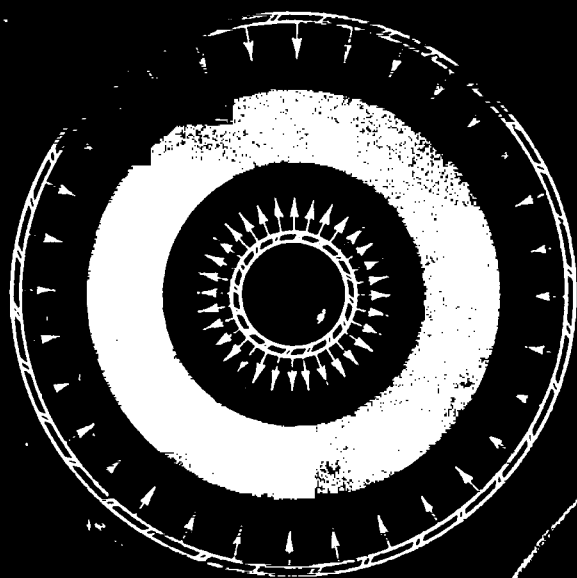


*Б.Р. Белостоцкий*  
*А.С. Рубанов*

# ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ОПТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ



Б. Р. Белостоцкий  
А. С. Рубанов

ТЕПЛОВОЙ  
РЕЖИМ  
ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ  
ОПТИЧЕСКИХ  
КВАНТОВЫХ  
ГЕНЕРАТОРОВ

С предисловием академика  
АН БССР *Б. И. Степанова*

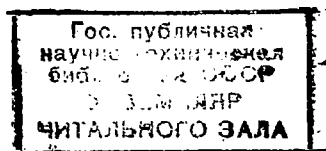


«ЭНЕРГИЯ»  
МОСКВА 1973

6Ф4

Б 43

УДК 621.375.8.036



44 73 - 39801  
14708

Белостоцкий Б. Р. и Рубанов А. С.

Б 43 Тепловой режим твердотельных оптических квантовых генераторов. М., «Энергия», 1973.  
168 с. с ил.

В книге рассматриваются методы расчета температурного режима, напряженного состояния и термических искажений активных элементов твердотельных оптических квантовых генераторов.

Книга рассчитана на инженерно-технических работников в области оптики и источников света, а также может быть полезна студентам вузов.

Б  $\frac{3311594}{051(01)-73}$  144-73

6Ф4

© Издательство «Энергия», 1973 г.

*Борис Романович Белостоцкий  
Александр Сергеевич Рубанов*

Тепловой режим твердотельных оптических  
квантовых генераторов

Редактор *О. В. Долженко*

Редактор издательства *И. В. Антик*

Обложка художника *Е. В. Никитина*

Технический редактор *Н. А. Галанчева*

Корректор *Н. В. Лобанова*

Сдано в набор 17/VII 1973 г. Подписано к печати 22/XI 1973 г. Т-17668

Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>

Бумага типографская № 3

Усл. печ. л. 8,82

Уч.-изд. л. 9,84

Тираж 3 000 экз.

Зак. 298

Цена 50 коп.

Издательство «Энергия». Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие квантовой электроники стимулирует интерес к исследованию особенностей теплового воздействия излучения на вещество. Выделение тепла при взаимодействии мощного излучения с веществом оказывает существенное влияние на процессы самофокусировки и самодифракции, параметрическое преобразование световых волн, возбуждение оптических гармоник, лучевую прочность оптических материалов.

Тепловые процессы оказывают заметное влияние на работу оптических квантовых генераторов. Значительная часть поглощенной энергии накачки преобразуется в тепло и вызывает нагрев активных элементов твердотельных ОКГ. В свою очередь нагрев активных элементов сопровождается изменением их оптических и спектроскопических свойств и, тем самым, эффективности работы генератора. Ввиду этого при разработке твердотельных генераторов (в особенности частотных и непрерывных) необходимо обеспечение температурного режима активных элементов, соответствующего тем или иным заданным параметрам генерируемого излучения.

Данная книга посвящена теоретическому анализу особенностей теплового режима активных элементов ОКГ и методам их инженерного расчета. В ней подробно изложены основные закономерности нагрева активных элементов в зависимости от их размеров и формы поперечного сечения, теплофизических свойств и временного режима работы генератора. Вместе с тем рассмотрены также термонапряженные состояния и термооптические и пьезооптические искажения активных элементов, возникающие при их нагреве. Основное внимание уделено оптическим квантовым генераторам на рубине, стекле и гранате.

Книга будет полезна как при разработке оптических квантовых генераторов, так и исследовании их генерационных характеристик.

*Герой Социалистического Труда  
Лауреат Государственных премий СССР,  
Академик АН БССР Б. И. СТЕПАНОВ*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Создание источников мощного когерентного излучения — оптических квантовых генераторов (ОКГ) — открыло широкие возможности для использования оптического излучения при решении целого ряда научных и технических проблем. Перспективы практического использования ОКГ определяются высокой мощностью, направленностью и когерентностью генерируемого излучения.

Решение многих прикладных задач связано с использованием оптических генераторов на твердом теле, работающих в непрерывном режиме или импульсном с большой частотой повторения импульсов генерации. При работе ОКГ в таких режимах происходит нагрев оптических элементов резонатора. Разогрев активных элементов (рабочих стержней) происходит вследствие эффективного преобразования излучения накачки в тепло. Другие оптические элементы (линзы, призмы, отражатели, светозатворы) нагреваются под действием генерируемого излучения. Наибольшему нагреву подвержены активные элементы. Нагрев вызывает изменение их оптических и спектроскопических свойств и вследствие этого оказывает влияние на энергетические, спектральные, пространственные и поляризационные характеристики излучения. Поэтому нагрев активных элементов является основным фактором, определяющим специфику работы частотных и непрерывных ОКГ.

Для уменьшения нагрева, а также температурной стабилизации активных элементов применяются различные системы. Выбор определенной системы охлаждения, оптимизация ее параметров и конструкции непрерывных и частотных ОКГ возможны лишь при детальном анализе температурных полей активных элементов в зависимости от различных факторов (конфигурации активных элементов, теплофизических свойств лазерных материалов, интенсивности теплообмена с охлаждающей

средой, уровня тепловых нагрузок, временного режима работы генератора).

Таким образом, изучение тепловых процессов, протекающих в активных элементах, и разработка методов их расчета являются одним из основных вопросов, рассмотрение которых необходимо при создании частотных и непрерывных ОКГ и исследовании их параметров.

Данная работа посвящена исследованию теплового режима твердотельных оптических квантовых генераторов. Изложение проводится применительно к активным элементам ОКГ. Однако приведенные данные могут быть использованы для расчета нагрева других оптических элементов. На основе анализа теплового режима проводится рассмотрение напряженного состояния и термических искажений активных элементов. При изложении материала основное внимание уделено рассмотрению ОКГ на рубине, стекле и гранате.

Главы 1, 3, 6 написаны А. С. Рубановым, гл. 2, 4, 5 — Б. Р. Белостоцким.

Авторы выражают благодарность заслуженному деятелю науки РСФСР проф. Л. И. Кудряшеву и заслуженному деятелю науки БССР академику АН БССР Б. И. Степанову за полезные советы, помощь и поддержку при выполнении данной работы.

*Авторы*

## Глава первая

### ВВЕДЕНИЕ

В процессе работы твердотельных оптических квантовых генераторов происходит нагрев активных элементов. Вследствие нагрева изменяются оптические и спектроскопические свойства вещества, определяющие параметры генератора. Как правило, с повышением температуры характеристики генерации ухудшаются.

Влияние нагрева на генерацию твердотельных ОКГ может быть обусловлено различными факторами. Так, например, для рубинового генератора существенную роль играет уменьшение квантового выхода и увеличение ширины  $R_1$ -линии люминесценции, вследствие чего возрастает порог, снижается коэффициент полезного действия ОКГ. Максимум длины волны излучения  $R_1$ -линии люминесценции также зависит от температуры, возрастая с ее увеличением. Температурный коэффициент изменения в диапазоне 25—125 °C составляет  $0,0065 \text{ нм} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ .

Активные элементы твердотельных ОКГ характеризуются высокой оптической однородностью. Для стеклянных стержней, например, изменение показателя преломления по сечению не превышает  $1 \cdot 10^{-7}$ . Однако такая высокая однородность практически не реализуется при работе генератора. Причиной уменьшения однородности является изменение оптических свойств рабочего вещества вследствие нагрева.

В общем случае нагрев активных элементов неоднороден по объему. В режиме одиночных импульсов неоднородность нагрева связана с характером распределения радиации накачки. Распределение накачки по объему зависит от оптических и спектроскопических свойств вещества, геометрии и размеров активного элемента, обработки его боковой поверхности, взаимного расположения источников накачки и активного элемента, конфигурации осветителя. При соответствующем расположении в освеще-

тителе цилиндрического активного элемента и источников возбуждения удается устранить азимутальную неоднородность распределения накачки и, следовательно, нагрева. Однако радиальные неоднородности в той или иной мере имеют место всегда. В режиме повторяющихся импульсов распределение температуры по сечению активного элемента зависит также от теплопроводности вещества и интенсивности теплообмена с охлаждающей средой. При большой частоте следования импульсов или в режиме непрерывной накачки в активных элементах возникают значительные градиенты температуры в плоскости сечения. Неоднородный нагрев приводит к появлению температурных напряжений.

Изменения оптических свойств (термические искажения) активных элементов связаны как с температурным изменением показателя преломления, так и с зависимостью показателя преломления от температурных напряжений (деформаций). Термические искажения приводят к появлению эффекта тепловой линзы и наведенного двулучепреломления. В случае частотных и непрерывных ОКГ тепловая линза, как правило, положительная и может приводить к фокусировке излучения в резонаторе или на зеркалах. Вследствие этого уменьшается добротность резонатора. Термические деформации приводят к искажению волнового фронта излучения, возбуждению угловых типов колебаний высокого порядка, увеличению расходимости, оказывают влияние на поляризационные характеристики генерируемого излучения.

Для лазерных материалов с невысокой механической прочностью (в частности, стекол) возникающие напряжения могут приводить к разрушению активных элементов.

Таким образом, нагрев рабочего вещества оказывает влияние на свойства генерируемого излучения, а для частотных и непрерывных ОКГ является основным фактором, определяющим специфику их работы.

## **1-1. ИСТОЧНИКИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ В АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ОКГ**

Нагрев активных элементов твердотельных ОКГ происходит в результате преобразования части поглощенной энергии накачки в тепло. Эффективность преобразования определяется энергетическим спектром актив-



ных центров в матрице и вероятностями оптических и неоптических переходов между уровнями энергии. Схема энергетических уровней активных центров достаточно сложна. Однако определяющую роль в преобразовании поглощенной энергии накачки играет лишь несколько переходов, которые обычно принимают во внимание при рассмотрении энергетикки генерации. Такой подход позволяет получить простые соотношения для баланса энергии в рабочем веществе. В большинстве случаев работу твердотельных генераторов можно описывать по схеме трех или четырех уровней энергии [Л. 1-1, 1-2]. Трехуровневая схема широко используется при рассмотрении генерации рубинового ОКГ, четырехуровневая — для описания свойств квантовых генераторов на гранате, стекле, флюорите, вольфрамите кальция.

Общая методика расчета тепловыделения в активных элементах изложена в [Л. 1-1]. Анализ источников тепловыделения для конкретного генератора требует некоторой детализации. Ниже приводится схема расчета тепловыделения в активных элементах рубиновых ОКГ [Л. 1-1]. Аналогичным образом рассматривается преобразование поглощенной радиации накачки в тепло и для других конкретных систем.

Рубин представляет собой кристалл  $\alpha$ -корунда ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), в котором часть ионов алюминия замещена трехвалентными ионами  $\text{Cr}^{3+}$ . Активными центрами являются ионы хрома. В оптических квантовых генераторах обычно используется розовый рубин с содержанием (массовой концентрацией) 0,01—0,05%  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ . При концентрации 0,05% число ионов хрома в одном кубическом сантиметре составляет  $N = 1,62 \cdot 10^{19}$ .

Спектроскопическая схема уровней  $\text{Cr}^{3+}$  в решетке корунда приведена на рис. 1-1. Поглощение радиации накачки сопровождается возбуждением ионов хрома из основного состояния  ${}^4\text{A}_2$  на уровни  ${}^4\text{F}_1$  и  ${}^4\text{F}_2$ . Этим переходам соответствуют в видимой области две широкие полосы поглощения с максимумами вблизи 560 и 410 нм. В ультрафиолетовой области имеются полосы поглощения, обусловленные переходами из основного состояния на верхний уровень квартетной системы и в зону проводимости. Из возбужденных состояний  ${}^4\text{F}_1$  и  ${}^4\text{F}_2$  большая часть ионов хрома безызлучательно (с выделением тепла) переходит на уровни  ${}^2\text{E}$ . Вероятность перехода между уровнями  ${}^4\text{F}_1$  и  ${}^4\text{F}_2$  и  ${}^2\text{E}$  составляет  $(2-5) \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$ ,

Уровень  ${}^2E$  расщеплен на два дублета  $\bar{E}$  и  $2\bar{A}$ . Переходам между состояниями  $\bar{E}$  и  $2\bar{A}$  и основным  ${}^4A_2$  соответствуют узкие линии  $R_1$  и  $R_2$  люминесценции с длинами волн излучения (при комнатной температуре) 694,3 и 692,9 нм. Уровни  $2\bar{A}$  и  $\bar{E}$  метастабильны — вероятность перехода в основное состояние при комнатной температуре состав-

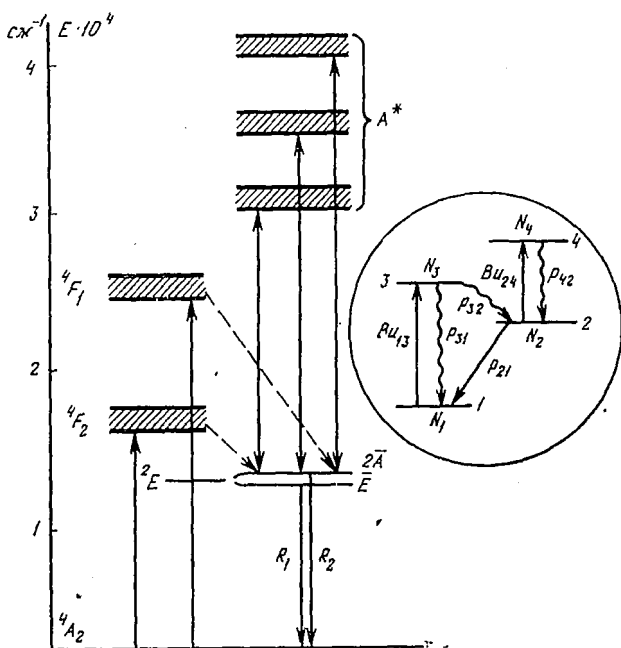


Рис. 1-1. Схема уровней энергии рубина.

ляет около  $300 \text{ сек}^{-1}$ . Это приводит к возможности достижения при мощном возбуждении большой населенности метастабильного состояния и создания усиления в канале  ${}^2E \rightarrow {}^4A_2$ . Генерация обычно осуществляется в  $R_1$ -линии.

Большую роль в энергетическом балансе рубина играют дублетные уровни  $A^*$ , переход на которые ионов из метастабильного состояния приводит к появлению дополнительных полос поглощения. Спектры поглощения ионов хрома в состояниях  ${}^4A_2$  и  ${}^2E$  приведены на рис. 1-2. Кривые 2 соответствуют случаю, когда все ионы находятся в метастабильном состоянии  ${}^2E$ . Как следует из

рис. 1-2, полосы поглощений возбужденного и невозбужденного рубина перекрываются. Максимумы дополнительных полос поглощения лежат в области 560 и 450 нм. Кроме того, появляются полосы поглощения в ультрафиолетовой части спектра. Коэффициенты поглощения в основном и метастабильном состояниях сравнимы по величине. Наличие поглощения с метастабильного уровня не приводит к изменению населенностей уровней энергии, так как при используемых источниках накачки

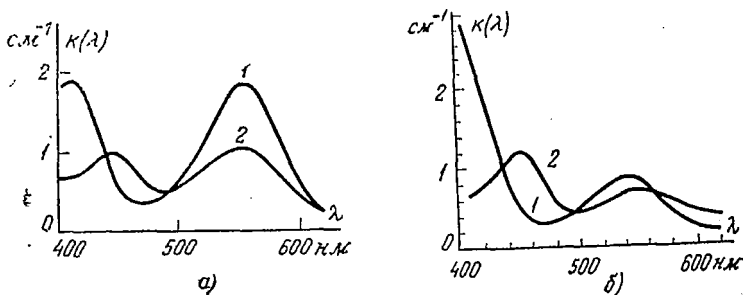


Рис. 1-2. Спектры поглощения невозбужденного (1) и возбужденного (2) рубина для обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн.

вероятность поглощения значительно меньше вероятности дезактивации дублетных состояний  $A^*$ . Вследствие того что переход ионов из состояний  $A^*$  происходит безызлучательно, поглощение с метастабильного уровня является существенным источником тепловыделения в рубине.

Основные закономерности преобразования поглощенной радиации накачки в рубине обычно описывают с помощью следующей модельной схемы. Уровни 1 и 2 (см. рис. 1-1) соответствуют основному и метастабильному состояниям ионов хрома. Уровень 3 включает возбужденные состояния, переходы на которые осуществляются вследствие поглощения накачки. Энергетические состояния  $A^*$  заменяются уровнем 4. Уровень 4 не оказывает непосредственного влияния на генерационные характеристики рубинового ОКГ, которые описываются трехуровневой схемой. Однако учет его необходим при рассмотрении источников тепловыделения [Л. 1-3, 1-4].

В рассматриваемой схеме поглощение накачки приводит к возбуждению ионов хрома с уровня 1 на уровень

3. Затем возбужденные ионы безызлучательно переходят в состояния 1 и 2.

Вероятности переходов  $p_{31}$  и  $p_{32}$  значительно превышают вероятность дезактивации метастабильного уровня, а также вероятность поглощения в невозбужденном состоянии. Поэтому населенность третьего уровня  $N_3$  существенно меньше  $N_1$ , и практически все ионы находятся в основном и метастабильном состояниях

$$N_1 + N_2 \approx N. \quad (1-1)$$

В этом случае мощность тепловыделения в канале  $3 \rightarrow 1$  определяется соотношением

$$q_{31}(t) = N_1(t) \int B_{13}(\nu) u(\nu, t) [1 - \eta(\nu)] h\nu d\nu, \quad (1-2)$$

где  $B_{13}(\nu)$  — спектральный коэффициент Эйнштейна, соответствующий переходу  $1 \rightarrow 3$ ;  $u(\nu)$  — спектральное распределение плотности радиации накачки в веществе;  $\eta = p_{32}/(p_{31} + p_{32})$  — квантовый выход люминесценции в  $R$ -линиях. Интегрирование в (1-2) проводится по полосам поглощения невозбужденного рубина.

Вводя среднюю частоту перехода  $\nu_{31}$  и усредненные значения  $Bu_{13}$  и  $\eta Bu_{13}$ , получаем:

$$q_{31}(t) = N_1(t) [Bu_{13} - \eta Bu_{13}] h\nu_{31}. \quad (1-3)$$

Аналогичным образом можно записать соотношение для мощности тепловыделения в канале  $3 \rightarrow 2$

$$q_{32}(t) = N_1(t) \eta Bu_{13} h\nu_{32}. \quad (1-4)$$

Поглощение радиации накачки метастабильными ионами приводит к дополнительному выделению тепла с мощностью

$$q_{42}(t) = N_2(t) Bu_{24} h\nu_{42}. \quad (1-5)$$

Общая мощность тепловыделения определяется следующим выражением:

$$q(t) = N_1(t) (Bu_{13} h\nu_{31} - \eta Bu_{13} h\nu_{31} + \eta Bu_{13} h\nu_{32}) + N_2(t) Bu_{24} h\nu_{42}. \quad (1-6)$$

Из приведенных выше соотношений следует, что мощность тепловыделения в каналах  $3 \rightarrow 1$  и  $3 \rightarrow 2$  зависит от населенности первого уровня  $N_1$ , а в канале  $4 \rightarrow 2$  от населенности второго.

В отсутствие генерации при прямоугольной форме импульса накачки длительностью  $\tau$  зависимости  $N_1(t)$  и  $N_2(t)$  для  $t \leq \tau$  можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} N_1(t) &= N \left[ \frac{p_{21}}{\eta Bu_{13} + p_{21}} + \frac{\eta Bu_{13}}{\eta Bu_{13} + p_{21}} e^{-(\eta Bu_{13} + p_{21})t} \right]; \\ N_2(t) &= N \frac{\eta Bu_{13}}{\eta Bu_{13} + p_{21}} [1 - e^{-(\eta Bu_{13} + p_{21})t}]. \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

В режиме квазистационарной генерации населенности уровней энергии не зависят от времени

$$N_1 = N \frac{1 - \delta}{2}; \quad N_2 = N \frac{1 + \delta}{2}. \quad (1-8)$$

В (1-8)  $\delta$  — параметр, равный отношению коэффициента потерь к предельному коэффициенту усиления  $\kappa$  в  $R_1$ -линии. В максимуме полосы усиления

$$\kappa = \frac{p_{21} N v^2}{8\pi v \frac{1}{2} \Delta v}, \quad (1-9)$$

где  $v$  — скорость распространения света в рубине;  $\Delta v$  — полуширина  $R_1$ -линии.

Количество выделившегося тепла в единице объема к моменту времени  $t$  при отсутствии генерации определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} Q_{31} + Q_{32} &= N (h\nu_{31} - \eta h\nu_{31} + \eta h\nu_{32}) \left\{ \frac{Bu_{13} p_{21} t}{(\eta Bu_{13} + p_{21})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta (Bu_{13})^2}{(\eta Bu_{13} + p_{21})^2} [1 - e^{-(\eta Bu_{13} + p_{21})t}] \right\}; \end{aligned} \quad (1-10)$$

$$\begin{aligned} Q_{42} &= N h\nu_{42} \left\{ \frac{\eta Bu_{13} Bu_{24} t}{(\eta Bu_{13} + p_{21})} - \frac{\eta Bu_{13} Bu_{24}}{(\eta Bu_{13} + p_{21})^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times [1 - e^{-(\eta Bu_{13} + p_{21})t}] \right\}. \end{aligned} \quad (1-11)$$

Из соотношения (1-10) следует, что энергия тепло-выделения в каналах  $3 \rightarrow 1$  и  $3 \rightarrow 2$  увеличивается с накачкой лишь в области малых мощностей накачки. При больших интенсивностях ( $\eta Bu_{13} \gg p_{21}$ ;  $\eta Bu_{13} t \gg 1$ ) величина ( $Q_{31} + Q_{32}$ ) не зависит от  $Bu_{13}$

$$Q_{31} + Q_{32} = N h\nu_{31} \frac{1}{\eta} \left( 1 - \eta \frac{\nu_{21}}{\nu_{31}} \right) (p_{21} t + 1). \quad (1-12)$$

С увеличением накачки количество выделившегося тепла  $Q_{42}$  все время возрастает. При больших интенсивностях возбуждения  $Q_{42}$  увеличивается линейно с накачкой

$$Q_{42} = N h \nu_{42} B u_{24} \left( t - \frac{1}{\eta B u_{13}} \right). \quad (1-13)$$

В зависимости от спектроскопических свойств вещества и спектрального распределения интенсивности накачки возбуждение системы может приводить к изменению мощности тепловыделения. Однако, как показали теоретические и экспериментальные исследования, при накачке рубина импульсными лампами приближенно выполняется следующее соотношение [Л. 1-1]:

$$B u_{13} h \nu_{31} - \eta B u_{13} h \nu_{31} + \eta B u_{13} h \nu_{32} \approx B u_{24} h \nu_{42}. \quad (1-14)$$

Вследствие этого общая мощность тепловыделения практически не зависит от распределения ионов хрома по энергетическим уровням [см. (1-6)]

$$q(t) = N (B u_{13} h \nu_{31} - \eta B u_{13} h \nu_{31} + \eta B u_{13} h \nu_{32}). \quad (1-15)$$

Количество выделившегося тепла за время действия импульса накачки

$$Q = N [(1 - \eta) h \nu_{31} + \eta h \nu_{32}] \int_0^{\tau} B u_{13}(t) dt \quad (1-16)$$

пропорционально энергии возбуждения и концентрации активных центров  $\text{Cr}^{3+}$ .

Рассмотрим влияние поглощения накачки возбужденными ионами хрома на величину мощности тепловыделения в рубине. В режиме квазистационарной генерации отношение мощности  $q_{42}$  к мощности тепловыделения в каналах  $3 \rightarrow 1$  и  $3 \rightarrow 2$  равно:

$$\frac{q_{42}}{q_{31} + q_{32}} \approx \frac{1 + \delta}{1 - \delta}. \quad (1-17)$$

Как следует из (1-17), при малых потерях ( $\delta \ll 1$ ) мощность тепловыделения  $q_{42}$  составляет половину общей мощности  $q$ . С увеличением величины потерь (увеличением  $\delta$ ) роль источника тепловыделения вследствие поглощения с метастабильного уровня возрастает. Так, при  $\delta = 0,3$  величина  $q_{42}$  примерно вдвое превышает мощность  $(q_{31} + q_{32})$ .

Температурная зависимость спектроскопических характеристик рубина (квантового выхода люминесценции и ширины  $R_1$ -линии) приводит к некоторому перераспределению вклада различных переходов в трансформацию поглощенной энергии в тепло. В частности, в режиме квазистационарной генерации с ростом температуры увеличивается выделение тепла в канале  $4 \rightarrow 2$  вследствие расширения  $R_1$ -линии (увеличения  $\delta$ ). Уменьшение квантового выхода люминесценции с температурой обуславливает увеличение мощности  $q_{31}$  и уменьшение  $q_{32}$ . При этом общая мощность тепловыделения с повышением температуры возрастает. Однако этот рост сравнительно невелик (10—15% при нагреве рубина на  $50^\circ\text{C}$ ) и поэтому для оценки величины тепловыделения можно пользоваться приближенным соотношением (1-16).

Используемые для накачки импульсные лампы обеспечивают величину  $\eta B u_{13} \approx (40 \div 100) p_{21}$  при длительностях  $\tau \leq 5 \cdot 10^{-4}$  сек. Средние значения энергии квантов  $h\nu_{13} = 3,9 \cdot 10^{-12}$  эрг,  $h\nu_{32} = 0,98 \cdot 10^{-12}$  эрг [Л. 1-1]. Квантовый выход люминесценции при комнатной температуре  $\eta = 0,7$ . Тогда в случае прямоугольного импульса накачки ( $B u_{13} = 50 p_{21}$ ;  $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$  сек) при  $N = 0,8 \cdot 10^{19}$  см $^{-3}$  количество выделившегося тепла в единице объема составит 11 Дж·см $^{-3}$  (мощность тепловыделения в импульсе  $q = 22$  квт·см $^{-3}$ ).

В активных элементах твердотельных ОКГ распределение радиации накачки, как правило, неоднородно по объему [Л. 1-1, 1-2], что обуславливает зависимость мощности поглощения и мощности тепловыделения от пространственных координат. Для цилиндрического стержня радиусом  $R$  радиальное распределение мощности поглощения при изотропной накачке определяется следующим образом:

$$W_{ij}(r_1) = v \int k_{ij}(v) u(v) \omega(r_1, k(v) R) dv;$$

$$k_{13}(v) = \frac{N_1 k_{13}^0(v)}{N}; \quad k_{24}(v) = \frac{N_2 k_{24}^0(v)}{N}; \quad k(v) = k_{13}(v) + k_{24}(v),$$

(1-18)

где  $k_{ij}^0(v)$  — коэффициент поглощения радиации накачки в канале  $i \rightarrow j$ , когда все частицы находятся на  $i$ -м уровне;  $\omega$  — относительная плотность излучения накачки в стержне, зависящая от  $r_1 = r/R$  и величины  $k(v)R$  [Л. 1-1]

Обозначив через  $k_M$  и  $u_M$  максимальные значения  $k_{ij}^0(\nu)$  и  $u(\nu)$ , введем безразмерные функции

$$K_{13}(\nu) = \frac{k_{13}^0(\nu)}{k_M}; \quad K_{24}(\nu) = \frac{k_{24}^0(\nu)}{k_M}; \quad U(\nu) = \frac{u(\nu)}{u_M}, \quad (1-19)$$

с помощью которых мощность тепловыделения можно представить в виде [Л. 1-5]

$$q(r_1) = \nu k_M u_M H(r_1, k_M, R, Y). \quad (1-20)$$

В выражении (1-20)

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{N_2 - N_1}{N}; \\ H &= \frac{1}{2} \int \Phi_1(\nu, Y) \omega \left[ r_1, \frac{k_M R}{2}, \Phi_2(\nu, Y) \right] d\nu; \\ \Phi_1 &= U(\nu) [(1 - Y) \beta K_{13} + (1 + Y) K_{24}]; \\ \Phi_2 &= (1 - Y) K_{13} + (1 + Y) K_{24}; \\ \beta &= 1 - \eta \frac{\nu_{21}}{\nu_{31}}. \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

Функция  $H(r_1, k_M R)$  для полированного рубинового цилиндра ( $Y=1/3$ ,  $\beta=0,52$ ) приведена на рис. 1-3. Спектральное распределение плотности накачки  $u(\nu)$  соответствует излучению абсолютно черного тела с температурой  $T=8000$  К. Рисунок 1-3 иллюстрирует характер радиальной зависимости мощности тепловыделения от величины  $k_M R$ . При малых значениях  $k_M R \ll 1$  мощность тепловыделения в центре полированного цилиндрического стержня примерно втрое больше, чем у боковой поверхности. С увеличением величины  $k_M R$  перепад мощности тепловыделения по сечению активного элемента уменьшается.

Источники тепловыделения, обусловленные по-

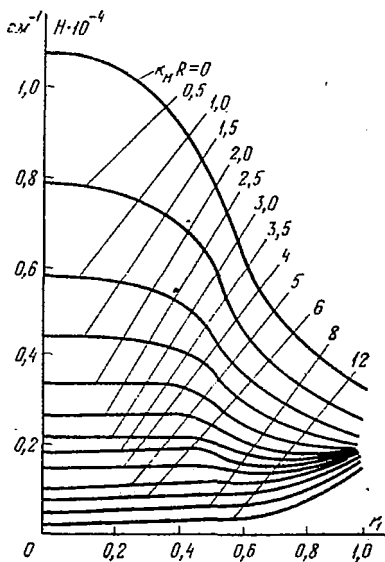


Рис. 1-3. Радиальная зависимость функции  $H(r_1)$ .



глощением активными центрами излучения накачки, играют определяющую роль, однако не являются единственными. Некоторый дополнительный нагрев активных элементов может быть связан с поглощением энергии самой матрицей. В частности, для рубиновых стержней интенсивное поглощение сапфира проявляется в ультрафиолетовой области ( $\lambda < 250$  нм). Для уменьшения нагрева активных элементов обычно используются фильтры, поглощающие ультрафиолетовое излучение ламп накачки. Фильтрация излучения приводит также к уменьшению поглощения активными центрами в ультрафиолетовой области, которое может быть источником достаточно эффективного тепловыделения. Другим источником нагрева является теплообмен рабочих стержней с осветителем, температура которого также повышается вследствие поглощения излучения накачки [Л. 1-4]. Влияние этого фактора в значительной степени зависит от конструктивных особенностей осветителя и системы охлаждения, и его следует рассматривать отдельно в каждом конкретном случае.

## **1-2. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛАЗЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

В качестве активных сред твердотельных ОКГ используются разнообразные кристаллы с примесью ионов редких земель или металлов переходных групп и стекла, активированные редкоземельными ионами. Эти материалы сильно различаются по физическим свойствам. В настоящее время наиболее широкое распространение получили оптические квантовые генераторы на рубине, иттрий-алюминиевом гранате и стеклах с примесью ионов неодима. Не останавливаясь на характеристике свойств всего многообразия лазерных материалов, рассмотрим теплофизические и механические свойства некоторых из них.

**Рубин** характеризуется высокой теплопроводностью по сравнению с другими лазерными материалами, которая в сочетании с механической прочностью способствует широкому использованию рубина в качестве активных элементов ОКГ и особенно для создания ОКГ с большой средней мощностью генерации (большой частотой повторения импульсов).

Анизотропия тепловых свойств рубина выражена сравнительно слабо. Отношение коэффициентов тепло-

проводности вдоль и перпендикулярно оптической оси при комнатной температуре составляет 1,11 [Л.1-6].

Температурная зависимость теплопроводности и теплоемкости рубина в широком диапазоне температур исследовалась многими авторами. Зависимость коэффициента теплопроводности рубина  $\lambda$  от температуры по данным работы [Л.1-7] приведена на рис. 1-4. Характер-

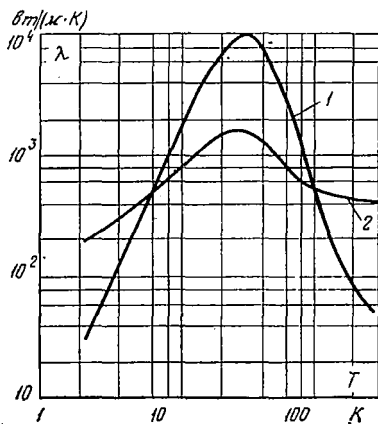


Рис. 1-4. Зависимость коэффициента теплопроводности рубина (1) от температуры (2 — медь для сравнения).

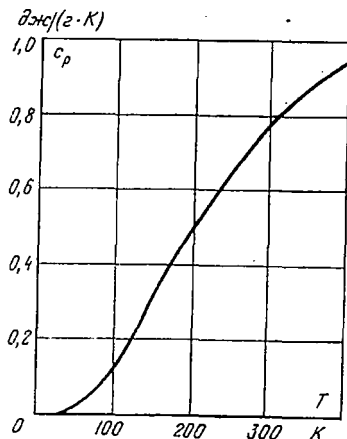


Рис. 1-5. Температурная зависимость удельной теплоемкости рубина.

ным для рубина является сильное увеличение  $\lambda$  при понижении температуры. При температуре жидкого азота коэффициент теплопроводности рубина выше, чем меди. В области 20—40 К теплопроводность рубина достигает максимального значения, а затем уменьшается (рис. 1-4).

Теплоемкость рубина с увеличением температуры возрастает (рис. 1-5) [Л.1-8]. Температурная зависимость удельной теплоемкости при  $T > 273$  К приближенно описывается следующим соотношением:

$$c(T) = (1,079 + 1,74 \cdot 10^{-4}T - 3,04 \cdot 10^{-6}T^2), \quad \text{дж} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}. \quad (1-22)$$

В области комнатной температуры, как следует из рис. 1-5 и соотношения (1-22), зависимость  $c(T)$  выражена сравнительно слабо. Так, повышение температуры

от 0 до 100 °С приводит к увеличению теплоемкости примерно на 25%.

Для описания упругих свойств кристаллов обычно используются следующие параметры: модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона. По данным [Л. 1-9] модуль упругости вдоль направления оптической оси  $E_{\parallel} = 3\,280\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ , перпендикулярно оптической оси  $E_{\perp} = 3\,200\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ . Расчет модулей упругости через коэффициенты податливости [Л. 1-10] приводит к следующим значениям:  $E_{\parallel} = 4\,600\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ ,  $E_{\perp} = 4\,250\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ . Усредненный по направлениям коэффициент Пуассона при комнатной температуре равен 0,27. Плотность розового рубина  $\rho = 3,984 \div 3,998 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ .

Упругооптические постоянные для корунда приведены в [Л. 1-11, 1-12]:  $p_{11} = 0,125$ ;  $p_{33} = 0,23$ ;  $p_{44} = 0,1$ ;  $p_{12} = 0,038$ ;  $p_{13} = 0,005$ ;  $p_{31} = 0,032$ ;  $p_{14} = 0,018$ ;  $p_{41} = 0,01$ .

Главные значения температурного коэффициента расширения рубина (при комнатной температуре)  $\alpha_{T1} = \alpha_{T2} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ ,  $\alpha_{T3} = 6,66 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$  [Л. 1-6].

Показатель преломления рубина увеличивается с повышением температуры. Для обыкновенного луча  $dn_0/dT = 13,6 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ , для необыкновенного луча  $dn_0/dT = 14,7 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$  [Л. 1-13].

Вследствие анизотропии физических свойств прочность рубина зависит от кристаллографического направления, вдоль которого приложено усилие. Имеющиеся в литературе данные по механической прочности рубина сильно различаются, так как на величину прочности влияет большое число факторов. По данным [Л. 1-9] прочность кристаллов корунда на изгиб при нагрузке перпендикулярно оптической оси около  $3\,700 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ , параллельно оптической оси  $5\,800 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ . Прочность на сжатие составляет  $(3 \div 7) \cdot 10^3 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$  при параллельном и  $(1 \div 2) \cdot 10^4 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$  при перпендикулярном направлении приложенной силы относительно оптической оси.

Широко используются в лазерной технике различные стекла: боратные, силикатные, фосфатные, лантано-вые и др. Преимуществом стекол перед другими материалами является их высокая оптическая однородность и возможность изготовления активных элементов различной конфигурации и больших размеров (длиной до

1—2 м). Кроме того, физические параметры стекла можно варьировать, изменяя химический состав.

Для оценки коэффициента теплопроводности  $\lambda$ , удельной теплоемкости  $c$  и температурного коэффициента расширения  $\alpha_T$  стекла в зависимости от химического состава можно использовать следующие соотношения [Л. 1-14]:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \sum_i \lambda_i p_i; \\ c &= \sum_i c_i p_i; \\ \alpha_T &= \sum_i \alpha_{Ti} p_i, \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

где  $p_i$  — процент  $i$ -го окисла по массе. Значения  $\lambda_i$ ,  $c_i$ ,  $\alpha_{Ti}$  при комнатной температуре для основных компонентов стекол приведены в табл. 1-1 [Л. 1-14].

Таблица 1-1

Коэффициенты для расчета свойств стекол

| Окислы                         | $\lambda_i \cdot 10^4$ ,<br>кал·см <sup>-1</sup> ·сек <sup>-1</sup> ·°C <sup>-1</sup> | $c_i \cdot 10^3$ , кал·г <sup>-1</sup> ·°C <sup>-1</sup> | $\alpha_{Ti} \cdot 10^7$ , °C <sup>-1</sup> |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| SiO <sub>2</sub>               | 0,208                                                                                 | 0,17                                                     | 0,27                                        |
| B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>  | 0,361                                                                                 | 0,21                                                     | 0,033                                       |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 0,255                                                                                 | 0,19                                                     | 1,67                                        |
| As <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 0,166                                                                                 | 0,125                                                    | 0,67                                        |
| Sb <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 0,155                                                                                 | 0,12                                                     | —                                           |
| MgO                            | 0,319                                                                                 | 0,245                                                    | 0,033                                       |
| CaO                            | 0,277                                                                                 | 0,15                                                     | 1,67                                        |
| BaO                            | 0,075                                                                                 | 0,665                                                    | 1,00                                        |
| ZnO                            | 0,166                                                                                 | 0,15                                                     | 0,60                                        |
| PbO                            | 0,127                                                                                 | 0,054                                                    | 1,00                                        |
| Na <sub>2</sub> O              | 0,305                                                                                 | 0,255                                                    | 3,33                                        |
| K <sub>2</sub> O               | 0,138                                                                                 | 0,155                                                    | 2,83                                        |

Как следует из табл. 1-1, увеличение содержания окислов B<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Na<sub>2</sub>O, CaO, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> приводит к повышению теплопроводности стекла. Стекла с большим содержанием PbO и BaO обладают меньшей теплопроводностью. С увеличением концентрации MgO, BaO, Na<sub>2</sub>O<sub>3</sub> теплоемкость стекол возрастает. Влияние других окислов проявляется слабее.

Ниже приводятся данные, иллюстрирующие влияние химического состава на теплофизические и механические свойства для пяти неодимовых лазерных стекол *a*, *b*, *c*, *d*, *e* [Л. 1-15], химический состав которых приведен в табл. 1-2.

Таблица 1-2

**Химический состав стекол (в процентах)**

| Оксиды                         | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>e</i> |
|--------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| SiO <sub>2</sub>               | 66,6     | 61,3     | 67,8     | 66,3     | 66,1     |
| Li <sub>2</sub> O              | 1,0      | 1,0      | —        | —        | 14,5     |
| Na <sub>2</sub> O              | 6,7      | 6,2      | 7,9      | 3,4      | —        |
| K <sub>2</sub> O               | 10,0     | 17,2     | 13,8     | 18,2     | —        |
| CaO                            | —        | —        | —        | —        | 10,1     |
| BaO                            | 5,5      | 3,0      | 3,3      | 3,5      | —        |
| PbO                            | —        | —        | 1,1      | 1,8      | —        |
| ZnO                            | 1,6      | 1,8      | —        | —        | —        |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 1,8      | 1,9      | —        | —        | 4,4      |
| Nd <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 5,4      | 5,8      | 5,5      | 3,5      | 3,4      |
| Sb <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 0,8      | 0,8      | 0,9      | 3,2      | —        |
| CeO <sub>2</sub>               | —        | —        | —        | —        | 0,5      |
| TiO <sub>2</sub>               | —        | —        | 0,19     | 0,39     | —        |

По сравнению с рубином теплопроводность стекол значительно ниже. При комнатной температуре теплопроводность рубина превышает теплопроводность стекла в 40—50 раз. Зависимость  $\lambda$  от температуры выражена сравнительно слабо. Так, для стекла *e* увеличение температуры от 0 до 100°C приводит к небольшому повышению теплопроводности от 1,19 до 1,34  $\text{вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ . Удельная теплоемкость стекол *a* и *b*, рассчитанная с учетом данных табл. 1-1, составляет 0,8 и 0,77  $\text{дж} \cdot \text{г}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$  соответственно. Сведения о других свойствах стекол по данным работы [Л. 1-15] приведены в табл. 1-3.

Температурный коэффициент линейного расширения стекол  $\alpha_T$  в зависимости от химического состава можно варьировать в довольно широких пределах. Так, для лазерных стекол, обзор свойств которых приведен в [Л. 1-16], температурный коэффициент линейного расширения изменяется в пределах  $(6,7 \div 10,9) \cdot 10^{-6} ^\circ\text{C}^{-1}$ . Значения  $\alpha_T$ ,  $dn/dT$ ,  $E$  для некоторых других марок стекол содержатся в табл. 1-4 [Л. 1-17].

| Параметр                                                          | Стекла |       |       |       |       |
|-------------------------------------------------------------------|--------|-------|-------|-------|-------|
|                                                                   | a      | b     | c     | d     | e     |
| Модуль упругости $E$ ,<br>$10^5 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ | 6,95   | 6,71  | 6,54  | 6,27  | 9,27  |
| Модуль сдвига $G$                                                 | 2,79   | 2,66  | 2,61  | 2,51  | 3,62  |
| Коэффициент Пуассона $\nu$                                        | 0,218  | 0,236 | 0,229 | 0,226 | 0,255 |
| Плотность $\rho$ , $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$                | 2,60   | 2,62  | 2,59  | 2,60  | 2,55  |
| $\frac{dn}{dT}$ , $10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$          | -1,8   | -1,6  | -0,3  | -4,0  | 2,8   |
| Упругооптические коэффициенты:                                    |        |       |       |       |       |
| $\rho_{11}$                                                       | 0,134  | 0,139 | 0,139 | 0,153 | 0,105 |
| $\rho_{12}$                                                       | 0,225  | 0,218 | 0,222 | 0,232 | 0,184 |

Таблица 1-4

| Марка стекла | $\alpha_T$ , $10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ | $\frac{dn}{dT}$ , $10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ | $E$ , $10^5 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ |
|--------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| КГСС-3       | 10,2                                                | -2,8                                                     | 6,5                                           |
| ПГЛС-1       | 9,6                                                 | -0,4                                                     | 7,5                                           |
| ГЛС-2        | 9,8                                                 | -1,6                                                     | 6,9                                           |

Прочность стекла сравнительно невысока ( $300\text{--}800 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ ) и зависит от химического состава, обработки боковой поверхности, размеров стержня, наличия дефектов и других факторов.

Таблица 1-5

Свойства иттрий-алюминиевого граната [Л. 1-11, 1-18, 1-19]

| $\lambda$ , $\text{мкм} \cdot \text{см}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ | $\rho$ , $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$ | $c$ , $\text{дж} \cdot \text{г}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ | $\alpha_T$ , $10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ | $E$ , $10^5 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ |
|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 0,14                                                                    | 4,55                                     | 0,63                                                            | 9,3                                                 | 2,94                                          |

Продолжение табл. 1-5

| $\nu$ | $\frac{dn}{dT}$ , $10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ | $\rho_{11} \cdot 10^3$ | $\rho_{12} \cdot 10^3$ | $\rho_{44} \cdot 10^3$ |
|-------|----------------------------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0,25  | 7,3                                                      | -2,9                   | 0,91                   | -6,15                  |

## Теплофизические свойства вольфрамата кальция и флюорита [Л. 1-16]

| Лазерный материал | $\rho$ , г·см <sup>-3</sup> | $c$ , Дж·г <sup>-1</sup> ·°C <sup>-1</sup> | $\lambda$ , вт·см <sup>-1</sup> ·°C <sup>-1</sup> |
|-------------------|-----------------------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| CaWO <sub>4</sub> | 6,06                        | 0,43                                       | 0,04                                              |
| CaF <sub>2</sub>  | 3,18                        | 0,85                                       | 0,097                                             |

Свойства иттрий-алюминиевого граната, вольфрамата кальция и флюорита при комнатной температуре приведены в табл. 1-5 и 1-6.

## 1-3. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрение задачи о нагревании активных элементов под действием радиации накачки сводится в общем случае к решению уравнения теплопроводности, которое описывает пространственно-временное изменение температуры в веществе. Для изотропных тел дифференциальное уравнение теплопроводности имеет следующий вид [Л. 1-20]:

$$c(T)\rho(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} [\lambda(T) \operatorname{grad} T] + q, \quad (1-24)$$

где  $T$  — пространственно-временное распределение температуры;  $q$  — мощность объемного тепловыделения, зависящая от пространственных координат и времени.

Если коэффициент теплопроводности  $\lambda$  не зависит от температуры, то из (1-24) следует:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \operatorname{div} (\operatorname{grad} T) + \frac{q}{c\rho}, \quad (1-25)$$

где  $a = \lambda / c\rho$  — коэффициент температуропроводности вещества.

Для решения уравнения теплопроводности (нахождения распределения температуры в объеме вещества в произвольный момент времени) необходимо задать краевые условия: распределение температуры в начальный момент времени (начальное условие); геометрическую форму активного элемента и закон взаимодействия между его поверхностью и охлаждающей средой (граничное условие).

При рассмотрении теплового режима активных элементов распределение температуры в начальный момент времени обычно принимается равномерным (температура в каждой точке объема равна температуре охлаждающей среды).

Перенос тепла в объеме активного элемента твердотельного ОКГ осуществляется путем теплопроводности. Теплопередача на поверхности тела может происходить в общем случае посредством теплопроводности, конвекции и излучения. В зависимости от роли того или другого типа теплообмена граничное условие может быть задано различными способами. Применительно к активным элементам твердотельных ОКГ наиболее распространенными являются жидкостные и газовые системы охлаждения. В этих условиях осуществляется конвективный теплообмен между поверхностью активного элемента и охлаждающей средой.

Закон взаимодействия между поверхностью твердого тела и охлаждающей средой при конвективном теплообмене обычно записывается в следующем виде (граничные условия третьего рода):

$$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{пов}} + \alpha [T_{\text{пов}} - T_c] = 0, \quad (1-26)$$

где  $T_c$  — температура охлаждающей среды (в общем случае зависящая от времени);  $\alpha$  — коэффициент теплообмена;  $n$  — нормаль к поверхности тела.

Из граничного условия третьего рода при  $\lambda/\alpha \rightarrow 0$  следует как частный случай граничное условие первого рода, когда температура поверхности тела равна температуре охлаждающей среды

$$T_{\text{пов}} = T_c. \quad (1-27)$$

При малых значениях коэффициента теплообмена ( $\alpha \rightarrow 0$ ) из (1-26) следует частный случай граничного условия второго рода (нулевой поток тепла через поверхность тела).

Коэффициент теплообмена зависит от свойств охлаждающей среды, геометрических размеров и формы сечения канала, режима течения хладагента (ламинарный, турбулентный, переходный). В частности, при охлаждении газовым потоком коэффициент теплообмена составляет  $(5 \cdot 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-2})$  вт  $\cdot$  см $^{-2}$   $\cdot$   $^{\circ}$ С $^{-1}$ . Жидкостное охлаждение позволяет реализовать коэффициенты теплообмена  $(0,1 \div 1)$  вт  $\cdot$  см $^{-2}$   $\cdot$   $^{\circ}$ С $^{-1}$  и выше.



## СТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Стационарный тепловой режим реализуется в активных элементах ОКГ непрерывного действия. Режим непрерывной генерации в твердотельных ОКГ был осуществлен впервые на вольфрамите кальция с примесью ионов неодима [Л. 2-1], затем на стекле и иттрий-алюминиевом гранате, активированных неодимом [Л. 2-2, 2-3], рубине [Л. 2-4]. В настоящее время ОКГ непрерывного действия привлекают все большее внимание благодаря возможностям, которые они открывают при решении ряда научно-технических проблем. Дальнейшее расширение применений непрерывных ОКГ требует рассмотрения вопросов, связанных с разработкой мощных генераторов, функционирующих при больших радиационных нагрузках. В этой связи важное место занимают исследования теплового режима активных элементов ОКГ непрерывного действия.

