatorname{ctg} 65^\circ 33' = -0,22;$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_5} = \frac{\sin x_3}{\sin x_4} = \frac{x_7}{x_5}; \quad a_{52} = \frac{1019}{1000} = +1,02;$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_6} = 0, \text{ т. е. } a_{62} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_7} = a_{72} = -1,00;$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} = x_6 \cdot \operatorname{ctg} x_2; \quad a_{23} = \frac{x_6^{\text{см}}}{\rho''} \operatorname{ctg} 46^\circ 25' = +0,77;$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} = a_{33} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} = -x_6 \cdot \operatorname{ctg} x_1; \quad a_{13} = -\frac{79\,600}{\rho''} \operatorname{ctg} 65^\circ 33' = -0,17;$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_5} = \frac{x_6}{x_5}; \quad a_{33} = \frac{796}{1000} = +0,80;$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_6} = a_{63} = -1; \quad a_{73} = 0.$$

Выразим площадь треугольника в виде функции измеренных величин

$$F \text{ м}^2 = S \text{ см}^2 10^{-4} = \frac{1}{2} x_5 \cdot x_6 \cdot \sin x_3 10^{-4}.$$

Возьмем частные производные функции F

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} = F_2 = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x_3''} = \frac{x_5^{\text{см}} \cdot x_6^{\text{см}}}{2 \cdot \rho'' \cdot 10^4} \cdot \cos x_3;$$

$$F_3 = \frac{1000 \cdot 796}{2 \cdot \rho''} \cos 68^\circ 01' = +0,72;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_4} = F_4 = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x_5} = \frac{x_6^{\text{см}} \cdot \sin x_3}{20\,000}; \quad F_5 = \frac{79\,600}{20\,000} \sin 68^\circ 01',$$

$$\text{т. е. } F_5 = +3,69;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_6} \right)_0 = \frac{100\,000}{20\,000} \sin 68^\circ 01' = F_6 = +4,63;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_7} = F_7 = 0.$$

Составим таблицу коэффициентов (табл. 47), имея в виду приведение коррелятивных уравнений поправок к равноточному виду. Нормальные уравнения решены в табл. 48.

Контроль по сумме уравнений

$$\begin{aligned} & (3,90 - 0,72) 2,007 + (3,56 - 2,02) (-7,088) + (0,81 + 0,83) 14,076 + \\ & + (-9,00 + 1,60 - 11,10) = +3,18 \cdot 2,007 - 1,54 \cdot 7,088 + 1,64 \cdot 14,076 - \\ & - 18,50 = +18,55 - 18,50 = +0,05. \end{aligned}$$

Остаточная погрешность пренебрегаемо мала. Контроль по $[p \cdot r^2]$ хороший: все три значения ($[r' r'']$, $-[k w]$ и в графе W) с точностью до 0,1 совпадают и достаточно близки к тому, что получено в примере 2 § 67.

Поправки v , полученные в табл. 42 и 47, также сходятся до 0,1. Обратный вес функции также оказался одинаковым в обоих примерах.

Таким образом, мы еще раз убедились в эквивалентности двух основных способов уравнивания.

Таблица 47

№ паче- рени	p	q	a'_{11}	a'_{12}	a'_{13}	r_l	F_l	s_l	a'_{11}	a'_{12}	a'_{13}	r'_l	F'_l	s'
1	1	1	+2,01	-7,09	+14,08									
2	1	1	+1,00	0	+0,37	+7,22"	0	+1,37	+1,00	0	+0,37	+7,22	0	+1,37
3	1	1	+1,00	+0,20	0	+0,59"	+0,72	+1,92	+1,00	+0,20	0	+0,59	+0,72	+1,92
4	1	1	+1,00	-0,22	-0,17	+1,18"	0	+0,61	+1,00	-0,22	-0,17	+1,18	0	+0,61
5	2	0,5		+1,02	+0,80	+2,02cm	+3,09	+5,51		+0,72	+0,57	+2,92	+2,61	+3,90
6	2	0,5		0	-1,00	-7,04cm	+4,63	+3,63		0	-0,71	-10,00	+3,27	+2,56
7	2	0,5		-1,00	0	+3,54cm	0	-1,00		-0,71	0	+5,03	0	-0,71

$$W - 9,00'' + 1,60 - 1,10 - 185,7 = [W]$$

$$[W] = 187,7$$

a'_1	3,00	-0,02	+0,20	+0,72	+3,90
a'_2		1,11	+0,45	+2,02	+3,56
a'_3			0,99	-0,83	+0,81
F''				18,02	+19,93

	k_1	k_2	k_3	W	F	S
N_1	3,00	-0,02	+0,20	-9,00	+0,72	-5,10
E_1		+0,007	-0,067	+3,000	-0,240	+1,700
N_2		1,11	+0,45	+1,60	+2,02	+5,16
$N_2^{(1)}$		1,11	+0,45	+1,54	+2,03	+5,13
E_2			-0,405	-1,387	-1,829	-4,621
N_3			+0,99	-11,10	-0,83	-10,29
$N_3^{(2)}$			+0,79	-11,12	-1,70	-12,03
E_3				+14,076	+2,152	+15,228
$k =$	+2,007	-7,088	+14,076			
N_4			$[pv^2] = 185,7$		18,02	

$$\frac{1}{P_F} = 10,5$$

В заключение внесем поправки в результаты измерений и проверим условные уравнения

$$\varphi_1 = x'_2 + x'_3 + x'_4 - 180^\circ = 46^\circ 25' 22,2'' + 68^\circ 01' 27,6'' + \\ + 65^\circ 33' 10,2'' - 180^\circ = 0;$$

$$\varphi_2 = 100002,0 \frac{\sin 46^\circ 25' 22,2''}{\sin 65^\circ 33' 10,2''} - 79581,1 = -0,1;$$

$$\varphi_3 = 100002,0 \frac{\sin 68^\circ 01' 27,6''}{\sin 65^\circ 33' 10,2''} - 101869,5 = 0.$$

Все условные уравнения практически удовлетворяются.

Глава VIII

ВИДОИЗМЕНЕНИЯ ОСНОВНЫХ СПОСОБОВ УРАВНИВАНИЯ

§ 70. ГРУППОВЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим четыре модификации коррелятного способа уравнивания, которые известны под следующими названиями: 1) двухгрупповой способ Гаусса, 2) способ приближений Гаусса, 3) способ Крюгера, 4) способ Больца.

Из этих четырех способов в практике геодезических работ применяют только второй и третий. Первый нужен лишь для обоснования

второго и третьего способов. Что касается четвертого способа, то он может иметь значение при некоторых исследованиях и экспериментах. На производстве этот способ в настоящее время не применяется.

Учитывая сказанное, приведем примеры только второго и третьего способов уравнивания. Что же касается первого и четвертого способов, то ограничимся лишь изложением их теории.

1. Двухгрупповой способ Гаусса

Этот способ заключается в следующем. Условные уравнения разбивают на две группы и под условием $[pv^2] = \min$ решают сначала уравнения I группы, откуда находят первичные поправки v'_i и вводят их в измеренные величины. Окончательные значения поправок v_i получают как суммы

$$v_i = v'_i + v''_i, \quad (\text{VIII.1})$$

где v''_i — вторичные поправки. Для отыскания которых всю заданную систему условных уравнений решают совместно под условием $[pv'^2] = \min$. При этом свободные члены уравнений II группы вычисляют с результатами измерений, исправленными первичными поправками v'_i . Очевидно, что с исправленными результатами измерений свободные члены I группы будут все равны нулю.

Покажем правомерность такого решения на примере четырех условных уравнений, разделенных на две группы, по два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} [a_1 v] + W_1 &= 0 \\ [a_2 v] + W_2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.2})$$

$$\left. \begin{aligned} [a_3 v] + W_3 &= 0 \\ [a_4 v] + W_4 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.3})$$

Выразим поправки v_i через коррелаты, т. е. напишем коррелятные уравнения поправок, решив все уравнения (VIII.2) и (VIII.3) совместно.

$$v_i = \frac{a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4}{p_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (\text{VIII.4})$$

Решим теперь уравнения I группы отдельно под условием $[pv'^2] = \min$ и найдем из этого решения первичные поправки v'_i . Обозначим коррелаты отдельно решаемых уравнений I группы через k_1^0 и k_2^0 . напишем

$$v'_i = \frac{a_{i1}k_1^0 + a_{i2}k_2^0}{p_i}. \quad (\text{VIII.5})$$

Выразим коррелаты k_1 и k_2 через приближенные значения k_1^0 , k_2^0 и поправки к ним

$$k_1 = k_1^0 + \delta k_1,$$

$$k_2 = k_2^0 + \delta k_2$$

и подставим эти выражения в формулу (VIII.4). Получим

$$v_i = \frac{a_{i1}k_1^0 + a_{i2}k_2^0}{p_i} + \frac{a_{i1}\delta k_1 + a_{i2}\delta k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4}{p_i},$$

или с учетом выражения (VIII.5)

$$v_i = v_i' + v_i'',$$

где

$$v_i' = \frac{a_{i1}\delta k_1 + a_{i2}\delta k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4}{p_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{VIII.6})$$

Отсюда видно, что для получения вторичных поправок v_i' нужно решить нормальные уравнения с неизвестными коррелатами δk_1 , δk_2 , k_3 и k_4 . Матрица коэффициентов этих нормальных уравнений будет та же, что и для уравнений I и II групп, но свободные члены будут отличаться, а именно в I группе уравнений это будут нули, а во II группе — некоторые неизвестные нам пока значения W_3 в W_4' . Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} [qa_1a_1] \delta k_1 + [qa_1a_2] \delta k_2 + [qa_1a_3] k_3 + [qa_1a_4] k_4 + \\ + ([qa_1a_1] k_1^0 + [qa_1a_2] k_2^0 + W_1) &= 0 \\ [qa_2a_1] \delta k_1 + [qa_2a_2] \delta k_2 + [qa_2a_3] k_3 + [qa_2a_4] k_4 + \\ + ([qa_2a_1] k_1^0 + [qa_2a_2] k_2^0 + W_2) &= 0 \\ [qa_3a_1] \delta k_1 + [qa_3a_2] \delta k_2 + [qa_3a_3] k_3 + [qa_3a_4] k_4 + \\ + ([qa_3a_1] k_1^0 + [qa_3a_2] k_2^0 + W_3) &= 0 \\ [qa_4a_1] \delta k_1 + [qa_4a_2] \delta k_2 + [qa_4a_3] k_3 + [qa_4a_4] k_4 + \\ + ([qa_4a_1] k_1^0 + [qa_4a_2] k_2^0 + W_4) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.7})$$

На основании (VIII.5) легко видеть, что свободные члены (в круглых скобках) первых двух уравнений (VIII.7) равны нулю. Рассмотрим теперь свободные члены последних двух уравнений (VIII.7). Эти свободные члены можно получить как невязки, если пользоваться исправленными после первого уравнивания результатами измерений. Обозначим новую невязку третьего уравнения через W_3' и вычислим ее указанным выше путем

$$W_3' = \varphi_3(x_1 + v_1', \dots, x_n + v_n'). \quad (\text{VIII.8})$$

Разлагая в ряд эту функцию и ограничиваясь линейными членами разложения, получаем

$$\begin{aligned} W_3' &= \varphi_3(x_1 + v_1', \dots, x_n + v_n') = \varphi_3(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} v_1' + \dots + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_n} v_n' = W_3 + a_{13}v_1' + a_{23}v_2' + \dots + a_{n3}v_n', \end{aligned}$$

т. е.

$$W_3' = W_3 + [a_3v']. \quad (\text{VIII.9})$$

Получим значение $[a_3v']$ из равенств (VIII.5)

$$v_i' = q_1a_{i1}k_1^0 + q_2a_{i2}k_2^0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$[a_3v'] = [qa_1a_3] k_1^0 + [qa_2a_3] k_2^0.$$

Теперь (VIII.9) примет вид

$$W'_3 = [qa_1a_3] k_1^0 + [qa_2a_3] k_2^0 + W_3,$$

т. е. свободный член третьего уравнения системы (VIII.7) можно получить по формуле (VIII.8), что и требовалось доказать. Аналогично можно показать, что

$$W'_4 = \Phi_1 (x_1 + v'_1, \dots, x_n + v'_n). \quad (\text{VIII.10})$$

Итак, в двухгрупповом способе Гаусса поправки v_i нужно вычислять как суммы

$$v_i = v'_i + v''_i,$$

где первичные поправки v'_i находят из решения системы условных уравнений (VIII.2), а вторичные v''_i — по формуле (VIII.6), где δk_1 , δk_2 , k_3 и k_4 находят из системы нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} [qa_1a_1] \delta k_1 + [qa_1a_2] \delta k_2 + [qa_1a_3] k_3 + [qa_1a_4] k_4 &= 0 \\ [qa_1a_2] \delta k_1 + [qa_2a_2] \delta k_2 + [qa_2a_3] k_3 + [qa_2a_4] k_4 &= 0 \\ [qa_1a_3] \delta k_1 + [qa_2a_3] \delta k_2 + [qa_3a_3] k_3 + [qa_3a_4] k_4 + W'_3 &= 0 \\ [qa_1a_4] \delta k_1 + [qa_2a_4] \delta k_2 + [qa_3a_4] k_3 + [qa_4a_4] k_4 + W'_4 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

а свободные члены W'_3 и W'_4 — из условных уравнений (первоначальных, не приведенных к линейному виду), пользуясь результатами измерений, исправленными первичными поправками, по формулам (VIII.8) и (VIII.10).

Таким образом, правомерность двухгруппового способа Гаусса доказана. Этот способ может дать некоторую выгоду по сравнению с обычным способом лишь в том случае, если I группа условных уравнений распадается на независимые уравнения и поэтому решается просто. Тогда упрощаются действия в графе W схемы решения нормальных уравнений коррозат.

Как указано в начале параграфа, двухгрупповой способ Гаусса необходим для обоснования изложенных ниже способа приближений и способа Крюгера.

2. Способ приближений Гаусса

Исходя из рассмотренного выше способа, К. Ф. Гаусс предложил способ приближений для решения условных уравнений. Как уже говорилось, в двухгрупповом способе сначала отдельно решается I группа уравнений (VIII.2), откуда находят первичные поправки v'_i , а затем вычисляют вторичные поправки v''_i из совместного решения условных уравнений:

I группа

$$\text{II группа} \quad \left. \begin{aligned} [a_1v''] &= 0 \\ [a_2v''] &= 0 \\ [a_3v''] + W'_3 &= 0 \\ [a_4v''] + W'_4 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VIII.11})$$

где W'_3 и W'_4 вычислены по формулам (VIII.8) и (VIII.10).

Рассматривая систему условных уравнений (VIII.11) как исходную, вновь применяем к ней двухгрупповой способ Гаусса.

Так как в I группе уравнений (VIII.11) все свободные члены равны нулю, то отдельное решение этих уравнений никаких изменений в поправки не внесет. Поэтому сначала отдельно решают II группу уравнений (VIII.11), т. е. уравнения

$$[a_3 v''] + W'_3 = 0,$$

$$[a_4 v''] + W'_4 = 0.$$

В результате получим третьи поправки, после внесения которых появятся невязки W'_1 и W'_2 , но исчезнут невязки W'_3 и W'_4 .

Продолжая этот процесс, т. е. решая поочередно группы условных уравнений, постепенно уменьшаем невязки. После ликвидации всех невязок решение заданной системы условных уравнений заканчивается. Так как каждая решаемая в процессе приближений система уравнений равносильна предшествующей и уточняет значения искомых поправок, то найденные в приближениях поправки v'_i , v''_i , v'''_i и т. д. должны дать в сумме для каждой измеренной величины x_i искомую поправку v_i , т. е.

$$v_i = v'_i + v''_i + \dots + v_i^{(s)},$$

где s — число приближений, при котором все невязки окажутся ликвидированными. В § 75 доказана сходимость указанного процесса приближений.

Каждую из двух групп уравнений, в свою очередь, можно подразделить для решения еще на две группы и вообще делить условные уравнения на любое число групп. Наиболее выгодным разделением является такое, при котором группы распадаются на независимые уравнения.

Проиллюстрируем способ приближений Гаусса на примере. Для этого возьмем пример 1 § 69.

П р и м е р. На рис. 16 направления звеньев * выбраны с таким расчетом, чтобы в условных уравнениях все коэффициенты были равны ± 1 .

Условные уравнения разделим на три группы следующим образом:

I г р у п п а

$$\varphi_1 = x'_2 + x'_8 + x'_3 - 0,$$

$$\varphi_2 = x'_6 + x'_9 + x'_7 = 0.$$

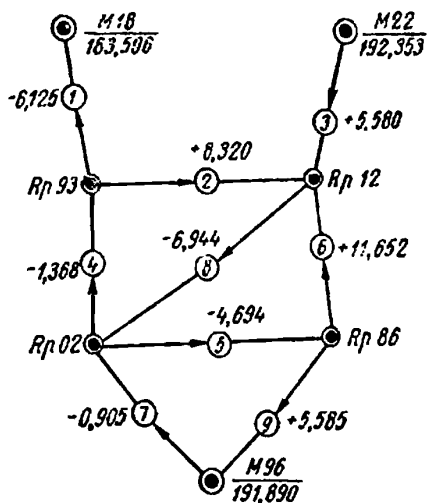


Рис. 16

* Стрелка на чертеже указывает на пункт, высота которого является уменьшаемым в измеренной разности высот (превышений).

II группа

$$\varphi_3 = x'_5 + x'_6 + x'_8 = 0.$$

III группа

$$\varphi_1 = 191\,890 + x'_2 + x'_4 + x'_1 - 183\,506 = 0,$$

$$\varphi_5 = 192\,353 + x'_3 + x'_8 + x'_5 + x'_9 - 191\,890 = 0.$$

Высоты и превышения будем выражать в миллиметрах.

Нетрудно видеть, что каждая группа распадается на независимые условные уравнения.

При коэффициентах, равных +1, решение одного условного уравнения по методу наименьших квадратов сводится просто к распределению невязки с противоположным знаком пропорционально обратным весам (табл. 49) измеренных величин, входящих в уравнение.

В табл. 50—54 выполнены уравнивательные вычисления. Для удобства вычислений в графе q'_i получены величины

$$q'_i = \frac{q_i}{[q]},$$

где $[q]$ — квадратичный коэффициент нормального уравнения.

Т а б л и ц а 49

Номер звена	Обратный вес	Номер звена	Обратный вес
1	0,8	6	1
2	1,1	7	0,8
3	0,9	8	0,9
4	0,7	9	1,0
5	1,1		

Т а б л и ц а 50

Уравнивание

I группа

φ_1

i	q_i	q'_i	Приближения					v
			1	2	3	4	5	
1								
2+								
3	1,1	0,41	-3	-1	0	0	0	-4
4								
5	0,7	0,26	-2	-1	0	0	0	-3
6								
7								
8								
9	0,9	0,33	-3	-1	0	0	0	-4
Σ	2,7	1,00	+8	$\frac{+4}{-1}$ +3	0	0	0	

Таблица 51

Ψ_2								
i	q_i	q'_i	Приближения					v
			1	2	3	4	5	
1								
2								
3								
4								
5	1,1	0,38	+5	-2	-2	-1	-1	-1
6	0,8	0,28	+4	-1	-1	0	0	+2
7								
8	1,0	0,34	+5	-2	-1	-1	0	+1
9								
Σ	2,9	1,00	-14	-2	+1	+1	+1	
				+4	+1	+1		
				+3	+2			
				+5	+4	+2		

Таблица 52

II группа

 Ψ_3

i	q_i	q'_i	Приближения					v
			1	2	3	4	5	
1								
2								
3								
4								
5	1,1	0,32	-5	-1	0	0	0	-6
6+	1,4	0,41	-7	-1	-1	0	0	-9
7								
8	0,9	0,27	-4	-1	0	0	0	-5
Σ	3,4	1,00	+14	+1	+1	0	0	
			+5					
			-3	+2				
			+16	+3				

Поправки в приближениях вычисляли по формуле

$$v_i = -q'_i IV, \quad (\text{VIII.12})$$

где IV — последнее значение невязки, полученное в процессе приближений.

Вычисления произведены на логарифмической линейке. В табл. 55 вычислены окончательные поправки, являющиеся суммами соответствующих значений в табл. 50—54.

III группа

Таблица 53

Ф4

i	q _i	q' _i	Приближения					v
			1	2	3	4	5	
1+	0,8	0,35	+4	+1	+1	0	0	+6
2								
3								
4	0,7	0,30	+4	0	0	0	0	+4
5								
6								
7	0,8	0,35	+4	+1	0	0	0	+5
8								
9								
Σ	2,3	1,00	-14 -2 +4 -12	-1 -1 -2	-1	0	0	

Таблица 54

Ф5

i	q _i	q' _i	Приближения					v
			1	2	3	4	5	
1								
2								
3+	0,9	0,23	+3	+2	+1	+1	+1	+8
4								
5	1,1	0,28	+3	+2	+1	+1	0	+7
6								
7								
8	0,9	0,23	+3	+1	0	0	0	+4
9	1,0	0,26	+3	+2	+1	0	0	+6
Σ	3,9	1,00	-10 -7 +5 -12	-3 -2 -2 -7	-2 -1 -3	-1 -1 -2	-1	

Вычислим невязки условных уравнений

$$W_1 = +8320 + (-6944) + (-1368) = +8,$$

$$W_2 = +(-4694) + 5585 + (-905) = -14,$$

$$W_3 = +(-4694) + 11\ 652 + (-6944) = +14,$$

$$W_4 = 191\ 890 + (-905) + (-1368) + (-6125) - 183\ 506 = -14,$$

$$W_5 = 192\ 353 + 5580 + (-6944) + (-4694) + 5585 - 191\ 890 = -10.$$

1	1	2	3	4	5	6
1	—	—	—	+6	—	+6
2	—4	—	—	—	—	—4
3	—	—	—	—	+8	+8
4	—3	—	—	+4	—	+1
5	—	—1	—6	—	+7	0
6	—	—	—9	—	—	—9
7	—	+2	—	+5	—	+7
8	—4	—	—5	—	+4	—5
9	—	+1	—	—	+6	+7

Примечания к табл. 50—54.

В графе 1 знаком «плюс» выделены номера звеньев, входящих только в одно уравнение. Поправки в соответствующих строках не помечают пелязок других условных уравнений.

В последних приближениях, когда число миллиметров остаточной невязки меньше числа поправок, эти поправки в первую очередь следует вписать в звено, выделенное «знаком плюса».

