А. Ф. Александров, А. А. Рухадзе

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ПЛАЗМОПОДОБНЫХ СРЕД

НЕРАВНОВЕСНЫЕ СРЕДЫ

А.Ф. Александров, А.А. Рухадзе

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ПЛАЗМОПОДОБНЫХ СРЕД

часть II

(неравновесные среды)

Москва
Издательство Московского университета
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2002

ББК 22.333
А 46
УДК 533.9

РЕЦЕНЗЕНТ
профессор Ю.Л.Климонтович

А л е к с а н д р о в А. Ф., Р у х а д з е А. А. **Лекции по электродинамике плазмоподобных сред, часть II (неравновесные среды).** – М.: Издательство Московского университета. Физический факультет МГУ, 2002. — 233 с.
ISBN 5–8279–0004–4

В книге последовательно изложена электродинамика неравновесных проводящих сред с существенной пространственной дисперсией. К числу таких сред, в первую очередь, относятся газовая и твердотельная плазма (металлы и полупроводники) в постоянных либо переменных электромагнитных полях, а также плотные пучки заряженных частиц, излучающих электромагнитные волны при взаимодействии с такими средами. К числу таких неравновесных сред относятся и неоднородные среды, удерживаемые магнитным полем. Исследуются как линейные, так и нелинейные электродинамические свойства неравновесных сред. Специальный раздел посвящен уединенным волнам и солитонам в неравновесных средах с пространственной дисперсией.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области физики плазмы, физической электроники и физики твердого тела.

Книга подготовлена при финансовой поддержке
ФЦП "Интеграция"

ISBN 5–8279–0004–4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга, по существу, представляет собой вторую часть нашей книги "Лекции по электродинамике плазмоподобных сред", основанной на материале специальных курсов, читаемых для студентов отделения радиофизики и электроники и кафедры физической электроники физического факультета МГУ и опубликованной в 1999 году издательством Московского Университета. В первой части излагались общие методы исследования электромагнитных свойств плазменных сред и были подробно изучены свойства термодинамически равновесных сред. Присутствие некоторых элементов теории устойчивости в первой части было связано с явлениями в пространственно неоднородных, либо ограниченных плазменных средах. Строго говоря, их следовало бы отнести к термодинамически неравновесным средам. Это, однако, далеко еще не явная неравновесность, поскольку в таких средах обычно выполняется условие локального термодинамического равновесия.

В этом смысле, в настоящей книге рассматриваются явно неравновесные среды: плазменная среда во внешних постоянных и переменных полях и вызываемые этими полями неустойчивости; плазменные среды, пронизываемые, либо обдуваемые пучками заряженных частиц, или, говоря иными словами, теория вынужденного излучения электромагнитных волн пучками заряженных частиц в плазменных средах. Здесь же рассматриваются прикладные проблемы – вынужденное излучение электронных пучков и основанные на этом явлении конкретные источники микроволнового и даже оптического излучения (мазеры и лазеры на свободных электронах). И наконец, одна из центральных прикладных проблем всей физики горячей плазмы – проблема магнитного удержания и реализация управляемого термоядерного синтеза.

Сразу же оговоримся, что как и в первой части книги мы в основном рассматриваем бесстолкновительные неустойчивости в плазменных средах, описываемых уравнениями Власова–Максвелла, как наиболее характерные быстро протекающие процессы в таких средах. Столкновительные же процессы как более медленные будут рассматриваться с учетом только упругих столкновений и то на качественном уровне с использованием интеграла БГК.

Как мы уже неоднократно отмечали, вся сила уравнений Власова–Максвелла как раз и состоит в том, что они описывают бесстолкповительные процессы, которые в плазменных средах всегда преобладают над столкновительными. В этой связи наиболее распространенные неустойчивости электрических разрядов в газах, связанные с ионизационно-рекомбинационными процессами, нагревом и возбуждением частиц нами не рассматриваются. Во-первых, потому, что им посвящена специальная литература, а во-вторых, их анализ сплошь и рядом носит качественный характер. Мы же по силе возможности будем стараться исследовать процессы развития неустойчивостей плазменных сред количественно.

Особо следует отметить появление в книге совершенно новой темы, обычно отсутствующей в курсах по электродинамике плазмы. Это тема VII, посвященная методам численного моделирования плазменных процессов. Этой проблеме посвящены отдельные монографии. Но мы решили изложить ее в сокращенном виде в настоящих лекциях, поскольку для изучения нелинейных процессов, да еще в неравновесной плазме, без численного моделирования трудно обойтись. Эту тему нам написал И.Н.Карташов, за что, естественно, мы ему очень благодарны.

Как и в первой части основной материал текста настоящей книги дополняется большим количеством задач с решениями. Порой эти задачи оказываются в прикладном отношении более информативными, чем основной текст и потому мы рекомендуем читателю обратить на них особое внимание.

Наконец, мы хотели бы обратится ко всем читателям с просьбой – присылайте нам замечания по книге (119899, Москва, Воробьевы горы, МГУ им. М.В.Ломоносова, Физический факультет, кафедра физической электроники). Это позволит нам продолжить работу над книгой и улучшать изложение материала в следующих изданиях обеих частей книги. За это мы заранее искренне признательны любезному читателю.

Авторы

ТЕМА I

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНАЯ ПЛАЗМЕННАЯ СРЕДА И ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ

§ 1.1. Энергия электромагнитного поля в неравновесной плазменной среде и неустойчивость среды

В обыденной жизни мы практически всегда имеем дело с термодинамически равновесными средами. Это и понятно, поскольку по определению термодинамически равновесной является среда, находящаяся в состоянии с минимумом энергии. Такая среда не может отдавать, она может только поглощать энергию. Естественно поэтому, что любые начальные возмущения, на создание которых энергия была затрачена, в термодинамически равновесной среде со временем затухают, отдавая свою энергию среде, как бы "нагревая"ее.

Термодинамически равновесная плазменная среда – это скорее исключение, чем правило. Плазма – это газ, состоящий из носителей заряда (электронов, ионов, дырок) и нейтральных частиц, занимающий, как правило, определенную область пространства, в которой идут процессы рождения и гибели заряженных частиц (ионизация и рекомбинация). Эти процессы часто разделены в пространстве, вследствие чего плазма становится неоднородной и занимает определенный конечный объем. Поэтому, естественно, такая плазма будет стремиться расшириться в пространстве, становясь пространственно-однородной, в особенности, если она не нейтральна и внешние силы не удерживают ее от разлета. Уже ограниченность в пространстве, строго говоря, означает термодинамическую неравновесность плазменной среды. К этому следует добавить, что в равновесии все сорта частиц должны обладать одной и той же температурой и их распределения по тепловым скоростям должны быть равновесными – максвелловскими в случае отсутствия вырождения, либо фермиевскими, если носители заряда вырождены.

Как уже отмечалось, реальная плазменная среда всегда ограничена в пространстве, т.е. всегда неравновесна. Правда, она может удерживаться внешними силами, как например, удерживаются носители заряда в твердом теле полем кристаллической решетки, либо газоразрядная плазма – стенками стеклянной трубки, или термоядерная – магнитной ловушкой. Но это не снимает проблему их неравновесности и тех последствий, которые отсюда следуют. Более того, плазменную среду невозможно представить без наличия электромагнитных полей, поскольку носители заряда являются источниками таких полей. Только полностью нейтральная, однородная и покоящаяся по всем компонентам плазменная среда может существовать без наличия каких-либо полей. Поэтому плазму правильнее рассматривать как совокупность заряженных (и нейтральных) частиц и фотонов (точнее, квантов излучения – "плазмонов"), находящихся в постоянном взаимодействии друг с другом. При этом проявляется основная особенность плазменной среды, ее главная черта, о которой мы так часто говорили в первой части наших лекций[1]. А именно, в плазменных средах взаимодействие заряженных частиц с электромагнитными полями всегда превалирует над прямым взаимодействием частиц друг с другом (над столковениями частиц). Именно благодаря этому факту, который, в свою очередь, является следствием кулоновского взаимодействия частиц, и условию применимости газового приближения

$$\eta = \frac{e^2 N^{1/3}}{\langle \mathcal{E} \rangle} \ll 1, \tag{1.1.1}$$

где N – плотность заряженных частиц, а $\langle \mathcal{E} \rangle$ – средняя энергия их теплового движения (температура, либо энергия Ферми), для описания динамики частиц плазмы применимо кинетическое уравнение Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\boldsymbol{\partial t}} + e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]\right\}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \tag{1.1.2}$$

Здесь $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ функция распределения носителей с зарядом e по импульсам $\mathbf{p}$ в момент времени t в точке $\mathbf{r}$, причем электрические и магнитные поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ удовлетворяют системе уравнений Максвелла

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_0) = 4\pi\rho_0 + \sum 4\pi e \int f d\mathbf{p}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j}_0 + \sum e \int f \mathbf{v} d\mathbf{p}\right).\end{gathered} \tag{1.1.3}$$

[1]Здесь и в дальнейшем под первой частью мы будем понимать нашу книгу "Лекции по электродинамике плазмоподобных сред", М.: Изд. МГУ, 1999г., посвященную, в основном, свойствам термодинамически равновесных плазменных сред.

Величины ρ_0 и $\mathbf{j}_0$ представляют собой плотности заряда и тока внешних (заданных) источников электромагнитного поля, а

$$\rho = \sum e \int f d\mathbf{p}, \qquad \mathbf{j} = \sum e \int f \mathbf{v} d\mathbf{p} \tag{1.1.4}$$

– плотности заряда и тока, индуцированные в плазменной среде под действием электромагнитного поля, т.е. силы Лоренца

$$\mathbf{F} = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right\}, \tag{1.1.5}$$

причем $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{p}}$ – скорость заряда. Суммирование в (1.1.3) и (1.1.4) распространяются по всем сортам заряженных частиц.

Правая часть уравнения Власова (1.1.2), строго говоря, отлична от нуля. Именно она описывает прямые (ближние) столкновения частиц в плазменной среде. Однако, при выполнении условия применимости газового приближения (1.1.1) это слагаемое в уравнении (1.1.2) всегда мало по сравнению с третьим слагаемым в левой части, описывающим взаимодействие заряженных частиц с самосогласованным (с учетом уравнений поля (1.1.3)) электромагнитным полем. Это означает, что в термодинамически неравновесной плазме столкновительные релаксационные процессы практически всегда пренебрежимо малы по сравнению с "бесстолкновительными"процессами, описываемыми уравнением Власова. По этой причине в дальнейшем при исследовании электромагнитных процессов в термодинамической неравновесной плазменной среде мы в основном будем пользоваться системой уравнений Власова – Максвелла (1.1.2) и (1.1.3). Совершенно очевидно, что неравновесная плазменная среда в процессе своей релаксации будет порождать электромагнитные поля, т.е. будет подвержена электромагнитной неустойчивости. Поэтому основная проблема описания неравновесной плазменной среды – это проблема анализа ее устойчивости. Эту проблему мы и будем исследовать на протяжении всего курса наших лекций, причем начнем с анализа линейных задач, а потом перейдем к нелинейным. Более того, большая часть лекций посвящена пространственно-однородным и стационарным неравновесным средам, для описания линейных свойств которых весьма эффективным оказывается введение тензоров проводимости и диэлектрической проницаемости (см. первую часть лекций). Они вводятся в виде материального уравнения, дополняющего систему (1.1.3)

$$j_i(\mathbf{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}'\, \hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}';t-t')E_j(\mathbf{r}',t'), \tag{1.1.6}$$

причем тензор проводимости определяется как

$$\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \int\limits_{0}^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R}\, \hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{R};\tau)e^{i\omega\tau - i\mathbf{kR}}, \tag{1.1.7}$$

а тензор диэлектрической проницаемости среды равен

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k}). \tag{1.1.8}$$

Диэлектрическая проницаемость играет важную роль в проблеме анализа устойчивости среды. Так, она характеризует обмен энергией между плоской монохроматической волной вида $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$ и средой: изменение энергии поля в среде за счет работы поля над его источниками. Усредненный по периоду поля $\sim 1/\omega$ обмен энергией в единице объема среды, т.е. количество тепла, выделяющегося в единице объема в единицу времени, определяется выражением

$$\frac{Q}{V} = \frac{i\omega}{4\pi}\left[\varepsilon^*_{ij}(\omega,\mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}(\omega,\mathbf{k})\right]E_iE^*_j = \frac{i\omega}{2\pi}\varepsilon^{\mathrm{a}}_{ij}(\omega,\mathbf{k})E_iE^*_j. \tag{1.1.9}$$

В частности, в случае изотропной среды, когда

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right)\varepsilon^{tr}(\omega,k) + \frac{k_ik_j}{k^2}\varepsilon^{l}(\omega,k), \tag{1.1.10}$$

из (1.1.9) следует

$$\frac{Q}{V} = \frac{\omega}{2\pi k^2}\left\{\mathrm{Im}\,\varepsilon^{l}(\omega,k)|(\mathbf{kE})|^2 + \mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(\omega,k)|[\mathbf{kE}]|^2\right\}. \tag{1.1.11}$$

Если в какой либо области $(\omega,\mathbf{k})$ при $\omega > 0$

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon^{l}(\omega,k) > 0 \qquad \text{или} \qquad \mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(\omega,k) > 0, \tag{1.1.12}$$

то $Q > 0$, среда поглощает энергию электромагнитной волны, как бы "нагревается". Именно так обстоит дело в термодинамически равновесной среде. Если же какое-либо из условий (1.1.12) нарушается, а в более общем случае, если

$$\varepsilon^{\mathrm{a}}_{ij}(\omega,\mathbf{k})E_iE^*_j < 0, \tag{1.1.13}$$

то среда может отдавать свою энергию (а значит, она имеет избыточную энергию и, следовательно, является термодинамически неравновесной) электромагнитному полю, как бы "охлаждаясь". Это означает возможность существования электромагнитной неустойчивости плазменной среды. Однако, это только возможность, условие, но далеко не необходимое и тем более не достаточное для проявления неустойчивости, поскольку при его получении мы предполагали существование в среде поля в виде плоской волны, что не всегда может иметь место. Кроме того, для справедливости условия неустойчивости (1.1.13) надо, чтобы среда была "слабопоглощающей", т.е. антиэрмитовская часть диэлектрической проницаемости должна быть малой по сравнению с эрмитовской. Например, это имеет место в оптической области спектра для активных сред лазеров, в том числе, и для полупроводниковых (плазмоподобных) сред, в которых вообще диэлектрическая проницаемость близка к ее вакуумному значению, т.е. к единице. При этом условие (1.1.13) оказывается достаточным условием неустойчивости среды.

Если антиэрмитовская часть диэлектрической проницаемости пренебрежимо мала в какой-либо области $(\omega, \mathbf{k})$, то, как известно, можно ввести понятие энергии электромагнитного поля плоской монохроматической волны в единице объема среды (также усредненной по периоду поля $\sim 1/\omega$)

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{4\pi}\left\{B_i(\omega,\mathbf{k})B_i^*(\omega,\mathbf{k}) + E_i^*(\omega,\mathbf{k})E_j(\omega,\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon_{ij}^{э}(\omega,\mathbf{k})\right)\right\}. \tag{1.1.14}$$

В данном случае эрмитовская часть тензора $\varepsilon_{ij}^{э}(\omega,\mathbf{k})$ совпадает с полным тензором $\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})$, поскольку антиэрмитовской частью мы пренебрегли. В частности, в случае изотропной среды из (1.1.14) с учетом (1.1.10) следует

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{4\pi k^2}\left\{|(\mathbf{kE})|^2\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon^l(\omega,k)\right) + \right.$$
$$\left. + |\mathbf{kE}|^2\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\left[\varepsilon^{tr}(\omega,k) - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right]\right)\right\}. \tag{1.1.15}$$

Отсюда для термодинамически равновесной среды, в которой энергия поля может быть только положительной, следуют неравенства

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon^l(\omega,k)\right) \geqslant 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\left[\varepsilon^{tr}(\omega,k) - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right]\right) \geqslant 0. \tag{1.1.16}$$

Если какое-либо из неравенств (1.1.16) оказывается обратного знака, то соответствующее слагаемое в выражении для энергии поля в среде также будет отрицательным. Б.Б.Кадомцев и А.В.Тимофеев в 1963 году предложили называть волны при отрицательных знаках величин (1.1.16), а в более общем случае, при условии выполнения в непоглощающей среде неравенства

$$|\mathbf{B}(\omega,\mathbf{k})|^2 + E_i^*(\omega,\mathbf{k})E_j(\omega,\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon_{ij}^{\text{э}}(\omega,\mathbf{k})\right) < 0, \qquad (1.1.17)$$

– волнами с отрицательной энергией. Очевидно, что такое может быть только в термодинамически неравновесных средах. Более того, с ростом амплитуды волны энергия электромагнитного поля растет по величине, но будучи отрицательной – падает. Иными словами, в системе уменьшается энергия электромагнитного поля, что означает электромагнитную неустойчивость среды.

Приведенные рассуждения, однако, не очень корректны. Дело в том, что из уравнения Власова (1.1.2), которым мы ограничиваемся для описания термодинамически неравновесной плазменной среды, легко получить соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_\alpha\int f_\alpha\mathcal{E}_\alpha d\mathbf{p} + \operatorname{div}\sum_\alpha\int f_\alpha\mathcal{E}_\alpha\mathbf{v}d\mathbf{p} = \mathbf{Ej} = \sum_\alpha\int f_\alpha\mathbf{v}d\mathbf{p}, \qquad (1.1.18)$$

где $\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{p})$ – энергия частицы сорта α, т.е. $\mathbf{v} = \dfrac{\partial\mathcal{E}_\alpha}{\partial\mathbf{p}}$. Используя далее уравнения поля (1.1.3), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d\mathbf{r}\left[\frac{1}{8\pi}\left(E^2+B^2\right) + \sum_\alpha\int f_\alpha\mathcal{E}_\alpha d\mathbf{p}\right] = \\ = \frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}\left(\mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right). \qquad (1.1.19)$$

Здесь $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ – электрическая индукция, которую в первой части лекций определили как

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\sum_\alpha e_\alpha\int f_\alpha\mathbf{v}d\mathbf{p} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}. \qquad (1.1.20)$$

Правая часть (1.1.18) представляет собой работу поля $\mathbf{E}$ над частицами среды с током $\mathbf{j}$ в единицу времени и совпадает с правой частью

(1.1.19), определяющей скорость изменения энергии неограниченной среды. В непоглощающей среде эти величины обращаются в нуль, что, согласно (1.1.19), означает сохранение полной суммарной энергии частиц и электромагнитного поля. Поэтому уменьшение энергии электромагнитного поля должно сопровождаться ростом кинетической энергии частиц среды. Каким образом это происходит, если обмен энергией между средой и полем отсутствует (при чисто эрмитовой диэлектрической проницаемости), не очень понятно. Этим объясняется, что в литературе при выполнении неравенства (1.1.17) говорят не только о волнах с отрицательной энергией, встречается также утверждение о нулевой энергии волны в этом случае (А.М.Игнатов, 1988г.). Мы же заметим, что условие (1.1.17) не является не только необходимым, но и достаточным условием неустойчивости: неустойчивость может иметь место и при отсутствии этого условия и это не противоречит требованию отсутствия минимума энергии в данном (неустойчивом) состоянии, и, наоборот, условие (1.1.17) может выполняться, а система все еще устойчива, поскольку в этом случае нет волновых решений, для которых это условие только и получено. Из всего сказанного выше можно заключить, что энергетический принцип неустойчивости, так успешно работающий для механических систем и даже для нейтральных газов, по-видимому не очень адекватно описывает неустойчивость плазменных сред, в которых взаимодействие между заряженными частицами в основном определяется самосогласованными полями.

§ 1.2. Метод нормальных мод колебаний в теории устойчивости плазмоподобных сред

В первой части курса наших лекций при исследовании спектров частот малых электромагнитных колебаний плазменных сред мы пользовались методом нормальных мод. В случае неограниченных в пространстве сред этот метод сводился к анализу дисперсионного уравнения

$$\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = |\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})| \equiv \left| k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0, \qquad (1.2.1)$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ – тензор диэлектрической проницаемости, описывающий отклик среды на малые колебания поля вида $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}$, ω и

$\mathbf{k}$ – частота и волновой вектор нормальной моды колебаний поля. Если при действительном значении $\mathbf{k}$ существуют решения уравнения (1.2.1) с $\operatorname{Im}\omega(\mathbf{k}) > 0$, то возмущение будет неограниченно возрастать со временем и мы можем утверждать, что среда неустойчива по отношению к возбуждению такой электромагнитной моды колебаний поля.

Малые колебания среды, однако, не имеют вид отдельной плоской монохроматической волны $\sim e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}$, а представляют собой суперпозицию таких волн, т.е. являются волновыми пакетами. Асимптотическое же поведение волнового пакета в целом может существенно отличаться от поведения отдельной его гармоники. Может оказаться, что в волновом пакете отдельные гармоники возрастают со временем, а пакет в целом при этом может оставаться ограниченным во времени в заданной точке пространства или даже затухать со временем. Если в волновом пакете возмущение поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в заданной точке $\mathbf{r}_0 = \mathrm{const}$ с ростом времени остается ограниченным по амплитуде

$$\lim_{t\to\infty} |\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)| < M, \tag{1.2.2}$$

то при наличии в пакете Фурье-гармоник с $\operatorname{Im}\omega(\mathbf{k}) > 0$ говорят о конвективной или сносовой неустойчивости. Если же возмущение неограниченно возрастает со временем, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} |\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)| \to \infty, \tag{1.2.3}$$

то неустойчивость называют абсолютной. Такое определение конвективной и абсолютной неустойчивостей в гидродинамике было введено в 1954 году Л.Ландау и Е.Лифшицем.

Таким образом, для определения характера электромагнитной неустойчивости среды необходимо проследить за временной динамикой возмущений, решая начальную задачу электродинамики. Для этого запишем уравнения поля в среде

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \tag{1.2.4}$$

где $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)$ – плотность тока внешних источников поля. При формулировке начальной задачи предполагаем, что источники поля существуют только в начальный момент времени, т.е. $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{r})\delta(t)$. Тогда решение системы (1.2.4) представляется в виде

$$E_i(\mathbf{r}, t) = \frac{2i}{(2\pi)^3 c}\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{kr}}\int d\omega \frac{\omega e^{-i\omega t} A_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{\Lambda(\omega, \mathbf{k})} g_j(\mathbf{k}), \tag{1.2.5}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{k})$ – Фурье-образ функции $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, а $A_{ij}(\omega,\mathbf{k})$ – алгебраические дополнения элементов матрицы $\Lambda_{ij}(\omega,\mathbf{k})$, причем интегрирование по ω проводится в комплексной плоскости ω по контуру G, параллельному действительной оси, но проходящему выше всех особых точек функций $A_{ij}(\omega,\mathbf{k})/\Lambda(\omega,\mathbf{k})$. Выполняя интегрирование по ω, дополним линию интегрирования по ω снизу полуокружностью бесконечного радиуса и учтем, что $A_{ij}(\omega,\mathbf{k})/\Lambda(\omega,\mathbf{k}) \to 0$ при $|\omega| \to \infty$. В результате получим

$$E_i(\mathbf{r},t) = \frac{-2}{(2\pi)^2 c}\int d\mathbf{k}e^{i\mathbf{kr}}\sum_n \frac{\omega_n e^{-i\omega_n t}A_{ij}(\omega_n,\mathbf{k})}{\Lambda_\omega(\omega_n,\mathbf{k})}g_j(\mathbf{k}). \tag{1.2.6}$$

Здесь $\Lambda_\omega(\omega_n,\mathbf{k}) = \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\omega}$ и суммирование проводится по всем корням $\omega_n(\mathbf{k})$ дисперсионного уравнения (1.2.1). Заметим, что точки ветвления функций $\omega_n(\mathbf{k})$ в интеграл (1.2.6) вклада не дают (их вклады взаимно сокращаются).

Допустим теперь, что среди корней $\omega_n(\mathbf{k})$ имеются корни с $\operatorname{Im}\omega_n > 0$, т.е. в (1.2.6) есть нарастающие со временем слагаемые. Обычно такие решения являются нарастающими в определенной области волновых векторов. Будем считать, что нарастание происходит вдоль оси $0z$. Это позволяет перейти в (1.2.6) к одномерному случаю, записав его в виде

$$E_i(z,t) = -\frac{2}{c}\int dke^{ikz}\sum_n \frac{\omega_n e^{-i\omega_n t}A_{ij}(\omega_n,k)}{\Lambda_\omega(\omega_n,k)}g_j(k). \tag{1.2.6a}$$

Рассмотрим, какому типу неустойчивости могут соответствовать корни с $\operatorname{Im}\omega_n(k) > 0$ и в каких условиях. Для этого положим в (1.2.6a) для определенности $z = 0$ и перейдем от интегрирования по k к интегрированию по $\omega_n(k)$ с учетом дисперсионного уравнения (1.2.1):

$$E_i(0,t) = \frac{2}{c}\sum_n\int_{G_n} d\omega_n \frac{\omega_n e^{-i\omega_n t}A_{ij}(\omega_n,k(\omega_n))}{\Lambda_k(\omega_n,k(\omega_n))}g_j(k(\omega_n)). \tag{1.2.7}$$

Здесь $\Lambda_k = \dfrac{\partial\Lambda}{\partial k} = -\Lambda_\omega\dfrac{d\omega}{dk}$, причем $\dfrac{d\omega}{dk} = v_{\text{г}}$ – групповая скорость волны с частотой $\omega(k)$, а интегрирование ведется по контуру G_n в комплексной плоскости $\omega_n(k)$, соответствующему действительной оси в комплексной плоскости k. Если между действительной осью ω_n и контуром G_n для любых n у подынтегрального выражения (1.2.7) нет особых точек, то контур G_n можно деформировать в действительную ось, тогда (1.2.7) будет представлять собой преобразование Фурье и согласно теореме Лебега при $t \to \infty$ величина возмущения поля $E_i(0,t) \to 0$, что соответствует конвективному характеру неустойчивости.

Таким образом, если среди корней дисперсионного уравнения (1.2.1) есть корень с $\mathrm{Im}\,\omega_n > 0$, то между действительной осью в комплексной плоскости ω_n и контуром G_n, соответствующим действительной оси k в комплексной плоскости $\omega_n(k)$, нет особых точек подынтегрального выражения Фурье-разложения $\mathbf{E}(0,t)$ (т.е. подынтегрального выражения (1.2.7)), то неустойчивость конвективная и $E_i(0,t) \to 0$ при $t \to \infty$. Если же между контуром G_n и действительной осью ω_n у этого выражения есть хотя бы одна особая точка с $\mathrm{Im}\,\omega_n > 0$, то при деформации контура G_n в действительную ось ω_n (1.2.7) появляется вклад от этой особой точки, нарастающий со временем как $e^{\mathrm{Im}\,\omega_n t}$, и неустойчивость становится абсолютной.

Легко видеть, что особые точки подынтегрального выражения (1.2.7) определяются нулями функции $\Lambda_k(\omega_n, k)$, где ω_n и $k(\omega_n)$ удовлетворяют дисперсионному уравнению (1.2.1). Таким образом, характер неустойчивости среды определяется решениями уравнений

$$\Lambda(\omega, k) = 0, \qquad \Lambda_k = \frac{\partial \Lambda(\omega, k)}{\partial k} = 0. \tag{1.2.8}$$

Легко показать, что эта система уравнений определяет точки ветвления функции $k(\omega)$. Действительно, запишем первое уравнение вблизи его корня ω_0, k_0. Имеем

$$\Lambda_\omega(\omega - \omega_0) + \Lambda_k(k - k_0) + \frac{1}{2}\Lambda_{kk}(k - k_0)^2 + \ldots = 0. \tag{1.2.9}$$

Отсюда следует, что при $\Lambda_\omega(\omega_0) \neq 0$ и $\Lambda_k(\omega_0) = 0$

$$k - k_0 = \pm\sqrt{\frac{2\Lambda_\omega}{\Lambda_{kk}}(\omega - \omega_0)}, \tag{1.2.10}$$

т.е. $\omega = \omega_0$ является точкой ветвления функции $k(\omega)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, характер неустойчивости в случае, когда корень дисперсионного уравнения ω_n имеет положительную мнимую часть $\mathrm{Im}\,\omega_n > 0$, определяется расположением на комплексной плоскости ω точек ветвления $k(\omega)$, совпадающих с решениями уравнения $\Lambda_k = 0$. Именно, если между контуром G_n и вещественной осью нет ветвлений функции $k(\omega_n)$, то неустойчивость конвективная, в противном случае она абсолютная.

В качестве иллюстрации рассмотрим простейший пример одномерного дисперсионного уравнения

$$\Lambda(\omega, k) = (\omega - ku)^2 - k^2 c_0^2 + \nu^2 = 0, \tag{1.2.11}$$

среди решений которого

$$\omega_{1,2} = ku \pm \sqrt{k^2 c_0^2 - \nu^2} \tag{1.2.12}$$

в области длин волн $k^2 c_0^2 < \nu^2$ имеется неустойчивое с $\mathrm{Im}\,\omega_1 > 0$, соответствующее нарастающим во времени колебаниям. Из уравнения $\dfrac{\partial \Lambda}{\partial k} = 0$ с учетом (1.2.12) находим точки ветвления[1]

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\nu}{c_0} \sqrt{u^2 - c_0^2}. \tag{1.2.13}$$

Если $u > c_0$, то точки ветвления лежат на действительной оси и поэтому контур G_1 можно деформировать в действительную ось, т.е. неустойчивость с $\mathrm{Im}\,\omega_1$ – конвективная. Если же $u < c_0$, то точка $\omega_1 = i\dfrac{\nu}{c_0}\sqrt{c_0^2 - u^2}$ лежит между действительной осью и контуром G_1, следовательно, неустойчивость – абсолютная.

Несколько иную формулировку критерия, определяющего неустойчивость, получим, если выражение (1.2.5) сначала будем интегрировать не по ω, а по k. Не приводя здесь абсолютно аналогичные, что и выше, рассуждения, дадим окончательный результат: если в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ точки ветвления $k(\omega)$ соответствуют волнам одного направления, то неустойчивость – конвективная; если же противоположно направленным, то неустойчивость – абсолютная. Проверим это утверждение на том же примере с $\Lambda(\omega, k)$ в виде (1.2.11). Корни этого уравнения

$$k_{1,2} = \frac{\omega u \pm \sqrt{c_0^2 \omega^2 - \nu^2 \left(u^2 - c_0^2\right)}}{u^2 - c_0^2} \tag{1.2.14}$$

показывают, что при $u > c_0$ обе волны в сумме $\sum\limits_{\alpha} a_\alpha e^{-i\omega t + i k_\alpha(\omega) x}$ распространяются вправо, а следовательно, неустойчивость конвектив-

[1] Точки ветвления (1.2.13) можно найти и из явного вида решения дисперсионного уравнения (1.2.11) относительно $k(\omega)$ (см. (1.2.14)).

ная. Если же $u < c_0$, то волны распространяются в противоположные стороны – неустойчивость абсолютная. Получили совпадающий с предыдущим вывод.

Отметим, что если неустойчивость конвективная, то колебания, усиливаясь в направлении их распространения, из заданной точки уходят. Следовательно, на этой неустойчивости можно построить усилитель. Если же неустойчивость абсолютная, то в системе происходит генерация колебаний. При этом усилитель построить нельзя; можно построить только генератор. В этом смысле в системе, в которой имеет место усиление колебаний, мы всегда можем реализовать генератор, если введем на пути распространения волн искусственный отражатель для какой-либо из усиливаемых волн, т.е. создадим в системе обратную связь (см. следующий параграф), либо если сама усиливаемая волна обладает отрицательной групповой скоростью и осуществляет внутреннюю распределенную обратную связь.

Здесь следует отметить еще одно весьма важное обстоятельство. Наши рассуждения об усилителе и генераторе верны только в том случае, когда дисперсионное уравнение имеет неустойчивые решения при рассмотрении временной задачи, т.е. решения с $\operatorname{Im}\omega > 0$. В противном случае наличие точек ветвления, либо появление решений с $\operatorname{Im}k \neq 0$ будут соответствовать непропусканию колебаний (полное внутреннее отражение), либо невозможности колебаний в среде.