Кроме того, результаты расчета стационарных температурных полей могут быть использованы при исследовании теплового режима активных элементов частотных ОКГ (см. гл. 3 и 4).

Ниже рассматривается стационарный тепловой режим активных элементов в форме сплошного цилиндра, цилиндра в оболочке, полого цилиндра, тонкой пластины при однородном и неоднородном распределениях источников тепла.

### 2-1. СПЛОШНОЙ ЦИЛИНДР

В большинстве случаев рабочее вещество твердотельных оптических квантовых генераторов имеет форму цилиндра, радиус которого значительно меньше длины. Поэтому при исследовании температурных полей цилиндрических активных элементов можно ограничиться рассмотрением уравнения теплопроводности для бесконечного цилиндра. В этом случае при одинаковых условиях охлаждения каждого элемента боковой поверхности стержня радиуса  $R$  уравнение (1-25) и крайевые условия принимают следующий вид:

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right) + \frac{q(r, t)}{c_p}; \quad (2-1)$$

$$T(r, 0) = T_0; \quad (2-2)$$

$$-\lambda \left[ \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right]_{r=R} = \alpha [T(R, t) - T_0]. \quad (2-3)$$

Рассмотрим особенности стационарного теплового режима при однородном и неоднородном (осесимметричном) распределении источников тепловыделения в стержне.

Однородное тепловыделение. Для случая однородного тепловыделения ( $q = \text{const}$ ) решение системы (2-1) — (2-3) известно [Л. 2-5]:

$$T(r_1, Fo) - T_c = \frac{qR^2}{4\lambda} \left[ 1 + \frac{2}{Bi} - r_1^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\mu_n^2} A_n \times \right. \\ \left. \times J_0(\mu_n r_1) \exp(-\mu_n^2 Fo) \right], \quad (2-4)$$

где  $Bi = \alpha R / \lambda$  — число Био, безразмерный комплекс, характеризующий эффективность теплообмена активного тела с охлаждающей средой;  $Fo = \alpha t / R^2$  — число Фурье, безразмерный комплекс, представляющий время протекания процессов;  $r_1 = r / R$  — безразмерный текущий радиус;  $\mu_n$  — корни характеристического уравнения

$$Bi J_0(\mu) = \mu J_1(\mu); \quad (2-5)$$

$A_n = 2Bi / [J_0(\mu_n)(\mu_n^2 + Bi^2)]$  — коэффициенты, зависящие от числа Био. Численные значения  $A_n$  и  $\mu_n$  табулированы (см., например, [Л. 2-5, 2-6]);  $J_0(\mu)$ ,  $J_1(\mu)$ ,  $J_0(\mu_n r_1)$  — функции Бесселя первого рода.

Выражение (2-4) при  $Fo \rightarrow \infty$  переходит в соотношение, характеризующее распределение температуры в стационарном режиме

$$T(r_1) - T_c = \frac{qR^2}{4\lambda} \left( 1 + \frac{2}{Bi} - r_1^2 \right). \quad (2-6)$$

Из выражения (2-6) вытекает очевидный вывод, что профиль температурного поля и, следовательно, разность температур  $\Delta T_{j,k}$  между любыми двумя точками образца не зависит от условий охлаждения

$$\Delta T_{j,k} = \frac{qR^2}{4\lambda} (r_{1j}^2 - r_{1k}^2). \quad (2-7)$$

О времени установления стационарного режима можно судить по величине коэффициента  $\delta_c$ , равного отношению среднеобъемных температур, вычисленных с учетом выражений (2-4) и (2-6). Зависимости коэффициента  $\delta_c$  от чисел  $Fo$  для нескольких значений  $Bi$  представлены на рис. 2-1.

На практике размеры активных элементов, эффективность охлаждения, мощность источников тепла, теп-

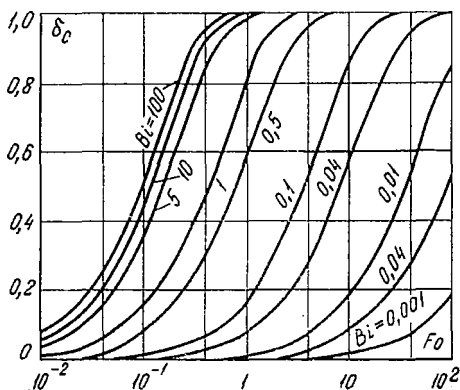


Рис. 2-1. Оценка времени установления стационарного температурного режима активного элемента в форме кругового цилиндра.

лофизические свойства вещества варьируются в широких пределах. Поэтому такие характеристики теплового режима, как время выхода на стационарный режим, максимальный нагрев, перепад температуры по сечению в зависимости от указанных факторов имеют большой диапазон изменения [Л. 2-11]. Так, в условиях водяного охлаждения для стержней из рубина и граната число Био, как правило, не превышает 2, а для стеклянных стержней примерно на два порядка выше. Как показывает расчет, для стержней цилиндрической формы при  $Bi=2$  возможности понижения уровня температур не исчерпаны. Для стеклянных материалов доступная реализация в условиях водяного охлаждения  $Bi>20$  теряет смысл. Последнее замечание весьма существенно, так как не требует создания для ОКГ на стекле систем охлаждения, рассчитанных на большие расходы жидкости и значительные давления.

Максимальную температуру и максимальную разность температур между центром и поверхностью стержня рабочего вещества ОКГ можно определить, зная температуру, при которой возможна генерация. Более

жесткие ограничения на величину нагрева вытекают из условия обеспечения заданных характеристик ОКГ.

Неоднородное тепловыделение. Плотность поглощения радиации накачки по объему вещества в общем случае непостоянна [Л. 2-7—2-11]. Для анализа влияния неоднородности представим поле источников тепла в виде полинома по четным степеням  $r_1$

$$q(r_1) = \sum_1^i (-1)^{i+1} a_i r_1^{2(i-1)}. \quad (2-8)$$

Решение уравнения (2-1) с учетом (2-8) описывается следующим выражением [Л. 2-12]:

$$\begin{aligned} T(r_1, Fo) - T_c = & \sum_1^i (-1)^{i+1} \frac{a_i R^2}{4\lambda i^2} \left(1 + \frac{2i}{Bi} - r_1^{2i}\right) + \\ & + \sum_1^i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{2a_i R^2 J_0(\mu_n r_1) \exp(-\mu_n^2 Fo)}{\lambda \mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \times \\ & \times \int_0^1 \left(1 + \frac{2i}{Bi} - r_1^{2i}\right) J_0(\mu_n r_1) r_1 dr_1. \end{aligned} \quad (2-9)$$

Если положить  $i=1$ , то последнее выражение переходит в (2-4). При  $i=2$  имеем:

$$\begin{aligned} T(r_1, Fo) - T_c = & \frac{R^2}{4\lambda} \left[ a_1 \left(1 + \frac{2}{Bi} - r_1^2\right) - \right. \\ & - \frac{a_2}{4} \left(1 + \frac{4}{Bi} - r_1^4\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a_1}{\mu_n^2} A_n J_0(\mu_n r_1) \times \\ & \times \exp(-\mu_n^2 Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a_2}{\mu_n^2} A_n J_0(\mu_n r_1) \times \\ & \times \left(1 + \frac{2}{Bi} - \frac{4}{\mu_n^2}\right) \exp(-\mu_n^2 Fo) \left. \right]. \end{aligned} \quad (2-10)$$

Профиль температурного поля (2-9) в стационарном режиме, как и в случае однородной накачки, не зависит от эффективности теплоотвода. При этом температура на поверхности активного тела определяется

из выражения

$$T(1) - T_c = \bar{q}R^2 / (2\lambda Bi), \quad (2-11)$$

где  $\bar{q} = \sum_1^i (-1)^{i+1} a_i / i$  — усредненная по объему мощность источников тепла.

Как видно из (2-11), температура на поверхности не зависит от степени неоднородности распределения поглощенной радиации накачки, а определяется усредненной по объему мощностью тепловыделения.

Представим максимальную разность температур  $\Delta T_m^H$  на оси и на поверхности образца в виде суммы

$$\Delta T_m^H = \Delta T_m^P + \psi, \quad (2-12)$$

где  $\Delta T_m^P = \frac{\bar{q}R^2}{4\lambda}$  — максимальная разность температур при однородном тепловыделении с мощностью  $\bar{q}$ ;  $\psi$  — поправка, учитывающая неоднородность распределения накачки по сечению стержня, которая определяется соотношением

$$\psi = \sum_1^i (-1)^i \frac{a_i R^2}{4\lambda i} \left( 1 - \frac{1}{i} \right). \quad (2-13)$$

На рис. 2-2 для случая  $i=2$  приведена величина перепада температур между центром и поверхностью

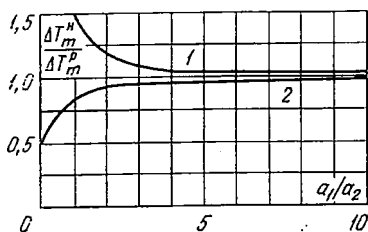


Рис. 2-2. Влияние неоднородности поглощения радиации накачки на величину перепада температур между центром и поверхностью активного тела (в долях  $\Delta T_m^P$ ).

1 — для случая  $a_2 > 0$ ; 2 — для случая  $a_2 < 0$ .

стержня в долях  $\Delta T_m^P$  в зависимости от степени неоднородности источников тепла. В случае  $a_2 > 0$  плотность внутренних источников тепла увеличивается к центру. При этом  $a_1/a_2 \rightarrow \infty$  соответствует равномерной плотности тепловыделения,  $a_1/a_2 = 1$  — максимальной неоднородности (поверхность вещества не поглощает излучение накачки). Как следует из рис. 2-2 (кривая 1), максимальная разность температур между центром и по-

верхностью (при  $a_1/a_2=1$ ) в 1,5 раза превышает соответствующую разность температур при однородном тепловыделении.

При  $a_2 < 0$  плотность поглощенной радиации накачки уменьшается к центру. При этом  $a_1/a_2 \rightarrow -\infty$  — соответствует однородному поглощению,  $a_1/a_2 = 0$  — максимальной неравномерности (энергия накачки не поглощается в центре). При  $a_1/a_2 = 0$  величина поправки достигает наибольшего значения, равного 0,5, но имеет знак, противоположный знаку в случае  $a_2 > 0$  (кривая 2 на рис. 2-2).

Таким образом, при  $a_2 > 0$  имеет место увеличение, а при  $a_2 < 0$  — уменьшение неоднородности температурного поля в стационарном режиме. Колебания разности температур на оси и на поверхности стержня находятся в пределах  $\pm 1,5\Delta T_m^p$ .

Влияние неравномерности поглощения на максимальную температуру, достигаемую на оси стержня, можно оценить из отношения

$$\frac{T_n(0) - T_c}{T_p(0) - T_c} = \frac{\sum_{i=1}^i (-1)^{i+1} \frac{a_i}{i^2} \left(1 + \frac{2i}{Bi}\right)}{2 \left(1 + \frac{2}{Bi}\right)}. \quad (2-14)$$

В табл. 2-1 ( $a_2 > 0$ ) и табл. 2-2 ( $a_2 < 0$ ) для случая  $i=2$  приведены значения величины отношения (2-14) при различных значениях  $a_1/a_2$  и числа  $Bi$ . Как следует из приведенных данных, с уменьшением числа  $Bi$  влияние неоднородности тепловыделения на распределение температуры становится менее существенным. Влияние неоднородности распределения источников тепла на величину отношения (2-14) при различных числах  $Bi$  дано в табл. 2-1 и 2-2 ( $i=2$ ,  $a_2 > 0$  и  $a_2 < 0$  соответственно).

Таблица 2-1

| Bi       | $a_1/a_2$ |      |      |      |      |
|----------|-----------|------|------|------|------|
|          | 1         | 1,25 | 2    | 5    | 10   |
| 0,1      | 1,02      | 1,02 | 1,01 | 1,00 | 1,00 |
| 1,0      | 1,17      | 1,11 | 1,06 | 1,02 | 1,01 |
| 10,0     | 1,41      | 1,28 | 1,14 | 1,05 | 1,02 |
| 100,0    | 1,49      | 1,33 | 1,16 | 1,05 | 1,02 |
| $\infty$ | 1,50      | 1,33 | 1,17 | 1,06 | 1,03 |

| Bi       | $a_1/a_2$ |      |      |      |      |
|----------|-----------|------|------|------|------|
|          | 0         | 0,1  | 0,5  | 1    | 5    |
| 0,1      | 0,98      | 0,98 | 0,99 | 0,99 | 1,00 |
| 1,0      | 0,83      | 0,86 | 0,92 | 0,94 | 0,99 |
| 10,0     | 0,58      | 0,65 | 0,79 | 0,86 | 0,96 |
| 100,0    | 0,51      | 0,59 | 0,76 | 0,84 | 0,96 |
| $\infty$ | 0,50      | 0,58 | 0,75 | 0,83 | 0,95 |

Результаты, представленные на рис. 2-2, следует рассматривать как предельные (при  $Bi \rightarrow \infty$ ) для отношения (2-14).

На практике обычно принимаются соответствующие меры по уменьшению неоднородности распределения накачки (специальные конструкции осветительных систем, оптимизация геометрических размеров активных элементов). Если удастся обеспечить  $|a_1/a_2| \geq 5$ , то можно считать поле накачки однородным. В этом случае ошибка приближения не превышает нескольких процентов.

## 2-2. ЦИЛИНДР В ОБОЛОЧКЕ

Применение в качестве активного элемента ОКГ стержня цилиндрической формы в гомогенной неактивированной оболочке улучшает характеристики ОКГ: увеличивается плотность и уменьшается неоднородность поглощения энергии возбуждающего света, уменьшается уровень радиационного шума, связанного с существованием паразитных мод (см., например, [Л. 2-10]). Кроме того, при введении непоглощающей оболочки в конструкцию активного

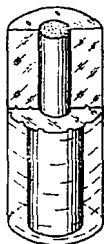


Рис. 2-3. Активный элемент в форме составного цилиндра.

тела цилиндрической формы может иметь место так называемый эффект оребрения, проявляющийся в увеличении тепловых потерь. Конкретным примером такого активного тела может служить цилиндр из сапфира, в центральную часть которого введены ионы хрома [Л. 2-13, 2-14]. Радиусы ядра и оболочки в указанной оптимальной конструкции находятся в отношении  $1/n$  ( $n$  — показатель преломления сап-

фира). Общий вид цилиндра в оболочке приведен на рис. 2-3. Температурное поле такой составной системы из двух тел можно получить, используя известные решения для цилиндра с внутренними источниками тепла [Л. 2-15—2-17]:

для  $0 \leq r_1 \leq 1$

$$T_{\text{ядра}}(r_1) = \frac{qr_0^2}{4\lambda} \left( 1 + \frac{2}{k \text{Bi}} + 2 \ln k - r_1^2 \right); \quad (2-15)$$

для  $1 \leq r_1 \leq k$

$$T_{\text{оболочки}}(r_1) = \frac{qr_0^2}{2\lambda} \left( \frac{1}{k \text{Bi}} - \ln \frac{r_1}{k} \right). \quad (2-16)$$

Здесь  $r_1 = r/r_0$  — безразмерный текущий радиус активного тела;  $r_0$  — радиус ядра;  $R = kr_0$  — радиус оболочки;  $\text{Bi} = \alpha r_0 / \lambda$  — число Био.

Оценим эффект введения оболочки. Для этого вычислим разность между температурой непокрытого стержня и ядра с оболочкой (значения коэффициентов теплообмена в обоих случаях полагаем одинаковыми)

$$\Delta T = T(r_1) - T_{\text{ядра}}(r_1) = \frac{qr_0^2}{2\lambda} \left( \frac{k-1}{k \text{Bi}} - \ln k \right). \quad (2-17)$$

Как следует из (2-17), введение непоглощающей оболочки не изменяет профиля температурного поля в ядре. При этом имеет место только увеличение или уменьшение уровня температур в зависимости от значений  $k$  и  $\text{Bi}$ :

оболочка приводит к снижению уровня температуры (условия теплоотвода улучшаются) при  $\frac{k-1}{k \text{Bi}} > \ln k$ ;

оболочка приводит к повышению уровня температуры (условия теплоотвода ухудшаются) при  $\frac{k-1}{k \text{Bi}} < \ln k$ ;

тепловой поток равен тепловым потерям непокрытого активированного стержня при  $\frac{k-1}{k \text{Bi}} = \ln k$ .

Введем предельное число Био  $\text{Bi}_{\text{пр}}$  для активных тел в оболочке

$$\text{Bi}_{\text{пр}} = \frac{1 - \frac{1}{k}}{\ln k}. \quad (2-18)$$



Если значения  $Bi$  в конкретной системе охлаждения меньше величины  $Bi_{пр}$ , введение оболочки улучшает условия теплоотвода.

На рис. 2-4 (кривая 1) приведены значения  $Bi_{пр}$  как функции размера оболочки  $k$ . Так, для рубина  $Bi_{пр}=0,76$  (при  $k=n$ ) означает, что при жидкостном охлаждении для образцов с радиусами 0,35 и 0,6 см эффект допол-

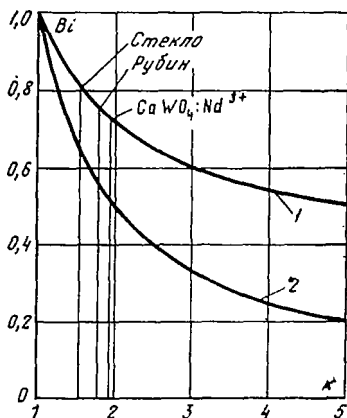


Рис. 2-4. К сопоставлению температурных режимов активных тел ОКГ в оболочке и без оболочки.

1 — условие равенства теплотерь ( $Bi_{пр}$ ); 2 — условие наибольших теплотерь ( $Bi_m$ ).

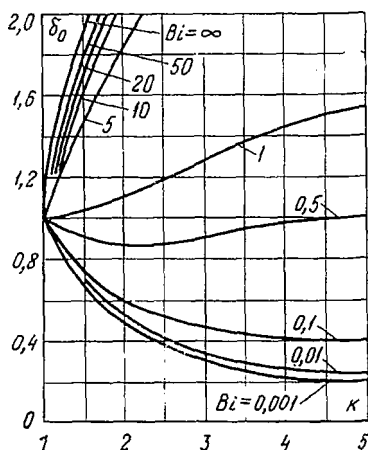


Рис. 2-5. Оценка влияния непоглощающей оболочки на температурный режим активированной части рабочего элемента.

нительного охлаждения за счет введения оболочки имеет место при коэффициентах теплообмена, не превышающих соответственно значений  $\alpha=9800$  и  $\alpha=5700$   $вт/(м^2 \cdot ^\circ C)$ . При воздушном охлаждении  $Bi_{пр}=0,76$  для рубина практически не реализуется и, следовательно, в этих условиях введение оболочки приводит к уменьшению нагрева.

Для стеклянных образцов (при  $k=n$ ) значение  $Bi_{пр}=0,81$ . Вследствие низкой теплопроводности стеклянных материалов указанная величина достигается уже при воздушном охлаждении:  $\alpha=0,019$   $вт \cdot см^{-2} \cdot ^\circ C^{-1}$  для  $r_0=0,35$  см и  $\alpha=0,011$   $вт \cdot см^{-2} \cdot ^\circ C^{-1}$  для  $r_0=0,6$  см. В этом случае наращивание на стеклянные образцы непоглощающей оболочки в условиях жидкостного охлаждения является нежелательным. Таким образом, вели-

чина  $Bi_{пр}$  устанавливает верхний предел числа  $Bi$ , выше которого эффективность охлаждения составного тела ниже, чем для непокрытого элемента.

Представляет интерес также определение значений  $Bi_m$ , при которых эффект дополнительного охлаждения активного тела при введении оболочки будет максимальным. Формула для подсчета величины  $Bi_m$  вытекает из выражения (2-17)

$$Bi_m = 1/k. \quad (2-19)$$

Для рубина и стекла при  $k=n$  значения  $Bi_{пр}$  соответственно равны 0,57 и 0,65. На рис. 2-4 отмечены значения  $Bi_{пр}$  и  $Bi_m$  для ряда наиболее распространенных активных материалов.

Влияние оболочки на эффективность теплоотвода можно проиллюстрировать, сопоставив температуру на оси стержня в оболочке и без оболочки

$$\delta_0 = \left[ \frac{T_{ядрa}(r_1) - T_c}{T(r_1) - T_c} \right]_{r_1=0} = 1 + \frac{2 \ln k - \frac{k-1}{k Bi}}{1 + \frac{2}{Bi}}. \quad (2-20)$$

Результаты вычислений величины  $\delta_0$  приведены на рис. 2-5. Как следует из рис. 2-5, теплоотводящая роль оболочки проявляется лишь при относительно малых значениях числа Био, т. е. при  $Bi < 0,5$ . Однако дополнительное уменьшение температуры активного тела при этом может быть достаточно существенным. Так, для рубина с оболочкой радиуса  $2r_0$  при  $Bi=0,1$  температура на оси стержня уменьшается в 1,67 раза.

### 2-3. ПОЛЫЙ ЦИЛИНДР

Одним из вариантов формы активного элемента ОКГ является полый цилиндр [Л. 2-19—2-22]. В работе [Л. 2-19] описывается следующая конструкция (рис. 2-6). Цилиндрическая лампа 1 помещена в полость активного стержня 2 с внутренним радиусом  $r_0$  и наружным  $R=kr_0$ . Вся система заключена в отражатель 3. В такой конструкции достигается эффективное использование светового потока лампы, так как практически все излучение накачки проходит через рабочее вещество. Иногда при помещении лампы накачки внутрь активного тела зазоры между лампой и активным телом исполь-

зуют для протока хладагента с целью охлаждения лампы и активного тела [Л. 2-20].

Для полого цилиндра с однородным распределением источников тепла стационарное уравнение теплопровод-

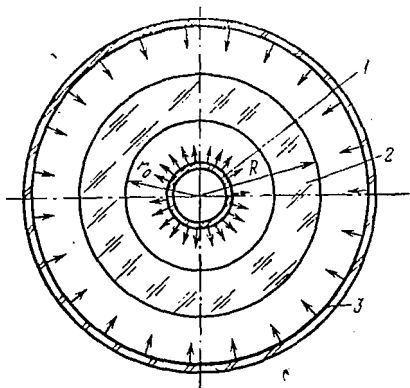


Рис. 2-6. Активный элемент в форме полого цилиндра.

ности и граничные условия III рода имеют следующий вид:

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right] + \frac{q(r, t)}{c\rho}; \quad (2-21)$$

$$[dT(r_1)/dr_1]_{r_1=1} = Bi_1 [T(r_1) - T_1]_{r_1=1}; \quad (2-22)$$

$$-[dT(r_1)/dr_1]_{r_1=k} = \frac{1}{k} Bi_2 [T(r_1) - T_2]_{r_1=k}, \quad (2-23)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — температура охлаждающей среды на внутренней и внешней поверхностях;  $Bi_1 = \alpha_1 r_0 / \lambda$ ;  $Bi_2 = \alpha_2 R / \lambda$ ;  $r_1 = r/R$ ;  $1 \leq r_1 \leq k = R/r_0$ .

Стационарное распределение температуры в полом цилиндре в соответствии с (2-21) — (2-23) определяется соотношением

$$T(r_1) = -\frac{qr_0^2}{4\lambda} r_1^2 + C_1 \ln r_1 + C_2. \quad (2-24)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  имеют следующий вид:

$$C_1 = \frac{\frac{qr_0^2}{4\lambda} [2k^2 Bi_1 + 2Bi_2 + (k^2 - 1) Bi_1 Bi_2] + Bi_1 Bi_2 (T_2 - T_1)}{Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2 \ln k}; \quad (2-25)$$

$$C_2 = \frac{\frac{qr_0^2}{4\lambda} [Bi_1 + k^2 Bi_2 + (Bi_1 Bi_2 - 2Bi_2) \ln k + 2(k^2 - 1)] +}{Bi_1 + Bi_2 +} \rightarrow \frac{+ T_1 Bi_1 (1 + Bi_2 \ln k) + T_2 Bi_2}{+ Bi_1 Bi_2 \ln k} . \quad (2-26)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения уравнения (2-21), которые могут быть полезны для анализа стационарного теплового режима активных элементов в форме полого цилиндра.

Если активное тело эффективно охлаждается по внешней и внутренней поверхностям ( $Bi_1 \rightarrow \infty$ ,  $Bi_2 \rightarrow \infty$ ,  $T_1 = T_2$ ), формулы (2-25) и (2-26) упрощаются

$$C_1 = \frac{qr_0^2 (k^2 - 1)}{4\lambda \ln k} ; \quad (2-27)$$

$$C_2 = \frac{qr_0^2}{4\lambda} + T_1 . \quad (2-28)$$

При интенсивном охлаждении активного тела по внутренней поверхности ( $Bi_1 \rightarrow \infty$ ) и тепловой изоляции внешней поверхности ( $Bi_2 \rightarrow 0$ ) постоянные интегрирования в выражении (2-24) записываются следующим образом:

$$C_1 = \frac{qk^2 r_0^2}{2\lambda} ; \quad (2-29)$$

$$C_2 = \frac{qr_0^2}{4\lambda} + T_1 . \quad (2-30)$$

При  $Bi_1 \rightarrow 0$ ,  $Bi_2 \rightarrow \infty$  температурное распределение по сечению элемента можно найти с использованием следующих выражений:

$$C_1 = \frac{qr_0^2}{2\lambda} ; \quad (2-31)$$

$$C_2 = \frac{qr_0^2}{4\lambda} (k^2 - 2 \ln k) + T_2 . \quad (2-32)$$

## 2-4. ПЛАСТИНА

В качестве активных элементов используются также стержни прямоугольного сечения [Л. 2-10, 2-18]. Из стержней прямоугольного сечения наиболее широкое распространение получили активные элементы в форме тонкой пластины, толщина которой значительно меньше ее длины и высоты.

Температурное поле в тонкой пластине определяется из решения системы уравнений:

$$\text{ср} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \text{div} [\lambda \text{grad } T(x, t)] + q(x, t); \quad (2-33)$$

$$T(x, 0) - T_c = 0; \quad (2-34)$$

$$-\lambda \left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right]_{x=h} = \alpha [T(x, t) - T_c]_{x=h}, \quad (2-35)$$

где  $2h$  — толщина пластины.

Однородное тепловыделение. При однородном тепловыделении ( $q = \text{const}$ ) распределение температур по сечению активного тела описывается известным соотношением:

$$T(x, Fo) - T_c = \frac{qh^2}{2\lambda} \left[ 1 + \frac{2}{Bi} - x_1^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} A_n \cos(\mu_n x_1) \exp(-\mu_n^2 Fo) \right], \quad (2-36)$$

где  $Bi = ah/\lambda$ ;  $Fo = at/h^2$ ;  $x_1 = x/h$  — безразмерная координата,  $0 \leq x_1 \leq 1$ ;  $\mu_n$  — корни трансцендентного характеристического уравнения:

$$Bi \text{ctg } \mu = \mu; \quad (2-37)$$

$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}$  — коэффициенты, зависящие от числа  $Bi$ . Численные значения  $A_n$  и  $\mu_n$  табулированы и приведены в литературе (см., например, [Л. 2-5]).

При  $Fo \rightarrow \infty$  выражение (2-36) описывает распределение температуры в стационарном тепловом режиме

$$T(x_1) - T_c = \frac{qh^2}{2\lambda} \left( 1 + \frac{2}{Bi} - x_1^2 \right). \quad (2-38)$$

Как и в случае цилиндрического стержня, перепад температуры по сечению пластины не зависит от интенсивности теплообмена с охлаждающей средой.

Время установления стационарного теплового режима зависит от числа  $Bi$ . На рис. 2-7 приведена зависимость отношения среднеобъемных температур, рассчитанных с учетом (2-36) и (2-38), от числа  $Fo$  при различных значениях  $Bi$ . Как следует из расчета, с увеличением  $Bi$  время выхода уменьшается. При  $Bi > 10$

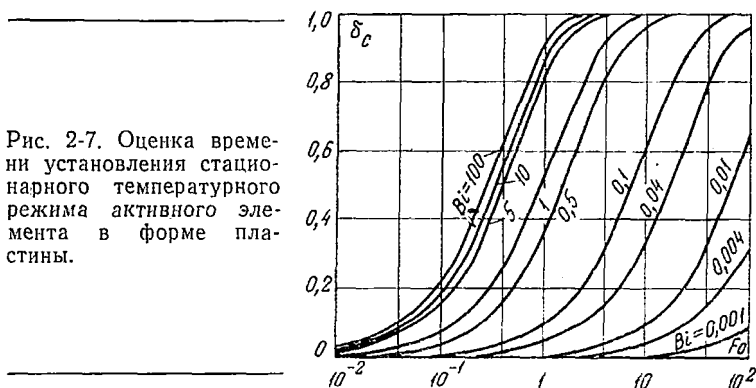


Рис. 2-7. Оценка времени установления стационарного температурного режима активного элемента в форме пластины.

дальнейшее увеличение интенсивности теплообмена практически не влияет на время установления стационарного режима.

Неоднородное тепловыделение. Представим функцию распределения источников тепла следующим полиномом:

$$q(x_1) = \sum_{i=1}^i (-1)^{i+1} a_i x_1^{2(i-1)}. \quad (2-39)$$

С учетом (2-39) решение уравнения (2-33) имеет вид:

$$\begin{aligned} T(x_1, Fo) - T_c = & \sum_{i=1}^i (-1)^{i+1} \frac{a_i h^2}{2\lambda i (2i-1)} \left( 1 + \frac{2i}{Bi} - x_1^{2i} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{a_i h^2 \mu_n \cos(\mu_n x_1) \exp(-\mu_n^2 Fo)}{\lambda i (2i-1) (\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)} \times \\ & \times \int_0^1 \left( 1 + \frac{2i}{Bi} - x_1^{2i} \right) \cos(\mu_n x_1) dx_1. \end{aligned} \quad (2-40)$$

При  $i=1$  выражение (2-40) переходит в (2-36). Положив  $i=2$ , получим:

$$T(x_1, Fo) - T_c = \frac{h^2}{2\lambda} \left[ a_1 \left( 1 + \frac{2}{Bi} - x_1^2 \right) - \frac{a_2}{6} \left( 1 + \frac{4}{Bi} - x_1^4 \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_1}{\lambda \mu_n^2} A_n \cos(\mu_n x_1) \exp(-\mu_n^2 Fo) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_2}{\lambda \mu_n^2} A_n \cos(\mu_n x_1) \left( 1 - \frac{2}{Bi} - \frac{4}{\mu_n^2} \right) \exp(-\mu_n^2 Fo) \right]. \quad (2-41)$$

В стационарном режиме температура на поверхности пластины определяется из выражения

$$T(1) - T_c = \bar{q} h^2 / (\lambda Bi), \quad (2-42)$$

где  $\bar{q} = \sum_i (-1)^{i+1} \frac{a_i}{2i-1}$  — усредненная по объему мощность источников тепла. Как следует из (2-42), температура на поверхности тела не зависит от характера распределения  $q(x_1)$ . Однако неоднородность тепловыделения влияет на величину градиента температуры по сечению пластины.

Представим максимальную разность температур  $\Delta T_m$  в виде суммы (2-12). Поправка  $\psi$  на учет неоднородности распределения накачки по объему определяется соотношением

$$\psi = \frac{h^2}{2\lambda} \sum_i (-1)^i a_i \frac{1-i}{i(2i-1)}. \quad (2-43)$$

Влияние неоднородности накачки на температуру в середине пластины ( $x_1=0$ ) можно оценить из следующего отношения:

$$\frac{T''(0) - T_c}{T''(0) - T_c} = \frac{\sum_i (-1)^{i+1} \frac{a_i}{i(2i-1)} \left( 1 + \frac{2i}{Bi} \right)}{\bar{q} \left( 1 + \frac{2}{Bi} \right)}. \quad (2-44)$$

В табл. 2-3 ( $a_2 < 0$ ) для  $i=2$  приведены результаты расчета отношения (2-44). Как видно из данных

| Bi       | $-a_1/a_2$ |      |      |      |      |
|----------|------------|------|------|------|------|
|          | 0          | 0,1  | 0,5  | 1    | 5    |
| 0,1      | 0,98       | 0,98 | 0,99 | 0,99 | 1,00 |
| 1,0      | 0,83       | 0,87 | 0,93 | 0,96 | 0,99 |
| 10,0     | 0,58       | 0,68 | 0,83 | 0,90 | 0,97 |
| 100,0    | 0,51       | 0,62 | 0,80 | 0,88 | 0,97 |
| $\infty$ | 0,50       | 0,62 | 0,80 | 0,88 | 0,97 |

табл. 2-3, характер влияния неоднородности распределения источников тепловыделения на температурное поле в пластине такой же, как и в случае цилиндрического стержня. В частности, с уменьшением числа Bi влияние неоднородности становится менее заметным.

### Глава третья

## ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Наиболее типичным режимом работы твердотельных ОКГ является импульсный с заданной частотой следования импульсов генерации. Рассмотрим процесс нагрева активных элементов. До начала работы ОКГ (включения накачки) температура произвольной точки активного элемента равна температуре охлаждающей среды. За время действия накачки длительностью  $\tau_n$  (период накачки) температура повышается и достигает значения  $T_{n1}$ . В последующий период между импульсами накачки длительностью  $\tau_o$  (период охлаждения) температура понижается до величины  $T_{o1}$ . Через промежуток времени  $\tau_n = \tau_n + \tau_o$ , т. е.  $Fo_n = Fo_n + Fo_o$  заканчивается первый цикл работы генератора. При повторении импульсов длительности периода накачки  $\tau_n$  и периода охлаждения  $\tau_o$ , как правило, сохраняются от цикла к циклу (рис. 3-1).

Во втором цикле за время  $\tau_n$  температура достигает значения  $T_{n2}$ , а за время  $\tau_o$  снижается до величины  $T_{o2}$ . При многократном повторении накачки с последующими периодами охлаждения нагрев активных элементов до-



стигает квазистационарного состояния, характеризующегося тем, что в сходственные моменты времени последующих циклов температурное поле в активном элементе будет воспроизводиться. Основными характеристиками теплового режима являются уровень нагрева, время выхода в квазистационарное состояние и характер распределения температуры по сечению активного элемента, которые в значительной степени зависят от теплофизических свойств лазерных материалов, интенсивности теплообмена с охлаждающей средой и частоты повторения импульсов.

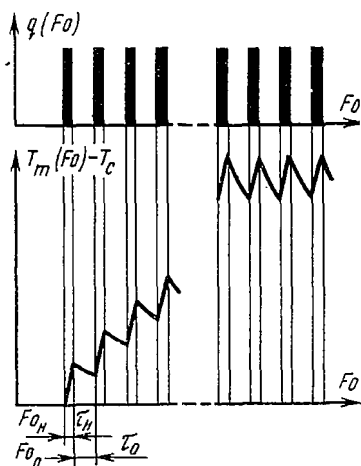


Рис. 3-1 Схема нагрева активного элемента импульсного ОКГ.

Если за время  $\tau_0$  температура во всех точках активного элемента принимает первоначальное значение, равное температуре охлаждающей среды, то с точки зрения теплового режима и влияния его на генерационные характеристики такой генератор повторяющихся импульсов эквивалентен генератору одиночных импульсов. Вследствие этого под частотным режимом работы ОКГ целесообразно понимать такой режим, когда за время охлаждения между соседними импульсами накачки не достигается первоначальная температура, равная температуре охлаждающей среды. Такая классификация режимов работы ОКГ повторяющихся импульсов является естественной, так как определяющим фактором различия условий работы ОКГ одиночных импульсов и частотных ОКГ является нагрев активных элементов.

В данной главе исследуется тепловой режим активных элементов наиболее типичной формы в виде цилиндра (сплошной цилиндр, цилиндр в оболочке, полый цилиндр), длина которого значительно больше диаметра. Предполагается при этом, что теплообмен с окружающей средой происходит через боковую поверхность. Интенсивность теплообмена постоянна по всей

поверхности и не зависит от времени. Вещество считается изотропным. Однако результаты могут быть использованы и для анализа теплового режима анизотропных элементов, обладающих слабой анизотропией тепловых свойств, в частности у рубина отношение коэффициентов теплопроводности вдоль и перпендикулярно оптической оси невелико и составляет 1,11 [Л. 3-1]. При исследовании теплового режима предполагается также независимость теплофизических характеристик вещества от температуры. Указанное допущение справедливо для активных элементов ОКГ, работающих в области комнатных температур, так как в этом случае температурной зависимостью свойств практически всех лазерных материалов можно пренебречь.

### 3-1. РЕЖИМ ОДИНОЧНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Период накачки. Нагрев активного элемента цилиндрической формы под действием импульса накачки описывается решением уравнения (2-1) с начальным (2-2) и граничным (2-3) условиями. Во время импульса накачки распределение температуры  $T(r_1, Fo)$  на активном элементе радиусом  $R$  при постоянной по объему и времени мощности тепловыделения  $q$  определяется известным соотношением (см., например, [Л. 3-2, 3-3])

$$T_{\text{ш}}(r_1, Fo) = T_c + \frac{qR^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) (1 - e^{-\mu_n^2 Fo}), \quad (3-1)$$

где

$$A_n = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n^3 [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} = \frac{2Bi}{\mu_n^2 [\mu_n^2 + Bi^2] J_0(\mu_n)}. \quad (3-2)$$

При  $Bi \rightarrow \infty$   $\mu_n$  являются корнями функции  $J_0(\mu)$ , а коэффициенты  $A_n$  принимают вид:

$$A_n = \frac{2}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}$$

Практически можно считать, что условие бесконечного теплообмена (граничное условие первого рода) выполняется при  $Bi \geq 100$ . Этот случай реализуется, в частности, для стеклянных стержней при жидкостном охлаждении.

При длительностях накачки  $\tau_n$ , удовлетворяющих условию

$$\mu_1^2 Fo_n \ll 1, \quad (3-3)$$

расчет нагрева существенно упрощается. В этом случае, разлагая экспоненту в выражении (3-1) в ряд и ограничиваясь двумя первыми членами, получаем:

$$T_n(t) = T_c + \frac{ql}{c\rho}. \quad (3-4)$$

При произвольной зависимости мощности тепловыделения от  $r_1$  и  $t$  вместо (3-4) имеем:

$$T_n(r_1, t) = T_c + \frac{1}{c\rho} \int_0^t q(r_1, t) dt. \quad (3-5)$$

Для твердотельных генераторов с импульсной накачкой условие (3-3), как правило, выполняется. Так, при комнатной температуре для стержней радиусом 0,5 см ( $\tau_n = 10^{-3}$  сек) величина  $\mu_1^2 Fo_n$  равна  $0,55 \cdot 10^{-3} \mu_1^2$  (рубин);  $0,2 \cdot 10^{-3} \mu_1^2$  (иттрий-алюминиевый гранат);  $0,15 \cdot 10^{-3} \mu_1^2$  (стекло);  $0,6 \cdot 10^{-4} \mu_1^2$  (вольфрамат кальция). Соотношение (3-3) формулирует условие адиабатического нагрева. Как следует из (3-4), (3-5), температура активного элемента во время действия накачки при выполнении условия (3-3) определяется мощностью источников тепловыделения и теплоемкостью вещества и не зависит от интенсивности теплообмена с охлаждающей средой и теплопроводности вещества. Адиабатичность нагрева является следствием кратковременности действия импульса накачки. Поэтому процессы теплоотвода и теплопроводности не оказывают влияния на распределение температуры, и температурное поле активного элемента совпадает с распределением источников тепловыделения.

Экспериментальное определение нагрева активных элементов ОКГ во время накачки сводится к исследованию поведения оптических свойств вещества, обусловленному изменением температуры. Рассмотрению этого вопроса посвящен ряд работ (см., например, [Л. 3-4—3-21]). Так, в работе [Л. 3-4] исследование про-

цесса нагрева цилиндрических рубиновых стержней при изотропной накачке проводилось интерферометрическим методом. При обработке интерферограмм для определения нагрева предполагалось, что изменение оптической длины резонатора обусловлено температурным изменением показателя преломления и тепловым расширением рубина. Используемый в работе метод позволил получить картину изменения температуры рубина по сечению стержня во время импульса накачки длительностью около 3,5 мсек. На рис. 3-2 приведена временная зависимость нагрева на оси стержня при энергии накачки около 5 000 дж для образцов рубина с концентрациями ионов хрома 0,007% (1), 0,018% (2) и 0,03% (3). В работах [Л. 3-4, 3-5] установлена линейная зависимость нагрева от энергии накачки. Кинетика нагрева стержней из рубина и стекла с полированной и матированной боковыми поверхностями при анизотропной накачке исследовалась в работе [Л. 3-6]. Аналогичные исследования проводились для стержней из флюорита в диапазоне рабочих температур 30—300 К [Л. 3-7].

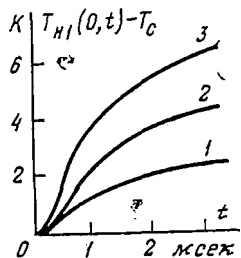


Рис. 3-2. Нагрев активного элемента под действием импульса накачки.

При больших нагревах за время импульса исследование временного хода температуры затрудняется вследствие быстрого изменения интерференционной картины. В [Л. 3-8] для определения нагрева за импульс накачки использовалась зависимость двойного лучепреломления от температуры и возникающих температурных напряжений. Так как эта зависимость более слабая, то измерения удалось выполнить с длинными стержнями рубина при больших энергиях накачки. По данным работы [Л. 3-8] нагрев на оси рубинового стержня (диаметр 12,5 мм, длина 110 мм) при энергии импульса накачки 14,1 кдж составил 13,4°C. В работах [Л. 3-9—3-13] изменение температуры рубина определялось по сдвигу длины волны генерации.

В указанных выше работах установлена зависимость распределения температуры от конфигурации осветителя, характера обработки боковой поверхности

стержня, радиуса стержня, коэффициента поглощения радиации накачки. Сопоставление кинетики нагрева активных элементов с временным ходом импульса накачки экспериментально подтверждает адиабатичность процессов во время накачки.

При невыполнении условия (3-3) расчет температурных полей необходимо проводить по формуле (3-1), учитывающей процессы теплообмена с окружающей средой и перенос тепла по объему активного элемента. Невыполнение условия (3-3) может быть связано с относительно большой длительностью импульса накачки, малым радиусом стержня или большим значением коэффициента температуропроводности вещества  $\alpha = \lambda / c\rho$ . В частности, условие (3-3) может нарушаться при охлаждении рубиновых стержней низкокипящей жидкостью вследствие сильного возрастания  $\alpha$  (при понижении температуры рубина от 300 К до температуры кипения азота коэффициент температуропроводности возрастает примерно в 200 раз).

Для оценки влияния теплоотвода во время действия импульса накачки рассмотрим отношение величины нагрева, определяемого соотношением (3-1), к его значению в предположении выполнения условия адиабатичности

$$\delta_a = \frac{T_{н1}(r_1, Fo) - T_c}{qR^2 Fo} \lambda. \quad (3-6)$$

Отношение  $\delta_a$  рассчитывалось на ЦВМ «Минск-2» с учетом первых 30 членов ряда (3-1) при значениях  $Bi = 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10, \infty$  для  $r_1 = 0; 0,4; 0,6; 0,8$ . Результаты расчета представлены на рис. 3-3. Пользуясь данными рис. 3-3, можно в каждом конкретном случае оценить влияние теплоотвода на температурные поля активных элементов в процессе накачки. В качестве примера рассмотрим рубиновый стержень радиусом  $R = 0,3$  см, охлаждаемый жидким азотом, при длительности импульса накачки  $\tau_n = 3 \cdot 10^{-4}$  сек ( $Fo_n = 0,1$ ). В этом случае при значениях  $Bi = 0,5$  и 100 величина  $\delta_a$  соответственно равна 0,99 и 0,90 ( $r_1 = 0,4$ ); 0,98 и 0,77 ( $r_1 = 0,6$ ); 0,95 и 0,55 ( $r_1 = 0,8$ ). Приведенная выше оценка для рубинового стержня носит приближенный характер, так как при расчетах не учитывалась зависимость теплофизических характеристик вещества от температуры. Поэтому для оценок данными рис. 3-3 можно

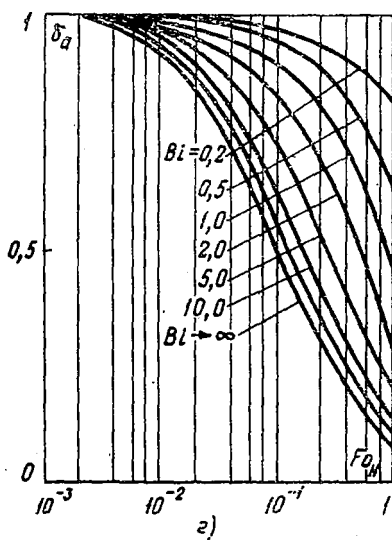
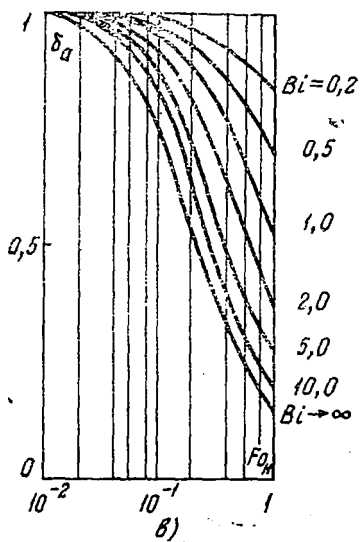
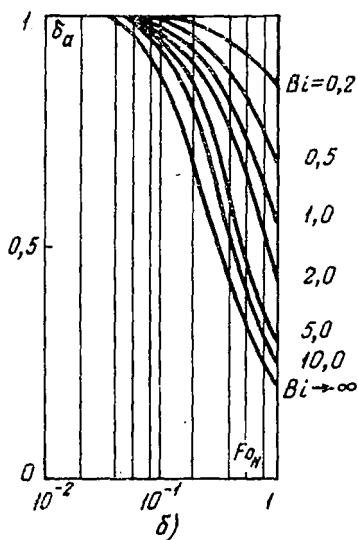
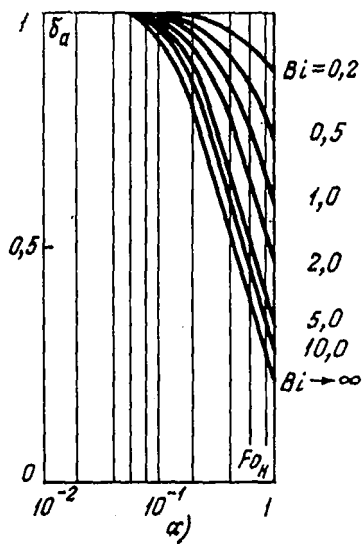


Рис. 3-3. Зависимость  $\delta_a$  от  $Fo_H$ .  
 а —  $r_1=0$ ; б —  $r_1=0,4$ ; в —  $r_1=0,6$ ; г —  $r_1=0,8$ .

пользоваться лишь в тех случаях, когда зависимость теплофизических характеристик от температуры проявляется слабо.

Исследование нагрева активных элементов ОКГ, работающих в области температур, где зависимость  $\lambda(T)$  и  $c(T)$  сильно выражена, предполагает рассмотрение нелинейной задачи теплопроводности. Нелинейность уравнения теплопроводности значительно усложняет задачу, и ее решение можно проводить, как правило, лишь приближенными методами. Более детально эти вопросы рассматриваются в гл. 5.

Период охлаждения. Перейдем сейчас к рассмотрению охлаждения активных элементов после выключения импульса накачки. В этом случае распределение температуры по сечению стержня  $T_{01}(r_1, Fo)$  описывается решением уравнения теплопроводности (2-1) при  $q=0$  с начальным условием, определяемым нагревом (3-1) к концу импульса накачки длительностью  $\tau_n$

$$T_{01}(r_1, 0) = T_c + \frac{qR^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) (1 - e^{-\mu_n^2 Fo_n}). \quad (3-7)$$

Тогда охлаждение стержня после выключения накачки описывается соотношением

$$T_{01}(r_1, Fo) = T_c + \frac{qR^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) (1 - e^{-\mu_n^2 Fo_n}) e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (3-8)$$

Здесь  $Fo = at/R^2$ ,  $t$  — время, отсчитываемое от конца импульса накачки.

При выполнении условия (3-3) выражение (3-8) принимает вид:

$$T_{01}(r_1, Fo) = T_c + \frac{q\tau_n}{c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3-9)$$

где

$$B_n = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]}. \quad (3-10)$$

В области значений критерия Био ( $Bi \geq 100$ ) коэффициенты  $B_n$  равны:

$$B_n = \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)}. \quad (3-11)$$

Рассмотрим относительное изменение температуры после выключения накачки, которое в соответствии с (3-9) принимает вид:

$$\Theta = \frac{T_{01}(r_1, Fo) - T_c}{T_{01}(r_1, 0) - T_c} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3-12)$$

где

$$T_{01}(r_1, 0) - T_c = \frac{q_{\text{н}}}{c\rho} = \Delta T_{\text{нмп}}. \quad (3-13)$$

В табл. 3-1 приведены результаты расчета времени  $\tau^{\text{ц}}(\Theta)$  и  $\tau^{\text{п}}(\Theta)$  достижения относительной температуры  $\Theta=0,5$  и  $0,1$  в центре и на поверхности цилиндрических стержней радиусом  $R=0,5$  из рубина, иттрий-алюминиевого граната, вольфрамата кальция и стекла в зависимости от величины критерия Био.