Подставим найденные значения поправок v_i в условные уравнения поправок

$$\varphi_1 = v_2 + v_8 + v_4 + W_1 = -4 - 5 + 1 + 8 = 0,$$

$$\varphi_2 = v_5 + v_9 + v_7 + W_2 = 0 + 7 + 7 - 14 = 0.$$

$$\varphi_3 = v_5 + v_6 + v_8 + W_3 = 0 - 9 - 5 + 14 = 0,$$

$$\varphi_4 = v_7 + v_1 + v_1 + W_4 = +7 + 1 - 6 - 14 = 0.$$

$$\varphi_5 = v_3 + v_8 + v_5 + v_9 + W_5 = +8 - 5 + 0 + 7 - 10 = 0.$$

Полученные окончательные поправки в превышения отличаются от поправок в примере 1 § 69 в пределах 1,5 мм.

Вычислим высоты реперов

$$183,506 - (-6,125 + 6_{\text{мм}}) = 189,625 = H_{93},$$

$$192,353 + (+5,580 + 8_{\text{мм}}) = 197,941 = H_{12},$$

$$191,890 + (-0,905 + 7_{\text{мм}}) = 190,992 = H_{02},$$

$$191,890 + (+5,585 + 7_{\text{мм}}) = 186,298 = H_{86}.$$

Высоты также сошлись с теми, которые получены в примерах § 67 и 69, в пределах 1,5 мм.

Таким образом, мы убедились в практически достаточной строгости способа приближений Гаусса.

3. Способ Крюгера

Способ Крюгера, так же как и способ приближений Гаусса, является развитием двухгруппового способа Гаусса. Сущность способа Крюгера заключается в следующем.

Условные уравнения поправок делят на две группы, после чего выполняют уравнивание с учетом уравнений I группы, и результаты измерений исправляют первичными поправками. Далее, пользуясь

исправленными результатами измерений, вычисляют поправки II группы.

Получно с решением I группы нормальных уравнений находят при помощи дополнительных граф так называемые переходные множители. На этом заканчивается первый этап уравнивания, который отличается от первого этапа уравнивания двухгрупповым способом Гаусса только действиями по нахождению переходных множителей.

На втором этапе уравнивания вычисляют при помощи переходных множителей новые коэффициенты условных уравнений поправок II группы, позволяющие ограничиться решением уравнений только II группы и получить окончательные значения вторичных поправок.

Таким образом, в способе Крюгера вместо общей системы нормальных уравнений приходится решать две системы с меньшим числом уравнений и в отличие от способа приближений Гаусса только по одному разу.

Рассмотрим теорию способа Крюгера. Имеем пять условных уравнений поправок, которые разделены на две группы следующим образом.

I группа

$$[a_1 v] + W_1 = 0.$$

$$[a_2 v] + W_2 = 0,$$

$$[a_3 v] + W_3 = 0,$$

II группа

$$[\alpha_1 v] + W_4 = 0,$$

$$[\alpha_2 v] + W_5 = 0.$$

После первого этапа уравнивания и исправления результатов измерений можно записать, как указывалось выше, следующую систему условных уравнений поправок.

I группа

$$[a_1 v''] = 0.$$

$$[a_2 v''] = 0,$$

$$[a_3 v''] = 0.$$

II группа

$$[\alpha_1 v''] + W'_4 = 0,$$

$$[\alpha_2 v''] + W'_5 = 0,$$

где W'_4 и W'_5 вычисляют с исправленными результатами измерений.

Заменим теперь коэффициенты условных уравнений поправок II группы, т. е. α_{i1}, α_{i2} , новыми коэффициентами A_{i1}, A_{i2} ($i = 1, \dots, n$), подобравшими так, чтобы общая система нормальных уравнений распалась на две независимые системы. Очевидно, что коэффициенты A должны быть некоторыми линейными функциями коэффициентов a и α .

Допустим, что преобразования сделаны и получена следующая система условных уравнений:

I группа

$$[a_1 v''] = 0$$

$$[a_2 v''] = 0$$

$$[a_3 v''] = 0$$

II группа (преобразованная)

$$[A_1 v''] + W'_1 = 0$$

$$[A_2 v''] + W'_2 = 0$$

(VIII.13)

На основе системы условных уравнений (VIII.13) можно написать систему нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} [qa_1 a_1] \delta k_1 + [qa_1 a_2] \delta k_2 + [qa_1 a_3] \delta k_3 + [qa_1 A_1] k'_1 + [qa_1 A_2] k'_2 &= 0 \\ [qa_2 a_1] \delta k_1 + [qa_2 a_2] \delta k_2 + [qa_2 a_3] \delta k_3 + [qa_2 A_1] k'_1 + [qa_2 A_2] k'_2 &= 0 \\ [qa_3 a_1] \delta k_1 + [qa_3 a_2] \delta k_2 + [qa_3 a_3] \delta k_3 + [qa_3 A_1] k'_1 + [qa_3 A_2] k'_2 &= 0 \\ [qa_1 A_1] \delta k_1 + [qa_2 A_1] \delta k_2 + [qa_3 A_1] \delta k_3 + [qA_1 A_1] k'_1 + [qA_1 A_2] k'_2 + \\ &+ W'_1 = 0 \\ [qa_1 A_2] \delta k_1 + [qa_2 A_2] \delta k_2 + [qa_3 A_2] \delta k_3 + [qA_1 A_2] k'_1 + [qA_2 A_2] k'_2 + \\ &+ W'_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(VIII.14)}$$

Для того чтобы система (VIII.14) распалась на две независимые системы, поставим следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} [qa_1 A_1] &= 0 \\ [qa_2 A_1] &= 0 \\ [qa_3 A_1] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(VIII.15)}$$

$$\left. \begin{aligned} [qa_1 A_2] &= 0 \\ [qa_2 A_2] &= 0 \\ [qa_3 A_2] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(VIII.16)}$$

Отсюда видно, что для решения задачи требуется определить шесть переходных множителей, а в общем случае $r_1 \cdot r_2$ множителей, где r_1 — число уравнений в I группе, r_2 — во II группе.

Из шести переходных множителей три потребуются для вычисления коэффициентов A_{i1} и три — для коэффициентов A_{i2} ($i = 1, \dots, n$). Напишем для коэффициентов A_{i1} равенства

$$A_{i1} = a_{i1} \rho_{11} + a_{i2} \rho_{21} + a_{i3} \rho_{31} + \alpha_{i1} \quad (i = 1, \dots, n), \quad \text{(VIII.17)}$$

где ρ — переходные множители.

Умножив каждое из равенств (VIII.17) соответственно на $q_i a_{i1}$ и сложив их, получим

$$[qa_1 A_1] = [qa_1 a_1] \rho_{11} + [qa_1 a_2] \rho_{21} + [qa_1 a_3] \rho_{31} + [qa_1 \alpha_1].$$

Используя аналогично коэффициенты a_{i2} и a_{i3} , получаем

$$[qa_2 A_1] = [qa_2 a_1] \rho_{11} + [qa_2 a_2] \rho_{21} + [qa_2 a_3] \rho_{31} + [qa_2 \alpha_1],$$

$$[qa_3 A_1] = [qa_3 a_1] \rho_{11} + [qa_3 a_2] \rho_{21} + [qa_3 a_3] \rho_{31} + [qa_3 \alpha_1].$$

Принимая во внимание (VIII.15), составим систему нормальных уравнений для нахождения переходных множителей ρ_{11} , ρ_{21} и ρ_{31} для вычисления преобразованных коэффициентов A_{i1}

$$\left. \begin{aligned} [qa_1a_1] \rho_{11} + [qa_1a_2] \rho_{21} + [qa_1a_3] \rho_{31} + [qa_1\alpha_1] &= 0 \\ [qa_1a_2] \rho_{11} + [qa_2a_2] \rho_{21} + [qa_2a_3] \rho_{31} + [qa_2\alpha_1] &= 0 \\ [qa_1a_3] \rho_{11} + [qa_2a_3] \rho_{21} + [qa_3a_3] \rho_{31} + [qa_3\alpha_1] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.18})$$

Для коэффициентов A_{i2} напомним равенства

$$A_{i2} = a_{i1}\rho_{21} + a_{i2}\rho_{22} + a_{i3}\rho_{32} + \alpha_{i2} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{VIII.19})$$

и из них систему нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} [qa_1a_1] \rho_{12} + [qa_1a_2] \rho_{22} + [qa_1a_3] \rho_{32} + [qa_1\alpha_2] &= 0 \\ [qa_1a_2] \rho_{12} + [qa_2a_2] \rho_{22} + [qa_2a_3] \rho_{32} + [qa_2\alpha_2] &= 0 \\ [qa_1a_3] \rho_{12} + [qa_2a_3] \rho_{22} + [qa_3a_3] \rho_{32} + [qa_3\alpha_2] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.20})$$

Найдя из решения независимых систем (VIII.18) и (VIII.20) соответствующие переходные множители и вычислив при помощи равенств (VIII.17) и (VIII.19) преобразованные коэффициенты A , можем написать с учетом условий (VIII.15) и (VIII.16) следующие две независимые системы нормальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [qa_1a_1] \delta k_1 + [qa_1a_2] \delta k_2 + [qa_1a_3] \delta k_3 &= 0 \\ [qa_1a_2] \delta k_1 + [qa_2a_2] \delta k_2 + [qa_2a_3] \delta k_3 &= 0 \\ [qa_1a_3] \delta k_1 + [qa_2a_3] \delta k_2 + [qa_3a_3] \delta k_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.21})$$

и

$$\left. \begin{aligned} [qA_1A_1] k'_4 + [qA_1A_2] k'_5 + W'_4 &= 0 \\ [qA_1A_2] k'_4 + [qA_2A_2] k'_5 + W'_5 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.22})$$

Так как однородная система уравнений (VIII.21) имеет очевидное решение

$$\delta k_1 = \delta k_2 = \delta k_3 = 0,$$

то на втором этапе уравнивания придется решать только систему уравнений (VIII.22), что доказывает строгость способа.

Рассматривая системы уравнений (VIII.18) и (VIII.20), видно, что они отличаются от системы нормальных уравнений корректной I группы только свободными членами. Поэтому системы переходных множителей ρ_{11} , ρ_{21} , ρ_{31} и ρ_{12} , ρ_{22} , ρ_{32} можно вычислить при помощи двух дополнительных граф и двух «горок» (в общем случае при помощи r_2 дополнительных граф и «горок») попутно с решением нормальных уравнений корректной I группы. Отсюда ясно, что способ Крюгера выгодно применять лишь тогда, когда I группа уравнений решается достаточно просто. Особенно этот способ выгоден тогда, когда условные уравнения I группы независимы между собой.

Порядок уравнивания по способу Крюгера заключается в следующем:

1) решают I группу условных уравнений, получают первоначальные поправки v' и исправляют результаты измерений; попутно решением нормальных уравнений I группы находят при помощи дополнительных граф переходные множители;

2) с исправленными результатами измерений вычисляют поправки W' II группы; при помощи равенств (VIII.17) и (VIII.19) вычисляют преобразованные коэффициенты условных уравнений II группы и затем коэффициенты нормальных уравнений (VIII.22);

3) из решения системы уравнений (VIII.22) находят коррелаты и затем вторичные поправки v'' ;

4) окончательные поправки v получают как суммы

$$v = v' + v''.$$

Заметим еще, что обратный вес функций уравненных величин в способе Крюгера вычисляют по формуле *

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} &= \left\{ [qFF] - \frac{[qa_1F]}{[qa_1a_1]} [qa_1F] - \frac{[qa_2F \cdot 1]}{[qa_2a_2 \cdot 1]} [qa_2F \cdot 1] - \dots \right\} + \\ &+ \left\{ - \frac{[qA_1F]}{[qA_1A_1]} [qA_1F] - \frac{[qA_2F \cdot 1]}{[qA_2A_2 \cdot 1]} [qA_2F \cdot 1] - \dots \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{P_F} \right)' + \left(\frac{1}{P_F} \right)'' \end{aligned} \quad (\text{VIII.23})$$

где выражение, заключенное в первые фигурные скобки, получают при помощи дополнительных граф F' в процессе решения уравнений I группы, а выражение, заключенное во вторые фигурные скобки, — при решении уравнений II группы.

При решении любой из групп, в свою очередь, можно применять двухгрупповой способ Крюгера. Поэтому способ Крюгера, вообще говоря, следует считать не двухгрупповым, а многогрупповым. Проиллюстрируем способ Крюгера примером.

Пример. Решим пример 1 § 69. Решение начнем с таблицы коэффициентов (табл. 56), в которой вычислим коэффициенты II группы. В первую группу отнесем три уравнения, во вторую — два. Обозначим $a_{i4} = a_{i1}$ и $a_{i5} = a_{i2}$.

В табл. 57 решены способом Краковяков нормальные уравнения I группы и попутно получены переходные множители для вычисления преобразованных коэффициентов условных уравнений II группы.

Контроль по суммарному нормальному уравнению I группы

$$4,0 \cdot (-7,18) + 3,6 \cdot 6,20 + 1,8 \cdot (-0,90) + 8,000 = -0,02.$$

Строки ρ_{i1} и ρ_{i2} вычислены при помощи граф $[a_j a_1]$ и $[a_j a_2]$, используя их как графу W при вычислении коррелат k^0 .

Контроль строки ρ_{i1}

$$4,0 \cdot (-0,60) + 3,6 \cdot 0,06 + 1,8 \cdot 0,22 - 0,400 = -0,03.$$

Контроль строки ρ_{i2}

$$4,0 \cdot 0,05 + 3,6 \cdot (-0,14) + 1,8 \cdot (0,45) + 1,100 = -0,01.$$

Далее обращаемся к табл. 56, в которой вычисляем первичные поправки v' и $[rv'v'] = -[k^0 W]$. При помощи этой же таблицы вычисляем преобразованные

* В формуле (VIII.23) применены обозначения Гаусса: $[qa_2F \cdot 1] = L_2^{(1)}$, $[qa_2a_2 \cdot 1] = N_{22}^{(1)}$ и т. д.

Таблица 58

Пом. из- мерения	$\frac{1}{q}$	$a_1 - 7,18$	$a_1 + 6,20$	$a_2 - 0,90$	$v', \text{ мм}$	F	s'	α_1	α_2	α	$\frac{v'}{V_q}$
1	0,8				0		0				
2	1,1			+1	-1,0	+1	+2		+1	+1	0
3	0,9				0		0		+1	+3	-0,95
4	0,7			-1	+0,6		-1	-1	-1	-2	0
5	1,1	+1	+1		-1,1		+2			+1	+0,72
6	1,4		-1		-8,7	-1	-2	+1		+2	-1,65
7	0,8	-1			+5,7		-1			-1	-7,35
8	0,9		+1	-1	+6,4		0			-1	+6,37
9	1,0	+1			-7,2		+1	+1		0	+6,74
										+2	-7,20
$W = +14$		-14	+8		$-194,5 = [k^\circ W]$					$[pv'v'] = 194,4$	
$[qa_1]$		2,9	+1,1	0		0	+4,0	+1,0	0	+5,0	
$[qa_2]$			3,4	-0,9		+1,4	+5,0	-1,4	0	+3,6	
$[qa_3]$				2,7		+1,1	+2,9	0	+1,1	+4,0	
$[qF]$						2,5	+5,0				

коэффициенты A , которые выписывают в табл. 58. Для вычисления коэффициентов A в заголовки граф a выписывали карандашом переходные множители.

Контроль по $[pv'v']$ соблюдается хорошо.

Вычисление свободных членов W' :

$$x_1 + v'_1 = 6125 + 0 = 6125,0;$$

$$x_2 + v'_2 = 8320 - 1,0 = 8319,0;$$

$$x_3 + v'_3 = 5580 + 0 = 5580,0;$$

$$x_4 + v'_4 = 1368 + 0,6 = 1368,6;$$

$$x_5 + v'_5 = 4694 - 1,1 = 4692,9;$$

$$x_6 + v'_6 = 11652 - 8,7 = 11643,3;$$

$$x_7 + v'_7 = -905 + 5,7 = -899,3;$$

$$x_8 + v'_8 = 6944 + 6,4 = 6950,4;$$

$$x_9 + v'_9 = -5585 - 7,2 = -5592,2;$$

$$W'_4 = 191\,890 - 5592,2 + 11643,3 - 5580,0 - 192\,353 = +8,1 \text{ мм};$$

$$W'_6 = 183\,506 + 6125,0 + 8319,0 - 5580,0 - 192\,353 = +17,0 \text{ мм}.$$

Таблица 57

	k_1^o	k_2^o	k_3^o	W	F	$s' = s' + W$	$[qa f_{z1}]_1^3$	$[qa f_{z2}]_1^3$	
	2.9	-1.1 3.4	0 +0.9 2.7	-14.0 +14.0 -8.0	0 -1.4 -1.1 2.5	-18.0 +9.0 -10.9	-1.0 +1.4 0	0 0 -1.1	-19.0 +10.4 -12.0
	1.703	-0.646 1.727	0 +0.521 1.558	-8.221 +11.182 -1.395	0 -0.811 -0.977	-10.570 +9.165 -3.930	-0.587 +1.030 +0.344	0 0 -0.706	-11.157 +10.195 -4.292
Неизвестные	-7.18	+6.20	$[pv'v']$ -0.90	= 194.6	0.89 =	$\left(\frac{1}{P_F}\right)'$			
ρ_j	-0.60	+0.66	+0.22						
ρ_{j_2}	+0.05	-0.14	-0.45						

Таблица 58

№ вычисления	q	A_1 +0,28	A_2 -7,53	v^o , мм	F		$\frac{v^o}{1/q}$	v'	$v^o + v'$
1	0,8	0	+1,00	-6,0		+1,00	-6,71	0	-6,0
2	1,1	+0,22	+0,55	-4,5	+1,00	+1,77	-4,28	-1,0	-5,5
3	0,9	-1,00	-1,00	+6,5		-2,00	+6,86	0	+6,5
4	0,7	-0,22	+0,45	-2,4		+0,23	-2,87	+0,6	-1,8
5	1,1	+0,06	-0,09	+0,8		-0,03	+0,76	-1,1	-0,3
6	1,4	+0,34	+0,14	-1,3	-1,00	-0,52	-1,10	-8,7	-10,0
7	0,8	+0,60	-0,05	+0,4		+0,55	+0,45	+5,7	+6,1
8	0,9	+0,44	+0,31	-2,0		+0,75	-2,11	+6,4	+4,4
9	1,0	+0,40	+0,05	-0,3		+0,45	-0,30	-7,2	-7,5
	$W' =$	+8,1	+17,0	-125,7	$= [k'W']$	$[pv^ov']$	$= -125,2$		
	$[qa_1]$	1,78	+1,14		-0,23	+2,69			
	$[qa_2]$		2,30		+0,41	+3,85			

Контроль вычисления коэффициентов А

$$[qa_1A_1] = -0,01, \quad [qa_1A_2] = -0,01,$$

$$[qa_2A_1] = -0,01, \quad [qa_2A_2] = -0,02,$$

$$[qa_3A_1] = 0, \quad [qa_3A_2] = +0,01.$$

Преобразованные нормальные уравнения решены в табл. 59 алгоритмом Гаусса на логарифмической линейке.

Таблица 59

Уравнения	k'_4	k'_5	w'	F'	s
N_1	1,78	+1,14	+8,10	-0,23	+10,79
ε_1		-0,640	-4,540	+0,129	-6,051
N_2		2,30	+17,00	+0,41	+20,85
$N_2^{(1)}$		1,57	+11,82	+0,56	+13,95
ε_2			-7,530	-0,357	-8,887
Неизвестные	+0,28	-7,53			
$-[pv''v''] =$			125,8	$-0,23 = \left(\frac{1}{F_F}\right)''$	

Контроль по суммарному уравнению

$$2,92 \cdot 0,28 + 3,44 \cdot (-7,53) + 25,10 = +0,01.$$

Имеется еще контроль по равенству $[pv'v''] = 0$. Проверим это равенство, пользуясь табл. 56 и 58,

$$[pv'v''] = \left[\frac{v'}{V'q} \cdot \frac{v''}{V''q} \right] = +0,09.$$

Согласие вполне удовлетворительное, учитывая округления величин v' и v'' . Если $[pv'v''] = 0$, то, очевидно, $[pv^2] = [pv'v'] + [pv''v'']$. Наиболее точно значение $[pv^2]$ получается как $-[kW]$. Поэтому вычислим $[pv^2]$ по формуле

$$[pv^2] = -[k^0W]_I - [k'W']_{II} = 194,5 + 125,7 = 320,2.$$

В табл. 45 это значение равно 320,4.

Все поправки v совпадают с данными § 69 в пределах 0,1 мм.

В заключение вычислим обратный вес функции F по данным табл. 57 и 59 см. формулу (VIII.23))

$$\frac{1}{P_F} = \left(\frac{1}{P_F} \right)' + \left(\frac{1}{P_F} \right)'' = 0,89 - 0,23 = 0,66.$$

Обратный вес получен в точности такой же, как и в табл. 46.

4. Способ Больца

Этот способ можно рассматривать как некоторое развитие способа Крюгера, позволяющего при помощи обращения матриц коэффициентов нормальных уравнений присоединять для совместной обработки вновь выполненные измерения к ранее уравненным. В частности, можно присоединять новые геодезические сети к ранее уравненным. Сущность способа Больца поясним на простом примере. Пусть измеренные величины связаны условными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} [a_1 v] + W_1 &= 0 \\ [a_2 v] + W_2 &= 0 \\ [a_3 v] + W_3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.24})$$

При этом известно, что число измеренных величин, подлежащих совместному уравнению с имеющимися, будет увеличиваться, в результате чего возникнут новые условные уравнения, связывающие между собой старые и новые измерения, причем это может произойти несколько раз.

Учитывая необходимость последующих переуравнений, можно поступить следующим образом.

При первом уравнении, учитывающем только условия I группы, т. е. (VIII.24), вычисляют обратную матрицу нормальных уравнений коррелят этой группы.

Затем вычисляют корреляты I группы по известным формулам

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -Q_{11}W_1 - Q_{12}W_2 - Q_{13}W_3 \\ k_2 &= -Q_{21}W_1 - Q_{22}W_2 - Q_{23}W_3 \\ k_3 &= -Q_{31}W_1 - Q_{32}W_2 - Q_{33}W_3 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VIII.25})$$

где Q — элементы обратной матрицы.

