

Артур Бенджамин

МАГИЯ МАТЕМАТИКИ

*Как найти x
и зачем это нужно*

Arthur Benjamin

THE MAGIC OF MATH

*Solving for x
and Figuring Out Why*

BASIC BOOKS

A Member of the Perseus Books Group

New York

Артур Бенджамин

МАГИЯ МАТЕМАТИКИ

*Как найти x
и зачем это нужно*

Перевод с английского



Москва
2016

УДК 51
ББК 22.1
Б46

Переводчик Д. Глебов
Научный редактор А. Чижова
Редактор В. Потапов

Бенджамин А.

Б46 Магия математики: Как найти x и зачем это нужно / Артур Бенджамин ; Пер. с англ. — М. : Альпина Паблишер, 2016. — 342 с.

ISBN 978-5-9614-5588-5

Почему нельзя было раньше узнавать о числах, алгебре и геометрии в такой увлекательной форме? «Магия математики» — та книга, о которой вы мечтали в школе. Используя множество необычных примеров — игральные карты, шарики мороженого, измерение гор, — Артур Бенджамин рассказывает вам о красоте математических формул. Все, от чего раньше голова шла кругом, теперь оказывается простым и ясным.

В книге объясняется и то, что не столь хорошо знакомо неискушенному читателю: треугольник Паскаля, математическая бесконечность, магические свойства некоторых чисел, последовательность Фибоначчи, золотое сечение. Это расширит и обогатит ваши знания, а чем глубже вы постигаете математику, тем более захватывающей оказывается ее магия.

УДК 51
ББК 22.1

Все права защищены. Никакая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, включая размещение в сети Интернет и в корпоративных сетях, а также запись в память ЭВМ для частного или публичного использования, без письменного разрешения владельца авторских прав. По вопросу организации доступа к электронной библиотеке издательства обращайтесь по адресу mylib@alpina.ru.

© Arthur Benjamin, 2015
Публикуется с разрешения издательства
BASIC BOOKS, an imprint of PERSEUS
BOOKS LLC. (США) при содействии
Агентства Александра Корженевского
(Россия)
© Издание на русском языке,
перевод, оформление.
ООО «Альпина Паблишер», 2016

ISBN 978-5-9614-5588-5 (рус.)
ISBN 978-0-465-05472-5 (англ.)

*Эту книгу я посвящаю своей жене Дине
и нашим дочерям — Лорел и Ариэль*

Содержание

	Вступление.....	9
0	Предисловие.....	11
1	Магия чисел.....	15
2	Магия алгебры.....	37
3	Магия 9.....	63
4	Магия счета.....	85
5	Магия последовательности Фибоначчи.....	113
6	Магия доказательств.....	139
7	Магия геометрии.....	169
8	Магия числа π	203
9	Магия тригонометрии.....	229
10	Магия чисел i и e	257
11	Магия исчисления.....	283
12	Магия бесконечности.....	309
	Итого.....	337
	Благодарности.....	339

Вступление

Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит.

М.В. Ломоносов

Не люблю длинных предисловий. Хочется сразу начать читать книгу. Но здесь не совсем обычная книга. Кажется, что слово «магия» предполагает некоторые фокусы и трюки. Не скрою, они здесь есть, и многим это понравится. Правда, книга не об этом.

Мы задаемся вопросом, зачем нам нужна математика. Особенно гуманитариям. Мой личный опыт научил меня определенному отношению к этому вопросу. Навыки математического мышления оказались нужны всем и каждому. Если вы, конечно, любите размышлять, а не зубрить. Если вам доставляет удовольствие сам процесс логических рассуждений. Парадокс именно в том, что магия, волшебство математики проявляется постепенно, как рассвет. Не сразу, но заметно. Не ярко, но очень красиво.

Вдруг вы замечаете у себя умение логически мыслить и рассуждать, грамотно и четко формулировать мысли, делать верные логические выводы. Вдруг вам просто становится после этого легче общаться с людьми.

Особенно математика важна для развития ребенка. Она дает возможность сразу правильно и рационально мыслить. Причем навсегда. Мне повезло в жизни. У меня было два прекрасных преподавателя. Оба стали моими Учителями. Один преподавал язык и литературу и утверждал, что, «не зная грамматики — не выучишь математики». Второй преподавал математику и «приводил в порядок наши мысли». Они крепко дружили между собой. И, похоже, они считали оба эти предмета волшебно полезными для нашей жизни. Одно оказалось неотделимо от другого. Особенно сильно это проявилось позднее, когда я стал играть (иногда безуспешно) в различные интеллектуальные игры. Вот такая магия получилась.

Мозг требует таких же тренировок, как и любая другая мышца человеческого организма. Когда-то, лет 30 назад, я работал в Федерации бодибилдинга, как смешно это ни звучит. Должен заметить, что тогда меня сильно удивило интеллектуальное развитие спортсменов, особенно занимающих призовые места на самых престижных турнирах. Оказалось, что для подготовки надо быть почти кандидатом медицинских наук. Ну а когда человек начинает читать разную литературу, его любопытство направляет ум в самые невероятные места. Призер «Мистер Олимпия» Олег Отрох специально занимался математикой. Она помогала ему добиться нужной концентрации. Кроме того, он был убежден, что математика защищает его разум от всяких Паркинсонов и Альцгеймеров. Роберт Фишер — между прочим, чемпион мира по шахматам — научился читать и писать только потому, что иначе он не мог записывать шахматные партии, как того требовали правила. И вот тут он открыл для себя, как помогает ему мыслить математика. Не мог оторваться до последних своих дней.

Вы еще задаетесь вопросом, зачем вам нужна математика? Особенно гуманитариям? Выходит, не только сдачу в магазине считать. Мой личный опыт научил меня определенному отношению к этому вопросу. Навыки математического мышления оказались нужны всем и каждому. Вся эволюция человека от узелков на веревочках и абака до суперкомпьютеров прошла рука об руку с математикой. Даже просто оценивая картину в музее или памятник на улице, мы подсознательно обращаем внимание на пропорции. Благодаря математике мы умеем видеть красоты мира и природы. Каждый раз, выбирая смартфон или компьютер, мы невольно оперируем математическими терминами. Мы гордимся своими селфи, произнося слово «мегапиксели» как заклинание. Вот такая математика. Она не только делает нас разумнее, тренирует наш мозг, развивает нас как личность. Она просто помогает нам жить.

А магия? А что магия? Магия в книге есть. Забавная, замечательная, необыкновенная и неожиданная. Причем даже для тех, кто полагает, что знает эту самую математику. Хочется, чтобы вы ее тоже увидели своими глазами. Увидели и насладились. Это очень красиво.

P.S. А парочку фокусов и трюков я все-таки запомнил.

Александр Рубин,
*мзаркетолог, экономист, инженер, член российского отделения IAA, игрок
и один из основателей клуба «Что? Где? Когда?» в Днепропетровске*

ГЛАВА НОМЕР НОЛЬ

Предисл0вие

Всю мою жизнь меня тянуло к магии. Не счесть, сколько кудесников видел я на своем веку, как и не счесть, сколько чудес я сотворил собственными руками. Но я не перестаю восхищаться тем, как работает магия, как из простых и понятных вроде бы действий и алгоритмов вдруг рождается поразительное, непостижимое искусство — искусство, которое я так обожаю постигать. Несколько основных принципов — и вот я уже сам придумываю трюки.

Примерно то же чувство я испытываю, когда дело касается математики. С самого детства шестым чувством я ощущал, что в числах кроется истинная магия. Как вам, например, вот это? Задумайте любое число в промежутке от 20 до 100. Задумали? Сложите между собой составляющие его цифры. Вычитите получившуюся сумму из задуманного вами числа. И снова сложите цифры. Получилось 9? Если нет — перепроверьте свои вычисления. Здорово, правда? Вся математика построена на таких вот фокусах, о которых в школах нам почему-то не рассказывают. В этой книжке я покажу вам, как с помощью обычных чисел, фигур и простой логики творить настоящие чудеса. Добавим немного алгебры и геометрии, и перед нами откроются двери в производственные цеха фабрики магии, а может, и самого человеческого естества.

Эта книжка полна чисел, алгебры и математического анализа, геометрии и тригонометрии. Но есть в ней и много такого, что не столь хорошо знакомо неискушенному читателю и при этом не объяснено в мельчайших подробностях: треугольник Паскаля, математическая бес-

конечность, магические свойства некоторых чисел (9 , π , e , i), последовательность Фибоначчи, золотое сечение... И хотя нескольких десятков страниц будет явно недостаточно, чтобы подробно рассказать о каждом из этих понятий, я все же надеюсь, что мне удастся объяснить вам их суть и показать, насколько удивительными и значительными они могут быть. И даже если вы с ними уже когда-то сталкивались, здесь вы увидите их под немного другим углом. Это расширит и обогатит ваши знания и представления, ведь чем глубже мы постигаем математику, тем более изощренной и восхитительной предстает перед нами ее магия. Вот, например, одна из самых любимых моих формул:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Ее еще называют «уравнением Бога», ведь здесь используются самые важные для математической науки числа: 0 и 1 — основы всех основ, число $\pi = 3,14159...$ — самое важное в геометрии, $e = 2,71828...$ — константа математического анализа, и мнимая единица i , квадрат которой равен -1 . Про π мы поговорим в главе 8, про i и e — в главе 10. А в главе 11 разберемся со всем тем, что поможет нам понять магическую природу этой формулы.

Эта книга написана для тех, кто когда-нибудь захочет пройти курс математики, и для тех, кто сейчас проходит курс математики, или для тех, кто только что прошел курс математики. Иными словами — абсолютно для всех, вне зависимости от того, обожаєте вы математику или боитесь ее как огня. Чтобы сделать наше общение проще, я сформулировал несколько «правил» (в математическом понимании этого слова).

Правило № 1:

Текст в серых блоках можно не читать (но только не этот)!

В каждой главе есть «отступления», в которых я рассказываю о чем-то интересном, что упомянуто в основном тексте, но в логику рассуждений не вписывается: это может быть лишний пример, подробное доказательство или информация, рассчитанная на более искушенного читателя. При первом чтении (равно как и при втором или третьем) вам, возможно, захочется эти «отступления» проигнорировать. Но я очень надеюсь, что вам все же захочется перечитать эту книжку: математика — такая вещь, к которой хочется возвращаться снова и снова.

Правило № 2. Не бойтесь пропускать отдельные абзацы, разделы или даже главы. Если чувствуете, что застряли и никак не можете осилить ту или иную часть, смело поступайте с ней так же, как и с отступлениями — вернитесь к ним позже, со свежими силами и свежим взглядом. В конце концов, быть может, следующая глава прольет свет на то, что сейчас кажется непроходимой чащей? Обидно остановиться на полпути и пропустить все самое интересное, правда?

Правило № 3. Обязательно прочитайте последнюю, главу 12. В ней рассказано столько всего о математической бесконечности, что голова у вас пойдет кругом, ведь в школе вас этому наверняка не учили. К тому же, очень мало из того, что написано в главе 12, связано с предыдущими главами. С другой стороны, «очень мало» — не значит «все», а значит, у вас будет отличный стимул перечитать то, что осталось не до конца понятным.

Правило № 4. Готовьтесь к неожиданностям. Хотя математика — вещь очень серьезная и важная, изучать ее по учебникам, написанным строгим и сухим языком, никакой необходимости нет. На лекциях, которые я читаю в Колледже Харви Мадда¹, мне редко удается обойтись без случайного каламбура, шутки, стихотворения, песенки или фокуса с числами — они отлично разбавляют атмосферу мрачной научной серьезности. Так почему бы не заняться тем же и на страницах этой книги? В одном вам однозначно повезло: не нужно будет слушать, как я пою. Чем не плюс?

Вот и все правила. Хватайте их подмышку и вперед — в удивительный мир математической магии!

¹ Колледж Харви Мадда — престижный частный колледж в Клермонте, Калифорния, специализирующийся на точных и естественных науках. — Прим. пер.

ГЛАВА НОМЕР ОДИН

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = 5050$$

Магия чисел

Числовые закономерности

Изучение математики всегда начинается с чисел. Сначала мы учимся выражать количество с помощью букв, цифр или самих предметов. А потом долгие и долгие годы складываем, вычитаем, умножаем, делим и решаем разные арифметические задачи. И за всей этой рутиной часто не видим магию чисел, способную развлечь и удивить любого, кто решится всего лишь заглянуть чуть глубже.

Вот, например, одна хитрость, с которой еще в детстве столкнулся немецкий математик Карл Фридрих Гаусс¹. Как-то раз на уроке математики учитель попросил класс сложить между собой все числа от 1 до 100. Вряд ли он хотел развлечь учеников — скорее, отвлечь: заставить заняться чем-нибудь нудным и требующим полного сосредоточения, а самому спокойно сделать другую работу. Представьте себе его удивление, когда через несколько секунд Гаусс вышел к доске и написал ответ — 5050. Хотите знать, как он это сделал? Он просто представил все эти числа в виде двух рядов: верхний — от 1 до 50, нижний — от 51 до 100, причем в нижнем ряду числа шли в обратном порядке, вот так:

¹ Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — выдающийся немецкий математик, механик, физик, астроном. — Прим. ред.

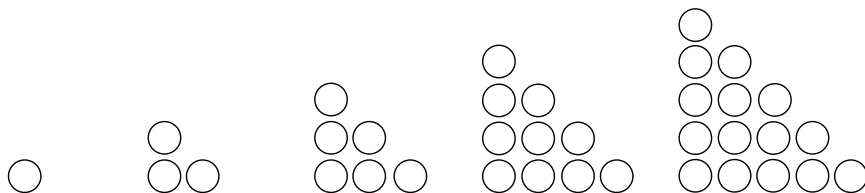
$$\begin{array}{cccccccc}
 \begin{array}{r} 1 \\ + 100 \\ \hline 101 \end{array} &
 \begin{array}{r} 2 \\ + 99 \\ \hline 101 \end{array} &
 \begin{array}{r} 3 \\ + 98 \\ \hline 101 \end{array} &
 \begin{array}{r} 4 \\ + 97 \\ \hline 101 \end{array} &
 \dots &
 \begin{array}{r} 47 \\ + 54 \\ \hline 101 \end{array} &
 \begin{array}{r} 48 \\ + 53 \\ \hline 101 \end{array} &
 \begin{array}{r} 49 \\ + 52 \\ \hline 101 \end{array} &
 \begin{array}{r} 50 \\ + 51 \\ \hline 101 \end{array}
 \end{array}$$

Числа от 1 до 100, записанные в два ряда.
Каждая пара дает в сумме 101

Гаусс заметил, что сумма чисел в каждом из 50 столбцов одинаковая — 101, а значит, для того, чтобы получить искомым результат, нужно всего лишь умножить 101 на 50. Так у него и получилось 5050.

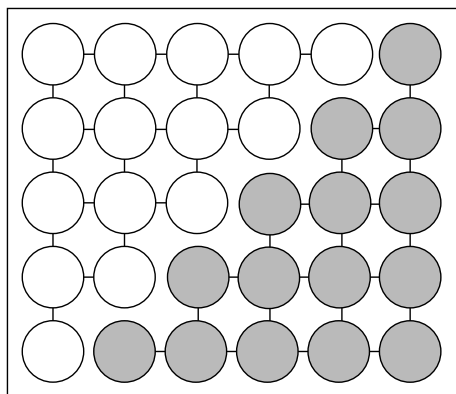
Собственно говоря, благодаря такой вот способности — не быстро считать в уме, но заставлять числа плясать под свою дудку — Гаусс и стал одним из величайших математиков XIX столетия. В этой главе мы как раз и поговорим об интересных числовых закономерностях и, конечно, увидим танец чисел. Одни из этих примеров полезны тем, что развивают способности умственного счета, другие — просто красивые.

Только что мы последовали путем гауссовой логики, чтобы получить сумму первой сотни простых чисел. Но что, если нам нужна сумма 17 из них? Или тысячи? Миллиона? Логика Гаусса позволяет подсчитывать сумму первых n чисел, где n — любое нужное вам количество! Некоторым людям легче разобраться с математическими абстракциями, если они могут их визуализировать. К примеру, числа 1, 3, 6, 10 и 15 иногда называют *треугольными*, потому что, заменив их соответствующим количеством кружков, можно легко сложить треугольники, вроде того, что изображен чуть ниже (конечно, один кружок треугольником можно назвать с очень большой натяжкой, но число 1, несмотря на это, все же считается треугольным). Согласно определению, треугольное число n равняется $1 + 2 + 3 + \dots + n$.



Первая пятерка треугольных чисел: 1, 3, 6, 10 и 15

Посмотрите, что произойдет, если мы расположим два треугольника основаниями друг к другу, вот так:



Сколько кружков в прямоугольнике?

У нас получился прямоугольник из 5 рядов и 6 столбцов — всего 30 кружков. Значит, в каждом из двух наших треугольников была половина общего их количества, то есть по 15 кружков. Мы, это, разумеется, уже знаем, но давайте применим этот же принцип к двум прямоугольникам, количество рядов в которых равно n . Точно так же составим из них прямоугольник с n рядов и $n + 1$ столбцов. Кружков в нем будет $n \times (n + 1)$ — ну или в более привычной записи — $n(n + 1)$. В результате мы получим формулу, которая позволит нам подсчитывать **сумму первых n чисел**:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Видите, закономерность, которую мы использовали для сложения первой сотни чисел, вполне применима к любому подобному ряду, сколько бы членов в него ни входило. И если вдруг нам понадобится сложить между собой все числа от 1 до 1 000 000, сделать это можно будет всего за два шага: перемножив 1 000 000 и 1 000 001 и разделив результат пополам.

Разобравшись в одной формуле, вы с легкостью разберетесь и в остальных. Например, если мы удвоим обе части последнего уравнения, получится формула **суммы первых n четных чисел**:

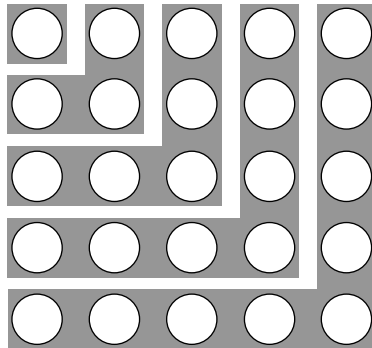
$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$$

А как насчет суммы первых **нечетных**, спрósите вы? Давайте посмотрим, что говорят нам числа.

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 1 + 3 &= 4 \\
 1 + 3 + 5 &= 9 \\
 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \\
 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Чему равна сумма первых n нечетных чисел?

То, что справа — *квадраты целых чисел*. 1×1 ; 2×2 ; 3×3 и т. д. Сложно не заметить следующую закономерность: сумма первых n нечетных чисел равняется $n \times n$. Или n^2 . Но что, если это просто совпадение? Чуть позже, в главе 6, мы с вами увидим несколько путей развития этой формулы, но уже и сейчас понятно, что у такой простой закономерности должно быть не менее простое объяснение. Самое мое любимое — методом подсчета кружков: он наглядно показывает, почему числа вроде 25 называются *квадратами*. Но почему вдруг мы должны складывать первые 5 нечетных чисел с 5^2 ? А просто посмотрите на квадрат размером 5 на 5:



Сколько кружков в квадрате?

Кружков в нем $5 \times 5 = 25$, это очевидно. Но давайте подсчитаем иначе. Начнем с одинокого кружка в левом верхнем углу. Его окружают 3 кружка, потом 5, потом 7 и, наконец, 9. Следовательно,

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

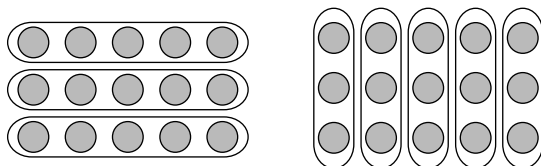
И возьми мы квадрат со сторонами n на n , его можно будет легко разбить на n -ное количество L-образных секторов, в каждом из которых

будет соответственно 1, 3, 5, ..., $(2n - 1)$ кружков. Это и есть формула суммы первых n нечетных чисел

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Отступление

Чуть позже мы еще вернемся к методу подсчета кружков (как и к методу решения задачи двумя разными способами), и вы увидите, к каким интересным результатам он может привести в высшей математике. Но и для понимания основ он не менее полезен. Почему, например, $3 \times 5 = 5 \times 3$? Уверен, вы никогда даже не задавались таким вопросом: просто однажды в детстве вам сказали, что порядок чисел при умножении абсолютно не важен (математики, кстати, называют это *законом коммутативности*). Но почему же три пакетика по пять жемчужин — это то же, что и пять пакетиков по три жемчужины? Самый простой способ объяснить этот закон — посчитать кружки в прямоугольнике размером 3 на 5. Считая ряд за рядом, мы видим 3 ряда, в каждом из них 5 кружков, то есть во всем прямоугольнике 3×5 кружков. С другой стороны, мы можем подсчитать столбики, а не ряды: по 3 кружка в каждом из 5 рядов, значит, всего кружков 5×3 .



Почему $3 \times 5 = 5 \times 3$?

Эта закономерность может привести нас к другой, еще более красивой. Раз уж мы хотим заставить числа танцевать, почему бы не сделать это и с их квадратами?

Взгляните вот на такую пирамидку уравнений:

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 3 \\ 4 + 5 + 6 &= 7 + 8 \\ 9 + 10 + 11 + 12 &= 13 + 14 + 15 \\ 16 + 17 + 18 + 19 + 20 &= 21 + 22 + 23 + 24 \\ 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 &= 31 + 32 + 33 + 34 + 35 \\ &\dots \end{aligned}$$

Какую закономерность вы видите? Подсчитать количество чисел в каждом ряду несложно: 3, 5, 7, 9, 11 и так далее. А дальше неожиданность: первое число каждого ряда — по крайней мере, первых 5 записанных здесь рядов — является квадратом числа. И правда: 1, 4, 9, 16, 25... Почему так получается? Возьмем пятый ряд. Сколько чисел ему предшествуют? Давайте сложим их количество: $3 + 5 + 7 + 9$. Прибавим к ним еще единицу, и у нас получится первое число пятого ряда — сумма первых 5 нечетных чисел, которая, как мы уже знаем, равна 5^2 .

А теперь просчитаем пятое уравнение, ничего к нему не добавляя. Как бы это сделал Гаусс? Если пока не обращать внимания на начальное 25, слева у нас останется 5 чисел, каждое из которых будет ровно на 5 меньше, чем соответствующее ему число справа.

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 \hline
 -31 \\
 \hline
 -5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 26 \\
 \hline
 -32 \\
 \hline
 -5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 27 \\
 \hline
 -33 \\
 \hline
 -5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 28 \\
 \hline
 -34 \\
 \hline
 -5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 29 \\
 \hline
 -35 \\
 \hline
 -5
 \end{array}$$

Сравнение левых и правых чисел 5 ряда

То есть сумма чисел справа будет ровно на 25 больше суммы чисел слева. Но это без учета 25, которые стоят в начале. А с ними у нас получается именно тот результат, который обещан нам знаком равенства. Следуя той же логике и призвав на помощь алгебру, мы докажем, что этот ряд можно продолжать бесконечно.

Отступление

А теперь — специально для тех, кто хотел немного алгебры. Ряду n предшествует количество чисел, равное $3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2 - 1$, поэтому левая сторона нашего уравнения должна начинаться с числа n^2 , за которым следует n последовательных чисел, от $n^2 + 1$ до $n^2 + n$. Справа — n последовательных чисел, начиная с $n^2 + n + 1$, заканчивая $n^2 + 2n$. Если мы временно «забудем» про число n^2 слева, то увидим, что каждое из n чисел справа на n больше, чем соответствующее ему последовательное число слева. Разница при этом составляет $n \times n$, то есть n^2 . Закономерность эта компенсируется начальным n^2 слева, поэтому-то левая и правая части и равны.

Перейдем к другой закономерности. Как мы уже видели, из нечетных чисел можно составлять квадраты. А теперь посмотрим, что произойдет, если собрать их в один большой треугольник — вроде того, что изображен чуть ниже.

Так отлично видно, что $3 + 5 = 8$, а $7 + 9 + 11 = 27$, а $13 + 15 + 17 + 19 = 64$. Что общего у 1, 8, 27 и 64? Да это же полные кубы чисел! Например, если сложить между собой пять чисел пятого ряда, мы получим:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & = & 1 = 1^3 \\
 3 + 5 & = & 8 = 2^3 \\
 7 + 9 + 11 & = & 27 = 3^3 \\
 13 + 15 + 17 + 19 & = & 64 = 4^3 \\
 21 + 23 + 25 + 27 + 29 & = & 125 = 5^3 \\
 \dots & & \dots \quad \dots
 \end{array}$$

Треугольник нечетных чисел

$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

Логика вроде бы подсказывает, что сумма чисел в ряду n будет равна n^3 . Но насколько верным будет этот вывод? Не простое ли это совпадение? Чтобы лучше понять эту закономерность, посмотрим на числа в середине 1, 3 и 5 рядов. Что мы видим? 1, 9 и 25. То есть квадраты. В середине 2 и 4 рядов чисел нет, но по сторонам центра 2 ряда видим числа 3 и 5, среднее арифметическое которых — 4, а по сторонам центра 4 ряда — 15 и 17 со средним арифметическим 16. Давайте подумаем, как эту закономерность можно использовать.

Снова возьмем 4 ряд. Что мы тут видим? А *видим* мы, что сумма всех чисел в нем есть 5^3 — и не нужно к ним ничего добавлять, чтобы заметить: все они симметрично расположены вокруг 25. Так как среднее арифметическое этих чисел — 5^2 , уравнение преобразуется в $5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 = 5 \times 5^2$, то есть 5^3 . То же справедливо и в отношении 4 ряда: среднее арифметическое всех чисел в нем — 4^2 , их сумма — 4^3 . Чуть-чуть алгебры (к которой мы здесь не прибегаем), и вы легко сделаете вывод, что среднее арифметическое n чисел ряда n равно n^2 , а их сумма равна n^3 , что и требовалось доказать.

Кстати, если уж мы взялись оперировать квадратами и кубами, не могу удержаться, чтобы не указать вам на еще одну закономерность. Что получится, если сложить кубы чисел, начиная с 1^3 ?

$$\begin{aligned}
 1^3 &= 1 = 1^2 \\
 1^3 + 2^3 &= 9 = 3^2 \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 &= 36 = 6^2 \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 100 = 10^2 \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= 225 = 15^2 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Сумма кубов всегда представляет собой
квадрат числа

Подсчитывая сумму кубов, мы получаем 1, 9, 36, 100, 225 и т. д. — числа, которые являются полными квадратами. Но это не *любые* квадраты, а квадраты 1, 3, 6, 10, 15 и т. д. — треугольных чисел! Мы уже знаем, что они по своей сути являются суммами простых чисел, а значит,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$$

Другими словами, сумма кубов первых n чисел есть квадрат суммы этих самых первых n чисел. Подтвердить это мы пока не можем, но в главе 6 пару доказательств увидим.

Как быстро считать в уме

Среди читателей наверняка найдутся те, кто, познакомившись с этими примерами, скажет: «Ух ты, здорово! Но какая от всего этого польза?» Здесь в любом математике проснулся бы художник, и в ответ вы услышали бы: «Разве нужно красоте оправдание иное, нежели сама красота?» Ведь чем лучше мы понимаем числовые закономерности, тем глубже постигаем их красоту. И все-таки иногда они приносят практическую пользу.

Вот простая закономерность, которую мне посчастливилось обнаружить в юности (даже если я и не был первооткрывателем). Я смотрел на пары чисел, которые в сумме давали 20 (10 и 10, например, или 9 и 11), и думал, а какие из них надо перемножить, чтобы получить наибольшее произведение? Логика подсказывала, что это 10 на 10, и моя схема эта подтвердила.

Разность с 100

$10 \times 10 = 100$	
$9 \times 11 = 99$	1
$8 \times 12 = 96$	4
$7 \times 13 = 91$	9
$6 \times 14 = 84$	16
$5 \times 15 = 75$	25
...	...

Произведения чисел, сумма которых равна 20

Эта закономерность была несомненна. Чем дальше отстояли друг от друга числа, тем меньше становилось произведение. И насколько они отдалялись от 100? На 1, на 4, на 9, 16, 25... То есть на 1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2 и т.д. А потом мне стало интересно, работает ли эта закономерность для чисел, дающих другую сумму. Я решил попробовать 26:

Разность с 169

$13 \times 13 = 169$	
$12 \times 14 = 168$	1
$11 \times 15 = 165$	4
$10 \times 16 = 160$	9
$9 \times 17 = 153$	16
$8 \times 18 = 144$	25
...	...

Произведения чисел, сумма которых равна 26

И я снова увидел, что наибольшее произведение дало умножение двух одинаковых чисел. А потом произведение стало уменьшаться с интервалом сначала 1, потом 4, потом 9 и т.д. Еще несколько подобных примеров убедили меня, что закономерность была строгой (ее алгебраическое выражение я покажу чуть позже). Выяснил я и то, что ее можно применять для быстрого возведения чисел в квадрат.

Допустим, нам нужно знать квадрат 13. Вместо того чтобы умножать 13×13 , можно сделать умножение попроще: $10 \times 16 = 160$. До правильного ответа уже рукой подать, и чтобы его получить, достаточно будет прибавить возведенное в квадрат 3 — число, составляющее разницу между 13 и числами, которые мы перемножили. То есть:

$$13^2 = 10 \times 16 + 3^2 = 160 + 9 = 169$$

Можно взять еще один пример, скажем, 98×98 . Для удобства к первому числу добавим 2 до 100, а от второго отнимем 2 до 96. Значит, к их произведению нужно будет прибавить 2^2 . Вот наше уравнение:

$$98^2 = 100 \times 96 + 2^2 = 9600 + 4 = 9604$$

Особенно легко применять эту схему к числам, которые заканчиваются на 5: если уменьшить и увеличить их на 5, оперировать придется круглыми числами. Например:

$$35^2 = 30 \times 40 + 5^2 = 1200 + 25 = 1225$$

$$55^2 = 50 \times 60 + 5^2 = 3000 + 25 = 3025$$

$$85^2 = 80 \times 90 + 5^2 = 7200 + 25 = 7225$$

Теперь попробуем возвести в уме в квадрат 59. Увеличив и уменьшив это число на единицу, получим $59^2 = (60 \times 58) + 1^2$. Но как умножить в уме 60 на 58? Простой совет из двух слов: слева направо. Забудем на время про 0 и подсчитаем 6×58 : $6 \times 50 = 300$ и $6 \times 8 = 48$. Потом сложим эти два результата (опять же, слева направо) и получим 348. И добавим ноль в конце, то есть $60 \times 58 = 3480$. Поэтому:

$$59^2 = 60 \times 58 + 1^2 = 3480 + 1 = 3481$$

Отступление

А вот алгебраическое доказательство этого метода (перечитайте это отступление после того, как во второй главе мы поговорим о *разнице квадратов*):

$$A^2 = (A + d)(A - d) + d^2$$

где A — число, возводимое в квадрат, d — разность с ближайшим круглым числом (формула, кстати, справедлива для любого d). Для примера возведем в квадрат 59: $A = 59$, $d = 1$, значит, формула превращается в $(59 + 1) \times (59 - 1) + 1^2$, как и в предыдущем вычислении.

Теперь, когда вы профессионально возводите в квадрат двузначные числа, можно попробовать и трехзначные. Если помните, $12^2 = 144$, значит:

$$112^2 = (100 \times 124) + 12^2 = 12\,400 + 144 = 12\,544$$

Есть еще одна подобная формула, которая работает для любых двух чисел, близких к сотне. Человек, который становится случайным свидетелем таких вычислений, испытывает чувство, будто наблюдает за трюком фокусника. Вот, например, 104×109 . Рядом с каждым из них пишем число, на которое оно превышает сотню (см. пример ниже). В левом столбце сложим первое число со второй разностью и запишем результат: $104 + 9 = 113$. В правом столбце перемножим две разности: $4 \times 9 = 36$. «Соединим» эти числа, то есть запишем их одно за другим и — тадам! — волшебным образом получим ответ: 11 336.

$$\begin{array}{r} 104 \quad (4) \\ \times 109 \quad (9) \\ \hline 113 \quad 36 \end{array}$$

Волшебный способ умножения чисел, близких к сотне,
здесь — $104 \times 109 = 11\,336$

Другие примеры и алгебраическую формулу такого вычисления я приведу чуть позже, в главе 2. И, раз уж мы об этом заговорили, кое-что еще о вычислениях в уме. Мы тратим уйму времени на то, чтобы научиться считать столбиком, хотя научиться делать это в уме куда быстрее. Задумайтесь: как часто в обычной жизни у нас есть время и возможность достать бумагу и провести все необходимые подсчеты? Для сложных вычислений можно воспользоваться калькулятором, но не будете же вы доставать его в магазине, читая данные об энергетической ценности на упаковке продуктов, или сидя в зале собрания, или дома, включив выпуск экономических новостей. Вот здесь-то, в оценке по-настоящему важных для вас цифр, и становятся очевидными все плюсы устного счета. Увы, в школе нас хорошо учат считать на бумаге, со счетом в уме дела обстоят плохо.

Строго говоря, эта тема достойна отдельной книги, но, раз уж мы говорим о магии, а не о способностях человеческого мозга, коснемся ее вскользь, обозначив лишь самые основные положения. Главный прием, о котором я не устаю говорить: считайте *слева направо*. Подсчеты в уме — это процесс постоянного упрощения. Вы начинаете с проблемы огромной, неподъемной, кажущейся непомерно сложной, и расщепляете ее на несколько элементарных и очевидных вопросов, пока не получите искомый результат.

Сложение в уме

Допустим, нам нужно подсчитать что-нибудь, вроде

$$314 + 159$$

(Я специально записываю это уравнение в одну строку, чтобы увести вас от искушения подсчитать столбиком.) Начнем с 314, прибавив сотню, чтобы упростить подсчеты:

$$414 + 59$$

Прибавить 50 к 414 еще проще. А затем:

$$464 + 9 = 473$$

Вот и вся суть сложения в уме. Есть еще один путь, не менее эффективный: превратить проблему сложения в более простую проблему вычитания. Способ этот хорош для подсчета цен в магазине. Возьмем, к примеру, сложим

$$\$23,58 + \$8,95$$

\$8,95 меньше \$9 лишь на 5 центов, поэтому легче сначала прибавить к \$23,58 именно \$9, а потом вычесть \$0,05. И смотрите, как все сразу упрощается:

$$\$32,58 - \$0,05 = \$32,53$$

Вычитание в уме

Главный прием при вычитании в уме — вычитать *больше, чем нужно*. Если вам нужно вычесть 9, гораздо легче вычесть 10, а потом прибавить лишнюю единицу. Например,

$$83 - 9 = 73 + 1 = 74$$

Соответственно, если вам нужно вычесть 39, вычтите 40 и прибавьте 1.

$$83 - 39 = 43 + 1 = 44$$

С двух- или трехзначными (как, впрочем, и с бóльшими) числами самая правильная стратегия — *дополняющие числа* (потом вы еще скажете мне за это спасибо). Дополняющее число — это разность между тем числом, которым вы оперируете, и ближайшим к нему бóльшим круглым.

В принципе, то же самое, что и в нашем примере с 9: в этом случае дополняющим числом будет 1, а ближайшим круглым — 10 (как и для всех однозначных чисел). Для двузначных чисел это будет 100. Посмотрите на пары чисел, которые мы складываем, чтобы получить 100. Что вы видите?

$$\begin{array}{r} 87 \\ + 13 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 75 \\ + 25 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 56 \\ + 44 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 92 \\ + 08 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 80 \\ + 20 \\ \hline 100 \end{array}$$

Двузначные числа, дополняющие до 100

Дополняющее число для 87 — 13, для 75 — 25 и так далее. И наоборот: дополняющее число для 13 — 87, а для 25 — 75. Решая каждую такую задачу слева направо, вы легко заметите, что во всех примерах (кроме последнего) сумма крайних левых чисел будет равна 9, а крайних правых — 10. Закономерность нарушается только тогда, когда числа заканчиваются на 0 (как в последнем примере): дополняющим числом для 80 будет 20.

Применим эту стратегию к вычислению $1234 - 567$. Даже вычитание на бумаге в этом случае — не самое простое занятие, что уж говорить про подсчет в уме. Но с дополняющими числами этот *зубодробительный пример вычитания превращается в простейший пример сложения!* Вместо того чтобы вычитать 567, вычтем 600. Это гораздо проще, особенно если считать слева направо: $1234 - 600 = 634$. Но ведь это не тот ответ, который нам нужен? Насколько не тот? Ровно на разность между 567 и 600 — такую же, как и между 67 и 100, то есть на 33. Значит,

$$1234 - 567 = 634 + 33 = 667$$

Правда, очень просто? Потому что при сложении ничего не нужно держать «в уме». И так просто дело будет обстоять почти всегда, когда вы используете дополняющие числа при вычитании, пусть и трехзначные:

$$\begin{array}{r} 789 \\ + 211 \\ \hline 1000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 555 \\ + 445 \\ \hline 1000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 870 \\ + 130 \\ \hline 1000 \end{array}$$

Трехзначные числа, дополняющие до 1000

В большинстве случаев (когда числа не заканчиваются на 0) сумма «основной» и «дополнительной» цифр равна 9, за исключением последней пары, равной 10. Например, для 789: $7 + 2 = 9$; $8 + 1 = 9$; $9 + 1 = 10$.

Следовательно, дополнительное число, считая слева направо, вычисляется так: $9 - 7 = 2$, $9 - 8 = 1$, $10 - 9 = 1$. Метод дополнительных чисел пригодится при подсчете сдачи. Мои любимые бутерброды в соседнем магазине, например, стоят \$6,76. Как узнать, сколько я получу, если заплачу банкнотой в \$10? Да как раз с помощью дополняющего до 1000 числа для 676 — 324. Значит, сдача будет \$3,24.

Отступление

Каждый раз, покупая бутерброд, я волей-неволей замечаю, что и его цена, и возвращаемая мне сдача представляют собой квадраты чисел ($26^2 = 676$, а $18^2 = 324$). Вопрос на засыпку: есть еще одна пара квадратов чисел, которые дают в сумме 1000. Сможете их найти?

Умножение в уме

Вы не поверите, но для того, чтобы легко умножать в уме, хотя бы примерно, достаточно выучить обычную таблицу умножения. А потом — набить руку (не беспокойтесь, учить больше ничего не придется) в решении примеров, в которых однозначное число умножается на двузначное. И снова: главный трюк — считать слева направо. Умножая, например, 8 на 24, умножьте сначала 8×20 , а потом — 8×4 :

$$8 \times 24 = 8 \times 20 + 8 \times 4 = 160 + 32 = 192$$

Хорошо потренировавшись, переходите к перемножению одно- и трехзначных чисел. Это немного сложнее — просто потому, что чуть больше нужно держать в уме. Трюк в том, чтобы последовательно складывать промежуточные результаты и тем самым своевременно освобождать свою «оперативную» память. Например, при умножении 456×7 вашим предпоследним действием должно быть сложение $2800 + 350$, а последним — прибавление 42.

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times 7 \\ \hline 400 \times 7 = 2800 \\ 50 \times 7 = + 350 \\ \hline 6 \times 7 = + 42 \\ \hline 3192 \end{array}$$

Следующий шаг по пути мастера — операции с двузначными числами. Как по мне, так здесь-то и начинается самое веселье, хотя бы потому, что способов, которыми можно достичь нужного результата, много и все они разные. Это значит, что вы можете проверить себя — и одновременно насладиться стройностью арифметических чудес. Рассмотрим всего один пример: 32×38 .

Самый популярный (и наиболее близкий к подсчету в столбик) метод — это *метод сложения*, безотказный в решении почти любой задачи. Он предлагает нам разбить одно из чисел (обычно то, которое состоит из меньших цифр) надвое, умножить каждую часть на второе число, а потом сложить результаты. Например,

$$32 \times 38 = (30 + 2) \times 38 = 30 \times 38 + 2 \times 38 = \dots$$

Как будем умножать 30×38 ? Сначала умножим 3×38 , а в конце прибавим 0. То есть $3 \times 38 = 90 + 24 = 114$, поэтому $30 \times 38 = 1140$. А потом $2 \times 38 = 60 + 16 = 76$. В итоге

$$32 \times 38 = 30 \times 38 + 2 \times 38 = 1140 + 76 = 1216$$

Другой способ решить наш пример (особенно если одно из наших чисел заканчивается на 7, 8 или 9) — использовать *метод вычитания*. Начать следует с того, что $38 = 40 - 2$, а значит,

$$38 \times 32 = 40 \times 32 - 2 \times 32 = 1280 - 64 = 1216$$

Сложность обоих методов — как сложения, так и вычитания — заключается в том, что они заставляют вас постоянно держать в голове большие числа (вроде 1140 или 1280), одновременно делая другие вычисления. Не самая простая задача. Мне больше по душе *метод разложения на сомножители*, особенно полезный всякий раз, когда одно из имеющихся у нас чисел является произведением двух однозначных чисел. В нашем примере это 32 — произведение 8 и 4. Следовательно,

$$38 \times 32 = 38 \times 8 \times 4 = 304 \times 4 = 1216$$

Если же мы разложим 32 на 4 и 8, получим $38 \times 4 \times 8 = 152 \times 8 = 1216$, но я лично предпочитаю умножать двузначное число сначала на больший сомножитель, а промежуточный результат (обычно трехзначный) — на меньший.

Отступление

Метод разложения отлично работает при умножении на 11 — хотя бы потому, что здесь есть один любопытный и при этом простой трюк: *нужно просто сложить между собой цифры первого числа и поместить сумму в его середину*. Для примера умножим 53 на 11: $5 + 3 = 8$, значит, ответ будет 583. А вот 27×11 : $2 + 7 = 9$, в итоге получаем 297. А если сумма больше 9, берем последнюю цифру результата сложения, а первую цифру исходного числа увеличиваем на единицу. Например, 48×11 : $4 + 8 = 12$, значит, ответ будет 528. По аналогии: $74 \times 11 = 814$. Этот трюк работает и при умножении на числа, кратные 11, например,

$$74 \times 33 = 74 \times 11 \times 3 = 814 \times 3 = 2442$$

Другой интересный метод — *метод сближения*. Его можно использовать, когда *двузначные числа*, которые вы перемножаете, *начинаются с одной и той же цифры*. Неискушенному наблюдателю он может показаться настоящим фокусом. Ведь разве можно просто взять и поверить, что

$$38 \times 32 = (30 \times 40) + (8 \times 2) = 1200 + 16 = 1216$$

Вычисления становятся элементарными, если последние цифры двух чисел дают в сумме 10 (как в нашем примере: оба числа начинаются с 3, а сумма их последних цифр — 8 и 2 — равна 10). Вот еще один пример:

$$83 \times 87 = (80 \times 90) + (3 \times 7) = 7200 + 21 = 7221$$

Но даже если вторые цифры не дадут в сумме 10, метод от этого не станет менее эффективным и эффектным, да и вычисления усложнятся не так уж и сильно. Чтобы умножить, например, 41 на 44, сначала надо уменьшить меньшее из них на единицу (чтобы работать с круглым числом 40) и, соответственно, увеличить на ту же единицу большее число:

$$41 \times 44 = (40 \times 45) + (1 \times 4) = 1800 + 4 = 1804$$

Для 34×37 отнимаем 4 у 34 (и остается 30) и отдаем их 37 ($37 + 4 = 41$), а потом прибавляем 4×7 :

$$34 \times 37 = (30 \times 41) + (4 \times 7) = 1230 + 28 = 1258$$

Кстати, помните загадочный пример с 104×109 ? Там использовался тот же самый метод:

$$104 \times 109 = (100 \times 113) + (04 \times 09) = 11\,300 + 36 = 11\,336$$

В некоторых школах, кстати, учеников заставляют учить не привычную таблицу умножения, которая заканчивается 10, но расширенную до 20. Наш метод сводит эту необходимость на нет:

$$17 \times 18 = (10 \times 25) + (7 \times 8) = 250 + 56 = 306$$

Как же так получается, что эта штука работает, спросите вы? Чтобы разобраться, нужно обратиться к алгебре — этим мы займемся в главе 2. А алгебра даст нам еще больше способов счета. Например, ту же задачу можно будет решить еще и вот так:

$$18 \times 17 = (20 \times 15) + ((-2) \times (-3)) = 300 + 6 = 306$$

Кстати, о таблице умножения: взгляните на столбцы и ряды однозначных чисел чуть ниже (я же обещал вам это показать, помните?). Перед нами встанет тот же вопрос, который встал перед юным Гауссом: *чему будет равняться сумма всех чисел таблицы умножения?* Не торопитесь, подумайте: вдруг у вас получится найти ответ каким-нибудь волшебным, потрясающим воображение способом? Ну а свой способ я предложу вам в конце главы.

Приблизительный подсчет в уме. Деление в уме

Давайте начнем с очень простого вопроса, на который существует очень простой ответ, которому по какой-то неизвестной причине не учат в школах:

а) если вам нужно перемножить два трехзначных числа, сможете ли вы сразу сказать, из скольки знаков будет состоять результат?

И чуть посложнее:

б) число из скольки знаков получится, если умножить четырехзначное число на пятизначное?

В школе почти все время уходит на то, чтобы подбирать цифры при умножении и делении, а не на то, чтобы подумать о том, *насколько* большим будет результат. Да-да, умение примерно оценивать, насколько большим будет ответ, куда важнее умения находить его последние или даже первые цифры. (Подумайте сами, какой практический прок от зна-

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Чему будет равняться сумма всех 100 чисел в таблице умножения?

ния того, что итог начинается с цифры 3, и не полезнее ли знать, к чему он будет ближе: к 30 или 300 000 или вовсе к 3 000 000?)

Ответ на вопрос (а) — из пяти или шести цифр. Знаете почему? Минимальный возможный пример — $100 \times 100 = 10\,000$ (здесь пять цифр). Максимальный — 999×999 , результат которого однозначно будет меньше семизначного $1000 \times 1000 = 1\,000\,000$ (пусть и ненамного). Но раз 999×999 меньше, значит, в ответе будет шесть цифр (давайте, кстати, вспомним, насколько легко это посчитать: $999^2 = (1000 \times 998) + 1^2 = 998\,001$.) Вот и вывод: результатом перемножения двух трехзначных чисел будет пяти- или шестизначное число.

Ответ на вопрос (б) — из восьми или девяти цифр. Почему? Наименьшее четырехзначное число — 1000, которое можно представить в виде 10^3 (единица с тремя нолями). Наименьшее пятизначное число — 10 000, равное 10^4 . Следовательно, наименьшим произведением 10^3 и 10^4 будет 10^7 — единица с семью нолями, восьмизначное число. (Откуда взялось 10^7 ? Смотрите: $10^3 \times 10^4 = (10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10 \times 10) = 10^7$.) Ну а наименьшим произведением будет число, лишь ненамного меньшее десятизначного $10^4 \times 10^5 = 10^9$, то есть девятизначное.

Такая логика приводит нас к простому правилу: **умножение m -значного числа на n -значное даст число, в котором $m + n$ или $m + n - 1$ знаков.**

Конкретное количество цифр в ответе легче всего определить, взглянув на начальные (крайние левые) цифры перемножаемых чисел. Если их произведение больше или равно 10, тогда в ответе будет $m + n$ цифр (например, в 271×828 произведение крайних левых цифр — $2 \times 8 = 16$ — больше десятки, поэтому ответом будет шестизначное число). Если произведение крайних левых цифр меньше или равно 4, тогда в ответе будет $m + n - 1$ цифр (например, 314×159 будет иметь пятизначный ответ). Ну а на случаи, в которых произведение крайних левых цифр будет равняться 5, 6, 7, 8 или 9, нам придется посмотреть чуть более внимательно. Например, произведение 222 и 444 — пятизначное, а вот 234 и 456 — шестизначное. Но куда важнее то, что оба ответа очень близки к 100 000.

В результате у нас получается еще более простое правило, уже в отношении деления: **деление m -значного числа на n -значное даст число, в котором $m - n$ или $m - n + 1$ знаков.**

То есть девятизначное число, разделенное на пятизначное, даст нам четырех- или пятизначный результат. Правило определения более конкретного ответа здесь еще проще, чем в случае с умножением. Крайние левые цифры не нужно ни умножать, ни делить — достаточно их просто *сравнить*. Если крайняя левая цифра делимого меньше крайней левой цифры делителя, в частном будет меньшее количество цифр ($m - n$). Если же крайняя левая цифра делимого больше крайней левой цифры делителя, в частном будет больше ($m - n + 1$) цифр. Если же цифры обоих чисел одинаковые, смотрим на следующие после них цифры и применяем то же правило. Например, в результате деления 314 159 265 на 12 358 мы получим пятизначное число, а на 62 831 — четырехзначное. Деление 161 803 398 на 14 142 даст пятизначный ответ, потому что 16 больше 14.

Рассказывать в подробностях про процесс деления в уме я здесь не буду: он мало чем отличается от деления в столбик на бумаге (но каким бы методом вы ни воспользовались, считать нужно слева направо). Но есть парочка уловок, которые значительно облегчат вам жизнь.

Скажем, если вы делите на 5 (или на любое число, заканчивающееся на 5), удвойте числитель и знаменатель, и задача станет проще. Например,

$$34 \div 5 = 68 \div 10 = 6,8$$

$$123 \div 4,5 = 246 \div 9 = 82 \div 3 = 27\frac{1}{3}$$

После удвоения обоих чисел хорошо видно, что и 246, и 9 кратны 3 (мы поговорим об этом подробнее в главе 3), поэтому задача упрощается до деления отдельно числителя и знаменателя на 3.

Отступление

Взгляните на *взаимно обратные числа* для чисел от 1 до 10:

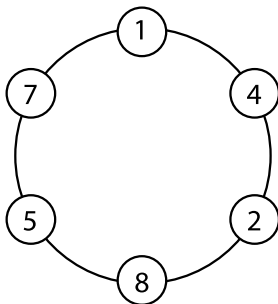
$$1/2 = 0,5; \quad 1/3 = 0,333...; \quad 1/4 = 0,25; \quad 1/5 = 0,2;$$

$$1/6 = 0,1666...; \quad 1/8 = 0,125; \quad 1/9 = 0,111...; \quad 1/10 = 0,1$$

Все дроби здесь либо конечны, либо цифры в них начинают повторяться со второго знака после запятой. Единственным исключением является десятичная дробь от $1/7$, повторение в которой начинается с седьмой цифры:

$$1/7 = 0,142857142857...$$

(Причина этой закономерности в том, что все другие числа от 2 до 11 делятся на 10, 100, 1000, 9, 90 или 99, ближайший же делитель для 7 — 999 999.) Если же записать цифры десятичного аналога $1/7$ в виде круга, произойдет чудо:



Круг одной седьмой

Что интересно, все другие дроби со знаменателем $1/7$ тоже могут воссозданы с помощью бесконечного движения по этому кругу — меняться будет только точка начала этого движения. Посмотрите сами:

$$1/7 = 0,142857142857...; \quad 2/7 = 0,285714285714...;$$

$$3/7 = 0,428571428571...; \quad 4/7 = 0,571428571428...;$$

$$5/7 = 0,714285714285...; \quad 6/7 = 0,857142857142...$$

Давайте закончим эту главу тем же вопросом, который мы уже задавали несколько страниц назад. *Чему будет равняться сумма всех чисел в таблице умножения?* На первый взгляд звучит пугающе — так же, как и попытка найти сумму первых ста чисел. Но знакомство со всеми описанными выше замечательными закономерностями, которые так ловко заставляют числа танцевать, значительно повышают наши шансы легко и красиво найти правильный ответ.

Начнем с первого ряда — посчитаем сумму всех чисел в нем. Можно — как Гаусс, можно — с помощью формулы треугольных чисел, а можно — путем обычного сложения:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Так, теперь второй ряд. Вот как это будет выглядеть:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 20 = 2 (1 + 2 + 3 + \dots + 10) = 2 \times 55$$

По той же логике, 3 ряд будет равен 3×55 . И так далее, и тому подобное, и в результате сумму всех чисел в таблице умножения можно подсчитать так:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 10) \times 55 = 55 \times 55 = 55^2$$

Ну а возвести в уме 55 в квадрат вы теперь можете легко и просто... 3025!

ГЛАВА НОМЕР ДВА

$$\frac{2n + 4}{2} - n = 2$$

Магия алгебры

Вступление с чудесами

Первый раз я столкнулся с алгеброй еще в детстве — мой отец вдруг решил дать мне урок вычислений:

— Сын, — сказал он мне. — Алгебра — все равно что арифметика. За тем исключением, что вместо чисел ты пишешь буквы. Вот, смотри: $2x + 3x = 5x$, а $3y + 6y = 9y$. Понимаешь?

— Вроде, понимаю.

— Очень хорошо, — сказал он. — А сколько тогда будет $3\beta + 4\beta$?

— 7β , — уверенно ответил я.

— Что-то я тебя не слышу, — посетовал папа. — Можешь погромче?

— СЕМЬБЕТА!!! — заорал я.

— И ни одного ответа! — с готовностью отозвался папа. Он всегда предпочитал каламбуры, шутки и забавные истории скучным вычислениям, так что такой исход я мог бы и предвидеть.

Второй раз алгебра улыбнулась мне, когда я попытался понять один магический трюк — сейчас расскажу, какой.

Шаг 1. Задумайте число от 1 до 10 (хотя, по большому счету, можно и большее).

Шаг 2. Умножьте это число на 2.

Шаг 3. Добавьте 10.

Шаг 4. Разделите на 2.

Шаг 5. Вычтите из результата изначально задуманное вами число.

Уверен, получилось 5. Правильно?

Хотите узнать, в чем кроется секрет волшебства? В алгебре. Разберем фокус еще раз, шаг за шагом, начиная с первого. Я понятия не имею, какое число вы загадали, поэтому давайте заменим его буквой N . Незвестное число, обозначаемое буквой, называется *переменной*.

Шаг второй предлагает нам удвоить загаданное число, то есть мы, по сути, имеем $2N$ (знак умножения в алгебре принято опускать, в том числе и потому, что очень часто для обозначения переменной используется внешне похожая на него буква x). После третьего шага ваше число выглядит как $2N + 10$. Четвертая операция предлагает нам упростить пример, разделив все его части на 2: $N + 5$. И, наконец, мы вычитаем загаданное число (то есть N): $N + 5 - N = 5$. Давайте соберем весь фокус в одну таблицу:

Шаг 1:	N
Шаг 2:	$2N$
Шаг 3:	$2N + 10$
Шаг 4:	$N + 5$
Шаг 5:	$N + 5 - N$
Результат:	5

Правила алгебры

Начнем с загадки. Найдите число, которое становится в три раза больше, если к нему прибавить 5.

Чтобы ее решить, заменим неизвестное нам число буквой x . Добавление пятерки дает нам $x + 5$, утроение — $3x$. Мы хотим, чтобы эти две записи были равными, поэтому нам придется решать уравнение

$$3x = x + 5$$

Уберем по одному x из обеих его частей и получим

$$2x = 5$$

(смотрите, откуда берется $2x$: $3x - x$ — то же, что и $3x - 1x$, то есть $2x$). Разделим обе части уравнения на 2:

$$x = 5/2 = 2,5$$

Можем проверить правильность ответа: $2,5 + 5 = 7,5$, Тот же ответ получаем, умножая 2,5 на 3.

Отступление

А вот еще один фокус, в сути которого можно легко разобраться с помощью алгебры. Запишите любое трехзначное число, цифры в котором идут по убывающей (например, 842 или 951). Затем запишите эти числа в обратном порядке и вычитите второе число из первого. Какой бы ответ у вас ни получился, запишите в обратном порядке и его, а затем сложите эти два числа. Вот пример с числом 853:

$$\begin{array}{r} 853 \\ - 358 \\ \hline 495 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 495 \\ + 594 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Попробуйте другое число. Что вышло? А то, что, если четко и правильно выполнять все инструкции, вы всегда будете получать 1089! Как так?

Алгебра, помоги! Итак, начинаем мы с трехзначного числа abc , в котором $a > b > c$. Точно так же, как и $853 = (8 \times 100) + (5 \times 10) + 3$, число abc равняется $100a + 10b + c$. Записав его справа налево, получим число cba , равное $100c + 10b + a$. Вычитание дает нам

$$\begin{aligned} & (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) \\ &= (100a - a) + (10b - 10b) + (c - 100c) \\ &= 99a - 99c = 99(a - c) \end{aligned}$$

Другими словами, нам надо умножить полученную разность на 99. А раз в изначальном нашем числе цифры идут по убыванию, $a - c$ даст нам как минимум 2: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9. Следовательно, выполнив вычитание, мы гарантированно получим

$$198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 \text{ или } 891.$$

И каждое из этих чисел, если мы прибавим его к его «зеркальному» двойнику, даст

$$198 + 891 = 297 + 792 = 396 + 693 = 495 + 594 = 1089$$

— пару, неизбежно дающую в сумме 1089.

Этот пример отлично иллюстрирует то, что я называю **золотым правилом алгебры**: совершайте с одной частью уравнения те же действия, что и с другой его частью.

Например, нам нужно найти x в уравнении

$$3(2x + 10) = 90.$$

Наша основная задача — изолировать x , и первый шаг на пути к этому — разделить обе части на 3, чтобы упростить решение:

$$2x + 10 = 30.$$

Второй шаг — избавиться от 10, которую надо вычесть и слева и справа, то есть

$$2x = 20.$$

Наконец делим все на 2, упрощая тем самым левую часть, в итоге получая

$$x = 10.$$

Ну и проверим ответ, конечно — это никогда не помешает: При $x = 10$ $3(2x + 10) = 3(30) = 90$, что верно. Интересно, есть ли у этого уравнения другое решение? Ответ — нет, потому что любое значение x должно удовлетворять не только этому, но и любому последующему уравнению, так что $x = 10$ — единственный верный ответ.

А вот алгебраическая задачка из реальной жизни: в 2014 г. газета *New York Times* рассказала читателям, что фильм «Интервью» (*The Interview*) компании «Сони Пикчерз» в первые четыре дня после релиза собрал в Интернете \$15 млн. Но компания не уточнила, сколько из этой суммы принесли покупки фильма в Сети (\$15), а сколько — платные просмотры (\$6); зато мы знаем, что всего было совершено около 2 млн транзакций. Чтобы эту задачку решить, обозначим количество онлайн-продаж буквой S , количество платных просмотров — буквой R . Составим уравнение

$$S + R = 2\,000\,000.$$

А так как каждая транзакция по продаже — это \$15 прибыли, а по просмотру — \$6, уравнение преобразуется:

$$15S + 6R = 15\,000\,000$$

Возможность привести первое уравнение к виду $R = 2\,000\,000 - S$ позволяет нам преобразовать и второе уравнение:

$$15S + 6(2\,000\,000 - S) = 15\,000\,000.$$

или $15S + 12\,000\,000 - 6S = 15\,000\,000$, в котором у нас из неизвестных остается только S . Продолжаем упрощать:

$$9S + 12\,000\,000 = 15\,000\,000.$$

Вычтем из обеих частей 12 000 000:

$$9S = 3\,000\,000.$$

Значит, S примерно равняется трети миллиона: $S \approx 333\,333$, а $R = 2\,000\,000 - S \approx 1\,666\,667$ (проверим: общий доход составил $\$15 \times 333\,333 + \$6 \times 1\,666\,667 \approx \$15\,000\,000$).

Теперь самое время обсудить правило, которым мы в этой книге уже использовали и продолжим использовать, хотя до этого напрямую о нем не говорили. Называется оно «**закон дистрибутивности**» и работает тогда, когда у вас в одной задаче или одном уравнении есть одновременно сложение и умножение. Согласно этому закону, для любых чисел a , b и c верно следующее:

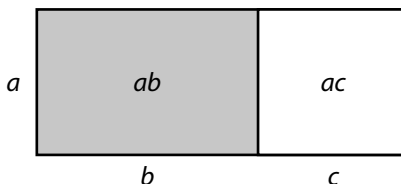
$$a(b + c) = ab + ac.$$

Это правило следует использовать при умножении однозначного числа на двузначное, например,

$$7 \times 28 = 7 \times (20 + 8) = (7 \times 20) + (7 \times 8) = 140 + 56 = 196.$$

Очень полезная штука, когда дело доходит до счета. Допустим, у нас есть 7 кошельков с монетами: по 20 золотых и 8 серебряных монет в каждом. Сколько у нас всего монет? С одной стороны, можно подойти к проблеме так: в каждом кошельке по 28 монет, значит, всего их 7×28 . С другой стороны, можно посчитать отдельно монеты разного достоинства: 7×20 золотых и 7×8 серебряных, значит, всего: $(7 \times 20) + (7 \times 8)$. Следовательно, $7 \times 28 = (7 \times 20) + (7 \times 8)$.

Закон дистрибутивности можно выразить и геометрически, начертив прямоугольник и разбив его на два части, как на рисунке.



Прямоугольник, иллюстрирующий закон дистрибутивности: $a(b + c) = ab + ac$

Как видим, площадь прямоугольника равна $a(b + c)$. Однако левая часть выглядит как ab , правая — как ac , поэтому в итоге у нас получается $ab + ac$. Отличная иллюстрация к закону дистрибутивности при условии, что a , b и c — положительные величины.

Иногда, кстати, его можно применить одновременно и к числам, и переменным, например,

$$3(2x + 7) = 6x + 21$$

«Читать» это уравнение можно двумя способами: слева направо и справа налево. В первом случае мы видим 3, умноженное на $2x + 7$. Во втором мы разлагаем $6x + 21$ на сомножители, «вытягивая» тройку из $6x$ и 21.

Отступление

Почему «минус» на «минус» при умножении дают «плюс»? Иными словами, с чего бы вдруг $(-5) \times (-7) = 35$? У учителей всегда наготове с десяток самых разных объяснений, начиная с аннулирования долгов и заканчивая железобетонным «ну, потому что вот так». Но *настоящая* причина — в том, что закон дистрибутивности работает по отношению ко *всем* числам, не только положительным. А раз уж мы применяем его и к отрицательным числам (и к нулю, кстати), будьте готовы столкнуться с последствиями. Давайте посмотрим, почему.

Допустим, мы примем тот факт, что $-5 \times 0 = 0$, а $-5 \times 7 = -35$. (Для этих примеров тоже имеются свои доказательства, очень близкие к тому, что мы выстраиваем сейчас, но большинство с радостью просто принимают эти утверждения на веру.) Взгляните-ка вот на что:

$$-5 \times (-7 + 7)$$

Чему это равно? С одной стороны, это все то же -5×0 , равное, как нам хорошо известно, нулю. С другой стороны, используя закон дистрибутивности, мы получим $((-5) \times (-7)) + (-5 \times 7)$. Следовательно,

$$((-5) \times (-7)) + (-5 \times 7) = ((-5) \times (-7)) - 35 = 0$$

А если $((-5) \times (-7)) - 35 = 0$, мы вынуждены признать, что $(-5) \times (-7) = 35$. Обобщая, можно сказать, что закон дистрибутивности утверждает, что для всех значений a и b будет верно следующее: $(-a) \times (-b) = ab$.

Магия метода FOIL

Одним из самых важных и полезных следствий из закона дистрибутивности является **алгебраическое правило FOIL**¹, согласно которому для любых переменных a, b, c, d верно следующее:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Смотрите, как правило FOIL работает на практике: сначала мы перемножаем *первые* числа в $(a + b)(c + d)$, то есть ac . Потом — *внешние*, то есть ad . Затем — *внутренние*: bc . И наконец — *последние*: bd .

Давайте проиллюстрируем все это примером с конкретными числами:

$$\begin{aligned} 23 \times 45 &= (20 + 3)(40 + 5) \\ &= (20 \times 40) + (20 \times 5) + (3 \times 40) + (3 \times 5) \\ &= 800 + 100 + 120 + 15 \\ &= 1035 \end{aligned}$$

Отступление

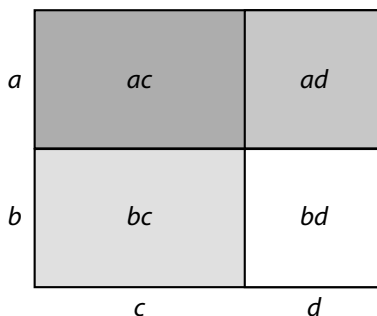
Почему работает правило FOIL? Согласно закону дистрибутивности (по отношению к части со сложением, идущей на первом месте),

$$(a + b)e = ae + be$$

А теперь вместо e подставим $c + d$, что даст нам

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Последняя часть становится возможной благодаря повторному применению закона дистрибутивности. Если вы предпочитаете геометрически визуализированное доказательство (при условии, что a, b, c, d — положительные величины), то вот вам прямоугольник, площадь которого можно найти двумя различными способами.



¹ Аббревиатура слов *First-Outer-Inner-Last*, демонстрирующих порядок произведения математических действий и буквально означающих «первые — внешние — внутренние — последние». — Прим. пер.

С одной стороны, площадь можно высчитать с помощью $(a + b)(c + d)$. С другой — мы можем разбить большой прямоугольник на четыре с площадями ac , ad , bc и bd . Значит, общая площадь будет равна $ac + ad + bc + bd$. Знак равенства между двумя этими подходами обеспечивает правило *FOIL*.

А теперь давайте посмотрим, как работает магия правила *FOIL*. Бросьте две игральные кости и посмотрите таблицу, которая приведена чуть ниже. Допустим, вы выкинули 6 и 3. На обратных сторонах костей будет, соответственно, 1 и 4.

Бросьте две игральные кости (допустим, выпало 6 и 3):	
Перемножьте выпавшие числа:	$6 \times 3 = 18$
Перемножьте числа на обратных сторонах костей:	$1 \times 4 = 4$
Перемножьте «первое верхнее» и «второе нижнее» числа:	$6 \times 4 = 24$
Перемножьте «первое нижнее» и «второе верхнее» числа:	$1 \times 3 = 3$
Итого:	49

В нашем примере результат будет равен 49. И сколько бы вы ни бросали обычные шестигранные кости, результат будет тот же. Дело в том, что сумма чисел на противоположных сторонах стандартной игровой кости всегда равна 7. То есть если обозначить выпавшие числа буквами x и y , их парами будут $7 - x$ и $7 - y$. Алгебра переделывает нашу таблицу таким вот образом:

Бросьте два игральные кости (выпало x и y):	
Перемножьте выпавшие числа:	$xy = xy$
Перемножьте числа на обратных сторонах костей:	$(7 - x)(7 - y) = 49 - 7y - 7x + xy$
Перемножьте «первое верхнее» на «второе нижнее»:	$x(7 - y) = 7x - xy$
Перемножьте «первое нижнее» на «второе верхнее»:	$(7 - x)y = 7y - xy$
Итого:	49

Обратите внимание на подсчет в третьей строке ($-x$ и $-y$ при умножении дают xy со знаком плюс). К результату 49 можно прийти и другим, менее алгебраическим, способом: достаточно просто посмотреть на второй столбец таблицы и увидеть там те самые четыре числа, которые нужны нам для «запуска» FOIL: $(x + (7 - x))(y + (7 - y)) = 7 \times 7 = 49$.

На уроках алгебры правило FOIL обычно применяют для решения таких, например, задач:

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 4x + 3x + 12 = x^2 + 7x + 12$$

В крайней правой части число 7 (которое в этом случае называется *коэффициентом* числа x) есть сумма 3 и 4; 12 же (здесь он будет *постоянным членом*) — их произведение. Ну а получить ответ с нашим-то опытом — дело элементарное: так как $5 + 7 = 12$, а $5 \times 7 = 35$, получаем

$$(x + 5)(x + 7) = x^2 + 12x + 35$$

С отрицательными величинами это тоже отлично работает, и вот тому подтверждение: в нашем первом примере мы начинаем с того, что $6 + (-2) = 4$, а $6 \times (-2) = -12$.

$$(x + 6)(x - 2) = x^2 + 4x - 12$$

$$(x + 1)(x - 8) = x^2 - 7x - 8$$

$$(x - 5)(x - 7) = x^2 - 12x + 35$$

А вот примеры, когда известные числа у нас одинаковые:

$$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5) = x^2 + 10x + 25$$

$$(x - 5)^2 = (x - 5)(x - 5) = x^2 - 10x + 25$$

Обратите внимание, кстати, что $(x + 5)^2 \neq x^2 + 25$: ошибку эту делают почти все, кто только начинает познавать азы алгебры. Но куда интереснее обстоят дела, когда у нас есть два одинаковых числа с разными знаками. Например, так как $5 + (-5) = 0$,

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 + 5x - 5x - 25 = x^2 - 25$$

Главное, что нужно запомнить — формула *разности квадратов двух переменных*:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Мы уже пользовались ей в главе 1, в примере, когда учились в уме возводить в квадрат числа. Способ этот основан на алгебраической формуле:

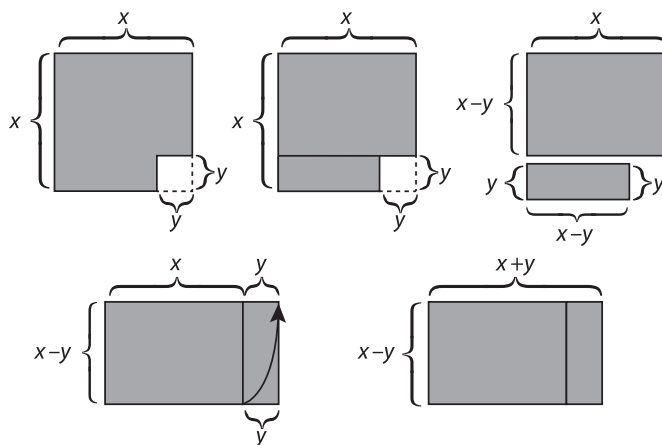
$$A^2 = (A + d)(A - d) + d^2$$

Сначала давайте удостоверимся в правильности этой формулы. В отличие от формулы квадратов здесь мы имеем $[(A + d)(A - d)] + d^2 = [A^2 - d^2] + d^2 = A^2$. Стало быть, это действительно для всего диапазона значений A и d . На практике буквой A обозначается число, возводимое в квадрат, а d — его разность с ближайшим круглым числом. Например, чтобы возвести в квадрат 97, мы принимаем d за 3, чтобы получить

$$\begin{aligned} 97^2 &= (97 + 3)(97 - 3) + 3^2 \\ &= (100 \times 94) + 9 \\ &= 9409 \end{aligned}$$

Отступление

А вот несколько рисунков, доказывающих закон квадратичной зависимости. На них показано, как геометрическая фигура с площадью $x^2 - y^2$ может быть преобразована в прямоугольник с площадью $(x + y)(x - y)$.



В главе 1 мы научились перемножать между собой близкие по значению числа. Но если там мы оперировали числами, близкими к сотне и начинающимися с одной и той же цифры, то здесь, используя элементы

алгебры, мы можем поговорить и о более интересных примерах. Скажем, вот алгебраическая интерпретация метода сближения:

$$(z + a)(z + b) = z(z + a + b) + ab$$

Это становится возможным, потому что $(z + a)(z + b) = z^2 + zb + za + ab$, а значит, мы можем вынести за скобки из первых трех элементов сомножитель z . Формула эта работает для любых значений, хотя обычно под z мы понимаем число, заканчивающееся на ноль. Чтобы перемножить, например, 43×48 , мы берем за z число 40, соответственно, $a = 3$, $b = 8$. И тогда наша формула говорит нам, что

$$\begin{aligned} 43 \times 48 &= (40 + 3)(40 + 8) \\ &= 40(40 + 3 + 8) + (3 \times 8) \\ &= (40 \times 51) + (3 \times 8) \\ &= 2040 + 24 \\ &= 2064 \end{aligned}$$

Обратите внимание, что при сложении наши множители дают $43 + 48 = 91$ — тот же результат, что и менее сложные для подсчетов $40 + 51 = 91$. Это совсем не случайно, ведь алгебра говорит нам, что сумма изначальных множителей представляет собой $(z + a) + (z + b) = 2z + a + b$, что является в то же время суммой более простых чисел z и $z + a + b$. А значит, мы можем легко округлять изначальные числа до удобных нам при подсчетах. Последнее вычисление, например, может быть сведено к $z = 50$, $a = -7$ и $b = -2$, и умножать мы будем 50 на 41. (Легко понять, откуда взялось 41: $43 + 48 = 91 = 50 + 41$.) Следовательно,

$$\begin{aligned} 43 \times 48 &= (50 - 7)(50 - 2) \\ &= (50 \times 41) + (-7 \times -2) \\ &= 2050 + 14 \\ &= 2064 \end{aligned}$$

Отступление

В главе 1 мы использовали этот метод для чисел больше 100. Но он отлично работает и с меньшими величинами, например,

$$\begin{aligned} 96 \times 97 &= (100 - 4)(100 - 3) \\ &= (100 \times 93) + (-4 \times -3) \\ &= 9300 + 12 \\ &= 9312 \end{aligned}$$

Обратите внимание, что $96 + 97 = 193 = 100 + 93$ (на деле я всего лишь сложил две последние цифры, 6 и 7, чтобы узнать, что сотню нужно умножить на число, заканчивающееся на 3 и, скорее всего, равное 93). Со временем, получив опыт, вы научитесь не обращать внимания на минусы и умножать не отрицательные числа, а их положительные «отражения». То есть

$$\begin{aligned} 97 \times 87 &= (100 - 3)(100 - 13) \\ &= (100 \times 84) + (3 \times 13) \\ &= 8400 + 39 \\ &= 8439 \end{aligned}$$

Этот же метод можно применить к парам чисел, одно из которых чуть меньше, а другое — чуть больше 100, только в конце вместо сложения вам нужно произвести вычитание. Например,

$$\begin{aligned} 109 \times 93 &= (100 + 9)(100 - 7) \\ &= (100 \times 102) - (9 \times 7) \\ &= 10\,200 - 63 \\ &= 10\,137 \end{aligned}$$

И опять же, число 102 можно получить двумя способами: либо из $109 - 7$, либо из $93 + 9$, либо из $109 + 93 - 100$ (ну и четвертый вариант — сложить последние цифры начальных чисел: $9 + 3$ скажут нам, что число будет заканчиваться на 2, и этой информации может быть вполне достаточно). Практикуясь, вы научитесь легко перемножать близкие друг к другу числа. Посмотрите на несколько несложных примеров с трехзначными числами. Имейте в виду, что a и b здесь числа, в которых больше одного знака.

$$\begin{aligned} 218 \times 211 &= (200 + 18)(200 + 11) \\ &= (200 \times 229) + (18 \times 11) \\ &= 45\,800 + 198 \\ &= 45\,998 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 985 \times 978 &= (1000 - 15)(1000 - 22) \\ &= (1000 \times 963) + (15 \times 22) \\ &= 963\,000 + 330 \\ &= 963\,330 \end{aligned}$$

Поиски x

Чуть выше мы видели несколько примеров решения уравнений с помощью золотого правила алгебры. Если уравнение содержит только одно неизвестное (скажем, x) и обе его части — линейные (что значит, что в них есть x или кратные ему величины, но при этом это единственная их сложность — никаких x^2), найти x несложно. Например, чтобы решить уравнение

$$9x - 7 = 47$$

мы можем к его левой и правой части сначала добавить 7 и получить $9x = 54$, а потом разделить обе части на 9 и получить искомое: $x = 6$.

Или вот другой пример, чуточку сложнее:

$$5x + 11 = 2x + 18$$

Сначала мы упростим его, убрав из обеих частей $2x$, а потом (ну или вместе с первым шагом, если хотите) 11, что приводит нас к

$$3x = 7$$

решением же будет $x = 7/3$. В конечном итоге любое уравнение можно свести к $ax = b$ (или $ax - b = 0$) и его решению $x = b/a$ (исходя из того, что $a \neq 0$).

Ситуация немного запутывается, если мы имеем дело с *квадратным* уравнением (в котором на авансцене появляется x^2). Самый простой вариант квадратного уравнения :

$$x^2 = 9$$

которое имеет два решения: $x = 3$ и $x = -3$. И даже когда правая сторона уравнения не является квадратом простого числа, вроде

$$x^2 = 10$$

у нас все еще есть два решения: $x = \sqrt{10} = 3,16...$ и $x = -\sqrt{10} = -3,16...$ В принципе, если $n > 0$, число $\sqrt{n}$ — квадратный корень из n — обозначает положительное число с квадратом n . Если n не является квадратом целого числа, $\sqrt{n}$ легче всего посчитать на калькуляторе.

Отступление

А как насчет уравнения $x^2 = -9$? Пока мы вынуждены сказать, что оно не имеет решения: ведь не существует *действительного числа*, которое при возведении в квадрат давало бы -9 . Но в главе 10 мы увидим, что на самом деле существуют целых два ответа: $x = 3i$ и $x = -3i$, где i — это так называемое *мнимое* число с квадратом, равным -1 . Пусть пока это кажется вам странным и нелепым. Когда-то нам *отрицательные* числа казались невозможными. (Что это за количество такое — меньше нуля?) А ведь достаточно просто посмотреть на них под правильным углом, чтобы ухватить суть.