Для расчета  $\Theta$  при малых значениях  $Fo$  необходимо просуммировать большое количество членов ряда (3-12). При увеличении  $Fo$  основной вклад дают первые члены

Таблица 3-1

Время  $\tau$  (сек) достижения относительной температуры  $\Theta=0,5$  и  $0,1$  для цилиндрических стержней радиусом  $R=0,5$  см

| Параметр                | Рубин, $a=0,135 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ |     |     |     |     | Иттрий-алюминиевый гранат, $a=0,05 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ |     |     |     |     |
|-------------------------|-----------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|
|                         | 0,4                                                 | 0,8 | 1,0 | 2,0 | 4,0 | 0,4                                                                    | 0,8 | 1,0 | 2,0 | 4,0 |
| $\tau_{0,5}^{\text{ц}}$ | 2,0                                                 | 1,2 | 1,0 | 0,7 | 0,5 | 5,5                                                                    | 3,2 | 2,8 | 1,9 | 1,5 |
| $\tau_{0,5}^{\text{п}}$ | 1,5                                                 | 0,9 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 4,0                                                                    | 1,9 | 1,4 | 0,5 | 0,1 |
| $\tau_{0,1}^{\text{ц}}$ | 6,3                                                 | 3,5 | 3,0 | 1,8 | 1,4 | 17                                                                     | 9,5 | 8,0 | 5,0 | 3,8 |
| $\tau_{0,1}^{\text{п}}$ | 5,5                                                 | 3,0 | 2,4 | 1,3 | 0,7 | 15                                                                     | 8,0 | 6,5 | 3,5 | ,9  |

| Параметр                | Вольфрамат кальция, $a=0,013 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ |     |     |     |     | Стекло, $a=4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ |    |     |     |     |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|----------------------------------------------------------------|----|-----|-----|-----|
|                         | 1                                                                | 2   | 4   | 10  | 20  | 1                                                              | 4  | 10  | 20  | 100 |
| $\tau_{0,5}^{\text{ц}}$ | 11                                                               | 7,8 | 5,8 | 4,8 | 4,4 | 35                                                             | 18 | 15  | 14  | 13  |
| $\tau_{0,5}^{\text{п}}$ | 5,4                                                              | 2,0 | 0,6 | 0,1 | 0,1 | 17                                                             | 2  | 0,3 | 0,1 | 0,1 |
| $\tau_{0,1}^{\text{ц}}$ | 32                                                               | 20  | 15  | 12  | 10  | 100                                                            | 47 | 37  | 33  | 30  |
| $\tau_{0,1}^{\text{п}}$ | 26                                                               | 4   | 7,8 | 2,8 | 1,0 | 81                                                             | 24 | 8,8 | 3,1 | 0,2 |



ряда и, начиная с некоторого значения  $F_0$ , определяемого точностью расчета, можно ограничиться лишь первым членом ряда (3-12)

$$\theta = B_1 J_0(\mu_1 r_1) e^{-\mu_1^2 F_0}. \quad (3-14)$$

Тогда время, необходимое для охлаждения стержня на оси от температуры  $[T_{01}(0, 0) - T_c]$  до значения  $[T_{01}(0, F_0) - T_c]$ , равно:

$$\tau = \frac{R^2}{\mu_1^2 a} \ln \left\{ \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \frac{[T_{01}(0, 0) - T_c]}{[T_{01}(0, F_0) - T_c]} \right\}. \quad (3-15)$$

Для стеклянных стержней радиусом  $R$  ( $a = 4 \times 10^{-3} \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ ) при жидкостном охлаждении ( $Bi \geq 100$ ) соотношение (3-15) принимает вид:

$$\tau = 43R^2 \ln \left[ 1,6 \frac{T_{01}(0, 0) - T_c}{T_{01}(0, F_0) - T_c} \right]. \quad (3-16)$$

В соответствии с (3-16) охлаждение на уровне  $\theta = 0,05$  на оси стеклянных стержней радиусом  $R = 0,5, 1$  и  $5 \text{ см}$  достигается за время  $37 \text{ сек}$ ,  $2,5 \text{ мин}$  и  $62 \text{ мин}$  соответственно.

При малых значениях критерия Био ( $Bi \ll 1$ ) перепад температуры по сечению стержня будет малой величиной по сравнению со средним нагревом. Поэтому процесс охлаждения определяется теплообменом между поверхностью стержня и охлаждающей средой. В этом случае охлаждение цилиндрического стержня можно описать балансным уравнением

$$c\rho \frac{dT_{01}(t)}{dt} = \frac{2\alpha}{R} [T_c - T_{01}(t)]. \quad (3-17)$$

Решение уравнения (3-17) приводит к экспоненциальной зависимости температуры от времени:

$$T_{01}(t) = T_c + \Delta T_{\text{нмц}} e^{-\frac{2\alpha t}{c\rho R}}. \quad (3-18)$$

Выражение (3-18) можно непосредственно получить из (3-9). Действительно, при  $Bi \rightarrow 0$   $B_1 \rightarrow 1$ , а значения  $B_2, B_3 \dots$  стремятся к нулю,  $\mu_1^2 \rightarrow 2Bi$ ;  $J_0(\mu_1 r_1) \rightarrow 1$  и, таким образом, соотношение (3-9) переходит в (3-18).

В рассматриваемом случае при начальном неодно-

родном по объему нагреве сначала устанавливается квазиоднородное распределение температуры по сечению стержня, а затем происходит экспоненциальное охлаждение.

Зависимость относительной температуры от времени имеет следующий вид:

$$\theta = e^{-\frac{2\alpha t}{c\rho R}}. \quad (3-19)$$

Тогда время достижения относительной температуры  $\theta$  равно:

$$\tau = -\frac{c\rho R}{2\alpha} \ln \theta. \quad (3-20)$$

Выражения (3-18) — (3-20) описывают тепловой режим цилиндрических стержней из рубина и граната при воздушном охлаждении. Уменьшение относительной температуры в  $e$  раз для рубинового цилиндрического стержня радиусом  $R=0,4$  см при значении коэффициента теплообмена  $\alpha=10^{-2}$  вт·см<sup>-2</sup>·°C<sup>-1</sup> произойдет за 1 мин.

### 3-2. ЧАСТОТНЫЙ РЕЖИМ

Расчет температурных полей активных элементов частотных ОКГ сводится к решению уравнения теплопроводности при периодическом выделении тепла с частотой следования импульсов накачки. Нагрев активных элементов цилиндрической формы достаточно подробно исследован в работах [Л. 3-22—3-36]. В данном параграфе проводится анализ теплового режима, основанный на результатах указанных выше работ.

Сплошной цилиндр. Уравнения теплопроводности для сплошного цилиндрического стержня радиусом  $R$ , соответствующие  $m$ -му импульсу накачки и  $m$ -му периоду охлаждения, когда накачка выключена, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial T_{\text{зм}}(r_1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial T_{\text{зм}}(r_1, Fo)}{\partial r_1} \right) + \frac{qR^2}{\lambda}; \quad (3-21)$$

$$\frac{\partial T_{\text{ом}}(r_1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial T_{\text{ом}}(r_1, Fo)}{\partial r_1} \right). \quad (3-22)$$

Граничные условия

$$\left( \frac{\partial T_m(r_1, Fo)}{\partial r_1} \right)_{r_1=1} = \text{Bi} [T_c - T_m(1, Fo)]. \quad (3-23)$$

Распределения температуры для первого периода накачки и первого периода охлаждения описываются выражениями (3-1), (3-8).

Начальное условие для второго периода накачки имеет вид:

$$T_{n2}(r_1, 0) = T_{01}(r_1, Fo_0), \quad (3-24)$$

где  $Fo_0$  — безразмерное время между двумя последовательными импульсами накачки.

Производя интегрирование уравнений (3-21), (3-22) для последующих периодов с граничными (3-28) и начальными условиями

$$T_{nm}(r_1, 0) = T_{0m-1}(r_1, Fo_0); \quad (3-25)$$

$$T_{0m}(r_1, 0) = T_{nm}(r_1, Fo_n), \quad (3-26)$$

получаем выражения, описывающие нагрев активных элементов ОКГ, работающих в частотном режиме.

Распределение температуры по сечению стержня в  $m$ -м периоде накачки  $T_{nm}(r_1, Fo)$  и  $m$ -м периоде охлаждения  $T_{0m}(r_1, Fo)$  при равномерном по объему тепловыделении  $q(Fo)$  определяется следующими соотношениями [Л. 3-29, 3-30, 3-34]:

$$T_{nm}(r_1, Fo) = T_c + \frac{1}{c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} B_n [q_n(Fo) + F_{nm}q_n(Fo_n)] \times \\ \times J_0(\mu_n r_1) e^{-\mu_n^2 Fo}; \quad (3-27)$$

$$T_{0m}(r_1, Fo) = T_c + \frac{1}{c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} B_n (1 + F_{nm}) q_n(Fo_n) \times \\ \times J_0(\mu_n r_1) e^{-\mu_n^2 (Fo_n + Fo)}, \quad (3-28)$$

где

$$q_n(Fo) = \frac{R^2}{a} \int_0^{Fo} q(Fo) e^{\mu_n^2 Fo} dFo; \quad (3-29)$$

$$F_{nm} = \frac{1 - e^{-(m-1)\mu_n^2 Fo_n}}{1 - e^{-\mu_n^2 Fo_n}} e^{-\mu_n^2 Fo_n}; \quad (3-30)$$

$B_n$  имеет вид (3-10).

В конце  $m$ -го периода ( $F_0 = F_{0н}$  или  $F_0 = F_{0o}$ )

$$T_{nm}(r_1, F_{0н}) = T_c + \frac{1}{c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} B_n q_n(F_{0н}) (1 + F_{nm}) \times \\ \times J_0(\mu_n r_1) e^{-\mu_n^2 F_{0н}}; \quad (3-31)$$

$$T_{om}(r_1, F_{0o}) = T_c + \frac{1}{c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} B_n q_n(F_{0н}) (1 + F_{nm}) \times \\ \times J_0(\mu_n r_1) e^{-\mu_n^2 F_{0о}}. \quad (3-32)$$

Рассмотрим более подробно случай прямоугольного импульса накачки

$$q_n(F_0) = q; \quad 0 \leq F_0 \leq F_{0н}. \quad (3-33)$$

Тогда

$$q_n(F_0) = q \frac{R^2}{\mu_n^2 a} (e^{\mu_n^2 F_0} - 1) \quad (3-34)$$

и соотношения (3-27), (3-28) принимают следующий вид [Л. 3-22—3-26, 3-30]:

$$T_{nm}(r_1, F_0) = T_c + \frac{qR^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) (1 - f_{nm} e^{-\mu_n^2 F_0}); \quad (3-35)$$

$$T_{om}(r_1, F_0) = T_c + \frac{qR^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) f_{om} e^{-\mu_n^2 F_0}. \quad (3-36)$$

Здесь коэффициенты  $A_n$  определяются (3-2), а  $f_{nm}$  и  $f_{om}$  — следующими выражениями:

$$f_{nm} = 1 - \frac{1 - e^{-(m-1)\mu_n^2 F_{0н}}}{1 - e^{-\mu_n^2 F_{0н}}} (e^{-\mu_n^2 F_{0о}} - e^{-\mu_n^2 F_{0н}}); \quad (3-37)$$

$$f_{om} = \frac{1 - e^{-m\mu_n^2 F_{0н}}}{1 - e^{-\mu_n^2 F_{0н}}} (1 - e^{-\mu_n^2 F_{0н}}). \quad (3-38)$$

Время отсчитывается от начала соответствующего периода накачки или периода охлаждения.

К концу  $m$ -го периода накачки ( $Fo = Fo_H$ ) и  $m$ -го периода охлаждения ( $Fo = Fo_0$ ) выражения (3-35) и (3-36) преобразуются к виду:

$$T_{nm}(r_1, Fo_H) = T_c + \frac{qR^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) (1 - e^{-\mu_n^2 Fo_H}) f_m; \quad (3-39)$$

$$T_{om}(r_1, Fo_0) = T_c + \frac{qR^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) (1 - e^{-\mu_n^2 Fo_H}) \times \\ \times f_m e^{-\mu_n^2 Fo_0}, \quad (3-40)$$

где

$$f_m = \frac{1 - e^{-m\mu_n^2 Fo_H}}{1 - e^{-\mu_n^2 Fo_H}}. \quad (3-30')$$

При выполнении условия (3-3) относительное распределение температуры  $\theta = \frac{T_m - T_c}{\Delta T_{\text{нм}}}$  принимает вид:

$$\theta_{nm}(r_1, Fo_H) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) f_m; \quad (3-41)$$

$$\theta_{om}(r_1, Fo_0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) f_m e^{-\mu_n^2 Fo_0}. \quad (3-42)$$

Как следует из приведенных выше соотношений, нагрев активных элементов в общем случае зависит от теплофизических характеристик вещества  $\lambda$  и  $ср$ , коэффициента теплообмена с охлаждающей средой  $\alpha$ , частоты следования импульсов накачки  $f$ , мощности тепловыделения  $q$ , радиуса стержня  $R$ . Значения указанных выше параметров могут варьироваться в довольно широких пределах. Для получения заданных генерационных характеристик оптимизация теплового режима достигается соответствующим выбором значений этих параметров.

Рассмотрим влияние различных факторов на основные закономерности нагрева активных элементов частотных ОКГ. Выше отмечалось, что в начале работы ОКГ температура активных элементов изменяется от цикла

к циклу. На рис. 3-4 и 3-5 приведены распределения относительной температуры по сечению цилиндрического стержня ( $R=0,4$  см) из рубина ( $a=0,135$  см<sup>2</sup>·сек<sup>-1</sup>,  $f=10$  гц,  $Bi=2$ ) и стекла ( $a=4 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>·сек<sup>-1</sup>,  $Bi=100$ ;  $f=1$  гц) при водяном охлаждении, соответствующие концу  $m$ -го периода накачки. Как следует из (3-41)

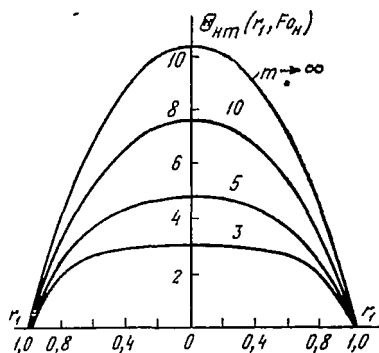
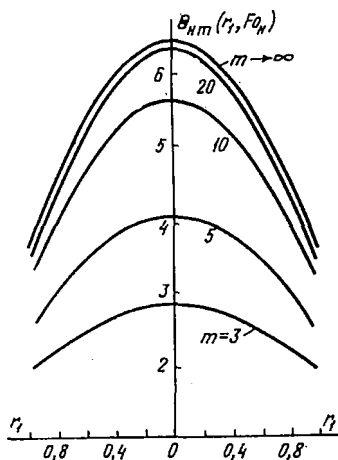


Рис. 3-5. Относительное распределение температуры  $\theta_{nm}(r_1, Fo_n)$  (3-41) в стеклянном стержне.

Рис. 3-4. Относительное распределение температуры  $\theta_{nm}(r_1, Fo_n)$  (3-41) в рубиновом стержне.

нии  $m$ , определяемом величиной  $Bi$  и  $Fo_n$ , достигает квазистационарного значения, когда нагрев за импульс накачки длительностью  $\tau_n$  равен охлаждению за время  $\tau_0$

и (3-42) и рис. 3-4 и 3-5, с увеличением  $m$  рост температуры замедляется и при достаточно большом значении

$$\theta_{\infty}(r_1, Fo_n) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) \frac{1}{1 - e^{-\mu_n^2 Fo_n}}; \quad (3-43)$$

$$\theta_{\infty}(r_1, Fo_0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) \frac{e^{-\mu_n^2 Fo_0}}{1 - e^{-\mu_n^2 Fo_n}}. \quad (3-44)$$

До установления квазистационарного режима вследствие неустойчивости температуры активного элемента параметры генерации изменяются от импульса к импульсу. Поэтому время выхода на квазистационарный тепловой режим является одной из важных характери-

стик частотного ОКГ, определяющей время стабилизации параметров генерации.

Проанализируем зависимость от времени ( $mFo_{\Pi}$ ) отношения величины нагрева в конце  $m$ -го периода к его значению в квазистационарном режиме

$$\theta = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) \frac{1 - e^{-m\mu_n^2 Fo_{\Pi}}}{1 - e^{-\mu_n^2 Fo_{\Pi}}}}{\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) \frac{1}{1 - e^{-\mu_n^2 Fo_{\Pi}}}} \quad (3-45)$$

Выход системы на квазистационарный тепловой режим при  $Fo_{\Pi}=0,1$  иллюстрируется рис. 3-6, где приве-

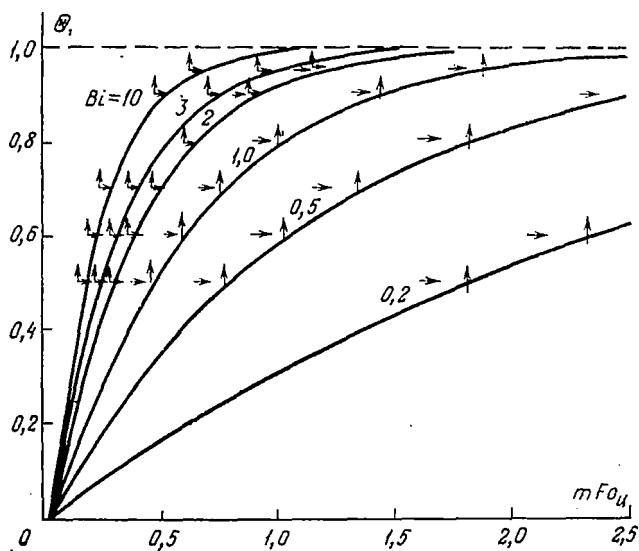


Рис. 3-6. Зависимость  $\theta$  от  $mFo_{\Pi}$ .

Сплошная линия — расчет по формуле (3-45);  $\uparrow$  — расчет по формуле (3-46);  $\rightarrow$  — расчет по формуле (3-49).

дены результаты расчета относительной температуры  $\theta$  при различных значениях критерия Био.

Как видно из данных рис. 3-6, время выхода на квазистационарный режим существенно зависит от величины  $Bi$  при малых значениях  $Bi$ . Так, при увеличении

Ві от 0,5 до 2 время достижения квазистационарного режима на уровне  $\Theta=0,9$  уменьшается в 2,7 раза. В области больших значений ( $Bi \geq 10$ ) зависимость  $\Theta$  от числа Био выражена слабо. Зависимость времени выхода на уровне  $\Theta=0,9$  от числа Био приведена на рис. 3-7.

Для приближенной оценки времени выхода на квазистационарный тепловой режим рассмотрим относительную температуру, в которой учтены только первые члены суммы (3-41) и (3-43). В этом случае  $\Theta$  равно:

$$\Theta = 1 - e^{-m\mu_1^2 Fo_{\text{ц}}} \quad (3-46)$$

Тогда время выхода системы на квазистационарный режим определяется следующим соотношением:

$$\tau = - \frac{\frac{1}{2} R^2}{\mu_1^2 a} \ln(1 - \Theta). \quad (3-47)$$

Приведенные на рис. 3-6 значения  $\Theta$  (3-46) указывают на удовлетворительную точность расчета времени выхода  $\tau$  по формуле (3-47).

Выражения (3-47) можно записать в несколько ином виде. Для этого используем приближенную аналитическую зависимость  $\mu_1$  от  $Bi$  [Л. 3-3]

$$\mu_1^2 = \mu_{1\infty}^2 \frac{1}{1 + \frac{2,45}{Bi^k}}, \quad (3-48)$$

где  $\mu_{1\infty}$  — значение корня  $\mu_1$  при  $Bi \rightarrow \infty$ ;  $k=1,04$ .

Для удобства численных расчетов в выражении (3-48) положим  $k=1$ . Тогда время  $\tau$  в зависимости от  $Bi$  можно оценить по приближенной формуле

$$\tau = - \frac{R^2}{a} \left( 0,173 + \frac{0,425}{Bi} \right) \ln(1 - \Theta). \quad (3-49)$$

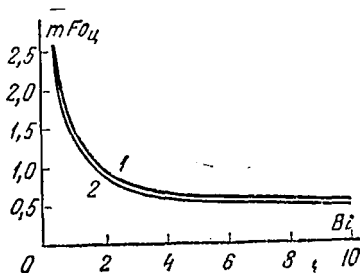


Рис. 3-7. Зависимость безразмерного времени выхода на квазистационарный режим от величины  $Bi$  при  $\Theta=0,9$ .

1 — расчет по формуле (3-45); 2 — расчет по формуле (3-49).



Значения  $\tau(\Theta)$  при различных  $Bi$ , рассчитанные в соответствии с (3-49), приведены на рис. 3-6 и 3-7. Как следует из данных рис. 3-6 и 3-7, выражение (3-49) достаточно хорошо передает зависимость  $\tau$  от значений  $Bi$  и  $\Theta$ .

Проведем оценку времени выхода  $\tau$  для конкретных случаев при водяном охлаждении. Для рубинового стержня ( $R=0,35$  см,  $a=0,135$  см<sup>2</sup>·сек<sup>-1</sup>) с увеличением интенсивности теплообмена в 2 раза (увеличение  $Bi$  от 0,5 до 1)  $\tau(0,9)$  уменьшается от 2,2 до 1,3 сек. Время выхода на режим стеклянного стержня ( $a=4 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>·сек<sup>-1</sup>) с таким же радиусом вследствие низкого значения коэффициента температуропроводности стекла значительно больше и составляет около 15 сек (при  $Bi=10$ ). При воздушном охлаждении время выхода существенно возрастает вследствие малой интенсивности теплообмена. Значения числа Био для стеклянных стержней при воздушном охлаждении того же порядка, как для рубиновых стержней при водяном охлаждении. Однако сильное различие в коэффициентах теплопроводности приводит при прочих равных условиях к значительно большему времени

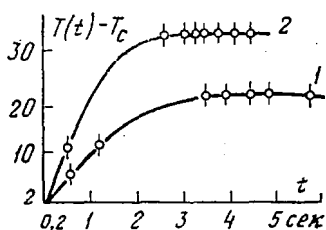


Рис. 3-8. Зависимость нагрева рубина от времени.  
1— $f=6$  гц; 2— $f=10$  гц.

выхода на квазистационарный режим стеклянных стержней по сравнению с рубиновыми. При равенстве  $R$  и  $Bi$  отношение времени выхода для стекла и рубина примерно равно 30.

Экспериментально время выхода на квазистационарный режим определяется по стабилизации характеристик генерации (см., например, [Л. 3-11, 3-29, 3-35]). Так,

в работе [Л. 3-11] длительность переходного режима в рубиновых стержнях при частоте следования импульсов накачки 1—10 гц определялась по сдвигу частоты генерации. Для измерений использовались стержни длиной 120 мм, диаметром 8 мм. Охлаждение рубина и лампы водяное. Энергия импульса накачки составляла 600 дж, длительность 600 мксек. На рис. 3-8 приведена временная зависимость нагрева рубина, полученная на основании измерения длины волны генерации для частот следования импульсов 6 и 10 гц. Как

следует из рис. 3-8, экспериментально определенное время выхода на квазистационарный режим составляет 2,5—3 сек.

В [Л. 3-29, 3-35] время выхода  $\tau$  активных элементов частотных ОКГ на стекле и рубине в диапазоне частот повторения импульсов до 100 гц определялось по стабилизации поля излучения, энергетических и поляризационных характеристик генерации. Кинетика формиро-



Рис. 3-9. Поле излучения в дальней зоне частотного ОКГ на стекле в зависимости от времени работы генератора.

а — 6 сек; б — 7 сек; в — 8 сек; г — 9 сек.

вания поля излучения частотных ОКГ на стекле иллюстрируется рис. 3-9. Из рис. 3-9 следует, что время выхода на квазистационарный режим стеклянных стержней диаметром 0,45 см при водяном охлаждении составляет около 8 сек.

Аналогичным образом можно оценить время выхода на квазистационарный режим при изменении частоты следования импульсов накачки. Пусть генератор работает в квазистационарном режиме на частоте  $f_1$ , а затем частота изменяется на величину  $\Delta f = f_2 - f_1$ . Распределение температуры по сечению активного элемента к концу  $m$ -го периода охлаждения, соответствующего частоте  $f_2$ , определяется следующим соотношением (при адиабатичности нагрева за импульс накачки):

$$T_{om}(r_1, F_{00}) = T_c + \Delta T_{\text{имп}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \times \\ \times J_0(\mu_n r_1) \left[ \frac{e^{-\mu_n^2 (F_{01} + m F_{02})}}{1 - e^{-\mu_n^2 F_{01}}} + \frac{1 - e^{-m \mu_n^2 F_{02}}}{1 - e^{-\mu_n^2 F_{02}}} e^{-\mu_n^2 F_{02}} \right], \quad (3-50)$$

где  $F_{01}$ ,  $F_{02}$ ,  $F_{00}$ ,  $F_0$  — числа Фурье, соответствующие длительностям циклов  $1/f_1$ ,  $1/f_2$ , периоду охлажде-

ния на частоте  $f_2$  и времени между сериями импульсов на частотах  $f_1$  и  $f_2$ .

При  $Fo_{\Pi} = Fo_{02}$  отношение величины нагрева  $T_{om} - T_c$  к его значению в квазистационарном режиме на частоте  $f_2$  равно:

$$\Theta_{f_2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) \left[ \frac{e^{-m\mu_n^2 Fo_{02}}}{1 - e^{-\mu_n^2 Fo_{01}}} + \frac{1 - e^{-m\mu_n^2 Fo_{02}}}{1 - e^{-\mu_n^2 Fo_{02}}} \right] e^{-\mu_n^2 Fo_{02}}}{\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) \frac{e^{-\mu_n^2 Fo_{02}}}{1 - e^{-\mu_n^2 Fo_{02}}}} \quad (3-51)$$

Ограничиваясь первыми членами сумм (3-51), получаем:

$$\Theta_{f_2} = 1 - \left( 1 - \frac{1 - e^{-\mu_1^2 Fo_{02}}}{1 - e^{-\mu_1^2 Fo_{01}}} \right) e^{-m\mu_1^2 Fo_{02}} \quad (3-52)$$

Тогда время выхода  $\tau$  на квазистационарный режим, соответствующий частоте  $f_2$ , равно:

$$\tau = - \frac{R^2}{\mu_1^2 a} \ln \frac{1 - \Theta_{f_2}}{1 - \frac{1 - e^{-\mu_1^2 Fo_{02}}}{1 - e^{-\mu_1^2 Fo_{01}}}} \quad (3-53)$$

При больших частотах следования импульсов на качки

$$\tau = - \frac{R^2}{\mu_1^2 a} \ln \frac{1 - \Theta_{f_2}}{1 - \frac{f_1}{f_2}} \quad (3-54)$$

На рис. 3-10 приведена зависимость  $\Theta_{f_2}(mFo_{02})$  при значении  $Bi = 0,5$  для центра стержня. Расчет производился по формуле (3-51) с учетом первых десяти членов ряда (точки на рисунке) и по приближенному соотношению (3-52) (сплошные линии). При расчетах  $Fo_{02}$  принято равным  $10^{-2}$ . Из данных рис. 3-10 следует, что для оценки времени  $\tau$  с удовлетворительной степенью

точности можно пользоваться соотношением (3-53). Численный расчет  $\Theta_{j2}(mFo_{ц2})$  показывает, что боковая поверхность выходит на квазистационарный режим быстрее, чем центральная часть стержня. Однако при малых значениях  $Bi \leq 1$  эта разница незначительна.

Перейдем сейчас к рассмотрению уровня нагрева активных элементов частотных ОКГ в квазистационарном режиме. Приведенные выше соотношения позволяют провести численные оценки нагрева. В качестве примера остановимся ниже на рассмотрении нагрева активных элементов из рубина и стекла. В табл. 3-2 и

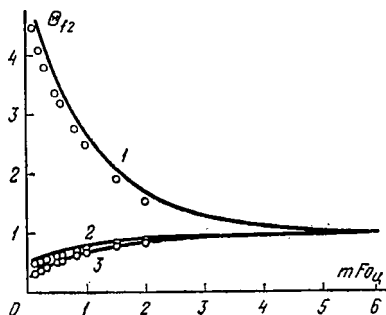


Рис. 3-10. Зависимость  $\Theta_{j2}$  от  $mFo_{ц2}$  при  $Fo_{ц1} = 5 \cdot 10^{-2}$  (1),  $5 \cdot 10^{-3}$  (2) и  $10^{-3}$  (3).

3-3 приведены результаты расчета в соответствии с (3-43) относительной температуры  $\Theta_{\infty}(0, Fo_{ц})$  на оси стержня в квазистационарном режиме в зависимости от частоты следования импульсов накачки  $f$ . Расчет произ-

Таблица 3-2

**Относительный нагрев рубиновых стержней  $\Theta_{\infty}(0, Fo_{ц})$  в квазистационарном режиме**

| $f, \text{гц}$ | $R=0,2 \text{ см}$ |         | $R=0,4 \text{ см}$ |         |
|----------------|--------------------|---------|--------------------|---------|
|                | $Bi=1$             | $Bi=10$ | $Bi=2$             | $Bi=20$ |
| 5              | 1,8                | 1,1     | 3,6                | 2,1     |
| 10             | 2,9                | 1,4     | 6,6                | 3,7     |
| 20             | 5,2                | 2,3     | 12,5               | 7,0     |
| 30             | 7,5                | 3,2     | 18,6               | 10,4    |
| 40             | 9,7                | 4,1     | 24,4               | 13,6    |
| 50             | 12,0               | 5,0     | 30,4               | 16,9    |
| 100            | 23,5               | 9,4     | 60,1               | 33,3    |

водился с учетом 30 членов ряда (3-43) на ЦВМ «Минск-2». Как следует из табл. 3-2, при частотах следования импульсов 5 и 100 гц нагрев рубинового стержня радиусом  $R=0,2 \text{ см}$  ( $Bi=1$ ) превышает нагрев в режиме одиночных импульсов в 1,8 и 23,5 раза соот-

Относительный нагрев стеклянных стержней  $\Theta_{\infty}(0, Fo_{\Pi})$  в квазистационарном режиме

| $f, \text{гц}$ | $R=0,1 \text{ см}$ |          | $R=0,2 \text{ см}$ |          | $R=0,26 \text{ см}$ |          | $R=0,4 \text{ см}$ |          |
|----------------|--------------------|----------|--------------------|----------|---------------------|----------|--------------------|----------|
|                | $Bi=60$            | $Bi=100$ | $Bi=60$            | $Bi=100$ | $Bi=60$             | $Bi=100$ | $Bi=60$            | $Bi=100$ |
| 5              | 3,6                | 3,6      | 13,3               | 13,1     | 21,9                | 21,6     | 52,1               | 51,4     |
| 10             | 6,9                | 6,8      | 26,2               | 25,9     | 43,5                | 42,9     | 104                | 102      |
| 20             | 13,3               | 13,1     | 52,1               | 51,4     | 86,5                | 85,4     | 207                | 204      |
| 30             | 19,9               | 19,7     | 78,7               | 77,6     | 131                 | 129      | 314                | 309      |
| 40             | 26,2               | 25,9     | 104                | 102      | 173                 | 170      | 414                | 408      |
| 50             | 32,7               | 32,3     | 130                | 128      | 216                 | 218      | 517                | 510      |
| 100            | 65,0               | 64,1     | 259                | 255      | 431                 | 425      | 1034               | 1020     |

ответственно. При увеличении радиуса стержня вдвое при неизменном значении коэффициента теплообмена нагрев возрастает в 2 ( $f=5 \text{ гц}$ ) и в 2,6 раза ( $f=100 \text{ гц}$ ) по сравнению с нагревом стержня радиусом в 0,2 см.

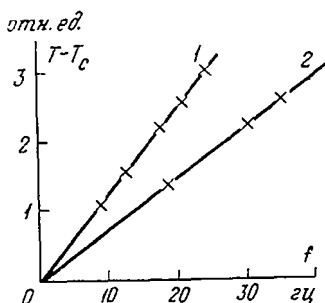


Рис. 3-11. Зависимость относительного нагрева активных элементов из стекла от частоты следования импульсов при энергии накачки  $E_{\text{нак}}=29 \text{ Дж}$ . 1 — стекло КГСС-7; 2 — стекло КГСС-3.

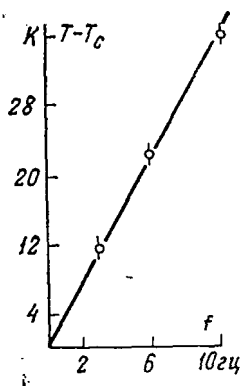


Рис. 3-12. Зависимость температуры рубина в квазистационарном режиме от частоты следования импульсов.

Нагрев стеклянных стержней вследствие низкого значения коэффициента теплопроводности значительно больше, чем рубиновых. Так, для  $R=0,2 \text{ см}$  величины  $\Theta_{\infty}(0, Fo_{\Pi})$  составляют около 13 ( $f=5 \text{ гц}$ ) и около 26 ( $f=10 \text{ гц}$ ). Как следует из данных табл. 3-2 и 3-3, с увеличением частоты следования импульсов накачки нагрев можно приближенно считать пропорциональным  $f$ .

Расчетные зависимости соответствуют экспериментальным данным по нагреву активных элементов частотных ОКГ [Л. 3-11, 3-29, 3-35—3-37]. На рис. 3-11 приведена экспериментально определенная зависимость нагрева в центре стеклянных стержней от частоты следования импульсов [Л. 3-29]. Нагрев определялся по величине возникающих термических деформаций в стержнях из стекла КГСС-3 и КГСС-7 при водяном охлаждении. Частота следования импульсов накачки изменялась от 5 до 35 гц. Аналогичная зависимость (рис. 3-12) получена в работе [Л. 3-11] для рубиновых стержней.

Линейная зависимость нагрева активных элементов от частоты импульсов накачки  $f$  является следствием того, что при увеличении  $f$  величина нагрева и распределение температуры стремятся к стационарному, определяемому соотношением

$$T(r_1) = T_c + \frac{qR^2}{4\lambda} \left[ 1 + \frac{2}{Bi} - r_1^2 \right], \quad (3-55)$$

где  $q$  — мощность непрерывного тепловыделения.

Оценим точность расчета нагрева активных элементов в приближении непрерывного тепловыделения. Для

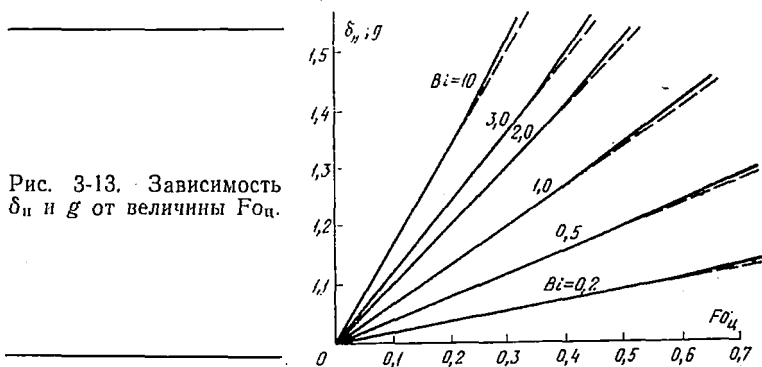


Рис. 3-13. Зависимость  $\delta_n$  и  $g$  от величины  $Fo_{ц}$ .

этого рассмотрим отношение  $\delta_n$  нагрева в центре стержня к концу импульса накачки (3-43) к величине

$$T(r_1) - T_c = \frac{\Delta T_{нмп}}{4Fo_{ц}} \left[ 1 + \frac{2}{Bi} - r_1^2 \right] \quad (3-56)$$

при значении  $r_1=0$ . Величина этого отношения больше 1 и зависит от значений  $Bi$  и  $Fo_{ц}$ . Зависимость  $\delta_n$  при различных значениях  $Bi$  приведена на рис. 3-13

(сплошные линии). При заданном значении  $\bar{F}_{0ц}$  величина  $\delta_n$  возрастает с увеличением  $Bi$ , причем этот рост наиболее сильно выражен при больших значениях  $F_{0ц}$  и малых значениях  $Bi$ . Так, например, при  $F_{0ц}=0,1$  с увеличением  $Bi$  от 0,2 до 100 величина  $\delta_n$  возрастает от 1,02 до 1,2, а при  $F_{0ц}=0,5$  — от 1,09 до 2,0. При постоянном значении  $Bi$  с ростом частоты следования импульсов (уменьшением  $F_{0ц}$ )  $\delta_n$  уменьшается практически линейно до 1. При  $F_{0ц}=10^{-2}$  величина  $\delta_n$  при любых значениях  $Bi$  не превышает 1,02, т. е. точность расчета нагрева активных элементов по приближенной формуле не ниже 2%.

На рис. 3-13 штриховыми линиями приведена также следующая зависимость:

$$g = 1 + \frac{2F_{0ц}}{1 + \frac{2}{Bi}}. \quad (3-57)$$

При малых значениях  $F_{0ц}$  значения  $\delta_n$  и  $g$  совпадают. Поэтому величина нагрева при больших частотах  $f$  определяется следующим образом:

$$T_{\infty}(0, F_{0ц}) = T_c + \frac{\Delta T_{\text{нмп}}}{4F_{0ц}} \left(1 + \frac{2}{Bi}\right) + \frac{\Delta T_{\text{нмп}}}{2}. \quad (3-58)$$

Соотношение (3-58) можно формально получить из (3-43). Разлагая экспоненту (3-43) в ряд и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, имеем:

$$\begin{aligned} \theta_{\infty}(0, F_{0ц}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \left(1 + \frac{\mu_n^2 F_{0ц}}{2}\right)}{\mu_n^2 F_{0ц}} = \\ &= \frac{1}{4F_{0ц}} \left(1 + \frac{2}{Bi}\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3-59)$$

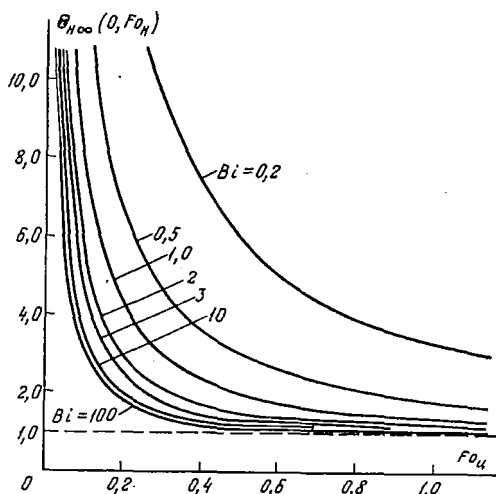
Как следует из выражений (3-58), (3-59), при увеличении частоты следования импульсов  $f$  (уменьшения  $F_{0ц}$ ) величина нагрева стремится к значению, определяемому формулой (3-56).

Оценим для конкретных случаев частоты следования импульсов, когда расхождение между значениями нагрева, рассчитанными по формулам (3-56) и (3-43), составляет 5%. Для стержней радиусом  $R=0,35$  см получаем следующие значения частот: 8,6 гц ( $Bi=0,5$ ); 14,7 гц ( $Bi=1$ ); 22 гц ( $Bi=2$ ) для рубина и около 1,3 гц

( $Bi = 10 \div 100$ ) для стекла. Величина нагрева в этом случае составляет  $10,5 \Delta T_{\text{имп}}$ . При увеличении частоты следования импульсов разность меньше 5% и уменьшается линейно с частотой, при этом величина нагрева возрастает.

Величина относительного нагрева в квазистационарном тепловом режиме  $\Theta_{\infty}(0, Fo_{\text{ц}})$  иллюстрируется кри-

Рис. 3-14. Зависимость относительного нагрева в квазистационарном режиме от величины  $Fo_{\text{ц}}$ .



выми, приведенными на рис. 3-14. Численный расчет проводился на основании формулы (3-43).

Результаты расчета отношения усредненных по объему температур в соответствии с (3-43) и (3-56) даны на рис. 3-15 [Л. 3-48]. Каждая кривая делит плоскость  $[Bi, Fo_{\text{ц}}]$  на две части. Справа находится область, где ошибка в процентах в расчетах среднеобъемной температуры в соответствии с (3-56) превосходит указанную на кривой, слева — ошибки меньше указанных.

Таким образом, в квазистационарном тепловом режиме при больших частотах следования импульсов накачки распределение температуры по сечению цилиндрического стержня параболическое и не зависит от интенсивности теплообмена с охлаждающей средой. Относительный перепад температуры между центром и боковой поверхностью равен [Л. 3-38]:

$$\Delta \theta_{m \rightarrow \infty} = \frac{1}{4Fo_{\text{ц}}} . \quad (3-60)$$



При малых частотах распределение температуры носит более сложный характер и зависит от интенсивности теплообмена. В этом случае расчет нагрева необходимо проводить по формулам (3-43), (3-44). В [Л. 3-38] вычислены изменения перепада температур между центром и боковой поверхностью активного элемента в пределах цикла в квазистационарном режиме в зависимости от  $Fo_{\Sigma}$  для различных значений критерия Био. На рис. 3-16 приведены результаты расчета величины  $\Delta\theta_{0\infty}(Fo_0)$  (а), максимального перепада температур  $\Delta\theta_{0\infty}^M$  (б). Пунктирная кривая соответствует  $\Delta\theta_{0\infty}$

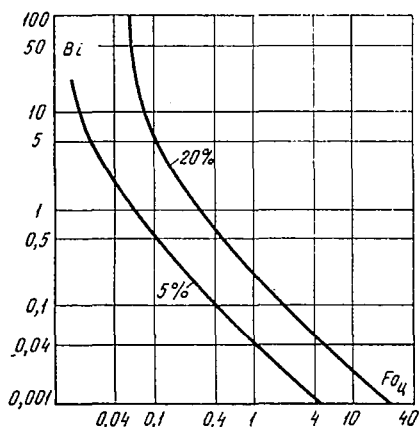


Рис. 3-15. Погрешность определения нагрева активных элементов в приближении непрерывного тепловыделения.

(3-60). При больших значениях  $Fo_{\Sigma}$  (малых  $f$ ), как следует из данных рис. 3-16,б величина  $\Delta\theta_{0\infty}$  и  $\Delta\theta_{0\infty}^M$  зави-

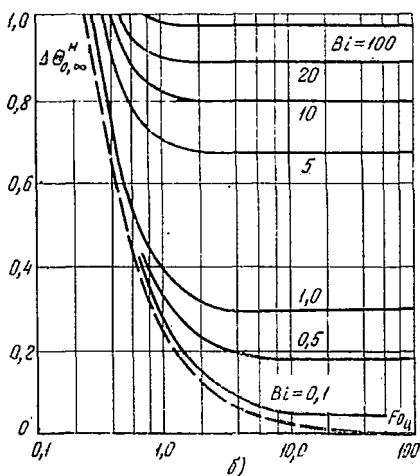
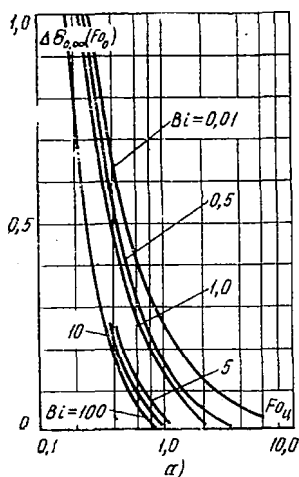


Рис. 3-16. Относительный перепад температуры между осью и боковой поверхностью.

сит от числа Био. Максимальный перепад может существенно превышать величину  $\Delta\Theta_{\infty}$ . С увеличением частоты следования импульсов перепад температуры стремится к величине  $\Delta\Theta_{\infty}$  (3-60), не зависящей от Био.

Как указывалось выше, при малых значениях  $Bi \ll 1$  перепад температуры по сечению активного элемента значительно меньше усредненного нагрева. Поэтому при адиабатическом нагреве за импульс накачки длительностью  $\tau_n \ll \tau_0$  расчет теплового режима активных элементов, работающих с заданной частотой, сводится к последовательному интегрированию уравнения (3-17) с начальным условием

$$T_{om}(0) = T_{om-1} + \frac{q\tau_n}{c\rho}. \quad (3-61)$$

Тогда

$$T_{nm}(t) = T_c + \frac{q\tau_n}{c\rho} \frac{1 - e^{-\frac{2\alpha(m-1)\tau_0}{c\rho R}}}{1 - e^{-\frac{2\alpha\tau_0}{c\rho R}}} e^{-\frac{2\alpha\tau_0}{c\rho R}} + \frac{\partial t}{c\rho}; \quad (3-62)$$

$$T_{om}(t) = T_c + \frac{q\tau_n}{c\rho} \frac{1 - e^{-\frac{2\alpha m\tau_0}{c\rho R}}}{1 - e^{-\frac{2\alpha\tau_0}{c\rho R}}} e^{-\frac{2\alpha t}{c\rho R}}. \quad (3-63)$$

Выражения (3-62) и (3-63) получены в предположении равномерного по объему тепловыделения. В случае радиальной зависимости  $q(r)$  соотношения (3-62) и (3-63) принимают вид:

$$T_{nm}(t) = T_c + \frac{q(r)t}{c\rho} + \frac{\bar{q}\tau_n}{c\rho} \times \\ \times \frac{1 - e^{-\frac{2\alpha(m-1)\tau_0}{c\rho R}}}{1 - e^{-\frac{2\alpha\tau_0}{c\rho R}}} e^{-\frac{2\alpha\tau_0}{c\rho R}}; \quad (3-64)$$

$$T_{om}(t) = T_c + \frac{\bar{q}\tau_n}{c\rho} \frac{1 - e^{-\frac{2\alpha m\tau_0}{c\rho R}}}{1 - e^{-\frac{2\alpha\tau_0}{c\rho R}}} e^{-\frac{2\alpha t}{c\rho R}}, \quad (3-65)$$

где  $\bar{q}$  — усредненная по объему стержня мощность тепловыделения во время импульса накачки. Выражение

(3-65) справедливо для значений  $t$ , больших времени выравнивания профиля температуры по сечению стержня вследствие теплопроводности. Как следует из (3-62) — (3-65), кинетика нагрева определяется коэффициентом теплообмена с охлаждающей средой, теплоемкостью вещества и радиусом стержня.

В квазистационарном режиме

$$T_{\infty}(t) = T_c + \frac{q(r)t}{c\rho} + \frac{\bar{q}\tau_n}{c\rho} \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\alpha\tau_0}{c\rho R}}}; \quad (3-66)$$

$$T_{\infty}(t) = T_c + \frac{\bar{q}\tau_n}{c\rho} \frac{e^{-\frac{2\alpha t}{c\rho R}}}{1 - e^{-\frac{2\alpha\tau_0}{c\rho R}}}. \quad (3-67)$$

Время выхода на квазистационарный режим равно:

$$\tau = -\frac{c\rho R}{2\alpha} \ln(1 - \theta). \quad (3-68)$$

Заметим, что выражение (3-68) можно непосредственно получить из (3-47), так как при  $Bi \ll 1$

$$\frac{R^2}{\mu_1^2 a} \approx \frac{c\rho R}{2\alpha}.$$

Зависимость относительной температуры

$$\theta_{\text{нм}}(Fo_{\text{н}}) = \frac{1 - e^{-\frac{2\alpha m\tau_0}{c\rho R}}}{1 - e^{-\frac{2\alpha\tau_0}{c\rho R}}} \quad (3-69)$$

от времени иллюстрируется данными табл. 3-4.

Численный расчет проводился для рубиновых стержней ( $c\rho = 3 \text{ Дж} \cdot \text{см}^{-3} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ ) радиусом  $R = 0,1; 0,2; 0,4; 0,6$  при воздушном охлаждении  $\alpha = 9 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ . Время выхода на квазистационарный режим на уровне  $\theta = 0,9$  для рассматриваемого случая равно соответственно 38, 77, 153 и 230 сек.

Кинетика нагрева рубиновых стержней  
при воздушном охлаждении

| R, см | $\tau_0$ , сек | m   |     |     |      |      |      |          |
|-------|----------------|-----|-----|-----|------|------|------|----------|
|       |                | 3   | 5   | 10  | 25   | 50   | 100  | $\infty$ |
| 0,1   | 1              | 2,7 | 4,3 | 7,5 | 12,9 | 15,8 | 16,7 | 16,7     |
|       | 10             | 1,9 | 2,1 | 2,2 | 2,2  | 2,2  | 2,2  | 2,2      |
| 0,2   | 1              | 2,9 | 4,7 | 8,8 | 17,8 | 26,2 | 32,1 | 33,8     |
|       | 10             | 2,3 | 3,0 | 3,7 | 3,9  | 3,9  | 3,9  | 3,9      |
| 0,4   | 5              | 2,8 | 4,3 | 7,3 | 11,7 | 13,5 | 13,8 | 13,8     |
|       | 10             | 2,6 | 3,8 | 5,8 | 7,0  | 7,1  | 7,2  | 7,2      |
|       | 30             | 2,0 | 2,5 | 2,7 | 2,8  | 2,8  | 2,8  | 2,8      |
| 0,6   | 5              | 2,9 | 4,6 | 8,1 | 14,8 | 19,0 | 20,7 | 20,7     |
|       | 10             | 2,7 | 4,1 | 6,6 | 9,6  | 10,5 | 10,5 | 10,5     |
|       | 30             | 2,3 | 2,8 | 3,7 | 3,9  | 3,9  | 3,9  | 3,9      |

Цилиндр в оболочке. Рассмотрим активный элемент цилиндрической формы, находящийся в прозрачной оболочке. Теплофизические характеристики ядра и оболочки предполагаются одинаковыми. Примером такого активного элемента является рубиновый стержень, помещенный в сапфировую оболочку (см. гл. 2).