Наконец, изложим еще один наиболее простой метод, точнее, правило анализа характера неустойчивости, предложенное в 1959 году П.Стэрроком и пригодное в условиях, когда дисперсионное уравнение (1.2.1) представляет собой алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами, причем функция $\Lambda(\omega, k)$ при больших ω, либо k распадается на множители вида $\omega - ku$, где $u = \mathrm{const}$. Для наглядности предположим, что $\Lambda(\omega, k)$ (одномерный случай) – полином второго порядка относительно ω и k. Тогда возможны 4 типа дисперсионных кривых, представленных на рис. 1.1. Видно, что любая прямая $k = \mathrm{const}$ на рис. 1.1а и 1.1б обязательно пересекает кривые $\omega(k)$. Система в этом случае устойчива, нет $\operatorname{Im}\omega \neq 0$ при действительных k. На рис. 1.1в и 1.1г, напротив, имеются области $k_1 < k < k_2$, в которых нет действительных решений $\omega(k)$, а так как дисперсионное уравнение – уравнение с действительными козффициентами, то в этой области k имеются два комплексно сопряженных решения $\omega_{1,2}(k)$, т.е. обязательно есть решение с $\operatorname{Im}\omega(k) > 0$ и в области $k_1 < k < k_2$ система неустойчива. При

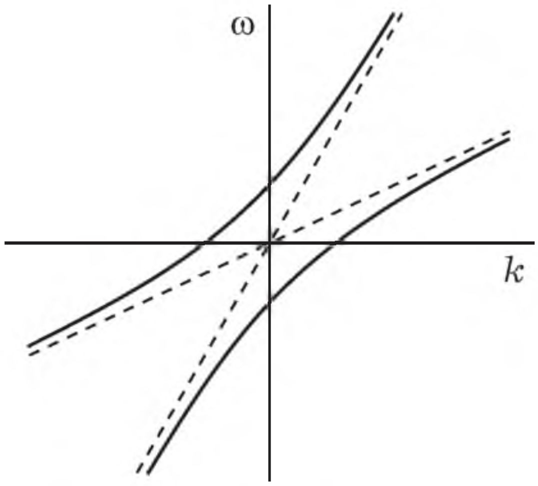

Рис. 1.1а

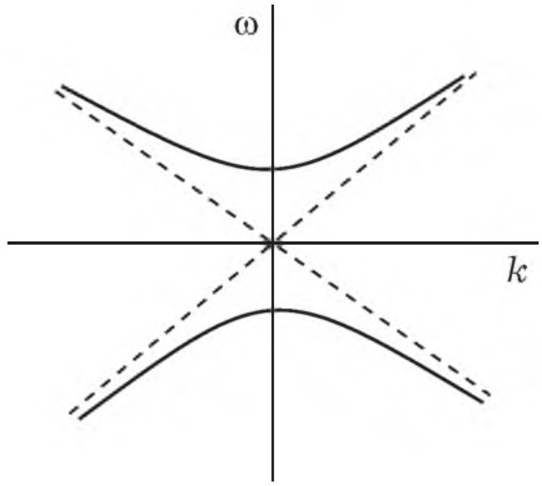

Рис. 1.1б

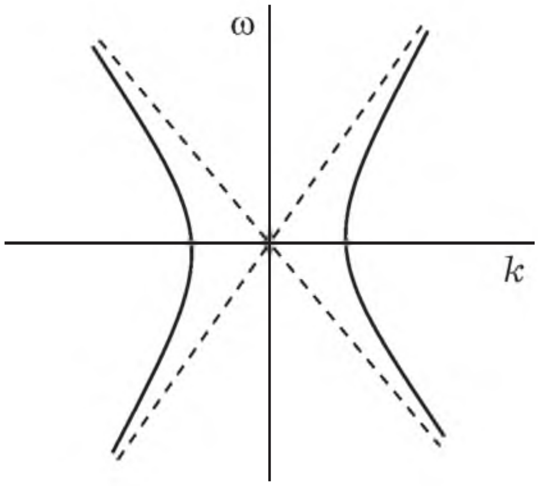

Рис. 1.1в

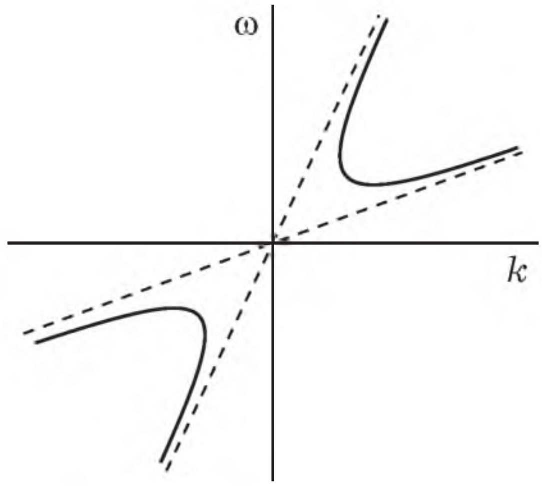

Рис. 1.1г

этом асимптотические прямые дисперсионных кривых определяют знак k, т.е. направление распространения волн, что позволяет определить характер неустойчивости: конвективная она или абсолютная. Поэтому в случае рис. 1.1в имеем абсолютную неустойчивость, а в случае рис. 1.1г – конвективную. Таким образом, в случае, когда асимптотические прямые $\mathrm{Re}\,\omega(k)$ при $\mathrm{Im}\,\omega(k) > 0$ наклонены в одну сторону, имеем конвективную неустойчивость, если же они наклонены в разные стороны – абсолютную. Это и есть так называемое первое правило Стэррока.

Второе же правило Стэррока относится к условиям пропускания или непропускания волн средой. Оно гласит: если асимптотические прямые $\omega(k)$ наклонены в разные стороны, то имеем непропускание волн, если же они наклонены в одну сторону, то имеем усиление колебаний. При этом, если на дисперсионной кривой $\omega(k)$ всем действительным значениям ω соответствуют действительные k, то среда прозрачна, колебания в ней могут распространяться. Это имеет место на рис. 1.1а и 1.1в. На рисунках же 1.1б и 1.1г прямая $\omega = \mathrm{const}$ пересекает дисперсионную кривую $\omega(k)$ не при любых значениях этой константы, имеется конечная область $\omega_1 < \omega < \omega_2$, в которой не существуют действительные k, они комплексны и мы имеем либо непропускание, либо усиление колебаний. На рис. 1.1б, однако, действительным значениям k всегда соответствуют действительные ω, а поэтому система устойчива и мы имеем только непропускание колебаний. Напротив, на рис. 1.1г в области от k_1 и до k_2 действительным k соответствуют комплексные $\omega(k)$, т.е. система неустойчива и мы имеем усиление колебаний.

Сформулированные правила Стэррока легко обобщаются на случай, когда $\Lambda(\omega, k)$ – действительный полином любых степеней ω и k (см. книгу А.И.Ахиезера и др. "Электродинамика плазмы", М.: Наука, 1974г.).

Отметим еще одну разновидность абсолютной неустойчивости, которая может иметь место только в пространственно-ограниченной системе. Возможен случай, когда в неограниченной системе неустойчивость вообще отсутствует, нет ни пространственного усиления, ни временного нарастания возмущений. Иными словами, дисперсионное уравнение для неограниченной системы имеет только действительные решения $\omega(\mathbf{k})$ и $\mathbf{k}(\omega)$. Однако, если система ограничена, то в ней может появиться обратная связь, и в определенных условиях она может оказаться неустойчивой с $\mathrm{Im}\,\omega(\mathbf{k}) > 0$. Такую абсолютную неустойчивость мы будем называть глобальной. Очевидно, что в такой системе возможна только генерация колебаний.

В заключение заметим, что характер абсолютной и конвективной неустойчивостей не является инвариантным и зависит от системы координат. Это является следствием неинвариантности частоты и волнового вектора по отдельности. Особенно легко это видно в случае нерелятивистской скорости, когда при преобразовании системы координат преобразуется только частота, но не волновой вектор. Такое преобразование поворачивает систему координат и кривая, изображенная на рис. 1.1в, может перейти в кривую, изображенную на рис. 1.1г, и наоборот. Тем самым абсолютная неустойчивость станет конвективной, и наоборот. В то же самое время кривые на рис. 1.1б и 1.1г не могут перейти друг в друга, что означает инвариантность характера пропускания поля средой.

§ 1.3. Классификация неустойчивостей в пространственно ограниченных системах[1]

В предыдущем параграфе отмечалось, что в пространственно неограниченной системе с конвективной неустойчивостью можно реализовать усилитель колебаний, а в системе с абсолютной неустойчивостью – только генератор колебаний. При этом было замечено, что в системе с конвективной неустойчивостью всегда можно реализовать генератор, организовав в ней обратную связь, например, путем введения на пути усиливаемой волны искусственного отражения и создания таким способом, обратной связи на отраженной волне.

Исследуем теперь этот вопрос подробнее, рассматривая неустойчивость в пространственно-ограниченной системе. Для простоты ограничимся рассмотрением одномерного случая. считая волны, распространяющимися вдоль оси $0z$, т.е. вида $\sim \exp(-i\omega t + ikz)$.

Традиционно считается, что генератор – это усилитель с обратной связью. Если обратиться к пространственно-ограниченным системам, то обратную связь здесь осуществляет отраженная от границ системы собственная волна, а под словом "усилитель"подразумевается усиление в среде по крайней мере одной из собственных волн. Это означает, что для неограниченной однородной среды дисперсионное уравнение собственных волн $\Lambda(\omega, k) = 0$ имеет комплексные корни $k = k_\nu(\omega)$ при действительных значениях частоты ω, причем часть корней лежит в нижней части комплексной k-плоскости. Из этого следует, что в случае неограниченной среды имеет место неустойчивость: конвективная или абсолютная, о которых и шла речь в предыдущем параграфе.

Тем не менее в пространственно ограниченных системах существует по меньшей мере еще один класс неустойчивостей, когда все корни $k = k_\nu(\omega)$ действительны при действительных ω; более того, точка ветвления решений $k_\nu(\omega)$ лежит на действительной оси комплексной ω-плоскостн. Это исключает развитие конвективной и абсолютной неустойчивостей в неограниченной системе. Более того, инкремент этих неустойчивостей обратно пропорционален длине системы L, т.е. $\mathrm{Im}\,\omega \sim L^{-1}$. Так как при анализе неустойчивостей в конечной области пространства обычно рассматривался асимптотический вид условия устойчивости при $L \to \infty$, часть неустойчивостей, встречающихся

[1]Этот параграф при первом чтении книги можно опустить.

в ограниченных плазменных средах, просто выпадала из рассмотрения. В связи с этим необходимо обобщить рассмотренную выше классификацию неустойчивостей на случай ограниченных систем[1].

Вначале мы исследуем двухволновые неустойчивости и получим критерии, когда можно говорить о генераторе как усилителе с обратной связью. Далее исследуем на примере четырех волн класс многоволновых неустойчивостей, которые не укладываются в изложенную выше традиционную схему. Покажем, что в ограниченной системе в четырехволновом приближении возможна генерация в отсутствие усиления волн.

Рассмотрим пространственно ограниченную систему, в которой волны распространяются вдоль оси $0z$, испытывая трансформацию на границах $z = 0$ и $z = L$. Пусть для соответствующей неограниченной однородной среды линеаризованное волновое уравнение содержит полином степени N относительно пространственной производной $\partial/\partial z$. Тогда дисперсионное уравнение $\Lambda(\omega, k) = 0$ определяет законы дисперсии волн $k_\nu = k_\nu(\omega)$, $\nu = 1, \ldots, N$. В этом случае волновые возмущения в системе конечной длины можно представить как суперпозицию нормальных волн $(\nu = 1, \ldots, N)$ неограниченной однородной среды и переходного поля вблизи границ системы

$$A(t, z) = \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu e^{-i\omega t + ik_\nu(\omega) z} + \sum_s B_s e^{-i\omega t + ik_s(\omega) z}. \tag{1.3.1}$$

Здесь выделена отдельно сумма затухающих мод B_s, которые определяют переходное поле, локализованное вблизи границ $z = 0$ и $z = L$ для случая поперечно неоднородных систем, и которыми в случае бесконечно протяженной среды пренебрегают. В качестве примеров приведем случаи, когда в пустой цилиндрический резонатор инжектируется тонкостенный трубчатый пучок электронов. В этих случаях вблизи границ $z = 0$ и $z = L$ имеется переходное поле, описываемое второй суммой в (1.3.1), где индекс s нумерует поперечные волновые числа $k_{\perp s}$. В дальнейшем мы опустим волны $B_s e^{-i\omega t + ik_s z}$, считая систему достаточно длинной, а моды B_s настолько быстро затухающими, что амлитуды этих волн, отраженных от другого конца системы, стремятся к нулю в окрестности рассматриваемой границы. Математически условие пренебрежения затухающими вглубь системы модами может быть выражено

[1]Здесь мы следуем недавно опубликованной статье Д.Н.Клочкова и А.А.Рухадзе, ЖЭТФ, 2001, т.120, вып.6(12), стр.1396.

неравенством

$$\min\{L\mathrm{Im}\, k_s\} \gg 1, \tag{1.3.2}$$

которое мы считаем в дальнейшем всегда выполненым.

Волну вида $\exp[-i\omega t + ik_\nu(\omega)z]$, задаваемую ветвью $k_\nu(\omega)$, будем называть идущей в некотором направлении, если при $\mathrm{Im}\,\omega \to \infty$ она убывает при изменении z в этом направлении. Так, если при $\mathrm{Im}\,\omega \to \infty$ имеем $\mathrm{Im}\, k_\nu(\omega) \to \infty$, то волна распространяется в положительном направлении оси $0z$, если же $\mathrm{Im}\, k_\nu(\omega) \to -\infty$, то волна распространяется в противоположную сторону.

Разобьем волны на две группы: группу волн, распространяющихся в положительном направлении оси $0z$ (для которых будем писать индекс "+"), и группу волн, идущих в противоположном направлении (индекс "−"). На границах $z = 0$ и $z = L$ происходит взаимная трансформация каждой волны одной группы в волны другой. Пусть решена соответствующая дифракционная задача, т.е. найдены коэффициенты трансформации волн $A_\nu^\pm$ с учетом волн B_s переходного поля. Тогда на границе $z = 0$ будет справедливо следующее соотношение:

$$A_p^+ = \sum_{j=1}^{n^-} T_{pj}^{(in)} A_j^-, \qquad p = 1, \ldots, n^+, \tag{1.3.3}$$

описывающее трансформацию волн k_j^- в волну k_p^+. Аналогично на границе $z = L$ трансформация волн k_μ^+ в волну k_n^- описывается уравнением

$$A_n^- e^{ik_n^- L} = \sum_{j=1}^{n^+} T_{nj}^{(out)} A_j^+ e^{ik_j^+ L}, \qquad n = 1, \ldots, n^-, \tag{1.3.4}$$

Здесь $n^+ + n^- = N$.

Система однородных линейных уравнений (1.3.3), (1.3.4) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Отсюда получается дисперсионное уравнение пространственно ограниченной системы

$$\det\left\{\sum_{p=1}^{n^-} T_{jp}^{(in)} T_{pn}^{(out)} e^{i(k_n^+ - k_p^-)L} - \delta_{jn}\right\} = 0, \tag{1.3.5}$$

определяющее дискретный спектр частот ω системы.

Возможна, в частном случае, такая ситуация, когда кроме волн k_1^+ и k_1^- других волн в системе нет, т.е. $N = 2$. При этом тогда мы имеем случай, рассмотренный в предыдущем параграфе. Если $N > 2$, то для ω, лежащей в верхней части комплексной плоскости, выделим такие $k_{n^*}^+$ и $k_{p^*}^-$, мнимая часть разности которых минимальна, т.е.

$$\min\{\mathrm{Im}\,(k_n^+ - k_p^-)\} = \mathrm{Im}\,(k_{n^*}^+ - k_{p^*}^-), \qquad \mathrm{Im}\,\omega > 0. \tag{1.3.6}$$

Будем называть "основным волновым состоянием"состояние, соответствующее возбуждению волн $k_{n^*}^+$ и $k_{p^*}^-$. Для каждого волнового состояния, описываемого слагаемым $k_n^+ - k_p^-$ в экспоненциальном множителе, определим "волновую щель"Δk_{np} от основного волнового состояния, т.е. вычислим величину

$$\Delta k_{np} = \mathrm{Im}\,(k_n^+ - k_p^-) - \mathrm{Im}\,(k_{n^*}^+ - k_{p^*}^-). \tag{1.3.7}$$

Если длина системы L достаточно велика, т.е. если выполняется неравенство

$$L \min\{\Delta k_{np}\} > 1, \tag{1.3.8}$$

то в уравнении (1.3.5) основной вклад дает слагаемое с $\exp[i(k_{n^*}^+ - k_{p^*}^-)L]$, описывающее основное волновое состояние. Заметим, что условие (1.3.8) не эквивалентно условию (1.3.2). Может оказаться так, что условие (1.3.8) просто не выполнимо, а может быть и наоборот. Так для резонансных неустойчивостей (таких, например, как черенковская) условие (1.3.8) выполняется и оказывается более сильным, чем условие (1.3.2).

Будем считать, что условие (1.3.8) выполнено. В этом случае уравнение (1.3.5) существенно упрощается и принимает вид:

$$T_{n^*p^*}^{(in)} T_{p^*n^*}^{(out)} e^{i(k_{n^*}^+ - k_{p^*}^-)L} = 1. \tag{1.3.9}$$

Дадим теперь классификацию возможных неустойчивостей, описываемых уравнением (1.3.9). Для этого возьмем уравнение (1.3.9) по модулю

$$|T_{n^*p^*}^{(in)} T_{p^*n^*}^{(out)}| e^{-\mathrm{Im}\,(k_{n^*}^+ - k_{p^*}^-)L} = 1. \tag{1.3.10}$$

Если $\mathrm{Im}\,(k_{n^*}^+ - k_{p^*}^-) > 0$, то экспоненциальный множитель в уравнении (1.3.10) меньше единицы. В этом случае неустойчивость может развиваться только, если $|T_{n^*p^*}^{(in)}||T_{p^*n^*}^{(out)}| > 1$, т.е. если имеет место сверхотражение хотя бы от одной из границ системы, т.е. граница является источником излучения.

Если $\mathrm{Im}\,(k_{n^*}^+ - k_{p^*}^-) < 0$, то экспоненциальный множитель в уравнении (1.3.10) больше единицы. В этом случае неустойчивость может развиваться даже в условиях потерь на границах системы.

Рассмотрим асимптотику $L \to \infty$. В зависимости от знака разности $\operatorname{Im}(k^+_{n^*} - k^-_{p^*})$ экспоненциальный множитель в уравнении (1.3.10) стремится либо к нулю, либо к бесконечности. Поэтому уравнение (1.3.10) выполняется для $L \to \infty$ только при условии:

$$\operatorname{Im}(k^+_{n^*} - k^-_{p^*}) = 0. \tag{1.3.11}$$

Уравнение (1.3.11), записанное относительно ω, представляет собой частный случай уравнения (1.3.10), когда влияние границ системы исключается. Фактически мы написали условие развития неустойчивости в безграничной среде, а конечность системы учли через отраженную волну, т.е. задачу фактически свели к рассмотренной в предыдущем параграфе. Неустойчивости данного типа получили название глобальных.

Рассмотрим теперь случай, когда имеет место $\operatorname{Im}(k^+_n - k^-_p) \leqslant 0$ при $\operatorname{Im}\omega > 0$, т.е. когда развивается неустойчивость при отсутствии активных границ. Пусть при вещественном ω ($\operatorname{Im}\omega = 0$) волновое число имеет вид $k(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega)$. При этом мы считаем что нет апериодического усиления в системе, т.е. выполняется условие $k''(\omega) \ll k'(\omega)$. Пусть имеет место сдвиг частоты в верхнюю часть комплексной плоскости $\omega = \omega' + i\omega''$, $\omega'' > 0$. Полагая $\omega'' \ll \omega'$, для волнового числа получим

$$k(\omega) = k'(\omega') + i\left(k'' + \frac{\omega''}{v_\text{г}}\right). \tag{1.3.12}$$

Здесь $v_\text{г} = d\omega'/dk' = (dk'(\omega')/d\omega')^{-1}$ – групповая скорость волны. Условие пространственного усиления $\operatorname{Im} k < 0$ волны принимает вид

$$k'' < -\frac{\omega''}{v_\text{г}}. \tag{1.3.13}$$

Отсюда видно, что усиление в среде возможно, если распространяется волна с обратной дисперсией с $k = \alpha/\omega$ и групповой скоростью $v_\text{г} = -\omega^2/\alpha < 0$, или если $|k''|$ настолько велико, что выполняется условие (1.3.13) при отрицательной правой части.

Пусть для волн $k^+_{n^*}$ и $k^-_{p^*}$ выполняется закон дисперсии вида (1.3.12). Опуская индексы n^* и p^*, ставшие уже не нужными, мы можем написать:

$$k^+ - k^- = k'_+(\omega') - k'_-(\omega') + i\left[k''_+ - k''_- + \omega''\left(\frac{1}{v^+_\text{г}} - \frac{1}{v^-_\text{г}}\right)\right], \tag{1.3.14}$$

откуда следует искомое неравенство:

$$k''_+ - k''_- + \omega'' \left(\frac{1}{v_\text{г}^+} - \frac{1}{v_\text{г}^-} \right) \leqslant 0. \qquad (1.3.15а)$$

Таким образом, при отсутствии активных границ неустойчивость на двух волнах в конечной системе развивается при выполнении неравенства (1.3.15а), при этом знак равенства соответствует развитию глобальной неустойчивости с инкрементом $\omega'' = (k''_- - k''_+)/\left(\frac{1}{v_\text{г}^+} - \frac{1}{v_\text{г}^-} \right)$. Появление в формуле для инкремента групповой скорости имеет простое объяснение: обратная связь в системе осуществляется с групповой скоростью, так как именно с этой скоростью происходит перенос энергии волной. Если в системе нет усиления, но имеются активные границы, то уравнение (1.3.10) имеет решение при

$$|T^{(in)}_{n^*p^*}||T^{(out)}_{p^*n^*}| > 1. \qquad (1.3.15б)$$

В этом случае усиление волн происходит вне рассматриваемой системы. Расширив область пространства и тем самым включив в систему область, где происходит усиление, мы приходим к случаю, когда в системе происходит усиление. Тем самым мы приходим опять таки к случаю, рассмотренному в предыдущем параграфе.

Итак, в пространственно ограниченной системе развитие неустойчивости на двух волнах возможно, если наряду с условием (1.3.8) выполняется хотя бы одно из условий (1.3.15). В этом случае неустойчивость является усилительной с обратной связью, в том смысле, что в системе имеет место усиление хотя бы одной волны и при этом одна или две волны осуществляют обратную связь, которая происходит с групповой скоростью. Все эти неустойчивости укладываются в традиционные представления о том, что генератор – это усилитель с обратной связью.

Если не выполняется ни одно из условий (1.3.15) и в системе нет больше волн, кроме рассматриваемых, то система устойчива относительно начальных возмущений. Если же в системе больше чем две волны, то вопрос об устойчивости системы на основе критериев (1.3.15) решить нельзя. Более того, может оказаться так, что волновая щель Δk_{np} невелика или отсутствует вовсе, или же система настолько коротка, что во всех перечисленных случаях условие (1.3.8) не выполняется. Тогда нельзя выделить две волны согласно условию (1.3.6) и тем самым редуцировать уравнение (1.3.5) к (1.3.10). В этом случае все волны, для которых выражение $L\mathrm{Im}\,(k_n^+ - k_p^-)$ имеет примерно одинаковую величину, равноправно входят в уравнение (1.3.5). Подстановка в уравнение (1.3.5) законов дисперсии $k_\nu = k_\nu(\omega)$ приводит к трансцендентному комплексному уравнению относительно ω. Если в результате решения полученного уравнения окажется, что ω имеет положительную мнимую часть ($\mathrm{Im}\,\omega > 0$), то система является неустойчивой. При этом выполнение условий (1.3.15) не обязательно, т.е. в системе может не быть ни активных границ, ни волн с обратной дисперсией, ни локального пространственного усиления волн ($k'' = 0$). Этот класс неустойчивостей, которые назовем "безусилительными"не укладывается в традиционные представления о том, что генератор – это усилитель с обратной связью. При этом число волн N в системе должно быть большим: $N > 2$.

Наиболее простой и часто встречающейся ситуацией является случай четырех волн. Это происходит, когда систему пронизывает поток заряженных частиц (например, пучок электронов или ионов, стабилизированный магнитным полем). Будем предполагать, что поток движется в положительном направлении оси $0z$. Тогда в системе три волны движутся в том же направлении, что и поток (это собственная волна системы с волновым числом k_1 и две волны потока с волновыми числами k_3 и k_4) и только одна отраженная собственная волна системы с $k_2 = k^-$ распространяется в противоположном направлении.

Если на правой границе системы $z = L$ сопутствующие потоку волны A_1, A_3 и A_4 частично трансформируются во встречную волну A_2 и частично в волны, покидающие систему, то данный процесс можно записать в следующем виде:

$$e^{ik_2L} = \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq 2}}^{4} T_{2\nu}^{(out)} T_{\nu 2}^{(in)} e^{ik_\nu L}. \qquad (1.3.16)$$

Уравнение (1.3.16) является частным случаем уравнения (1.3.5) для четырех волн.

Будем считать, что при отсутствии потока среда системы является изотропной (симметричной относительно инверсии $z \to -z$), тогда волновые числа собственных волн системы без потока имеют вид $k_{1,2} = \pm a$, где a принимает дискретный набор значений в силу конечности системы (величина a обратно пропорциональна размеру резонатора). Так как условие (1.3.8) не выполняется, то это исключает возможность локального резонанса в системе, т.е. $\omega \neq au$, где u – скорость потока. Будем считать плотность потока настолько малой, что его можно учесть по теории возмущений. В этом случае для собственных волн системы имеем

$$k_{1,2} = \pm a + \delta k_{1,2}, \tag{1.3.17а}$$

а для волн потока

$$k_{3,4} = \frac{\omega}{u} \pm \delta k_3. \tag{1.3.17б}$$

Здесь $\delta k_1 = O(\omega_b^2)$, $\delta k_2 = O(\omega_b^2)$, $\delta k_3 = -\delta k_4 = O(\omega_b)$, где ω_b – малый параметр, характеризующий невозмущенную плотность потока. Для пучков заряженных частиц ω_b – это ленгмюровская частота частиц пучка, а малым безразмерным параметром в этом случае является безразмерная величина ω_b/ω_0, где ω_0 – характерная частота системы, определяемая из (1.3.17а).

В случае электронного пучка в цилиндрическом резонаторе его учет приводит к поправке в тензоре диэлектрической проницаемости, которая оказывается пропорциональной величине $\delta\varepsilon \sim \omega_b^2/(\omega - ku)^2$. Появление потокового выражения $(\omega - ku)$ в знаменателе следует из уравнения движения частиц пучка. В результате из возмущенной части $\delta\varepsilon$ тензора диэлектрической проницаемости получаем поправки δk_i в законах дисперсии волн (1.3.17). Так, если в пустой круглого сечения металлический резонатор радиуса R инжектируется однородный моноэнергетический пучок электронов, то $\delta\varepsilon_{\|} = -\omega_b^2\gamma^{-3}/(\omega - ku)^2$, а

$$\delta k_{1,2} = \mp \frac{k_\perp^2 \gamma^{-3}}{2a(\omega \mp au)^2}\omega_b^2, \tag{1.3.18а}$$

$$\delta k_{3,4} = \pm \frac{\omega}{u}\frac{\gamma^{-5/2}}{\sqrt{\omega^2 - a^2u^2}}\omega_b. \tag{1.3.18б}$$

Здесь $k_\perp \sim 1/R$ – поперечное волновое число, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор (см. тему V).

Будем предполагать, что на входной границе $z = 0$ влетающий поток не возмущен ни по скорости, ни по плотности. Чтобы удовлетворить этому условию, будем полагать, что на этой границе происходит зеркальное отражение волн, т.е. через границу $z = 0$ волны систему не покидают. Условие зеркального отражения волн может быть представлено в виде

$$\sum_{\nu=1}^{4} k_\nu A_\nu + \sum_s k_s B_s = 0. \tag{1.3.19а}$$

Отсутствие возмущений потока по скорости дает

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{A_\nu}{\omega - k_\nu u} + \sum_{s} \frac{B_s}{\omega - k_\nu u} = 0, \tag{1.3.19б}$$

а по плотности

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{A_\nu}{(\omega - k_\nu u)^2} + \sum_{s} \frac{B_s}{(\omega - k_\nu u)^2} = 0. \tag{1.3.19в}$$

Для потоков малой плотности, когда $B_s = O(\omega_b^2)$, или для поперечно однородных систем коэффициенты трансформации имеют вид

$$T_{12}^{(in)} = 1 + O(\omega_b^2), \qquad T_{32}^{(in)} = \alpha\omega_b, \qquad T_{42}^{(in)} = -\alpha\omega_b. \tag{1.3.20}$$

Коэффициенты трансформации $T_{2\nu}^{(out)}$ могут быть представлены в наиболее общем виде:

$$T_{21}^{(out)} = \varkappa_1 + g_1\omega_b^2, \qquad T_{23}^{(out)} = \varkappa_b + g_b\omega_b^2, \qquad T_{24}^{(out)} = \varkappa_b - g_b\omega_b^2. \tag{1.3.21}$$

Здесь $\varkappa_1$ – коэффициент отражения попутной волны от плоскости $z = L$ при отсутствии потока, $\varkappa_b$ – коэффициент трансформации потоковых волн. В результате в общем виде можно положить

$$\begin{gathered} T_{21}^{(out)} T_{12}^{(in)} = \varkappa_1 + q_1\omega_b^2, \\ T_{23}^{(out)} T_{32}^{(in)} = -b\omega_b + F\omega_b^2, \\ T_{24}^{(out)} T_{42}^{(in)} = b\omega_b + F\omega_b^2. \end{gathered} \tag{1.3.22}$$

Величины q, b, F зависят от геометрии системы и являются функциями частоты и волновых чисел (подробнее см. тему V). Так, если в вакуумный металлический круглого сечения идеальный (нет ни омических, ни излучательных потерь $\varkappa_1 = 1$) резонатор инжектируется однородный моноэнергетический пучок электронов, то

$$\begin{gathered} b = \frac{\omega}{au} \frac{k_\perp^2 u^2 \gamma^{-1/2}}{(\omega^2 - a^2u^2)^{3/2}}, \\ F = 2\frac{\omega}{au} \frac{\omega^2 + a^2u^2}{(\omega^2 - a^2u^2)^3} k_\perp^2 u^2 \gamma^{-3}, \\ q_1 = -2F. \end{gathered} \tag{1.3.23}$$

Полагая $L\delta k_1 \ll 1$, $L\delta k_2 \ll 1$, $L\delta k_3 \sim 1$, получаем окончательное выражение дисперсионного уравнения возникающей неустойчивости, линеаризованное по малому параметру ($\sim \omega_b/\omega$)

$$\mathcal{D}(a) \equiv \mathcal{D}_0(a) + \mathcal{D}_1(a) = 0. \qquad (1.3.24)$$

Здесь

$$\mathcal{D}_0(a) = e^{-iaL} - e^{iaL} = 2i \sin aL \qquad (1.3.25)$$

– невозмущенная часть дисперсионного уравнения, которая определяет дискретный набор значений невозмущенного параметра a:

$$a = \frac{\pi n}{L}, \qquad (1.3.26)$$

а следовательно и дискретный спектр собственных колебаний системы $\omega = \omega(\mathrm{Re}\, a)$.

Учет возмущения пучка дает второе слагаемое $\mathcal{D}_1(a)$ в дисперсионном уравнении:

$$\mathcal{D}_1(a) = iL\delta k_2 e^{-iaL} - (iL\delta k_1 + q_1\omega_b^2)e^{iaL} + \\ + 2ib\omega_b \sin(L\delta k_3)e^{i\theta} - 2F\omega_b^2 \cos(L\delta k_3)e^{i\theta}. \qquad (1.3.27)$$

Здесь $\theta = \omega L/u$ – пролетный угол (фаза) частиц потока. Соответствующее этому члену возмущение собственной частоты системы $\delta\omega$ равно

$$\delta\omega = -\frac{d\omega}{da}\frac{\mathcal{D}_1(a)}{\dfrac{\partial \mathcal{D}_0(a)}{\partial a}} = \frac{1}{2}\frac{d\omega}{da}(\delta k_2 - \delta k_1) + (-1)^n \frac{\omega_b b}{L}\frac{d\omega}{da}\sin(L\delta k_3)e^{i\theta} + \\ + i\frac{\omega_b^2}{L}\frac{d\omega}{da}\left[\frac{q_1}{2} + (-1)^n F\cos(L\delta k_3)e^{i\theta}\right]. \qquad (1.3.28)$$

Здесь $\dfrac{d\omega}{da} = v_{\text{г}}$ – групповая скорость собственной волны системы. Мнимая часть параметра a определяет потери на излучение:

$$\gamma_\omega^- = -\frac{d\omega}{da}\mathrm{Im}\, a = \frac{1}{2L}\frac{d\omega}{da}\ln\frac{1}{|\varkappa_1|}.$$

Из (1.3.28) находим инкремент неустойчивости системы с идеальной добротностью ($\varkappa_1 = 1$):

$$\gamma_\omega = \mathrm{Im}\,\delta\omega = \frac{1}{2}v_{\text{г}}\mathrm{Im}\,(\delta k_2 - \delta k_1) + (-1)^n\frac{\omega_b v_{\text{г}}}{L}\mathrm{Im}\left[b\sin(L\delta k_3)e^{i\theta}\right] + \\ + \frac{\omega_b^2 v_{\text{г}}}{L}\mathrm{Re}\left[\frac{q_1}{2} + (-1)^n F\cos(L\delta k_3)e^{i\theta}\right]. \qquad (1.3.29)$$

Если в системе есть усиление, т.е. выполняется условие (1.3.15a), то существует ненулевая "волновая щель"Δk_{np}. В этом случае, начиная с некоторого значения длины системы L^*, для всех $L > L^*$ будет выполняться условие (1.3.8). Таким образом в длинных системах $L > L^*$ будет двухволновая генерация, описываемая уравнением (1.3.9). Действительно, устремляя длину системы $L \to \infty$ в формуле (1.3.29), мы получаем инкремент глобальной неустойчивости

$$\gamma_\omega = \frac{1}{2} v_{\text{г}} \mathrm{Im}\,(\delta k_2 - \delta k_1). \tag{1.3.30}$$

Если все δk_i реальны (в этом случае комплексными могут быть только $T_{np}^{(out)}$), то условие (1.3.8) не выполняется ни при каких длинах L, а инкремент (декремент) неустойчивости равен:

$$\begin{aligned}\gamma_\omega = (-1)^n \frac{\omega_b v_{\text{г}}}{L} |b| \sin(L\delta k_3) \sin(\theta + \arg \varkappa_b) + \\ + \frac{\omega_b^2 v_{\text{г}}}{L} \left[\frac{|q_1|}{2} \cos(\arg q_1) + (-1)^n |F| \cos(L\delta k_3) \cos(\theta + \arg F) \right].\end{aligned} \tag{1.3.31}$$

Если $\gamma_\omega > 0$, то в системе возникает безусилительная неустойчивость, так как для реальных $k_\nu = k_\nu(\omega)$ при $\mathrm{Im}\,\omega = 0$ ни одно из условий (1.3.8), (1.3.15) не выполнено. При $L \to \infty$ инкремент безуснлптельной неустойчивости стремится к нулю, поэтому данная неустойчивость возникает только в пространственно ограниченных средах.