Уравнение вроде

$$x^2 + 4x = 12$$

выглядит немного сложнее из-за этого $4x$, зато у нас есть несколько способов его решить — ну, к этому мы привыкли, когда считали в уме.

Первый метод, который я обычно применяю в таких случаях, — *метод разложения на множители*. Сначала перенесем все в левую часть уравнения, чтобы справа остался только 0. Соответственно, наше уравнение превращается в

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

И что теперь? А теперь вспоминаем последний раздел, где мы говорили о FOIL и где мы уже видели, что $x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$. А это значит, что наше уравнение преобразуется в

$$(x + 6)(x - 2) = 0$$

Единственная возможная ситуация, в которой произведение двух сложных множителей равно 0, — это когда один из них равен 0. Следовательно, у нас либо $x + 6 = 0$, либо $x - 2 = 0$, то есть

$$x = -6 \text{ или } x = 2$$

что и является ответом (не забудьте проверить).

Применяя метод FOIL, получаем $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$. Что превращает разложение на множители в непростую, в общем-то, задачу. Например, в последнем примере нам нужно найти два числа: a и b — с суммой 4 и произведением -12 . Ответ — $a = 6$, $b = -2$ — поз-

воляет нам достичь желаемого и разложить на множители. Давайте попрактикуемся и используем метод разложения на множители $x^2 + 11x + 24$. Другими словами, перед нами стоит задача найти два числа, которые в сумме давали бы 11, а при умножении — 24. Подходят 3 и 8, а значит $x^2 + 11x + 24 = (x + 3)(x + 8)$.

А теперь взгляните на $x^2 + 9x = -13$. Найти множители для $x^2 + 9x + 13$ не так-то и просто. Но не отчаивайтесь. В таких случаях на помощь нам придет **формула корней квадратного уравнения**. Пользу ее переоценить невозможно — вот, смотрите сами:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет решение

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Символ $\pm$ означает «плюс» или «минус». Для примера: в уравнении

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$a = 1, b = 4, c = -12.$$

Значит, наша формула утверждает, что

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-12)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} = -2 \pm 4$$

Поэтому $x = -2 + 4 = 2$ или $x = -2 - 4 = -6$, что и требовалось доказать. Думаю, вы не станете спорить, что для решения этого примера более уместен был бы метод разложения на множители.

Отступление

Еще одним забавным способом решения квадратных уравнений является *метод дополнения до полного квадрата*. Например, чтобы решить уравнение $x^2 + 4x = 12$, добавим 4 в обе его части, чтобы получить

$$x^2 + 4x + 4 = 16$$

Сделать это нужно для того, чтобы преобразовать левую часть в $(x + 2)$ $(x + 2)$. Так наша задачка превращается в

$$(x + 2)^2 = 16$$

Другими словами, $(x + 2)^2 = 4^2$. Значит,

$$x + 2 = 4 \text{ или } x + 2 = -4$$

что дает нам $x = 2$ или $x = -6$, как мы уже выяснили чуть выше.

Но для уравнения

$$x^2 + 9x + 13 = 0$$

наш выбор очевиден — это формула корней. У нас получается, что $a = 1$, $b = 9$, а $c = 13$. То есть

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 52}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{29}}{2a}$$

Согласитесь — в общем-то, не самый очевидный случай. По большому счету, в математике очень немного формул, которые действительно надо помнить, но формула корней квадратного уравнения — одна из них. Достаточно немного попрактиковаться, и вы легко обнаружите, что использовать эту формулу просто, как... дважды два.

Отступление

Почему работает формула корней квадратного уравнения? Давайте запишем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ как

$$ax^2 + bx = -c$$

а потом разделим обе части на a (которое не равно 0), чтобы получить

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

А так как $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, мы можем использовать *метод дополнения до полного квадрата*, добавив к обеим сторонам уравнения $\frac{b^2}{4a^2}$, что даст нам

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{-c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Извлечем квадратный корень из левой и правой частей уравнения:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

и в результате получим

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Что и требовалось доказать.

Алгебра в графиках

В XVII веке в математике произошел настоящий прорыв: французы Пьер де Ферма и Рене Декарт независимо друг от друга придумали отличный способ визуализации алгебраических уравнений (равно как и алгебраическую запись геометрических объектов).

Начнем, пожалуй, с графика простого уравнения

$$y = 2x + 3$$

Оно означает, что любое значение переменной x мы должны удвоить, а потом прибавить к нему 3 — так у нас и получается y . В таблице ниже приведены несколько возможных пар значений для x и y . Рядом с таблицей — график, на котором все эти значения отмечены точками, и можно легко видеть, что все они определенным образом *упорядочены*. Посмотрите на координаты: $(-3, 3)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$ и так далее. Соединив эти точки одной линией и уведя ее в бесконечность, мы получим то, что называется *графиком*. График рядом с таблицей есть отображение уравнения $y = 2x + 3$.

x	y
-3	-3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9

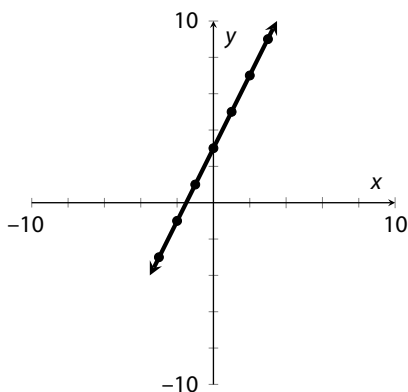


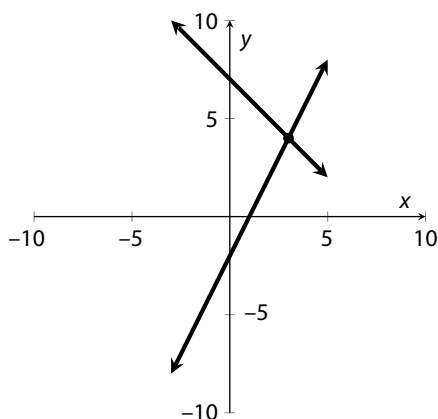
График уравнения $y = 2x + 3$

Добавим немного необходимой терминологии. Горизонтальная линия на нашей картинке называется *осью X*, вертикальная — *осью Y*. Сам график составляет *линия с наклоном 2*, которая *пересекает* ось *Y* в точке 3. Наклон — это степень «крутизны» линии. Наклон, равный 2, обозначает, что каждый раз, когда x увеличивается на одну единицу, y всегда будет увеличиваться на две (что очень хорошо видно из таблицы). Алгебраически точка пересечения с осью *Y* — значение y при $x = 0$. Геометрически же все очевидно: это точка пересечения графика с вертикальной линией. То есть график уравнения

$$y = mx + b$$

представляет собой линию с наклоном m , которая пересекается с осью *Y* в точке b (и наоборот). Линия обычно ассоциируется с ее уравнением, Поэтому мы можем просто сказать, что график на предыдущем рисунке — это линия $y = 2x + 3$.

А вот график линий $y = 2x - 2$ и $y = -x + 7$:



Где пересекаются графики $y = 2x - 2$ и $y = -x + 7$?

Первая линия $y = 2x - 2$ имеет наклон 2 и пересекается с осью *Y* в точке -2 (график получается *параллельным* линии $y = 2x + 3$ с полным сдвигом вниз по вертикали на 5). Наклон второй линии $y = -x + 7$ равен -1 , поэтому при увеличении x на единицу на ту же единицу уменьшается и y . Призовем на помощь алгебру, чтобы найти точку (x, y) пересечения этих двух линий — именно в ней значения наших двух перемен-

ных совпадут, и x мы будем искать исходя из того, что он здесь равен y . Иными словами, нам надо решить

$$2x - 2 = -x + 7$$

Добавим к обеим частям сначала x , потом 2 и получим

$$3x = 9$$

то есть $x = 3$. А зная x , мы можем использовать другое уравнение, чтобы найти y . Если $y = 2x - 2$, значит, $y = 2(3) - 2 = 4$ (а $y = -x + 7$ дает нам $y = -3 + 7 = 4$). Значит, графики пересекаются в точке $(3, 4)$.

Зная две точки, лежащие на одной прямой, нарисовать график в виде целой линии становится делом техники. Немного сложнее иметь дело с квадратичной функцией (и фигурирующим в ней x^2). Самое простое для отображения в виде графика — уравнение $y = x^2$ (изображен ниже). Подобные графики называются *параболами*.

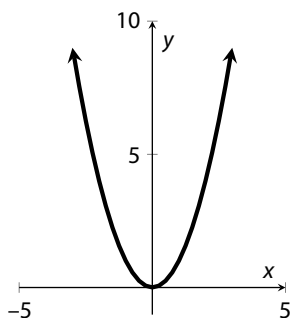


График уравнения $y = x^2$

А вот график уравнения $y = x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$.

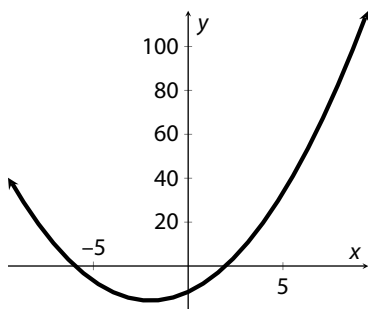
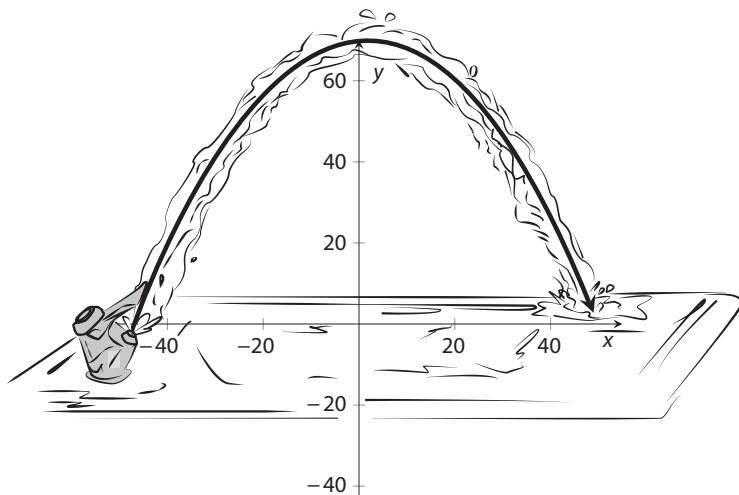


График уравнения $y = x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$. Масштаб оси y изменен

Обратите внимание, что, когда $x = -6$ или $x = 2$, $y = 0$. Это легко заметить на графике — в тех двух его местах, где парабола пересекает ось x . И совсем не случайно, что самая нижняя ее точка располагается точно в центре между ними — при $x = -2$ и $y = -16$. Это *вершина*.

С параболami мы сталкиваемся каждый день. Каждый раз, когда вы видите движущийся по кривой предмет, будь то летящий мяч или струя воды в фонтанчике, вы, в сущности, видите параболу (просто взгляните на картинку чуть ниже). Свойства параболы активно используются в устройстве фар, телескопов, спутниковых тарелок и многих других приборов.



Обычный питьевой фонтанчик.

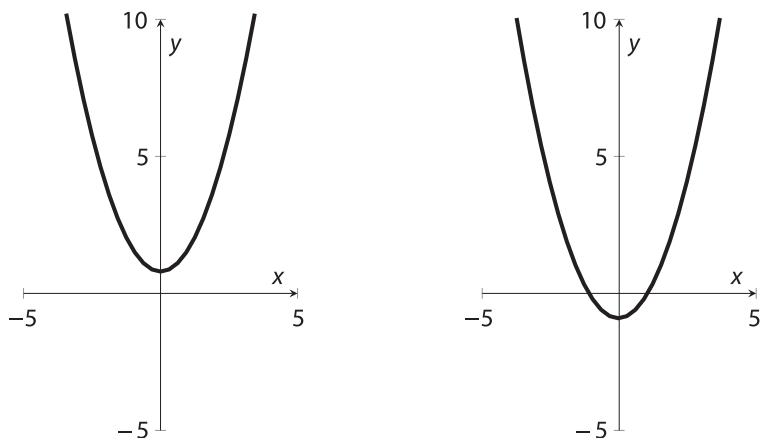
Направление струи соответствует параболe $y = -0,3x^2 + 0,8x + 70$

Еще немного терминологии. До этого все наши примеры содержали в себе *многочлены* — комбинации чисел и одной переменной (скажем, x), которая может быть возведена в положительную целую степень. Наибольшую из степеней входящего в многочлен одночлена называют *степенью многочлена*. Например, $3x + 7$ — это (линейный) многочлен первой степени. Многочлен второй степени, вроде $x^2 + 4x - 12$, называется *квадратным*, многочлен третьей степени ($5x^3 - 4x^2 - \sqrt{2}$) — *кубическим*. Бывают многочлены и других, больших, степеней (я, правда, никогда не слышал их специальных названий — главным образом, думаю, потому, что не так уж и часто они встречаются. Интересно, насколько часто ис-

пользуются в профессиональной литературе термины «квартический», «квинтический» и т.п. многочлены? Встречаются, наверное, но я, честно говоря, по этому поводу настроен немного скептически). А еще бывают многочлены, в которых нет переменных (например, 17) — о таких говорят, что они стоят в *нулевой степени*. Ну и последнее, что вам нужно знать о многочленах — это то, что многочленом не может быть сочетание с бесконечным количеством чисел. Например, $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ — не многочлен, а так называемый *бесконечный ряд*, о которых мы поговорим подробнее в главе 12.

Обратите внимание, что в случае с многочленами степень, в которую возводятся переменные, может быть выражена только положительным целым числом — ни в коем случае не отрицательным и не дробным. То есть если вам попадается уравнение с чем-нибудь вроде $y = 1/x$ или $y = \sqrt{x}$, это не многочлен, потому что $1/x = x^{-1}$, а $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Корнями многочлена мы считаем такие значения x , при которых многочлен равняется 0. Например, $3x + 7$ имеет один корень, а именно $x = -7/3$. А вот у $x^2 + 4x - 12$ два корня: $x = 2$ и $x = -6$. А $x^2 + 9$ корня (в смысле, действительного корня) не имеет вообще. Обратите внимание, что каждый многочлен степени 1 (*линейный*) имеет один корень в силу того, что он пересекает ось X только в одной точке, квадратный — не больше двух. Многочлены $x^2 + 1$, x^2 и $x^2 - 1$ имеют соответственно ноль, один и два корня.



Графики уравнений $y = x^2 + 1$ и $y = x^2 - 1$ имеют ноль и два корня соответственно.

График уравнения $y = x^2$, приведенный выше, имеет только один корень

А вот графики двух кубических многочленов, на которых вы легко заметите, что в обоих — максимум три корня.

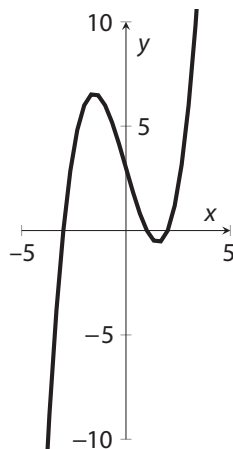
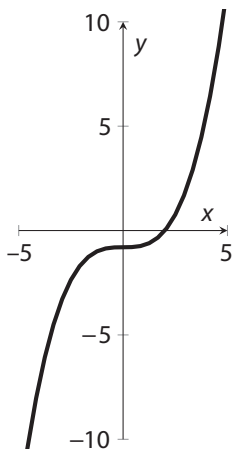


График уравнения $y = (x^3 - 8)/10 = \frac{1}{10}(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ имеет один корень,

а $y = (x^3 - 7x + 6)/2 = \frac{1}{2}(x + 3)(x - 1)(x - 2)$ — три

В главе 10 мы рассмотрим *основную теорему алгебры*, которая гласит, что каждый многочлен, возведенный в степень n , имеет не более n корней. Более того, он может быть разложен на линейную и квадратную части. Например,

$$(x^3 - 7x + 6)/2 = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)(x + 3)$$

имеет три корня (1, 2 и -3). В свою очередь,

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

имеет только один действительный корень — при $x = 2$ (и еще два *комплексных*, но им придется подождать до главы 10). Сегодня, кстати, очень легко можно найти график практически любой функции, просто набрав нужное вам уравнение в своем любимом поисковике. Просто напечатайте что-нибудь вроде $y = (x^3 - 7x + 6)/2$, и получится рисунок наподобие тех, которые представлены в этой книге.

В этой главе мы научились легко находить корни любого линейного или квадратного многочлена. А еще есть формулы для нахождения корней многочленов третьей или четвертой степеней, но они очень-очень слож-

ные. Вывели их еще в XVI веке, а потом еще две сотни лет ведущие математики занимались поиском такого же уравнения для многочлена пятой степени. Лучшие умы бились над этой проблемой и никак не могли найти решения, пока в начале XIX века норвежский математик Нильс Абель не доказал, что создать такую формулу для пятой и более высокой степени просто-напросто невозможно. Это приводит нас к каламбуру, который считают забавным только математики: «Почему Исаак Ньютон не смог доказать теорему невозможности формулы для пятого порядка? — Потому что корни с деревьев не падают!»

Примеры доказательств невозможности чего-либо мы рассмотрим в главе 6.

Отступление

Почему $x^{-1} = 1/x$? Конкретнее, почему $5^{-1} = 1/5$? Взгляните на такую закономерность:

$$5^3 = 125, 5^2 = 25, 5^1 = 5, 5^0 = ?, 5^{-1} = ??, 5^{-2} = ???$$

Обратите внимание, что с каждым уменьшением степени на единицу число делится на 5, что имеет для нас смысл, если над этим задуматься. Ведь тогда $5^0 = 1$, $5^{-1} = 1/5$, $5^{-2} = 1/25$ и так далее. *Настоящая* же причина этого — **правило действий со степенями**, согласно которому $x^a x^b = x^{a+b}$. Лучше всего он работает, когда a и b — положительные и целые величины. Так, $x^2 = x \cdot x$, а $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Значит,

$$x^2 x^3 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^5$$

Если мы хотим, чтобы правило работало при значении степени, равном 0, необходимо, чтобы

$$x^{a+0} = x^a x^0$$

а так как левая часть становится равна x^a , этому же значению должна быть равна правая часть, что возможно только при $x^0 = 1$.

Желание же применить закон к отрицательным величинам вынуждает нас признать, что

$$x^1 x^{-1} = x^{1+(-1)} = x^0 = 1$$

Разделим обе части на x и получим, что x^{-1} должен равняться $1/x$. По той же причине $x^{-2} = 1/x^2$, $x^{-3} = 1/x^3$ и т.д.

Применение закона к целым величинам дает

$$x^{1/2}x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x^1 = x$$

Следовательно, умножая $x^{1/2}$ на $x^{1/2}$, мы получаем x , а это значит, что $x^{1/2} = \sqrt{x}$ (при условии, что x является положительным числом).

Вычисление Y (и X, само собой!)

Предлагаю закончить главу тем же, с чего мы начинали — с алгебраической магии.

Шаг номер 1. Задумайте два числа от 1 до 10.

Шаг номер 2. Сложите их между собой.

Шаг номер 3. Умножьте сумму на 10.

Шаг номер 4. Прибавьте большее из загаданных чисел.

Шаг номер 5. Теперь вычтите меньшее.

Шаг номер 6. Скажите мне результат, и я назову *оба* загаданных вами числа.

Хотите — верьте, хотите — нет, но одного этого достаточно, чтобы узнать, с чего все начиналось. Например, если в результате получилось число 126, значит, скорее всего, вы загадали 9 и 3. Даже если повторить этот фокус несколько раз подряд, изумленная аудитория вряд ли догадается, как вы это делаете.

А секрет вот в чем. Чтобы узнать большее число, возьмите последнюю цифру результата (в нашем случае это 6), прибавьте к предшествующему ей числу (то есть 12) и разделите на 2. Так мы узнаем, что первое число — $(12 + 6)/2 = 18/2 = 9$. Второе число можно найти, вычтя из первого (9) последнюю цифру ответа, то есть $9 - 6 = 3$.

Вот еще пара примеров — попрактиковаться. При ответе 82 большее из загаданных чисел — $(8 + 2)/2 = 5$, меньшее — $5 - 2 = 3$. При ответе 137 большее — $(13 + 7)/2 = 10$, меньшее — $10 - 7 = 3$.

Как же все-таки это работает? Допустим, загаданные вами числа — это X и Y , при этом X больше или равен Y . Согласно алгебраическим методам и инструкциям, показанным в таблице, мы увидим, что после пятого шага получается $10(X + Y) + (X - Y)$.

Шаг 1:	X и Y
Шаг 2:	$X + Y$
Шаг 3:	$10(X + Y)$
Шаг 4:	$10(X + Y) + X$
Шаг 5:	$10(X + Y) + (X - Y)$
Большее число:	$((X + Y) + (X - Y))/2 = X$
Меньшее число:	$X - (X - Y) = Y$

И какой от этого толк, спросите вы? Обратите внимание, что число, получающееся после $10(X + Y)$ будет обязательно заканчиваться на 0, а цифра (или цифры) перед этим нулем — сумма $X + Y$. Так как X и Y у нас находятся в пределах от 1 до 10, а X больше или равен Y , разность $X - Y$ неизбежно будет однозначным числом (от 0 до 9). Это означает, что последней цифрой результата будет число, равное $X - Y$. Например, если вы загадывали 9 и 3, $X = 9$, а $Y = 3$. Значит, результат после пятого шага должен начинаться с $X + Y = 9 + 3 = 12$, а заканчиваться $X - Y = 9 - 3 = 6$, дающими вместе 126. А раз уж мы знаем $X + Y$ и $X - Y$, мы можем взять их среднее арифметическое, чтобы получить $((X + Y) + (X - Y))/2 = X$. В поисках Y мы можем посчитать $((X + Y) - (X - Y))/2$ (в нашем случае — $(12 - 6)/2 = 6/2 = 3$), но мне куда более легким способом кажется просто взять большее число и вычесть из него последнюю цифру ответа (то есть $9 - 6 = 3$), потому что $X - (X - Y) = Y$.

Отступление

Если вы хотите еще немного пощекотать нервы себе и своему зрителю, чья рука — гарантирую вам — немедленно потянется за калькулятором, попросите его загадать любые два числа от 1 до 100. И следуйте тем же инструкциям с одним лишь небольшим изменением: в третьем шаге попросите умножить результат не на 10, а на 100. То есть если ваш зритель, например, начал с 42 и 17, после пятого шага у него должно получиться 5925. Ответ вы можете составить, взяв из остатка две последние цифры и подсчитав их среднее арифметическое. Большим числом здесь будет $(59 + 25)/2 = 84/2 = 42$. А чтобы узнать меньшее, вычтите из большего две последние цифры ответа, в нашем случае — $42 - 25 = 17$, искомое число. Объяснение будет по большому счету таким же, что и ранее — единственным исключением станет процедура после

пятого шага: ответ будет $100(X + Y) - (X - Y)$, где $X - Y$ — две последние цифры результата.

Еще один пример: если ответ получился 15 222 (то есть $X + Y = 152$, а $X - Y = 22$), большее из загаданных чисел — это $(152 + 22)/2 = 174/2 = 87$, а меньшее — $87 - 22 = 65$.

ГЛАВА НОМЕР ТРИ

$$\sqrt{9} = 3$$

Магия 9

Самое магическое число

В детстве любимым моим числом была девятка: ее магия мне казалась бесконечной, неисчерпаемой. Просто следуйте следующим инструкциям и увидите все сами:

1. Задумайте число от 1 до 10 (или выберите большее целое число; если хочется, можете воспользоваться калькулятором).
2. Умножьте его на 3.
3. Прибавьте 6.
4. Снова умножьте на 3.
5. Теперь на 2, если хотите.
6. Сложите между собой цифры своего числа. Если в результате у вас получилось однозначное число, остановитесь.
7. А если двузначное, снова сложите между собой цифры своего результата.
8. Сконцентрируйтесь на ответе.

У меня стойкое ощущение, что у вас получилось 9. Правильно? Если нет — проверьте свои вычисления.

Что такого волшебного в девятке? Именно об этом мы и поговорим в этой главе; а еще мы заглянем в параллельное измерение, в котором числа 12 и 3 функционально друг от друга ничем не отличаются. Первое

магическое свойство числа 9 становится явным, когда смотришь на ряд получаемых от него произведений:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, 135, 144...

Что общего между этими числами? Если вы сложите между собой цифры каждого из них, вы гарантированно получите 9. Давайте проверим: 18 состоит из $1 + 8 = 9$, 27 — из $2 + 7 = 9$, а, например, 144 — из $1 + 4 + 4 = 9$. Постойте-ка, вроде есть одно исключение — 99. Сумма его цифр — 18, но 18 — это произведение 9 и 2. Вывод, который мы сделаем, может быть, и знаком вам по начальной школе. Чуть позже в этой главе мы приведем его объяснение. Так вот:

Если число является произведением 9 и любого другого, сумма составляющих его цифр будет кратна 9 (и наоборот).

Например, если цифры числа 123 456 789 в сумме дают 45 (которое кратно 9), оно также кратно 9. А 314 156, сумма цифр которого равна 23 (которое на 9 не делится), таковым, наоборот, не является.

Чтобы понять, как это правило связано с фокусом, которым мы начали эту главу, и в чем, собственно говоря, его суть, обратимся к алгебре. Вы начали с определенного числа — назовем его N . После его утроения мы получим $3N$, которые после следующего шага превращаются в $3N + 6$. Повторное утроение дает нам $3(3N + 6) = 9N + 18$, что равно $9(N + 2)$. Если вы это удвоили, у вас будет $18N + 36 = 9(2N + 4)$, если нет — в результате фигурирует произведение целого числа на 9, и вы в любом случае закончите числом, кратным 9. Сложив между собой его цифры, вы снова получите кратное 9 число (скорее всего, 9, 18, 27 или 36), *сумма цифр* которого должна опять же быть равна 9.

А вот другая разновидность того же фокуса — не менее мной любимая. Попросите кого-нибудь вооружиться калькулятором и загадать одно из следующих четырехзначных чисел:

3141, 2718, 2358 или 9999

Числа эти взяты не просто так: 3141 — первые четыре цифры числа π (см. главу 8), 2718 — первые четыре цифры числа e (см. главу 10), 2358 — цифры, соответствующие числам из последовательности Фибоначчи (см. главу 5), 9999 — самое большое из четырехзначных чисел. Затем нужно умножить выбранное вами число на *любое* трехзначное. Результат получится шести- или семизначным — и это все, что вы можете о нем знать.

А теперь мысленно пообедем кружком любую цифру ответа — любую, кроме ноля (он и без того похож на кружок!). Попросите своего зрителя назвать вам остальные цифры в *любом* порядке и сконцентрироваться на неназванной, обведенной кружком. Пора оглашать ответ — но для этого нужно приложить немного усилий.

В чем тут секрет? Начнем с того, что каждое из изначальных четырех чисел кратно 9. А раз вы начинаете с числа, кратного 9, и умножаете его на целое число, ответ тоже будет кратен 9. А еще сумма его цифр должна быть кратна 9. Поэтому надо просто сложить между собой числа, которые вам называют. Неназванная цифра — это число, которое необходимо прибавить к результату, чтобы он стал кратным 9. Например, зритель называет вам цифры 5, 0, 2, 2, 6 и 1. Их сумма равна 16 — до ближайшего числа, кратного 9 — а именно, 18 — не хватает 2. Если вы слышите цифры 1, 1, 2, 3, 5, 8, дающие в сумме 20, то зритель не назвал вам 7 — остаток, который необходимо добавить к 20, чтобы получить 27. А что, если сумма названных вам цифр уже равна 18 — что тогда нужно угадать? Правильно, 9: вы же просили не обводить кружком 0.

Почему же цифры, составляющие числа, кратные 9, в сумме всегда дают числа, тоже кратные 9? Посмотрите на такой пример: число 3456, разложенное на элементы с помощью умножения на 10, выглядит как

$$\begin{aligned} 3456 &= (3 \times 1000) + (4 \times 100) + (5 \times 10) + 6 \\ &= 3(999 + 1) + 4(99 + 1) + 5(9 + 1) + 6 \\ &= 3(999) + 4(99) + 5(9) + 3 + 4 + 5 + 6 \\ &= (\text{число, кратное } 9) + 18 \\ &= \text{число, кратное } 9 \end{aligned}$$

Следуя той же логике, любое число, сумма цифр которого кратна 9, само должно быть кратно 9 (и наоборот: любое число, кратное 9, при сложении составляющих его цифр даст нам результат, кратный 9).

Вычисление вычета по модулю 9

А что, если сумма цифр нашего числа все-таки не кратна 9? Возьмем, например, число 3457. Следуя алгоритму, означенному чуть выше, мы можем представить 3457 (сумма цифр которого равна 19) как $3(999) + 4(99) + 5(9) + 7 + 12$, то есть 3457 — это $7 + 12 = 19$, что чуть больше, чем кратное девятке 18. А если $19 = 18 + 1$, значит, и 3457 ровно на единицу больше ближайшего кратного 9 числа. К тому же выводу можно

прийти, сложив цифры числа 19, потом — цифры числа 10, то есть вот такая последовательность у нас получается:

$$3457 \rightarrow 19 \rightarrow 10 \rightarrow 1$$

Процесс сложения между собой цифр числа и повторение этой операции до тех пор, пока не получится однозначное число, называется *вычислением вычета по модулю 9*, ведь на каждом этапе вы занимаетесь тем, что вычитаете число, кратное 9. Получаемое в итоге однозначное число называется *цифровым корнем* изначального числа. Например, числовой корень 3457 — 1, а 3456 — 9. Давайте попробуем вкратце суммировать все сказанное. Для каждого натурального n :

**Если цифровой корень n равен 9, n кратно 9.
В ином случае цифровой корень будет равен остатку,
получаемому от деления n на 9.**

Алгебраически, обозначив цифровой корень числа n как r , получаем:

$$n = 9x + r$$

где x — целое число. Вычисление вычета по 9 — забавный способ проверить результаты, полученные в результате сложения, вычитания и умножения. Например, сумма верна, если ее цифровой корень равен сумме цифровых корней складываемых чисел. Хотите конкретнее? Давайте посчитаем

$$\begin{array}{rcl} 91\,787 & \rightarrow 32 & \rightarrow 5 \\ + 42\,864 & \rightarrow 24 & \rightarrow 6 \\ \hline 134\,651 & & 11 \rightarrow \textcircled{2} \\ \downarrow & & \\ 20 & \rightarrow & \textcircled{2} \end{array}$$

Обратите внимание, что цифровые корни слагаемых чисел равны 5 и 6, а цифровой корень их суммы (11) равен 2. И совсем не случайно, что цифровой корень результата (134 651) тоже имеет цифровой корень, равный 2. Причина всего это кроется в следующей алгебраической формуле:

$$(9x + r_1) + (9y + r_2) = 9(x + y) + (r_1 + r_2)$$

Если числа не совпадают, вы наверняка где-то ошиблись. И вот что важно: даже если числа *совпадают*, это еще не значит, что ответ верный, хотя в 90% случаев проверка результата цифровыми корнями работает

безотказно и позволяет быстро найти ошибку. Однако, случайно поменяв местами две цифры, вы этого не заметите, ведь сумма цифр от этого не изменится. А вот появление неправильного числа говорит об ошибке, если только ошибка не связана с заменой 0 на 9 или 9 на 0. Этот же метод можно использовать, когда нам нужно сложить друг с другом длинный столбец чисел. Представим, вы зашли в магазин и купили несколько продуктов по следующим ценам:

$$\begin{array}{rcl}
 112,56 & \rightarrow & 15 \rightarrow 6 \\
 96,50 & \rightarrow & 20 \rightarrow 2 \\
 14,95 & \rightarrow & 19 \rightarrow 1 \\
 48,95 & \rightarrow & 26 \rightarrow 8 \\
 108,00 & \rightarrow & 9 \rightarrow 9 \\
 17,52 & \rightarrow & 15 \rightarrow 6 \\
 \hline
 398,48 & & 32 \rightarrow \textcircled{5} \\
 \downarrow & & \\
 32 & \rightarrow & \textcircled{5}
 \end{array}$$

Складывая цифры результата, мы видим, что его цифровой корень — 5, а сумма цифровых корней равна 32, что подтверждает его правильность, потому что цифровой корень 32 — тоже 5. При проверке результата вычитания метод тоже отлично работает. Возьмем для примера те же числа, что были у нас в позапрошлом примере:

$$\begin{array}{rcl}
 91\,787 & \rightarrow & 32 \rightarrow 5 \\
 -42\,864 & \rightarrow & 24 \rightarrow 6 \\
 \hline
 48\,923 & & -1 \rightarrow \textcircled{8} \\
 \downarrow & & \\
 26 & \rightarrow & \textcircled{8}
 \end{array}$$

Разность будет равна 48 923, ее цифровой корень — 8. Работая с цифровыми корнями уменьшаемого и вычитаемого, видим, что $5 - 6 = -1$. Но страшного в этом ничего нет — мы сделали все абсолютно правильно, потому что $-1 + 9 = 8$, да и прибавление (или вычитание) числа, кратного 9, к нашему ответу (или из нашего ответа) не меняет значение цифрового корня. По той же логике разница с 0 также верна при цифровом корне, равном 9.

А теперь неплохо было бы собрать вместе полученные нами знания и придумать еще один фокус (вроде того, который мы демонстрировали в предисловии). Просто следуйте инструкциям, хотите — с калькулятором, хотите — без.

1. Задумайте любое дву- или трехзначное число.
2. Сложите между собой его цифры.
3. Вычтите результат из задуманного числа.
4. Сложите между собой цифры полученной разности.
5. Если получилось четное число, умножьте его на 5.
6. Если нечетное — на 10.
7. Вычтите 15.

Получилось 75, да?

Если вы начали, например, с 47, вы сначала посчитали $4 + 7 = 11$, а потом — $47 - 11 = 36$. Дальше было $3 + 6 = 9$ — нечетное число, умножив которое на 10, получаем 90, а $90 - 15 = 75$. А может, вы начали с трехзначного числа — 831, например? Тогда $8 + 3 + 1 = 12$, потом $831 - 12 = 819$, а затем $8 + 1 + 9 = 18$ — четное число. Дальше делаем $18 \times 5 = 90$, вычитаем 15 и получаем те же 75.

Секрет тут в том, что, если цифровая сумма изначального числа равна T , само число должно быть на T больше, чем ближайшее число, кратное 9. Когда мы вычитаем из загаданного числа T , мы гарантированно получаем результат, который можно разделить на 9 без остатка, при этом он меньше 999, а значит, сумма его цифр будет равна либо 9, либо 18 (если вернуться к нашему примеру с 47, цифровая его сумма — 11; мы вычитаем 11 до 36 с цифровой суммой 9). И после следующего шага единственным вариантом остается 90 (как произведение 9×10 или 18×5) и 75 — точно, как в наших примерах.

Теперь предлагаю посмотреть, как работает вычисление вычета по девятке с умножением. Возьмем те же числа и попробуем посчитать:

$$\begin{array}{rcl}
 91\,787 & \rightarrow 32 & \rightarrow 5 \\
 \times 42\,864 & \rightarrow 24 & \rightarrow 6 \\
 \hline
 3\,934\,357\,968 & & 30 \rightarrow \textcircled{3} \\
 \downarrow & & \\
 57 & \rightarrow 12 & \rightarrow \textcircled{3}
 \end{array}$$

При умножении вычисление вычета по девятке работает на основе метода *FOIL*, о котором мы говорили в главе 2. Так, в нашем последнем примере цифровые корни справа говорят нам, что множители имеют формы $9x + 5$ и $9y + 6$, где x и y — целые числа. И когда мы их перемножаем, получаем

$$\begin{aligned}
 (9x + 5)(9y + 6) &= 81xy + 54x + 45y + 30 \\
 &= 9(9xy + 6x + 5y) + 30 \\
 &= (\text{число, кратное } 9) + (27 + 3) \\
 &= (\text{число, кратное } 9) + 3
 \end{aligned}$$

При делении вычисление вычета по модулю 9 обычно не используется, но я не могу не показать вам поистине чудесный метод деления на 9. Иногда его называют «ведическим». Возьмем

$$12\,302 \div 9$$

Представим это в следующем виде:

$$9 \overline{) 1\,2\,3\,0\,2}$$

Продублируем первую цифру над чертой, там же — но уже над последней цифрой — напишем литеру R (для обозначения остатка), вот так:

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} R \\ 9 \overline{) 1\,2\,3\,0\,2} \end{array}$$

А дальше будем складывать числа попарно, как это показано чуть ниже, обводя их овалом, и записывать результаты над чертой. Сумма 1 и 2, обведенных овалом, равна 3, поэтому следующим числом нашего частного будет 3.

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} R \\ 9 \overline{) 1\,2\,3\,0\,2} \end{array}$$

Потом $3 + 3 = 6$.

$$\begin{array}{r} 1 R \\ 9 \overline{) 1\,2\,3\,0\,2} \end{array}$$

Затем $6 + 0 = 6$.

$$\begin{array}{r} 1 R \\ 9 \overline{) 1\,2\,3\,0\,2} \end{array}$$

И завершаем все остатком: $6 + 2 = 8$.

$$\begin{array}{r} 1 R 8 \\ 9 \overline{) 1\,2\,3\,0\,2} \end{array}$$

И вот наш ответ: $12\,302 \div 9 = 1366$ с остатком 8. Так легко, что даже не верится, правда? Приведем еще один пример:

$$31\,415 \div 9$$

Чтобы сэкономить бумагу, сразу дадим полную картину:

$$\begin{array}{r} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{8} \textcircled{9} \text{ R } 14 \\ 9 \overline{) 3 \textcircled{1} 4 \textcircled{1} 5} \end{array}$$

Начиная сверху с 3, мы складываем $3 + 1 = 4$, потом $4 + 4 = 8$, потом $8 + 1 = 9$, и в конце — $9 + 5 = 14$. Получается 3489 и 14 в остатке. Но раз $14 = 9 + 5$, нам нужно добавить 1 к частному, чтобы получилось 3490 и 5 в остатке.

А вот простой вопрос с чарующим своей стройностью ответом. Проверьте, пожалуйста (на бумаге или в уме), правильно ли, что

$$111\ 111 \div 9 = 12\ 345 \text{ с остатком } 6$$

Мы уже знаем, что, если остаток равен или больше 9, мы просто вычитаем из него эту девятку, а к частному прибавляем 1. Примерно то же происходит, когда сумма складываемых нами при делении чисел превышает 9. Мы сначала это запоминаем, потом вычитаем из результата 9 и продолжаем считать так же, как и считали. Например, при решении $4821 \div 9$, мы делаем вот что:

$$\begin{array}{r} \textcircled{4} \text{ R } \\ 9 \overline{) 4 \ 8 \ 2 \ 1} \end{array}$$

Начинаем мы с 4, но поскольку $4 + 8 = 12$, единицу мы пишем над четверкой (чтобы не забыть), а потом вычитаем 9 из 12, чтобы дальше написать 3. Затем идет $3 + 2 = 5$, а после этого — $5 + 1 = 6$; в результате получаем 535 с остатком 6 — взгляните:

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ 4 \ 3 \ 5 \text{ R } 6 \\ 9 \overline{) 4 \ 8 \ 2 \ 1} \end{array}$$

Когда слишком многое «идет на ум», вычислять становится сложнее. Попробуем $98\ 765 \div 9$.

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \ \textcircled{1} \ \textcircled{1} \\ 9 \ 8 \ 6 \ 3 \text{ R } 8 \\ 9 \overline{) 9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5} \end{array}$$

Мы начинаем с 9, складываем $9 + 8 = 17$, отмечаем запоминаемую единицу и вычитаем 9, чтобы получить вторую цифру — 8. Дальше у нас идет $8 + 7 = 15$, мы отмечаем еще одну единицу и пишем $15 - 9 = 6$. $6 + 6 = 12$ — значит, «на ум идет» уже третья единица, — считаем $12 - 9 = 3$. И остаток: $3 + 5 = 8$. С учетом запомненных единиц получаем 10 973 с остатком 8.

Отступление

Если вам уже нравится деление на 9, попробуйте делить на 91. Возьмите любое двузначное число и просто делите его на 91 без остановки, множа количество знаков после запятой, пока не надоест. И никаких столбиков, никаких калькуляторов! Нет, кроме шуток! Вот, смотрите:

$$53 \div 91 = 0,582417\dots$$

Если говорить конкретнее, ответ тут — $0,\overline{582417}$, где линия над цифрами 582417 означает, что они повторяются до бесконечности. Откуда эти числа берутся? На самом деле это деление ничуть не сложнее умножения исходного двузначного числа на 11. С помощью метода, о котором мы говорили в главе 1, считаем $53 \times 11 = 583$. Вычитаем из этого числа единицу и получаем первую половину нашего ответа, а именно — 0,582. Вторая половина — это разность, полученная при вычитании первой половины из 999: $999 - 582 = 417$. В результате получаем $0,\overline{582417}$.

Еще один пример — $78 \div 91$. Здесь $78 \times 11 = 858$, то есть ответ будет начинаться с 857. Затем $999 - 857 = 142$, поэтому $78 \div 91 = 0,\overline{857142}$. Это число нам уже встречалось в главе 1, потому что $78/91$ легко упрощается до $6/7$.

Метод этот работает, потому что $91 \times 11 = 1001$. Поэтому в первом примере $\frac{53}{91} = \frac{53 \times 11}{91 \times 11} = \frac{583}{1001}$. А так как $1/1001 = 0,\overline{000999}$, мы получаем повторяющуюся часть нашего ответа из $583 \times 999 = 583\,000 - 583 = 582\,417$.

$91 = 13 \times 7$ дает нам отличный способ делить числа на 13, усложняя их, чтобы получить в знаменателе 91. Например, $1/13 = 7/91$, а так как $7 \times 11 = 077$, у нас получается

$$1/13 = 7/91 = 0,\overline{076923}$$

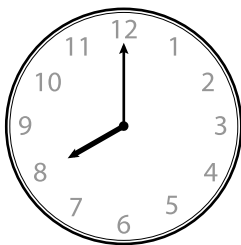
Точно так же $2/13 = 14/91 = 0,\overline{153846}$, потому что $14 \times 11 = 154$.

Магия 10, 11, 12 и модульной арифметики

Многое из того, что мы узнали о девятке, справедливо и в отношении других чисел. Вычисляя вычет по модулю 9, мы, по сути, заменяем числа тем, что осталось от их деления на 9. Не думаю, что для вас это большая новость. Каждый из нас делает это практически каждый день — с тех самых пор, когда мы научились называть время. Допустим, часы показы-

вают ровно 8 (утра или вечера — неважно). Сколько они будут показывать через 3 часа? А через 15 часов? А через 27? А сколько они показывали 9 часов назад? Первые числа, которые возникают в сознании — 11, 23, 35, -1 , но стоит нам вспомнить, что речь идет о часах, мы понимаем, что ответ на все эти вопросы будет один и тот же — 11 часов, ведь все заданные промежутки должны считаться от 12. Математики используют для этого такого вот вида запись:

$$11 \equiv 23 \equiv 35 \equiv -1 \pmod{12}$$



Какое время покажут часы через 3 часа? А через 15 часов? А через 27?
А сколько они показывали 9 часов назад?

Обобщая, мы можем сказать, что $a \equiv b \pmod{12}$, где a и b отличаются на число, кратное 12. Соответственно, $a \equiv b \pmod{12}$, если a и b при делении на 12 имеют один и тот же остаток. Иными словами, для любого целого значения m мы говорим, что два числа a и b равны (сравнимы) по модулю m , что обозначается как $a \equiv b \pmod{m}$ где a и b отличаются на число, кратное m . По сути, это значит, что

$$a \equiv b \pmod{m}, \text{ если } a = b + qt \text{ при целом значении } q.$$

Самая интересная в таких сравнениях по модулю — что ведут они себя абсолютно так же, как и обычные уравнения. Вот почему мы можем пользоваться здесь *модульной (модулярной) арифметикой, то есть арифметическими действиями над абсолютными значениями чисел* и спокойно их складывать, вычитать и умножать. Например, если $a \equiv b \pmod{m}$, а c — это любое целое число, верно будет, что

$$a + c \equiv b + c, \quad a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$$

Итак, разнообразные сравнения можно складывать, вычитать и умножать. Например, если $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, значит,

$$a + c \equiv b + d, \quad a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$$

Чуть более конкретно: так как $14 \equiv 2$, а $17 \equiv 5 \pmod{12}$, $14 \times 17 \equiv 2 \times 5 \pmod{12}$, и это подтверждает, что $238 = 10 + (12 \times 19)$. Следствием этого правила является то, что мы можем возводить сравнения по модулю в различные степени. Поэтому, если $a \equiv b \pmod{m}$, действует следующее **правило степени**:

$$a^2 \equiv b^2 \quad a^3 \equiv b^3 \quad \dots \quad a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

при положительном целом значении n .

Отступление

Почему работает модульная арифметика? Например, если $a \equiv b \pmod{m}$, а $c \equiv d \pmod{m}$, значит, $a = b + pm$, а $c = d + qm$ для целых значений p и q . Следовательно, $a + c = (b + d) + (p + q)m$, а $a + c \equiv b + d \pmod{m}$. Далее, применив правило FOIL, получаем

$$ac = (b + pm)(d + qm) = bd + (bq + pd + pqm)m$$

Значит, ac и bd отличаются друг от друга на число, кратное m , что приводит нас к $ac \equiv bd \pmod{m}$. Умножение соответствия $a \equiv b \pmod{m}$ на само себя дает $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$; повторение этого процесса опять-таки приводит нас к правилу возведения в степень.

То же правило возведения в степень делает число 9 таким особенным в десятичной системе. Так как

$$10 \equiv 1 \pmod{9}$$

то, согласно правилу возведения в степень, $10^n \equiv 1^n = 1 \pmod{9}$ для любого значения n . Значит, например, число 3456 соответствует

$$\begin{aligned} 3456 &= 3(1000) + 4(100) + 5(10) + 6 \\ &\equiv 3(1) + 4(1) + 5(1) + 6 = 3 + 4 + 5 + 6 \pmod{9} \end{aligned}$$

А если $10 \equiv 1 \pmod{3}$, становится понятно, почему мы можем простым сложением цифр определить, является ли число кратным 3 (или каким будет остаток при делении его на 3). Если бы мы проводили вычисления в другой системе — скажем, основанной на 16 (она называется *шестнадцатеричной* и используется в электротехнике и программировании), —

то, исходя из $16 \equiv 1 \pmod{15}$, мы могли бы простым сложением цифр определить, является ли число кратным 15 (или 3, или 5), или найти остаток при делении его на 15.

Но вернемся к более привычной десятичной системе. Есть простой способ определить, кратно ли определенное число 11. Основывается он на том, что

$$10 \equiv -1 \pmod{11}$$

Значит, $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$. Следовательно, $10^2 \equiv 1 \pmod{11}$, $10^3 \equiv (-1) \pmod{11}$ и т.д. Число 3456, например, соответствует

$$\begin{aligned} 3456 &= 3(1000) + 4(100) + 5(10) + 6 \\ &\equiv -3 + 4 - 5 + 6 = 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

То есть 3456 делится на 11 с остатком 2. Общее правило звучит так: число является кратным 11 только при условии, что мы приходим к числу, кратному 11 (например, 0, ± 11 , ± 22 , ...), при поочередном вычитании и сложении цифр. Давайте попробуем разобраться, делится ли число 31 415 на 11 без остатка? Достаточно посчитать $3 - 1 + 4 - 1 + 5 = 10$, чтобы понять, что не делится, но сумма цифр следующего за ним целого 31 416 будет равна 11, поэтому 31 416 кратно 11.

Расчеты по модулю 11, кстати, используются для работы с ISBN¹. Допустим, у вас есть книжка с десятизначным ISBN (номер с таким количеством цифр присваивался большинству книг до 2007 года). Эти цифры обозначают страну, в которой была издана книга, издательство и название, все, кроме последней, десятой, которую еще называют *контрольной*, — она нужна для того, чтобы превращать нагромождение цифр в стройную систему. То есть если десятизначный номер выглядит как $a-bcd-efghi-j$, тогда j выбирается на том основании, чтобы соответствовать

$$10a + 9b + 8c + 7d + 6e + 5f + 4g + 3h + 2i + j \equiv 0 \pmod{11}$$

Так, ISBN моей книжки «Секреты устного счета», изданной в 2006-м, — 0-307-33840-1, что соответствует

$$\begin{aligned} 10(0) + 9(3) + 8(0) + 7(7) + 6(3) + 5(3) + 4(8) + 3(4) + 2(0) + 1 &= \\ &= 154 \equiv 0 \pmod{11} \end{aligned}$$

¹ ISBN — Международный стандартный книжный номер (англ. *International Standard Book Number*) — уникальный номер книжного издания, необходимый для распространения книги в торговых сетях и автоматизации работы с изданием. — *Прим. пер.*

поскольку $154 = 11 \times 14$. В А что происходит, когда возникает необходимость в качестве контрольной цифры поставить 10? В этом случае вместо десятки ставят литеру *X* — она же римская десятка. Система ISBN хороша тем, что позволяет легко определить ошибку в случае, если одна из цифр введена неправильно. Например, если вы перепутали третью цифру, то общий результат окажется кратным 8: $\pm 8, \pm 16 \dots \pm 80$, а не 11 (вы ведь помните, что 11 у нас здесь — главное число?), что и укажет на ошибку. С помощью алгебры легко убедиться, что система способна обнаружить ошибку даже в том случае, если две цифры перепутаны местами. Предположим, мы перепутали цифры *c* и *f*. При этом порядок остальных цифр верен, то есть единственное, что делает верный результат неверным — это значения *c* и *f*. Старый результат основан на $8c + 5f$, новый — на $8f + 5c$. Их разность $(8f + 5c) - (8c + 5f) = 3(f - c)$, о которой мы знаем, что она не кратна 11. Следовательно, и новый результат не кратен 11.

В 2007 г. издатели перешли на тринадцатизначную систему ISBN, основанную уже на модуле 10 вместо 11. То есть номер *abc-d-efg-hijkl-m* правилен только в том случае, если он соответствует

$$a + 3b + c + 3d + e + 3f + g + 3h + i + 3j + k + 3l + m \equiv 0 \pmod{10}$$

Похожая система, основанная на модуле 10, используется для проверки правильности штрихкодов, номеров кредитных и дебетовых карточек. Еще модульная арифметика играет важную роль в проектировании электронных схем и интернет-систем, обеспечивающих финансовую безопасность.

Календарные исчисления

Мой любимый математический фокус — определять день недели, в который родился человек, по году и дате. Допустим, ваша знакомая говорит вам, что родилась 2 мая 2002 года. Представьте себе ее удивление, когда вы почти мгновенно сообщите ей, что это был четверг. Куда более полезно с практической точки зрения умение определять день недели по любой предстоящей в этом или следующем году дате. В этом разделе я расскажу вам, как легко это делать с помощью математики.

Но перед тем как заняться непосредственно самим методом, давайте вспомним пару интересных фактов из истории календаря. Итак, Земле требуется примерно 365,25 дней, чтобы пройти путь вокруг Солнца.

Поэтому обычный год у нас длится 365 дней, а четверти мы собираем вместе и раз в четыре года добавляем один «лишний» (его еще называют високосным) день — 29 февраля. Таким образом, за четырехлетний цикл у нас получается $4 \times 365 + 1 = 1461$ день, что очень близко к реальному, астрономическому, положению вещей. Именно эта идея и легла в основу юлианского календаря, составленного Юлием Цезарем более 2000 лет назад. Например, 2000 год — високосный. И каждый четвертый после него — тоже: 2004, 2008, 2012, 2016 и т.д., вплоть до последнего в этом столетии 2096. «А как же 2100? — спросите вы. — Он разве не будет високосным?» А вот и нет. Знаете почему?

Проблема в том, что более точная длительность астрономического года — 365,243 (что примерно на 11 минут меньше 365,25), поэтому високосных годов получается чересчур много. За четыре сотни оборотов вокруг Солнца человечество проживает 146 097 дней, а юлианский календарь насчитывает $400 \times 365,25 = 146\,100$ дней (что на три дня больше). Эту проблему (как и проблемы, связанные с определением дня Пасхи) попытался решить в 1582 году папа римский Григорий XIII, представив свой вариант календаря, впоследствии названный григорианским. И именно по этой самой причине в этом самом году католики всего мира убрали из своего летоисчисления десять дней. Например, в Испании после юлианского четверга 4 октября 1582 года последовала григорианская пятница, ставшая 15 октября 1582 года. После введения григорианского календаря годы, числовые значения которых можно разделить без остатка на 100, но при этом нельзя разделить без остатка на 400, перестали быть високосными (что позволило убрать лишние три дня). Следовательно, 1600 год в григорианском календаре оставался високосным, а вот 1700-й, 1800-й и 1900-й этот статус потеряли. Точно так же 2000-й и 2400-й — високосные, а 2100-й, 2200-й и 2300-й — нет. Согласно этой системе, каждые четыре сотни лет мы имеем $100 - 3 = 97$ високосных годов или $(400 \times 365) + 97 = 146\,097$ дней, что точно соответствует астрономической истине.

Некоторые страны — в основном, не католические — далеко не сразу приняли григорианский календарь. Англия вместе со своими колониями, например, перешла на него только в 1752 году, когда за средой 2 сентября сразу же последовал четверг 14 сентября (обратите внимание, что они «потеряли» 11 дней, а не десять, потому что пропустили 1700 год, который в юлианском календаре был високосным, а в григорианском — обычным). Всемирное же распространение григорианский календарь

получил только в 1920 году. Представьте, какой головной болью это стало для историков. Мой любимый исторический парадокс — смерти Уильяма Шекспира и Мигеля де Сервантеса, которые по справочникам случились в один день, 23 апреля 1616 года, а на деле — с разницей в десять дней. Все это как раз из-за того, что к моменту смерти Сервантеса Испания уже пользовалась григорианским календарем, а Англия — все еще юлианским. То есть григорианское 23 апреля 1616 года в Испании было юлианским 13 апреля 1616 года в Англии, где жил (и прожил еще десять дней) Шекспир.

Формула определения дня недели по любой дате григорианского календаря выглядит так:

$$\text{День недели} \equiv \text{код месяца} + \text{дата} + \text{код года} \pmod{7}$$

Давайте разберемся, что здесь к чему. Все это имеет смысл, если формула использует модульную арифметику по модулю 7 (поскольку в неделе 7 дней). Например, если нас интересует дата через 72 дня, день недели будет на два впереди от сегодняшнего, потому что $72 \equiv 2 \pmod{7}$. А вот дата через 28 дней придется на тот же день недели, потому что 28 делится на 7 без остатка.

Начнем, пожалуй, с кодов дней недели — их легче всего запомнить:

Номер	День недели
1	Понедельник
2	Вторник
3	Среда
4	Четверг
5	Пятница
6	Суббота
7 или 0	Воскресенье

По большому счету, здесь и запоминать-то ничего не надо: все точно соответствует привычной нам системе (ну, кроме воскресенья, которое, кроме 7, может быть и 0)¹.

¹ На самом деле автор приводит в таблице мнемонические упражнения, что вызвано американской традицией считать начало новой недели с воскресенья — это вызывает «сдвиг» кодов по отношению к порядку дней недели и, возможно, необходимость действительно эти коды запоминать. Так или иначе, переводчик взял на себя смелость

Отступление¹

Откуда пошли английские названия дней недели? Корнями они уходят в традиции Вавилонского царства, где были связаны с именами Солнца, Луны и пяти других ближайших к Земле небесных тел. От Солнца (*англ. Sun*) произошло воскресенье (*англ. Sun-day*), от Луны (*англ. Moon*) — понедельник (*англ. Mon-day*), от Сатурна — суббота (*англ. Satur-day*). Остальные названия легче найти во французском или, скажем, испанском языках. Так, Марс (*лат. Mars*) превратился во французское *Mardi* и испанское *Martes* (вторник), Меркурий (*лат. Mercurius*) — в *Mercredi* и *Miércoles* (среда), Юпитер (*лат. Jupiter*) — в *Jeudi* и *Jueves* (четверг), Венера (*лат. Venus*) — в *Vendredi* и *Viernes* (пятница). Обратите внимание, что и Марс, и Меркурий, и Юпитер, и Венера — не только названия планет, но и имена древнеримских богов. Английский же язык благодаря своему германскому происхождению перенял названия оставшихся четырех дней недели из скандинавской мифологии, в которой бога войны Марса звали Тиу (*англ. Tiw*), отца богов Юпитера — Тором (*англ. Thor*), его сына Меркурия — Одином (*англ. Woden*), а богиню любви и плодородия Венеру — Фрейей (*англ. Freya*). Так и появились «день Тиу» — вторник (*англ. Tues-day*), «день Одина» — среда (*англ. Wednes-day*), «день Тора» — четверг (*англ. Thurs-day*) и «день Фрейи» — пятница (*англ. Fri-day*).

А вот с кодами месяцев мороки чуть больше, поэтому здесь я приведу «запоминалки» — подсказки, основанные на ассоциации.

исключить в своей редакции конкретно эти мнемонические упражнения во избежание возможной путаницы и переизбытка информации, которая и без того хорошо знакома любому русскому читателю. — *Прим. пер.*

¹ В Древней Руси «блок» из семи дней назывался а «седмицей» (родство со словом «семь», думаю, очевидно). «Неделей» же называлось современное нам воскресенье — исключительно потому, что в этот день принято было ничего НЕ ДЕЛать. Название «воскресенье», закрепившееся в XVII веке, восходит к празднику Пасхи (воскресению Иисуса Христа).

К слову сказать, «неделя» считалась первым (а не последним, как сейчас) днем седмицы, поэтому второй день назывался «понедельник» — то есть следующий после «недельника». «Вторник» — второй день после праздника, «среда» — «середина» седмицы, «четверг» и «пятница» — соответственно, четвертый и пятый дни. «Суббота» же уходит своими корнями в еврейские традиции, к слову «шаббат», которое означает «покой», «отдых». — *Прим. пер.*

Месяц	Код	«Запоминалка»
Январь*	6	Я-Н-В-А-Р-Ь
Февраль*	2	Месяц номер 2
Март	2	В ритме марта: раз-два!
Апрель	5	Д-У-Р-А-К
Май	0	О, этот май-чародей!
Июнь	3	Летний Ж-У-К
Июль	5	Ж-А-Р-К-О!
Август	1	«А» — первая буква алфавита
Сентябрь	4	Падает Л-И-С-Т
Октябрь	6	Очень нужен З-О-Н-Т-И-К
Ноябрь	2	2 месяца до Нового года!
Декабрь	4	Ё-Л-К-А или С-Н-Е-Г

* Исключения: в високосном году январь = 5, февраль = 1.

Откуда берутся эти цифры, я объясню чуть позже — сначала разберемся с вычислениями. Единственный код года, который вам пока нужно знать, — 0 для 2000 года. Давайте попытаемся посчитать, на какой день недели пришлось в этом году 19 марта (мой день рождения, кстати). Код марта у нас — 2, код 2000 года — 0, подставляем их в нашу формулу и получаем

$$\text{День недели} = 2 + 19 + 0 = 21 \equiv 0 \pmod{7}$$

Значит, 19 мая 2000 года было воскресеньем.

Отступление

Быстренько объясним, откуда берутся коды месяцев. Обратите внимание, что в невисокосные годы коды февраля и марта совпадают. Объясняется это тем, что в феврале 28 дней, а значит, 1 марта наступает через 28 дней после 1 февраля — то есть оба эти месяца начинаются в один и тот же день недели. А теперь смотрите: 1 марта 2000 года было средой. Поэтому, если мы присвоим 2000 году код 0, а понедельнику — код 1, марту просто некуда деваться, как получить код 2. Поэтому в невисокосный год кодом февраля тоже должна быть двойка. А раз в марте у нас 31 день, что ровно на 3 больше февральских 28, календарь апреля сдвигается по неделе на 3 дня вперед, то есть код получается $2 + 3 = 5$. Дальше мы добавляем апрельские 28 + 2 к коду 5 и видим, что код мая должен быть $5 + 2 = 7$, которые мы можем

заменить на 0, раз уж наш модуль — 7. Точно так же мы можем определить коды и всех остальных месяцев.

С другой стороны, в феврале високосного года (а 2000 год был високосным) 29 дней, поэтому календарь марта убегает только на один день вперед, а код такого февраля будет $2 - 1 = 1$. В январе 31 день, поэтому его код в невисокосном году должен быть на три единицы меньше кода февраля: $2 - 3 = -1 \equiv 6 \pmod{7}$. В високосный же год получается на единицу меньше: $1 - 3 = -2 \equiv 5 \pmod{7}$.

Что происходит с вашим днем рождения от года к году? Если забыть про високосные годы, между двумя днями рождения проходит 365 дней, то есть каждый раз эта дата смещается на один день вверх по неделе, потому что $365 \equiv 1 \pmod{7}$, а $365 = 52 \times 7 + 1$. Но когда между ними «вклинивается» 29 февраля, если вы, разумеется, не родились именно 29 февраля, смещение составит не один день, а два. Соответственно, к коду года в нашей формуле мы просто добавляем 1. Или 2, когда дело доходит до високосного года. Вот коды годов с 2000-го по 2031-й. Не переживайте. Их вам запоминать не придется.

Обратите внимание, что мы идем просто по порядку — 0, 1, 2, 3 и т.д., — перескакивая через единицу для високосного года. Так происходит в случае с 2004-м, кодом которого вместо 4 будет 5, 2005-й тогда получает код 6, а 2007-й должен бы получить 7, но, так как мы с вами работаем по модулю 7, возвращаемся обратно к 0. Поэтому код 2007-го — 1, а 2008-го (високосного) — 3.

Год	Код	Год	Код	Год	Код	Год	Код
2000*	0	2008*	3	2016*	6	2024*	2
2001	1	2009	4	2017	0	2025	3
2002	2	2010	5	2018	1	2026	4
2003	3	2011	6	2019	2	2027	5
2004*	5	2012*	1	2020*	4	2028*	0
2005	6	2013	2	2021	5	2029	1
2006	0	2014	3	2022	6	2030	2
2007	1	2015	4	2023	0	2031	3

Коды годов с 2000-го по 2031-й (знаком * отмечены високосные годы)

И так далее. С помощью этой таблицы мы легко определим, что в 2025 году (это ближайший год, числовое обозначение которого является квадратом числа), день числа Пи (14 марта) придется на

$$\text{День недели} = 2 + 14 + 3 = 19 \equiv 5 \pmod{7} = \text{Пятница}$$

А как насчет 1 января 2008 года? Не забудьте, что год этот — високосный, а значит, код января будет 5, а не 6. Следовательно:

$$\text{День недели} = 5 + 1 + 3 = 9 \equiv 2 \pmod{7} = \text{Вторник}$$

Посмотрите еще раз на таблицу вдоль ее рядов, и увидите, что каждый раз, когда проходит 8 лет, код года повышается на 3 (по модулю 7). Например, годы в первом ряду имеют коды 0, 3, 6, 2 (двойка по модулю 7 — это та же девятка). Происходит это потому, что за период в 8 лет нам обязательно попадается два високосных года, поэтому даты смещаются на $8 + 2 = 10 \equiv 3 \pmod{7}$.

А вот кое-что еще более интересное. С 1901 по 2099 год через каждые 28 лет календарь повторяется один в один. Знаете, почему? Из 28 лет 7 — всегда високосные, поэтому календарь смещается на $28 + 7 = 35$ дней, а 35 — число, кратное 7, что и обеспечивает повторяемость дней недели (закономерность эта нарушится, если мы опустимся ниже 1900 года или поднимемся выше 2100-го, ведь в григорианском календаре они не високосные). Поэтому, просто складывая или вычитая числа, кратные 28, вы можете превратить *любой* год из промежутка с 1901-го по 2099-го в соответствующий ему из промежутка с 2000-го по 2027-й. Например, 1983-й имеет тот же код, что и $1983 + 28 = 2011$, а 2061-й — тот же, что и $2061 - 56 = 2005$.

То есть какую бы практическую задачу вы ни решали, вы можете превратить нужный вам год в один из тех, что составляют нашу таблицу, и таким нехитрым способом узнать его код. Почему, например, кодом 2017-го будет 0? Да потому что с 2000 года (имеющего код 0), календарь смещается по неделе 17 раз *плюс* дополнительно 4 раза за каждый високосный год — 2004-й, 2008-й, 2012-й и 2016-й. Значит, код 2017-го будет $17 + 4 = 21 \equiv 0 \pmod{7}$. А что насчет 2020-го? Здесь у нас будет уже пять високосных годов (ведь сам 2020-й — високосный), поэтому календарь смещается $20 + 5 = 25$ раз, а так как $25 \equiv 4 \pmod{7}$, кодом 2020 года будет 4. Вот как будет выглядеть общая схема определения годовых кодов в промежутке с 2000-го по 2027-й.

Шаг 1: Возьмите две последние цифры года (в примере с 2022 годом этими цифрами будут 22).

Шаг 2: Разделите это число на 4. В результате нас интересует только целое, остаток можно проигнорировать (в нашем примере — $22 \div 4 = 5$ с остатком 2).

Шаг 3: Сложите числа из первого и второго шагов (в нашем примере — $22 + 5 = 27$).

Шаг 4: Возьмите ближайшее число, кратное 7, которое при этом будет меньше суммы, полученной после третьего шага (это может быть 0, 7, 14, 21 или 28). Вычтите его из этой суммы и узнаете код года (другими словами, сократите число из третьего шага по модулю 7: так как $27 - 21 = 6$, кодом 2022 года будет 6).

Обратите внимание, что шаги с 1 по 4 работают для любого года в промежутке с 2000-го по 2099-й; можно значительно упростить себе задачу устного счета, просто вычтя на начальном этапе число, кратное 28, и получив таким образом год в промежутке с 2000-го по 2027-й. 2040 год, например, можно «упростить» до 2012, и шаги с 1-го по 4-й превращаются в элементарное $12 + 3 - 14 = 1$. К тому же результату можно прийти, работая непосредственно с 2040: $40 + 10 - 49 = 1$.

Алгоритм этот можно использовать не только для двухтысячных годов. Коды месяцев останутся такими же, а вот с кодами годов нужно будет сделать одну небольшую поправку. Код 1900 года будет равен 1. Следовательно, код каждого года в промежутке с 1900-го по 1999-й будет на одну единицу больше, чем их «собратья» в промежутке с 2000-го по 2099-й. То есть если код 2040-го — 1, значит, кодом 1940-го будет 2; а кодом 1922-го, например, будет 7 (ну, или 0), потому что 2022 год обозначается кодом 6. Код 1800 года — 3, 1700-го — 5, 1600-го — 0 (на самом деле на полный цикл у календаря уходит 400 лет, потому что именно четырехсотлетний период имеет $100 - 3 = 97$ високосных годов, то есть ровно через 400 лет, день в день, календарь сместится на $400 + 97 = 497$ дней, что даст нам абсолютно тот же день недели и то же число, ведь 497 кратно 7).

Хотите узнать, каким днем недели было 4 июля 1776 года? Сначала найдем код 2076 года, для чего вычтем 56 из 2076, а потом посчитаем код 2020-го: $20 + 5 - 21 = 4$. Следовательно, код 1776 года будет $4 + 5 = 9 \equiv 2 \pmod{7}$. Таким образом, получается, что по григорианскому календарю 4 июля 1776 года пришлось на

$$\text{День недели} = 5 + 4 + 2 = 11 \equiv 4 \pmod{7} = \text{Четверг}$$

А раз так, может быть, те, кто подписывал Декларацию независимости, просто хотели успеть завершить все перед выходными?

Отступление

Под конец главы давайте я расскажу вам о еще одном волшебном свойстве числа 9. Загадайте любое число, в котором ни одна цифра не повторяется, при этом идут они от меньшего к большему. Это может быть, например, 12 345, 2358, 369 или 135 789. Умножьте это число на 9 и сложите между собой цифры. В том, что результат будет кратен 9, для нас ничего нового нет — удивительным будет то, что цифры в своей сумме дадут *ровно* 9. Например,

$$9 \times 12\,345 = 111\,105 \quad 9 \times 2358 = 21\,222 \quad 9 \times 369 = 3321$$

Фокус сработает, даже если цифры будут повторяться — главное, чтобы они шли от меньшего к большему и чтобы разряд единиц не равнялся разряду десятков. Вот, смотрите:

$$9 \times 12\,223 = 110\,007 \quad 9 \times 33\,344\,449 = 300\,100\,041$$

Так в чем тут секрет? Давайте посмотрим, что происходит, когда мы умножаем на 9 число $ABCDE$, в котором $A \leq B \leq C \leq D < E$. Так как умножать на 9 — все равно что умножать на $10 - 1$, мы приходим к вычитанию

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E\,0 \\ -\,A\,B\,C\,D\,E \\ \hline \end{array}$$

Если считать слева направо, то, с учетом того, что $B \geq A$, $C \geq B$, $D \geq C$, а $E > D$, мы будем иметь дело с

$$\begin{array}{r} A\,(B-A)\,(C-B)\,(D-C)\,(E-D) \quad 0 \\ - \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad E \\ \hline A\,(B-A)\,(C-B)\,(D-C)\,(E-D-1)\,(10-E) \end{array}$$

а сумма цифр результата составит

$$A + (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D - 1) + (10 - E) = 9$$

что и требовалось доказать.

ГЛАВА НОМЕР ЧЕТЫРЕ

$$3! - 2! = 4$$

Магия счета

Математика с восклицательным знаком!

В самом начале этой книги мы говорили о том, как посчитать сумму всех чисел от 1 до 100. И мы справились — у нас получилось 5050. Также мы нашли замечательную формулу для подсчета суммы первых n . А почему бы теперь не поискать произведение чисел от 1 до 100? Даже по примерным прикидкам результат получится просто гигантским! Если вам интересно, скажу: это число, состоящее из 158 знаков. Вот оно:

93326215443944152681699238856266700490715968264381621468
59296389521759999322991560894146397615651828625369792082
722375825118521091686400000000000000000000000000000000

В этой главе вы увидите, как использовать такие огромные числа для счета. Они помогут нам узнать, сколько существует способов расставить на книжной полке дюжину книжек (примерно *полмиллиарда*), какие у вас шансы собрать хотя бы одну пару в покере (не такие уж и маленькие) или выиграть в лотерею (не такие уж и большие).

Когда мы перемножаем все числа от 1 до n , для обозначения произведения мы используем $n!$, что читается как «факториал числа n ». Другими словами,

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Например,

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Мне кажется, символ восклицательного знака подходит здесь как нельзя лучше: значение числа $n!$ увеличивается очень быстро и, как мы увидим чуть позже, таит в себе много удивительного. Для удобства математики определяют значение $0! = 1$. А еще $n!$ не определяется, когда n — отрицательная величина.

Отступление

Казалось бы, $0!$ должен быть равен 0. Но это почему-то не так: $0! = 1$. Давайте разберемся, почему. Обратите внимание, что для $n \geq 2$ $n! = n \times (n-1)!$, а значит

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

Если мы хотим, чтобы наше утверждение оставалось верным для $n = 1$, нам понадобится

$$0! = \frac{1!}{1} = 1$$

Итак, факториалы растут очень и очень быстро. Посмотрите сами:

$$\begin{aligned}0! &= 1 \\1! &= 1 \\2! &= 2 \\3! &= 6 \\4! &= 24 \\5! &= 120 \\6! &= 720 \\7! &= 5040 \\8! &= 40\,320 \\9! &= 362\,880 \\10! &= 3\,628\,800 \\11! &= 39\,916\,800 \\12! &= 479\,001\,600 \\13! &= 6\,227\,020\,800 \\20! &= 2,43 \times 10^{18} \\52! &= 8,07 \times 10^{67} \\100! &= 9,33 \times 10^{157}\end{aligned}$$

Насколько велики эти числа? Ученые говорят, что количество всех-всех песчинок в мире равняется 10^{22} . А количество всех-всех атомов во Вселенной — 10^{80} . Так вот, если вы тщательно перемешаете колоду из 52 карт (что, как мы чуть позже узнаем, может быть сделано 52! способами), шансы на то, что в таком порядке они сложатся впервые со времен изобретения карт и никогда больше не сложатся снова, близки к 100%. И это при условии, что все люди на Земле каждую минуту на протяжении нескольких миллионов лет будут тасовать каждый свою колоду.

Отступление

В начале главы вы, скорее всего, заметили, каким огромным количеством нолей заканчивается факториал 100! Откуда они берутся? При перемножении чисел от 1 до 100 мы получаем ноль всякий раз, когда умножаем число, кратное 5, на число, кратное 2. Первых в промежутке от 1 до 100 будет 20, вторых (по сути, всех четных) — 50, что, по идее, дает нам в конце 20 нолей. Но ведь числа 25, 50, 75 и 100 дают нам дополнительные коэффициенты пятерки, поэтому 100! будет иметь в итоге 24 ноля.

Как и в главе 1, здесь мы увидим несколько замечательных математических закономерностей, в которых используются факториалы. Вот, например, одна из моих любимых:

$$\begin{aligned}1 \times 1! &= 1 = 2! - 1 \\1 \times 1! + 2 \times 2! &= 5 = 3! - 1 \\1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! &= 23 = 4! - 1 \\1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! &= 119 = 5! - 1 \\1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! + 5 \times 5! &= 719 = 6! - 1 \\&\dots\end{aligned}$$

Закономерность факториала

Правило суммы и произведения

Большинство проблем с вычислением на самом деле сводятся к двум правилам — суммы и произведения. **Правило суммы** используется, когда нужно подсчитать общее количество имеющихся у вас вариантов выбора.

Допустим, у вас есть 3 рубашки с короткими рукавами и 5 рубашек — с длинными. Но наденете-то вы только одну. Значит, вы стоите перед выбором одного из 8 вариантов. Обобщая, можно сказать, что, если у вас есть два типа объектов и количество объектов первого типа равно a , а объектов второго типа — b , всего у вас будет $a + b$ разных объектов (естественно, предполагая, что ни один из объектов типа b не повторяется в типе a).

Отступление

Как уже было сказано, правило суммы исходит из того, что в двух типах объектов каждый объект уникален. Но если у нас все же есть несколько объектов (в количестве c), принадлежащих к обоим типам, не считать же их дважды, правда? Значит, формулу придется немного изменить: $a + b - c$. Например, если в классе у 12 учеников есть собаки, у 19 — кошки, а у 7 — и собаки и кошки, получается, что общее количество учеников, держащих только одно животное, будет $12 + 19 - 7 = 24$. Если перевести это в плоскость чистой математики, в промежутке от 1 до 100 у нас получится 50 чисел, кратных 2; 33 числа, кратных 3; и 16 чисел, кратных как 2, так и 3 (ну или кратных 6). Значит, количество чисел, кратных либо 2, либо 3, нужно подсчитывать так: $50 + 33 - 16 = 67$.

Правило произведения применяется в том случае, когда вам нужно предпринять некое действие, которое состоит из двух частей. Если имеется a вариантов выполнения первой части и b вариантов второй, то для всего действия имеется $a \times b$ вариантов. То есть если у меня есть 5 разных пар брюк и 8 различных рубашек и если я (как и большинство математиков) при этом не особо озабочен вопросами стиля и сочетания цветов, общее количество возможных комбинаций составит $5 \times 8 = 40$. А если я еще решу надеть один из 10 своих галстуков (то есть мое действие будет состоять уже из трех частей: галстук, брюки и рубашка), комбинаций станет уже $40 \times 10 = 400$.

В полной колоде карт каждая карта принадлежит к одной из 4 мастей (пики, червы, бубны, трефы) и 13 достоинств (туз, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, валет, дама и король). Значит, всего в полной колоде $4 \times 13 = 52$ карты. При желании все их можно разложить в виде прямоугольника со сторонами 4 на 13 — тем самым мы получим визуальное представление об общем количестве в 52.

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
♠	A ♠	2 ♠	3 ♠	4 ♠	5 ♠	6 ♠	7 ♠	8 ♠	9 ♠	10 ♠	J ♠	Q ♠	K ♠
♥	A ♥	2 ♥	3 ♥	4 ♥	5 ♥	6 ♥	7 ♥	8 ♥	9 ♥	10 ♥	J ♥	Q ♥	K ♥
♦	A ♦	2 ♦	3 ♦	4 ♦	5 ♦	6 ♦	7 ♦	8 ♦	9 ♦	10 ♦	J ♦	Q ♦	K ♦
♣	A ♣	2 ♣	3 ♣	4 ♣	5 ♣	6 ♣	7 ♣	8 ♣	9 ♣	10 ♣	J ♣	Q ♣	K ♣

Давайте применим правило произведения для подсчета почтовых индексов. Каково возможное количество пятизначных индексов? Каждый индекс — это пятизначное число, состоящее из цифр от 0 до 9. Наименьшее из них будет иметь вид 00000, а наибольшее — 99999¹. Значит, всего имеется 100 000 вариантов. К тому же результату можно прийти с помощью правила произведения. У нас есть 10 вариантов выбора числа для первой цифры (от 0 до 9), 10 — для второй, и дальше по 10 для третьей, четвертой и пятой. Значит, имеем $10^5 = 100\,000$ вариантов.