Распределение температуры по сечению ядра радиусом  $r_0$  определяется следующим соотношением [Л. 3-27]:

$$T_{um}(r_1, Fo) = T_c + \frac{qR^2}{\lambda} \frac{r_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) \times \\ \times \frac{J_1\left(\mu_n \frac{r_0}{R}\right)}{J_1(\mu_n)} \{1 - f_{um} e^{-\mu_n^2 Fo}\}; \quad (3-70)$$

$$T_{om}(r_1, Fo) = T_c + \frac{qR^2}{\lambda} \frac{r_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) \times \\ \times \frac{J_1\left(\mu_n \frac{r_0}{R}\right)}{J_1(\mu_n)} f_{om} e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (3-71)$$

Здесь  $Fo = at/R^2$ ;  $r_1 = r/R$ , где  $R$  — внешний радиус оболочки;  $A_n$ ,  $f_{um}$ ,  $f_{om}$  определяются соотношениями (3-2), (3-37), (3-38).

К концу  $m$ -го периода накачки и  $m$ -го периода охлаждения

$$T_{um}(r_1, Fo_u) = T_c + \frac{qR^2}{\lambda} \frac{r_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) \times \\ \times \frac{J_1\left(\mu_n \frac{r_0}{R}\right)}{J_1(\mu_n)} (1 - e^{-\mu_n^2 Fo_u}) f_m; \quad (3-72)$$

$$T_{om}(r_1, Fo_o) = T_c + \frac{qR^2}{\lambda} \frac{r_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) \times \\ \times \frac{J_1\left(\mu_n \frac{r_0}{R}\right)}{J_1(\mu_n)} (1 - e^{-\mu_n^2 Fo_u}) f_m e^{-\mu_n^2 Fo_o}. \quad (3-73)$$

При адиабатическом нагреве за импульс накачки имеем:

$$T_{um}(r_1, Fo_u) = T_c + \frac{q\tau_u}{c\rho} \frac{r_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) \times \\ \times \frac{J_1\left(\mu_n \frac{r_0}{R}\right)}{J_1(\mu_n)} f_m; \quad (3-74)$$

$$T_{om}(r_1, Fo_o) = T_c + \frac{q\tau_u}{c\rho} \frac{r_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\mu_n r_1) \times \\ \times \frac{J_1\left(\mu_n \frac{r_0}{R}\right)}{J_1(\mu_n)} f_m e^{-\mu_n^2 Fo_o}. \quad (3-75)$$

Нетрудно заметить, что приведенные выше соотношения описывают тепловой режим цилиндрического стержня без оболочки, радиус которого  $R = r_0$ .

Влияние оболочки на нагрев активного элемента можно оценить, рассматривая изменение температуры  $\delta T_{om}$  при помещении стержня в оболочку. При  $t = \tau_o$

$$\delta T_{om} = \frac{q\tau_u}{c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B'_n J_0\left(\mu'_n \frac{r}{r_0}\right) f'_m e^{-\mu_n'^2 Fo'_o} - \right. \\ \left. - \frac{r_0}{R} B_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \frac{J_1\left(\mu_n \frac{r_0}{R}\right)}{J_1(\mu_n)} f_m e^{-\mu_n^2 Fo_o} \right\}. \quad (3-76)$$

В (3-76)  $\mu'_n$ ,  $B'_n$ ,  $f'_m$ ,  $Fo'_0$  определяются соответствующими соотношениями для  $\mu_n$ ,  $B_n$ ,  $f_m$ ,  $Fo$  при  $R=r_0$ .

Численный анализ соотношения (3-76) показывает, что применение охлаждающей оболочки может быть эффективным при малых значениях  $Bi$  (близко к 0,1) в случае больших частот следования импульсов накачки.

Влияние оболочки на нагрев проиллюстрировано на примере рубинового стержня с сапфировой оболочкой.

На рис. 3-17 (кривая 1) приведено отношение нагревов в квазистационарном режиме при  $t=\tau_0$  на оси рубинового стержня в оболочке и без оболочки [Л. 3-27]. Расчет проводился при следующих значениях параметров:  $r_0=0,325$  см,  $\lambda=0,3$  Вт·см<sup>-1</sup>·°C<sup>-1</sup>,  $\alpha=0,5$  Вт·см<sup>-2</sup>·°C;  $c\rho=3,6$  Дж·см<sup>-3</sup>; частота следования импульсов накачки 1 гц. Для сравнения на рис. 3-17 приведена также величина  $\delta$  при тех же значениях параметров в случае непрерывной накачки (кривая 2).

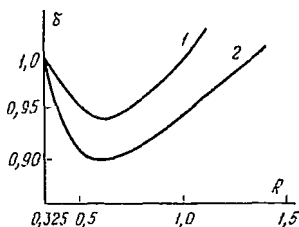


Рис. 3-17. Эффективность увеличения теплоотвода при введении оболочки.

Полый цилиндр. Для активного элемента в форме полого цилиндра распределение температуры (в предположении адиабатичности нагрева за импульс накачки) описывается следующим образом [Л. 3-49]:

$$T_{om}(r_1, Fo_0) = T_c + \sum_{n=1}^{\infty} E_n W_0(\mu_n r_1) \frac{1 - e^{-\mu_n^2 Fo_n}}{1 - e^{-\mu_n^2 Fo_0}} \times e^{-\mu_n^2 Fo_0}, \quad (3-77)$$

где  $\mu_n$  — корни уравнения

$$[Bi_1 J_0(\mu) + \mu J_1(\mu)][Bi_2 Y_0(k\mu) - k\mu Y_1(k\mu)] = [Bi_1 Y_0(\mu) + \mu Y_1(\mu)][Bi_2 J_0(k\mu) - k\mu J_1(k\mu)]; \quad (3-78)$$

$$Fo = at/R_1; \quad k = R/r_0; \quad Bi_1 = \alpha r_0/\lambda; \quad Bi_2 = \alpha R/\lambda;$$

$Y_0$  и  $Y_1$  — функции Бесселя второго рода;

$$W_0(\mu_n r_1) = -[Bi Y_0(\mu) + \mu Y_1(\mu)] \frac{J_0(\mu r_1)}{R} + [\mu J_1(\mu) + Bi J_0(\mu)] \frac{Y_0(\mu r_1)}{R}; \quad (3-79)$$

$E_n$  — коэффициенты разложения начального распределения температуры в ряд по функциям  $W_0(\mu_n r_1)$  [Л. 3-3].

Практическое использование соотношения (3-77) для расчета нагрева активных элементов возможно в конкретных случаях, когда известны корни характеристического уравнения (3-78). Рассмотрим частные случаи уравнения (3-77), которые с известной степенью идеализации могут быть полезны при анализе теплового режима активных элементов.

1. Активный элемент эффективно охлаждается по внешней и внутренней поверхностям ( $Bi_1 \rightarrow \infty$ ,  $Bi_2 \rightarrow \infty$ ). Граничные условия третьего рода переходят в граничные условия первого рода, уравнение (3-78) принимает вид:

$$J_0(\mu) Y_0(k\mu) - J_0(k\mu) Y_0(\mu) = 0. \quad (3-80)$$

Корни этого уравнения приведены в [Л. 3-3, 3-39].

2. Внешняя поверхность активного элемента теплоизолирована ( $Bi_2 \rightarrow 0$ ), внутренняя — интенсивно охлаждается ( $Bi_1 \rightarrow \infty$ ). Тогда уравнение (3-78) переходит в следующее:

$$J_0(\mu) Y_1(k\mu) - J_1(k\mu) Y_0(\mu) = 0. \quad (3-81)$$

Данные о корнях уравнения (3-81) приведены в работах [Л. 3-40—3-43].

3. Внутренняя поверхность теплоизолирована ( $Bi_1 \rightarrow \infty$ ), теплообмен с охлаждающей средой происходит на внешней поверхности. В работе [Л. 3-44] приведены значения корней, меньших 25 для  $Bi_2 = 0,05; 0,1; 0,25; 0,5; 1; 2; 5; 10; 50; 100$ .

4. В общем случае, когда теплообмен на внутренней и внешней поверхностях соответствует граничным условиям третьего рода, для нагрева активных элементов необходимо знать корни уравнения (3-77). В [Л. 3-40] приведены численные значения  $\mu_n$ , рассчитанные по методу, изложенному в [Л. 3-45], для  $k = 1,5; 2; 3; 4; 5$ ;  $Bi_1 = 1 \div 50$ ;  $Bi_2 = 1 \div 100$ .

### **3-3. ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛОТЫ НА ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЧАСТОТНЫХ ОКГ**

В предыдущем параграфе рассматривался тепловой режим активных элементов при однородном по объему тепловыделении. Однако вследствие неравно-

мерности распределения радиации накачки мощность источников тепловыделения также неравномерна. Характер распределения мощности тепловыделения определяется в основном теми же факторами, что и распределение радиации накачки [Л. 3-31, 3-46].

В данном параграфе рассматривается влияние неоднородности распределения источников тепла по сечению активного элемента цилиндрической формы при изотропной накачке, обеспечивающей осесимметричное тепловыделение, на температурные поля активных элементов частотных ОКГ [Л. 3-26, 3-29, 3-30, 3-46, 3-47].

Температурное поле активного элемента цилиндрической формы в  $m$ -м периоде накачки и  $m$ -м периоде охлаждения при произвольной радиальной зависимости мощности тепловыделения  $q(r)$  определяется следующими соотношениями:

$$T_{nm}(r_1, Fo) = T_c + \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r_1)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \times \\ \times (1 - f_{nm} e^{-\mu_n^2 Fo}) q_n; \quad (3-82)$$

$$T_{om}(r_1, Fo) = T_c + \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r_1)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} f_{om} q_n e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3-83)$$

где

$$q_n = \int_0^R r J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \left( \frac{1}{\lambda} \int_r^R r \bar{q} dr + \frac{R}{\alpha} \bar{q}^R \right) dr. \quad (3-84)$$

Выражения (3-82) и (3-83) преобразуем к следующему виду:

$$T_{nm}(r_1, Fo) = T_{nm}(r_1, Fo, \bar{q}^R) + \\ + \Delta T_{nm} = T_c + \frac{\bar{q}^R R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) \times \\ \times (1 - f_{nm} e^{-\mu_n^2 Fo}) + \frac{1}{R^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r_1)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \times \\ \times (1 - f_{nm} e^{-\mu_n^2 Fo}) q'_n; \quad (3-85)$$



$$\begin{aligned}
T_{om}(r_1, Fo) &= T_{om}(r_1, Fo, \bar{q}^R) + \Delta T_{om} = \\
&= T_c + \frac{\bar{q}^R R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r_1) f_{om} e^{-\mu_n^2 Fo} + \\
&+ \frac{1}{R^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r_1)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} f_{om} q'_n e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3-86)
\end{aligned}$$

где

$$q'_n = \int_0^R r J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \int_r^R r' (\bar{q}^{r'} - \bar{q}^R) dr' dr.$$

Первые слагаемые в (3-85) и (3-86) описывают нагрев в предположении равномерного тепловыделения с усредненной по объему мощностью  $\bar{q}^R$ . Вторые слагаемые учитывают влияние неоднородности распределения источников тепловыделения.

Для оценки влияния распределения  $q(r)$  на температурное поле рабочего вещества рассмотрим параболическое распределение

$$q(r_1) = q(0) \left[ 1 + \frac{1-b}{b} r_1^2 \right], \quad (3-87)$$

где  $q(0)$  — мощность тепловыделения в центре стержня;  $b = q(0)/q(1)$ .

Неоднородность распределения источников тепловыделения по сечению активного элемента не описывается параболическим законом. Однако приближенное аналитическое задание  $q(r_1)$  позволяет оценить степень влияния радиального распределения мощности тепловыделения на температурные поля в зависимости от интенсивности теплообмена.

Результаты численного расчета отношения  $\delta = \frac{b+1}{2(b-1)} \times$   
 $\times \frac{\Delta T_{\text{зм}}(0, 0)}{T_{\text{зм}}(0, 0, \bar{q}^R) - T_c}$  приведены в табл. 3-5 [Л. 3-46]. Расчет проводился для стержня радиусом  $R = 0,4$  см;  $a = 4 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>·сек<sup>-1</sup>;  $Bi = 0,2 \div 20$ ;  $\tau_{\text{ц}} = 1$  сек. Вследствие адиабатичности нагрева в течение первых импульсов разница между истинной температурой и рассчитанной при усредненном тепловыделении будет значительной. С увеличением времени работы генератора включение процесса теплопроводности приводит к уменьшению

Зависимость  $\delta$  от  $Bi$  и  $m$  при параболическом распределении мощности тепловыделения

| $Bi$ | $m$  |      |      |      |      |      |                |
|------|------|------|------|------|------|------|----------------|
|      | 3    | 5    | 10   | 25   | 50   | 100  | $\infty$       |
| 0,2  | 0,40 | 0,32 | 0,19 | 0,09 | 0,06 | 0,04 | 0,03<br>(0,02) |
| 2    | 0,40 | 0,32 | 0,22 | 0,15 | 0,14 | 0,13 | 0,13<br>(0,12) |
| 10   | 0,40 | 0,33 | 0,27 | 0,23 | 0,22 | 0,22 | 0,22<br>(0,21) |
| 20   | 0,40 | 0,36 | 0,29 | 0,28 | 0,27 | 0,27 | 0,27<br>(0,23) |

отношения  $\delta$ , которое достигает минимального значения в квазистационарном режиме. Величина  $\delta$  зависит от значения критерия Био. При малых значениях  $Bi$  возрастает роль процесса теплопроводности, приводящая к выравниванию по сечению профиля температуры. С увеличением критерия Био значение  $\delta$  возрастает, достигая величины 0,3 при  $Bi \rightarrow \infty$ .

Практически перепад тепловыделения между центром и боковой поверхностью не превышает  $b=3$ . Тогда ошибка в определении максимальной температуры, достигаемой в центре стержня, исходя из равномерного усредненного по объему тепловыделения достигает в квазистационарном режиме для рассматриваемого случая около 3% ( $Bi=0,2$ ) и около 27% ( $Bi=20$ ).

При большой частоте следования импульсов расчет температуры в квазистационарном режиме можно проводить в предположении квазинепрерывного тепловыделения. В этом случае при параболическом распределении источников тепловыделения (3-87)

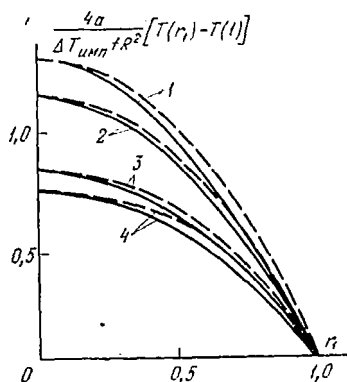
$$T(r_1) = T_c + \frac{\Delta \bar{T}_{\text{нмн}} f R^2}{4a} \left[ \frac{2}{Bi} + \frac{2b}{1+b} (1 - r_1^2) + \frac{1-b}{2(1+b)} (1 - r_1^4) \right]; \quad (3-88)$$

$$\delta = \frac{1 - 2r_1^2 + r_1^4}{4 \left( 1 + \frac{2}{Bi} - r_1^2 \right)}, \quad (3-89)$$

где  $\Delta \bar{T}_{\text{имп}}$  — усредненный адиабатический нагрев стержня за импульс накачки.

В табл. 3-5 в скобках приведены значения  $\delta$  (3-89) для  $r_1=0$ , указывающие на достаточную точность приближенного расчета влияния неравномерности тепловыделения.

Профиль температурного поля в соответствии с (3-88) приведен на рис. 3-18 (сплошные линии) при  $b=5; 2;$



• Рис. 3-18. Температурное поле активного элемента цилиндрической формы.

1 —  $b=5$ ; 2 —  $b=0,2$ ; 3 —  $b=0,5$ ; 4 —  $b=0,33$ .

0,5; 0,33. Пунктирными линиями изображены температурные поля, описываемые выражением  $[T(0) - T(1)] \times (1 - r_1^2)$  при тех же значениях  $b$ . Из сопоставления приведенных кривых следует, что распределение температуры по радиусу стержня при неоднородном тепловыделении можно приближенно считать параболическим.

Как следует из (3-88) и (3-89), при  $b > 1$  нагрев в центре стержня больше, а при  $b < 1$  — меньше, чем в случае равномерного усредненного по объему тепловыделения. При удалении от

оси стержня влияние неоднородности уменьшается. Так, например, при  $Bi=2$   $\delta=0,12$  ( $r_1=0$ ),  $\delta=0,08$  ( $r_1=0,5$ ),  $\delta=0,04$  ( $r_1=0,7$ ). На боковой поверхности температура не зависит от характера распределения источников тепла и определяется усредненной по объему мощностью тепловыделения ( $\delta=0$ ).

С целью выяснения влияния реального распределения источников тепловыделения рассмотрим нагрев рубиновых стержней. В приближении квазистационарного тепловыделения распределение температуры по сечению стержня с учетом распределения мощности тепловыделения имеет вид:

$$\frac{T(r_1) - T_c}{\sigma u_m \tau_{\text{эф}}} = \frac{1}{\alpha} [Bi\beta_1(r_1, k_m R, Y) + \beta_2(k_m R, Y)];$$

(3-90)

$$\beta_1 = k_M R \left[ \int_0^1 \frac{dr_1}{r_1} \int_0^{r_1} H(r'_1) r'_1 dr'_1 - \int_0^1 \frac{dr'_1}{r'_1} \int_0^{r'_1} H(r''_1) r''_1 dr''_1 \right]; \quad (3-91)$$

$$\beta_2 = k_M R \int_0^1 H(r_1) r_1 dr_1. \quad (3-92)$$

При расчете нагрева воспользуемся распределением источников тепловыделения, определяемым неоднородностью распределения накачки (см. гл. 1).

На рис. 3-19 сплошными линиями изображены температурные поля, рассчитанные по формуле (3-90), штриховыми дано параболическое приближение, штрих-пунктирными — распределение температуры, соответствующее усредненной по объему мощности тепловыделения [Л. 3-46]. Расчет проводился для полированных стержней радиусом  $R = 0,31; 0,27; 0,2$  см при концентрации ионов хрома около 0,03%. Коэффициент теплообмена принимался равным  $3,8 \text{ вт} \times \text{см}^{-2} \cdot \text{C}^{-1}$ . Как следует из рис. 3-19, неоднородность распределения источников тепла приводит к максимальному увеличению нагрева в центре примерно на 20%. Характер распределения температуры по радиусу близок к параболическому.

Таким образом, влияние неоднородности распределения источников тепловыделения наиболее заметно при больших значениях числа Био в центральной области стержня. При реальных перепадах мощности тепловыделения максимальная величина  $\Delta T_{\text{н}} [T_{\text{н}}(\bar{q}^R) - T_c]$  не превышает 20—30%. Уменьшение  $Bi$  и увеличение  $m$  приводят к существенному снижению влияния неоднородности распределения  $q(r_1)$  на температурные поля.

Таким образом, влияние неоднородности распределения источников тепловыделения наиболее заметно при больших значениях числа Био в центральной области стержня. При реальных перепадах мощности тепловыделения максимальная величина  $\Delta T_{\text{н}} [T_{\text{н}}(\bar{q}^R) - T_c]$  не превышает 20—30%. Уменьшение  $Bi$  и увеличение  $m$  приводят к существенному снижению влияния неоднородности распределения  $q(r_1)$  на температурные поля.

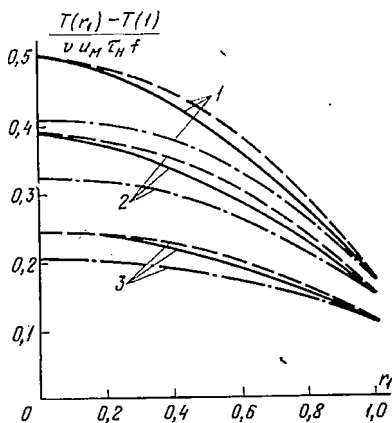


Рис. 3-19. Распределение температуры по сечению рубиновых стержней с радиусами  $R = 0,31$  см (1),  $0,27$  см (2),  $0,2$  см (3).

## ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Применение классических методов решения дифференциальных уравнений, формулирующих задачи о температурном поле в активных элементах ОКГ, ограничено кругом вопросов, когда активные тела выполнены в форме кругового цилиндра и пластины. Однако поиски путей повышения эффективности систем на базе ОКГ приводят к исследованию элементов с формой, отличной от указанных, например с поперечным сечением в виде кольца, прямоугольника, шестигранника, или конструкций, в которых эффективность охлаждения резко меняется по поверхности образца (контактное охлаждение). Очевидно, что методы получения точных решений становятся весьма сложными и позволяют анализировать особенности теплового режима при значительных затратах вычислительных средств. Если при этом учесть, что исходные данные, такие как функция тепловыделения, теплофизические характеристики активных материалов, коэффициент теплообмена, определены приближенно, то широкое применение точных решений иногда становится неоправданным. В этом случае их следует рассматривать как эталонные для оценки точности предлагаемых приближенных решений [Л. 4-1].

Ниже излагается приближенный метод решения уравнения теплопроводности, позволяющий рассмотреть температурный режим активных элементов ОКГ произвольной конфигурации.

### 4-1. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Период накачки. Пусть активное изотропное вещество объемом  $V_1$  ограничено поверхностями  $F_{1,k}$  ( $x_1, x_2, x_3$ ), на которых происходит теплообмен с охлаждающей средой с эффективностью, определяемой коэффициентами теплообмена  $\alpha_k$ . Внутри тела действуют источники тепла с мощностью  $q$  ( $x_1, x_2, x_3, Fo$ ). Тогда задача о температурном поле в активном теле произвольной формы в период импульса накачки формулиру-

ется с помощью следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} = \nabla^2 \Theta(x_1, x_2, x_3, Fo) + Ki(x_1, x_2, x_3, Fo); \quad (4-1)$$

$$\Theta(x_1, x_2, x_3, 0) = \Theta_0(x_1, x_2, x_3); \quad Fo = 0; \quad (4-2)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{F_{1,k}} \left[ \frac{\partial \Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial n_1} \right]_{w,k} dF_1 = \\ & = \int_{F_{1,k}} Bi[\Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)]_{w,k} dF_1 \quad (k = 1, 2 \dots). \end{aligned} \quad (4-3)$$

Здесь  $\Theta = \frac{T - T_c}{T_m - T_c}$  — относительная температура;  $T$  — абсолютная температура;  $T_c$  — температура охлаждающей среды;  $T_m$  — максимальная температура процесса. Как правило, величина  $T_m$  является исходной при анализе теплового режима активного элемента ОКГ. Введение ее в качестве масштаба при определении относительной температуры ограничивает пределы изменения температуры числовым интервалом  $[0; 1]$ . Это упрощает вычислительные операции и позволяет строить наглядные зависимости.  $Ki = qL^2/\lambda(T_m - T_c)$  — число Кирпичева, безразмерный комплекс, представляющий в расчетах действие внутренних источников тепла;  $L$  — характерный размер активного тела, используя приближенные методы.

В приведенной системе выражение (4-1) — уравнение теплопроводности, соотношение (4-2) — начальное условие задачи [если предполагается, что  $\Theta_0(x_1, x_2, x_3) = 0$ , то это означает, что до момента действия накачки активное тело имеет температуру, равную температуре охлаждающей среды], выражение (4-3) — граничные условия третьего рода (индекс  $w$  указывает на то, что значение параметра вычисляется на границе активное тело — охлаждающая среда). Решение системы (4-1) — (4-3) в общем случае связано с определенными трудностями. Тем не менее достаточно просто можно получить ее приближенное решение, используя вариационные методы. Впервые приближенные методы исследования теплового режима активных элементов были предложены и рассмотрены Л. И. Кудряшевым.

Следуя идеям метода Л. С. Лейбензона [Л. 4-2], проинтегрируем по объему уравнение (4-1). Применяя за-

тем теорему Остроградского, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial F_0} \int_{V_1} \theta(x_1, x_2, x_3, F_0) dV_1 = \sum_1^k \int_{F_{1,h}} \left[ \frac{\partial \theta(x_1, x_2, x_3, F_0)}{\partial n_1} \right]_{w,h} \times \\ \times dF_1 + K_i(F_0) \int_{V_1} K_i(x_1, x_2, x_3) dV_1. \quad (4-4)$$

Выражение (4-4) — интегральное условие теплопроводности (соотношение Лейбензона), распространенное на системы с внутренними источниками тепла. Однако практическая реализация соотношения (4-4) затруднена вычислением градиентов температурных полей. Указанная трудность устраняется, если (4-4) переписать с учетом граничных условий (4-3) [Л. 4-3]:

$$\frac{\partial}{\partial F_0} \int_{V_1} \theta(x_1, x_2, x_3, F_0) dV_1 = - \sum_1^k \int_{F_{1,h}} Bi_h[\theta(x_1, x_2, x_3, F_0)]_{w,h} \times \\ \times dF_1 + K_i(F_0) \int_{V_1} K_i(x_1, x_2, x_3) dV_1. \quad (4-5)$$

Выражение (4-5) назовем обобщенным интегральным соотношением теплопроводности, так как оно записано для тела с внутренними источниками тепла. С помощью соотношения (4-5) удастся приближенно получить интеграл уравнения (4-1) в конечной форме. Для этого прежде всего следует задать вид решения. Вид приближенного решения может определяться различными способами. Прежде всего его можно найти путем сравнения точного решения задачи, если таковое имеется, с приближенным. Указанный прием наиболее распространен [Л. 4-4]. Кроме того, приближенное решение можно отыскивать по результатам аппроксимации соответствующих экспериментальных данных (см., например, [Л. 4-5]). Наконец, можно прибегнуть к общему теоретическому анализу явления. При этом исходят из основных законов теплопроводности и на основе грубой схематизации явления получают вид приближенного решения [Л. 4-4]. Такой прием будет использован ниже при определении температурного поля в активных элементах ОКГ.

Температурное поле будем искать в форме

$$\theta(x_1, x_2, x_3, F_0) = C(F_0) D(x_1, x_2, x_3), \quad (4-6)$$

где  $D(x_1, x_2, x_3)$  — полином вида

$$D(x_1, x_2, x_3) = B_1 + B_2 \left( 1 - \prod_1^k F_{1,k} \right) + \\ + B_3 \left( 1 - \prod_1^k F_{1,k} \right)^2 + \dots \quad (4-7)$$

Коэффициенты этого полинома находятся из условия (4-3). Подставляя (4-6) в (4-4), приходим к дифференциальному уравнению относительно  $C(Fo)$

$$\frac{dC(Fo)}{dFo} + KC(Fo) = \frac{Ki(Fo) \int_{V_1} Ki(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1}, \quad (4-8)$$

где

$$K = \frac{\sum_1^k \int_{F_{1,k}} Bi_k [D(x_1, x_2, x_3)]_{w,k} dF_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1}. \quad (4-9)$$

Решение (4-8) запишем следующим образом:

$$C(Fo) = \left\{ C_0 + \frac{\int_{V_1} Ki(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{Fo} Ki(Fo) \exp(KFo) dFo \right\} \exp(-KFo). \quad (4-10)$$

Постоянную интегрирования  $C_0$  находим из условия минимума функционала, составленного по среднеквадратичным отклонениям искомой функции от величины  $\Theta_0(x_1, x_2, x_3)$  для момента времени  $Fo=0$

$$\delta \int_{V_1} [\Theta_0(x_1, x_2, x_3) - C_0 D(x_1, x_2, x_3)]^2 dV_1 = 0, \quad (4-11)$$



откуда (см. [Л. 4-2])

$$C_0 = \frac{\int_{V_1} \Theta_0(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1}. \quad (4-12)$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \Theta(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \left[ \frac{\int_{V_1} \Theta_0(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} + \right. \\ & \left. + \frac{\int_{V_1} Ki(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1} \int_0^{Fo} Ki(Fo) \exp(KFo) dFo \right] \times \\ & \times D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo). \end{aligned} \quad (4-13)$$

Если  $\Theta_0(x_1, x_2, x_3) = 0$ , а процесс нагрева протекает адиабатически, то средний скачок температуры в этом случае определяется по формуле

$$\bar{\Theta}(Fo) = \int_0^{Fo} Ki(Fo) \left[ \int_{V_1} Ki(x_1, x_2, x_3) dV_1 \right] dFo. \quad (4-14)$$

Если дополнительно  $Ki(Fo) = \text{const}$  и  $Ki(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ , то (4-13) переходит в известную формулу

$$\Theta = KiFo. \quad (4-15)$$

К концу периода накачки в общем случае в активном теле устанавливается температурное поле вида

$$\begin{aligned} \Theta_H(x_1, x_2, x_3, Fo_H) = & \left[ \frac{\int_{V_1} \Theta_0(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} + \right. \\ & \left. + \frac{\int_{V_1} Ki(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1} \int_0^{Fo} Ki(Fo) \exp(KFo) dFo \right] \times \\ & \times D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo). \end{aligned} \quad (4-16)$$

Период охлаждения. Температурное поле в процессе последующего охлаждения определяется решением следующей системы:

$$\frac{\partial \theta(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} = \nabla^2 \theta(x_1, x_2, x_3, Fo); \quad (4-17)$$

$$\theta(x_1, x_2, x_3, 0) = \theta_n(x_1, x_2, x_3, Fo_n); Fo = 0; \quad (4-18)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{F_{1,k}} \left[ \frac{\partial \theta(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial n_1} \right]_{w,k} dF_1 = \\ & = \int_{F_{1,k}} Bi_k [\theta(x_1, x_2, x_3, Fo)]_{w,k} dF_1 \quad (k=1, 2 \dots). \end{aligned} \quad (4-19)$$

Система (4-17) — (4-19) отличается от системы (4-1) — (4-3) отсутствием в уравнении теплопроводности (4-17) члена, представляющего действие внутренних источников тепла, и формулировкой начального условия (4-18). Начальное температурное поле в процессе охлаждения есть результат действия внутренних источников тепла и теплообмена с охлаждающей средой за время импульса накачки  $Fo_n$ . Теплообмен по-прежнему протекает при граничных условиях III рода.

Обобщенное интегральное соотношение для данной задачи имеет вид [в (4-5) следует положить  $Ki(Fo)$  и  $Ki(x_1, x_2, x_3)$  равными нулю]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Fo} \int_{V_1} \theta(x_1, x_2, x_3, Fo) dV_1 = \\ & = - \sum_1^k \int_{F_{1,k}} Bi_k [\theta(x_1, x_2, x_3, Fo)]_{w,k} dF_1. \end{aligned} \quad (4-20)$$

Как и ранее, температурное поле ищем в виде (4-6). Коэффициенты полинома  $D(x_1, x_2, x_3)$  будут одинаковыми как в период накачки, так и в период охлаждения, поскольку и в том и в другом случае они определяются при одинаковых граничных условиях.

Решение рассматриваемой системы определяется следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \Theta(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \left[ \frac{\int_{V_1} \Theta_0(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} + \right. \\ & \left. + \frac{\int_{V_1} Ki(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1} \frac{Fo_H}{\int_0^{Fo_H} Ki(Fo) \exp(KFo) dFo} \right] \times \\ & \times D(x_1, x_2, x_3) \exp[-K(Fo_H + Fo)]. \end{aligned} \quad (4-21)$$

В случае, когда нагрев предполагается адиабатическим, а плотность источников тепла однородной по объему, выражение (4-21) переходит в следующее:

$$\Theta(x_1, x_2, x_3, Fo) = Ki Fo_H D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo). \quad (4-22)$$

Частотный режим. Рассмотрим  $m$ -й цикл. Температурное поле для периода накачки определяется системой (4-1) — (4-3), в которой при формулировке начального условия (4-2) под функцией  $\Theta_0(x_1, x_2, x_3)$  следует понимать температурное поле, сформировавшееся в активном теле ОКГ к концу  $m-1$ -го периода охлаждения

$$\Theta_{nm}(x_1, x_2, x_3, 0) = \Theta_{0\,m-1}(x_1, x_2, x_3, Fo_0). \quad (4-23)$$

При этом полагаем, что в каждом периоде накачки полностью воспроизводятся энергетические характеристики предыдущего цикла

$$Ki_m(Fo) = Ki_{m-1}(Fo), \quad Ki_m(x_1, x_2, x_3) = Ki_{m-1}(x_1, x_2, x_3). \quad (4-24)$$

Тогда в  $m$ -м периоде накачки распределение температуры описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Theta_{nm}(x_1, x_2, x_3, Fo) = \\ = \left[ \frac{\int_{V_1} \Theta_{0\,m-1}(x_1, x_2, x_3, Fo) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} + \Delta\Theta_{nm}(Fo) \right] \times \\ \times D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo), \end{aligned} \quad (4-25)$$

где

$$\Delta\theta_{nm}(Fo) = \frac{\int_{V_1} K i_m(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1} \int_0^{Fo} K i_m(Fo) \exp(KFo) dFo. \quad (4-26)$$

При определении температурного поля в  $m$ -м периоде охлаждения следует учесть начальное условие в виде

$$\Theta_{om}(x_1, x_2, x_3, 0) = \Theta_{nm}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II}), \quad (4-27)$$

где  $\Theta_{nm}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II})$  определяется (4-25) при  $Fo = Fo_{II}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Theta_{om}(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \\ = & \frac{\int_{V_1} \Theta_{nm}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II}) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} \times \\ & \times D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo). \end{aligned} \quad (4-28)$$

Если теперь проследить за развитием температурного поля от первого до  $m$ -го цикла следования импульсов, то представится возможность в выражения (4-25) и (4-28) ввести исходные данные по начальному температурному распределению в стержне и нагреву за один период

$$\begin{aligned} \Theta_{nm}(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \\ = & \left\{ \frac{\int_{V_1} \Theta_0(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} \exp[-K(m-1)Fo_{II}] + \right. \\ & + \Delta\theta_{n1}(Fo) + \Delta\theta_{n1}(Fo_{II}) \times \\ & \left. \times \frac{1 - \exp[-K(m-1)Fo_{II}]}{\exp(KFo_{II}) - 1} \right\} D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo); \end{aligned} \quad (4-29)$$

$$\begin{aligned} \theta_{om}(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \left\{ \frac{\int_{V_1} \theta_0(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} \times \right. \\ & \times \exp[-K(m-1)Fo_n] + \Delta\theta_{ni}(Fo_n) \frac{1 - \exp(-KmFo_n)}{1 - \exp(-KFo_n)} \left. \right\} \times \\ & \times D(x_1, x_2, x_3) \exp[-K(Fo_n + Fo)]. \quad (4-30) \end{aligned}$$

При  $m \rightarrow \infty$  температурное поле в активном элементе ОКГ переходит в квазистационарный режим, характеризующийся тем, что в сходственные моменты времени в пределах любого периода работы ОКГ распределение температур в активном теле воспроизводится, причем влияние начального распределения температуры  $\theta_0(x_1, x_2, x_3)$  не проявляется. В этом случае соотношения (4-29), (4-30) принимают вид:

$$\begin{aligned} \theta_{\infty}(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \left[ \frac{\Delta\theta_{ni}(Fo_n)}{\exp(KFo_n) - 1} + \Delta\theta_{ni}(Fo) \right] \times \\ & \times D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo); \quad (4-31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{\infty}(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \frac{\Delta\theta_{ni}(Fo_n)}{1 - \exp(-KFo_n)} D(x_1, x_2, x_3) \times \\ & \times \exp[-K(Fo_n + Fo)]. \quad (4-32) \end{aligned}$$

Режим посылки импульсов сериями. Только что изложенное обобщим на режим посылки импульсов сериями. Температурное поле в  $i$  серии следования импульсов определяется выражениями (4-29) и (4-30). В последующей паузе для определения температуры воспользуемся выражением (4-21)

$$\begin{aligned} \theta_{ni}(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \left[ \frac{\int_{V_1} \theta_0(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} \exp(-KnFo_n) + \right. \\ & + \Delta\theta_{ni}(Fo_n) \frac{1 - \exp(-KnFo_n)}{\exp(KFo_n) - 1} \left. \right] \times \\ & \times D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo). \quad (4-33) \end{aligned}$$

К моменту начала II серии исходное температурное поле определяется выражением (4-33) для момента времени  $Fo = Fo_{II}$

$$\theta_{II}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II}) = \frac{\int_{V_1} \theta_0(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} \times \\ \times D(x_1, x_2, x_3) \exp(-K Fo_c) + \varphi D(x_1, x_2, x_3), \quad (4-34)$$

где

$$\varphi = \Delta \theta_{II}(Fo_{II}) \frac{1 - \exp(-Kn Fo_{II})}{\exp(K Fo_{II}) - 1} \exp(-K Fo_{II}); \quad (4-35)$$

$Fo_{II} = a\tau_{II}/L^2$  — число Фурье, соответствующее длительности паузы после окончания  $n$ -го цикла в серии;  $Fo_c = nFo_{II} + Fo_{II}$  — число Фурье, соответствующее длительности одной серии.

Для произвольного  $i$ -го импульса накачки из II серии можно воспользоваться (4-29), положив  $\theta_0(x_1, x_2, x_3) = \theta_{II}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II})$ . Для конца паузы во II серии будем иметь:

$$\theta_{II}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II}) = \frac{\int_{V_1} \theta_0(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} \times \\ \times D(x_1, x_2, x_3) \exp(-2K Fo_c) + [1 + \exp(-K Fo_c)] \varphi D(x_1, x_2, x_3). \quad (4-36)$$

Аналогичным образом определим температурное поле в активном теле для конца  $m-1$ -й серии импульсов

$$\theta_{II\,m-1}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II}) = \frac{\int_{V_1} \theta_0(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} D(x_1, x_2, x_3) \times \\ \times \exp[-K(m-1)Fo_c] + \frac{1 - \exp[-K(m-1)Fo_c]}{1 - \exp(-K Fo_c)} \varphi D(x_1, x_2, x_3). \quad (4-37)$$

По-прежнему для  $i$ -го цикла из  $m$ -й серии температурное поле в активном теле ОКГ можно найти из выражений (4-29) и (4-30), положив в них  $\theta_0(x_1, x_2, x_3) = \theta_{II\,m-1}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II})$ .

Как и в частотном режиме посылки импульсов, температурное поле в рассматриваемом случае стремится к квазистационарному режиму при  $m \rightarrow \infty$ . Расчетные формулы, описывающие квазистационарный тепловой режим, следующие:

исходное температурное поле перед началом серии

$$\theta_{\infty}(x_1, x_2, x_3, Fo_n) = \frac{\varphi D(x_1, x_2, x_3)}{1 - \exp(-KFo_n)}; \quad (4-38)$$

температурное поле в процессе  $i$ -го периода накачки

$$\begin{aligned} \theta_{\infty, i}(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \left\{ \frac{\varphi \exp[-K(i-1)Fo_n]}{1 - \exp(-KFo_n)} + \Delta\theta_{\text{н}}(Fo_n) \times \right. \\ & \times \frac{1 - \exp[-K(i-1)Fo_n]}{\exp(KFo_n) - 1} + \Delta\theta_{\text{н}}(Fo) \left. \right\} \times \\ & \times D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo); \end{aligned} \quad (4-39)$$

температурное поле в процессе  $i$ -го периода охлаждения

$$\begin{aligned} \theta_{\infty, i}(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \left\{ \frac{\varphi \exp[-K(i-1)Fo_n]}{1 - \exp(-KFo_n)} + \Delta\theta_{\text{н}}(Fo_n) \times \right. \\ & \times \frac{1 - \exp(-KiFo_n)}{1 - \exp(-KFo_n)} \left. \right\} D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo); \end{aligned} \quad (4-40)$$

температурное поле в период паузы

$$\begin{aligned} \theta_{\infty}(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \left[ \frac{\varphi \exp(-KiFo_n)}{1 - \exp(-KFo_n)} + \Delta\theta_{\text{н}}(Fo_n) \times \right. \\ & \times \frac{1 - \exp(-KiFo_n)}{\exp(KFo_n) - 1} \left. \right] D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo). \end{aligned} \quad (4-41)$$

Таким образом, как и в случае частотного режима, квазистационарное распределение температуры характеризуется тем, что в сходственные моменты времени температурное поле в активном элементе в любой последующей серии воспроизводится по профилю и уровню величин.

## 4-2. КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР

Температурный режим активного элемента в форме кругового цилиндра при постоянстве теплофизических свойств вещества подробно рассматривался в гл. 3. Анализируемые в гл. 3 соотношения представляют точное

решение задачи в рамках их математической постановки. Представляется целесообразным вернуться к данному вопросу, чтобы на примере кругового цилиндра проиллюстрировать эффективность изложенного приближенного метода, а также рассмотреть ряд конкретных вопросов, наиболее часто встречающихся в практике расчетов тепловых режимов активных элементов и систем охлаждения ОКГ.

**Период накачки.** При приближенном решении системы (4-1) — (4-3) для кругового цилиндра искомое распределение температуры будем отыскивать в виде

$$\Theta(r_1, Fo) = C(Fo) (1 - Br_1^2). \quad (4-42)$$

Следуя методике, изложенной в предыдущем параграфе, интегральное соотношение для рассматриваемого случая можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^1 \Theta(r_1, Fo) r_1 dr_1 = -Bi [\Theta(r_1, Fo)]_{r_1=1} + \\ + Ki(Fo) \int_0^1 Ki(r_1) dr_1. \end{aligned} \quad (4-43)$$

Подставив (4-42) в (4-43), получим дифференциальное уравнение относительно  $C(Fo)$ , решение которого имеет вид:

$$\begin{aligned} C(r_1, Fo) = \left\{ C_0 + \frac{K}{2B} \int_0^{Fo} \left[ \int_0^1 Ki(r_1) r_1 dr_1 \right] Ki(Fo) \times \right. \\ \left. \times \exp(K Fo) dFo \right\} (1 - Br_1^2) \exp(-K Fo). \end{aligned} \quad (4-44)$$

Неизвестные коэффициенты  $B$  и  $K$  определяются из граничного условия (4-3), а постоянная интегрирования  $C_0$  находится из условия минимума функционала, составленного по среднеквадратичным отклонениям искомой функции (4-42) от начального распределения (для момента времени  $Fo=0$ ) [Л. 4-6, 4-7]:

$$\begin{aligned} B = \frac{Bi}{2 + Bi}; \quad K = \frac{8Bi}{4 + Bi}; \\ C_0 = \frac{2 \int_0^1 \Theta_0(r_1) (1 - Br_1^2) r_1 dr_1}{1 - B + \frac{B^2}{3}}. \end{aligned} \quad (4-45)$$



Коэффициенты для определения температурного поля в активном элементе в форме кругового цилиндра

| $Bi$     | $K$   | $B$   | $P$   |
|----------|-------|-------|-------|
| 0,01     | 0,020 | 0,005 | 1,003 |
| 0,04     | 0,079 | 0,020 | 1,01  |
| 0,1      | 0,19  | 0,048 | 1,02  |
| 0,5      | 0,89  | 0,20  | 1,11  |
| 1,0      | 1,60  | 0,33  | 1,18  |
| 5,0      | 4,44  | 0,71  | 1,41  |
| 10,0     | 5,71  | 0,83  | 1,47  |
| 20,0     | 6,67  | 0,91  | 1,49  |
| 50,0     | 7,41  | 0,96  | 1,50  |
| 100,0    | 7,69  | 0,98  | 1,50  |
| $\infty$ | 8,00  | 1,00  | 1,50  |

Численные значения  $B$  и  $K$  как функции числа  $Bi$  приведены в табл. 4-1. При начальном условии  $\Theta_0(r_1) = \Theta_0 = \text{const}$  постоянная  $C_0$  равна:

$$C_0 = \frac{1 - 0,5B}{1 - B + \frac{B^2}{3}} \Theta_0 = P \Theta_0. \quad (4-46)$$

В соотношении (4-44) отчетливо видна роль источников тепла в формировании температурного поля в активном теле в период накачки. Кроме того, по (4-44) можно достаточно просто проследить роль внешнего теплообмена во время накачки.

В соответствии с общепринятым среднеобъемная температура цилиндра определяется по формуле [Л. 4-7]

$$\bar{\Theta}(Fo) = 2 \int_0^{Fo} \left[ \int_0^1 Ki(r_1) r_1 dr_1 \right] Ki(Fo) \exp(KFo) dFo \times \\ \times \exp(-KFo). \quad (4-47)$$

При адиабатическом нагреве выражение (4-47) принимает вид:

$$\bar{\Theta}^{\text{ад}}(Fo) = 2 \int_0^{Fo} \left[ \int_0^1 Ki(r_1) r_1 dr_1 \right] Ki(Fo) dFo. \quad (4-48)$$

Введем в рассмотрение величину  $\delta_a$  по соотношению  $\bar{\Theta}(Fo) = \delta_a \bar{\Theta}^{\text{ад}}(Fo)$ . Величина  $\delta_a$  является корректирую-

щим множителем для результатов, полученных в предположении адиабатического нагрева. При накачке прямоугольным импульсом значения  $\delta_a$  с учетом соотношений (4-47) и (4-48) можно вычислить по формуле

$$\delta_a = \frac{1 - \exp(-K Fo)}{K Fo} \quad (4-49)$$

Графическая интерпретация (4-49) представлена на рис. 4-1. Так, в области комнатных температур для

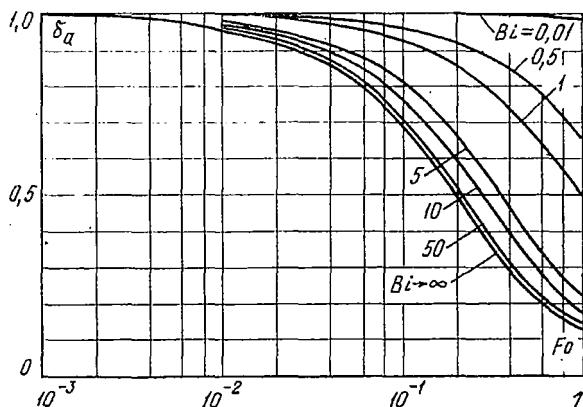


Рис. 4-1. Оценка влияния теплообмена на температурный режим активного элемента в период действия источников накачки.

рубина при  $Fo_n < 0,01$  и  $Bi < 2$  теплоотвод проявляется слабо ( $\delta_a \geq 0,98$ ), однако в ряде случаев поправка  $\delta_a$  может быть существенной.

В предположении прямоугольной формы импульса накачки  $Ki(Fo) = \text{const}$  и равномерной по объему плотности тепловыделения при  $\Theta_0(r_1) = 0$  соотношение (4-44) принимает следующий вид:

$$\Theta(r_1, Fo) = \frac{Ki}{4B} (1 - Br_1^2) [1 - \exp(-K Fo)]. \quad (4-50)$$

С увеличением длительности действия источников накачки распределение температуры стремится к стационарному

$$\Theta(r_1) = \frac{Ki}{4} \left[ 1 + \frac{2}{Bi} - r_1^2 \right]. \quad (4-51)$$

Особенности такого режима подробно рассмотрены при анализе нагрева активных элементов непрерывных

ОКГ. Здесь же отметим, что выражение (4-51) является точным решением стационарной задачи о температурном поле цилиндра с внутренними источниками тепла при граничных условиях третьего рода.

Период охлаждения. Интегральное соотношение (4-43) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^1 \theta_0(r_1, Fo) r_1 dr_1 = -Bi [\theta_0(r_1, Fo)]_{r_1=1} \quad (4-52)$$

С учетом (4-42) получаем:

$$\theta_0(r_1, Fo) = C_0 (1 - Br_1^2) \exp(-K Fo). \quad (4-53)$$

Так как вид решения и граничные условия для системы уравнений, описывающих период накачки и период охлаждения, совпадают, то коэффициенты в (4-53) по-прежнему определяются соотношениями (4-45). Расчетная формула для периода охлаждения имеет вид:

$$\theta_0(r_1, Fo) = \left\{ \frac{2 \int_0^1 \theta_0(r_1) (1 - Br_1^2) r_1 dr_1}{1 - B + \frac{B^2}{3}} + \right. \\ \left. + \Delta\theta_{\text{н}}(Fo_{\text{н}}) (1 - Br_1^2) \exp[-K(Fo_{\text{н}} + Fo)] \right\}, \quad (4-54)$$

где

$$\Delta\theta_{\text{н}}(Fo_{\text{н}}) = \frac{K}{2B} \int_0^{Fo_{\text{н}}} \left[ \int_0^1 Ki(r_1) r_1 dr_1 \right] Ki(Fo) \exp(K Fo) dFo. \quad (4-55)$$

Выражение (4-54) описывает общий случай, когда при определении  $\theta_{\text{н}}(r_1, Fo)$  по (4-44) при  $Fo = Fo_{\text{н}}$  на начальное распределение температуры  $\theta_0(r_1)$  ограничений не накладывалось. Запишем выражение (4-54) для ряда частных случаев

$$\text{при } \theta_0(r_1) = \theta_0 = \text{const} \\ \theta_0(r_1, Fo) = [P\theta_0 + \Delta\theta_{\text{н}}(Fo_{\text{н}})] (1 - Br_1^2) \exp K(Fo_{\text{н}} + Fo); \quad (4-56)$$

при  $\theta_0(r_1) = 0$

$$\theta_0(r_1, Fo) = \Delta\theta_{\text{н}}(Fo_{\text{н}})(1 - Br_1^2) \exp K(Fo_{\text{н}} + Fo); \quad (4-57)$$

при  $\theta_0(r_1) = 0$ ,  $Ki(r_1) = \text{const}$  и  $Ki(Fo) = \text{const}$

$$\theta_0(r_1, Fo) = \frac{Ki}{4B}(1 - Br_1^2)[1 - \exp(-KFo_{\text{н}})] \exp(-KFo). \quad (4-58)$$

Частотный режим. Обобщение полученных выражений на частотный режим не вызывает затруднений.