По отношению к величине $L\delta k_3$ системы можно разбить на короткие и длинные. В коротких системах $L\delta k_3 \ll 1$, поэтому $\sin(L\delta k_3) \sim L\delta k_3 \sim \omega_b L$. В результате оба первых члена в (1.3.31) одного порядка, а инкремент в системе без потерь $\gamma_\omega \sim \omega_b^2$, т.е. пропорционален плотности потока. Так, если в вакуумный металлический круглого сечения идеальный резонатор инжектируется однородный моноэнергетический пучок электронов, то инкремент равен

$$\gamma_\omega^+ = \frac{k_\perp^2 c^2 \gamma^{-3}}{(\omega^2 - a^2 u^2)^2} \frac{u}{L} \omega_b^2 \left[(-1)^n \theta \sin\theta + 2 \frac{\omega^2 + a^2 u^2}{\omega^2 - a^2 u^2} \left((-1)^n \cos\theta - 1 \right) \right]. \tag{1.3.32}$$

Условие развития неустойчивости имеет вид

$$(-1)^n \theta \sin\theta + 2 \frac{\omega^2 + a^2 u^2}{\omega^2 - a^2 u^2} \left((-1)^n \cos\theta - 1 \right) > 0. \tag{1.3.33}$$

В длинных системах, когда $L\delta k_3 \geqslant 1$, второй член в (1.3.31) имеет более высокий порядок малости по параметру ω_b в сравнении с первым слагаемым. Поэтому для длинных систем выражение для инкремента упрощается и становится равным:

$$\gamma_\omega = (-1)^n \omega_b |b| \frac{v_\text{г}}{L} \sin(L\delta k_3) \sin\left(\theta + \arg \varkappa_b\right). \tag{1.3.34}$$

Условие развития неустойчивости $\gamma_\omega > 0$ для длинных систем принимает вид

$$(-1)^n \omega_b |b| \sin(L\delta k_3) \sin\left(\theta + \arg \varkappa_b\right) > 0. \tag{1.3.35}$$

Как видно из (1.3.35) выполнение неравенства сильно зависит от пролетного угла θ. В этом смысле можно говорить, что безусилительные неустойчивости определяются нелокальным резонансом, в выражение для которого входят параметры потока и линейные размеры системы. Для идеального резонатора условие (1.3.35) существенно упрощается:

$$(-1)^n \sin(L\delta k_3) \sin\theta > 0. \tag{1.3.36}$$

При выводе инкремента γ_ω предполагался произвольный закон дисперсии $a = a(\omega)$ собственных волн системы. Поэтому безусилительная неустойчивость является универсальной в том смысле, что проявляется на волнах с любым законом дисперсии и ненулевой групповой скоростью. В отличие от резонансных неустойчивостей, таких как черенковская, развитие безусилительной неустойчивости не требует, чтобы собственные волны системы были замедленными. В электронике – это возбуждение монотрона (см. тему V).

Таким образом, усилитель с обратной связью является частным случаем реализации генератора. В плазмоподобных пространственно-ограниченных средах существует широкий класс неустойчивостей, не укладывающихся в традиционные представления. Условия развития этих неустойчивостей определяются нелокальным резонансом. Это делает невозможным создание усилителей, работающих на данном типе неустойчивостей, однако позволяет создать широкий класс генераторов.

Задачи по теме I

Задача 1. Исследовать на устойчивость пространственно неограниченный электронный пучок, движущийся с постоянной нерелятивистской скоростью $\mathbf{u}$ относительно неподвижного нейтрализующего фона ионов. Ограничиться рассмотрением одномерного случая (например, в бесконечно сильном продольном магнитном поле).

Решение.

Такой пучок может быть неустойчивым только по отношению к возбуждению медленных волн с фазовой скоростью меньше скорости света. Поэтому достаточно исследовать лишь продольные (потенциальные) волны, спектр частот которых определяется нулями продольной диэлектрической проницаемости, т.е.

$$\varepsilon(\omega,\mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij}(\omega,k) = 1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega-\mathbf{ku})^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_b^2(\omega-\mathbf{ku})}{k^3 v_{Tb}^3} e^{-\dfrac{(\omega-\mathbf{ku})^2}{2k^2 v_{Tb}^2}} = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\omega_b = \sqrt{\dfrac{4\pi e^2 N_b}{m}}$ – ленгмюровская частота электронов пучка, а v_{Tb} – тепловой разброс по скоростям вокруг направленной скорости $\mathbf{u}$, которая считается большой, $u \gg v_{Tb}$. Поскольку мнимая часть $\varepsilon(\omega,\mathbf{k})$ малая величина, спектр частот колебаний находится просто:

$$\omega_{1,2} = \mathbf{ku} \pm \omega_b + i\delta, \qquad \delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_b^2}{k^3 v_{Tb}^3} e^{-\dfrac{\omega_b^2}{2k^2 v_{Tb}^2}}. \qquad (2)$$

Колебания, как и следовало ожидать, затухающие во времени. Спектр частот (2) напоминает спектр плазменных колебаний чисто электронной плазмы с учетом доплеровского сдвига частоты из-за того, что электроны пучка движутся. Вместе с тем следует обратить внимание на то, что имеются две пучковые плазменные волны – быстрая с фазовой скоростью больше скорости u и медленная – со скоростью меньше скорости u. Декремент затухания δ явно не содержит доплеровский сдвиг.

Проанализируем теперь задачу устойчивости на основе изложенных в §§ 1.1 и 1.2 общих подходов. Прежде всего, найдем энергию, поглощаемую пучком в единице объема. Из формулы (1.1.11) с учетом (1) получаем

$$\frac{Q}{V} = -\frac{\omega}{2\pi k^2}\left|(\mathbf{kE})\right|^2 \operatorname{Im}\varepsilon(\omega,\mathbf{k}) = -\frac{\omega}{2\pi k^2}\left|(\mathbf{kE})\right|^2 \sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_b^2(\omega-\mathbf{ku})}{k^3 v_{Tb}^3} e^{-\dfrac{(\omega-\mathbf{ku})^2}{2k^2 v_{Tb}^2}}. \qquad (3)$$

Видим, что в области частот $\mathbf{ku} > \omega$, т.е. при выполнении условия черенковского излучения, мнимая часть диэлектрической проницаемости $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega,\mathbf{k}) < 0$, а следовательно, среда может отдавать энергию полю волны. Однако, как уже отмечалось, это условие не является достаточным для развития неустойчивости, что и проявляется в настоящем случае.

Если мнимой частью $\varepsilon(\omega,\mathbf{k})$ пренебречь, то можно ввести энергию поля волны в виде (см. (1.1.15))

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{4\pi k^2}\left|(\mathbf{kE})\right|^2 \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon(\omega,\mathbf{k})\right) = \frac{\left|(\mathbf{kE})\right|^2}{4\pi k^2}\left[1 + \frac{\omega_b^2(\omega+\mathbf{ku})}{(\omega-\mathbf{ku})^3}\right]. \qquad (4)$$

Видно, что в условиях черенковского излучения, когда $\mathbf{ku} > \omega$, энергия волны может стать отрицательной. И опять мы заключаем, что это условие оказывается недостаточным для неустойчивости системы.

Пренебрежем далее малой мнимой частью в (1) и представим дисперсионные кривые (2) на рис. 1.2 (без учета затухания δ). Видно, что любая прямая $k = \mathrm{const}$

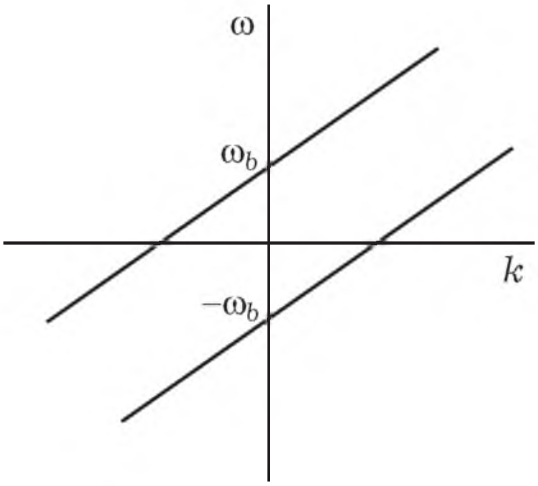

Рис. 1.2

пересекает обе дисперсионные кривые $\omega(\mathbf{k})$, а следовательно, согласно первому правилу Стэррока, система устойчива. Такой вывод справедлив при пренебрежении мнимой частью $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$, а ее учет приводит к затуханию колебаний.

Задача 2. Исследовать устойчивость той же системы, что и в предыдущей задаче, но при пренебрежении диссипацией и для ограниченного в продольном направлении эквипотенциальными прозрачными для пучка пластинами в точках $x = 0, d$.

Решение.

Будем исходить из линеаризованного уравнения движения

$$-i\omega v + u\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e}{m}\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{1}$$

уравнения непрерывности

$$-i\omega\delta N_b + \frac{\partial}{\partial x}\left(vN_b + u\delta N_b\right) = 0 \tag{2}$$

и уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = -4\pi e N_b. \tag{3}$$

Здесь u и N_b – равновесные скорость и плотность электронов пучка, а v и δN_b – их возмущенные значения.

Система (1)–(3) сводится к одному уравнению 4-го порядка

$$\left[\left(\omega - u\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \omega_b^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0. \tag{4}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi(x) = C_0 + C_1 x + C_2 e^{ik_1 x} + C_3 e^{ik_2 x}, \tag{5}$$

где величины $k_{1,2}$ определяются из характеристического уравнения (см. рис. 1.2)

$$(\omega - ku)^2 - \omega_b^2 = 0, \qquad k_{1,2} = \frac{\omega \pm \omega_b}{u}. \tag{6}$$

Граничные условия находятся из требования эквипотенциальности плоского дрейфового пространства и невозмущенности плотности и скорости электронов пучка при влете в это пространство:

$$\Phi|_{x=0,d} = 0, \qquad v|_{x=0} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{u^2}{\omega_b^2}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\bigg|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = 0. \tag{7}$$

Подстановка решений (5) в граничные условия (7) приводят к следующему дисперсионному уравнению:

$$\omega_b \sin\frac{\omega_b d}{u} - i\omega\left(2\cos\frac{\omega_b d}{u} - 2 - \frac{\omega_b d}{u}\sin\frac{\omega_b d}{u}\right) = 0. \tag{8}$$

Отсюда видно, что в системе возникает глобальная неустойчивость в следующей области изменения параметров пучка:

$$\pi(2n+1) < \frac{\omega_b d}{u} < \pi(2n+2), \tag{9}$$

причем $\operatorname{Im}\omega \ll \dfrac{\omega}{d}$. Она обусловлена наличием границ $x = 0, d$, обеспечивающих обратную связь в системе. Эту неустойчивость открыл Дж.Пирс в 1944г. Минимальный ток пучка, выше которого неустойчивость возникает, определяется условием

$$\omega_{b\,\text{кр}}^2 = \frac{\pi^2 u^2}{d^2} \tag{10}$$

и называется пирсовским. Отметим, что она укладывается в рамки классификации, изложенной в § 1.3, и соответствует безусилительной апериодической неустойчивости.

Задача 3. Показать, что в изотропной холодной электронной плазме, заполняющей диэлектрическую среду с диэлектрической постоянной ε_0, в области частот $|\omega| < \omega_{\text{кр}} = \omega_{Le}/\sqrt{\varepsilon_0}$ имеет место непропускание поперечного электромагнитного поля.

Решение.

Дисперсионное уравнение для поперечной электромагнитной волны в такой плазме запишется в виде

$$c^2k^2 = \omega^2\left(\varepsilon_0 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right). \tag{1}$$

Дисперсионные кривые, описываемые этим уравнением, представлены на рис. 1.3. Из рис. 1.3 видно, что в области частот $|\omega| < \omega_{Le}/\sqrt{\varepsilon_0}$ действительные значения k при действительных ω отсутствуют, причем асимптотические прямые дисперсионных кривых наклонены в противоположные стороны, а поэтому область частот $|\omega| < \omega_{Le}/\sqrt{\varepsilon_0}$, в которой $k^2 < 0$, соответствует, согласно второму правилу Стэррока, непропусканию волны.

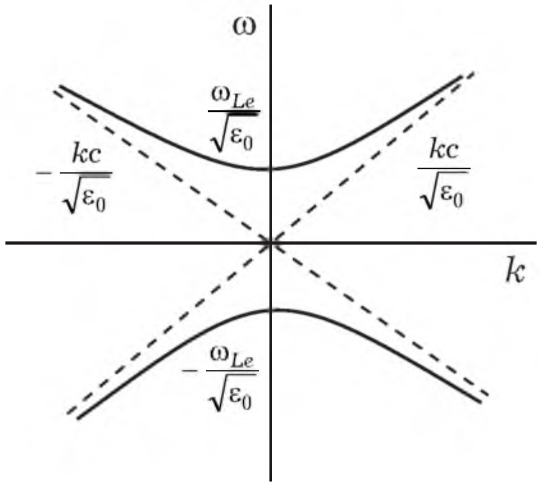

Рис. 1.3

Задача 4. Показать, что при наличии моноэнергетического пучка электронов малой плотности в условиях предыдущей задачи в системе возникает конвективная неустойчивость, если скорость пучка $u \gtrsim \dfrac{\omega}{k}$.

Решение.

Дисперсионное уравнение при этом изменяется и принимает вид

$$c^2k^2 = \omega^2\left(\varepsilon_0 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - ku)^2}\right). \tag{1}$$

Видоизменяются и дисперсионные кривые, изображенные на рис. 1.3, которые при малой плотности и достаточно большой скорости ($u > c/\sqrt{\varepsilon}$) пучка принимают вид, изображенный на рис. 1.4. Появляется разрывная линия $\omega = ku$, которая пересекает

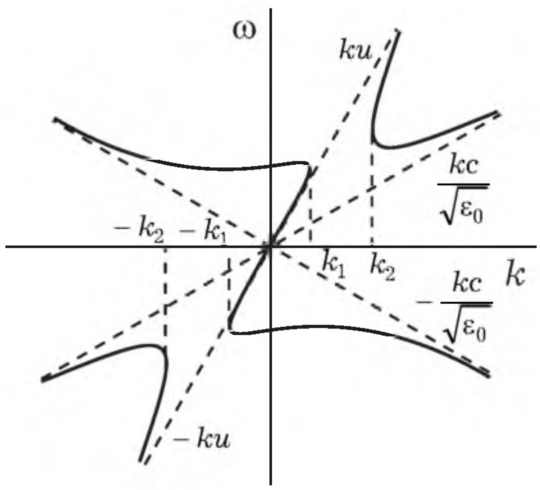

Рис. 1.4

дисперсионные кривые $c^2k^2 = \omega^2\left(\varepsilon_0 - \dfrac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right)$ в точках $\pm k_1$ и $\pm k_2$, а между ними, т.е. $|k_1| < |k| < |k_2|$ решения с действительными ω и k отсутствуют. Поскольку уравнение (1) – алгебраическое с действительными коэффициентами, то в этой области решения уравнения $\omega(k)$ комплексны и взаимно сопряжены, т.е. обязательно имеются решения с $\operatorname{Im}\omega > 0$, что соответствует неустойчивости системы. При этом согласно рис. 1.4 асимптотические прямые $\omega = ku$ и $\omega = kc/\sqrt{\varepsilon_0}$ направлены в одну сторону. Следовательно неустойчивость в области $|k_1| < |k| < |k_2|$ конвективная.

Из уравнения (1) при малой плотности пучка нетрудно найти и максимальный инкремент нарастания. Он достигается в условиях

$$\omega = ku + \delta = \sqrt{\frac{k^2c^2 + \omega_{Le}^2}{\varepsilon_0}} = \omega_0 + \delta \tag{2}$$

и равен

$$\delta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega_0\omega_b^2}{2}\right)^{1/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega_b^2}{2\omega_0}\right)^{1/3}\omega_0. \tag{3}$$

Отсюда находим и критерий малости плотности пучка $\omega_b^2 \ll \omega_0^2$. Заметим, что при $\varepsilon_0 \gg 1$ неустойчивость имеет место и в отсутствии плазмы, т.е. при $N_p = 0$.

ТЕМА II

ПЛАЗМОПОДОБНАЯ СРЕДА ВО ВНЕШНЕМ ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 2.1. Функция распределения заряженных частиц во внешнем постоянном электрическом поле

Анализ неустойчивостей термодинамически неравновесной плазменной среды начнем с широко распространенного в природе примера такой среды с анизотропной функцией распределения частиц по скоростям – пространственно неограниченной и однородной плазменной среды, находящейся во внешнем электрическом поле.

Реальную газовую плазму трудно представить себе без внешнего электрического поля. Электрическое поле используется как для создания плазмы (разряд в газе в постоянном и высокочастотном электрических полях, оптический разряд), так для нагрева и удержания, а часто и для ускорения плазмы (омический нагрев плазмы в постоянном и высокочастотном полях, нагрев излучением лазера, радиационное удержание и ускорение плазмы в переменных полях и т.д.). Более того, характер распространения электромагнитных волн конечной амплитуды в плазме в значительной степени определяется изменением свойств плазмы в электрическом поле. Поэтому исследование свойств плазмы во внешних постоянном и переменном электрических полях имеет важное практическое значение.

Действительно, возникает вопрос: а будет ли устойчиво такое состояние плазменной среды, когда в ней существует сильное электрическое поле и протекают большие токи, вызванные действием этого поля? Если этот ток будет устойчивым, то его величина может быть рассчитана по формулам, приведенным в первой части лекций для термодинамически равновесных плазменных сред. Если же этот ток неустойчив, то в плазме появляются поля неустойчивости, которые будут тормозить электроны, что на языке электродинамики плазмы означает наличие у плазмы аномально высокого сопротивления. А это очень важный момент. В термоядерных установках это будет приводить к более эффективному нагреву плазмы, что выгодно. А вот в МГД-генераторах, в которых направленное движение частиц плазмы используется для генерации электрического поля, появление аномального сопротивления будет вредным эффектом.

Практически то же самое можно сказать и о плазме твердого тела. Протекание тока в металлах и полупроводниках полностью определяется поведением плазменной среды во внешнем электрическом поле. Характер распространения электромагнитных волн конечной амплитуды определяет работу полупроводниковых и газовых лазеров и т.д. Тем не менее, проблема устойчивости плазменной среды во внешних полях является более существенной для газовой плазмы. Поэтому ниже в основном такую плазму мы и будем рассматривать.

В настоящем разделе изучим равновесное состояние плазменной среды во внешнем, постоянном во времени и однородном в пространстве электрическом поле $\mathbf{E}_0$. Прежде всего рассмотрим случай постоянного электрического поля $\mathbf{E}_0$, параллельного внешнему магнитному полю $\mathbf{B}_0$. Отдельные заряженные частицы в таком поле ускоряются во времени:

$$\mathbf{p}_0 = \frac{m_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{\sqrt{1 - u_\alpha^2/c^2}} = \int^t e_\alpha \mathbf{E}_0 dt = e_\alpha \mathbf{E}_0 t. \tag{2.1.1}$$

Однако, такое ускорение будет иметь место до тех пор, пока частица не столкнется с другой частицей, потеряв приобретенный в поле импульс, т.е. в течение времени $t < \nu_\alpha^{-1}$, где ν_α – частота столкновений данной частицы по отношению к передаче импульса другим частицам.

Из-за огромной разницы в массах электронов и ионов воздействием электрического поля на ионы фактически всегда можно пренебречь и учитывать лишь его воздействие на легкие заряженные частицы – электроны. Поэтому приведенные рассуждения следует относить к электронам, а под ν_α подразумевать частоту электронных столкновений, т.е. $\alpha = e$ и $\nu_\alpha = \nu_e$.

Таким образом, в течение времени $t < \nu_e^{-1}$ плазменную среду можно считать бесстолкновительной, в которой под действием электрического поля все электроны ускоряются по закону (2.1.1), а ионы остаются неподвижными. При этом, если до включения поля распределение электронов по импульсам имело вид $f_0(\mathbf{p})$ (под $f_0(\mathbf{p})$ будем подразумевать термодинамически равновесное распределение Максвелла либо Ферми), то к моменту времени t оно получит "сдвиг"на величину $\mathbf{p}_0(t) = e\mathbf{E}_0 t$.

Например, в нерелятивистском случае для начального распределения Максвелла функция распределения электронов в момент времени t имеет вид

$$f_0(\mathbf{p}, t) = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t))^2}{2mT_e}\right]. \qquad (2.1.2)$$

В вырожденной плазме в момент времени t функция распределения электронов станет "сдвинутой"функцией распределения Ферми:

$$f_0(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} \dfrac{2}{2\pi\hbar^3} & \text{при} \quad |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t)| < p_F, \\ 0 & \text{при} \quad |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t)| > p_F, \end{cases} \qquad (2.1.3)$$

где $p_F = (3\pi^2 N_e)^{1/3}\hbar$.

Такую "сдвинутую"нестационарную функцию распределения нетрудно получить непосредственно из бесстолкновительного кинетического уравнения Власова

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + e\mathbf{E}_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \qquad (2.1.4)$$

приняв за начальное распределение (без поля) равновесное распределение $f_0(\mathbf{p})$. В этом можно убедиться простой подстановкой функции $f_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t))$ в уравнение (2.1.4).

В невырожденной полностью ионизованной плазме нестационарное решение (2.1.2) для электронов оказывается справедливым для любых моментов времени (и при $t > \nu_e^{-1}$), если

$$E_0 > E_{\text{кр}} = \frac{m\nu_{ei}}{e} v_{Te}, \qquad (2.1.5)$$

где $\nu_{ei} = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2\pi}{m}}\dfrac{e^2 e_i^2 N_e L}{T_e^{3/2}}$ – частота электроп-иоппых столкновений, определяющая силу трения электронов об ионы: $\mathbf{F}_{\text{тр}} = m\nu_{ei}\mathbf{u}_e$. Это же условие сохраняется и в вырожденной плазме твердого тела, если под ν_{ei} понимать частоту рассеяния электронов на оптических фононах $\nu_{ei} = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2\pi}{m}}\dfrac{e^4 N_e L}{\mathcal{E}_{Fe}^{3/2}}$, а под v_{Te} понимать скорость Ферми. Заметим, что критическое поле $E_{\text{кр}}$ впервые было введено для газовой плазмы Е.Драйсером в 1955 году и поэтому в литературе часто называется полем Драйсера.

Условие (2.1.5) имеет наглядный физический смысл. При $E_0 > E_{\text{кр}}$ электрон за время между столкновениями приобретает энергию, большую его тепловой энергии T_e. В результате резко снижается частота электрон-ионных столкновений ($\nu_{ei} \sim 1/u^3$, см. часть 1), а вместе с ней уменьшается и сила трения электронов об ионы; она уже не способна препятствовать ускоряющей силе $e\mathbf{E}_0$ и все электроны плазмы переходят в режим непрерывного ускорения или в режим "убегания", что и описывается функцией (2.1.2). Более того, при этом со временем скорость электронов станет релятивистской и функцию распределения $f_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t))$ следует записывать в виде функции релятивистского распределения Максвелла.

Оценим $E_{\text{кр}}$ по величине. При $\nu_{ei} \simeq 10^9 \div 10^{10}\,\text{с}^{-1}$, что характерно для газовой плазмы при давлениях газа $P_0 = 1 \div 10\,$Торр, или для полностью ионизованной плазмы с $N_e = 10^{12} \div 10^{14}\,\text{см}^{-3}$ и $T_e \simeq 1\,$эВ, находим $E_{\text{кр}} \simeq 2\,$СГС $\simeq 600\,$В/см. В твердом теле (металлы или хорошие полупроводники) $\nu_{ei} \simeq 10^{13}\,\text{с}^{-1}$, $v_{Fe} \simeq 10^8\,$см/с имеем $E_{\text{кр}} \simeq 2 \cdot 10^3\,$СГС $\simeq 10^6\,$В/см. Такие поля используются при исследовании электрических взрывов проводников (микропинч).

Иная картина наблюдается в полностью ионизованной плазме при условии, обратном (2.1.5), т.е. когда поле $\mathbf{E}_0$ слабое. Как видно из приведенных выше оценок, величина $E_{\text{кр}}$ в плотной плазме, в особенности, плазме твердого тела (металлов и полупроводников) достигает довольно высоких значений и экспериментально не так легко осуществляется, т.е. реально в большинстве случаев поле E_0 достаточно слабое по сравнению с $E_{\text{кр}}$. В этом случае электрон за время свободного пробега приобретает энергию, меньшую тепловой, и сила трения со стороны ионов способна компенсировать ускоряющую силу электрического поля; устанавливается стационарная функция распределения электронов. Для определения стационарной функции распределения электронов в плазме, помещенной в электрическое поле $\mathbf{E}_0$, необходимо решать уравнение

$$\frac{e\mathbf{E}_0}{m}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f_{0e}}{\partial t}\right)_{st}^{ei} + \left(\frac{\partial f_{0e}}{\partial t}\right)_{st}^{ee}. \tag{2.1.6}$$

Здесь $\left(\frac{\partial f_{0e}}{\partial t}\right)_{st}^{ee}$ и $\left(\frac{\partial f_{0e}}{\partial t}\right)_{st}^{ei}$ – интегралы столкновений электронов с электронами и ионами соответственно. При слабых полях $\mathbf{E}_0$ функция f_0 мало отличается от изотропной максвелловской функции распределения f_{00}. Поэтому уравнение (2.1.6) можно линеаризовать, положив

$$f_{0e} = f_{00} + \delta f_{0e}, \tag{2.1.7}$$

где

$$f_{00} = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} e^{-\dfrac{mv^2}{2T_e}}, \tag{2.1.8}$$

а δf_{0e} удовлетворяет линеаризованному уравнению

$$\frac{e\mathbf{E}_0}{m}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = N_i \frac{\partial}{\partial p_i} I_{ij}^{ei}(\mathbf{p}) \frac{\partial \delta f_{0e}}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_i}\int d\mathbf{p}' I_{ij}^{ee}(\mathbf{p},\mathbf{p}') \times$$

$$\times \left[\frac{\partial f_{00}}{\partial p_j}\delta f_{0e}(\mathbf{p}') + \frac{\partial \delta f_{0e}}{\partial p_j} f_{00}(\mathbf{p}') - f_{00}(\mathbf{p})\frac{\partial \delta f_{0e}}{\partial p'_j} - \delta f_{0e}\frac{\partial f_{00}}{\partial p'_j}\right]. \tag{2.1.9}$$

Уравнение (2.1.9) удобно решать методом Чепмена – Энскога, разлагая $\delta f_{0e}(\mathbf{p})$ по полиномам Сонина. Ограничиваясь двумя членами разложения, запишем

$$\delta f_{0e}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{v}\mathbf{E}_0}{E}\left[a_0 + a_1\left(\frac{5}{2} - \frac{v^2}{2v_{Te}^2}\right)\right] f_{00}. \tag{2.1.10}$$

Подставляя это выражение в (2.1.9) и домножая это уравнение на полиномы 1 и $\left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{v^2}{2v_{Te}^2}\right)$, после интегрирования по импульсам для простой плазмы с $e_i = |e|$ получим

$$\begin{gathered} \frac{e}{T_e}E_0 = -\nu_{ei}\left(a_0 + \frac{3}{2}a_1\right), \\ \frac{3}{2}a_0 + \frac{13 + 4\sqrt{2}}{4}a_1 = 0. \end{gathered} \tag{2.1.11}$$

Отсюда находим

$$a_1 = -\frac{3}{2(1+2\sqrt{2})}\frac{eE}{\nu_{ei}T_e}, \qquad a_0 = \frac{13 + 4\sqrt{2}}{6}a_1, \tag{2.1.12}$$

а следовательно, искомую функцию f_{0e}:

$$f_{0e} = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} e^{-\dfrac{mv^2}{2T_e}} \times$$
$$\times \left[1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} \frac{\mathbf{u}_e \mathbf{v}}{v_{Te}^2} \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2} + \frac{3}{4}\frac{v^2}{v_{Te}^2} \right) \right], \quad (2.1.13)$$

где $\mathbf{u}_e = \dfrac{e\mathbf{E}_0}{m\nu_{ei}}$. Согласно условию применимости этой формулы (неравенство, обратное (2.1.5)), средняя направленная скорость электронов, определенная с помощью (2.1.7),

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\int f_{0e} \mathbf{v} d\mathbf{p}}{N_e} \approx 1,96 \mathbf{u}_e, \quad (2.1.14)$$

намного меньше их тепловой скорости, т.е. $u_e \ll v_{Te}$.

Выражение (2.1.13) несколько отличается от разложенной в ряд функции распределения Максвелла со средней скоростью $\mathbf{u}_e$ (2.1.2), что приводит к небольшим количественным отличиям в различных конкретных случаях при использовании функции (2.1.2) вместо (2.1.13). Качественно, однако, эти результаты согласуются между собой, поэтому для простоты далее и в случае слабого поля будем пользоваться формулой (2.1.2), в которой $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{u}_e = e\mathbf{E}_0/\nu_{ei}$. Заметим, что формулы (2.1.11)–(2.1.13) строго говоря, получены для водородной (электронно-протонной плазмы), когда $|e_i| = e$. Если же $|e_i| \gg e$, то электрон-электронными столкновениями в (2.1.9) можно пренебречь, учитывая только электрон-ионные (лоренцовское приближение). При этом коэффициент 1,96 заменяется на 1. Функция (2.1.13) приближается к разложению максвелловского распределения с направленной скоростью $\mathbf{u}_e = \dfrac{e\mathbf{E}_0}{m\nu_{ei}}$.

В слабоионизованной плазме, как невырожденной, так и вырожденной, помещенной во внешнее электрическое поле, стационарное состояние также может существовать, если

$$E_0 < E_{\text{кр}} = \frac{m\nu_{en}}{e} v_0, \quad (2.1.15)$$

где v_0 – средняя хаотическая скорость движения электронов (тепловая скорость, либо скорость Ферми). Это условие означает, что за время свободного пробега электрон в поле приобретает скорость, меньшую его средней хаотической скорости. Для определения равновесной функции распределения электронов в слабоионизованной невырожденной плазме при этом будем исходить из кинетического уравнения с модельным интегралом БГК:

$$\frac{e\mathbf{E}_0}{m}\frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{v}} = -\nu_{en}(f_{0e} - N_e\Phi_{en}). \tag{2.1.16}$$

В результате находим

$$f_{0e} = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} e^{-\dfrac{mv^2}{2T_e}} \left(1 + \frac{\mathbf{u}_e\mathbf{v}}{v_{Te}^2}\right) \approx$$

$$\approx \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp\left[-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u}_e)^2}{2T_e}\right], \tag{2.1.17}$$

где $\mathbf{u}_e = \dfrac{e\mathbf{E}_0}{m\nu_{en}}$. Такое точное совпадение найденного решения с разложением сдвинутого максвелловского распределения справедливо только до первой степени $\mathbf{u}_e$. Уже во втором приближении по $\mathbf{u}_e$ кинетическое уравнение с интегралом БГК приводит к отличию от сдвинутого распределения Максвелла, что приводит к количественным неточностям. Но мы этим будем пренебрегать, считая, как и в бесстолкновительном случае, что равновесное распределение имеет вид "сдвинутого"распределения Максвелла.

Аналогично находим функцию распределения электронов в слабоионизованной вырожденной плазме во внешнем электрическом поле. Для этого необходимо решить уравнение

$$e\mathbf{E}_0\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = -\nu_{en}(f_{0e} - f_{00}(p)), \tag{2.1.18}$$

где $f_{00}(p)$ – изотропная функция распределения Ферми для вырожденного электронного газа. При этом получаем

$$f_{0e}(\mathbf{p}) = f_{00}(p) - \frac{e\mathbf{E}_0}{\nu_{en}}\frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{p}} \approx f_{00}(|\mathbf{p}-\mathbf{p}_0|), \tag{2.1.19}$$

где $f_{00}(|\mathbf{p}-\mathbf{p}_0|)$ определяется формулой (2.1.13).

§ 2.2. Устойчивость плазменной среды во внешнем постоянном электрическом поле. Обобщенное преобразование Минковского

В предыдущем параграфе отмечалось, что при условии (2.1.5), которое в реальной плазме выполняется уже в относительно слабых полях, электроны за время свободного пробега разгоняются до больших скоростей, намного превышающих их тепловую скорость. При этом возникает состояние, когда все электроны движутся относительно неподвижных ионов. Такой электронный пучок, как будет показано, является неустойчивым, причем инкремент развития неустойчивости весьма велик, порядка или даже больше ленгмюровской частоты ионов. За столь короткие времена, несмотря на нестационарность равновесной функции распределения электронов (2.1.2), величина их направленной скорости не успевает заметно измениться. Поэтому при исследовании устойчивости системы скорость можно в первом приближении считать постоянной (подобное приближение при анализе устойчивости плазмы во внешнем электрическом поле получило название адиабатического приближения). Для простоты пренебрежем также столкновениями частиц, считая плазму достаточно разреженной и поэтому бесстолкновительной.

Указанные ограничения позволяют проанализировать устойчивость плазмы во внешнем электрическом поле исходя из дисперсионного уравнения

$$\left| k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0, \qquad (2.2.1)$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ – диэлектрическая проницаемость системы движущихся в равновесии электронов и покоящихся ионов, которую необходимо вычислить. Такие вычисления можно проводить прямым решением уравнений Власова для электронов и ионов.

Но можно поступить иначе и использовать преобразования координат. Кстати, этот метод настолько общий, что может быть применим для многих задач, в которых плазменную среду можно представить как многокомпонентную систему, в которой каждая компонента имеет свою скорость направленного движения $\mathbf{u}_\alpha = \mathrm{const}$ (так называемое многопотоковое представление). Для этого надо воспользоваться аддитивностью тока в среде, который можно представить как сумму токов в отдельных компонентах, и уравнениями непрерывности, которые также выполняются для каждой отдельной компоненты плазменной среды.

Рассмотрим одну движущуюся компоненту α и для получения вклада в диэлектрическую проницаемость от этой компоненты воспользуемся преобразованиями Лоренца. Действительно, перейдем в систему координат потока, движущуюся относительно лабораторной со скоростью $\mathbf{u}$ (индекс опускаем). Пусть в этой системе диэлектрическая проницаемость потока (не обладающего направленной скоростью) нам известна, $\varepsilon_{ij}(\omega', \mathbf{k}')$, где ω' и $\mathbf{k}'$ – частота и волновой вектор в системе координат потока. Согласно формулам преобразования Лоренца ω' н $\mathbf{k}'$ связаны с ω и $\mathbf{k}$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \omega' = (\omega - \mathbf{ku})\gamma, \\ \mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{u}\gamma\left[\frac{\mathbf{ku}}{u^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) - \frac{\omega}{c^2}\right], \end{gathered} \tag{2.2.2}$$

где $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор. Зная $\varepsilon_{ij}(\omega', \mathbf{k}')$, мы можем записать ток, индуцированный в потоке, в собственной системе координат:

$$j_i'(\omega', \mathbf{k}') = \sigma_{ij}(\omega', \mathbf{k}')E_j'(\omega', \mathbf{k}') = -i\omega[\varepsilon_{ij}(\omega', \mathbf{k}') - \delta_{ij}]E_j'(\omega', \mathbf{k}'). \tag{2.2.3}$$

Воспользуемся далее формулами преобразования Лоренца для тока и электрического поля

$$j_i = \alpha_{ij}(\mathbf{u})j_j', \qquad E_i' = \beta_{ij}(\mathbf{u})E_j, \tag{2.2.4}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha_{ij}(\mathbf{u}) = \delta_{ij} + \gamma\left[\frac{u_i u_j}{u^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{u_i k_j'}{\omega'}\right], \\ \beta_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{\omega'}{\omega}\delta_{ij} + \gamma\left[\frac{u_i u_j}{u^2}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) + \frac{k_i u_j}{\omega}\right]. \end{gathered} \tag{2.2.5}$$

Теперь уже не представляет труда найти тензор проводимости в лабораторной системе

$$\begin{gathered} j_i(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})E_j = \alpha_{ij}(\mathbf{u})j_j'(\omega', \mathbf{k}') = \\ = \alpha_{ij}(\mathbf{u})\sigma_{i\mu}(\omega', \mathbf{k}')E_\mu'(\omega', \mathbf{k}') = \alpha_{i\mu}(\mathbf{u})\sigma_{\mu\nu}(\omega', \mathbf{k}')\beta_{\nu j}(\mathbf{u})E_j. \end{gathered} \tag{2.2.6}$$

Отсюда имеем

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{\omega'}{\omega}\alpha_{i\mu}(\mathbf{u})[\varepsilon_{\mu\nu}(\omega', \mathbf{k}') - \delta_{\mu\nu}]\beta_{\nu j}(\mathbf{u}). \tag{2.2.7}$$

Соотношение (2.2.7) связывает тензор диэлектрической проницаемости в движущейся системе координат с тензором диэлектрической проницаемости в лабораторной (неподвижной) системе. И в этом смысле оно обобщает известные соотношения Минковского на произвольные анизотропные среды, правда, пока на случай однокомпонентной среды.