В почтовых индексах числа могут повторяться. А если взять ситуацию, в которой объекты не могут повторяться — например, когда вы выкладываете предметы в ряд? Несложно заметить, что два объекта в каждой паре могут быть расположены двумя способами. Скажем, буквы А и В могут быть представлены либо как АВ, либо как ВА. Способов разложить 3 объекта у нас ровно 6: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. А можете представить в уме, без ручки и бумажки, 24 возможные комбинации 4 объектов? Начнем с выбора одного из четырех вариантов для начальной позиции (выбираем из четырех букв: А, В, С или D). Для второй позиции останется 3 варианта, для третьей — 1, для последней, четвертой, — всего лишь 1. Всего получается $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ варианта. Другими словами, для n объектов имеется $n!$ вариантов их расположения.

А вот пример одновременного использования правил суммы и произведения. Допустим, некое государство выдает автовладельцам регистра-

¹ В США почтовые индексы пятизначные (в России — шестизначные). — Прим. пер.

ционные номера двух типов. Номера первого типа состоят из 3 букв и 3 цифр, второго — из 2 букв и 4 цифр (в обоих случаях сначала идут буквы, потом — цифры). Сколько всего будет номеров (притом что мы можем использовать все 26 букв латинского алфавита и 10 цифр, не обращая при этом внимания на внешнее сходство, вроде О и ноль)? Сначала посчитаем количество номеров первого типа, применив правило произведения:

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 17\,576\,000$$

То же с номерами второго типа:

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 6\,760\,000$$

Так как один номер относится либо к первому, либо ко второму типу (и не повторяется), согласно правилу суммы общее количество возможных комбинаций — 24 336 000.

Но подобного рода подсчеты (математики даже выделяют такие упражнения в отдельную ветвь своей науки — *комбинаторику*) не приносили бы столько удовольствия, если бы не многообразие способов, которыми можно достичь желаемого (мы уже успели в этом убедиться, когда говорили об устном счете). Оказывается, то же количество автомобильных номеров можно посчитать за один шаг:

$$26 \times 26 \times 36 \times 10 \times 10 \times 10 = 24\,336\,000$$

ведь для первых двух символов каждого номера существует 26 вариантов, для последних трех — 10, при этом третий символ может быть или буквой, или цифрой, а значит, возможных вариантов здесь будет $26 + 10 = 36$.

Лотерея и покер

В этом разделе мы используем то, что только что узнали, для подсчета своих шансов выиграть в лотерею или собрать нужную комбинацию в покере. Но позвольте сначала предложить вам немного мороженого.

Допустим, вам предлагают наполнить рожок 3 шариками разных сортов мороженого. Всего можно выбирать из 10 сортов. Сколько всего можно получить разных рожков? Не забудьте: порядок шариков разных сортов имеет значение (а как же иначе? Ведь вкус-то разный!). Если повторяться можно, получается, что у нас есть 10 вариантов для каждого

из трех шариков: $10^3 = 1000$ вероятных комбинаций. Ну а если нельзя — их количество сокращается до $10 \times 9 \times 8 = 720$, как показано на картинке чуть ниже.

Теперь кое-что поинтереснее. Как будут лежать три шарика трех разных сортов в вазочке, если их порядок не важен? Можно сказать точно: их будет меньше. А конкретно — в 6 раз меньше. Попробуем понять, почему. Лежащие в вазочке 3 шарика мороженого 3 разных сортов (допустим, шоколадное, ванильное и мятное) можно переложить в рожок $3! = 6$ способами. Значит, из 1 варианта вазочки можно собрать 6 вариантов рожков. Количество вазочек, таким образом, будет равняться

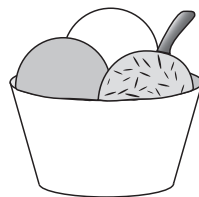
$$\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$$

Другой способ представить $10 \times 9 \times 8 = 10!/7!$ (хотя первый пример, конечно, легче подсчитать). Значит, количество чашек — $\frac{10!}{3!7!}$. Такая запись читается как «число сочетаний из 10 по 3», обозначается символом $\binom{10}{3}$ и равняется 120. Другими словами, число вариантов при выборе определенного количества различных объектов, равного n , из общего количества различных объектов, равного k (в произвольном порядке), называется «числом сочетаний из n по k » и подсчитывается по формуле

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Математики называют такого рода вычисления сочетаниями или комбинациями, а числа вида $\binom{n}{k}$ — биномиальными коэффициентами.

Вычисления же при строго определенном порядке объектов называется перестановкой или пермутацией. Эти два понятия часто путают: например, мы привыкли думать, что на «кодовом» замке нужно подбирать «комбинации» цифр, хотя по сути это не комбинации, а перестановки, ведь порядок чисел, составляющих код, имеет большое, если не решающее, значение.



Каждый рожок из 3 сортов можно собрать $3! = 6$ различными способами

Если ваш продавец мороженого предлагает 20 разных сортов, то, направляясь туда с намерением купить 5 разных шариков (в случайном порядке), вам придется выбирать из

$$\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!15!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5!} = 15\,504$$

вариантов. Кстати, если на вашем калькуляторе не предусмотрено специальной кнопки, чтобы подсчитать $\binom{20}{5}$, просто наберите в любом поисковике «число сочетаний из 20 по 5»¹, и вы увидите веб-калькулятор с готовым ответом.

Биноминальные коэффициенты, впрочем, могут появляться и там, где порядок расположения объектов определенную роль все же играет. Если вы 10 раз подбросите монетку, сколько всего у вас будет возможных последовательностей результатов (вроде О-Р-О-Р-Р-О-О-Р-Р-Р или О-О-О-О-О-О-О-О-О)? Так как каждый бросок имеет два возможных исхода, правило произведения говорит нам, что их будет $2^{10} = 1024$, причем шансы выпадения каждой стороны абсолютно равны. (Некоторые, конечно, удивятся: вероятность того, что выпадет вторая комбинация, вроде бы куда ниже, чем у первой. Тем не менее шансы и у той, и у другой абсолютно равные — 1 к 1024.) С другой стороны, то, что за 10 бросков орел выпадет 4 раза, а не 10, куда вероятнее, ведь комбинаций с 4 орлами много, а с 10 — всего одна. Вот только «много» — это сколько? Подобная последовательность определяется количеством «орлиных» бросков, равным 4 из 10, соответственно, остальные броски должны закончиться выпадением решки. Количество способов определить, *какие* именно 4 из 10 бросков дадут нам орла, равно $\binom{10}{4} = 210$ (все равно что выбирать 4 разных шарика мороженого из 10 сортов). Значит, наш шанс, что из 10 попыток 4 раза выпадет орел, если бросать симметричную, абсолютно уравновешенную монетку, равен

$$\frac{\binom{10}{4}}{2^{10}} = \frac{210}{1024}$$

или примерно 20% всех возможных комбинаций.

¹ Или по-английски «20 choose 5». — Прим. пер.

Отступление

Логично спросить, сколько можно собрать вазочек с 3 шариками из 10 сортов, если можно повторяться ($10^3/6$ — ответ неправильный, это ведь даже не целое число). Наиболее простой способ — рассмотреть 3 отдельных случая, взяв за отправную точку количество разных сортов в вазочке. Очевидно, что в случае с 3 шариками одного сорта получится 10 вазочек. Из сказанного выше понятно, что в случае с 3 шариками 3 сортов получится $\binom{10}{3} = 120$ вазочек. А $2 \times \binom{10}{2} = 90$ вазочек будут с 2 сортами мороженого, ведь 2 сорта мы можем выбрать $\binom{10}{2}$ способами. И лишь потом можно решать, какие 2 из 3 шариков будут именно этого сорта. Сложив все вместе, получим $10 + 120 + 90 = 220$ вазочек.

Есть и другой способ прийти к этому ответу, не разбивая задачу. Каждую вазочку можно представить как комбинацию трех звездочек и девяти черточек. Если мы выбираем первый, второй и снова второй сорта, «перекодированная» вазочка будет выглядеть вот так:

* | * * | | | | | |

Второй, снова второй и седьмой сорта — вот так:

| * * | | | | * | | |

А комбинация

| | * | | * | | | | *

будет означать, что наш выбор пал на сорта третий, пятый и десятый. То есть вазочка — это набор из 3 звездочек и 9 черточек. Всего получается 12 символов, 3 из которых обязательно должны быть звездочками. Следовательно, возможных комбинаций у нас будет $\binom{12}{3} = 220$. Обобщая, можно сказать, что количество способов выбрать k объектов из множества n при произвольном порядке и с возможностью повторения равно количеству способов сочетания k звездочек и $n - 1$ черточек — $\binom{n+k-1}{k}$.

05 08 13 21 34
МЕГА ЧИСЛО 03

Подсчет сочетаний необходим в большинстве задач, в которых большую роль играет случайность. Представим себе лотерею, в которой вам нужно угадать 5 различных чисел от 1 до 47. Дополнительно вы выбираете еще одно, МЕГАчисло от 1 до 27 (можно выбирать любое, в том числе и одно из тех, которые уже встречались в пятерке). У нас есть 27 вариантов выбора дополнительного числа, и $\binom{47}{5}$ вариантов выбора основных 5 чисел. Таким образом, общее количество равно

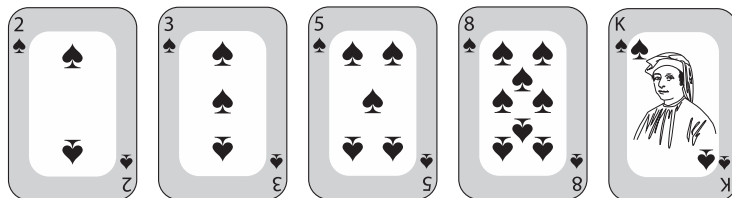
$$27 \times \binom{47}{5} = 41\,416\,353$$

Другими словами, ваш шанс выиграть главный приз в такой лотерее — примерно 1 из 40 миллионов.

Теперь давайте переключим внимание на покер. Комбинация в покере — это обычно 5 карт из 52, составляющих колоду. Все они разные, выбраны случайно, порядок их значения не имеет. Следовательно, количество комбинаций равняется

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = 2\,598\,960$$

Комбинация из 5 карт одной и той же масти

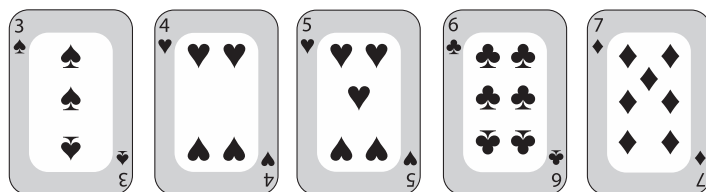


называется *флешем*. Сколько всего может быть флешей? Чтобы посчитать, сначала выберем масть — 1 из 4 вариантов (давайте договоримся, что это будут пики). Сколько всего можно собрать комбинаций разных 5 карт этой масти? В колоде 13 пиковых карт. Значит, флешей всего

$$4 \times \binom{13}{5} = 5148$$

и наши шансы получить один из них составляют $5148/2\,598\,960$, то есть примерно 1 к 500. Любители покера теперь могут вычестить из $5\,148 \times 4 \times 10 = 40$, чтобы узнать, какова вероятность, что собрать *стрит-флеш* — такой флеш, в котором карты одной масти идут подряд по старшинству.

При простом *стрите* масти в расчет не принимаются, главное — последовательный набор карт: Т-2-3-4-5 или 2-3-4-5-6, или ..., или 10-В-Д-К-Т. Вот так, например:



Стрит может сложиться из 10 разных комбинаций (ценность которых определяется «ценностью» младшей карты). Определив ту из них, которая нужна нам (пусть будет 3-4-5-6-7), мы выбираем одну из 4 мастей, которой должны быть все карты. Следовательно, количество комбинаций стрита равняется

$$10 \times 4^5 = 10\,240$$

то есть почти в 2 раза выше, чем у флеша. А шанс его получить — 1 к 250. Именно поэтому флеш в покере ценится больше: его куда сложнее собрать.

Еще более ценен *фул-хаус* — 3 карты одного достоинства плюс 2 карты другого. Что-то вроде этого¹:



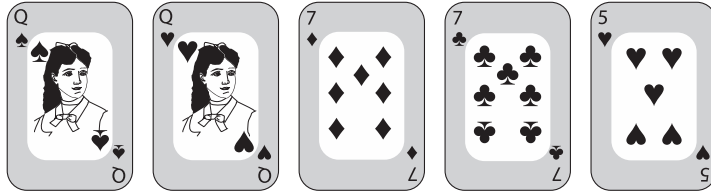
Чтобы подсчитать свои шансы на фул-хаус, нам сперва нужно выбрать необходимое нам достоинство, которое попадется нам трижды (13 вариантов), потом — то, которое попадется дважды (12 вариантов). Допустим, нам нужны 3 дамы и 2 семерки. Определимся с мастями. Получить нужных нам дам можно $\binom{4}{3} = 4$ способами, семерки — $\binom{4}{2} = 6$ способами. Общее количество фул-хаусов, таким образом, равняется

$$13 \times 12 \times 4 \times 6 = 3744$$

¹ Дама (Q) в тексте обозначается как Д. — Прим. пер.

Следовательно, вероятность его собрать — $3744/2\,598\,960$ или 1 к 700.

От фул-хаусов перейдем к двум парам. Здесь нам нужны две карты одного достоинства, еще две — другого, и последняя — третьего, например



Пытаясь посчитать количество возможных пар, многие ошибочно начинают с 13×12 , как в случае с фул-хаусами. Но теперь нам нужно немного другое, ведь здесь вероятность получить две семерки после двух дам — это абсолютно то же, что и получить двух дам после двух семерок. Поэтому правильно будет начать с $\binom{13}{2}$ (имея в виду и семерки, и дам), потом выбрать новое достоинство для непарной карты (пусть это будет пятерка), затем выбрать масти. Количество комбинаций с двумя парами —

$$\binom{13}{2} \binom{13}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2} = 123\,552$$

Появляются они в 5% случаев.

Подробнее на всех вариантах раздач мы останавливаться не будем, но я попрошу вас взглянуть на следующие подсчеты и проверить, насколько они верны. Комбинаций с каре-1, вроде $T\spadesuit T\heartsuit T\diamondsuit T\clubsuit 8\diamondsuit$, может быть

$$\binom{13}{1} \binom{12}{1} \binom{4}{4} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 13 \times 12 \times 1 \times 4 = 624$$

с тройкой-2, например, $T\spadesuit T\heartsuit T\diamondsuit 9\clubsuit 8\diamondsuit$, —

$$\binom{13}{1} \binom{12}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 54\,912$$

с одной парой — скажем, $T\spadesuit T\heartsuit B\diamondsuit 9\clubsuit 8\diamondsuit$, —

$$\binom{13}{1} \binom{12}{3} \binom{4}{2} = 1\,098\,240$$

всего — 42% всех возможных комбинаций.

¹ Каре — в покере четыре карты одного достоинства. — Прим. пер.

² Тройка — три карты одного достоинства. — Прим. пер.

Отступление

А сколько же может быть «пустых» комбинаций — без пар, без стритов и без флешей? Можете, конечно, сложить все числа, которые мы получили до этого и вычесть сумму из $\binom{52}{5}$, но я облегчу вам жизнь и просто дам ответ:

$$\left(\binom{13}{5} - 10\right)(4^5 - 4) = 1\,302\,540$$

Первая часть — это количество комбинаций 5 карт разного достоинства за вычетом 10 последовательных (вроде 3-4-5-6-7). Следующая часть охватывает вероятные «расклады» этих 5 карт разного достоинства; для каждого достоинства у нас есть 4 варианта, но при этом мы должны исключить возможность того, что все они встретятся в одном «раскладе». Все это значит, что наши шансы собрать «пустую» комбинацию — 50,1%. А еще это значит, что в 49,9 % случаев мы будем играть как минимум с одной парой.

А теперь вопрос, на который можно дать целых три прелюбопытных ответа, причем правильными из них будут сразу два! Сколько существует комбинаций, в которых есть как минимум один туз? Уверен, вас так и подмывает ответить $4 \times \binom{51}{4}$, что, само собой, *неправильно*. Вы же исходите (и напрасно) из того, что сначала нужно выбрать туза (4 варианта), а потом собирать любые другие 4 карты из 51 оставшейся в колоде. Неправильно здесь то, что вы таким образом просчитываете некоторые комбинации (а именно — те, в которых больше одного туза) несколько раз. Например, комбинация $T\spadesuit T\heartsuit B\diamond 9\clubsuit 8\diamond$ будет посчитана дважды: сначала для $T\spadesuit$ в качестве первой, основной карты, а затем так же для $T\heartsuit$. Правильный способ решить эту задачу — разбить ее на четыре задачи поменьше, в зависимости от того, сколько тузов будет в комбинации. Так, комбинаций именно с одним тузом будет $\binom{4}{1}\binom{48}{4}$ (сначала выбираем туза, потом — остальные 4 карты другого достоинства). Затем отдельно же просчитываем комбинации с двумя, тремя и четырьмя тузами. В результате получаем

$$\binom{4}{1}\binom{48}{4} + \binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + \binom{4}{4}\binom{48}{1} = 886\,656$$

Но проще всего будет пойти *от обратного*. Сначала посчитаем количество комбинаций *без туза* (это легче легкого) — $\binom{48}{5}$. А количество комбинаций по крайней мере с одним тузом, таким образом, —

$$\binom{52}{5} - \binom{48}{5} = 886\,656$$

Я уже говорил чуть выше, что «цена» комбинаций в покере зависит от частоты их появлений: чем реже комбинация, тем она «ценнее». То есть если шансов собрать одну пару больше, чем сразу две, одна пара ценится куда меньше двух. Вот «стоимость» всех комбинаций, от меньшей к большей:

Пара
Две пары
Тройка
Стрит
Флеш
Фул-хаус
Каре (или «четверка»)
Стрит-флеш

На этот случай есть эффективная «запоминалка»: «Раз, два, три, стрит, флеш; два-три, четыре, стрит-флеш» (где «два-три» — это фул-хаус).

А теперь предположим, что в колоде появились джокеры. Всего карт у нас становится 54, причем джокеры (всего их два) могут «превращаться» в карту любой масти и любого достоинства — в зависимости от того, что вам нужно для наилучшей комбинации. То есть если у вас на руках $T\heartsuit$, $T\diamondsuit$, $K\spadesuit$, $8\diamondsuit$ и джокер, разумнее всего будет посчитать его тузом, чтобы получилась тузовая тройка. Можно «превратить» джокера и в короля, конечно, но тогда у вас будет две пары, что хуже, чем тройка¹.



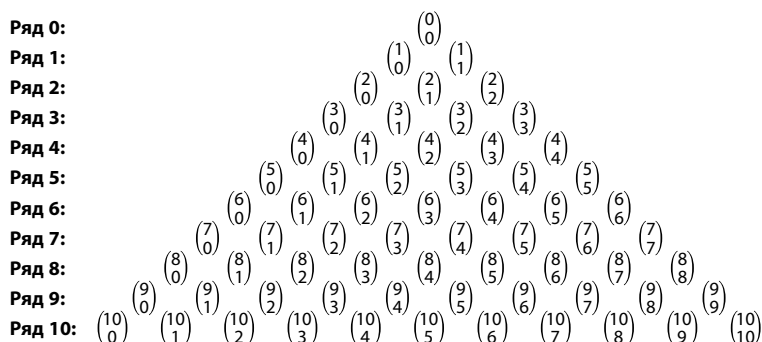
Какой картой должен стать джокер,
чтобы мы могли получить самую сильную комбинацию?

¹ А на рисунках в тексте обозначается как T (туз); Joker — как Джокер. — Прим. пер.

Но здесь-то и начинается самое интересное. Следуя традиционному порядку карт, мы можем посчитать эту комбинацию и как тройку, и как две пары, а можем — только как тройку, исключив ее из числа двух пар. Последнее выглядит наиболее разумно, но ведь это значит, что общее количество комбинаций с тройками значительно увеличивается, а с двумя парами — уменьшается, что превращает последние в более редкие. Мы, конечно, можем сказать, что теперь две пары имеют бóльшую ценность, но проблему этим не решишь: она всего лишь «перевернется вверх ногами», ведь количество двух пар увеличится, а количество троек — уменьшится. Из этого всего следует странный на первый взгляд вывод, сделанный математиком Стивом Гэдбойсом в 1996 году: при игре в покер с джокерами невозможно ранжировать «ценность» комбинаций по частоте их появления.

Закономерности треугольника Паскаля

Вот вам во всей его красе треугольник Паскаля:



В целом же закономерность говорит о том, что

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Отступление

У таких симметричных отношений есть два объяснения. Первое — алгебраическое — с помощью формулы

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Но так ли уж сильно она нам тут нужна? Почему, например, $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$? Число $\binom{10}{3}$ обозначает количество вариантов выбора 3 сортов мороженого из десяти (в вазочке, не в рожке). Но ведь это то же самое, что считать варианты выбора тех 7 сортов, которые мы *не* купим.

Следующая закономерность, которую легко заметить, заключается в том, что во всех, кроме 1-го, рядах каждое число есть, по сути, сумма двух других — тех, которые находятся прямо над ним. Посмотрите, например, на 9 и 10 ряды треугольника. Потрясающе, правда? Называются эти отношения *правилом Паскаля*.

Ряд 9:	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
Ряд 10:	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Каждое число равно сумме двух чисел над ним

Почему так происходит? Когда мы смотрим на равенство $120 = 36 + 84$, мы, по сути, видим

$$\binom{10}{3} = \binom{9}{2} + \binom{9}{3}$$

Чтобы в этом разобраться, давайте попробуем ответить на один вопрос. Если имеется 10 сортов мороженого, сколько вазочек можно собрать из 3 шариков разных сортов (порядок шариков при этом не важен)? С одной стороны, мы уже посчитали это количество как $\binom{10}{3}$. Но есть и другой способ. Допустим, один из предлагаемых нам сортов мороже-

ного — ванильное. Сколько вазочек у нас получится без него? Ответ — $\binom{9}{3}$, потому что тогда мы будем выбирать свои 3 сорта из 9 оставшихся. А сколько вазочек получится с ним? Конечно же, $\binom{9}{2}$, ведь нам останется выбрать только 2 сорта из 9 оставшихся. Получается, что общее количество вазочек будет равно $\binom{9}{2} + \binom{9}{3}$. Какой из этих ответов верен? И в том и в другом случае мы следовали абсолютно верной логике, поэтому и в том и в другом случае мы дали абсолютно верный ответ и получили абсолютно одинаковые результаты. Та же логика (или та же алгебра, если хотите) приводит нас к идее, что для каждого значения k от 0 до n

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

А теперь давайте посмотрим, что будет, если мы сложим все числа каждого ряда Паскалева треугольника (см. ниже).

Закономерность предполагает, что сумма всегда будет представлять собой степень двойки. Алгебраически: сумма чисел ряда n будет равна 2^n . Как так получается? Эту закономерность можно описать и по-другому: сумма чисел (числа) 1-го ряда равняется 1 и затем удваивается от ряда к ряду. Объяснением этому служит правило Паскаля, природу которого мы только что объяснили, а обоснованность — доказали. Например, когда мы складываем между собой числа 5-го ряда и трансформируем их в зависимости от их связи с 4-м рядом, получается

$$\begin{array}{rcl}
 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 & & \\
 & 1 & = 1 \\
 & 1 + 1 & = 2 \\
 & 1 + 2 + 1 & = 4 \\
 & 1 + 3 + 3 + 1 & = 8 \\
 & 1 + 4 + 6 + 4 + 1 & = 16 \\
 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 & = & 32 \\
 & \dots &
 \end{array}$$

Сумма чисел каждого ряда Паскалева треугольника всегда кратна 2

$$\begin{aligned}
 &= 1 + (1 + 4) + (4 + 6) + (6 + 4) + (4 + 1) + 1 \\
 &= (1 + 1) + (4 + 4) + (6 + 6) + (4 + 4) + (1 + 1)
 \end{aligned}$$

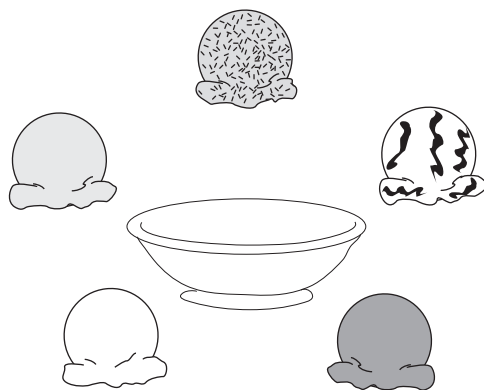
то есть буквально удвоенная сумма чисел 4-го ряда. То же продолжается и дальше, вниз от вершины треугольника и до бесконечности.

С точки зрения биномиальных коэффициентов правило утверждает, что сумма чисел ряда n выглядит так:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

что несколько неожиданно, поскольку отдельные значения соответствуют факториалам и являются делимыми самых разных чисел. И все же общая сумма основана на 2 и простом множителе.

Еще один способ объяснить эту закономерность — подсчет, а именно — *комбинаторное доказательство*. Чтобы объяснить сумму чисел 5 ряда (который ничем принципиально не отличается от ряда n), давайте вернемся к прилавку с мороженым, где на этот раз осталось всего лишь 5 сортов. Сколькими способами мы можем заполнить нашу вазочку? Единственное ограничение — сорта не должны повторяться. Мы можем взять 0, 1, 2, 3, 4 или 5 разных сортов, а порядок шариков не важен. Сколько получится вазочек с 2 шариками? Как мы уже знаем, посчитать их можно как $\binom{5}{2} = 10$. Всего же, в зависимости



Сколькими способами мы можем положить шарики мороженого в вазочку?

от количества шариков в вазочке и руководствуясь правилом суммы, получаем

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

вариантов, что можно упростить до $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$. С другой стороны, мы можем ответить на тот же вопрос, используя правило

произведения. Вместо того чтобы торопиться подсчитывать, сколько всего шариков может оказаться в вазочке, мы можем взять каждый из предлагаемых сортов и решить, покупать его или нет. Например, у нас есть 2 варианта выбора для шоколадного мороженого (берем или нет), 2 — для ванильного (берем или нет) и т.д. для всех 5 сортов (имейте в виду, что, решив не брать ни один из сортов, мы останемся с пустой вазочкой, что условия нашей задачи вполне допускают). Значит, возможных комбинаций будет

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

А раз в обоих случаях мы шли верным путем,

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5$$

чего и следовало ожидать.

Отступление

Тот же комбинаторный принцип доказывает, что, если посчитать сумму *каждого второго* числа в ряду n , у нас получится 2^{n-1} . В этом нет ничего удивительного, когда мы берем нечетные ряды, вроде пятого, где числа, которые мы складываем ($1 + 10 + 5$), совпадают с теми, которые мы пропускаем ($5 + 10 + 1$). Поэтому-то у нас и получается ровно половина от $2n$. Но ведь это работает и в четных рядах. Например, в четвертом: $1 + 6 + 1 = 4 + 4 = 2^3$. Обобщая, мы можем утверждать, что в любом ряду $n \geq 1$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots = 2^{n-1}$$

Почему? Левая сторона считает вазочки с четным количеством шариков мороженого (при ассортименте из n сортов и при условии, что в своем выборе мы не повторяемся). Но ту же вазочку можно получить, просто выбрав сорта от 1 до $n - 1$. У нас есть 2 варианта выбора для первого сорта (берем или нет), 2 — для второго и т.д., вплоть до сорта $n - 1$. Но вот для самого последнего сорта выбора у нас нет (вернее, только один) — мы же хотим, чтобы общее количество сортов было четным. Значит, и четное количество вазочек будет равно 2^{n-1} .

Если представить треугольник Паскаля как *прямоугольный*, можно увидеть еще больше закономерностей. Первый (или 0) столбец состоит из одних единиц, второй (или 1) — из положительных целых 1, 2, 3, 4 и так далее. Третий (или 2) столбец, начинающийся с 1, 3, 6, 10, 15... тоже нам хорошо знаком, ведь это треугольные числа, с которыми мы уже сталкивались в главе 1. Они также могут быть представлены как

$$\binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{5}{2}, \binom{6}{2}, \dots$$

Значит, столбик k будет состоять из чисел $\binom{k}{k}, \binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}$ и т.д.

А теперь смотрите, что произойдет, когда мы сложим между собой несколько первых чисел любого столбца. Возьмем, например, первые 5 чисел 3 столбца (см. ниже). Получаем $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$ — число, которое видим справа по диагонали от 15. Другими словами,

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3}$$

Называется эта закономерность *правилом хоккейной клюшки*, ведь форма обводки складываемых чисел, входящих в Паскалев треугольник, вместе с их суммой напоминает именно этот спортивный снаряд. Чтобы понять, на чем эта закономерность основана, представим себе хоккейную команду из семи игроков. У каждого на свитере порядковый номер: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько можно составить троек для проведения тренировки?

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Прямоугольная форма треугольника Паскаля идеальна для демонстрации закономерности хоккейной клюшки

Поскольку порядок не важен, у нас получится $\binom{7}{3}$. А теперь давайте попробуем найти ответ на эту задачу, разбив ее на несколько поменьше.

Во сколько троек будет входить игрок под номером 7? Иными словами, в каком количестве тренировок будет мелькать свитер с самым большим номером? Так как одно место в тройке занято семеркой, на остальные два места у нас остается $\binom{6}{2}$ вариантов. Идем дальше. Сколько тренировок посетит хоккеист с цифрой 6 на свитере? Включаем в свою задачу 6, исключаем из нее 7 и получаем $\binom{5}{2}$ вариантов для двух «вакансий». Точно так же нужно будет посчитать $\binom{4}{2}$ вариантов для номера 5, $\binom{3}{2}$ — для номера 4 и $\binom{2}{2} = 1$ — для номера 3. Так как самыми большими числами могут быть 3, 4, 5, 6 или 7, мы просчитали все возможные варианты, поэтому тройка может быть сформирована $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{6}{2}$ способами — и это то же число, что было обозначено в левой части предыдущего уравнения. Обобщая, можно сказать, что

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1}$$

Давайте используем эту формулу для решения важной задачи, которая, без сомнения, заботит ваш ум каждый год во время новогодних каникул. Возьмем за основу популярную английскую народную песенку «Двенадцать дней Рождества»¹: в первый день ваша настоящая любовь подарила вам 1 подарок (куропатку). На второй день — 3 подарка (куропатку и 2 горлиц). На третий — целых 6 (куропатку, 2 горлиц и 3 курочек). И так далее. Вопрос: сколько подарков у вас будет через 12 дней?

На n -ый день вы будете счастливым обладателем

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

подарков (получилось это из нашей суперполезной формулы для треугольных чисел или из правила клюшки при $k = 1$). Так вот, первый день — $\binom{2}{2} = 1$ подарок, второй день — $\binom{3}{2} = 3$ подарка и т. д., вплоть до 12-го дня, в который вы получите $\binom{13}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$ подарков. А правило хоккейной клюшки приводит нас к общему их количеству:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{13}{2} = \binom{14}{3} = \frac{14 \times 13 \times 12}{3!} = 364$$

¹ В Англии и США рождественские каникулы начинаются в день Рождества (25 декабря) и заканчиваются 5 января, т. е. через 12 дней. — Прим. пер.



Сколько всего подарков послала мне любовь моя верная
за 12 дней Рождества?

То есть если открывать по подарку каждый день — вам хватит их почти до конца года (ну, один можно пропустить в день рождения)!

Давайте теперь споем песенку, чтобы отпраздновать свой успех. Называется она « N -ый день Рождества».

В n -ый день Рождества послала мне любовь моя верная

n удивительных лакомств

$n - 1$ с одним вкусом,

$n - 2$ с другим; и остальных вкусовностей

...

5 (плюс 10) всяких вкусовностей!

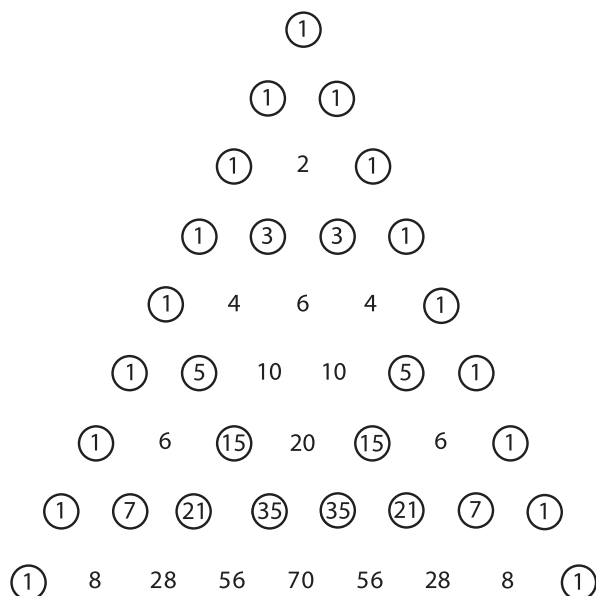
А через n дней,

Усевшись считать подарки,

Сколько же я насчитал(а)?

Ровно $\binom{n+2}{3}$.

А вот одна из самых странных закономерностей Паскалева треугольника. На рисунке ниже отмечены все нечетные числа. Присмотритесь к ним и увидите в большом треугольнике несколько маленьких.

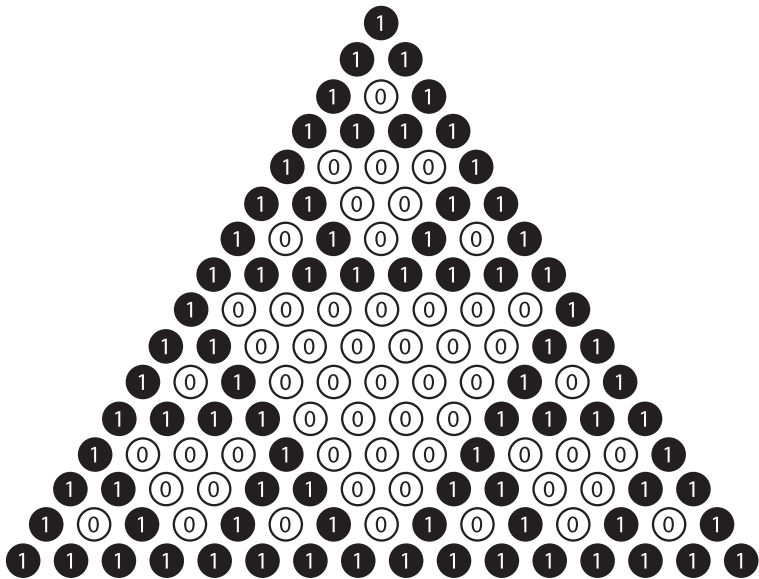


Нечетные числа треугольника Паскаля

А теперь давайте сделаем вот что: сначала продлим большой треугольник до 16 рядов, а затем заменим все нечетные числа единицами, а все четные — нолями. Обратите внимание, что под каждой парой нолей, равно как и под каждой парой единиц, стоит ноль. Причина этого — в том, что при сложении 2 четных или 2 нечетных чисел сумма будет выражена четным числом.

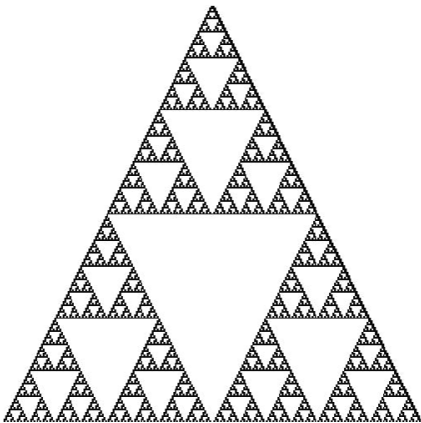
Не будем на этом останавливаться: посмотрим на еще больший треугольник — из 256 рядов, — в котором все нечетные числа заменены черными квадратиками, а все четные — белыми.

По сути своей данная фигура — это фрактал, или рекурсивное изображение, известное так же как *треугольник Серпинского*, — один из огромного количества сокровищ, скрытых в глубинах Паскалева клада. А вот еще один. Сколько всего нечетных чисел в каждом ряду треугольника Паскаля? Смотрим на ряды с 1 по 8 (без нулевого) и считаем: 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8, 2 и т.д. Вроде бы никакой закономерности. Кроме того, что



Вариант треугольника Паскаля с нечетными числами

у нас всегда получается число, являющееся степенью 2. Это и есть та самая, нужная нам закономерность. Обратите внимание, что ряды, количество нечетных чисел в которых равно именно 2, — это 1, 2, 4 и 8-й. То есть обозначены они числами, которые сами являются степенью 2. Для более общего вывода нам нужно вспомнить, что любое целое число,



Встреча Паскаля с Серпинским

которое больше 0 или равно ему, можно получить от сложения *степеней числа 2*. Смотрите сами:

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 2 &= 2 \\
 3 &= 2 + 1 \\
 4 &= 4 \\
 5 &= 4 + 1 \\
 6 &= 4 + 2 \\
 7 &= 4 + 2 + 1 \\
 8 &= 8
 \end{aligned}$$

В рядах 1, 2, 4 и 8 (порядковые номера которых суть степени 2) у нас по 2 нечетных числа. В рядах 3, 5 и 6 (порядковые номера которых суть сумма двух степеней 2) у нас по 4 нечетных числа. В ряду же 7 (порядковый номер которого есть сумма трех степеней 2) — 8 нечетных чисел. Отсюда следует удивительное по своей красоте правило. Если n есть сумма p различных степеней числа 2, количество нечетных чисел в ряду n равняется 2^p . Сколько, например, нечетных чисел будет в 83-м ряду? Так как $83 = 64 + 16 + 2 + 1$ (то есть сумма четырех степеней 2), наш ответ будет $2^4 = 16$!

Отступление

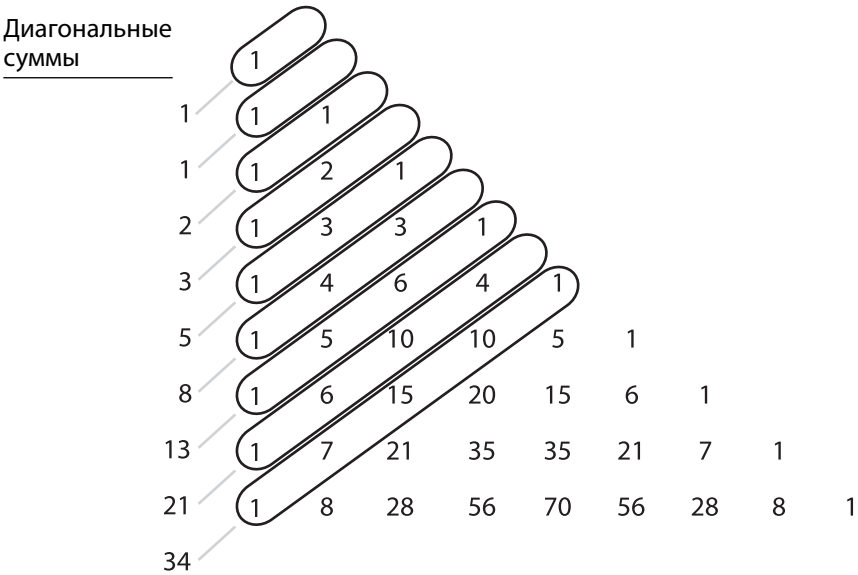
Не будем на этом подробно останавливаться, но, если вам интересно, $\binom{83}{k}$ будет нечетным числом всякий раз, когда

$$k = 64a + 16b + 2c + d$$

при a, b, c и d равных нолю или единице. Говоря точнее, k будет равно одному из этих чисел:

$$0, 1, 2, 3, 16, 17, 18, 19, 64, 65, 66, 69, 80, 81, 82, 83$$

И под самый конец главы — еще одна закономерность. Мы уже видели, что происходит, если сложить числа в рядах (степень 2) и столбцах («хоккейная клюшка») Паскалева треугольника. А что будет, если сложить их по диагонали?



Встреча Паскаля с Фибоначчи

Смотрите, какие суммы выходят:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

Не буду томить вас. Это числа знаменитой последовательности Фибоначчи, которая окажется в центре нашего внимания в следующей главе.

ГЛАВА НОМЕР ПЯТЬ

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

Магия последовательности Фибоначчи

Числа матушки Природы

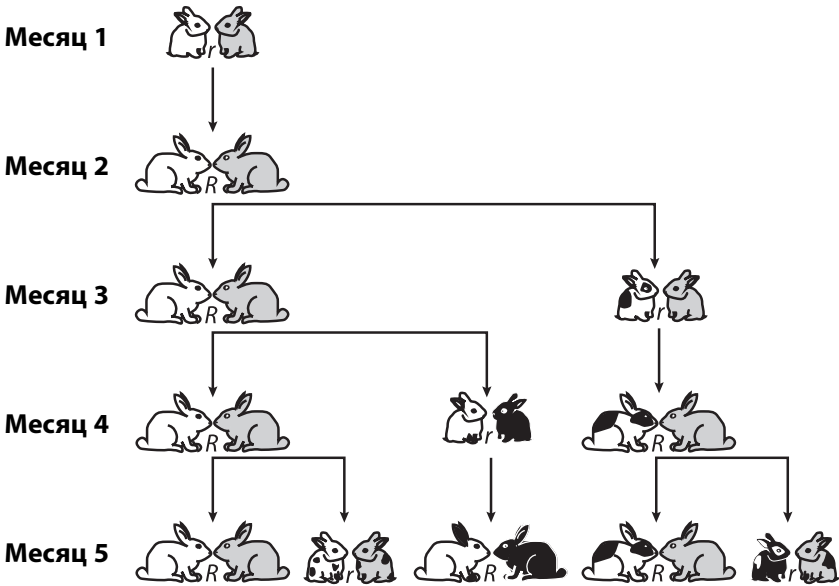
Лицезрите во всей красе одну из самых таинственных числовых последовательностей — последовательность Фибоначчи!

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

В ее начале находятся два одинаковых числа — 1 и 1. Третье число — это $1 + 1$ (сумма двух предыдущих чисел), то есть 2. Четвертое — $1 + 2 = 3$, пятое — $2 + 3 = 5$ и т. д. и т. п. Очень похоже на чехарду: $3 + 5 = 8$; $5 + 8 = 13$; $8 + 13 = 21$... Впервые эти числа в таком виде появились в книге 1202 года *Liber Abaci* («Книга абака», в буквальном переводе с латинского — «Книга вычислений») за авторством Леонардо Пизанского, впоследствии прозванного Фибоначчи. Значение этого труда для европейской цивилизации переоценить невозможно: он впервые знакомил западного читателя с индо-арабскими цифрами и ставшими уже привычными для нас арифметическими методами.

Одна из самых известных включенных в него задач — задача о бессмертных кроликах. Допустим, крольчонку требуется месяц, чтобы повзрослеть. От каждой пары кроликов каждый месяц рождается еще пара — и так до бесконечности, поскольку наши кролики бессмертны.

Вопрос: если начать с одной пары, сколько у нас будет пар кроликов 12 месяцев спустя?

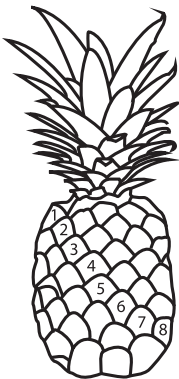
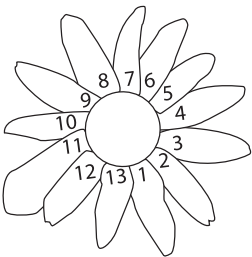


Иллюстрировать задачу можно либо картинкой, либо таблицей. Маленькой буквой *r* отметим пары малюток-крольчат, большой *R* — пары взрослых кроликов. От месяца к месяцу каждая маленькая *r* становится большой *R*, а каждая большая *R* заменяется *R* и *r* (это означает, что крольчата вырастают, а затем от них рождается пара новых крольчат).

Всю эту ситуацию мы можем представить в виде таблицы. Здесь хорошо видно, что в первые 6 месяцев число пар кроликов равняется соответственно 1, 1, 2, 3, 5 и 8.

Номер месяца	Популяция	Количество пар кроликов
1	<i>r</i>	1
2	<i>R</i>	1
3	<i>Rr</i>	2
4	<i>Rr R</i>	3
5	<i>Rr R Rr</i>	5
6	<i>Rr R Rr Rr R</i>	8

Давайте попробуем доказать, что на седьмой месяц у нас будет уже 13 пар, ничего при этом не рисуя и не фиксируя на листочке. Сколько к этому моменту будет пар взрослых кроликов? Так как каждая пара из тех, что получились у нас к шестому месяцу, к седьмому успела повзрослеть, получаем 8 пар.



А сколько будет пар крольчат? Их число будет равняться числу пар взрослых кроликов шестого месяца (то есть 5) или общему количеству пар пятого месяца (и такое совпадение совсем не случайно). Следовательно, на седьмой месяц у нас будет $8 + 5 = 13$ пар.

Если мы назовем первые два числа последовательности Фибоначчи $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$, а потом определим каждое следующее число как сумму предшествующих ему двух, то, при $n \geq 3$ получим

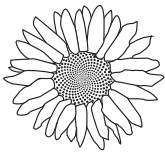
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

И тогда $F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8$ и т.д. по таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Первые 13 чисел последовательности Фибоначчи

Следовательно, ответом на задачу Фибоначчи о бессмертных кроликах будет $F_{13} = 233$ пар, из которых $F_{12} = 144$ будут взрослыми, а $F_{11} = 89$ — крольчатами.



Эта последовательность пригодна не только для подсчета численности популяций животных. Числа Фибоначчи встречаются даже в самой природе, и на удивление часто: это и лепестки цветка, и спирали подсолнуха, ананаса или сосновой шишки. Меня в последовательности Фибоначчи больше всего восхищают обнаруживающиеся в ней замечательные числовые закономерности.

Давайте для начала сложим несколько первых из этих чисел:

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 = 2 - 1 \\
 1 + 1 &= 2 = 3 - 1 \\
 1 + 1 + 2 &= 4 = 5 - 1 \\
 1 + 1 + 2 + 3 &= 7 = 8 - 1 \\
 1 + 1 + 2 + 3 + 5 &= 12 = 13 - 1 \\
 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 &= 20 = 21 - 1 \\
 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 &= 33 = 34 - 1 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Числа справа к последовательности не относятся, но находятся совсем рядом с ней — буквально в одном шаге. Давайте разберемся, что тут происходит. Возьмем последнее из этих уравнений и посмотрим, что произойдет, если заменить каждое из чисел Фибоначчи на разность двух следующих после него. То есть

$$\begin{aligned}
 &1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = \\
 &= (2 - 1) + (3 - 2) + (5 - 3) + (8 - 5) + (13 - 8) + (21 - 13) + (34 - 21) = \\
 &= 34 - 1
 \end{aligned}$$

Обратите внимание, как двойка из $(2 - 1)$ перекрывается двойкой из $(3 - 2)$, а тройка из $(3 - 2)$ перекрывается тройкой из $(5 - 3)$. Собственно говоря, перекрываются здесь практически все числа, за исключением самого большого 34 и начального -1. Означает это, что сумма первых n чисел последовательности Фибоначчи вычисляется по формуле

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

А вот еще один вопрос, напрямую связанный с первым и имеющий не менее элегантный ответ. Что мы получим, если захотим сложить между собой первые n чисел, занимающих четные позиции в последовательности? Другими словами, получится ли у нас упростить сумму

$$F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n}$$

Давайте сначала посмотрим на некоторые из них:

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 1 + 3 &= 4 \\
 1 + 3 + 8 &= 12 \\
 1 + 3 + 8 + 21 &= 33 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Погодите-ка. Вроде бы что-то знакомое. Мы же уже видели эти числа, когда считали прошлую сумму. Они на единицу меньше чисел Фибоначчи. По сути, каждое из них может быть трансформировано подобным образом на том основании, что каждое из чисел Фибоначчи — сумма двух предыдущих. Именно этой суммой мы можем заменить каждое число, занимающее четную позицию в последовательности, вот так:

$$\begin{aligned} & 1 \quad + \quad 3 \quad + \quad 8 \quad + \quad 21 \\ = & 1 \quad + \quad (1 + 2) \quad + \quad (3 + 5) \quad + \quad (8 + 13) \\ = & 34 - 1 \end{aligned}$$

Последняя строчка получается благодаря тому, что сумма первых 7 чисел последовательности лишь на единицу меньше девятого.

В целом, если мы будем исходить из того, что $F_2 = F_1 = 1$, и заменять каждое последующее число суммой двух предыдущих, мы увидим, что нужную нам сумму можно легко свести к сумме первых $2n - 1$ чисел последовательности.

$$\begin{aligned} & F_2 \quad + \quad F_4 \quad + \quad F_6 \quad + \dots + \quad F_{2n} \\ = & F_1 \quad + \quad (F_2 + F_3) \quad + \quad (F_4 + F_5) \quad + \dots + \quad F_{2n-2} + F_{2n-1} \\ = & F_{2n+1} - 1 \end{aligned}$$

А теперь давайте посчитаем сумму первых n чисел, занимающих нечетные позиции.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 + 2 &= 3 \\ 1 + 2 + 5 &= 8 \\ 1 + 2 + 5 + 13 &= 21 \\ &\dots \end{aligned}$$

Здесь все еще проще, как ни странно. Сумма n чисел, занимающих нечетные позиции в последовательности, — это просто следующее число Фибоначчи. Представить это можно следующим образом:

$$\begin{aligned} & F_1 \quad + \quad F_3 \quad + \quad F_5 \quad + \dots + \quad F_{2n-1} \\ = & 1 \quad + \quad (F_1 + F_2) \quad + \quad (F_3 + F_4) \quad + \dots + \quad F_{2n-3} + F_{2n-2} \\ = & 1 \quad + \quad (F_{2n} - 1) \\ = & F_{2n} \end{aligned}$$

Отступление

К ответу можно прийти и другим способом — с помощью того, о чем мы только что говорили. Если мы вычтем первые n чисел, стоящих в последовательности на четных позициях, из первых $2n$ чисел, получатся первые n чисел, находящиеся на нечетных позициях:

$$\begin{aligned} & F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} \\ &= (F_1 + F_2 + \dots + F_{2n-1}) - (F_2 + F_4 + \dots + F_{2n-2}) \\ &= (F_{2n+1} - 1) - (F_{2n-1} - 1) \\ &= F_{2n} \end{aligned}$$

Подсчет с помощью чисел Фибоначчи

Мы заглянули лишь в замочную скважину той двери, за которой раскинулся сад самых настоящих чудес. Только растут в нем не деревья, а числовые закономерности, уходящие корнями в последовательность Фибоначчи. И вам, наверняка, не терпится узнать, для чего еще, кроме подсчета поголовья кроликов, нужны эти числа. На самом деле — много для чего. В 1150 году (задолго до того, как Леонардо Пизанский представил миру задачу про кроликов) индийский поэт Хемачандра задался очень интересным вопросом: сколькими способами можно сложить стихотворную стопу из n безударных или ударных слогов. Давайте сперва переведем эту проблему из плоскости поэзии в плоскость математики.

Вопрос: Сколькими способами можно записать число n как сумму единиц и двоек?

Ответ: Обозначим результат как f_n . Вот что будем иметь при стартовых значениях n :

n	Комбинации единиц и двоек с суммой n	f_n
1	1	1
2	11, 2	2
3	111, 12, 21	3
4	1111, 112, 121, 211, 22	5
5	11111, 1112, 1121, 1211, 122, 2111, 212, 221	8
...	...	...

У нас есть один вариант, дающий в сумме 1, два варианта, дающих 2 ($1 + 1$ и 2), и три варианта, дающих 3 ($1 + 1 + 1$, $1 + 2$ и $2 + 1$). Повторимся: для получения нужной нам суммы доступны только единицы и двойки. При этом порядок этих цифр имеет значение: $1 + 2$ и $2 + 1$ суть две разные комбинации. Получить 4 можно уже пятью разными вариантами: $1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 2$, $1 + 2 + 1$, $2 + 1 + 1$, $2 + 2$. По всему выходит, что числа в правой части нашей таблицы — это числа из последовательности Фибоначчи, и так оно есть на деле.

Давайте попробуем понять, почему вдруг 5 можно получить $f_5 = 8$ различными способами. Начинаться сложение может с 1 или 2. Сколько вариантов будет начинаться именно с 1? За первой цифрой должна следовать некая комбинация 1 и 2, которая в сумме даст 4, а по предыдущей строке мы знаем, что таких комбинаций у нас $f_4 = 5$. Теперь так же посчитаем, сколько вариантов будет начинаться с 2. В этом случае комбинация после первой цифры должна давать нам 3. Смотрим чуть выше по таблице и видим, что $f_3 = 3$. Значит, общее количество комбинаций 1 и 2, дающих в сумме 5, должно быть $5 + 3 = 8$. Тот же алгоритм приведет нас к тому, что для 6 таких комбинаций будет 13: $f_5 = 8$, начинающихся с 1, плюс $f_4 = 5$, начинающихся с 2. В целом же, для суммы n их число равно f_n , из которых f_{n-1} имеют в начале 1, а f_{n-2} — 2. Следовательно,

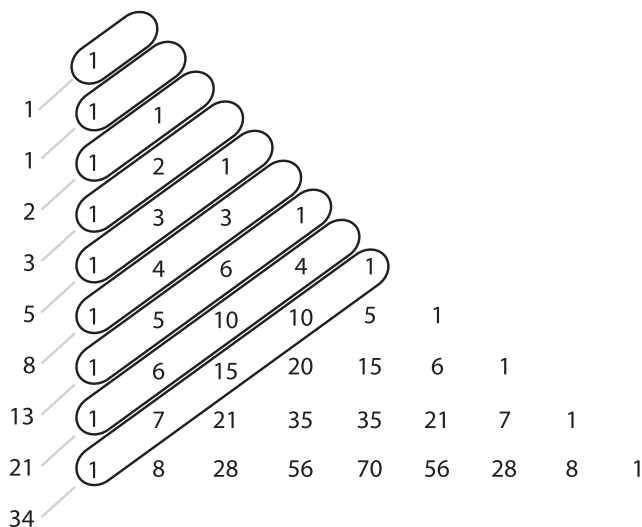
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Причем все значения f_n дублируют числа последовательности Фибоначчи и будут и дальше их дублировать с увеличением значения n . Причина в том, что *это и есть* последовательность Фибоначчи, только в несколько измененном виде — с небольшим *смещением*. Обратите внимание, что $f_1 = 1 = F_2$, $f_2 = 2 = F_3$, $f_3 = 3 = F_4$ и т.д. (для удобства договоримся, что $f_0 = F_1 = 1$, а $f_{-1} = F_0 = 0$). Обобщая, мы можем утверждать, что при $n \geq 1$

$$f_n = F_{n+1}$$

А так как мы с вами уже знаем, что означают числа последовательности, мы с их помощью можем доказать состоятельность многих и многих других удивительных закономерностей. Возьмем, к примеру, ту из них, о которой мы говорили в конце главы 4, когда просчитывали диагонали Паскалева треугольника:

Диагональные
суммы



Так, восьмая диагональ дает нам

$$1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34 = F_9$$

С точки зрения «подсчета комбинаций» это значит, что

$$\binom{8}{0} + \binom{7}{1} + \binom{6}{2} + \binom{5}{3} + \binom{4}{4} = F_9$$

Чтобы понять суть этой закономерности, попробуем ответить на один вопрос двумя различными способами.

Вопрос: Сколько существует возможных комбинаций единиц и двоек, дающих в сумме 8?

Ответ номер один: Судя по тому, о чем мы говорили чуть выше, — $f_8 = F_9$.

Ответ номер два: Представим себе эту проблему как 5 частных задач, в основе каждой из которых лежит количество двоек в комбинации. Сколько комбинаций обойдется вообще без двоек? Разумеется, только одна — 11111111. И поэтому совсем не случайно, что $\binom{8}{0} = 1$.

С одной двойкой? Уже семь: 2111111, 1211111, 1121111, 1112111, 1111211, 1111121, 1111112. Каждая из них состоит из семи цифр, и, сдвигая двойку шаг за шагом, получаем $\binom{7}{1} = 7$.

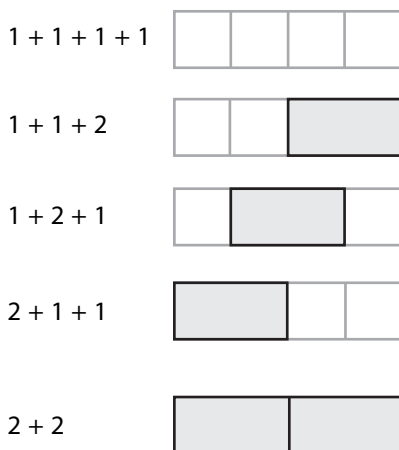
С двумя двойками (скажем, 2211111)? Не будем перечислять их все, просто отметим, что любая из них будет состоять из двух двоек и четырех

единиц, то есть всего из шести цифр, что дает нам $\binom{6}{2} = 15$ возможных местоположений двоек. По той же логике комбинации с тремя двойками будут включать в себя две единицы и состоять из 5 цифр, а общее их количество будет равняться $\binom{5}{3} = 10$. И наконец, из четырех двоек у нас получится всего одна комбинация (а именно 2222), потому что $\binom{4}{4} = 1$.

Оба ответа отлично проясняют всю ситуацию. И заодно объясняют, почему сумма чисел n -ной диагонали треугольника Паскаля равна одному из чисел последовательности Фибоначчи. То есть при $n \geq 0$ сложение чисел диагонали n (вплоть до того момента, пока через $n/2$ шагов мы не выйдем за границы треугольника) дает нам

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots = f_n = F_{n+1}$$

К тому же можно прийти, представив последовательность Фибоначчи в виде *плиток черепицы*. Тогда $f_4 = 5$ означает 5 способов выложить один ряд (условно состоящий из 4 квадратов) одинарными (в виде квадратов) и двойными (в виде прямоугольников) плитками. То есть $1 + 1 + 2$ будет выглядеть как «квадрат — квадрат — прямоугольник».



5 способов выложить ряд из 4 квадратов,
используя квадратные и прямоугольные плитки (то же, что и $f_4 = 5$)

Такую визуализацию можно использовать, чтобы понять другие закономерности, основанные на числах Фибоначчи. Давайте посмотрим, что произойдет, если возвести числа Фибоначчи в квадрат.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
f_n^2	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	7921

Квадраты чисел Фибоначчи от f_0 до f_{10}

В том, что, сложив два соседних числа последовательности Фибоначчи, мы получим следующее за ними, ничего нового для нас нет (в конце концов, именно так и появилась эта последовательность). А теперь посмотрите на числа Фибоначчи, возведенные в квадрат и сложенные между собой:

$$\begin{aligned}
 f_0^2 + f_1^2 &= 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = f_2 \\
 f_1^2 + f_2^2 &= 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 = f_4 \\
 f_2^2 + f_3^2 &= 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 = f_6 \\
 f_3^2 + f_4^2 &= 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34 = f_8 \\
 f_4^2 + f_5^2 &= 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89 = f_{10} \\
 &\quad \dots
 \end{aligned}$$

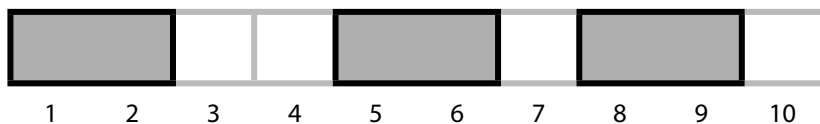
Попробуем объяснить эту закономерность с точки зрения счета. Последнее уравнение утверждает, что

$$f_4^2 + f_5^2 = f_{10}$$

Почему? Ответим на простой вопрос.

Вопрос: Сколькими способами можно выложить из квадратов и прямоугольников ряд длиной в 10 квадратов?

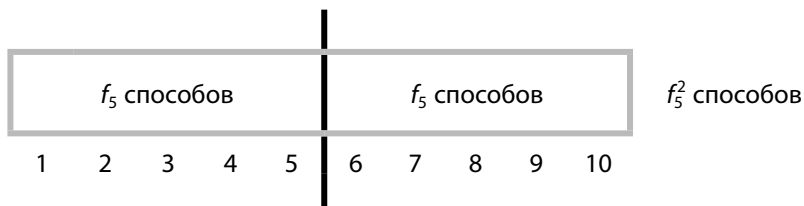
Ответ 1: Естественно, f_{10} . Вот один из вариантов — визуализация суммы $2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1$.



То есть разрывы между плитками у нас будут после 2, 3, 4, 6, 7, 9 и 10 квадратов (попросту — везде, кроме центральной оси прямоугольников, в нашем примере — это после 1, 5 и 8 квадратов).

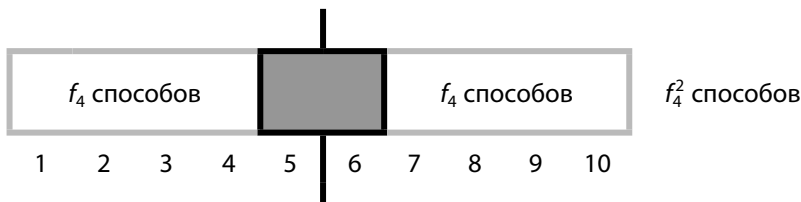
Ответ 2: Решим две задачи: сначала посчитаем варианты кладки, в которых будет разрыв после 5 квадрата (то есть ряд можно разделить

пополам), потом те, где разрыва в этом месте не будет (и ряд будет разделяться на две неравные части). Начнем с первого. Левую часть можно выложить $f_5 = 8$ способами. Обе части равны, значит, и правую можно выложить $f_5 = 8$ способами. Согласно закону произведения (см. главу 4), мы можем представить общую сумму способов как $f_5^2 = 8^2$, как показано ниже:



f_5^2 способов выложить ряд из 10 квадратов с обязательным разрывом после 5 квадрата

Теперь посчитаем те варианты, в которых разрыва в центре нет, зато мы точно знаем, что 5 и 6 квадраты закрыты прямоугольником (как нарисовано ниже). В таком случае части ряда как слева, так и справа от центрального прямоугольника можно выложить $f_4 = 5$ способами, значит, всего получается $f_4^2 = 5^2$. Сводим вместе оба варианта и получаем, что $f_{10} = f_5^2 + f_4^2$, что и требовалось.



f_4^2 способов выложить ряд из 10 квадратов без разрыва после 5 квадрата

На уровне обобщений же трюк с разделением панелей длиной $2n$ квадратов на два типа в зависимости от того, есть ли у них по центру разрыв или нет, приводит нас к очень красивой закономерности —

$$f_{2n} = f_{n2} + f_{n-1}^2$$

Отступление

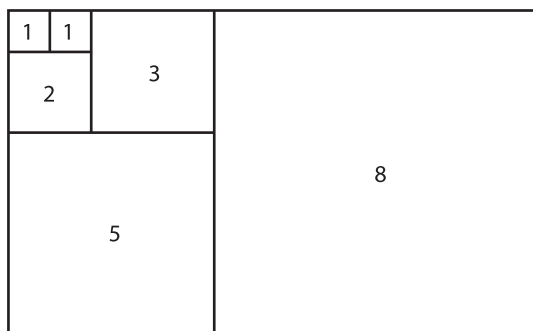
Возьмем только что рассмотренную закономерность и попробуем использовать ее в похожих примерах. Скажем, сколько будет способов выложить плиткой ряд протяженностью $m + n$? Сначала — те варианты кладки, в которых будет разрыв после квадрата m . Левую часть можно выложить f_m способами, правую — f_n способами, то есть всего их $f_m f_n$. Теперь — варианты кладки без разрыва после квадрата m . Прямоугольник тогда покрывает квадраты m и $m + 1$, остальные же можно выложить $f_{m-1} f_{n-1}$ способами. В итоге у нас получается весьма полезная формула при $m, n \geq 0$.

$$f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$$

А теперь рассмотрим другой пример. Что получится, если суммировать квадраты всех чисел Фибоначчи?

$$\begin{aligned} 1^2 + 1^2 &= 2 = 1 \times 2 \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 &= 6 = 2 \times 3 \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 &= 15 = 3 \times 5 \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 &= 40 = 5 \times 8 \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 &= 104 = 8 \times 13 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ух ты! Здорово, правда? Сумма квадратов есть произведение двух последних чисел! Но зачем прибавлять сумму квадратов 1, 1, 2, 3, 5 и 8 к произведению 8×13 ? Лучший способ визуализировать это — взять шесть квадратов со сторонами 1, 1, 2, 3, 5 и 8 и расположить их так, как показано на схеме.



Берем один квадрат 1 на 1. Рядом с ним помещаем второй такой же. Получается прямоугольник 1 на 2. Под ним располагаем квадрат 2 на 2, и наш прямоугольник вырастает до 3 на 2. К его более длинной грани прибавляем квадрат 3 на 3 (получается прямоугольник 3 на 5); квадрат 5 на 5 отправляется вниз (получая прямоугольник 8 на 5), и, наконец, чертим самый большой квадрат, 8 на 8, тем самым заканчивая и прямоугольник 8 на 13. А теперь — простой вопрос.

Вопрос: Какова площадь большого прямоугольника?

Ответ 1: С одной стороны, это будет сумма площадей всех входящих в него квадратов, то есть $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$.

Ответ 2: С другой стороны, высота большого прямоугольника равняется 8, длина же — $5 + 8 = 13$, а значит, площадь — 8×13 .

Так как оба эти ответа логически верны, они должны приводить нас к одному и тому же результату, который объяснит наше тождество. По большому счету, то, как мы строили этот прямоугольник, уже его объясняет — вместе со всеми отношениями между входящими в нее числами (я имею в виду $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5 \times 8$). И если следовать этой логике и дальше, мы расширим наш прямоугольник сначала до 13×21 , потом до 21×34 и т.д. до бесконечности. Общая формула выглядит так:

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Посмотрим, что произойдет при перемножении двух *соседних* чисел последовательности Фибоначчи. «Соседями» 5, например, являются 3 и 8. Их произведение равно $3 \times 8 = 24$, что лишь на единицу меньше 5^2 . «Соседи» 8 — 5 и 13, которые при умножении друг на друга дают 65 — число, которое на единицу больше 8^2 . Таблица, показанная ниже, подтверждает эту закономерность: в последовательности Фибоначчи произведение двух соседних с искомым чисел будет всегда отличаться на 1 от квадрата этого искомого. Другими словами,

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = \pm 1$$

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
F_n^2	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	7921
$F_{n-1}F_{n+1}$	0	2	3	10	24	65	168	442	1155	3026	7920
$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

Произведение чисел, соседствующих с любым числом в последовательности Фибоначчи, всегда отличается от квадрата этого числа на 1

С помощью метода доказательства (называемого также индукцией), о котором мы подробно поговорим в следующей главе, приходим к тому, что при $n \geq 1$

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

А почему бы нам не пойти дальше, к *дальним* соседям? Возьмем число $F_5 = 5$. Мы уже знаем, что его ближайшие «соседи» дают $3 \times 8 = 24$, что в шаге от 5^2 . Но то же произойдет, если мы сделаем еще шаг влево и вправо по последовательности: $2 \times 13 = 26$, что так же в шаге от 5^2 . А что насчет более отдаленных — на три, четыре шага — «соседей»? На пять, наконец? Получим $1 \times 21 = 21$, $1 \times 34 = 34$ и $0 \times 55 = 0$ соответственно. Насколько далеки эти результаты от 25? На 4, на 9 и на 25. Но это же квадраты натуральных чисел! Причем *не всяких*, а тех, что входят в последовательность Фибоначчи! Еще больше свидетельств этой закономерности — в таблице ниже, общая же формула выглядит так:

$$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = \pm F_r^2$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	
F_n^2	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r}$
$F_{n-1}F_{n+1}$	0	2	3	10	24	65	168	442	1155	3026	± 1
$F_{n-2}F_{n+2}$		0	5	8	26	63	170	440	1157	3024	± 1
$F_{n-3}F_{n+3}$			0	13	21	68	165	445	1152	3029	± 4
$F_{n-4}F_{n+4}$				0	34	55	178	432	1165	3016	± 9
$F_{n-5}F_{n+5}$					0	89	144	466	1131	3050	± 25
...						...					...

Произведение более дальних «соседей» любого числа последовательности Фибоначчи всегда близко к его же квадрату.
При этом дистанция между числами равна квадрату одного из чисел Фибоначчи

Еще несколько закономерностей чисел Фибоначчи

Говоря о треугольнике Паскаля, мы видели, насколько красивые в своей сложности закономерности демонстрируют его четные и нечетные числа. С последовательностью Фибоначчи все проще. Посмотрите на нее еще раз. Какие из этих чисел четные?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ...

$F_3 = 2, F_6 = 8, F_9 = 34, F_{12} = 144$ и т.д. (в этом разделе мы снова переключимся на заглавную F , чтобы подчеркнуть красоту и значительность описанных здесь закономерностей). Позиции четных чисел — 3, 6, 9 и 12. Похоже, что интервал между ними всегда равен 3. Доказать это очень легко, достаточно просто проследить закономерность с самого начала последовательности:

нечетное, нечетное, четное

И дальше такой порядок повторяется вновь и вновь:

нечетное, нечетное, четное, нечетное, нечетное, четное,
нечетное, нечетное, четное...

Происходит это потому, что после каждого блока «нечетное, нечетное, четное» следующий цикл сложения выглядит как «нечетное + четное = нечетное», потом «четное + нечетное = нечетное» и, наконец, «нечетное + нечетное = четное», так что закономерность бесконечно повторяется.

Говоря языком соотносимости, выученным нами в главе 3, каждое четное число соотносится с 0 (по модулю 2), а каждое нечетное — с 1 (также по модулю 2), а $1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$. Вот как выглядит последовательность Фибоначчи в двоичной системе (или по модулю 2 — выбирайте любой термин):

1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0...

А что насчет чисел, кратных 3? Первые из них — $F_4 = 3, F_8 = 21, F_{12} = 144$, что волей-неволей наталкивает нас на мысль, что кратные 3 числа занимают в последовательности каждое четвертое место. Чтобы эту догадку подтвердить, заменим все числа Фибоначчи на 0, 1 или 2 и будем считать по модулю 3, где

$$1 + 2 \equiv 0, \text{ а } 2 + 2 \equiv 1 \pmod{3}$$

В троичной системе последовательность выглядит как

1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1...

После каждого восьмого числа мы замыкаем круг и начинаем опять с двух следующих друг за другом единиц, то есть в этом случае цикл

состоит из 8 чисел, четвертое и восьмое из которых — 0. Так и получается, что каждое четвертое место последовательности Фибоначчи занято числом, кратным 3. Считая по модулю 5, 8 или 13, обнаруживаем, что

Каждое пятое число последовательности кратно 5

Каждое шестое число последовательности кратно 8

Каждое седьмое число последовательности кратно 13

и закономерность продолжается.

А что насчет чисел, *следующих друг за другом*? Есть ли между ними что-то общее? Что интересно — в каком-то смысле *ничего общего* между ними нет. И мы можем это продемонстрировать. Пары чисел, находящихся рядом в последовательности

(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8), (8, 13), (13, 21), (21, 34)...

называются *взаимно простыми*, что означает, что нет числа, большего чем 1, на которое они оба делятся. Если мы возьмем для примера последнюю из перечисленных выше пар, мы увидим, что 21 делится на 1, 3, 7 и 21, а 34 — на 1, 2, 17 и 34. То есть у 21 и 34 только один общий делитель — 1. Как убедиться, что эта закономерность повторяется? Откуда нам знать, что числа следующей пары (34, 55) — непременно взаимно простые? Для этого необязательно искать все делители для 55. Пойдем от обратного: предположим, что есть некое число $d > 1$, на которое и 34, и 55 делятся без остатка. Но тогда на него должна делиться без остатка и их разность: $55 - 34 = 21$ (если два числа кратны третьему, их разность тоже будет ему кратна), что невозможно: ведь мы уже знаем, что нет такого $d > 1$, на которое можно было бы разделить и 21, и 34. Раз за разом применяя это доказательство, мы придем к выводу, что все числа последовательности Фибоначчи, образующие пары по принципу ближайшего соседства, являются взаимно простыми.

А теперь — мой самый любимый факт о числах Фибоначчи. Он касается *наибольшего общего делителя* (НОД). Наибольший общий делитель двух чисел есть наибольшее число, на которое делятся оба эти числа. Например, для 20 и 90 НОД равен 10. Обозначается это как

$$\text{НОД}(20, 90) = 10$$

Как вы думаете, каким будет наибольший общий делитель двадцатого и девяностого чисел последовательности Фибоначчи? Ответ звучит

как поэзия: 55 — десятое число последовательности Фибоначчи! А вот уравнение:

$$\text{НОД}(F_{20}, F_{90}) = F_{10}$$

Или в общем виде, для значений m и n :

$$\text{НОД}(F_m, F_n) = F_{\text{НОД}(m; n)}$$

Другими словами, «НОД значений F есть значение F НОДа»! Подробно останавливаться на этом мы здесь не будем, но и пройти мимо я не мог.

Иногда закономерность может оказаться обманчивой. Какие, например, из чисел Фибоначчи являются простыми? (Простые — это числа больше 1, которые при этом делятся без остатка только на 1 и на самих себя, мы поговорим о них подробнее в следующей главе.) Числа больше единицы, не являющиеся простыми, называются *составными*, потому что их можно разложить на неделимые простые составляющие. Вот несколько первых простых чисел последовательности Фибоначчи:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...$$

А теперь взгляните на числа, стоящие на «простых» позициях:

$$F_2 = 1, F_3 = 2, F_5 = 5, F_7 = 13, F_{11} = 89, F_{13} = 233, F_{17} = 1597$$

Числа 2, 5, 13, 89, 233 и 1597 — простые. Закономерность вроде бы говорит нам о том, что, если значение $p > 2$ является простым, простым будет и F_p . Однако следующий же элемент последовательности эту закономерность нарушает: $F_{19} = 4181$ — уже составное число, потому что $4181 = 37 \times 113$. Но верно и то, что каждое простое число больше 3 стоит в последовательности Фибоначчи на «простой» позиции. Это следует из одной из уже рассмотренных закономерностей. F_{14} должно быть составным, поскольку каждое седьмое число последовательности кратно $F_7 = 13$ (и правда: $F_{14} = 377 = 13 \times 29$).

На самом деле простые числа Фибоначчи встречаются редко — пока что официально подтверждено лишь 33, наибольшее из них занимает F_{81839} позицию. И это притом, что вопрос, является ли количество простых чисел в последовательности бесконечным, еще не решен.

Но отвлечемся немного от серьезных научных изысканий и займемся небольшим, но забавным фокусом, основанным на магии чисел Фибоначчи.

Ряд 1:	3
Ряд 2:	7
Ряд 3:	10
Ряд 4:	17
Ряд 5:	27
Ряд 6:	44
Ряд 7:	71
Ряд 8:	115
Ряд 9:	186
Ряд 10:	301

Фокус с числами Фибоначчи: запишите в 1 и 2 рядах любые положительные числа. Остальные ряды нужно заполнить по аналогии с последовательностью Фибоначчи ($3 + 7 = 10$, $7 + 10 = 17$ и т.д.).

Затем разделите число 10 ряда на число из 9 ряда.

Ответ обязательно будет начинаться с 1,61

В 1 и 2 рядах таблицы напишите два любых числа от 1 до 10. Сложите их, а сумму запишите в 3 ряду. Затем сложите числа из 2 и 3 рядов. Результат запишите в 4 ряд. Продолжайте так делать (ряд 3 + ряд 4 = ряд 5 и т. п.), пока не дойдете до конца таблицы. У вас получится свой вариант последовательности Фибоначчи. А теперь разделите число из 10 ряда на число из 9 ряда. Из результата вам нужны первые три цифры, включая те, которые идут после запятой. В нашем примере $\left(\frac{301}{186}\right) = 1,618279...$, из них оставляем 1,61. Хотите — верьте, хотите — нет, но, с каких бы двух положительных (необязательно целых и даже необязательно из промежутка от 1 до 10) чисел в 1 и 2 рядах вы ни начали, частным при делении числа 10 ряда на число 9 ряда *всегда* будет 1,61. Попробуйте сами разок-другой и легко в этом убедитесь.