Если теперь возникнут новые условные уравнения

$$\left. \begin{aligned} [a_4 v] + W_4 &= 0 \\ [a_5 v] + W_5 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VIII.26})$$

то, воспользовавшись полученными ранее элементами обратной матрицы, можно вычислять переходные множители крюгеровских преобразований коэффициентов новых условных уравнений по формулам

$$\left. \begin{aligned} \rho_{14} &= -Q_{11}[a_1 a_4] - Q_{12}[a_2 a_4] - Q_{13}[a_3 a_4] \\ \rho_{24} &= -Q_{21}[a_1 a_4] - Q_{22}[a_2 a_4] - Q_{23}[a_3 a_4] \\ \rho_{34} &= -Q_{31}[a_1 a_4] - Q_{32}[a_2 a_4] - Q_{33}[a_3 a_4] \\ \rho_{15} &= -Q_{11}[a_1 a_5] - Q_{12}[a_2 a_5] - Q_{13}[a_3 a_5] \\ \rho_{25} &= -Q_{21}[a_1 a_5] - Q_{22}[a_2 a_5] - Q_{23}[a_3 a_5] \\ \rho_{35} &= -Q_{31}[a_1 a_5] - Q_{32}[a_2 a_5] - Q_{33}[a_3 a_5] \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.27})$$

Решая затем очередную систему нормальных уравнений, находят ее обратную матрицу, а затем корреляты

$$\left. \begin{aligned} k_6 &= -Q_{66}M_6^* - Q_{67}M_7^* \\ k_7 &= -Q_{67}M_6^* - Q_{77}M_7^* \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.33})$$

и выполняют последующие преобразования.

Значения поправок к измеренным величинам можно вычислять по формуле

$$v_i = a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + a_{i3}k_3 + \dots + A_{i5}k_5 + A'_{i6}k_6 + A'_{i7}k_7 + \dots \quad (i = 1, \dots, n).$$

Подставляя в последнюю формулу значения коррелятов из выражений (VII.25), (VIII.29) и (VIII.33), получаем формулы для поправок в виде линейных разложений по свободным членам условных уравнений.

Для учета вновь возникающих условных уравнений (в связи с новыми измерениями) их преобразуют, пользуясь элементами обратных матриц ранее решенных нормальных уравнений. Затем в процессе решения новой системы нормальных уравнений получают элементы ее обратной матрицы. После этого вычисляют дополнительные члены разложения поправок v по свободным членам.

Способ Больца может оказаться выгодным лишь в некоторых частных и редких случаях геодезической практики.

§ 71. КОМБИНИРОВАННЫЕ СПОСОБЫ УРАВНИВАНИЯ

1. Параметрический способ с избыточными неизвестными

В некоторых случаях удобно выразить измеренные величины не только через выбранные необходимые неизвестные, но и через избыточные неизвестные. Избыточные неизвестные связаны с необходимыми неизвестными математическими соотношениями. В таких случаях для уравнивания можно применить параметрический способ с избыточными неизвестными, который можно рассматривать как видоизменение обычного параметрического способа.

Рассмотрим теорию этого способа. Пусть в качестве неизвестных выбраны величины, связанные между собой тремя независимыми одно от другого уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \varphi_A(t_1, \dots, t_k) &= 0 \\ \varphi_B(t_1, \dots, t_k) &= 0 \\ \varphi_C(t_1, \dots, t_k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.34})$$

При этом уравненные значения измеренных величин $x'_1, \dots, x'_n$ выражают в виде функций неизвестных

$$x'_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i = 1, \dots, n)^* \quad (\text{VIII.35})$$

* Каждое избыточное неизвестное доставит одно независимое условное уравнение вида (VIII.34).

** Представляются очевидными следующие неравенства в этом способе: $n > k > n - r$, т. е. число неизвестных должно быть меньше числа всех измерений и больше числа необходимых величин; r — число избыточно измеренных величин.

Выбрав приближенные значения неизвестных $t_1^0, \dots, t_k^0$, получим систему параметрических уравнений поправок

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (\text{VIII.36})$$

в которых неизвестные τ связаны уравнениями

$$\left. \begin{aligned} [A\tau] + W_A &= 0 \\ [B\tau] + W_B &= 0 \\ [C\tau] + W_C &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (VII.37)$$

Разумеется, число необходимых величин здесь равно $k - 3$

В рівняннях (VIII.36) и (VIII.37) имеются в виду следующие обозначения:

$$t=t_0+\tau; \quad a_{i1}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_1}\right)_0; \quad a_{i2}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_2}\right)_0, \dots,$$

$$a_{ik} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_k} \right)_0;$$

$$l_i = f_i^*(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i; \quad x_i - \text{измеренное значение величины};$$

$$A_l = \left(\frac{\partial \varphi_A}{\partial t_l} \right)_0, \quad B_l = \left(\frac{\partial \varphi_B}{\partial t_l} \right)_0, \quad C_l = \left(\frac{\partial \varphi_C}{\partial t_l} \right)_0.$$

$$W_A = \varphi_A(t_1^0, \dots, t_k^0), \quad W_B = \varphi_B(t_1^0, \dots, t_k^0),$$

$$W_C = \varphi_C (i_1^0, \dots, i_k^0).$$

Функція Лагранжа прилет від

$$\Phi(\tau_1, \dots, \tau_k) = [p(a_1\tau_1 + a_2\tau_2 + \dots + a_k\tau_k + l)^2] + \\ + 2k_A([A\tau] + W_A) + 2k_B([B\tau] + W_B) + 2k_C([C\tau] + W_C),$$

где k — произвольные множители,

Возьмем частные производные функции Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_1} = 2 [pa_{1r}] + 2k_A A_1 + 2k_B B_1 + 2k_C C_1,$$

.....

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_k} = 2 [pa_{kr}] + 2k_A A_k + 2k_B B_k + 2k_C C_k.$$

Так как частные производные функции Лагранжа должны быть равны нулю, то после сокращения на 2 получим

$$\left. \begin{aligned} [pa_1v] + A_1k_A + B_1k_B + C_1k_C &= 0 \\ [pa_2v] + A_2k_A + B_2k_B + C_2k_C &= 0 \\ . &. \\ [pa_kv] + A_kk_A + B_kk_B + C_kk_C &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.38})$$

Подставив в равенства (VIII.38) вместо v правые части уравнений поправок (VIII.36) и присоединив к полученным равенствам

Имея в виду (VIII.37), получаем

$$[pa_1l] \tau_1 + [pa_2l] \tau_2 + \dots + [pa_kl] \tau_k + W_A^k A + W_B^k B + W_C^k C + [pll] = [pr^2]. \quad (\text{VIII.40})$$

Равенство (VIII.40) может иметь некоторое практическое значение как контрольная формула.

Присоединим это равенство к системе уравнений (VIII.39) в качестве последнего уравнения. Нетрудно видеть, что коэффициенты последнего уравнения по-прежнему свободным членам в системе (VIII.39), сохраняют свойство симметрии системы нормальных уравнений. Поэтому после исключения всех неизвестных τ и k будет получено

$$[pr^2] = [pll]^{(k+3)},$$

что и требовалось доказать (в общем случае

$$[pr^2] = [pll]^{(k+s)}.$$

Обратный вес функции в рассматриваемом способе может быть найден в дополнительной графе по тому же правилу, по которому его находят в параметрическом способе. Напомним это правило: в дополнительной графе F схемы решения нормальных уравнений выписывают частные производные F_i со знаком минус (F_i в строке N_i); далее в этой графе выполняют такие же преобразования, как в графе свободных членов, и, наконец, обратный вес функции (со знаком минус) получается как сумма произведений чисел элиминационных строк на вышестоящие числа графы F . Покажем это.

Используя элементы обратной матрицы, все неизвестные τ можем выразить в виде следующих линейных функций свободных членов:

$$\tau_r = -[pa_1l] Q_{r1} - [pa_2l] Q_{r2} - \dots - [pa_kl] Q_{rk} - W_A Q_{r(k+1)} - W_B Q_{r(k+2)} - W_C Q_{r(k+3)}. \quad (\text{VIII.41})$$

Группируя слагаемые по свободным членам уравнений поправок, получаем

$$\tau_r = -[\alpha_1l] - W_A Q_{r(k+1)} - W_B Q_{r(k+2)} - W_C Q_{r(k+3)}, \quad (\text{VIII.42})$$

где

$$\alpha_{rj} = p_l (a_{l1} Q_{r1} + a_{l2} Q_{r2} + \dots + a_{lk} Q_{rk}). \quad (\text{VIII.43})$$

Покажем, что в данном способе, как и в обычном параметрическом, справедливы равенства

$$\left[\frac{\alpha_r \alpha_j}{p} \right] = Q_{rj}, \quad (\text{VIII.44})$$

в частности,

$$\left[\frac{\alpha_r \alpha_r}{p} \right] = Q_{rr}. \quad (\text{VIII.45})$$

Умножая равенства (VIII.43) на $\frac{\alpha_{lj}}{p_l}$ и суммируя их после этого, получаем

$$\left[\frac{\alpha_r \alpha_j}{p} \right] = [\alpha_1 \alpha_j] Q_{r1} + \dots + [\alpha_j \alpha_j] Q_{rj} + \dots + [\alpha_k \alpha_j] Q_{rk}. \quad (\text{VIII.46})$$

Найдем суммы $[\alpha_1 \alpha_j], \dots, [\alpha_k \alpha_j]$, для чего умножим поочередно на $a_{1l}, \dots, a_{kl}$ равенства

$$\alpha_{jl} = (a_{l1} Q_{j1} + \dots + a_{lk} Q_{jk}) p_l,$$

суммируя их каждый раз после умножения,

$$\left. \begin{aligned} [a_1 \alpha_j] &= [p a_1 a_1] Q_{j1} + \dots + [p a_1 a_j] Q_{jj} + \dots + [p a_1 a_k] Q_{jk} \\ [a_j \alpha_j] &= [p a_j a_1] Q_{j1} + \dots + [p a_j a_j] Q_{jj} + \dots + [p a_j a_k] Q_{jk} \\ [a_k \alpha_j] &= [p a_k a_1] Q_{j1} + \dots + [p a_k a_j] Q_{jj} + \dots + [p a_k a_k] Q_{jk} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.47})$$

Принимая во внимание нормальные уравнения для элементов обратной матрицы, которые легко получить из системы (VIII.49), можно написать *

$$\begin{aligned} [a_1 \alpha_j] &= -A_1 Q_{j(k+1)} - B_j Q_{j(k+2)} - C_1 Q_{j(k+3)}; \\ [a_j \alpha_j] &= 1 - A_j Q_{j(k+1)} - B_j Q_{j(k+2)} - C_j Q_{j(k+3)}; \\ [a_k \alpha_j] &= A_k Q_{j(k+1)} - B_k Q_{j(k+2)} - C_k Q_{j(k+3)}. \end{aligned}$$

Подставляя в равенство (VIII.46) вместо $[a_1 \alpha_j], \dots, [a_j \alpha_j], \dots, [a_k \alpha_j]$ правые части равенств (VIII.47) и группируя соответственно члены, получаем

$$\left[\frac{\alpha_r \alpha_j}{p} \right] = Q_{rj} - Q_{j(k+1)} (A_1 Q_{r1} + \dots + A_r Q_{rk}) - Q_{j(k+2)} (B_1 Q_{r1} + \dots + B_k Q_{rk}) - Q_{j(k+3)} (C_1 Q_{r1} + \dots + C_k Q_{rk}).$$

Но если принять во внимание последние три нормальных уравнения системы для элементов Q_{ri} ($i = 1, \dots, k+3$), то

$$\begin{aligned} A_1 Q_{r1} + \dots + A_k Q_{rk} &= 0; \\ B_1 Q_{r1} + \dots + B_k Q_{rk} &= 0; \\ C_1 Q_{r1} + \dots + C_k Q_{rk} &= 0. \end{aligned}$$

поэтому

$$\left[\frac{\alpha_r \alpha_j}{p} \right] = Q_{rj},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что и в данном способе веса неизвестных равны соответствующим квадратичным весовым коэффициентам, т. е.

$$\frac{1}{P_r} = \left[\frac{\alpha_r \alpha_r}{p} \right] = Q_{rr},$$

если принять во внимание выражение (VIII.42) и учесть, что значения W_A, W_B и W_C не являются функциями результатов измерений.

Пусть дана функция неизвестных $F(t_1, \dots, t_k)$, обратный вес которой требуется найти.

Приводя функцию к линейному виду, напишем

$$F(t_1, \dots, t_k) = F_0 + F_1 t_1 + \dots + F_k t_k,$$

где

$$F_0 = F(t_1^0, \dots, t_k^0) \text{ и } F_l = \left(\frac{\partial F}{\partial t_l} \right)_0.$$

Имея в виду равенства (VIII.42), можно написать

$$F(t_1, \dots, t_k) = F_0 - F_1 [\alpha_1 t] - \dots - F_k [\alpha_k t] + R,$$

* На основе известного соотношения $Q\Delta = E$, где E — единичная матрица.

Проще станет и структура частных производных.

Напишем условное уравнение, связывающее выбранные неизвестные t ,

$$t_1 + t_2 + t_3 - 180^\circ = 0.$$

Если положить

$$t_1^0 = x_1, \quad t_2^0 = x_2, \quad t_3^0 = x_3,$$

то

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0;$$

$$l_1 = C \frac{\sin x_1}{\sin x_3} - x_3;$$

$$l_3 = C \frac{\sin x_2}{\sin x_3} - x_3.$$

Нормальные уравнения примут вид

$$[pa_1a_1] \tau_1 + [pa_1a_2] \tau_2 + [pa_1a_3] \tau_3 + k + [pa_1l] = 0,$$

$$[pa_1a_2] \tau_1 + [pa_1a_2] \tau_2 + [pa_2a_3] \tau_3 + k + [pa_2l] = 0,$$

$$[pa_1a_3] \tau_1 + [pa_2a_3] \tau_2 + [pa_3a_3] \tau_3 + k + [pa_3l] = 0,$$

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + W = 0,$$

где W — невязка треугольника.

2. Способ Бесселя

Рассмотрим теорию способа Ф. Бесселя, возникшего в связи с параметрическим способом с избыточными неизвестными.

Способ Бесселя был предложен для решения нормальных уравнений. Сущность этого способа заключается в следующем.

Систему нормальных уравнений разбивают на две группы, после чего I группу решают отдельно, не учитывая в ней неизвестные II группы. Получив приближенные значения неизвестных I группы, подставляют их в уравнения II группы, исправляя таким образом в них свободные члены. Попутно с вычислением приближенных значений неизвестных I группы находят элементы обратной матрицы этой группы нормальных уравнений, т. е. величины Q .

После указанных действий можно получить новую систему нормальных уравнений с поправками к приближенным значениям неизвестных I группы и неизвестными II группы, причем в последней системе уравнения I группы будут без свободных членов.

Далее при помощи найденных элементов Q исключают в новой системе поправки к неизвестным I группы и получают преобразованную систему нормальных уравнений с неизвестными только II группы.

Решая последнюю систему уравнений, находят неизвестные II группы и, наконец, при помощи обратной матрицы вычисляют поправки к приближенным значениям неизвестных I группы.

Получим формулы вычислений по способу Бесселя на примере пяти уравнений, которые разобьем на две группы с тремя и двумя уравнениями.

Пусть имеем

$$\left. \begin{aligned} [aa] t_1 + [ab] t_2 + [ac] t_3 + [ad] t_4 + [ae] t_5 + W_1 &= 0 \\ [ab] t_1 + [bb] t_2 + [bc] t_3 + [bd] t_4 + [be] t_5 + W_2 &= 0 \\ [ac] t_1 + [bc] t_2 + [cc] t_3 + [cd] t_4 + [ce] t_5 + W_3 &= 0 \\ [ad] t_1 + [bd] t_2 + [cd] t_3 + [dd] t_4 + [de] t_5 + W_4 &= 0 \\ [ae] t_1 + [be] t_2 + [ce] t_3 + [de] t_4 + [ee] t_5 + W_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.51}^*)$$

* В уравнениях (VIII.51) имеются в виду следующие обозначения $a_{ij} = a_i; a_{i2} = b_i; a_{i3} = c_i; a_{i4} = d_i; a_{i5} = e_i$.

Решив уравнения

$$\left. \begin{aligned} [aa] t_1^0 + [ab] t_2^0 + [ac] t_3^0 + W_1 &= 0 \\ [ab] t_1^0 + [bb] t_2^0 + [bc] t_3^0 + W_2 &= 0 \\ [ac] t_1^0 + [bc] t_2^0 + [cc] t_3^0 + W_3 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VIII.52})$$

получим приближенные значения неизвестных t_1^0, t_2^0, t_3^0 и попутно — коэффициенты $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{22}, Q_{23}, Q_{33}$.

Обозначая теперь

$$t_i = t_i^0 + \delta t_i \quad (\text{VIII.53})$$

и принимая во внимание уравнения (VIII.52), получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} [aa] \delta t_1 + [ab] \delta t_2 + [ac] \delta t_3 + [ad] t_4 + [ae] t_5 &= 0 \\ [ab] \delta t_1 + [bb] \delta t_2 + [bc] \delta t_3 + [bd] t_4 + [be] t_5 &= 0 \\ [ac] \delta t_1 + [bc] \delta t_2 + [cc] \delta t_3 + [cd] t_4 + [ce] t_5 &= 0 \\ [ad] \delta t_1 + [bd] \delta t_2 + [cd] \delta t_3 + [dd] t_4 + [de] t_5 + W'_4 &= 0 \\ [ae] \delta t_1 + [be] \delta t_2 + [ce] \delta t_3 + [de] t_4 + [ee] t_5 + W'_5 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VIII.54})$$

где

$$\left. \begin{aligned} W'_4 &= W_4 + [ad] t_1^0 + [bd] t_2^0 + [cd] t_3^0 \\ W'_5 &= W_5 + [ae] t_1^0 + [be] t_2^0 + [ce] t_3^0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.55})$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} [ad] t_4 + [ae] t_5 &= L_1 \\ [bd] t_4 + [be] t_5 &= L_2 \\ [cd] t_4 + [ce] t_5 &= L_3 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.56})$$

Тогда первые три уравнения системы (VIII.54) можно переписать так:

$$\left. \begin{aligned} [aa] \delta t_1 + [ab] \delta t_2 + [ac] \delta t_3 + L_1 &= 0 \\ [ab] \delta t_1 + [bb] \delta t_2 + [bc] \delta t_3 + L_2 &= 0 \\ [ac] \delta t_1 + [bc] \delta t_2 + [cc] \delta t_3 + L_3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.57})$$

Теперь можно написать

$$\left. \begin{aligned} \delta t_1 &= -Q_{11} L_1 - Q_{12} L_2 - Q_{13} L_3 \\ \delta t_2 &= -Q_{21} L_1 - Q_{22} L_2 - Q_{23} L_3 \\ \delta t_3 &= -Q_{31} L_1 - Q_{32} L_2 - Q_{33} L_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.58})$$

или, принимая во внимание обозначения (VIII.56),

$$\left. \begin{aligned} \delta t_1 &= -Q_{11} [ad] t_4 - Q_{11} [ae] t_5 - Q_{12} [bd] t_4 - Q_{12} [be] t_5 - \\ &\quad - Q_{13} [cd] t_4 - Q_{13} [ce] t_5 = -([ad] Q_{11} + [bd] Q_{12} + [cd] Q_{13}) t_4 - \\ &\quad - ([ae] Q_{11} + [be] Q_{12} + [ce] Q_{13}) t_5 \\ \delta t_2 &= -([ad] Q_{21} + [bd] Q_{22} + [cd] Q_{23}) t_4 - ([ae] Q_{21} + [be] Q_{22} + [ce] Q_{23}) t_5 \\ \delta t_3 &= -([ad] Q_{31} + [bd] Q_{32} + [cd] Q_{33}) t_4 - ([ae] Q_{31} + [be] Q_{32} + [ce] Q_{33}) t_5 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.59})$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} -([ad] Q_{11} + [bd] Q_{12} + [cd] Q_{13}) &= A_1 \\ -([ae] Q_{11} + [be] Q_{12} + [ce] Q_{13}) &= B_1 \\ -([ad] Q_{21} + [bd] Q_{22} + [cd] Q_{23}) &= A_2 \\ -([ae] Q_{21} + [be] Q_{22} + [ce] Q_{23}) &= B_2 \\ -([ad] Q_{31} + [bd] Q_{32} + [cd] Q_{33}) &= A_3 \\ -([ae] Q_{31} + [be] Q_{32} + [ce] Q_{33}) &= B_3 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VIII.60})$$

равенства (VIII.58) можно переписать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta t_1 &= A_1 t_1 + B_1 t_5 \\ \delta t_2 &= A_2 t_1 + B_2 t_5 \\ \delta t_3 &= A_3 t_1 + B_3 t_5 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.61})$$

Подставим значения δt_1 , δt_2 и δt_3 , определяемые равенствами (VIII.61), в последние два уравнения системы (VIII.54)

$$\begin{aligned} [ad] A_1 t_1 + [ad] B_1 t_5 + [bd] A_2 t_1 + [bd] B_2 t_5 + [cd] A_3 t_1 + \\ + [cd] B_3 t_5 + [de] t_1 + [de] t_5 + W'_4 = 0, \\ [ae] A_1 t_1 + [ae] B_1 t_5 + [be] A_2 t_1 + [be] B_2 t_5 + \\ + [ce] A_3 t_1 + [ce] B_3 t_5 + [de] t_1 + [de] t_5 + W'_5 = 0. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов получим

$$\left. \begin{aligned} ([dd] + [ad] A_1 + [bd] A_2 + [cd] A_3) t_1 + ([de] + \\ + [ad] B_1 + [bd] B_2 + [cd] B_3) t_5 + W'_4 = 0 \\ ([de] + [ae] A_1 + [be] A_2 + [ce] A_3) t_1 + ([de] + \\ + [ae] B_1 + [be] B_2 + [ce] B_3) t_5 + W'_5 = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.62})$$

Последняя система уравнений должна быть эквивалентна преобразованной системе

$$\begin{aligned} N_{44}^{(3)} t_4 + N_{45}^{(3)} t_5 + L_4^{(3)} &= 0, \\ N_{45}^{(3)} t_4 + N_{55}^{(3)} t_5 + L_5^{(3)} &= 0, \end{aligned}$$

которая может быть получена после исключения из первоначальной системы (VII.51) неизвестных t_1 , t_2 и t_3 . Поэтому должно соблюдаться равенство

$$[de] + [ad] B_1 + [bd] B_2 + [cd] B_3 = [de] + [ae] A_1 + [be] A_2 + [ce] A_3. \quad (\text{VIII.63})$$

Последнее равенство можно использовать для контроля правильности вычислений. Справедливость этого равенства можно проверить и путем подстановки в него значений A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 и B_3 , учитывая при этом свойство симметричности неквадратичных коэффициентов.

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} [dd] + [ad] A_1 + [bd] A_2 + [cd] A_3 &= C \\ [de] + [ad] B_1 + [bd] B_2 + [cd] B_3 &= [de] + [ae] A_1 + \\ &+ [be] A_2 + [ce] A_3 = D \\ [de] + [ae] B_1 + [be] B_2 + [ce] B_3 &= E \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VIII.64})$$

получаем, наконец,

$$\left. \begin{aligned} Ct_4 + Dt_5 + W'_4 &= 0 \\ Dt_4 + Et_5 + W'_5 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.65})$$

($r - 2$) условных уравнений, включающих только измеренные величины, и задача будет сведена к обычному корреляционному способу. Однако такое решение не всегда выгодно.