Для  $m$ -го периода накачки при  $Fo = Fo_{\text{н}}$

$$\begin{aligned} \theta_{\text{н}m}(r_1, Fo_{\text{н}}) = & \left\{ \frac{2 \int_0^1 \theta_0(r_1)(1 - Br_1^2) r_1 dr_1}{1 - B + \frac{1}{3} B^2} \times \right. \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2}(m-1)KFo_{\text{н}}\right] + \Delta\theta_{\text{н}}(Fo_{\text{н}}) \frac{1 - \exp(-mKFo_{\text{н}})}{1 - \exp(-KFo_{\text{н}})} \left. \right\} \times \\ & \times (1 - Br_1^2) \exp(-KFo_{\text{н}}). \end{aligned} \quad (4-59)$$

Для  $m$ -го периода охлаждения при  $Fo = Fo_0$

$$\theta_{0m}(r_1, Fo_0) = \theta_{\text{н}m}(r_1, Fo_{\text{н}}) \exp(-KFo_0). \quad (4-60)$$

При  $m \rightarrow \infty$  активный элемент выходит на квазистационарный температурный режим. Распределение температуры в квазистационарном тепловом режиме определяется через параметры первого цикла и не зависит от начального распределения перед первым периодом накачки

$$\theta_{\text{н}\infty}(r_1, Fo) = \Delta\theta_{\text{н}}(Fo_{\text{н}})(1 - Br_1^2) \frac{\exp(-KFo)}{1 - \exp(-KFo_{\text{н}})}; \quad (4-61)$$

$$\theta_{0\infty}(r_1, Fo) = \Delta\theta_{\text{н}}(Fo_{\text{н}})(1 - Br_1^2) \frac{\exp[-K(Fo_{\text{н}} + Fo)]}{1 - \exp(-KFo_0)}. \quad (4-62)$$

Полученные выше соотношения позволяют рассмотреть ряд важных практических задач.

Часто при проведении различного рода исследований с применением оптических квантовых генераторов возникает вопрос об определении промежутка времени, по истечении которого в пределах заданной точности в активном теле после накачки восстанавливается исходное поле температур. Другими словами, интерес представляет решение такой задачи: когда можно полагать, что режим повторения импульсов эквивалентен режиму одиночных импульсов?

Пусть температура тела в период накачки возрастает на величину, равную  $\Theta_n(r_1, Fo_n) = \Theta_{имп}$ . Тогда для конца первого периода охлаждения и конца периода охлаждения в квазистационарном режиме его температурное поле описывается следующими формулами:

$$\Theta_{01}(r_1, Fo_0) = \Theta_{имп} P (1 - Br_1^2) \exp(-K Fo_0); \quad (4-63)$$

$$\Theta_{\infty}(r_1, Fo_0) = \Theta_{имп} P (1 - Br_1^2) \frac{1}{\exp(K Fo_0) - 1}. \quad (4-64)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия  $\exp(K Fo) \gg 1$  последние соотношения практически совпадают. Если ввести коэффициент  $\delta_e$

$$\delta_e = \frac{\Theta_{\infty}(r_1, Fo)}{\Theta_{01}(r_1, Fo)}, \quad (4-65)$$

то численные значения  $\delta_e$  будут характеризовать в долях  $\Theta_{01}$  расхождение результатов, полученных по формулам (4-63) и (4-64). Численные значения  $\delta_e$  как функции  $Fo_0$  для ряда значений числа Био представлены на рис. 4-2а. Если величина  $\delta_e$  задана, то можно оценить минимальную длительность цикла (в зависимости от эффективности системы охлаждения), при которой режим посылки импульсов можно полагать эквивалентным режиму одиночных импульсов накачки

$$Fo_0 = -\frac{1}{K} \ln \left( 1 - \frac{1}{\delta_e} \right). \quad (4-66)$$

На рис. 4-2б представлены вычисленные значения  $Fo_0$  как функции числа  $Bi$  для нескольких значений  $\delta_e$ . В качестве примера рассмотрим системы, в которых активные элементы выполнены из стекла, граната и рубина с радиусом  $R = 3,25$  мм, охлаждение — водяное (коэффициент теплообмена  $\alpha = 0,75$  вт · см<sup>-2</sup> · °C<sup>-1</sup> и соответственно  $Bi = 30$ ; 2 и 0,55). Как следует из рис. 4-2,

с точностью до 10% от вычисляемых значений температуры режим повторения эквивалентен режиму одиночных импульсов при  $Fo_{\text{ц}}=0,33, 0,86$  и  $2,42$ , что соответствует частотам следования импульсов  $f=0,1; 0,45; 0,55$  гц. Здесь уместно отметить, что дальнейшее увеличение эффективности систем охлаждения для рубиновых образцов позволяет несколько увеличить частоту сле-

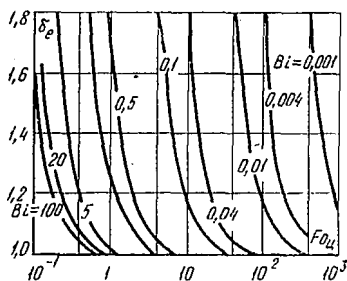


Рис. 4-2а. Корректирующий коэффициент  $\delta_e$  для перехода от характеристик режима одиночных импульсов к параметрам квазистационарного температурного режима.

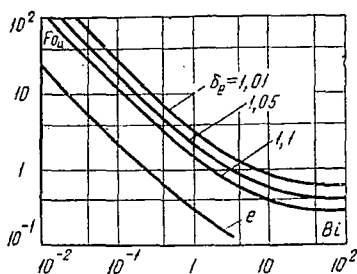


Рис. 4-2б. Оценка допустимой величины  $Fo_{\text{ц}}$ , при которой в пределах заданных значений  $\delta_e$  можно полагать квазистационарное состояние активного элемента импульсного ОКГ эквивалентным температурному режиму при одиночных импульсах.

вания импульсов, при которой температурный режим активного тела соответствует режиму одиночных импульсов. Так, если эффективность охлаждения увеличить вдвое, то  $Fo_{\text{ц}}=1,35$  и  $f=1$  гц. При работе со стержнями из неодимового стекла увеличение коэффициента теплообмена свыше  $0,5 \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$  практически не сказывается на значениях  $Fo_{\text{ц}}$  (4-66).

Полученные выше соотношения позволяют рассмотреть также вопрос о времени установления квазистационарного температурного режима в активном теле ОКГ. Введем в рассмотрение коэффициент  $\delta_y$ , равный

$$\delta_y = \frac{\theta_{\text{om}}(r_1, Fo)}{\theta_{\text{ооо}}(r_1, Fo)}. \quad (4-67)$$

С учетом (4-62) и (4-64) определим зависимость между числом импульсов и параметрами, определяющими скорость установления квазистационарного режима

$$m = - \frac{1}{K Fo_{\text{ц}}} \ln(1 - \delta_y). \quad (4-68)$$

Таким образом, если известна частота следования импульсов, или, что то же самое, величина  $Fo_{ц}$ , то, задавшись значением отклонения  $\delta_y$  температуры стержня от ее квазистационарного уровня, всегда можно из (4-68) определить число импульсов, после которых устанавливается поле вида (4-62). На рис. 4-3 представлена зависимость (4-68). Для  $\delta_y=0,9$  в рубиновом ОКГ с активным телом в форме кругового цилиндра с радиусом 3,25 мм при частоте следования импульсов 1 гц ( $Fo=1,35$ ) в условиях интенсивного воздушного охла-

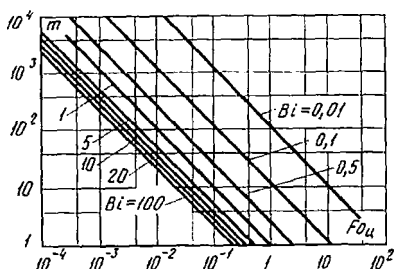


Рис. 4-3. Число циклов  $m$ , необходимых для достижения квазистационарного температурного режима на уровне  $\delta_y=0,9$ . При  $\delta_y>0,9$  прямые смещаются вправо на величину, соответственно равную  $\{\lg[-\ln(1-\delta_y)]-0,36\}$ .

ждения при  $\alpha=0,0135$  вт·см<sup>-2</sup>·°C<sup>-1</sup>, ( $Bi=0,01$ ) квазистационарный режим наступает через 86 циклов. С переходом на жидкостное охлаждение [ $\alpha=0,75$  вт·см<sup>-2</sup>·°C<sup>-1</sup>,  $Bi=0,54$ ] указанный режим наступает после второго цикла. Для стеклянного ОКГ с теми же характеристиками и в тех же условиях при воздушном охлаждении  $m=700$  и при жидкостном  $m=10$ , дальнейшее повышение эффективности системы охлаждения для ОКГ на стекле практически не влияет на время установления квазистационарного режима.

Рассмотрим еще один пример. Пусть для конкретного прибора определены размеры и материал активного тела, параметры системы охлаждения, мощность равномерных по объему источников накачки; теплообмен и перераспределение температур в процессе накачки не проявляются; определены также значения температур — температура охлаждающей среды  $T_c$  и максимальная температура процесса  $T_m$ , назначаемая, например, в случае рубинового ОКГ из условия согласования длины волны генерируемого излучения с максимумом пропускания атмосферы. Требуется определить оптимальную частоту следования импульсов в квазистационарном режиме. Использование полученных выше

приближенных соотношений позволяет достаточно просто получить ответ. В соответствии с введенными обозначениями максимальная температура в безразмерной форме активного тела равна 1. Следовательно, для центра активного тела перед очередным импульсом накачки и при квазистационарном режиме выполняется равенство

$$1 - \Theta_{\text{имп}} = \frac{\Theta_{\text{имп}} P}{\exp(KFo_{\text{ц}}) - 1}, \quad (4-69)$$

откуда

$$Fo_{\text{ц}} = \frac{1}{K} \ln \left( 1 + \frac{P\Theta_{\text{имп}}}{1 - \Theta_{\text{имп}}} \right). \quad (4-70)$$

На рис. 4-4 представлены результаты расчета, выполненные в соответствии с выражением (4-70).

Максимум пропускания атмосферы лежит в области 694,3 нм. Температурная зависимость длины волны излучения рубинового ОКГ приближенно описывается следующей формулой [Л. 4-9, 4-10]:

$$\lambda(T) = 694,325 - 0,0065(T - 20), \text{ нм}. \quad (4-71)$$

Поэтому температура активного тела должна составлять  $T_m \approx 35^\circ\text{C}$ . Пусть кристалл диаметром 6,5 мм охлаждается водой ( $T_c = 7^\circ\text{C}$ ) с эффективностью теплообмена  $\alpha = 0,75 \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $Bi = 0,55$  и  $\Theta_{\text{имп}} = 0,2$ . В соответствии с выражением (4-70) оптимальная частота следования импульсов в квазистационарном режиме 7 гц ( $Fo_{\text{ц}} = 0,2$ ).

Неоднородное тепловыделение. Учет неоднородности распределения источников тепла при определении температурного поля проводился в гл. 3. Полученные аналитические выражения сложны и трудно поддаются исследованию. Тем не менее достаточно просто рассмотреть этот вопрос с помощью изложенного приближенного метода.

Представим распределение внутренних источников тепла в виде

$$Ki(r_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (-1)^{i+1} r_1^{2(i-1)}. \quad (4-72)$$

В частности, для  $i=2$

$$Ki(r_1) = a_1 - a_2 r_1^2.$$



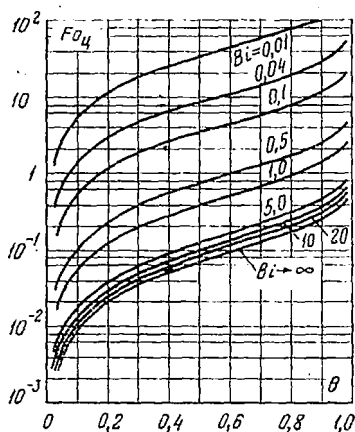


Рис. 4-4. Предельная частота повторения импульсов при заданных пределах изменения температуры активного элемента.

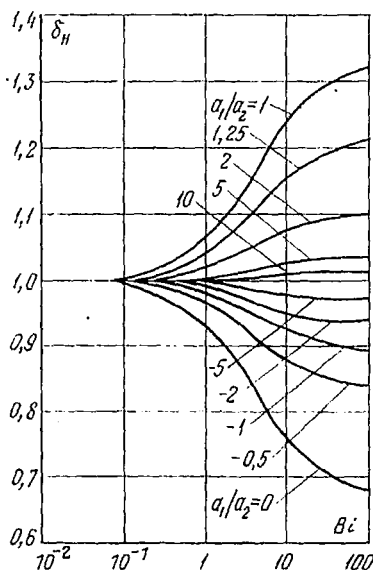


Рис. 4-5. Оценка влияния неоднородности распределения источников тепловыделения на температурный режим активного элемента.

Температурное поле при  $m=1$  и при  $m \rightarrow \infty$  для  $\Theta_0(r_1)=0$  записывается следующим образом:

$$\Theta_{01}(r_1, Fo) = D(1 - Br_1^2) \exp(-KFo); \quad (4-73)$$

$$\Theta_{\infty}(r_1, Fo) = \frac{D(1 - Br_1^2) \exp(-KFo)}{1 - \exp(-KFo_R)}, \quad (4-74)$$

где для  $i=2$

$$D = \frac{a_1 \left(1 - \frac{1}{2} B\right) - \frac{a_2}{2} \left(1 - \frac{2}{3} B\right)}{1 - B + \frac{B^2}{3}}. \quad (4-75)$$

В предположении однородного распределения с усредненной мощностью тепловыделения

$$D = \Theta_{\text{мщ}} = \left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right) \frac{\left(1 - \frac{1}{2} B\right)}{1 - B + \frac{B^2}{3}}. \quad (4-76)$$

О неравномерности поля поглощения радиации накачки можно судить по величине коэффициента  $\delta_n$ , равного отношению температур, вычисленных при условии неоднородной и однородной накачки. Величина этого отношения для сходственных моментов времени равна:

$$\delta_n = 1 + \frac{Ba_2}{6 \left(1 - \frac{B}{2}\right) (2a_1 - a_2)}. \quad (4.77)$$

На рис. 4-5 представлена зависимость (4.77). Как следует из рисунка, при числах  $Bi < 0,1$  практически не следует учитывать в расчетах неоднородность поля поглощения радиации накачки (ошибка менее 2%). С увеличением числа  $Bi$  неоднородность распределения источников тепловыделения может приводить к заметному влиянию на температурные поля активных элементов.

**Цилиндр в оболочке.** Задачу о температурном поле в круговом цилиндре с неактивированной оболочкой можно представить как задачу для кругового цилиндра без оболочки с внутренними источниками тепла, действующими в области  $0 \leq r_1 \leq k = R_2/R_1$ .

Оценку эффекта введения оболочки можно провести по результатам сопоставления решений для составного цилиндра и стержня без оболочки с размерами, равными активированной части составного цилиндра [Л. 4-11]. Для этой цели определим численные значения следующих выражений:

$$\frac{\Delta\theta_{01}(r_1, Fo)}{\theta_{\text{нмц}}} = P' (1 - B'r_1^2) \exp(-K'Fo) - \varepsilon (1 - Br_1^2) \exp(-KFo); \quad (4.78)$$

$$\frac{\Delta\theta_{\infty}(r_1, Fo)}{\theta_{\text{нмц}}} = \frac{P' (1 - B'r_1^2)}{\exp(K'Fo) - 1} - \frac{\varepsilon (1 - Br_1^2)}{\exp(KFo) - 1}. \quad (4.79)$$

В правой части (4.78) и (4.79) первые члены определяют температурное поле в цилиндре с относительным радиусом  $k$  при накачке с однородным распределением источников тепла соответственно для первого периода охлаждения и периода охлаждения в квазистационарном режиме. Значения коэффициентов  $P'$ ,  $B'$ ,  $K'$  для ряда значений  $k$  приведены также в табл. 4-2. Вычисления проводились по формулам:

$$P' = \frac{1 - 0,5B'k^2}{1 - B'k^2 + \frac{1}{3} B'^2k^4}; \quad (4.80)$$

$$B' = \frac{Bi}{2k + Bi k^2}; \quad (4-81)$$

$$K' = \frac{8Bi}{4k^2 + Bi k^3}. \quad (4-82)$$

В этой же таблице помещены значения коэффициентов  $\varepsilon = \varepsilon(Bi, k)$ , встречающихся в решениях для случаев, в которых распределение плотности поглощенной радиации накачки может быть принято однородным:

$$\varepsilon = \frac{k^2 (1 - 0,5k^2 B)}{1 - B + \frac{1}{3} B}. \quad (4-83)$$

Положив в этих выражениях  $k=1$ , перейдем к ранее полученным формулам (4-45) и (4-46).

Как показывают расчеты, эффективность введения оболочки может проявляться лишь при больших частотах следования импульсов ( $Fo < 0,05$ ).

Оценка точности. Эффективность применения изложенного метода во многом определяется выбором вида отыскиваемого приближенного решения. При обсуждении метода Лейбензона было показано, что если приближенное решение задачи отыскивать в виде собственных функций этой задачи, то результаты точного и приближенного решений совпадают [Л. 4-1, 4-2]. Так как в дальнейшем при обобщении интегрального соотношения основная идея метода не нарушалась, то отмеченная особенность должна быть присуща излагаемому методу решения. В качестве примера можно предложить результат, полученный при определении стационарного температурного поля в период действия внутренних источников тепла, — соотношение (4-51) является точным решением рассматриваемой задачи.

Проведем сравнение приближенных расчетных выражений (4-63) и (4-64), полученных с учетом (4-42), с соответствующими точными формулами. На ЦВМ «Минск-22» рассчитывались среднеобъемные температуры  $\bar{\theta}(Fo)$  в долях  $\theta_{имп}$  для  $Fo = Fo_{ц}$  в квазистационарном режиме

$$\frac{\bar{\theta}(Fo_{ц}^{точн})}{\theta_{имп}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4Bi^2}{\mu_n^2 (\mu_n^2 + Bi^2) [\exp(\mu_n^2 Fo_{ц}) - 1]}; \quad (4-84)$$

$$\frac{\bar{\theta}(Fo_{ц}^{прибл})}{\theta_{имп}} = \frac{P(2-B)}{2[\exp(KFo_{ц}) - 1]}. \quad (4-85)$$

Коэффициенты для определения температурного поля в активном элементе в форме составного цилиндра

| $k$  | Bi         | 0,01   | 0,04  | 0,1   | 0,5   | 1,0   | 5,0   | 10,0  | 20,0 | 50,0 | 100,0 |
|------|------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|
| 0,2  | $K'$       | 0,50   | 2,00  | 4,98  | 24,4  | 47,6  | 200   | 333   | 500  | 714  | 833   |
|      | $B'$       | 0,025  | 0,10  | 0,25  | 1,19  | 2,27  | 8,33  | 12,5  | 16,7 | 20,8 | 22,7  |
|      | $P'$       | 1,0005 | 1,002 | 1,005 | 1,024 | 1,047 | 1,18  | 1,29  | 1,38 | 1,47 | 1,40  |
|      | $\epsilon$ | 0,040  | 0,041 | 0,042 | 0,049 | 0,057 | 0,087 | 0,099 | 0,11 | 0,11 | 0,12  |
| 0,4  | $K'$       | 0,13   | 0,50  | 1,24  | 5,95  | 11,4  | 41,7  | 62,5  | 83,3 | 104  | 114   |
|      | $B'$       | 0,013  | 0,050 | 0,12  | 0,57  | 1,04  | 3,12  | 4,17  | 5,00 | 5,68 | 5,95  |
|      | $P'$       | 1,001  | 1,004 | 1,01  | 1,047 | 1,088 | 1,29  | 1,38  | 1,45 | 1,49 | 1,50  |
|      | $\epsilon$ | 0,16   | 0,16  | 0,17  | 0,19  | 0,22  | 0,33  | 0,38  | 0,40 | 0,43 | 0,43  |
| 0,57 | $K'$       | 0,062  | 0,24  | 0,61  | 2,87  | 5,39  | 17,9  | 25,4  | 31,9 | 37,9 | 40,4  |
|      | $B'$       | 0,0087 | 0,035 | 0,085 | 0,38  | 0,68  | 1,81  | 2,28  | 2,62 | 2,88 | 2,97  |
|      | $P'$       | 1,001  | 1,006 | 1,014 | 1,065 | 1,12  | 1,34  | 1,42  | 1,47 | 1,49 | 1,50  |
|      | $\epsilon$ | 0,33   | 0,33  | 0,34  | 0,39  | 0,44  | 0,63  | 0,71  | 0,76 | 0,79 | 0,80  |
| 0,8  | $K'$       | 0,031  | 0,12  | 0,31  | 1,42  | 2,60  | 7,81  | 10,4  | 12,5 | 14,2 | 14,9  |
|      | $B'$       | 0,0062 | 0,025 | 0,060 | 0,26  | 0,45  | 1,04  | 1,25  | 1,39 | 1,49 | 1,52  |
|      | $P'$       | 1,002  | 1,008 | 1,020 | 1,088 | 1,16  | 1,38  | 1,45  | 1,48 | 1,50 | 1,50  |
|      | $\epsilon$ | 0,64   | 0,65  | 0,66  | 0,74  | 0,81  | 1,08  | 1,18  | 1,24 | 1,29 | 1,29  |

Результаты обработки машинного счета представлены на рис. 4-6. Расчет проводился для ОКГ с различными частотами ( $Fo_{ц}$ ) посылки импульсов для ряда значений чисел  $Bi$ . Кривые на рис. 4-6 соответствуют расчету по формуле (4-84), кружочки — приближенному (4-85).

Из рис. 4-6 видно, что для чисел  $Bi$ , не превышающих  $Bi=1$ , точная и приближенная формулы дают оди-

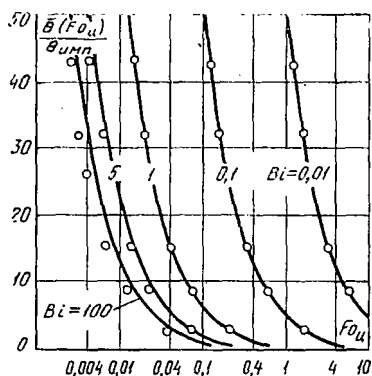


Рис. 4-6. Влияние длительности цикла при квазипрерывной посылке импульсов  $Fo_{ц}$  на величину среднеобъемной температуры  $\Theta(Fo_{ц})$  (в долях  $\Theta_{имп}$ ) активного элемента импульсного ОКГ в квазистационарном режиме.

наковые результаты. С увеличением интенсивности теплообмена появляется разница между результатами точного и приближенного расчетов. Эта разница становится заметной (относительная ошибка более 10%) при  $Bi > 5$  и  $Fo_{ц} < 0,01$ .

### 4-3. ДРУГИЕ КОНФИГУРАЦИИ

Полый цилиндр. Рассмотрим  $m$ -й период охлаждения. Математическая постановка такой задачи представлена системой (2-21) — (2-23).

Приближенному решению указанной системы придадим форму [Л. 4-12]

$$\theta_{om}(r_1, Fo) = C_m(Fo) (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4), \quad (4-86)$$

в которой коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$ , определяемые из граничных условий, имеют вид:

$$B_1 = \frac{Bi_1 (Bi_2 + 4) k^4 - Bi_2 (Bi_1 - 4)}{(Bi_1 - 2) (Bi_2 + 4) k^4 - (Bi_1 - 4) (Bi_2 + 2) k^2}; \quad (4-87)$$

$$B_2 = \frac{Bi_1 (Bi_2 + 2) k^2 - Bi_2 (Bi_1 - 2)}{(Bi_1 - 2) (Bi_2 + 4) k^4 - (Bi_1 - 4) (Bi_2 + 2) k^2}. \quad (4-88)$$

Коэффициент  $C_m(\text{Fo})$  определяется из дифференциального уравнения, получаемого подстановкой выражения (4-86) в следующее интегральное соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \int_1^k \Theta_{om}(r_1, \text{Fo}) r_1 dr_1 = \text{Bi}_1 [\Theta_{om}(r_1, \text{Fo})]_{r_1=1} - \text{Bi}_2 [\Theta_{om}(r_1, \text{Fo})]_{r_1=k}. \quad (4-89)$$

В итоге получим:

$$C_m(\text{Fo}) = C_{om} \exp(-K\text{Fo}), \quad (4-90)$$

где

$$K = \frac{\text{Bi}_2 (1 - B_1 k^2 + B_2 k^4) - \text{Bi}_1 (1 - B_1 + B_2)}{\frac{k^2 - 1}{2} - \frac{k^4 - 1}{4} B_1 - \frac{k^6 - 1}{6} B_2}. \quad (4-91)$$

Постоянную  $C_{om}$  находим из условия минимума функционала

$$\delta \int_1^k [\Theta_{nm}(r_1, \text{Fo}_n) - C_{om} (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4)]^2 r_1 dr_1 = 0, \quad (4-92)$$

откуда

$$C_{om} = \frac{\int_1^k \Theta_{nm}(r_1, \text{Fo}_n) \times}{\frac{k^2 - 1}{2} + B_1^2 \frac{k^6 - 1}{6} + B_2^2 \frac{k^{10} - 1}{10} - B_1 \frac{k^4 - 1}{2} + \frac{\times (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4) r_1 dr_1}{+ B_2 \frac{k^6 - 1}{3} - B_1 B_2 \frac{k^8 - 1}{4}}. \quad (4-93)$$

Чтобы применить для расчетов формулы (4-86), (4-90) и (4-93), следует определить величину  $\Theta_{nm}(r_1, \text{Fo}_n)$ . При адиабатическом нагреве в период накачки

$$\Theta_{n1}(r_1, \text{Fo}_n) = \text{Ki}(r_1) \int_0^{\text{Fo}_n} \text{Ki}(\text{Fo}) d\text{Fo}; \quad (4-94)$$

$$C_{o1} = \frac{\int_1^k \Theta_{n1}(r_1, \text{Fo}_n) \times}{\frac{k^2 - 1}{2} + B_1^2 \frac{k^6 - 1}{6} + B_2^2 \frac{k^{10} - 1}{10} - B_1 \frac{k^4 - 1}{2} + \frac{\times (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4) r_1 dr_1}{+ B_2 \frac{k^6 - 1}{3} - B_1 B_2 \frac{k^8 - 1}{4}}; \quad (4-95)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{0m} &= \frac{C_{01} [1 - \exp(-mK Fo_{\Pi})]}{1 - \exp(-K Fo_{\Pi})}; \\ C_{\infty} &= \frac{C_{01}}{1 - \exp(-K Fo_{\Pi})}. \end{aligned} \right\} \quad (4-96)$$

Температурное поле в первом и  $m$ -м периоде охлаждения в квазистационарном режиме определяется из выражения (4-86) при подстановке в последнее соотношений (4-90), (4-94) и (4-96). Коэффициенты  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $K$ ,  $C_{01}/\Theta_{\text{нм}}$  для расчета теплового режима приведены в табл. 4-3.

При учете теплоотвода и перераспределения температур в активном элементе в период накачки определение  $\Theta_{\text{нм}}(r_1, Fo)$  требует решения самостоятельной задачи о теплообмене полого цилиндра с внутренними источниками тепла. В рамках допущений для системы (2-21) — (2-23) такая задача для  $m$ -го периода формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial \Theta_{\text{нм}}(r_1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left[ r_1 \frac{\partial \Theta_{\text{нм}}(r_1, Fo)}{\partial r_1} \right] + Ki(r_1, Fo); \quad (4-97)$$

$$\Theta_{\text{нм}}(r_1, 0) = \Theta_{0m-1}(r_1, Fo_{\Pi}); \quad Fo = 0; \quad (4-98)$$

$$\left[ \frac{\partial \Theta_{\text{нм}}(r_1, Fo)}{\partial r_1} \right]_{r_1=1} = Bi [\Theta_{\text{нм}}(r_1, Fo)]_{r_1=1}; \quad (4-99)$$

$$- \left[ \frac{\partial \Theta_{\text{нм}}(r_1, Fo)}{\partial r_1} \right]_{r_1=k} = \frac{1}{k} Bi_2 [\Theta_{\text{нм}}(r_1, Fo)]_{r_1=k}. \quad (4-100)$$

Система (4-97) — (4-100) отличается от системы (2-21) — (2-23) наличием в дифференциальном уравнении (4-97) члена, учитывающего действие источников тепла. Поэтому интегральное соотношение (4-89) для данного случая имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Fo} \int_1^k \Theta_{\text{нм}}(r_1, Fo) r_1 dr_1 &= Bi_1 [\Theta_{\text{нм}}(r_1, Fo)]_{r_1=1} - \\ &- Bi_2 [\Theta_{\text{нм}}(r_1, Fo)]_{r_1=k} + Ki(Fo) \int_1^k Ki(r_1) r_1 dr_1. \end{aligned} \quad (4-101)$$

Решение будем искать в виде (4-86). Так как граничные условия в указанных системах совпадают, то коэффициенты  $B_1$ ,  $B_2$  и  $K$  будут определяться соответ-

Таблица 4-3  
Коэффициенты для определения температурного поля в активном элементе в форме полого цилиндра

| $k$ | $Bi$                         | 0,01    | 0,04    | 0,1     | 0,5    | 1      | 5     | 10    | 20    | 50    | 100   |
|-----|------------------------------|---------|---------|---------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1,5 | $B_1$                        | -0,012  | -0,048  | -0,13   | -1,02  | -7,67  | 1,85  | 1,61  | 1,52  | 1,47  | 1,46  |
|     | $B_2$                        | -0,003  | -0,014  | -0,037  | -0,29  | -2,22  | 0,55  | 0,49  | 0,46  | 0,45  | 0,45  |
|     | $K$                          | 0,008   | 0,032   | 0,081   | 0,43   | 0,89   | 4,40  | 7,48  | 11,0  | 14,9  | 16,8  |
|     | $C_{01}/\theta_{\text{нмц}}$ | 0,99    | 0,96    | 0,90    | 0,54   | 1,01   | -2,04 | -3,46 | -4,82 | -6,08 | -6,61 |
|     |                              |         |         |         |        |        |       |       |       |       |       |
| 2   | $B_1$                        | -0,008  | -0,03   | -0,08   | -0,56  | -2,12  | 1,78  | 1,46  | 1,35  | 1,29  | 1,27  |
|     | $B_2$                        | -0,001  | -0,005  | -0,013  | -0,096 | -0,38  | 0,34  | 0,28  | 0,26  | 0,26  | 0,25  |
|     | $K$                          | 0,007   | 0,027   | 0,069   | 0,37   | 0,77   | 3,11  | 4,57  | 5,86  | 6,99  | 7,46  |
|     | $C_{01}/\theta_{\text{нмц}}$ | 0,99    | 0,96    | 0,90    | 0,58   | 0,27   | -0,87 | -1,37 | -1,73 | -2,01 | -2,11 |
|     |                              |         |         |         |        |        |       |       |       |       |       |
| 3   | $B_1$                        | -0,006  | -0,024  | -0,062  | -0,41  | -1,33  | 1,72  | 1,35  | 1,22  | 1,15  | 1,13  |
|     | $B_2$                        | 0,0004  | -0,0017 | -0,0045 | -0,032 | -0,11  | 0,16  | 0,13  | 0,12  | 0,11  | 0,11  |
|     | $K$                          | 0,0050  | 0,020   | 0,054   | 0,29   | 0,57   | 1,71  | 2,19  | 2,54  | 2,80  | 2,89  |
|     | $C_{01}/\theta_{\text{нмц}}$ | 0,98    | 0,94    | 0,85    | 0,48   | 0,23   | -0,34 | -0,50 | -0,59 | 0,66  | -0,68 |
|     |                              |         |         |         |        |        |       |       |       |       |       |
| 5   | $B_1$                        | -0,0053 | -0,022  | -0,056  | -0,36  | -1,11  | 1,69  | 1,29  | 1,15  | 1,08  | 1,06  |
|     | $B_2$                        | -0,0001 | -0,0005 | -0,0014 | -0,011 | -0,035 | 0,061 | 0,048 | 0,044 | 0,041 | 0,041 |
|     | $K$                          | 0,0034  | 0,014   | 0,038   | 0,19   | 0,33   | 0,73  | 0,84  | 0,91  | 0,96  | 0,98  |
|     | $C_{01}/\theta_{\text{нмц}}$ | 0,96    | 0,86    | 0,70    | 0,28   | 0,12   | -0,12 | -0,16 | -0,19 | -0,21 | -0,21 |
|     |                              |         |         |         |        |        |       |       |       |       |       |



венно по формулам (4-87), (4-88) и (4-91). Для нахождения постоянной  $C_m(Fo)$  следует подставить решение (4-86) в интегральное соотношение (4-101). В результате придем к дифференциальному уравнению относительно  $C_m(Fo)$ , из которого следует:

$$C_m(Fo) = \left\{ C_{um} + \frac{\int_0^{Fo} Ki(Fo) \left[ \int_1^k Ki(r_1) r_1 dr_1 \right] \times \right. \\ \left. \frac{k^2 - 1}{2} - B_1 \frac{k^4 - 1}{4} + \right. \\ \left. \frac{\times \exp(KFo) dFo}{+ B_2 \frac{k^6 - 1}{6}} \right\} \exp(-KFo). \quad (4-102)$$

Для определения постоянной интегрирования  $C_{um}$  удовлетворим условию минимума функционала

$$\delta \int_1^k [\Theta_{om-1}(r_1, Fo_{ц}) - C_{um} (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4)]^2 r_1 dr_1 = 0, \quad (4-103)$$

откуда

$$C_{um} = \frac{\int_1^k \Theta_{om-1}(r_1, Fo_{ц}) \times \\ \frac{k^2 - 1}{2} + B_1^2 \frac{k^6 - 1}{6} + B_2^2 \frac{k^{10} - 1}{10} - \\ \times (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4) r_1 dr_1}{-B_1 \frac{k^4 - 1}{2} + B_2 \frac{k^6 - 1}{3} - B_1 B_2 \frac{k^8 - 1}{4}}. \quad (4-104)$$

Теперь нетрудно проследить развитие температурного поля.

*I цикл:* период накачки

$$\Theta_{ц1}(r_1, Fo) = \left\{ C_0 + \frac{\int_0^{Fo} Ki(Fo) \left[ \int_1^k Ki(r_1) r_1 dr_1 \right] \exp(KFo) dFo}{\frac{k^2 - 1}{2} - B_1 \frac{k^4 - 1}{4} + B_2 \frac{k^6 - 1}{6}} \right\} \times \\ \times (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4) \exp(-KFo), \quad (4-105)$$

где

$$C_0 = \frac{\int_1^k \theta_0(r_1) \times}{\frac{k^2-1}{2} + B_1^2 \frac{k^6-1}{6} + B_2^2 \frac{k^{10}-1}{10}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\times (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4) r_1 dr_1}{-B_1 \frac{k^4-1}{2} + B_2 \frac{k^6-1}{3} - B_1 B_2 \frac{k^8-1}{4}}; \quad (4-106)$$

период охлаждения

$$\theta_{01}(r_1, Fo) = [C_0 + C_{01}] (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4) \times$$

$$\times \exp[-K(Fo_{01} + Fo)], \quad (4-107)$$

где

$$C_{01} = \frac{\int_0^{Fo_{01}} Ki(Fo) \left[ \int_1^k Ki(r_1) r_1 dr_1 \right] \exp(KFo) dFo}{\frac{k^2-1}{2} - B_1 \frac{k^4-1}{4} + B_2 \frac{k^6-1}{6}}; \quad (4-108)$$

*m*-й цикл: период накачки

$$\theta_{um}(r_1, Fo) = \left\{ C_{um} + \frac{\int_0^{Fo} Ki(Fo) \left[ \int_1^k Ki(r_1) r_1 dr_1 \right] \times}{\frac{k^2-1}{2} - B_1 \frac{k^4-1}{4} +} \right.$$

$$\rightarrow \left. \frac{\times \exp(KFo) dFo}{+ B_2 \frac{k^6-1}{6}} \right\} (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4) \exp(-KFo), \quad (4-109)$$

$$C_{um} = C_0 \exp[-(m-1)KFo_{01}] +$$

$$+ C_{01} \frac{1 - \exp[-(m-1)KFo_{01}]}{\exp(KFo_{01}) - 1}; \quad (4-110)$$

период охлаждения

$$\theta_{om}(r_1, Fo) = C_{om} (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4) \exp[-K(Fo_{01} + Fo)]; \quad (4-111)$$

$$C_{om} = C_0 \exp[-(m-1)KFo_{01}] + C_{01} \frac{1 - \exp(-mKFo_{01})}{1 - \exp(-KFo_{01})}; \quad (4-112)$$

квазистационарный режим: период накачки

$$\begin{aligned} \Theta_{\infty}(r_1, Fo) = & \left\{ C_{\infty} + \frac{\int_0^{Fo} Ki(Fo) \left[ \int_0^k Ki(r_1) r_1 dr_1 \right] \exp(KFo) dFo}{\frac{k^2-1}{2} - B_1 \frac{k^4-1}{4} + B_2 \frac{k^6-1}{6}} \right\} \times \\ & \times (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4) \exp(-KFo), \end{aligned} \quad (4-113)$$

$$C_{\infty} = \frac{C_{н1}}{\exp(KFo_{н}) - 1}; \quad (4-114)$$

период охлаждения

$$\Theta_{\infty}(r_1, Fo) = C_{\infty} (1 - B_1 r_1^2 + B_2 r_1^4) \exp[-K(Fo_{н} + Fo)]; \quad (4-115)$$

$$C_{\infty} = \frac{C_{н1}}{1 - \exp(-KFo_{н})}. \quad (4-116)$$

Если начальная температура активного элемента равна температуре охлаждающей среды, то в формулах (4-105) — (4-112) выпадает член, содержащий величину  $\Theta_0(r_1)$ . В квазистационарном режиме влияние на температурное поле неоднородности начального распределения, а также уровня нагрева не проявляется, так как величина  $C_0 \exp(-mKFo_{н})$  стремится к нулю по мере роста времени работы генератора ( $m \rightarrow \infty$ ). Если пренебречь теплообменом в процессе накачки, приняв нагрев стержня адиабатическим, то формулы (4-105) — (4-116) воспроизводят полученные выше соответствующие выражения для этого случая.

Параллелепипед. Сохраняя основные предпосылки, при которых формулировались задачи выше, можно с помощью метода, изложенного в § 4-1, рассмотреть температурный режим активного элемента в форме параллелепипеда. В качестве примера приведем расчетные соотношения для  $m$ -го периода следования импульсов в случае, когда решение задачи отыскивается в следующем виде [Л. 4-13] (основные обозначения приведены на рис. 4-7):

$$\Theta(x_1, x_2, x_3, Fo) = C(Fo) D(x_1, x_2, x_3), \quad (4-117)$$

где

$$\begin{aligned} D &= 1 - B[1 - (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)], \quad (4-118) \\ x_1 &= x/b, \quad x_2 = y/h, \quad x_3 = z/l, \quad Fo = \alpha\tau/b^2, \quad Bi = \alpha b/\lambda. \end{aligned}$$

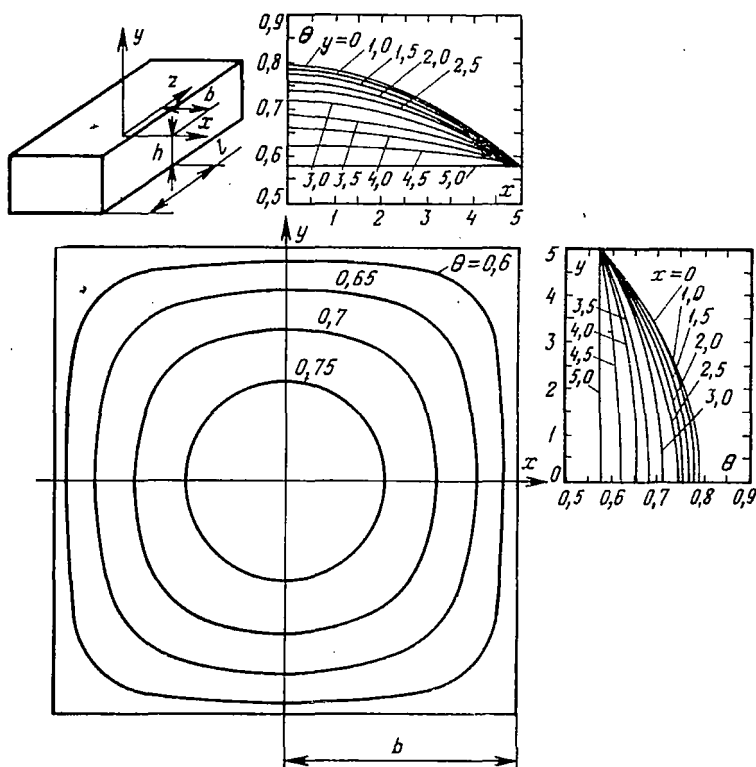


Рис. 4-7. Температурное поле в активном элементе импульсного ОКГ с квадратным поперечным сечением.  $Bi=0,5$ ,  $Fo=Fo_{\text{ц}}=0,3$ ,  $\theta_{\text{нм}}=0,2$ .

Период накачки

$$\theta_{\text{нм}}(x_1, x_2, x_3, Fo) = \left\{ C_{\text{нм}} + \int_0^{Fo} K_1(Fo) \left[ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \right] \exp(KFo) dFo \right\} \times \\ \times D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo); \quad (4-119)$$

$$C_{\text{нм}} = C_0 \exp[-(m-1)KFo_{\text{ц}}] + C_{\text{н1}} \frac{1 - \exp[-(m-1)KFo_{\text{ц}}]}{\exp(KFo_{\text{ц}}) - 1}. \quad (4-120)$$

Период охлаждения

$$\Theta_{om}(x_1, x_2, x_3, Fo) = C_{om} D(x_1, x_2, x_3) \times \exp[-K(Fo_{\text{н}} + Fo)]; \quad (4-121)$$

$$C_{om} = C_0 \exp[-(m-1)K Fo_{\text{н}}] + C_{\text{н}} \frac{1 - \exp(-mK Fo_{\text{н}})}{1 - \exp(-K Fo_{\text{н}})}. \quad (4-122)$$

Здесь

$$C_{o1} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \Theta_0(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}{1 - 1,41B + 0,559B^2}; \quad (4-123)$$

$$C_{\text{н}} = \frac{\int_0^{Fo_{\text{н}}} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Ki(Fo, x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \exp(KFo) dFo}{1 - 0,704B}; \quad (4-124)$$

$$B = \frac{Bi_1 + \frac{h}{b} Bi_2 + \frac{l}{b} Bi_3}{Bi_1 + \frac{h}{b} Bi_2 + \frac{l}{b} Bi_3 + 2,67}; \quad (4-125)$$

$$K = \frac{1-B}{1-0,704B} (Bi_1 + Bi_2 + Bi_3). \quad (4-126)$$

Для условий теплоизоляции торцов и  $Bi_1 = Bi_2$  расчет коэффициентов  $B$  и  $K$  упрощается

$$B = \frac{Bi \left(1 + \frac{h}{b}\right)}{Bi \left(1 + \frac{h}{b}\right) + 2,67}. \quad (4-127)$$

$$K = \frac{2Bi(1-B)}{1-0,704B}. \quad (4-128)$$

Если перераспределение температуры в стержне за счет теплопроводности в процессе накачки несущественно, то расчет ведется по формулам:

период накачки (для  $\Theta_0(x_1, x_2, x_3) = 0$ )

$$\Theta_{\text{нм}}(x_1, x_2, x_3, Fo_{\text{н}}) = \Theta_{\text{п1}}(x_1, x_2, x_3, Fo_{\text{н}}) + \Theta_{om-1}(x_1, x_2, x_3, Fo_{\text{н}}); \quad (4-129)$$

период охлаждения

$$\Theta_{om}(x_1, x_2, x_3, Fo) = C_{om} D(x_1, x_2, x_3) \exp(-KFo); \quad (4-130)$$

$$C_{om} = C_{01} \frac{1 - \exp(-mKFo_u)}{1 - \exp(-KFo_u)}; \quad (4-131)$$

$$\Theta_{in}(x_1, x_2, x_3, Fo_u) = \int_0^{Fo_u} Ki(x_1, x_2, x_3, Fo) dFo. \quad (4-132)$$

В табл. 4-4 приведены результаты вычислений коэффициентов  $B(Bi)$ ,  $K(Bi)$ ,  $\frac{C_0}{\Theta_{имп}}(Bi)$ . При вычислениях использовались соотношения (4-124) для случая однородного поля поглощения радиации накачки, а также (4-125) и (4-126). Для примера на рис. 4-7 приведено распределение температуры в активном элементе из неодимового стекла с квадратным поперечным сечением со стороной 10 мм. Стержень охлаждается потоком воздуха ( $\alpha = 0,0082 \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $Bi = 0,5$ ). Частота посылки импульсов 2,8 имп/мин ( $Fo_u \approx 0,3$ )  $\Theta_{имп} = 0,2$ .

Точное решение аналогичной задачи можно получить, используя известные результаты [Л. 4-14, 4-15]. Например, в простейшем случае мгновенной накачки при однородном распределении источников тепла для режима одиночных импульсов расчетное соотношение имеет вид:

$$\begin{aligned} \Theta_{o\infty}(x_1, x_2, x_3, Fo) = & \Theta_{имп} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_n A_i A_j \cos\left(\mu_n \frac{x}{b}\right) \times \\ & \times \cos\left(\mu_i \frac{y}{h}\right) \cos\left(\mu_j \frac{z}{L}\right) \exp[-(\mu_n^2 Fo_1 + \mu_i^2 Fo_2 + \mu_j^2 Fo_3)], \end{aligned} \quad (4-133)$$

где

$$A_n(i, j) = (-1)^{n(i, j)+1} \frac{2Bi_k \sqrt{Bi_i^2 + \mu_n^2(i, j)}}{\mu_n(i, j) [Bi_k^2 + Bi_k + \mu_n^2(i, j)]},$$

$$k = 1, 2, 3 \dots;$$

$\mu_n(i, j)$  — корни уравнений  $\text{ctg } \mu = \frac{1}{Bi_i} \mu$ ;  $Bi_1 = \alpha_1 b / \lambda$ ;  $Fo_1 = \alpha \tau / b^2$ ;  $Bi_2 = \alpha_2 h / \lambda$ ;  $Fo_2 = \alpha \tau / h^2$ ;  $Bi_3 = \alpha_3 L / \lambda$ ;  $Fo_3 = \alpha \tau / L^2$ .