Чтобы разобраться в природе этого фокуса, обозначим первые два числа литерами x и y . Тогда, следуя методу Фибоначчи, получаем $x + y$ в 3 ряду, $y + (x + y) = x + 2y$ в 4-м и т.д. по таблице:

Ряд 1:	x
Ряд 2:	y
Ряд 3:	$x + y$

Ряд 4:	$x + 2y$
Ряд 5:	$2x + 3y$
Ряд 6:	$3x + 5y$
Ряд 7:	$5x + 8y$
Ряд 8:	$8x + 13y$
Ряд 9:	$13x + 21y$
Ряд 10:	$21x + 34y$

Требуется найти частное чисел 10 и 9 рядов:

$$\frac{\text{Ряд 10}}{\text{Ряд 9}} = \frac{21x + 34y}{13x + 21y}$$

Почему же результат всегда будет начинаться с 1,61? Вы удивитесь, но в основе этого лежит *неправильное* сложение дробей. Допустим, у нас есть две дроби: a/b и c/d , причем знаменатели b и d — положительные величины. Что будет, если сложить между собой сначала числители, а потом знаменатели? А будет то, что получившееся в результате число, называемое *медиантой*, всегда будет где-то между двух исходных дробей. То есть при любых дробях $a/b < c/d$, знаменатели которых суть положительные величины, имеем

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Начиная, например, с дробей $1/3$ и $1/2$, для которых медианта будет $2/5$, она расположена в интервале $1/3 < 2/5 < 1/2$.

Отступление

Почему медианта всегда будет располагаться примерно между изначальными числами? Если мы начинаем с дробей $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, где b и d — *положительные величины*, ad будет меньше bc . Прибавив к обеим сторонам ab , получим $ab + ad < ab + bc$ или $a(b+d) < (a+c)b$, что значит, что $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$. Таким же образом приходим к $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Обратите внимание, что при $x, y > 0$

$$\frac{21x}{13x} = \frac{21}{13} = 1,615...$$

$$\frac{34y}{21y} = \frac{34}{21} = 1,619...$$

Следовательно, медианта этих двух дробей должна находиться между ними. Другими словами,

$$1,615... = \frac{21}{13} = \frac{21x}{13x} < \frac{21x + 34y}{13x + 21y} < \frac{34y}{21y} = \frac{34}{21} = 1,619...$$

Вот почему частное чисел из 10 и 9 рядов должно начинаться с 1,61, как мы уже до этого и посчитали.

Отступление

Прежде чем открыть секрет числа 1,61, можете поразить свою аудиторию, постоянно добавляя числа к своей таблице. Так, в нашем примере, где мы начали с 3 и 7, достаточно беглого взгляда, чтобы узнать результат — 781. Как? С помощью алгебры. Если сложить значения из 2 таблицы, мы получим сумму, равную $55x + 88y$. И что? А то, что вместо этого можно написать $11(5x + 8y) = 11 \times \text{ряд 7}$. Поэтому, взяв число из 7 ряда (в нашем примере это 71) и умножив его на 11 (здесь можно использовать фокус с умножением на 11 из главы 1), получим 781.

В чем важность числа 1,61? Если не останавливаться на 10 ряду и продолжать расширять таблицу, вы легко обнаружите, что частное двух соседних чисел будет от ряда к ряду все больше приближаться к значению, которое называют «золотым сечением» —

$$g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803...$$

Кроме g , для обозначения этого числа математики часто используют греческую букву ϕ , которая произносится как «фи» (да-да, «Фи-боначчи»).

Отступление

Алгебра покажет нам, на самом ли деле частное двух соседних чисел последовательности Фибоначчи приближается к g . Предположим, что частное F_{n+1}/F_n приближается к значению r при увеличении n . Но ведь о числах Фибоначчи мы знаем, что $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, поэтому

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

При увеличении значения n левая сторона приближается к r , а правая — к $1 + \frac{1}{r}$. Значит,

$$r = 1 + \frac{1}{r}$$

Умножив обе стороны этого уравнения на r , получим

$$r^2 = r + 1$$

Другими словами, $r^2 - r - 1 = 0$, а согласно формуле корней квадратного уравнения здесь имеется только один положительный ответ: $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = g$.

Существует еще одна будоражащая воображение формула для n -ного числа последовательности Фибоначчи, которая использует золотое сечение. Это **формула Бине**, которая говорит, что

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Глядя на нее, я не перестаю удивляться: как такое возможно, что вся эта формула, построенная вокруг $\sqrt{5}$, приводит к целым величинам?!

Мы можем ее немного упростить, потому что значение

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = -0,61803..., \text{ (столько же точек, сколько и раньше)}$$

находится между -1 и 0 , и чем больше мы увеличиваем степень, тем больше оно приближается к 0 . По большому счету, можно утверждать, что для любого $n \geq 0$, F_n вычисляется через $g^n/\sqrt{5}$ с последующим округлением до ближайшего целого. Можете взять калькулятор и проверить. Если взять $g = 1,618$, то, возведя $1,618$ в десятую степень, получим $122,966...$ (что подозрительно близко к 123). А разделив этот результат

на $\sqrt{5} \approx 2,236$, придем к 54,992. Округление даст $F_{10} = 55$ — известный нам результат. Из g^{20} получается 15 126,99993, которое после деления на $\sqrt{5}$ превращается в 6765,00003, то есть $F_{20} = 6765$. А калькулятор легко проведет нас от $g^{100}/\sqrt{5}$ к $F_{100} \approx 3,54 \times 10^{20}$.

Все эти вычисления показывают, что g^{10} и g^{20} настолько близки к целым числам, что практически ими являются. Что именно здесь происходит? Посмотрите на последовательность Люка́

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521...

названную в честь французского математика Эдуарда Люка (1842–1891) — первооткрывателя многих удивительных свойств этих чисел, а заодно и чисел Фибоначчи, включая формулу с наибольшим общим делителем, о которой мы не так давно говорили. Кстати, именно Люка впервые назвал набор чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8... последовательностью Фибоначчи. Последовательность же Люка соответствует его собственной (несколько упрощенной) версии формулы Бине —

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Другими словами, при $n \geq 1$ L_n есть целая ближайшая к g^n величина (что согласуется с тем, что мы уже видели: $g^{10} \approx 123 = L_{10}$). А вот как связаны между собой последовательности Фибоначчи и Люка:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
$F_{n-1} + F_{n+1}$		3	4	7	11	18	28	47	76	123
$L_{n-1} + L_{n+1}$		5	10	15	25	40	65	105	170	275
$F_n L_n$	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765

Числа Фибоначчи, числа Люка и то, как они друг с другом связаны

Не заметить здесь закономерность почти невозможно. Например, сложение «соседей» числа Фибоначчи дает соответствующее ему по позиции число последовательности Люка:

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$$

А если мы сложим «соседей» числа из последовательности Люка, получим результат, который будет ровно в 5 раз больше соответствующего ему по позиции числа Фибоначчи:

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$$

Если перемножить между собой соответствующие друг другу числа двух последовательностей, мы получим еще одно число последовательности Фибоначчи!

$$F_n L_n = F_{2n}$$

Отступление

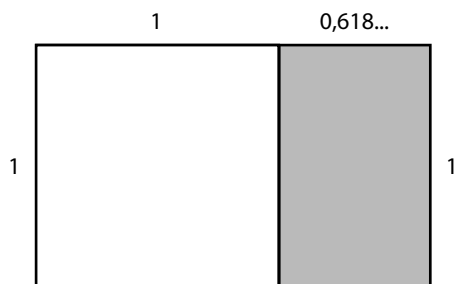
Последнее может быть доказано с помощью алгебры и формул Бине (а именно $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$). Исходя из $h = (1 - \sqrt{5})/2$, представим формулы Бине для чисел Фибоначчи и Люка в виде

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (g^n - h^n) \text{ и } L_n = g^n + h^n$$

И когда мы их перемножаем, получается

$$F_n L_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (g^n - h^n) (g^n + h^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (g^{2n} - h^{2n}) = F_{2n}$$

Откуда пришло название «золотое сечение»? Из золотого прямоугольника, в котором соотношение длинной и короткой сторон составляет $g = 1,61803...$



Из золотого прямоугольника получается прямоугольник меньших размеров с той же — золотой — пропорцией сторон

Если обозначить короткую сторону единицей и убрать из прямоугольника квадрат со сторонами 1 на 1, у нас останется еще один прямоугольник со сторонами 1 и $(g - 1)$, соотношение которых составит

$$\frac{1}{g-1} = \frac{1}{0,61803...} = 1,61803... = g$$

То есть пропорции маленького прямоугольника будут такими же, как и большого. Кстати, g — единственное в своем роде число со столь уникальными свойствами, потому что уравнение $\frac{1}{g-1} = g$ подразумевает, что $g^2 - g - 1 = 0$. А формула корней квадратного уравнения приводит нас только к одному положительному числу, удовлетворяющему этому условию, и число это — $(1 + \sqrt{5})/2 = g$.

Благодаря этому своему свойству золотой прямоугольник считается эстетически образцовым, а потому часто используется в разных областях искусства, будь то живопись, фотография или архитектура. Например, Лука Пачоли¹ — друг и соратник Леонардо да Винчи называл его «божественной пропорцией».



Последовательность Фибоначчи
и золотое сечение вдохновляют многих художников, архитекторов и фотографов
(фотография использована с разрешения ее автора Натальи Сент-Клер)

¹ Фра Лука Бартоломео де Пачоли (1445–1517) — итальянский математик, крупнейший европейский алгебраист XV века, работы которого в частности легли в основу современных принципов бухгалтерии. — *Прим. пер.*

Золотое сечение лежит в основе стольких удивительных математических явлений, что подчас очень сложно удержаться от соблазна увидеть его даже там, где его нет и никогда не было. Например, в романе «Код да Винчи» Дэн Браун пишет, будто число 1,618 встречается везде и всегда, и подтверждение тому — строение человеческого тела, Браун утверждает, что отношение нашего роста к высоте, на которой расположен пупок, — 1,618. Я не проводил измерений, но в статье Джорджа Марковски «Выдумки о золотом сечении», опубликованной в журнале *College Mathematics Journal*, говорится, что это не соответствует реальности. Тем не менее каждый раз, когда где-то встречается число, хоть сколько-то близкое к 1,6, кто-нибудь вспоминает о золотом сечении.

Я уже не раз говорил, что многие числовые закономерности, в которых присутствуют числа Фибоначчи, суть настоящая поэзия. И это не просто метафора: эти числа действительно используются при создании стихотворений. Возьмем, к примеру, лимерики. Вот, последите за ритмом (пусть без слов, просто используя сетку слогов):

лимерик	«ди»	«дам»	всего слогов
ди-дам ди-ди-дам ди-ди-дам	5	3	8
ди-дам ди-ди-дам ди-ди-дам	5	3	8
ди-дам ди-ди-дам	3	2	5
ди-дам ди-ди-дам	3	2	5
ди-дам ди-ди-дам ди-ди-дам	5	3	8
ито́го	21	13	34

Поэзия чисел Фибоначчи

Если посчитать количество слогов в каждом ряду, мы получим числа Фибоначчи! Лично меня это вдохновило настолько, что я отважился написать о них свой собственный лимерик:

Ты с ними достигнешь вершин!
Сначала — «один» и «один»,
Потом — «два», «три», «пять»,
Продолжим считать —
Веселью положен почин!

ГЛАВА НОМЕР ШЕСТЬ

$$1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

Магия доказательств

Ценность доказательств

Одна из главных радостей занятий математикой — возможность окончательных, не оставляющих ни тени сомнения доказательств. Это ставит математику на особое место в ряду других наук, которые опираются на соответствие законам материального мира. Однако новые открытия могут опровергать или изменять эти законы. В математике же доказанное однажды остается доказанным навсегда. Прошло больше 2000 лет с того момента, как Евклид доказал бесконечность множества простых чисел — и это никогда не удастся оспорить. Научно-технические формации сменяют друг друга, теоремы же вечны. Как однажды сказал великий Годфри Харди¹: «Математик так же, как художник или поэт, создает узоры. И если его узоры более устойчивы, то лишь потому, что они сотканы из идей». По-моему, доказать новую теорему — все равно что шагнуть на тропу, ведущую в научное бессмертие.

В математике доказывают не только абсолютную истинность, но и *невозможность*. Часто приходится слышать: «Нельзя доказать невозможное». Полагаю, здесь имеется в виду, что никому не под силу доказать существование розовых коров — по крайней мере, до тех пор, пока мы не увидим их в один прекрасный день. Но в математике невозможное

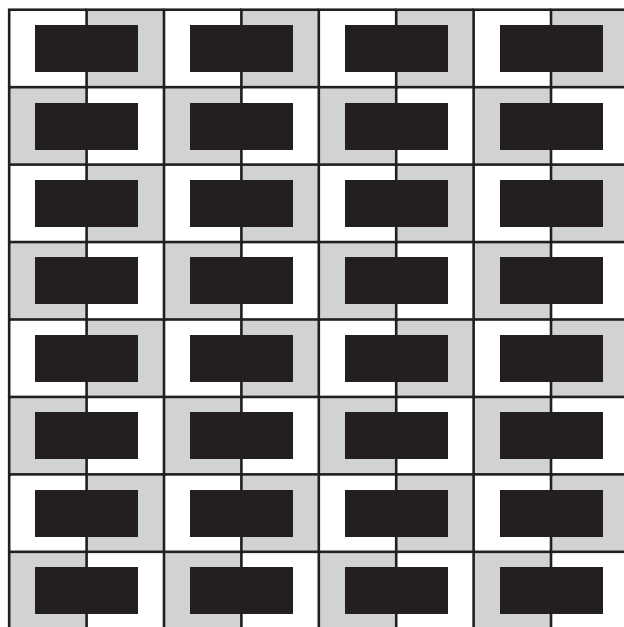
¹ Годфрид Харолд Харди (1877–1947) — английский математик, известный работами в теории чисел и математическом анализе. — *Прим. пер.*

вполне себе *доказуемо*. Например, сколько ни пытайтесь, вы ни за что не найдете два четных числа, которые в сумме давали бы нечетное. Или простое число, которое было бы больше всех остальных простых чисел. Сложность таких доказательств поначалу пугает, к ним нужно привыкнуть, и не ждите, что это произойдет с первого (а то и со второго или с третьего) раза. Но стоит войти во вкус — и удержаться уже невозможно: настолько они удивительны и притягательны. Стройное доказательство подобно хорошему анекдоту или уместной шутке — удовлетворение от него испытываешь ничуть не меньшее.

С вашего позволения, расскажу о первом своем опыте на этой стезе. В детстве двумя главными предметами моего обожания были настольные игры и загадки. Как-то раз мой друг предложил мне загадку, связанную с настольными играми, и, конечно, я был заинтригован. Он положил передо мной пустую шахматную доску размером 8 на 8 клеточек и 32 костяшки домино и спросил:

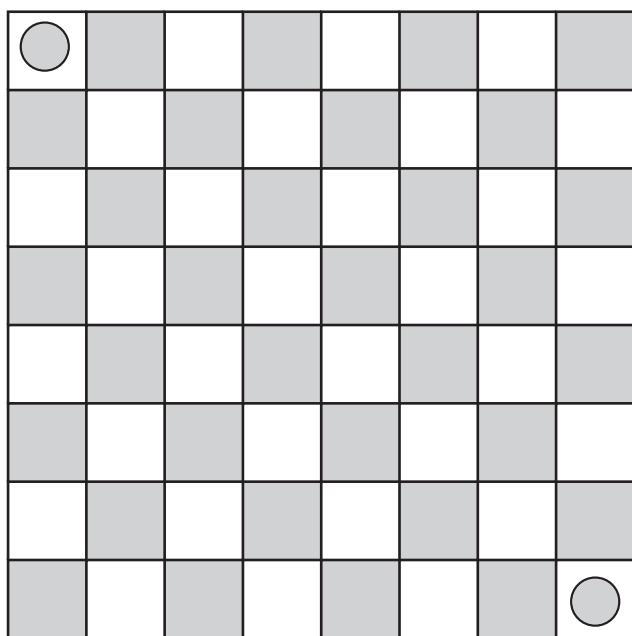
— Можешь выложить домино так, чтобы они закрыли всю доску?

— Конечно, — уверенно ответил я. — Просто по четыре костяшки на ряд. Вот так:



Стандартная шахматная доска, выложенная костяшками домино

— Молодец, — сказал он. — А если я уберу две клетки — правую нижнюю и левую верхнюю, и их останется 62 — сможешь закрыть оставшиеся 31 костяшкой? — и он положил на крайние квадратики две монетки.



Можно ли выложить шахматную доску костяшками домино, если два противоположных друг другу угла недоступны?

— Хм... Наверное, — ответил я.

Но как я ни пытался, какие комбинации ни пробовал, у меня ничего не получалось. Наконец я сдался, заявив, что это в принципе невозможно.

— А если невозможно, — сказал мой друг, — можешь *доказать* это?

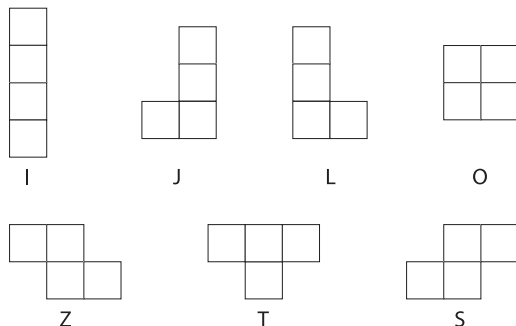
Я не мог. Ведь для этого потребовалось бы проверить бесконечное множество вариантов (если хотите, можете посчитать, сколько именно) и удостовериться в том, что *каждый* из них невозможен.

— Посмотри на цвета, — посоветовал друг, видя мое замешательство.

«На цвета? Причем тут цвета?» — подумал я. А потом понял. Обе закрытые клеточки были белыми, а значит, из 62 оставшихся свободными, 32 были черными и всего лишь 30 — белыми. А поскольку костяшка домино, как ее ни положи, закрывает пару разноцветных клеточек, выложить ими всю доску не получилось бы ни за что на свете. Здорово!

Отступление

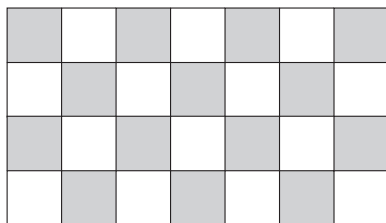
Если вам понравилось последнее доказательство, понравится и это. Играя в известный всем «Тетрис», нужно заполнять «стакан» из 10 клеток падающими фигурами. Всего их 7, и соответственно их форме их иногда обозначают латинскими буквами: I, J, L, O, Z, T и S.



Могут ли эти 7 фигур образовать прямоугольник размером 4 на 7 квадратов?

Каждая фигура состоит из 4 квадратов, поэтому вполне естественно задаться вопросом, можно ли сложить их как-нибудь так, чтобы получился прямоугольник размером 4 на 7? При этом фигурки можно переворачивать как угодно.

Оказывается, нельзя. Как это доказать? Давайте раскрасим квадратики в прямоугольнике в шахматном порядке — так, чтобы получилось 14 серых и 14 белых.



Обратите внимание: любая фигура, кроме «Т», должна закрывать 2 белых и 2 серых квадрата независимо от своего положения. Сама же «Т» состоит из 3 квадратов одного цвета и 1 квадрата — другого. Следовательно,

как бы ни располагались остальные 6 фигур, они закроют 12 белых и 12 серых квадратиков, а это значит, что для «Т» останется только по 2 квадратика каждого цвета, в которые она «не впишется».

Как же убедить окружающих в истинности математического утверждения, которое кажется нам верным? Обычно начинают с описания математических объектов, которые мы используем, например целых чисел

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3\dots$$

множества, которое включает положительные и отрицательные числа и ноль.

Определив объекты, мы делаем допущение, которое считаем самоочевидным — например, «сумма или произведение двух целых чисел всегда будет целым числом» (в следующей главе, посвященной геометрии, мы будем исходить из того, что между двумя точками можно провести только одну прямую). Такие самоочевидные, не требующие доказательств утверждения называются *аксиомами*. С их помощью, плюс немного логики и алгебры, мы можем доказывать другие положения, не столь очевидные — *теоремы*. В этой главе вы познакомитесь с основным инструментарием математических доказательств.

Начнем, пожалуй, с доказательства простых теорем, которые вызывают минимум сомнений. Когда мы слышим «два четных числа при сложении дают третье четное число» или «два нечетных числа при умножении дают третье нечетное число», наш разум обычно пытается проверить такие утверждения рядом примеров и из них сделать вывод, что это, скорее всего, верно. Ну или хотя бы не полная чушь. Вы даже можете решить, что это настолько очевидно, что может быть принято как аксиома. Делать этого не стоит — по крайней мере, до тех пор, пока вы *можете построить* цепочку доказательств, используя уже известные вам аксиомы. Так, чтобы доказать утверждения о четных и нечетных числах, начать стоит с понимания того, что вообще такое «четное» и «нечетное».

Четным называется число, которое делится на 2 без остатка. Если выразить это алгебраически, то число n является четным, если $n = 2k$ (где k есть целая величина). Будет ли четным числом 0? Да, потому что $0 = 2 \times 0$. Теперь у нас есть все необходимое, чтобы доказать, что два четных числа в сумме дают третье четное.

Теорема: Если m и n — четные, то сумма $m + n$ — тоже четное.

Это прекрасный пример теоремы по принципу «если..., то...». Чтобы ее доказать, нам надо сделать допущение в части, начинающейся с «если...», и, смешав логику с алгеброй, показать, что часть, начинающаяся с «то...», является следствием этого допущения. В нашем примере мы предполагаем, что m и n — четные, и поэтому $m + n$ тоже будет четным.

Доказательство: Предположим, что m и n — четные числа. Значит, $m = 2j$, а $n = 2k$, где j и k суть целые величины. Тогда

$$m + n = 2j + 2k = 2(j + k)$$

А так как $j + k$ — целое, $m + n$ тоже будет кратно 2, значит, оно четное. $\square$

Обратите внимание, что доказательство основывается на аксиоме, согласно которой сумма двух целых чисел (в нашем случае $j + k$) так же является целым числом. Очень часто уже доказанные простые теоремы закладывают основу доказательной базы теорем более сложных, элементарные же аксиомы отбрасываются за ненадобностью. У математиков, кстати, принято ставить в конце последней линии цепочки доказательств значок $\square$ или $\blacksquare$ либо аббревиатуру «ч. т. д.» — «что и требовалось доказать». (Также встречается аббревиатура Q.E.D., происходящая от латинской фразы «quod erat demonstrandum», «что и должно было быть продемонстрировано», ну или от английской «quite easily done», «ничего сложного» — выбирайте вариант по душе.) Я, с вашего позволения, буду иногда использовать еще один символ, смайлик ☺, когда доказательство покажется мне особенно стройным и красивым.

Редкий математик устоит перед тем, чтобы, доказав теорему по принципу «если..., то...», не попытаться доказать ее же, но наоборот, используя в качестве отправной точки обратное высказывание, то есть, по сути, меняя местами части «если...» и «то...». В нашем примере с четными числами обратным высказыванием станет предположение, что «если $m + n$ является четным числом, то m и n также будут четными числами». Ошибочность его можно доказать контрпримером. Это несложно, буквально элементарно, как

$$1 + 1 = 2$$

где очень четко и ясно видно, что четное число можно получить сложением двух других чисел, которые четными не являются.

Следующая наша теорема касается нечетных чисел. Нечетным называется такое число, которое не делится на 2. Попытавшись это сделать, вы всегда получите 1 в остатке. Алгебраически n является нечетным, если $n = 2k + 1$, где k — целое число. Этого нам вполне хватит, чтобы доказать, что при умножении двух нечетных чисел мы получим третье нечетное.

Теорема: Если m и n — нечетные, то их произведение mn также будет нечетным.

Доказательство: Предположим, что m и n являются нечетными числами. Тогда $m = 2j + 1$, а $n = 2k + 1$ при целых значениях j и k . Тогда, согласно правилу FOIL,

$$mn = (2j + 1)(2k + 1) = 4jk + 2j + 2k + 1 = 2(2jk + j + k) + 1$$

А так как $2jk + j + k$ — целое число, то mn есть форма «удвоенного целого числа + 1», а значит, нечетное число. $\square$

А что насчет обратного высказывания? Итак, если mn — нечетное, будут ли так же нечетными m и n ? Будут, и подтвердить это можно, используя доказательство от противного. Для этого нам нужно показать, что опровержение части «то...» (что m и n суть нечетные) приведет к ошибке, причем не только во второй, но и в первой части «если...». Что и подтвердит довольно странным, но вполне логичным образом наше предположение.

Теорема: Если mn — нечетное, то и m и n будут также нечетными.

Доказательство: Предположим, что либо m , либо n (или оба) — четные числа. Выберем m (хотя по большому счету это не важно). Значит, $m = 2j$ при целом значении j . Тогда произведение $mn = 2jn$ также получится четным, что противоречит изначальному условию. $\square$

В том случае, когда теореме можно доказать как в «прямом», так и в «обратном» порядке, ее иногда называют теоремой по принципу «если и только если» (или «тогда и только тогда»). Как раз такую мы сейчас и доказали:

Теорема: m and n являются нечетными, если и только если mn — нечетное («...тогда и только тогда, когда mn — нечетное»).

Рациональные и иррациональные числа

Возможно, теоремы, которые мы только что рассмотрели, ничем вас не удивили, а их доказательства показались вам весьма прямолинейными. Куда большее удовольствие получаешь, пытаясь подтвердить менее очевидные предположения. Пока что мы довольствовались целыми числами — не пора ли заняться дробями? Число, которое можно представить в дробном виде, называется рациональным. Если быть точным, то число r является рациональным, если $r = a/b$, где a и b — целые числа, а $b \neq 0$. Например, $23/58$, $-22/7$ или 42 (равное, по сути, $42/1$) — числа рациональные. Если же число не является рациональным, его называют иррациональным. Яркий тому пример, о котором вы, наверняка, слышали — число $\pi = 3,14159\dots$, но о нем чуть позже, в главе 6.

Для следующей нашей теоремы не лишним будет вспомнить, как вообще складывать дроби. И легче всего это делать, когда дроби имеют общий знаменатель, например:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}, \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1, \quad \frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5$$

В противном случае нам сперва придется привести дроби к общему знаменателю:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{10}{35} + \frac{21}{35} = \frac{31}{35}$$

В целом же дроби a/b и c/d можно привести к общему знаменателю таким вот нехитрым способом:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

И этого вполне достаточно, чтобы доказать несколько простых теорем, связанных с рациональными числами.

Теорема: Среднее арифметическое двух рациональных чисел также будет рациональным числом.

Доказательство: Возьмем два рациональных числа — x и y . Значит, в равенствах $x = a/b$ и $y = c/d$ значения a , b , c и d суть целые числа. Среднее арифметическое x и y , таким образом, можно представить как

$$\frac{x + y}{2} = \frac{a/b + c/d}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}$$

Это дробь, числитель и знаменатель которой — целые числа. Следовательно, среднее арифметическое значение x и y является рациональным числом.

А теперь давайте подумаем, что же именно утверждается в этой теореме. А утверждается в ней то, что между двумя разными рациональными числами, насколько бы близки они друг другу ни были, всегда найдется еще одно рациональное число. Возникает искушение сделать из этого вывод, что все числа являются рациональными (как довольно долго думали древние греки). Нет, это не так. И смотрите, почему. Возьмем число $\sqrt{2}$, которое в десятичной записи выглядит как 1,4142... Если мы попробуем записать его как обычную дробь, получится что-нибудь вроде $10/7$ или $1414/1000$ (вариантов огромное множество), но все они будут приближительными и никогда при возведении в квадрат не дадут 2. Но что, если мы просто плохо ищем? Да нет, не плохо, и следующая наша теорема как раз и показывает, что любые такие поиски бесполезны по определению. Доказательство будет строиться от противного, как это обычно и бывает, когда разговор заходит об иррациональных числах. А заодно мы увидим, как сократить дробь до ее несократимого значения — того предела, когда у числителя и знаменателя остается только один общий делитель — 1.

Теорема: $\sqrt{2}$ есть иррациональное число.

Доказательство: Предположим обратное: $\sqrt{2}$ есть число рациональное. В таком случае существуют некие положительные целые числа a и b , для которых верно, что

$$\sqrt{2} = a/b$$

где дробь a/b — несократимая. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$2 = a^2/b^2$$

или

$$a^2 = 2b^2$$

что приводит нас к тому, что a^2 есть четное целое число. А если a^2 — четное, значит, четным является и a (по аналогии с недавним нашим доказательством того, что, если нечетное a умножить на само себя, результат будет также нечетным). То есть $a = 2k$, где k — целое число. Добавим это в свое уравнение и получим

$$(2k)^2 = 2b^2$$

То есть

$$4k^2 = 2b^2$$

что приводит нас к

$$b^2 = 2k^2$$

и констатации того факта, что b^2 является четным числом. Значит, четным должно быть и b . Но постойте! Ведь при четных значениях как a , так и b дробь a/b никак не может быть несократимой! Это противоречит нашим исходным условиям. И завело нас в эту ловушку предположение, что $\sqrt{2}$ является рациональным числом. Поэтому нам не остается ничего иного, кроме как признать: число $\sqrt{2}$ — иррациональное. ☺

Лично я нахожу это доказательство восхитительным (и смайлик в конце строки тому подтверждение): прямая и хорошо освещенная тропа чистой, ничем не замутненной логики приводит нас к удивительному умозаключению. В главе 12 мы еще увидим, насколько велик на самом деле процент иррациональных чисел. Практически все действительные числа являются иррациональными, притом, что в повседневной жизни мы с ними почти не сталкиваемся.

Из доказанной нами только что теоремы следует одно любопытное заключение (его, пожалуй, даже можно назвать сопутствующей теоремой — такой, условия которой вытекают из только что доказанной). Основано оно на следующем правиле возведения в степень, согласно которому для любых положительных значений a , b и c

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

То есть утверждение, что $(5^3)^2 = 5^6$, будет вполне справедливым, потому что

$$(5^3)^2 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = 5^6$$

Сопутствующая теорема: Существуют иррациональные числа a и b , при которых число a^b будет рациональным.

Не пугайтесь, нам эта теорема вполне по плечу, хоть мы и знаем пока лишь одно иррациональное число — $\sqrt{2}$. Приведенное ниже доказательство является, по сути, доказательством существования: мы же пытаемся просто узнать, есть ли вообще такие a и b , а не определить их конкретные числовые выражения.

Доказательство: Раз уж мы знаем, что $\sqrt{2}$ является иррациональным числом, возьмем число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Будет ли оно рациональным? Если да,

то теорема доказана (поскольку и a и b равны $\sqrt{2}$). Если нет — что ж, по крайней мере мы узнаем еще одно иррациональное число $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$, примем $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $b = \sqrt{2}$ и с помощью правила возведения в степень получим

$$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

то есть рациональное число. Следовательно, независимо от того, является $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рациональным или иррациональным числом, мы докажем, что a^b будет рациональным числом при иррациональных значениях a и b . ☺

Так обычно и выглядит любое доказательство существования чего бы то ни было: почти всегда остроумно и очень редко — исчерпывающе. (Кстати, уж коли зашла речь: число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — все-таки иррациональное число, но сейчас это для нас абсолютно не принципиально.)

Куда больше удовлетворения (равно как и куда больше существенной информации) получаешь, идя путем конструктивного доказательства. Одно из них, к примеру, — доказательство того, что любое рациональное число a/b либо вовсе не имеет цифр после запятой, либо эти цифры повторяются (иными словами, в затаившемся делении b раз за разом становится делителем того числа, что уже делилось). Но будет ли верным обратное? Само собой, конечная десятичная дробь должна быть рациональным числом. Например, $0,12358 = 12\,358/100\,000$. А если эта дробь — допустим, $0,123123123\dots$ — периодическая? Должна ли она быть рациональным числом? Ответ — да, и вот вам очень элегантный способ это доказать. А заодно и найти это самое число. Обозначим искомое буквой w (как в английском слове *waltz*, которое означает «проще простого»), то есть

$$w = 0,123123123\dots$$

Умножим обе части на 1000:

$$1000w = 123,123123123\dots$$

вычтем первое уравнение из второго:

$$999w = 123$$

и получим

$$w = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

Возьмем еще одну периодическую десятичную дробь, но на этот раз такую, в которой цикл повторения начинается не с первой после запятой цифры, а чуть позже.

Какой обычной дроби будет соответствовать десятичная $0,83333\dots$? Начнем с

$$x = 0,83333\dots$$

Затем сделаем так:

$$100x = 83,3333\dots$$

и так:

$$10x = 8,3333\dots$$

При вычитании $10x$ из $100x$ все, что стоит после запятой, отсекается, оставляя нас с

$$90x = (83,3333\dots) - (8,3333\dots) = 75$$

Значит,

$$x = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$$

Этот алгоритм позволяет нам с определенной долей уверенности утверждать, что число будет рациональным тогда и только тогда, когда его представление в виде десятичной дроби является либо конечным, либо периодическим. Иррациональной же будет та дробь, которая после запятой имеет бесконечное количество знаков, не образующих при этом цикл, например,

$$v = 0,123456789101112131415\dots$$

Доказательство методом индукции

Вернемся к теоремам о положительных числах. В главе 1 мы выяснили, что

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 + 3 &= 4 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \end{aligned}$$

и предположили, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2 . Позже мы это подтвердили, причем очень красиво и остроумно — с помощью

комбинаторного доказательства, подсчитав двумя разными способами количество клеток на шахматной доске. А почему бы нам не попробовать другой метод — пусть и не такой эффектный, но при этом ничуть не менее эффективный. Предположим, я сказал вам (или вы просто верите в то), что первые 10 нечетных чисел $1 + 3 + \dots + 19$ дают в сумме $10^2 = 100$. Если вы с этим согласны, значит, прибавление следующего нечетного числа — 21 — даст нам уже 121, что равно 11^2 . Другими словами, если мое утверждение правдиво для десяти чисел, оно будет правдивым и для одиннадцатого. В этом и состоит суть математического доказательства по индукции: сначала мы доказываем, что некое утверждение относительно числа n является изначально верным (обычно при $n = 1$), а затем показываем, что, если это верно для $n = k$, оно останется автоматически верным для $n = k + 1$ и так далее — для любого значения n . Доказательство по индукции подобно подъему по лестнице: поднявшись на первую ступеньку, вы имеете все основания и все возможности подняться и на вторую. Ну а старая добрая логика настойчиво подсказывает, что так вы рано или поздно сможете оказаться и на пятой, и на десятой, и на n -ной ступени.

Так, в примере с первыми n нечетными числами наша задача — показать, что при любом значении $n \geq 1$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Мы видим, что сумма самого первого нечетного числа — 1 — и в самом деле составляет 1^2 , то есть для $n = 1$ наше предположение абсолютно верно. Далее нам следует обратить внимание на то, что, если сумма первых k нечетных чисел составляет k^2 , а именно

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

при добавлении следующего нечетного числа $(2k + 1)$ у нас получится

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Другими словами, если сумма первых k нечетных чисел равна k^2 , то сумма первых $k + 1$ нечетных чисел обязательно будет равна $(k + 1)^2$. Значит, теорема, истинная в отношении $n = 1$, будет столь же истинной в отношении любого значения n . $\square$

Индукция — инструмент действенный. Эта книга начиналась с проблемы определения суммы первых n чисел. Разными путями мы пришли к тому, что

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Это предположение, безусловно, правдиво при $n = 1$ (потому что $1 = 1(2)/2$). Предположим, что оно правдиво и для числа k :

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

Тогда, прибавив к этой сумме $(k + 1)$, получим

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) \\ &= (k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \end{aligned}$$

В этой формуле $k + 1$ использовано вместо n . Значит, если она верна для $n = k$ (где под k может скрываться любое положительное число), она будет так же верна и для $n = k + 1$. Равно как и для любого положительного значения n . $\square$

В этой главе (да и в книге вообще) будет еще много примеров использования индуктивного метода. А пока для закрепления материала вот вам песня, написанная «музыкантами от математики» Дэйном Кэмпом и Ларри Лессером на мотив знаменитой «Blowin' in the Wind» Боба Дилана.

Откуда нам знать, что теорема верна
С любым значением n ?
Миллиард вариантов — все не перебрать,
Никак не свести в один.
Но как же иначе найти нам ответ,
Чтоб не свалиться в сплин?
Индукция, друг мой, — вот наш господин.
Индукция — наш господин.
Сначала находим, с чего бы начать,
К чему наш закон применим,
Потом переносим все это на k ,

Потом — и на $k + 1$.
 Ну а дальше легко — ведь эффект домино
 Нисколько не отменим.

Индукция, друг мой, — вот наш господин.
 Индукция — наш господин!

n раз повторю, да хоть $n + 1$:
 Индукция — наш господин!

Отступление

В главе 5 мы рассмотрели несколько задач, основанных на числах последовательности Фибоначчи. Попробуем доказать парочку из них, используя метод индукции.

Теорема: Для $n \geq 1$

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Доказательство (методом индукции): Если $n = 1$, то $F_1 = F_3 - 1$, что соответствует $1 = 2 - 1$, что безусловно истинно. Применим это к $n = k$, то есть

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1$$

Добавив к обеим частям число Фибоначчи F_{k+1} , получим

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \dots + F_k + F_{k+1} &= F_{k+1} + F_{k+2} - 1 \\ &= F_{k+3} - 1 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Столь же простым будет доказательство для суммы квадратов чисел Фибоначчи.

Теорема: Для $n \geq 1$

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Доказательство (методом индукции): Если $n = 1$, то $F_1^2 = F_1 F_2$, что верно потому, что $F_2 = F_1 = 1$. Применив это к $n = k$, получаем

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 = F_k F_{k+1}$$

А теперь добавим к обеим сторонам F_{k+1}^2 :

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1} (F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} + F_{k+2} \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В главе 1 мы выяснили, что сумма кубов равна квадрату суммы, то есть

$$\begin{aligned}1^3 &= 1^2 \\1^3 + 2^3 &= (1 + 2)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 &= (1 + 2 + 3)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= (1 + 2 + 3 + 4)^2\end{aligned}$$

но тогда мы не были готовы это доказать. Просто мы ничего не знали об индукции. При $n \geq 1$ общая закономерность выглядит так:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

А так как нам уже известно, что $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, докажем схожую теорему.

Теорема: Для $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Доказательство (методом индукции): При $n = 1$ предположим, что $1^3 = 1^2(2^2)/4$, что истинно. Следовательно, если схожее предположение будет истинным и при $n = k$, теорема будет доказана:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

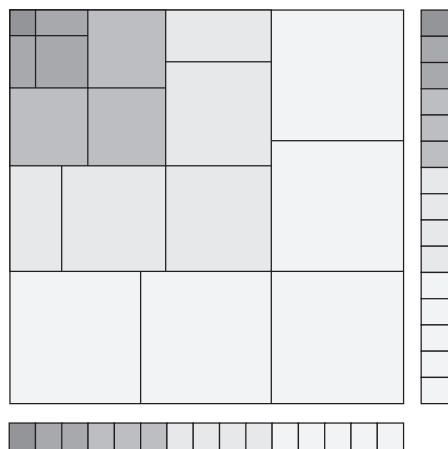
Прибавим к обеим сторонам $(k+1)^3$ и получим

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\&= (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + (k+1) \right) \\&= (k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4(k+1)}{4} \right) \\&= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Отступление

А вот геометрическое доказательство тождества суммы кубов.



Посчитаем площадь фигуры двумя разными способами, а потом сравним результаты. С одной стороны, перед нами явно квадрат, каждая из сторон которого равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, а общая площадь, таким образом, — $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$.

С другой стороны, если начать с верхнего левого угла, а затем двигаться вниз по диагонали, мы пройдем последовательно через один квадрат размером 1 на 1, два размером 2 на 2 (один из которых разбит на два прямоугольника), три квадрата размером 3 на 3, четыре размером 4 на 4 (и еще один «разрезанный» пополам) и, наконец, пять квадратов размером 5 на 5. Следовательно, их общая площадь будет равна

$$(1 \times 1^2) + (2 \times 2^2) + (3 \times 3^2) + (4 \times 4^2) + (5 \times 5^2) = \\ = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

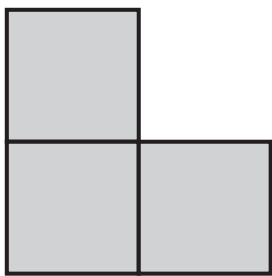
Так как обе полученные нами площади должны быть равны, имеем

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$$

То же можно сделать и с квадратом со сторонами длиной $1 + 2 + \dots + n$, чтобы прийти к

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$





Доказательство методом индукции применяется не только при сложении — оно отлично работает всякий раз, когда некую «большую» проблему (вроде $k + 1$) можно решить посредством «маленькой» (вроде k). Приведу вам свою любимую теорему, вроде той, что мы доказывали в начале главы, когда решали проблему с заполнением шахматной доски костяшками домино.

Однако на этот раз поговорим не о невозможности, а наоборот, о возможности, причем возможности постоянной, а вместо домино используем тримино¹ L-образной формы.

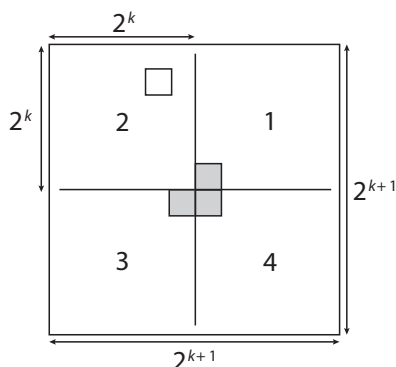
Так как 64 (число клеток) на 3 не делится, одних лишь тримино для всей площади шахматной доски нам явно не хватит. Но стоит взять дополнительно один квадратик размером 1 на 1, и можно смело утверждать, что вне зависимости от его (квадратика) положения на доске для всего остального хватит тримино. Причем утверждение это справедливо не только для обычных шахматных досок 8 на 8, но и для досок размером 2 на 2, 4 на 4, 16 на 16 и т.д.

Теорема: Для любого значения $n \geq 1$ шахматная доска размером 2^n на 2^n может быть выложена костяшками тримино и одним квадратиком размером 1 на 1 при любом положении последнего.

Доказательство (методом индукции): Утверждение является истинным при $n = 1$, потому что для того, чтобы выложить доску размером 2 на 2, достаточно одной костяшки тримино и одного квадратика (при любом его положении). Попробуем доказать то же в отношении $n = k$, то есть доски размером 2^k на 2^k (притом что нашей конечной целью остается 2^{k+1} на 2^{k+1}). Сначала положим квадратик на любое место. Потом разделим доску на 4 равных сектора, как на рисунке на с. 155.

Сектор с квадратиком имеет размер 2^k на 2^k , что значит, что его можно полностью выложить тримино (исходя из того, что наше утверждение истинно при $n = k$). Затем положим одну костяшку тримино в центр доски так, чтобы она находилась одновременно в трех оставшихся секторах, каждый из которых также равен 2^k на 2^k и в каждом из которых у нас теперь есть по одному квадратiku, что делает их абсолютно похожими на первый. Ну а если можно полностью выложить перекрыва-

¹ Тримино — трехклеточный многоугольник, полученный путем объединения трех равных квадратов, соединенных одной из сторон. — Прим. пер.



Покрывание шахматной доски костяшками тримино

ющимися тримино каждую часть (размером 2^k на 2^k) доски, то ими можно выложить и всю доску размером 2^{k+1} на 2^{k+1} . ☺

Последнее тождество имеет много полезных применений. Давайте докажем его по индукции, добавив парочку других способов. Какова сумма первых n чисел, которые получаются при возведении 2 в последовательные степени, начиная с $2^0 = 1$?

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

Приступим к сложению:

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 1 + 2 &= 3 \\
 1 + 2 + 4 &= 7 \\
 1 + 2 + 4 + 8 &= 15 \\
 1 + 2 + 4 + 8 + 16 &= 31
 \end{aligned}$$

Видите закономерность? Каждая сумма на 1 меньше следующего числа, получаемого от возведения 2 в степень. Все это сводится вот к чему.

Теорема: Для $n \geq 1$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Доказательство по индукции: Как мы уже отмечали, утверждение является верным при $n = 1$ (а также 2, 3, 4 и 5). При $n = k$ мы можем утверждать, что

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

Добавив к обеим частям следующее число, получаемое при возведении 2 в степень (то есть 2^k), приходим к

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k-1} + 2^k &= (2^k - 1) + 2^k \\ &= 2 \times 2^k - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned} \quad \text{☺}$$

В 4 и 5 главах мы подтвердили множество закономерностей, находя ответ двумя разными способами. Возможно, комбинаторный подход покажется вам наиболее ценным.

Вопрос: В хоккейной команде n игроков (соответственно, их свитера пронумерованы от 1 до n). Созывается пресс-конференция, на которую должен прийти хотя бы один игрок. Чему равно количество возможных «составов» команды на этой пресс-конференции?

Ответ 1: У каждого игрока два варианта: идти или не идти. Значит, у команды в целом есть 2^n вариантов. Но из этого числа нам нужно вычесть единицу, чтобы исключить вероятность того, что на конференцию не придет никто. В итоге получается $2^n - 1$.

Ответ 2: За основу «состава» положим хоккеиста с наибольшим номером на свитере. «Состав» с единицей в качестве наибольшего числа всего 1, с двойкой их 2 (потому что хоккеист № 2 может пойти либо в одиночестве, либо в компании хоккеиста № 1), с тройкой — 4 (потому что хоккеист № 3 может пойти либо один, либо в компании хоккеиста № 2, который точно так же может позвать, а может и не позвать с собой хоккеиста № 1). Следуя этой логике и дальше, мы увидим, что всего возможных «составов» будет 2^{n-1} , ведь хоккеист № n будет обязан пойти на конференцию, а у каждого из его товарищей (начиная с № 1 и заканчивая № $n - 1$), которых он может позвать с собой, будет по 2 варианта выбора. То есть $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}$.

Оба результата верны, а значит, равны. Таким образом, получается, что $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. ☺

При всех достоинствах комбинаторного метода наиболее простым здесь будет алгебраический — схожий с тем, который мы использовали для преобразования периодической десятичной дроби в простую.

Алгебраическое доказательство:

Пусть $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}$.

Удвоив обе части, получим

$$2S = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

Вычтем первое уравнение из второго, что позволит нам избавиться от всего лишнего и оставить только S из первого и $2S$ из второго, то есть

$$S = 2S - S = 2^n - 1$$

Теорема эта — ключ к двоичной системе, имеющей огромное практическое значение: именно на ее основе проводят числовые операции все компьютеры. Смысл ее заключается в том, чтобы представить любое число как уникальную сумму различных степеней основания числа 2. Например,

$$83 = 64 + 16 + 2 + 1$$

Запишем это двоичным кодом, заменяя каждое возведенное в степень число 2 единицей, а каждое пропущенное значение 2 в степени — нулем. В нашем примере это $83 = (1 \times 64) + (0 \times 32) + (1 \times 16) + (0 \times 8) + (0 \times 4) + (1 \times 2) + (1 \times 1)$. Следовательно, в двоичной системе число 83 выглядит так:

$$83 = (1010011)_2$$

Как удостовериться, что в таком виде можно представить любое положительное число? Предположим, что каждое число от 1 до 99 есть уникальная сумма степеней основания 2. Сможем ли мы представить в столь же уникальном виде число 100? Начнем с наибольшей степени основания 2, которая меньше 100, то есть с 64. (Почему именно 64? Да потому что меньшие значения — 1, 2, 4, 8, 16 и 32 — дадут в сумме лишь 63, а значит, 100 нам никак не получить.) Остается добрать 36 — точно так же, с помощью чисел, которые получаются от возведения 2 в разные степени. Как это сделать? Проще всего — следуя той же логике, что и с сотней, то есть начать с самого большого подходящего нам числа. Так как $36 = 32 + 4$, значит $100 = 64 + 32 + 4$, в двоичной системе — $(1100100)_2$. Обобщив это (с помощью так называемого убедительного индуктивного подтверждения), приходим к выводу, что любое положительное число имеет уникальное двоичное представление.

Простые числа

Как мы только что убедились, любое положительное целое число может быть представлено в виде уникальной суммы различных степеней числа 2. В принципе, можно говорить, что числа, получаемые при возведении 2

в последовательные степени — это строительные блоки, из которых складываются положительные целые числа.

Примерно то же справедливо и отношении простых чисел и умножения: любое положительное целое число можно представить в виде произведения простых чисел (с той лишь разницей, что простые числа изучены куда меньше, чем степени основания 2, и знаем о них мы далеко еще не всё).

Простым числом называется целая положительная величина, имеющая только два делителя: 1 и само себя. Вот некоторые из них:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53...

Число 1 простым не является: у него всего один делитель (хотя, конечно, не только поэтому — есть и более веские причины, о которых мы поговорим чуть позже). Обратите также внимание: в этом ряду всего лишь одно четное — 2, что явно (а можно сказать и — выгодно) отличает ее от остальных простых чисел.

Положительное целое число, для которого имеются 3 и более делителя, называется составным, ведь его можно разложить на более простые. Вот они:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30...

Так, у четверки всего три делителя (1, 2 и 4), у шестерки — четыре (1, 2, 3 и 6) и так далее. Обратите внимание, что числа 1 нет и здесь. Математики называют его единицей, числом с уникальным свойством — быть делителем абсолютно любого целого числа.

Каждое составное число может быть представлено в виде произведения простых чисел. Возьмем для примера 120. Можно начать с $120 = 6 \times 20$. Но и 6, и 20 — тоже составные. Разложим их сразу на простые: $6 = 2 \times 3$, $20 = 2 \times 2 \times 5$. Следовательно,

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 3^1 5^1$$

Примечательно то, что, на какие бы составляющие мы ни разложили начальное число, результат получится абсолютно тот же. Причина тому — теорема о единственности разложения, основная теорема арифметики, согласно которой каждое положительное целое число больше 1 раскладывается на произведение простых чисел единственным способом, включая порядок следования сомножителей.

Здесь-то, кстати, и кроется настоящая причина того, что число 1 не может быть названо простым: будучи простым, оно бы делало эту теорему несостоятельной. Ведь тогда 12, например, можно было бы представить не только как $2 \times 2 \times 3$, но и как $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 3$, и разложение на простые числа не было бы уникальным.

Однажды разложив число, вы узнаете всю его подноготную. В детстве моим любимым числом была девятка, но с возрастом я узнавал и другие, куда более сложные (вроде $\pi = 3,14159\dots$, $\phi = 1,618\dots$, $e = 2,71828\dots$ или число i , которое не может быть представлено в виде десятичной дроби, о чем мы подробно поговорим в главе 10) и влюблялся в них без памяти. Какое-то время моим фаворитом было 2520 — наименьшее из чисел, которые делятся на все числа от 1 до 10. Вот как оно выглядит при разложении на простые множители:

$$2520 = 2^3 3^2 5^1 7^1$$

Зная положительные множители, вы можете узнать и положительные делители — вернее, их количество. Так, любой из делителей 2520 должен сводиться к форме $2^a 3^b 5^c 7^d$, где a может быть равно 0, 1, 2 или 3 (четыре варианта), b — 0, 1 или 2 (три варианта), а c — 0 или 1 (два варианта). Следовательно, согласно правилу произведения, 2520 имеет $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ положительных делителей.

Отступление

Из основной теоремы арифметики вытекает любопытное следствие, касающееся простых чисел (вы можете найти его доказательство практически в любом учебнике, причем на первых страницах): если простое число p является делителем произведения двух или более чисел, оно также должно являться делителем одного из них. Например, поскольку

$$999\,999 = 333 \times 3003$$

кратно 11, то 11 должно быть делителем либо 333, либо 3003 (на деле — только последнего сомножителя: $3003 = 11 \times 273$). В случае составных чисел это правило работает не всегда: так, $60 = 6 \times 10$ делится на 4, несмотря на то что 4 не является делителем ни 6, ни 10.

Чтобы показать уникальность каждого разложения на множители, пойдем от обратного — предположим, что одно и то же число можно представить несколькими отличными друг от друга произведениями. Допустим, N — наи-

меньшее из чисел, которые можно разложить на простые сомножители двумя разными способами. Скажем,

$$p_1 p_2 \dots p_r = N = q_1 q_2 \dots q_s$$

где все значения p_i и q_j суть простые величины. Так как p_1 очевидно кратно N , оно должно быть делителем одного из значений q_j . Облегчим себе задачу и предположим, что это q_1 . Тогда, поскольку q_1 — величина простая, у нас должно получиться $q_1 = p_1$. Разделив все части уравнения на p_1 , приходим к

$$p_2 \dots p_r = \frac{N}{p_1} = q_2 \dots q_s$$

что означает, что число $\frac{N}{p_1}$ может быть разложено на множители двумя разными способами, а это противоречит нашему условию, что N есть наименьшее из таких чисел. $\square$

Отступление

Кстати, существуют такие системы счисления, где далеко не каждое число раскладывается на множители *единственным* способом. На Марсе, например, у каждого по две головы, поэтому марсиане понятия не имеют, что такое нечетные числа, пользуясь исключительно четными:

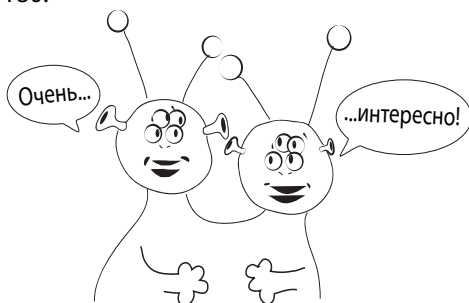
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30...

В марсианской системе числа вроде 6 или 10 будут считаться простыми, потому что их нельзя разложить на меньшие четные числа. А отличить простые числа от составных (которые, кстати, чередуются в ряду с завидной регулярностью) не составляет никакого труда: если число делится на 4 без остатка — оно составное (потому что $4k = 2 \times 2k$), если не делится — простое (6, 10, 14, 18 и т.д.), ведь его нельзя представить в виде двух меньших четных чисел.

Но давайте посмотрим на число 180:

$$6 \times 30 = 180 = 10 \times 18$$

Очевидно, что оно может быть разложено на множители двумя разными способами, а значит, ни о какой уникальности на Марсе и слухом не слыхивали.



В интервале от 1 до 100 насчитывается 25 простых чисел, от 101 до 200 — 21, от 201 до 300 — 16. И тенденция эта сохраняется: чем дальше мы продвигаемся, тем реже встречаются простые величины (без всякой, впрочем, системы: в промежутке от 301 до 400 их снова 16, а в промежутке от 401 до 500 — 17) — а от 1 000 000 до 1 000 100 мы их найдем всего лишь 6. Объяснение этому вполне очевидно: чем больше число, тем больше потенциальных делителей у него будет.

Давайте попробуем доказать, что есть такие сотни чисел, в которых простых чисел не будет вовсе (и не только сотни — тысячи, миллионы, сколько угодно). Для этого будет достаточно подобрать 99 последовательно идущих друг за другом составных чисел:

$$100! + 2, 100! + 3, 100! + 4, \dots, 100! + 100$$

Так как $100! = 100 \times 99 \times 98 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$, его можно разделить на все числа от 2 до 100. Возьмем теперь $100! + 53$. Так как 53 — делитель $100!$, оно должно являться делителем и $100! + 53$. Та же логика подсказывает, что при $2 \leq k \leq 100$ $100! + k$ должно быть кратным k , а следовательно, составным.

Отступление

Обратите внимание, что мы пропустили $100! + 1$. Впрочем, ничто не мешает нам взять и его. На этот счет существует очень интересная теорема — *теорема Вильсона*, которая утверждает, что число n является простым тогда и только тогда, когда $(n - 1)! + 1$ делится на n без остатка. Применим ее к нескольким малым величинам: $1! + 1 = 2$, что кратно 2; $2! + 1 = 3$, что кратно 3; $3! + 1 = 7$, что не кратно 4; $4! + 1 = 25$, что кратно 5; $5! + 1 = 121$, что не кратно 6; $6! + 1 = 721$, что кратно 7; и т.д. Следовательно, поскольку число 101 — простое, согласно теореме Вильсона, $100! + 1$ является кратным 101 и потому составным. Значит, промежуток от $100!$ до $100! + 100$ содержит в себе непрерывную последовательность, состоящую из 101 составного числа.

Итак, чем больше числа, тем меньше среди них попадает простых. Вполне логично было бы предположить, что рано или поздно они перестают попадаться вовсе. Но только не в этом случае, как больше 2000 лет назад предупредил нас Евклид. Дерзнем не поверить великому греку на слово и докажем это сами.

Теорема: Количество простых чисел бесконечно.

Доказательство: Предположим обратное — что количество простых чисел конечно. Значит, существует некое наибольшее простое число. Обозначим его литерой P . Возьмем число $P! + 1$. Так как $P!$ делится на все числа в промежутке от 2 до P , ни одно из них нельзя разделить на $P! + 1$ без остатка. Следовательно, простым множителем $P! + 1$ будет больше P , что противоречит нашему условию, что P есть наибольшее простое число. $\square$

И хотя мы никогда не найдем наибольшее простое число, математики и специалисты по вычислительной технике не оставляют попыток зайти в этих поисках все дальше и дальше в бесконечность числового ряда. Самым большим известным науке простым числом на настоящий момент является число, состоящее из 17 425 170 цифр. Чтобы его записать, потребуется примерно сотня томов — каждый объемом не меньше книги, которую вы сейчас держите в руках. Но можно уместить и в одну строку —

$$2^{57\,885\,161} - 1$$

А все благодаря существованию удивительно действенных методов, которые позволяют легко определить, являются ли числа вида $2n - 1$ или $2n + 1$ простыми.

Отступление

Великий Пьер де Ферма доказал, что если p — это нечетное простое число, то число $2^{p-1} - 1$ должно быть кратно p . Проверим это на примере нескольких первых нечетных простых чисел. Для 3, 5, 7 и 11 мы видим, что $2^2 - 1 = 3$, что кратно 3; $2^4 - 1 = 15$, что кратно 5; $2^6 - 1 = 63$, что кратно 7; $2^{10} - 1 = 1023$, что кратно 11. Что касается составных чисел, совершенно ясно, что при четном значении n $2^{n-1} - 1$ будет нечетным, а потому кратным n быть никак не может. Составные же нечетные, вроде 9, 15 или 21, дают нам $2^8 - 1 = 255$, что не кратно 9; $2^{14} - 1 = 16\,383$, что не кратно 15; $2^{20} - 1 = 1\,048\,575$, что не кратно 21 (да хотя бы и 3).

Следствием теоремы Ферма является то, что, если при наибольшем значении числа N $2^{N-1} - 1$ не кратно N , мы можем со стопроцентной уверенностью утверждать, что N не может быть простым, при этом нам даже *необязательно знать его множители!* Тем не менее это не совсем так: существуют такие составные числа, которые ведут себя абсолютно как простые (и по этой причине

называются *псевдопростыми*). Самый простой пример — $341 = 11 \times 31$: $2^{340} - 1$ вполне себе кратно 341. И хотя встречаются такие числа крайне редко, их количество все же бесконечно, а для их определения придуманы специальные методы.

Простые числа активно используются в повседневной жизни — в частности, в вычислительной технике при создании алгоритмов кодирования (на них, например, построена система шифрования с открытым ключом, которая используется при совершении финансовых операций онлайн). В большинстве своем они построены на методах быстрого определения того, является ли то или иное число простым. Жаль только, что нет настолько же эффективных способов быстрого разложения на множители по-настоящему огромных чисел. Так, если я перемножу два случайных тысячезначных числа и скажу вам двухтысячезначный ответ, вы никогда в жизни не сможете найти составляющие его простые величины — ни сами, ни с помощью компьютера (конечно, если этот компьютер не квантовый — а такие собирать пока еще попросту не научились). Зато представляете, насколько надежны коды (вроде алгоритма RSA¹), в основе которых лежит эта неспособность?

Интерес человечества к простым числам стар, как само человечество. Древние греки называли число, равное сумме его делителей (естественно, за исключением самого этого числа), *совершенным*. Среди них, например, число 6, сумма делителей которого — 1, 2 и 3 — равна 6. Или 28, получающееся из сложения 1, 2, 4, 7 и 14. Дальше следуют 496 и 8128. Интересно, складываются они в какую-нибудь закономерность? Попробуем разложить их на множители:

$$\begin{aligned}6 &= 2 \times 3 \\28 &= 4 \times 7 \\496 &= 16 \times 31 \\8128 &= 64 \times 127\end{aligned}$$

Видите закономерность? Первое число — это степень основания 2. Второе — на единицу меньше, чем удвоенная степень основания 2; и при

¹ RSA (от фамилий авторов Rivest, Shamir и Adleman, сотрудников Массачусетского технологического института, MIT) — криптографический алгоритм, основанный на сложности факторизации больших чисел. Впервые описан в 1977 году. — *Прим. ред.*

этом оно простое (поэтому здесь и нет 8×15 или, скажем, 32×63 : ведь 15 и 63 простыми числами не являются). Закономерность эту можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема: Если число $2^n - 1$ является простым, число $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ будет совершенным.

Отступление

Доказательство: Допустим, что число $p = 2^n - 1$ — простое. Докажем теперь, что число $2^{n-1}p$ — совершенное. Какие величины являются его собственными делителями? Сначала — делители, которые не используют множитель p : 1, 2, 4, 8, ..., 2^{n-1} . Все они сводятся к сумме $2^n - 1 = p$. Потом — все остальные (за исключением самого $2^{n-1}p$), которые включают в себя множитель p и которые дают в сумме $p(1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2}) = p(2^{n-1} - 1)$. Следовательно, общая сумма всех собственных делителей составит

$$p + p(2^{n-1} - 1) = p(1 + (2^{n-1} - 1)) = 2^{n-1}p$$

что и требовалось доказать.

Великий Леонард Эйлер доказал, что каждое четное совершенное число может быть сведено к этой форме. Именно это представление помогло определить 48 совершенных четных чисел. Существуют ли в принципе среди совершенных чисел нечетные, не знает никто. Доказано, что *если* и существуют, то наименьшее из них состоит из более чем трех сотен цифр. *Несуществование* же их пока что так и не доказано.

С простыми числами связано множество нерешенных математических проблем. Одну из них я уже упоминал: неизвестно, бесконечно ли количество простых чисел Фибоначчи (если помните, мы выяснили, что во всей последовательности всего лишь два полных квадрата чисел — 1 и 144 — и столько же кубов — 1 и 8).

Еще одна проблема — известная как *гипотеза Гольдбаха* — основана на предположении, что любое четное число больше 2 есть сумма двух простых чисел. Доказать этого никто не смог, однако известно, что, если контрпример и существует, в нем должно быть никак не меньше 19 цифр. (Совсем недавно, в 2013 году, в решении очень похожей проблемы произошел прорыв: перуанец Харальд Хельфготт доказал, что любое не-

четное число больше 7 есть сумма как максимум трех нечетных простых чисел.)

А еще есть простые числа-близнецы (парные простые числа) — простые числа, разность между которыми составляет ровно 2: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31 и так далее. Единственные «тройняшки» в этом ряду — это 3, 5 и 7. И хотя было доказано (в качестве частного случая теоремы Густава Дирихле¹, что количество простых чисел, заканчивающихся на 1 (а также на 3, 7 или 9), бесконечно, вопрос о том, бесконечно ли количество простых чисел-близнецов, остается открытым.

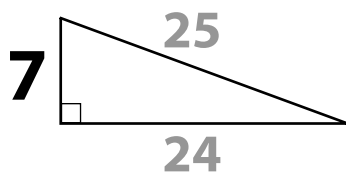
Закончить эту главу я бы хотел доказательством, которое может показаться вам притянутым за уши (да что уж греха таить, именно за уши оно и притянута). Тем не менее смею надеяться, что оно вас все-таки удовлетворит.

Утверждение: Все положительные целые величины интересны.

Доказательство: Вы, без сомнений, согласитесь, что первые положительные числа не оставляют вас равнодушными. Например, 1 — это самое первое положительное число, 2 — первое четное положительное число, 3 — первое нечетное простое число... Предположим обратное — что совсем не все числа так уж интересны. Тогда есть некая самая первая навевающая скуку величина. Назовем ее N . Но разве самого этого факта недостаточно, чтобы сделать N отличной от всех остальных величин и хотя бы уже поэтому интересной? И разве не доказывает это, что «скупых» чисел попросту не бывает?

¹ Густав Дирихле (1805–1859) — немецкий математик, внесший большой вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел.

ГЛАВА НОМЕР СЕМЬ

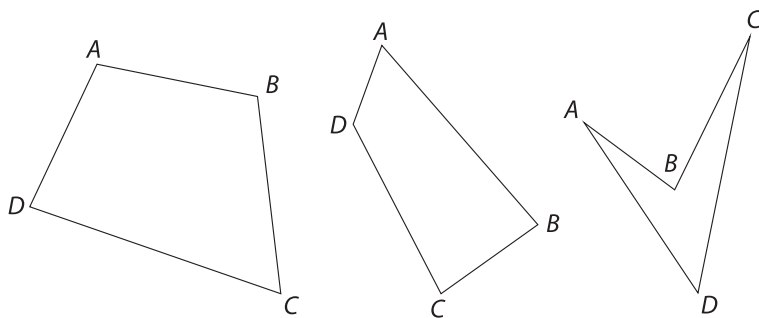


Магия геометрии

Неожиданные грани геометрии

Начнем, пожалуй, с одной геометрической задачки, которая вполне сойдет за фокус. Возьмите листок бумаги и сделайте следующее.

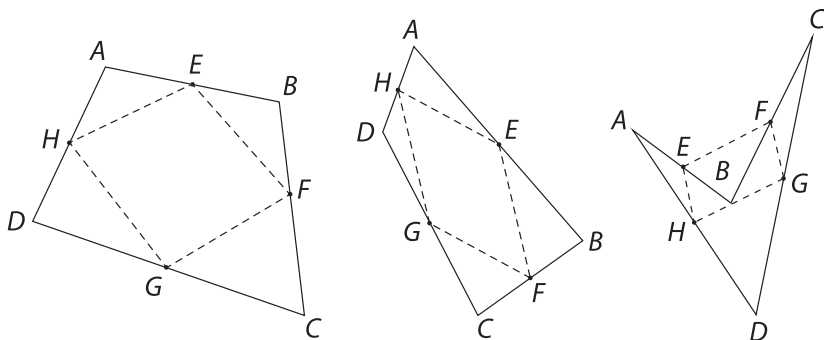
Шаг 1. Начертите фигуру из четырех не пересекающихся друг с другом линий. Должен получиться четырехугольник. Подпишите углы по часовой стрелке литерами A , B , C и D . Вот несколько возможных примеров:



Три случайных четырехугольника

Шаг 2. Отметьте центральные точки сторон AB , BC , CD и DA буквами E , F , G и H соответственно.

Шаг 3. Соедините эти точки пунктирными линиями так, чтобы получился еще один прямоугольник, $EFGH$, вот так:



При соединении центральных точек сторон четырехугольника всегда получается параллелограмм

Хотите — верьте, хотите — нет, но он всегда будет параллелограммом. Другими словами, линия $\overline{EF}$ будет параллельна линии $\overline{GH}$, а линия $\overline{FG}$ — линии $\overline{HE}$ (при этом сторона $\overline{EF}$ будет той же длины, что и сторона $\overline{GH}$, а сторона $\overline{FG}$ — той же длины, что и сторона $\overline{HE}$). На рисунках выше это отлично заметно, но мне очень хочется, чтобы вы сами все это начертили.

Геометрия скрывает в себе множество подобных сюрпризов. Несложные предположения, незамысловатые логические ходы — и вот вам удивительный результат.

Хотите проверить свою интуицию? Давайте проведем небольшую, но очень увлекательную викторину: одни ответы покажутся вам вполне очевидными, а другие — поразят, даже если вы прекрасно разбираетесь в геометрии. Начнем?

Вопрос 1. Некий фермер решил обнести изгородью прямоугольную территорию с периметром 16 метров. Чему должны быть равны стороны этого участка, чтобы его площадь была максимальной?

А. Он должен быть квадратным (то есть его длина и ширина должны быть равны 4 м).

Б. Соотношение сторон участка должно соответствовать принципу золотого сечения и составлять 1,618 (то есть примерно 5,25 на 3,25 м).

В. Длина участка должна быть максимальной (8 м).

Г. Во всех трех вышеперечисленных вариантах площадь будет одинаковой.

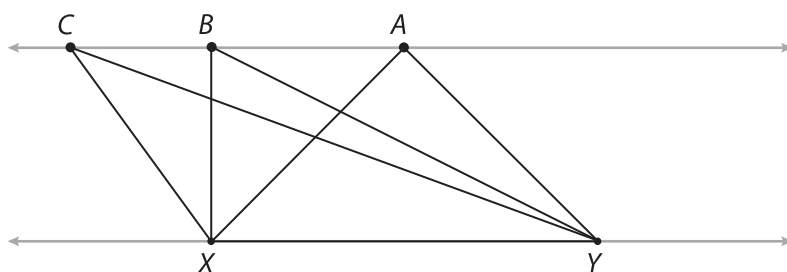
Вопрос 2. Есть две параллельные прямые (см. рисунок ниже). На нижней лежат точки X и Y . Наша задача — поместить на верхней прямой третью точку так, чтобы получившийся между ней, X и Y треугольник имел наименьший периметр. Какую точку следует выбрать?

А. Точку A (расположенную точно посередине между X и Y , чтобы прямоугольник получился равнобедренным).

Б. Точку B (расположенную точно над X или над Y , чтобы треугольник получился прямоугольным).

В. Точку C (расположенную как можно дальше от X и Y).

Г. Любую, потому что все треугольники будут иметь одинаковый периметр.



Какой из треугольников, образованный двумя точками X , Y и одной из A , B или C , имеет наименьшую площадь? А какой наибольшую?

Вопрос 3. Возьмем те же прямые и те же точки X и Y . Теперь попытаемся понять, где на верхней прямой должна располагаться точка P , чтобы получился треугольник с наибольшей площадью. Итак, точка P должна находиться:

А. В точке A .

Б. В точке B .

В. Как можно дальше от X и Y .

Г. Где угодно, потому что все треугольники будут иметь равную площадь.

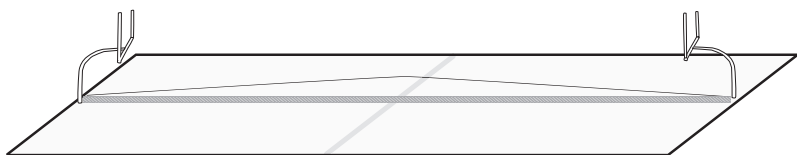
Вопрос 4. В американском футболе расстояние между воротами составляет примерно 110 м. Натянем между ними веревку той же длины. Затем добавим к ней еще 30 см. Насколько высоко можно будет поднять веревку в центре поля?

А. Чуть больше, чем на пару сантиметров.

Б. Достаточно высоко, чтобы под ней можно было проползти.

В. Достаточно высоко, чтобы под ней можно было пройти в полный рост.

Г. Достаточно высоко, чтобы под ней мог проехать грузовик.



Между воротами на расстоянии 110 м натянута веревка длиной 110 м и 30 см.
Насколько высоко получится поднять ее над центром поля?

Давайте теперь найдем правильные ответы на все эти вопросы. Первые два, по-моему, вполне очевидны. А вот последние... Впрочем, мы обязательно разберем все в подробностях.

Ответ 1. Вариант (А): каким бы ни был изначальный периметр, прямоугольник всегда будет иметь наибольшую площадь только при равных размерах его сторон. Следовательно, наилучшим выбором будет квадрат.

Ответ 2. Вариант (А): наименьший периметр будет иметь треугольник, образованный соединением точек X и Y с точкой, расположенной точно посередине между ними (то есть А).

Ответ 3. Вариант (Г): все треугольники будут иметь одинаковую площадь.

Ответ 4. Вариант (Г): в самом центре поля веревку получится поднять вверх чуть больше, чем на 4 м — вполне достаточно для грузовика.

Для решения первой задачи будет достаточно несложных алгебраических вычислений. Возьмем прямоугольник, в котором длина верхней и нижней сторон равна b , левой и правой — h . Его *периметр*, таким образом, будет равен $2b + 2h$ — сумме длин всех четырех сторон. Его *площадь* (то есть, по сути, площадь того, что можно в этот прямоугольник поместить) будет равна произведению b и h . (О том, что же такое площадь, мы поговорим чуть позже.) Так как периметр у нас составляет 16 м, имеем $2b + 2h = 16$ или

$$b + h = 8$$

А так как $h = 8 - b$, площадь bh (которая по изначальному условию должна быть как можно больше) равна

$$b(8 - b) = 8b - b^2$$

Какое значение b даст нам максимальный результат? Чуть позже, в главе 11, мы рассмотрим очень простой способ подобных вычислений. Сейчас же удовлетворимся методом разбития квадрата, который уже встречался нам в главе 2. Посмотрите:

$$8b - b^2 = 16 - (b^2 - 8b + 16) = 16 - (b - 4)^2$$

есть площадь нашего прямоугольника. При $b = 4$ она составит $16 - 0^2 = 16$; при $b \neq 4$ —

$$16 - (\text{число, не равное } 0)^2$$

Так как мы вычитаем из 16 некую положительную величину, разность в любом случае будет меньше 16. Следовательно, площадь нашего прямоугольника будет максимальной при $b = 4$ и $h = 8 - b = 4$. И здесь нам открывается совершенно удивительно свойство геометрии: изначальный периметр — 16 м — вдруг оказывается не имеющим значения и отношения к задаче. Каким бы ни был этот показатель, оптимальной формой прямоугольника с периметром p будет квадрат с длиной сторон $p/4$.

Чтобы ответить на остальные вопросы, нам нужно разобраться в тех из них, которые на первый взгляд кажутся парадоксальными, а заодно и освежить в памяти школьные основы геометрии: почему сумма углов треугольника равна 180° ? О чем нам рассказывает теорема Пифагора? Как определить, равна ли форма двух треугольников (и зачем вообще это нужно)?

Классика геометрии

Геометрия уходит корнями далеко вглубь веков — во времена Древней Греции. Оттуда же происходит и само название этой чудесной во всех отношениях науки: «гео» на древнегреческом означает «земля», «метрия» — «измерение». Оно говорит само за себя, давая нам ясное представление о том, зачем вообще придумали геометрию — чтобы измерять земельные участки, на которых планировалось вести строительство или другие работы. А еще ее использовали в астрономии. Но древние греки не были бы древними греками, если бы не отшлифовывали любое свое знание до абсолютно идеальных форм, превращая его в искусство — такое, каким не устают (и никогда не устанут) восхищаться их потомки, сколько бы тысячелетий ни прошло. И по сей день главной книгой гео-

метрии остаются написанные в 300 году до нашей эры «Начала» Евклида — сокровищница всех наших знаний о геометрии, лучший на все времена учебник. В «Началах» разъясняется, что такое математическая строгость, дедуктивный и аксиоматический методы, доказательство... — Все то, на чем до сих пор строится любая работа любого математика.

Евклид выдвинул пять *аксиом* (также называемых *постулатами*) — положений, интуитивно понятных каждому и потому не требующих доказательств. Именно они суть основа всего, из чего состоит геометрия — и все теоремы так или иначе базируются именно на них. То, что перечислено чуть ниже, конечно же, не являются цитатами из «Начал», но наши формулировки никоим образом не противоречат их сути. Итак:

Аксиома 1. Любые две точки пространства могут быть соединены только одним отрезком прямой.

Аксиома 2. Отрезок этот можно продолжать в обоих направлениях до бесконечности — так получают прямые.

Аксиома 3. Для любых двух точек O и P можно очертить только одну окружность с центром в точке O и точкой P , лежащей на окружности.

Аксиома 4. Все прямые углы равны 90° .

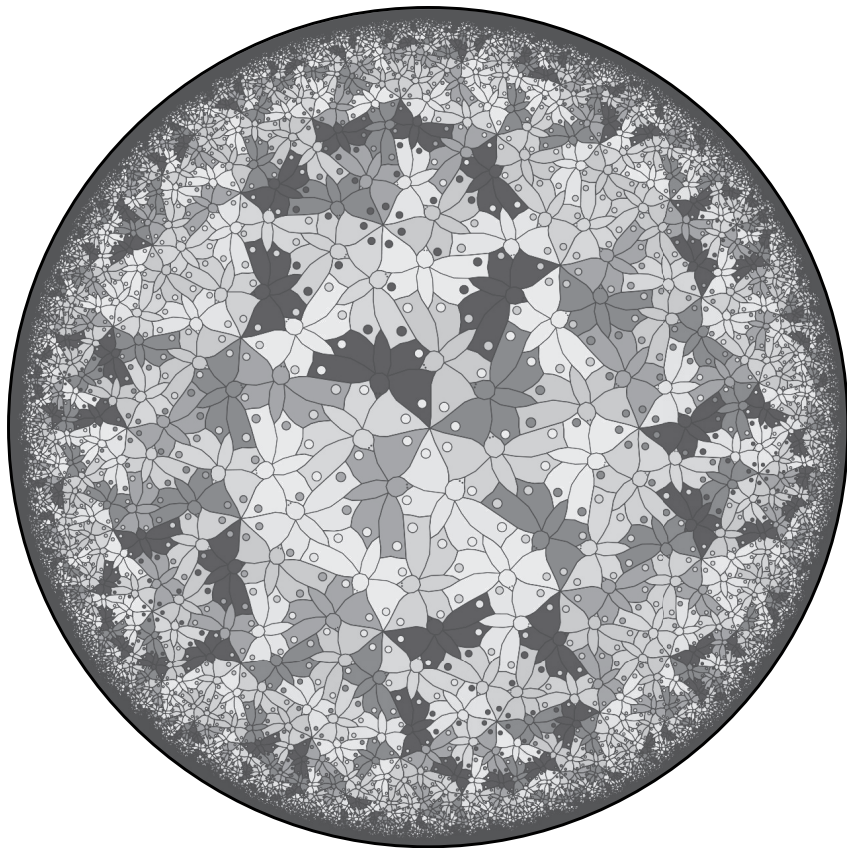
Аксиома 5. Если точка P не лежит на прямой l , можно провести через точку P одну и только одну прямую, которая будет параллельна прямой l .