Обобщение формулы (2.2.7) на многокомпонентную плазму, в которой каждая компонента α движется с постоянной скоростью $\mathbf{u}_\alpha$, очевидна и записывается в виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{\omega'_\alpha}{\omega}\alpha_{i\mu}(\mathbf{u}_\alpha)[\varepsilon^{(\alpha)}_{\mu\nu}(\omega'_\alpha, \mathbf{k}'_\alpha) - \delta_{\mu\nu}]\beta_{\nu j}(\mathbf{u}_\alpha), \qquad (2.2.8)$$

где ω'_α, $\mathbf{k}'_\alpha$, $\alpha_{i\mu}(\mathbf{u}_\alpha)$ и $\beta_{\nu j}(\mathbf{u}_\alpha)$ даются формулами (2.2.2) и (2.2.5) с $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha$.

Заметим, что свертка тензора (2.2.8), описывающая продольное (электростатическое, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) поле в плазменной среде имеет очень простой вид:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_\alpha [\varepsilon^{(\alpha)}(\omega'_\alpha, \mathbf{k}'_\alpha) - 1], \qquad (2.2.9)$$

где $\varepsilon^{(\alpha)}(\omega'_\alpha, \mathbf{k}'_\alpha) = \dfrac{k'_i k'_j}{k^2}\varepsilon^{(\alpha)}_{ij}(\omega'_\alpha, \mathbf{k}'_\alpha)$ – свертка парциального тензора диэлектрической проницаемости частиц сорта α в собственной системе координат.

§ 2.3. Неустойчивости холодной изотропной плазмы с током

Бунемановская неустойчивость. Рассмотрим ряд простых конкретных задач, при решении которых мы будем пользоваться формулами (2.2.1)–(2.2.8), с целью продемонстрировать их эффективность. Начнем со случая бесстолкновительной токовой плазмы, в которой электроны дрейфуют относительно ионов со скоростью дрейфа $\mathbf{u}$. Тепловым движением как электронов, так и ионов полностью пренебрежем. Тогда

$$\varepsilon^{(e)}_{ij}(\omega', k') = \left(1 - \frac{\omega^2_{Le}/\gamma}{\omega'^2}\right)\delta_{ij}, \qquad \varepsilon^{(i)}_{ij}(\omega, k) = \left(1 - \frac{\omega^2_{Li}}{\omega^2}\right)\delta_{ij}. \quad (2.3.1)$$

Эти выражения справедливы в собственных системах координат. Для незамагниченной плазмы, в которой под действием достаточно сильного электрического поля электроны движутся относительно неподвижных ионов со скоростью $\mathbf{u}$, намного превышающей их тепловую скорость, уравнение (2.2.1) после учета формул преобразования (2.2.7) принимает вид

$$\left\{k^2 - \omega^2\left[\varepsilon^{(i)}(\omega) + \frac{\omega'^2}{\omega^2}(\varepsilon^{(e)}(\omega') - 1)\right]\right\}\left[\varepsilon^{(i)}(\omega) + \varepsilon^{(e)}(\omega') - 1\right] - \\ - \frac{k_\perp^2 u^2}{c^2}\gamma^2[\varepsilon^{(i)}(\omega) - 1][\varepsilon^{(e)}(\omega') - 1] = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-1} + \omega_{Li}^2}{c^2}\right) \times \\ \times\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{ku})^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-1}\omega_{Li}^2 k_\perp^2 u^2}{\omega^2 c^2(\omega - \mathbf{ku})^2} = 0. \quad (2.3.2)$$

Здесь $\mathbf{u}$ – скорость электрического дрейфа электронов, а $k_\perp$ – компонента волнового вектора возмущений, перпендикулярная скорости $\mathbf{u}$, а $\varepsilon^{(e)}$, $\varepsilon^{(i)}$ есть выражения в скобках в формулах (2.3.1).

Уравнение (2.3.2) имеет неустойчивые решения при условии

$$\omega_{Le}^2 \geqslant (\mathbf{ku})^2\gamma^3, \quad (2.3.3)$$

причем максимальный инкремент нарастания определяется из соотношения

$$\omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3}\gamma\left[1 + \frac{k_\perp^2 u^2\gamma^2}{c^2(k_\perp^2 + k_z^2\gamma^2)}\right]^{1/3}\mathbf{ku} \quad (2.3.4)$$

н достигается при выполнении равенства (2.3.3) или, как говорят, в резонансном случае[1]. Эта неустойчивость была открыта в 1959 году О.Бунеманом и получила название бунемановской. Из качественных соображений ясно, что в результате развития бунемановской неустойчивости, плазма продольно модулируется, образуются так называемые продольные страты плотности заряда (двойные слои) с пространственным периодом, определяющимся условием максимальности инкремента (2.3.4): $l_0 \sim \dfrac{2\pi}{k} \sim \dfrac{2\pi u}{\omega_{Le}}\gamma^{3/2}$. В газоразрядной плазме, с $N_e \sim 10^{11} \div 10^{13}\,\text{см}^{-3}$, $u \simeq 2 \cdot 10^9\,\text{см/с}$ $\left(\dfrac{mu^2}{2} \simeq 100\,\text{эВ}\right)$ и $\gamma \simeq 1$ имеем $l_0 \simeq 1\,\text{см}$.

[1]Следует заметить, что инкремент (2.3.4) растет с $k_\perp$ и достигает максимум максимора при $k_\perp^2 u^2\gamma^2 \gg \omega_{Le}^2$, равного $\operatorname{Im}\omega_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3}\frac{\omega_{Le}}{\gamma^{1/3}}$.

Из (2.3.4) видно, что рассмотренная неустойчивость существует в области частот $k_z u > \omega$, т.е. в условиях черепковского излучения. Это обстоятельство позволяет раскрыть физическую природу неустойчивости, для чего удобнее всего рассмотреть уравнение (2.3.2) при $k_\perp = 0$, переписав его в виде уравнения для двух связанных резонаторов

$$[(\omega - \mathbf{ku})^2 - \omega_{Le}^2\gamma^{-3}](\omega^2 - \omega_{Li}^2) = \omega_{Le}^2\omega_{Li}^2\gamma^{-3}. \qquad (2.3.5)$$

В отсутствие ионов ($N_i \to 0$, либо $M \to \infty$) это уравнение описывает чисто ленгмюровские колебания электронного потока. Им соответствует первая скобка в левой части уравнения (2.3.5). Правая скобка соответствует ионным ленгмюровским колебаниям в отсутствие электронов. Наконец, правая часть представляет связь этих колебательных контуров через самосогласованное поле. И поскольку электронная подсистема обладает избыточной (отрицательной) энергией происходит перекачка энергии от электронов к ионам с возбуждением ионных ленгмюровских колебаний. Это явление можно назвать также вынужденным излучением дрейфующими электронами ионных ленгмюровских волн.

Кстати, из уравнения (2.3.5) виден резонансный характер неустойчивости при выполнении равенства (2.3.3). При выполнении сильного неравенства неустойчивость становится нерезонансной. При этом инкремент нерезонансной бунемановской неустойчивости равен

$$\operatorname{Im}\omega = \sqrt{\frac{m}{M}}|\mathbf{ku}|\gamma^{3/2}, \qquad (2.3.6)$$

что примерно в $\sqrt[6]{\dfrac{m}{M}\gamma^3}$ раз меньше, чем инкремент резонансной неустойчивости.

Дисперсионное уравнение в форме (2.3.5) удобно также для анализа характера бунемановской неустойчивости. Из этого уравнения находим функции

$$k_{1,2}(\omega) = \frac{\omega}{u} \pm \sqrt{\frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-1}}{k^2}\left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right)^{-1}}, \qquad (2.3.7)$$

которые определяют две ветви колебаний и точки ветвления функций $k_{1,2}(\omega)$

$$\omega_{1,2} = \pm\omega_{Li}. \qquad (2.3.8)$$

Дисперсионные кривые $\omega(k)$ с двумя ветвями колебаний 1 и 2 представлены на рис. 2.1. Неустойчивы колебания на второй ветви (кривая 2),

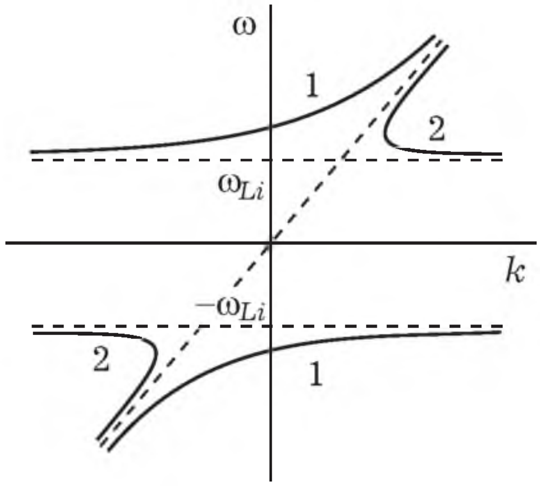

Рис. 2.1

причем поскольку асимптотические прямые этой ветви направлены в одну сторону, согласно первому правилу Стэррока неустойчивость носит конвективный характер. Первая ветвь (кривая 1) колебаний устойчива, поскольку любому действительному значению k сопоставляется действительная частота. Однако, в области частот $\omega^2 < \omega_{Le}^2$ решения с действительным значением k отсутствуют, что согласно второму правилу Стэррока соответствует непропусканию колебаний в этой области частот.

Наконец заметим, что бунемановская неустойчивость в плазменном разряде без внешнего магнитного поля экспериментально наблюдалась в лабораториях Е.К.Завойского (ИАЭ им. И.В.Курчатова) и Я.Б.Файнберга (ФТИ, Харьков) в 1961 году и проявилась в виде появления аномального сопротивления плазменного шнура и даже срыва тока.

Неустойчивость расслоения (филламентации). Рассмотрим теперь еще один вид неустойчивости холодной изотропной плазменной среды с током, так называемую неустойчивость расслоения среды на отдельные токонесущие слои. Эта неустойчивость может развиваться только в отсутствие внешнего сильного магнитного поля и поэтому описывается дисперсионным уравнением (2.3.2). Чтобы отмежеваться от бунемановской неустойчивости, имеющей место в области частот вынужденного черепковского излучения $\omega < \mathbf{ku}$, здесь мы рассмотрим обратный предел, считая $\omega \gg \mathbf{ku}$. В этой области частот (более точно при $k_z = 0$, т.е. для чисто поперечных возмущений) из уравнения (2.3.2) находим

$$\omega^2 = -\frac{\omega_{Li}^2 k^2 u^2 \gamma^2}{\omega_{Le}^2 \gamma^{-1} + k^2 c^2} \approx -\omega_{Li}^2 \frac{u^2 \gamma^2}{c^2} < 0. \qquad (2.3.9)$$

Рассмотренная неустойчивость может развиваться в условиях $|\omega|^2 > k_\perp^2 v_{Te}^2$, что ограничивает величину $k_\perp$ сверху или, другими словами, поперечный размер системы снизу, вследствие чего такая неустойчивость может возникать только в системах, обладающих достаточно большим поперечным размером. Эта неустойчивость приводит к поперечному расслоению токовой плазменной среды на отдельные токонесущие слои. Поэтому неустойчивость и получила название неустойчивости филламентации или расслоения. По физической природе эта неустойчивость обусловлена самосжатием возмущений собственным полем тока (пинч-эффект). Это легко понять, если учесть, что собственное магнитное поле тока на расстоянии от центра токового слоя $L_\perp \sim \dfrac{1}{k_\perp} \sim \dfrac{4\pi euN}{c} L_\perp \sim B_0$ удовлетворяет условию сжатия (пинчевания) плазмы $\dfrac{B_0^2}{8\pi} > NT_e$, что следует из неравенства $|\omega|^2 > k_\perp^2 v_{Te}^2$. Инкремент развития неустойчивости филламентации намного меньше, чем бунемановской и реально она проявляется только при токах, когда бунемановская неустойчивость развиваться не может по тем или иным причинам.

Наконец, отметим еще раз, что рассмотренные выше неустойчивости холодной плазмы мы исследовали при полном пренебрежении столкновениями, а поэтому, строго говоря, формулы (2.3.2)–(2.3.6) справедливы при условии $\operatorname{Im}\omega \gg \nu_e$. Ниже в задачах мы покажем, что неустойчивости рассмотренной природы сохраняются и в столкновительной плазме, правда, они описываются иными формулами.

Неустойчивость филламентации также неоднократно изучалась экспериментально. В частности, она весьма подробно исследована на примере токового слоя в магнитосфере Земли, явлении, которое получило название перезамыкания силовых линий магнитного поля плоского токового слоя.

§ 2.4. Неустойчивости горячей изотропной плазмы с током. Ионно-звуковая неустойчивость

Как указывалось, рассмотренные выше быстро нарастающие апериодические неустойчивости имеют место при $u \gg v_{Te}$. Покажем теперь, что неустойчивость возможна и при $u < v_{Te}$. При столь малых скоростях дрейфа электронов возбуждаемые в системе колебания с большой степенью точности являются продольными и согласно (2.3.9) подчиняются дисперсионному уравнению

$$\frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum \delta\varepsilon_{ij}^{(\alpha)} =$$

$$= 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left[1 - J_+\left(\frac{\omega - \mathbf{ku}}{k v_{Te}}\right)\right] + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2}\left[1 - J_+\left(\frac{\omega}{k v_{Ti}}\right)\right] = 0. \quad (2.4.1)$$

При больших скоростях электрического дрейфа электронов, когда $u \gg v_{Te}$, уравнение (2.4.1) совпадает с (2.3.2) в пределе $u \ll c$ и описывает быстро нарастающую бунемановскую неустойчивость. При $u \ll v_{Te}$ из уравнения (2.4.1) в области частот $k v_{Ti} \ll \omega \ll k v_{Te}$ получаем

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega - \mathbf{ku}}{k v_{Te}}\right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_{Li}^2 \omega}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\dfrac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} = 0. \quad (2.4.2)$$

Мнимые слагаемые в этом уравнении, обусловленные черепковской диссипацией волн на электронах и ионах плазмы, малы по сравнению с действительными. Поэтому решения этого уравнения можно искать в виде $\omega \to \omega + i\delta$, где $|\delta| \ll \omega$. В результате находим

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Le}^2/k^2 v_{Te}^2},$$
$$\frac{\delta}{\omega} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{M}{m}\frac{\omega^3}{k^3 v_{Te}^3}\left(1 - \frac{u}{v_{\text{ф}}}\cos\theta\right) - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\dfrac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}}. \quad (2.4.3)$$

Здесь $v_{\text{ф}} = \omega/k$ – фазовая скорость волны, а θ – угол между векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{k}$. При $\mathbf{u} = 0$ спектр (2.4.3) совпадает со спектром ионно-звуковых колебаний, которые возможны в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$.

Отличная от нуля скорость дрейфа электронов $\mathbf{u}$, как видно из (2.4.3), уменьшает декремент затухания этих колебаний, и при $u > u_{\text{кр}}$, когда $\delta > 0$, колебания становятся неустойчивыми. Легко видеть, что неустойчивость возможна лишь при условии $u > v_{\text{ф}}/\cos\theta \gg v_{Ti}$, т.е. когда скорость дрейфа электронов больше фазовой скорости ионно-звуковых колебаний. Отсюда следует, что эта неустойчивость имеет чисто черепковскую природу и приводит к раскачке ионно-звуковых колебаний. Поэтому ее часто называют ионно-звуковой неустойчивостью плазмы с током.

Для наиболее интересных длинноволновых ионно-звуковых колебаний из (2.4.3) имеем

$$\omega^2 = k^2 v_s^2,$$

$$\frac{\delta}{\omega} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}\frac{m}{M}}\left(1 - \frac{u}{v_s}\cos\theta\right) - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} e^{-\dfrac{T_e}{2T_i}}. \tag{2.4.4}$$

Отсюда для критической скорости раскачки длинноволновых ионно-звуковых колебаний находим

$$u_{\text{кр}}\cos\theta = v_s\left[1 + \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} e^{-\dfrac{T_e}{2T_i}}\right]. \tag{2.4.5}$$

При этом $u_{\text{кр}} \gg v_s$. С ростом частоты колебаний скорость $u_{\text{кр}}$ падает и становится меньше v_s. Наименьшей критической скоростью обладают коротковолновые колебания с длиной волны, меньшей дебаевского радиуса электронов. Для них

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2,$$

$$\frac{\delta}{\omega} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}\frac{M}{m}\frac{\omega_{Li}^3}{k^3 v_{Te}^3}}\left[1 - \frac{u}{v_{\text{ф}}}\cos\theta\right] - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_{Li}^3}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\dfrac{\omega_{Li}^2}{2k^2 v_{Ti}^2}}. \tag{2.4.6}$$

Теперь заметим, что при совсем малых скоростях дрейфа электронов, когда $u \ll v_{Ti}$, уравнение (2.4.1) имеет лишь устойчивые решения, т.е. плазма с током во внешнем электрическом поле в таких условиях устойчива по отношению к возбуждению продольных волн. На рис. 2.2

приведена зависимость инкремента нарастания неустойчивых колебаний плазмы в постоянном электрическом поле от **ku**: пунктиром показан инкремент кинетической неустойчивости, а сплошной линией – инкремент гидродинамической неустойчивости, причем

$$\delta_{\max} \approx \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3} \omega_{Le}\gamma^{1/6}. \tag{2.4.7}$$

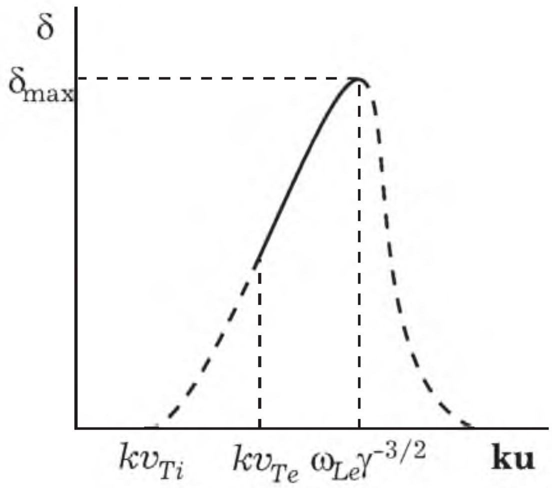

Рис. 2.2

Наконец, отметим, что впервые ионно-звуковая неустойчивость была наблюдена и довольно детально изучена А.А.Зайцевым на кафедре электроники физического факультета МГУ еще в 50-х годах. Она проявляется также в термоядерных установках типа токамак в виде аномального сопротивления плазменного шнура.

В заключение рассмотрим устойчивость бесстолкновительной вырожденной плазмы во внешнем электрическом поле, когда функция распределения электронов по импульсам имеет вид сдвинутой функции распределения Ферми (2.1.3). Считая скорость дрейфа электронов малой по сравнению со скоростью света, ограничимся анализом устойчивости продольных волн в такой плазме. Используя формулы преобразования Лоренца–Минковского и явный вид продольной диэлектрической проницаемости вырожденной плазмы, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\omega - \mathbf{ku}}{kv_{Fe}}\ln\frac{\omega - \mathbf{ku} + kv_{Fe}}{\omega - \mathbf{ku} - kv_{Fe}}\right] - \\ - \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2}\left[1 - J_+\left(\frac{\omega}{kv_{Ti}}\right)\right] = 0. \quad (2.4.8)$$

При выводе этого уравнения ионы плазмы считались невырожденными.

В области частот ионно-звуковых колебаний $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Fe}$ из уравнения (2.4.8) получаем

$$1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2}\left(1 + i\frac{\pi}{2}\frac{\omega - \mathbf{ku}}{kv_{Fe}}\right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \\ + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_{Li}^2\omega}{k^3 v_{Ti}^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) = 0. \quad (2.4.9)$$

Это уравнение аналогично (2.4.2). Поэтому проведенный анализ применим и здесь, что дает формулы, подобные (2.4.5)–(2.4.9), в которых, однако, следует произвести замену $v_{Te} \to v_{Fe}$, $T_e \to \mathcal{E}_{Fe} = mv_{Fe}^2/2$. И в случае вырожденной плазмы при скоростях дрейфа меньше тепловой скорости ионов продольные волны оказываются устойчивыми как и в невырожденной плазме.

§ 2.5. Влияние магнитного поля на устойчивость плазмы во внешнем постоянном электрическом поле

Рассмотрим влияние сильного магнитного поля на устойчивость плазмы во внешнем постоянном электрическом поле и тем самым обобщим полученные в предыдущем параграфе результаты на магнитоактивную плазму, считая, что $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{E}_0$. Как и ранее, функцию распределения электронов будем считать сдвинутой функцией распределения Максвелла (2.1.2) либо Ферми (2.1.3) и пренебрежем изменением направленной скорости в процессе развития колебаний (адиабатическое приближение). Для простоты ограничимся случаем достаточно сильного магнитного поля, когда электроны замагничены ($\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$), а ионы, наоборот, не замагничены ($\Omega_i^2 \ll \omega_{Li}^2$).

При указанных ограничениях анализ дисперсионного уравнения (2.2.1) существенно облегчается. Так, в пределе сильного поля, когда скорость электрического дрейфа электронов намного больше средней скорости их хаотического движения и последней можно пренебречь, уравнение (2.2.1) при учете известных выражений для парциальных диэлектрических проницаемостей в собственной системе координат принимает вид

$$k_\perp^2 \varepsilon_{xx} + \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xx}\right)\varepsilon_{zz} = k_\perp^2\left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right) +$$

$$+\left[k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right)\right]\left[1 - \frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right] = 0. \quad (2.5.1)$$

Уравнение (2.5.1) имеет неустойчивые решения при условии

$$\omega_{Le}^2 \geqslant k^2 u^2 \gamma^3. \quad (2.5.2)$$

Неустойчивость апериодическая, причем $\omega \ll k_z u$, т.е. она развивается при выполнении условия черепковского излучения, и инкремент ее нарастания достигает своего максимального значения в условиях резонанса (2.5.2):

$$\omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3} k_z u \gamma \left(\frac{k^2}{k_z^2}\right)^{1/3}. \quad (2.5.3)$$

Из сравнения формул (2.3.3), (2.3.4) с (2.5.2), (2.5.3) следует, что внешнее магнитное поле затрудняет развитие высокочастотной бунемановской неустойчивости в плазме в сильном электрическом поле; область неустойчивости (2.5.2) у́же области (2.3.3) для волн, распространяющихся под углом к магнитному полю, а инкремент развития неустойчивости в магнитоактивной плазме (2.5.3) меньше, чем в отсутствие магнитного поля (2.3.4)[1].

Наконец отметим, что неустойчивость филламентации, обусловленная пинчеванием разряда и описываемая функцией (2.3.7) в отсутствие магнитного поля, при наличии последнего полностью стабилизируется,

[1]Здесь следует пояснить, что в отсутствие магнитного поля даже в ограниченной в поперечном направлении плазме (об этом подробнее будет сказано в теме VI) может быть $k_\perp = 0$, в то время как в магнитоактивной плазме при условии $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$ всегда $k_{\perp\min} \sim 1/L_\perp$, где $L_\perp$ – поперечный размер плазмы. Именно это обстоятельство имеется в виду в утверждении, что согласно (2.5.2) магнитное поле затрудняет условие развития бунемановской неустойчивости.

если $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$. В этом смысле на указанную неустойчивость магнитное поле влияет катастрофически, и это действительно подтверждается экспериментом.

Рассмотренная бунемановская неустойчивость, как и в незамагниченной плазме, может иметь место лишь при больших скоростях электрического дрейфа электронов, превышающих скорость их хаотического движения. И так же, как и в отсутствие магнитного поля, в замагниченной плазме возможны неустойчивости и при малых скоростях дрейфа, меньших тепловой скорости электронов, но больших тепловой скорости ионов. Для анализа таких неустойчивостей, однако, важен учет теплового движения частиц. Это требует знания явного вида функции распределения заряженных частиц в плазме, что существенно усложняет анализ дисперсионного уравнения (2.2.1). Вместе с тем при малых скоростях дрейфа можно ограничиться анализом уравнения для продольных колебаний вместо общего дисперсионного уравнения (2.2.1), что упрощает задачу.

В случае невырожденной электронно-ионной плазмы в постоянном электрическом поле и параллельном ему магнитном поле уравнение для продольных колебаний записывается в виде

$$\frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij} = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left[1 - \sum_n \frac{\omega - \mathbf{ku}}{\omega - \mathbf{ku} - n\Omega_e} \times \right.$$

$$\left. \times A_n\left(\frac{k_\perp^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2}\right) J_+\left(\frac{\omega - \mathbf{ku} - n\Omega_e}{k_z v_{Te}}\right)\right] + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2}\left[1 - \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\Omega_i} \times \right.$$

$$\left. \times A_n\left(\frac{k_\perp^2 v_{Ti}^2}{\Omega_i^2}\right) J_+\left(\frac{\omega - n\Omega_i}{k_z v_{Ti}}\right)\right] = 0. \quad (2.5.4)$$

При малых скоростях дрейфа электронов, когда $u \ll v_{Te}$, неустойчивые решения уравнения (2.5.4) следует искать в области частот $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$. Тогда из (2.5.4) находим

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega - \mathbf{ku}}{|k_z| v_{Te}}\right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_{Li}^2 \omega}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} = 0. \quad (2.5.5)$$

При получении этого уравнения ионы плазмы, так же как и ранее, считались незамагниченными, а электроны – сильно замагниченными.

Уравнение (2.5.5) подобно уравнению (2.4.2) и отличается от него малым мнимым слагаемым, обусловленным черепковским эффектом на электронах. Поэтому анализ уравнения (2.4.2) полностью переносится и на уравнение (2.5.5): сохраняются формулы (2.4.3)–(2.4.6) с заменой

$$1 - \frac{u}{v_{\text{ф}}}\cos\theta \to \frac{1}{\cos\theta}\left(1 - \frac{u}{v_{\text{ф}}}\cos\theta\right). \qquad (2.5.6)$$

В результате критическая скорость дрейфа электронов оказывается меньше, а инкремент нарастания неустойчивости больше, чем в отсутствие магнитного поля. Это означает, что внешнее магнитное поле облегчает развитие ионно-звуковой неустойчивости плазмы во внешнем электрическом поле.

На рис. 2.3 приведена зависимость инкремента развития неустойчивости невырожденной плазмы во внешних постоянных электрическом и магнитном полях от **ku**. Она качественно такая же, как и в отсутствие

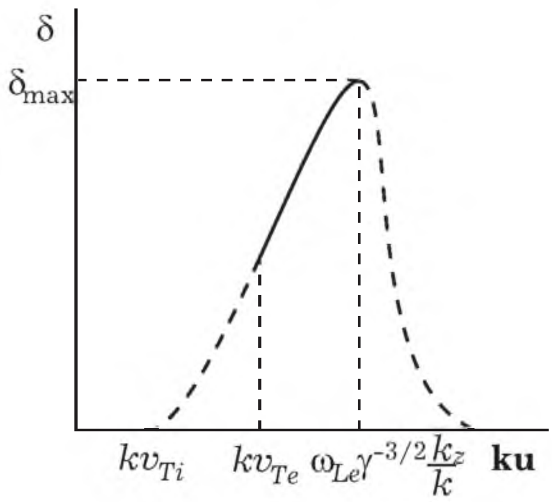

Рис. 2.3

магнитного поля.

До сих пор было полностью пренебрежено столкновениями частиц в плазме. Обсудим теперь их влияние на развитие неустойчивостей в магнитоактивной плазме при наличии электрического дрейфа электронов. Для справедливости формул, относящихся к высокочастотным колебаниям, которые возбуждаются при $u > v_{Te}$, необходимо, чтобы за время свободного пробега электроны плазмы приобретали в поле скорость, превышающую их тепловую скорость, что возможно при $E_0 > E_{\text{кр}}$. Это требование, в свою очередь, означает, что все процессы должны успевать развиваться быстрее времени свободного пробега электронов, т.е.

$|\delta| > \nu_e$. Медленная же ионно-звуковая неустойчивость может развиваться как при $E_0 > E_{\text{кр}}$, так и при $E_0 < E_{\text{кр}}$; необходимо только, чтобы электроны имели среднюю дрейфовую скорость, превышающую тепловую скорость ионов. В противном случае при очень малых скоростях, когда $u < v_{Ti}$, неустойчивость как в изотропной, так и в замагниченной плазме отсутствует.

В заключение кратко обсудим вопрос об устойчивости вырожденной плазмы во внешних электрическом и магнитном полях. Как и ранее, вырожденными считаются только электроны, причем скорость их электрического дрейфа меньше скорости Ферми, но больше тепловой скорости ионов. В этих условиях общее дисперсионное уравнение

$$\frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2}\left[1 - J_+\left(\frac{\omega}{k v_{Ti}}\right)\right] + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \times$$

$$\times \left[1 - \sum_n \frac{\omega - k_z u}{2}\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2\theta d\theta J_n^2\left(\dfrac{k_\perp v_{Fe}}{\Omega_e}\sin\theta\right)}{\omega - k_z u - k_z v_{Fe}\cos\theta - n\Omega_e}\right] \quad (2.5.7)$$

можно упростить, рассмотрев область частот $k v_{Ti} \ll \omega \ll k v_{Fe}$. В результате получим уравнение

$$1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2}\left(1 + i\frac{\pi}{2}\frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{|k_z| v_{Fe}}\right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} +$$

$$+ i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_{Li}^2 \omega}{k^3 v_{Ti}^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) = 0, \quad (2.5.8)$$

которое отличается от (2.4.8) малым мнимым слагаемым, обусловленным черепковским эффектом на электронах. Поэтому все сказанное относительно уравнения (2.4.8) сохраняет силу и здесь с учетом замены (2.5.6), которая свидетельствует о дестабилизирующем влиянии магнитного поля на токовую неустойчивость вырожденной плазмы.

§ 2.6. Возбуждение упругих звуковых волн электрическим дрейфом носителей заряда

Последний вопрос, который мы здесь рассмотрим, это возможность возбуждения (раскачки) упругих звуковых волн в пьезоэлектрических средах во внешнем электрическом поле. Причиной их возбуждения является электрический дрейф носителей заряда, причем возбуждение, очевидно, имеет место, когда скорость дрейфа больше скорости упругих звуковых волн. И поскольку последние, как правило, намного меньше тепловых скоростей легких носителей (электронов), то достаточно ограничиться рассмотрением случая слабого электрического поля, считая скорость электрического дрейфа электронов достаточно малой. Равновесным распределением электронов при этом являются распределения Максвелла либо Ферми, учитывающие дрейф (см. (2.1.2) и (2.1.3)). Внешнее магнитное поле считаем отсутствующим.

Ниже исследуется раскачка звуковых колебаний в пьезополупроводнике, когда дрейфуют носители в объеме образца. Как и в первой части книги ограничимся рассмотрением пьезополупроводника с гексагональной симметрией, при этом положим, что главная ось направлена вдоль оси $0z$, а колебания распространяются либо вдоль ($k_\perp = 0$), либо поперек ($k_z = 0$) этой оси. Пусть в пьезополупроводнике течет ток и скорость токового дрейфа электронов $u \ll v_{Te}$. Дисперсионное уравнение связанных упругоэлектростатических волн записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&(\omega - k^2 v_l^2)\,\varepsilon(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}, \mathbf{k}) = 4\pi\beta_3^2 k^2/\rho^{(m)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad k_\perp = 0, \quad k = k_z, \\
&(\omega - k^2 v_{tr}^2)\,\varepsilon(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}, \mathbf{k}) = 4\pi\beta_1^2 k^2/\rho^{(m)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad k_z = 0, \quad k = k_\perp.
\end{aligned}
\tag{2.6.1}
$$

Здесь $v_{tr,l}$ – скорость поперечного и продольного звука в пьезообразце; β_1 и β_3 константы пьезоэффекта; $\varepsilon(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}, \mathbf{k})$ – продольная диэлектрическая проницаемость, учитывающая электрический дрейф носителей заряда. Направление скорости дрейфа $\mathbf{u}$, вообще говоря, произвольно.

Чтобы продемонстрировать возможность возбуждения в такой системе упругих звуковых волн, проанализируем здесь случай электронной плазмы с частыми столкновениями и запишем $\varepsilon(\omega-\mathbf{ku},\mathbf{k})$ в виде[1]

$$\varepsilon(\omega-\mathbf{ku},\mathbf{k}) = 1 + i\frac{\omega_{Le}^2}{\nu_e(\omega-\mathbf{ku})}, \tag{2.6.2}$$

где ν_e – частота столкновений электронов. Подставив это выражение в (2.6.1), перепишем его для $k = k_\perp$, $k_z = 0$ либо $k = k_z$, $k_\perp = 0$ соответственно:

$$(\omega^2 - k^2 v_{tr,l}^2)\left[1 + i\frac{\omega_{Le}^2}{\nu_e(\omega-\mathbf{ku})}\right] = \frac{4\pi\beta_{1,3}^2 k^2}{\rho^{(m)}}. \tag{2.6.3}$$

Отсюда, учитывая малость пьезоэффекта, т.е. неравенство $\beta_{1,3}^2/\rho^{(m)} \ll v_{tr,l}^2$, для спектра упругих звуковых волн $(\omega \to \omega + i\delta)$ получаем

$$\omega^2 = k^2 v_{tr,l}^2,$$
$$\delta = -\frac{2\pi\beta_1^2 k^2 \nu_e}{\rho^{(m)}\omega_{Le}^2}\left(1 - \frac{u}{v_{tr,l}\cos\theta}\right). \tag{2.6.4}$$

Как и следовало ожидать, при выполнении условия

$$u > \frac{v_{tr,l}}{\cos\theta} \tag{2.6.5}$$

происходит обращение знака диссипации и упругие звуковые волны начинают нарастать из-за их раскачки электрическим дрейфом носителей. Природа неустойчивости видна из выражения самого декремента (2.6.4) и условия (2.6.5) и состоит в вынужденном черенковском излучении электронов при их рассеянии в пьезополупроводнике.