Получим другое решение задачи.

Приводя обычным путем уравнения (VIII.66) к линейному виду, напишем

$$\left. \begin{aligned} [av] + A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + W_a &= 0 \\ [bv] + B_1\tau_1 + B_2\tau_2 + W_b &= 0 \\ . &. \\ [rv] + R_1\tau_1 + R_2\tau_2 + W_r &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VIII.67})$$

где

$$t = t^0 + \tau, \quad W_a = \Phi_a(x_1, \dots, x_n, t_1^0, t_2^0), \dots, W_r = \\ = \Psi_r(x_1, \dots, x_n, t_1^0, t_2^0),$$

$$a_l = \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x_l} \right)_0, \dots, r_l = \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_l} \right)_0, A_l = \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial t_l} \right)_0, \dots, R_l = \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial t_l} \right)_0.$$

Функция Лангранжа будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi(v_1, \dots, v_n, \tau_1, \tau_2) = & [pv^2] - 2k_a([av] + A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + W_a) - \dots \\ & \dots - 2k_r([rv] + R_1\tau_1 + R_2\tau_2 + W_r). \end{aligned}$$

Возьмем частные производные функции Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 2p_i v_i - 2k_0 a_i - \dots - 2k_r r_i \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_i} = -2k_a A_i - \dots - 2k_r R_i \quad (i=1, 2).$$

Так как частные производные функции Лагранжа равны нулю, то можно написать

$$v_l = q_l a_l k_a + \dots + q_l r_l k_r \quad (l = 1, \dots, n), \quad (\text{VIII.68})$$

$$A_j k_a + \dots + R_j k_r = 0 \quad (j=1, 2). \quad (\text{VIII.69})$$

Умножая равенства (VII.68) поочередно на $a_i, \dots, r_i$ и суммируя их каждый раз после умножения, получаем

$$[av] = [qaa]k_1 + \dots + [qar]k_r;$$

$$[bv] = [qab]k_1 + \dots + [qbr]k_r;$$

.....

$$[rv] = [qar] k_a + \dots + [qrr] k_r.$$

Принимая во внимание последние равенства, уравнения (VIII.67) можно переписать в виде

[illegible]

Присоединяя к равенствам (VIII.70) равенства (VIII.69), получаем следующую систему $(r + 2)$ уравнений с $(r + 2)$ неизвестными

Принимая во внимание последние два уравнения (VIII.76), можно написать

$$[qaF] \rho_a + [qbF] \rho_b + \dots + [qrF] \rho_r + [qFF] = \frac{1}{P_F}. \quad (\text{VIII.81})$$

Присоединяя, наконец, равенство (VIII.81) к системе (VIII.76) в качестве последнего уравнения, убеждаемся в справедливости формулы

$$\frac{1}{P_F} = [qFF \cdot (r+2)] = N_{r+3}^{(r+2)}$$

для нашего случая и

$$\frac{1}{P_F} = [qFF \cdot (r+s)] = N_{r+s+1}^{r+s},$$

где s — число дополнительных неизвестных — для общего случая.

Рассмотренный способ применяют для уравнивания систем рядов триангуляции (способ Пранис-Праневича) и систем полигонометрических ходов (способы Пранис-Праневича и Б. А. Липвинова). При этом в качестве дополнительных (неизмеренных) неизвестных вводят координаты и дирекционные углы, а в триангуляции еще и выходные стороны на пересечениях рядов или ходов. Благодаря этому общая система условных уравнений распадается на весьма слабо связанные между собой системы условных уравнений для отдельных звеньев. Общими для соседних звеньев будут только дополнительные неизвестные.

Для составления и решения нормальных уравнений в корреляционном способе с дополнительными неизвестными чаще всего применяют многогрупповой способ Пранис-Праневича. При этом в качестве связующих выбирают дополнительные неизвестные (см. § 74).

Глава IX

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ПО ИЗМЕРЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ФУНКЦИИ (АППРОКСИМАЦИЯ)

§ 72. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

При различных исследованиях, а также при решении некоторых практических задач требуется знать зависимость между двумя переменными величинами, т. е. функцию, связывающую эти величины. Предметом данного рассмотрения будет случай, когда единственная возможность установить искомую функцию заключается в измерении ряда соответственных значений зависимых переменных величин.

При решении поставленной задачи будем предполагать, что одна из переменных величин, которую условимся обозначать через x , измерена с пренебрегаемыми ошибками, поэтому придется считаться только с ошибками измерений другой переменной величины $y = f(x)$. Практически почти всегда бывает именно так. Будем также

предполагать, что аргумент измерили приблизительно или точно через равные промежутки.

Зависимости между переменными величинами могут быть различными по своему характеру. Они могут быть линейными, параболическими или носить периодический характер. Поэтому решение задачи должно начинаться всегда с построения графика. Кривая зависимости покажет приблизительно вид искомой функции. Это будет либо прямая, либо парабола какого-то порядка, либо кривая, показывающая периодический характер функции.

Во многих случаях практики графическое решение задачи, заключающееся в построении сглаживающей (аппроксимирующей) кривой или прямой, оказывается вполне достаточным.

Более строгое решение задачи основывается на методе наименьших квадратов и осуществляется параметрическим способом.

Задача часто облегчается тем, что вид функции заранее известен и требуется определить лишь параметры этой функции. Рассмотрим на нескольких примерах такой случай.

1. Линейная функция

Пусть известно, что функция имеет вид

$$Y = k_0 + k_1 X, \quad (IX.1)$$

где k_0 и k_1 требуется определить, для чего измерен ряд значений x_i ($i = 1, \dots, n$) и соответственных им значений y_i . Как условились, ошибками измерений значений x будем пренебрегать и учитывать только ошибки измеренных значений y_i . Конечно, $n > 2$, поскольку требуется определить два неизвестных. Из аналитической геометрии известно, что величина k_0 есть отрезок на оси Y от начала координат до пересечения с прямой, а k_1 — тангенс угла, образованного прямой с осью X .

Обозначим результаты измерений функции через y_i , а их веса — через p_i . Тогда можем получить следующую систему параметрических уравнений поправок, в которых в качестве необходимых неизвестных фигурируют величины k_0 и k_1 :

$$v_i = k_0 + x_i k_1 - y_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (IX.2)$$

Так как коэффициенты a_{i1} при первом неизвестном в уравнениях (IX.2) равны все единице, то

$$[p a_{i1}] = [p] = 0 \quad (IX.3)$$

п можно написать

$$[p] k_0 + [p x] k_1 - [p y] = 0,$$

откуда

$$k_0 = \frac{[p y]}{[p]} - \frac{[p x]}{[p]} k_1. \quad (IX.4)$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} \frac{[p x]}{[p]} &= x_0 \\ \frac{[p y]}{[p]} &= y_0 \end{aligned} \right\},$$

равенство (IX.4) можно представить так:

$$k_0 = y_0 - x_0 k_1. \quad (\text{IX.6})$$

Равенство (IX.6) позволит определить k_0 , если будет известно k_1 . Для нахождения k_1 результаты измерений и окончательные значения переменных целесообразно выразить таким образом:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_0 + \xi_i \\ y_i &= y_0 + \eta_i \\ y'_i &= y_0 + \eta'_i \\ (i &= 1, \dots, n) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{IX.7})$$

Тогда система уравнений (IX.2) примет вид

$$v_i = k_0 + x_0 k_1 - y_0 + \xi_i k_1 - \eta_i \quad (i = 1, \dots, n);$$

принимая в виду выражение (IX.6), находим

$$v_i = \xi_i k_1 - \eta_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{IX.8})$$

Получив графически приближенное значение k_1^0 неизвестного k_1 (как тангенс угла аппроксимирующей прямой с осью X), напишем окончательно систему уравнений поправок

$$v_i = \xi_i \delta k_1 + l_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (\text{IX.9})$$

где

$$l_i = \xi_i k_1^0 - \eta_i. \quad (\text{IX.10})$$

Далее получим

$$[p \xi \xi] \delta k_1 + [p \xi l] = 0$$

и

$$\delta k_1 = - \frac{[p \xi l]}{[p \xi \xi]}. \quad (\text{IX.11})$$

При равноточных измерениях

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{[x]}{n} \\ y_0 &= \frac{[y]}{n} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{IX.12})$$

$$\delta k_1 = - \frac{[\xi l]}{[\xi \xi]}. \quad (\text{IX.13})$$

При установлении размерностей для переменных x и y руководствуются требованиями, чтобы отклонения ξ и η были меньше единицы (по абсолютной величине).

Итак, последовательность действий для определения параметров k_0 и k_1 в случае линейной зависимости такова:

1) по формулам (IX.5) или (IX.12) вычисляют величины x_0 и y_0 , а затем отклонения $\xi_i = x_i - x_0$ и $\eta_i = y_i - y_0$, где x_i и y_i — результаты измерений ($i = 1, \dots, n$);

2) при помощи графика получают приближенное значение k_1^0 и затем по формуле (IX.10) — свободные члены l_i ($i = 1, \dots, n$);

3) по формуле (IX.11) или (IX.13) вычисляют δk_1 , затем

$$k_1 = k_1^0 + \delta k_1;$$

4) по формуле (IX.6) вычисляют k_0 .

Точность углового коэффициента k_1 будет характеризоваться средней квадратической ошибкой

$$M_{k_1} = \frac{\mu}{\sqrt{[p\xi\xi]}},$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-2}};$$

v получают по формуле (IX.9).

Практически задачу удобно решать так.

Из формулы (IX.8) следует

$$\eta_i + v_i = \xi_i k_1,$$

или

$$\eta'_i = k_1 \xi_i. \quad (\text{IX.14})$$

Далее, согласно (IX.7), получают

$$y'_i = y_0 + \eta'_i. \quad (\text{IX.15})$$

Если пользоваться формулами (IX.14) и (IX.15), то величина k_0 не нужна.

Вероятнейшая прямая. Если поставить условием, чтобы в минимум обращалась сумма квадратов расстояний заданных точек (x, y) от искомой прямой, то такая прямая будет называться **вероятнейшей прямой***

Обозначая в случае равноточных измерений

$$x_0 = \frac{[x]}{n}; \quad y_0 = \frac{[y]}{n}; \quad \xi_i = x_i - x_0; \quad \eta_i = y_i - y_0.$$

получаем для определения тангенса угла искомой прямой с осью X формулу

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2[\xi\eta]}{[\xi^2] - [\eta^2]}.$$

После определения $\operatorname{tg} \alpha = k_1$ будем вычислять сначала $\eta'_i = k_1 \xi_i$, затем $y'_i = y_0 + \eta'_i$.

2. Квадратичная функция

Функция имеет вид

$$Y = k_0 + k_1 X + k_2 X^2$$

и выражается графически параболой 2-го порядка.

* Выше получена аппроксимирующая прямая под условием минимума суммы квадратов отрезков, параллельных оси Y и ограниченных этой прямой и заданными точками.

В данном случае неизвестны коэффициенты k_0 , k_1 и k_2 ; число измерений должно быть $n > 3$.

Для упрощения вычислений перенесем начало координат в точку с координатами

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{[x]}{[n]} \\ y_0 &= \frac{[y]}{[n]} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{IX.16})$$

где x и y — результаты измерений.

Тогда функция в новой системе координат примет вид

$$\eta' = K_1 + K_2 \xi + K_3 \xi^2. \quad (\text{IX.17})$$

Задача свелась к нахождению неизвестных K_1 , K_2 и K_3 .

Так же, как и при линейном интерполировании, размерности для x и y необходимо выбирать так, чтобы отклонения

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= x_i - x_0 \\ \eta_i &= y_i - y_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.18})$$

($i = 1, \dots, n$)

были по абсолютной величине близки к единице.

Вводя приближенные значения неизвестных и учитывая обозначения

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= K_1^0 + \tau_1 \\ K_2 &= K_2^0 + \tau_2 \\ K_3 &= K_3^0 + \tau_3 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{IX.19})$$

а также

$$\left. \begin{aligned} l_i &= K_1^0 + K_2^0 \xi_i + K_3^0 \xi_i^2 - \eta_i \\ (i &= 1, \dots, n) \\ \xi_i &= b_i \\ \xi_i^2 &= c_i \end{aligned} \right\}, \quad (\text{IX.20})$$

получаем систему уравнений поправок

$$v_i = \tau_1 + b_i \tau_2 + c_i \tau_3 + l_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{IX.21})$$

и соответствующую ей систему нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} [p] \tau_1 + [pb] \tau_2 + [pc] \tau_3 + [pl] &= 0 \\ [pb] \tau_1 + [pbb] \tau_2 + [pbc] \tau_3 + [pbl] &= 0 \\ [pc] \tau_1 + [pbc] \tau_2 + [pcc] \tau_3 + [pcl] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{IX.22})$$

Последовательность действий. 1. По формулам (IX.16) вычисляют x_0 , y_0 , затем получают $\xi_i = x_i - x_0$, $\eta_i = y_i - y_0$ и строят график $\eta = f(\xi)$, сглаживая его плавной кривой.

2. Находят приближенные значения неизвестных по формулам

$$K_1^0 = \eta_0.$$

где η_0 — ордината точки пересечения сглаживающей кривой с осью Y , η

$$K_2^0 = \frac{\eta_n - \eta_1}{\xi_n - \xi_1},$$

$$K_3^0 = \frac{\eta_1 + \eta_n - 2K_1^0}{\xi_1^2 + \xi_n^2},$$

где ξ_1 — наименьшее значение аргумента, ξ_n — наибольшее, а η_1 и η_n — соответствующие измеренные значения ординат.

3. По формулам (IX.20) вычисляют коэффициенты и свободные члены уравнений поправок.

4. Составляют и решают нормальные уравнения (IX.22), в результате чего находят поправки к неизвестным, т. е. τ_1 , τ_2 и τ_3 .

5. Получают искомые коэффициенты

$$K_1 = K_1^0 + \tau_1; \quad K_2 = K_2^0 + \tau_2 \quad \text{и} \quad K_3 = K_3^0 + \tau_3.$$

Интерполирование выполняют по формуле (IX.17) и

$$y' = y_0 + \eta'.$$

3. Периодическая функция

Функция имеет вид

$$y = k_1 + k_2 \sin x + k_3 \cos x,$$

где x изменяется от 0° до $2m\pi$ через равные промежутки $\alpha = \frac{\pi}{n}$, где n — число четное, причем m — число целое. Так производят наблюдения периодических функций. Очевидно, число наблюдений N равно

$$N = 2mn. \quad (\text{IX.23})$$

Не вводя приближенных значений неизвестных, напомним уравнения поправок

$$v_i = k_1 + \sin x_i k_2 + \cos x_i k_3 - y_i$$

$$(i = 1, \dots, N). \quad (\text{IX.24})$$

Измерения будем считать равноточными. Тогда коэффициенты нормальных уравнений примут вид

$$\begin{aligned} [aa] &= N = 2nm; & [cc] &= m \sum_0^{2n\alpha} \cos^2 x_i; \\ [ab] &= m \sum_0^{2n\alpha} \sin x_i; & [al] &= - \sum_1^N y_i; \\ [bb] &= m \sum_0^{2n\alpha} \sin^2 x_i; & [bl] &= - \sum_1^N y_i \sin x_i; \\ [ac] &= m \sum_0^{2n\alpha} \cos x_i; & [cl] &= - \sum_1^N y_i \cos x_i; \\ [bc] &= m \sum_0^{2n\alpha} \sin x_i \cdot \cos x_i, \end{aligned}$$

Так как значения x изменяются через равные промежутки

$$\sigma = \frac{\pi}{n}$$

(n — число четное), то значения аргумента x располагаются симметрично относительно осей координат, вследствие чего

$$\sum_0^{2n\sigma} \sin x_i = \sum_0^{2n\sigma} \cos x_i = \sum_0^{2n\sigma} \sin x_i \cdot \cos x_i = 0.$$

Нетрудно убедиться также, что

$$m \sum_0^{2n\sigma} \sin^2 x_i = m \sum_0^{2n\sigma} \cos^2 x_i = \frac{N}{2}.$$

Теперь нормальные уравнения примут вид

$$Nk_1 - [y] = 0,$$

$$\frac{N}{2} k_2 - [y \sin x] = 0,$$

$$\frac{N}{2} k_3 - [y \cos x] = 0,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{[y]}{N} \\ k_2 &= \frac{2[y \cdot \sin x]}{N} \\ k_3 &= \frac{2[y \cdot \cos x]}{N} \end{aligned} \right\}. \quad (IX.25)$$

Таким образом, искомые коэффициенты находят непосредственно по формулам (IX.25).

§ 73. СПОСОБ ЧЕБЫШЕВА

П. Л. Чебышев предложил замечательное по универсальности и простоте решение задачи интерполирования функции в том случае, когда вид функции неизвестен. Предполагается лишь, что известен характер функции: периодическая она или нет, что всегда может быть установлено путем построения графика. Рассмотрим этот способ.

1. Параболическое интерполирование

Вначале познакомимся с интерполированием непериодической функции (параболическое интерполирование). Заметим, что для периодической функции идея решения остается та же.

Итак, предположим, что имеется ряд измеренных значений $y_1, \dots, y_n$ с весами $p_1, \dots, p_n$ некоторой неизвестной нам функции $y = f(x)$, соответствующий ряду безопытных значений аргумента $x_1, \dots, x_n$.

Сразу же оговоримся: задача может быть решена лишь в том случае, если функция разлагается в быстро сходящийся ряд.

Прежде всего вычислим $x_0 = \frac{[x]}{n}$, после чего можем написать

$$f(x) = f(x_0 + \xi) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \xi + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot \xi^2 + \dots$$

Для удобства вычислений необходимо аргументы x выразить в такой размерности, при которой все значения ξ были бы по абсолютной величине меньше единицы.

Так как функция f неизвестна, то будут неизвестны и все коэффициенты разложения, поэтому напомним

$$y \approx k_1 + k_2 \xi + k_3 \xi^2 + k_4 \xi^3 + \dots \quad (IX.26)$$

Выражение (IX.26) отличается от рассмотренных выше функций тем, что в нем остается неизвестным число членов разложения, т. е. число искомых коэффициентов разложения.

Заметим, что кривые, соответствующие функции (IX.26), называют параболлами высших порядков (отсюда — «параболическое интерполирование»).

Задачу можно решить последовательным повторением уравнений вычислений, увеличивая каждый раз число неизвестных в новом решении, причем это придется продолжать до тех пор, пока сумма $[pv^2]$, уменьшаясь в каждом решении, не станет соответствовать по величине точности измерений.

В способе Чебышева процесс вычислений — своеобразный процесс приближений — выполняют таким образом, что в каждом последующем приближении используют результаты всех предыдущих.

Если коэффициенты k_i предполагаются большими по абсолютной величине, то для облегчения уравнительных вычислений следует вычислить приближенные значения для некоторых первых коэффициентов. Как правило, достаточно вычислить k_1^0, k_2^0, k_3^0 , для чего можно использовать три уравнения, соответствующие наименьшему и наибольшему значениям x и значению $x_0 \approx \frac{[x]}{n}$. Напишем соответствующие формулы, которые нетрудно получить, имея в виду, что $x_0 - x_{\text{мин}} \approx x_{\text{макс}} - x_0$, поскольку x_0 — среднее значение (напомним, что $\xi_i = x_i - x_0$).

$$\left. \begin{aligned} k_1^0 &= y_0 \\ k_2^0 &= \frac{y_n - y_1}{2\xi_0} \\ k_3^0 &= \frac{y_1 + y_n - 2y_0}{2\xi_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (IX.27)$$

В формулах (IX.27) y_1 , y_0 и y_n соответствуют наименьшему, среднему и наибольшему значениям аргумента, ξ_0 — наибольшее значение разностей $x_i - x_0$. Заметим, что если значения k_2^0 и k_3^0 окажутся велики, то размерность для y нужно изменить, чтобы численные значения уменьшились.

Обозначая $a = 1$, $b_i = \xi_i$, $c_i = \xi_i^2$, $d_i = \xi_i^3$ и т. д., получаем уравнения поправок в виде

$$v_i = \tau_1 + b_i \tau_2 + c_i \tau_3 + d_i \tau_4 + \dots + l_i. \quad (\text{IX.28})$$

где τ — поправки к приближенным значениям коэффициентов k_1 , k_2 , k_3 (остальные коэффициенты будем находить целиком)

$$l_i = k_1^0 + \xi_i k_2^0 + \xi_i^2 k_3^0 - y_i. \quad (\text{IX.29})$$

Далее составляем таблицу коэффициентов, которая должна быть рассчитана на возможно наибольшее число искомых коэффициентов.

В табл. 60 предусмотрено пять неизвестных. Коэффициенты и свободные члены уравнений поправок приведены к равнозначному виду.

Вначале в табл. 60 заполняют только графы, «а», «b», «с», «l», «S'» ($S' = a + b + c + l$) и вычисляют соответствующие коэффициенты нормальных уравнений.

В схеме решения нормальных уравнений, показанной в табл. 61, также сначала выписывают только первые три уравнения, заполняя соответствующие графы.

В табл. 61 и в дальнейшем изложении применяются обозначения Гаусса, например:

$$N_{33}^{(2)} = [pcc \cdot 2] \text{ или } N_{33}^{(2)} = [qcc \cdot 2];$$

$$N_{45}^{(3)} = [pde \cdot 3], \quad L_3^{(2)} = [pcl \cdot 2], \text{ или}$$

$$L_3^{(2)} = [W_3 \cdot 2] \text{ и т. д.}$$

Кроме того, $a_{i1} = a_i$; $a_{i2} = b_i$; $a_{i3} = c_i$ и т. д.

В отличие от обычных схем, в табл. 60 и 61 имеется несколько граф для сумм (S' , S'' и S'''), которые заполняют последовательно в процессе приближений ($S'' = a + b + c + d + l = S' + d$; $S''' = S'' + e$ и т. д.).

В табл. 61 имеется еще графа для вычисления $[pv^2]$ после каждого приближения.

Процесс приближений в табл. 60 и 61 показан следующим образом: первое приближение, т. е. решение первых трех уравнений и вычисление $[pv^2]_3$, выделено жирной чертой, второе приближение и вычисление суммы $[pv^2]_4$, которая укажет, нужно ли продолжать приближения. — тонкой чертой; последнее приближение не подчеркнуто.