Отступление

Думаю, тут важно оговориться, что здесь мы ведем речь о так называемой *плоской геометрии* (или *планиметрии*) — особом разделе *евклидовой геометрии*, в основе которой лежат построения на двумерной (скажем, x и y) *плоскости*. Любое, даже самое незначительное изменение одной из аксиом приведет нас в некую совершенно иную (при этом весьма интересную и не обязательно бесполезную) математическую систему. Есть, например, сферическая геометрия, которая изучает точки и фигуры не на плоскости, а на поверхности сферы: «прямые» в ней превращаются в круги с максимальной длиной окружностей (они называются *большими кругами*), что приводит к обязательному их пересечению в той или иной точке, а значит, и к отрицанию существования параллельности.

А если в пятой аксиоме предположить, что через точку P можно провести не одну, а две прямых, параллельных прямой l , мы придем к системе, которая

называется *геометрией Лобачевского*, и ко всему многообразию ее удивительных теорем. Многие художники — такие, скажем, как Мауриц Эшер¹ или Дуглас Данхэм² — используют ее для создания завораживающих графических композиций; последний, к слову сказать, любезно позволил мне показать вам одно из своих творений:

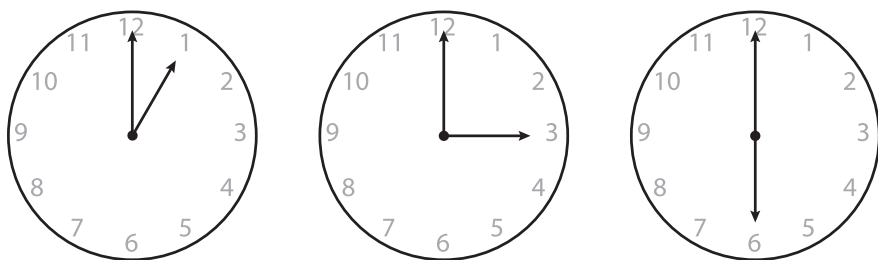


¹ Мауриц Корнелис Эшер (1898–1972) — голландский художник-график, известный концептуальными литографиями и гравюрами на дереве и металле, в которых исследует бесконечность и симметрию, а также особенности восприятия сложных трехмерных объектов. — *Прим. пер.*

² Дуглас Данхэм (р. 1938) — американский математик, информатик и художник, стремящийся реализовать в графическом и трехмерном искусстве основные положения геометрии Лобачевского. — *Прим. пер.*

Конечно же, пятью аксиомами, сформулированными Евклидом, геометрия не ограничивается, поэтому не удивляйтесь, если на этих страницах вы найдете и другие. Ну а поскольку эта книга — отнюдь не учебник, мы, пожалуй, не будем тратить время на обстоятельное доказательство прописных истин и объяснение элементарных понятий, тем более с нуля. Я очень высокого мнения о своем читателе и считаю аксиомой, что он помнит со школы (или просто знает), что такое точка, прямая, угол, круг, периметр, площадь и так далее. К тому же я по мере сил буду избегать профессиональной лексики и всяких специфических и понятных, пожалуй, только математику, обозначений — ведь в центре нашего внимания не наука как таковая, но ее магия, способная затронуть струны любой, даже самой далекой от геометрии, души.

Я абсолютно уверен, например, что вы уже знаете (ну или готовы принять на веру), что градусов в любом круге ровно 360 и что обозначается это как 360° . А любой находящийся в этом круге угол, таким образом, будет равен значению от 0° до 360° . Представьте себе стрелки часов, сходящиеся в самом центре циферблата. В час дня или ночи стрелки располагаются так, будто «отрезают» от круга одну двенадцатую — значит, угол между ними равен 30° . В три часа стрелки «отрежут» уже четверть круга

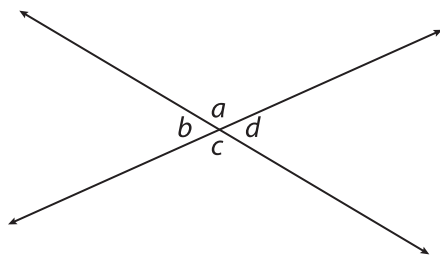


Углы в 30° , 90° и 180°

и образуют угол 90° (такой угол называется *прямым*, а прямые или лучи, которые его образуют, — *перпендикулярными друг другу*). Прямая же линия, которую образуют стрелки ровно в шесть часов, образует угол 180° .

А вот одно очень полезное и часто встречаемое на практике обозначение: отрезок прямой, лежащий между точками A и B , выглядит в записи как $\overline{AB}$. Если же вам нужно оперировать его длиной, черточку сверху ставить не нужно: длина отрезка $\overline{AB}$ составляет AB .

Две прямые при пересечении всегда образуют четыре угла. Взгляните на рисунок — что вы видите? Видите, что два прилежащих (смежных) угла (a и b , например) образуют линию? Такие углы называются *дополнительными* (потому что дополняют друг друга до 180° , которые нам дает линия).



Когда две прямые пересекаются, получается четыре угла. Каждая пара смежных углов при этом дает в сумме 180° , а несмежные противоположные (вертикальные) углы будут равны между собой — здесь это пары a и c и b и d

Это справедливо в отношении всех четырех пар смежных углов, то есть

$$a + b = 180^\circ$$

$$b + c = 180^\circ$$

$$c + d = 180^\circ$$

$$d + a = 180^\circ$$

Если вычесть второе уравнение из первого, получится, что $a - c = 0$. Следовательно,

$$a = c$$

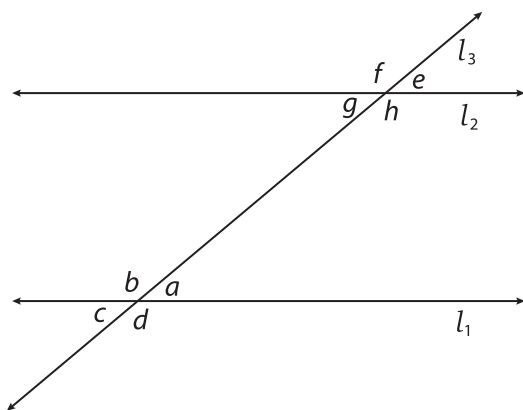
А вычитание третьего уравнения из второго приведет нас к

$$b = d$$

Так у нас получаются еще две пары углов — a и c и b и d , которые называются *вертикальными*. Ну а **теореме вертикальных углов**, утверждающую их равенство, мы с вами только что доказали.

Осторожно, двери закрываются! Следующая остановка — доказательство того, что сумма углов абсолютно любого треугольника равна 180° . Но сначала — несколько фактов о параллельных прямых. Две прямые считаются параллельными, если они никогда — ни на видимом отрезке,

ни в бесконечности — не пересекаются. Посмотрите на рисунок: вот две параллельные прямые (l_1 и l_2), а вот — третья прямая (l_3), непараллельная им и, следовательно, пересекающая их в точках P и Q соответственно. Приглядитесь чуть внимательнее: l_3 «разрезает» l_1 и l_2 абсолютно одинаково, под одним и тем же углом, то есть $a = e$. Углы a и e в таком случае являются *соответственными* (равно как b и f , c и g , d и h). Равенство их настолько очевидно, что вполне может считаться аксиоматичным, хотя и не может быть доказано ни одним из пяти евклидовых постулатов. Значит, теперь у нас есть новая аксиома.



Соответственные углы равны. Здесь $a = e$, $b = f$, $c = g$ и $d = h$

Аксиома соответственных углов: Соответственные углы всегда равны.

В соединении с теоремой вертикальных углов аксиома говорит нам, что, согласно рисунку выше,

$$a = c = g = e$$

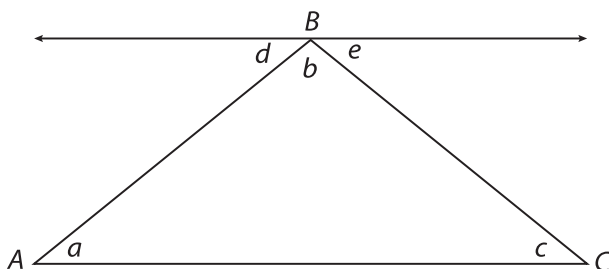
$$b = d = h = f$$

(Книги по математике в большинстве своем предлагают специальные названия для каждой из возможных пар: углы a и g , например, образующие фигуру, которая напоминает латинскую букву Z , называются *внутренними накрест лежащими*.) Эти равенства говорят нам, что любой из этих 8 углов равен своему парному вертикальному, своему парному соответственному и своему парному внутреннему накрест лежащему. Понимание этого нужно нам, чтобы доказать одну из основных теорем геометрии.

Теорема: Сумма углов любого треугольника равна 180° .

Доказательство: Возьмем треугольник ABC (см. рисунок) с углами a , b и c . Через его вершину (то есть точку B) проведем прямую, параллельную его же основанию (то есть прямой, проходящей через точки A и C).

Образовавшиеся при этом углы d и e вместе с углом b образуют линию, поэтому $d + b + e = 180^\circ$. Обратите внимание, что углы a и d и углы c и e при этом являются внутренними накрест лежащими, следовательно, $d = a$, а $e = c$, что приводит нас к $a + b + c = 180^\circ$, что и требовалось доказать.



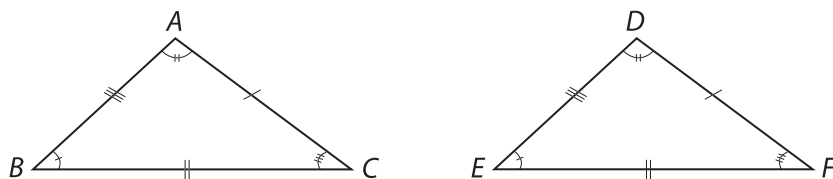
Почему $a + b + c = 180^\circ$?

Отступление

Теорема о сумме углов треугольника, равной 180° , крайне важна для понимания сути планиметрии. В других же геометрических системах она не работает совершенно: для примера можно спроецировать тот же треугольник на сферу-«глобус», причем так, чтобы он начинался на «северном полюсе», спускался к «экватору» вдоль любой из «линий долготы», там заворачивал направо в первый раз, а после прохождения четверти «планеты» — и во второй, возвращаясь к «северному полюсу». Получившийся таким образом треугольник будет иметь три прямых угла, дающих вместе не 180 , а целых 270° . В сферической геометрии сумма углов треугольника есть величина непостоянная: она все больше отдалается от значения в 180° при малейшем увеличении его площади и находится к ней в прямой пропорциональной зависимости.

На занятиях по геометрии в школе или университете очень много внимания уделяется доказательству *конгруэнтности* объектов: это значит, что, перемещая, вращая или отображая зеркально одну фигуру, мы можем

получить совпадающую с ней другую. Например, изображенные на рисунке треугольники ABC и DEF являются конгруэнтными, поскольку при смещении влево треугольник DEF полностью совпадет с треугольником ABC . На рисунке это показано с помощью специальных меток: если соответствующие стороны или углы двух фигур маркированы одинаковым количеством черточек, они равны.



Конгруэнтные треугольники

Для этого даже есть специальный математический символ — $\cong$; наша запись, таким образом, будет выглядеть как $ABC \cong DEF$, что значит, что стороны обоих треугольников и их углы идеально друг с другом совпадают: стороны AB , BC и CA равны сторонам DE , EF и FD (соответственно), а углы по вершинам A , B и C равны углам по вершинам D , E и F (также соответственно). Именно это мы и имеем в виду, когда отмечаем одинаковым количеством черточек совпадающие стороны и углы этих двух по сути разных (хоть и равных) треугольников.

Остальное — дело техники. Если вы, например, имеете дело с двумя равнобедренными треугольниками и знаете, что углы двух из трех пар равны (допустим, $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle E$), вы можете смело утверждать, что равными будут углы и третьей пары — а значит, треугольники являются конгруэнтными. Информации тут даже больше, чем нужно: нам вполне достаточно знать, что равными будут боковые стороны треугольников ($AB = DE$ и $AC = DF$) и углы между ними ($\angle A = \angle D$). А дальше все просто: $BC = EF$, $\angle B = \angle E$, а $\angle C = \angle F$. Из этого вытекает *аксиома конгруэнтности треугольников по двум сторонам и лежащему между ними углу*.

Это именно аксиома, а не теорема, поскольку доказать ее с помощью уже существующих аксиом невозможно. Зато, принятая на веру, она ложится в основу других не менее полезных теорем конгруэнтности а) по трем сторонам; б) по одной стороне и двум прилежащим к ней углам; и в) по двум углам и прилежащей к одному из них стороне.

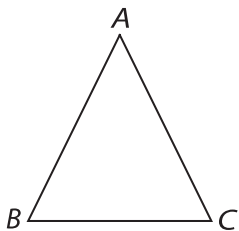
(Не существует только теоремы конгруэнтности по двум сторонам и прилежащему к одной из них углу: для стопроцентной уверенности угол все же должен находиться *между* сторонами.) Самой интересной из них мне кажется теорема а), ведь изначально в ней вообще никак не упоминаются углы, равенство которых доказывается через равенство сторон.

Но вернемся к аксиоме по двум сторонам и углу между ними и докажем с ее помощью одну замечательную теорему, касающуюся равнобедренных треугольников. *Равнобедренным* называется такой треугольник, две из трех сторон которого имеют одинаковую длину. (И кстати, уж коли об этом зашла речь — есть и другие виды треугольников: *равносторонние* — в которых все три стороны равны; *прямоугольные* — в которых один угол равен 90° ; *остроугольные* — в которых все три угла меньше 90° ; и, наконец, *тупоугольные* — в которых один угол больше 90° .)



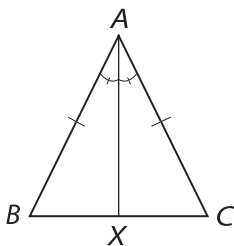
Равносторонний, остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники

Теорема о равнобедренном треугольнике: Если в равнобедренном треугольнике ABC стороны AB и AC равны, противолежащие этим сторонам углы будут также равны.



Теорема о равнобедренном треугольнике: если $AB = AC$, то $\angle B = \angle C$

Доказательство: Из точки A проведем линию так, чтобы она делила $\angle A$ ровно пополам и пересекала отрезок $\overline{BC}$ в точке X , как на рисунке. Это биссектриса угла A .



Теорему о равнобедренном треугольнике можно доказать с помощью биссектрисы угла и аксиомы конгруэнтности двух вновь образованных треугольников по двум сторонам и лежащему между ними углу

Получившиеся таким образом треугольники BAX и CAX являются конгруэнтными согласно аксиоме по двум сторонам и лежащему между ними углу: $BA = CA$ (что следует из понятия равнобедренности), $\angle BAX = \angle CAX$ (что следует из понятия биссектрисы), а $AX = AX$ (вернее, не так: отрезок $\overline{AX}$ не уникален, он появляется одновременно в двух треугольниках и не меняет свою длину). А так как $BAX \cong CAX$, также равны будут и остальные стороны и углы, в том числе $\angle B = \angle C$, что и требовалось доказать. $\square$

Отступление

То же можно доказать и с помощью теоремы конгруэнтности по трем сторонам. Для этого возьмем точку M как *середину* отрезка $\overline{BC}$, то есть чтобы BM было равно MC . Проведем линию по отрезку $\overline{AM}$. Как и в предыдущем доказательстве, треугольники BAM и CAM будут конгруэнтными, потому что $BA = CA$ (равнобедренность), $AM = AM$, а $MB = MC$ (потому что точка M находится ровно посередине $\overline{BC}$). Следовательно, согласно доказательству по трем парам сторон, $BAM \cong CAM$, что говорит нам о равенности лежащих в них углов, в том числе и $\angle B = \angle C$, что и требовалось доказать.

Из факта конгруэнтности следует, что $\angle BAM = \angle CAM$, следовательно, отрезок $\overline{AM}$ является биссектрисой. Более того, так как $\angle BMA = \angle CMA$ и в сумме они дают 180° , каждый из них должен быть равен 90° , из чего следует вывод, что в равнобедренном треугольнике биссектриса, проложенная из угла A , будет *перпендикуляром к основанию BC* .

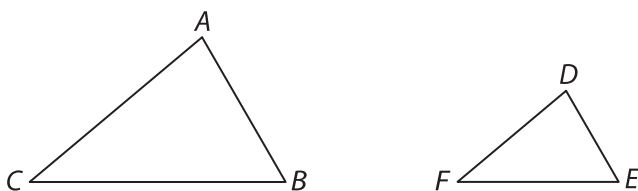
Кстати, *доказательство от обратного* в отношении равнобедренного треугольника тоже вполне эффективно, то есть если $\angle B = \angle C$, то $AB = AC$. Для этого, как и в самом первом доказательстве, проведем биссектрису из точки A в точку X . Утверждение, что $BAX \cong CAX$, в этом случае следует из теоремы

конгруэнтности по двум углам и прилежащей к одному из них стороне: $\angle B = \angle C$ (согласно изначальному условию), $\angle BAX = \angle CAX$ (согласно определению биссектрисы), а $AX = AX$. Значит, $AB = AC$, то есть треугольник ABC является равнобедренным.

Теорему эту можно применить и к равностороннему треугольнику: если равны *все* стороны, значит, равны и *все* углы. Следовательно, по-скольку в сумме своей три угла дают 180° , имеем сопутствующую теорему.

Сопутствующая теорема: В равностороннем треугольнике каждый из углов равен 60° .

Согласно теореме конгруэнтности по трем сторонам, если в треугольниках ABC и DEF совпадают все стороны (то есть $AB = DE$, $BC = EF$, а $CA = FD$), их углы будут также совпадать (то есть $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, а $\angle C = \angle F$). Верным ли будет обратное предположение, что, если в треугольниках ABC и DEF совпадают все углы, будут совпадать и их стороны? Конечно же, нет — просто посмотрите на рисунок:



Подобные треугольники с равными углами, но при этом неравными, хотя и пропорциональными, сторонами

Два треугольника с равными углами называются *подобными*. Если треугольники ABC и DEF являются подобными (что обозначается как $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ или просто $ABC \sim DEF$), то $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, а $\angle C = \angle F$. То есть один из них, по сути, является уменьшенной (или увеличенной) версией второго. Поэтому при $ABC \sim DEF$ их стороны находятся в пропорциональной зависимости друг от друга по некоторому положительному масштабирующему коэффициенту k : $DE = kAB$, $EF = kBC$, а $FD = kCA$.

Все это поможет нам ответить на второй вопрос нашей викторины, с которой мы начали главу. Давайте вспомним все условия. У нас есть две параллельные прямые: на нижней пролегает отрезок XY , на верхней — точка P . Нашей задачей было найти такое местоположение точки P , при

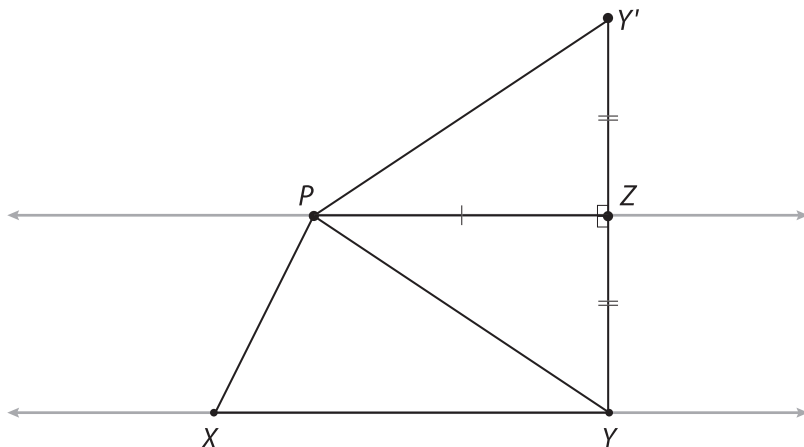
котором треугольник XYP имел бы наименьший периметр. Преобразуем правильный ответ в теорему.

Теорема: треугольник XYP имеет наименьший периметр, если точка P , которая расположена на прямой, параллельной его основанию, находится точно в середине отрезка $\overline{XY}$.

И хотя для того, чтобы подтвердить это предположение, достаточно пары нехитрых вычислительных операций, побалуем себя изысканным геометрическим подходом (доказательство получится очень долгим и немного запутанным, поэтому, если хотите, можете особо в него не вчитываться, а то и вовсе пропустить).

Доказательство: Предположим, что точка P располагается абсолютно в любом месте на верхней прямой, а точка Z располагается прямо над точкой Y . (Точнее говоря, точка Z должна быть расположена так, чтобы линия $\overline{YZ}$, проведенная от нее в точку Y , была строго перпендикулярна как нижней, так и верхней прямой, как показано на рисунке чуть ниже.) Продолжим линию $\overline{YZ}$ до точки Y' так, чтобы отрезок $Y'Z$ был равным отрезку ZY . Другими словами, если бы верхняя прямая была зеркалом, точка Y' была бы отражением точки Y .

Треугольники PZY и PZY' будут конгруэнтными согласно аксиоме по двум сторонам и лежащему между ними углу: $PZ = PZ$, $\angle PZY = 90^\circ = \angle PZY'$, а $ZY = ZY'$. Следовательно, $PY = PY'$, из чего и будем исходить далее.



Так как треугольники PZY и PZY' являются конгруэнтными (по двум сторонам и лежащему между ними углу), $PY = PY'$

Периметр треугольника YXP есть сумма длин трех отрезков:

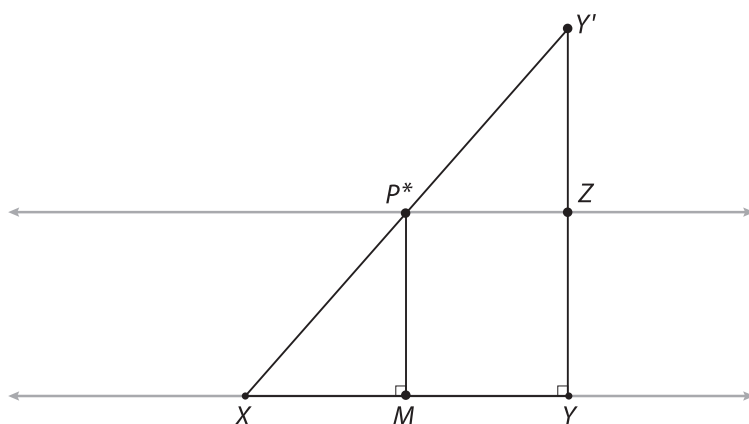
$$YX + XP + PY$$

а так как мы только что доказали, что $PY = PY'$, тот же периметр можно представить в виде

$$YX + XP + PY'$$

Длина YX не зависит от P , так что задачу по поиску ее местонахождения можно упростить до поиска наименьшего значения $XP + PY'$.

Отрезки $\overline{XP}$ и $\overline{PY'}$ образуют ломаную линию, которая соединяет точки X и Y' . Но так как наиболее кратким путем между двумя точками будет не ломаная, а прямая линия, в оптимальном варианте точка P^* должна располагаться на одной прямой с точками X и Y' , причем на месте ее пересечения с верхней горизонталью, как на рисунке ниже. Все? Нет, еще не все: нам же нужно доказать, что P^* находится точно над центральной точкой отрезка $\overline{XY}$.



Треугольники MXP^* и $Y'ZY$ являются подобными по коэффициенту 2

Обозначим точку, находящуюся прямо под точкой P^* буквой M . Отрезок $\overline{P^*M}$ при этом будет перпендикулярен $\overline{XY}$. Так как верхняя прямая параллельна нижней, длина P^*M должна быть равна длине ZY . В принципе, это понятно и так, ведь расстояние между двумя параллельными прямыми равно всегда — хоть на видимом участке, хоть в бесконечности, — но дополнительным подтверждением тому является отрезок $\overline{MZ}$, который дает нам два конгруэнтных (согласно теореме — по двум углам и прилежащей к одному из них стороне) треугольника MYZ и ZP^*M .

Чтобы доказать, что точка M лежит ровно в центре отрезка $\overline{XY}$, докажем сначала подобность треугольников MXP^* и YXY' . Обратите внимание, что $\angle MXP^*$ и $\angle YXY'$ суть один и тот же угол, $\angle P^*MX = \angle Y'YX$, так как они оба прямые, а раз мы имеем полное совпадение в двух парах углов, совпасть должны углы и в третьей паре, чтобы в каждом треугольнике получилось по 180° . Каким будет масштабирующий коэффициент? Согласно построению,

$$YY' = YZ + ZY' = 2YZ = 2MP^*$$

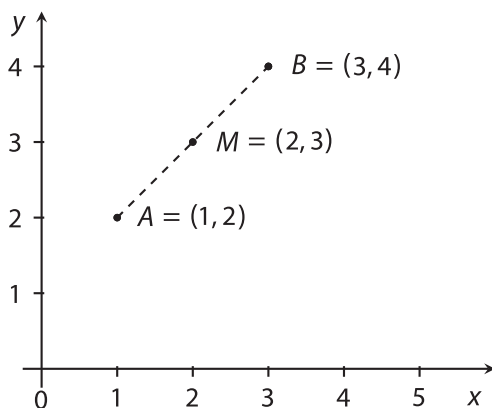
поэтому масштабирующий коэффициент будет равен 2. Следовательно, длина XM составляет ровно половину от длины XY , а отрезок XM заканчивается ровно в центре отрезка $\overline{XY}$.

Обобщая, мы можем утверждать, что для того, чтобы треугольник XYP имел наименьший периметр, точка P^* верхней прямой должна располагаться точно над центральной точкой отрезка $\overline{XY}$. $\square$

Порой геометрические задачи можно решить с помощью алгебры. Предположим, например, что отрезок $\overline{AB}$ лежит на поверхности с координатами (a_1, a_2) для точки A и координатами (b_1, b_2) для точки B . Тогда точка M , располагающаяся в середине этого отрезка, будет иметь координаты

$$M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$$

как показано на графике. То есть если, скажем, $A = (1, 2)$, а $B = (3, 4)$, центром отрезка $\overline{AB}$ является точка $M = ((1 + 3)/2, (2 + 4)/2) = (2, 3)$.

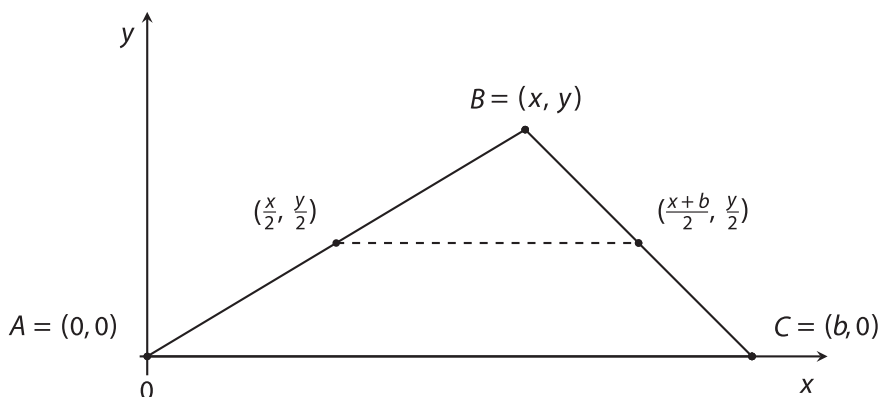


Значения координат центральной точки отрезка суть среднее арифметическое значений координат его начала и конца

За этим кроется один полезный факт о треугольниках. Начертите треугольник и соедините друг с другом центральные точки любых двух его сторон. Видите, что получается? Ответ кроется в следующей теореме.

Теорема о центральных точках треугольника: В треугольнике ABC линия между центральной точкой стороны $\overline{AB}$ и центральной точкой стороны $\overline{BC}$ будет параллельна стороне $\overline{AC}$. Более того, при длине стороны AC , равной b , длина отрезка, соединяющего центральные точки двух других сторон, будет равна $b/2$.

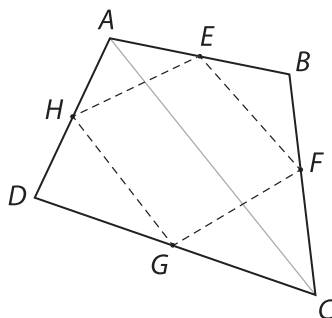
Доказательство: Поместим треугольник ABC на плоскость так, чтобы точка A располагалась в координатах $(0, 0)$, сторона AC была строго горизонтальной, а точка C , таким образом, имела координаты $(b, 0)$, как показано на рисунке ниже. Обозначим координаты точки B как (x, y) . Тогда центральная точка отрезка $\overline{AB}$ будет находиться в координатах $(x/2, y/2)$, а центральная точка отрезка $\overline{BC}$ — в координатах $((x + b)/2, y/2)$. Так как у них одни и те же y -координаты, соединяющая их линия должна быть строго горизонтальна, то есть параллельна стороне $\overline{AC}$. Более того, длина этой линии составит $(x + b)/2 - x/2 = b/2$, что и требовалось доказать.



Если соединить между собой центральные точки двух сторон треугольника, получившаяся прямая будет параллельна третьей стороне и в 2 раза ее короче

Теорема о центральных точках треугольника поможет нам разгадать фокус, с которого начиналась эта глава: тогда мы взяли четырехугольник $ABCD$ и соединили центральные точки его сторон так, что образовался еще один четырехугольник, $EFGH$, который оказался (и всегда окажется) параллелограммом. Давайте разберемся, почему так происходит. Диа-

гональная линия, проведенная от вершины A к вершине C , образует два треугольника ABC и ADC (см. рисунок).



Согласно теореме о центральных точках треугольника,
 $\overline{EF}$ и $\overline{GH}$ параллельны $\overline{AC}$

Применив теорему о центральных точках треугольника, мы обнаружим, что отрезок $\overline{EF}$ будет параллелен отрезку $\overline{AC}$, который в свою очередь будет параллелен отрезку $\overline{GH}$. Следовательно, $\overline{EF}$ будет параллельна $\overline{GH}$. (Более того, $\overline{EF}$ и $\overline{GH}$ будут иметь одинаковую длину, равную половине $\overline{AC}$.)

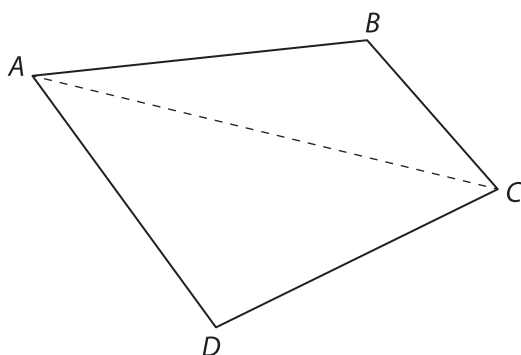
Проведем точно такую же диагональ из вершины B к вершине D и увидим, что $\overline{FG}$ и $\overline{HE}$ также параллельны и равны по длине. Следовательно, $EFGH$ является параллелограммом.

Большинство из разобранных нами теорем связано с треугольниками, что ничуть не удивительно, ведь в геометрии этой фигуре уделяется много внимания. Кстати сказать, треугольник есть не что иное, как наипростейшая разновидность полигонов (многоугольников). Дальше идут четырехугольник (четырёхсторонний полигон), пятиугольник (пятисторонний полигон) и так далее. Полигон, количество сторон которого равно n , иногда называется n -угольником. Мы уже доказывали, что сумма всех углов треугольника равна 180° . А что насчет остальных полигонов? Любой четырехугольник, будь то квадрат, прямоугольник или параллелограмм, имеет четыре стороны. В прямоугольнике, как явствует из его названия, все 4 угла являются прямыми, то есть равными 90° , а значит, составляют в сумме 360° .

Следующая наша теорема будет верна для любого четырехугольника.

Теорема: Сумма углов четырехугольника равна 360° .

Доказательство: Возьмем любой четырехугольник с вершинами A , B , C и D (вроде того, что изображен на рисунке). Из угла A в угол C проведем линию так, чтобы она разделила четырехугольник на 2 треугольника, сумма углов каждого из которых равна 180° . Следовательно, сумма углов четырехугольника составит $2 \times 180^\circ = 360^\circ$

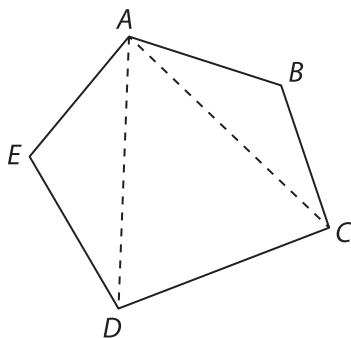


Сумма углов четырехугольника равна 360°

Чтобы проследить общую закономерность, разберем еще одну теорему.

Теорема: Сумма углов пятиугольника равна 540° .

Доказательство: Возьмем пятиугольник с вершинами A , B , C , D и E (вроде того, что изображен на рисунке). Линия, проведенная от вершины A к вершине C , разделит пятиугольник на четырех- и треугольник. Сумма углов треугольника ABC составляет 180° (это мы знаем уже давно), сумма углов четырехугольника $ACDE$ — 360° (это мы доказали только что). Следовательно, сумма углов пятиугольника — $180^\circ + 360^\circ = 540^\circ$.



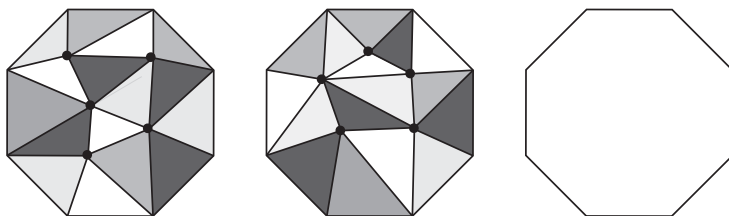
Сумма углов пятиугольника равна 540°

Этот алгоритм можно применять снова и снова, к любому полигону, вплоть до n -угольника.

Здесь отлично сработает метод индукции: для этого надо разделить наш n -угольник на $n - 2$ треугольников, поэтапно соединяя линиями вершину А со всеми остальными.

Теорема: сумма углов n -угольника равна $180(n - 2)$ градусам.

А теперь... просто следите за волшебной палочкой! Начертите восьмиугольник (восьмисторонний полигон) и поставьте внутри него 5 точек — где угодно. А теперь соедините их с вершинами углов и друг с другом так, чтобы у вас получались треугольники (именно треугольники — никаких других фигур). Процесс этот называется триангуляцией, и вот несколько его примеров. (Последний восьмиугольник я оставил пустым, чтобы вы могли проделать это сами.)



В обоих моих примерах восьмиугольники разбиты ровно на 16 треугольников. Столько же должно получиться у вас в третьем октагоне вне зависимости от того, где именно вы поставили 5 точек. (А если вдруг нет, значит, вы где-то ошиблись — в этом случае просто внимательно приглядитесь к каждой доле и убедитесь, что в ней ровно 3 точки, а не 4; если же их все-таки 4, проведите линию от одного угла доли к другому, чтобы разделить ее на два треугольника.) Объяснить это можно с помощью следующей теоремы.

Теорема: В процессе триангуляции n -сторонний полигон, имеющий внутри некое количество точек, равное p , будет разделен ровно на $2p + n - 2$ треугольников.

В нашем предыдущем примере $n = 8$, а $p = 5$, поэтому треугольников получается $10 + 8 - 2 = 16$.

Доказательство: Предположим, что в процессе триангуляции у нас получается количество треугольников, равное T . Мы можем доказать, что $T = 2p + n - 2$, решив одну арифметическую задачу двумя разными способами. Итак, внимание!

Вопрос: Чему будет равна сумма углов всех треугольников?

Ответ 1: Так как количество треугольников равно T , а сумма углов каждого из них — 180° , общая сумма составит $180T$ градусов.

Ответ 2: Разобьем задачу на две. Углы, прилежащие к каждой из внутренних точек (напомним, что их количество равно p), образуют окружность, следовательно, их общая сумма составит $360p$ градусов. С другой стороны, из предыдущей теоремы мы знаем, что сумма углов n -угольника равна $180(n - 2)$ градусов. Значит, всего получится $360p + 180(n - 2)$ градусов.

Из двух ответов составим уравнение

$$180T = 360p + 180(n - 2)$$

Разделим обе части на 180, что даст нам

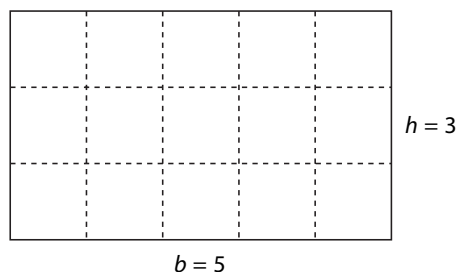
$$T = 2p + n - 2$$

что и требовалось доказать.



Периметры и площади

Периметр полигона есть сумма длин его сторон. Так, периметр прямоугольника длиной b и шириной h будет равен $2b + 2h$, потому что и b , и h суть размеры каждой из двух его сторон. А как насчет площади? Исходим из того соображения, что площадь квадрата размером 1 на 1 (так называемого единичного квадрата) равна 1. При положительных целых значениях b и h (как на рисунке) мы можем разбить всю площадь на bh единичных квадратов, а значит, она будет равна bh . В целом же, любой прямоугольник с длиной b и шириной h (где b и h суть положительные, но необязательно целые величины) имеет площадь bh .

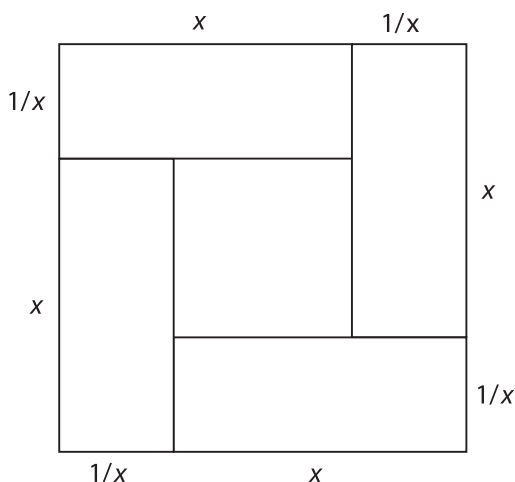


Прямоугольник длиной b и шириной h : периметр равен $2b + 2h$, площадь — bh

Отступление

В этой главе мы уже не раз обращались к помощи алгебры, чтобы разрешить исключительно геометрические проблемы. Принцип этот прекрасно работает и в обратную сторону: порой геометрия значительно облегчает понимание алгебры. Взгляните на типичную задачу. Насколько малым может быть значение $x + \frac{1}{x}$, где x есть любое положительное число? При $x = 1$ имеем 2, при $x = 1,25$ — $1,25 + 0,8 = 2,05$, при $x = 2$ — 2,5. Логика подсказывает, что наименьшим ответом будет 2, и это на самом деле так, только вот как нам в этом удостовериться? Самый простой и эффективный метод расчета будет предложен в главе 11, пока же давайте ограничимся методом геометрическим.

Возьмем фигуру, состоящую из четырех костяшек домино, каждая из которых имеет размер x на $1/x$. Расположены они так, чтобы в пространстве между ними получился квадрат. Какова будет общая площадь всей фигуры (включая этот внутренний квадрат)?



С одной стороны, поскольку фигура представляет собой квадрат $x + 1/x$ на $x + 1/x$, ее площадь должна быть $(x + 1/x)^2$. С другой стороны, площадь каждой костяшки домино равна 1, поэтому площадь фигуры в целом составит как минимум 4. Следовательно,

$$(x + 1/x)^2 \geq 4$$

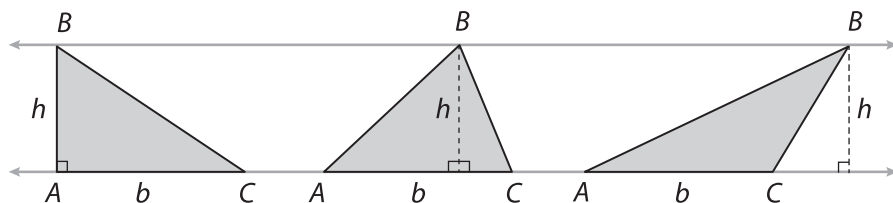
или $x + 1/x \geq 2$, что и требовалось доказать.



Начав с площади прямоугольника, можно найти площадь практически любой другой геометрической фигуры, в первую очередь — треугольника.

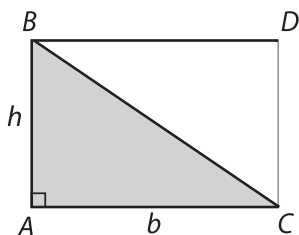
Теорема: Площадь треугольника с длиной основания b и высотой h составляет $\frac{1}{2}bh$.

Для наглядности возьмем три конкретных треугольника, основание каждого из которых равно b , а высота — h , что значит, что их площадь также должна быть равна. Это, по сути, наш третий вопрос, ответ на который, готов поспорить, многих из вас удивил.



Площадь треугольника с длиной основания b и высотой h равна $\frac{1}{2}bh$ независимо от того, будет ли он прямо-, остро- или тупоугольным

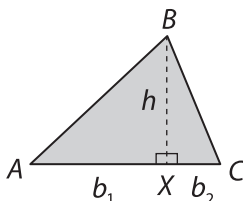
В зависимости от того, какие размеры имеют прилежащие к основанию AC углы $\angle A$ и $\angle C$, нам нужно рассмотреть три разных частных случая, а затем создать копию треугольника ABC и вписать его вместе с оригиналом в прямоугольник с площадью bh , как показано на рисунке. Треугольник ABC займет ровно половину этой площади, а значит, его площадь составит $\frac{1}{2}bh$, как мы и предполагали.



Два прямоугольных треугольника с длиной оснований b и высотой h вместе образуют прямоугольник с площадью bh

Если углы $\angle A$ и $\angle C$ острые, остроумным будет и доказательство. Из точки B проведите линию длиной h так, чтобы она была перпендику-

лярна отрезку $\overline{AC}$ (она называется *высотой* треугольника ABC), пересекая его в точке X , как показано на рисунке:

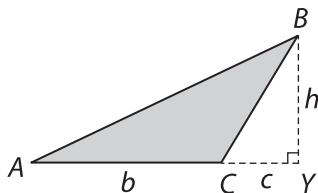


$\overline{AC}$, таким образом, состоит из отрезков $\overline{AX}$ и $\overline{XC}$, длины которых составляют соответственно b_1 и b_2 , где $b_1 + b_2 = b$. А так как треугольники BXA и BXC получились у нас прямоугольными, то, согласно предыдущему примеру, их площади будут равны $\frac{1}{2}b_1h$ и $\frac{1}{2}b_2h$ соответственно. Следовательно, площадь большого треугольника ABC —

$$\frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \frac{1}{2}bh$$

что и требовалось доказать.

В случае же, если $\angle A$ или $\angle C$ является тупым, чертеж будет выглядеть вот так:



В примере с остроугольным треугольником мы представляли ABC как сумму двух прямоугольных треугольников. Здесь же нам нужна их *разность*. Высота любом тупоугольном треугольнике выходит за его границы, образуя тем самым большой треугольник. В нашем случае это ABY , длина основания которого равна $b + c$, а площадь — $\frac{1}{2}(b + c)h$. Маленький же прямоугольный треугольник CBY имеет площадь $\frac{1}{2}ch$. Следовательно, площадь ABC может быть представлена как

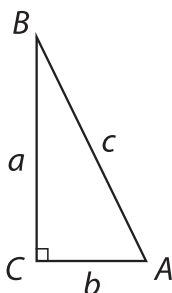
$$\frac{1}{2}(b + c)h - \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bh$$

что и требовалось доказать.

Теорема Пифагора

Теорема Пифагора является, пожалуй, чуть ли не самой популярной теоремой в геометрии. И уж точно одной из самой популярных в математике вообще. Поэтому в том, что ей посвящен целый раздел нашей «геометрической» главы, нет ничего странного.

Итак, в прямоугольном треугольнике сторона, лежащая напротив угла в 90° , называется гипотенузой, другие две стороны — катетами. В треугольнике, изображенном чуть ниже, катетами являются отрезки $\overline{BC}$ (длиной a) и $\overline{AC}$ (длиной b), а гипотенузой — отрезок $\overline{AB}$ (длиной c).



Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике с катетами длиной a и b и гипотенузой длиной c

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Существует более трех сотен различных доказательств этой теоремы, но мы остановимся лишь на самых простых. Можете пропускать некоторые из них, если хотите: моя основная цель заключается в том, чтобы хотя бы одно из них заставило вас улыбнуться, а может быть, даже восхититься.

Доказательство 1: Ниже на рисунке изображен квадрат, составленный из четырех конгруэнтных прямоугольных треугольников.

Вопрос: Какова площадь этого квадрата?

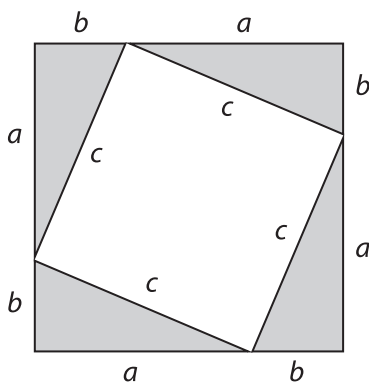
Ответ 1: Длина каждой из сторон квадрата равна $a + b$, следовательно, его площадь составит $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ответ 2: С другой стороны, большой квадрат состоит из четырех треугольников, площадь каждого из которых равна $ab/2$, и пустого (тоже квадратного) пространства между ними, площадь которого равна c^2 . (Кстати, откуда мы взяли, что оно является квадратным? Во-первых, мы

знаем, что его стороны равны. Во-вторых, благодаря правилу симметрии, мы можем убедиться в том, что равны и все его углы: если повернуть эту фигуру на 90° , она будет абсолютно идентична изначальной, а значит, все ее углы должны быть одинаковыми. Так как сумма углов любого четырехугольника всегда составляет 360° , мы можем сделать вывод, что каждый из четырех углов нашей фигуры равен 90° .) Следовательно, их общая площадь выглядит как $4(ab)/2 + c^2 = 2ab + c^2$.

Сведем первый и второй ответы к одному уравнению:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$



Посчитаем площадь большого квадрата двумя различными способами.

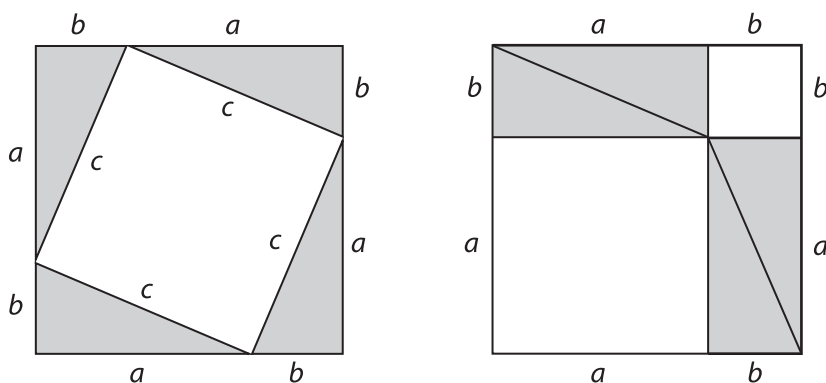
Сопоставление результатов неожиданным образом приведет нас к доказательству теоремы Пифагора

Вычтем $2ab$ из обеих сторон и получим

$$a^2 + b^2 = c^2$$

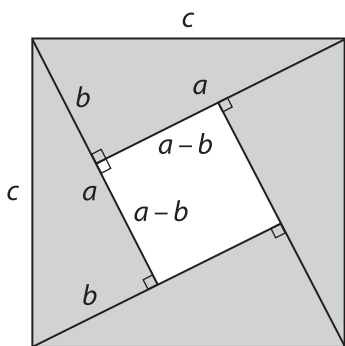
что и требовалось доказать. ☺

Доказательство 2: Возьмем ту же фигуру, что и в предыдущем доказательстве, только немного поменяем расположение треугольников в ней. И если на левом рисунке очевидно, что площадь пустого пространства равна c^2 , то на правом она уже составит $a^2 + b^2$. Следовательно, $c^2 = a^2 + b^2$, что и требовалось доказать. ☺



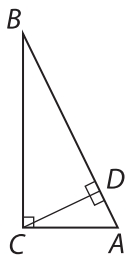
Сравните площадь одного белого квадрата слева и двух белых квадратов справа:
 $a^2 + b^2 = c^2$

Доказательство 3: Снова передвинем треугольники, только на этот раз так, чтобы они располагались более компактно (как на следующем рисунке), а c^2 была бы площадью не маленького внутреннего, а большого квадрата (это будет все еще квадрат, ведь каждый его угол есть сумма $\angle A$ и $\angle B$, то есть 90°). Общая площадь треугольников по-прежнему равна $4(ab/2) = 2ab$. Площадь же внутреннего пустого пространства составит $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Соединив все вместе, имеем $2ab + (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + b^2$, что и требовалось доказать.



Площадь этой фигуры равна одновременно c^2 и $a^2 + b^2$

Доказательство 4: Это будет доказательство подобием, поэтому нам нужно сначала вспомнить все, что мы знаем и подобных треугольниках. В прямоугольном треугольнике ABC проведем линию $\overline{CD}$ так, чтобы она была перпендикулярна гипотенузе $\overline{AB}$, как на рисунке:



Оба маленьких треугольника подобны большому

Обратите внимание, что треугольник ADC содержит как прямой угол, так и $\angle A$, из чего следует, что его третий угол должен быть конгруэнтным $\angle B$. Подобным же образом треугольник CDB содержит как прямой угол, так и $\angle B$, из чего следует, что его третий угол должен быть конгруэнтным $\angle A$. Следовательно, все три треугольника будут подобными:

$$\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$$

Имейте в виду, что порядок букв здесь имеет важное значение: $\angle ACB = \angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$ являются прямыми углами, как и $\angle A = \angle BAC = \angle CAD = \angle BCD$ и $\angle B = \angle CBA = \angle DCA = \angle DBC$. Сопоставление длин сторон первых двух треугольников дает

$$AC/AB = AD/AC \Rightarrow AC^2 = AD \times AB$$

Точно так же для первого и третьего треугольников —

$$CB/BA = DB/BC \Rightarrow BC^2 = DB \times AB$$

Сложим эти два уравнения и получим

$$AC^2 + BC^2 = AB \times (AD + DB)$$

А так как $AD + DB = AB = c$, мы приходим к

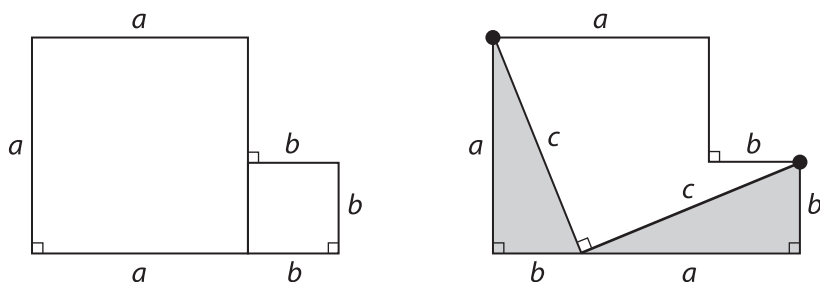
$$b^2 + a^2 = c^2$$

что и требовалось доказать. ☺

Следующее доказательство будет чисто геометрическим — никакой алгебры, зато очень много непростой визуализации.

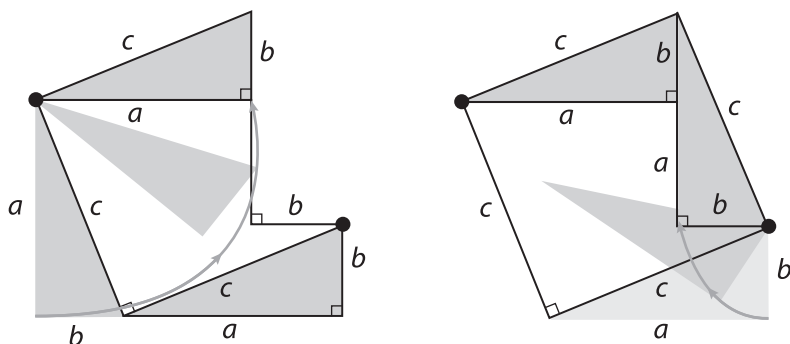
Доказательство 5: В этот раз возьмем два квадрата с площадями a^2 и b^2 . Расположим их вплотную друг к другу — как показано на рисунке слева, и их общая площадь тогда составит $a^2 + b^2$. «Разрежем» получившуюся фигуру на два прямоугольных треугольника (длины катетов составят a и b , длина гипотенузы — c) и один странной формы геометриче-

ский объект. Обратите внимание, что угол в нижней части этого «странного объекта» должен быть равен 90° , потому что его окружают $\angle A$ и $\angle B$. Представьте себе, что в левом верхнем углу большого квадрата и правом верхнем углу маленького квадрата расположено нечто вроде опорных стержней, вокруг которых потенциально может происходить «вращение» (подобно тому, как комнатная дверь «вращается» вокруг дверной петли, закрепленной на косяке).



Два квадрата общей площадью $a^2 + b^2$ превращаются в...

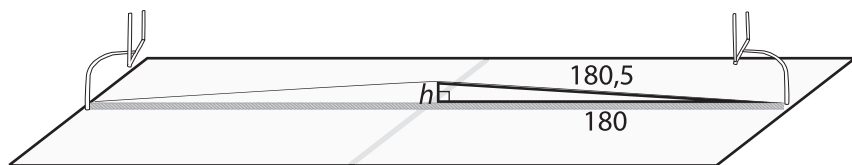
А теперь мысленно поверните нижнюю часть левого треугольника на 90° против часовой стрелки — так, чтобы «вывести» его за верхнюю границу большого квадрата. Поверните на 90° и второй треугольник, только теперь по часовой стрелке — так, чтобы прямые углы «легли» один на другой в точке сочленения двух квадратов, как показано на рисунке:



...В фигуру с площадью, равную c^2 !

В результате получится квадрат, площадь которого будет равна c^2 . Следовательно, $a^2 + b^2 = c^2$, что и требовалось доказать. ☺

Теорема Пифагора нужна нам для того, чтобы объяснить ответ на четвертый вопрос нашей викторины — вопрос о футбольном поле и двух его воротах, расположенных в 110 метрах друг от друга, с натянутой между ними веревкой длиной 110 метров 30 сантиметров.



Согласно теореме Пифагора, $h^2 + 55^2 = 55,15^2$

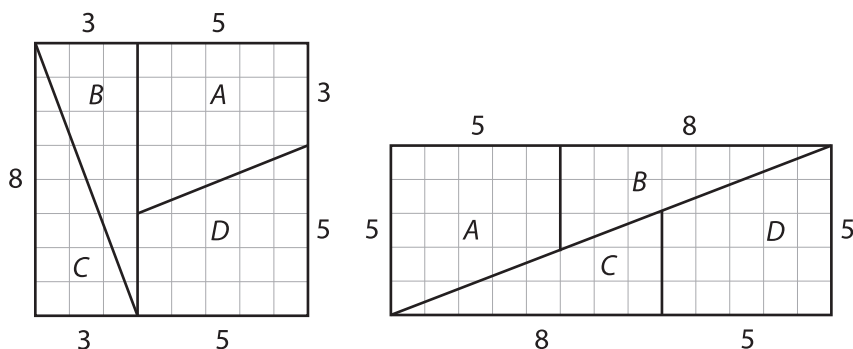
Расстояние от ворот до центра поля составляет 55 метров. Поднятая в этом месте вверх — до точки h — веревка дает нам прямоугольный треугольник с длиной одного катета 55 и длиной гипотенузы 55,15. Берем теорему Пифагора, добавляем немного алгебры по вкусу, перемещаем... и получаем

$$\begin{aligned} h^2 + 55^2 &= 55,15^2 \\ h^2 + 3025 &= 3041,5 \\ h^2 &= 16,5 \\ h &= \sqrt{16,5} \approx 4,06 \end{aligned}$$

Достаточно высоко даже для самого большого грузовика, правда?

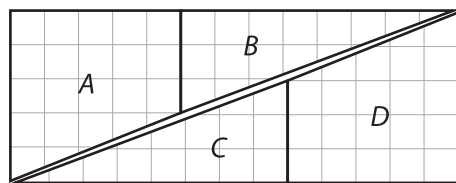
Магия геометрии

Давайте закончим эту главу тем же, чем начали ее — небольшим геометрическим фокусом. Большинство доказательств теоремы Пифагора основываются на перестановке частей одной геометрической фигуры с целью получения другой с той же площадью. Но смотрите, какой обнаруживается парадокс. Возьмем квадрат 8 на 8. Его, пожалуй, вполне можно разделить на четыре части, как на рисунке чуть ниже — длина одной стороны каждой части должна равняться 3, 5 или 8 (да-да, одному из чисел Фибоначчи!). Перегруппируем эти части так, чтобы получился прямоугольник 5 на 13. (Обязательно попробуйте сделать это сами!) Но ведь площадь начальной фигуры равна $8 \times 8 = 64$, а конечной — $5 \times 13 = 65$! Но как это возможно?



Может ли квадрат с площадью 64 стать прямоугольником с площадью 65?

Разгадка этого парадокса заключается в том, что прямая линия, являющаяся «диагональю» прямоугольника 5 на 13, на самом деле не такая уж и прямая. Смотрите сами: треугольник, обозначенный буквой С, имеет гипотенузу с наклоном $3/8 = 0,375$ (потому что значение ее у-координаты увеличивается на 3, а значение х-координаты — на 8) притом, что верхняя грань фигуры (трапеции), обозначенной буквой D, имеет наклон $2/5 = 0,4$ (потому что значение ее у-координаты увеличивается на 2, а значение х-координаты — на 5). То же происходит и с нижними гранями трапеции и треугольника, находящихся в верхней части. Отрезки с разным наклоном никогда и ни за что не образуют прямую линию, а значит, если мы присмотримся к нашему прямоугольнику, то увидим небольшой зазор между двумя почти «прямыми» почти «диагоналями» (см. рисунок). И получается, что, будучи растянутой по всей площади, эта щель дает нам лишнюю единицу общей площади.



Зазор между двумя изогнутыми «диагоналями» прибавляет к площади прямоугольника еще одну единицу

В этой главе мы узнали много интересного о треугольниках, квадратах, прямоугольниках и других полигонах, образованных с помощью разного

количества прямых линий. Геометрия окружностей и других фигур изогнутой формы более сложна. Здесь нам не обойтись без тригонометрии и ее специфических методов счисления. И, конечно же, без основы основ — удивительного числа π .

ГЛАВА НОМЕР ВОСЕМЬ

3.141592653589

Магия числа π

Вокруг да около окружности

Прошлую главу мы начали с проверки своей геометрической интуиции: речь шла сначала о прямоугольниках, затем — о треугольниках и наконец — о натянутой между двух футбольных ворот веревке. Пора поговорить и об окружностях, и тут уж мы мелочиться не будем — начнем с того, что обмотаем веревкой Землю!

Вопрос 1. Представьте себе веревку, достаточно длинную, чтобы обернуть ее вокруг Земли по экватору (это примерно 40 075 км). Но перед тем как завязать узелок, добавим к ней еще три метра. Так вот, если неким волшебным образом нам удастся поднять веревку над землей и водой по всей ее длине на одну и ту же высоту, какой будет эта высота?



А. Чуть больше пары сантиметров.

Б. Достаточной, чтобы под ней можно было проползти.

В. Достаточной, чтобы под ней можно было пройти в полный рост.

Г. Достаточной, чтобы под ней мог проехать грузовик.

Вопрос 2. Две точки окружности — X и Y (см. рисунок) — соединяют две дуги: длинная и короткая. Допустим, что на большей (то есть длин-

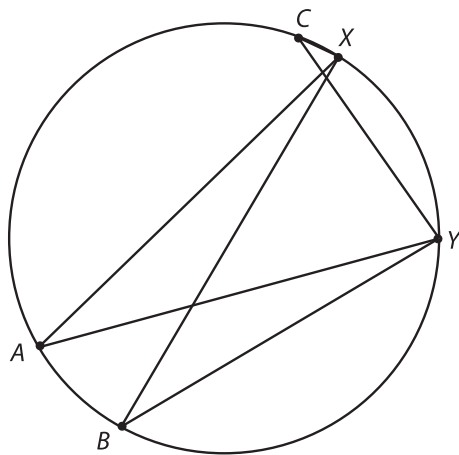
ной) дуге мы хотим поставить третью точку Z . Где именно она должна находиться, чтобы угол $\angle XZY$ был как можно больше?

А. В точке A (ровно напротив середины расстояния между XU).

Б. В точке B (являющейся отражением точки X по линии, проходящей через центр круга).

В. В точке C (лежащей настолько близко к точке X , насколько возможно).

Г. Где угодно, потому что все углы будут абсолютно равны.



Какая из точек на длинной дуге, соединяющей X и Y , образует наибольший угол?

Иными словами, какой из углов — $\angle XAY$, $\angle XBY$ или $\angle XCY$ — будет больше?

Или все они будут равны?

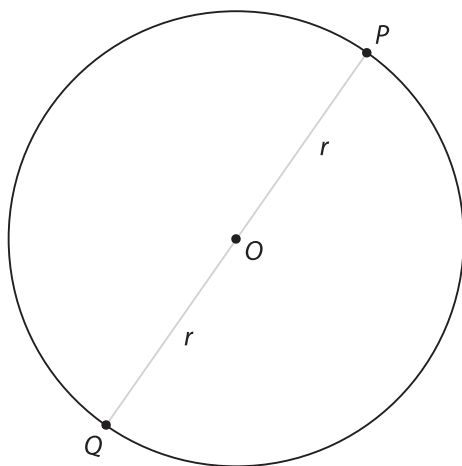
Чтобы ответить на эти вопросы, нужно разобраться в особенностях геометрии окружностей. Впрочем, если вам все это кажется смертельно скучным, можно вполне обойтись и так: ответом на первый вопрос будет вариант Б, на второй — вариант Г. Но разве вам интересно глотать пищу, не чувствуя ее вкуса? Так вот, особенности геометрии окружностей и есть тот самый вкус.

Любая окружность может быть выражена двумя понятиями — точкой O и положительной величиной r , причем точка O равноудалена от остальных точек окружности на расстояние, равное r (см. рисунок ниже). Точка O называется центром окружности. Расстояние r — радиусом окружности. А еще радиусом для удобства называется отрезок $\overline{OP}$, проведенный от точки O к лежащей на линии круга точке P .

Длина окружности и ее площадь

Диаметр окружности — это величина D , обозначающая расстояние между двумя максимально удаленными друг от друга точками окружности и определяющаяся как его удвоенный радиус. То есть

$$D = 2r$$



Окружность с центром O , радиусом r и диаметром $D = 2r$

Периметр окружности (то есть расстояние, пройденное по кругу от некой точки до нее же) называется ее, окружности, длиной (или периферией) и обозначается буквой C . На рисунке хорошо видно, что C длиннее, чем $2D$, потому что идти по полукругу от точки P к точке Q придется явно дольше, чем напрямик по D , равно как и обратный путь от точки Q к точке P по другому полукругу займет больше времени. Следовательно, $C > 2D$. А раз уж мы заметили это, почему бы нам не заметить, что C даже немного длиннее, чем $3D$. Правда, для того, чтобы наша уверенность была стопроцентной, придется надеть $3D$ -очки... (извините, не сдержался ☺).

На самом деле для того, чтобы сопоставить длину окружности с ее диаметром, нам нужно «распрямить» круг, измерить получившуюся линию, а потом разделить результат на диаметр. И вы с удивлением обнаружите, что, независимо от того, измеряете вы монетку, дно стакана, тарелку или гимнастический круг, у вас всегда получится

$$C/D \approx 3,14$$

Число π определяется как постоянная величина, представляющая собой соотношение длины круга к его диаметру. То есть

$$\pi = C/D$$

И π остается неизменным для абсолютно любой окружности! Если хотите, можете преобразовать эту формулу для подсчета длины окружности: зная диаметр D или радиус r той или иной окружности, вы можете просто посчитать

$$C = \pi D$$

или

$$C = 2\pi r$$

Цифровое выражение π начинается с

$$\pi = 3,14159...$$

Чуть позже мы узнаем, что идет дальше, после 9, а заодно обсудим некоторые свойства этого числа.

Отступление

Определить длину окружности «на глазок» не так-то легко. Испытайте себя — возьмите высокий стакан и постарайтесь прикинуть, что больше: его высота или длина окружности? Уверен, большинство проголосует за высоту... и почти наверняка вы окажетесь неправы: чаще всего больше будет именно длина окружности. Не верите? Проверить достаточно легко: просто измерьте большим и указательным пальцами диаметр стакана и трижды отложите этот отрезок вдоль его стенки.

Теперь можно смело отвечать на первый из двух вопросов, заданных в начале главы. Если мы представим экватор в виде идеального круга с длиной окружности, равной 40 075 км, его радиус составит

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{25\,000}{6,28} \approx 6381 \text{ км}$$

Но значение радиуса не так уж для нас и важно — куда важнее знать, насколько увеличится этот радиус, если к длине окружности прибавится три метра — совсем ненамного, примерно на $3/2\pi \approx 0,5$ метра. Следовательно,

под веревкой окажется достаточно места, чтобы проползти, но недостаточно, чтобы пройти в полный рост (если, конечно, вы не танцор лимбо¹).

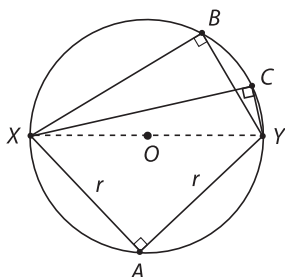
Но самым удивительным здесь будет не столько сам ответ, сколько тот факт, что полученные нами 0,5 м ни капельки не зависят от изначальной длины окружности — вы придете к тому же результату независимо от того, обвязываете ли вы веревкой Землю, Юпитер, Плутон или теннисный мячик. Например, радиус круга с длиной окружности, равной 15 м, составит $15/(2\pi) \approx 2,38$. Прибавив 3 метра, получим новый радиус $18/(2\pi) \approx 2,86$, который будет больше старого примерно на 0,5 метра.

Отступление

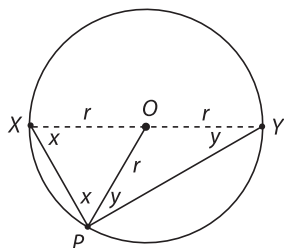
А вот еще один очень важный факт из геометрии окружностей.

Теорема: Предположим, что точки X и Y лежат на окружности строго друг напротив друга. Тогда при любом положении третьей точки P $\angle XPY = 90^\circ$.

На рисунке, например, хорошо видно, что углы $\angle XAY$, $\angle XBY$ и $\angle XCY$ являются прямыми.



Доказательство: Проведем линию радиуса из точки O к точке P . Положим $\angle XPO = x$, а $\angle YPO = y$. Наша цель — показать, что $x + y = 90^\circ$.



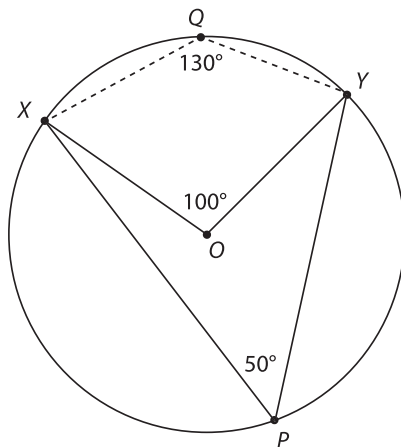
¹ Лимбо — ковбойский танец-игра, смысл которого заключается в проходе человека под заранее установленной как можно ниже планкой животом вперед в положении, максимально близком к горизонтальному. — Прим. пер.

Так как отрезки $\overline{OX}$ и $\overline{OP}$ суть радиусы окружности, их длина равна r , следовательно, треугольник XPO будет равнобедренным. Согласно теореме о равнобедренных треугольниках, $\angle OXP = \angle XPO = x$. По той же логике отрезок $\overline{OY}$ является радиусом, а $\angle OYP = \angle YPO = y$. Поскольку сумма углов треугольника XYP должна быть равна 180° , получаем $2x + 2y = 180^\circ$, а значит, $x + y = 90^\circ$, что и требовалось доказать. ☺

Теорема эта является частным случаем другой, самой любимой моей во всей геометрии теоремы о центральном угле, которой посвящено следующее «Отступление».

Отступление

Ответ на второй вопрос нашей мини-викторины может дать *теорема о центральном угле*. Возьмем две случайные точки X и Y , расположенные на окружности. *Большая дуга* — это длинный путь от X и Y , *меньшая* — короткий путь. Теорема о центральном угле утверждает, что вне зависимости от положения точки P на большей дуге, проходящей от X к Y , размер угла $\angle XPY$ будет *постоянным*, а более конкретно — равным *половине центрального угла* $\angle XOY$. Если при этом расположить на меньшей дуге точку Q , получим $\angle XQY = 180^\circ - \angle XPY$.



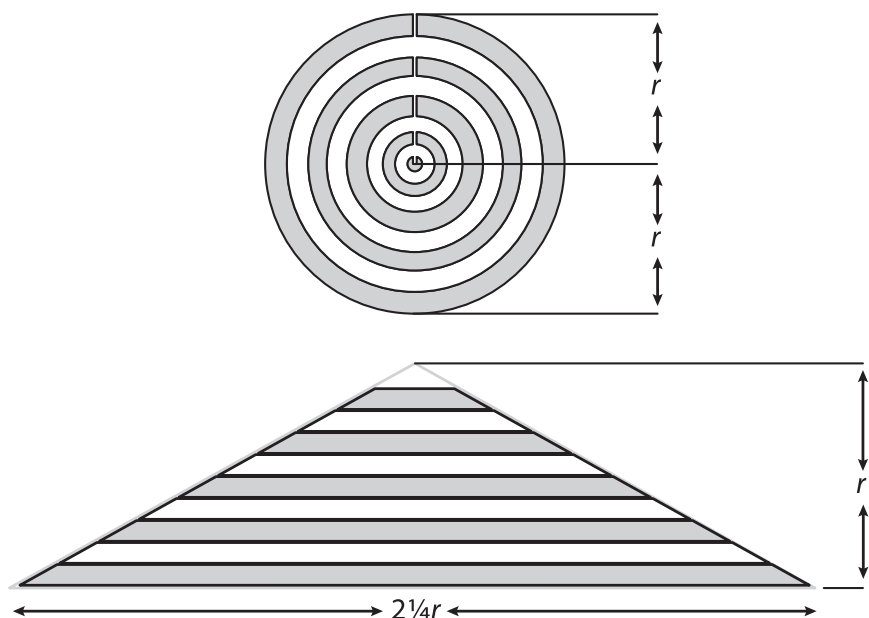
Например, если $\angle XOY = 100^\circ$, тогда при любом положении P на большей дуге, проходящей от X к Y , $\angle XPY = 50^\circ$, а при любом положении Q на меньшей дуге, проходящей от X к Y , $\angle XQY = 130^\circ$.

Зная длину окружности, мы можем вывести очень важную формулу — формулу вычисления ее площади.

Теорема: Площадь круга с радиусом r равна πr^2 .

Вы наверняка помните эту формулу со школы. Что ж, тем больше удовольствия вы получите, узнав, наконец, из чего она вытекает. Конечно, правильнее всего было бы использовать метод вычислений, но пока вполне можно удовлетвориться и другим, не менее эффективным, доказательством.

Доказательство 1: Представьте себе круг как совокупность концентрически расходящихся колец, как это показано на рисунке. Сделайте в нем прорезь от верхнего края к центру, а затем «разогните» кольца, чтобы они сложились в фигуру, напоминающую треугольник. Чему будет равна площадь этой фигуры?



Площадь круга с радиусом r равна πr^2

Надеюсь, вы не забыли, что площадь треугольника с основанием b и высотой h составляет $\frac{1}{2}bh$? Основание получившейся у нас фигуры равно $2\pi r$ (длине окружности), а его высота — r (расстоянию от центра окружности до его нижнего края). Так как наш «очищенный» круг стано-

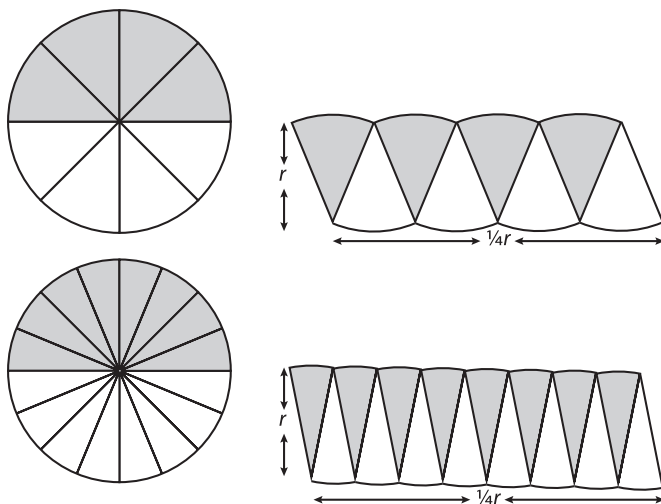
вится тем более треугольным, чем больше мы добавляем к нему колец, его площадь составляет

$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(2\pi r)(r) = \pi r^2$$

что и требовалось доказать. ☺

Теорема эта настолько прекрасна, что просто невозможно устоять и не доказать ее еще раз. Только если в предыдущем случае мы чистили луковичу, теперь будем разрезать пиццу.

Доказательство 2: Разделите круг на четное количество равных секторов-«кусочков». Возьмите «кусочек» из верхней половинки и положите рядом с «кусочком» из нижней половинки, как показано на рисунках (в наших примерах мы разрезали «пиццу» сначала на 8, а потом — на 16 частей). Разложите так весь круг. С увеличением количества секторов форма каждого из них будет все больше и больше напоминать треугольник с высотой r . Чередование нижних секторов (назовем их «сталагмитами») с верхними («сталактитами») дает нам фигуру, по форме очень близкую к прямоугольнику, с шириной, равной r , и длиной, равной половине длины окружности, то есть πr . (Чтобы сделать ее именно прямоугольником, а не параллелограммом, «отсечем» от крайнего левого «сталактита» ровно половину и «приклеим» ее к правому краю.) Так как форма разделенного на сектора круга становится все более и более



Другое доказательство того, что площадь круга (или π -пиццы?) равна πr^2

прямоугольной с увеличением количества этих секторов, площадь окружности составит

$$bh = (\pi r)(r) = \pi r^2$$

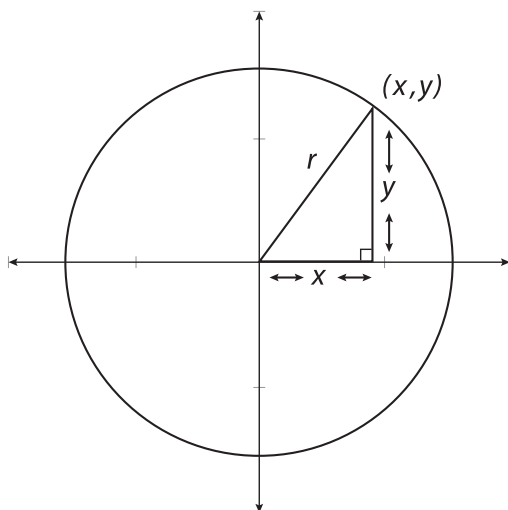
как мы и предполагали. ☺

А еще можно взять окружность и представить ее на плоскости в виде графика.

Для круга с радиусом r и центральной точкой, расположенной в координатах $(0, 0)$ работает формула

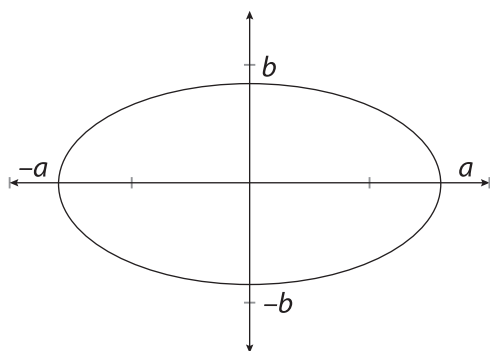
$$x^2 + y^2 = r^2$$

что хорошо видно по графику чуть ниже. Чтобы в этом разобраться, возьмем некую лежащую на окружности точку с координатами (x, y) . Опустим из нее до оси x перпендикулярную этой оси линию — получится прямоугольный треугольник с катетами x и y и гипотенузой r . Тогда, согласно теореме Пифагора, $x^2 + y^2 = r^2$.