Заметим, что формулы (2.6.1)–(2.6.5) и все следствия, вытекающие из них, справедливы как для сильноионизованной, так и для слабоионизованной плазмы носителей, причем последние могут быть как невырожденными, так и вырожденными. Нужно только в каждом конкретном случае выбрать правильное выражение для ν_e.

Возбуждение упругих звуковых волн в пьезодиэлектрике наблюдалось экспериментально в условиях, когда разряд происходил в кварцевой трубке. При этом, однако, связь упругих волн с колебаниями плазмы осуществляется через поверхностные волны (об этом см. тему V).

---

[1]Мы здесь специально рассмотрели столкновительную плазму пьезополупроводника, поскольку бесстолкновительная неустойчивость возможна, если частота пьезозвука больше ν_e, что реально не выполняется.

§ 2.7. Неустойчивость плазменной среды с током при отрицательной дифференциальной проводимости

Плазменной среде с током присущ еще один характерный тип неустойчивости, который не сводится к элементарному механизму вынужденного излучения. Это так называемая неустойчивость при отрицательной дифференциальной проводимости или, как часто говорят, неустойчивость при отрицательной вольт-амперной характеристике. Вместе с тем, что она чисто электродинамическая в том смысле, что анализируется на основе уравнений Максвелла (точнее, уравнения Пуассона) без явной конкретизации материального уравнения, т.е. закона Ома. Эта неустойчивость, например, может иметь место при условиях значительного джоулевского разогрева легких носителей (электронов) при протекании тока в плазменной среде, или при определенного вида законах рассеяния носителей (зависимостях сечений рассеяния от энергии носителей).

Введем понятие дифференциальной проводимости изотропной среды, считая ее отрицательной, если

$$\sigma_D = \frac{\partial j_0}{\partial E_0} < 0, \tag{2.7.1}$$

где j_0 и E_0 – плотность тока и постоянное электрическое поле в невозмущенной плазменной среде.

Рассмотрим малые низкочастотные колебания в такой среде, причем будем считать, что дифференциальный закон Ома, связывающий ток с полем, справедлив не только для постоянного поля $\mathbf{E}_0$, но также и для слабо переменного во времени поля возмущений. Другими словами, предположим, что закон $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E})$ одинаков как для невозмущенных величин $\mathbf{j}_0$ и $\mathbf{E}_0$, так и для токов и полей при наличии малых возмущений, т.е. когда $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \delta\mathbf{j}$, где $\delta\mathbf{E}$ и $\delta\mathbf{j}$ – малые отклонения величин от равновесных значений, описывающие процесс развития колебаний (неустойчивости). Легко понять, что для выполнения такого соотношения достаточно потребовать, чтобы времена изменения малых возмущений были намного больше времени установления равновесной температуры в плазме, или, что то же самое, $\omega \ll 2\dfrac{m}{M}\nu_e$. Будем предполагать также, что поле малых колебаний потенциально и поэтому $\delta\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, причем

$$\Delta\Phi = -4\pi e\delta N. \tag{2.7.2}$$

Воспользуемся теперь линеаризованным уравнением непрерывности

$$\frac{\partial e\delta N}{\partial t} + \operatorname{div}\delta\mathbf{j} = 0, \tag{2.7.3}$$

учитывая при этом, что

$$\delta\mathbf{j} = \frac{\partial j_0}{\partial E_0}\delta\mathbf{E} = -\sigma_D \nabla\Phi. \tag{2.7.4}$$

Для возмущений вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$ из (2.7.2) и (2.7.4) получаем

$$\omega = -4\pi i\sigma_D. \tag{2.7.5}$$

Отсюда видно, что при выполнении условия (2.7.1) $\operatorname{Im}\omega > 0$, а следовательно, малые возмущения в системе будут нарастать со временем.

Рассмотренная неустойчивость, известная под названием неустойчивости при отрицательной дифференциальной проводимости, может развиваться в плазменной среде в условиях, когда либо концентрация носителей падает с ростом их температуры (либо поля), либо эффективная масса носителей растет с полем (эффект Ганна[1]), либо время жизни (время релаксации импульса) падает с температурой. Неустойчивость эта довольно медленная и развивается на фоне установившегося равновесного состояния не только по импульсам, но и по энергии, т.е. $\operatorname{Im}\omega \approx \sigma_D < \dfrac{m}{M}\nu_e \lesssim 10^9 \div 10^{10}\,\text{с}^{-1}$ (в твердом теле). Она, в основном, характерна для твердотельной плазмы во внешнем электрическом поле, либо для плотной сильно столкновительной плазмы, в которой наряду с разогревом носителей существенны ионизационно-рекомбинационные процессы.

В заключение настоящего параграфа покажем, что в объеме пьезополупроводника, в условиях, когда в токе носителей возникает участок отрицательной дифференциальной проводимости, в нем могут возбуждаться упругие звуковые волны. Чтобы вывести дисперсионное уравнение колебаний в этом случае, к току носителей следует добавить пьезоэлектрический ток

$$\delta j_i^{(\text{П})}\beta_{ikl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial r_l}, \tag{2.7.6}$$

где u_k – вектор смещения кристаллической решетки, подчиняющийся уравнениям теории упругости. При этом уравнению непрерывности подчиняется полный ток, а под $e\delta u$ следует понимать полный заряд в системе.

---

[1]Теоретически эта неустойчивость была предсказана Дж.Ридли в 1957г., а экспериментально обнаружена И.Ганном в 1959г.

Опуская все промежуточные выкладки, приведем здесь окончательное дисперсионное уравнение для потенциальных колебаний поля в условиях симметрии, рассмотренной выше в (2.6.1) (соответственно для $k = k_{\perp}$ и $k = k_z$):

$$(\omega^2 - k^2 v_{tr,l}^2)(\omega + 4\pi i\sigma_D) = \frac{4\pi\beta_{1,3}^2 k^2}{\rho^{(m)}}. \tag{2.7.7}$$

В отсутствие пьезоэффекта это уравнение, как и следовало ожидать, описывает рассмотренную выше электростатическую неустойчивость, обусловленную отрицательной вольт-амперной характеристикой в токе носителей (электронов). В пьезополупроводнике по этой же причине возможна раскачка упругих звуковых колебаний. Считая $\omega \simeq kv_{tr,l} \gg 4\pi\sigma_D$, находим инкремент нарастания упругих колебаний $(\omega \to \omega + i\delta)$

$$\delta_{tr,l} \simeq -\frac{2\pi\beta_{1,3}^2 k^2}{\rho^{(m)}}\frac{4\pi\sigma_D}{\omega^3}. \tag{2.7.8}$$

При $\sigma_D < 0$ величина $\delta_{tr,l} > 0$ и имеет место раскачка упругих звуковых волн.

Задачи по теме II

Задача 1. Оценить число убегающих электронов в полностью ионизованной плазме при $E_0 < E_{\text{кр}}$.

Решение.

Функция распределения (2.1.2) в этом случае справедлива в среднем для основной массы электронов. Однако, небольшая группа электронов даже при $E_0 < E_{\text{кр}}$ непрерывно ускоряется и входит в режим убегания. Очевидно, в режим ускорения попадут электроны, начальные скорости которых вдоль электрического поля больше их тепловой скорости. Действительно, движение таких электронов в электрическом поле подчиняется уравнению

$$\frac{du}{dt} = \frac{eE_0}{m} - \nu_e u = \frac{eE_0}{m} - \frac{\nu_{ei}(T_e)v_{Te}^3}{u^3}u. \tag{1}$$

Вводя величину

$$u_{\text{кр}}^2 = \frac{\nu_{ei}(T_e)m}{eE_0}v_{Te}^3 = v_{Te}^2\frac{E_{\text{кр}}}{E_0} > v_{Te}^2, \tag{2}$$

уравнение (1) запишем в виде

$$u^2\frac{du}{dt} = \frac{eE_0}{m}(u^2 - u_{\text{кр}}^2). \tag{3}$$

Отсюда видно, что при начальной скорости $u_0 > u_{\text{кр}}$ происходит непрерывное ускорение электронов. Таким образом, число убегающих электронов N_b в поле $E_0 < E_{\text{кр}}$ определяется выражением

$$\frac{N_b}{N_e} = \frac{1}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \int\limits_{v_z > u_{\text{кр}}} d\mathbf{p}\, e^{-\dfrac{mv^2}{2T_e}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m T_e}} \int\limits_{u_{\text{кр}}}^{\infty} dp_z\, e^{-\dfrac{p_z^2}{2mT_e}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi T_e}} \int\limits_{u_{\text{кр}}}^{\infty} dv\, e^{-\dfrac{v^2}{2v_{Te}^2}} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{u_{\text{кр}}}{\sqrt{2} v_{Te}}\right)\right], \quad (4)$$

где $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int\limits_0^x e^{-x^2} dx$ – интеграл ошибок. В пределе очень слабых полей, когда $u_{\text{кр}} \gg v_{Te}$ (т.е. $E_0 \ll E_{\text{кр}}$), с хорошей степенью точности

$$\frac{N_b}{N_e} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{u_{\text{кр}}^2}{v_{Te}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{E_{\text{кр}}}{E_0}}. \quad (5)$$

С ростом поля E_0 число убегающих электронов экспоненциально растет.

Задача 2. Исходя из уравнения (2.4.1) показать, что высокочастотная неустойчивость незамагниченной плазмы в сильном электрическом поле сохраняется и при нарушении условий (2.3.3), но при этом она становится кинетической.

Решение.

В сильном электрическом поле, когда скорость дрейфа электронов $u \gg v_{Te}$ (но все же $u^2 \ll c^2$), из уравнения (2.4.1) получаем

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - \mathbf{ku})^2}\left[1 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\omega - \mathbf{ku})^3}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\dfrac{(\omega - \mathbf{ku})^2}{2k^2 v_{Te}^2}}\right] - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} = 0. \quad (1)$$

При условии $(\mathbf{ku})^2 \gg \omega_{Le}^2$ (обратном (2.3.3)) отсюда находим ($\omega \to \omega + i\delta$)

$$\begin{gathered} \omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 - \omega_{Le}^2/(\mathbf{ku})^2} \approx \omega_{Li}^2, \\ \delta = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{M}{m} \frac{\omega^3}{k^3 v_{Te}^3} \mathbf{ku}\, e^{-\dfrac{(\mathbf{ku})^2}{2k^2 v_{Te}^2}}. \end{gathered} \quad (2)$$

Видно, что инкремент нарастания рассмотренной кинетической неустойчивости всегда экспоненциально мал.

Задача 3. Показать, что ионно-звуковая неустойчивость может развиваться в слабоионизованной неизотермической плазме с током также в пределе частых столкновений, когда длины свободного пробега электронов и ионов меньше длины волны ионно-звуковых колебаний.

Решение.

Для простоты ограничимся анализом низкочастотных ($\omega \ll \Omega_i$) и длинноволновых ($k_\perp v_{Ti} \ll \Omega_i$) колебаний, когда общее дисперсионное уравнение

$$1 + \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[1 - \sum_n \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha + i\nu_\alpha}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha + i\nu_\alpha - n\Omega_\alpha} \times \right.$$

$$\left. \times A_n \left(\frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha + i\nu_\alpha - n\Omega_\alpha}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right] \left[1 - \sum_n \frac{i\nu_\alpha}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha + i\nu_\alpha - n\Omega_\alpha} \times \right.$$

$$\left. \times A_n \left(\frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha + i\nu_\alpha - n\Omega_\alpha}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right]^{-1} = 0 \quad (1)$$

упрощается н принимает вид

$$1 + \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha + i\nu_\alpha) \left[\dfrac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} - \dfrac{k_z v_{T\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)^2} \right]}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha + i\nu_\alpha \left[\dfrac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} - \dfrac{k_z v_{T\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)^2} \right]} = 0. \quad (2)$$

Если скорость дрейфа электронов $u \ll v_{Te}$, то неустойчивые решения этого уравнения в плазме в пределе частых столкновений ($\nu_\alpha \gg k v_{T\alpha}$) следует ожидать в области частот $\nu_e \gg \omega \gg \nu_i$. Тогда

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[1 + i \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})\nu_e}{k_z^2 v_{Te}^2} \right] - \frac{k_z^2 \omega_{Li}^2}{k^2 \omega^2} = 0. \quad (3)$$

При получении этого уравнения, кроме того, было принято, что $\omega\nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$, а $\omega\nu_i \gg k_z^2 v_{Ti}^2$, так как только в этих условиях, соответствующих сильной электронной диффузии и слабой ионной диффузии, в слабоионизованной плазме возможно существование ионно-звуковых волн. Из уравнения (3) находим ($\omega \to \omega + i\delta$)

$$\begin{gathered} \omega^2 = \omega_{Le}^2 \frac{k_z^2}{k^2} \left[1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \right]^{-1}, \\ \delta = -i \frac{m}{M} \frac{\nu_e(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})\omega^3}{2 k_z^4 v_{Te}^4}. \end{gathered} \quad (4)$$

Отсюда видно, что система может стать неустойчивой, благодаря изменению знака диффузионного поглощения при $u > \omega/k_z \approx v_s$.

Задача 4. Исходя из релятивистских уравнений движения частиц (модель независимых частиц) получить выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы в сильном постоянном электрическом поле в адиабатическом приближении.

Решение.

Запишем релятивистские уравнения движения

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} N_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha \nabla\right) \frac{\mathbf{V}_\alpha}{\sqrt{1 - V_\alpha^2/c^2}} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}_\alpha \mathbf{B}] \right\}, \tag{1}$$

где $\alpha = e, i$. В невозмущенном состоянии, однородном в пространстве, в полях $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{B} \parallel 0z$ имеем

$$\mathbf{V}_{\alpha 0} = \mathbf{u}_\alpha = e_\alpha \mathbf{E}_0 t \left(m_\alpha^2 + \frac{e_\alpha^2 E_0^2 t^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \tag{2}$$

В адиабатическом приближении равновесная скорость при колебаниях плазмы считается неизменной.

Линеаризуя систему (1) по малым возмущениям $\delta \mathbf{V}_\alpha$ и δN_α,

$$\frac{\partial \delta N_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} \left(N_{0\alpha} \delta \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha \delta N_\alpha \right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \nabla\right) \left[\frac{\delta \mathbf{V}_\alpha}{\sqrt{1 - u_\alpha^2/c^2}} + \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{u}_\alpha (\delta \mathbf{V}_\alpha \mathbf{u}_\alpha)}{\sqrt{(1 - u_\alpha^2/c^2)^3}} \right] = \tag{3}$$
$$= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\delta \mathbf{V}_\alpha \mathbf{B}_0] + \frac{1}{c}[\mathbf{u}_\alpha \mathbf{B}_0] \right\}$$

и считая, что все возмущенные величины зависят от времени и координат в виде $\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$, из (3) легко находим $\delta \mathbf{V}_\alpha$ и δN_α, а следовательно, плотность индуцированного тока

$$j_i = \sum_\alpha e_\alpha (\delta N_\alpha u_{\alpha i} + \delta \mathbf{V}_{\alpha i} N_{0\,\alpha}) = \sigma_{ij} E_j. \tag{4}$$

Окончательно для компонент тензора диэлектрической проницаемости получаем:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 {\omega'}_\alpha^2 \gamma_\alpha^{-1}}{\omega^2 ({\omega'}_\alpha^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\
\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = -i \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega'_\alpha \Omega_\alpha \gamma_\alpha^{-1}}{\omega^2 ({\omega'}_\alpha^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\
\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = -\sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 u_\alpha \omega'_\alpha k_\perp}{\omega^2 ({\omega'}_\alpha^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\
\varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} = i \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 u_\alpha k_\perp \Omega_\alpha}{\omega^2 ({\omega'}_\alpha^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\
\varepsilon_{zz} = 1 - \sum_\alpha \left[\frac{\omega_{L\alpha}^2 \gamma_\alpha^{-1}}{{\omega'}_\alpha^2} + \frac{\omega_{L\alpha}^2 u_\alpha^2 k_\perp^2 \gamma_\alpha}{\omega^2 ({\omega'}_\alpha^2 - \Omega_\alpha^2)} \right],
\end{gathered} \tag{6}$$

где $\omega'_\alpha = \gamma_\alpha(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha)$, $\gamma_\alpha = (1 - u_\alpha^2/c^2)^{-1/2}$. Уравнения (2.3.2) и (2.5.1) получаются подстановкой полученного выражения (6) в (2.2.1).

Задача 5. Исследовать устойчивость замагниченной холодной плазмы в сильном электрическом поле по отношению к электростатическим колебаниям в адиабатическом приближении.

Решение.

С помощью тензора диэлектрической проницаемости, полученного в предыдущей задаче, легко вывести искомое дисперсионное уравнение электростатических колебаний:

$$\varepsilon = \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij} = \frac{k_\perp^2}{k^2}\left[1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} - \frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-1}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 - \Omega_e^2\gamma^2}\right] + \\ + \frac{k_z^2}{k^2}\left[1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2}\right]. \quad (1)$$

Считая ионы незамагниченными, $\omega \gg \Omega_i$, запишем это уравнение в виде

$$\omega_{Li}^2/\omega^2 = 1 + \delta\varepsilon_e(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}), \quad (2)$$

где

$$\delta\varepsilon_e(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) = -\frac{k_\perp^2}{k^2}\frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-1}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 - \Omega_e^2\gamma^{-2}} - \frac{k_z^2}{k^2}\frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} \quad (3)$$

– парциальный вклад электронов в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы.

Уравнение (2) имеет неустойчивые решения в области частот $\omega \ll \mathbf{k}\mathbf{u}$ в условиях

$$1 + \delta\varepsilon_e(\mathbf{k}\mathbf{u}) \leqslant 0, \quad (4)$$

причем максимальный инкремент достигается при равенстве (4), когда доплеровская частота $\mathbf{k}\mathbf{u}$ совпадает с одной из собственных частот продольных электронных колебаний плазмы:

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left[-\frac{\omega_{Li}^2}{\dfrac{\partial\delta\varepsilon_e(\mathbf{k}\mathbf{u})}{\partial\,\mathbf{k}\mathbf{u}}}\right]^{1/3}. \quad (5)$$

В отсутствие магнитного поля ($\Omega_e \to 0$) формулы (4) и (5) принимают вид

$$\omega_{Le}^2\frac{k_z^2 + k_\perp^2\gamma^2}{k^2} \geqslant (\mathbf{k}\mathbf{u})^2\gamma^3, \quad (6)$$

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3}\mathbf{k}\mathbf{u}\gamma\left(\frac{k^2}{k_z^2 + k_\perp^2\gamma^2}\right)^{1/3}. \quad (7)$$

При $k_\perp = 0$ эти формулы совпадают с (2.3.3) и (2.3.4), т.е. при $k_\perp = 0$ справедливо электростатическое приближение. В обратном пределе бесконечно сильного магнитного поля из (4) и (5) имеем

$$\omega_{Le}^2 \geqslant k^2u^2\gamma^3, \quad (8)$$

$$\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3} k_z u\gamma \left(\frac{k^2}{k_z^2}\right)^{1/3}, \tag{9}$$

что в точности совпадает с (2.3.3) и (2.3.4). Это означает, что в сильно замагниченной плазме колебания с $\omega \ll k_z u$ всегда с хорошей степенью точности потенциальны.

Задача 6. В модели независимых частиц исследовать устойчивость плазмы в сильном электрическом поле по отношению к электростатическим (потенциальным) колебаниям в неадибатическом приближении.

Решение.

В системе уравнений (3) задачи 5 полагаем

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \qquad \mathbf{B} = 0, \qquad \Delta\Phi = \sum_\alpha 4\pi e_\alpha \delta N_\alpha. \tag{1}$$

Возмущенные величины ищем в виде $f(t)\exp(i\mathbf{kr})$ и ограничиваемся для простоты колебаниями вдоль электрического поля, так что $k_\perp = 0$. В этом случае как для изотропной, так и для замагниченной плазмы получаем

$$\frac{\partial^2 \delta N_i}{\partial t^2} + \omega_{Li}^2 \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-3}}{(\mathbf{ku})^2}\right]^{-1} \delta N_i = 0. \tag{2}$$

При выводе этого уравнения из системы (3) задачи 4 было использовано предположение, что время нарастания неустойчивости намного больше ω_{Le}^{-1} (точнее $\partial/\partial t \ll \mathbf{ku}$), что следует из адиабатического приближения. В условиях

$$(\mathbf{ku})^2 \gg \omega_{Le}^2\gamma^{-3} \tag{3}$$

(при заданном значении k это соответствует большим временам после наложения на плазму поля E_0) уравнение (2) имеет осциллирующее во времени решение

$$\delta N_i = C\sin(\omega_{Li}t + \phi). \tag{4}$$

При условии, обратном (3), имеем уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \delta N_i}{\partial t^2} - \frac{m}{M}\frac{k^2e^2E_0^2}{m^2}t^2\delta N_i = 0 \qquad \text{при} \quad u \ll c, \quad \gamma = 1,\\
&\frac{\partial^2 \delta N_i}{\partial t^2} - \frac{m}{M}\frac{k^2e^3E_0^3}{cm^3}t^3\delta N_i = 0 \qquad \text{при} \quad u \approx c, \quad \gamma \gg 1
\end{aligned} \tag{5}$$

с решениями вида

$$\delta N_i = \begin{cases} \sqrt{t}\left[C_1 I_{1/4}\left(\sqrt{\dfrac{m}{M}}\dfrac{keE_0}{m}\dfrac{t^2}{2}\right) + C_2 I_{-1/4}\left(\sqrt{\dfrac{m}{M}}\dfrac{keE_0}{m}\dfrac{t^2}{2}\right)\right] & \text{при} \quad \gamma \approx 1,\\[2ex] \sqrt{t}\left[C_1 I_{1/5}\left(\sqrt{\dfrac{m}{M}\dfrac{k^2e^3E_0^3}{m}}\dfrac{2t^{5/2}}{5}\right) + C_2 I_{-1/5}\left(\sqrt{\dfrac{m}{M}\dfrac{k^2e^3E_0^3}{m}}\dfrac{2t^{5/2}}{5}\right)\right] & \\ & \text{при} \quad \gamma \gg 1. \end{cases} \tag{6}$$

Отсюда следует, что при малых временах (малых аргументах функции Бесселя $ku\gamma^{3/2}t \ll 1$) возмущение плотности плазмы линейно растет во времени:

$$\delta N_i \approx C_1 + C_2 t. \tag{7}$$

При больших же временах ($ku\gamma^{3/2}t \gg 1$) наблюдается экспоненциальный рост возмущений:

$$\delta N_i = \begin{cases} t^{-1/2} \exp\left[\sqrt{\dfrac{m}{M}} \dfrac{keE_0}{m} \dfrac{t^2}{2}\right] & \text{при} \quad \gamma \approx 1, \\[2ex] t^{-3/4} \exp\left[\sqrt{\dfrac{m}{M} \dfrac{k^2 e^3 E_0^3}{cm^3}} \dfrac{2t^2}{5}\right] & \text{при} \quad \gamma \gg 1. \end{cases} \tag{8}$$

ТЕМА III

ПЛАЗМЕННАЯ СРЕДА ВО ВНЕШНЕМ ПЕРЕМЕННОМ ВО ВРЕМЕНИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 3.1. Плазма в сверхвысокочастотном электрическом поле

Анализ темы начнем с изучения свойств плазмы в однородном в пространстве сверхвысокочастотном (СВЧ) электрическом поле. Вопросы взаимодействия СВЧ полей с плазмой, как отмечалось, связаны с рядом прикладных проблем физики плазмы. В первую очередь это СВЧ разряд в плазме, т.е. создание плазмы с помощью СВЧ полей. Сюда же относится нагрев плазмы посредством СВЧ полей для получения высокотемпературной плазмы в установках по управляемому термоядерному синтезу. Большой интерес для физиков-термоядерщиков представляет также идея удержания плазмы СВЧ полями. Наконец, в последнее время физиками интенсивно исследуется возможность ускорения плазменных сгустков с помощью радиационного давления СВЧ полей (либо полей мощного когерентного оптического излучения лазеров). Бурно развиваемая теория взаимодействия электромагнитных полей с плазмой охватывает все более широкий круг явлений. Достаточно полное изложение этой теории выходит за рамки настоящих лекций. Поэтому ограничимся здесь изложением общих основ теории взаимодействия электромагнитных полей с плазмой и опишем лишь те явления, которые на сегодняшний день считаются хорошо исследованными как теоретически, так и экспериментально.

Выше были найдены равновесные функции распределения заряженных частиц в пространственно однородной плазме во внешнем постоянном электрическом поле $\mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_0 = \mathrm{const}$ (см. формулы (2.1.2), (2.1.3)). В отличие от постоянного во времени электрического поля, в котором носители заряда могут неограниченно ускоряться, в высокочастотном электрическом поле даже в отсутствие столкновений они совершают финитные движения. Действительно, в высокочастотном электрическом поле $\mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_0 \sin\omega_0 t$ заряд e с массой m приобретает импульс

$$\mathbf{p}_0(t) = \frac{m\mathbf{u}_0(t)}{\sqrt{1 - \dfrac{u_0^2(t)}{c^2}}} = -\frac{e\mathbf{E}_0}{\omega_0}\cos\omega_0 t, \tag{3.1.1}$$

который осциллирует во времени, но остается всегда ограниченным по величине. Поэтому ограниченной является и направленная скорость, от которой зависит функция распределения носителей. Последняя при $\omega_0 \gg \nu$, где ν – частота столкновений носителей (обратное время релаксации импульса), находится как решение уравнения Власова

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + e\mathbf{E}_0 \sin\omega_0 t \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{3.1.2}$$

и дается в виде произвольной функции

$$f_0 = f_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t)). \tag{3.1.3}$$

В качестве $f_0(\mathbf{p})$, как обычно, будем брать распределение Максвелла, если носители не вырождены, либо распределение Ферми, если они вырождены.

Исследуем устойчивость этих распределений, рассмотрев малые отклонения от равновесия. Анализ устойчивости начнем с СВЧ полей, частота которых больше всех характерных частот плазмы:

$$\omega_0 \gg \omega_{L\alpha}, \Omega_\alpha, \nu_\alpha. \tag{3.1.4}$$

Плазму в таком СВЧ поле можно считать изотропной и оценить неоднородность поля с помощью дисперсионного уравнения для поперечных волн (см. первую часть лекций):

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2}} \approx \frac{\omega_0}{c}. \tag{3.1.5}$$

Величина $k_0^{-1} \simeq \dfrac{c}{\omega_0}$ характеризует неоднородность СВЧ поля, которой мы пренебрегли. Это означает, что СВЧ поле можно считать однородным лишь для таких процессов в плазме, характерные размеры неоднородности которых $1/k$ значительно меньше $1/k_0$, т.е. $k \gg \omega_0/c$. Это условие, которое далее всюду считается выполненным, позволяет при исследовании устойчивости плазмы в СВЧ поле ограничиться анализом квазипродольных (потенциальных) колебаний. Действительно, частоты колебаний порядка характерных частот плазмы, т.е. $\omega \sim \omega_{L\alpha}, \Omega_\alpha$. Учитывая (3.1.4) заключаем, что $\omega \ll \omega_0 \approx k_0 c \ll kc$. Это же неравенство представляет собой условие квазипродольности колебаний.

Поскольку действием высокочастотного электрического поля на ионы плазмы можно пренебречь (по сравнению с его действием на электроны), то функцию распределения ионов по скоростям можно считать равновесной (как правило, максвелловской), в то время как функция распределения электронов определяется формулой (3.1.3), в которой для простоты вычислений принимается, что $|u_0| = \dfrac{|p_0|}{m} = \dfrac{eE_0}{m\omega_0} \ll c$.

Линеаризуя кинетическое уравнение Власова для носителей зарядов по малым отклонениям от равновесных функций распределения, в случае бесстолкновительной плазмы во внешних параллельных СВЧ электрическом и постоянном магнитном полях получаем

$$\frac{\partial \delta f_e}{\partial t} + i\mathbf{kv}\delta f_e + \frac{e\mathbf{E}_0 \sin\omega_0 t}{m}\frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{v}} +$$

$$+ \frac{e}{m}[\mathbf{vB}_0]\frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e\mathbf{E}}{m}\frac{\partial f_{0e}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)}{\partial \mathbf{v}} = 0, \qquad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial \delta f_i}{\partial t} + i\mathbf{kv}\delta f_i + \frac{e_i}{M}[\mathbf{vB}_0]\frac{\partial \delta f_i}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_i\mathbf{E}}{M}\frac{\partial f_{0i}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Здесь $f_{0e}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)$ и $f_{0i}(\mathbf{p})$ – равновесные функции распределения электронов и ионов; δf_e и δf_i – их малые возмущения, зависимость которых от координат вследствие пространственной однородности плазмы принята в виде $\exp(-i\mathbf{kr})$; $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ – электрическое поле возмущений, удовлетворяющее уравнению Пуассона

$$k^2\Phi = 4\pi e\int d\mathbf{p}\delta f_e + 4\pi e_i\int d\mathbf{p}\delta f_i. \qquad (3.1.7)$$

Для решения системы (3.1.6) и (3.1.7) удобно ввести новую функцию

$$\Psi_e(\mathbf{p},t) = \exp\left(-i\frac{e}{m}\frac{\mathbf{kE}_0\sin\omega_0 t}{\omega_0^2}\right)\delta f_e\left(\mathbf{p} + \frac{e\mathbf{E}_0}{\omega_0}\cos\omega_0 t\right), \qquad (3.1.8)$$

в результате чего система сводится к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Psi_e}{\partial t}+i\mathbf{kv}\Psi_e-\Omega_e\frac{\partial\Psi_e}{\partial\varphi}-i\mathbf{k}\frac{\partial f_{0e}(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{v}}\frac{4\pi e}{mk^2}\left[e\int d\mathbf{p}\Psi_e(\mathbf{p})+\right.\\
&\qquad\left.+e_i\int d\mathbf{p}\delta f_i(\mathbf{p})\exp\left(-i\frac{e}{m}\frac{\mathbf{kE}_0}{\omega_0^2}\sin\omega_0 t\right)\right]=0,\\
&\frac{\partial\delta f_i}{\partial t}+i\mathbf{kv}\delta f_i-\Omega_i\frac{\partial\delta f_i}{\partial\varphi}-i\mathbf{k}\frac{\partial f_{0i}(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{v}}\frac{4\pi e_i}{Mk^2}\left[e_i\int d\mathbf{p}\delta f_i+\right.\\
&\qquad\left.+e\int d\mathbf{p}\Psi_e\exp\left(-i\frac{e}{m}\frac{\mathbf{kE}_0}{\omega_0^2}\sin\omega_0 t\right)\right]=0.
\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

Здесь $f_{0e}(\mathbf{p})$ и $f_{0i}(\mathbf{p})$ – изотропные равновесные функции распределения электронов и ионов в системе покоя этих частиц.

Воспользуемся далее разложением

$$e^{\pm i\mathbf{kr}_E\sin\omega_0 t}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}e^{\pm il\omega_0 t}J_l(\mathbf{kr}_E),$$

где $\mathbf{r}_E=\dfrac{e\mathbf{E}_0}{m\omega_0^2}$ – амплитуда осцилляций электронов во внешнем СВЧ электрическом поле, и учтем, что уравнения (3.1.9) образуют систему с периодическими коэффициентами. Последнее обстоятельство позволяет искать решение этой системы в виде

$$(\Psi_e,\delta f_i)=e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-in\omega_0 t}(\Psi_{en},\delta f_{in}).\tag{3.1.10}$$

В результате из системы (3.1.9) получаем

$$\begin{aligned}
&-i(\omega+n\omega_0)\Psi_{en}+i\mathbf{kv}\Psi_{en}-\Omega_e\frac{\partial\Psi_{en}}{\partial\varphi}-i\mathbf{k}\frac{\partial f_{0e}}{\partial\mathbf{v}}\frac{4\pi e}{mk^2}\times\\
&\qquad\times\left[e\int d\mathbf{p}\Psi_{en}+e_i\sum_l J_{l-n}(\mathbf{kr}_E)\int d\mathbf{p}\delta f_{il}\right]=0,\\
&-i(\omega+n\omega_0)\delta f_{in}+i\mathbf{kv}\delta f_{in}-\Omega_i\frac{\partial\delta f_{in}}{\partial\varphi}-i\mathbf{k}\frac{\partial f_{0i}}{\partial\mathbf{v}}\frac{4\pi e_i}{Mk^2}\times\\
&\qquad\times\left[e_i\int d\mathbf{p}\delta f_{in}+e\sum_l J_{n-l}(\mathbf{kr}_E)\int d\mathbf{p}\Psi_{en}\right]=0.
\end{aligned}\tag{3.1.11}$$

Введем обозначения

$$u_{en} = e\int d\mathbf{p}\Psi_{en}, \qquad u_{in} = e_i\int d\mathbf{p}\delta f_{in} \tag{3.1.12}$$

и запишем (3.1.11) в виде системы зацепляющихся уравнений, воспользовавшись формальным ее решением

$$\begin{aligned} u_{en} &= -\delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})\left[u_{en} + \sum_l J_{l-n}(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)u_{il}\right], \\ u_{in} &= -\delta\varepsilon_i(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})\left[u_{in} + \sum_l J_{n-l}(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)u_{el}\right]. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Здесь $\delta\varepsilon_e(\omega)$ и $\delta\varepsilon_i(\omega)$ – парциальные вклады в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы от электронов и ионов соответственно.