Из табл. 60—61 следует, что в каждом новом приближении почти полностью используют результаты предыдущих приближений. * Например:

$$[pv^2]_4 = [pv^2]_3 + [pdl \cdot 3] E_{30}.$$

Таблица 60

Номер наиме- р- ния	α τ_1	b τ_2	c τ_3	d k_4	e k_5	l	s'	s''	s'''	$v \vee \bar{p}$
1	$\vee \overline{p_1}$	ξ'_1	$(\xi_1^2)'$	$(\xi_1^3)'$	$(\xi_1^4)'$	$\overline{l'_1}$	$\overline{s'_1}$	$\overline{s''_1}$	s'''_1	$v_1 \vee \overline{p_1}$
2	$\vee \overline{p_2}$	ξ'_2	$(\xi_2^2)'$	$(\xi_2^3)'$	$(\xi_2^4)'$	$\overline{l'_2}$	$\overline{s'_2}$	$\overline{s''_2}$	s'''_2	$v_2 \vee \overline{p_2}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	$\vee \overline{p_n}$	ξ'_n	$(\xi_n^2)'$	$(\xi_n^3)'$	$(\xi_n^4)'$	$\overline{l'_n}$	$\overline{s'_n}$	$\overline{s''_n}$	s'''_n	$v_n \vee \overline{p_n}$
$[pa]$	$[p]$	$[pb]$	$[pc]$	$[pd]$	$[pe]$	$[pl]$	$[pS']$	$[pS'']$	$[pS''']$	$[pv^2]_5$
$[pb]$		$[pbb]$	$[pbc]$	$[pbd]$	$[pbe]$	$[pbl]$	$[pbS']$	$[pbS'']$	$[pbS''']$	
$[pc]$			$[pcc]$	$[pcd]$	$[pce]$	$[pcl]$	$[pcS']$	$[pcS'']$	$[pcS''']$	
$[pd]$				$[pdd]$	$[pde]$	$[pdl]$		$[pdS'']$	$[pdS''']$	
$[pe]$					$[pee]$	$[pel]$			$[peS''']$	
$[pl]$						$[pll]$			$[plS''']$	

Название строки	τ_1	τ_2	τ_3	k_4	k_5	l	S'	S''	S'''	$[pv^2]$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N_1	$[p]$	$[pb]$	$[pc]$	$[pd]$	$[pe]$	$[pl]$	$[pS']$	$[pS'']$	$[pS''']$	$[pl]$
F_1		E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	E_{17}	E_{18}	E_{19}	
N_2		$[pbb]$	pbc	$[pbd]$	$[pbe]$	$[pbl]$	$[pbs']$	$[pbs'']$	$[pbs''']$	
$N_2^{(1)}$		$[pbb \cdot 1]$	$[pbc \cdot 1]$	$[pbd \cdot 1]$	$[pbe \cdot 1]$	$[pbl \cdot 1]$	$[pbs' \cdot 1]$	$[pbs'' \cdot 1]$	$[pbs''' \cdot 1]$	
E_2			E_{23}	E_{24}	E_{25}	E_{26}	E_{27}	E_{28}	E_{29}	
N_3			$[pcc]$	$[pcd]$	$[pce]$	$[pcl]$	$[pcs']$	$[pcs'']$	$[pcs''']$	
$N_3^{(2)}$			$[pcc \cdot 2]$	$[pcd \cdot 2]$	$[pce \cdot 2]$	$[pcl \cdot 2]$	$[pcs' \cdot 2]$	$[pcs'' \cdot 2]$	$[pcs''' \cdot 2]$	
E_3				E_{31}	E_{35}	E_{36}	E_{37}	E_{38}	E_{39}	
N_4				$[pdd]$	$[pde]$	$[pdl]$		$[pds']$	$[pds'']$	$[pv^2]_3$
$N_4^{(3)}$				$[pdd \cdot 3]$	$[pde \cdot 3]$	$[pdl \cdot 3]$		$[pds'' \cdot 3]$	$[pds''' \cdot 3]$	
F_4					E_{45}	E_{46}		E_{48}	E_{49}	
N_5					$[pee]$	$[pel]$			$[pes''']$	$[pv^2]_4$
$N_5^{(4)}$					$[pee \cdot 4]$	$[pel \cdot 4]$			$[pes''' \cdot 4]$	
E_5						E_{56}			E_{59}	
									$[pls''']$	$[pv^2]_5$
	τ_1	τ_2	τ_3	k_4	k_5				$[pls''' \cdot 5]$	

После окончания приближений для контроля вычисляют $[pv^2]$ дважды по формуле

$$[pv^2]_5 = [pv^2]_1 + [pel - 4] E_{56} = [pls'' \cdot 5]$$

и в графе « $v\sqrt{p}$ » табл. 60.

По сравнению с обычным уравниванием в табл. 61 добавляются лишь действия в графах « S'' » и « S''' ».

Критерием сходимости приближений служат значения $[pv^2]$. Сравнивая среднюю квадратическую ошибку единицы веса, которая предполагается известной по условиям измерений, со значением

$\mu_i = \sqrt{\frac{[pv^2]_i}{n-i}}$, где i — число учтенных коэффициентов $k_1, \dots, k_i$ во всех предыдущих приближениях, судим о степени приближения параболы к действительной кривой.

Другим признаком сходимости может служить точность очередных коэффициентов. Так, средняя квадратическая ошибка коэффициента k_3 равна $m = \frac{\mu_3}{\sqrt{[psc \cdot 2]}}$, точность коэффициента k_4 характеризуется ошибкой $m_4 = \frac{\mu_4}{\sqrt{[pdd \cdot 3]}}$ и т. д.

Ошибку единицы веса по результатам уравнивания вычисляют по формулам

$$\mu_3 = \sqrt{\frac{[pv^2]_3}{n-3}}, \quad \mu_4 = \sqrt{\frac{[pv^2]_4}{n-4}} \quad \text{и т. д.}$$

По величине средней квадратической ошибки очередного коэффициента можно судить о том, есть ли смысл вычислять следующий коэффициент, и, кроме того, эта ошибка покажет число значащих цифр, которые следует удерживать в значении коэффициента.

В практике применения параболического интерполирования чаще всего приходится иметь дело с равноточными измерениями и очень часто с равнопромежуточными значениями аргументов. В последнем случае коэффициенты нормальных уравнений можно представить как функцию промежутка изменений аргумента и числа измерений и составить соответствующие таблицы, чем значительно облегчается решение задачи. В частности, таким образом решают некоторые фотограмметрические задачи.

2. Периодическое интерполирование

Выше, на примере интерполирования функции $y = k_1 + k_2 \times \sin x + k_3 \cos x$ показана целесообразность применения равнопромежуточных значений аргумента при интерполировании периодических функций. Если вид периодической функции точно неизвестен, то поступают аналогично тому, как и при параболическом интерполировании. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Если функция имеет периодический характер, то, как известно из математики, она может быть разложена в ряд

$$y = f(x) = k_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \dots$$

$$\dots + A_m \sin mx + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + \dots + B_m \cos mx. \quad (\text{IX.30})$$

Число членов разложения периодической функции остается неизвестным, как и при параболическом интерполировании. Конечно, число измерений должно быть больше $2m + 1$.

Задача и в данном случае может быть решена по способу Чебышева. В отличие от параболического интерполирования, здесь необходимо присоединять в процессе приближений по два коэффициента A_i и B_i , поэтому в конечном счете должно быть получено одинаковое число коэффициентов A и коэффициентов B .

Задача значительно облегчается при равнооточных измерениях, и если аргумент изменяется через равные промежутки $\sigma = \frac{\pi}{n}$ в пределах от 0 до 2π , где n — четное число, m — целое число.

В этом случае

$$\left. \begin{aligned} [\sin rx] &= [\cos rx] = [\sin rx \cdot \sin jx] = \\ &= [\sin rx \cdot \cos rx] = [\cos rx \cdot \cos jx] = 0 \quad \text{при } r \neq j \\ [\sin^2 rx] &= [\cos^2 rx] = \frac{N}{2} \\ N &= 2nm \end{aligned} \right\} \quad \text{(IX.31)}$$

Формулы (IX.31) могут быть получены при помощи известных формул Эйлера, выражающих $\sin rx$ и $\cos rx$ через e^{rx} и e^{-rx} .

На основании формул (IX.31) получим для равнопромежуточных аргументов

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \frac{[y]}{N}; \quad A_1 = \frac{2[y \sin x]}{N}, \quad \dots, \quad A_m = \frac{2[y \sin mx]}{N} \\ B_1 &= \frac{2[y \cos x]}{N}, \quad \dots, \quad B_m = \frac{2[y \cos mx]}{N} \end{aligned} \right\} \quad \text{(IX.32)}$$

Очевидно, что формулы (IX.25) являются частным случаем формул (IX.32).

При равнопромежуточных значениях аргумента система нормальных уравнений распадается на отдельные независимые уравнения, откуда и получаются весьма простые формулы (IX.32).

Получим формулу для вычисления $[v^2]$ в рассматриваемом случае. Так как сумма $[v^2]$ равна $[U]$ + сумма произведений свободных членов нормальных уравнений на неизвестные, то можем написать

$$\begin{aligned} [v^2] &= [yy] - k_0 [y] - A_1 [y \cdot \sin x] - \dots - A_m [y \cdot \sin mx] - B_1 [y \cdot \cos x] - \dots - \\ &- B_m [y \cdot \cos mx] = [yy] - \frac{[y^2]}{N} - \frac{N}{2} (A_1^2 + \dots + A_m^2 + B_1^2 + \dots + B_m^2). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$y_i - \frac{[y]}{N} = \eta_i.$$

Тогда

$$[\eta\eta] = [yy] - 2 \frac{[y]^2}{N} + N \frac{[y]^2}{N^2} = [yy] - \frac{[y]^2}{N},$$

и окончательно получим

$$[u^2] \quad [v^2] = \frac{N}{2} (A_1^2 + B_1^2 + \dots + B_m^2) \quad (IX.33)$$

По формулам (IX.32) и (IX.33) весьма просто решить задачу интерполирования периодической функции при равнооточных измерениях и равнопромежуточных значениях аргумента. Эти формулы применяют, например, при исследовании ошибок диаметров лимба.

Глава X

УРАВНИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ НЕИЗВЕСТНЫХ

§ 74. СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ БОЛЬШИХ СИСТЕМ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Общие замечания

Параметрический и корреляционный способы, будучи лишь различными математическими приемами решения задачи уравнивания, дают идентичные значения уравниваемых величин. Но в разных случаях геодезических вычислений они неодинаковы по сложности и объему вычислительных работ. Рассмотрим сравнительные достоинства этих способов.

При значительном числе необходимых и избыточных измеренных величин большую часть объема уравнительных вычислений составляет решение нормальных уравнений. При этом нужно иметь в виду, что количество труда, затрачиваемого на решение нормальных уравнений, увеличивается не пропорционально числу уравнений, а в значительно большей степени. Как известно, число нормальных уравнений в параметрическом способе уравнивания равно числу необходимых величин k ; в корреляционном способе число нормальных уравнений равно числу избыточных величин $r = n - k$.

Таким образом, при большом числе измеренных величин выбор способа уравнивания, при прочих равных условиях, зависит в первую очередь от значений k и r ; если $k < r$, то выгоднее параметрический способ; при $r < k$ следует предпочесть корреляционный способ. Однако при выборе способа уравнивания необходимо принимать во внимание еще и вид параметрических и условных уравнений поправок. Эффективность решения больших систем нормальных уравнений зависит еще и от характера связей между неизвестными в этих уравнениях. Если одни и те же неизвестные входят лишь в некоторые уравнения, а не во все, то решение можно значительно упростить.

Плже рассмотрены наиболее эффективные методы уравнительных вычислений, применяющиеся в настоящее время на производстве при большом числе необходимых и избыточных измеренных величин.

2. Решение нормальных уравнений, распадающихся на частично независимые системы

До сих пор мы рассматривали решение нормальных уравнений в общем их виде, предполагая, что все неизвестные входят в каждое уравнение. Однако в геодезической практике при большом числе уравнений так не бывает. Обычно неизвестные входят лишь в некоторые уравнения, вследствие чего нормальные уравнения можно разбить на частично независимые системы, что значительно облегчает их решение.

Прежде всего покажем, что в последнем случае эффективность решения нормальных уравнений зависит от порядка расположения неизвестных в параметрических или в коррелятивных уравнениях поправок. На последних местах в этих уравнениях выгодно размещать те неизвестные, которые встречаются в уравнениях чаще, и, наоборот, на первых местах следует помещать редко встречающиеся неизвестные.

Допустим, что система параметрических уравнений поправок с тремя неизвестными распадается на следующие две частично независимые системы:

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_i \tau_1 + c_i \tau_3 + l_i = v_i \\ & (i = 1, \dots, n_1); \\ 2) \quad & b_i \tau_2 + c_i \tau_3 + l_i = v_i \\ & (i = n_1 + 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Составим систему нормальных уравнений и сделаем последовательные ее преобразования. Для простоты допустим, что измерения равноточны,

$$\left. \begin{aligned} [aa] \tau_1 + [ac] \tau_3 + [al] &= 0 \\ [bb] \tau_2 + [bc] \tau_3 + [bl] &= 0 \\ [ac] \tau_1 + [bc] \tau_2 + [cc] \tau_3 + [cl] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (X.1)$$

Получим систему $N^{(1)}$

$$\left. \begin{aligned} [bb] \tau_2 + [bc] \tau_3 + [bl] &= 0 \\ [bc] \tau_2 + [cc \cdot 1] \tau_3 + [cl \cdot 1] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (X.2)$$

Нетрудно убедиться в том, что $[bb \cdot 1] = [bb]$, так как $[ab] = 0$. По той же причине $[bc \cdot 1] = [bc]$ и $[bl \cdot 1] = [bl]$. Далее получим последнее уравнение эквивалентной системы

$$[cc \cdot 2] \tau_3 + [cl \cdot 2] = 0. \quad (X.3)$$

Напишем эквивалентную систему уравнений, коэффициенты которой вычисляются при решении нормальных уравнений,

$$\left. \begin{aligned} [aa] \tau_1 + [ac] \tau_3 + [al] &= 0 \\ [bb] \tau_2 + [bc] \tau_3 + [bl] &= 0 \\ [cc \cdot 2] \tau_3 + [cl \cdot 2] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (X.4)$$

Теперь видно, что практически придется вычислять только два коэффициента эквивалентной системы — $[cc \cdot 2]$ и $[cl \cdot 2]$.

Раскроем их полностью для нашего случая:

$$\left. \begin{aligned} [cc \cdot 2] &= [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} - \frac{[bc][bc]}{[bb]} \\ [cl \cdot 2] &= [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc][bl]}{[bb]} \end{aligned} \right\} \quad (X.5)$$

Равенства (X.5) характеризуют объем работы по исключению неизвестных в данной задаче.

Расположим третье неизвестное на первых местах в уравнениях:

$$\begin{aligned} 1) \quad c_i \tau_3 + a_i \tau_1 + l_i &= v_i \\ (i &= 1, \dots, n_1); \\ 2) \quad c_i \tau_3 + b_i \tau_2 + l_i &= v_i \\ (i &= n_1 + 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Составим нормальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} [cc] \tau_3 + [bc] \tau_2 + [ac] \tau_1 + [cl] &= 0 \\ [bc] \tau_3 + [bb] \tau_2 + [bl] &= 0 \\ [ac] \tau_3 + [aa] \tau_1 + [al] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (X.6)$$

Система ($N^{(1)}$) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} [bb \cdot 1] \tau_2 + [ab \cdot 1] \tau_1 + [bl \cdot 1] &= 0 \\ [ab \cdot 1] \tau_2 + [aa \cdot 1] \tau_1 + [al \cdot 1] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (X.7)$$

Последнее уравнение эквивалентной системы примет вид

$$[aa \cdot 2] \tau_1 + [al \cdot 2] = 0. \quad (X.8)$$

Напишем эквивалентную систему

$$\left. \begin{aligned} [cc] \tau_3 + [bc] \tau_2 + [ac] \tau_1 + [cl] &= 0 \\ [bb \cdot 1] \tau_2 + [ab \cdot 1] \tau_1 + [bl \cdot 1] &= 0 \\ [aa \cdot 2] \tau_1 + [al \cdot 2] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (X.9)$$

Объем работы по исключению неизвестных в этом случае определяется равенствами

$$\left. \begin{aligned} [bb \cdot 1] &= [bb] - \frac{[bc][bc]}{[cc]} \\ [ab \cdot 1] &= - \frac{[bc][ac]}{[cc]} \\ [bl \cdot 1] &= [bl] - \frac{[bc][cl]}{[cc]} \\ [aa \cdot 2] &= [aa] - \frac{[ac][ac]}{[cc]} - \frac{[ab \cdot 1][ab \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \\ [al \cdot 2] &= [al] - \frac{[ac][cl]}{[cc]} - \frac{[ab \cdot 1][bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \end{aligned} \right\} \quad (X.10)$$

Сравнивая равенства (X.5) и (X.10), видим, что расположение общего для обеих частично независимых систем неизвестного на последнем месте уравнений (не считая свободных членов) совместно

сокращает общий объем уравнивательных вычислений по сравнению с тем, когда это неизвестное расположено вначале.

При уравнивании коррелятным способом роль параметрических уравнений поправок в таблице коэффициентов играют равенства

$$a_{ik}a + b_{ik}b + \dots + r_{ik}r - p_i v_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (\text{X.11})$$

если условно полагать их веса равными

$$q_i = \frac{1}{p_i}.$$

Поэтому при уравнивании коррелятным способом в таблице коэффициентов правые графы следует отводить для условных уравнений с большим числом поправок r_i . При соблюдении этого условия нужно еще иметь в виду, что для вычислений в таблице коэффициентов выгодно левее располагать уравнения с коэффициентами $+1$ и -1 , а правее — остальные уравнения.

Напомним, что при большом числе исходных уравнений их следует приводить к равнозначному виду.

3. Многогрупповой способ Пранис-Праневича

Соблюдение указанного выше порядка вычислений не только сокращает их объем, но и создает возможности привлечения к уравниванию одновременно нескольких вычислителей. Известный советский геодезист И. Ю. Пранис-Праневич предложил следующий порядок решения исходных уравнений, распадающихся на частично независимые системы:

1. Параметрические или коррелятные уравнения поправок разбивают на частично независимые системы, на каждую из которых выделяют одного вычислителя.

2. Каждый вычислитель составляет свою систему исходных уравнений (т. е. вычисляет соответствующие коэффициенты и свободные члены) и из нее получает соответствующую частично независимую систему нормальных уравнений.

3. В каждой системе нормальных уравнений исключаются все неизвестные, не входящие в другие системы, в результате чего каждый вычислитель получает частную связующую систему нормальных уравнений, в которую входят только связующие, т. е. общие для нескольких систем, неизвестные (поправки необходимых неизвестных t или коррелаты k).

Заметим, что в отличие от обычного порядка решения нормальных уравнений в частных связующих системах вычисляют коэффициенты всех уравнений соответствующей преобразованной системы, а не только первого уравнения, т. е. не только уравнения эквивалентной системы.

При решении краевыми коэффициенты частных связующих систем не берут на корни из квадратичных коэффициентов.

4. Суммируя соответствующие коэффициенты частных связующих систем, расположенные одинаково относительно квадратичной диаго-

дали, получают общую связующую систему, из решения которой находят связующие неизвестные.

5. При помощи элиминационных (или краевых) строк систем решения вычислители получают остальные неизвестные.

Недостаток способа Пранис-Праневича в организационном отношении заключается в том, что при решении связующей системы может быть занята лишь часть вычислителей.

Покажем на простом примере полную строгость способа Пранис-Праневича, для чего повторим дважды решение общей системы: один раз обычным порядком и другой раз — по способу Пранис-Праневича. Для этого возьмем следующие параметрические уравнения поправок, распадающихся на две частично независимые системы:

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_i \tau_1 + d_i \tau_2 + e_i \tau_3 + l_i = v_i \\ & (i = 1, \dots, n_1); \\ 2) \quad & b_i \tau_2 + c_i \tau_3 + d_i \tau_1 + e_i \tau_3 + l_i = v_i \\ & (i = n_1 + 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Общая система нормальных уравнений в сокращенной записи будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} [aa]_1 \tau_1 &+ [ad]_1 \tau_2 + [ae]_1 \tau_3 + [al]_1 \\ [bb]_2 \tau_2 &+ [bc]_2 \tau_3 + [bd]_2 \tau_1 + [be]_2 \tau_3 + [bl]_2 \\ [cc]_2 \tau_3 &+ [cd]_2 \tau_1 + [ce]_2 \tau_2 + [cl]_2 \\ [dd] \tau_1 &+ [de] \tau_2 + [dl] \\ [ee] \tau_3 &+ [el] \end{aligned} \right\} \quad (X.12)$$

Индексы при гауссовых суммах означают, что эти суммы произведены получены из соответствующих частных систем. Так как неизвестные τ_1 и τ_2 входят в обе системы, то очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} [dd] &= [dd]_1 + [dd]_2 \\ [de] &= [de]_1 + [de]_2 \\ [dl] &= [dl]_1 + [dl]_2 \\ [ee] &= [ee]_1 + [ee]_2 \\ [el] &= [el]_1 + [el]_2 \end{aligned} \right\} \quad (X.13)$$

Напишем полную эквивалентную систему, которая будет получена после исключения трех неизвестных,

$$\left. \begin{aligned} [aa]_1 \tau_1 &+ [ad]_1 \tau_2 + [ae]_1 \tau_3 + [al]_1 = 0 \\ [bb]_2 \tau_2 &+ [bc]_2 \tau_3 + [bd]_2 \tau_1 + [be]_2 \tau_3 + [bl]_2 = 0 \\ [cc \cdot 2] \tau_3 &+ [cd \cdot 2] \tau_1 + [ce \cdot 2] \tau_2 + [cl \cdot 2] = 0 \\ [dd \cdot 3] \tau_1 &+ [de \cdot 3] \tau_2 + [dl \cdot 3] = 0 \\ [de \cdot 3] \tau_1 &+ [ee \cdot 3] \tau_3 + [el \cdot 3] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (X.14)$$

Эта система отличается от полной эквивалентной системы лишь последним уравнением.