Для круга с радиусом r , центром, расположенным в координатах $(0, 0)$, и площадью πr^2 будет верна формула $x^2 + y^2 = r^2$

Круг с $r = 1$ называется единичным. Если мы «растянем» такой круг по горизонтали с коэффициентом a и по вертикали с коэффициентом b , получится эллипс (или овал) вроде этого:



Площадь эллипса равна πab

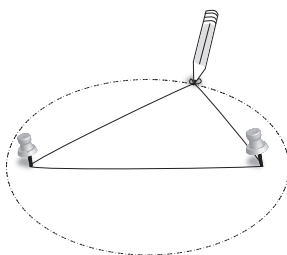
Подобная фигура имеет формулу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

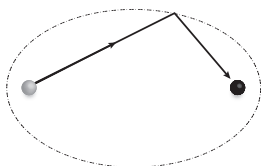
и площадь πab , что вполне логично, потому что площадь изначального единичного круга равняется π , после чего мы растянули ее на ab . Обратите внимание, что при $a = b = r$ мы получим круг (а не эллипс) с радиусом r — πab же, таким образом, превратится в πr^2 .

Существует несколько забавных фактов, связанных с эллипсами, которыми я хотел бы с вами поделиться. Например, вы можете нарисовать овал с помощью двух канцелярских кнопок, лески и карандаша.

Возьмите кнопки, воткните их в лист бумаги или картона и накиньте на них колечко из лески или прочной нитки (но до предела не натягивайте). Поставьте карандаш кончиком в центр получившейся конструкции и оттяните один из концов лески так, чтобы получился треугольник. А теперь постепенно передвигайте карандаш по бумаге вокруг кнопок, не ослабляя леску. Диаграмма, получившаяся в результате, будет иметь эллиптическую форму.



Местоположения кнопок называются фокусами эллипса, и они, конечно же, тоже волшебные. Если вместо кнопки в точку одного фокуса положить бильярдный шар и ударить по нему так, чтобы он покатился в случайном направлении, то после всего лишь одного касания о периметр он обязательно пройдет через точку второго фокуса.



Кстати, космические тела, вроде планет и комет, путешествуют вокруг солнца именно по эллиптической орбите. Естественно, я не смог удержаться:

И даже у затмения
Овальное строение!

Отступление

А вот вам еще один очень интересный факт — не существует такой формулы, которая позволила бы просчитать длину эллипса. Зато есть некое приближенное представление, придуманное математическим гением по имени Сриниваса Рамануджан¹ и позволяющее оценить эту длину хотя бы примерно:

$$\pi(3a + 3b - \sqrt{(3a + b)(3b + a)})$$

Обратите внимание, что при $a = b = r$ выражение упрощается до $(6r - \sqrt{16r^2}) = 2\pi r$ — длины окружности.

Число π появляется и в трехмерных фигурах. Возьмем для примера консервную банку, которая для любого математика является *цилиндром*. Так вот, *объем* цилиндра (то есть его внутреннее пространство) с радиусом r и высотой h составит

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 h$$

¹ Сриниваса Рамануджан Айенгор (1887–1920) — индийский математик, достигший при отсутствии специального образования значительных успехов в области исследования теории чисел. — Прим. пер.

Объяснить эту формулу можно, представив цилиндр как совокупность окружностей, расположенных одна на другой так, чтобы образовалась стопка высотой h (представьте себе стопку подносов в ресторане и поймете, что я имею в виду).

А чему будет равна *площадь поверхности* цилиндра? Иными словами, сколько краски нам понадобится, чтобы покрасить все его внешние стороны, включая «крышку» и «донышко»? Держать ответ в памяти нет никакой необходимости — его можно получить в любой момент, условно разделив цилиндр на три части. Площади «крышки» и «донышка» будут равны πr^2 . Значит, их общий вклад в площадь поверхности цилиндра составит $2\pi r^2$. Чтобы узнать площадь третьей части, разрежем оставшийся «тубус» вдоль от верха до низа и разогнем его. У нас получится прямоугольник с шириной h и длиной $2\pi r$ (которая берется из длины прилегающей окружности). Его площадь будет равна $2\pi rh$, что позволяет нам «собрать» формулу общей площади цилиндра:

$$A_{\text{цилиндра}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

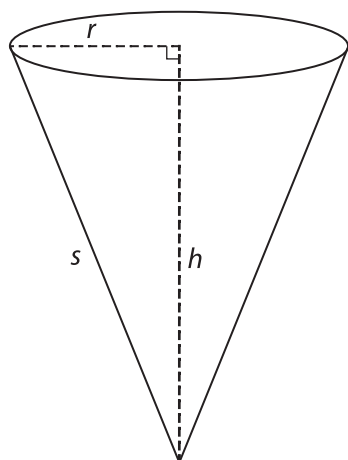
Сфера есть трехмерный объект, в котором все наружные точки равноудалены от центра. Чему будет равен объем сферы с радиусом r ? Начнем с того, что такого размера объект войдет в цилиндр, имеющий радиус r и высоту $2r$, следовательно, его объем будет меньше $\pi r^2(2r) = 2\pi r^3$. По случайному стечению обстоятельств (надежно подкрепленным скрупулезными вычислениями) сфера займет ровно две трети этого пространства. Другими словами,

$$V_{\text{сферы}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Формула для нахождения площади поверхности сферы выглядит еще проще, хотя путь к ней куда более тернист:

$$A_{\text{сферы}} = 4\pi r^2$$

Давайте завершим раздел примерами, где у π появляется вкус мороженого и пиццы. Представьте себе рожок мороженого (также известный как конусовидный стаканчик) с высотой h и радиусом верхней окружности r . *Длину образующей конуса* — линии, проведенной от его кончика к любой точке верхней окружности — обозначим буквой s (самый простой способ ее вычислить — теорема Пифагора, потому что $h^2 + r^2 = s^2$).



Конус объемом $\pi r^2 h/3$ и площадью поверхности $\pi r s$

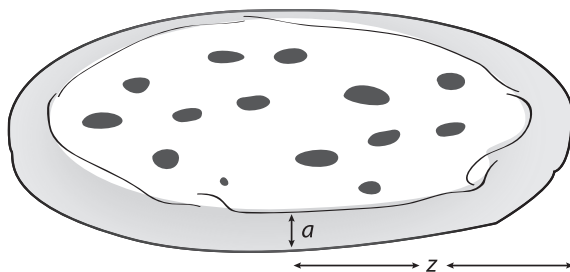
Конус этот легко уместится в цилиндр радиусом r и высотой h , поэтому неудивительно, что его объем будет меньше $\pi r^2 h$. Зато удивительно (и при этом очевидно без всяких вычислений) то, что меньше он будет ровно в 3 раза. Другими словами,

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

И хотя вычисления здесь и в самом деле совершенно не нужны, отказать себе в удовольствии, которое дарит нам эта красота и простота, совершенно невозможно: площадь поверхности конуса равна

$$A_{\text{конуса}} = \pi r s$$

Ну, и наконец, пицца, имеющая радиус z и толщину a , как видно на рисунке. Каков будет ее объем?



Чему равен объем пиццы с радиусом z и толщиной a ?

Это лакомство — не что иное, как необычной формы цилиндр (радиус z , высота a), объем которого равен

$$V = \pi z^2 a$$

Немного переделаем эту формулу — уверен, у вас слюнки потекут:

$$V = \pi i z z a$$

Удивительные лики π

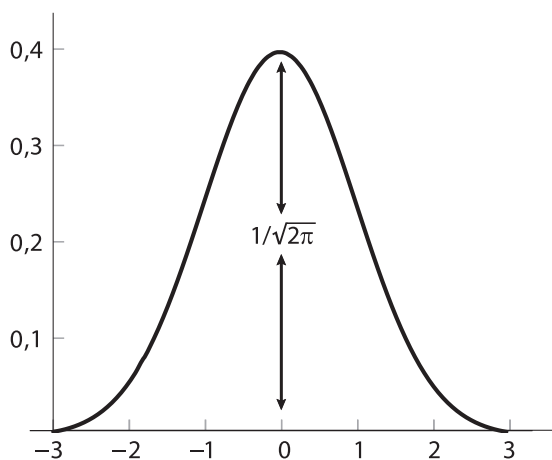
В том, что число π появляется в площадях и длинах всех кругообразных объектов, рассмотренных нами, ничего удивительного нет. Но только этим сфера его влияния не ограничивается — оно обнаруживается даже там, где, казалось бы, ему делать совершенно нечего.

Возьмем для примера множество $n!$, подробно рассмотренное нами в главе 4. Казалось бы, причем тут окружности, эллипсы и прочие подобные фигуры и объекты — ведь оно нужно исключительно для того, чтобы подсчитывать дискретные величины. Мы знаем, что значение его вырастает стремительно, причем настолько, что до сих пор нет ни одного более или менее удобного и легкого способа его просчитать. Например, чтобы вычислить значение $100\,000!$, нам потребуется несколько тысяч операций умножения. И все-таки один способ есть — столь же хитрый, сколь и полезный. Основан он на формуле Стирлинга, которая выглядит как

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

и в которой $e = 2,71828\dots$ (e — это еще одно важное иррациональное число, которое ждет вашего внимания в главе 10). Компьютер может подсчитать это до четырех значащих цифр — например, $64! = 1,269 \times 10^{89}$. А согласно формуле Стирлинга, $64! \approx (64/e)^{64} \sqrt{128\pi} = 1,267 \times 10^{89}$. (Есть ли легкий способ возвести число в 64-ю степень? Да, есть! Поскольку $64 = 2^6$, нам нужно взять $64/e$ и возвести его в квадрат шесть раз.)

Знаменитая колоколообразная (или гауссова) кривая, активно используемая в статистических исследованиях и некоторых экспериментальных науках, имеет высоту $1/\sqrt{2\pi}$ (подробнее о ней — в главе 10).



Высота колоколообразной кривой равна $1/\sqrt{2\pi}$.

Встречается число π и в бесконечных суммах: как впервые наглядно показал Леонард Эйлер, сложение квадратов обратных величин положительных целых значений дает нам

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots = \pi^2/6$$

А если мы повторно возведем в квадрат каждое из значений выше, сумма обратных величин четвертой степени окажется равной

$$1 + 1/16 + 1/81 + 1/256 + 1/625 + \dots = \pi^4/90$$

Формулу эту можно обобщить, распространив на любой ряд обратных величин всех *четных* степеней основания числа $2k$. В ответе будет фигурировать π^{2k} , умноженное на рациональное число.

А что насчет нечетных обратных величин? В главе 12 мы увидим, что сумма обратных величин положительных значений бесконечна. При любой нечетной степени больше 1 получим что-то наподобие этого:

$$1 + 1/8 + 1/27 + 1/64 + 1/125 + \dots = ???$$

(это пример для кубов). Сумма здесь будет, по идее, конечной, вот только простой формулы для ее точного вычисления пока никто не нашел.

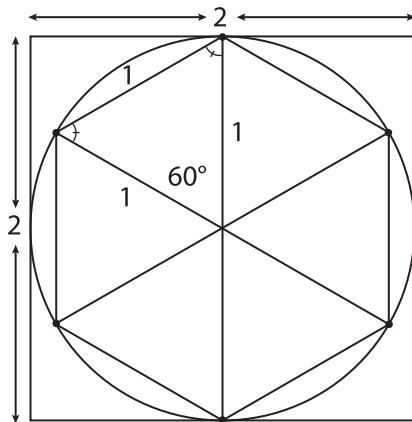
Невероятно, но факт: π всплывает даже в задачах, связанных с вероятностью. Например, если вы выберете два случайных больших числа, вероятность того, что у них не будет ни одного общего простого множителя, составит чуть больше 60%. Это приблизительно. А если точно,

то $6/\pi^2 = 0,6079\dots$. И то, что этот результат является обратной величиной для одной из посчитанных нами чуть выше бесконечных сумм — вовсе не совпадение.

Из чего состоит π ?

К тому, что число π немного превышает 3, вы вполне можете прийти самостоятельно — для этого достаточно просто аккуратно все подсчитать. Но сначала нужно найти ответы на парочку вопросов. Во-первых, можно ли доказать соседство π и 3, не проводя специальных измерений? Во-вторых, существует ли для π какое-нибудь более удобоваримое представление (скажем, формула или простая дробь)?

На первый вопрос можно ответить, нарисовав окружность с радиусом 1, площадь которой, как нам уже известно, равна $\pi 1^2 = \pi$. На рисунке чуть ниже этот круг вписан в квадрат с длиной сторон, равной 2. Так как площадь квадрата очевидно больше площади круга, получаем, что π должно быть меньше 4.



Геометрическое доказательство того, что $3 < \pi < 4$

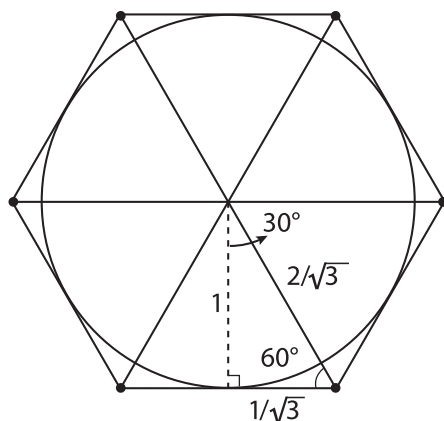
С другой стороны, в круг можно вписать шестиугольник — так, чтобы все шесть его вершин были расположены на окружности, причем на равном расстоянии друг от друга. Каким будет *периметр* этого шестиугольника? Разобьем его на шесть треугольников, величина центрального угла каждого из которых составит $360^\circ/6 = 60^\circ$, а две стороны будут радиусами

круга с длиной, равной 1 (что говорит о том, что все эти треугольники — равнобедренные). Согласно теореме о равнобедренных треугольниках, оставшиеся два угла должны быть равны между собой, то есть величина каждого составит $120^\circ/2 = 60^\circ$ — так мы узнаем, что треугольники не просто равнобедренные, но еще и равносторонние — с длиной сторон 1. Значит, площадь шестиугольника равна 6. А так как она должна быть меньше длины окружности в 2π (потому что круг очевидно больше шестиугольника), получаем $6 < 2\pi$ и $\pi > 3$. Так мы и приходим к желаемому

$$3 < \pi < 4$$

Отступление

Можно на этом не останавливаться и попытаться еще сильнее сократить возможный разброс — для этого нам понадобятся полигоны с большим количеством сторон. Так, если мы окружим единичный круг не квадратом, а шестиугольником, у нас получится доказать, что $\pi < 2\sqrt{3} = 3,46\dots$



Еще раз: шестиугольник можно разделить на 6 равносторонних треугольников, каждый из них в свою очередь разбивается на 2 прямоугольных. Если длина меньшего катета равна x , длина гипотенузы составит $2x$. По теореме Пифагора $x^2 + 1 = (2x)^2$. Поиски x приводят нас к $x = 1/\sqrt{3}$. Значит, периметр шестиугольника составит $12/\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, а так как он должен быть больше длины окружности (2π), то π должно быть меньше $2\sqrt{3}$ (смотрите-ка, мы пришли к тому же заключению, что и при сравнении *площади* окружности с площадью шестиугольника).

Следуя той же логике чередования «вписанных» и «описывающих» полигонов, состоящих последовательно из 12, 24, 48 и 96 сторон, один из величайших древнегреческих математиков Архимед сумел доказать, что $3,14103 < \pi < 3,14271$, что сводится к немногим более простой формуле

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Есть несколько простых дробей, которые более-менее соотносятся со значением π . Например,

$$\frac{314}{100} = 3,14 \quad \frac{22}{7} = \overline{3,142857} \quad \frac{355}{113} = 3,14159292\dots$$

Лично мне больше всего нравится последняя. И не только потому, что она совпадает с π в 6 из всего множества знаков после запятой, но и потому, что использует первые три нечетных числа (причем по два раза и по порядку!): две единицы, две тройки и две пятерки.

Не знаю, как у вас, но у меня руки прямо-таки чешутся найти такую простую дробь, которая полностью бы соответствовала π , — с *целыми* величинами в роли как числителя, так и знаменателя (чтобы не было соблазна сжульничать и написать что-нибудь вроде $\pi = \frac{\pi}{1}$). Но в 1768 году немец Иоганн Генрих Ламберт доказал, что любые подобные поиски заранее обречены на провал, потому что число π есть величина иррациональная.

Может быть, тогда можно представить его в виде квадратов или кубов простых чисел? Ведь есть же, например, $\sqrt{10} = 3,162\dots$, что очень близко к желаемому результату. Однако в 1882 году другой немецкий математик, Фердинанд фон Линдеман, доказал, что π есть величина не просто иррациональная, но *трансцендентная* — такая, которая не является корнем ни одного многочлена с целым коэффициентом (число $\sqrt{2}$, например, будет иррациональным, но не трансцендентным, потому что представляет собой корень многочлена $x^2 - 2$).

Впрочем, представить π в простом дробном виде все же можно. Правда, это будет не одна дробь, а сумма или произведение нескольких — вплоть до бесконечности. В главе 12, например, мы увидим, что

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right)$$

Формула эта настолько прекрасна, даже обворожительна, что даже не хочется верить, что π с ее помощью вычислять придется очень и очень долго: после трехсотого элемента мы будем настолько же далеко от заветного 3,14..., насколько далеко от него банальное 22/7.

А вот еще одна недурная попытка, называемая формулой Уоллиса, — представление π в виде бесконечного (то есть считать придется все равно очень долго, пусть и не настолько, насколько в случае с суммой) произведения:

$$\begin{aligned}\pi &= 4 \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \dots \right) \\ &= 4 \left(1 - \frac{1}{9} \right) \left(1 - \frac{1}{25} \right) \left(1 - \frac{1}{49} \right) \left(1 - \frac{1}{81} \right) \dots\end{aligned}$$

Запомним π (а заодно и τ) во славу его!

Число π продолжает будоражить самые светлые умы и по сей день. С его помощью даже испытывают суперкомпьютеры на быстрдействие и точность вычислений — можете себе представить, насколько оно просчитано «в глубину» — на триллионы цифр после запятой. Практического толку от *такой* точности, конечно, чуть: даже 40 знаков π достаточно, чтобы просчитать размеры пределов наблюдаемой Вселенной с точностью до радиуса одного атома водорода!

Число π — уже почти религия. У ее последователей даже праздник свой есть, он так и называется — День числа π — и празднуется 14 марта (3-й месяц, 14-й день) — в день рождения Альберта Эйнштейна. В честь праздника энтузиасты пекут пироги на математическую тему, надевают маски автора теории относительности и участвуют в конкурсах по воспроизведению наизусть как можно большего количества знаков после тройки и запятой. Рядовой участник такого конкурса помнит, как правило, от нескольких их десятков до нескольких сотен. Рекорд же принадлежит китайскому студенту Чао Лю, добравшемуся в 2005 году до 67 891 цифры! В Книге рекордов Гиннеса говорится, что на одно лишь оглашение числа у него ушло больше 24 часов, на запоминание — около четырех лет.

Вот первые 100 цифр π :

$\pi = 3,141592653589793238462643383279502884197169399375$
 105820974944592307816406286208998628034825342117067...

Как только люди не пытались сохранить их в памяти! Один из самых популярных методов — составлять предложения-«запоминалки», в которых количество букв в каждом слове равно числовому значению соответствующей цифры. Пожалуй, наиболее известные из них — английские «How I wish I could calculate pi»¹ (охватывает 7 знаков: 3,141592) и «How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics»² (а здесь этих знаков уже 15).

Самая, пожалуй, забавная из них — пародия на знаменитого «Ворона» Эдгара Аллана По, созданная в 1995 году Майком Китом³ для первых 740 знаков числа π . Одна лишь первая строчка (вместе с именем автора и заглавием) покрывает 42 цифры. Слово из 10 букв считается цифрой 0.

Позже Кит переработал и дополнил свой опус — так родилась его знаменитая «Кадеическая каденция»⁴ (Cadaeic Cadenza) — уникальное произведение, в котором «зашифровано» 3835 цифр числа π . (Слово «Cadaeic» — тоже своего рода «шифр» π , в основе которого лежат порядковые номера букв латинского алфавита: C — 3, A — 1, D — 4, A — 1, E — 5, I — 9, C — 3. Сейчас оно стало термином, обозначающим жанр подобного рода поэтических экспериментов.) Кроме «Ворона», в нее входят пародии на другие известные стихи, вроде «Бармаглота» Льюиса Кэрролла⁵. Самым грандиозным трудом Кита, без сомнений, является «Во сне: грезы о первом десятке тысяч цифр числа π »

У этого метода есть один существенный недостаток: даже выучив наизусть все эти длинные предложения, стихотворения и целые рассказы, вы вряд ли сможете моментально определить количество букв в произносимых вами словах.

¹ «Как бы я хотел сосчитать число пи». — *Прим. пер.*

² «Выпить бы сейчас чего-нибудь — горячительного, само собой — после таких-то зубодробительных лекций по квантовой механике». — *Прим. пер.*

³ Майкл Кит (р. 1955) — американский математик, разработчик программных средств и автор-экспериментатор в области комбинаторной литературы (литературных произведений, созданных на основе формального комбинирования тех или иных элементов текста (букв, слов, фраз, строк, абзацев): их перестановок, сочетаний, повторений, выделения или намеренного отсутствия). — *Прим. пер.*

⁴ Каденция — гармонический или мелодический оборот, завершающий музыкальное построение. — *Прим. пер.*

⁵ «Бармаглот» (в переводе на русский Дины Орловской) — стихотворение, входящее в сказку «Алиса в Стране чудес», одна из самых известных попыток ввести в язык несуществующие слова, подчиняющиеся, тем не менее, всем законам языковой системы. — *Прим. пер.*

Мне больше по душе другой «шифр» — *буквенный*, в котором каждая цифра представлена одной или несколькими родственными согласными¹:

1 = *t* или *д*

2 = *н*

3 = *м*

4 = *p*

5 = *л*

6 = *ш, ж, щ* или *ч*

7 = *к, х* или *г*

8 = *ф* или *в*

9 = *n* или *б*

0 = *ц, с* или *з*

Представляете, для этой системы тоже есть специальная «запоминалка» (да-да, «запоминалка» для «запоминалки»). Вот что предложил мне мой друг Тони Марлошковипс: буква «т» в своем начертании имеет один вертикальных штрих (буква «д» же является ее звонкой парой); «н» — два штриха; у «м» три точки опоры; «р» — последняя согласная в слове «четыре»; «л» — перевернутая римская цифра V (пять); «ш» — первая буква в слове «шесть» («ж», «ч» и «щ» же связаны с ней кровным фонетическим родством); «г» — зеркальное отражение цифры 7 («к» и «х» же — ее глухие аналоги); «в» и «ф» так же «глазасты», как и восьмерка; «б» — это висящая вверх ногами девятка; ну а «з» звучит как английское «z» в слове «zero», что значит «ноль» («с» и «ц» — члены семьи, группа поддержки). А можно просто взять и запомнить слово ТНМРЛШКВПС — «разбавьте» его гласными, и Тони Марлошковипс станет и вашим другом (жаль только, что воображаемым).

По такой схеме можно превращать цифры и числа в самые настоящие слова. Число 31, например, согласно нашей системе, будет равно

¹ Автор называет его звуковым, что больше соответствует реалиям и фонетической системе английского языка, где один и тот же звук может передаваться различными буквами и буквосочетаниями (например, звук [ʃ], близкий к русскому [ш], не имеет специальной буквы и может появляться в виде буквосочетаний *sh, tion, ce* и т. д.). В русском же языке соответствие звуков буквам носит более консервативный и регулярный характер, поэтому переводчик счел возможным немного изменить этот принцип системы, что ни в коем случае не отражается на механизмах ее работы: добавилось несколько звуков, свойственных исключительно русскому языку, исчезли несвойственные; автор выводил за пределы системы «спорные» согласные [w], [j] и [h], при переводе же незадействованным остался только [й]. — *Прим. пер.*

буквам «м» и «т» (или «м» и «д»). А значит, его можно «зашифровать» словами

31 = мат, мать, мета, мот, Мотя

Добавим еще несколько правил. Во-первых, удвоенная согласная читается как *одна* (просто звучит чуть дольше), поэтому мы будем считать ее одной цифрой. Во-вторых, мы злонамеренно потеряли букву «й». Но, учитывая ее явное происхождение от гласной «и», мы будем преступно полагать ее такой же гласной. А еще обратите внимание, что, хотя одно и то же число может быть представлено (как правило) несколькими словами, для одного слова будет существовать только одно цифровое выражение.

Итак, перейдем к π. Первые три его цифры соответствуют буквам «м», «т» и «р», а это значит, что к ним можно подобрать такие слова, как

314 = метр, мотор, метро, метеор, материя

Первые 5 цифр π — 31415 — могут превратиться в «мою Тортиллу», а первые 24 цифры — 314159265358979323846264 — соответственно, в

Моя Тортилла, поначалу мой левый бок помнем! Во ржи не шарь!

Для следующих с17 цифр — 33832795028841971 — у меня родилось

Мама вам накопила, Зиновьев, руды пакет.

Вот еще 19 — 33832795028841971

Еще бы мой папа мог лаять, словно собака Рапира.

Для следующих 18 — 459230781640628620 — вполне сгодится

Орал я пани Московитой через Женеву: «Женюсь!»

И, наконец, еще 22 цифры: 8998628034825342117067:

В пабе «Вошь и навоз» марафонили Миранда, Дик и сыщики¹.

¹ Разумеется, содержание авторских мнемонических упражнений совершенно не соответствует тому, что предлагает читателю переводчик, который исходил из стремления сохранить логику описываемой системы и при этом передать абсурдистские ноты, присутствующее в оригинальных предложениях:

314159265358979323846264 — My turtle Pancho will, my love, pick up my new mover Ginger. — Моя черепашка Панчо подвезет, любимая, моего нового водителя Джинджер.

Вот таким вот нехитрым способом нам удалось в пяти совершенно глупых предложениях «зашифровать» первые 100 цифр числа π .

Буквенная система хорошо помогает, когда нужно запомнить определенную дату или, скажем, номер телефона или счета в банке. Попробуйте — сначала будет немного сложно, но со временем вы привыкнете и сможете запомнить много важных для вас чисел.

Почти все математики единодушны во мнении, что π — одно из самых важных для их науки чисел. Но если вы взглянете на формулы и уравнения, в которых оно фигурирует, вы наверняка заметите, что очень часто его нужно умножать на 2. Для этого произведения было придумано специальное обозначение — греческая буква τ («тау», рифмуется с «вау!»):

$$\tau = 2\pi$$

Очень и очень многие полагают, что тысячи геометрических понятий и формул стали бы куда проще, если бы изначально основывались именно на τ , а не на π . Об этом даже целые статьи написаны — например, « π не пройдет!» Боба Палаиса или «Манифест числа τ » Майкла Хартла¹. Суть споров заключается в том, что описание любого круга основывается на значении его радиуса, а при сравнении этой величины с длиной окружности мы получаем $C/r = 2\pi = \tau$. На новейших учебниках стали даже делать пометы «используется число τ », что значит, что в них даны не только классические (основанные на π) формулы и представления, но и «новые», привлекающие τ . И хотя «переключиться» бывает порой очень и очень непросто, многие профессора и студенты признают, что оперировать τ куда легче, чем π . Так или иначе, научное сообщество и просто заинтересованные лица с большим интересом следят за ходом дискуссии и с нетерпением ждут, во что же все это выльется. Поборники τ (называющие себя «тауистами») убеждены, что правда на их стороне. При этом к адептам старой религии они настроены вполне миролюбиво, число π уважают и в экстремистских выходках замечены не были.

33832795028841971 — My movie monkey plays in a favorite bucket. — Моя обезьянка-актриса играет в своем любимом ведре.

6939937510582097494 — Ship my puppy Michael to Sullivan's backrubber. — Подбрось моего щенка Майкла до чесалки Салливана.

459230781640628620 — A really open music video cheers Jenny F. Jones. — Настоящему крутой музыкальный клип Джени Ф. Джонса вызывает восторг.

8998628034825342117067 — Have a baby fish knife so Marvin will marinate the goose chick! — Возьми ножик малька, чтобы Марвин смог замариновать гусенка. — Прим. пер.

¹ Боб Палаис и Майкл Хартл — современные американские математики. — Прим. пер.

Вот как выглядят первые сто цифр числа τ . Пробелы между ними расставлены в соответствии с приведенной чуть ниже «запоминалкой». Обратите внимание, что начинается все с совершенных чисел 6 и 28 (о них мы говорили в главе 6). Как вы думаете, это совпадение? Конечно же, да. И все равно забавно! Итак,

$\tau = 6,283185307179586476925286766559005768394338798750$
 $211641949889184615632812572417997256069650684234135...$

В 2012 году тринадцатилетний мальчишка по имени Итан Браун установил мировой рекорд по воспроизведению наизусть цифр числа τ . Он вспомнил их ровно 2012 — по номеру года своего триумфа. Чтобы облегчить себе задачу, он использовал уже описанный нами буквенный «шифр» — но вместо долгих предложений он описывал словами короткие образные ситуации, каждая из которых обязательно состояла из субъекта (подлежащего, выраженного существительным), действия (сказуемого, выраженного личной формой глагола) и объекта (дополнения, выраженного также существительным). Он, правда, немного поменял правила игры, исключив из системы те согласные буквы, которые появляются в окончаниях глаголов (-*ет*, -*ат*, -*ют* и т. д.). Первые семь цифр — 6283185 — превратились в «Женя вымотает вола». А вот все его «запоминалки» для первой сотни цифр¹:

¹ Как и в случае с мнемоническими упражнениями для цифр числа π , переводчику показалось наиболее важным сохранить форму и продемонстрировать систему в действии, ради чего пришлось пренебречь содержанием и некоторыми элементами поэтики (впрочем, абсурдистское настроение удалось сохранить, а где-то даже и усилить). Так, предложения Итана Брауна выражают скорее образ, нежели действие, что достигается за счет использования вместо сказуемого специальной глагольной формы, схожей по функциям с русским активным причастием и образующейся от основы глагола с помощью окончания -*ing* (которое, как и указано в тексте, остается вне системы согласных, кстати, наряду с согласными, появляющимися в служебных словах — артиклях, предлогах и т. д.). Приведем дословный перевод этих предложений, чтобы читатель мог понять конструктивный замысел автора:

An ocean vomiting a waffle — Океан, изрыгающий вздор
 A mask tugging on a bailiff — Маска, дергающая управляющего
 A shark chopping nylon — Акула, рубящая нейлон
 Fudge coaching a cello — Глупость, учащая виолончель
 Elbows selling a couch — Локти, продающие диван
 Foam burying a mummy — Картон, погребаящий мумию
 Fog paving glass — Туман, застилающий стекло
 A handout shredding a prop — Листовка, разрезающая двигатель
 FIFA beautifying the Irish — FIFA, потворствующая ирландцам
 A doll shooing a minnow — Кукла, шикающая на рыбку
 A photon looking neurotic — Фотон, выглядящий невротиком

Женя вымотает вола
Мозг откопает льва
Шурик шепнет Лене
Вошь кушает желе
Люба зацелует Гошу
Фома бреет мима
Век убивает голос
Енот дочёртит пробу
Вова поедет в рощу
Толя шьет мины
Овод налегает на редьку
Папка наложит сажу
Паша лишает веры
Намир дает мыло

Чтобы лучше запомнить эти фразы, Браун использовал мнемотехнику *чертогов разума* (*memory palace*), представляя себя бродящим по коридорам собственной школы и заглядывающим в разные кабинеты, в каждом из которых сидело по несколько субъектов, совершающих те странные действия, что были описаны в предложениях. Он придумал 272 ассоциации и «разбросал» их по 60 разным местам. На формулировку «запоминалок» и их заучивание ушло четыре месяца. На чтение «зашифрованных» цифр наизусть — 73 минуты.

Давайте закончим эту главу гимном числу π . Я взял на себя смелость немного дополнить пародию Ларри Лессера под названием « π по-американски». Только имейте в виду, что песенку эту получится спеть всего лишь раз, ведь цифры π по кругу не повторяются.

*Давно это было, очень давно,
Когда с математики хотелось сбежать в кино,
Каждое число, что мне тогда встречалось,
Либо кончалось, либо повторялось.
Но разве нет такого, чтоб не завершалось?
Чтобы развивалось, в бесконечность упиралось?
И сказал мне учитель: «Знаешь что, дружок?
Найди-ка мне площадь — вот тебе кружок!»*

A puppy acknowledging the sewage — Щенок, обнюхивающий канализацию
A peach losing its chauffeur — Персик, теряющий своего водителя
Honey marrying oatmeal — Мед, берущий замуж овсянку — *Прим. пер.*

Но что бы я ни делал,
Не мог найти я дробь.
И с каждым днем прошедшим
Сильнее была скорбь.
Но вот настал тот славный день,
Когда пришел я к «пи».
О «пи», о «пи»! О славное мое «пи»!
«Двадцать два делить на семь» — хороший вариант,
Простая дробь почти всегда — надежнейший гарант.
Но дроби десятичные останутся всегда!
С дробями десятичными беда нам — не беда!
О «пи», о «пи»! О славное мое «пи»!
Три-четыре-пять-шесть-семь-восемь-девять-десять —
Эти цифры никогда я не устану повторять!

ГЛАВА НОМЕР ДЕВЯТЬ

$$20^\circ = \pi / 9$$

Магия тригонометрии

Высшая точка тригонометрии

Основная задача тригонометрии — решать задачи, которые нельзя решить методами классической геометрии. Вот, смотрите сами.

Вопрос: Как измерить высоту горы, если в нашем распоряжении только транспортер и калькулятор?

Сделать это можно *пятью* разными способами. Причем первые три из них не имеют вообще никакого отношения к математике!

Способ 1 (или метод решения «в лоб»): Заберитесь на вершину горы и сбросьте с нее калькулятор. (Это потребует определенных усилий). Засеките время, за которое он долетит до земли (или дождитесь вопля восходителя внизу). Если у вас получилось t секунд, то, проигнорировав эффекты сопротивления воздуха и скорости падения, вы определите, что высота горы составляет примерно $4,9t^2$ метров (полистайте учебник физики, если не верите). Недостатки этого метода очевидны: и сопротивление воздуха, и скорость падения — показатели достаточно важные и могут сильно сказаться на результате. А еще вы останетесь без калькулятора и, возможно, и без встроенного в него секундомера, который необходим для измерения времени падения. Но есть и преимущества: транспортер останется в целости и сохранности, ведь в этом эксперименте он вам вообще не нужен.

Способ 2 (или метод загорелых альпинистов): Подойдите к смотрительнице местных красот (желательно симпатичной и дружелюбно настроенной) и предложите ей свой новенький блестящий транспорт в обмен на информацию о высоте горы. Если смотрительниц поблизости не наблюдается, найдите самого загорелого альпиниста (чем сильнее загар, тем больше времени он проводит на вершине и, следовательно, может знать ответ на ваш вопрос). Основное преимущество этого метода — у вас появится новый друг и калькулятор будет цел). Если ответ альпиниста вызовет у вас сомнения, всегда можно забраться на вершину и прибегнуть к способу № 1. Недостатки — у вас могут конфисковать транспорт и обвинить в попытке дать взятку должностному лицу.

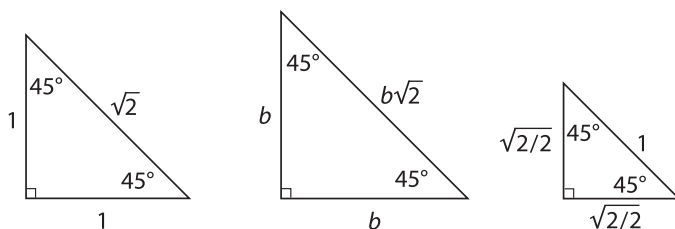
Способ 3 (метод указателей): Перед тем как применять способы 1 или 2, поищите внизу табличку, на которой будет указана высота горы. Несомненное преимущество данного метода заключается в том, что вам не придется жертвовать своим оборудованием.

Если же ни один из этих вариантов вас не устраивает, придется поискать более математические методы, о которых и пойдет речь в этой главе.

Тригонометрия и треугольники

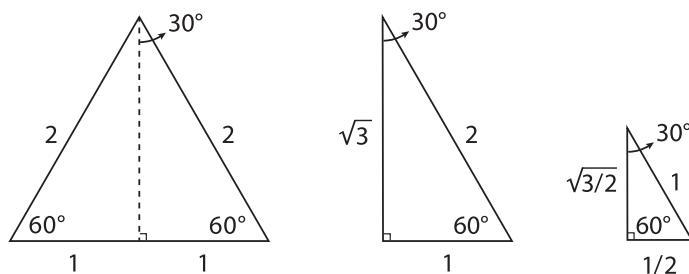
Слово «тригонометрия» состоит из двух греческих корней: *trigon* и *metria*, сочетание которых буквально означает «измерение треугольника».

Равнобедренный прямоугольный треугольник. Как следует из названия, один из его углов равен 90° , а два других равны между собой, то есть по 45° (не забыли, что сумма углов треугольника равна 180° ?). Если предположить, что длина каждого катета составляет 1, то, согласно теореме Пифагора, длина гипотенузы будет равна $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. И, кстати, такое же соотношение сторон — $1 : 1 : \sqrt{2}$, — будет у каждого равнобедренного прямоугольного треугольника (посмотрите на рисунок).



В треугольнике с углами 45° , 45° и 90° соотношение сторон составляет $1 : 1 : \sqrt{2}$

Треугольник с углами 30° , 60° и 90° . В равностороннем треугольнике все стороны имеют одинаковую длину, а все углы — по 60° . Если мы разделим такой треугольник на две конгруэнтные части (как показано ниже), у нас получатся два прямоугольных треугольника с углами 30° , 60° и 90° . Если длины всех сторон изначального треугольника равны 2, будут равны и 2 гипотенузы каждой из его прямоугольных половинок. Длины меньших катетов при этом составят 1, а больших, как следует из теоремы Пифагора, — $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Эта пропорция — $1 : \sqrt{3} : 2$ — также будет справедлива и в отношении любого треугольника с углами в 30° , 60° и 90° (это просто, как 1, 2, $\sqrt{3}$). В частности, при гипотенузе длиной 1 длины катетов составят $1/2$ и $\sqrt{3}/2$.



В треугольнике с углами 30° , 60° и 90° соотношение сторон составляет $1 : \sqrt{3} : 2$ (соответственно их положению)

Отступление

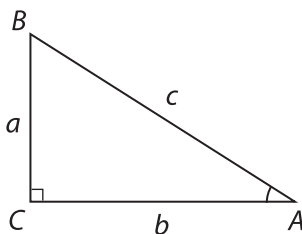
Единство (a, b, c) , в котором a , b и c суть положительные целые величины, а $a^2 + b^2 = c^2$, называют *Пифагоровой тройкой*. Самая простая из таких троек (и наименьшая по значению величин) — $(3, 4, 5)$. Общее же их количество неограниченно: просто увеличиваем треугольник сначала до $(6, 8, 10)$, затем до $(9, 12, 15)$ и т.д., до сколько угодно, хоть до $(300, 400, 500)$. Но есть куда более интересный и остроумный способ создания таких троек. Возьмите два любых положительных числа m и n , где $m > n$. Допустим, что

$$a = m^2 - n^2 \quad b = 2mn \quad c = m^2 + n^2$$

Обратите внимание: $a^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$, что равно $(m^2 + n^2)^2 = c^2$, поэтому тройка (a, b, c) является пифагоровой. Например, если $m = 2$, а $n = 1$, получим $(3, 4, 5)$; $(m, n) = (3, 2)$ даст $(5, 12, 13)$; $(m, n) = (4, 1)$ — $(15,$

8, 17); $(m, n) = (10, 7) \rightarrow (51, 140, 149)$ и т.д. Самое интересное, что с помощью этого метода можно создать абсолютно *любую* пифагорову тройку (доказательство можно найти в любой книге по теории чисел).

Вся тригонометрия основана на двух очень важных функциях — **синусе** и **косинусе**. Возьмем треугольник ABC (вроде того, что изображен чуть ниже) и обозначим длину гипотенузы буквой c , а длины катетов, лежащих напротив $\angle A$ и $\angle B$, — буквами a и b соответственно.



$$\sin A = a/c = \frac{\text{прот. катет}}{\text{гип.}} \quad \cos A = b/c = \frac{\text{прил. катет}}{\text{гип.}} \quad \tan A = a/b = \frac{\text{прот. катет}}{\text{прил. катет}}$$

Синус угла $\angle A$ (который в прямоугольном треугольнике должен быть острым) будем искать по формуле

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{длина катета, противолежащего } A}{\text{длина гипотенузы}} = \frac{\text{прот. катет}}{\text{гип.}}$$

Косинус этого угла — по формуле

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{длина катета, прилежащего к } A}{\text{длина гипотенузы}} = \frac{\text{прил. катет}}{\text{гип.}}$$

Имейте в виду, что *любой* прямоугольный треугольник с углом A будет пропорционален нашему изначальному треугольнику, поэтому значения синуса и косинуса A от размеров треугольника не зависят.

Еще одна не менее популярная в тригонометрии функция — **тангенс**. Для угла A он представляет собой

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

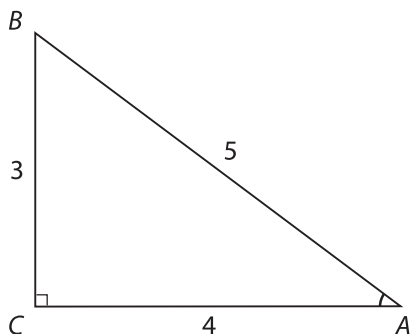
в прямоугольном треугольнике —

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{c} = \frac{\text{длина катета, противолежащего } A}{\text{длина катета, прилежащего } A} = \frac{\text{прот. катет}}{\text{прил. катет}}$$

Для всех этих формул есть свои специальные «запоминалки». Один мой знакомый, например, любил повторять: «Сильно противный Глеб, который прилег на гриб, так противно прилег». Здесь «СИЛЬНО» означает синус, все «ПРОТИВное» — противолежащий катет, «КОторый» — косинус, «ПРИЛег» — прилежащий катет, «ТАк» — тангенс, а слова, начинающиеся с буквы «г» — гипотенузу (то есть получаем подсказку насчет синуса, потом косинуса, а потом и тангенса).

Итак, в треугольнике с длинами сторон 3, 4 и 5 имеем

$$\sin A = \frac{3}{5} \quad \cos A = \frac{4}{5} \quad \tan A = \frac{3}{4}$$



В треугольнике с длинами сторон 3, 4 и 5 $\sin A = 3/5$, $\cos A = 4/5$, $\tan A = 3/4$

А что с углом B ? Аккуратно подсчитаем и получим

$$\sin B = \frac{4}{5} = \cos A \quad \cos B = \frac{3}{5} = \sin A$$

то есть синус B будет равен косинусу A , а косинус B — синусу A ! Волшебного в этом абсолютно ничего нет: просто сторона, противолежащая $\angle A$, является прилежащей к $\angle B$, и наоборот — сторона, прилежащая к $\angle A$, является противолежащей $\angle B$. Гипотенуза же у этих двух углов так и во все одна на двоих.

Так как $\angle A + \angle B = 90^\circ$, мы можем сделать вывод, что для любого острого угла справедливо следующее:

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A \quad \cos(90^\circ - A) = \sin A$$

То есть если в треугольнике ABC $\angle A$ равен 40° , то при $\angle B = 50^\circ$ $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$, а $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$. Другими словами, косинус данного угла (40°) равен синусу дополнительного (50°).

Кроме синуса, косинуса и тангенса в тригонометрии есть еще три элементарные функции. Используются они, правда, не так часто, как уже известные нам, но почему бы не упомянуть и их? Это **секанс**, **косеканс** и **котангенс**, и смысл их заключается в том, что

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} \quad \csc A = \frac{1}{\sin A} \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

Приставка «ко-» означает здесь те же отношения дополнения, что и в паре «синус — косинус», а именно: для любого острого угла прямоугольного треугольника $\sec(90^\circ - A) = \csc A$, а $\tan(90^\circ - A) = \cot A$.

Чтобы найти косинусы, тангенсы и все остальное, достаточно знать значение синуса одного из углов, это очевидно. Но ведь и его (скажем, $\sin 40^\circ$) тоже надо как-то найти, правда? Самый простой способ — воспользоваться калькулятором: просто включаем его и узнаем, что $\sin 40^\circ = 0,642\dots$. Откуда это значение берется, мы узнаем чуть позже.

Некоторые значения тригонометрических функций встречаются в расчетах настолько часто, что лучше всего их просто запомнить. Вернемся к треугольнику с углами 30° , 60° и 90° и вспомним про соотношение его сторон — $1 : \sqrt{3} : 2$. Получается, что

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= 1/2 & \sin 60^\circ &= \sqrt{3}/2 \\ \cos 30^\circ &= \sqrt{3}/2 & \cos 60^\circ &= 1/2 \end{aligned}$$

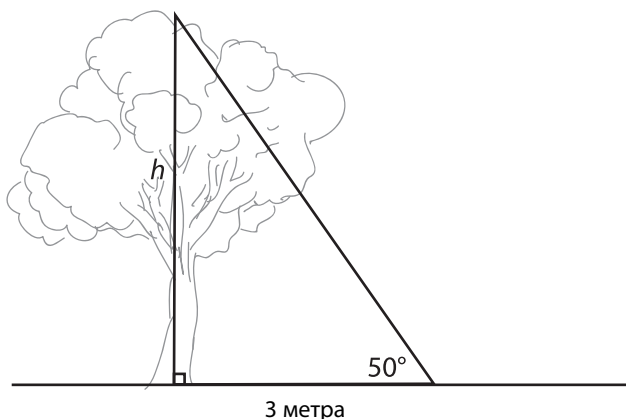
Стороны же треугольника с углами 45° , 45° и 90° имеют соотношение $1 : 1 : \sqrt{2}$, следовательно

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$$

А так как $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, запомнить придется только то, что $\tan 45^\circ = 1$ и что $\tan 90^\circ$ определить невозможно, потому что $\cos 90^\circ = 0$.

С такими знаниями пора вернуться к подножию нашей горы. Только сначала давайте остановимся у первого попавшегося дерева и попробуем рассчитать его высоту.

Предположим, что мы не дошли до ствола 3 метра и что угол между землей под нашими ногами и верхушкой дерева составляет 50° , как изображено на рисунке. (Определить угол, кстати, можно либо с помощью приложения, которое в наши дни есть на многих смартфонах, либо посредством простого устройства, называющегося *клинометр*, которое легко собирается из транспортира, соломинки для питья и канцелярской скрепки.)



Чему равна высота дерева?

Обозначим высоту буквой h . То есть

$$\tan 50^\circ = \frac{h}{3}$$

Следовательно, $h = 3 \tan 50^\circ$. Последний, если верить калькулятору, равен 1,19... . Получаем $3(1,19...) \approx 3,57$, что и является высотой дерева.

Теперь пойдем к горе — испытаем первый из наших математических методов. Сложность его в том, что мы даже примерно не сможем прикинуть расстояние до центра подножья — то есть вместе с высотой горы мы получаем уравнение с двумя неизвестными. Предположим, что мы измерили угол от точки, в которой находимся, до вершины и получили 40° , потом отошли на 300 метров дальше и получили уже 32° (см. рисунок). Что нам теперь с этой информацией делать?

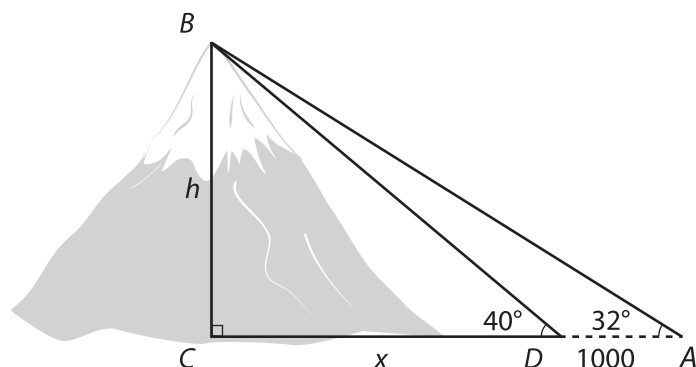
Способ 4 (метод тангенсов): Обозначим высоту горы h , а расстояние до центра ее подножья в изначальной позиции — буквой x (то есть x это

длина отрезка $\overline{CD}$). Калькулятор говорит, что в треугольнике BCD $\tan 40^\circ \approx 0,839$, следовательно

$$\tan 40^\circ \approx 0,839 = \frac{h}{x}$$

что можно представить как $h = 0,839x$. В треугольнике ABC имеем

$$\tan 32^\circ \approx 0,625 = \frac{h}{x + 1000}$$



что дает нам $h = 0,625(x + 300) = 0,625x + 187,5$.

Так как h в обоих случаях есть величина одинаковая, мы имеем полное право эти два уравнения соединить:

$$0,839x = 0,625x + 187,5$$

Решается это как $x = 187,5 / (0,214) \approx 876$. Значит, h приблизительно соответствует $0,839(876) \approx 735$, что и будет высотой горы.

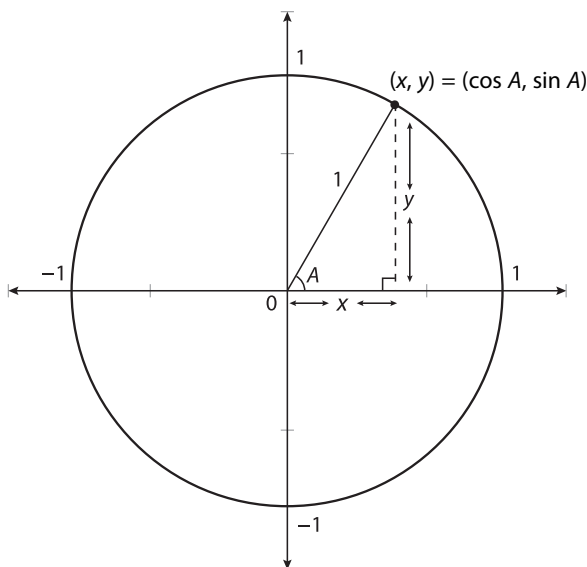
Тригонометрия и окружность

Пока что наши знания о тригонометрических функциях ограничиваются прямоугольными треугольниками. Для решения повседневных задач этого, в принципе, более чем достаточно. Но разве вам не интересно узнать, как они ведут себя в других углах, а не только в тех, значения которых колеблются исключительно в диапазоне от 0° до 90° (ведь в прямоугольном треугольнике один из углов всегда прямой, а два оставшихся — острые)? Конечно, интересно, и именно этим мы и займемся

в этом разделе — посмотрим на тригонометрические функции через призму *единичного круга* и разберемся в особенностях поведения синусов, косинусов и тангенсов углов других типов.

Надеюсь, вы не забыли, что *единичным* называется такой круг, радиус которого равен 1, а центр расположен в *точке начала координат* $(0, 0)$. Для него отлично работает уравнение $x^2 + y^2 = 1$, которое получилось у нас в прошлой главе из теоремы Пифагора.

Давайте попробуем найти некую точку (x, y) , расположенную на окружности выше и левее точки $(1, 0)$ и образующую с центром круга и осью x острый угол A :



Расположенная на окружности точка (x, y) образует угол A с $\cos A = x$ и $\sin A = y$

Для того чтобы найти x и y , нам нужно начертить прямоугольный треугольник и применить к нему наши формулы косинусов и синусов:

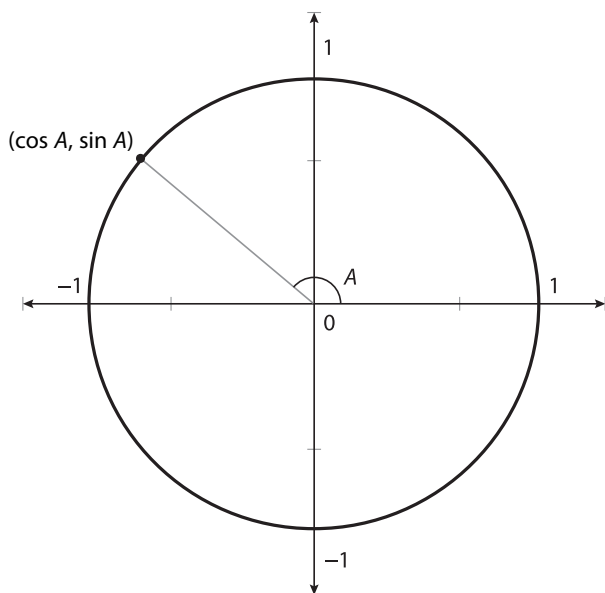
$$\cos A = \frac{\text{прил. катет}}{\text{гип.}} = \frac{x}{1} = x$$

и

$$\sin A = \frac{\text{прот. катет}}{\text{гип.}} = \frac{y}{1} = y$$

Другими словами, значения координат (x, y) составят $(\cos A, \sin A)$. Если обобщать, то при радиусе, равном r , $(x, y) = (r \cos A, r \sin A)$.

Для любого угла A нам нужно определить $(\cos A, \sin A)$, то есть место расположения на окружности его вершины. При этом $\cos A$ будет соответствовать значению координаты по оси x , а $\sin A$ — по оси y , вот так:



Общее представление $\cos A$ и $\sin A$

А вот еще одно общее представление. Только теперь мы разделим единичный круг на много углов с шагом 30° (и сделаем один шаг в 45° для большей наглядности) — так мы получим углы из уже очень хорошо знакомых нам треугольников. Помните, я советовал вам выучить значения косинусов и синусов для углов 0° , 30° , 45° , 60° и 90° ?

$$(\cos 0^\circ, \sin 0^\circ) = (1, 0)$$

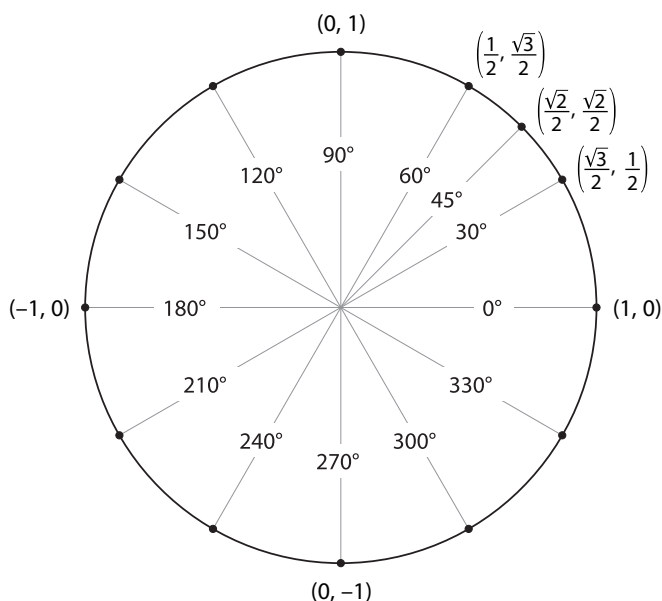
$$(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$$

$$(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$$

$$(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = (1/2, \sqrt{3}/2)$$

$$(\cos 90^\circ, \sin 90^\circ) = (0, 1)$$

К углам этим можно прийти с помощью простого отражения значений, содержащихся в первой четверти окружности.



Прибавление или вычитание 360° на величину угла никак не повлияет (мы просто обойдем вокруг него с одной или другой стороны), а значит, для любого $\angle A$

$$\sin(A \pm 360^\circ) = \sin A \quad \cos(A \pm 360^\circ) = \cos A$$

Имея дело с отрицательными значениями углов, мы двигаемся по окружности слева направо: так, угол, равный -30° , ничем, по сути, не отличается от угла, равного 330° . Обратите внимание, что сдвиг на A градусов по часовой стрелке приводит нас к той же x -координате, что и сдвиг на те же A градусов *против* часовой стрелки. y -координата же при этом сменит знак на противоположный. Другими словами, для любого значения угла A

$$\cos(-A) = \cos A \quad \sin(-A) = -\sin A$$

Например,

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \quad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2$$

Обратное происходит, когда мы «отзеркаливаем» $\angle A$ через ось y . Значение y -координаты получившегося таким образом *дополнительного* угла $180 - A$ остается неизменным, а значение x -координаты меняет знак на противоположный. То есть

$$\cos(180 - A) = -\cos A \quad \sin(180 - A) = \sin A$$

Скажем, при $A = 30^\circ$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2 \quad \sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 1/2$$

Остальные тригонометрические функции определяются по старой схеме (например, $\tan A = \sin A / \cos A$).

Оси x и y «разрезают» поверхность окружности на четыре *сектора-квадранта*. Пронумеруем их римскими цифрами по часовой стрелке — I, II, III и IV, — начиная с правой верхней, то есть с диапазона углов от 0° до 90° . Квадрант II, таким образом, охватит диапазон от 90° до 180° , квадрант III — от 180° до 270° , а квадрант IV — от 270° до 360° . Обратите внимание, что в разных квадрантах разные тригонометрические функции будут вести себя по-разному: положительные значения синуса мы получим в квадрантах I и II, косинуса — в квадрантах I и IV, тангенса — в квадрантах I и III. Чтобы это запомнить, некоторые из моих учеников любят повторять «Все студенты таскают калькуляторы» (посмотрите на первые буквы в каждом слове этой «запоминалки»: «В» — «все функции» в квадранте I, «С» — «синусы» в квадранте II, «Т» — «тангенсы» в квадранте III, «К» — «косинусы» в квадранте IV).

Ну и еще немного терминологии. Для определения неизвестных значений углов нужны *обратные тригонометрические (циклометрические, круговые) функции*. Например, обратным синусом $1/2$ будет $\sin^{-1}(1/2)^1$. Такого рода функция говорит нам, что мы имеем дело с неким $\angle A$, синус которого равен $1/2$. А так как мы знаем, что $\sin 30^\circ = 1/2$, получаем

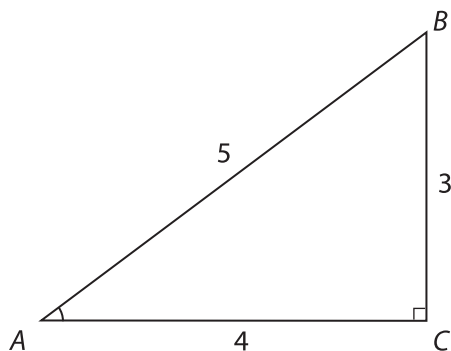
$$\sin^{-1}(1/2) = 30^\circ$$

Функция $\sin^{-1}$ (которая также называется *арксинусом*) всегда даст нам угол в диапазоне от -90° до 90° , но мы-то с вами знаем, что есть и другие углы с тем же значением синуса — синус 150° , например, будет также равен $1/2$. То же происходит и с любым кратным 360° значением, прибавляемым к 30° или 150° — синусы будут равны.

Для треугольника с длинами сторон 3, 4 и 5 (см. рисунок) калькулятор может рассчитать $\angle A$ тремя различными способами, каждый из которых будет основан на своей обратной функции:

$$\angle A = \sin^{-1}(3/5) = \cos^{-1}(4/5) = \tan^{-1}(3/4) \approx 36,87^\circ \approx 37^\circ$$

¹ В отечественной литературе принят другой способ обозначения обратных функций — $\arcsin$ для арксинуса, $\arccos$ для арккосинуса и т. д. Менее привычные написания $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ используются в основном на кнопках калькуляторов и в ряде зарубежных изданий, к числу которых принадлежит эта книга. — Прим. пер.



Обратные функции помогают найти значение угла по длине сторон.

В данном треугольнике $\tan A = 3/4$, а значит, $\angle A = \tan^{-1}(3/4) \approx 37^\circ$

Самое время применять все эти знания на деле. В «геометрической» главе мы доказали теорему Пифагора, с помощью которой можно вычислить длину гипотенузы прямоугольного треугольника, зная длины его катетов. Здесь же, в главе «тригонометрической», мы можем сделать практически то же самое для *любого* треугольника. В этом нам поможет *закон косинусов*.

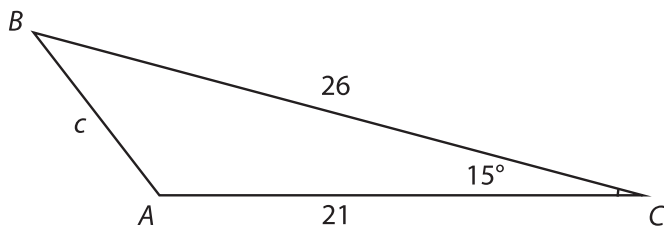
Теорема (закон косинусов): Длина стороны c любого треугольника ABC , в котором стороны a и b образуют $\angle C$, соответствует

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Для примера взгляните на изображенный ниже треугольник ABC . Между двумя его сторонами с длинами 21 и 26 лежит угол 15° . Согласно закону косинусов, длина третьей стороны c составит

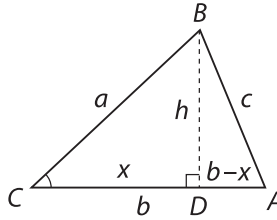
$$c^2 = 21^2 + 26^2 - 2(21)(26) \cos 15^\circ$$

А так как $\cos 15^\circ \approx 0,9659$, уравнение упрощается сначала до $c^2 = 62,21$, а потом и до $c \approx 7,89$.



Отступление

Доказательство: Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим три частных случая — в зависимости от того, будет ли $\angle C$ прямым, острым или тупым. Если $\angle C$ — прямой, его косинус будет равен $\cos 90^\circ = 0$, что упрощает закон косинусов до $c^2 = a^2 + b^2$, то есть до уже доказанной нами теоремы Пифагора.



Если $\angle C$ — острый (как на рисунке), опустим перпендикуляр из $\angle B$ к стороне $\overline{AC}$ до лежащей на ней точки D . Получим два треугольника. Применим теорему Пифагора к CBD — $a^2 = h^2 + x^2$ и придем к

$$h^2 = a^2 - x^2$$

Треугольник же ABD можно просчитать как $c^2 = h^2 + (b-x)^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2$, то есть

$$h^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$

Составим из двух равных h^2 частей уравнение:

$$c^2 - b^2 + 2bx - x^2 = a^2 - x^2$$

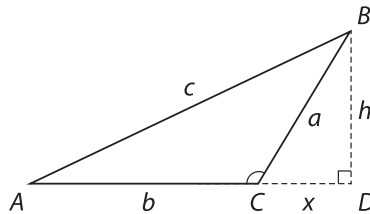
Следовательно,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$$

В треугольнике CBD $\cos C = x/a$, поэтому $x = a \cos C$. Следовательно, если $\angle C$ является острым, то

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Если же $\angle C$ — тупой, дополним треугольник ABC прямоугольным треугольником CBD , как на рисунке:



Для него, как и для получившегося большого, верна теорема Пифагора: $a^2 = h^2 + x^2$ и $c^2 = h^2 + (b + x)^2$. Как и в случае с острым $\angle C$, соединим уравнения:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bx$$

В треугольнике CBD $\cos(180^\circ - C) = x/a$, то есть $x = a \cos(180^\circ - C) = -a \cos C$. И мы вновь приходим к искомому:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \text{☺}$$

Кроме того с помощью функций можно рассчитать площадь треугольника.

Сопутствующая теорема: В любом треугольнике ABC со сторонами a и b и лежащим между ними $\angle C$

$$\text{площадь треугольника } ABC = \frac{1}{2}ab \sin C$$

Отступление

Доказательство: Площадь треугольника с длиной основания b и высотой h равна $\frac{1}{2}bh$. Все три треугольника, рассмотренные при доказательстве закона косинусов, имеют основание b . Определим высоту h . В остроугольном треугольнике обратим внимание на то, что $\sin C = h/a$, то есть $h = a \sin C$. В тупоугольном треугольнике $\sin(180^\circ - C) = h/a$, поэтому опять имеем $h = a \sin(180^\circ - C) = a \sin C$. В прямоугольном же треугольнике $h = a$, что равно $a \sin C$, потому что $C = 90^\circ$, а $\sin 90^\circ = 1$. Следовательно, так как во всех трех случаях $h = a \sin C$, площадь треугольников составит $\frac{1}{2}ab \sin C$, что и требовалось доказать.

Следствия этой теоремы очевидны:

$$\sin C = \frac{2(\text{площадь треугольника } ABC)}{ab}$$

и

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{2(\text{площадь треугольника } ABC)}{abc}$$

Другими словами, в треугольнике ABC $(\sin C)/c$ равен его удвоенной площади, разделенной на произведение длин трех его сторон. Какой угол

выбрать, по большому счету не так уж и важно — $(\sin B)/b$ или $(\sin A)/a$ дадут нам тот же результат. И это доказывает одну очень полезную теорему.

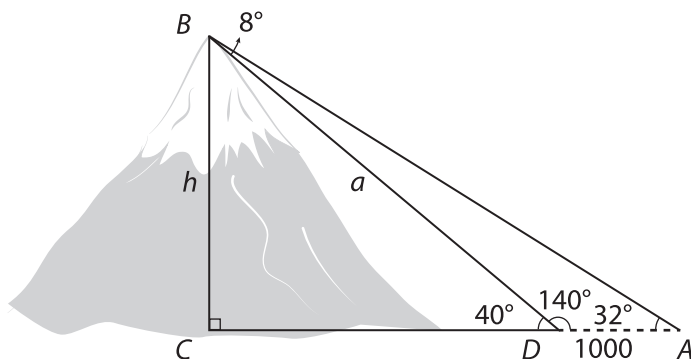
Теорема (закон синусов): В любом треугольнике ABC , длины сторон которого соответственно равны a , b и c ,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

или

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Закон синусов — это еще один способ вычислить высоту нашей горы. На этот раз мы сосредоточимся на a — диагонали, пролегающей между нами и вершиной:



Определение высоты горы с помощью теоремы косинусов

Способ № 5 (закон синусов): В треугольнике ABD $\angle BAD = 32^\circ$, а $\angle BDA = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Следовательно, $\angle ABD = 8^\circ$. Согласно закону синусов получаем

$$\frac{a}{\sin 32^\circ} = \frac{1000}{\sin 8^\circ}$$

Умножим обе части на $\sin 32^\circ$, что даст нам $a = 300 \sin 32^\circ / \sin 8^\circ \approx 1143$ метров. А так как $\sin 40^\circ \approx 0,6428 = h/a$, то

$$h = a \sin 40^\circ \approx (1143)(0,6428) = 735$$

что полностью совпадает с ответом, к которому мы пришли в прошлом разделе.

Отступление

Не менее замечательна в этом отношении *формула Герона*, с помощью которой можно найти площадь треугольника по длинам его сторон a , b и c . Сначала мы находим *полупериметр* p :

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

А потом и площадь S :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Например, если взять треугольник со сторонами 3, 14 и 15 (узнаете первые пять цифр числа π ?), полупериметр будет равен $(3 + 14 + 15)/2 = 16$, а площадь, таким образом, — $\sqrt{16(16-3)(16-14)(16-15)} = \sqrt{416} \approx 20,4$.

Несложно, правда? Уверен, внимательный читатель не сможет не заметить здесь закон косинусов, слегка приправленный алгеброй.

Тригонометрические тождества

Но этим возможности тригонометрических функций не ограничиваются. Они способны и на куда более интересные и запутанные взаимоотношения — так называемые *тождества*. Некоторые из таких тождеств мы уже наблюдали, например,

$$\sin(-A) = -\sin A \quad \cos(-A) = \cos A$$

Но их, конечно же, куда больше.

Из тождеств рождаются формулы, притом весьма полезные. Ими-то мы и займемся в этом разделе.

Первое тождество основывается на формуле единичной окружности:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Под эту формулу должна подходить точка $(\cos A, \sin A)$, принадлежащая единичной окружности. Следовательно, $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$, из чего проистекает, пожалуй, наиболее важное тригонометрическое тождество.

Теорема: Для любого $\angle A$

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

До сих пор все произвольные углы мы обозначали буквой A . Но это не значит, что вы обязаны всегда так делать, можно брать и другие буквы, например, x :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

В тригонометрии для этой цели часто используется греческая буква θ (тета) —

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

А бывает и так, что вообще ничего не используется:

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

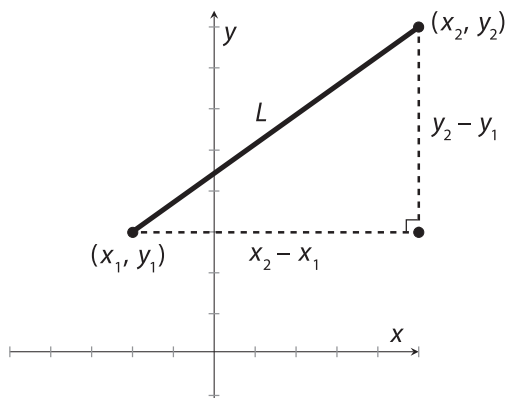
Но перед тем как доказывать какое бы то ни было тождество, нужно найти длину отрезка прямой. В этом нам поможет теорема Пифагора.

Теорема (формула расстояния между двумя точками): Обозначим длину отрезка прямой от точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2) буквой L . Тогда

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Например, длина отрезка от точки $(-2, 3)$ до точки $(5, 8)$ равна

$$\sqrt{(5 - (-2))^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} \approx 8,6$$



Согласно теореме Пифагора, $L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

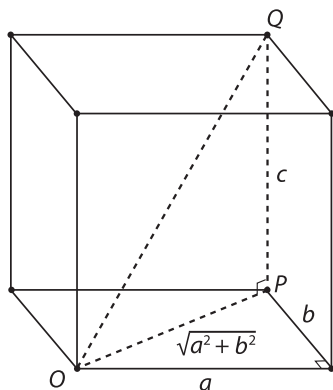
Доказательство: Возьмем две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Начертим прямоугольный треугольник, гипотенузой которого будет отрезок, соединяющий эти точки. На рисунке выше длина основания равна $x_2 - x_1$, а высота — $y_2 - y_1$. Следовательно, согласно теореме Пифагора, гипотенуза L равна

$$L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

то есть $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, что и требовалось доказать.

Отступление

Чему будет равна диагональ в коробке размером $a \times b \times c$? Возьмем прямоугольник, образующий дно этой коробки, и обозначим пару противоположных его углов буквами O и P . Длина и ширина при этом будут равны соответственно a и b , а диагональ $\overline{OP}$ — $\sqrt{a^2 + b^2}$.



Теперь проложим линию c от точки P к точке Q , образующей угол, противоположный O . Чтобы найти расстояние от O до Q , нам понадобятся длины катетов прямоугольного треугольника OPQ — $\sqrt{a^2 + b^2}$ и c . Применим к ним теорему Пифагора и получим, что длина диагонали $\overline{OQ}$ равна

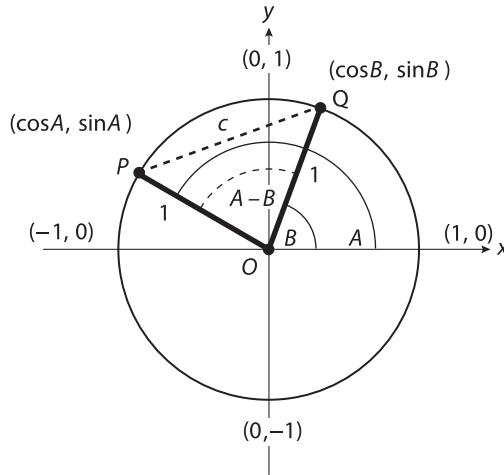
$$\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2}^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Ну а теперь собственно тождество — столь же полезное, сколь и красивое. Доказательство может показаться несколько запутанным, поэтому можете смело его пропускать (хотя я все же советую вам в нем разобраться — оно ляжет в основу доказательства других тождеств).

Теорема: Для любых углов A и B

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

Доказательство: На единичной окружности, центром которой является точка O , расположены точки $P (\cos A, \sin A)$ и $Q (\cos B, \sin B)$. Предположим, что длина отрезка $\overline{PQ}$ равна c . Что можно сказать о ней?



Доказательство того, что $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

В треугольнике OPQ отрезки $\overline{OP}$ и $\overline{OQ}$ являются радиусами единичной окружности, а значит, их длина равна 1, а $\angle POQ$ может быть измерен как $A - B$. Следовательно, согласно закону косинусов,

$$\begin{aligned} c^2 &= 1^2 + 1^2 - 2(1)(1) \cos(A - B) \\ &= 2 - 2 \cos(A - B) \end{aligned}$$

С другой стороны, формула расстояния приводит нас к уравнению

$$c^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

поэтому расстояние c от точки $P = (\cos A, \sin A)$ до точки $Q = (\cos B, \sin B)$ соответствует

$$\begin{aligned} c^2 &= (\cos B - \cos A)^2 + (\sin B - \sin A)^2 \\ &= \cos^2 B - 2 \cos A \cos B + \cos^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B + \sin^2 A \\ &= 2 - 2 \cos A \cos B - 2 \sin A \sin B \end{aligned}$$

где последнее представление основывается на уравнениях $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$ и $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$.

Соединив эти уравнения для c^2 , получаем

$$2 - 2 \cos(A - B) = 2 - 2 \cos A \cos B - 2 \sin A \sin B$$

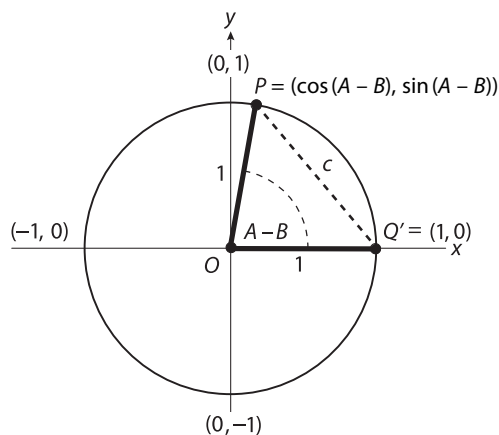
Вычтем из обеих частей 2, разделим их на -2 и получим

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

что и требовалось доказать. $\square$

Отступление

Формула для $\cos(A - B)$ основывается на законе косинусов и исходит из того, что $0^\circ < A - B < 180^\circ$. Но ту же теорему можно доказать и выйдя за рамки подобных ограничений. Если переместить треугольник POQ по часовой стрелке на B градусов, мы получим конгруэнтный ему треугольник $P'OQ'$, в котором Q' будет располагаться на оси x в координатах $(1, 0)$.



Так как $\angle P'OQ' = A - B$, $P' = (\cos(A - B), \sin(A - B))$. Согласно формуле расстояния для $\overline{P'Q'}$ будет верно следующее:

$$\begin{aligned} c^2 &= (\cos(A - B) - 1)^2 + (\sin(A - B) - 0)^2 \\ &= \cos^2(A - B) - 2 \cos(A - B) + 1 + \sin^2(A - B) \\ &= 2 - 2 \cos(A - B) \end{aligned}$$

Из этого можно заключить, что $c^2 = 2 - 2 \cos(A - B)$, при этом нам не нужны ни теорема косинусов, ни предположение об угле $A - B$. Ну а дальнейшее доказательство можно скопировать с предыдущего.

Обратите внимание, что при $A = 90^\circ$ формула для $\cos(A - B)$ утверждает следующее:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - B) &= \cos 90^\circ \cos B + \sin 90^\circ \sin B \\ &= \sin B\end{aligned}$$

Происходит это на том основании, что $\cos 90^\circ = 0$, а $\sin 90^\circ = 1$. Если в этом уравнении заменить B на $90^\circ - B$, получим

$$\begin{aligned}\cos B &= \cos 90^\circ \cos(90^\circ - B) + \sin 90^\circ \sin(90^\circ - B) \\ &= \sin(90^\circ - B)\end{aligned}$$

Мы уже доказали правдивость этих утверждений на примере B как острого угла. Однако алгебра позволяет нам пойти дальше и подтвердить их для любого значения B . Так, если заменить B на $-B$, мы придем к

$$\begin{aligned}\cos(A + B) &= \cos A \cos(-B) + \sin A \sin(-B) \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B\end{aligned}$$

так как $\cos(-B) = \cos B$, а $\sin(-B) = -\sin B$. Если предположить, что $B = A$, у нас получится формула функций *двойного угла*:

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A$$

А так как $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ и $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, мы также можем утверждать, что

$$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2 A \quad \text{и} \quad \cos(2A) = 2\cos^2 A - 1$$

Из этого тождества косинусов проистекает аналогичное тождество синусов, например,

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &= \cos(90 - (A + B)) = \cos((90 - A) - B) \\ &= \cos(90 - A) \cos B + \sin(90 - A) \sin B \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B\end{aligned}$$

$B = A$ приводит нас к формуле функций двойного угла для синусов —

$$\sin(2A) = 2 \sin A \cos A$$

а замена B на $-B$ — к

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

Давайте соберем в одну таблицу все тождества, которые мы успели вывести в этой главе:

Теорема Пифагора	$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$
Отрицательные углы	$\cos (-A) = \cos (360^\circ - A) = \cos A$ $\sin (-A) = \sin (360^\circ - A) = -\sin A$
Дополнительные (до 180°) углы	$\cos (180^\circ - A) = -\cos (A)$ $\sin (180^\circ - A) = \sin (A)$
Дополнительные (до 90°) углы	$\cos (90^\circ - A) = \sin (A)$ $\sin (90^\circ - A) = \cos (A)$
Косинус разности	$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
Косинус суммы	$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
Синус суммы	$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
Синус разности	$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
Формулы двойных углов	$\cos (2A) = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\cos (2A) = 1 - 2 \sin^2 A$ $\cos (2A) = 2 \cos^2 A - 1$ $\sin (2A) = 2 \sin A \cos A$
Для треугольника ABC	Площадь $= \frac{1}{2} ab \sin C$
Теорема косинусов	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
Теорема синусов	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Некоторые наиболее полезные тригонометрические тождества

Повторюсь: использовать буквы A и B вы не обязаны, сгодятся и любые другие (скажем, $\cos (2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$ или $\sin (2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$).