Условие разрешимости бесконечной системы зацепляющихся уравнений (3.1.13) представляет собой искомое дисперсионное уравнение для малых продольных (потенциальных) колебаний плазмы во внешнем СВЧ электрическом поле. В общем случае это определитель бесконечного порядка и проанализировать его невозможно. Однако в наиболее интересных предельных случаях этот определитель удается существенно упростить и найти спектр колебаний плазмы во внешнем СВЧ электрическом поле. Так, например, в пределе очень высоких частот, когда выполнены условия (3.1.4), все величины $\delta\varepsilon_{e,i}(n\omega_0 + \omega)$ с $n \neq 0$ малы по сравнению с единицей. Поэтому в системе (3.1.13) можно ограничиться слагаемыми, содержащими u_{e0} и u_{i0}, считая отличными от нуля только такие слагаемые. В результате из системы (3.1.13) получим

$$\begin{aligned} &[1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})]u_{e0} + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})J_0(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)u_{i0} = 0, \\ &[1 + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})]u_{i0} + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})J_0(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)u_{e0} = 0. \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Из требования существования нетривиальных решений этой системы получим искомое дисперсионное уравнение, которое записывается в виде

$$1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}) + \left(1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)\right)\delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}) = 0. \tag{3.1.15}$$

При выводе дисперсионного уравнения (3.1.15) полностью пренебрежено столкновениями частиц в плазме. Легко показать, однако, что это уравнение справедливо и при учете столкновений, если только скорость осцилляций частиц мала по сравнению со скоростью их теплового движения, и поэтому внешнее СВЧ поле не влияет на сам акт столкновений (т.е. на сечения рассеяния). Действительно, при учете столкновений частиц в системе уравнений (3.1.11) появляются правые части, обусловленные линеаризованными интегралами столкновений электронов и ионов. По своей структуре эти члены такие же как и в отсутствие СВЧ электрического поля. Это означает, что сохраняется вид решения этих уравнений, т.е. система (3.1.13), с той лишь разницей, что в выражениях $\delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0)$ и $\delta\varepsilon_i(\omega + n\omega_0)$ нужно учитывать столкновения частиц.

Приступая к анализу дисперсионного уравнения (3.1.15), рассмотрим прежде всего незамагниченную и невырожденную газовую плазму, когда $\delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})$ и $\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})$ определяются выражениями

$$\delta\varepsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2}\left[1 - J_+\left(\frac{\omega}{kv_{T\alpha}}\right)\right]. \tag{3.1.16}$$

В высокочастотном пределе $\omega \gg kv_{T\alpha}$ (предел холодной плазмы), пренебрегая экспоненциально малыми мнимыми слагаемыми, из (3.1.15) получаем

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2\omega_{Li}^2}{\omega^4}\left(1 - J_0^2(\mathbf{kr}_E)\right) = 0. \tag{3.1.17}$$

Отсюда находим спектры колебаний холодной плазмы во внешнем СВЧ поле:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2 J_0^2(\mathbf{kr}_E), \\ \omega_2^2 &= \omega_{Li}^2\left(1 - J_0^2(\mathbf{kr}_E)\right). \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Первый спектр (3.1.18) является спектром известных высокочастотных ленгмюровских колебаний, видоизмененным под действием внешнего СВЧ поля, при этом существенно, что это уже не просто электростатические ленгмюровские колебания холодной плазмы, а продольные волны в которых упругость среды обусловлена осцилляциями электронов в СВЧ поле. Второй спектр – новый, аналогичный спектру ионно-звуковых колебаний, в котором роль электронной температуры играет средняя энергия колебательного движения электронов в высокочастотном поле (рис. 3.1). Особенно явно это видно в длинноволновом пределе $\mathbf{kr}_E \ll 1$, когда

$$\omega_2^2 = \omega_{Li}^2\frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{2} = (\mathbf{kw}_s)^2. \tag{3.1.19}$$

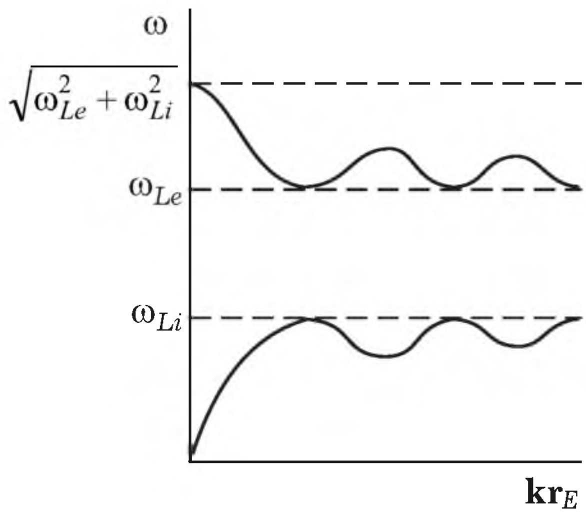

Рис. 3.1

Здесь $\mathbf{w}_s = \dfrac{\omega_{Li}}{\omega_0}\dfrac{\mathbf{v}_E}{\sqrt{2}}$ ($\mathbf{v}_E = \dfrac{e\mathbf{E}_0}{m\omega_0}$ – амплитуда скорости осцилляций электронов во внешнем поле).

Таким образом, можно говорить о существовании анизотропных электроплазменных и электрозвуковых колебаний в плазме, помещенной в СВЧ электрическое поле, причем роль скорости звука играет величина $w_s = |\mathbf{w}_s|$. Отметим, что такие колебания возможны только в достаточно сильных полях, когда $w_s \gg v_{Te}$, а следовательно, скорость осцилляций электронов $v_E \gg \dfrac{\omega_0}{\omega_{Li}} v_{Te} \gg \sqrt{\dfrac{M}{m}} v_{Te}$. Следует отметить также, что в коротковолновом пределе $\mathbf{kr}_E \gg 1$ частота ω_2, так же как и ω_1, осциллирует, причем ω_2 асимптотически стремится к ω_{Li}, а ω_1 – к ω_{Le}, как показано на рис. 3.1.

Рассмотрим теперь уравнение (3.1.15) в области частот $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$. В отсутствие внешнего высокочастотного поля в этой области частот, как известно, возможны колебания, если плазма неизотермическая и $T_e \gg T_i$ (ионный звук). При наличии СВЧ поля дисперсионное уравнение (3.1.15) в этой области частот записывается в виде

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}}\right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} - \\ - \left(1 - J_0^2(\mathbf{kr}_E)\right)\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}}\right) = 0. \quad (3.1.20)$$

Здесь пренебрежено экспоненциально малым ионным поглощением. Из этого уравнения находим следующий спектр ($\omega \to \omega + i\delta$):

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left[1 - \frac{J_0^2(\mathbf{kr}_E)}{1 + k^2 r_{De}^2}\right],$$
$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{k^3 v_{Te}^3} \frac{J_0^2(\mathbf{kr}_E)}{[1 + (kr_{De})^{-2}]^2}. \tag{3.1.21}$$

В пределе длинных волн $\mathbf{kr}_E \ll 1$ и $k^2 r_{De}^2 \ll 1$ спектр (3.1.21) принимает вид

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left[\frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{2} + k^2 r_{De}^2\right] = (\mathbf{kw}_s)^2 + k^2 v_s^2,$$
$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{m}{M}} k v_s. \tag{3.1.22}$$

Видно, что спектр ионно-звуковых колебаний при $v_s > w_s$ мало искажается высокочастотным полем и, так же как в отсутствие поля, возможен только в неизотермической плазме. При $w_s > v_s$ (или $v_E \gg v_{Te}$) в плазме оказывается возможным специфический звук, предсказанный в 1950г. В.Карпманом (известный под названием электрического звука), обусловленный высокочастотным полем. Спектр (3.1.22) в этом пределе представляет собой продолжение спектра (3.1.19) в область низких фазовых скоростей или меньших напряженностей высокочастотных полей. Отметим, что в этом пределе колебания возможны как в неизотермической, так и в изотермической плазме.

Исследуем теперь влияние внешнего магнитного поля на спектры колебаний плазмы в СВЧ электрическом поле. Иными словами, исследуем уравнение (3.1.15) в условиях, когда $\delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})$ и $\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})$ определяются формулами ($\alpha = e, i$)

$$\delta\varepsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[1 - \right.$$
$$\left. - \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\Omega_\alpha} A_n \left(\frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2}\right) J_+ \left(\frac{\omega - n\Omega_\alpha}{k_z v_{T\alpha}}\right)\right]. \tag{3.1.23}$$

При $k_\perp = 0$ и $\omega \gg \Omega_\alpha$ выражения (3.1.23) совпадают с (3.1.16), так как при этом пропадает зависимость от магнитного поля, т.е. в этих условиях спектры колебаний такие же как и в отсутствие магнитного поля. Поэтому рассмотрим колебания при $k_\perp \neq 0$. Анализ уравнения (3.1.15) начнем с приближения холодной плазмы, когда $k_\perp v_{T\alpha} \ll \Omega_\alpha$, $|\omega - \Omega_\alpha| \gg k_z v_{T\alpha}$ и оно записывается в виде

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2}{\omega^2}\frac{k_z^2}{k^2} - \left(\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} + \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2}\right)\frac{k_\perp^2}{k^2} + \\ + \left(1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)\right)\frac{\omega_{Le}^2\omega_{Li}^2}{\omega^4} \times \\ \times \left(\frac{k_z^2}{k^2} + \frac{k_\perp^2}{k^2}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}\right)\left(\frac{k_z^2}{k^2} + \frac{k_\perp^2}{k^2}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_i^2}\right) = 0. \quad (3.1.24)$$

В области частот $\omega \ll \Omega_i$ это уравнение сводится к биквадратному уравнению относительно ω, корни которого приближенно равны

$$\omega_1^2 = \omega_{Le}^2\frac{k_z^2}{k^2}\left[1 + \left(1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)\right)\frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2}\frac{k_\perp^2}{k^2}\right] \times \\ \times \left\{1 + \frac{k_\perp^2}{k^2}\frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2}\left[1 + \left(1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)\right)\frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2}\frac{k_\perp^2}{k^2}\right]\right\}^{-1}, \quad (3.1.25)$$

$$\omega_2^2 = \omega_{Li}^2\frac{k_z^2}{k^2}\left(1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)\right)\left[1 + \left(1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)\right)\frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2}\frac{k_\perp^2}{k^2}\right]^{-1}.$$

Первый спектр (3.1.25) в отсутствие высокочастотного электрического поля переходит в спектр низкочастотных колебаний холодной магнитоактивной плазмы; при слабых высокочастотных полях происходит небольшое искажение этого спектра. Второй спектр является новым, в отсутствие высокочастотного поля частота $\omega_2 = 0$, т.е. колебаний нет. По своей природе эти колебания аналогичны звуковым колебаниям с высокочастотной осцилляцией электронов, исследованным выше (см. спектры (3.1.18) и (3.1.19)), и, так же как и в случае незамагниченной плазмы, возможны, когда скорость осцилляций $v_E > \dfrac{\omega_0}{\omega_{Li}} v_{Te} \gg \sqrt{\dfrac{M}{m}} v_{Te}$.

Рассмотрим теперь спектры колебаний магнитоактивной плазмы в высокочастотном электрическом поле в области промежуточных фазовых скоростей $v_{Ti} \ll \dfrac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}$ и промежуточных частот $\Omega_i < \omega < \Omega_e$, т.е. в области, в которой в отсутствие высокочастотного поля и при сильной неизотермичности $T_e \gg T_i$ возможны ионно-звуковые колебания. Кроме того, пренебрегая для простоты тепловым движением ионов, из уравнения (3.1.15) получим

$$1+\frac{\omega_{Le}^2}{k^2v_{Te}^2}\left(1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{|k_z|v_{Te}}\right)-\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}-$$

$$-\left(1-J_0^2(\mathbf{kr}_E)\right)\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\frac{\omega_{Le}^2}{k^2v_{Te}^2}\left(1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{|k_z|v_{Te}}\right)=0. \quad (3.1.26)$$

Отсюда, учитывая малость мнимых слагаемых, обусловленных черепковской диссипацией волн на электронах плазмы, находим следующий спектр колебаний ($\omega \to \omega + i\delta$):

$$\omega^2=\omega_{Li}^2\left[1-\frac{J_0^2(\mathbf{kr}_E)}{1+k^2r_{De}^2}\right],$$

$$\delta=-\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_{Le}^2\omega_{Li}^2}{k^2|k_z|v_{Te}^3}\frac{J_0^2(\mathbf{kr}_E)}{[1+(kr_{De})^{-2}]^2}. \quad (3.1.27)$$

Этот спектр аналогичен спектру (3.1.21), поэтому проведенный анализ сохраняет силу и в данном случае. Небольшое отличие обусловлено изменением характера черепковского поглощения волн на электронах, что привело к увеличению декремента затухания волн в замагниченной плазме.

В заключение рассмотрим продольные колебания вырожденной плазмы в СВЧ электрическом поле. Ограничимся случаем незамагниченной плазмы. В высокочастотном пределе $\omega \gg kv_{Fe,i}$, когда тепловым движением можно пренебречь, степень вырождения несущественна и справедливы формулы (3.1.17)–(3.1.19). В области же промежуточных частот $kv_{Fi} \ll \omega \ll kv_{Fe}$ из уравнения (3.1.15) при использовании выражения (3.1.18) получаем

$$1+3\frac{\omega_{Le}^2}{k^2v_{Fe}^2}\left(1+i\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{kv_{Fe}}\right)-\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}-$$

$$-\left(1-J_0^2(\mathbf{kr}_E)\right)\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\frac{\omega_{Le}^2}{k^2v_{Fe}^2}\left(1+i\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{kv_{Fe}}\right)=0. \quad (3.1.28)$$

Это уравнение подобно (3.1.20) и приводит к спектру колебаний, подобному (3.1.21):

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left[1 - \frac{J_0^2(\mathbf{kr}_E)}{1 + k^2 v_{Fe}^2/3\omega_{Le}^2}\right],$$
$$\delta = -\frac{3\pi}{4}\frac{\omega_{Le}^2\omega_{Li}^2}{k^3 v_{Fe}^3}\frac{J_0^2(\mathbf{kr}_E)}{\left[1 + \left(k^2 v_{Fe}^2/3\omega_{Le}^2\right)^{-2}\right]^2}. \tag{3.1.29}$$

Отсюда, в частности, следует, что в вырожденной плазме, так же как и в невырожденной, возможны специфические электрозвуковые волны, обусловленные высокочастотным электрическим полем. Так, в пределе $k^2 v_{Fe}^2 \ll \omega_{Le}^2$ и $\mathbf{kr}_E \ll 1$ имеем (ср. с (3.1.22))

$$\omega^2 = (\mathbf{kw}_s)^2 + k^2 v_s^2,$$
$$\delta = -\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{1}{3\sqrt{3}}kv_s, \tag{3.1.30}$$

где $v_s^2 = \dfrac{m}{3M}v_{Fe}^2$, а $\mathbf{w}_s = \dfrac{\omega_{Li}}{\omega_0}\dfrac{\mathbf{v}_E}{\sqrt{2}}$. Для реального проявления такого звука, однако, необходимо, чтобы $v_E \gtrsim v_{Fe}$.

§ 3.2. Параметрическое воздействие сверхвысокочастотного электрического поля на плазму

Как было показано в предыдущем параграфе, в плазме во внешнем СВЧ (сверхвысокочастотном, или просто высокочастотном) электрическом поле в условиях, когда частота поля значительно больше всех характерных частот колебаний плазмы, появляется ряд новых специфических спектров колебаний, а также искажаются спектры, характерные для плазмы в отсутствие высокочастотного поля. Существенно при этом, что эти колебания являются устойчивыми, т.е. их амплитуды не нарастают во времени. Иное положение имеет место, если частота внешнего поля близка к одной из собственных частот колебаний плазмы. В этом случае происходит сильное параметрическое взаимодействие высокочастотного поля с плазмой и даже при малых значениях поля возможно появление в плазме новых типов собственных колебаний, некоторые из которых могут оказаться нарастающими во времени.

Чтобы убедиться в сказанном, вновь вернемся к системе уравнений (3.1.13) и предположим, что частота внешнего поля ω_0 порядка электронных собственных частот плазмы и тем самым намного больше ионных частот. Например, для незамагниченной плазмы $\omega_0 \approx \omega_{Le}$ и, следовательно, $\omega_0 \gg \omega_{Li}$. При этом в системе (3.1.13) малыми являются величины $\delta\varepsilon_i(\omega + n\omega_0)$ для всех $n \neq 0$. Это позволяет считать отличной от нуля лишь величину u_{i0} и условие разрешимости системы записать в виде

$$\frac{\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E) \frac{\delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})} = 1. \tag{3.2.1}$$

Отсюда, в частности, при $\omega_0 \gg \omega_{Le}$, когда в сумме по n можно ограничиться лишь вкладом слагаемого с $n = 0$, снова получаем уравнение (3.1.15).

Проанализируем уравнение (3.2.1) в пределе холодной плазмы, когда $\omega \gg kv_{Ti}$, а $(\omega + n\omega_0) \gg kv_{Te}$ и пространственной дисперсией в парциальных диэлектрических проницаемостях $\delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})$ и $\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})$ можно пренебречь. Кроме того, для простоты плазму будем считать бесстолкновительной, а ионы – незамагниченными, что позволяет переписать уравнение (3.2.1) в виде

$$\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} = 1 - \sum_n J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E) \frac{\delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0)}. \tag{3.2.2}$$

Отсюда сразу видно, что гидродинамически неустойчивые решения с $\omega^2 < 0$ возможны только в области частот $\omega_0 \gg |\omega|$ и в условиях, когда для $n \neq 0$

$$|1 + \delta\varepsilon_e(n\omega_0)| \ll 1. \tag{3.2.3}$$

Это означает, что сильная неустойчивость может возникнуть, если частота внешнего СВЧ электрического поля либо ее обертоны близки к собственным частотам продольных электронных колебаний плазмы – отсюда и название "параметрическая неустойчивость". Полагая в правой части $\omega = 0$, из уравнения (3.2.2) в первом приближении находим

$$\omega^2 = \frac{2J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)\omega_{Li}^2}{1 + \delta\varepsilon_e(n\omega_0)}. \tag{3.2.4}$$

В отсутствие сильного внешнего магнитного поля (при $\omega_0 \gg \Omega_e$) из

(3.2.4) получаем

$$\frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} = \frac{m}{M} \frac{2J_n^2(\mathbf{kr}_E)}{1 - \dfrac{\omega_{Le}^2}{n^2\omega_0^2}}. \tag{3.2.5}$$

Видно, что плазма неустойчива ($\omega^2 < 0$) в области непропускания:

$$n^2\omega_0^2 \leqslant \omega_{Le}^2. \tag{3.2.6}$$

При выполнении равенства (3.2.6) инкремент нарастания неустойчивости неограниченно возрастает, и формула (3.2.5) теряет смысл. В этом резонансном случае в правой части уравнения (3.2.2) уже нельзя полагать $\omega = 0$, необходимо учесть члены порядка $\omega^2/n^2\omega_0^2$. Рассмотрим эту область частот СВЧ поля подробнее. Из (3.2.2) следует уравнение

$$\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} = 1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\mathbf{kr}_E) \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Le}^2 - (n\omega_0 + \omega)^2}, \tag{3.2.7}$$

которое в условиях

$$\omega^2 \gg \omega_{Li}^2, \qquad 1 \gg |\Delta_n| \equiv \left| \frac{\omega_{Le}^2}{n^2\omega_0^2} - 1 \right| \gg \sqrt{\frac{m}{M}} \tag{3.2.8}$$

записывается в виде

$$4\frac{\omega^4}{\omega_{Le}^4} - \frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2}\Delta_n^2 - 2J_n^2(\mathbf{kr}_E)\frac{m}{M}\Delta_n = 0. \tag{3.2.9}$$

Величину Δ_n называют расстройкой частоты при резонансном параметрическом взаимодействии СВЧ поля с плазмой. Согласно (3.2.9) инкремент нарастания колебаний $\operatorname{Im}\omega$ является функцией Δ_n. При больших расстройках, когда

$$\Delta_n^2 \gg \frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} = -\frac{2\dfrac{m}{M}J_n^2(\mathbf{kr}_E)}{\Delta_n}, \tag{3.2.10}$$

справедливо решение (3.2.5) и инкремент нарастания $\operatorname{Im}\omega \sim \left(\dfrac{m}{M}\right)^{1/2} \omega_{Le}$. С уменьшением расстройки инкремент возрастает и при условии

$$\frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2}\Delta_n + \frac{m}{M}J_n^2(\mathbf{kr}_E) = 0 \tag{3.2.11}$$

достигает максимума:

$$\frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} = -\left[\frac{1}{2}\frac{m}{M}J_n^2(\mathbf{kr}_E)\right]^{2/3}. \tag{3.2.12}$$

Таким образом, максимальный инкремент нарастания $\mathrm{Im}\,\omega \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}\omega_{Le}$ также достигается в области непрозрачности плазмы $\Delta_n > 0$ (т.е. $n\omega_0 < \omega_{Le}$), причем резонансная расстройка

$$\Delta_{n\,\max} \approx \left[4\frac{m}{M}J_n^2(\mathbf{kr}_E)\right]^{1/3}. \tag{3.2.13}$$

Не следует думать, что неустойчивость имеет место только в области непрозрачности плазмы по отношению к СВЧ полю; плазма неустойчива и в области прозрачности $n\omega_0 > \omega_{Le}$. Однако, при этом неустойчивость становится кинетической с малым инкрементом нарастания (см. задачу 2 по этой теме). На рис 3.2 показана зависимость инкремента нарастания гидродинамической параметрической неустойчивости в незамагниченной плазме от отношения ω_0/ω_{Le}.

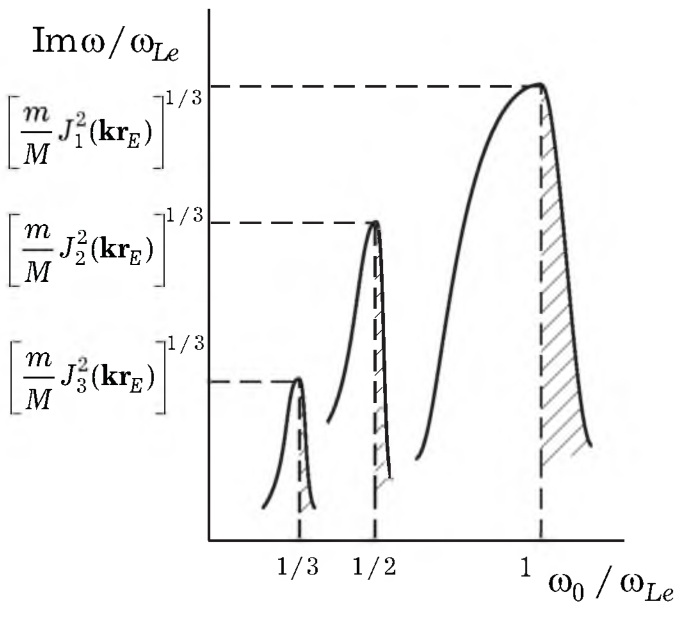

Рис. 3.2

Внешнее продольное (параллельное СВЧ электрическому полю) магнитное поле не влияет на рассмотренную неустойчивость, пока оно слабое и $\Omega_e < \omega_0$. В сильных же полях при $\Omega_e > \omega_0$ появляются качественно новые особенности в характере параметрического взаимодействия внешнего СВЧ поля с плазмой. Эти особенности связаны с существованием двух ветвей электронных продольных колебаний магнитоактивной плазмы на так называемых верхней и нижней гибридных частотах

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2\right)^2 - 4\omega_{Le}^2\Omega_e^2\cos^2\theta}, \qquad (3.2.14)$$

где θ – угол между волновым вектором колебаний и магнитным полем.

Параметрическая неустойчивость в магнитоактивной плазме возникает, когда обертоны частоты СВЧ поля близки к одной из собственных частот (3.2.14), т.е.

$$n^2\omega_0^2 \approx \omega_\alpha^2 \qquad (3.2.15)$$

для $\alpha = 1, 2$. Анализ параметрической неустойчивости в магнитоактивной плазме проводится так же, как и в отсутствие магнитного поля. Более того, вводя расстройку частоты вблизи резонансных частот (3.2.15) для $\alpha = 1, 2$:

$$\Delta_{n\alpha} = \cos^2\theta\frac{\omega_{Le}^2}{n^2\omega_0^2 - \Omega_e^2} + \sin^2\theta\frac{\omega_{Le}^2}{n^2\omega_0^2} - 1, \qquad (3.2.16)$$

уравнение (3.2.2) в условиях (3.2.8) можно записать в виде

$$A_\alpha^2\frac{\omega^4}{\omega_{Le}^4} - \frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2}\Delta_{n\alpha}^2 - 2J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)\frac{m}{M}\Delta_{n\alpha} = 0, \qquad (3.2.17)$$

где

$$A_\alpha = -\frac{\partial\Delta_{n\alpha}}{\partial n\omega_0} = -\frac{\partial\delta\varepsilon_e(n\omega_0)}{\partial n\omega_0}. \qquad (3.2.18)$$

Уравнение (3.2.17) аналогично (3.2.9) и при больших расстройках, когда

$$A_\alpha^{-2}\Delta_{n\alpha}^2 \gg \frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} = \frac{2\dfrac{m}{M}J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)}{\Delta_n}, \qquad (3.2.19)$$

также приводит к появлению инкремента нарастания колебаний $\operatorname{Im}\omega \sim \left(\dfrac{m}{M}\right)^{1/2}\omega_{Le}$. С уменьшением расстройки инкремент возрастает и при условии

$$\Delta_{n\alpha\max} \approx \left(A_\alpha^2\frac{m}{M}J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)\right)^{1/3} \qquad (3.2.20)$$

достигает максимума:

$$\frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} = -\left(\frac{1}{|A_\alpha|}\frac{m}{M}J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)\right)^{2/3}, \qquad (3.2.21)$$

т.е. $\operatorname{Im}\omega \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}\omega_{Le}$.

В пределе слабого магнитного поля, $\mathbf{B} \to 0$, две собственные частоты ω_α вырождаются в одну частоту ω_{Le}, величина $A_\alpha \to 2$ и формулы (3.2.15)–(3.2.21) переходят в (3.2.6)–(3.2.12). Не меняется характер параметрического взаимодействия сильного СВЧ поля с плазмой и в случае конечного магнитного поля, если $\theta = 0$, т.е. для колебаний, распространяющихся строго вдоль магнитного поля. Наконец, в пределе очень сильного магнитного поля, $\mathbf{B} \to \infty$, формулы (3.2.15)–(3.2.21) отличаются от (3.2.6)–(3.2.12) простой заменой $\omega_{Le} \to \omega_{Le}\cos\theta$, а в остальном взаимодействие СВЧ поля с плазмой носит такой же характер, как и в отсутствие магнитного поля.

В заключение заметим, что параметрическая неустойчивость плазмы в СВЧ поле по своей природе аналогична гидродинамической апериодической неустойчивости плазмы в постоянном электрическом поле в условиях, когда скорость дрейфа электронов больше их тепловой скорости. Параметрическая неустойчивость также обусловлена относительным движением электронов и ионов, но это движение носит осцилляционный характер, что, в свою очередь, приводит к резонансной зависимости инкрементов нарастания неустойчивости от частоты СВЧ поля – неустойчивость имеет место, когда обертоны частоты СВЧ поля близки к собственным частотам продольных электронных колебаний плазмы. Наконец, так же как гидродинамическая неустойчивость плазмы с током, параметрическая неустойчивость возможна только в сильных СВЧ полях, когда скорость дрейфа (осцилляций) электронов больше их тепловой скорости, т.е. $v_E \gg v_{Te}$.

Параметрическая раскачка колебаний в плазме внешним сверхвысокочастотным полем может, однако, происходить и при малых напряженностях СВЧ поля, когда скорость осцилляций электронов значительно меньше их тепловой скорости. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение (3.2.1) в условиях малых напряженностей СВЧ полей, когда $\mathbf{kr}_E \ll 1$. При этом в сумме по функциям Бесселя достаточно ограничиться первыми тремя слагаемыми с $n = 0, \pm 1$. В результате уравнение (3.2.1) сводится к виду

$$\frac{1+\delta\varepsilon_i(\omega,\mathbf{k})+\delta\varepsilon_e(\omega,\mathbf{k})}{\delta\varepsilon_i(\omega,\mathbf{k})\left[1+\delta\varepsilon_e(\omega,\mathbf{k})\right]} + \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{4}\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega+\omega_0,\mathbf{k})} + \frac{1}{\varepsilon(\omega-\omega_0,\mathbf{k})}\right] = 0. \tag{3.2.22}$$

При выводе этого уравнения предполагалось, что $\omega_{Li} \ll \omega_0$, а ω_0, в свою очередь, порядка собственных частот продольных электронных колебаний, так что $\varepsilon(\omega \pm \omega_0) \approx 1 + \delta\varepsilon_e(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k}) \ll 1$. Анализ уравнения (3.2.22) начнем с бесстолкновительной незамагниченной плазмы во внешнем СВЧ поле, причем рассмотрим колебания в области низких частот $\omega \ll kv_{Ti}$. Считая, что длина волны значительно больше дебаевского радиуса электронов, из уравнения (3.2.22) получаем

$$\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_{Li}^2}\left(1 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Ti}}\right) + \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{Le}^2}\left(1 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\mathbf{k}\mathbf{r}_E\right)\frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)}{(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2 - 4\omega_0^2\omega^2} = 0. \quad (3.2.23)$$

Учитывая малость мнимого слагаемого в уравнении (3.2.23), обусловленного черепковской диссипацией волны на электронах плазмы, это уравнение можно свести к виду

$$\omega_0^2\Delta^2 - 4\omega^2 - \eta\omega_0^2\Delta\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Ti}}\frac{T_i}{T_e + T_i}\right) = 0. \quad (3.2.24)$$

Здесь $\eta = \dfrac{E_0^2\cos^2\theta}{8\pi N(T_e + T_i)}$ характеризует отношение плотностей энергии СВЧ поля, вызывающего развитие неустойчивости, и внутренней энергии плазмы (θ – угол между внешним высокочастотным полем и волновым вектором); $\Delta = \omega_{Le}^2/\omega_0^2 - 1$ – расстройка частоты СВЧ поля. Выпишем приближенные корни этого уравнения в области малых частот (инкрементов):

$$\omega = \begin{cases} i\dfrac{\eta - \Delta}{\eta} kv_{Ti}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{T_e + T_i}{T_i} & \text{при} \quad \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll \Delta^2 - \eta\Delta, \\[2ex] \pm\sqrt{\dfrac{\Delta^2 - \eta\Delta}{4}}\,\omega_0 & \text{при} \quad \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} \approx \dfrac{\Delta^2 - \eta\Delta}{4}. \end{cases} \quad (3.2.25)$$

Отсюда видно, что рассматриваемые колебания возможны только при $\Delta > 0$, т.е. в области частот $\omega_0^2 < \omega_{Le}^2$, когда плазма непрозрачна по отношению к высокочастотному полю. При этом колебания апериодически неустойчивы, если $\eta \gtrsim \Delta$, и чем меньше расстройка Δ, тем меньше минимально необходимое для развития неустойчивости значение η, т.е. тем меньше критическое высокочастотное поле, вызывающее параметрическую неустойчивость плазмы. Из условия применимости бесстолкновительного приближения (условия пренебрежения столкновениями в выражениях $\delta\varepsilon(\omega \pm \omega_0)$) следует, что $|\Delta| > \nu_e/\omega$, где ν_e – частота столкновений электронов с ионами, либо с нейтральными частицами. Следовательно, для развития апериодической неустойчивости необходимо, чтобы

$$\eta = \frac{E_0^2 \cos^2\theta}{8\pi N(T_e + T_i)} > 4\frac{\nu_e}{\omega_0} \ll 1 \qquad (3.2.26)$$

(численный коэффициент 4 находится при более точном учете столкновений частиц, см. задачу 3 по этой теме). Отношение скорости высокочастотных осцилляций электронов к их тепловой скорости при этом является малой величиной, $v_E^2/v_{Te}^2 \sim \eta \ll 1$.

При еще меньших напряженностях СВЧ полей возникает параметрическая неустойчивость в неизтермической плазме с $T_e \gg T_i$, в которой возможно существование ионно-звуковых колебаний. Именно их и возбуждает высокочастотное электрическое поле. В области частот ионно-звуковых колебаний $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$ при $k^2v_{Te}^2 \ll \omega_{Le}^2$ уравнение (3.2.22) принимает вид

$$-\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} = \frac{k^2v_{Te}^2}{\omega_{Le}^2}\left(1 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}}\right) - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)^2}{2}\frac{\Delta}{\Delta^2 - 4\omega^2/\omega_0^2} = 0. \qquad (3.2.27)$$

Существенно, что ионно-звуковые колебания могут параметрически возбуждаться в области прозрачности плазмы по отношению к СВЧ полю, когда $\Delta < 0$ (т.е. $\omega_0^2 > \omega_{Le}^2$). Действительно, при резонансном условии

$$\omega^2 = k^2v_s^2 = (\omega_0 - \omega_{Le})^2 \qquad (3.2.28)$$

или

$$\omega = \omega_{Le} + kv_s, \qquad (3.2.29)$$

т.е. когда частота СВЧ поля равна сумме электронной ленгмюровской частоты и частоты ионно-звуковых колебаний, из уравнения (3.2.27) находим инкремент нарастания параметрической неустойчивости ($\omega \to \omega + i\delta$):

$$\delta = \frac{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2}{16\omega^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)^2}{k^2r_{De}^2}kv_{Te}. \qquad (3.2.30)$$

Видно, что неустойчивость имеет место в области прозрачности плазмы при $\omega_0^2 > \omega_{Le}^2$. Из условия пренебрежения столкновениями электронов в диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k})$ при этом следует, что

$\mathrm{Im}\,\omega = \delta > \nu_e$, или

$$\eta = \frac{E_0^2 \cos^2\theta}{8\pi N T_e} > \sqrt{8\pi\frac{m}{M}}\frac{\nu_e}{\omega_0}.$$

Легко видеть, что порог, определяемый этим неравенством значительно ниже, чем даваемый соотношением (3.2.26).

Исследуем влияние внешнего продольного магнитного поля на параметрические неустойчивости плазмы в слабом СВЧ поле. Прежде всего отметим еще раз, что для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, т.е. при $\theta = 0$, полученные формулы (3.2.23), (3.2.30) справедливы и для магнитоактивной плазмы. Для волн же, распространяющуюся под углом θ к магнитному полю, как и в случае апериодической параметрической неустойчивости в сильном СВЧ поле, появляется возможность параметрического взаимодействия СВЧ поля с плазмой на верхней и нижней электронных гибридных частотах (ср. с (3.2.15)):

$$\omega_0^2 \approx \omega_\alpha^2, \tag{3.2.31}$$

где частоты ω_α для $\alpha = 1, 2$ определены соотношением (3.2.14).