Коэффициенты для определения температурного поля в активном элементе в форме параллелепипеда ( $Bi_1 = Bi_2$ ,  $\Theta_0(x_1, x_2, x_3) \approx 0$ ,  $\Theta_{\text{пл}}(x_1, x_2, x_3, Fo_{\text{пл}}) = \Theta_{\text{пл}}$ )

| $h/b$ | $Bi$                        | 0,01  | 0,04  | 0,1   | 0,5  | 1    | 5    | 10   | 20   | 50   | 100  |
|-------|-----------------------------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0,1   | $B$                         | 0,004 | 0,016 | 0,040 | 0,17 | 0,29 | 0,67 | 0,80 | 0,81 | 0,95 | 0,97 |
|       | $K$                         | 0,020 | 0,080 | 0,198 | 0,94 | 1,78 | 6,21 | 9,01 | 11,6 | 14,1 | 15,1 |
|       | $C_{01}/\Theta_{\text{пл}}$ | 1,003 | 1,012 | 1,029 | 1,13 | 1,25 | 1,72 | 1,89 | 1,97 | 1,97 | 1,97 |
| 0,2   | $B$                         | 0,005 | 0,018 | 0,043 | 0,18 | 0,31 | 0,69 | 0,81 | 0,90 | 0,95 | 0,98 |
|       | $K$                         | 0,020 | 0,080 | 0,197 | 0,94 | 1,76 | 6,00 | 8,58 | 10,9 | 13,1 | 13,9 |
|       | $C_{01}/\Theta_{\text{пл}}$ | 1,003 | 1,013 | 1,031 | 1,15 | 1,27 | 1,75 | 1,91 | 1,97 | 1,98 | 1,97 |
| 0,5   | $B$                         | 0,005 | 0,022 | 0,053 | 0,22 | 0,36 | 0,74 | 0,85 | 0,92 | 0,97 | 0,98 |
|       | $K$                         | 0,020 | 0,080 | 0,197 | 0,92 | 1,71 | 5,46 | 7,50 | 9,24 | 10,7 | 11,3 |
|       | $C_{01}/\Theta_{\text{пл}}$ | 1,004 | 1,016 | 1,039 | 1,18 | 1,32 | 1,81 | 1,94 | 1,98 | 1,98 | 1,97 |
| 0,75  | $B$                         | 0,007 | 0,026 | 0,062 | 0,25 | 0,40 | 0,77 | 0,87 | 0,93 | 0,97 | 0,98 |
|       | $K$                         | 0,020 | 0,080 | 0,196 | 0,91 | 1,67 | 5,07 | 6,80 | 8,10 | 9,33 | 9,79 |
|       | $C_{01}/\Theta_{\text{пл}}$ | 1,005 | 1,018 | 1,045 | 1,20 | 1,36 | 1,85 | 1,95 | 1,98 | 1,98 | 1,97 |
| 1,0   | $B$                         | 0,007 | 0,029 | 0,070 | 0,27 | 0,43 | 0,79 | 0,88 | 0,94 | 0,97 | 0,98 |
|       | $K$                         | 0,020 | 0,079 | 0,196 | 0,90 | 1,64 | 4,74 | 6,21 | 7,35 | 8,26 | 8,62 |
|       | $C_{01}/\Theta_{\text{пл}}$ | 1,005 | 1,021 | 1,051 | 1,23 | 1,40 | 1,88 | 1,96 | 1,98 | 1,98 | 1,97 |

Решение еще более усложняется при учете неоднородности поля поглощения радиации накачки. Поэтому точные решения в рассматриваемых задачах можно рассматривать как тарировочные, т. е. использовать их для оценки точности результатов, получаемых приближенными методами. В работе [Л. 4-16] приведены ре-

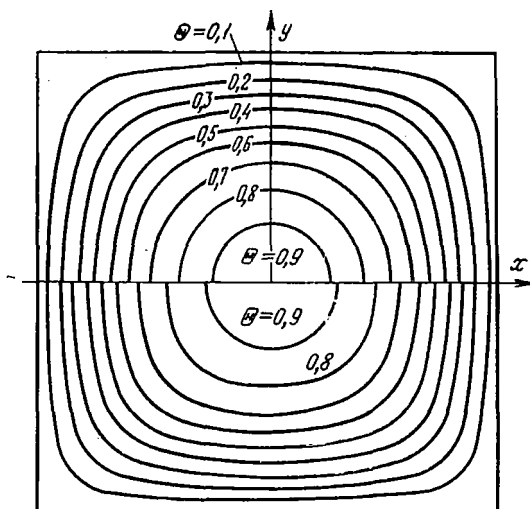


Рис. 4-8. Изотермы в бруске квадратного сечения для  $Fo=0,08$  и  $Bi \rightarrow \infty$ .

Выше оси  $x$  — изотермы, рассчитанные по формуле (4-121) для  $m=1$ ; ниже оси  $x$  — результаты расчета по точным формулам [Л. 4-16].

зультаты расчета температурного поля в бруске квадратного сечения для  $Fo=0,08$ , охлаждаемого (при  $Bi \rightarrow \infty$ ) от начальной температуры  $\Theta=1$ . Аналогичная задача была просчитана по приближенной формуле (4-130) при  $m=1$ . Расхождение результатов не превышает 5% (рис. 4-8). С ростом числа  $Fo$  величина ошибки уменьшается. В частотном режиме посылки импульсов, как показывает расчет, относительное расхождение результатов еще меньше, чем в первом цикле.

Треугольная призма. Использование в ОКГ активного тела в форме треугольной призмы приводит к выходу излучения паразитных мод, уменьшающих полезную мощность генерации. В [Л. 4-17] показано, что вплоть до достаточно высоких значений показателя пре-



ломления ( $n=2$ ) в нормальном сечении стержня не существует лучей, которые, многократно отражаясь внутри образца, не выходили бы наружу, а испытывали бы полное внутреннее отражение.

Исследованиям распределения плотности поглощения радиации накачки в стержнях с поперечным сечением в виде правильного треугольника посвящены работы [Л. 4-17—4-19]. Тепло-вой режим активного элемента такой конфигурации рассмотрен в [Л. 4-20].

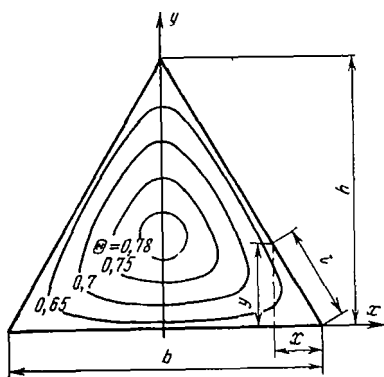


Рис. 4-9. Температурное поле в активном элементе импульсного ОКГ с поперечным сечением в виде правильного треугольника.  $Bi=1$ ,  $Fo=Fo_{\text{н}}=0,041$ ,  $\Theta_{\text{имп}}=0,2$ .

В соответствии с данными этой работы приближенный расчет температурных полей в трехгранной призме можно проводить по формулам (4-129), (4-130), в ко-

торых  $D(x_1, x_2, x_3)$  и  $C_{01}$  имеют следующий вид:

$$D(x_1, x_2) = 1 - B[1 - (1 - x_1 - x_2)(1 + x_1 - x_2)x_2]; \quad (4-134)$$

$$C_{01} = \frac{0,5 - 0,467B}{0,5 - 0,933B + 0,435B^2} \Theta_{\text{имп}}. \quad (4-135)$$

Численные значения коэффициентов  $C_{01}/\Theta_{\text{имп}}$ ,  $B$  и  $K$  приведены в табл. 4-5. На рис. 4-9 представлены изотермы для случая ОКГ с мгновенной однородной по объему накачкой в стержне из неодимового стекла при  $Bi=1$ ,  $Fo_{\text{н}}=0,04$  ( $f=5,2$  имп/мин) и  $\Theta_{\text{имп}}=0,2$ .

Таблица 4-5

Коэффициенты для определения температурного поля в активном элементе в форме правильной трехгранной призмы

| $Bi$                                 | 0,01 | 0,04 | 0,1  | 0,5  | 1,0  | 5,0  | 10,0 | 20,0 | 50,0 | 100,0 |
|--------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $\frac{C_{01}}{\Theta_{\text{имп}}}$ | 1,02 | 1,07 | 1,17 | 1,82 | 2,55 | 6,42 | 8,96 | 11,5 | 14,0 | 15,1  |
| $B$                                  | 0,02 | 0,07 | 0,16 | 0,48 | 0,65 | 0,90 | 0,95 | 0,97 | 0,99 | 0,99  |
| $K$                                  | 0,69 | 0,28 | 0,68 | 3,26 | 6,16 | 21,3 | 30,8 | 39,6 | 47,8 | 51,3  |

## УЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В предыдущих главах анализ температурных режимов активных элементов проводился в предположении постоянства теплофизических характеристик лазерных материалов. Такой подход оправдан при слабом влиянии на величину нагрева температурной зависимости тепловых свойств вещества. Однако в ряде случаев, например в области низких температур, указанная зависимость может оказать существенное влияние на результаты расчета. При учете температурной зависимости теплофизических характеристик возникает необходимость рассмотрения нелинейного уравнения теплопроводности. Решение дифференциального уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами связано с большими трудностями. Достаточно полный обзор методов решения нелинейных уравнений теплопроводности содержится в [Л. 5-1—5-3]. Точное решение может быть получено только в отдельных простейших случаях. Поэтому при решении нелинейных уравнений теплопроводности пользуются различными приближенными методами. Одним из методов является замена температурной зависимости  $\lambda(T)$  и  $c(T)$  приближенными функциями, приводящими к линеаризации уравнения теплопроводности [Л. 5-4, 5-5]. Другой метод состоит во введении новых функций, при использовании которых нелинейное уравнение преобразуется к виду, более удобному для дальнейшего рассмотрения [Л. 5-6, 5-7]. Таким приемом в [Л. 5-8] рассматривается нелинейная задача об охлаждении рубинового стержня, торцы которого поддерживаются при температуре 77 К. При решении этой задачи методом конечных разностей на ЦВМ использовано представление температурной зависимости коэффициента теплопроводности и теплоемкости в виде  $\lambda = aT^b$ ;  $c = aT^a$  для ряда температурных интервалов. Существуют и другие методы решения нелинейного уравнения теплопроводности [Л. 5-9—5-13]. При приближенном решении нелинейных задач теплопроводности весьма эффективны вариационные методы (см., например, [Л. 5-14—5-15]). Излагаемый ниже материал является

обобщением результатов, приведенных в предыдущей главе, на случай температурной зависимости теплофизических характеристик лазерных материалов.

### 5-1. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Введем вместо температуры  $\Theta$  интегральные аналоги вида [Л. 5-15]:

$$\Theta^\Phi = \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \int_0^\Theta \lambda_1(\theta) d\theta; \quad \Theta^i = \frac{1}{\bar{c}_1} \int_0^\Theta c(\theta) d\theta, \quad (5-1)$$

где

$$\bar{\lambda}_1 = \int_0^1 \lambda_1(\theta) d\theta; \quad \bar{c}_1 = \int_0^1 c_1(\theta) d\theta; \quad \lambda_1 = \lambda/\lambda_c; \quad c_1 = c/c_c. \quad (5-2)$$

В общем случае связь между  $\Theta^\Phi$  и  $\Theta^i$  определяется температурной зависимостью  $\lambda$  и  $c$  и может быть достаточно сложной.

Пусть зависимость теплофизических характеристик от температуры имеет вид:

$$\lambda_1(\theta) = 1 + k_{\lambda 1}\theta + k_{\lambda 2}\theta^2 + \dots; \quad (5-3)$$

$$c_1(\theta) = 1 + k_{c 1}\theta + k_{c 2}\theta^2 + \dots \quad (5-4)$$

Представим приближенно зависимости (5-3) и (5-4) следующим образом:

$$\lambda_1(\theta) = 1 + k_\lambda \theta; \quad (5-5)$$

$$c_1(\theta) = 1 + k_c \theta, \quad (5-6)$$

где коэффициенты  $k_\lambda$  и  $k_c$  находятся из вариаций соответственно (5-3) и (5-4) относительно их среднеквадратичных значений

$$k_\lambda = 3 \left( \frac{k_{\lambda 1}}{3} + \frac{k_{\lambda 2}}{4} + \dots \right); \quad (5-7)$$

$$k_c = 3 \left( \frac{k_{c 1}}{3} + \frac{k_{c 2}}{4} + \dots \right). \quad (5-8)$$

Соотношения (5-5) и (5-6) позволяют представить связь между  $\Theta$  и функциями  $\Theta^\Phi$  и  $\Theta^i$

$$\Theta = \frac{\sqrt{1 + k_\Phi \Theta^\Phi} - 1}{\sqrt{1 + k_\Phi} - 1} = \frac{\sqrt{1 + k_i \Theta^i} - 1}{\sqrt{1 + k_i} - 1}, \quad (5-9)$$

где

$$k_{\Phi} = 2k_{\lambda}\bar{\lambda}_1; \quad k_i = 2k_c\bar{c}. \quad (5-10)$$

Так как  $k_{\Phi}\theta^{\Phi} < 1$  и  $k_i\theta^i < 1$ , то при ограничении двумя первыми членами разложения в ряд (5-9) будем иметь:

$$\theta^i = B\theta^{\Phi}, \quad (5-11)$$

где

$$B = \frac{k_{\Phi}}{k_c} \frac{\sqrt{1+k_i}-1}{\sqrt{1+k_{\Phi}}-1}. \quad (5-12)$$

Установленная связь между  $\theta^i$  и  $\theta^{\Phi}$  оказывается полезной при исследовании температурного режима активного тела ОКГ с учетом зависимости теплофизических характеристик от температуры.

Период накачки. При адиабатическом нагреве распределение температуры определяется следующим соотношением:

$$\frac{\partial \theta(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} = \frac{Ki(x_1, x_2, x_3, Fo)}{c_1(\theta)}. \quad (5-13)$$

Введение новой функции (5-1) позволяет линеаризовать уравнение (5-13)

$$\frac{\partial \theta^i(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} = Ki^i(x_1, x_2, x_3, Fo), \quad (5-14)$$

где

$$Ki^i(x_1, x_2, x_3, Fo) = \frac{q(x_1, x_2, x_3, Fo) L^2}{\lambda_c/c_c (i_m - i_c)}; \quad Fo = \frac{a\tau}{L^2}.$$

Решение уравнения (5-14) известно

$$\theta^i(x_1, x_2, x_3, Fo) = Ki^i(x_1, x_2, x_3) \int_0^{Fo} Ki^i(Fo) dFo. \quad (5-15)$$

Решение (5-15) по форме совпадает с аналогичным соотношением, полученным в рамках линейной задачи, однако проведенные по нему вычисления не воспроизводят поле, подобное распределению внутренних источников тепла. Здесь можно говорить лишь о подобии полей функций  $\theta^i(x_1, x_2, x_3, Fo)$  и  $Ki^i(x_1, x_2, x_3, Fo)$ .

С учетом теплоотвода в период накачки температурное поле  $\Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)$  при зависимости теплофизических характеристик от температуры определяется решением следующей нелинейной системы:

$$c_1(\theta) \rho_1 \frac{\partial \theta(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} = \operatorname{div} \lambda_1(\theta) \operatorname{grad} \theta(x_1, x_2, x_3, Fo) + \operatorname{Ki}(x_1, x_2, x_3, Fo); \quad (5-16)$$

$$\theta(x_1, x_2, x_3, 0) = \theta_0(x_1, x_2, x_3); \quad Fo = 0; \quad (5-17)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{F_{1,h}} \lambda_1(\theta) \left[ \frac{\partial \theta(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial n_1} \right]_{w,h} dF_1 = \\ & = \int_{F_{1,h}} \operatorname{Bi}_k [\theta(x_1, x_2, x_3, Fo)]_{w,h} dF_1 \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5-18)$$

Если ввести в рассмотрение интегральные аналоги вида (5-1), то последняя система принимает вид:

$$\frac{\partial \Theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} = A(\Theta^\Phi) \nabla^2 \Theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo) + \operatorname{Ki}^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo); \quad (5-19)$$

$$\Theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, 0) = \theta_0^\Phi(x_1, x_2, x_3), \quad Fo = 0; \quad (5-20)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{F_{1,h}} \left[ \frac{\partial \Theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} \right]_{w,h} dF_1 = \\ & = \int_{F_{1,h}} \xi_\lambda \operatorname{Bi}_k [\Theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo)]_{w,h} dF_1 \quad (k=1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (5-21)$$

где

$$A(\Theta^\Phi) = \frac{\lambda_1(\theta)}{c_1(\theta) \rho_1}; \quad \operatorname{Ki}^\Phi = \frac{qL^2}{\Phi_m - \Phi_c};$$

$$\xi_\lambda = \frac{[\theta(x_1, x_2, x_3, Fo)]_{w,h}}{[\Theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo)]_{w,h}}.$$

Представим величину  $A(\theta)^\Phi$  следующим образом:

$$A(\theta)^\Phi = 1 + k_a \theta^\Phi + k_{a_2} \theta^{2\Phi} + \dots = 1 + k_a \theta^\Phi, \quad (5-22)$$

где коэффициент  $k_a$  определяется из условия минимума среднеквадратичного отклонения (5-22) во всем интервале изменений  $\Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)$  от 0 до 1

$$k_a = 3 \left( \frac{k_{a_1}}{3} + \frac{k_{a_2}}{4} + \dots \right). \quad (5-23)$$

С учетом (5-22) уравнение (5-19) приближенно можно заменить следующим:

$$\frac{\partial \Theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\bar{\epsilon}} \nabla^2 \Theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo) + \text{Ki}^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo), \quad (5-24)$$

в котором  $\bar{\epsilon}$  — среднее значение

$$\bar{\epsilon} = 1 - \frac{k_a \Theta^\Phi}{2} + \frac{(k_a \Theta^\Phi)^2}{3} - \frac{(k_a \Theta^\Phi)^3}{4} + \dots \quad (5-25)$$

Сопоставления значений  $\epsilon$  и  $\bar{\epsilon}$  показывают, что при  $k_a = -0,5$  различие между ними не превышает 17%. Однако в большинстве реальных случаев величина  $k_a$  меньше. Например, в области комнатных температур для рубина и стекла при  $(T_m - T_c) \leq 50^\circ\text{C}$  максимальное значение  $k_a$  не превышает соответственно  $-0,20$  и  $-0,05$ . В области низких температур  $T_c < 100\text{ K}$ , несмотря на более сильную температурную зависимость теплофизических характеристик, величины  $k_a$  такого же порядка, что связано с меньшим перепадом температур  $T_m - T_c$ . Для  $|k_a| \leq 0,2$  замена  $\epsilon$  на  $\bar{\epsilon}$  приводит к расхождению их величин не более, чем на 6%.

Приближенную линейаризацию системы дифференциальных уравнений (5-19) — (5-21) завершим, представив коэффициент  $\epsilon_\lambda$  в соответствии с (5-5) в виде

$$\epsilon_\lambda = \frac{1}{1 - \frac{k_\lambda}{2} \Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)}. \quad (5-26)$$

При изменении  $\Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)$  от 0 до 1 величина  $\epsilon_\lambda$  изменяется в пределах

$$\frac{1}{1 + \frac{|k_\lambda|}{2}} \leq \epsilon_\lambda \leq 1, \quad (5-27)$$

что позволяет приближенно заменить коэффициент  $\epsilon_\lambda$  его средним значением

$$\bar{\epsilon}_\lambda = 1 - \frac{k_\lambda}{4}. \quad (5-28)$$

Определение численных значений  $\xi_\lambda$  и  $\bar{\xi}_\lambda$  показывает, что расхождение между их значениями не превышает 13% при  $|k_\lambda|=0,5$ . В реальных случаях значения  $k_\lambda$  меньше указанного. В частности, в диапазоне рабочих температур 300—400 К для рубина, вольфрамата кальция и стекла  $k_\lambda$  имеют соответственно следующие значения:  $-0,244$ ;  $-0,047$ ;  $0,146$ . Следовательно, расхождение значений  $\xi_\lambda$  и  $\bar{\xi}_\lambda$  не превышает 6; 1,2 и 3,5%.

Так как для переменной  $\theta^\Phi$  система, включающая (5-24), (5-20) и (5-21) с учетом (5-28), линейна, то использование приближенных методов решения в принципе не отличается от рассмотренных в гл. 4.

Обобщенное интегральное соотношение теплопроводности в этом случае принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Fo} \int_{V_1} \theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo) dV_1 = \\ & = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_1^k \int_{F_{1,h}} \bar{\xi}_\lambda Bi_k [\theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo)]_{w,h} dF_1 + \\ & \quad + \int_{V_1} Ki^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo) dV_1. \end{aligned} \quad (5-29)$$

Если искать решение  $\theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo)$  в форме

$$\theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo) = C(Fo) D(x_1, x_2, x_3), \quad (5-30)$$

где  $D(x_1, x_2, x_3)$  — полином вида (4-7), то коэффициенты в решении (5-30) можно определить, подставив его в граничные условия (5-21) и в соотношение (5-29). В последней операции дополнительно приходится интегрировать уравнение

$$\frac{dC(Fo)}{dFo} + \bar{KC}(Fo) = \frac{Ki^\Phi(Fo) \int_{V_1} Ki^\Phi(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1}, \quad (5-31)$$

где

$$\bar{K} = \frac{\frac{1}{\varepsilon} \sum_1^k \int_{F_{1,h}} \bar{\xi}_\lambda Bi_k [D(x_1, x_2, x_3, Fo)]_{w,h} dF_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1} = \frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K'. \quad (5-32)$$

Решение уравнения (5-31) принимает вид:

$$C(Fo) = \left\{ C_0 + \frac{\int_{V_1} Ki^\Phi(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1} \int_0^{Fo} Ki^\Phi(Fo) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K'Fo\right) dFo \right\} \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K'Fo\right). \quad (5-33)$$

Постоянная интегрирования  $C_0$  обращается в нуль, если к моменту начала работы прибора в стержне устанавливается однородное распределение температуры, равное температуре охлаждающей среды. Если же при  $Fo=0$  функция  $\theta_0^\Phi(x_1, x_2, x_3) \neq 0$ , то постоянную  $C_0$  следует находить из условия минимума функционала

$$\delta \int_{V_1} [\theta_0^\Phi(x_1, x_2, x_3) - C_0 D(x_1, x_2, x_3)]^2 dV_1 = 0, \quad (5-34)$$

откуда следует

$$C_0 = \frac{\int_{V_1} \theta_0^\Phi(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1}. \quad (5-35)$$

Окончательно можно записать:

$$\theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo) = \left[ \frac{\int_{V_1} \theta_0^\Phi(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} - \right. \\ \left. - \frac{\int_{V_1} Ki^\Phi(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1} \int_0^{Fo} Ki^\Phi(Fo) \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K'Fo\right) dFo \right] \times \\ \times D(x_1, x_2, x_3) \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K'Fo\right). \quad (5-36)$$



Для получения распределения температур по сечению образца следует воспользоваться связью (5-9) между  $\Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)$  и  $\Theta^i(x_1, x_2, x_3, Fo)$ .

Период охлаждения. В соответствии с (5-9) и (5-36) к концу периода накачки в активном теле формируется температурное поле, описываемое соотношением

$$\Theta_{II}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II}) = \frac{\sqrt{1 + k_{\Phi} \Theta^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II})} - 1}{\sqrt{1 + k_{\Phi}} - 1}. \quad (5-37)$$

Температурное поле в процессе последующего охлаждения определяет решение системы уравнений:

$$c_1(\theta) \rho_1 \frac{\partial \Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} = \operatorname{div} \lambda_1(\theta) \operatorname{grad} \Theta(x_1, x_2, x_3, Fo); \quad (5-38)$$

$$\Theta(x_1, x_2, x_3, 0) = \Theta_{II}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II}); \quad Fo = 0; \quad (5-39)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{F_{1,h}} \lambda_1(\theta) \left[ \frac{\partial \Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} \right]_{w,h} dF_1 = \\ & = \int_{F_{1,h}} Bi_k [\Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)]_{w,h} dF_1 \quad (k=1, 2\dots). \end{aligned} \quad (5-40)$$

Указанную систему можно линеаризировать тем же путем, что и систему (5-16) — (5-18). Для этого воспользуемся соотношениями (5-1) и связью (5-28). В результате получим следующую линейную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \Theta^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 \Theta^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo); \quad (5-41)$$

$$\Theta^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, 0) = \Theta_{II}^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo_{II}); \quad Fo = 0; \quad (5-42)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{F_{1,h}} \left[ \frac{\partial \Theta^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo)}{\partial Fo} \right]_{w,h} dF_1 = \\ & = \int_{F_{1,h}} \bar{\xi}_{\lambda} Bi_k [\Theta^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo)]_{w,h} dF_1 \quad (k=1, 2\dots). \end{aligned} \quad (5-43)$$

Если отыскивать решение в виде (5-30), то найденные значения коэффициентов полинома  $D(x_1, x_2, x_3)$  при 120

решении задачи для периода накачки сохраняются в рассматриваемом промежутке времени, а коэффициент  $C(F_0)$  находится из следующего интегрального соотношения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial F_0} \int_{V_1} \theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, F_0) dV_1 = \\ & = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_1^k \int_{F_{1, k}} \bar{\xi}_\lambda \text{Bi}_k [\theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, F_0)]_{w, k} dF_{1, k} \quad (5-44) \end{aligned}$$

Из (5-44) с учетом (5-30) следует:

$$C(F_0) = C_0 \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' F_0\right). \quad (5-45)$$

Окончательно для периода охлаждения одиночного цикла можно записать:

$$\begin{aligned} \theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, F_0) = & \left[ \frac{\int_{V_1} \theta_0^\Phi(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} + \right. \\ & \left. + \frac{\int_{V_1} \text{Ki}^\Phi(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1} \int_0^{F_{0n}} \text{Ki}^\Phi(F_0) \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' F_0\right) dF_0 \right] \times \\ & \times D(x_1, x_2, x_3) \exp\left[-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' (F_{0n} + F_0)\right]. \quad (5-46) \end{aligned}$$

Частотный режим. Для получения общего решения в частотном режиме проследим развитие температурного поля в  $m$ -м цикле. Так как процессы изменения температуры протекают при переменных теплофизических характеристиках, то аналитическое исследование вопросов связано с нелинейными дифференциальными уравнениями и нелинейными граничными условиями III рода. В этом случае нарушается принцип суперпозиции температурных полей при чередующихся периодах накачки и охлаждения. Поэтому прямое приложение результатов, полученных в рамках линейных задач, становится неправильным. Однако если с помощью ряда

преобразований и соответствующего выбора вида новой переменной удастся линейаризировать задачу, то для этой новой переменной применение принципа суперпозиции температурных полей будет оправдано. Учитывая это замечание, при рассмотрении вопроса о температурном поле в произвольном  $m$ -м цикле будем определять не температуру  $\Theta(x_1, x_2, x_3, Fo)$ , а ее интегральный аналог  $\Theta^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo)$ , введенный по соотношению (5-1).

Распределение  $\Theta_{nm}^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo)$  в течение  $m$ -го периода накачки определяется решением уравнения (5-19) с граничным (5-20) и следующим начальным условием:

$$\Theta_{nm}^\Phi(x_1, x_2, x_3, 0) = \Theta_{om-1}^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo_0); Fo = 0. \quad (5-47)$$

Проводя вычисления, аналогичные выполненным при решении системы (5-19) — (5-21), получаем:

$$\begin{aligned} \Theta_{nm}^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo) = \\ = \left[ \frac{\int_{V_1} \Theta_{om-1}^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo_0) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} + \Delta\Theta_{nm}^\Phi(Fo) \right] \times \\ \times D(x_1, x_2, x_3) \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' Fo\right), \end{aligned} \quad (5-48)$$

где

$$\Delta\Theta_{nm}^\Phi = \frac{\int_{V_1} Ki_m^\Phi(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D(x_1, x_2, x_3) dV_1} \int_0^{Fo} Ki_m^\Phi(Fo) \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' Fo\right) dFo. \quad (5-49)$$

Систему уравнений, формулирующую задачу для последующего периода охлаждения, представляет собой система (5-41) — (5-43), в которой начальное условие (5-42) записывается в форме

$$\Theta_{om}^\Phi(x_1, x_2, x_3, 0) = \Theta_{nm}^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo_n); Fo = 0; \quad (5-50)$$

где  $\Theta_{nm}^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo_n)$  определяется выражением (5-48) при  $Fo = Fo_n$ .

Опуская промежуточные выкладки, запишем результат

$$\theta_{om}^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo) = \frac{\int_{V_1} \theta_{nm}^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo_n) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} \times \\ \times D(x_1, x_2, x_3) \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' Fo\right). \quad (5-51)$$

Экспоненциальные множители при  $\Delta\theta_{n1}^{\Phi}(Fo_n)$  образуют убывающую геометрическую прогрессию, что позволяет выражения (5-48) и (5-51) полностью определить через параметры первого цикла:

$$\theta_{nm}^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo) = \left\{ \frac{\int_{V_1} \theta_0^{\Phi}(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} \times \right. \\ \times \exp\left[-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' (m-1) Fo_n\right] + \Delta\theta_{n1}^{\Phi}(Fo) + \Delta\theta_{n1}^{\Phi}(Fo_n) \times \\ \times \frac{1 - \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' (m-1) Fo_n\right)}{\exp\left(-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' Fo_n\right) - 1} \Bigg\} \times \\ \times D(x_1, x_2, x_3) \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' Fo\right); \quad (5-52)$$

$$\theta_{om}^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo) = \left\{ \frac{\int_{V_1} \theta_0^{\Phi}(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} \times \right. \\ \times \exp\left[-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' (m-1) Fo_n\right] + \\ \left. + \Delta\theta_{n1}^{\Phi}(Fo_n) \frac{1 - \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' Fo_n m\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' Fo_n\right)} \right\} \times \\ \times D(x_1, x_2, x_3) \exp\left[-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' (Fo_n + Fo)\right]. \quad (5-53)$$

С помощью полученных выражений удастся проследить развитие температурного поля от 1-го до  $m$ -го цикла работы ОКГ.

С увеличением  $m$  распределение  $\theta_m^\Phi$  стремится к квазистационарному. Температурное поле в квазистационарном режиме не зависит от номера цикла, причем влияние начального распределения  $\theta_0(x_1, x_2, x_3)$  на профиль температурного поля и на его уровень не проявляется. Выражения (5-52) и (5-53) для квазистационарного режима принимают вид:

$$\theta_{\infty}^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo) = \left[ \frac{\Delta\theta_{n1}^\Phi(Fo_n)}{1 - \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' Fo_n\right)} \right] \times \\ \times D(x_1, x_2, x_3) \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' Fo\right); \quad (5-54)$$

$$\theta_{\infty}^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo) = \frac{\Delta\theta_{n1}^\Phi(Fo_n)}{1 - \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' Fo_n\right)} \times \\ \times D(x_1, x_2, x_3) \exp\left[-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' (Fo_n + Fo)\right]. \quad (5-55)$$

Для нахождения истинного распределения температуры следует воспользоваться (5-9).

Изложенное выше позволяет проанализировать режим работы ОКГ сериями. Используя соотношения выведенные для произвольного цикла квазинепрерывного режима работы, получаем для  $m-1$ -й серии при  $Fo = Fo_c$

$$\theta_{m-1}^\Phi(x_1, x_2, x_3, Fo_n) = \\ = \frac{\int_{V_1} \theta_0^\Phi(x_1, x_2, x_3) D(x_1, x_2, x_3) dV_1}{\int_{V_1} D^2(x_1, x_2, x_3) dV_1} D(x_1, x_2, x_3) \times \\ \times \exp\left[-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' (m-1) Fo_c\right] + \\ + \frac{1 - \exp\left[-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' (m-1) Fo_c\right]}{1 - \exp\left[-\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' Fo_c\right]} \varphi^\Phi D(x_1, x_2, x_3). \quad (5-56)$$

В квазистационарном режиме при  $Fo = Fo_c$

$$\theta_{\infty}^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo_{\Pi}) = \frac{\varphi^{\Phi} D(x_1, x_2, x_3)}{1 - \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' Fo_c\right)}, \quad (5-57)$$

где

$$\varphi^{\Phi} = \Delta \theta_{\Pi}^{\Phi}(Fo_{\Pi}) \frac{1 - \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' n Fo_{\Pi}\right)}{\exp\left(\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' Fo_{\Pi}\right) - 1} \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' Fo_{\Pi}\right). \quad (5-58)$$

Таким образом, и здесь можно показать возможность установления квазистационарного режима, при котором температура в каждой точке образца колеблется в определенных пределах и воспроизводится через время, равное  $Fo_c$ . Параметры такого режима полностью определяются через характеристики первой серии. Чтобы определить температурное поле в  $i$ -м цикле  $m$ -й серии, достаточно воспользоваться соотношениями (5-52) и (5-53), положив в них  $\theta_0^{\Phi}(x_1, x_2, x_3) = \theta_{\Pi m-1}^{\Phi}(x_1, x_2, x_3, Fo_{\Pi})$  и затем применив обратный переход (5-9).

Если теплофизические характеристики активных элементов не зависят от температуры, то полученные здесь соотношения переходят в соответствующие им формулы, приведенные в гл. 4.

## 5-2. КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР

Изложенный в предыдущем параграфе материал проиллюстрируем на примере расчета теплового режима активного элемента в форме длинного кругового цилиндра. Если теплофизические характеристики активного вещества не зависят от температуры, то при однородной по объему накачке в условиях адиабатического нагрева увеличение температуры составит величину  $\theta_{\text{имп}}$ . С учетом зависимости теплофизических характеристик от температуры величина температурного скачка  $\theta'_{\text{имп}}$  будет:

$$\theta'_{\text{имп}} = \frac{1}{k_c} (\sqrt{1 + 2k_c \bar{c}_1 Ki^2 Fo} - 1), \quad (5-59)$$

или

$$\theta'_{\text{имп}} = \frac{1}{k_c} (\sqrt{1 + 2k_c\theta_{\text{имп}}} - 1). \quad (5-60)$$

Введем корректирующий коэффициент, характеризующий влияние температурной зависимости  $\lambda(\theta)$  и  $c(\theta)$  по соотношению

$$\delta_\theta = \frac{\theta'_{\text{имп}}}{\theta_{\text{имп}}} = \frac{1}{k_c\theta_{\text{имп}}} (\sqrt{1 + 2k_c\theta_{\text{имп}}} - 1). \quad (5-61)$$

Результаты расчета величины  $\delta_\theta$  по формуле (5-61) представлены на рис. 5-1. Как следует из рисунка, ре-

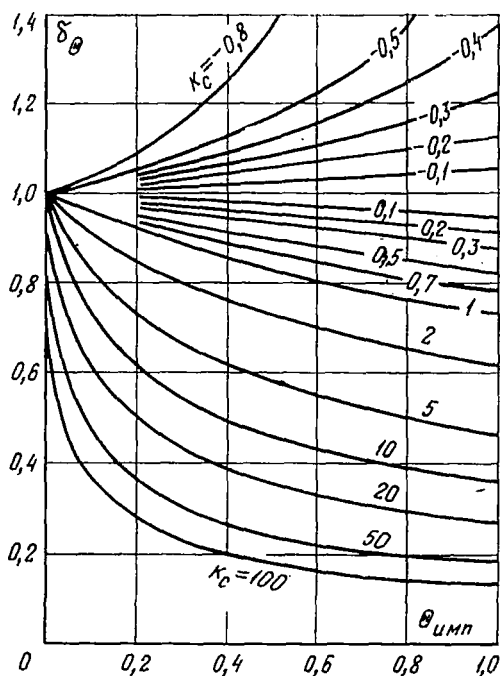


Рис. 5-1. Корректирующий коэффициент  $\delta_\theta$  для учета зависимости удельной теплоемкости активного вещества от температуры при определении нагрева активного элемента импульсного ОКГ за период накачки.

шение линейной задачи может давать значительные отступления от действительной картины протекания процесса. Рассмотрим конкретный пример. Активное тело —

кристалл рубина — помещается в среду переохлажденного жидкого азота с  $T_c = 65$  К. В этих условиях удельная теплоемкость рубина  $c$  равна  $0,045$  дж/(г·К). Пусть плотность объемного тепловыделения в активном теле составляет  $24$  дж/см<sup>3</sup>. Если безразмерные температуры определять в масштабе  $\Delta T_{\text{имп}}$ , т. е.  $\Theta_{\text{имп}} = 1$ , то  $k_c = 10$  и действительное увеличение температуры составит лишь  $0,34\Theta_{\text{имп}}$ , т. е.  $\Delta T_{\text{имп}} = 44^\circ\text{C}$ . Таким образом, данные по нагреву, рассчитанные с учетом и без учета зависимости  $c(\Theta)$  различаются примерно в 3 раза.

Для диапазона температур 300—400 К величина  $k_c$  значительно меньше указанной и значения  $\Theta'_{\text{имп}}$  и  $\Theta_{\text{имп}}$  практически совпадают: для рубина  $\delta_\Theta = 0,95$  ( $\Theta_{\text{имп}} = 0,5$ ;  $k_c = 0,174$ ), для стекла  $\delta_\Theta = 0,99$  ( $\Theta_{\text{имп}} = 0,5$ ;  $k_c = 0,04$ ).

Частотный режим. В частотном режиме послышки импульсов расхождения между результатами расчета по данным линейной и нелинейной задач также могут оказаться заметными; при этом существенную роль играют длительность цикла и эффективность системы охлаждения активного образца. При учете температурной зависимости теплофизических характеристик распределение температуры перед очередным периодом накачки в квазистационарном режиме определяется следующим соотношением:

$$\Theta'(r_1, Fo) = \frac{1}{k_\lambda} \left[ \sqrt{1 + 2k_\lambda \bar{\lambda}_1 \frac{\Theta_{\text{имп}}^\Phi P^\Phi (1 - B^\Phi r_1^2)}{\exp\left(\frac{\bar{\xi}_\lambda}{\varepsilon} K' Fo_{\text{н}}\right) - 1}} - 1 \right], \quad (5-62)$$

где

$$B^\Phi = \frac{\bar{\xi}_\lambda Bi}{2 + \bar{\xi}_\lambda Bi}; \quad K' = \frac{8Bi}{4 + \bar{\xi}_\lambda Bi}; \quad P^\Phi = \frac{1 - 0,5B^\Phi}{1 - B^\Phi + \frac{1}{3}(B^\Phi)^2}; \quad (5-63)$$

$$\Theta_{\text{имп}}^\Phi = \frac{\Theta_{\text{имп}}}{\bar{c}_1 B}. \quad (5-64)$$

Если  $k_c \rightarrow 0$ , то формулы (5-62) и (5-63) переходят в ранее полученные соотношения для линейной задачи (4-45), (4-64). Представляет интерес сравнить эти фор-



мулы. Введем корректирующий коэффициент

$$\delta_{\Pi} = \frac{\bar{\theta}'(Fo_{\Pi})}{\bar{\theta}(Fo_{\Pi})} = \frac{\frac{1}{k_{\lambda}} \int_0^1 \left( \sqrt{1 + 2k_{\lambda} \bar{\lambda}_1 \Theta_{\text{имп}}^{\Phi} P^{\Phi} \frac{1 - B^{\Phi} r_1^2}{\exp\left(\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\epsilon} K' Fo_{\Pi}\right) - 1}} - 1 \right) r_1 dr_1}{\frac{\Theta_{\text{имп}} P (2 - B)}{4 [\exp(K' Fo_{\Pi}) - 1]}} \quad (5-65)$$

Коэффициент  $\delta_{\Pi}$  по формуле (5-65) рассчитывался на ЦВМ «Минск-22» для трех случаев, исходные данные которых приведены в табл. 5-1.

Таблица 5-1

Коэффициенты для определения температурного поля в активном элементе ОКГ при зависимости его теплофизических характеристик от температуры

| Материал | Температурный интервал, К | $\bar{\xi}_{\lambda}$ | $\bar{\epsilon}$ | $k_{\lambda}$ | $k_{\epsilon}$ |
|----------|---------------------------|-----------------------|------------------|---------------|----------------|
| Рубин    | 65—80                     | 1,025                 | 1,16             | —0,1          | 0,8            |
| Рубин    | 300—400                   | 1,061                 | 1,116            | —0,244        | 0,174          |
| Стекло   | 300—400                   | 0,9635                | 0,9761           | 0,146         | 0,04           |

Результаты расчета приведены на рис. 5-2.

Расчеты проводились для  $\Theta_{\text{имп}} = 0,1$  в зависимости от  $Fo_{\Pi}$ . Для рубиновых стержней в рабочем диапазоне

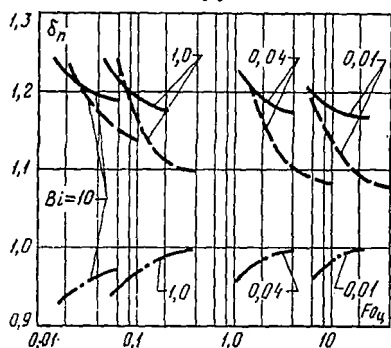


Рис. 5-2. Корректирующий коэффициент  $\delta_{\Pi}$  для учета зависимости теплофизических свойств активного вещества от температуры при определении среднеобъемной температуры рабочего элемента импульсного ОКГ при  $\Theta_{\text{имп}} = 0,1$  и  $Fo = Fo_{\Pi}$  в квазистационарном режиме.

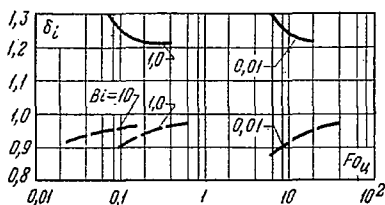
— рубин (65—80 К);  
 --- рубин (300—400 К);  
 - · - · - стекло (300—400 К).

температур 65—80 К при  $Bi = 0,01$  расчеты в линейном приближении оказываются заниженными примерно в 1,2 раза, а в рабочем диапазоне температур 300—400 К в тех же условиях охлаждения — в 1,1—1,2 раза

по сравнению с данными, полученными с помощью соотношения (5-62). Указанное расхождение увеличивается с расширением допускаемого интервала рабочих температур.

Для стеклянных ОКГ в интервале 300—400 К результаты расчета по формулам линейной задачи могут оказаться несколько завышенными ( $\delta_{\pi}=0,95$ ). С ростом эффективности охлаждения величина  $\delta_{\pi}$  несколько увеличивается. Аналогичный расчет проводился и для

Рис. 5-3. Корректирующий коэффициент  $\delta_i$  для учета зависимости теплофизических свойств активного вещества от температуры при определении разности температур между центром и поверхностью активного элемента для  $Fo= Fo_{\text{д}}$  и  $\Theta_{\text{имп}}=0,1$  в квазистационарном режиме.



$\Theta_{\text{имп}}=0,5$ ; при этом результаты практически совпали с приведенными выше.

Характер поправок к линейным решениям сохраняется при определении других характеристик температурного режима импульсного ОКГ. На рис. 5-3 приведены результаты расчета корректирующего коэффициента для определения разности температур между осью и поверхностью рабочего элемента ОКГ для  $Fo=Fo_{\text{д}}$  и  $\Theta_{\text{имп}}=0,1$  в квазистационарном режиме. Расчет проводился по формуле

$$\delta_i = \frac{[\Theta'(r_1, Fo_{\text{д}})]_{r_1=0} - [\Theta'(r_1, Fo_{\text{д}})]_{r_1=1}}{[\Theta(r_1, Fo_{\text{д}})]_{r_1=0} - [\Theta(r_1, Fo_{\text{д}})]_{r_1=1}}. \quad (5-66)$$

С увеличением частоты следования импульсов величина  $\delta_i$  приближается к значению, соответствующему непрерывной накачке. Естественно, что с уменьшением частоты следования импульсов характеристики температурного режима активного тела приближаются к соответствующим характеристикам режима одиночных импульсов. При переходе в режим одиночных импульсов перед очередным импульсом накачки по сечению образца устанавливается однородное поле температур, равное  $T_c$ , и, следовательно, результаты решения линейной и нелинейной задач совпадают. В этой связи пред-

ставляет интерес оценить условия реализации режима одиночных посылок (в пределах заданных  $\delta_e$  — рис. 4-2). Предварительные выводы можно сделать из рис. 5-2 и 5-3. Более точный учет можно провести по формуле

$$\delta'_e = \frac{\int_0^1 \left[ \sqrt{1 + 2k_{\lambda} \bar{\lambda}_1 \Theta_{\text{имп}}^{\Phi} P^{\Phi} \frac{1 - B^{\Phi} r_1^2}{\exp\left(\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' \text{Fo}_{\text{п}}\right) - 1}} - 1 \right] r_1 dr_1}{\int_0^1 \left[ \sqrt{1 + 2k_{\lambda} \bar{\lambda}_1 \Theta_{\text{имп}}^{\Phi} P^{\Phi} (1 - B^{\Phi} r_1^2) \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_{\lambda}}{\varepsilon} K' \text{Fo}_{\text{п}}\right)} - 1 \right] r_1 dr_1} \quad (5-67)$$

Аналогичная оценка проводилась в рамках линейной задачи (см. гл. 4). Поэтому сравним результаты расчета по формулам (5-66) и (4-65). Расчет, проведенный с учетом данных табл. 5-1, показал, что на переходной стадии от частотного режима в режим одиночных импульсов коэффициент  $\delta_e$  отличается от значений  $\delta'_e$  и тем больше, чем меньше величина  $\text{Fo}_{\text{п}}$ . Однако, когда  $\delta'_e < 1,8$ , они практически совпадают. Поэтому в большинстве случаев при решении данного вопроса можно пользоваться результатами, представленными на рис. 4-2а.

Непрерывный режим. Для активного тела оптического квантового генератора непрерывного действия расчетные соотношения вытекают из решения следующей нелинейной системы [Л. 5-16, 5-7]:

$$\frac{1}{r_1} \frac{d}{dr_1} \left[ \lambda_1(\theta) r_1 \frac{d\theta(r_1)}{dr_1} \right] + \text{Ki}(r_1) = 0; \quad (5-68)$$

$$-\lambda_1(\theta) \left[ \frac{d\theta(r_1)}{dr_1} \right]_{r_1=1} = \text{Bi}[\theta(r_1)]_{r_1=1}; \quad (5-69)$$

$$\left[ \frac{d\theta(r_1)}{dr_1} \right]_{r_1=0} = 0. \quad (5-70)$$

Введем в рассмотрение вместо температуры ее интегральный аналог по выражению (5-1). Если коэффициент теплопроводности линейно зависит от температуры

$$\lambda_1(\theta) = 1 + k_{\lambda} \theta, \quad (5-71)$$

то для обратного перехода от  $\theta^\Phi$  к исследуемому параметру — температуре — следует пользоваться формулой

$$\theta = \frac{1}{k_\lambda} \left( \sqrt{1 + k_\lambda \theta^\Phi} - 1 \right). \quad (5-72)$$

Преобразованная в соответствии с (5-1) система (5-68) — (5-70) записывается в виде

$$\frac{1}{r_1} \frac{d}{dr_1} \left[ r_1 \frac{d\theta^\Phi(r_1)}{dr_1} \right] + \text{Ki}^\Phi(r_1) = 0; \quad (5-73)$$

$$-\left[ \frac{d\theta^\Phi(r_1)}{dr_1} \right]_{r_1=1} = \xi_\lambda \text{Bi}[\theta^\Phi(r_1)]_{r_1=1}; \quad (5-74)$$

$$\left[ \frac{d\theta^\Phi(r_1)}{dr_1} \right]_{r_1=1} = 0, \quad (5-75)$$

где

$$\text{Ki}^\Phi(r_1) = \frac{qR^2}{\Phi_m - \Phi_0} = \frac{\text{Ki}(r_1)}{\bar{\lambda}_1}, \quad \xi_\lambda = \frac{[\theta(r_1)]_{r_1=1}}{\lambda_1(\theta) [\theta^\Phi(r_1)]_{r_1=1}}. \quad (5-76)$$

Приближенную линейризацию системы дифференциальных уравнений (5-73) — (5-75) завершим заменой коэффициента  $\xi_\lambda$  его значением по формуле (5-28).

Теперь нетрудно найти решение, которое имеет вид, аналогичный (2-12). С учетом связи (5-72) получаем для стационарного режима

$$\theta(r_1) = \frac{1}{k_\lambda} \times \\ \times \left[ \sqrt{1 + k_\lambda \sum_1^i (-1)^{i+1} \frac{\text{Ki}_i}{2i^2} \left( 1 + \frac{2i}{\xi_\lambda \text{Bi}} - r_1^{2i} \right)} - 1 \right]. \quad (5-77)$$

Если теплопроводность активного вещества слабо зависит от температуры (значение  $k_\lambda$  мало), то формула (5-77) переходит в решение для линейной задачи (2-12). В последнем легко убедиться, разложив (5-77) в ряд и полагая  $\xi_\lambda = 1$ .

Для больших чисел Био ( $\text{Bi} > 100$ ), когда температура на поверхности практически совпадает с температурой охлаждающей среды (граничные условия первого

рода), выражение (5-77) переходит в следующее решение нелинейной системы (5-73)—(5-75) [Л. 16]:

$$\Theta(r_1) = \frac{1}{k_\lambda} \left[ \sqrt{1 + k_\lambda \sum_{i=1}^l (-1)^{i+1} \frac{K l_i}{2i^2} (1 - r_1^{2i})} - 1 \right]. \quad (5-78)$$

На рис. 5-4 для ряда значений  $Bi$  и интервалов рабочих температур показаны распределения  $\Theta(r_1)$  по сечению активных тел. В качестве сравнения на каждом из рисунков приведено поле температур в образце, рассчитанное

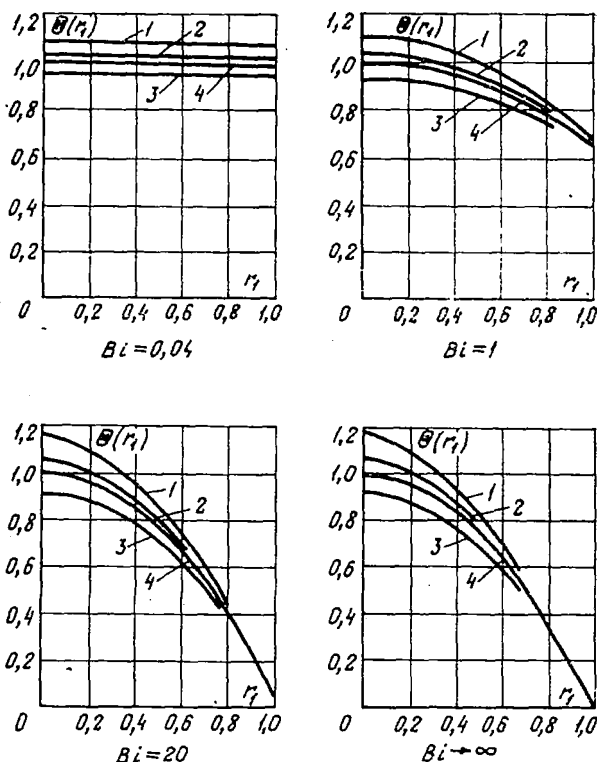


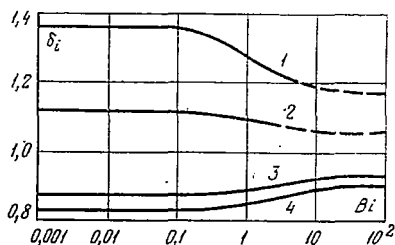
Рис. 5-4. Температурное поле в активном элементе непрерывного ОКГ с учетом зависимости теплофизических характеристик активного вещества от температуры в стационарном режиме.