Раскроем преобразованные коэффициенты написанной эквивалентной системы

$$\left. \begin{aligned} [cc \cdot 2] &= [cc]_2 - \frac{[bc]_2 [bc]_2}{[bb]_2} \\ [cd \cdot 2] &= [cd]_2 - \frac{[bc]_2 [bd]_2}{[bb]_2} \\ [ce \cdot 2] &= [ce]_2 - \frac{[bc]_2 [be]_2}{[bb]_2} \\ [cl \cdot 2] &= [cl]_2 - \frac{[bc]_2 [bl]_2}{[bb]_2} \\ [dd \cdot 3] &= [dd] - \frac{[ad]_1 [ad]_1}{[aa]_1} - \frac{[bd]_2 [bd]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 2] [cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \\ [de \cdot 3] &= [de] - \frac{[ad]_1 [ae]_1}{[aa]_1} - \frac{[bd]_2 [be]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 2] [ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \\ [dl \cdot 3] &= [dl] - \frac{[ad]_1 [al]_1}{[aa]_1} - \frac{[bd]_2 [bl]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 2] [cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \\ [ee \cdot 3] &= [ee] - \frac{[ae]_1 [ae]_1}{[aa]_1} - \frac{[be]_2 [be]_2}{[bb]_2} - \frac{[ce \cdot 2] [ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \\ [el \cdot 3] &= [el] - \frac{[ae]_1 [al]_1}{[aa]_1} - \frac{[be]_2 [bl]_2}{[bb]_2} - \frac{[ce \cdot 2] [cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \end{aligned} \right\} \quad (X.15)$$

Получим теперь коэффициенты и свободные члены связующей системы, т. е. $[dd \cdot 3]$, $[de \cdot 3]$, $[dl \cdot 3]$, $[ee \cdot 3]$, $[el \cdot 3]$ по способу Прангс-Праневича.

Напишем коэффициенты 1-й частично независимой системы нормальных уравнений, полученные из соответствующей системы уравнений поправок,

$$\left. \begin{aligned} [aa]_1 \tau_1 + [dd]_1 \tau_4 + [ae]_1 \tau_5 + [al]_1 \\ [dd]_1 \tau_1 + [de]_1 \tau_5 + [dl]_1 \\ [ee]_1 \tau_5 + [el]_1 \end{aligned} \right\} \quad (X.16)$$

Исключив из системы (X.16) неизвестное τ_1 , получим частную связующую систему

$$\left. \begin{aligned} [dd \cdot 1]_1 \tau_1 + [de \cdot 1]_1 \tau_5 + [dl \cdot 1]_1 \\ [ee \cdot 1]_1 \tau_5 + [el \cdot 1]_1 \end{aligned} \right\} \quad (X.17)$$

где коэффициенты имеют структуру

$$\left. \begin{aligned} [dd \cdot 1]_1 &= [dd]_1 - \frac{[ad]_1 [ad]_1}{[aa]_1} \\ [de \cdot 1]_1 &= [de]_1 - \frac{[ad]_1 [ae]_1}{[aa]_1} \\ [dl \cdot 1]_1 &= [dl]_1 - \frac{[ad]_1 [al]_1}{[aa]_1} \\ [ee \cdot 1]_1 &= [ee]_1 - \frac{[ae]_1 [ae]_1}{[aa]_1} \\ [el \cdot 1]_1 &= [el]_1 - \frac{[ae]_1 [al]_1}{[aa]_1} \end{aligned} \right\} \quad (X.18)$$

Найдем коэффициенты 2-й частично независимой системы нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} [bb]_2 \tau_2 + [bc]_2 \tau_3 + [bd]_2 \tau_4 + [be]_2 \tau_5 + [bl]_2 \\ [ce]_2 \tau_3 + [cd]_2 \tau_4 + [ce]_2 \tau_5 + [cl]_2 \\ [dd]_2 \tau_4 + [de]_2 \tau_5 + [dl]_2 \\ [ee]_2 \tau_5 + [el]_2 \end{aligned} \right\} \quad (X.19)$$

Исключив из системы (X.19) неизвестные τ_2 и τ_3 , получим 2-ю частную связующую систему нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} [dd \cdot 2]_2 \tau_4 + [de \cdot 2]_2 \tau_5 + [dl \cdot 2]_2 \\ [ee \cdot 2]_2 \tau_5 + [el \cdot 2]_2 \end{aligned} \right\} \quad (X.20)$$

где коэффициенты имеют структуру

$$\left. \begin{aligned} [dd \cdot 2]_2 &= [dd]_2 - \frac{[hd]_2 [bd]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 1]_2 [cd \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2} \\ [de \cdot 2]_2 &= [de]_2 - \frac{[bd]_2 [be]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 1]_2 [ce \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2} \\ [dl \cdot 2]_2 &= [dl]_2 - \frac{[bd]_2 [bl]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 1]_2 [cl \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2} \\ [ee \cdot 2]_2 &= [ee]_2 - \frac{[be]_2 [be]_2}{[bb]_2} - \frac{[ce \cdot 1]_2 [ce \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2} \\ [el \cdot 2]_2 &= [el]_2 - \frac{[be]_2 [bl]_2}{[bb]_2} - \frac{[ce \cdot 1]_2 [cl \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2} \end{aligned} \right\} \quad (X.21)$$

Складывая соответствующие коэффициенты частных связующих систем, получаем коэффициенты общей связующей системы.

Учитывая выражения (X.18) и (X.21), можно написать, например:

$$[de \cdot 1]_1 + [de \cdot 2]_2 = [de]_1 + [de]_2 - \frac{[ad]_1 [ae]_1}{[aa]_1} - \frac{[bd]_2 [be]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 1]_2 [ce \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2}.$$

Учитывая, кроме равенств (X.18) и (X.21), еще равенства

$$[de]_1 + [de]_2 = [de];$$

$$[cd \cdot 1]_2 = [cd \cdot 2],$$

$$[ce \cdot 1]_2 = [ce \cdot 2],$$

$$[cc \cdot 1]_2 = [cc \cdot 2]$$

(первое неизвестное 2-й системы является вторым в общей системе), получаем

$$\begin{aligned} [de \cdot 1]_1 + [de \cdot 2]_2 &= [de] - \frac{[ad] [ae]}{[aa]} - \frac{[bd \cdot 1] [be \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \\ &- \frac{[cd \cdot 2] [ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = [de \cdot 3], \end{aligned}$$

т. е. убеждаемся в справедливости равенства

$$[de \cdot 1]_1 + [de \cdot 2]_2 = [de \cdot 3],$$

что и требовалось доказать.

Предоставляем читателю возможность самостоятельно убедиться в справедливости остальных равенств

$$[dd \cdot 1]_1 + [dd \cdot 2]_2 = [dd \cdot 3];$$

$$[dl \cdot 1]_1 + [dl \cdot 2]_2 = [dl \cdot 3];$$

$$[ce \cdot 1]_1 + [ce \cdot 2]_2 = [ce \cdot 3];$$

$$[cl \cdot 1]_2 + [cl \cdot 2]_2 = [cl \cdot 3].$$

Пример решения нормальных уравнений многогрупповым способом Прапис - Праевича.

Требуется решить две частично независимые системы нормальных уравнений:

$$1) \quad 4\tau_1 - \tau_3 - 2\tau_5 + 2$$

$$\tau_1 + 3\tau_4 + \tau_5 - 1$$

$$-2\tau_1 + \tau_4 + 5\tau_5 - 2$$

$$\Sigma_1 = 3\tau_1 + 5\tau_4 + 4\tau_5 - 1$$

$$2) \quad 4\tau_2 - \tau_3 - \tau_4 + \tau_5 + 3$$

$$-\tau_2 + 3\tau_3 - \tau_4 - 2\tau_5 + 2$$

$$-\tau_2 - \tau_3 + 3\tau_4 + 2\tau_5 - 3$$

$$\tau_2 - 2\tau_3 + 2\tau_4 + 5\tau_5 + 4$$

$$\Sigma_2 = 3\tau_2 - \tau_3 + 3\tau_4 + 6\tau_5 + 6.$$

Связующими неизвестными являются τ_4 и τ_5 . Остальные неизвестные в каждой системе исключаются.

Решение первой системы приведено в табл. 62, второй — в табл. 63. Для решения применялась сокращенная схема алгоритма Гаусса.

Коэффициент $[ee \cdot 1]_1 = 4,00 = 5,00 - 0,50 \cdot 2,00;$

• $[el \cdot 1]_1 = -1,00 = -2,00 + 0,50 \cdot 2,00;$

• $[es \cdot 1]_1 = -4,50 = +2,00 + 0,50 \cdot 5,00.$

Т а б л и ц а 62

Строка	τ_1	τ_4	τ_5	l	s	Контроль
N_1	4,00	+1,00	-2,00	+2,00	+5,00	-1,25
E_1		-0,25	+0,50	-0,50	-1,25	
N_4		3,00	+1,00	-1,00	+4,00	
N_5			5,00	-2,00	+2,00	
$N_4^{(3)}$		2,75 *	+1,50	-1,50	+2,75	+2,75
$N_5^{(3)}$			4,00	-1,00	+4,50	+4,50
Неизвестные	-1,24	+1,07	-0,94			

* Коэффициенты строки $N_4^{(3)}$ получены обычным путем, после исключения τ_1 .

Таблица 63

Строка	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	l	S	Контроль
N_2 E_2 N_3	4,00	-1,00 +0,25 3,00	-1,00 +0,25 -1,00	+1,00 -0,25 -2,00	+3,00 -0,75 +2,00	+6,00 -1,50 +1,00	-1,50
$N_3^{(2)}$ E_3 N_4 N_6		2,75	-1,25 +0,45 3,00	-1,75 +0,64 +2,00 5,00	+2,75 -1,00 -3,00 +4,00	+2,50 -0,91 0 +10,00	+2,50 -0,91
$N_4^{(3)}$ $N_6^{(3)}$			2,19	+1,46 3,63	-1,01 +5,01	+2,64 +10,10	+2,63 +10,10
Неизвестные	-0,53	-1,12	+1,07	-0,94			

Строка $N_4^{(3)}$ получена обычным способом. Коэффициенты строки $N_3^{(3)}$ получены следующим образом:

$$[ee \cdot 2]_2 = 5,00 - 0,25 \cdot 1,00 - 0,64 \cdot 1,75 = 3,63;$$

$$[el \cdot 2]_2 = +4,00 - 0,25 \cdot 3,00 + 0,64 \cdot 2,75 = 5,01;$$

$$[eS \cdot 2]_2 = +10,00 - 0,25 \cdot 6,00 + 0,64 \cdot 2,50 = +10,10.$$

Теперь получим коэффициенты связующей системы, суммируя соответствующие коэффициенты частных связующих систем, т. е. строк $N_4^{(3)}$ и $N_3^{(3)}$ табл. 62 и 63.

$$4,94\tau_4 + 2,96\tau_5 - 2,51 = 0; \quad \Sigma_1 = +5,39;$$

$$+2,96\tau_4 + 7,63\tau_5 + 4,01 = 0; \quad \Sigma_2 = +14,60.$$

Решение связующей системы выполнено в табл. 64.

Таблица 64

Строки	τ_4	τ_5	l	S	Контроль
$N_4^{(3)}$ E_4 $N_5^{(3)}$	4,94	+2,96 -0,60 7,63	-2,51 +0,51 +4,01	+5,39 -1,09 +14,60	-1,09
$N_5^{(4)}$		5,85	+5,52	+11,37	+11,37
Неизвестные	+1,07	-0,94			

Подставляя полученные неизвестные $\tau_4 = +1,07$ и $\tau_6 = -0,94$ в элиминационные строки табл. 62 и 63, находим остальные неизвестные $\tau_1 = 1,24$, $\tau_2 = -0,53$ и $\tau_3 = -1,12$.

Для контроля правильности решения подставим найденные неизвестные в сумму всех нормальных уравнений, которую, в свою очередь, получим как сумму уравнений Σ_1 и Σ_2 (т. е. сумм 1-й и 2-й систем)

$$3\tau_1 + 3\tau_2 - \tau_3 + 8\tau_4 + 10\tau_5 + 5 = \\ = -3 \cdot 1,24 - 3 \cdot 0,53 + 1,12 + 8 \cdot 1,07 - 10 \cdot 0,94 + 5,00 = -0,03.$$

Остаточная погрешность пренебрегаема.

Таким образом, практически убедились в полной строгости способа Пранис-Праневича.

Если связующие нормальные уравнения, в свою очередь, распадаются на частично независимые системы, то и для их решения можно применить способ Пранис-Праневича.

Многогрупповой способ Пранис-Праневича чаще всего применяют в сочетании с коррелятным способом с дополнительными неизвестными (см. § 71, п. 3).

4. Вычислительная схема для решения больших систем нормальных уравнений. Дополнительный контроль решений

Для решения больших систем нормальных уравнений (больше 10—20 уравнений) обычная сокращенная вычислительная схема становится неудобной, так как множители, сумму произведений которых вычисляют при получении преобразованных коэффициентов, могут оказаться удаляемыми одни от других на большое число граф. Это обстоятельство усложняет вычисления и сопряжено с возможными промахами в них.

Указанный недостаток устраняется применением двух вычислительных схем. На *схеме 1* выписывают коэффициенты уравнений первоначальной системы N и уравнений эквивалентной системы N_2 . На *схеме 2* выписывают коэффициенты элиминационных уравнений E .

Загибая лист бумаги по левому краю очередной графы *схемы 2*, прикладывают ее к правому краю соответствующей графы *схемы 1*, в результате чего все пары множителей, которые должны перемножаться, оказываются расположенными рядом.

Вид *схемы 1* и *схемы 2* показан в табл. 65.

Верхние края схем должны быть обозначены жирной чертой, чтобы не ошибиться, прикладывая *схему 2* к *схеме 1*.

Коэффициенты уравнений первоначальной системы (на *схеме 1* выделены полужирным прямым) следует выписывать чернилами другого цвета по сравнению с коэффициентами эквивалентных и элиминационных уравнений. Последние коэффициенты должны быть выписаны одним цветом.

В *схеме 1* заполняют все строки; в *схеме 2* — через строку.

Производственным опытом математической обработки большого числа геодезических измерений установлено, что в значениях коэффициентов первоначальной системы нормальных уравнений и в коэф-

Сцена 1

[illegible]

Creia 2

Т. 116711411 055

								Графы и строки
Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_6	$\dots$	L		
	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	$\dots$	E_{1L}	E_1	
	E_{23}	E_{24}	F_{20}	$\dots$	E_{2L}	E'_2		
			E_{34}	E_{38}	$\dots$	E'_{3L}	E_3	
				E_{45}	$\dots$	E_{4L}	E_4	
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

фициентах уравнений эквивалентной системы достаточно сохранять три значащие цифры (как правило, два десятичных знака); в коэффициентах эллиптических уравнений необходимо сохранять на два-три десятичных знака больше. Напомним еще, что при вычислении неизвестных их надо подставлять по мере получения в каждое очередное эквивалентное уравнение.

Хорошим контролем правильности вычисления «горки» может служить также вычисление неизвестных $u = z - 1$, для чего используется графа $s_j = N_{1j} + \dots + N_{ij} + N_{jk} + L_j$.

При уравнивании параметрическим способом обязательно проводят равенства

$$[pa_1v] = [pa_2v] = [pa_3v] = \dots = [pa_kv] = 0.$$

В коррелятном способе должны быть выполнены подстановки уравненных значений измеренных величин во все условные уравнения.

Если для решения уравнений применяется способ краковянов, то на месте строк $N_1^{(0)}, N_2^{(1)}, \dots, N_m^{(m-1)}$ в схеме 1 и строк E в схеме 2 размещаются краковяновые строки, которые придется таким образом выписывать по два раза. Вследствие этого применение способа краковянов для решения больших систем уравнений на настольных механических машинах неперспективно. На ЭВМ этот способ, несомненно, эффективнее алгоритма Гаусса.

§ 75. МЕТОД ПРИБЛИЖЕНИЙ

Если при уравнивании число как необходимых, так и избыточных величин большое (больше 50—100), то наиболее эффективным метод приближений. Этот метод удобен для вычислений как на настольных механических машинах, так и на электроно-вычислительных. Сущность метода заключается в следующем.

Задача уравнивания любым из двух основных способов в чисто математическом смысле есть задача на нахождение абсолютного минимума функции многих переменных.

При уравнивании параметрическим способом эта функция имеет вид

$$\sum_{i=1}^n p_i (a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i)^2 = F(\tau_1, \dots, \tau_k). \quad (X.22)$$

При уравнивании коррелятным способом функция приобретает вид

$$\sum_{i=1}^n q_i (a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{ir}k_r - p_i v_i)^2 = \Phi(k_1, \dots, k_r). \quad (X.23)$$

Поправки v_i в выражении (X.23) должны рассматриваться как величины, не зависящие от коррелят*.

* Если в таблице коэффициентов на месте l_i будут стоять величины $-p_i v_i$, то вместо $[pa_i l]$ получим $-[qpa_i v] = -[a_i v] = W_j$.

Система равенств

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, k) \quad (X.24)$$

даст систему нормальных уравнений с неизвестными τ_j ($j = 1, \dots, k$).

Система равенств

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, r) \quad (X.25)$$

даст систему нормальных уравнений коррелят, если учесть, что

$$-[a_j r] = W_j \quad (j = 1, \dots, r).$$

Итак, установлено, что задача уравнивания любым основным способом есть задача на нахождение абсолютного минимума квадратической функции многих переменных. Обозначим эту функцию через $f(z_1, \dots, z_m)$.

Система уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (X.26)$$

решает задачу.

Рассмотрим следующий способ решения задачи на отыскание абсолютного минимума функции $f(z_1, \dots, z_m)$. При этом известно, что функция (квадратическая) имеет единственную точку экстремума — минимум.

Для нахождения точки минимума разобьем неизвестные на группы, например, следующим образом: I группа — z_1, z_2 ; II группа — z_3, z_4, z_5 ; III группа — z_6, z_7 .

Далее будем последовательно в каждом i -м приближении находить минимумы функций

$$\left. \begin{aligned} f(z_1, z_2, z_3^{(i)}, z_4^{(i)}, z_5^{(i)}, z_6^{(i)}, z_7^{(i)}) &= F_I^{(i)}(z_1, z_2) = \min \\ f(z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, z_3, z_4, z_5, z_6^{(i)}, z_7^{(i)}) &= F_{II}^{(i)}(z_3, z_4, z_5) = \min \\ f(z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, z_3^{(i)}, z_4^{(i)}, z_5^{(i)}, z_6, z_7) &= F_{III}^{(i)}(z_6, z_7) = \min \end{aligned} \right\} \quad (X.27)$$

где $z^{(i)}$ — последние значения неизвестных, полученные в процессе приближений.

Функции $F^{(i)}$ будут изменяться с изменением значений $z^{(i)}$. Для решения указанных экстремальных задач необходимо решать системы линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } \frac{\partial F_I^{(i)}}{\partial z_j} &= 0 \quad (j = 1, 2) \\ \text{II. } \frac{\partial F_{II}^{(i)}}{\partial z_j} &= 0 \quad (j = 3, 4, 5) \\ \text{III. } \frac{\partial F_{III}^{(i)}}{\partial z_j} &= 0 \quad (j = 6, 7) \end{aligned} \right\} \quad (X.28)$$

Процесс приближений продолжается до тех пор, пока очередные значения неизвестных начнут повторяться.

Сходимость приближений для квадратичной функции теоретически никакых сомнений не вызывает и полностью подтверждена опытом.

При уравнивании основными способами приходится иметь дело с квадратичными функциями (X.22) и (X.23). Системы равенств (X.24) и (X.25) приобретают общий вид

[illegible]

Например, при $m = 7$ общая система нормальных уравнений имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} N_{11}z_1 + \dots + N_{17}z_7 + L_1 = 0 \\ \vdots \\ N_{17}z_1 + \dots + N_{77}z_7 + L_7 = 0 \end{array} \right\}. \quad (\text{X.30})$$

Системы уравнений (X.28) будут такими:

Группа

$$\left. \begin{aligned} N_{11}\bar{z}_1 + N_{12}\bar{z}_2 + L_1 i &= 0 \\ N_{12}\bar{z}_1 + N_{22}\bar{z}_2 + L_2 i &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{X.31})$$

где

$$\left. \begin{aligned} L_{1i} &= L_1 + N_{13}z_3^{(t)} + \dots + N_{17}z_7^{(t)} \\ L_{2i} &= L_2 + N_{23}z_3^{(t)} + \dots + N_{27}z_7^{(t)} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{X-32})$$

а $z_i^{(n)}$ ($j = 3, 4, 5, 6, 7$) суть последние значения неизвестных, полученные в процессе приближений.

II группа

$$\left. \begin{aligned} N_{33}z_3 + N_{34}z_4 + N_{35}z_5 + L_{3l} &= 0 \\ N_{34}z_3 + N_{44}z_4 + N_{45}z_5 + L_{4l} &= 0 \\ N_{35}z_3 + N_{45}z_4 + N_{55}z_5 + L_{5l} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{X.33})$$

the

$$\left. \begin{aligned} L_{3t} &= L_3 + N_{13}z_1^{(t)} + N_{23}z_2^{(t)} + N_{36}z_6^{(t)} + N_{37}z_7^{(t)} \\ L_{4t} &= L_4 + N_{14}z_1^{(t)} + N_{24}z_2^{(t)} + N_{46}z_6^{(t)} + N_{47}z_7^{(t)} \\ L_{5t} &= L_5 + N_{15}z_1^{(t)} + N_{25}z_2^{(t)} + N_{56}z_6^{(t)} + N_{57}z_7^{(t)} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{X.34})$$

III г р у н н а

$$\left. \begin{aligned} N_{66}z_6 + N_{67}z_7 + L_{6i} &= 0 \\ N_{67}z_6 + N_{77}z_7 + L_{7i} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (X.35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L_{6i} &= L_6 + N_{16}z_1^{(i)} + \dots + N_{56}z_5^{(i)} \\ L_{7i} &= L_7 + N_{17}z_1^{(i)} + \dots + N_{57}z_5^{(i)} \end{aligned} \right\}, \quad (X.36)$$

$$z_j^{(l)} \quad (j=1, 2, 3, 4, 5).$$

Таким образом, при решении частных систем уравнений (X.31), (X.33) и (X.35) в процессе приближений изменяться будут только их свободные члены. Поэтому преобразование коэффициентов повто

рять не придется. В каждом приближении будут выполняться только преобразования свободных членов.

Рассматривая равенства (X.32), (X.34) и (X.36), нетрудно видеть, что изменение свободного члена в очередном приближении равно сумме произведений соответствующих коэффициентов полной системы нормальных уравнений (т. е. системы (X.30) на последние значения неизвестных других групп. Однако можно избавиться и от преобразования свободных членов в каждом приближении, если включить в преобразования не только коэффициенты данной группы, но и остальные коэффициенты тех же уравнений. Тогда в процессе приближений можно пользоваться коэффициентами «полных элиминационных уравнений» частных систем и сразу по элиминационным строкам получать очередные значения неизвестных. В справедливости сказанного нетрудно убедиться, рассмотрев подробно процесс преобразования свободных членов, получаемых по формулам (X.32), (X.34) и (X.36) *.

Итак, при уравнивании методом приближений рекомендуется следующий порядок действий.