Подробного анализа параметрических неустойчивостей магнитоактивной плазмы в слабом СВЧ поле здесь проводить мы не будем (см. задачу 4 по данной теме). Отметим лишь, что на обеих ветвях электронных колебаний возможны как апериодическая, так и ионно-звуковая (в случае неизотермической плазмы с $T_e \gg T_i$) параметрические неустойчивости, причем инкремент их нарастания и пороги возбуждения по порядку величины такие же, как и в отсутствие магнитного поля.

Наконец, кратко обсудим возможность проявления параметрической неустойчивости в вырожденной плазме твердого тела. Для простоты будем считать электроны плазмы вырожденными, а ионы – невырожденными. Так как в вырожденной плазме трудно осуществить скорость осцилляций электронов больше скорости Ферми, ограничимся рассмотрением параметрического взаимодействия слабого СВЧ поля с плазмой, считая скорость осцилляций малой. Иными словами, ограничимся анализом уравнения (3.2.22) для вырожденной незамагниченной плазмы. Поскольку в плазме с вырожденными электронами $\mathcal{E}_{Fe} \gg T_e \gtrsim T_i$, в ней всегда возможны низкочастотные ионно-звуковые колебания. Поэтому наименьшим порогом обладает параметрическая неустойчивость, обусловленная возбуждением таких колебаний в области частот $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Fe}$. Если к тому же считать $k^2 v_{Fe}^2 \ll \omega_{Le}^2$, то в области параметрического резонанса $\omega_0 \approx \omega_{Le} \gg \omega$ из (3.2.22) получаем

$$-\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} + \frac{k^2 v_{Fe}^2}{\omega_{Le}^2}\left(1 - i\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{kv_{Fe}}\right) - \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{2}\frac{\Delta}{\Delta^2 - 4\omega^2/\omega_0^2} = 0, \qquad (3.2.32)$$

где также $\Delta = \omega_{Le}^2/\omega_0^2 - 1$, причем при выводе этого уравнения предполагалось, что $\Delta \gg \nu_e/\omega_0$ и $\mathrm{Im}\,\omega \gg \nu_e$. Уравнение (3.2.32) имеет такой же вид, как и (3.2.27). Поэтому, вводя $v_s^2 = 3\dfrac{m}{M}v_{Fe}^2$, имеем такие же условия резонанса, как и для невырожденной плазмы, т.е. (3.2.28). По существу не меняются инкремент нарастания параметрической неустойчивости (ср. с (3.2.30) и далее)

$$\delta = \frac{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2}{24\pi\omega^2}\frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{k^2 r_{De}^2} k v_{Fe} \qquad (3.2.33)$$

и порог ее возникновения

$$\eta = \frac{E_0^2 \cos^2\theta}{8\pi N \mathcal{E}_{Fe}} > \frac{3}{4}\frac{\nu_e}{\omega_0}, \qquad (3.2.34)$$

где ν_e – эффективная частота столкновений электронов (обратное время релаксации импульса) в вырожденной твердотельной плазме.

В заключение отметим, что явление параметрической неустойчивости плазмы впервые было обнаружено в 1963г. в лаборатории физики плазмы ФИАН при попытке реализации идеи В.И.Векслера об ускорении плазменных сгустков сильными СВЧ полями. Вместо явления ускорения в сильных полях наблюдалось интенсивное поглощение падающего электромагнитного излучения при превышении интенсивности излучения некоторого порога. Впоследствии это явление подробно изучалось как в ФИАН, так и других академических институтах России (ИОФАН, ИПФАН) и на физическом факультете МГУ. Этими исследованиями были не только качественно, но и количественно подтверждены все изложеные выше теоретические представления.

Особо следует упомянуть об использовании явления параметрической неустойчивости в термоядерных исследованиях: нагрев магнитоактивной плазмы СВЧ полями с возбуждением нижнегибридных волн (ИПФАН, ИАЭ им. И.В.Курчатова) и нагрев плазмы мощным лазерным излучением с возбуждением ионно-звуковой турбулентности (ФИАН).

§ 3.3. Устойчивость плазменной среды в поле сильной электромагнитной волны

Рассмотрим изотропную плазменную среду в поле заданной монохроматической волны, которую будем также называть волной накачки,

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\cos(\omega_0 t-\mathbf{k}_0\mathbf{r}),$$
$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{k}_0\mathbf{E}_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t-\mathbf{k}_0\mathbf{r}). \tag{3.3.1}$$

Функцию распределения электронов в поле этой волны найдем из решения уравнения Власова

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}}+e\left\{\mathbf{E}_0+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\mathbf{B}_0\right]\right\}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}=0. \tag{3.3.2}$$

Распределение ионов по скоростям считаем максвелловским, поскольку действием поля накачки на ионы пренебрегается. Уравнение (3.3.2) решаем методом последовательных приближений, разлагая $f_0(\mathbf{p},\mathbf{r},t)$ по степеням поля $\mathbf{E}_0$:

$$f_0(\mathbf{p},\mathbf{r},t)=f_0(\mathbf{p})+\Delta f_0(\mathbf{p})-\\ -\frac{e\alpha_{ij}(\omega_0,\mathbf{k}_0,\mathbf{v})}{\omega_0-\mathbf{k}_0\mathbf{v}}E_{0j}\frac{\partial f_0(\mathbf{p})}{\partial p_j}\sin(\omega_0 t-\mathbf{k}_0\mathbf{r}), \tag{3.3.3}$$

где $f_0(\mathbf{p})$ – распределение Максвелла либо Ферми, а

$$\Delta f_0(\mathbf{p})=\frac{e^2}{4\omega_0}E_{0j}E_{0\mu}\left[\frac{\partial}{\partial p_\mu}\left(\frac{\alpha_{ij}(\omega_0,\mathbf{k}_0,\mathbf{v})}{\omega_0-\mathbf{k}_0\mathbf{v}}\frac{\partial f_0(\mathbf{p})}{\partial p_i}\right)+\right.\\ \left.+\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\alpha_{ij}(\omega_0,\mathbf{k}_0,\mathbf{v})}{(\omega_0-\mathbf{k}_0\mathbf{v})^2}k_{0\nu}v_\mu\frac{\partial f_0(\mathbf{p})}{\partial p_\nu}\right)\right], \tag{3.3.4}$$

$$\alpha_{ij}(\omega,\mathbf{k},\mathbf{v})=\frac{1}{\omega}\left[k_i v_j+\delta_{ij}(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})\right]. \tag{3.3.5}$$

Функция (3.3.3) определяет хорошо известную нам диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon^l(\omega_0,k_0)=1+\sum_\alpha\frac{\omega_{L\alpha}^2}{k_0^2v_{T\alpha}^2}\left[1-J_+\left(\frac{\omega_0}{k_0v_{T\alpha}}\right)\right],$$
$$\varepsilon^{tr}(\omega_0,k_0)=1-\sum_\alpha\frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega_0^2}J_+\left(\frac{\omega_0}{k_0v_{T\alpha}}\right), \tag{3.3.6}$$

которая и завершает определение равновесия плазмы в поле электромагнитной волны (3.3.1), устанавливая связь между ω_0 и $\mathbf{k}_0$:

$$\varepsilon^l(\omega_0, k_0) = 0, \qquad k_0^2 c^2 - \omega_0^2 \varepsilon^{tr}(\omega_0, k_0) = 0. \tag{3.3.7}$$

Теперь мы можем исследовать устойчивость рассмотренного равновесного состояния. Запишем для этого уравнение Власова для малого отклонения δf:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} + e\frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{v})}{E_{0j}}\frac{\partial \delta f}{\partial p_i}\cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0\mathbf{r}) +$$
$$+ e\left\{\delta\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\delta\mathbf{B}\right]\right\}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0. \tag{3.3.8}$$

Это – уравнение с периодическими коэффициентами и для его решения представим все величины (в том числе $\delta\mathbf{E}$ и $\delta\mathbf{B}$, которые находятся из уравнения Максвелла) в виде

$$A(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n(\omega + n\omega_0, \mathbf{k} + n\mathbf{k}_0) \times$$
$$\times \exp\left[i(\mathbf{k} + n\mathbf{k}_0)\mathbf{r} - i(\omega + n\omega_0)t\right]. \tag{3.3.9}$$

В результате получим

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) + i\frac{e}{2}\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{v})E_{0j} \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\delta f(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{p}) + \delta f(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{p})\right] +$$
$$+ ie\alpha_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v})\delta E_j(\omega, \mathbf{k})\frac{\partial}{\partial p_i}\left[f_0(\mathbf{p}) - \Delta f_0(\mathbf{p})\right] -$$
$$- \frac{e^2}{2}\left[\alpha_{\mu l}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{v})\delta E_l(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) -\right.$$
$$\left. - \alpha_{\mu l}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{v})\delta E_l(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\right] \times$$
$$\times E_{0j}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\left(\frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{v})}{\omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}}\frac{\partial f_0(\mathbf{p})}{\partial p_i}\right) = 0. \tag{3.3.10}$$

Соотношение (3.3.10) связывает гармонику $(\omega, \mathbf{k})$ с $(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)$ и представляет собой систему зацепляющихся уравнений. Эту систему легко решить, если поле E_0 считать слабым и ограничиться нахождением $\delta f(\omega, \mathbf{k})$ с точностью до членов порядка $\sim E_0^2$. Опуская эти громоздкие выкладки, сразу приведем выражение для тока $\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})$ в этом приближении:

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi \sum e^2 \int d\mathbf{p} v_i \delta f(\omega, \mathbf{k}) =$$

$$= -\frac{i\omega}{4\pi} \{[\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + \Delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij}]\, \delta E_j(\omega, \mathbf{k}) +$$

$$+ \frac{1}{2} E_{0j} \left[S_{ilj}(\omega, \mathbf{k}, \omega_0, \mathbf{k}_0) \delta E_l(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \right.$$

$$\left. + S_{ilj}(\omega, \mathbf{k}, \omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \delta E_l(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0)\right] +$$

$$+ \frac{1}{4} E_{0s} E_{0j} \delta E_l(\omega, \mathbf{k}) \left[V_{islk}(\omega, \mathbf{k}, \omega_0, \mathbf{k}_0) + \right.$$

$$\left. + V_{islk}(\omega, \mathbf{k}, -\omega_0, -\mathbf{k}_0)\right]\} . \quad (3.3.11)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi \sum \frac{e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_i \alpha_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial \Delta f_0}{\partial p_i},$$

$$S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') = \varepsilon_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') + \varepsilon_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.3.12)$$

$$V_{ij\mu\nu}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') = \varepsilon_{ij\mu\nu}(\omega, \mathbf{k}, \omega + \omega', \mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega', \mathbf{k}') +$$

$$+ \varepsilon_{ij\nu\mu}(\omega, \mathbf{k}, \omega + \omega', \mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega', \mathbf{k}').$$

Многоиндексные тензоры диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij_1 \ldots j_n}(\omega, \mathbf{k}, \omega_1, \mathbf{k}_1, \ldots, \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1})$, играющие важную роль во всей нелинейной электродинамике плазмы, определены соотношением

$$\varepsilon_{ij_1 \ldots j_n}(\omega, \mathbf{k}, \omega_1, \mathbf{k}_1, \ldots, \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) =$$

$$= \delta_{ij_1} - \frac{4\pi(-ie)^{n+1}}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_i \alpha_{ij_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial p_{1l}} \frac{\alpha_{sj_2}(\omega_1 - \omega_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial p_{2s}} \ldots$$

$$\ldots \frac{\alpha_{kj_{n-1}}(\omega_{n-1} - \omega_n, \mathbf{k}_{n-1} - \mathbf{k}_n)}{\omega_{n-1} - \mathbf{k}_{n-1}\mathbf{v}} \frac{\partial f_0(\mathbf{p})}{\partial p_{nk}}. \quad (3.3.13)$$

Подставляя (3.3.11) в уравнения Максвелла, получим следующую систему зацепляющихся уравнений:

$$T_{ij}(\omega,\mathbf{k})\delta E_j(\omega,\mathbf{k}) =$$

$$= \frac{1}{2}E_{0j}\left[S_{ijl}(\omega,\mathbf{k},-\omega_0,-\mathbf{k}_0)\delta E_l(\omega+\omega_0,\mathbf{k}+\mathbf{k}_0) +\right.$$

$$\left. + S_{ijl}(\omega,\mathbf{k},\omega_0,\mathbf{k}_0)\delta E_l(\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\right], \quad (3.3.14)$$

где

$$T_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) + \Delta\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}E_{0s}E_{0l}\left[V_{islj}(\omega,\mathbf{k},\omega_0,\mathbf{k}_0) + V_{islj}(\omega,\mathbf{k},-\omega_0,-\mathbf{k}_0)\right]. \quad (3.3.15)$$

Систему (3.3.14) также следует решать с точностью до членов $\sim E_0^2$. В этом приближении получаем условие совместимости этой системы, представляющее собой дисперсионное уравнение колебаний плазменной среды во внешнем заданном поле электромагнитной волны:

$$\left| T_{ij}(\omega,\mathbf{k}) - \frac{1}{4}E_{0\nu}E_{0s}\left[S_{i\mu\nu}(\omega,\mathbf{k},\omega_0,\mathbf{k}_0)T^{-1}_{\mu l}(\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) \times\right.\right.$$

$$\times S_{ljs}(\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0,-\omega_0,-\mathbf{k}_0) + S_{i\mu\nu}(\omega,\mathbf{k},-\omega_0,-\mathbf{k}_0) \times$$

$$\left.\left. \times T^{-1}_{\mu l}(\omega+\omega_0,\mathbf{k}+\mathbf{k}_0)S_{ljs}(\omega+\omega_0,\mathbf{k}+\mathbf{k}_0,\omega_0,\mathbf{k}_0)\right]\right| = 0. \quad (3.3.16)$$

Ниже мы исследуем спектры колебаний, описываемые уравнением (3.3.16), при следующих упрощающих предположениях. Во-первых, рассмотрим низкочастотные колебания с $\omega \ll \omega_0$, а во-вторых, положим, что частота ω_0 и фазовая скорость ω_0/k_0 достаточно велики, так что $v_T \ll \omega_0/k_0$ и тепловым движением носителей заряда можно пренебречь. В этих условиях (3.3.16) сводится к виду

$$\varepsilon^l(\omega, k) + \frac{1}{4}\delta\varepsilon_e^l(\omega, k)\left[1 + \delta\varepsilon_i^l(\omega, k)\right]\frac{k^2}{\omega_0^2} \times$$

$$\times\left\{\frac{((\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{v}_E)^2}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2\varepsilon^l(\omega-\omega_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0)} + \frac{((\mathbf{k}+\mathbf{k}_0)\mathbf{v}_E)^2}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}_0)^2\varepsilon^l(\omega+\omega_0, \mathbf{k}+\mathbf{k}_0)} + \right.$$

$$+ \frac{[(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{v}_E]^2}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2}\left[\varepsilon^{tr}(\omega-\omega_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0) - \frac{c^2(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2}{(\omega-\omega_0)^2}\right]^{-1} +$$

$$\left. + \frac{[(\mathbf{k}+\mathbf{k}_0)\mathbf{v}_E]^2}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}_0)^2}\left[\varepsilon^{tr}(\omega+\omega_0, \mathbf{k}+\mathbf{k}_0) - \frac{c^2(\mathbf{k}+\mathbf{k}_0)^2}{(\omega+\omega_0)^2}\right]^{-1}\right\}, \quad (3.3.17)$$

где $\mathbf{v}_E = e\mathbf{E}/m\omega_0$ – скорость осцилляций электронов в поле волны накачки.

Прежде чем перейти к анализу конкретных спектров колебаний плазменной среды в поле сильной электромагнитной волны, заметим, что уравнение (3.3.17) по своей структуре подобно (3.2.22) и также описывает взаимодействие внешнего электромагнитного поля с плазменной средой. Это взаимодействие проявляется наиболее сильно, когда $(\omega, \mathbf{k})$ и $(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)$ являются собственными решениями уравнения поля или, другими словами, когда выполняются условия

$$\omega_0 = \omega_s \pm \omega, \qquad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_s \pm \mathbf{k}. \quad (3.3.18)$$

Эти условия обобщают распадное условие на случай электромагнитной волны накачки с конечным значением волнового вектора $\mathbf{k}_0$. Мы будем далее придерживаться следующих обозначений: ω_0 и $\mathbf{k}_0$, ω_s и $\mathbf{k}_s$, ω и $\mathbf{k}$ – частота и волновой вектор соответственно падающей, рассеянной и плазменной волн. В этих терминах рассматриваемый процесс есть распад волны на рассеянную и плазменную волны. Условия (3.3.18) называют распадными или соотношениями Менли – Роу.

Рассмотрим примеры применения уравнения (3.3.17) к конкретным задачам параметрического возбуждения волн в плазменной среде в поле внешней электромагнитной волны. Пусть $\omega_0 \gg \omega_{Le} \gg kv_{Te}$, $\omega \gg \omega_{Li}$ и ионным вкладом в (3.3.17) можно пренебречь. Волну накачки с частотой ω_0 и рассеянную волну с частотой $\omega_s = \omega_0 - \omega$ считаем поперечными и исследуем процесс рассеяния падающей волны на колебаниях плотности плазмы с частотой ω – вынужденное томсоновское или рамановское рассеяние. Уравнение (3.3.17) для такого процесса записывается в виде

$$1 + \delta\varepsilon_e^l(\omega, k) + \frac{\delta\varepsilon_e^l(\omega, k)}{4\omega_0^2(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})^2} \times$$

$$\times \frac{k^2(\omega_0 - \omega)^2 \left[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{v}_E\right]^2}{(\omega - \omega_0)^2\varepsilon_e^{tr}(\omega_0 - \omega, k) - c^2(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})^2} = 0, \quad (3.3.19)$$

причем

$$\delta\varepsilon_e^l(\omega, k) = -\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \qquad \varepsilon_e^{tr}(\omega_0 - \omega, k) \simeq 1. \quad (3.3.20)$$

С учетом всего сказанного (3.3.19) принимает вид

$$(\omega^2 - \omega_{Le}^2)(\omega_s^2 - c^2k_s^2) = \frac{\omega_{Le}^2 k^2 v_E^2}{4}. \quad (3.3.21)$$

Здесь $\omega_s = \omega_0 - \omega$, $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_E = e\mathbf{E}/m\omega_0$.

Из структуры уравнения (3.3.21) видно, что две собственные волны изотропной плазмы – продольная электронная ленгмюровская и высокочастотная поперечная – в поле внешней волны накачки оказались связанными между собой. Под действием поля накачки происходит раскачка этих собственных волн. С другой стороны, этот процесс можно трактовать, как уже отмечалось выше, как вынужденное рассеяние волны накачки на колебаниях плотности плазмы, причем рассеяние это носит либо томсоновский, либо рамановский характер.

Если $\mathrm{Im}\,\omega \gg \omega_{Le}$, то в первой скобке левой части слагаемым ω_{Le}^2 можно пренебречь. И учитывая, что $\omega_s = \omega_0 - \omega = k_s c$, из (3.3.21) в этом случае получаем

$$\omega^3 = \frac{\omega_{Le}^2 k^2 v_E^2}{8\omega_0}. \quad (3.3.22)$$

Отсюда находим неустойчивый корень

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{k^2 v_E^2 \omega_{Le}^2}{8\omega_0}\right)^{1/3}. \quad (3.3.23)$$

Положительная мнимая часть полученного выражения определяет инкремент развития неустойчивости ($\omega \to \omega + i\delta$). Максимального значения этот инкремент достигает при $k = 2k_0 = 2\omega_{Le}/c$, т.е. при рассеянии назад навстречу падающей волне, и равен

$$\delta_{\max} = (\mathrm{Im}\,\omega)_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega_0\omega_{Le}^2 v_E^2}{2c^2}\right)^{1/3}. \tag{3.3.24}$$

Описанный процесс можно назвать индуцированным томсоновским (одночастичным) рассеянием падающего излучения на электронах плазмы. Такое название обосновано тем, что инкремент развития процесса намного больше ленгмюровской частоты плазменной среды и колебательные свойства среды никак не проявляются. С другой стороны, по аналогии с рассмотренными в предыдущем параграфе распадными процессами его можно назвать также модифицированным распадом падающей поперечной волны. Теперь мы можем записать условие одночастичного вынужденного рассеяния $\mathrm{Im}\,\omega \gg \omega_{Le}$ в явном виде:

$$\frac{v_E^2}{c^2} \gg \frac{\omega_{Le}}{\omega_0}. \tag{3.3.25}$$

Поскольку $v \ll c$, то такой процесс возможен только при выполнении очень сильного неравенства $\omega_0 \gg \omega_{Le}$.

Рассмотрим теперь обратный предел, когда $\mathrm{Im}\,\omega \ll \omega_{Le}$. В этом случае колебания среды успевают проявляться, прежде чем заметно нарастает поле рассеянной волны. Поэтому ищем решение (3.3.21) в виде $\omega = \omega_{Le} + i\delta$, $\omega_s = ck_s - i\delta$. В результате получаем

$$\delta = \left(\frac{k^2 v_E^2 \omega_{Le}}{16\omega_0}\right)^{1/2}. \tag{3.3.26}$$

Здесь также максимального значения инкремент достигает при $k = 2k_0$ (рассеяние назад), причем

$$\delta_{\max} = \left(\frac{v_E^2}{4c^2}\omega_0\omega_{Le}\right)^{1/2}. \tag{3.3.27}$$

В отличие от рассмотренного выше, данный процесс представляет собой вынужденное рассеяние падающей поперечной волны на колебаниях плотности плазменной среды или, другими словами, резонансный распад падающей поперечной волны на рассеянную поперечную волну и продольные ленгмюровские колебания плазмы. Таким образом, в процессе рассеяния участвуют три волны – две поперечных и одна продольная. Такое рассеяние называют также вынужденным рамановским (или коллективным) рассеянием. Оно возможно только в плазменной

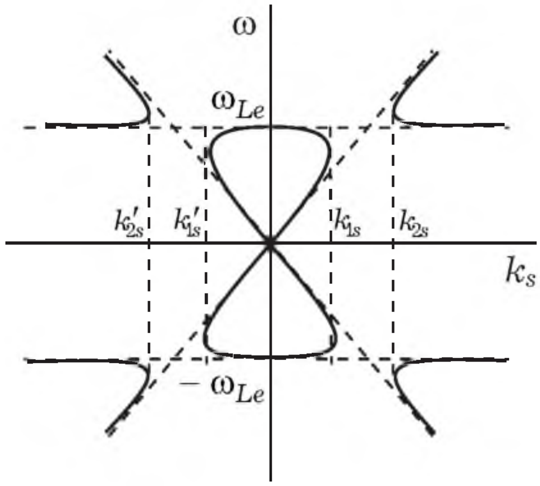

Рис. 3.3

среде достаточно высокой плотности, в которой $\omega_{Le} \gg \delta_{\max}$ или, что то же самое, при выполнении обратного неравенства (3.3.25).

Структура уравнения (3.3.21) позволяет определить характер неустойчивости, связанной с вынужденным рассеянием падающей поперечной электромагнитной волны на электронных колебаниях плазмы. Эта неустойчивость обусловлена связью между продольными и поперечным колебаниями плазмы, которая дается правой частью уравнения (3.3.21). При пренебрежении этой связью (например, при $v_E \to 0$) мы имеем две ветви независимых колебаний, которые изображены пунктирными кривыми на рис. 3.3. При учете связи волн пересечение прямых пропадает и мы имеем картину, представленную сплошными кривыми. Наличие областей между k_{1s} и k_{2s}, а также между k'_{1s} и k'_{2s}, в которых отсутствуют действительные корни уравнения (3.3.21), свидетельствует о конвективном характере рассмотренной неустойчивости.

Если при рассмотренных выше процессах происходило возбуждение высокочастотных ленгмюровских волн в плазменной среде под действием поля поперечной электромагнитной волны, то теперь мы рассмотрим возбуждение такой волной низкочастотных ионно-звуковых волн. Естественно, они могут возбуждаться в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$, в которой только и могут существовать такие волны. Описанный процесс рассеяния в литературе получил название вынужденного рассеяния Мандельштама – Бриллюэна. Учитывая, что в области существования ионно-звуковых колебаний $\omega_{Li} \gg \omega \gg kv_{Ti}$, а поэтому

$$\delta\varepsilon_e^l = \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}}\right), \qquad \delta\varepsilon_i^l = -\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}, \tag{3.3.28}$$

и уравнение (3.3.17) для рассматриваемого процесса сведется к виду

$$k^2 r_{De}^2 - \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}}k^2 r_{De}^2 =$$

$$= \frac{k^2}{4}\left\{\frac{[(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{v}_E]^2}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2}\frac{1}{2\omega\omega_0 + c^2(k^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)} - \right.$$

$$\left. - \frac{[(\mathbf{k}+\mathbf{k}_0)\mathbf{v}_E]^2}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}_0)^2}\frac{1}{2\omega\omega_0 - c^2(k^2 + 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)}\right\}. \tag{3.3.29}$$

Два слагаемых в правой части (3.3.29) соответствуют двум слагаемым в (3.3.17) со следующими резонансными знаменателями:

$$(\omega \pm \omega_0)^2 \varepsilon^{tr}(\omega_0 \pm \omega, k) - c^2(\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{k})^2 = 0, \tag{3.3.30}$$

описывающими "красный"(стоксовский, $\omega_0 - \omega$) и "синий"(антистоксовский, $\omega_0 + \omega$) сателлиты в поле рассеянной поперечной волны.

Учитывая малость мнимого слагаемого в (3.3.29), решение следует искать в виде $\omega = kv_s + i\delta$. При этом максимального значения инкремент нарастания δ достигает в резонансе (для "красного"и "синего"сателлитов соответственно)

$$2kv_s\omega_0 \pm c^2\left(k^2 \mp 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0\right) = 0 \tag{3.3.31}$$

и равен

$$\delta_{\max} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{8}\frac{m}{M}k^2 v_s^2 + \frac{\omega_{Li}^2}{4\omega_0 k v_s}\left(v_E^2 k^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}_E)^2\right)\right]^{1/2} - \sqrt{\frac{\pi}{8}\frac{m}{M}}kv_s. \tag{3.3.32}$$

В частности, в пределе очень слабых полей накачки отсюда имеем

$$\delta_{\max} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{M}{m}}\frac{\omega_{Li}^2}{\omega_0 v_s^2}\left[v_E^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}_E)^2}{k^2}\right]. \tag{3.3.33}$$

В заключение заметим, что рассмотренные выше неустойчивости в бесстолкновительном пределе оказались беспороговыми. Учет столкновений электронов, естественно, приводит к появлению порогов как излучательных, так и безызлучательных неустойчивостей. Порог определяется из требования, чтобы за время развития неустойчивости поглощение падающего поля в среде было незначительным, а это означает, что $\delta > \nu_e \omega_{Le}^2 / 2\omega_0^2$. Подстановка в это неравенство выражений (3.3.24), (3.3.27) и (3.3.33) и определяет пороги рассмотренных неустойчивостей.

Явления вынужденного рассеяния излучения на колебаниях плотности плазмы получили широкое распространение в диагностике плазмы. Так вынужденные томсоновское и рамановское рассеяния успешно используются для определения плотности электронов при диагностике плазмы слабым лазерным сигналом, в то время как вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюена является эффективным средством нагрева плазмы в лазерном термоядерном синтезе.

§ 3.4. Параметрическое возбуждение связанных волн в пьезополупроводниках во внешнем высокочастотном поле

В качестве последнего примера параметрического взаимодействия внешнего высокочастотного поля с плазменной средой рассмотрим возбуждение связанных упруго-электромагнитных волн в пьезоплазменной среде. Чтобы упростить задачу, мы ограничимся рассмотрением случая пространственно однородного высокочастотного поля. Кроме того примем, что частоты возбуждаемых в плазменной среде колебаний намного превосходят ионные ленгмюровские частоты, а фазовые скорости больше скорости ионного звука, что позволяет полностью пренебречь движением ионов. Вместе с тем, интересуясь возбуждением упругих волн, фазовая скорость которых много меньше скорости света, будем считать, что колебания поля возмущений с хорошей степенью точности являются потенциальными, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Тогда уравнения малых колебаний среды запишутся в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \delta f_e}{\partial t} + i\mathbf{kv}\delta f_e + \frac{e\mathbf{E}_0}{m}\sin\omega_0 t \frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{v}} + \\
+ \frac{e}{mc}\left[\mathbf{vB}_0\right]\frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e\mathbf{E}}{m}\frac{\partial f_{0e}\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t)\right)}{\partial \mathbf{v}} = 0, \\
\rho^{(m)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \lambda_{ikjl}k_k k_i u_j - ik_k\beta_{lik}E_l = 0, \\
k^2\Phi = 4\pi e \int d\mathbf{p}\delta f - 4\pi\beta_{ikl}k_i k_k u_l.
\end{gathered} \tag{3.4.1}$$

Решать систему (3.4.1) будем также, как и выше, вводя новую переменную

$$\psi_e = \exp\left[-i\frac{e}{m}\frac{\mathbf{kE}_0}{\omega_0^2 \sin\omega_0 t}\right]\delta f_e\left(\mathbf{p} + \frac{e\mathbf{E}_0}{m}\cos\omega_0 t\right) \qquad (3.4.2)$$

и разлагая $\psi_e(t)$ и $\mathbf{u}_e(t)$ в ряд:

$$(\psi_e(t), \mathbf{u}_e(t)) = e^{-i\omega t}\sum_n e^{-in\omega_0 t}(\psi_{en}, u_n). \qquad (3.4.3)$$

Исключая из системы (3.4.1) потенциал Φ и используя при этом (3.1.8), получим

$$\begin{gathered}
-i(\omega + n\omega_0)\psi_{en} + i\mathbf{kv}\psi_{en} - \Omega_e\frac{\partial\psi_{en}}{\partial\varphi} - ik\frac{\partial f_{0e}}{\partial\mathbf{v}}\frac{4\pi e}{mk}\times \\
\times\left[e\int d\mathbf{p}\psi_{en} - \sum_s k_i k_k \beta_{ikl} u_{ls} J_{s-n}(\mathbf{kr}_E)\right] = 0, \\
\rho^{(m)}(\omega + n\omega_0)^2 u_{in} - \lambda_{ikjl}k_k u_l u_{jn} + k_k k_l \beta_{lik}\frac{4\pi}{k^2}\times \\
\times\left[-\beta_{r\mu\nu}k_r k_\mu u_{\nu r} + e\sum_s J_{n-s}(\mathbf{kr}_E)\int d\mathbf{p}\varphi_{ls}\right] = 0.
\end{gathered} \qquad (3.4.4)$$

Эта система интегральных уравнений с помощью замены

$$\chi_{en} = e\int d\mathbf{p}\psi_{en} \qquad (3.4.5)$$

сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
\chi_{en} = -\delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0)\left[\chi_{en} - \sum_s k_i k_k \beta_{ilk} J_{s-n}(\mathbf{kr}_E) u_{ls}\right], \\
\rho^{(m)}(\omega + n\omega_0)^2 u_{ln} - \lambda_{ikjl}k_k k_j u_{ln} + \\
+ \frac{4\pi k_k k_l}{k^2}\beta_{lik}\left[J_{s-n}(\mathbf{kr}_E)\chi_{es} - \beta_{r\mu\nu}k_r k_\mu u_{\nu n}\right] = 0.
\end{gathered} \qquad (3.4.6)$$

Пусть частоты внешнего поля ω_0 намного превосходят частоты упругих колебаний среды. Тогда согласно (3.4.6) отличным от нуля можно считать только u_n при $n = 0$, т.е. $u_{in} = \delta_{n0} u_i$. Учитывая это, из (3.4.6) получаем уравнение для u_i:

$$\omega^2 \rho^{(m)} u_i - \lambda_{ikjl} k_k k_l u_j + \frac{4\pi}{k^2} \beta_{lik} k_k k_l \times$$
$$\times \left[-\beta_{r\mu\nu} k_r k_\mu u_\nu + \sum_n \frac{J_n^2(\mathbf{kr}_E) \delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0) k_i k_k \beta_{inl} u_e}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0)} \right] = 0. \quad (3.4.7)$$

Условие разрешимости этого тензорного уравнения и есть искомое дисперсионное уравнение малых связанных упруго-электромагнитных волн в плазменной пьезосреде во внешнем высокочастотном поле:

$$\Bigg| \omega^2 \rho^{(m)} \delta_{il} - \lambda_{ikjl} k_k k_j - \frac{4\pi}{k^2} \beta_{\nu ik} k_k k_\nu \beta_{l\mu r} k_r k_\mu +$$
$$+ \frac{4\pi}{k^2} \sum_n J_n^2(\mathbf{kr}_E) \frac{\delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0) \beta_{\nu ik} k_k k_\nu \beta_{l\mu r} k_\mu k_r}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0)} \Bigg| = 0. \quad (3.4.8)$$

Для простоты мы проанализируем уравнение (3.4.8) применительно к пьезополупроводнику с гексагональной симметрией с главной осью вдоль $0z$. Кроме того, сразу же ограничимся случаем резонансного распада, считая выполненным соотношение типа (3.2.3):

$$\omega_0 = \omega_{Le} + k v_{l,tr}, \quad (3.4.9)$$

где $v_{l,tr}$ – соответственно скорости продольного и поперечного звука в кристалле. Тогда в длинноволновом пределе $\mathbf{kr}_E \ll 1$ уравнение (3.4.8) сведется к виду

$$(\omega^2 - k^2 v_{l,tr}) \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - \omega_0)^2} \right] = \frac{4\pi\beta^2 u^2}{\rho^{(m)}} \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{4}. \quad (3.4.10)$$

Теперь мы можем искать решение уравнения (3.4.10) в виде

$$\omega = k v_{l,tr} + i\delta. \quad (3.4.11)$$

Учитывая условие (3.4.9), для δ получаем

$$\delta^2 = \frac{\pi\beta^2 k^2 (\mathbf{uv}_E)^2}{4\rho^{(m)} k v_{l,tr} \omega_{Le}^3}. \quad (3.4.12)$$

Рассмотренная неустойчивость представляет собой распад внешнего высокочастотного поля на ленгмюровские электронные колебания носителей заряда и упругие звуковые волны в решетке или, другими словами, параметрическую раскачку звуковых колебаний в пьезоплазменной среде под действием внешнего резонансного высокочастотного электрического поля.