1 — рубин (300—400 K); 2 — рубин (65—80 K); 3 — стекло (300—400 K); 4 —  $k_\lambda = 0$ .

танное без учета нелинейности ( $k_\lambda = 0$ ). На рис. 5-5 для учета зависимости коэффициента теплопроводности от температуры даны поправки  $\delta_i$  к результатам расчета разности температур между осью и поверхностью активного тела при однородном тепловыделении. Как следует из рис. 5-4 и 5-5, результаты определения температурного режима активного тела в ряде случаев могут заметно отличаться от данных, полученных в линейном приближении, особенно при небольших значе-

Рис. 5-5. Учет зависимости теплофизических характеристик активного вещества при определении перепада температур между центром и поверхностью рабочего элемента непрерывного ОКГ в стационарном режиме.

1 — рубин (300—400 К); 2 — рубин (65—85 К); 3 — стекло (300—400 К); 4 — стекло (200—300 К).



ниях  $Bi$ . Проиллюстрируем сказанное примером. Так, разность температур между центром и поверхностью в рубиновых элементах для диапазонов рабочих температур 65—80 и 300—400 К оказывается выше, чем при расчете в линейном приближении для  $Bi=0,1$ , соответственно в 1,36 и 1,11 раза; для стеклянных образцов в диапазонах 200—300 К и 300—400 К корректирующие коэффициенты для  $Bi=0,1$  равны соответственно 0,83 и 0,87.

Таким образом, зависимость теплофизических свойств активного вещества от температуры может существенно влиять на характеристики температурного режима рабочих элементов ОКГ. Однако целесообразность учета этого факта при определении температурного режима ОКГ следует всегда увязывать с температурным интервалом работы образца, характером зависимости его теплофизических характеристик от температуры, частоты следования импульсов и эффективностью его охлаждения. В рассмотренных выше примерах корректировать расчеты, проведенные в рамках линейной задачи, для стеклянных активных материалов нецелесообразно. Для рубиновых стержней такой учет полезен в области низких температур, а также в случае критических режи-

мов работы (сохранение агрегатного состояния хладагента при резкой зависимости генерационных характеристик от температуры). Последнее замечание относится также и к ОКГ на вольфрамите кальция, флюорите и гранате.

## Глава шестая

### ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Активные элементы ОКГ работают в условиях неоднородного по объему нагрева, который вызывает неодинаковое тепловое расширение различных элементарных объемов вещества. Неравномерное расширение в сплошном теле в общем случае не может происходить свободно. Вследствие этого неоднородный нагрев обуславливает появление температурных напряжений.

В режиме одиночных импульсов при адиабатическом нагреве величина напряжений определяется механическими и теплофизическими свойствами вещества и характером распределения источников тепловыделения. В частотном режиме проявляется также зависимость от величины чисел Бю и Фурье, определяемых частотой следования импульсов накачки, размером и формой поперечного сечения активных элементов, интенсивностью теплообмена с охлаждающей средой. Влияние указанных выше факторов на величину и распределение температурных напряжений по сечению активных элементов в конкретных случаях проявляется по-разному.

Как указывалось выше, температурные напряжения вызывают изменения оптических свойств вещества. Они являются в ряде случаев причиной разрушения активных элементов с невысокой механической прочностью. Поэтому напряжения, возникающие в процессе работы ОКГ, следует считать одним из существенных факторов, влияющих на работу генератора. Данные о величине и характере распределения напряжений, их зависимость от параметров вещества и условий работы необходимы для описания оптических свойств активных элементов в рабочем состоянии и выяснения их влияния на характеристики генерации.

#### 6-1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В данном параграфе рассматриваются основные соотношения несвязанной квазистатической теории термоупругости [Л. 6-1—6-5], которые используются при анализе температурных напряжений в активных элементах твердотельных ОКГ.

Напряженное состояние вещества характеризуется компонентами напряжений  $\sigma_{ij}$ , деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и перемещений  $u_i$ . Совокупности компонент  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  образуют симметричные тензоры напряжений и деформаций (рис. 6-1):

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \quad (6-1)$$

Несвязанная квазистатическая теория не учитывает механическую связь (зависимость температуры от деформаций) и силы инерции, обусловленные нестационарным температурным полем. Пренебрежение эффектом механической связности обосновано при рассмотрении задач термоупругости, если причиной возникновения деформаций являются внешние или внутренние источники тепла. В этом случае влияние деформаций на распределение температуры ничтожно мало и им можно пренебречь [Л. 6-1—6-3, 6-5]. Исследова-

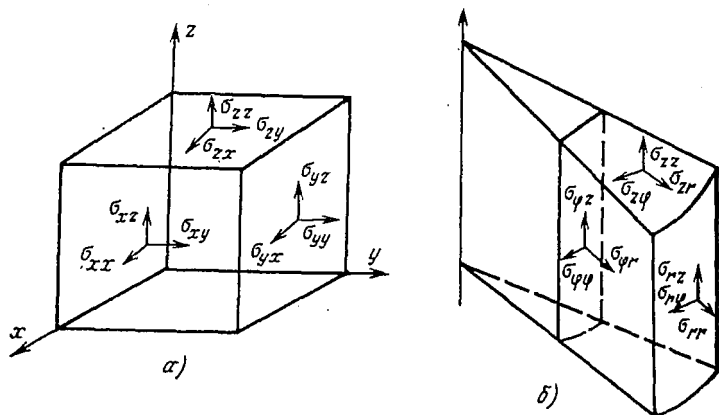


Рис. 6-1. Схема напряжений, приложенных к элементарному объему.

ние температурных напряжений является в общем случае динамической задачей. Однако при достаточно медленном изменении температуры можно не учитывать влияние инерциальных сил. Тогда движение элементарных объемов вещества рассматривают как последовательность квазиравновесных состояний (квазистатическое приближение). В соотношения для деформаций, напряжений и перемещений время будет входить как параметр.

Так как напряжения в активных элементах возникают в результате объемного тепловыделения вследствие поглощения накачки и изменение температуры вещества происходит достаточно медленно, то анализ напряженного состояния активных элементов можно проводить в приближении несвязанной квазистатической теории термоупругости.

В рассматриваемом приближении решение задачи проводится в два этапа. Сначала определяются температурные поля, а затем в соответствии с распределением температуры исследуется напряженное состояние вещества.

Компоненты  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  и  $u_i$  в каждой точке объема изотропного вещества при заданном распределении температуры  $T(x, y, z, t)$  определяются следующей системой уравнений:



уравнениями равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

соотношениями между деформациями и перемещениями:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

и соотношениями между деформациями и напряжениями (соотношениями Дюгамеля-Неймана):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha_T T; \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha_T T; \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha_T T; \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy}; \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2G} \sigma_{xz}; \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \sigma_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$

Граничные условия, записанные через компоненты напряжений, выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_{xx}v_x + \sigma_{xy}v_y + \sigma_{xz}v_z; \\ \bar{Y} &= \sigma_{yx}v_x + \sigma_{yy}v_y + \sigma_{yz}v_z; \\ \bar{Z} &= \sigma_{zx}v_x + \sigma_{zy}v_y + \sigma_{zz}v_z. \end{aligned} \right\} \quad (6-5)$$

В выражениях (6-2) — (6-5)  $X, Y, Z$  — проекции объемных сил на координатные оси;  $G = E/2(1-\nu)$  — модуль сдвига;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\alpha_T$  — температурный коэффициент линейного расширения;  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  — компоненты поверхностных сил в направлении  $x, y, z$ ;  $v_x, v_y, v_z$  — направляющие косинусы внешней нормали к границе поверхности.

При зависимости температуры от двух пространственных координат  $T(x, y, t)$  рассмотрение упрощается. Этому случаю соответствуют типичные задачи термоупругости о плоской деформации и о плоском напряженном состоянии. Плоское напряженное состояние характерно для тонких в направлении  $z$  призматических тел, в частности для тонкой пластины. В условиях плоского напряженного состояния

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0. \quad (6-6)$$

Компоненты напряжений ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ), деформаций ( $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{xy}$ ) и перемещений ( $u_x$ ,  $u_y$ ) при отсутствии объемных сил удовлетворяют следующим уравнениям [см. (6-2) — (6-4)]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0; \\ \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \alpha_T T; \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) + \alpha_T T; \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy}; \\ \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6-7)$$

Компонента деформации  $\epsilon_{zz}$  равна:

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha_T T. \quad (6-8)$$

Плоское деформированное состояние реализуется в длинных (в направлении  $z$ ) призматических и цилиндрических телах. При плоской деформации перемещения  $u_x$  и  $u_y$  зависят только от двух координат  $x$  и  $y$ , а осевое перемещение  $u_z = 0$ . В случае плоского деформированного состояния компоненты  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{xy}$ ,  $u_x$  и  $u_y$  также удовлетворяют уравнениям (6-7), в которых параметры  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha_T$  необходимо заменить на  $E/(1-\nu^2)$ ;  $\nu/(1-\nu)$ ;  $\alpha_T(1+\nu)$  соответственно. Осевое напряжение определяется следующим выражением:

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \alpha_T E T. \quad (6-9)$$

Приведем в качестве примера решения плоской задачи термоупругости для двух частных случаев — свободной пластины с изменением температуры по толщине и цилиндрического стержня с осесимметричным распределением температуры, которые соответствуют наиболее распространенным конфигурациям активных элементов ОКГ.

В пластине, свободной от поверхностных сил, при изменении температуры по толщине  $T(z, t)$  реализуется частный случай плоского напряженного состояния:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0. \quad (6-10)$$

Отличные от нуля компоненты напряжений зависят от координаты  $z$ :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \left[ \frac{1}{2h} N_T + \frac{3z}{2h^3} M_T - T(z, t) \right]. \quad (6-11)$$

$$\text{В (6-11) } N_T = \int_{-h}^h T(z, t) dz; \quad M_T = \int_{-h}^h T(z, t) z dz, \quad 2h \text{ — толщина}$$

пластины.

В рассматриваемом случае компоненты тензора деформаций принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} &= \alpha_T \left[ \frac{1}{2h} N_T + \frac{3z}{2h^3} M_T \right]; \\ \epsilon_{zz} &= -\frac{2\alpha_T \nu}{1 - \nu} \left[ \frac{1}{2h} N_T + \frac{3z}{2h^3} M_T \right] + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T T; \\ \epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6-12)$$

Без учета перемещений тела как твердого целого компоненты  $u$ , равны:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \alpha_T x \left[ \frac{1}{2h} N_T + \frac{3z}{2h^3} M_T \right]; \\ u_y &= \alpha_T y \left[ \frac{1}{2h} N_T + \frac{3z}{2h^3} M_T \right]; \\ u_z &= -\frac{3\alpha_T M_T}{4h^3} (x^2 + y^2) + \frac{\alpha_T}{1 - \nu} \times \\ &\times \left[ (1 + \nu) \int_0^z T(z, t) dz - \frac{\nu z}{h} N_T - \frac{3\nu z^2}{2h^3} M_T \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

При симметричном распределении температуры  $T(z, t) = T(-z, t)$  величина  $M_T = 0$  и компоненты  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $u_x$ ,  $u_y$  не зависят от распределения температуры по толщине, а определяются лишь усредненным нагревом.

Для кругового цилиндрического стержня (сплошного или полого), когда температура  $T(r, t)$  зависит только от расстояния до оси  $r$ , при отношении  $R/L \ll 1$  ( $R$  — внешний радиус,  $L$  — длина стержня) и отсутствии осевых перемещений имеет место плоское деформированное состояние, при  $R/L \gg 1$  и свободных от нагрузок торцах — плоское напряженное состояние.

В случае длинного полого цилиндра  $R_1 \leq r \leq R_2$  радиальные и тангенциальные компоненты напряжений (см. рис. 6-1) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\alpha_T E}{(1-\nu) r^2} \left[ \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} T(r) r dr - \int_{R_1}^r T(r) r dr \right]; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\alpha_T E}{(1-\nu) r^2} \left[ \frac{r^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} T(r) r dr + \int_{R_1}^r T(r) r dr - T(r) r^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6-14)$$

В соответствии с (6-14) радиальное перемещение равно:

$$u_r = \frac{\alpha_T (1+\nu)}{r (1-\nu)} \left[ -\frac{(1-2\nu) r^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} T(r) r dr + \int_{R_1}^r T(r) r dr \right]. \quad (6-15)$$

Решение задачи для плоского напряженного состояния также описывается соотношениями (6-14), (6-15) при замене  $E/(1-\nu^2)$ ,  $\nu/(1-\nu)$ ,  $\alpha_T(1+\nu)$  на  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha_T$  соответственно.

При плоском деформированном состоянии

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - \alpha_T E T = \\ &= \frac{2\alpha_T E \nu}{(1-\nu)(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} T(r) r dr - \frac{\alpha_T E}{1-\nu} T(r). \end{aligned} \quad (6-16)$$

Выражение (6-16) описывает осевое напряжение  $\sigma_{zz}$  при закрепленных торцах ( $u_z=0$ ). Осевое напряжение при свободных торцах стержня равно сумме радиального  $\sigma_{rr}$  и тангенциального  $\sigma_{\varphi\varphi}$  напряжений

$$\sigma_{zz} = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left[ \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} T(r) r dr - T(r) \right]. \quad (6-17)$$

Осевое перемещение без учета движения цилиндра как твердого тела и осевая деформация определяются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} u_z &= \frac{2\alpha_T z}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} T(r) r dr; \\ \epsilon_{zz} &= \frac{2\alpha_T}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} T(r) r dr. \end{aligned} \right\} \quad (6-18)$$

В этом случае радиальное перемещение равно:

$$u_r = \frac{\alpha_z}{r(1-\nu)} \left[ (1+\nu) \int_{R_1}^r T(r) r dr + \frac{(1-3\nu) r^2 + (1+\nu) R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} T(r) r dr \right]. \quad (6-19)$$

Соответствующие выражения, описывающие напряженное состояние сплошного цилиндрического стержня, легко получить, полагая  $R_1=0$  в соотношениях (6-14)—(6-19). В частности, для плоскодеформированного состояния при свободных от нагрузок торцах цилиндрического стержня радиуса  $R$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\alpha_z E}{2(1-\nu)} [\bar{T}^R - \bar{T}^r]; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\alpha_z E}{2(1-\nu)} [\bar{T}^R + \bar{T}^r - 2T(r)]; \\ \sigma_{zz} &= \frac{\alpha_z E}{1-\nu} [\bar{T}^R - T(r)]; \end{aligned} \right\} \quad (6-20)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\alpha_z}{2(1-\nu)} [(1-3\nu) \bar{T}^R - (1+\nu) \bar{T}^r] + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_z T(r); \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\alpha_z}{2(1-\nu)} [(1-3\nu) \bar{T}^R + (1+\nu) \bar{T}^r]; \\ \epsilon_{zz} &= \alpha_z \bar{T}^R; \end{aligned} \right\} \quad (6-21)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\alpha_z r}{2(1-\nu)} [(1+\nu) \bar{T}^r + (1-3\nu) \bar{T}^R]; \\ u_z &= \alpha_z z \bar{T}^R, \end{aligned} \right\} \quad (6-22)$$

где

$$\bar{T}^r = \frac{2}{r^2} \int_0^r T(r) r dr.$$

На основании приведенных выше соотношений и результатов анализа теплового режима, изложенных в гл. 2—4, можно исследовать характер напряжений, деформаций и перемещений, возникающих в активных элементах твердотельных ОКГ.

В последующих § 6-2 и 6-3 анализируется напряженное состояние активных элементов [Л. 6-6—6-8] на примере цилиндрического стержня при осесимметричном распределении источников тепла.

## 6-2. РЕЖИМ ОДИНОЧНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Для цилиндрического стержня, торцы которого свободны от нагрузок, во время действия импульса накачки компоненты напряжений в приближении плоской деформации определяются следую-

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}(r_1, Fo) &= \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n (1 - e^{-\mu_n^2 Fo}) \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{1}{r_1} \frac{J_1(\mu_n r_1)}{J_1(\mu_n)} \right] q_n; \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r_1, Fo) &= \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n (1 - e^{-\mu_n^2 Fo}) \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{1}{r_1} \frac{J_1(\mu_n r_1)}{J_1(\mu_n)} - \frac{\mu_n J_0(\mu_n r_1)}{J_1(\mu_n)} \right] q_n; \\ \sigma_{zz}(r_1, Fo) &= \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n (1 - e^{-\mu_n^2 Fo}) \left[ 2 - \frac{\mu_n J_0(\mu_n r_1)}{J_1(\mu_n)} \right] q_n, \end{aligned} \right\} \quad (6-23)$$

где  $q_n$  определяется соотношением [3-84].

При адиабатическом нагреве распределение температуры по сечению активного элемента совпадает с распределением мощности тепловыделения  $q(r_1)$  (см. гл. 3). Тогда соотношения (6-23) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}(r, t) &= \frac{\alpha_r E}{1-\nu} \frac{t}{c\rho} \left[ \frac{1}{R^2} \int_0^R q(r) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r q(r) r dr \right]; \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, t) &= \frac{\alpha_r E}{1-\nu} \frac{t}{c\rho} \left[ \frac{1}{R^2} \int_0^R q(r) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r q(r) r dr + 2q(r) \right]; \\ \sigma_{zz}(r, t) &= \frac{\alpha_r E}{1-\nu} \frac{t}{c\rho} \left[ \frac{2}{R^2} \int_0^R q(r) r dr - q(r) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6-24)$$

Выражения (6-24) можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}(r, t) &= \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} \Delta \bar{T} \left[ 1 - \frac{\bar{q}^r}{\bar{q}^R} \right]; \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, t) &= \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} \Delta \bar{T} \left[ 1 + \frac{\bar{q}^r}{\bar{q}^R} - 2 \frac{q(r)}{\bar{q}^R} \right]; \\ \sigma_{zz}(r, t) &= \frac{\alpha_r E}{(1-\nu)} \Delta \bar{T} \left[ 1 - \frac{q(r)}{\bar{q}^R} \right], \end{aligned} \right\} \quad (6-25)$$

где  $\Delta \bar{T}$  — усредненный по объему нагрев к моменту времени  $t$ ,  $\bar{q}r = \frac{2}{r^2} \int_0^r q(r) r dr$ .

При параболическом распределении источников тепловыделения

$$q(r) = q(0) \left[ 1 + \frac{1-b}{b} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (6-26)$$

радиальная зависимость напряжений определяется следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}(r, t) &= -\frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \Delta \bar{T} \frac{b-1}{b+1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]; \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, t) &= -\frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \Delta \bar{T} \frac{b-1}{b+1} \left[ 1 - 3 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]; \\ \sigma_{zz}(r, t) &= -\frac{\alpha_T E}{1-\nu} \Delta \bar{T} \frac{b-1}{b+1} \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6-27)$$

Здесь  $b = q(0)/q(R)$  — перепад мощности тепловыделения;  $\Delta \bar{T}(b-1)/(b+1)$  — усредненный по объему перепад температуры между центром и боковой поверхностью. Характер распределения температурных напряжений (6-27) по сечению цилиндрического стержня при  $b > 1$  иллюстрируется рис. 6-2.

Как следует из (6-27), тангенциальная и осевая составляющие напряжений изменяют знак в точках  $r = R/\sqrt{3}$  и  $r = R/\sqrt{2}$  соответственно. В области  $0 \leq r < R/\sqrt{2}$  при  $b > 1$  стержень подвергнут продольному сжатию, а при  $R/\sqrt{2} < r \leq R$  — продольному растяжению. Радиальное напряжение сжимающее во всей области  $0 \leq r \leq R$ . Максимальное по абсолютной величине значение напряжений равно:

$$\sigma_{\max} = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \Delta \bar{T} \frac{b-1}{b+1}.$$

Проведем численную оценку возникающих напряжений для стеклянных стержней  $\alpha_T = 1,02 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ ;  $E = 6,98 \cdot 10^5 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ ,  $\nu = 0,225$ . При трехкратном перепаде мощности тепловыделения ( $b = 3; 0,33$ ) и усредненном по объему адиабатическом нагреве  $\Delta \bar{T} = 7 \text{ К}$  величина  $\sigma_{\max}$  составляет  $32 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ .

Величина термоупругих напряжений, возникающих в активных элементах, оценивалась по экспериментально определяемому градиенту температуры в работах [Л. 6-9, 6-10]. По данным [Л. 6-10] в рубиновых стержнях температурный градиент  $10 \text{ К} \cdot \text{см}^{-1}$  вызывает напряжения  $100 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ . В работе [Л. 6-9] приведены следующие значения возникающих напряжений:  $120 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$  для рубина и  $25 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$  для стекла.

Как следует из (6-24), величина максимальных напряжений при заданной зависимости  $q(r)$  пропорциональна наибольшему значению  $[\bar{q}R - q(r)]$  и не зависит от размеров стержня. На примере параболического распределения видно, что напряжения одинаковы в стержнях различного диаметра при условии постоянства усредненного

перепада мощности тепловыделения по сечению. Так как характер распределения накачки зависит от радиуса стержня, влияние размера поперечного сечения при прочих равных условиях существенно для величины и распределения возникающих напряжений. На рис. 6-3 приведено радиальное распределение осевых напряжений в полированных цилиндрических стержнях из рубина с концентрацией ионов хрома 0,03%. Расчет напряжений проводился на основании данных по радиальной зависимости мощности тепловыделения при изотроп-

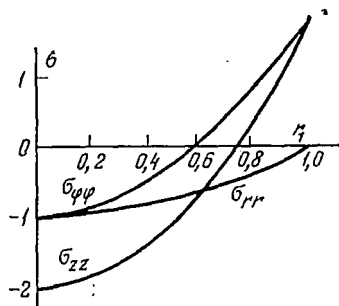


Рис. 6-2. Радиальное распределение напряжений в цилиндрическом стержне.

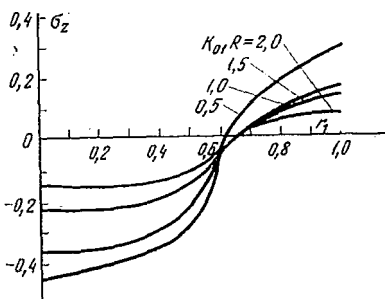


Рис. 6-3. Радиальное распределение осевых напряжений  $\sigma_{zz}$  в рубиновых стержнях.

ной накачке (см. § 1-1). Из данных рис. 6-3 следует, что максимальные температурные напряжения в стержне радиусом 0,28 см примерно в 3 раза выше, чем у стержней радиусом  $R=1$  см. Уменьшение напряжений с увеличением радиуса стержня связано с более однородным распределением источников тепловыделения.

### 6-3. ЧАСТОТНЫЙ РЕЖИМ

В частотном режиме существенное влияние на величину температурных напряжений оказывают процессы теплообмена и теплопроводности. Для цилиндрических стержней радиальные и тангенциальные напряжения в плоском деформированном состоянии для  $m$ -го цикла при произвольном распределении источников тепловыделения определяются следующими соотношениями [Л. 6-6—6-8]:

$$\sigma_{rr}^m(r_1, F_0) = \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n \left[ 1 - \frac{1}{r_1} \frac{J_1(\mu_n r_1)}{J_1(\mu_n)} \right] q_n; \quad (6-28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^m(r_1, F_0) = & \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n \left[ 1 + \frac{1}{r_1} \times \right. \\ & \left. \times \frac{J_1(\mu_n r_1)}{J_1(\mu_n)} - \frac{\mu_n J_0(\mu_n r_1)}{J_1(\mu_n)} \right] q_n, \end{aligned} \quad (6-29)$$



где  $F_n = 1 - f_{nm} e^{-\mu_n^2 Fo}$  для  $m$ -го периода нагрева,  $F_n = f_{om} e^{-\mu_n^2 Fo}$  для  $m$ -го периода охлаждения,  $f_{nm}$  и  $f_{om}$  определяются соотношениями (3-37), (3-38).

При свободных от нагрузок торцах стержня осевые напряжения равны:

$$\sigma_{zz}^m(r_1, Fo) = \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n \left[ 2 - \frac{\mu_n J_0(\mu_n r_1)}{J_1(\mu_n)} \right] q_n. \quad (6-30)$$

Аналогичным образом определяются компоненты деформаций:

$$\epsilon_{rr}^m(r_1, Fo) = \frac{\alpha_T}{2(1-\nu)} \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n \left[ (1-3\nu) - (1-\nu) \frac{1}{r_1} \frac{J_1(\mu_n r_1)}{J_1(\mu_n)} + (1+\nu) \frac{\mu_n J_0(\mu_n r_1)}{J_1(\mu_n)} \right] q_n; \quad (6-31)$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi}^m(r_1, Fo) = \frac{\alpha_T}{2(1-\nu)} \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n \left[ (1-3\nu) + (1-\nu) \frac{1}{r_1} \frac{J_1(\mu_n r_1)}{J_1(\mu_n)} \right] q_n; \quad (6-32)$$

$$\epsilon_{zz}^m(r_1, Fo) = \frac{\alpha_T}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n \frac{J_0(\mu_n)}{J_1(\mu_n)} q_n. \quad (6-33)$$

При адиабатическом нагреве за импульс накачки и равномерном по объему тепловыделении напряжения определяются в соответствии с (3-39) следующими соотношениями:

$$\sigma_{rr}^{nm}(r_1, Fo_H) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \frac{q_{TH}}{c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\mu_n} \left[ J_1(\mu_n) - \frac{1}{r_1} J_1'(\mu_n r_1) \right] f_m; \quad (6-34)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{nm}(r_1, Fo_H) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \frac{q_{TH}}{c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\mu_n} \left[ J_1(\mu_n) + \frac{1}{r_1} J_1(\mu_n r_1) - \mu_n J_0(\mu_n r_1) \right] f_m; \quad (6-35)$$

$$\sigma_{zz}^{nm}(r_1, Fo_H) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \frac{q_{TH}}{c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\mu_n} [2J_1(\mu_n) - \mu_n J_0(\mu_n r_1)] f_m. \quad (6-36)$$

Зависимость радиального распределения напряжений в стеклянном стержне ( $R=0,4$  см;  $a=4 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>·сек<sup>-1</sup>;  $\tau_n=10^{-3}$  сек;  $f=1$  гц,  $Bi=2$ ) от  $m$  в момент окончания действия импульса накачки при однородном тепловыделении приведена на рис. 6-4. Как следует из рис. 6-4, напряжения растут с увеличением  $m$ . Вследствие адиабатичности нагрева за импульс накачки формирование температурного поля происходит во время между импульсами. В течение пер-

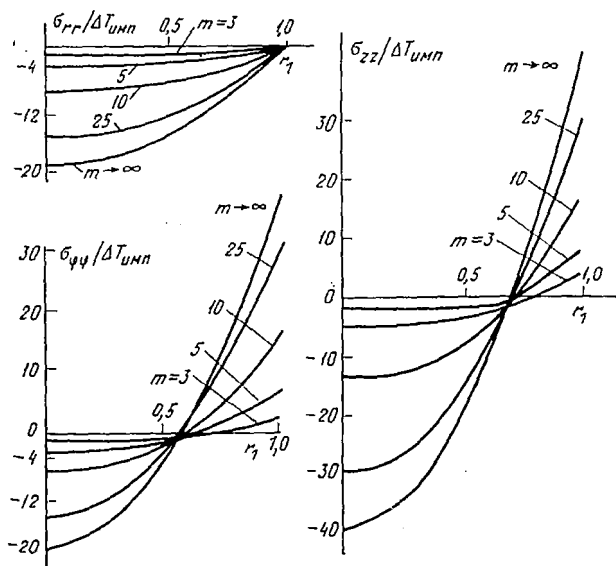


Рис. 6-4. Зависимость величины напряжений от  $m$ .

вых периодов работы генератора температурный градиент относительно мал. С увеличением  $m$  температурный градиент возрастает, достигая максимального значения в квазистационарном режиме. В этом случае

$$\sigma_{rr}^{\infty}(r_1, Fo_H) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \frac{q\tau_H}{c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \left[ J_1(\mu_n) - \frac{1}{r_1} J_1(\mu_n r_1) \right]}{\mu_n [1 - e^{-\mu_n^2 Fo_H}]}; \quad (6-37)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi}^{\infty}(r_1, Fo_H) &= \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \frac{q\tau_H}{c\rho} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \left[ J_1(\mu_n) + \frac{1}{r_1} J_1(\mu_n r_1) - \mu_n J_0(\mu_n r_1) \right]}{\mu_n [1 - e^{-\mu_n^2 Fo_H}]}; \end{aligned} \quad (6-38)$$

$$\sigma_{zz}^{\infty}(r_1, Fo_H) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \frac{q\tau_H}{c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n [2J_1(\mu_n) - \mu_n J_0(\mu_n r_1)]}{\mu_n [1 - e^{-\mu_n^2 Fo_H}]}. \quad (6-39)$$

Как указывалось выше, в режиме одиночных импульсов величина напряжений определяется в основном характером распределения источников тепла. В частотном режиме профиль температуры по сечению активного элемента зависит не только от распределения источников тепла, но и от коэффициента теплопроводности и интенсивности теплообмена с окружающей средой. Поэтому величина и кинетика формирования профиля в общем случае будут зависеть от указанных выше факторов.

В табл. 6-1 приведена зависимость отношения  $\delta'' = \frac{\sigma^{im}(r_1, Fo_n)}{\sigma^{ho}(r_1, Fo_n)}$  от  $m Fo_n$  ( $Fo_n = 5 \cdot 10^{-3}$ ) при различных значениях числа Бю. Численный расчет проводился на ЭВМ «Минск-2» в соответствии с формулами (6-34), (6-35), (6-37) и (6-38). При расчетах суммировались

Таблица 6-1

Зависимость  $\delta'' = \frac{\sigma^{im}(r_1, Fo_n)}{\sigma^{ho}(r_1, Fo_n)}$  от  $m Fo_n$  при  $Fo_n = 5 \cdot 10^{-3}$

| Вl  | $r_1$ | $m Fo_n$        |                             |                 |                             |                 |                             |                 |                             |
|-----|-------|-----------------|-----------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------|-----------------------------|
|     |       | 0,1             |                             | 0,5             |                             | 1,0             |                             | 2,0             |                             |
|     |       | $\delta''_{rr}$ | $\delta''_{\varphi\varphi}$ | $\delta''_{rr}$ | $\delta''_{\varphi\varphi}$ | $\delta''_{rr}$ | $\delta''_{\varphi\varphi}$ | $\delta''_{rr}$ | $\delta''_{\varphi\varphi}$ |
| 0,5 | 0,1   | 0,033           | 0,033                       | 0,31            | 0,32                        | 0,56            | 0,56                        | 0,82            | 0,82                        |
|     | 0,3   | 0,036           | 0,039                       | 0,31            | 0,32                        | 0,56            | 0,56                        | 0,82            | 0,82                        |
|     | 0,5   | 0,038           | 0,073                       | 0,32            | 0,35                        | 0,56            | 0,58                        | 0,82            | 0,83                        |
|     | 0,7   | 0,044           | 0,017                       | 0,32            | 0,29                        | 0,56            | 0,55                        | 0,82            | 0,83                        |
|     | 0,9   | 0,052           | 0,047                       | 0,33            | 0,32                        | 0,57            | 0,57                        | 0,82            | 0,82                        |
|     | 1,0   | 1,0             | 0,058                       | 1,0             | 0,34                        | 1,0             | 0,57                        | 1,0             | 0,82                        |
| 1   | 0,1   | 0,060           | 0,061                       | 0,48            | 0,49                        | 0,77            | 0,77                        | 0,95            | 0,95                        |
|     | 0,3   | 0,063           | 0,072                       | 0,49            | 0,50                        | 0,77            | 0,77                        | 0,95            | 0,95                        |
|     | 0,5   | 0,069           | 0,013                       | 0,49            | 0,54                        | 0,77            | 0,79                        | 0,95            | 0,96                        |
|     | 0,7   | 0,080           | 0,032                       | 0,50            | 0,47                        | 0,77            | 0,76                        | 0,95            | 0,95                        |
|     | 0,9   | 0,094           | 0,084                       | 0,51            | 0,50                        | 0,79            | 0,78                        | 0,95            | 0,95                        |
|     | 1,0   | 1,0             | 0,10                        | 1,0             | 0,52                        | 1,0             | 0,78                        | 1,0             | 0,95                        |
| 2   | 0,1   | 0,10            | 0,10                        | 0,66            | 0,66                        | 0,77            | 0,77                        | 0,99            | 0,99                        |
|     | 0,3   | 0,11            | 0,12                        | 0,67            | 0,67                        | 0,77            | 0,77                        | 0,99            | 0,99                        |
|     | 0,5   | 0,12            | 0,22                        | 0,67            | 0,73                        | 0,77            | 0,79                        | 0,99            | 0,99                        |
|     | 0,7   | 0,13            | 0,06                        | 0,68            | 0,64                        | 0,77            | 0,76                        | 0,99            | 0,99                        |
|     | 0,9   | 0,16            | 0,14                        | 0,69            | 0,68                        | 0,78            | 0,77                        | 0,99            | 0,99                        |
|     | 1,0   | 1,0             | 0,17                        | 1,0             | 0,70                        | 1,0             | 0,78                        | 1,0             | 0,99                        |
| 10  | 0,1   | 0,22            | 0,22                        | 0,88            | 0,88                        | 0,99            | 0,99                        | 1,0             | 1,0                         |
|     | 0,3   | 0,23            | 0,26                        | 0,88            | 0,89                        | 0,99            | 0,99                        | 1,0             | 1,0                         |
|     | 0,5   | 0,25            | 0,45                        | 0,89            | 0,92                        | 0,99            | 0,99                        | 1,0             | 1,0                         |
|     | 0,7   | 0,28            | 0,14                        | 0,89            | 0,87                        | 0,99            | 0,99                        | 1,0             | 1,0                         |
|     | 0,9   | 0,32            | 0,30                        | 0,90            | 0,90                        | 0,99            | 0,99                        | 1,0             | 1,0                         |
|     | 1,0   | 1,0             | 0,35                        | 1,0             | 0,90                        | 1,0             | 0,99                        | 1,0             | 1,0                         |

ряды с учетом первых 30 членов. Из приведенных данных следует, что при  $\delta'' \geq 0,5$  величина  $\delta''$  практически не зависит от  $r_1$ , т. е. к этому времени (зависящему от  $Bi$ ) устанавливается профиль температурных напряжений, соответствующий квазистационарному тепловому режиму.

При малых значениях  $mFo_{\text{ц}}$  величина напряжений достаточно сильно зависит от значения  $Bi$ . В частности, уменьшение  $Bi$  от 10 до 0,5 приводит при  $mFo_{\text{ц}}=0,1$  к уменьшению величины напряжений примерно в 7 раз. Поэтому при работе ОКГ в режиме посылки импульсов сериями в ряде случаев может оказаться полезным для снижения напряжений переход от жидкостного к воздушному охлаждению активных элементов.

При малых частотах следования импульсов величина напряжений в квазистационарном режиме (6-37), (6-38) является сложной функцией радиуса стержня, коэффициента теплопроводности и теплоемкости вещества, частоты следования импульсов и коэффициента теплообмена. В табл. 6-2 приведены данные численного расчета зависимости  $\delta''(Bi)$  от величины числа Био для различных значений  $Fo_{\text{ц}}$ .

Таблица 6-2

Зависимость  $\delta''(Bi) = \frac{\sigma_{rr}^{\infty}(0, Fo_{\text{ц}}, Bi)}{\sigma_{rr}^{\infty}(0, Fo_{\text{ц}}, Bi=0.5)}$  от числа Био при различных значениях  $Fo_{\text{ц}}$

| Bi    | $Fo_{\text{ц}}$ |      |      |      |
|-------|-----------------|------|------|------|
|       | 1,0             | 0,5  | 0,1  | 0,05 |
| 0,5   | 1,0             | 1,0  | 1,0  | 1,0  |
| 1,0   | 0,70            | 0,87 | 0,99 | 1,0  |
| 2,0   | 0,39            | 0,70 | 0,97 | 1,0  |
| 10,0  | 0,07            | 0,36 | 0,94 | 1,0  |
| 100,0 | 0,07            | 0,22 | 0,90 | 1,0  |

Как видно из табл. 6-2, в области малых частот  $f$  (больших значений  $Fo_{\text{ц}}$ ) величина напряжений существенно зависит от  $Bi$ . С увеличением  $Bi$  величина напряжений уменьшается вследствие понижения уровня нагрева активных элементов. При увеличении частоты  $f$  зависимость  $\sigma^{\infty}$  от  $Bi$  становится менее заметной и при  $Fo_{\text{ц}}=0,1$  ее можно не учитывать. Независимость  $\sigma^{\infty}$  от  $Bi$  является следствием того, что при больших частотах  $f$  распределение температуры по сечению стержня описывается соотношением (3-56). Поэтому расчет напряжений можно проводить в этом случае по следующим формулам [Л. 3-38]:

$$\sigma_{rr} = - \frac{\alpha_r E}{1-\nu} \frac{q\tau_{\text{ц}} R^2 f}{16\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]; \quad (6-40)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = - \frac{\alpha_r E}{1-\nu} \frac{q\tau_{\text{ц}} R^2 f}{16\lambda} \left[ 1 - 3 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]; \quad (6-41)$$

$$\sigma_{zz} = - \frac{\alpha_r E}{1-\nu} \frac{q\tau_{\text{ц}} R^2 f}{8\lambda} \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (6-42)$$

Как следует из (6-40) — (6-42), величина напряжений растет линейно с частотой следования импульсов  $f$ , площадью поперечного сечения и уменьшается обратно пропорционально коэффициенту теплопроводности  $\lambda$ . В этом случае (для больших частот следования импульсов накачки) величина напряжений не зависит от интенсивности теплообмена с охлаждающей средой.

Рассмотрим зависимость напряжений от распределения источников тепловыделения по сечению цилиндрического стержня. На рис. 6-5 сплошными линиями представлена радиальная зависимость напряжений в квазистационарном тепловом режиме, рассчитанная в соответствии с выражениями (6-28) — (6-30) при параболической зависимости тепловыделения от  $r_1$  (6-26). При расчете предполагалось, что  $b=3$ . Там же штриховыми линиями представлены зависимости  $\sigma(r_1)$  при равномерном тепловыделении с усредненной по объему мощностью  $\bar{q}^R$ . Как следует из рис. 6-5, наибольшее расхождение (около 30%) достигается в центре стержня. Несмотря на относительно большой перепад тепловыделения по сечению, ошибка в определении напряжений в предположении равномерного тепловыделения сравнительно невелика. Это является следствием слабой зависимости профиля температуры в установившемся режиме от распределения источников тепла (см. гл. 3). Вследствие

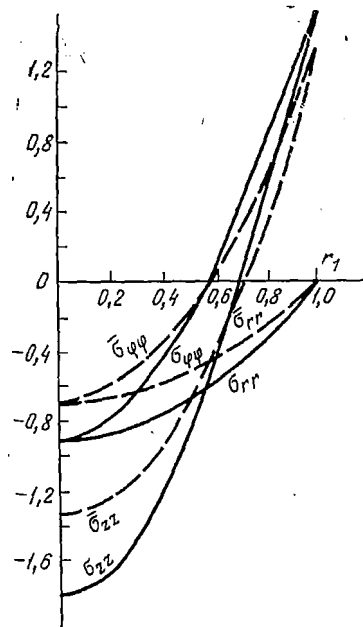


Рис. 6-5. Влияние неравномерности распределения источников тепловыделения на температурные напряжения  $\sigma \frac{16\lambda(1-\nu)}{\alpha_T E q(0) R^2}$ .

относительно слабой зависимости напряжений от характера распределения источников тепла оценку величины  $\sigma(r)$  в частотном режиме можно проводить по следующим формулам:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\alpha_T E}{1-\nu} \frac{\Delta \bar{T}_{\text{нмп}} R^2 f}{16a} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]; \quad (6-43)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{\alpha_T E}{1-\nu} \frac{\Delta \bar{T}_{\text{нмп}} R^2 f}{16a} \left[ 1 - 3 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]; \quad (6-44)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{\alpha_T E}{1-\nu} \frac{\Delta \bar{T}_{\text{нмп}} R^2 f}{8a} \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (6-45)$$

где  $\Delta \bar{T}_{\text{нмп}}$  — усредненный по объему адиабатический нагрев стержня за импульс накачки.

Как следует из (6-43) — (6-45), максимальные напряжения достигаются в центре и на боковой поверхности стержня, равные по аб-

солютной величине

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \frac{\Delta T_{\text{имп}} R^2 f}{8a}. \quad (6-46)$$

Подставляя значения механических и тепловых свойств рубина ( $\alpha_T = 5,33 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ ,  $E = 4,4 \cdot 10^6 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ ,  $\nu = 0,16$ ,  $a = 0,135 \text{ см}^2 \times \times \text{сек}^{-1}$ ) и стекла ( $\alpha_T = 1 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ ,  $E = 6,5 \cdot 10^5 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ ;  $\nu = 0,24$ ,  $a = 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ ), получаем  $\sigma_{\text{макс}} = 28,3 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2} \Delta T_{\text{имп}} R^2 f$  (рубин) и  $276 \Delta T_{\text{имп}} R^2 f \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$  (стекло). При одних и тех же значениях  $\Delta T_{\text{имп}}$ ,  $R$  и  $f$  значения напряжений для стекла примерно на порядок превышают напряжения для рубина. В частности, при  $R = 0,4 \text{ см}$ ,  $\Delta T_{\text{имп}} = 1 \text{ К}$ ,  $f = 10 \text{ гц}$   $\sigma_{\text{макс}}$  составляет  $440 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$  для стекла и  $45 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$  для рубина.

В соответствии с (6-46) соотношение для максимальных напряжений может быть записано в следующем виде:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \frac{T_{r=0} - T_{r=R}}{2}, \quad (6-47)$$

где  $T_{r=0}$  и  $T_{r=R}$  — значения температуры в центре и на боковой поверхности стержня.

При больших частотах следования импульсов накачки возникающие напряжения могут приводить к разрушению активных элементов из материалов с невысокой механической прочностью (в частности, из стекла) [Л. 6-6, 6-11]. Из (6-47) следует допустимый перепад температуры между центром и боковой поверхностью стержня, равный

$$T_{r=0} - T_{r=R} < 2\sigma_{\text{пред}} \frac{1 - \nu}{\alpha_T E}, \quad (6-48)$$

где  $\sigma_{\text{пред}}$  — величина напряжения, приводящая к разрушению материала.

Как видно из (6-48), предельно допустимый перепад температур определяется механическими свойствами материала. Так, например, при  $\sigma_{\text{пред}} = 400 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$  напряжения не вызывают разрушения стеклянного стержня при

$$T_{r=0} - T_{r=R} < 93^\circ \text{С}. \quad (6-49)$$

Допустимые частоты повторения импульсов накачки, не вызывающие разрушения стержня вследствие возникающих напряжений, определяются следующим соотношением:

$$f < \sigma_{\text{пред}} \frac{1 - \nu}{\alpha_T E} \frac{8a}{\Delta T_{\text{имп}} R^2}. \quad (6-50)$$

Проведем оценку для стеклянного стержня радиусом  $R = 0,2 \text{ см}$  при  $\Delta T_{\text{имп}} = 1 \text{ К}$ . Полагая  $\sigma_{\text{пред}} = 400 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ , получаем  $f < 37 \text{ гц}$ .

#### 6.4. ТЕРМИЧЕСКИЕ ИСКАЖЕНИЯ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Термические искажения (изменения оптических свойств и геометрических размеров) активных элементов, возникающие в процессе работы ОКГ, как указывалось выше, обусловлены нагревом и температурными напряжениями.

Оптические свойства вещества в общем случае описываются индикатрисой, имеющей форму эллипсоида, оси которого направлены

вдоль главных осей тензора относительной диэлектрической непроницаемости [Л. 6-12]

$$B_{ii}x_i^2 = 1, \quad (6-51)$$

где  $B_{ii} = 1/n_i^2$  — компоненты тензора относительной диэлектрической непроницаемости,  $n_i$  — главные показатели преломления кристалла.

Под действием напряжений изменяются положение системы оптических осей и главные значения показателя преломления. Так, при одностороннем сжатии (растяжении) изотропное вещество обладает свойствами одноосного кристалла. Изменение оптических свойств (показателя преломления) у деформированного кристалла пропорционально напряжениям (деформациям) и определяется тензором пьезооптических (упругооптических) коэффициентов.

Рассмотрим изменения показателя преломления, вызываемые термическими напряжениями в активных элементах из кристаллического вещества кубической системы класса  $m\bar{3}m$ , к которой относится один из наиболее распространенных лазерных материалов — иттрий-алюминиевый гранат.

Изучение термических искажений активных элементов из иттрий-алюминиевого граната проводилось рядом авторов [Л. 6-7, 6-13—6-18]. Ниже излагаем результаты теоретического исследования изменения оптических свойств активных элементов, следуя работе [Л. 6-7].

При отсутствии напряжений кристаллы кубической системы являются изотропными. Оптическая индикатриса представляет собой сферу

$$B_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1. \quad (6-52)$$

Под действием напряжений индикатриса деформируется

$$B_1x_1^2 + B_2x_2^2 + B_3x_3^2 + 2B_4x_2x_3 + 2B_5x_1x_3 + 2B_6x_1x_2 = 1, \quad (6-53)$$

где

$$B_{1,2,3} = B_0 + \Delta B_{1,2,3}, B_{4,5,6} = \Delta B_{4,5,6}.$$

Изменения относительной диэлектрической непроницаемости определяются из следующего уравнения:

$$\Delta B_i = \pi_{ij}\sigma_j, \quad (6-54)$$

где  $\pi_{ij}$  — пьезооптические коэффициенты,  $\sigma_j$  — тензор напряжений. Здесь и далее тензоры приводятся в матричной записи. Индексам 11; 22; 33; 32 и 23; 13 и 31; 12 и 21 соответствуют индексы 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Из анализа соотношений, приведенных в § 6-1, следует, что напряженное состояние активных элементов целесообразно описывать тензором напряжений, имеющим две неравные нулю недиагональные компоненты в исходной системе координат. Так, для активного элемента цилиндрической формы, геометрическая ось которого направлена по  $x_3$ , тензор напряжений имеет вид:

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & 0 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}. \quad (6-55)$$

Система координат тензора (6-55) развернута относительно его главных направлений на угол  $\theta$ :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\sigma_6}{\sigma_3 - \sigma_1}. \quad (6-56)$$

Для активных элементов цилиндрической формы с аксально-симметричным распределением напряжений и геометрической осью, направленной по  $x_3$  [см. (6-14), (6-17), (6-20), (6-27), (6-40) — (6-42)],  $\theta$  имеет смысл угловой координаты рассматриваемой точки сечения.

Значения компонент  $\pi_{ij}$  обычно задаются в системе координат, связанной с кристаллографическими осями. Приведение тензора четвертого ранга  $\pi_{ij}$  к системе координат тензора напряжений требует громоздких вычислений. Для упрощения расчетов при определении изменений относительной диэлектрической непроницаемости целесообразно выполнить следующие операции:

1) привести тензор напряжений  $\sigma_j$  к системе координат пьезооптических коэффициентов  $\pi_{ij}$  посредством преобразования вида

$$\sigma' = \gamma \sigma \gamma_t, \quad (6-57)$$

где  $\gamma$  — матрица преобразования координат;  $\gamma_t$  — транспонированная матрица;

2) определить компоненты  $\Delta B'_i$  в системе координат тензора  $\pi_{ij}$

$$\Delta B' = \pi \sigma'; \quad (6-58)$$

3) привести полученный тензор  $\Delta B'$  к системе координат активного элемента посредством обратного преобразования

$$\Delta B = \gamma_t \Delta B' \gamma. \quad (6-59)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Если ось  $x_3$  декартовой системы координат, связанной с активным элементом, соответствует направлению  $\{001\}$ , а напряженное состояние описывается тензором (6-55), то в соответствии с (6-54) имеем:

$$\begin{pmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}. \quad (6-60)$$

Из (6-60) следует:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_1 &= \pi_{11}\sigma_1 + \pi_{12}(\sigma_2 + \sigma_3); \\ \Delta B_2 &= \pi_{11}\sigma_2 + \pi_{12}(\sigma_1 + \sigma_3); \\ \Delta B_3 &= \pi_{11}\sigma_3 + \pi_{12}(\sigma_1 + \sigma_2); \\ \Delta B_4 &= \Delta B_5 = 0; \\ \Delta B_6 &= \pi_{44}\sigma_6. \end{aligned} \right\} \quad (6-61)$$

При наличии напряжений оптическая индикатриса наклонена относительно исходной системы координат на угол  $\theta'$ , определяемый выражением

$$\operatorname{tg} 2\theta' = \frac{2\Delta B_6}{\Delta B_2 - \Delta B_1} = \xi \operatorname{tg} 2\theta, \quad (6-62)$$

где  $\xi = \pi_{44}/(\pi_{11} - \pi_{12})$ .