1. Составляют полные уравнения для каждой группы неизвестных и исключают из них неизвестные данной группы, в результате чего получают полные элиминационные уравнения данной группы. Так, например, полные уравнения I группы

$$\left. \begin{aligned} N_{11}z_1 + N_{12}z_2 + N_{13}z_3^{(i)} + N_{14}z_4^{(i)} + \\ + N_{15}z_5^{(i)} + N_{16}z_6^{(i)} + N_{17}z_7^{(i)} + L_1 = 0 \\ N_{12}z_1 + N_{22}z_2 + N_{23}z_3^{(i)} + N_{24}z_4^{(i)} + \\ + N_{25}z_5^{(i)} + N_{26}z_6^{(i)} + N_{27}z_7^{(i)} + L_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (X.37)$$

Исключая неизвестные z_1 и z_2 из системы (X.37), получаем элиминационные уравнения

$$\left. \begin{aligned} z_1^{(i+1)} &= E_{12}z_2^{(i+1)} + E_{13}z_3^{(i)} + E_{14}z_4^{(i)} + E_{15}z_5^{(i)} + E_{16}z_6^{(i)} + E_{17}z_7^{(i)} + E_{1L} \\ z_2^{(i+1)} &= E_{23}z_3^{(i)} + E_{24}z_4^{(i)} + E_{25}z_5^{(i)} + E_{26}z_6^{(i)} + E_{27}z_7^{(i)} + E_{2L} \end{aligned} \right\} \quad (X.38)$$

2. В процессе приближений используют уравнения типа (X.38), которые должны быть составлены для всех групп (конечно, в обратном порядке). При этом в уравнениях любой группы члены, содержащие неизвестные этой группы, располагают слева, члены с неизвестными других групп — справа.

При разделении неизвестных на группы общих неизвестных должно быть как можно меньше. Заметим, что в группы уравнений включают те уравнения, в которых неизвестные той же группы входят с квадратичными коэффициентами. Разумеется, в группах уравнений должна быть соблюдена симметричность коэффициентов относительно квадратичной диагонали.

* Вычислительный прием использования элиминационных уравнений для приближений предложен А. Д. Юдиным.

В приближениях вычисляют только те неизвестные в группах, которые требуются для других групп. Те же неизвестные, которые входят только в одну группу, получают после окончания приближений по соответствующим элиминационным строкам.

Описанный групповой метод приближений можно рассматривать как некоторое обобщение методов исключения и итерации. Если все неизвестные отнести в одну группу, то получим классический алгоритм Гаусса (или способ Крамеров); если же в группах оставить по одному неизвестному, то групповой метод приближений превратится в способ простой итерации.

Проиллюстрируем метод приближений примером, решенным способом Пранис-Праневича в § 74.

Пример.

Общая система нормальных уравнений

$$4\tau_1 + \tau_1 - 2\tau_3 = 0, \quad s_1 = +5.00.$$

$$\tau_2 - \tau_3 - \tau_1 + \tau_3 + 3 = 0, \quad s_2 = +6.00.$$

$$-\tau_2 + 3\tau_3 - \tau_1 - 2\tau_3 + 2 = 0, \quad s_3 = +1.00.$$

$$\tau_1 - \tau_2 - \tau_3 + 6\tau_1 + 3\tau_3 - 4 = 0, \quad s_4 = +4.00.$$

$$-2\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_3 + 3\tau_1 + 10\tau_3 + 2 = 0, \quad s_5 = +12.00.$$

Разобьем неизвестные на группы следующим образом: I группа — τ_1, τ_4 , II группа — τ_2, τ_3 .

Соответствующие полные уравнения

$$\left. \begin{aligned} 4\tau_1 + \tau_1 - 2\tau_3 + 2 &= 0 \\ \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 + 6\tau_1 + 3\tau_3 - 4 &= 0 \\ -2\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_3 + 3\tau_1 + 10\tau_3 + 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ I группа;}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 - \tau_3 - \tau_1 + \tau_3 + 3 &= 0 \\ \tau_2 + 3\tau_3 - \tau_1 - 2\tau_3 + 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ II группа.}$$

Элиминационные уравнения получены в табл. 66 и 67.

При большом числе уравнений в группах следует применять вычислительные схемы (см. табл. 65) и делать еще одну схему «Приближения». Таким образом, для каждой группы придется составлять три схемы. В нашем примере эти три схемы заменены одной, так как число уравнений в группах незначительно.

С точностью до 0,01 значения неизвестных совпали с результатами решения тех же уравнений способом Пранис-Праневича.

Если для окончательных значений неизвестных практически достаточно сохранять один десятичный знак, то приближения можно заканчивать, когда очередные изменения неизвестных станут меньше 0,05. В нашем примере в этом случае можно было бы закончить вычисления на третьем приближении.

Покажем теперь, что, применяя метод приближений при коррелятном способе, можно разбивать на группы условные уравнения, т. е. применять способ приближений Гаусса. При этом сходимость приближений будет обеспечена.

Известно, что в способе приближений Гаусса после каждого решения очередной группы условных уравнений вычисляют свободные члены следующей группы условных уравнений по исправленным результатам измерений и приближению заканчивают после исчезновения невязок.

Таблица 66

Уравне- ния	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	I	S
N_1	4,00	+1,00	-2,00	0	0	-2,00	+5,00
E_1		-0,250	-0,500	0	0	-0,500	-1,250
N_2		6,00	+3,00	-1,00	-1,00	-4,00	+4,00
$N_2^{(1)}$		5,75	+3,50	-1,00	-1,00	-4,50	+2,75
E_2			-0,609	+0,174	+0,174	+0,783	-0,478
N_3			10,00	+1,00	-2,00	+2,00	+12,00
$N_3^{(2)}$			6,87	+1,61	-1,39	+5,74	+12,83
E_3				-0,234	+0,202	-0,836	-1,868

Приближения

1	-1,24	+1,29	-0,84				
2		+1,12	-0,95	-0,45	-0,95		
3		+1,08	-0,94	-0,50	-1,09		
4		+1,07	-0,94	-0,52	-1,11		

Таблица 67

Уравне- ния	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	I	S
N_1	4,00	-1,00	-1,00	+1,00	+3,00	+6,00
E_1		+0,250	+0,250	-0,250	-0,750	-1,500
N_2		3,00	-1,00	-2,00	+2,00	+1,00
$N_2^{(1)}$		2,75	-1,25	-1,75	+2,75	+2,50
E_2			+0,455	+0,636	-1,000	-0,909

Приближения

1	-0,45	-0,95	+1,29	-0,84		
2	-0,50	-1,09	+1,12	-0,95		
3	-0,52	-1,11	+1,08	-0,94		
4	-0,52	-1,11	+1,07	-0,94		

Пусть группа условных уравнений имеет вид

$$\varphi_3(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

$$\varphi_4(x_1, \dots, x_n) = 0$$

и всего имеется пять уравнений. Тогда, например, во второй серии приближений очередные изменения свободных членов нормальных уравнений, согласно формулам (X.32), (X.34) и (X.36), будут равны

$$\Delta W_3 = [qa_3(a_1k'_1 + a_2k'_2 + a_3k'_3)],$$

$$\Delta W_4 = [qa_4(a_1k''_1 + a_2k''_2 + a_3k''_3)].$$

Но

$$a_{11}k''_1 + a_{12}k''_2 + a_{13}k''_3 = p_{11} \sum_i^S,$$

где v_i^{Σ} — суммарная поправка, полученная после всех предыдущих приближений. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \Delta W_3 &= [qa_3 p v^{\Sigma}] = [a_3 v^{\Sigma}] \\ \Delta W_4 &= [qa_4 p v^{\Sigma}] = [a_4 v^{\Sigma}] \end{aligned} \right\} \quad (X.39)$$

Те же выражения (X.39) для ΔW получим, если значения ΔW вычислим по исправленным результатам измерений $x_i + v_i^{\Sigma}$ ($i = 1, \dots, n$). Действительно, пусть $\Delta W_3 = W'_3 - W_3$, где W'_3 — новое значение свободного члена, вычисленное по $x_i + v_i^{\Sigma}$ ($i = 1, \dots, n$).

Разлагая в ряд

$$W'_3 = \varphi_3(x_1 + v_1^{\Sigma}, \dots, x_n + v_n^{\Sigma}) = \varphi_3(x_1, \dots, x_n) + [a_3 v^{\Sigma}] = W_3 + [a_3 v^{\Sigma}],$$

убеждаемся в справедливости равенства

$$\Delta W_3 = W'_3 - W_3 = [a_3 v^{\Sigma}].$$

Таким образом, способ Гаусса вытекает из общей теории группового метода приближений.

При разбивке неизвестных на группы следует учитывать, что с увеличением групп сходимость приближений будет ускоряться. Это показывают выражения (X.27). Очевидно, что чем больше неизвестных окажется в группах, тем больше будут «шаги приближений» к точке минимума.

Вычисления на ЭВМ

Для вычислений на ЭВМ с ограниченной оперативной памятью (2048 ячеек) в группы надо включать такое число неизвестных, чтобы составление и преобразования полных уравнений одной группы можно было бы выполнить, не обращаясь к внешней памяти. Применение способа краковянов позволит существенно увеличить число неизвестных (и уравнений) в группах. После завершения преобразований краковяновые коэффициенты отправляются на внешнюю память, а вся внутренняя память освобождается для преобразований следующей группы.

В процессе приближений необходимые краковяновые коэффициенты и очередные значения неизвестных других групп вызываются из внешней памяти на внутреннюю. Возвращаются на внешнюю память те же коэффициенты и последние значения неизвестных данной группы.

Таким образом, число обращений к внешней памяти будет приблизительно равно произведению числа групп на число приближений, т. е., как показывает опыт уравнивания больших геодезических сетей, — не более 30—50.

При соблюдении наших рекомендаций вероятность сбоя машины достаточно мала. Как показывает производственный опыт, эта вероятность меньше 0,1.

Применение ЭВМ позволяет значительно уменьшить требования к точности приближенных значений необходимых неизвестных при

уравнивания караметрическим способом. Если эти значения грубы, то после их уточнения в результате нескольких приближений линеаризацию уравнений связи и все последующие вычисления можно повторить, стерев перед этим всю промежуточную информацию. Указанный вычислительный прием оказался весьма эффективным для уравнивания триангуляции способом последовательной вставки пунктов. При этом после каждого приближения в оперативной памяти оставляют только координаты, все же остальное, кроме первичной информации, стирают*.

§ 76. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ

1. Формула среднего отношения весов и ее применение

Во многих случаях оценку точности измеренных величин и их функций можно значительно облегчить, применяя полученную в § 60 формулу среднего отношения весов. Эта формула среднего значения отношений весов результатов измерений к весам уравненных значений измеренных величин обычно позволяет получить приближенную, но практически достаточно удовлетворительную оценку точности, не прибегая к строгим, но гораздо более сложным формулам.

Приведем еще один вывод формулы (V.67)

$$\left(\frac{p}{P}\right)_{\text{ср}} = \frac{k}{n}.$$

где p — веса результатов измерений;

P — веса уравненных значений измеренных величин;

n — число всех измеренных величин;

k — число необходимых величин.

Вспомним обозначения параметрического способа уравнивания:

 x' — уравненные значения измеренных величин; t — необходимые неизвестные;

$$x'_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = a_{ij} \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, k).$$

Тогда для обратного веса значения z_i^* , т. е. уравненного значения измеренной величины, на основании формул (VII.33) можно написать

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_i} &= a_{i1}a_{i1}Q_{11} + 2a_{i1}a_{i2}Q_{12} + \dots + 2a_{i1}a_{ik}Q_{1k} + \\ &\quad + a_{i2}a_{i2}Q_{22} + \dots + 2a_{i2}a_{ik}Q_{2k} + \\ &\quad \dots \dots \dots + a_{ik}a_{ik}Q_{kk} = \\ &= a_{i1}a_{i1}Q_{11} + a_{i1}a_{i2}Q_{12} + \dots + a_{i1}a_{ik}Q_{1k} + \\ &\quad + a_{i2}a_{i1}Q_{21} + a_{i2}a_{i2}Q_{22} + \dots + a_{i2}a_{ik}Q_{2k} + \end{aligned}$$

* Описанный вычислительный прием предложен М. М. Машимовым.

Принимая во внимание выражение (VII.17), находим

11414

21

Принимая во внимание формулы (VII.22), имеем $[a_1\alpha_1] = [a_2\alpha_2] = \dots = [a_k\alpha_k] = 1$, поэтому, учитывая выражение (X.40), находим

11

T. C.

где n — число всех измерений, k — число необходимых величин.

Формулы (X.41) и (V.67) идентичны.

Приведем несколько примеров применения формулы (X.41).

В главе VII приведен пример уравнивания системы нивелирных ходов, состоящей из девяти ходов (вернее, звеньев ходов) и четырех определяемых точек, с оценкой точности всех определяемых высот и двух разностей высот (пример 1).

Разность высот $(t_1 - t_2)$ принята измеренной величиной, поэтому можно ожидать, что ее вес повысится после уравнивания в $\frac{n}{k} = \frac{9}{4}$ раз. Вес измерения этого звена $p_8 = 1,1$, стало быть, $P_8 \approx 1,1 \cdot \frac{9}{4} = 2,5$, откуда $\frac{1}{P_8} = 0,40$. Из уравнивания получено $\frac{1}{P_8} = 0,38$, т. е. практически то же число.

В отношении определяемых высот будем рассуждать так. До уравнивания вес $\bar{a}$ этих высот можно считать равными весам ходов от ближайших исходных марок, т. е. вес H'_{93} равен $p_1 = 1,2$; вес H'_{12} равен $p_3 = 1,1$; вес H'_{02} равен $p_7 = 1,2$ и вес H'_{86} равен $p_9 = 1,0$. Веса этих же высот после уравнивания получены такими: $P_{86} = 2,1$; $P_{02} = 2,9$; $P_{93} = 2,5$ и $P_{12} = 2,6$.

Наименьшие отношения весов

344

Среднее значение отношений весов равно

$$\frac{2.1+2.4+2.1+2.5}{4} = 2.3.$$

Но веса уравненных значений измеренных величин должны повыситься в среднем в $\frac{9}{4} = 2,25$ раза, а если определяемые высоты расположены равномерно в сети, то и их веса по сравнению с непосредственными передачами от ближайших исходных марок должны повыситься приблизительно во столько же раз.

Найдем теперь, пользуясь формулой (X.41), вес разности высот

$$(H_{93} - H_{66}) = t_3 - t_1.$$

Указанная разность может быть получена до уравнивания наиболее точно как сумма превышений $x_4 + x_5$. Обратный вес этой суммы равен $\frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} = 1,8$; вес равен 0,56.

Можно ожидать, что после уравнивания вес будет $0,56 \cdot 2,25 \approx 1,3$. На самом деле он оказался равным 1,5. Такое расхождение вполне допустимо.

Как видим, в рассмотренном примере вполне можно воспользоваться формулой (X.41), не прибегая к громоздким формулам строгой оценки точностей.

Рассмотрим другой пример. С 1955 по 1961 г. базисные стороны в сплошной триангуляции 2 класса располагали не более чем через 14 треугольников. Найдем точность наиболее слабой стороны в сети, которая будет находиться в центре квадрата, образованного четырьмя выходными сторонами, полагая базисные стороны безошибочными, а треугольники равнобедренными.

Точность передачи от любой базисной стороны к определяемой до уравнивания характеризуется формулой

$$\frac{m_s}{S} \approx \frac{m''}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{10}^*,$$

где m'' — средняя квадратическая ошибка измерения углов;

10 — число треугольников передачи.

В данном случае в качестве результатов измерений будем рассматривать треугольники с предварительно уравненными углами.

В квадрате, образованном четырьмя выходными сторонами, имеется около 200 треугольников. Все эти треугольники используются для получения определяемой стороны.

Следовательно, $\frac{n}{k} \approx \frac{200}{10} = 20$, и поэтому после уравнивания получим

$$\frac{m_s}{S} \approx \frac{m''}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{10}{20}} = \frac{m''}{\rho''} \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

* От вершины до центра квадрата расположено 10 треугольников.

Если прием $m'' = 0.9''$, получим

$$\frac{m_s}{S} \approx \frac{0.9''}{206\,265''} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \approx \frac{1}{400\,000}.$$

Такой же результат получен в работе проф. К. Л. Проворова * после строгих, но длительных и громоздких выкладок. Такое же согласие результатов получилось для точности дирекционного угла слабой стороны сети.

Следует, однако, иметь в виду, что формула (X.44) будет давать достаточно точные результаты лишь при умелом ее применении, когда учитывают только те измерения, которые заметно влияют на точность определяемой величины, и когда в качестве непосредственно измеренных величин принимают либо действительно измеренные величины, либо их функции, но мало связанные одна с другой.

2. Учет систематических влияний при уравнивании

Метод наименьших квадратов наиболее эффективен при соблюдении следующих условий:

- 1) ошибки измерений носят в основном случайный характер и их систематические части пренебрегаемы;
- 2) невязки условных уравнений являются результатом действия только ошибок измерений.

На практике эти два условия соблюдаются далеко не всегда. В действительности возникающие невязки отягощены очень часто не только случайными ошибками измерений, но и систематическими. Кроме того, невязки содержат и ошибки исходных данных, иногда довольно существенные.

Под систематическими влияниями понимают влияния систематических ошибок измерений и ошибок исходных данных на невязки в условных уравнениях.

Систематические влияния могут снижать эффективность применения метода наименьших квадратов.

В некоторых случаях влияние систематических ошибок измерений и ошибок исходных данных можно ослабить, учитывая его при обработке. В качестве простого примера можно привести вычисление превышений по сторонам геодезической сети из прямых и обратных наблюдений вертикальных углов. В среднем значении из прямого и обратного превышений в значительной степени будет ослаблено действие вертикальной рефракции и систематической ошибки измерения углов наклона.

При уравнивании результатов измерений нескольких связанных условиями величин параметры систематических влияний можно учитывать в виде дополнительных неизвестных в параметрических или в условных уравнениях поправок. Для этого, конечно, нужно

* К. Л. Проворов. О точности сплошных сетей триангуляции. М., Геоиздат, 1956. 163 с.

знать по возможности точнее закономерности систематических влияний.

В некоторых случаях характер систематических влияний можно установить методами интерполирования функций по измеренным значениям. Если известны аргументы, функциями которых могут рассматриваться систематические ошибки. Таким образом, например, решают задачи уравнивания высот в фотограмметрии или производят исследования систематических ошибок диаметров горизонтальных кругов теодолитов. В первом случае применяют параболическое интерполирование, во втором — периодическое.

Для иллюстрации используем пример уравнивания треугольника с исходной стороной и измеренными остальными пятью его элементами, который решен в главе V § 57 (пример 4) и § 59 (пример 4).

Пусть имеем основания считать, что измерения длин сторон треугольника отягощены постоянной относительной ошибкой. Тогда дополнительным неизвестным, которое должно быть определено из уравнивания, будет некоторый малый коэффициент $k = 1/D$, где D — знаменатель относительной ошибки.

В параметрические уравнения поправок для сторон искомый коэффициент нужно вводить следующим образом.

Уравненное значение s' измеренной стороны представляется в виде

$$s' = s + v - ks,$$

где s — измеренное значение стороны.

Отсюда

$$v = f(t_1, t_2) + ks - s,$$

и, наконец,

$$v = sk + at_1 + bt_2 + l,$$

где a , b и l имеют прежние значения.

Теперь имеем не два неизвестных, как раньше, а три — τ_1 , τ_2 и k .

Конечно, для s и k в первом члене уравнений поправок нужно выбрать соответствующие размерности. Так, в рассматриваемом примере расстояния равны 79 600 и 101 900 см и если коэффициент k можно предполагать равным около $1/100\,000$, то s выгодно выразить в километрах, а k — в сотых долях. Тогда значения s и k будут близки к единице.

В условных уравнениях поправок коэффициент k должен учитываться как дополнительное (неизмеренное) неизвестное. Делается это следующим образом.

Пишем условное уравнение

$$c = \frac{\sin x'_1}{\sin x'_3} - x'_4 = 0,$$

где c — исходная сторона и x' — уравненные значения измеренных величин.

Далее можно написать

$$c \frac{\sin(x_1 + v_1)}{\sin(x_3 + v_3)} - (x_1 + v_1 - x_1 \cdot k) = 0, \quad (X.42)$$

где x_i — измеренные значения величин.

Полагая приближенное значение неизвестного k равным нулю, т. е. $k^0 = 0$, получаем для невязки обычную формулу

$$W = c \frac{\sin x_1}{\sin x_3} - x_1.$$

Приводя равенство (X.42) к линейному виду, получаем условное уравнение поправок с дополнительным неизвестным

$$a_1 v_1 - a_3 v_3 - v_1 + (x_1)^{km} \cdot k + W = 0,$$

$$a_i = \frac{x_i}{\rho''} \operatorname{ctg} x_i.$$

В условном уравнении для другой стороны будет фигурировать то же дополнительное неизвестное k .

Конечно, нельзя дать рекомендаций для учета систематических влияний на все случаи. Для решения этой сложной задачи необходимо глубокое знание как предмета исследования, так и метода наименьших квадратов.

Рассмотрим теперь, как можно выявить наличие систематических влияний до уравнивания и установить, хотя бы примерно, их характер. Для этого необходимо подвергнуть анализу невязки, возникающие в математических соотношениях между результатами измерений при наличии избыточно измеренных величин. Результаты анализа тем надежнее, чем большее число невязок использовано для исследований.

Прежде всего необходимо получить по возможности точнее среднюю квадратическую ошибку измерений. Для этого можно воспользоваться формулой

$$m = \sqrt{\frac{[PW^2]}{n}}. \quad (X.43)$$

в которой фигурирует n невязок, свободных от систематических влияний. Если систематические ошибки являются только ошибками исходных данных, то в формуле (X.43) следует использовать только невязки, на которые совершенно не влияют эти ошибки, например, невязки замкнутых полигонов нивелирных ходов или невязки сумм углов треугольников.

Далее получают значение

$$m_0 = \sqrt{\frac{[PW]^2}{n_0}}, \quad (X.44)$$

где фигурируют только те невязки, на которых отражаются ошибки исходных данных, например, невязки ходов между исходными марками.

Если m_0 заметно больше m , то предполагаются существенные систематические влияния, характеристика которых на измеренные величины выражается величиной

$$m_\sigma = \sqrt{m_0^2 - m^2}. \quad (\text{X.45})$$

Дальнейшее исследование вопроса зависит от конкретных условий задачи.

§ 77. УРАВНИВАНИЕ ФУНКЦИЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ*

В геодезической практике часто встречаются случаи, когда включение в уравнивание функций результатов измерений позволяет упростить уравнивательные вычисления.