Рadiany и графики в тригонометрии

До сих пор нам встречались углы, значения которых находились исключительно в диапазоне от 0 до 360 *градусов*. Но пристальный взгляд на единичную окружность невольно заставляет усомниться в обоснованности выбора числа 360. Сделан он был давным-давно, еще в древнем Вавилоне, где в обиходе была шестидесятеричная система счисления, использовавшаяся в том числе и в календаре (да-да, число 360 подозрительно напоминает количество дней в году). Альтернатива была предложена много

позже, в XIX веке, когда в математике — а затем и в других науках — появилось понятие *радиана*, представляющего собой

$$2\pi \text{ рад} = 360^\circ$$

или, другими словами,

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

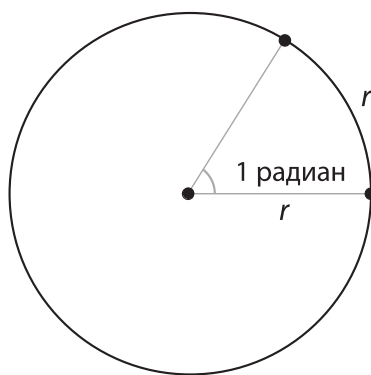
Для тауистов, почитающих число τ как 2π ,

$$1 \text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{360^\circ}{\tau}$$

В числовом же выражении 1 радиан примерно равен 57° .

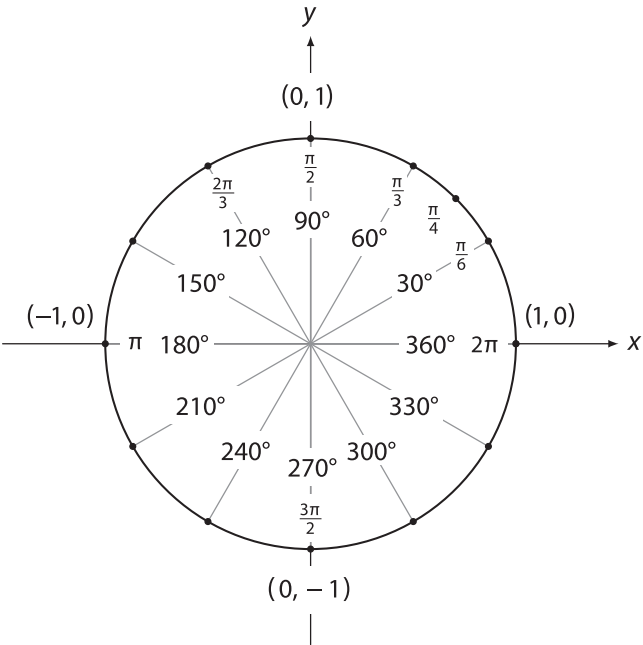
Но зачем они нужны, спросите вы. И чем вдруг научному сообществу так не угодили привычные всем градусы?

В круге с радиусом r угол в 2π радианов охватывает длину окружности $2\pi r$. Если взять часть этого большого угла, величина дуги, отделяемой этой частью, будет в $2\pi r$ раз больше получившейся дроби. Если говорить конкретнее, то 1 радиан «захватывает» дугу длиной $2\pi r(1/2\pi) = r$, а m радианов — дугу длиной mr . В единичной окружности значение угла в радианах равно длине соответствующей ему дуги. Разве не удобно?

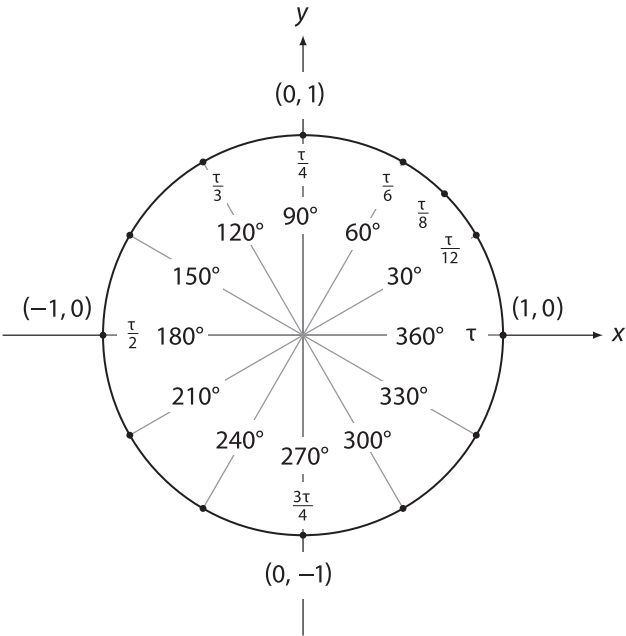


Любая окружность равна 2π радианам

А вот единичный круг, поделенный на самые «популярные» углы — значения выражены как в градусах, так и в радианах.



Для сравнения — версия с τ вместо π .



На рисунках, кстати, очень хорошо заметно, насколько τ удобнее π . Для угла 90° (занимающего четверть окружности) представление в радианах выглядит как $\tau/4$; для угла 120° (треть окружности) — как $\tau/3$; для угла 60° (одна шестая окружности) — как $\tau/6$; τ же есть, по сути, один полный оборот, то есть угол 360° .

Как нам еще предстоит убедиться, радианы позволяют значительно упростить формулы и уравнения подсчета тригонометрических функций. Формулы синуса и косинуса, например, можно превратить в «бесконечные ряды многочленов»:

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! - \dots$$

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! - \dots$$

но только если x измеряется в радианах. Или при исчислении, например, мы увидим, что $\cos x$ есть *производная функция* $\sin x$ при том же условии. Так же и *графики* тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ строятся обычно на основании радианного представления x .

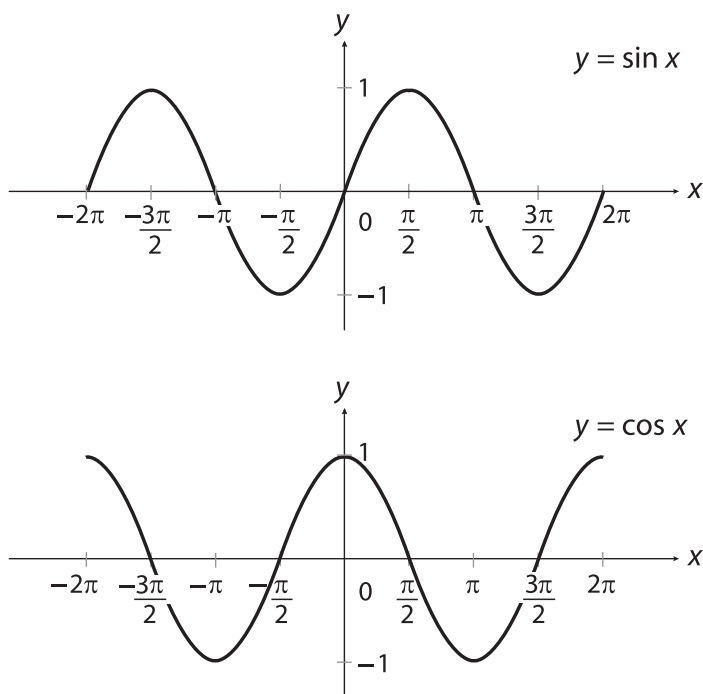


График функций $\sin x$ и $\cos x$, где переменная x выражена в радианах

Графики эти будут повторяться с шагом 2π (тауисты, на старт!). Происходит это из-за того, что как синус, так и косинус берут свои начала в окружности, а угол $x + 2\pi$ по своей природе ничем не отличается от угла x . Именно поэтому эти функции называются *периодическими*, а шаг 2π — *периодом* синуса и косинуса. Кстати, если сдвинуть график косинуса вправо на $\pi/2$, он точь-в-точь совпадет с графиком синуса, потому что значение $\pi/2$ в радианах соответствует углу 90° . Из всего этого следует, что

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos(\pi/2 - x) \\ &= \cos(x - \pi/2)\end{aligned}$$

(например, $\sin 0 = 0 = \cos(-\pi/2)$, а $\sin \pi/2 = 1 = \cos 0$).

Тангенс, равный, как мы помним, $\sin x / \cos x$, так и останется неопределенным при $\cos x = 0$ (что происходит всякий раз, когда линия графика проходит ровно посередине двух значений, кратных числу π). Значит, период тангенса равен π .

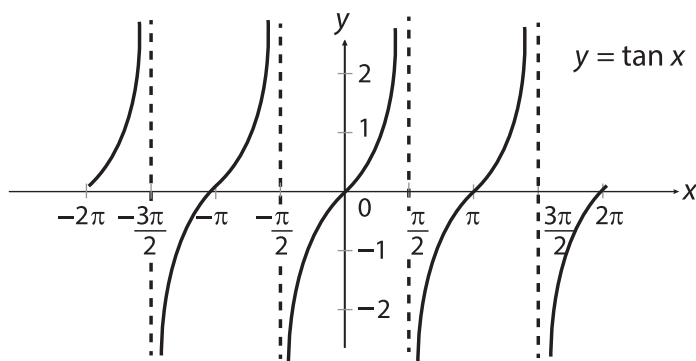


График $y = \tan x$

Синуса и косинуса, в принципе, достаточно, чтобы прийти к любой другой периодической тригонометрической функции. Именно благодаря такому своему уникальному свойству, как периодичность, они обрели огромную популярность для решения практических задач, в условиях которых заложена цикличность и «сезонность». Это и измерение температур, и анализ экономических данных, и многое другое. А еще с тригонометрическими функциями так или иначе связаны звуковые колебания, волны на воде, электричество и даже сердцебиение.

Ну и, по традиции, в завершение главы — самое интересное: между тригонометрией и числом π существует удивительная, поистине волшебная связь. Хотите ее увидеть? Возьмите калькулятор и наберите на нем столько пятерок, сколько получится. У меня, например, на экране уместилось их целых 16 — 5 555 555 555 555 555. Теперь посчитайте величину, обратную этому числу; у меня получилось

$$1/5\,555\,555\,555\,555\,555 = 1,8 \times 10^{-16}$$

Нажмите кнопку «sin» и посмотрите, что у вас получилось (вначале может идти несколько нулей — просто не обращайтесь на них внимания). Лично на меня с дисплея смотрело число

$$3,1415926535898 \times 10^{-18}$$

которое (после отбрасывания 17 нулей, идущих за запятой) почти в точности повторяло первые 16 цифр числа π ! К тому же результату можно прийти, начав с любого числа, состоящего как минимум из пяти пятерок.

В этой главе мы выяснили, зачем нужна тригонометрия, и увидели, как она помогает нам лучше понять свойства треугольников и окружностей. Тригонометрические функции — не просто «вещи в себе», они взаимодействуют, вступая друг с другом в замысловатые, но прекрасные в своей стройности отношения. А еще мы проследили их связь с числом π . Теперь черед за двумя другими важнейшими для математики величинами: иррациональной $e = 2,71828\dots$ и мнимой i .

ГЛАВА НОМЕР ДЕСЯТЬ

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Магия чисел i и e

Самая прекрасная математическая формула

Время от времени (с завидной, надо признать, регулярностью) математические и другие научные периодические издания проводят среди своих читателей опросы, предлагая им выбрать самое красивое уравнение. И раз за разом в числе лидеров оказывается она — удивительная формула, известная как тождество Эйлера:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Некоторые даже называют ее «уравнением Бога», ведь в ней сошлись вместе пять фундаментальных констант, пять самых важных чисел математики: 0 и 1 — начала всех арифметических начал, π , позволяющее постичь геометрию, e , открывающее врата во вселенную исчисления, и i , из которого произрастает древо алгебры.

В нем прекрасны и отношения между этими числами: сложение, умножение и возведение в степень — все то, что символизирует рост.

О ноле, единице и π мы уже кое-что знаем, самое время разобраться с иррациональным e и мнимым i . А когда разберемся, вы удивитесь, насколько простым вам покажется тождество Эйлера, буквально как $1 + 1 = 2$ (ну или хотя бы как $\cos 180^\circ = -1$).

Отступление

А вот еще несколько постоянных претендентов на корону самой красивой формулы. Большинство из них уже встречались вам на уже прочитанных страницах или скоро встретятся на непрочитанных. Первые два также рождены гением Леонарда Эйлера.

1. Любой многогранник, то есть фигура, сформированная определенным количеством граней (Γ), ребер (P) и вершин острых углов (B) соответствует представлению

$$\Gamma - P + B = 2$$

Куб, например, формируют 8 граней, 12 ребер и 6 вершин, значит, $\Gamma - P + B = 8 - 12 + 6 = 2$.

2. $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + \dots = \pi^2/6$
3. $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots = \infty$
4. $0,99999\dots = 1$
5. Формула Стирлинга для $n!$:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

6. Формула Бине для n -ного числа последовательности Фибоначчи:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

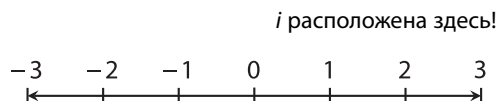
Мнимое число i : квадратный корень -1

Загадочная природа числа i кроется в формуле

$$i^2 = -1$$

На первый взгляд это кажется совершенно невозможным: разве может быть отрицательным число, умноженное несколько раз на само себя? В конце концов, даже $0^2 = 0$, а любая возведенная в квадрат отрицательная величина обязана стать положительной, разве нет? Не спешите рубить с плеча. Вспомните, ведь было такое время, когда вы вообще ничего не знали об отрицательных числах, да и, узнав, вряд ли сразу же поверили в их существование (как и многие-многие математики до вас). Что это вообще за глупость — количество, меньшее, чем 0? Как что-то может

быть меньше, чем ничто? Но потом в вашей жизни появляется некая ось (вроде той, что изображена чуть ниже), а вместе с ней — и все ее обитатели: положительные значения, расположившиеся справа от 0, и отрицательные значения, расположившиеся слева. В точно таком же, нестандартном ключе нам следует рассматривать и число i — тогда-то нам и откроется его истинное, реальное значение.



На такой оси нет места мнимым величинам. Где же тогда они находятся?

Число i считается *мнимым* — таким, которое при возведении в квадрат дает отрицательный результат. Мнимое число $2i$, например, дает $(2i)(2i) = 4i^2 = -4$.

В алгебраическом смысле мнимые числа ничем не отличаются от чисел действительных. Судите сами:

$$3i + 2i = 5i, \quad 3i - 2i = 1i = i, \quad 2i - 3i = -1i = -i$$

а

$$3i \times 2i = 6i^2 = -6, \quad \frac{3i}{2i} = 3/2.$$

Кстати, если взять и возвести в квадрат $-i$, получится тот же результат (-1) , потому что $(-i)(-i) = i^2 = -1$. Не менее предсказуемы и последствия перемножения мнимого и действительного чисел — скажем, $3 \times 2i = 6i$.

А что со сложением? Чему, например, равна сумма 3 и $4i$? Очевидно, что $3 + 4i$, и дальше с этим ничего сделать нельзя (равно как и ничего нельзя сделать с $1 + \sqrt{3}$). Числа, образованные по модели $a + bi$ (где a и b суть действительные величины), называются *комплексными*. Получается, что любая величина, будь она действительной (при $b = 0$) или мнимой (при $a = 0$), есть, по своей сути, особая форма комплексного числа. То есть действительное π и мнимое $7i$ будут также комплексными.

Давайте попробуем разобраться в этом с помощью нескольких конкретных примеров. Начнем со сложения и вычитания:

$$(3 + 4i) + (2 + 5i) = 5 + 9i$$

$$(3 + 4i) - (2 + 5i) = 1 - i$$

Для умножения применим алгебраический метод *FOIL*, описанный в главе 2:

$$\begin{aligned}(3 + 4i)(2 + 5i) &= 6 + 15i + 8i + 20i^2 \\ &= 6 - 20 + (15 + 8)i \\ &= -14 + 23i\end{aligned}$$

Для комплексного числа каждый квадратный многочлен $ax^2 + bx + c$ будет иметь два корня (или же один, но повторяющийся). Согласно формуле корней квадратного уравнения, многочлен будет равен 0 всякий раз, когда

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Помните, в главе 2 мы с вами говорили о том, что нельзя извлечь квадратный корень из отрицательной величины? Но ведь никакие квадратные корни отрицательных величин нам и не нужны. Смотрите сами: уравнение $x^2 + 2x + 5$, например, имеет корни

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Кстати, формула корней квадратного уравнения будет верна даже при комплексных значениях a , b или c .

В любом квадратном многочлене мы можем найти как минимум один корень, пусть и комплексный. На этот счет есть своя теорема.

Теорема (основная теорема алгебры): Любой многочлен $p(x)$, возводимый в первую или большую степень, имеет корень z при $p(z) = 0$.

Обратите внимание, что многочлен первой степени, вроде $3x - 6$, может быть представлен как $3(x - 2)$, где 2 есть единственный корень $3x - 6$. Обобщая, можно сказать, что при $a \neq 0$ многочлен $ax - b$ можно представить в виде $a(x - (b/a))$, где b/a будет являться корнем $ax - b$.

То же происходит и с многочленами второй степени: разложив $ax^2 + bx + c$ до $a(x - z_1)(x - z_2)$, мы получаем его корни — z_1 и z_2 (они вполне могут оказаться комплексными величинами, равно как и одной и той же величиной). И так можно продолжать до бесконечности — с любым многочленом любой степени.

Сопутствующая теорема: Любой многочлен степени $n \geq 1$ может быть разложен на n составляющих. А именно: если $p(x)$ есть многочлен n -ной степени, в котором главный член $a \neq 0$, должно существовать n чисел $z_1, z_2, \dots, z_n$ (которые вполне могут оказаться комплексными величинами, равно как и одной и той же величиной), соответствующих

$p(x) = a(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n)$. Величины z_i являются корнями многочлена при $p(z_i) = 0$.

Теорема эта означает, что любой многочлен степени $n \geq 1$ будет иметь как минимум один и как максимум n различных корней.

Например, $x^4 - 16$ есть многочлен четвертой степени. Следовательно, его можно разложить как

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$$

из чего очень хорошо видно, что у него будет четыре различных корня: 2, -2, 2i, -2i.

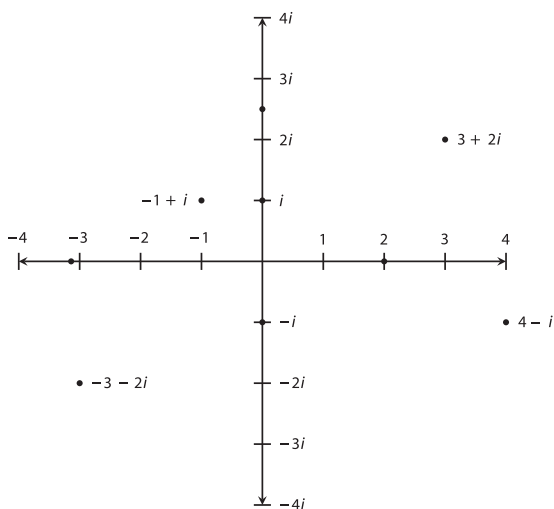
А вот многочлен третьей степени $3x^3 + 9x^2 - 12$ раскладывается так:

$$3x^3 + 9x^2 - 12 = 3(x^2 + 4x + 4)(x - 1) = 3(x + 2)^2(x - 1)$$

то есть имеет только два различных корня: -2 и 1.

Геометрия комплексных чисел

Комплексные числа можно представить в виде *комплексной же плоскости*. Выглядит она так же, как и алгебраическая система координат (x, y) , только вместо оси y мы чертим некую *мнимую ось*, на которой расположены числа $0, \pm i, \pm 2i$ и так далее. Вот как будут выглядеть на этой плоскости некоторые комплексные величины:



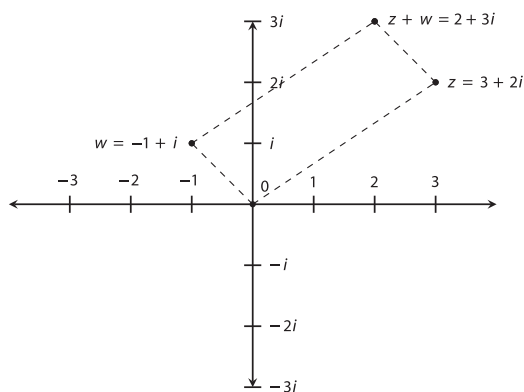
Комплексная плоскость и несколько расположенных на ней значений

Только что мы выяснили, насколько легко складывать, вычитать и умножать числовые выражения комплексных величин. С их геометрическими представлениями работать ничуть не сложнее: достаточно просто взглянуть на соответствующие точки.

Возьмем, к примеру, сложение:

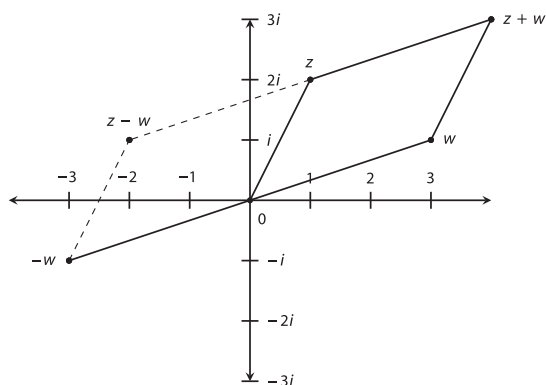
$$(3 - 2i) + (-1 + i) = 2 + 3i$$

Посмотрите на график ниже: точки 0 , $3 + 2i$, $2 + 3i$ и $-1 + i$ образуют параллелограмм.



Вы удивитесь, но его вполне достаточно, чтобы сложить комплексные числа z и w .

Для вычитания $z - w$ возьмем третью точку $-w$, расположенную симметрично напротив w . А теперь просто сложим z и $-w$, как показано на графике:

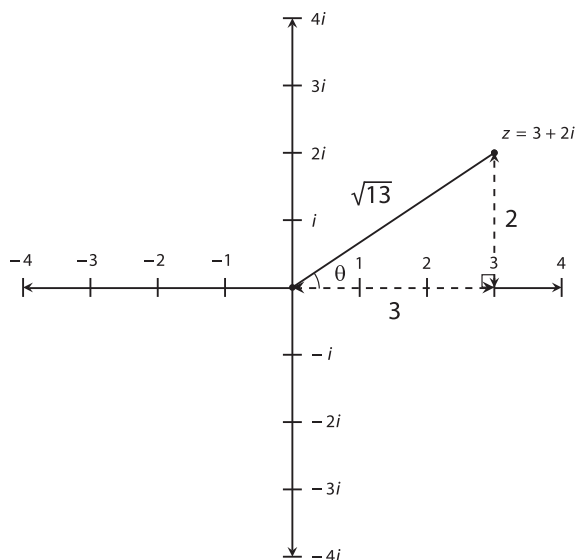


Комплексные числа можно складывать и вычитать с помощью параллелограммов

Для умножения и деления нам понадобится измерить комплексные величины. *Модулем* (или *длиной*) любого комплексного числа считается длина отрезка от начала координат 0 до точки, соответствующей искомому числу. То есть модуль числа z (обозначается как $|z|$) есть расстояние от 0 до точки z . Если $z = a + bi$, тогда, согласно теореме Пифагора, модуль z будет равен

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

На графике ниже хорошо видно, что точка $3 + 2i$ имеет модуль $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Обратите внимание, что для соответствующего этой точке угла θ $\tan \theta = 2/3$. Следовательно, $\theta = \tan^{-1} 2/3 \approx 33,7^\circ$ или примерно 0,588 рад.

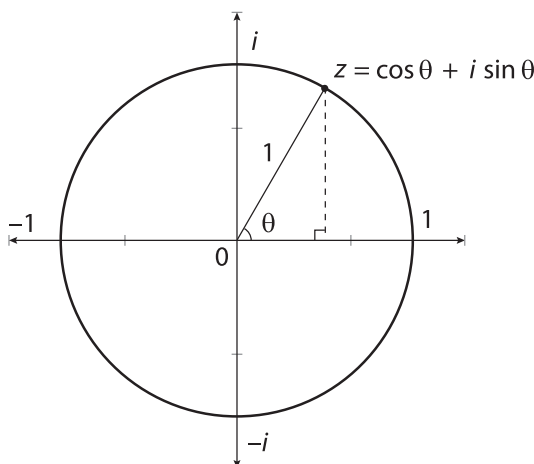


Комплексное число $z = 3 + 2i$ имеет длину $|z| = \sqrt{13}$ и угол θ , тангенс которого равен $\tan \theta = 2/3$

Точки с модулем, равным 1, складываются в *единичную окружность* (см. график ниже). Чему будет равно комплексное число, образующее угол θ ? Если бы мы находились в более привычной системе координат, нужная нам точка имела бы координаты $(\cos \theta, \sin \theta)$ — это нам хорошо известно по предыдущей главе. Значит, здесь получаем $\cos \theta + i \sin \theta$. То есть любая комплексная величина с модулем R соответствует формуле

$$z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$$

что есть не что иное, как *тригонометрическое представление* этого числа. Забегу немного вперед: в конце главы мы выясним, что равно оно будет $Re^{i\theta}$.



Единичная окружность на комплексной плоскости

А вот еще кое-что интересное: при перемножении комплексных чисел будут перемножаться и их модули.

Теорема: Для комплексных величин z_1 и z_2 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. Иными словами, модуль произведения есть произведение модулей.

Отступление

Доказательство: Предположим, что $z_1 = a + bi$, а $z_2 = c + di$. Тогда $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$, а $|z_2| = \sqrt{c^2 + d^2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 |z_1 z_2| &= |(a + bi)(c + di)| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| \\
 &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\
 &= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd} \\
 &= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2} \\
 &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \\
 &= |z_1| |z_2|
 \end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned} |(3 + 2i)(1 - 3i)| &= |9 - 7i| = \sqrt{9^2 + (-7)^2} = \sqrt{130} = \\ &= \sqrt{13}\sqrt{10} = |3 + 2i||1 - 3i| \end{aligned}$$

А что насчет угла, привязанного к произведению? Для обозначения угла, образованного комплексным z и «положительной» половиной оси x , обычно используется представление $\arg z$. Так, $\arg(3 + 2i) = 0,588$ рад. Аналогично $\arg(1 - 3i) = \tan^{-1}(-3) = -71,56^\circ = -1,249$ рад, потому что значение $1 - 3i$ располагается в квадранте IV, а тангенс его угла θ равен -3 .

Обратите внимание, что угол значений $(3 + 2i)(1 - 3i) = (9 - 7i)$ имеет $\tan^{-1}(-7/9) = -37.87^\circ = -0,661$ рад, что есть $0,588 + (-1,249)$. И имеется теорема, которая доказывает, что это совсем не совпадение!

Теорема: Для комплексных величин z_1 и z_2 $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$. Другими словами, *угол произведения есть сумма углов*.

Доказательство этого (оно приведено в «отступлении») основано на некоторых тригонометрических тождествах, рассмотренных нами в предыдущей главе.

Отступление

Доказательство: Возьмем две комплексные величины z_1 и z_2 , имеющие модули R_1 и R_2 и углы θ_1 и θ_2 соответственно. Записав их в тригонометрическом представлении, имеем

$$z_1 = R_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad z_2 = R_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

Тогда на основании тождеств $\cos(A + B)$ и $\sin(A + B)$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= R_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) R_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= R_1 R_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] \\ &= R_1 R_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2))] \end{aligned}$$

Следовательно, $z_1 z_2$ имеет модуль $R_1 R_2$ (что нам уже известно) и угол $\theta_1 + \theta_2$, что и требовалось доказать. $\square$

Обобщим: чтобы умножить комплексные величины, нужно *умножить их модули и сложить их углы*. К примеру, при умножении некоего числа

на i модуль останется прежним, а угол «вырастет» на 90° . Имейте в виду, что при перемножении двух действительных величин положительные числа будут иметь углы, равные 0° (или, что то же самое, 360°), а отрицательные — 180° . Два угла по 180° дадут в сумме 360° — еще одно доказательство, что произведение двух отрицательных величин есть величина положительная. Мнимые же числа имеют углы, равные либо 90° , либо -90° (или 270°). Следовательно, при умножении такого числа на само себя угол должен быть равен 180° (так как $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, а $-90^\circ + -90^\circ = -180^\circ$, что ничем не отличается от 180°), что соответствует отрицательной величине.

Ну и, наконец, возьмем число z с углом θ : $1/z$ должно иметь угол $-\theta$. (Почему? Да потому что $z \cdot 1/z = 1$, то есть z и $1/z$ должны в сумме давать 0° .)

Получается, что при делении комплексных чисел, мы делим их модули и вычитаем их углы: z_1/z_2 имеет модуль R_1/R_2 и угол $\theta_1 - \theta_2$.



Извините, вы достигли мнимой величины. Для получения действительного результата, пожалуйста, переверните телефон на 90° и произведите необходимые вычисления повторно.

Магия числа e

Если вдруг у вас под рукой есть профессиональный калькулятор, сделайте вот что:

1. Наберите на нем любое хорошо запоминающееся семизначное число (можно взять номер телефона, несколько цифр из номера паспорта или просто любимую цифру, повторенную семь раз).

2. Посчитайте обратную ему величину (для этого нужно нажать кнопку $1/x$).
3. Прибавьте к нему единицу.
4. Возведите результат в степень, равную загаданному семизначному числу (нажимаете кнопку x^y , вводите семь цифр и нажимаете «равно»).

Первые четыре цифры ответа — 2,718, да? Не удивлюсь даже, если у вас получится

$$e = 2,718281828459045...$$

то есть цифр, совпадающих с иррациональным числом e , будет куда больше.

Так что это за мистическое e такое, в чем его секрет и зачем оно вообще нужно?

Ваши операции с калькулятором свелись, по сути, к

$$(1 + 1/n)^n$$

где n и есть ваше семизначное число. Семь знаков — много, но что будет, если их будет еще больше? С одной стороны, число $(1 + 1/n)$ будет все ближе и ближе подбираться к единице, которая при возведении в степень останется единицей. Следовательно, было бы разумным предположить, что при любом большом значении n $(1 + 1/n)^n$ будет приблизительно равно единице (например, $1,001^{100} \approx 1,105$).

С другой стороны, даже при больших значениях n результат $(1 + 1/n)$ никогда не опустится ниже этой самой единицы. А при последовательном возведении такого числа во все бóльшую и бóльшую степень, увеличиваться будет и итог (скажем, $1,001^{10\,000}$ будет больше 20 000).

Сложность здесь заключается в том, что «основа» $(1 + 1/n)$ становится тем *меньше*, чем больше *возрастает* n . И это постоянное «перетягивание каната» между единицей и бесконечностью пододвигает ответ все ближе и ближе к $e = 2,71828...$ (Так, $1,001^{1000} \approx 2,717$.)

Давайте посмотрим повнимательнее, как ведет себя функция $(1 + 1/n)^n$ при возрастающих значениях n :

n	$(1 + 1/n)^n$
10	$(1,1)^{10} = 2,5937424...$
100	$(1,01)^{100} = 2,7048138...$
1000	$(1,001)^{1000} = 2,7169239...$
10 000	$(1,0001)^{10\,000} = 2,7181459...$
100 000	$(1,00001)^{100\,000} = 2,7182682...$
1 000 000	$(1,000001)^{1\,000\,000} = 2,7182805...$
10 000 000	$(1,0000001)^{10\,000\,000} = 2,7182817...$

Именно так и определяется число e : как величина, к которой приближается $(1 + 1/n)^n$ с возрастанием значения n . Математики называют ее *пределом* $(1 + 1/n)^n$ при n , стремящейся к бесконечности. Записывается это следующим образом:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$$

Если заменить дробь $1/n$ на x/n , оговорившись, что x есть действительная величина, то с возрастанием n/x число $(1 + x/n)^{n/x}$ будет все больше приближаться к e . Возведя обе части этого уравнения в степень x (и вспомнив, что $(a^b)^c = a^{bc}$), мы приходим к экспоненциальной формуле:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = e^x$$

где x — любое комплексное число. Вы удивитесь, но от этой формулы есть вполне себе практическая польза. Предположим, что вы открыли в банке накопительный счет под 6% годовых (то есть ставка составит 0,06) и положили на него \$10 000. Если процент начисляется раз в год, то через 365 дней у вас будет \$10 000(1,06) = \$10 600. Именно от этой суммы банк будет исчислять 6% в следующем году: \$10 000(1,06)² = \$11 236. Через три года уравнение преобразуется в \$10 000(1,06)³ = \$11 910,16. Через t же лет — в

$$\$10\,000(1,06)^t$$

Чтобы отследить общую закономерность, заменим ставку 0,06 ставкой r , а начальную сумму \$10 000 суммой P . Тогда через t лет вы смогли бы получить

$$\$P(1 + r)^t$$

Теперь предположим, что проценты начисляются дважды в год: по 3% каждые 6 месяцев. Через год на вашем счете будет лежать $\$10\,000(1,03)^2 = \$10\,609$ — немного больше, чем в прошлом случае.

С ежеквартальными (раз в три месяца) начислениями вы заработаете 4 раза по 1,5%, то есть $\$10\,000(1,015)^4 = \$10\,613,63$.

Давайте обобщим и это: при начислении процента n раз в год через 365 дней сумма ваших накоплений составит

$$\$10\,000 \left(1 + \frac{0,06}{n}\right)^n$$

При очень больших значениях n мы будем иметь дело с *непрерывными* начислениями процента. Согласно второму замечательному пределу, за год получится

$$\$10\,000 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0,06}{n}\right)^n = 10\,000e^{0,06} = 10\,618,36$$

Сведем все это в таблицу:

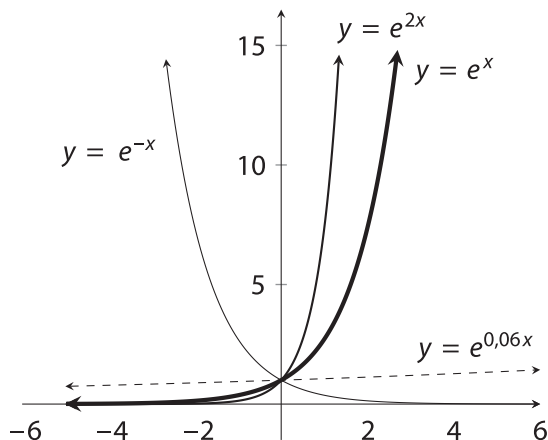
Вклад, \$	Процент	Начисления	Сумма к концу первого года
10 000	6	Ежегодно	$\$10\,000(1,06) = \$10\,600,00$
10 000	6	2 раза в год	$\$10\,000(1,03)^2 = \$10\,609,00$
10 000	6	4 раза в год	$\$10\,000(1,015)^4 = \$10\,613,83$
10 000	6	Ежемесячно	$\$10\,000(1,005)^{12} = \$10\,616,77$
10 000	6	n раз в год	$\$10\,000 \left(1 + \frac{0,06}{n}\right)^n$
10 000	6	Непрерывно	$\$10\,000e^{0,06} = \$10\,618,36$

Иными словами, начав с $\$P$, с непрерывными начислениями по ставке r через t лет вы получите $\$A$. Все это выражается очень симпатичной во всех отношениях формулой

$$A = Pe^{rt}$$

Как хорошо видно на графике, функция $y = e^x$ растет очень быстро. По соседству с ней мы изобразим графики e^{2x} и $e^{0,06x}$. Правда, похожи? Подобный рост называется *ростом по экспоненте*. Если же взять график

$y = e^{-x}$, то он очень быстро приближается к 0, то есть демонстрирует *спад по экспоненте*.



Несколько показательных (экспоненциальных) функций

А что насчет графика 5^x ? Так как $e < 5 < e^2$, он должен лежать между e^x и e^{2x} . Если точнее, то $e^{1,609...} = 5$, следовательно, $5^x \approx e^{1,609x}$. В целом же любую функцию a^x можно представить в виде e^{kx} , где k есть экспонента, соответствующая $a = e^k$. А для того, чтобы найти k , нам понадобятся *логарифмы*.

Точно так же, как квадратный корень является обратным представлением квадратичной функции (то есть находится с ней во «взаимоотменяющих» отношениях), логарифм является обратным представлением показательной (экспоненциальной) функции. Наиболее часто используемый логарифм — десятичный (то есть по основанию 10), обозначаемый как $\lg x$. Считается, что

$$y = \lg x \text{ если } 10^y = x$$

из чего следует

$$10^{\lg x} = x$$

Например, так как $10^2 = 100$, $\lg 100$ будет равен 2. Вот очень полезная таблица логарифмов:

Логарифм	Объяснение
$\lg 1 = 0$	Так как $10^0 = 1$
$\lg 10 = 1$	Так как $10^1 = 10$
$\lg 100 = 2$	Так как $10^2 = 100$
$\lg 1000 = 3$	Так как $10^3 = 1000$
$\lg (1/10) = -1$	Так как $10^{-1} = 1/10$
$\lg 0,01 = -2$	Так как $10^{-2} = 0,01$
$\lg \sqrt{10} = 1/2$	Так как $10^{1/2} = \sqrt{10}$
$\lg 10^x = x$	Так как $10^x = 10^x$
$\lg 0$ не определен	Так как нет такого значения y , при котором $10^y = 0$

Одной из причин популярности логарифмов является их уникальная способность преобразовывать огромные значения в малые, куда более удобоваримые для человеческого ума. Логарифмы, в частности, используются при измерении и подсчете магнитуды землетрясения по шкале от 1 до 10 (да-да, это я о знаменитой шкале Рихтера), громкости звука (в децибелах), кислотности химических растворов (*pH*) и даже рейтинга посещаемости интернет-страниц (в алгоритме *PageRank*, придуманном корпорацией *Google*).

Что собой представляет $\lg 512$? Любой профессиональный калькулятор (равно как и большинство поисковых систем в Интернете) скажет вам, что $\log 512 = 2,709\dots$. Вполне похоже на правду: 512 находится между 10^2 и 10^3 , а значит, его логарифм должен быть больше 2, но меньше 3.

Логарифмы были изобретены для того, чтобы преобразовывать умножение в более простое сложение. Основано это на одной любопытной теореме.

Теорема: Для любых положительных значений x и y

$$\log xy = \log x + \log y$$

Другими словами, логарифм произведения равен сумме логарифмов.

Доказательство: Согласно правилам действий со степенями,

$$10^{\lg x + \lg y} = 10^{\lg x} 10^{\lg y} = xy = 10^{\lg xy}$$

Следовательно, возведение 10 в степень $\lg x + \lg y$ дает xy , что и требовалось доказать. □

Не менее полезно следующее правило.

Теорема: Для любого положительного значения x и любого целого значения n

$$\log x^n = n \log x$$

Доказательство: Согласно правилам действий со степенями, $a^{bc} = (a^b)^c$. Следовательно,

$$10^{n \lg x} = (10^{\lg x})^n = x^n$$

то есть логарифм x^n равен $n \lg x$. □

Десятичный логарифм — штука вполне себе обычная, насколько вообще обычным может быть нечто столь активно использующееся в таких важных областях науки, как химия, физика или геология (справедливости ради все же следует упомянуть, что в информатике и дискретной математике предпочтение отдается логарифму с основанием 2). В целом же для любого значения $b > 0$ логарифм по основанию b $\log_b$ определяется согласно следующему правилу

$$y = \log_b x \text{ если } b^y = x$$

Так, $\log_2 32 = 5$, потому что $2^5 = 32$. А все уже рассмотренные нами свойства логарифмов соответствуют любому значению b . Так, например,

$$b^{\log_b x} = x \quad \log_b xy = \log_b x + \log_b y \quad \log_b x^n = n \log_b x$$

В большинстве разделов математики, физики и техники самым полезным считается логарифм по основанию $b = e$. Он называется натуральным и даже имеет свое специальное обозначение — $\ln x$. То есть

$$y = \ln x \text{ если } e^y = x$$

Или же, для всех действительных значений x ,

$$\ln e^x = x$$

Ваш калькулятор, например, может за долю секунды подсчитать, что $\ln 5 = 1,609\dots$, однако это нам уже хорошо известно по тому, что $e^{1,609} \approx 5$. Подробнее же о функциях натурального логарифма мы поговорим в главе 11.

Отступление

Большинство профессиональных калькуляторов способно считать как натуральные, так и десятичные логарифмы. И лишь очень немногие ориентированы на другие значения b . Впрочем, проблемы тут никакой нет: одно основание довольно легко преобразовать в другое. Да-да, один логарифм является ключом ко всем остальным! На этот счет даже есть своя теорема, благодаря которой мы можем, например, взять логарифм по основанию 10 и найти его аналог по основанию b .

Теорема: Для любых положительных значений b и x

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$$

Доказательство: Предположим, что $y = \log_b x$. Тогда $b^y = x$. Прологарифмируем обе части: $\log b^y = \log x$. Согласно второму замечательному пределу, $y \log b = \log x$. Следовательно, $y = (\log x)/(\log b)$, что и требовалось доказать. $\square$

$$\ln x = (\log x)/(\log e) = (\log x)/(0,434...) \approx 2,30 \log x$$

$$\log_2 x = (\log x)/(\log 2) = (\log x)/(0,301...) \approx 3,32 \log x$$

Другие лики e

Как и число π , число e широко используется в математике. И, как и π , оно встречается подчас там, где вы совершенно не ожидаете его увидеть. Например, колоколообразная кривая, которую мы уже упоминали в главе 8, имеет формулу

$$y = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

а ее график, изображенный чуть ниже, — наверное, самый важный график в любом статистическом исследовании.

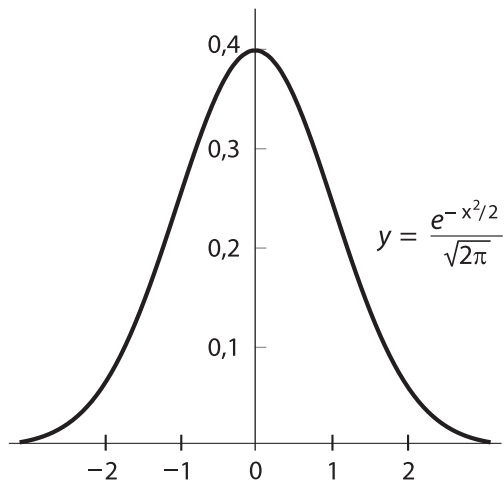
В той же главе 8 мы встречали e в формуле Стирлинга для множества $n!$:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Позже, в главе 11, на примере e^x и бесконечной последовательности

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

мы увидим важную связь между числом e и факториальным многочленом.



Формула колоколообразной кривой выглядит как $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$

В частности, при $x = 1$,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Не правда ли, очень легкий и быстрый способ определить цифры, составляющие число e ?

Кстати, о цифрах... Вы наверняка уже заметили, что число e начинается с повторяющейся последовательности цифр

$$e = 2,718281828\dots$$

или, как любил повторять один мой преподаватель, «2,7 Эндрю Джексон, Эндрю Джексон», потому что седьмой президент США был избран именно в 1828 году. («Запоминалка» эта, кстати, отлично подходит и студентам-историкам: с помощью первых цифр числа e можно запомнить год из-

брания Джексона.)¹ Как тут не усомниться в иррациональной природе e ? Ведь если бы последовательность 1828 повторялась бесконечно, e было бы обычным рациональным числом. Но нет, дальше идут 6 цифр... 459045... (лично я запомнил их как значения углов равнобедренного прямоугольного треугольника).

Вмешивается e и в вопросы вероятности. Предположим, что раз в неделю вы покупаете лотерейный билет с шансом выиграть приз 1 к 100. Какова вероятность того, что за 100 недель вы что-нибудь да выиграете? Каждую неделю ваш «коэффициент удачи» равен $1/100 = 0,01$, а «коэффициент невезения» — $99/100 = 0,99$. Так как количество билетов неограниченно (то есть удача на этой неделе никак не зависит от невезения на прошлой), за весь срок получаем

$$(0,99)^{100} \approx 0,3660$$

что очень близко

$$1/e \approx 0,3678794...$$

Нет, это не совпадение. Вспомните формулу, в которой мы впервые увидели e^x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Если мы положим $x = -1$, то при любом большом значении n получим

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx e^{-1} = 1/e$$

Когда $n = 100$, $(0,99)^{100}$ будет примерно равно $1/e$. То есть ваши шансы выиграть приз за 100 недель составляют $1 - (1/e) \approx 64\%$.

Одна из самых моих любимых задач, связанных с вероятностью, — *задача о сочетании пар*. Представьте себе класс, состоящий из n учеников. Учитель раздает им тетрадки с проверенным домашним заданием. Но то ли по рассеянности, то ли от усталости раздает он их как попало, в случайном порядке (то есть тетрадка может попасть как к своему хозяину, так и к любому другому ученику). Каков шанс того, что ни одна из тетрадок не попадет в «правильные» руки? Иными словами, если мы

¹ Отечественный вариант гласит: «Экспоненту помнить способ есть простой: два и семь десятых, дважды Лев Толстой». Все читатели, разумеется, помнят, что автор «Войны и мира» и «Анны Карениной» родился в 1828 г. А если не помнили, то вот вам хороший повод запомнить. — Прим. ред.

возьмем все числа от 1 до n и «перемешаем» их в произвольном порядке, какова вероятность того, что ни одно из них не совпадет со своей «правильной» позицией? Например, при $n = 3$ числа 1, 2 и 3 можно «перемешать» $3! = 6$ разными способами, но под наши условия подходят только два из них: 231 и 312. Следовательно, для $n = 3$ нужная нам вероятность составит 2 к 6 или 1 к 3.

С количеством тетрадей, равным n , существует $n!$ возможных способов распределения их между учениками. Количество тех из них, которые соответствуют нашим условиям, обозначим как D_n . Тогда шанс того, что никто из учеников не получит свою тетрадку, составит $p_n = D_n/n!$. Если n равно 4, то D_n будет равно 9:

2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321

И тогда $p_4 = D_4/4! = 9/24 = 0,375$.

А вот каковы вероятности для других значений n :

n	D_n	$p_n = D_n/n!$
1	0	0
2	1	$1/2 = 0,50000$
3	2	$2/6 = 0,33333$
4	9	$9/24 = 0,37500$
5	44	$44/120 = 0,36667$
6	265	$265/720 = 0,36806$
7	1856	$1865/5040 = 0,36825$
8	14 887	$14\,887/40\,320 = 0,36823$

С увеличением n значение p_n будет все ближе и ближе подбираться к $1/e$. И вот что самое удивительное: вероятность попадания тетрадок в руки их законных хозяев совершенно не зависит от количества учеников в классе, будь их десять, сто или миллион. И вероятность эта эти очень-очень близка к величине $1/e$.

Но откуда берется это $1/e$? В первом нашем представлении, с числом учеников, равным n , возможность каждого из них получить свою тетрадь составляет $1/n$, а возможность получить чужую — $1 - (1/n)$. Возьмем последнюю величину и распространим ее на весь класс:

$$p_n \approx \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx 1/e$$

Почему приблизительно, спросите вы? Да потому что здесь, в отличие от задачи с лотерейными билетами, мы не сталкиваемся с последовательностью независимых друг от друга событий. Количество тетрадок ограничено, поэтому первое же «попадание» учителя в цель немного увеличит шансы второго ученика получить чужую тетрадку (то есть вместо $1/n$ мы будем иметь уже $1/(n-1)$), а первый же «промах» — немного уменьшит. Но так как и в том и в другом случае вероятность изменяется незначительно, на верности нашего представления это не слишком сказывается.

Точное же значение p_n основывается на бесконечной последовательности для e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Если в этом уравнении мы подставим $x = -1$, у нас получится

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots = e^{-1} = 1/e$$

То есть в классе, состоящем из n учеников, вероятность того, что никто из них не получит свою тетрадь, составляет *ровно*

$$p_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Например, если $n = 4$, $p_n = 1 - 1 + 1/2 - 1/6 + 1/24 = 9/24$ — ответ, к которому мы уже приходили выше. Приближение к $1/e$ здесь невероятно стремительно. Промежуток между p_n и $1/e$ меньше, чем $1/(n+1)!$. Следовательно, значение p_4 находится в диапазоне от $1/5! = 0,0083$ до $1/e$, значение p_{10} совпадает с $1/e$ вплоть до 7 знаков после запятой, а значение p_{100} — вплоть до 150 знаков!

Отступление

Теорема: Число e является иррациональным.

Доказательство: Предположим обратное — что число e является рациональным. Тогда при положительных целых значениях m и n будет верно то, что $e = m/n$. С помощью n разобьем бесконечную последовательность для e на две части — так, чтобы e было равно $L + R$, то есть

$$L = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

$$R = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots$$

Обратите внимание, что $n!e = en(n-1)! = m(n-1)!$ должно быть целой величиной (потому что и m , и $(n-1)!$ суть целые величины), равно как и $n!L$ (потому что $n!/k!$ есть целая величина при любом $k \leq n$). Следовательно, $n!R = n!e - n!L$ представляет собой разность двух целых чисел, а значит, и само является целым числом, что невозможно: поскольку условие, что $n \geq 1$, означает, что

$$\begin{aligned} n!R &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots \\ &= \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 0,71828\dots \\ &< 1 \end{aligned}$$

Не существует целых величин меньше 1, поэтому мы не можем считать $n!R$ целым числом. Значит, наше предположение, что $e = m/n$, ведет к противоречию, из чего следует, что число e — иррациональное. $\square$

Уравнение Эйлера

Число e было открыто и введено в оборот великим математиком Леонардом Эйлером. И именно Эйлер впервые обозначил его буквой e . Но, как полагает большинство специалистов по истории математики, вовсе не потому, что это была первая буква его фамилии¹. Тем не менее e до сих пор достаточно часто называют «числом Эйлера».

Нам уже встречались бесконечные последовательности для функций e^x , $\cos x$ и $\sin x$. Откуда они берутся, мы узнаем в следующей главе. Сейчас же просто соберем их в одном месте:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

¹ Имеется в виду немецкое написание Leonhard Euler. — Прим. пер.

Считалось, что эти формулы работают при любых действительных значениях x . Эйлеру же хватило дерзости предположить, что они будут истинны и при мнимых значениях x . Задавшись вопросом, что произойдет, если возвести число в степень мнимого числа, он сформулировал свою известную теорему.

Теорема Эйлера: Для любого значения угла θ (выраженного в радианах)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Доказательство: Посмотрим, что будет происходить с последовательностью для e^x при $x = i\theta$:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \dots$$

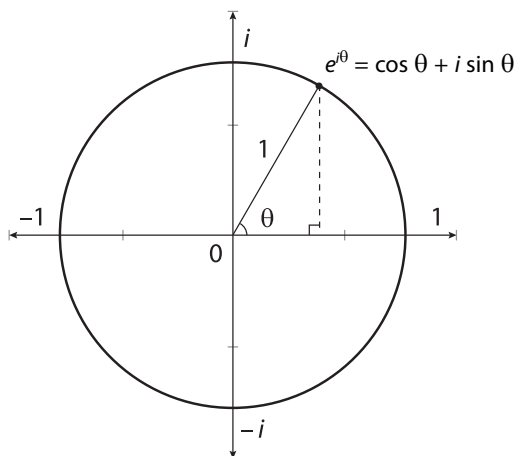
Обратите внимание на поведение i при возведении его в последовательные степени: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ (последнее потому, что $i^3 = i^2 i = -i$). Затем закономерность повторяется: $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$ и т.д. Еще более пристальное внимание следует обратить на то, что среди полученных результатов последовательно чередуются действительные и мнимые величины, что дает нам возможность выносить число i за скобки при каждом втором шаге:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Это приводит нас к доказательству «уравнения Бога», с которого мы начинали эту главу. Приняв $\theta = \pi$ рад (или 180°), мы получим

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i(0) = -1$$

Но это далеко не все, о чем говорит нам теорема Эйлера. Мы уже встречались с $\cos \theta + i \sin \theta$ — это есть точка на единичной окружности, лежащей на комплексной плоскости. Вместе с «положительной» половиной оси x она образует угол θ . Так вот, с помощью теоремы Эйлера эту точку можно представить очень простым способом — таким, какой показан на графике



Согласно теореме Эйлера, все точки, лежащие на единичной окружности, имеют форму $e^{i\theta}$

Но и это еще не все! Любая точка комплексной плоскости имеет на окружности свое соответствие. А именно комплексная величина z с модулем R и углом θ представляет собой некую в R раз увеличенную точку, лежащую на окружности. Другими словами,

$$z = Re^{i\theta}$$

Следовательно, если у нас на комплексной плоскости есть две точки $z_1 = R_1e^{i\theta_1}$ и $z_2 = R_2e^{i\theta_2}$, то, согласно правилам действий со степенями (в версии, касающейся комплексных величин)

$$z_1 z_2 = R_1 e^{i\theta_1} R_2 e^{i\theta_2} = R_1 R_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

что является комплексным числом с модулем $R_1 R_2$ и углом $\theta_1 + \theta_2$. И снова мы приходим к выводу, что произведение комплексных величин — это, по сути, произведение их модулей и сумма их углов. Только согласитесь: теорема Эйлера и число e приводят нас к этому умозаключению куда безболезненнее и быстрее, чем наше предыдущее — длиной в целую страницу — алгебраическо-тригонометрическое доказательство.

Давайте же восславим число e уже ставшим привычным для нас способом (и да простит нас Джойс Килмер¹):

¹ Джойс Килмер (1886–1918) — американский прозаик и поэт. Автор приносит извинения за свою пародию на его знаменитое стихотворение «Деревя» (1913), заканчивающее эту главу. — Прим. пер.

Не сыщешь веку вопреки
Числа чудеснее, чем e .
Ты не забудешь никогда
Два-семь-один и восемь-два...
Его чудесный строгий вид
В сердцах у нас всегда горит.
Оно задачи облегчит
И интегралы разрешит.
Докажет ерунду любой,
Но только Эйлер — наш герой.

ГЛАВА НОМЕР ОДИННАДЦАТЬ

$$y = x^{11} \Rightarrow y' = 11x^{10}$$

Магия исчисления

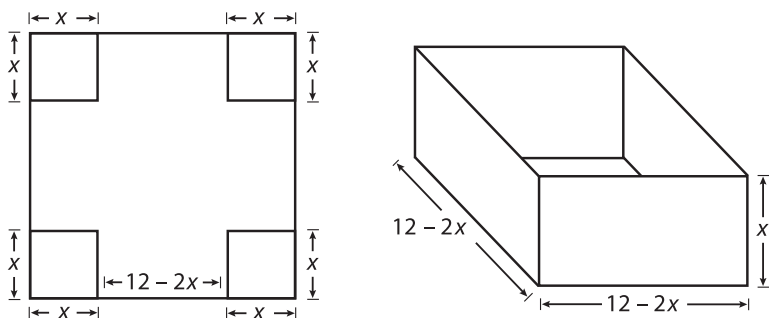
Касательно касательных

Математика — это язык, на котором говорит наука. Стоит ли удивляться, что большинство законов природы описываются с помощью математического алфавита? Исчисление — один из способов познать суть вещей, то, как они изменяются, развиваются, движутся. Эту главу мы посвятим измерению скорости, с которой изменяются функции, и изучению теории приближений — примерной оценки (аппроксимации) сложных и простых полиномиальных функций (многочленов). А еще исчисление — мощное средство *оптимизации*. Это наиболее эффективный способ подобрать такие величины и порядок работы с ними, которые дадут оптимальный результат. (Например, если мы планируем доходы или надеемся выжать максимум при минимуме затраченных усилий, результат должен быть наибольшим, а если хотим сэкономить или ищем кратчайший путь из точки А в точку Б, — наименьшим.)

Предположим, что у вас есть лист картона размером 12 на 12 см (см. рисунок). Наша задача — сделать из него лоток, для чего нам нужно от каждого из четырех углов отрезать по квадратику размером x на x сантиметров. Чему должен быть равен x , чтобы у нас получился максимально вместительный лоток?

Представим объем как функцию x . Площадь основания лотка равна $(12 - 2x)(12 - 2x)$, а высота его стенок — x . Значит, объем можно посчитать как

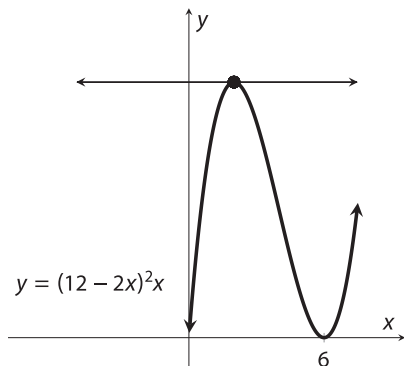
$$V = (12 - 2x)^2 x$$



При каком значении x лоток получится максимально вместительным?

кубических сантиметров. Значение x должно быть таким, чтобы значение V было максимальным. Однако в крайности впадать не следует: при $x = 0$ или $x = 6$ объем лотка будет нулевым. Значит, оптимальный результат лежит где-то между этими двумя значениями.

Попробуем графический подход — визуализируем функцию $y = (12 - 2x)^2 x$ для значений x в диапазоне от 1 до 6. При $x = 1$ объем составит $y = 100$; при $x = 2 - y = 128$; при $x = 3 - y = 108$. Значение $x = 2$ выглядит многообещающе, но что, если в диапазоне от 1 до 3 есть другая действительная величина, которая подойдет нам еще лучше?



Через точку, в которой $y = (12 - 2x)^2 x$ достигает своего максимального значения, проведена горизонтальная касательная линия

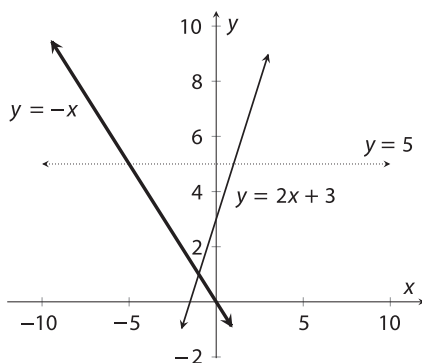
Влево от максимума функция растет, вправо — уменьшается. Слева значение ее наклона положительное, справа — отрицательное. В самой верхней точке не происходит ничего — функция в ней словно застыла в нерешительности, выбирая, куда направиться: вверх или все-таки вниз. Поэтому через нее можно смело провести горизонтальную (то есть с нулевым наклоном) касательную. Именно ее — такую *оптимальную* точку — мы и будем искать в этой главе.

А заодно мы коснемся касательных, и для этого нам придется срезать углы, причем не только в переносном, но и вполне себе прямом (как мы это делали только что в задачке про лоток) смысле.

Исчисление — штука непростая и громоздкая: у вас вряд ли получится найти по ней учебник меньше, чем на тысячу страниц. В нашем же распоряжении их едва ли больше 20, поэтому единственное, что мы успеем — так это чуть-чуть посветить спичкой в темной комнате. Все, что нам предстоит увидеть, — *дифференциальный* аспект исчисления, касающийся функций; *интегральную* же сторону, необходимую для того, чтобы подсчитывать площади и объемы сложных объектов, придется оставить пылиться в углу.

Начнем с самого простого — функций, представленных прямыми. В главе 2 мы уже говорили о том, что наклон графика линейной функции $y = tx + b$ равен t . Следовательно, при росте значения x на единицу y будет увеличиваться на t . Допустим, наклон $y = 2x + 3$ равен 2. Увеличив x на 1 (скажем, с $x = 10$ до $x = 11$), мы тем самым увеличим y на 2 (то есть с 23 до 25).

На графике ниже проведено несколько разных линий. Диагональная функция $y = -x$ имеет наклон -1 , а горизонтальная $y = 5$ — наклон 0.



Графики линейных функций

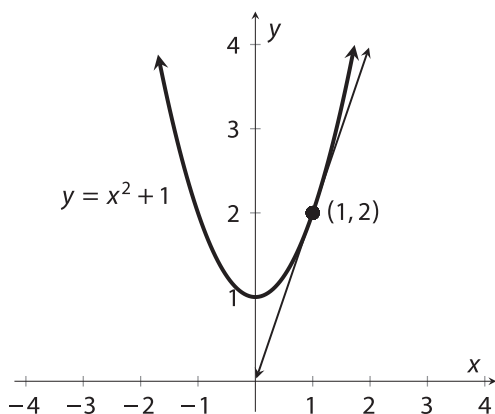
Задав две точки, мы можем провести через них прямую. Ее наклон можно определить, не прибегая к формуле самой прямой, — достаточно взять координаты точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и вставить их в уравнение

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

позволяющее узнать отношение приращения функции к приращению аргумента.

Для примера возьмем линию $y = 2x + 3$ и две ее точки с координатами $(0, 3)$ и $(4, 11)$. Ее наклон составит $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (11 - 3)/(4 - 0) = 8/4 = 2$ — тот же ответ, к которому мы можем прийти с помощью уравнения прямой.

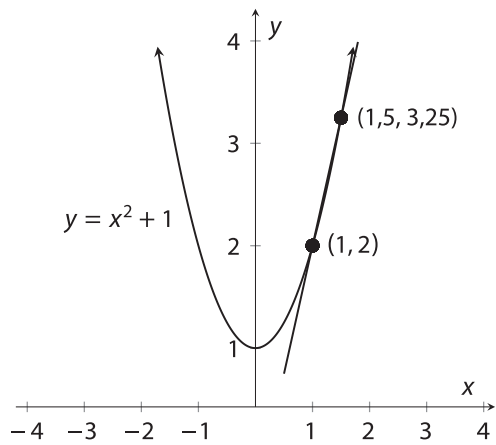
Теперь рассмотрим функцию $y = x^2 + 1$, изображенную на графике внизу. Это не прямая: мы можем проследить, как постоянно меняется ее наклон. А вот касательная, проходящая через точку $(1, 2)$ — прямая. Попробуем определить ее наклон.



Определим наклон касательной, проходящей через точку $(1, 2)$ функции $y = x^2 + 1$

Для этого нам нужны хотя бы две точки. Что же делать? Придется взять еще одну линию — такую, которая пересекает кривую функции как минимум дважды (так называемую *секущую*). Приняв $x = 1,5$, мы получаем $y = (1,5)^2 + 1 = 3,25$. Согласно уже рассмотренной нами формуле, наклон секущей составляет

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3,25 - 2}{1,5 - 1} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5$$



Аппроксимация касательной через секущую

Для более точного результата переместим вторую точку как можно ближе к (1, 2). Скажем, если $x = 1,1$, то $y = (1,1)^2 + 1 = 2,21$, а наклон секущей — $m = (2,21 - 2)/(1,1 - 1) = 2,1$. Посмотрите на таблицу: при постепенном приближении второй точки к (1, 2), наклон секущей будет столь же постепенно приближаться к 2.

(x_1, y_1)	x_2	$y_2 = x_2^2 + 1$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		Наклон
(1, 2)	1,5	3,25	$\frac{3,25 - 2}{1,5 - 1} = \frac{1,25}{0,5}$	=	2,5
(1, 2)	1,1	2,21	$\frac{2,21 - 2}{1,1 - 1} = \frac{0,21}{0,1}$	=	2,1
(1, 2)	1,01	2,0201	$\frac{2,0201 - 2}{1,01 - 1} = \frac{0,0201}{0,01}$	=	2,01
(1, 2)	1,001	2,002001	$\frac{2,002001 - 2}{1,001 - 1} = \frac{0,002001}{0,001}$	=	2,001
(1, 2)	$1 + h$	$2 + 2h + h^2$	$\frac{(2 + 2h + h^2) - 2}{(1 + h) - 1} = \frac{2h + h^2}{h}$	=	$2 + h$

Посмотрим, что происходит, когда $x = 1 + h$ (при $h \neq 0$), но лишь чуть-чуть отличается от $x = 1$. Тогда $y = (1 + h)^2 + 1 = 2 + 2h + h^2$, а наклон секущей составит

$$\frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{(2 + 2h + h^2) - 2}{(1 + h) - 1} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

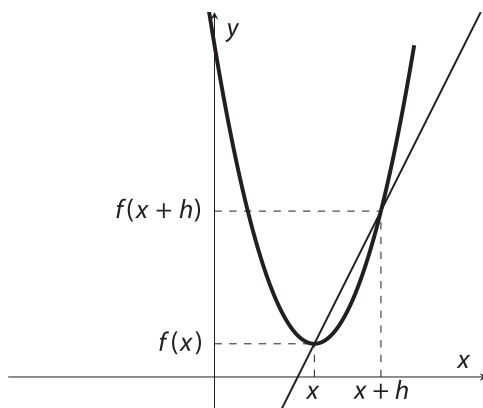
То есть при приближении h к 0 наклон графика функции будет приближаться к 2. В записи это выглядит так:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$$

Подобным представлением мы хотим сказать, что предел $2 + h$ при значении h , стремящемся к 0, равен 2. Так мы и узнаем наклон касательной к кривой $y = x^2 + 1$ в точке $(1, 2)$ — 2.

А вот как все это выглядит в обобщенном виде. Нам нужно найти наклон касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x, f(x))$. Как видно на графике, наклон секущей, проходящей через точку $(x, f(x))$ и соседнюю с ней $(x + h, f(x + h))$, составляет

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$



Наклон секущей, проходящей через точки $(x, f(x))$ и $(x + h, f(x + h))$,
равен $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

Представим наклон касательной, проходящей через точку $(x, f(x))$, как $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Выглядит не очень-то понятно, поэтому давайте возьмем парочку более конкретных примеров. Для прямой линии $y = mx + b$, а $f(x) = mx + b$. Чтобы найти $f(x + h)$, нужно заменить x на $x + h$ — это позволит нам подсчитать $f(x + h) = m(x + h) + b$. Следовательно, наклон секущей равен

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h} = \frac{mh}{h}$$

Наклон касательной будет равен m при любом значении x , поэтому $f'(x) = m$. Объясняется это тем, что линия $y = mx + b$ всегда имеет наклон m .

Обратимся к производной функции $y = x^2$. Согласно только что сформулированному определению,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x + h \end{aligned}$$

а так как h стремится к 0, $f'(x)$ должно быть равно $2x$.

При $f(x) = x^3$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2 \end{aligned}$$

а так как h стремится к 0, $f'(x)$ должно быть равно $3x^2$.

Поиск производной функции $f'(x)$ на основании функции $y = f(x)$ называется *дифференцированием*. Впрочем, все не так сложно, как кажется: потренировавшись как следует и найдя производные нескольких простых функций, мы легко сможем определить их и для сложных функций. И, что самое приятное, никаких пределов! А вот и подходящая теорема.

Теорема: Если $u(x) = f(x) + g(x)$, то $u'(x) = f'(x) + g'(x)$. Другими словами, *производная суммы есть сумма производных*. Также если c — действительное число, производная $cf(x)$ равна $cf'(x)$.

Как следствие, мы можем утверждать, что, поскольку $y = x^3$ имеет производную $3x^2$, а $y = x^2$ — производную $2x$, производная $y = x^3 + x^2$ будет равна $3x^2 + 2x$ (например, производная функции $y = 10x^3 - 30x^2$).

Отступление

Доказательство: Предположим, что $u(x) = f(x) + g(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} &= \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\end{aligned}$$

Положив $h \rightarrow 0$ в качестве предела для обеих частей этого уравнения, получим

$$u'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \square$$

Обратите внимание, что, применяя этот предел справа, мы исходим из предположения, что предел суммы равен сумме пределов. Доказывать это мы, пожалуй, не станем — просто доверимся здравому смыслу, говорящему, что при приближении значений a и b к A и B значение $a + b$ будет приближаться к $A + B$. Та же логика подсказывает нам, что предел произведения равен произведению пределов, а предел частного равен частному пределов. Но то, что справедливо для пределов, необязательно будет справедливо для производных. Например, производная произведения не равна произведению производных.

Что же касается второго утверждения нашей теоремы, то при $v(x) = cf(x)$

$$\begin{aligned}u'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x)\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Чтобы продифференцировать функцию $f(x) = x^4$, сначала распишем ее в следующем виде: $f(x+h) = (x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$. Коэффициенты выглядят знакомо, правда? 1, 4, 6, 4, 1... Это же числа из 4 ряда треугольника Паскаля (см. главу 4)! Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} = \\ &= 4x^3 + h \times [\text{ВСЕ ОСТАЛЬНОЕ}]\end{aligned}$$

а так как $h \rightarrow 0$, получается, что $f'(x) = 4x^3$. Видите закономерность? Производные x , x^2 , x^3 и x^4 равны 1, $2x$, $3x^2$ и $4x^3$ соответственно. Применение

того же алгоритма к бóльшим степеням приводит нас к одному важному правилу. (Кстати, другое популярное обозначение производной — y' . Так и будем писать.)

Теорема (правило дифференцирования степенной функции): При $n \geq 0$

$$y = x^n \text{ имеет производную } y' = nx^{n-1}$$

Например,

$$\text{если } y = x^5, \text{ то } y' = 5x^4$$

а

$$\text{если } y = x^{10}, \text{ то } y' = 10x^9$$

С помощью этого закона можно дифференцировать даже функции-константы, вроде $y = 1$, потому что $1 = x^0$, а $y = x^0$ имеет производную $0x^{-1} = 0$ при любом значении x . Это объясняется тем, что линия $y = 1$ является горизонтальной. Исходя из правила дифференцирования степенной функции и предыдущей теоремы, мы сможем дифференцировать любой многочлен. Например, если

$$y = x^{10} + 3x^5 - x^3 - 7x + 2520$$

то

$$y' = 10x^9 + 15x^4 - 3x^2 - 7$$

Правило дифференцирования степенной функции верно и при отрицательных значениях n . Например, если

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

то

$$y' = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

Аналогичным образом, если

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

то

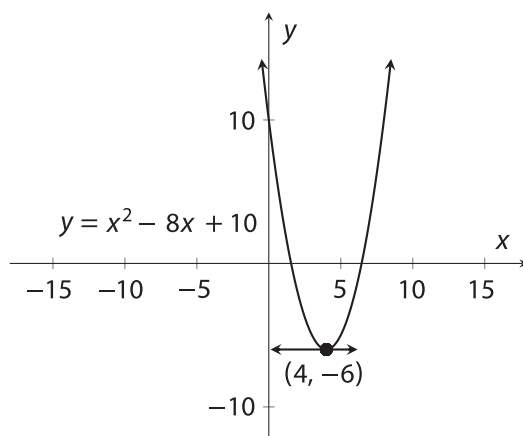
$$y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Жаль только, что доказать это нам пока что не по силам.

Перед тем как дифференцировать более сложные функции, применим уже полученные знания в не менее интересных и полезных целях. Например, в целях оптимизации.

Максимум против минимума

Дифференциация нужна для того, чтобы выяснять, где функция достигает своего максимума, а где — минимума. При каком, например, значении x парабола $y = x^2 - 8x + 10$ достигает своей низшей точки?



Парабола $y = x^2 - 8x + 10$ достигает своей низшей точки при $y' = 0$

Как вы, наверняка, помните, проведенная через нее касательная должна иметь наклон 0. Так как $y' = 2x - 8$, уравнение $2x - 8 = 0$ приведет нас к минимуму при $x = 4$ (кстати, $y = 16 - 32 + 10 = -6$). Для $y = f(x)$ значение x , удовлетворяющее $f'(x) = 0$, называется *критической точкой* функции f . Функция $y = x^2 - 8x + 10$, например, имеет только одну критическую точку — $x = 4$.

Где же максимум? В нашем примере его попросту нет: значение y -координаты для $x^2 - 8x + 10$ может быть сколь угодно большим. Ограничить его можно одним единственным способом — определив для x пределы значений. Возьмем для примера $0 \leq x \leq 6$. Тогда при $x = 0$ y будет равен 10, а при $x = 6$ — -2 , то есть критической точкой для этой функции является $x = 0$. Обобщение этого приводит нас к одной очень важной теореме.

Теорема (теорема об экстремуме функции в точке): Если дифференцируемая на отрезке функция $y = f(x)$ принимает максимальное или минимальное значение в точке x^* , то x^* должна быть либо критической точкой f , либо граничной точкой отрезка.

Давайте на секунду вернемся в начало главы, к задаче с лотком. Нам нужно, по сути, максимизировать функцию

$$y = (12 - 2x)^2x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

где x должен находиться в диапазоне от 0 до 6. Нам нужно найти такой x , при котором значение y будет наибольшим. Так как наша функция представляет собой многочлен, ее производную можно найти как

$$y' = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$$

Следовательно, ее критическими точками будут $x = 2$ и $x = 6$.

А так как мы знаем, что при объеме, равном 0, и конечных точках, равных 0 и 6, объем будет минимальным, нам остается только одна критическая точка — $x = 2$. Именно она и даст нам максимум — $y = 128 \text{ см}^3$.

Правила дифференцирования

Чем больше функций мы продифференцируем, тем больше задач сможем решить. Пожалуй, самой важной функцией в исчислении является *показательная функция* $y = e^x$. Ее особенность в том, что она равна собственной производной.

Теорема: Если $y = e^x$, то $y' = e^x$.

Отступление

Почему $f(x) = e^x$ соответствует $f'(x) = e^x$? Смотрите, в чем секрет. Сначала обратите внимание на то, что

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

Вспомним, что e , по сути, есть

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

что означает, что с увеличением n значение члена $(1 + 1/n)^n$ будет все ближе и ближе подходить к e . Теперь предположим, что $h = 1/n$. При очень большом значении n $h = 1/n$ находится очень близко к 0. Следовательно, при h , близком к 0,

$$e \approx (1 + h)^{1/h}$$

Возведя обе части в степень h (и помня, что $(a^b)^c = a^{bc}$), получаем

$$e^h \approx 1 + h$$

а потом и

$$\frac{e^h - 1}{h} \approx 1$$

Значит, при значении h , стремящемся к 0, $\frac{e^h - 1}{h}$ будет стремиться к 1, а $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow e^x$.

А есть ли еще такие функции, которые равны своим производным? Есть. Но все они сводятся к $y = ce^x$, где c заменяется любым действительным числом (в том числе и 0, который превращает функцию в постоянную $y = 0$).

Не так давно мы выяснили, что при сложении функций производная суммы равна сумме производных. А что насчет умножения? Увы, но производная произведения не равна произведению производных. Тем не менее посчитать ее не очень сложно — для этого достаточно воспользоваться несложной теоремой.

Теорема (правило дифференцирования произведения функций):
Если $y = f(x)g(x)$, то

$$y' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Например, согласно правилу дифференцирования произведения, чтобы продифференцировать $y = x^3e^x$, нам нужно взять $f(x) = x^3$ и $g(x) = e^x$. В результате у нас получится

$$\begin{aligned} y' &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \\ &= x^3e^x + 3x^2e^x \end{aligned}$$

Обратите внимание, что при $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^5$ их произведение, согласно тому же правилу, составит $x^3x^5 = x^8$. Производная же будет выглядеть как

$$\begin{aligned} y' &= x^3(5x^4) + 3x^2(x^5) \\ &= 5x^7 + 3x^7 = 8x^7 \end{aligned}$$

что полностью соответствует правилу дифференцирования степенной функции.

Отступление

Доказательство (правило дифференцирования произведения функций):

Предположим, что $u(x) = f(x)g(x)$. Тогда

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

А дальше творим истинно математическое волшебство — добавляем к числителю 0, но не привычным способом, а с помощью прибавления и вычитания $f(x+h)g(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} &= \\ = f(x+h) \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) + \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) g(x) \end{aligned}$$

Так как $h \rightarrow 0$, в результате имеем $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$, что и требовалось доказать. $\square$

Но доказанное правило полезно не только в этом конкретном случае — с его помощью можно найти производные других функций. Мы уже доказали, что правило дифференцирования степенной функции верно при положительных значениях показателя степени. Давайте посмотрим, как оно поведет себя при дробных и отрицательных значениях.

Например, согласно правилу дифференцирования степенной функции

$$\text{если } y = \sqrt{x} = x^{1/2}, \text{ то } y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Сможем ли мы доказать его с помощью правила дифференцирования произведения? Предположим $u(x) = \sqrt{x}$. Тогда

$$u(x)u(x) = \sqrt{x}\sqrt{x} = x$$

Продифференцировав обе стороны и применив правило дифференцирования произведения, получаем

$$u(x)u'(x) + u'(x)u(x) = 1$$

Следовательно, $2u(x)u'(x) = 1$, а $u'(x) = \frac{1}{2u(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, как мы и предполагали.