Приводя полученный тензор к диагональному виду, находим главные значения приращения компонент тензора относительной диэлектрической непроницаемости

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_{1,2}^0 &= \frac{1}{2} (\pi_{11} + \pi_{12})(\sigma_1^0 + \sigma_2^0) \pm \left[ \frac{1}{2} (\pi_{11} - \pi_{12}) \times \right. \\ &\quad \times (\sigma_2^0 - \sigma_1^0) \delta + \pi_{12} \sigma_3^0 \left. \right]; \\ \Delta B_3^0 &= \pi_{11} \sigma_3^0 + \pi_{12} (\sigma_1^0 + \sigma_2^0). \end{aligned} \right\} \quad (6-63)$$

В (6-63)  $\delta = \sqrt{\frac{1 + \xi^2 \operatorname{tg}^2 2\theta}{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}}$ ;  $\sigma_{1,2,3}^0$  — главные значения напряжений, определяемые из соотношений:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2}^0 &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \pm \frac{\sigma_6}{\cos 2\theta}; \\ \sigma_3^0 &= \sigma_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим другой частный случай, когда ось  $x_3$  соответствует направлению  $\{111\}$  кристаллографической решетки. Используя соотношения (6-57) — (6-59), в которых матрица  $\gamma$  имеет вид (ось  $x_2$  соответствует направлению  $\{\bar{1}2\bar{1}\}$ ):

$$\gamma = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}, \quad (6-64)$$

получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_1 &= \frac{1}{6} [\pi_{11} (3\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_3) + \pi_{12} (3\sigma_1 + 5\sigma_2 + 4\sigma_3) + \\ &\quad + \pi_{44} (3\sigma_1 - \sigma_2 - 2\sigma_3)]; \\ \Delta B_2 &= \frac{1}{6} [\pi_{11} (3\sigma_2 + \sigma_1 + 2\sigma_3) + \pi_{12} (5\sigma_1 + 3\sigma_2 + 4\sigma_3) + \\ &\quad + \pi_{44} (3\sigma_2 - \sigma_1 - 2\sigma_3)]; \\ \Delta B_3 &= \frac{1}{3} [\pi_{11} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 2\pi_{12} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \\ &\quad - \pi_{44} (\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3)]; \\ \Delta B_4 &= \frac{1}{3\sqrt{2}} (\pi_{12} - \pi_{11} + \pi_{44})(\sigma_1 - \sigma_2); \\ \Delta B_5 &= \frac{\sqrt{2}}{3} (\pi_{44} - \pi_{11} + \pi_{12}) \sigma_6; \\ \Delta B_6 &= \frac{1}{3} (\pi_{11} - \pi_{12} + 2\pi_{44}) \sigma_6. \end{aligned} \right\} \quad (6-65)$$

Угол наклона оптической индикатрисы в плоскости  $x_1x_2$  равен:

$$\operatorname{tg} 2\theta' = \frac{2\Delta B_6}{\Delta B_2 - \Delta B_1} = \operatorname{tg} 2\theta. \quad (6-66)$$

В этом случае ориентация оптической индикатрисы соответствует главным направлениям приложенных напряжений.

Изменение оптических свойств среды для излучения, распространяющегося вдоль оси  $x_3$ , описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \Delta B_{1,2}^0 &= \frac{1}{6} (2\pi_{11} + 4\pi_{12} + \pi_{14}) (\sigma_1^0 + \sigma_2^0 + \sigma_3^0) - \\ &- \frac{1}{2} \pi_{14} \sigma_3^0 \pm \frac{1}{6} (\pi_{11} - \pi_{12} + 2\pi_{14}) (\sigma_2^0 - \sigma_1^0). \end{aligned} \quad (6-67)$$

Величина  $\Delta B_{1,2}^0$ , как следует из (6-67), не зависит от угла  $\theta$  и, следовательно, в этом случае кубический кристалл ведет себя подобно изотропному веществу.

Рассмотрим некоторые конкретные случаи. Пусть ось цилиндрического стержня из иттрий-алюминиевого граната совпадает с направлением  $\{001\}$  кристаллографической решетки. Для излучения, распространяющегося вдоль оси стержня, из (6-63) с учетом соотношений (6-20) и температурной зависимости показателя преломления получаем:

$$\begin{aligned} \Delta B_r(r) = & - \left[ \frac{2}{n^3} \beta + \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \{ \pi_{11} (1 - \delta) + \pi_{12} (3 + \delta) \} \right] T(r) - \\ & - \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} (\pi_{11} - \pi_{12}) \delta \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \bar{T}^{R_1 r} + \\ & + \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \left[ (\pi_{11} + 3\pi_{12}) - \frac{R_1^2}{r^2} (\pi_{11} - \pi_{12}) \delta \right] \bar{T}^{R_1 R_2}; \end{aligned} \quad (6-68)$$

$$\begin{aligned} \Delta B_\varphi(r) = & - \left[ \frac{2}{h^3} \beta + \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \{ \pi_{11} (1 + \delta) + \pi_{12} (3 - \delta) \} \right] T(r) + \\ & + \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} (\pi_{11} - \pi_{12}) \delta \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \bar{T}^{R_1 r} + \\ & + \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \left[ (\pi_{11} + 3\pi_{12}) + \frac{R_1^2}{r^2} (\pi_{11} - \pi_{12}) \delta \right] \bar{T}^{R_1 R_2}, \end{aligned} \quad (6-69)$$

где  $\beta = dn/dT$ ;  $\bar{T}^{R_1 r} = \frac{2}{r^2 - R_1^2} \int_{R_1}^r T(r) r dr$ ;  $R_1$  и  $R_2$  — внутренний и внешний радиусы стержня.

Величины  $\Delta B_r(r)$  и  $\Delta B_\varphi(r)$  описывают изменение показателя преломления, обусловленное нагревом и температурными напряжениями, для радиально и тангенциально поляризованного излучения.

Разность между  $\Delta B(r)$  для радиально и тангенциально поляризованного излучения, распространяющегося на расстоянии  $r$  от оси цилиндра, равна:

$$\Delta B_r(r) - \Delta B_\varphi(r) = \frac{\alpha_r E}{1-\nu} (\pi_{12} - \pi_{11}) \delta \left[ \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \bar{T}^{R_1 r} + \frac{R_1^2}{r^2} \bar{T}^{R_1 R_2} - T(r) \right]. \quad (6-70)$$

Для активных элементов частотных и непрерывных ОКГ, как указывалось выше (см. гл. 3), распределение температуры по сечению сплошного цилиндрического стержня описывается соотношением

$$T(r) - T(R) = \delta T \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (6-71)$$

где  $\delta T$  — перепад температуры между центром и боковой поверхностью.

Тогда в соответствии с (6-68), (6-69), (6-71) перепад показателя преломления между центром и произвольной точкой сечения  $r$  равен:

$$\Delta n_r(0, r) = \Delta n_r(0) - \Delta n_r(r) = \left\{ \beta + \frac{n^3 \alpha_r E}{4(1-\nu)} \left[ \pi_{11} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) + \pi_{12} \left( 3 + \frac{\delta}{2} \right) \right] \right\} \delta T \left( \frac{r}{R} \right)^2; \quad (6-72)$$

$$\Delta n_\varphi(0, r) = \Delta n_\varphi(0) - \Delta n_\varphi(r) = \left\{ \beta + \frac{n^3 \alpha_r E}{4(1-\nu)} \left[ \pi_{11} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right) + \pi_{12} \left( 3 - \frac{\delta}{2} \right) \right] \right\} \delta T \left( \frac{r}{R} \right)^2. \quad (6-73)$$

Следует отметить, что термические напряжения вызывают изменения показателя преломления, зависящие от угловой координаты  $\theta$ . На рис. 6-6 представлена зависимость  $\frac{\Delta n(0, r)}{\delta T(r/R)^2}$  от угла  $\theta$ , рассчитанная в соответствии с (6-72) и (6-73). При расчете использовались следующие значения констант:  $E = 2,85 \cdot 10^8 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ ;  $n = 1,825$ ,  $\beta = 7,3 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ ,  $\nu = 0,25$ ;  $\alpha_r = 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ ,  $\pi_{11} = 11,8 \times 10^{-9} \text{ см}^2 \cdot \text{кгс}^{-1}$ ,  $\pi_{12} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ см}^2 \cdot \text{кгс}^{-1}$ ;  $\xi = 3,12$ .

Если ось цилиндрического стержня совпадает с направлением [111], то из соотношений (6-67) следует:

$$\Delta B_r(r) = - \left\{ \frac{2}{n^3} \beta + \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} [\pi_{11}(1-\xi) + \pi_{12}(3+\xi)] \right\} T(r) - \frac{\alpha_r E}{6(1-\nu)} (\pi_{11} - \pi_{12})(1+2\xi) \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \bar{T}^{R_1 r} + \frac{\alpha_r E}{6(1-\nu)} \times \\ \times \left[ \pi_{11}(4-\xi) + \pi_{12}(8+\xi) + \frac{R_1^2}{r^2} (\pi_{11} - \pi_{12})(1+2\xi) \right] \bar{T}^{R_1 R_2}; \quad (6-74)$$

$$\Delta B_{\varphi}(r) = - \left\{ \frac{2}{n^2} \beta + \frac{\alpha_r E}{6(1-\nu)} [\pi_{11}(5+\xi) + \pi_{12}(7-\xi)] \right\} T(r) + \\ + \frac{\alpha_r E}{6(1-\nu)} (\pi_{11} - \pi_{12})(1+2\xi) \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \bar{T}^{R_1 r} + \\ + \frac{\alpha_r E}{6(1-\nu)} \left[ \pi_{11}(4-\xi) + \pi_{12}(8+\xi) + \frac{R_1^2}{r^2} (\pi_{11} - \pi_{12})(1+2\xi) \right] \bar{T}^{R_1 R_2} . \quad (6-75)$$

Разность  $\Delta B(r)$  для радиально и тангенциально поляризованного излучения равна:

$$\Delta B_r(r) - \Delta B_{\varphi}(r) = \frac{\alpha_r E}{3(1-\nu)} (\pi_{12} - \pi_{11})(1+2\xi) \times \\ \times \left[ \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \bar{T}^{R_1 r} + \frac{R_1^2}{r^2} \bar{T}^{R_1 R_2} - T(r) \right] . \quad (6-76)$$

В этом случае, как отмечалось выше, кристалл ведет себя подобно деформированному изотропному веществу для лучей, распространяющихся вдоль оси стержня.

Для сплошного цилиндрического стержня при параболическом распределении температуры по сечению (6-71) перепад показателя преломления между центром и произвольной точкой сечения равен:

$$\Delta n_r(0, r) = \left\{ \beta + \frac{n^3 \alpha_r E}{24(1-\nu)} [\pi_{11}(7-4\xi) + \pi_{12}(17+4\xi)] \right\} \delta T \left( \frac{r}{R} \right)^2 ; \quad (6-77)$$

$$\Delta n_{\varphi}(0, r) = \left\{ \beta + \frac{n^3 \alpha_r E}{8(1-\nu)} [3\pi_{11} + 5\pi_{12}] \right\} \delta T \left( \frac{r}{R} \right)^2 . \quad (6-78)$$

В работе [Л. 6-17] экспериментально подтверждены теоретические данные о характере термических искажений цилиндрического стержня из иттрий-алюминиевого граната. Исследования искажений активных элементов в непрерывном режиме генерации показали, что радиальное распределение температуры по радиусу стержня близко к параболическому. Максимальная величина температурных напряжений достигала примерно  $200 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ .

Как следует из рис. 6-6, характер термических деформаций для двух рассмотренных ориентаций кристалла относительно оси цилиндрического стержня существенно различен. Отношение

$$\frac{[\Delta B_r(r) - \Delta B_{\varphi}(r)]_{[111]}}{[\Delta B_r(r) - \Delta B_{\varphi}(r)]_{[001]}} = \frac{1+2\xi}{3\delta} \quad (6-79)$$

в зависимости от угловой координаты  $\theta$  может быть больше для одной или другой ориентации. Максимальное значение отношения

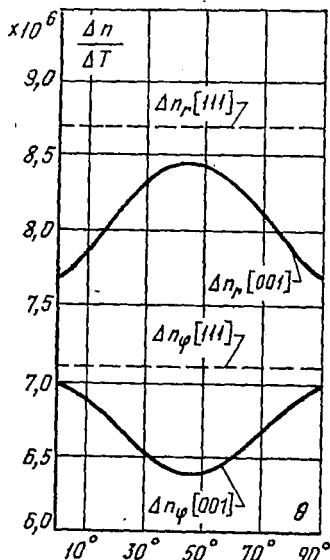


Рис. 6-6. Зависимость  $\Delta n_r$  и  $\Delta n_\phi$  от  $\theta$ .

$T(x) = T(-x)$  компоненты напряжений определяются из соотношения (6-11), и выражения (6-80) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_x(x) &= - \left[ \frac{2}{n^3} \beta + \frac{2\alpha_T E}{1-\nu} \pi_{12} \right] T(x) + \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)h} \pi_{12} N_T; \\ \Delta B_y(x) &= - \left[ \frac{2}{n^3} \beta + \frac{\alpha_T E}{1-\nu} (\pi_{11} + \pi_{12}) \right] T(x) + \\ &\quad + \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)h} (\pi_{11} + \pi_{12}) N_T, \end{aligned} \right\} \quad (6-81)$$

где  $2h$  — толщина пластины.

Изменение показателя преломления по толщине пластины для излучения, поляризованного вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно равно:

$$n_x(0) - n_x(x) = \left[ \beta + \frac{n^3 \alpha_T E}{(1-\nu)} \pi_{12} \right] [T(0) - T(x)]. \quad (6-82)$$

Рассмотрим другую ориентацию пластины относительно кристаллографических осей  $z \rightarrow [111]$ ,  $x \rightarrow [\bar{1}01]$ ,  $y \rightarrow [\bar{1}21]$ . Как и для ориентации  $z \rightarrow [001]$ , сечение индикатрисы плоскостью, перпендикулярной направлению распространения излучения, представляет собой эллипс с главными осями вдоль  $x$  и  $y$ . В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_x(x) &= - \left\{ \frac{2}{n^3} \beta + \frac{\alpha_T E}{6(1-\nu)} [3\pi_{11}(1-\xi) + \pi_{12}(9+3\xi)] \right\} T(x) + \\ &\quad + \frac{\alpha_T E}{12(1-\nu)h} [3\pi_{11}(1-\xi) + \pi_{12}(9+3\xi)] N_T; \end{aligned} \right\} \quad (6-83)$$

(6-79) для иттрий-алюминиевого граната равно 2,4 при  $\delta=1$ , минимальное — 0,75 при  $\delta=\xi$ .

Таким образом, величина двойного лучепреломления достигает больших значений для случая  $x_3 \rightarrow [111]$ . Однако рассматриваемая ориентация во многих случаях более перспективна вследствие аксиально-симметричного характера наведенной анизотропии.

Рассмотрим далее термические искажения элемента в форме прямоугольной пластины. Для излучения, распространяющегося вдоль оси  $z$ , необходимо рассмотреть уравнение индикатрисы в плоскости, перпендикулярной этой оси. При ориентации пластины относительно кристаллографических осей  $x \rightarrow [100]$ ,  $y \rightarrow [010]$ ,  $z \rightarrow [001]$  из соотношения (6-60) с учетом (6-10) и (6-11) следует

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_x(x) &= 2\pi_{12}\sigma; \\ \Delta B_y(x) &= (\pi_{11} + \pi_{12})\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (6-80)$$

При симметричном распределении температуры по толщине пластины

$$\Delta B_y(x) = - \left\{ \frac{2}{n^3} \beta + \frac{\alpha_T E}{6(1-\nu)} [\pi_{11}(5+\xi) + \pi_{12}(7-\xi)] \right\} T(x) + \\ + \frac{\alpha_T E}{12(1-\nu)h} [\pi_{11}(5+\xi) + \pi_{12}(7-\xi)] N_T. \quad (6-84)$$

Оценим величину термических деформаций для двух рассмотренных ориентаций пластины из иттрий-алюминиевого граната ( $\alpha_T = 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ,  $E = 2,9 \cdot 10^6 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}$ ,  $\nu = 0,25$ ;  $\beta = 7,3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ;  $\pi_{11} = -11,8 \cdot 10^{-9} \text{ см}^2 \cdot \text{кгс}^{-1}$ ,  $\pi_{12} = 5,0 \cdot 10^{-9} \text{ см}^2 \cdot \text{кгс}^{-1}$ ,  $\xi = 3,12$ ,  $n = 1,825$ ).

Для  $z \rightarrow [001]$  имеем:

$$n_x(0) - n_x(x) = 8,1 \cdot 10^{-6} [T(0) - T(x)];$$

$$n_y(0) - n_y(x) = 6,8 \cdot 10^{-6} [T(0) - T(x)].$$

В случае  $z \rightarrow [111]$

$$n_x(0) - n_x(x) = 9,5 \cdot 10^{-6} [T(0) - T(x)];$$

$$n_y(0) - n_y(x) = 6,3 \cdot 10^{-6} [T(0) - T(x)].$$

Как следует из приведенных выше оценок, величина термических деформаций больше для излучения с поляризацией вдоль оси  $x$ , чем вдоль  $y$ .

Величина наведенного двулучепреломления для ориентации  $z \rightarrow [111]$  в  $\frac{1+2\xi}{3}$  раз больше, чем для ориентации  $z \rightarrow [001]$ . Для иттрий-алюминиевого граната

$$\frac{1+2\xi}{3} = 2,4.$$

Теоретические и экспериментальные исследования термических деформаций активных элементов из стекла в форме цилиндра и пластины проводились многими авторами (см., например, [Л. 6-6, 6-19—6-25]). Основные соотношения, описывающие изменение оптических свойств изотропных активных элементов, вытекают из приведенных выше выражений для кристаллического вещества при  $\xi = 1$  и  $\delta = 1$ . Для сплошного цилиндрического стержня

$$\Delta B_r = - \left\{ \frac{2}{n^3} \beta + \frac{2\alpha_T E}{1-\nu} \pi_{12} \right\} T(r) - \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} (\pi_{11} - \pi_{12}) \bar{T}r + \\ + \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} (\pi_{11} + 3\pi_{12}) \bar{T}R; \\ \Delta B_\varphi = - \left\{ \frac{2}{n^3} \beta + \frac{\alpha_T E}{1-\nu} (\pi_{11} + \pi_{12}) \right\} T(r) + \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \times \\ \times (\pi_{11} - \pi_{12}) \bar{T}r + \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} (\pi_{11} + 3\pi_{12}) \bar{T}R. \quad (6-85)$$

## Термооптические постоянные стекол

| Марка стекла | Основа стекла | $P \cdot 10^6, \text{K}^{-1}$ | $Q \cdot 10^6, \text{K}^{-1}$ | $W \cdot 10^6, \text{K}^{-1}$ | $\delta p_r, \text{мкм}$ | $\delta p_\phi, \text{мкм}$ |
|--------------|---------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| КГСС-3       | Силикатная    | 1,7                           | 0,5                           | 2,2                           | 2,0                      | 1,5                         |
| КГСС-7       | "             | 1,8                           | 0,5                           | 2,4                           | 2,1                      | 1,6                         |
| ЛГС24-5      | "             | 3,1                           | 0,6                           | 3,9                           | 3,4                      | 2,8                         |
| ЛГС28-2      | "             | 3,6                           | 0,6                           | 4,5                           | 3,9                      | 3,3                         |
| ЛГС-36       | "             | 3,8                           | 0,2                           | 6,8                           | 3,9                      | 3,7                         |
| КГСС-56      | Фосфатная     | 1,8                           | 0,9                           | 1,8                           | 2,3                      | 1,4                         |
| КГСС-621     | "             | 0,4                           | 0,2                           | 0,4                           | 0,5                      | 0,3                         |

Изменение длины оптического пути для радиально и тангенциально поляризованного излучения вдоль стержня на расстоянии  $r$  от оси определяется следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_r(r) &= L \left\{ \left( \beta - \frac{2\alpha_r E}{1-\nu} C_2 \right) T(r) - \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} (C_1 - C_2) \bar{T}r + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \alpha_r (n-1) + \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} (C_1 + 3C_2) \right] \bar{T}^R \right\}; \\ \Delta p_\phi(r) &= L \left\{ \left[ \beta - \frac{\alpha_r E}{1-\nu} (C_1 + C_2) \right] T(r) + \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} (C_1 - C_2) \bar{T}r + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \alpha_r (n-1) + \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} (C_1 + 3C_2) \right] \bar{T}^R \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6-86)$$

где  $L$  — длина стержня,  $C_1 = dn/d\sigma_{\parallel}$ ,  $C_2 = dn/d\sigma_{\perp}$ .

Вводя термооптические постоянные [Л. 6-22—6-24]

$$\left. \begin{aligned} W &= \beta + \alpha_r (n-1); \\ P &= \beta - \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} (C_1 + 3C_2); \\ Q &= \frac{\alpha_r E}{2(1-\nu)} (C_1 - C_2), \end{aligned} \right\} \quad (6-87)$$

получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_r(r) &= L [(P+Q) T(r) - Q \bar{T}r + (W-P) \bar{T}^R]; \\ \Delta p_\phi(r) &= L [(P-Q) T(r) + Q \bar{T}r + (W-P) \bar{T}^R]. \end{aligned} \right\} \quad (6-88)$$

Разность в длине оптического пути для радиально и тангенциально поляризованного излучения равна:

$$\Delta p_r(r) - \Delta p_\phi(r) = \frac{\alpha_r E}{1-\nu} (C_1 - C_2) [T(r) - \bar{T}r]. \quad (6-89)$$

Очевидно, что для использования в качестве активных элементов более перспективны стекла с достаточно малыми значениями постоянных  $W$ ,  $P$ ,  $Q$ . Термооптическая постоянная  $Q$  определяет величину двулучепреломления  $[\Delta p_r - \Delta p_\phi]$ . Если фотоупругие постоянные  $C_1$  и  $C_2$  одинаковы ( $Q=0$ ), то двойное лучепреломление отсутствует. Ненулевые значения  $P$  и  $Q$  приводят к радиальной зависимости длины оптического пути. По-видимому, соответствующим выбором состава стекла можно добиться существенного уменьшения влияния термооптических искажений. В табл. 6-3 приведены значения  $W$ ,  $P$ ,  $Q$  для ряда стекол [Л. 6-24].

Радиальная зависимость  $\Delta p(r)$  определяется распределением температуры  $T(r)$ . При параболическом распределении температуры по сечению стержня (6-72) разность в длинах оптического пути для лучей, проходящих через центр стержня и точку  $r$ , равна:

$$\left. \begin{aligned} \delta p_r &= \Delta p_r(0) - \Delta p_r(r) = L \left( P + \frac{Q}{2} \right) \delta T \left( \frac{r}{R} \right)^2; \\ \delta p_\phi &= \Delta p_\phi(0) - \Delta p_\phi(r) = L \left( P - \frac{Q}{2} \right) \delta T \left( \frac{r}{R} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (6-90)$$

Из (6-90) следует, что разность  $\delta p_r$  ( $\delta p_\phi$ ) обращается в нуль при  $P = -\frac{Q}{2}$  ( $P = \frac{Q}{2}$ ) для радиально (тангенциально) поляризованного излучения. В этом случае не будет искажаться фронт волны, распространяющейся в цилиндрическом стержне.

В табл. 6-3 приведены значения  $\delta p_r$  и  $\delta p_\phi$  для стеклянных стержней длиной  $L=10$  см при перепаде температуры по сечению  $\delta T=10$  К.

Для изотропной пластины в случае распространения света вдоль оси  $z$  с колебаниями электрического вектора в направлении  $x$  и  $y$  изменение оптической длины  $\Delta p$  равно:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_x(x) &= L \left[ (W - P + Q) \frac{N_T}{2h} + (P + Q) T(x) \right]; \\ \Delta p_y(x) &= L \left[ (W - P + Q) \frac{N_T}{2h} + (P - Q) T(x) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6-91)$$

Разность хода лучей, проходящих через точки  $x=0$  и  $x=x'$ , определяется соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \delta p_x &= L (P + Q) [T(0) - T(x')]; \\ \delta p_y &= L (P - Q) [T(0) - T(x')]. \end{aligned} \right\} \quad (6-92)$$

Из сравнения (6-92) с (6-84), (6-85) следует, что для пластины в отличие от цилиндрического стержня условие отсутствия термических искажений не зависит от конкретного вида распределения температуры, а определяется только свойством вещества. Согласно данным работы [Л. 6-25] минимальные искажения должны иметь место для стекол типа КГСС-3, КГСС-7 и ЛГС-41.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1-1. Методы расчета оптических квантовых генераторов. Под редакцией Б. И. Степанова. Минск, «Наука и техника», т. I, 1966, т. II, 1968.
- 1-2. Микаэлян А. Л., Тер-Микаэлян М. Л., Турков Ю. Г. Оптические генераторы на твердом теле. М., «Советское радио», 1967.
- 1-3. Рубанов А. С. Спектроскопические характеристики вещества и параметры квантового генератора, работающего на трехуровневой схеме с учетом поглощения с метастабильного уровня.—«Журнал прикладной спектроскопии», 1964, т. I, № 2, стр. 148—152.
- 1-4. Ведута А. П., Леонтович А. М., Сморгачев В. Н. Изменение резонатора рубинового генератора при нагревании светом накачки.—«ЖЭТФ», 1965, т. 48, № 1, стр. 87—93.
- 1-5. Рубанов А. С. и др. Влияние неравномерности распределения радиации накачки на температурные поля активных элементов частотных ОКГ.—«Изв. АН БССР. Серия физико-математических наук», 1972, № 6, стр. 88—94.
- 1-6. Воронкова Е. М. и др. Оптические материалы инфракрасной техники. М., «Наука», 1965.
- 1-7. Holland M. G. Thermal conductivity of several optical Maser Materials.—«J. Appl. Phys.», 1962, v. 33, p. 2910—2911.
- 1-8. Furukawa G. T., Douglas T., Coskey R. Thermal properties of aluminium oxide from 0 to 1200 °K.—«J. Res. NBS», 1956, v. 57, № 2, p. 67.
- 1-9. Труды Института кристаллографии, вып. 5. Физические свойства синтетического корунда. М., Изд-во АН СССР, 1953.
- 1-10. Wachtman J. B. Elastic constants of synthetic corundum at room temperature.—«J. Res. NBS», 1960, v. A43, № 6, p. 334—335.
- 1-11. Dixon R. W. Photoelastic properties selected materials and their relevance for applications to acoustic light modulators and scanners.—«J. Appl. Phys.», 1967, v. 38, p. 5144—5153.
- 1-12. Акуленок Е. М., Даниленко Ю. К., Хаймов-Мальков В. Я. Определение пьезооптических модулей в монокристаллах корунда интерференционным методом.—«Кристаллография», 1970, т. 15, № 4, стр. 831.
- 1-13. Jeppesen M. A. Some optical, thermo-optical and piezo-optical properties of synthetic sapphire.—«JOSA», 1958, v. 48, № 9, p. 629—632.
- 1-14. Справочник по производству стекла. Т. 1. М., Госстройиздат, 1963.
- 1-15. Waxler R. M. a. o. Optical and mechanical properties of some neodymium-doped laser glasses.—«J. Res. NBS», 1971, v. A75, № 3, p. 163—174.
- 1-16. Thornton J. R. a. oth. Properties of neodymium laser materials.—«Appl. Opt.», 1969, v. 8, № 6, p. 1087—1103.

1-17. Ананьев Ю. А., Гришманова Н. И. Деформации активных элементов-интерферометров и термооптические постоянные неодимового стекла.—«Журнал прикладной спектроскопии», 1970, т. 12, № 4, стр. 668—673.

1-18. Foster J. D., Osternic L. M. Thermal effects in Nd: YAG laser.—«Appl. Opt.», 1970, v. 41, № 9, p. 3656—3663.

1-19. Kimura T., Otsuka K. Thermal effects of a continuously pumped Nd<sup>3+</sup> YAG laser.—«Proc. of the IEEE», 1971, v. QE-7, № 8, p. 403—406.

1-20. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.

2-1. Johnson L. F. a. oth. Continuous operation of a solid-state optical maser.—«Phys. Rev.», 1962, v. 126, № 4, p. 1406.

2-2. Johnson L. F. a. oth. Continuous operation of the CaWO<sub>4</sub>: Nd<sup>3+</sup> optical maser.—«Proc. IRE», 1962, v. 50, № 2, p. 213.

2-3. Geusie J. E., Marcos H. M., Van Uitert L. G. Laser oscillations in Nd-doped yttrium aluminium, yttrium gallium and gadolinium garnets.—«Phys. Let.», 1964, v. 4, № 10, p. 182.

2-4. Nelson D. F., Boyl W. S. A continuously operating ruby optical maser.—«J. Appl. Optics», 1962, v. 1, № 2, p. 181.

2-5. См. [Л. 1-20].

2-6. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Изд-во иностр. лит., 1959.

2-7. Tomiyasu K. Focused side pumping of a laser crystal.—«Proc. IRE», 1962, v. 50, № 12, p. 2488.

2-8. Ананьев Ю. А., Королев Е. А. Распределение плотности излучения накачки в кристалле оптического квантового генератора.—«Оптика и спектроскопия», 1964, т. 16, № 4, стр. 702.

2-9. Рутковский Ф. К. Оптическая накачка квантовых генераторов на твердом теле. Канд. диссертация. Институт физики АН БССР, Минск, 1966.

2-10. См. [Л. 1-1].

2-11. Белостоцкий Б. Р., Любавский Ю. В., Овчинников В. М. Основы лазерной техники. М., «Советское радио», 1972.

2-12. Белостоцкий Б. Р. Тепловой режим твердотельных оптических квантовых генераторов непрерывного действия.—«Инженерно-физический журнал», 1968, т. 15, № 2, стр. 219.

2-13. Lendyel B. Introduction of lasers physics. New York, Wiley, 1966.

2-14. Devlin G. E. a. oth. Composite rod optical masers.—«J. Appl. Optics», 1962, v. 1, № 1 p. 11.

2-15. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. М., «Энергия», 1973.

2-16. Белостоцкий Б. Р. Тепловой режим твердотельных оптических квантовых генераторов непрерывного действия. Л., Изд-во ЛДНТП, 1970.

2-17. Хромов А. В., Антоньянц В. А. О влиянии сапфировой оболочки на температуру рубина в ОКГ.—«Вопросы радиоэлектроники. Серия общетехническая», 1967, вып. 1, стр. 11.

2-18. Бонч-Бруевич А. М., Имас Я. А., Молчанов В. А. Генератор вынужденного излучения на стекле, активированном неодимом, с переменной длиной оптического пути в активном материале.—«Журнал прикладной спектроскопии», 1964, т. 1, № 1, стр. 45.

2-19. Vickery R. C., Fisher J. V. The selaser lamp. A unitary design for the emission of stimulated radiation.— «Electron. Quant. c-r», 3 conf. Internat. Paris — New York, 1964, v. 2, p. 1397.

2-20. Schwiecker W., Hafele H. G. Оптический квантовый генератор со стеклянным телом в качестве активного тела. Патент ФРГ. 1212208, Р 294 84 VIII C/21f, 10.03.1966.

2-21. Walsh P., Kemeny G. Laser operation without spikes in a ruby ring.— «J. of Appl. Physics», 1963, v. 34, № 4, p. 956.

3-1. См. [Л. 1-6].

3-2. Карслоу Х. С., Егер Д. К. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.

3-3. Лыков А. В. Теплопроводность нестационарных процессов. М.—Л., Госэнергоиздат, 1948. Теория теплопроводности. М., Гостехиздат, 1952. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.

3-4. См. [Л. 1-4].

3-5. Рубинов А. Н. Баланс энергии рубина, возбуждаемого мощными световыми импульсами.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1965, № 6, стр. 495—503.

3-6. Ведута А. П., Леонтович А. М., Матюшин Г. А. Изменения в активном элементе твердотельного ОКГ при нагревании светом накачки.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1968, № 8, стр. 238—243.

3-7. Ананьев Ю. А., Мак А. А. Изменение характеристик резонатора оптического квантового генератора в процессе генерации.— «Оптика и спектроскопия», 1964, т. 16, № 6, стр. 1065—1066.

3-8. Ведута А. П., Леонтович А. М. Измерение температуры рубиновых стержней ОКГ во время накачки по изменению двойного лучепреломления.— «ЖТФ», 1967, т. 37, № 6, стр. 942—946.

3-9. Конюхов В. К., Кулевский Л. А., Прохоров А. М. Оптический генератор на рубине с длительностью генерации 10 мсек.— «ЖЭТФ», 1963, т. 45, № 4, стр. 857—862.

3-10. Townsend R. L., Stickles C. M., Maio A. D. Thermal effects in optically pumped laser rods.— «Appl. Phys. Let.», 1965, v. 7, № 4, p. 94—96.

3-11. Иванов В. А., Лебедев В. И. Определение тепловых параметров рубинового ОКГ, работающего в режиме повторяющихся импульсов. «Журнал прикладной спектроскопии», 1970, т. 13, № 1, стр. 40—45.

3-12. Коханенко Л. Н., Антипов А. Б. О возможности определения длины волны излучения по его температуре. I.— «Известия вузов. Физика», 1969, № 5, стр. 33—36.

3-13. Коханенко Л. Н., Антипов А. Б. О возможности определения длины волны излучения по его температуре. II.— «Известия вузов. Физика», 1969, № 5, стр. 37—40.

3-14. Ананьев Ю. А. и др. Термическая деформация резонатора твердотельного оптического квантового генератора.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1966, № 1, стр. 51—55.

3-15. Гришманова Н. И., Свенцикая Н. А., Хазов Л. Д. Исследование температурных деформаций кристаллов рубинового ОКГ.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1967, № 3, стр. 340—343.

3-16. White D., Gregg D. Optical distortion in ruby lasers during pumping.— «Appl. Opt.», 1965, v. 4, № 4, p. 1034—1037.

3-17. Sims S. D., Stein A., Roth C. Induced birefringence of glass laser pumped by flash lamps.— «Appl. Opt.», 1967, v. 6, № 3, p. 579—580.

3-18. Caberas A. Y., Comai L. J., Treat R. P. Dynamic measurement of phase shifts in laser amplifiers.— «Appl. Opt.», 1966, v. 5, № 4, p. 647—651.

3-19. Ваноков М. П. и др. Исследование термических искажений в образцах стекла, генерирующих стимулированное излучение.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1965, т. 2, № 4, стр. 295—298.

3-20. Welling H., Bickart C. J. Spatial and temporal variation of the optical path length in flash-pumped laser rods.— «JOSA», 1966, v. 56, № 5, p. 611—618.

3-21. Blume A. E., Tittel K. T. Thermal effects in laser amplifiers and oscillators.— «Appl. Opt.», 1964, v. 3, № 4, p. 527—530.

3-22. Хромов А. В. Тепловой режим твердотельных ОКГ.— «Вопросы радиоэлектроники. Серия общетехническая», 1964, № 10, стр. 49—54.

3-23. Степанов Б. И., Рубанов А. С., Чалей А. В. Тепловой режим квантового генератора на стекле.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1966, т. 4, № 4, стр. 348—350.

3-24. Степанов Б. И. и др. Тепловой режим рубинового квантового генератора.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1966, т. 4, № 5, стр. 389—394.

3-25. Белостоцкий Б. Р.— «Труды Куйбышевского авиационного института», 1966, т. 24, стр. 211.

3-26. Хромов А. В., Либин Ю. В. Плотность источников тепла и температурное поле в кристалле рубинового ОКГ.— «Инженерно-физический журнал», 1966, т. 11, № 10, стр. 526—534.

3-27. См. [Л. 2-17].

3-28. Федоров В. Б., Егоров В. С. Расчет теплового режима квантового генератора периодического действия.— «Теплофизика высоких температур», 1967, т. 5, № 5, стр. 884—888.

3-29. Желтов Г. И. Пьезооптические и термооптические эффекты в активных элементах твердотельных ОКГ. Канд. диссертация. Минск, 1972, Институт физики АН БССР.

3-30. Чалей А. В. Тепловой режим твердотельных оптических квантовых генераторов. Канд. диссертация. Минск, 1968, БГУ им. В. И. Ленина.

3-31. Методы расчета ОКГ. Под ред. Б. И. Степанова, т. II. Минск, «Наука и техника», 1968.

3-32. Рубанов А. С., Чалей А. В., Желтов Г. И. Тепловой режим активных элементов частотных ОКГ.— «Вестник БГУ им. В. И. Ленина», 1970, т. 1, № 2, стр. 64—69.

3-33. Мамонов С. К. Нагрев активных элементов твердотельных ОКГ.— «Инженерно-физический журнал», 1969, т. 16, № 1, стр. 111—116.

3-34. Тер-Погосян А. С. Тепловой режим ОКГ при большой частоте повторения импульсов накачки.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1970, т. 13, № 3, стр. 418—424.

3-35. Желтов Г. И., Рубанов А. С. Поляризация излучения частотных ОКГ на стекле.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1973, т. 18, № 4, стр. 625—628.

3-36. Желтов Г. И., Рубанов А. С., Чалей А. В. Термические деформации активных элементов частотных ОКГ.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1971, т. 14, № 2, стр. 226—230.

- 3-37. Ермаков Б. А., Лукин А. В. Энергетические параметры ОКГ периодического действия на рубине и его тепловой режим.— «ЖТФ», 1970, т. 40, № 7, стр. 1418—1423.
- 3-38. Белостоцкий Б. Р. Расчет температурных напряжений в активных элементах ОКГ.— «Инженерно-физический журнал», 1970, т. 19, № 2, стр. 272.
- 3-39. См. [Л. 2-6].
- 3-40. Bogert B. P. Some roots of an equation involving Bessel functions.— «Journal of Mathematics and Physics», 1951, v. 30, № 2, p. 102—107.
- 3-41. Miyagawa. Roots  $x_n$  of  $J_0(x)Y_1(kx) - Y_0(x)J_1(kx) = 0$ .— «Memoirs of Faculty of Technology Tokyo Metropolitan University», 1955, № 5.
- 3-42. Логинов Л. И., Суровцева Н. Н. О корнях уравнения  $J_0(x)Y_1(kx) - J_1(kx)Y_0(x) = 0$ .— «Инженерно-физический журнал». 1959, т. 2, № 3.
- 3-43. Юшков П. П. Функции Бесселя и их приложения к задачам об охлаждении цилиндра. Минск, Изд-во АН БССР, 1962.
- 3-44. Lipow M., Zwick S. On the roots of the equation  $Y(mx)[xJ_1(x) - BJ_0(x)] - J_1(mx)[xY_1(x) - BY_0(x)] = 0$ .— «Journal of Mathematics and Physics», 1955.
- 3-45. Гейнц Р. Г. Об одном графоаналитическом методе вычисления корней характеристических уравнений, содержащих функции Бесселя первого и второго рода.— «Инженерно-физический журнал», 1962, № 5, стр. 10.
- 3-46. Рубанов А. С. и др. Влияние неравномерности распределения радиации накачки на температурные поля активных элементов частотных ОКГ.— «Изв. АН БССР. Серия физ.-мат. наук», 1971, № 6, стр. 88—94.
- 3-47. Королев Е. А., Поплавский А. А. Нагревание активного вещества ОКГ в процессе накачки. «Оптико-механическая промышленность», 1967, № 7, стр. 8—13.
- 3-48. Белостоцкий Б. Р. Выбор методики расчета температурного режима оптических элементов ОКГ.— «Квантовая электроника». Под ред. Н. Г. Басова, 1971, № 5, стр. 77.
- 3-49. Белостоцкий Б. Р. Задача о температурном поле в полем цилиндре с внутренними мгновенными источниками тепла и корни соответствующего характеристического уравнения.— «Инженерно-физический журнал», 1967, т. 13, № 3, стр. 326.
- 4-1. См. [Л. 3-48].
- 4-2. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1955.
- 4-3. Кудряшев Л. И., Белостоцкий Б. Р., Кудряшова Н. Л. Применение вариационных методов к исследованию температурного режима активных тел импульсных оптических квантовых генераторов.— «Доклады АН БССР», 1966, т. 10, № 11, стр. 835.
- 4-4. Вейник А. И. Приближенные расчеты процессов теплопроводности. М.— Л., Госэнергоиздат, 1959.
- 4-5. Хромов А. В., Либин Ю. В. Плотность источников тепла и температурное поле в кристалле рубинового ОКГ.— «Инженерно-физический журнал», 1966, т. 11, № 4, стр. 526.
- 4-6. Кудряшев Л. И. и др. Приближенное решение задачи о стационарном теплообмене активного элемента оптического квантового генератора.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1966, т. 4, № 1, стр. 12.

- 4-7. См. [Л. 2-16].
- 4-8. Long R. K. Atmospheric attenuation of ruby lasers. Proc. IEEE, 1963, v. 51, № 5, p. 859.
- 4-9. Abella I. D., Cummins H. L. Thermal tuning of a ruby optical maser.—«J. Appl. Physics», 1961, v. 32, № 6, p. 1177.
- 4-10. Пестов Э. Г., Лапшин Г. М. Квантовая электроника. М., Воениздат, 1972.
- 4-11. См. [Л. 2-17].
- 4-12. Белостоцкий Б. Р. Температурный режим активных элементов ОКГ в форме полого цилиндра.—«Журнал прикладной спектроскопии», 1969, т. 10, № 1, стр. 49.
- 4-13. Белостоцкий Б. Р., Кудряшев Л. И. Температурное поле в активном элементе ОКГ в форме стержня прямоугольного сечения.—«Журнал прикладной спектроскопии», 1967, т. 7, № 5, стр. 763.
- 4-14. См. [Л. 3-3].
- 4-15. Алямовский И. Г. В кн.: Тепло- и массоперенос. Минск, Изд-во АН БССР, 1963, т. 5, стр. 14.
- 4-16. См. [Л. 3-2].
- 4-17. См. [Л. 1-1].
- 4-18. Tanaka T. Laser operation in a wedge shaped ruby.—Japan J. Appl. Physics, 1966, v. 5, № 3.
- 4-19. Рутковский Ф. К., Гурьянова Т. К. Распределение плотности радиации накачки в трехгранном стержне.—«ДАН БССР», 1965, т. 9, № 6, стр. 364.
- 4-20. Кудряшев Л. И., Белостоцкий Б. Р., Кудряшова Н. Л. Температурный режим активного тела импульсного ОКГ в виде правильной трехгранной призмы.—«Журнал прикладной спектроскопии», 1967, т. 6, № 5, стр. 614.
- 4-21. Белостоцкий Б. Р. и др. Приближенное решение задач нестационарной теплопроводности применительно к элементам с резко выраженной анизотропией.—«Журнал прикладной спектроскопии», 1972, т. 17, № 4, стр. 710.
- 5-1. Crank J. The mathematics of diffusion. Oxford, Clarendon Press, 1956.
- 5-2. Fridman N. E. Quasi linear heat flow.—«Transaction of the ASME», 1958 v. 80, № 3, p. 635.
- 5-3. См. [Л. 4-14].
- 5-4. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
- 5-5. Чарный И. А. О методах линеаризации нелинейных уравнений теплопроводности.—«Изв. АН СССР, ОТН», 1951, № 6, стр. 829.
- 5-6. Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория тепло- и массопереноса. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
- 5-7. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
- 5-8. Mickey D. L. Liquid nitrogen cooling of a ruby rod.—«J. Appl. Phys.», 1966, v. 37, № 8, p. 2963.
- 5-9. Страхович К. И. Некоторые задачи теплопроводности в твердых телах с переменными теплофизическими характеристиками.—«Инженерно-физический журнал», 1958, т. 1, № 3, стр. 3.
- 5-10. Кудряшев Л. И., Веселов В. П. Исследование процессов нестационарной теплопроводности и сложного теплообмена методами электромоделирования и оценка погрешностей. В кн.: Тепло- и массоперенос, № 6. Минск, «Наука и техника», 1966, стр. 452.

5-11. Коздоба Л. А. Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса. М., «Энергия», 1972.

5-12. Меерович И. Г. Приближенный метод решения нелинейной задачи теплопроводности для неограниченной пластины в случае, когда теплофизические коэффициенты зависят от температуры.— «Теплофизика высоких температур», 1966, т. 4, № 2, стр. 242.

5-13. Savada M. On the general solution of basic expression for heat transmission.— «J. of Soc. Mech. Eng. Japan», 1932 v. 35, № 183, p. 695.

5-14. Кудряшев Л. И., Кудряшова Н. Л. Приближенные решения нелинейных задач нестационарной теплопроводности с применением интегральных соотношений академика Л. С. Лейбензона.— «Изв. вузов. Авиационная техника», 1965, № 4, стр. 18.

5-15. Белостоцкий Б. Р., Кудряшев Л. И., Меньших Н. Л. Исследование температурного режима активных тел импульсных оптических квантовых генераторов при зависимости их теплофизических характеристик от температуры.— «ДАН БССР», 1968, т. 12, № 5, стр. 405.

5-16. См. [Л. 2-12].

5-17. См. [Л. 2-16].

5-18. Белостоцкий Б. Р., Кудряшев Л. И., Меньших Н. Л. Нелинейные задачи охлаждения оптических элементов ОКГ с резко выраженной анизотропией.— «Квантовая электроника» под ред. Н. Г. Басова, 1972, № 8, стр. 23.

6-1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М., «Мир», 1964.

6-2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 19.

6-3. Тимошенко С. П. Теория упругости. М., Гостехиздат, 1934.

6-4. Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М., Физматгиз, 1958.

6-5. Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. Киев, «Наукова думка», 1965.

6-6. См. [Л. 3-30].

6-7. Желтов Г. И., Рубанов А. С., Чалей А. В. Напряженное состояние и термические деформации активных элементов твердотельных ОКГ. В кн.: Квантовая электроника и лазерная спектроскопия. Минск, 1971.

6-8. Белостоцкий Б. Р., Огородников Н. Н. К вопросу температурных напряжений в активной изотропной среде оптического квантового генератора.— «Журнал прикладной спектроскопии», 1967, т. 7, № 4, стр. 423—427.

6-9. См. [Л. 1-4].

6-10. См. [Л. 3-6].

6-11. См. [Л. 3-33].

6-12. Най Дж. Физические свойства кристаллов. М., «Мир», 1968.

6-13. См. [Л. 1-18].

6-14. См. [Л. 1-19].

6-15. Дмитриев В. Г., Уманский Б. М., Шкунов Н. В. Экспериментальные исследования термических искажений в активных элементах в непрерывном режиме накачки.— «Квантовая электроника». Под ред. Н. Г. Басова, 1971, № 3, стр. 34—37.

6-16. Дианов Е. М. О термических искажениях резонатора ОКГ в случае стержня из граната в форме прямоугольной пластины.— «Краткие сообщения по физике», 1971, № 8, стр. 67.

6-17. Koechner W., Rice D. K. Effect of birefringence on the performance of linearly polarized. YAC: Nd lasers. Proc. of the IEEE, 1970, v. QE-6, № 9, p. 557—566.

6-18. См. [Л. 3-29].

6-19. Quelle F. W. Thermal distortion of diffraction limited optical elements.— «Appl. Opt.», 1966, № 5, p. 633—637.

6-20. Smitzer E. Glass lasers. Proc. of the IEEE, 1966, v. 54, № 10, p. 24—38.

6-21. Baldwin G. D., Riedel E. P. Measurements of dynamic optical distortion in Nd-doped glass laser rods.— «J. Appl. Phys.», 1967, № 3, p. 2726—2738.

6-22. См. [Л. 1-17].

6-23. Бужинский И. М. и др. Термооптические характеристики стекол, активированных неодимом.— «ДАН СССР», 1970, т. 190, № 3, — стр. 558—561.

6-24. Мак А. А. и др. О термооптических постоянных активированных стекол.— «Оптико-механическая промышленность», 1971, № 9, стр. 42—45.

6-25. Дианов Е. М., Прохоров А. М. О термических искажениях резонаторов ОКГ в случае активных стержней в форме прямоугольных пластин.— «ДАН СССР», 1970, т. 192, № 3, стр. 531—533.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие . . . . .                                                                                                                | 3   |
| Предисловие авторов . . . . .                                                                                                        | 4   |
| Глава первая. ВВЕДЕНИЕ . . . . .                                                                                                     | 6   |
| 1-1. Источники тепловыделения в активных элементах ОКГ . . . . .                                                                     | 7   |
| 1-2. Теплофизические и механические свойства лазерных материалов . . . . .                                                           | 16  |
| 1-3. Уравнение теплопроводности . . . . .                                                                                            | 22  |
| Глава вторая. СТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ . . . . .                                                               | 24  |
| 2-1. Сплошной цилиндр . . . . .                                                                                                      | 24  |
| 2-2. Цилиндр в оболочке . . . . .                                                                                                    | 30  |
| 2-3. Полый цилиндр . . . . .                                                                                                         | 33  |
| 2-4. Пластина . . . . .                                                                                                              | 36  |
| Глава третья. ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ . . . . .                                                       | 39  |
| 3-1. Режим одиночных импульсов . . . . .                                                                                             | 41  |
| 3-2. Частотный режим . . . . .                                                                                                       | 49  |
| 3-3. Влияние неоднородности распределения источников тепловыделения на температурные поля активных элементов частотных ОКГ . . . . . | 70  |
| Глава четвертая. ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ . . . . .                                               | 76  |
| 4-1. Общий случай . . . . .                                                                                                          | 76  |
| 4-2. Круговой цилиндр . . . . .                                                                                                      | 86  |
| 4-3. Другие конфигурации . . . . .                                                                                                   | 100 |
| Глава пятая. УЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ . . . . .                              | 113 |
| 5-1. Общий случай . . . . .                                                                                                          | 114 |
| 5-2. Круговой цилиндр . . . . .                                                                                                      | 125 |
| Глава шестая. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ . . . . .                                                                                     | 134 |
| 6-1. Общие положения . . . . .                                                                                                       | 134 |
| 6-2. Режим одиночных импульсов . . . . .                                                                                             | 140 |
| 6-3. Частотный режим . . . . .                                                                                                       | 143 |
| 6-4. Термические искажения активных элементов . . . . .                                                                              | 149 |
| Список литературы . . . . .                                                                                                          | 160 |

50 коп.

144

14708