Рассмотрим условия, соблюдение которых обеспечивает строгость уравнивания функций результатов измерений.

Предположим, измерено n величин и получены результаты измерений $x_1, \dots, x_n$ с весами соответственно $p_1, \dots, p_n$. Пусть далее вычислено t величин

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1 \dots x_n) \\ &\dots \dots \dots \\ y_t &= f_t(x_1 \dots x_n) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{X.46})$$

уравненные значения которых должны удовлетворять условным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(y'_1 \dots y'_t) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_m(y'_1 \dots y'_t) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{X.47})^{**}$$

где $m < t < n$.

В равенстве (X.47)

$$y'_j = y_j + \delta_j \quad (j=1, 2, \dots, t), \quad (\text{X.48})$$

но в то же время должно быть

$$\begin{aligned} y'_j &= f_j(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = f_j(x_1 \dots x_n) + \\ &+ \frac{\partial f_j}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n} v_n \end{aligned}$$

или, имея в виду выражение (X.46),

$$y'_j = y_j + \frac{\partial f_j}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n} v_n. \quad (\text{X.49})$$

Сравнивая формулы (X.48) и (X.49) и обозначая

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \alpha_{ji}, \quad (\text{X.50})$$

получаем

$$\delta_j = \alpha_{j1} v_1 + \alpha_{j2} v_2 + \dots + \alpha_{jn} v_n \quad (j=1, 2, \dots, t). \quad (\text{X.51})$$

* § 77 написал докт. техн. наук, профессором Е. Г. Бойко.

** Разумеется, условные уравнения (X.47) должны быть эквивалентны основным уравнениям, возникающим между измеренными величинами.

Здесь q — диагональная матрица обратных весов измеренных величин,

$$q = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix},$$

k — вектор коррелят, C^T — транспонированная матрица C .

Докажем следующую теорему: уравнивание функций результатов измерений приведет к тем же конечным результатам, что и уравнивание непосредственно измеренных величин, если обратные веса функций задать матрицей

$$\frac{1}{P'} = Q' = \begin{pmatrix} [q\alpha_1\alpha_1] & [q\alpha_1\alpha_2] & \dots & [q\alpha_1\alpha_l] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [q\alpha_l\alpha_1] & [q\alpha_l\alpha_2] & \dots & [q\alpha_l\alpha_l] \end{pmatrix}. \quad (X.60)$$

Доказательство. Равенство (X.60) в матричном виде можно представить так:

$$Q' = \alpha q \alpha^T. \quad (X.61)$$

Примем в качестве исходной систему условных уравнений (X.55) и выполним уравнивание под условием $[P'\delta^2] = \min$, где P' задается матрицей (X.60).

Система нормальных уравнений коррелят в этом случае примет вид

$$A Q' A^T k + W = 0, \quad (X.62)$$

или, учитывая выражение (X.61),

$$A \alpha q \alpha^T A^T k + W = 0. \quad (X.63)$$

Но ранее мы установили, что строгое уравнивание под условием $[p v^2] = \min$ приводит к системе нормальных уравнений (X.59), которую с учетом (X.57) можно записать так

$$(A\alpha) q (A\alpha)^T k + W = 0. \quad (X.64)$$

Принимая во внимание известное соотношение

$$(A\alpha)^T = \alpha^T A^T,$$

получаем из (X.64)

$$A \alpha q \alpha^T A^T k + W = 0. \quad (X.65)$$

Совпадение равенств (X.63) и (X.65) доказывает теорему.

Рассмотрим некоторые следствия доказанной теоремы.

в которых величины Z связаны системой условных уравнений

$$AZ + W = 0, \quad (X.69)$$

или, с учетом выражений (X.68),

$$A\beta\alpha X + W = 0. \quad (X.70)$$

Уравнивание под условием $[pv^2] = \min$ приведет к системе нормальных уравнений коррелят

$$(A\beta\alpha) \eta (A\beta\alpha)^T k + W = 0$$

или

$$A\beta\alpha q\alpha^T \beta^T A^T k + W = 0. \quad (X.71)$$

Выполним теперь уравнивание под условием $[P_z \delta_z^2] = \min$, где δ_z — поправки в сложную функцию $z\{y(x)\}$. Для этого в соответствии с доказанной теоремой построим весовые матрицы

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= \alpha q \alpha^T \\ Q_z &= \beta Q_\beta \beta^T \end{aligned} \right\}. \quad (X.72)$$

Система нормальных уравнений, соответствующая системе условных уравнений (X.69), примет вид

$$AQ_z A^T k + W = 0. \quad (X.73)$$

Подставим в равенство (X.73) выражения Q_z и Q_y из равенств (X.72). Тогда

$$AQ_z A^T k + W = A\beta Q_y \beta^T A^T k + W = A\beta\alpha q \alpha^T \beta^T A^T k + W = 0. \quad (X.74)$$

Последнее равенство тождественно совпадает с равенством (X.71), что и требовалось доказать.

Значения функции $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

$\pm t$	$\psi(t)$	$-d$	$\pm t$	$\psi(t)$	$-d$	$\pm t$	$\psi(t)$	$-d$	$\pm t$	$\psi(t)$	$-d$
0,00	0,399		1,00	0,242		2,00	0,054		3,00	0,004	
		2			24			10			1
0,10	397		1,10	218		2,10	044		3,10	003	
		6			24			8			1
0,20	391		1,20	194		2,20	036		3,20	002	
		10			23			8			0
0,30	381		1,30	171		2,30	028		3,30	002	
		13			21			6			1
0,40	368		1,40	150		2,40	022		3,40	001	
		16			20			4			0
0,50	352		1,50	130		2,50	018		3,50	001	
		19			19			4			0
0,60	333		1,60	111		2,60	014		3,60	0,001	
		21			17			4			1
0,70	312		1,70	094		2,70	010		3,70	0	
		22			15			2			
0,80	290		1,80	079		2,80	008				
		24			13			2			
0,90	266		1,90	066		2,90	006				
		24			12			2			
1,00	242		2,00	054		3,00	004				

$$P(k) = \psi(t) dt,$$

$$\text{где } t = h\xi, \quad h = \sqrt{\frac{n}{pq}}, \quad \xi = \frac{k}{n} - p, \quad dt = \frac{h}{n}.$$

Вероятности $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt,$$

где $t = \frac{\xi_0}{\sigma} = h \left(\frac{k}{n} - p \right)$, $h^2 = \frac{n}{pq}$,

$\pm \xi_0$ — заданные пределы изменений аргумента $\xi = x - \bar{X}$

t	$\Phi(t)$	d	t	$\Phi(t)$	d	t	$\Phi(t)$	d	t	$\Phi(t)$	d
0,00	0,000	80	1,00	0,683	46	2,00	0,955	9	3,00	0,997	1
0,10	0,080	79	1,10	0,729	41	2,10	0,964	8	3,10	0,998	1
0,20	0,159	77	1,20	0,770	36	2,20	0,972	7	3,20	0,999	0
0,30	0,236	75	1,30	0,806	32	2,30	0,979	5	3,30	0,999	0
0,40	0,311	72	1,40	0,838	28	2,40	0,984	4	3,40	0,999	1
0,50	0,383	68	1,50	0,866	24	2,50	0,988	3	3,50	1,000	
0,60	0,451	65	1,60	0,890	21	2,60	0,991	2			
0,70	0,516	60	1,70	0,911	17	2,70	0,993	2			
0,80	0,576	56	1,80	0,928	15	2,80	0,995	1			
0,90	0,632	51	1,90	0,943	12	2,90	0,996	1			
1,00	0,683		2,00	0,955		3,00	0,997				

Вероятности $F(t_0)$ Приложение 3

$$F(t_0) = \frac{1}{V 2\pi} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt, \quad \text{где } t_0 = \frac{\xi_0}{\sigma} = h \left(\frac{k}{n} - p \right), \quad h^2 = \frac{n}{pq},$$

$\xi_0 = x_0 - \bar{X}$, x_0 — наибольшее заданное значение случайной величины

$\pm t_0$	$F(-t_0)$	$F(+t_0)$	$\pm d$	$\pm t_0$	$F(-t_0)$	$F(+t_0)$	$\pm d$	$\pm t_0$	$F(-t_0)$	$F(+t_0)$	$\pm d$
0,00	0,500	0,500	40	1,00	0,159	0,841	23	2,00	0,023	0,977	5
0,10	0,460	0,540	39	1,10	0,136	0,864	21	2,10	0,018	0,982	4
0,20	0,421	0,579	39	1,20	0,115	0,885	18	2,20	0,014	0,986	3
0,30	0,382	0,618	37	1,30	0,097	0,903	16	2,30	0,011	0,989	3
0,40	0,345	0,655	37	1,40	0,081	0,919	14	2,40	0,008	0,992	2
0,50	0,308	0,692	34	1,50	0,067	0,933	12	2,50	0,006	0,994	1
0,60	0,274	0,726	32	1,60	0,055	0,945	10	2,60	0,005	0,995	1
0,70	0,242	0,758	30	1,70	0,045	0,955	9	2,70	0,004	0,996	1
0,80	0,212	0,788	28	1,80	0,036	0,964	7	2,80	0,003	0,997	1
0,90	0,184	0,816	25	1,90	0,029	0,971	6	2,90	0,002	0,998	1
1,00	0,159	0,841		2,00	0,023	0,977		3,00	0,001	0,999	

Значения $P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ (распределение Пуассона)

m	$a=0,1$	$a=0,2$	$a=0,3$	$a=0,4$	$a=0,5$	$a=0,6$	$a=0,7$	$a=0,8$	$a=0,9$
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1247	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

m	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Обозначения в таблице соответствуют следующим обозначениям § 15:
 $m=k$, $a=k_0$, $P_m=P_{(k)}$.

* Таблица заимствована из книги Е. С. Вентцель «Теория вероятностей». М., «Наука», 1964. 576 с.

Значения t_{β} удовлетворяющие равенству $\beta = 2 \int_0^{t_{\beta}} S_r(t) dt = \Phi'(t)$ в зависимости от β и r
 (распределение Стюдента)
 r — число степеней свободы; β — доверительная вероятность

r	β									
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,90	0,95	0,98	0,990	0,999	
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86	
6	718	906	1134	1440	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96	
7	711	896	1119	1415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40	
8	706	889	108	1397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04	
9	703	883	100	1383	1,831	2,26	2,82	3,25	4,78	
10	700	879	093	1372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59	
11	697	876	088	1363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,46	
12	695	873	083	1356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32	
13	694	870	079	1350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22	
14	692	868	076	1345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14	
15	691	866	074	1341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07	
16	690	865	071	1337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02	
17	689	863	069	1333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96	
18	688	862	067	1330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92	
19	688	861	066	1328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88	
20	687	860	064	1325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85	
21	686	859	063	1323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82	
22	686	858	061	1321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79	
23	685	858	060	1319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77	
24	685	857	059	1318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74	
25	684	856	058	1316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72	
26	684	856	058	1316	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71	
27	684	855	057	1314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69	
28	683	855	056	1313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67	
30	683	854	055	1310	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65	
40	681	851	050	1303	1,684	2,02	2,42	2,70	3,55	

Значения χ^2 в зависимости от r и p

r	p											
	0,00	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98
1	0,000	0,001	0,004	0,006	0,016	0,064	0,148	0,213	0,246	0,277	0,295	0,308
2	0,020	0,040	0,103	0,146	0,214	0,286	0,386	0,473	0,536	0,584	0,613	0,630
3	0,115	0,185	0,352	0,475	0,636	0,808	1,000	1,192	1,354	1,484	1,579	1,646
4	0,297	0,429	0,711	0,904	1,169	1,484	1,849	2,164	2,429	2,644	2,799	2,921
5	0,554	0,752	1,145	1,460	1,884	2,368	2,892	3,356	3,760	4,114	4,329	4,501
6	0,872	1,134	1,635	2,072	2,560	3,108	3,676	4,174	4,612	4,996	5,239	5,431
7	1,239	1,564	2,173	2,660	3,216	3,832	4,408	4,944	5,432	5,870	6,179	6,441
8	1,646	2,023	2,733	3,260	3,856	4,512	5,128	5,704	6,240	6,736	7,099	7,411
9	2,09	2,53	3,32	3,904	4,568	5,296	5,984	6,632	7,240	7,808	8,219	8,581
10	2,56	3,06	3,94	4,568	5,296	5,984	6,632	7,240	7,808	8,219	8,581	8,943
11	3,05	3,61	4,58	5,296	5,984	6,632	7,240	7,808	8,219	8,581	8,943	9,305
12	3,57	4,18	5,23	5,89	6,30	6,71	7,04	7,37	7,64	7,91	8,13	8,35
13	4,11	4,76	5,89	6,30	6,71	7,04	7,37	7,64	7,91	8,13	8,35	8,57
14	4,66	5,37	6,57	6,99	7,39	7,79	8,12	8,40	8,63	8,82	9,00	9,17
15	5,23	5,98	7,26	7,66	8,05	8,44	8,77	9,05	9,31	9,55	9,76	9,96
16	5,81	6,61	7,96	8,36	8,75	9,14	9,47	9,74	9,99	10,23	10,44	10,64
17	6,41	7,26	8,67	9,07	9,45	9,83	10,16	10,43	10,68	10,91	11,12	11,32
18	7,02	7,91	9,39	9,79	10,16	10,53	10,85	11,12	11,37	11,60	11,80	12,00
19	7,63	8,57	10,11	10,51	10,88	11,24	11,55	11,82	12,07	12,30	12,50	12,69
20	8,26	9,24	10,85	11,25	11,62	11,98	12,29	12,56	12,80	13,02	13,21	13,40
21	8,90	9,92	11,59	11,99	12,36	12,72	13,03	13,30	13,54	13,76	13,95	14,14
22	9,54	10,60	12,34	12,74	13,11	13,47	13,78	14,04	14,28	14,50	14,69	14,87
23	10,20	11,29	13,09	13,49	13,86	14,22	14,53	14,79	15,02	15,23	15,42	15,60
24	10,86	11,99	13,85	14,25	14,62	14,98	15,29	15,55	15,78	15,99	16,18	16,36
25	11,52	12,70	14,61	15,01	15,38	15,74	16,05	16,31	16,54	16,75	16,94	17,12
26	12,20	13,41	15,38	15,78	16,15	16,51	16,82	17,08	17,31	17,51	17,69	17,87
27	12,88	14,12	16,15	16,55	16,92	17,28	17,59	17,85	18,08	18,28	18,46	18,64
28	13,56	14,85	16,93	17,33	17,70	18,06	18,37	18,63	18,86	19,06	19,24	19,41
29	14,26	15,57	17,71	18,11	18,48	18,84	19,15	19,41	19,64	19,84	20,02	20,19
30	14,95	16,31	18,49	18,89	19,26	19,62	19,93	20,19	20,42	20,62	20,80	20,97

* Таблица заимствована из книги Е. С. Вентцель «Теория вероятностей», М., «Наука», 1964, 576 с.

Значения функции

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1104	0,1206	0,1307	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3095	0,3205	0,3316	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3881	0,4001	0,4118
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
0,5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
0,9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9450	2,0923	2,2976	2,6466
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3,4334	3,6602

1. Агекян Т. А. Теория вероятностей для астрономов и физиков. М., «Наука», 1974. 264 с. с ил.
2. Большаков В. Д. Об оценке степени приближения действительного распределения ошибок к нормальному. — «Труды Московского ин-та инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии», 1957, вып. 27, с. 53—56 с ил.
3. Большаков В. Д. Применение метода корреляции при оценке точности светодальномерных измерений. — Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1958, вып. 1, с. 21—30 с ил.
4. Большаков В. Д. Определение постоянных в эмпирических формулах методом логарифмической корреляции. — «Труды Московского ин-та инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии», 1962, вып. 49, с. 3—10 с ил.
5. Большаков В. Д. Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей. М., «Недра», 1965. 184 с. с ил.
6. Bolj'sakov V. D. Teorija grešaka posmatranja sa osnovama teorija. Verovatnoće. Beograd, 1970. 189 с.
7. Бродский А. Д., Кан В. Л. Краткий справочник по математической обработке результатов измерений. М., Стандартгиз, 1960. 167 с. с ил.
8. Бочаров М. К., Николаев С. А. Математико-статистические методы в картографии. М., Геодезиздат, 1957. 158 с. с ил.
9. Боярский А. Я. Теоретические исследования по статистике. М., «Статистика», 1974. 304 с. с ил.
10. Бурмистров Г. А. Задачник по способу наименьших квадратов. М., Геодезиздат, 1960. 347 с. с ил.
11. Бурмистров Г. А. Основы способа наименьших квадратов. М., Госгеолтехиздат, 1963. 392 с. с ил.
12. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964. 576 с. с ил.
13. Видуев Н. Г., Кондра Г. С. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений. М., «Недра», 1969. 320 с. с ил.
14. Гайдаев П. А. Уравнивание триангуляции. М., Геодезиздат, 1960. 260 с. с ил.
15. Гайдаев П. А. Вычисление геодезической сети 3 и 4 классов. М., 1972. 184 с. с ил.
16. Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения. Т. 1. М., Геодезиздат, 1957. 152 с. с ил.
17. Гмурман В. Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. М., «Высшая школа», 1966. 340 с. с ил.
18. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1970. 240 с. с ил.
19. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1969. 400 с. с ил.
20. Гордеев Ю. А. Обобщение приемов оценки точности положения пунктов плановых опорных геодезических сетей. Л., «Морской транспорт», 1959. 134 с. с ил.
21. Гордеев А. В., Шаруня С. Г. Уравнивание геодезических сетей. М., Геодезиздат, 1961. 324 с. с ил.
22. Гутер Р. С., Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М., Физматгиз, 1962. 356 с. с ил.

От редакторов первого издания	
Предисловие к первому изданию	
Предисловие ко второму изданию	
Введение	

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Глава I. Элементы теории вероятностей	
§ 1. Предмет теории вероятностей	
§ 2. События	
§ 3. Относительная частота и вероятность события	
§ 4. Сложение вероятностей	
§ 5. Независимые и зависимые события	
§ 6. Умножение вероятностей	
§ 7. Распределение вероятностей при многократных испытаниях (биномиальное распределение)	
§ 8. Вероятнейшее число появлений события при многократных ис- пытаниях	
§ 9. Предельный закон Муавра — Лапласа (нормальный закон распределения вероятностей при многократных испытаниях) . .	
§ 10. Интеграл вероятностей	
§ 11. Случайные величины	
§ 12. Законы распределения случайных величин	
§ 13. Основные характеристики (параметры распределения) слу- чайной величины	
§ 14. Нормальный закон распределения для случайных величин .	
§ 15. О некоторых распределениях, отличающихся от нормального	
§ 16. Понятие о многомерных распределениях систем независимых случайных величин	
§ 17. Предельные законы	
Глава II. Элементы математической статистики	

§ 18. Выборочный метод	
§ 19. Дополнительные характеристики выборки	

§ 20. Оценка приближенного значения математического ожидания	79
§ 21. Оценка эмпирического значения дисперсии	84
§ 22. Сравнение эмпирического распределения с теоретическим	86
§ 23. Понятие о статистических связях	88
§ 24. Коэффициент корреляции	89
§ 25. Свойства коэффициента корреляции. Уравнение регрессии	90

Глава III. Основы теории ошибок измерений 95

§ 26. Задачи теории ошибок измерений	95
§ 27. Общие сведения об измерениях	96
§ 28. Ошибки измерений	97
§ 29. Классификация ошибок измерений	99
§ 30. Критерии точности измерений	101
§ 31. Абсолютные и относительные ошибки	105
§ 32. Оценка точности приближенного значения средней квадратической ошибки m_{Δ}	106
§ 33. Исследование рядов измерений	108
§ 34. Параметры закона распределения ошибок измерений	113
§ 35. Средние квадратические ошибки функций измеренных величин	114
§ 36. Ошибки округлений	120
§ 37. Влияние ошибок округлений аргументов на точность функций	124
§ 38. Систематические ошибки измерений	128
§ 39. Некоторые рекомендации по уменьшению влияния систематических ошибок измерений	131

Глава IV. Математическая обработка измерений одной величины . . 134

§ 40. Наиболее надежное значение многократно и равнооточно измеренной величины и оценка точности	134
§ 41. Порядок обработки равнооточных измерений одной величины	139
§ 42. Наиболее надежное значение многократно и неравнооточно измеренной величины	143
§ 43. Общие сведения о весах; ошибка единицы веса	147
§ 44. Вычисление весов функций	148
§ 45. Исследование ряда неравнооточных измерений	151
§ 46. Вычисление ошибки единицы веса	152
§ 47. Установление доверительных границ при неравнооточных измерениях	157
§ 48. Порядок обработки неравнооточных измерений одной величины	157
§ 49. Оценка точности по разностям двойных равнооточных измерений	160
§ 50. Оценка точности по разностям двойных неравнооточных измерений	167

- § 51. Примеры оценки точности по разностям двойных измерений
- § 52. Допуски для результатов измерений и их функций

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Глава V. Основы метода наименьших квадратов

- § 53. Сущность задачи совместного уравнивания нескольких измеренных величин
- § 54. Принцип наименьших квадратов
- § 55. Основные пути решения задачи уравнивания
- § 56. Параметрический способ уравнивания
- § 57. Примеры уравнивания параметрическим способом
- § 58. Коррелятивный способ уравнивания
- § 59. Примеры уравнивания коррелятивным способом
- § 60. Об оценке точности по материалам уравнивания

Глава VI. Составление и решение нормальных уравнений

- § 61. Вычисление коэффициентов нормальных уравнений
- § 62. Решение нормальных уравнений
- § 63. Полная и сокращенная схемы решения нормальных уравнений алгоритмом Гаусса
- § 64. Способ Крамера
- § 65. Решение уравнений способом простой итерации

Глава VII. Способы вычисления весов функций. Примеры уравнивания с оценкой точности

- § 66. Вычисление весов функций при уравнивании параметрическим способом
- § 67. Примеры уравнивания параметрическим способом с оценками точности
- § 68. Вычисление весов функций при уравнивании коррелятивным способом
- § 69. Примеры уравнивания коррелятивным способом с оценками точности

Глава VIII. Видоизменения основных способов уравнивания

- § 70. Групповые способы решения условных уравнений
- § 71. Комбинированные способы уравнивания

Глава IX. Интерполирование по измеренным значениям функции (аппроксимация)

- § 72. Интерполирование заданных функций с неизвестными параметрами
- § 73. Способ Чебышева

Г л а в а X. Уравнительные вычисления при большом числе неизвестных	325
§ 74. Составление и решение больших систем нормальных уравнений	325
§ 75. Метод приближений	336
§ 76. Некоторые вопросы оценки точности	343
§ 77. Уравнивание функций результатов измерений	349
Приложения	353
Список литературы	361