Отступление

Правило дифференцирования произведения при отрицательных значениях степени гласит, что $y = x^{-n}$ будет иметь производную $y' = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$. Чтобы это доказать, возьмем $u(x) = x^{-n}$, где $n \geq 1$. Согласно определению, при $x \neq 0$

$$u(x)x^n = x^{-n}x^n = x^0 = 1$$

Продифференцировав обе стороны и применив правило дифференцирования произведения, получаем

$$u(x)(nx^{n-1}) + u'(x)x^n = 0$$

Разделив всех члены уравнения на x^n и перенеся первый член в другую часть уравнения, получаем

$$u'(x) = \frac{u(x)}{x} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Следовательно, если $y = 1/x = x^{-1}$, то $y' = -1/x^2$, если $y = 1/x^2 = x^{-2}$, то $y' = -2x^{-3} = -2/x^3$, и т.д.

Помните, в 7 главе мы искали такое положительное значение x , при котором функция

$$y = x + 1/x$$

показала бы минимальное значение? Тогда мы нашли решение с помощью геометрии, показав, что результат может быть достигнут при $x = 1$. Но можно решить эту задачу значительно проще: это значит, что $y' = 0$, это дает нам $1 - 1/x^2 = 0$, а единственная положительная величина, которая удовлетворяет этому условию, — $x = 1$.

Что касается тригонометрических функций, то их дифференцировать ничуть не сложнее. Обратите внимание, что для доказательства следующей теоремы нам нужно, чтобы углы были выражены в радианах.

Теорема: Если $y = \sin x$, то $y' = \cos x$, а если $y = \cos x$, то $y' = -\sin x$. Другими словами, *производная синуса равна косинусу, а производная косинуса — синусу со знаком минус.*

Отступление

Доказательство: Для доказательства нам потребуется следующая лемма (лемма — это подсобная, подготовительная теорема, с помощью которой можно доказать более сложное и серьезное утверждение).

Лемма:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

Здесь утверждается, что значение любого угла h , равного чуть больше, чем 0 (в радианах), будет близко к значению h , в то время как значение косинуса будет близко к 1. С помощью калькулятора, например, можно выяснить, что $\sin 0,0123 = 0,0122996\dots$, а $\cos 0,0123 = 0,9999243\dots$. С помощью этой леммы можно продифференцировать любой синус или косинус. Тождество $\sin(A + B)$ из главы 9 говорит нам, что

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right) \end{aligned}$$

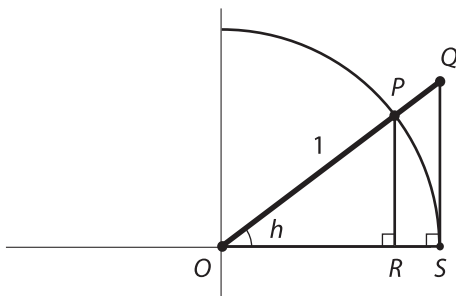
А так как $h \rightarrow 0$, то, согласно нашей лемме, это уравнение превращается в $(\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x$. Подобным же образом

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} &= \frac{\cos x \cos h + \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \sin x \left(\frac{\sin h}{h} \right) \end{aligned}$$

И снова $h \rightarrow 0$ дает нам $(\cos x)(0) - (\sin x)(1) = -\sin x$, что и требовалось доказать. □

Отступление

То, что $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$ можно доказать с помощью такого вот графика:



На единичной окружности, часть которой изображена выше, $R = (1, 0)$, а $P = (\cos h, \sin h)$, где h есть небольшой угол с положительным значением. В прямоугольном треугольнике OQR

$$\tan h = \frac{QR}{OR} = \frac{QR}{1} = QR$$

Отсюда следует, что площадь прямоугольного треугольника OPS равна $\frac{1}{2} \cos h \sin h$, а площадь прямоугольного треугольника OQR — $\frac{1}{2} ORQR = \frac{1}{2} \tan h = \frac{\sin h}{2 \cos h}$.

Рассмотрим сектор OPR , имеющий клинообразную форму. Площадь единичной окружности равна $\pi 1^2 = \pi$, сектор OPS — ее часть, выражаемая дробью $h/(2\pi)$. Следовательно, площадь сектора OPR составляет $\pi(h/2\pi) = h/2$.

Так как сектор OPR содержит в себе треугольник OPS , а тот, в свою очередь, — треугольник OQR , сравнение их площадей дает нам

$$\frac{1}{2} \cos h \sin h < \frac{h}{2} < \frac{\sin h}{2 \cos h}$$

Умножив все на $\frac{2}{\sin h} > 0$, получим

$$\cos h < \frac{h}{\sin h} < \frac{1}{\cos h}$$

Для положительных значений a , b и c , если $a < b < c$, то $1/c < 1/b < 1/a$. Следовательно,

$$\cos h < \frac{\sin h}{h} < \frac{1}{\cos h}$$

А так как $h \rightarrow 0$, и $\cos h$, и $1/\cos h$ будут стремиться к 1, что и требовалось доказать.

Значит, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$.

□

Отступление

С помощью полученного результата и нескольких алгебраических формул (включая $\cos^2 h + \sin^2 h = 1$) можно доказать, что $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - 1}{h} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{\cos h - 1}{h} \times \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \\ &= \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin h}{h} \times \frac{\sin h}{\cos h + 1} \end{aligned}$$

Так как $h \rightarrow 0$, $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$, а $\frac{\sin h}{\cos h + 1} \rightarrow \frac{0}{2} = 0$.

Значит, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - 1}{h} = 0$.

□

Производные синуса и косинуса — ключи к дифференцированию тангенса.

Теорема: Если $y = \tan x$, то $y' = 1/(\cos^2 x) = \sec^2 x$.

Доказательство: Предположим, что $u(x) = \tan x = (\sin x)/(\cos x)$. Тогда

$$\tan(x) \cos x = \sin x$$

Продифференцировав обе части и применив правило дифференцирования произведения функций, получим

$$\tan x (-\sin x) + \tan'(x) \cos x = \cos x$$

Разделим все члены на $\cos x$ и решим уравнение для $\tan'(x)$:

$$\tan'(x) = 1 + \tan x \tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

в котором предпоследнее значение получается в результате деления тождества $\cos 2x + \sin 2x = 1$ на $\cos 2x$.

Отступление

Доказательство правила дифференцирования частного: Так как $u(x)g(x) = f(x)$, продифференцировав обе части уравнения, в соответствии с правилом дифференцирования произведения получим

$$u(x)g'(x) + u'(x)g(x) = f'(x)$$

Умножив все на $g(x)$, получим

$$g(x)u(x)g'(x) + u'(x)g(x)g(x) = g(x)f'(x)$$

Заменяем $g(x)u(x)$ на $f(x)$ и решим уравнение для $u'(x)$, что приведет нас к искомому результату. $\square$

Теперь мы умеем дифференцировать многочлены, показательные и тригонометрические функции. Также мы научились дифференцировать их суммы, произведения и частные. Но есть еще *сложные функции* — функции от функций, с которыми тоже нужно уметь обращаться. Правило дифференцирования сложной функции иначе называют **цепным правилом**. Согласно ему, например, если $f(x) = \sin x$, а $g(x) = x^3$, то

$$f(g(x)) = \sin(g(x)) = \sin(x^3)$$

Не перепутайте: это не то же самое, что

$$g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^3$$

Теорема (цепное правило): Если $y = f(g(x))$, то $y' = f'(g(x))g'(x)$.

Например, если $f(x) = \sin x$, а $g(x) = x^3$, то $f'(x) = \cos x$, а $g'(x) = 3x^2$. Согласно цепному правилу, при $y = f(g(x)) = \sin(x^3)$

$$y' = f'(g(x))g'(x) = \cos(g(x))g'(x) = 3x^2 \cos(x^3)$$

Обобщая, можно сказать, что при $y = \sin(g(x))$ $y' = g'(x) \cos(g(x))$. Та же логика подсказывает нам, что $y = \cos(g(x))$ имеет производную $y' = -g'(x) \sin(g(x))$.

С другой стороны, функция $y' = -g'(x) \sin(g(x))$, согласно цепному правилу, выглядит так:

$$y' = g'(f(x))f'(x) = 3(f(x)^2)f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$$

Обобщим и это: цепное правило говорит нам, что при $y = (g(x))^n$ $y' = n(g(x))^{n-1}g'(x)$. А что насчет $y = (x^3)^5$?

$$y' = 5(x^3)^4(3x^2) = 5x^{12}(3x^2) = 15x^{14}$$

что полностью соответствует правилу дифференцирования произведения функций.

Продифференцируем $y = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2}$.

$$y' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Со степенными функциями дело обстоит ничуть не сложнее. Так как e^x является собственной производной, то при $y = e^{g(x)}$ имеем

$$y' = g'(x)e^{g(x)}$$

Например, производная $y = e^{x^3}$ — $y' = (3x^2)e^{x^3}$.

Обратите внимание, что функция $y = e^{kx}$ имеет производную $y' = ke^{kx} = ky$. Это одна из причин, почему показательные (экспоненциальные) функции так важны — они появляются, когда скорость роста функции пропорциональна величине ее значения. По этой причине показательные функции часто связаны с процессами в финансовой сфере и в биологии

Натуральный логарифм $\ln x$ обладает одним интересным свойством:

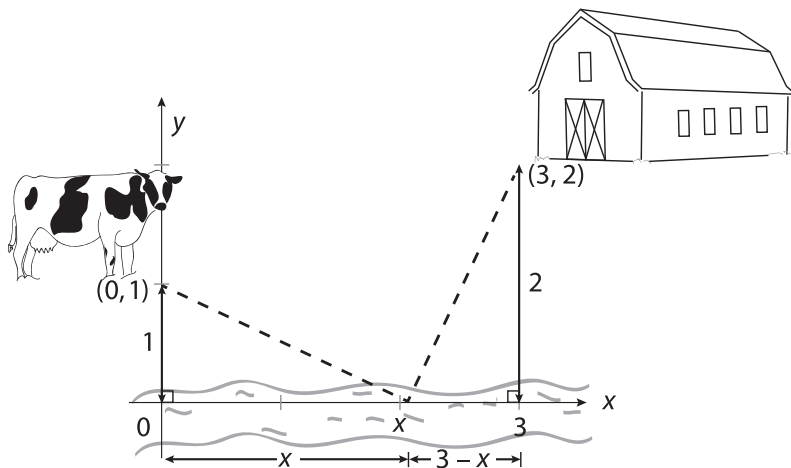
$$e^{\ln x} = x$$

при любом значении x , большем 0. Чтобы найти его, логарифма, производную, воспользуемся цепным правилом. Допустив, что $u(x) = \ln x$, получим $e^{u(x)} = x$. Продифференцировав обе части этого уравнения, получаем $u'(x)e^{u(x)} = 1$. Но поскольку $e^{u(x)} = x$, $u'(x) = 1/x$. Другими словами, если $y = \ln x$, тогда $y' = 1/x$. Вновь применив цепное правило, получаем: если $y = \ln(g(x))$, то $y' = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

Давайте соберем все найденное с помощью цепного правила в таблицу:

$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)) g'(x)$
$y = \sin(g(x))$	$y' = g'(x) \cos(g(x))$
$y = \cos(g(x))$	$y' = -g'(x) \sin(g(x))$
$y = (g(x))^n$	$y' = n(g(x))^{n-1} g'(x)$
$y = e^{g(x)}$	$y' = g'(x)e^{g(x)}$
$y = \ln(g(x))$	$y' = g'(x)/g(x)$

Хотите применить все это на практике? Вот вам задачка, практичней некуда. Корова Клара пасется в километре на север от реки (оси x), в 3 километрах на запад и в километре на юг от коровника. Наевшись и нагулявшись, она решила попить водички и пойти домой. Естественно, ей хочется сделать это все как можно быстрее. Где именно ей нужно спуститься к реке, чтобы максимально сократить путь?



Дилемма Клары: где бы спуститься к реке и попить, чтобы как можно быстрее вернуться в коровник?

Предположим, что корова решила двинуться с луга (то есть из стартовой точки $(0, 1)$) к месту водопоя (то есть к точке $(x, 0)$) напрямик. Согласно теореме Пифагора (или формуле расстояния), длина ее маршрута до реки составит $\sqrt{x^2 + 1}$, а до амбара, находящегося в точке $B = (3, 2)$, — $\sqrt{(3-x)^2 + 4} = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$. Значит, задача сводится к нахождению такого значения x в диапазоне от 0 до 3, при котором достигается минимальное значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 13} = (x^2 + 1)^{1/2} + (x^2 - 6x + 13)^{1/2}$$

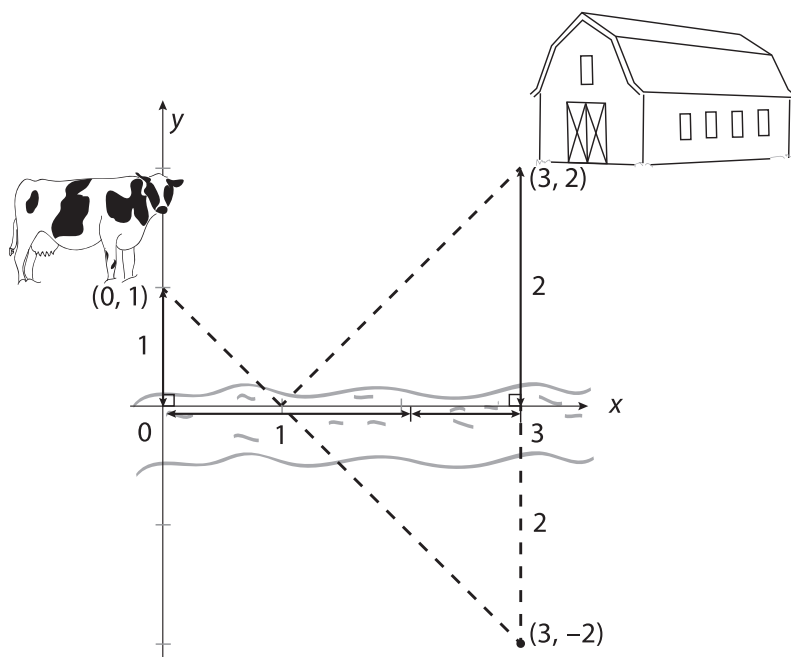
Продифференцировав это уравнение (с помощью цепного правила) и приравняв его к 0, получим

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} = 0$$

Проверить это можно, взяв $x = 1$, тогда левая часть уравнения превращается в $1/\sqrt{2} - 2/\sqrt{8}$, что и в самом деле равно 0 (а можно добавить $x/\sqrt{x^2 + 1}$ справа, возвести обе части в квадрат и умножить члены крест-накрест — после нескольких сокращений вы придете к $x = 1$).

Неплохим вариантом будет метод *отражения*, уже знакомый нам по главе 7. Представьте, что вместо коровника (точка $B = (3, 2)$) корова пошла к его отражению (точка $B' = (3, -2)$), как показано на следующем рисунке.

Расстояние до B' абсолютно такое же, как и до B . Любой отрезок, соединяющий точку, расположенную на севере от реки, с ее «отражением», расположенным к югу от реки, неизбежно пересечет ось x . Кратчайшим маршрутом в этом случае будет прямая линия от $(0, 1)$ до $(3, -2)$ (с наклоном $-3/3 = -1$), пересекающая ось x при $x = 1$. И никаких квадратных корней!



Еще один способ разрешить дилемму Клары —
отражение коровника

Фокус-покус: ряд Тейлора

Доказывая в конце прошлой главы уравнение Эйлера, мы воспользовались тремя загадочными формулами:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Перед тем как разбираться, как мы пришли к этому, давайте немного поиграем. Интересно, что получится, если взять отдельно каждый член ряда e^x и продифференцировать? Правило дифференцирования степенной функции говорит нам, что производной функции $x^4/4!$ будет $(4x^3)/4! = x^3/3!$, то есть предшествующий член ряда! Другими словами, продифференцировав ряд e^x , мы вновь получим ряд e^x , что полностью соответствует тому, что мы знаем о показательной функции e^x !

Последовательно дифференцируя $x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots$, получаем $1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots$, что соотносится с тем, что производная синуса — это косинус. Справедливо и обратное: производная косинуса — это синус со знаком минус. А еще этот ряд лишний раз доказывает, что $\cos 0 = 1$, и поскольку каждая степень в нем выражена четным числом, значение $\cos(-x)$ будет равно $\cos x$. Впрочем, нам это уже известно (например, $(-x)^4/4! = x^4/4!$). Следуя той же логике, мы можем прийти к $\sin 0 = 0$, а поскольку каждая степень выражена нечетным числом, $\sin(-x) = -\sin x$, как мы и предполагали.

Теперь давайте попытаемся понять, откуда, собственно говоря, берутся эти формулы. Мы знаем, как найти производные наиболее популярных функций. Но бывают такие ситуации, когда одну и ту же функцию нужно продифференцировать несколько раз, разыскав ее вторую ($f''(x)$), третью ($f'''(x)$) и т.д. производную. $f''(x)$ выражает крутизну наклона функции (то есть ее *вогнутость*) в точке $(x, f(x))$, $f'''(x)$ делает то же для второй производной и т.д.

Для этого имеются специальные формулы. Они называются *рядами Тейлора*, потому что первым, кто ввел их в оборот, был английский математик Брук Тейлор (1685–1731). Для функции $f(x)$ с производными $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ и т.д. мы имеем

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + \dots$$

при любом значении x , «достаточно близком» к 0. Что значит «достаточно близком»? В некоторых функциях — например, e^x , $\sin x$ или $\cos x$ — x может быть практически любой величиной. Но есть и такие функции (мы встретимся с ними чуть позже), которые имеют смысл только при очень маленьких значениях x .

Проследим, как меняется формула для $f(x) = e^x$. Так как e^x равна своей собственной первой (равно как и второй, и третьей и т. д.) производной, следовательно

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = e^0 = 1$$

то есть ряд Тейлора для e^x превращается в $1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots$, как и предполагалось. При небольшом значении x нам достаточно посчитать лишь несколько членов ряда, чтобы получить точную аппроксимацию верного ответа.

Посчитаем с его помощью проценты. Как мы выяснили в прошлой главе, если положить на счет \$1000 под 5%, то, при условии непрерывных начислений, к концу года мы будем иметь $\$1000 e^{0,05} = \$1051,27$. И мы знаем, как это подсчитать. Но к тому же ответу можно прийти и с помощью *формул* сначала *второго* —

$$\$1000(1 + 0,05 + (0,05)^2/2!) = \$1051,25$$

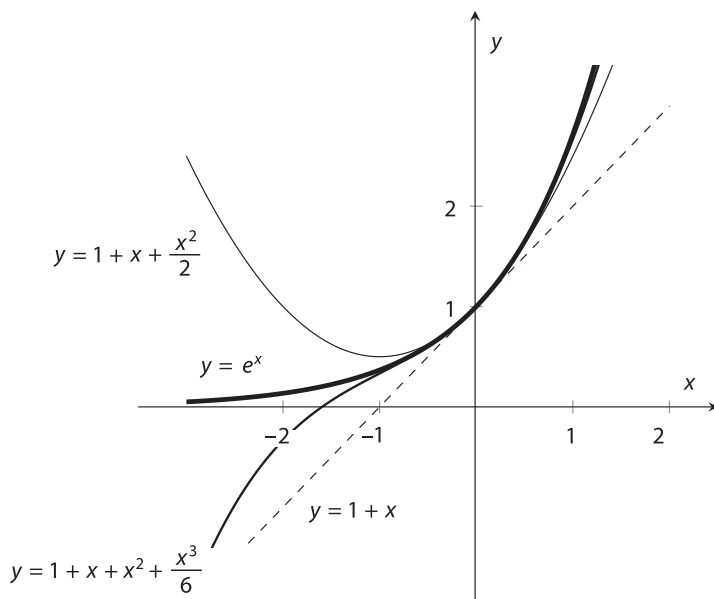
а потом и *третьего порядка аппроксимации*: $\$1051,27$.

Аппроксимации Тейлора могут быть представлены в виде графика, на котором вместе с первыми тремя многочленами Тейлора изображена показательная (экспоненциальная) функция $y = e^x$.

Постепенно увеличивая степень многочлена, мы достигаем все большей точности аппроксимации, особенно если x близок к 0. Но что же такого особенного в многочленах Тейлора, что делает их настолько эффективными? Аппроксимация первого порядка (называемая *линейной*) утверждает, что при x , близком к 0,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

На графике получается прямая линия, проходящая через точку $(0, f(0))$ с наклоном $f'(0)$. Значит, многочлен Тейлора степени n будет проходить через ту же точку $(0, f(0))$ и иметь такие же первую, вторую, третью и т. д., вплоть до n -ной, производные, что и начальная функция $f(x)$.

Аппроксимации Тейлора для e^x

Отступление

Кстати, многочлены и ряды Тейлора отлично показывают себя при работе и с другими величинами (не только 0), к которым стремится x . Так, ряд Тейлора для $f(x)$ с начальной точкой a равен

$$f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x - a)^3}{3!} + \dots$$

При $a = 0$ он будет равен $f(x)$ для всех действительных или комплексных значений x , близких к a .

Возьмем ряд Тейлора для $f(x) = \sin x$. Посмотрите: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, а $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$. При сопоставлении с 0, начав с $f(0)$, мы придем к циклу 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ..., в котором каждое четное значение x попросту исчезает из ряда. Следовательно, получается, что при любом x , выраженном в радианах,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Аналогично, для $f(x) = \cos x$ имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Ну и напоследок давайте возьмем пример, в котором ряд Тейлора равен функции при некоторых — но не всех — значениях x . Пусть это будет $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$. Здесь $f(0) = 1$, и, согласно цепному правилу, первые несколько производных выглядят как

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2} \\ f''(x) &= (-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3} \\ f'''(x) &= -6(1-x)^{-4}(-1) = 3!(1-x)^{-4} \\ f^{(4)}(x) &= -4!(1-x)^{-5}(-1) = 4!(1-x)^{-5} \end{aligned}$$

Следуя и дальше этой закономерности (или воспользовавшись методом индукции), мы неизбежно приходим к заключению, что n -ая производная $(1-x)^{-1}$ будет равна $n!(1-x)^{-(n+1)}$ (а при $x = 0$ — просто $n!$). Следовательно, ряд Тейлора трансформируется в

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

что будет верно только при таком значении x , которое находится в диапазоне от -1 до 1 . Если же x , например, будет больше 1 , то складываемые величины будут становиться все больше и больше, пока сумму станет вовсе невозможно определить.

Странно, правда? Возможно, вам интересно узнать, каково это — складывать бесконечное количество чисел. А как будет выглядеть их сумма? Ответы на эти вопросы — в следующей главе, посвященной бесконечности, главе, в которой мы встретимся со многими странными, удивительными, непредсказуемыми и прекрасными тайнами математики.

ГЛАВА НОМЕР ДВЕНАДЦАТЬ

$$1 + 2 + 3 + \dots = \infty$$

(или $-1/12$?)

Магия бесконечности

Бесконечно интересно

Когда еще, как не в конце, под самый занавес, говорить о бесконечности? И когда еще, как не в конце, вспоминать начало? А в начале у нас была сумма всех чисел от 1 до 100:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = 5050$$

А потом — и сумма чисел от 1 до n :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

А еще были другие суммы чисел конечных диапазонов. В этой главе мы попытаемся сосчитать те числа, ряд которых имеет начало, но не имеет конца, например,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} + \dots$$

(надеюсь, мне удалось убедить вас, что в результате получится 2, причем не *приблизительно*, а *ровно* 2). Некоторые такие ряды дают очень интересные результаты сложения, например,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

А другие — вовсе не имеют их, как, скажем,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

В математике принято считать, что суммой всех положительных чисел является *бесконечность*, что записывается следующим образом:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = \infty$$

то есть результат постоянно растет, не имея при этом верхнего предела. По сути, это означает, что ответ превосходит любое число, которое только может возникнуть у вас в голове — сотню, миллион, квадриллион... И все-таки в конце главы мы увидим, что вполне бывает, например, и такое:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = \frac{-1}{12}$$

Заинтригованы? Уверен, что да. Уже через несколько строк мы покинем привычный нам мир и отправимся в сумеречное царство бесконечности, где возможны самые странные вещи, — в царство, манящее всех математиков своей неизведанностью и красотой.

Является ли бесконечность числом? Не совсем, хотя с ним порой и обращаются, как с обычным числом: вы вполне можете натолкнуться на что-нибудь вроде

$$\infty + 1 = \infty \quad \infty + \infty = \infty \quad 5 \times \infty = \infty \quad \frac{1}{\infty} = 0$$

Теоретически никакого *самого большого числа* нет: вы всегда можете прибавить к нему единицу и получить еще большее число. Символ ∞ по существу обозначает величину «произвольно большую» или *большую*, чем любая другая положительная величина. Другой полюс бесконечности представлен $-\infty$, величиной меньшей, чем любая другая отрицательная величина.

Кстати, количества, выражаемые как $\infty - \infty$ (бесконечность минус бесконечность) или $1/0$ являются неопределенными. Конечно, очень велико искушение заявить, что $1/0 = \infty$, потому что при делении единицы на все меньшую и меньшую положительную величину частное будет расти. Но ведь если делить 1 на все меньшие и меньшие по абсолютной величине отрицательные числа, то частное будет представлять все большим и большим по абсолютной величине отрицательным числом.

Важность бесконечной суммы: геометрические ряды

Начнем, пожалуй, с утверждения, принимаемого всеми математиками и кажущегося неправильным большинству непосвященных:

$$0,99999... = 1$$

То, что две эти величины очень близки друг к другу, не вызывает сомнений практически ни у кого. Но считать их одним и тем же числом?.. Несколько чересчур, правда? Неправда. Позвольте мне попробовать убедить вас в обратном. Поверьте, доказательств у меня так много, что хотя бы одно из них обязательно покажется вам правдоподобным.

Самое, пожалуй, простое исходит из утверждения, что

$$\frac{1}{3} = 0,33333...$$

Умножаем обе стороны на 3 и получаем

$$1 = \frac{3}{3} = 0,99999...$$

Другое доказательство основано на методе, который мы использовали в главе 6 для периодических десятичных дробей. Обозначим бесконечную последовательность знаков после запятой переменной w , вот так:

$$w = 0,99999...$$

Умножим обе части на 10:

$$10w = 9,99999...$$

Вычтем первое уравнение из второго

$$9w = 9,00000...$$

и получим $w = 1$.

А вот доказательство, для которого алгебра вообще не нужна. Надеюсь, вы согласны с тем, что два числа могут считаться разными, если между ними расположено третье число, не равное ни первому, ни второму (например, их среднее арифметическое)? Пойдем от обратного: предположим, что $0,99999...$ и 1 суть разные величины. Какое же тогда число будет между ними? А если такого числа нет, значит, мы не можем утверждать, что они разные.

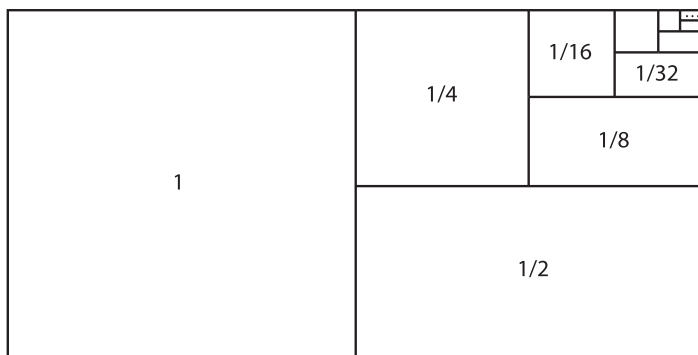
Два числа или две бесконечные суммы считаются *равными* в том случае, если они *сколь угодно близки* друг к другу, то есть разница между ними меньше любой положительной величины, будь то 0,1 или 0,0000001, или 1, деленное на триллион. Разница между 1 и 0,99999... — наглядный тому пример, и именно это дает математикам право утверждать, что 1 и 0,99999... суть одно и то же число.

Следуя той же логике, мы можем оценить бесконечную сумму следующего ряда:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

А еще мы можем найти ей физическое соответствие. Представьте, что вы стоите в двух метрах от кирпичной стены. Вы делаете шаг вперед — ровно на метр. Следующий шаг будет вполупину короче — полметра. Потом четверть метра, одна восьмая метра и так далее. С каждым шагом расстояние между вами и стеной сокращается ровно вполупину. Если проигнорировать физические ограничения на длину каждого следующего шага (в том числе и длину ваших ступней), то рано или поздно вы подберетесь вплотную к стене. Всего же вы пройдете ровно 2 метра.

То же можно представить и геометрически. Начнем с прямоугольника с длинами сторон 1 и 2 и площадью 2. Разделим его пополам, потом еще раз и еще — и так до бесконечности. Площадь первого сектора будет равна 1, второго — 1/2, третьего — 1/4 и так далее. Даже когда мы будем делить на n , стремящееся к бесконечности, мы не выйдем за пределы начального прямоугольника, а площади всех его секторов в сумме будут по-прежнему равны 2.



Геометрическое доказательство того, что $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots = 2$

Алгебра позволяет нам подойти к решению задачи с точки зрения *частичных, промежуточных сумм*:

Промежуточные суммы $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$			
1	=	1	= 2 - 1
$1 + \frac{1}{2}$	=	$1\frac{1}{2}$	= $2 - \frac{1}{2}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	=	$1\frac{3}{4}$	= $2 - \frac{1}{4}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	=	$1\frac{7}{8}$	= $2 - \frac{1}{8}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	=	$1\frac{15}{16}$	= $2 - \frac{1}{16}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$	=	$1\frac{31}{32}$	= $2 - \frac{1}{32}$
...		...	...

Эта закономерность подсказывает нам, что при $n \geq 0$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Доказать это можно либо с помощью метода индукции (см. главу 6), либо как частный случай формулы конечного геометрического ряда.

Теорема (конечный геометрический ряд): При $x \neq 1$ и $n \geq 0$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Доказательство 1 (метод индукции): При $n = 0$ формула говорит нам, что $1 = \frac{1 - x^1}{1 - x}$, что, конечно же, верно. Предположим теперь, что $n = k$, то есть наша формула превращается в

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

Она отлично работает и при $n = k + 1$, поэтому, добавив к обеим сторонам x^{k+1} , мы получим

$$\begin{aligned}
 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + x^{k+1} &= \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} + x^{k+1} \\
 &= \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} + \frac{x^{k+1}(1 - x)}{1 - x} \\
 &= \frac{1 - x^{k+1} + x^{k+1} - x^{k+2}}{1 - x} \\
 &= \frac{1 - x^{k+2}}{1 - x}
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

А что, если мы немного схитрим, прибежем к алгебре «со сдвигом»?

Доказательство 2: Предположим, что

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

Умножим обе стороны на x :

$$xS = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1}$$

Вычтем xS и, проведя ряд упрощений, получим

$$S - xS = 1 - x^{n+1}$$

Другими словами, $S(1 - x) = 1 - x^{n+1}$, то есть

$$S = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

что и требовалось доказать.

Обратите внимание, что при $x = 1/2$ конечный геометрический ряд подтверждает выведенную нами ранее закономерность:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Чем больше n , тем ближе $(1/2)^n$ будет к 0. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$, у нас получится

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Отступление

На этот счет, кстати, есть одна шутка, понять которую сможет только математик. Бесконечное количество математиков заходит в бар. Первый заказывает полный бокал пива, второй — половину бокала, третий — четверть, четвертый — одну восьмую... Наконец, бармен не выдерживает и, воскликнув «Нет, ну есть же этому какой-то предел!», наливает им на всех две полные кружки.

Обобщая, можно сказать, что любое число в интервале от -1 до 1 , возводимое во все бóльшую и бóльшую степень, все ближе и ближе подходит к нулю. В результате мы имеем крайне важный и полезный (бесконечный) геометрический ряд.

Теорема (геометрический ряд): При $-1 < x < 1$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Чтобы решить нашу последнюю задачу, примем $x = 1/2$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

Выглядит знакомо, не правда ли? Это потому что мы уже встречались с подобным рядом — в самом конце главы 11, когда с помощью исчисления старались показать, что функция $y = 1/(1-x)$ соответствует ряду Тейлора $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$.

А что еще мы можем «выжать» из этого ряда? Как насчет следующей суммы?

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots$$

Если вынести за скобки дробь $1/4$, убрав ее из каждого члена, получится

$$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right)$$

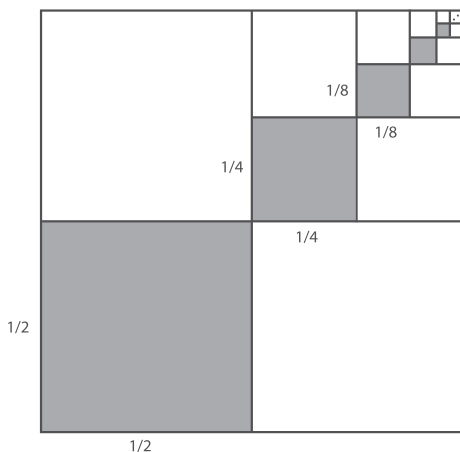
то есть при $x = 1/4$ мы можем упростить ряд до

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-1/4} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Доказать это можно практически без слов — просто посмотрите на рисунок ниже и обратите внимание, что закрашенные квадраты занимают ровно треть общей площади большого квадрата.

Геометрический ряд можно использовать также для доказательства нашей задачи с $0,99999\dots$, ведь бесконечное количество знаков после запятой есть не что иное, как замаскированный бесконечный ряд. Просто примем $x = 1/10$ и получим

$$\begin{aligned} 0,99999\dots &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10\,000} + \dots \\ &= \frac{9}{10} \left(1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots \right) \\ &= \frac{9}{10} \left(\frac{1}{1-1/10} \right) \\ &= \frac{9}{10-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$



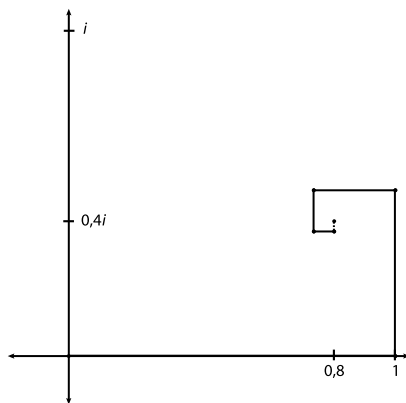
Доказательство без слов: $1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + \dots = 1/3$

Формула геометрического ряда верна и тогда, когда x — комплексное число, при условии, что длина x — меньше 1. Например, мнимое число $i/2$ имеет длину $1/2$, из чего следует, что

$$1 + i/2 + (i/2)^2 + (i/2)^3 + (i/2)^4 + \dots = \frac{1}{1 - i/2}$$

$$= \frac{2}{2 - i} = \frac{2}{2 - i} \times \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{4 + 2i}{4 - i^2} = \frac{4 + 2i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

что показано на следующем графике, расположенном на комплексной плоскости.



$$1 + i/2 + (i/2)^2 + (i/2)^3 + (i/2)^4 + (i/2)^5 + \dots = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

И хотя формула конечного геометрического ряда верна для любого значения $x \neq 1$, (бесконечный) геометрический ряд требует, чтобы $|x|$ был меньше 1. Например, при $x = 2$ конечный геометрический ряд покажет нам (как мы уже выяснили в шестой главе), что

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$$

а бесконечный — что

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1 - 2} = -1$$

что выглядит нелепо (хотя это впечатление может быть и обманчивым: в предпоследнем разделе этой главы мы увидим вполне правдоподобное объяснение такого результата).

Отступление

Число положительных целых величин бесконечно:

1, 2, 3, 4, 5...

Равно как бесконечно и количество положительных четных целых величин:

2, 4, 6, 8, 10...

Считается, что первое *множество* (или число элементов, или степень бесконечности) приблизительно равно первому. В пользу этого утверждения говорит тот факт, что положительные целые и положительные четные целые можно объединить в пары, вот так:

1	2	3	4	5	...
↕	↕	↕	↕	↕	
2	4	6	8	10	...

Множество, способное к объединению в пары, называется *счетным*. Степень бесконечности у него, как правило, невелика. Любое множество, величины которого можно *перечислить*, является счетным, так как первый его элемент есть пара к 1, второй — к 2 и т.д. Множество всех целых величин

... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...

перечислить от меньшего значения к большему не получится просто потому, что нет никакого «стартового» наименьшего значения. Зато получится переписать их вот так:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3...

Следовательно, множество всех целых является счетным, а число его элементов равно числу элементов в множестве положительных целых.

А что насчет множества положительных рациональных величин? Напомню: рациональными называются числа, имеющие форму m/n , где m и n суть положительные целые. Хотите — верьте, хотите — нет, но и это множество будет счетным. Перечислить его элементы можно следующим образом:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} \dots$$

то есть мы берем дроби в соответствии с суммой их числителей и знаменателей. Так как любая рациональная величина неизбежно появляется в списке, их множество будет счетным.

Отступление

А существуют ли вообще такие бесконечные множества, которые не являются счетными? Немецкий математик Георг Кантор (1845–1918) доказал, что все действительные величины, даже только те из них, что ограничены диапазоном от 0 до 1, образуют *несчетное* множество. Можно, конечно, попробовать перечислить их следующим образом:

$$0,1, 0,2, \dots, 0,9, 0,01, 0,02, \dots, 0,99, 0,001, 0,002, \dots, 0,999\dots$$

и т.д. Но так мы никогда не выйдем за пределы величин с конечным количеством знаков. Число $1/3 = 0,333\dots$, например, в нашем списке так и не встретится. Но, может, есть какой-нибудь другой, более эффективный способ перечисления? Кантор доказал, что его нет. Он пошел от обратного — предположил, что множество действительных величин является счетным. Он взял конкретный пример и начал с

$$0,314159265\dots$$

$$0,271828459\dots$$

$$0,618033988\dots$$

$$0,123581321\dots$$

...

Доказать, что этот список не будет полным, можно, «придумав» такое действительное число, которое никогда в нем не появится. Можно взять, скажем, величину $0,r_1r_2r_3r_4\dots$, где r_1 есть целое в интервале от 0 до 9, которое

отличается от первого числа только первой цифрой (в нашем примере $r_1 \neq 3$). Так же обстоит и с r_2 : оно отличается от второго числа второй цифрой (у нас $r_2 \neq 7$). И так далее. Таким образом у нас может получиться, скажем, 0,2674... — число, которое никогда не появится в списке, даже на миллионной позиции, потому что будет отличаться от нее миллионной цифрой. А значит, какой бы список вы ни создавали, всегда будут такие величины, которые в нем *не* появятся, следовательно, множество действительных чисел является несчетным.

Эта схема известна под названием «канторовский диагональный процесс», но мне больше по душе «доказательство через кантор-аргумент» (кхм, прошу прощения).

По сути, мы только что показали, что, несмотря на бесконечность рациональных величин, величин иррациональных все же больше. Просто выберите случайное действительное значение, лежащее на оси, и оно почти наверняка окажется иррациональным.

Бесконечные ряды очень часто появляются при решении задач, связанных с вероятностью. Предположим, что вы кидаете два шестигранных кубика, причем кидаете до тех пор, пока в сумме у вас не выпадет 6 или 7. Если 6 выпадает раньше 7, вы выиграли, если наоборот — проиграли. Каковы ваши шансы на победу? Количество возможных комбинаций равно $6 \times 6 = 36$. Пять из них дают в сумме 6 (а именно (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)), шесть — 7 ((1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)). Следовательно, ваши шансы на победу составляют меньше 50%. Но сколько именно? Всего значимых для вас комбинаций $5 + 6 = 11$, в остальных случаях кубики придется бросать вновь. Из этих одиннадцати пять приведут вас к выигрышу, шесть — к поражению. Значит, ваши шансы равны 5/11.

К тому же ответу можно прийти и с помощью геометрического ряда. Шансы на выигрыш при первом броске равны 5/36. А при втором? Чтобы он вообще состоялся, при первом броске вам надо выбросить что-то, кроме 6 или 7. Не забываем, что оптимальный для нас результат — 6. Общая вероятность выбросить 6 или 7 при первом броске — $5/36 + 6/36 = 11/36$, выбросить другую комбинацию — $25/36$. Чтобы определить вероятность выигрыша при втором броске, умножим это число на вероятность выбросить 6 при любом броске — $5/36$, — в результате получим $(25/36)(5/36)$. Для третьего броска получим уже $(25/36)(25/36)(5/36)$, для четвертого — $(25/36)^3(5/36)$ и т. д. Сложив все вместе, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{5}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)\left(\frac{5}{36}\right) + \left(\frac{25}{36}\right)^2\left(\frac{5}{36}\right) + \left(\frac{25}{36}\right)^3\left(\frac{5}{36}\right) + \dots = \\
& = \frac{5}{36} \left[1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \left(\frac{25}{36}\right)^3 + \dots \right] = \\
& = \frac{5}{36} \left(\frac{1}{1 - \frac{25}{36}} \right) = \frac{5}{36 - 25} = \frac{5}{11}
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Гармонический ряд и синусоидальные изменения

Когда бесконечный ряд приводит нас к (конечной) сумме, мы говорим, что сумма сходится к этому значению. Когда же этого не происходит, мы говорим, что ряд расходится. Если ряд сходится, то отдельные его значения должны суммироваться до величин, стремящихся к 0. Например, ряд $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ сходится к 2, а значит, его члены 1, 1/2, 1/4, 1/8... все ближе подходят к 0.

Обратное же высказывание будет неверным, потому стремление каждого последующего члена ряда к 0 не есть гарантия того, что он не разойдется. Самый важный пример этого утверждения — гармонический ряд, названный так еще древними греками, обнаружившими, что струны лиры, соотносящиеся по длине, как 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5..., издадут гармоничные созвучия.

Теорема: Гармонический ряд является расходящимся, то есть

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$

Доказательство: Прежде чем доказывать, что сумма этого ряда равна бесконечности, покажем сначала, что это есть просто некое очень большое число. Для этого разобьем ряд на несколько частей на основании количества цифр в знаменателе. Обратите внимание, что, поскольку каждый из первых 9 членов больше 1/10, то

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} > \frac{9}{10}$$

Каждый из следующих 90 членов больше 1/100, поэтому

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{99} > 90 \times \frac{1}{100} = \frac{9}{10}$$

Аналогично поступим со следующими 900 членами (надо ли говорить, что каждый из них больше 1/1000?):

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{999} > \frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$$

И так далее —

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{9999} > \frac{9000}{10\,000} = \frac{9}{10}$$

и тому подобное. Следовательно, сумма всех-всех членов равна как минимум

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \dots$$

и так до бесконечности.

Отступление

А вот забавный факт:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \approx \gamma + \ln n$$

где γ есть число 0,5772155649..., так называемая *постоянная Эйлера–Маскерони*, а $\ln n$ — натуральный логарифм n , описанный нами в главе 10 (кстати, до сих пор доподлинно неизвестно, является ли число γ («гамма») рациональным или иррациональным). Аппроксимация будет тем точнее, чем больше будет значение n . А вот и таблица, в которой сумма ряда сопоставлена с аппроксимацией:

n	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$	$\gamma + \ln n$	Отклонение
10	2,92897	2,87980	0,04917
100	5,18738	5,18239	0,00499
1000	7,48547	7,48497	0,00050
10 000	9,78761	9,78756	0,00005

Не менее удивителен и следующий факт: одного взгляда на простые знаменатели достаточно, чтобы понять, что при большом простом значении p

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{p} \approx M + \ln \ln p$$

где $M = 0,2614972\dots$, то есть *постоянная Мертенса*. Аппроксимация, таким образом, будет становиться точнее и точнее с увеличением значения p .

Следствием этого факта является то, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots = \infty$$

Стремление к бесконечности здесь действительно имеет место: логарифм логарифма числа p есть величина малая даже при очень большом значении самого p . Так, сумма обратных величин всех простых чисел в диапазоне от самого первого из них до числа гугол (10^{100}) будет меньше 6!

Хотите увидеть, что произойдет, если немного модифицировать гармонический ряд? Даже если выбросить из него определенное конечное количество членов, он все еще будет расходиться. Например, если выбросить первый миллион — $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10^6}$, — который в сумме даст 14, все оставшиеся члены все равно будут стремиться к бесконечности.

Ряд будет расходиться, даже если его расширить. Например, так как при $n > 1$, $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{n}$, имеем

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots = \infty$$

Уменьшение каждого члена, даже деление на 100, ничего не изменит:

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \dots = \frac{1}{100} (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots) = \infty$$

Так что же, получается, вообще нет никаких способов заставить этот ряд сойтись? Есть! Как показал Эйлер, достаточно просто возвести знаменатели всех его членов в квадрат:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

В принципе, воспользовавшись интегральным исчислением, можно показать, что при любом значении $p > 1$ ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$$

будет сходиться к значению, меньшему, чем $\frac{p}{p-1}$. Например, при $p = 1,01$ ряд будет сходиться, даже если все его члены будут лишь ненамного меньше членов гармонического ряда:

$$1 + \frac{1}{2^{1,01}} + \frac{1}{3^{1,01}} + \frac{1}{4^{1,01}} + \dots < 101$$

А теперь возьмем гармонический ряд и уберем из него все числа, в которых есть цифра 9. И смотрите, что произойдет: приравнять все оставшиеся члены к бесконечности уже не получится, а значит, ряд будет сходиться к некой величине. Доказать это можно, просчитав все числа без девяток. Для этого разобьем их на несколько групп в соответствии с длиной знаменателя. Начнем, к примеру, с восьми дробей с однозначным знаменателем: от $\frac{1}{1}$ до $\frac{1}{8}$. Членов с двумя цифрами под чертой будет $8 \times 9 = 72$, потому что вариантов выбора первой цифры (любой, кроме 0 и 9) у нас восемь, а вариантов выбора второй — девять. Таким же образом чисел с трехзначным знаменателем получится $8 \times 9 \times 9$, а с n -значным — $8 \times 9^{n-1}$. Обратите внимание, что наибольшей дробью с одной цифрой в знаменателе будет 1, с двумя — $\frac{1}{10}$, с тремя — $\frac{1}{100}$. Благодаря этому мы можем разбить весь ряд на несколько групп, следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &< 8 \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{88} &< (8 \times 9) \times \frac{1}{10} = 8 \left(\frac{9}{10} \right) \\ \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{888} &< (8 \times 9^2) \frac{1}{100} = 8 \left(\frac{9}{10} \right)^2 \end{aligned}$$

и т. д. Общая же сумма составит не больше, чем

$$8 \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10} \right)^2 + \left(\frac{9}{10} \right)^3 + \dots \right) = \frac{8}{1 - \frac{9}{10}} = 80$$

Таким образом, гармонический ряд без девяток будет сходиться к величине, не превышающей 80. $\square$

Секрет в том, что в этом ряду почти все большие величины обязательно будут иметь девятку. Если загадать случайное число (то есть число со случайным порядком случайных цифр), вероятность того, что среди первых n знаков не появится цифра 9, будет равна $(9/10)^n$, и она будет стремиться к нулю по мере увеличения значения n .

Отступление

Давайте посмотрим на числа π и e как на случайный набор цифр. Существует теоретическая вероятность, что рано или поздно среди них вам встретится ваше любимое целое число. Например, мое любимое 2520 — это знаки с 1845 по 1848 числа π . Первые 6 чисел Фибоначчи — 1, 1, 2, 3, 5, 8 — появляются вновь, начиная с 820 390 позиции. Удивительного тут на самом деле ничего нет: шансы, что идущие подряд 6 цифр совпадут со случайным шестизначным числом, — один к миллиону. А так как среди первого миллиона знаков у нас примерно один миллион шестизначных последовательностей, наши шансы не так уж и малы. С другой стороны, удивителен тот факт, что число 999 999 появляется в π сравнительно скоро, уже на 763 знаке. По этому поводу физик Ричард Фейнман как-то заметил, что если бы он помнил и воспроизводил первые 767 знаков, люди бы верили в то, что π — число вполне себе рациональное, ведь он заканчивал бы словами «Девять, девять, девять, девять, девять, девять и т.д.!».

Представляете, существуют даже специальные программы (в том числе и онлайн), которые ищут придуманные вами последовательности цифр среди знаков π и e . Испытывая одну из них, я с удивлением обнаружил, что знаки числа π , начиная с трехтысячного, выглядят как 31961 — день моего рождения, 19 марта 1961 года¹!

¹ В США при записи даты сначала указывается месяц (в тексте — 3), потом — день и год (19 и 61 соответственно). — *Прим. пер.*

Бесконечно интересные и бесконечно невозможные бесконечные суммы

Давайте суммируем все, что нам на настоящий момент известно о суммах.

В начале главы мы выяснили, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

и поняли, что это — особый случай геометрического ряда, в котором при любом значении x (при условии, что $-1 < x < 1$)

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Все это верно и для отрицательных величин от 0 до -1 . Например, при $x = -1/2$ получаем

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{2}{3}$$

Ряд, в котором постоянно чередуются положительные и отрицательные величины, с каждым шагом приближающиеся к нулю, называется *знакочередующимся*. Он всегда сходится. Чтобы представить его более наглядно, начертите оси координат и поставьте палец в точку нуля. А теперь перемещайте палец таким образом: сначала вправо на единицу, потом влево на $1/2$, вправо на $1/4$ (проверьте себя — к этому моменту вы должны быть на точке $3/4$), влево на $1/8$ (на точку $5/8$) и т.д. Рано или поздно ваш палец остановится на одной точке — $2/3$ — и не сможет никуда с нее деться.

Возьмем другой знакочередующийся ряд:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

После четвертого члена нам становится понятно, что бесконечная сумма составит минимум $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 = 7/12 = 0,583\dots$, после пятого — максимум $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 = 47/60 = 0,783\dots$. Истина, как всегда, кроется где-то посередине — $0,693147\dots$. С помощью исчисления мы можем найти *действительное* значение этого числа.

Чтобы размяться, возьмем следующий ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

и посмотрим, что будет, если продифференцировать обе его части. Помните, в главе 11 мы определили, что производные $1, x, x^2, x^3, x^4$ и т.д. равны соответственно $0, 1, 2x, 3x^2, 4x^3$ и т.д.? Получается, что производная бесконечной суммы есть (бесконечная) сумма производных. А теперь применим цепное правило, чтобы продифференцировать $(1-x)^{-1}$. При $-1 < x < 1$ получаем

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Посмотрим на другой ряд, заменив x на $-x$. При $-1 < x < 1$

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x}$$

Найдем для обеих сторон *антипроизводные* (или *первообразные*), то есть займемся тем, что называется *интеграцией*. Чтобы это сделать, двинемся назад: например, если производная x^2 — $2x$, то первообразная $2x - x^2$. (Специально для тех, кто любит «погорячее»: производная $x^2 + 5$, $x^2 + \pi$ или $x^2 + c$ при любом значении c также равна $2x$, поэтому первообразная $2x$ — и на самом деле $x^2 + c$.) Значит, первообразными $1, x, x^2, x^3, x^4$ и т.д. будут соответственно $x, x^2/2, x^3/3, x^4/4, x^5/5$ и т.д., а первообразной $1/(1+x)$ — натуральный логарифм $1+x$. То есть при $-1 < x < 1$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \ln(1+x)$$

(Постоянная величина слева — 0, потому что при $x = 0$ нам нужно, чтобы левая часть соответствовала $\ln 1 = 0$.) Так как x стремится к единице, мы получаем *натуральное* значение 0,693147..., а именно

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2$$

Отступление

Если же заменить x на $-x^2$, то при значении x , находящемся между -1 и 1 ,

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

В большинстве учебников по исчислению сказано, что $y = \tan^{-1}x$ имеет производную $y' = \frac{1}{1+x^2}$. Следовательно, если мы найдем первообразные обеих сторон (не забыв, что $\tan^{-1}0 = 0$), то придем к

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots = \tan^{-1}x$$

А положив x как величину, стремящуюся к нулю, — и к

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

Правильно пользоваться геометрическим рядом мы уже научились. Почему бы немного не попользоваться им неправильно? Формула утверждает, что

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

при любом значении x , ограниченным условием, что $-1 < x < 1$. А что, если набраться смелости и взять $x = -1$? Тогда наша формула примет следующий вид:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

Конечно, это невозможно: при сложении и вычитании целых величин дробь вроде $1/2$ просто не может образоваться, даже при сходящейся сумме. С другой стороны, крупица здравого смысла в таком ответе все-таки есть — просто взгляните на промежуточные суммы:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 - 1 &= 0 \\ 1 - 1 + 1 &= 1 \\ 1 - 1 + 1 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

и т.д. Половина из них равна 1, другая половина — 0, то есть число $1/2$ здесь появляется как минимум не случайно.

Возьмем другое «незаконное» значение — $x = 2$. Тогда ряд скажет нам, что

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1$$

Этот ответ выглядит еще более нелепо, чем предыдущий: как может сумма положительных чисел быть отрицательной? Но зерно истины скрыто и здесь. Помните, в главе 3 мы разбирали случаи, когда положительная величина ведет себя как отрицательная в таких, например, отношениях:

$$10 \equiv -1 \pmod{11}$$

Это привело нас к выводу, что $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$.

А вот один очень интересный способ понять $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$, который потребует от нас нестандартного творческого подхода. Вернемся назад к главе 4, в которой мы выяснили, что любое целое может быть представлено в виде уникальной суммы двух степеней двойки. Именно этот принцип лежит в основе *двоичной системы счисления* — системы, благодаря которой современные компьютеры умеют считать. Причем количество степеней двойки обязательно конечно. Например, в $106 = 2 + 8 + 32 + 64$ таких степеней всего четыре. Но предположим, что для нас вдруг стало доступно и бесконечное их количество. Типичное бесконечное целое выглядит как

$$1 + 2 + 8 + 16 + 64 + 256 + 2048 + \dots$$

где каждый член — это степень по основанию 2. К чему это нас приведет, пока неясно, но некоторая закономерность здесь уже прослеживается. Так, эти числа можно складывать, перенося лишние цифры в следующий разряд — как мы всегда и делаем. Например, прибавив к предыдущему ряду число 106, получим

$$\begin{array}{rccccccc} 1 + 2 & & + 8 + 16 & & + 64 & & + 256 + \dots \\ + 2 & & + 8 & & + 32 + 64 & & \\ \hline 1 & + 4 & & & + 64 + 128 + 256 + \dots \end{array}$$

где две двойки предсказуемо дают 4, а две восьмерки — 16. А дальше смотрите, что происходит: этот результат мы прибавляем к следующим 16 и получаем 32. Плюс еще 32 — будет 64. А так как дальше у нас уже есть целых две величины, равные 64, имеем 64 и 128. Все, что выше 256, остается в единственном экземпляре. Теперь попробуйте представить, что произойдет, когда мы прибавим 1 к некой абстрактной «наибольшей» величине.

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + \dots \\ + 1 \\ \hline \end{array}$$

Мы получим бесконечную цепь реакций, уводящих за пределы уравнения все значения, не связанные степенными отношениями с 2. Следовательно, сумму вполне можно представить как 0. Так как $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots) + 1 = 0$, вычитание 1 из обеих частей приведет нас к бесконечной сумме, ведущей себя в точности, как число -1 .

Хотите, расскажу вам о своей любимой бесконечной сумме? Вот она:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = \frac{-1}{12}$$

Чтобы доказать это, обратимся к алгебраическим хитростям и так же, как мы делали во втором доказательстве действительности конечного геометрического ряда, сдвинем отдельные элементы. Такой подход отлично срабатывает для конечных сумм, но в применении к суммам бесконечным он дает порой очень странные, порой абсурдные результаты. Применим его для начала к одному из предыдущих тождеств. Сумму запишем дважды — без сдвига и со сдвигом. Получится

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ S &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \end{aligned}$$

Сложим эти два уравнения:

$$2S = 1$$

Следовательно, S будет равно $1/2$, как мы и рискнули предположить чуть выше, заменив x в геометрическом ряду на -1 .

Отступление

Тот же метод можно использовать для быстрого (хотя и не вполне «законного») подтверждения формулы геометрического ряда.

$$\begin{aligned} S &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \\ xS &= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \end{aligned}$$

Вычтем одно уравнение из другого:

$$S(1 - x) = 1$$

то есть

$$S = \frac{1}{1 - x}$$

Самое потрясающее то, что знакочередующаяся версия желаемой нами суммы тоже имеет очень любопытный ответ:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots = \frac{1}{4}$$

Сдвигаем, записываем ответ дважды:

$$\begin{aligned} T &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots \\ T &= \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \dots \end{aligned}$$

Складываем:

$$2T = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Следовательно, $2T = S = 1/2$, то есть $T = 1/4$, как и было сказано.

Ну и, наконец, посмотрим, что произойдет, если представить сумму всех положительных целых как U и сравнить ее с уже известной нам суммой T (точнее, с ее рядом без сдвига):

$$\begin{aligned} U &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots \\ T &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots \end{aligned}$$

Вычтем второе из первого:

$$U - T = 4 + 8 + 12 + 16 + \dots = 4(1 + 2 + 3 + 4 + \dots)$$

Другими словами,

$$U - T = 4U$$

Решая это уравнение для U , получаем $3U = -T = -1/4$, следовательно,

$$U = -1/12$$

как и предполагалось.

Для протокола отметим, что при сложении бесконечного количества положительных целых сумма расходится до бесконечности. Но не торопитесь списывать все наши конечные результаты на обычные чудеса математики — с подобными странностями можно и нужно разобраться. Достаточно просто посмотреть на числа под другим углом, и сумма $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = -1$ покажется не такой уж и невероятной.

В привязке к оси, как вы наверняка помните, казалось невозможным найти корень числа -1 , но у нас получилось сделать это, когда мы трактовали комплексные величины как точки на комплексной же плоскости — точки, подчиняющиеся своим собственным арифметическим законам.

Любой физик, занимающийся теорией струн¹, подтвердит, что $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$, ведь именно на этой сумме основано множество его вычислений. Видите: даже самый абсурдный результат нельзя просто взять и отместить только на основании его абсурдности — всему есть свое объяснение, достаточно лишь напрячь воображение.

Давайте закончим эту книжку еще одним парадоксальным результатом. В начале раздела мы взяли знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

сходящийся к $\ln 2 = 0,693147\dots$. От перемены мест слагаемых сумма, по идее, меняться не должна — этот принцип называется коммутативным законом сложения и выглядит как

$$A + B = B + A$$

для любых значений A и B . И тем не менее

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Это именно перемена мест слагаемых: мы по-прежнему складываем дроби с нечетными значениями знаменателя и вычитаем дроби с четными значениями знаменателя. И хотя четные числа используются в ряду в 2 раза чаще, чем нечетные, тех и других у нас бесконечный запас. К тому же каждая из дробей встречается лишь единожды, как и в оригинальном уравнении. Правда? Правда. Но взгляните-ка:

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) \end{aligned}$$

Это значит, что у нас получается лишь половина изначальной суммы! Как такое возможно? И как возможно то, что перемена мест слагаемых приводит нас к другому результату? Ответ прост: коммутативный закон сложения вполне может «буксовать», когда дело доходит до бесконечного количества чисел, и это хорошо известно.

¹ Теория струн — направление теоретической физики, изучающее динамику взаимодействия не точечных частиц, а одномерных протяженных объектов, так называемых квантовых струн. — *Прим. пер.*

«Пробуксовка» возникает при схождении всякий раз, когда положительные величины вместе с отрицательными формируют расходящийся ряд. Другими словами, когда положительные величины дают в сумме ∞ , а отрицательные — $-\infty$, как в нашем последнем примере. Подобные ряды называются *условно сходящимися*. Их магия заключается в том, что члены в них можно перемешивать как угодно — и получать тем самым нужный нам результат. Попробуем, например, прийти к 42. Сначала добавляем необходимое количество положительных величин, чтобы сумма чуть-чуть превышала 42, потом вычитаем первый из отрицательных членов. Снова поднимаемся выше 42 и снова вычитаем отрицательный член — на этот раз второй. Повторяем алгоритм и смотрим, как сумма будет все ближе и ближе подходить к 42 (например, вычтя пятый отрицательный член $-1/10$, мы получим значение, отличающееся от желаемого результата в пределах 0,1, пятидесятый же отрицательный член $-1/100$ уменьшит этот предел до 0,01 и т.д.).

Конечно, обычно бесконечные ряды, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни, так странно себя не ведут. Если заменить каждый член ряда его *абсолютным значением* (что превратит отрицательные величины в положительные), то при сходящейся новой сумме мы получим *абсолютно сходящийся ряд*. Покажем это на примере уже известного нам знакопередающегося ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots = \frac{2}{3}$$

Так вот, он будет именно абсолютно сходящимся, ведь при сложении абсолютных величин мы придем к другому, ничуть не менее знакомому нам сходящемуся ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

Здесь коммутативный закон сложения «буксовать» не будет даже при бесконечном количестве членов. Следовательно, в изначальном знакопередающемся ряду числа 1, $-1/2$, $1/4$, $-1/8$... можно «тасовать» как угодно — их сумма всегда будет равна $2/3$.

К сожалению, в отличие от бесконечных рядов, любая книга, в том числе и эта, должна когда-то заканчиваться. Лезть дальше бесконечности мы, пожалуй, не осмелимся, а остановимся прямо здесь. Впрочем, у меня для вас припасено еще одно *матемагическое* блюдо.

На бис: магические квадраты

Уверен, этот десерт вам понравится. С бесконечностью он никак не связан, зато магия здесь содержится прямо в официальном названии — разве можно просто взять и пройти мимо? *Магическим* называется такой квадрат, в котором все значения по горизонтали, вертикали и диагонали дают в сумме одно и то же число. Самый известный такой квадрат — размером 3 на 3 — изображен чуть ниже. Все содержащиеся в нем числа суммируются до 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Магический квадрат размером 3 на 3 с магической суммой, равной 15

Мало кто знает, но этот квадрат обладает одним уникальным свойством, которое я бы назвал «квадратно-палиндромическим». Если представить каждую горизонталь или вертикаль как трехзначное число, а потом сложить их квадраты, получим

$$492^2 + 357^2 + 816^2 = 294^2 + 753^2 + 618^2$$

$$438^2 + 951^2 + 276^2 = 834^2 + 159^2 + 672^2$$

То же происходит и с большими диагоналями:

$$456^2 + 312^2 + 897^2 = 654^2 + 213^2 + 798^2$$

Магические квадраты магического квадрата!

Самый простой квадрат размером 4 на 4 включает в себя числа от 1 до 16, которые суммируются до 34 (см. ниже). Математики и фокусники очень любят квадраты 4 на 4: они дают нам десятки способов прийти к волшебному результату. Например, в нашем квадрате итоговое число 34 дают не только горизонтали, вертикали и диагонали, но и каждый внутренний сектор размером 2 на 2 (например, левый верхний (8, 11, 13, 2), центральный (2, 7, 16, 9) или «разнесенный» по углам (8, 1, 10, 15)) и большие диагонали.

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

Магический квадрат с суммой, равной 34.

К этому результату нас приводят не только горизонтали, вертикали и большие диагонали, но и симметрично расположенные внутренние сектора

У вас есть любимое двузначное число больше 20? Можно создать для него (обозначим его буквой T) свой магический квадрат из чисел от 1 до 12 и чисел $T - 18$, $T - 19$, $T - 20$ и $T - 21$.

Следующий наш пример основан на $T = 55$. Каждая четверка величин, ранее суммировавшихся до 34, дает нам 55, если в нее входит ровно одно (и ни в коем случае не два и не ноль) значение с переменной T — именно поэтому правый верхний сектор нам подходит ($35 + 1 + 7 + 12 = 55$), а средний левый — нет ($34 + 2 + 3 + 37 \neq 55$).

8	11	$T - 20$	1
$T - 21$	2	7	12
3	$T - 18$	9	6
10	5	4	$T - 19$

Магический квадрат с суммой T

8	11	35	1
34	2	7	12
3	37	9	6
10	5	4	36

Магический квадрат с суммой 55

Впрочем, даже если у вас нет любимого двузначного числа, то уж день рождения есть наверняка — а значит, теперь вы сможете создать свой личный магический квадрат! Воспользуемся моим методом «двойного дня рождения» — дорогая вам дата здесь появляется дважды: в верхней горизонтали и в четырех углах. Я обозначу взятые вами числа буквами A , B , C и D , чтобы наглядно показать, что именно у вас должно получиться. Как и в любом магическом квадрате, и горизонтали, и вертикали, и диагонали, и большинство симметрически расположенных внутренних секторов будут иметь сумму $A + B + C + D$.

A	B	C	D
$C - 1$	$D + 1$	$A - 1$	$B + 1$
$D + 1$	$C + 1$	$B - 1$	$A - 1$
B	$A - 2$	$D + 2$	C

Магический квадрат двойного дня рождения.
Дата $A/B/C/D$ появляется в верхнем ряду и по углам

Моя мать, например, родилась 18 ноября 1936 года, значит, ее личный магический квадрат выглядит вот так:

11	18	3	6
2	7	10	19
7	4	17	10
18	9	8	3

Личный магический квадрат моей матери,
родившейся 11/18/36, имеет сумму 38

А теперь ваш день рождения. Следуя закономерности, указанной выше, вы получите свою личную сумму больше 30 раз — попробуйте посчитать сами.

Если же вам и этого мало, вот вам способы создать более крупные магические квадраты — например, квадрат размером 10 на 10, в который входят все числа от 1 до 100:

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
79	6	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
4	81	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

Магический квадрат размером 10 на 10 с числами от 1 до 100

Сможете прикинуть, чему равна сумма чисел в каждой горизонтали, вертикали или диагонали, при этом их не складывая? Конечно же, сможете: много-много страниц назад мы доказали, что сумма всех чисел от 1 до 100 равна 5050, каждый же ряд составляет одну десятую от этого количества, то есть $5050/10 = 505$.

Правда, забавно? Мы заканчиваем тем же, чем и начинали. Спасибо за то, что прошли со мной весь этот путь! И поздравляю! Сколько математических фокусов мы увидели, сколько способов решения задач открыли, сколько всего нового узнали! Уверен, все это пригодится вам еще не раз, и надеюсь, что идеи, о которых рассказано в этой книге, показались вам полезными, интересными и магическими!

Итого

Я и вправду надеюсь, что это не последняя книга по математике, которую вы читаете. Ведь в меню еще столько вкусного — столько всего, о чем не узнаешь на уроках в школе.

«Магия математики» родилась в процессе работы над видеокурсом «Математическое удовольствие», выпущенным в серии «Лучшие курсы». Он состоит из 24 получасовых лекций — в них я так или иначе касаюсь тех тем и проблем, которые мы обсуждали в этой книге. Но есть там и многое другое, не менее интересное: загадки вероятности, математические игры... и, конечно, еще больше магии! Не описать словами, насколько я благодарен издателям курса за то, что позволили мне использовать его материалы для создания этой книги.

«Лучшие курсы» — это более трех десятков программ, доступных в аудио- и видеоформатах (их можно купить на дисках или скачать с официального сайта). Все они посвящены математике и основным ее разделам: алгебре, геометрии, исчислению и даже истории этой удивительной науки. Масштабный проект, для работы над которым привлекались выдающиеся преподаватели со всей Америки. Представляете, какой было честью попасть в их число? Всего мне посчастливилось поучаствовать в четырех программах: об одной я уже вам рассказал, остальные три называются «Дискретная математика», «Математика в играх и головоломках» и «Секреты устного счета».

Последняя, кстати, — это не только курс лекций, но и книга, написанная мной в соавторстве с замечательным историком и популяризатором науки Майклом Шермером и выпущенная издательством Random House. В ней мы постарались пролить как можно больше света на все, что связано со счетом в уме при решении как простых, так и сложных, комплексных задач. Чтобы в ней разобраться, совсем необязательно быть специалистом — достаточно просто знать таблицу умножения для первых десяти чисел. Впрочем, если вы не знаете и ее (например, потому что еще учитесь в начальной школе), могу порекомендовать почитать «Искусство устного счета» — она написана еще проще (над ней мне помогала работать Наталья Сен-Клер — именно ей книга обязана удивительной легкостью

авторской речи и прекрасными иллюстрациями). И то и другое издание можно купить на Amazon.com или createspace.com.

Более искушенный читатель может найти для себя интересными «Доказательства, которые действительно работают: Искусство комбинаторики», «Сливки теории чисел» (выпущены издательством Американской математической ассоциации; соавтор первой — Дженнифер Куин, соредактор второй — Эзра Браун) и «Удивительный мир теории графов» (издательство Принстонского университета, соавторы — Гари Чартренд и Пинг Жанг).

Своим интересом к литературе я обязан Мартину Гарднеру — величайшему математическому магу всех времен и народов, автору более чем двух сотен книг, многие из которых посвящены занимательной математике. Его творения (вместе с колонкой «Математические игры», которую он вел в журнале *Scientific American*) вдохновили многие поколения математиков — как профессионалов, так и любителей. В том числе и меня. Позвольте также порекомендовать вам книги за авторством Алекса Беллоса, Айваса Петерсона и Йэна Стюарта. И, конечно же, ни в коем случае не проходите мимо «Радости от поисков X: Путешествие в страну математики из пункта 1 в пункт ∞ » Стивена Строгаца.

Если вам интересна высшая математика или область возможных значений (самый край математической земли, самая высокая из всех вершин этой горной цепи), то здесь мне очень важной вехой представляется серия «Искусство решения задач» Ричарда Ражика. Там есть все, что вы наверняка успели полюбить: алгебра, геометрия, исчисление и многое, многое другое. У серии есть сайт ArtOfProblemSolving.com, где любой желающий может пройти интерактивный курс математики и поучаствовать в интересных конкурсах.

Кстати, об Интернете. Мой коллега Френсис Су собрал на своей странице www.math.hmc.edu/funfacts несколько сотен самых удивительных математических задач. В основном они ориентированы на педагогов, которые любят «разогреть» учеников в самом начале урока нестандартным и интересным заданием. Что-то подобное сделал и Алекс Богомольный: просто зайдите на Cut-The-Knot.org, и «Интерактивные математические пазлы» захватят вас очень и очень надолго. А еще вы найдете там более сотни доказательств теоремы Пифагора! Если читать лень, можете посмотреть видео на Numberphile.com — отличный способ провести время с пользой.

Больше мне добавить (или умножить) нечего. Читайте и получайте удовольствие!

Благодарности

Эти страницы так и не увидели бы типографского станка, если бы не храбрость и настойчивость моего литературного агента Карен Ганц Залер и не поддержка моего любимого редактора из издательства Basic Books Ти Джея Келлехера.

Я бы не справился без помощи нежно любимой мной Натальи Сен-Клер, которая украсила эту книгу чудесными графиками, диаграммами и рисунками. У Натальи есть уникальный дар — она может превратить самую скучную теорию в веселый праздничный карнавал.

У каждого писателя должен быть свой «идеальный» читатель. Моего зовут Сэм Гутекунст. Кода-то он был моим студентом, теперь же значительно облегчает работу Ти Джея, тщательнейшим образом вычитывая страницу за страницей и составляя подробные комментарии. А еще судьба свела меня с математиками Ами Шел-Гелаш и Винсентом Матско, чьи зоркие глаза разглядели все мои ляпы. Без их профессиональной поддержки у меня никогда не получилось бы то, что получилось.

А еще у меня совершенно фантастические коллеги и студенты. Все-таки наш колледж — удивительное место! Особое спасибо хотелось бы сказать профессору Френсису Су (за вдохновляющие беседы и сайт Math Fun Facts) и Скотту и Кэрол Энн Смолвудам, возглавляющим кафедру математики имени Смолвудов. И, конечно же, я бесконечно благодарен Кристоферу Брауну, Гари Чартренду, Джею Кордесу, Джону Форту, Рону Грэхему, Мохаммеду Омару, Джейсону Розенхаусу и Наталье Сен-Клер за плодотворные дискуссии и родившиеся в ходе них идеи.

Итану Брауну я признателен за мнемонические упражнения для числа τ , Дагу Данхэму — за чудесное изображение бабочки, Дейлу Гердеману — за диаграмму Серпинского, Майку Киту — за его хит о числе π , математикам Ларри Лессеру и Дейну Кэмпбу — за разрешение использовать в книге их стихотворения, Наталье Сен-Клер — за фотографию в разделе о золотом сечении.

Спасибо профессионалам из Perseus Books. Спасибо, Квин До, Ти Джей Келлехер, Кесси Нельсон, Мелисса Веронези, Сью Вара, Джеф Вильямс и многие-многие другие — с вами было удивительно приятно работать!

Создателям серии «Лучшие курсы» я желаю и дальше столь же успешно продолжать свое великое дело. Математику можно и нужно нести в массы! Вы же делаете это таким способом, который мне бы и в голову никогда не пришел. Большое спасибо вам за то, что позволили мне использовать материалы из «Математического удовольствия» во время работы над этой книжкой. Джей Тейт, вы незаменимы!

Я не стал бы тем, кем стал, без моих родителей Ларри и Ленор Бенджаминов, и, конечно же, без моих учителей — Бетти Голд, Мэри Энн Спаркс и Джин Фислер. Спасибо и моим одноклассникам и коллегам по Мейфилд Хай Скул, Университету Карнеги–Меллон, Университету Джонса Хопкинса и колледжу Харви Мадда.

Но больше всего на свете я благодарен своей жене Дине и нашим дочерям Лорел и Ариэль — за их любовь и терпение. (Дина, спасибо, что читала все, что появлялось на мониторе моего компьютера.) Я люблю вас. Дорогие мои, вы — самая удивительная и непостижимая магия всей моей жизни.

Артур Бенджамин
Клермонт, Калифорния, США
2015 год

АРТУР БЕНДЖАМИН защитил диссертацию в Университете Джонса Хопкинса (Балтимор, Мэриленд), профессор кафедры математики имени Смолвудов Колледжа Харви Мадда (Клермонт, Калифорния). За свою писательскую и преподавательскую деятельность неоднократно удостоивался престижных наград. Помимо прочего, доктор Бенджамин занимает пост редактора журнала *Math Horizons*, выпускаемого Американской математической ассоциацией. Трижды приглашался в программу *TED talks* — записи выпусков с его участием набрали в общей сложности 10 млн просмотров. Ежемесячник *Reader's Digest* назвал его «лучшим математическим умом Америки». Автор книги «Секреты устного счета» (*Secrets of Mental Math*,). Живет в Клермонте (Калифорния). Женат. Воспитывает двух дочерей.

Бенджамин Артур

МАГИЯ МАТЕМАТИКИ

*Как найти x
и зачем это нужно*

Руководитель проекта *А. Василенко*

Корректор *С. Мозалёва*

Компьютерная верстка *А. Абрамов*

Дизайн обложки *Ю. Буга*

В оформлении обложки использованы изображения
из фотобанка *shutterstock.com*

Подписано в печать 20.05.2016. Формат 70×100 1/16.

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.

Объем 21,5 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № .

ООО «Альпина Пабlishер»

123060, Москва, а/я 28

Тел. +7 (495) 980-53-54

www.alpina.ru

e-mail: info@alpina.ru

Знак информационной продукции
(Федеральный закон № 436-ФЗ от 29.12.2010 г.)

0+



ООО «Альпина Паблишер»

Здравствуйте,
дорогой читатель!

Кому:
Нашему читателю

От кого:
От коллектива
издательства
«Альпина Паблишер»

Тема письма:
Об издательстве

Если Вы читаете это письмо, значит, в руках у Вас наша книга и мы не зря делаем свою работу.

Мы убеждены, что у каждого человека есть потребность в постоянном развитии и получении знаний для личного и профессионального роста. Именно поэтому мы стремимся отыскивать для Вас в огромном массиве мировой литературы по-настоящему полезные книги, которые помогут Вам лучше распорядиться навыками и умениями, сделать жизнь полнее и интереснее.

Мы делаем свою работу уже 18 лет, и за эти годы выпустили более 3000 изданий общим тиражом 10 миллионов экземпляров. Наши авторы, среди которых Айн Рэнд, Стивен Кови, Ричард Брэнсон и другие талантливые и яркие личности, помогли миллионам людей во всем мире по-новому взглянуть на жизнь, достичь новых высот в развитии и карьере, реализовать свои мечты.

Мы очень рады, что в эту самую минуту Вы стоите на пороге замечательных открытий, которые поможет сделать эта книга. Мы верим, что всякий раз, когда кто-то читает наши книги, мир становится чуть лучше, а сам читатель — гармоничнее и счастливее. И просто здорово, что сейчас этим человеком становитесь именно Вы.

Искренне Ваш, коллектив издательства
"Альпина Паблишер"

**TRY
THE BOOK**

“ Как вам, например, вот это? Задумайте любое число в промежутке от 20 до 100. Задумали? Сложите между собой составляющие его цифры. Вычтите получившуюся сумму из задуманного вами числа. И снова сложите цифры. Получилось 9?

Здорово, правда? Вся математика построена на таких вот фокусах, о которых в школах нам почему-то не рассказывают. В этой книжке я покажу вам, как с помощью обычных чисел, фигур и простой логики творить настоящие чудеса.

”