Задачи по теме III

Задача 1. Показать, что в чисто электронной плазме во внешнем СВЧ поле возможна параметрическая раскачка ленгмюровских колебаний при учете релятивистских эффектов в скорости осцилляций электронов.

Решение.

Запишем систему релятивистских уравнений в модели независимых частиц для электронной плазмы в СВЧ электрическом поле $\mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t$:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} N\mathbf{V} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{e}{m}\mathbf{E} = -\frac{e}{m}\nabla\Phi, \tag{1}$$

$$\Delta\Phi = -4\pi e(N - N_0).$$

Здесь N_0 – однородная фоновая плотность ионов, компенсирующая заряд электронов в равновесном состоянии, в котором под действием СВЧ поля электроны осциллируют, причем скорость их осцилляций определяется соотношением

$$\frac{\mathbf{u}(t)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega_0} \cos \omega_0 t \equiv -\mathbf{u}_0 \cos \omega_0 t. \tag{2}$$

Линеаризуя систему (1) по малым отклонениям от однородного равновесного состояния, имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial \delta N}{\partial t} + i\mathbf{k}\left(N_0 \delta\mathbf{V} + \delta N \mathbf{u}\right) = 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{u}\right) \left[\frac{\delta\mathbf{V}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u}\delta\mathbf{V})}{c^2(1 - u^2/c^2)^{3/2}}\right] = -i\frac{e}{m}\mathbf{k}\Phi.\end{gathered} \tag{3}$$

Ограничиваясь колебаниями вдоль СВЧ поля, $\mathbf{k} \parallel \mathbf{u}$ н исключая из системы (3) величины $\delta\mathbf{V}$ и Φ, получим ($\delta\mathbf{V} \parallel \mathbf{u} \parallel \mathbf{k}$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{u}\right) \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{u}\right) \delta N = -\omega_{Le}^2 \delta N. \tag{4}$$

С помощью замены

$$y = \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial t} \delta N \exp\left(i \int kudt\right) \tag{5}$$

сводим уравнение (4) к виду

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega_{Le}^2 \left[1 - \frac{u^2(t)}{c^2}\right]^{3/2} y = 0. \tag{6}$$

В случае слабого релятивизма с точностью до членов $\sim u^2/c^2$ отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega_{Le}^2 \left(1 - \frac{3}{4}\frac{u_0^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\frac{u_0^2}{c^2}\cos 2\omega_0 t\right) y = 0. \tag{7}$$

С помощью замены $\tau = \omega_0 t$ это уравнение сводится к классическому уравнению Матье

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (a - 2q\cos 2\tau)y = 0, \tag{8}$$

где

$$a = \frac{\omega_{Le}^2\left(1 - \frac{3}{4}\frac{u_0^2}{c^2}\right)}{\omega_0^2}, \qquad q = \frac{3}{8}a\frac{u_0^2}{c^2}. \tag{9}$$

В зависимости от значений параметров a и q уравнение имеет как устойчивые, так и неустойчивые решения. На рис. 3.4 область неустойчивости заштрихована. В интересующем пас случае малых значений $q \ll 1$ неустойчивость возникает при

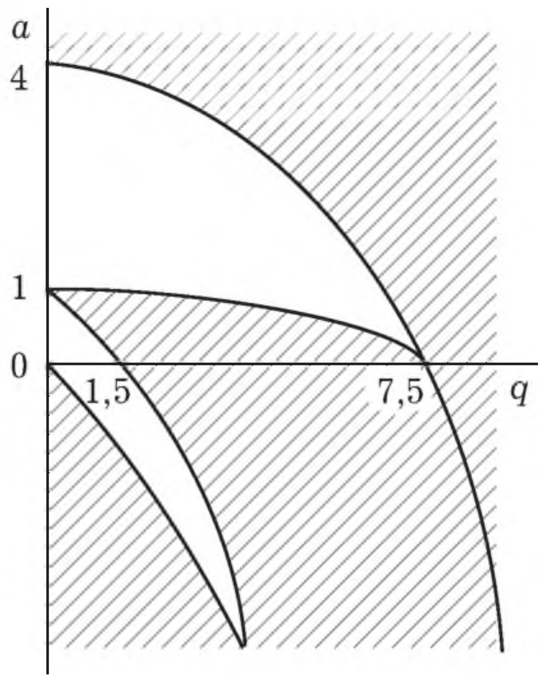

Рис. 3.4

$a = n^2$ или

$$n^2\omega_0^2 \approx \omega_{Le}^2\left(1 - \frac{3}{4}\frac{u_0^2}{c^2}\right), \tag{10}$$

причем временной инкремент роста y (т.е. плотности $\delta N \sim \exp \delta t$) равен

$$\delta = \frac{3}{16}\omega_{Le}\frac{u_0^2}{c^2}. \tag{11}$$

Величина δ и определяет ширину параметрического резонанса при малых значениях q, т.е. в нерелятивистском пределе.

Задача 2. С помощью уравнения (3.2.1) исследовать параметрическую кинетическую неустойчивость незамагниченной неизотермической плазмы в сильном СВЧ электрическом поле, когда $v_E \gg v_{Te}$ и длины волн возбуждаемых колебаний меньше дебаевского радиуса электронов, $kr_{De} \gg 1$, но меньше дебаевского радиуса ионов $kr_{Di} \ll 1$.

Решение.

Уравнение (3.2.1) в этих условиях можно записать в виде

$$1 + \frac{1}{\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})} = \frac{1}{k^2 r_{De}^2}\sum_n J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)\left[1 - J_+\left(\frac{n\omega_0 + \omega}{kv_{Te}}\right)\right]. \tag{1}$$

В области частот $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$ отсюда имеем

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3}e^{-\dfrac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}}\right) =$$

$$= i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k^2 r_{De}^2}\sum_n J_n^2\left(\frac{\omega + n\omega_0}{kv_{Te}}\right)e^{-\dfrac{(\omega + n\omega_0)^2}{2k^2 v_{Te}^2}}. \tag{2}$$

Учитывая малость мнимых слагаемых, это уравнение можно переписать в виде

$$1 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3}e^{-\dfrac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} - \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} + i\frac{2\omega\omega_{Le}^2}{(\mathbf{k}\mathbf{V}_E)^3} = 0. \tag{3}$$

Отсюда находим спектр ($\omega \to \omega + i\delta$):

$$\omega^2 \approx \omega_{Li}^2,$$
$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_{Li}}{(kr_{Di})^3}\exp\left(-\frac{\omega_{Li}^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) + \frac{\omega_{Li}^2\omega_{Le}^2}{(\mathbf{k}\mathbf{V}_E)^3}. \tag{4}$$

Первое слагаемое в выражении для δ обусловлено черенковским поглощением волн на ионах, а второе слагаемое описывает обращенное поглощение (усиление) на электронах, причем важно, что в целом волна может усиливаться ($\delta > 0$), что соответствует неустойчивости.

Следует заметить, что такая неустойчивость возможна в области прозрачности плазмы по отношению к СВЧ полю, т.е. при $\omega_0 > \omega_{Le}$. Однако, при этом должно выполняться условие

$$\omega_0 < \sqrt{\frac{T_e}{T_i}}\omega_{Le}. \tag{5}$$

Задача 3. Исходя из уравнения (3.2.22) с учетом столкновений электронов получить порог апериодической параметрической неустойчивости (3.2.26).

Решение.

С учетом столкновений электронов при $\omega_0 \approx \omega_{Le} \gg \nu_e \omega$ имеем

$$\varepsilon(\omega \pm \omega_0) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega \pm \omega_0 + i\nu_e)(\omega \pm \omega_0)} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2} \pm \left(\frac{i\nu_e}{\omega} + \frac{2\omega}{\omega_0}\right). \tag{1}$$

При подстановке этого выражения в (3.2.22) получаем (ср. (3.2.24))

$$\Delta^2 - \left(\frac{i\nu_e}{\omega} + \frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 - \eta\Delta\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Ti}}\frac{T_i}{T_e + T_i}\right) = 0, \tag{2}$$

где $\Delta = \omega_{Le}^2/\omega_0^2 - 1$ – расстройка.

В области самых низких частот находим спектр

$$\omega = i\frac{\Delta^2 + \dfrac{\nu_e^2}{\omega_0^2} - \eta\Delta}{\eta\Delta} kv_{Ti}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{T_e + T_i}{T_i}, \tag{3}$$

который при $\nu_e \to 0$ переходит в (3.2.25) (верхнее выражение). Неустойчивость имеет место при условии

$$\eta \geqslant \frac{\Delta^2 + \nu_e^2/\omega_0^2}{\Delta}. \tag{4}$$

Минимизируя это выражение по Δ, находим порог неустойчивости (3.2.26).

Задача 4. Исследовать параметрическую неустойчивость холодной магнитоактивной плазмы в СВЧ электрическом поле в условиях, когда частота поля ω_0 близка к суммарной частоте продольных электронных колебаний плазмы $\omega_0 \approx \omega_1 + \omega_2$.

Решение.

Учтем, что продольную диэлектрическую проницаемость холодной электронной плазмы можно представить в виде

$$1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega^2(\omega^2 - \Omega_e^2)}, \tag{1}$$

где ω_α^2 (для $\alpha = 1, 2$) определяется выражением (3.2.14).

Введем расстройку частоты внешнего поля по отношению к суммарной резонансной частоте:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \Delta \tag{2}$$

и будем искать решение уравнения (3.2.22) в виде (считая для определенности $\omega_1 > \omega_2$)

$$\omega = \omega_1 + \delta \tag{3}$$

(в силу симметрии с таким же успехом можно искать решение $\omega = \omega_2 + \delta$). В результате получаем

$$-\frac{\omega_1^2}{\omega_{Li}^2} + \frac{\omega_1(\omega_1^2 - \Omega_e^2)}{2\delta(\omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{8}\frac{\omega_2(\omega_2^2 - \Omega_e^2)}{(\delta + \Delta)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} = 0. \tag{4}$$

При расстройках $\Delta \gg \delta$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_{Li}^2}\Delta = \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{8}\frac{\omega_2(\omega_2^2 - \Omega_e^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \tag{5}$$

из уравнения (4) находим соотношение для определения инкремента нарастания параметрической неустойчивости:

$$\frac{\delta^2}{\Delta^2} = \frac{4}{(\mathbf{kr}_E)^2}\frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega_1^2 - \Omega_e^2}{\omega_2^2 - \Omega_e^2}. \tag{6}$$

Так как $\omega_2^2 < \Omega_e^2$, а $\omega_1^2 > \Omega_e^2$, то $\delta^2 < 0$, т.е. плазма всегда неустойчива.

В действительности учет столкновений приводит к наличию порога неустойчивости, определяемого условием $\delta > \delta_1$, где δ_1 – декремент затухания колебаний на верхней электронной ветви колебаний магнитоактивной плазмы (часть 1). Это дает условие

$$\frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{4}\frac{(\omega_1^2 - \Omega_e^2)(\omega_2^2 - \Omega_e^2)\omega_{Li}^4\omega_2\omega_1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2\omega_1^4} > \nu_e^2\left[\frac{(\omega_1^2 - \Omega_e^2)^2\cos^2\theta + (\omega_1^2 + \Omega_e^2\sin^2\theta)^2}{(\omega_1^2 - \Omega_e^2)^2\cos^2\theta + \omega_1^4\sin^2\theta}\right], \tag{7}$$

где ν_e – частота столкновений электронов.

Эти громоздкие формулы сильно упрощаются в случае плотной плазмы, в которой $\omega_{Le}^2 \gg \Omega_e^2$. При этом для $\theta = 0$ имеем:

$$\begin{gathered}
\omega_1^2 \approx \omega_{Le}^2, \qquad \omega_2^2 = \Omega_e^2\cos^2\theta, \\
\Delta = -\frac{m}{M}\frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{8}\frac{\Omega_e^3\cos\theta\sin^2\theta}{\omega_{Le}^2}, \\
\delta^2 = -\left(\frac{m}{M}\right)^2\frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{16}\frac{\Omega_e^3\cos\theta\sin^2\theta}{\omega_{Le}}, \\
(\mathbf{kr}_E)^2 > \frac{4\nu_e^2\omega_{Le}}{\sin^2\theta\cos\theta\Omega_e^3}\left(\frac{M}{m}\right)^3.
\end{gathered} \tag{8}$$

Следует отметить, что в результате развития неустойчивости происходит нарастание амплитуд продольных колебаний на верхней и нижней гибридных ветвях.

Задача 5. Исследовать параметрическую неустойчивость вырожденной замагниченной плазмы твердого тела на частоте, близкой к нижней гибридной частоте электронов, $\omega_0 \approx \omega_2$. Ионы считать невырожденными.

Решение.

Используем запись (1) предыдущей задачи и будем искать решение в области низких ионно-звуковых частот $\omega_0 \sim \omega_2 \gg kv_{Te} \gg \omega \gg kv_{Ti}$. Уравнение (3.2.22) при этом принимает вид

$$-\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} + \frac{k^2v_{Fe}^2}{3\omega_{Le}^2}\left(1 - i\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{|k_z|v_{Fe}}\right) + \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{4}\frac{\omega_2(\omega_2^2 - \Omega_e^2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\frac{\Delta}{\delta^2 - \omega^2} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \omega_0 - \omega_2$ – расстройка частоты СВЧ поля.

Отсюда видно, что при выполнении условия параметрического резонанса (распада волны накачки на нижнюю гибридную и ионно-звуковую волны)

$$\omega = kv_s = \Delta, \tag{2}$$

где $v_s^2 = 3v_{Fe}^2\dfrac{m}{M}$, в плазме происходит раскачка ионно-звуковых волн, причем инкремент нарастания неустойчивости ($\omega \to \omega + i\delta$)

$$\delta = \frac{(\omega_0-\omega_2)(\Omega_e^2-\omega_2^2)\omega_2}{4\pi\omega^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\frac{\omega_{Li}^2}{k^2v_s^2}(\mathbf{kr}_E)^2|k_z|v_{Fe}. \tag{3}$$

Видно, что при $\omega_0 > \omega_2$ (т.е. $\omega_0 = \omega_2 + \omega$) плазма неустойчива, причем порог неустойчивости определяется требованием $\delta > \nu_e$ и равен

$$\eta = \frac{E_0^2\cos^3\theta}{8\pi N\mathcal{E}_{Fe}} > 12\pi\frac{\nu_e}{\omega_{Le}}\frac{\omega_2^3}{\omega_{Le}^3}\sqrt{3\frac{M}{m}\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\Omega_e^2-\omega_2^2}}. \tag{4}$$

Задача 6. Исходя из результатов § 3.3 и формул преобразования диэлектрической проницаемости, полученной в теме II, исследовать вынужденное рассеяние высокочастотной электромагнитной волны на релятивистском электронном пучке – лазеры на свободных электронах (ЛСЭ).

Решение.

Развитую выше теорию взаимодействия внешней электромагнитной волны с плазменной средой применим к еще одной задаче, получившей в последние годы большое прикладное значение. Именно, рассмотрим рассеяние поперечной электромагнитной волны на моноэнергетическом релятивистском электронном пучке (РЭП), помещенном в сильное продольное магнитное поле. При таком рассеянии, как мы увидим ниже, благодаря двойному доплеровскому эффекту частота рассеянного излучения может оказаться намного больше частоты падающего, при этом мы получаем эффективный источник коротковолнового излучения. Именно по этой причине подобный процесс может быть использован для генерации излучения оптического диапазона длин волн, откуда и произошло название такого генератора – лазер на свободных электронах (ЛСЭ).

В системе координат покоя РЭП мы имеем задачу рассеяния электромагнитной волны на чисто электронной плазме пучка, которая уже была рассмотрена нами в § 3.3. Таким образом, наша задача решается переходом в систему покоя пучка, в которой мы можем воспользоваться уже полученным выше решением, а затем произвести обратный переход в лабораторную систему координат.

Обозначим в системе координат пучка частоту падающей волны через ω_0', частоту рассеянной волны – через ω_s', частоту колебаний пучка – через ω', а их волновые векторы соответственно через k_0', k_s' и k'. Штриховые величины связаны с нештрихованными (в лабораторной системе) известными формулами преобразования Лоренца

$$\begin{gathered}\omega_\alpha' = (\omega_\alpha - \mathbf{k}_\alpha\mathbf{u})\gamma,\\ \mathbf{k}_\alpha' = \mathbf{k}_\alpha + \mathbf{u}\gamma\left[\frac{\mathbf{k}_\alpha'\mathbf{u}}{u^2}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right) - \frac{\omega_\alpha}{c^2}\right],\end{gathered} \tag{1}$$

где $\gamma = \left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, $\mathbf{u}$ – скорость электронов пучка.

Для процесса рассеяния в системе покоя пучка должны выполняться соотношения

$$\omega_0' = \omega_s' + \omega', \qquad \mathbf{k}_0' = \mathbf{k}_s' + \mathbf{k}'. \tag{2}$$

Будем, кроме того, считать, что частоты падающей ω_0' и рассеянной ω_s' волн намного больше ленгмюровской частоты пучка $\omega_b' = \omega_b/\sqrt{\gamma}$ и поэтому

$$k_{0,s}'^{\,2} = \frac{\omega_{0,s}'^{\,2}}{c^2}, \qquad k_{0,s}^2 = \frac{\omega_{0,s}^2}{c^2}. \tag{3}$$

Отсюда для продольной (вдоль пучка) компоненты волнового вектора получаем

$$k_{z\,0,s} = \frac{\omega_{0,s}}{c}\cos\varphi_{0,s} = \pm\frac{\omega_{0,s}}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega^2_{\text{кр}\,0,s}}{\omega^2_{0,s}}}. \tag{4}$$

Здесь $\varphi_{0,s}$ – угол между волновым вектором $k_{0,s}$ и осью $0z$, $\omega^2_{\text{кр}\,0,s} = k^2_{\perp\,0,s}c^2$. При $k_z > 0$ волна попутна с пучком, а при $k_z < 0$ – волна встречная.

Из формул (2)–(4) получаем соотношения между частотами падающей и рассеянной волн

$$\begin{gathered} \omega_s = \omega_1\gamma^2\left[1 \pm \frac{u}{c}\sqrt{1 - \omega^2_{\text{кр}\,s}/\omega_1^2\gamma^2}\right], \\ \omega_1 = \omega_0\left(1 + \frac{u}{c}\cos\varphi_0 - \frac{\omega'}{\gamma\omega_0}\right). \end{gathered} \tag{5}$$

Видно, что в это соотношение входит также частота колебаний пучка ω' в движущейся системе координат. Два знака в (5) соответствуют рассеянию назад (с рождением попутной волны), либо вперед (с рождением встречной волны). Частота ω' определяется из уравнения (3.3.19), записанного для штрихованных величин:

$$1 = \delta\varepsilon_e^l(\omega', k') + \frac{k'^2\delta\varepsilon_e^l(\omega', k')(\omega_0' - \omega')^2\left[(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_0')\mathbf{v}_E'\right]^2}{4\omega_0'^{\,2}(\mathbf{k}_0' - \mathbf{k}')^2\left[(\omega_0' - \omega')^2\varepsilon^{tr}(\omega_0' - \omega') - c^2(\mathbf{u}_0' - \mathbf{u}')^2\right]} = 0. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{v}_E' = e\mathbf{E}_0'/m\omega_0'$ – скорость осцилляций электронов пучка в поле падающей волны,$\mathbf{v}_E' = \mathbf{v}_E = e\mathbf{E}_0/m\omega_0$, а для $\delta\varepsilon_e^l(\omega', k')$ и $\varepsilon^{tr}(\omega_0' - \omega')$ так же, как и в предыдущем параграфе, воспользуемся формулами

$$\delta\varepsilon_e^l(\omega', k') \simeq -\frac{\omega_b^2 k_z'^{\,2}}{\omega'^2\gamma k'^2}, \qquad \varepsilon^{tr}(\omega_0' - \omega') \simeq 1. \tag{7}$$

В отличие от предыдущего параграфа здесь учтена замагниченность пучка, что и привело к появлению множителя $\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{k_z'^{\,2}}{k'^2}$.

Дальнейший анализ полностью аналогичен проведенному выше, и поэтому здесь мы приведем только его результат. Для одночастичного томсоновского режима рассеяния (модифицированный распад)

$$\omega' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{k_z'^{\,2}\omega_b^2 v_E'^{\,2}}{8\gamma\omega_0'}\right)^{1/3} \lesssim \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega_0'\omega_b^2 v_E^2}{8\gamma c^2}\right)^{1/3}. \tag{8}$$

Условие $\omega' \gg \dfrac{\omega_b}{\gamma}\dfrac{k'_z}{k'}$ означает, что такой режим рассеяния имеет место, если

$$\frac{{v'_E}^2}{c^2} = \frac{v_E^2}{c^2} \gg \frac{\omega_b}{\sqrt{\gamma}\omega'_0} \simeq \frac{\omega_b}{\gamma^{3/2}\omega_0}. \tag{9}$$

В обратном же пределе имеет место коллективный рамановский механизм рассеяния (резонансный распад), при котором

$$\begin{gathered} \omega' = \frac{\omega'_b|k'_z|}{\sqrt{\gamma}k'} + i\delta', \\ \delta' = \left(\frac{{v'_E}^2{k'_z}^2\omega_b^2}{16\gamma\omega'_0}\right)^{1/2} \lesssim \left(\frac{{v'_E}^2\omega'\omega_b}{4c^2\sqrt{\gamma}}\right)^{1/2}. \end{gathered} \tag{10}$$

Заметим, что $\operatorname{Im}\omega'$ характеризует временной инкремент нарастания колебаний как пучка, так и рассеянной волны. Это следует из соотношений (2) при заданной волне накачки. Таким образом $\operatorname{Im}\omega' = \operatorname{Im}\omega'_s$.

Произведем теперь обратное преобразование к лабораторной системе координат. Зная временной инкремент δ'_s, найдем пространственный коэффициент усиления $\delta\mathbf{k}'_s$. В рассматриваемых нами условиях

$$\delta\mathbf{k}'_s = \frac{\mathbf{k}'_s}{k'_s}\frac{\delta'_s}{v'_{\text{гр}}} \simeq \frac{\delta'_s}{c}\frac{\mathbf{k}'_s}{k'_s}. \tag{11}$$

Здесь $v'_{\text{гр}} \simeq \frac{\partial\omega'_s}{\partial k'_s} \simeq c$ согласно (3). При этом в лабораторной системе

$$\delta_s = \gamma(\delta'_s + u\delta k'_s), \qquad \delta\mathbf{k}_s = \frac{\delta_s}{v_{\text{гр}}}\frac{\mathbf{k}'_s}{k'_s} \simeq \frac{\delta}{c}\frac{\mathbf{k}'_s}{k'_s}. \tag{12}$$

Нахождение явного вида δ_s и $\delta\mathbf{k}'_s$ уже не представляет труда.

Следует обратить внимание на формулы (5), из которых следует возможность возбуждения коротковолнового излучения внешней электромагнитной волной при ее рассеянии на пучке. Действительно, при $\varphi_0 = 0$ п $\gamma\omega_0 \gg \omega_b, \omega_{\text{кр}}$ (рассеяние назад) из формул (1) имеем $\omega_s = 4\gamma^2\omega_0$, т.е. рассеянное излучение имеет длину волны в $4\gamma^2$ раз меньше, чем падающее. При $\gamma = 100$ (т.е. энергии пучка 50 МэВ) и $\omega_0 = 10^{11}\,\text{с}^{-1}$, что соответствует сантиметровой области длин волн, имеем $\omega_s \simeq 4\cdot 10^{15}\,\text{с}^{-1}$, что соответствует оптическому диапазону длин волн.

В заключение заметим, что под термином "лазеры на свободных электронах"в узком смысле этого слова понимается вынужденное излучение в коротковолновой области длин волн, возникающее при движении релятивистского пучка электронов в пространственно-периодическом поперечном магнитном поле. В системе покоя пучка периодическое магнитное поле превращается в электромагнитную волну с амплитудой $E' = \dfrac{u}{c}B_{\perp 0}$ и частотой $\omega_0 = 2\pi u/l_0$, где l_0 – пространственный период магнитного поля. Все полученные выше формулы при этом сохраняют силу. В частности, частота излучения оказывается равной $\omega_s = 2\gamma^2\omega_0$, т.е. всего в два раза меньше, чем при рассеянии электромагнитной волны назад.

Задача 7. Исходя из уравнения (3.3.17) исследовать поперечную ($\mathbf{k} \perp \mathbf{v}_E$) неустойчивость плазмы в высокочастотном ($\omega_0 > \omega_{Le}$) и пространственно-однородном ($k \gg k_0$) поле, приводящую к медленной поперечной стратификации ($k_z = 0$, $k_\perp = k$) в магнитном поле высокочастотного тока (высокочастотный пинч-эффект).

Решение.

Легко показать, что в указанных условиях уравнение (3.3.17) сведется к виду

$$\varepsilon^l(\omega, k) = \frac{v_E^2}{2c^2}\delta\varepsilon_e^l(\omega, k)\delta\varepsilon_i^l(\omega, k). \tag{1}$$

Здесь учтено, что $\delta\varepsilon_i^l(\omega, k) \gg 1$ и тем более $\delta\varepsilon_e^l(\omega, k) \gg \delta\varepsilon_i^l(\omega, k) \gg 1$, а поэтому (1) можно записать так:

$$1 = \frac{v_E^2}{2c^2}\delta\varepsilon_i^l(\omega, k), \tag{2}$$

где $v_E^2 = \dfrac{e^2E_0^2}{m^2\omega_0^2} \ll c^2$. В случае "холодных"ионов, когда

$$\delta\varepsilon_i^l(\omega, k) = -\frac{\omega_{Li}^2}{\omega(\omega + i\nu_i)}, \tag{3}$$

из (2) следует

$$\omega(\omega + i\nu_i) = -\frac{v_E^2}{2c^2}\omega_{Li}^2. \tag{4}$$

Мы имеем полностью аналогичную рассмотренной в предыдущем разделе неустойчивость пинч-эффекта с инкрементом

$$\omega = \begin{cases} i\dfrac{v_E}{\sqrt{2}c}\omega_{Li} & \text{при} \quad \omega \gg \nu_i, \\[2ex] i\dfrac{v_E^2}{\sqrt{2}c^2}\dfrac{\omega_{Li}^2}{\nu_i} & \text{при} \quad \omega \ll \nu_i. \end{cases} \tag{5}$$

В диффузионной же области частот, когда

$$\delta\varepsilon_i^l(\omega, k) = \frac{\omega_{Li}^2}{k^2v_{Ti}^2 - i\omega\nu_i}, \tag{6}$$

имеем

$$\omega = -i\left(\frac{k^2v_{Ti}^2}{\nu_i} - \frac{v_E^2}{2c^2}\frac{\omega_{Li}^2}{\nu_i}\right). \tag{7}$$

Отсюда особенно явно видна природа неустойчивости, которая имеет место при условии

$$k^2v_{Ti}^2 < \frac{v_E^2}{2c^2}\omega_{Li}^2, \tag{8}$$

соответствующем магнитному сжатию плазмы и образованию пинчевых структур с размером

$$k_0 \simeq \sqrt{\frac{v_E^2}{2c^2}\frac{\omega_{Li}^2}{v_{Ti}^2}} = \frac{v_E}{c}\frac{1}{r_{Di}}. \tag{9}$$

ТЕМА IV

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕННОЙ СРЕДОЙ. ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 4.1. Тензор диэлектрической проницаемости плазменно-пучковой системы

Тема IV посвящена рассмотрению неограниченных в пространстве плазменно-пучковых систем, а поэтому при их анализе мы будем использовать диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и дисперсионное уравнение

$$\left| k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0, \tag{4.1.1}$$

корни которого $\omega(\mathbf{k})$ определяют временное развитие начальных возмущений. Если у всех корней этого уравнения $\operatorname{Im}\omega(\mathbf{k}) < 0$, то все возмущения затухают во времени, а система устойчива; если же среди них есть хоть один с $\operatorname{Im}\omega(\mathbf{k}) > 0$, то соответствующая мода возмущений нарастает со временем, а система неустойчива. Нас будут интересовать неустойчивости с $\operatorname{Re}\omega \gg \operatorname{Im}\omega$, которые будем называть излучательными неустойчивостями. Более того, ниже мы покажем эквивалентность излучательной неустойчивости и вынужденного излучения электромагнитных волн электронным пучком в системе плазма – пучок.

Нас будут интересовать два типа плазменно-пучковых неустойчивостей – неустойчивость прямолинейного электронного пучка в плазме, представляющая собой вынужденное черепковское излучение электронных пучков, и неустойчивость вращающегося вокруг силовых линий внешнего постоянного магнитного поля пучка электронов, представляющая собой вынужденное циклотронное излучение вращающихся электронных пучков.

В первом случае для вычисления $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, очевидно, можно воспользоваться изложенным во второй теме методом преобразования Лоренца. Во втором случае преобразование Лоренца не применимо – следует воспользоваться преобразованиями общей теории относительности, что значительно усложняет задачу вычислений $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ плазменно-пучковой системы из вращающихся электронов (которую часто именуют пучком осцилляторов). Поэтому здесь мы воспользуемся прямым вычислением $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ путем решения уравнения Власова для малых возмущений функции распределения $\delta f \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}$. Выбирая, как обычно, ось $0z$ вдоль вектора $\mathbf{B}_0$, а $0x$ – вдоль $\mathbf{k}_\perp$, имеем

$$-i(\omega + k_\perp v_x)\delta f - \frac{\Omega}{\gamma}\frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} = -e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{vB}\right]\right\}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}, \tag{4.1.2}$$

где $\Omega = \dfrac{eB_0}{mc}$, а $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Равновесная же функция $f_0(p_\perp, p_{||})$ удовлетворяет уравнению

$$[\mathbf{vB}_0]\,\frac{\partial f_0(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{4.1.3}$$

и может быть произвольной функцией $p_\perp$ и $p_{||}$. Мы, как правило, будем выбирать $f_0(\mathbf{p})$ в виде моноэнергетического распределения

$$f_0 \to \frac{N_b}{2\pi p_{\perp 0}}\delta(p_\perp - p_{\perp 0})\delta(p_{||} - p_{||0}) \tag{4.1.4}$$

для пучка, а для плазменной среды – в виде равновесного распределения Максвелла, либо Ферми. При $p_{\perp 0} = 0$ имеем случай прямолинейного пучка. Определив из (4.1.2) $\delta f(\mathbf{p}, t)$ и подставляя это выражение в формулу для плотности индуцированного тока

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha = \sum_\alpha e_\alpha \int d\mathbf{p}\,\mathbf{v}\delta f_\alpha(\mathbf{p}, t), \tag{4.1.5}$$

окончательно получаем тензор диэлектрической проницаемости неравновесной плазма-пучковой системы в рассматриваемых условиях:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{4\pi i e_\alpha^2}{\omega\Omega_\alpha}\int d\mathbf{p}\, v_i\gamma \int\limits_\infty^\varphi d\varphi' \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_l}\left(\frac{\omega - \mathbf{kv}}{\omega}\delta_{lj} + \frac{k_l v_j}{\omega}\right)_{\varphi'} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i\gamma}{\Omega_\alpha}\left[(\omega - k_z v_z)(\varphi' - \varphi) - k_\perp v_\perp(\sin\varphi' - \sin\varphi)\right]\right\}. \tag{4.1.6}$$

Учитывая далее вид невозмущенной функции распределения (4.1.4) и интегрируя выражение (4.1.6) по углам, получаем[1]

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) \;=\; \delta_{ij} \;+\; \sum_{\alpha}\frac{4\pi e_\alpha^2}{\omega^2}\int d\mathbf{p}\sum_{n}\frac{(\omega-k_zv_z)\dfrac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_\perp}+kv_\perp\dfrac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_z}}{(\omega-k_zv_z-n\Omega_\alpha/\gamma)v_\perp}\Pi_{ij}^{(n)}, \tag{4.1.7}$$

где

$$\Pi_{ij}^{(n)} = F_{\alpha i}F_{j\alpha}^* =$$

$$= \begin{pmatrix} v_\perp^2\left(\dfrac{nJ_n(x)}{x}\right)^2 & iv_\perp^2\dfrac{n}{x}J_n(x)J_n'(x) & v_\perp v_z\dfrac{nJ_n^2(x)}{x} \\ -iv_\perp^2\dfrac{nJ_n(x)J_n'(x)}{x} & v_\perp^2 {J_n'}^2(x) & -iv_zv_\perp J_n(x)J_n'(x) \\ v_\perp v_z\dfrac{nJ_n^2(x)}{x} & iv_\perp v_z J_n(x)J_n'(x) & v_z^2J_n^2(x) \end{pmatrix},$$

$$F_\alpha = \left(\frac{n\Omega_\alpha}{k_\perp\gamma}J_n(x), \quad -iv_\perp J_n'(x), \quad v_zJ_n(x)\right), \qquad x = \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha}\gamma. \tag{4.1.8}$$

Дальнейшее вычисление диэлектрической проницаемости требует задания явного вида функции $f_{0\alpha}(p_\perp, p_{||})$ и мы проведем его только для вращающегося электронного пучка. Для прямолинейного же пучка, как уже отмечалось, воспользуемся преобразованиями Лоренца.

§ 4.2. Взаимодействие прямолинейного электронного пучка с плазмой. Плазменно-пучковая черенковская неустойчивость

Рассмотрим теперь пример неравновесной системы, очень распространенный в различных практических приложениях, – плазму, в которой небольшая группа электронов с достаточно большой направленной скоростью движется относительно остальных "покоящихся"частиц.

[1]Заметим, что формулы (4.1.7) и (4.1.8) используются также для исследования неустойчивостей анизотропной плазмы, например, с разными температурами частиц вдоль и поперек магнитного поля $T_{||}$ и $T_\perp$ и т.п.

Другими словами, исследуем плазму, в которую инжектирован релятивистский электронный пучок с малой по сравнению с плазмой плотностью. Будем считать, что электронный пучок движется строго прямолинейно вдоль внешнего магнитного поля, так что невозмущенная функция распределения электронов в собственной системе пучка является изотропной, т.е. имеет вид $f_0(p)$. Более того, предположим, что в собственной системе координат они имеют максвелловское распределение с нерелятивистской температурой (разбросом по энергиям); остальные "покоящиеся"частицы плазмы также считаем распределенными по Максвеллу, либо по Ферми, но в лабораторной системе координат. Это позволяет при вычислении диэлектрической проницаемости плазмы в целом воспользоваться общими формулами преобразования Лоренца, причем тензор $\varepsilon^{(\alpha)}_{\mu,\nu}(\omega'_\alpha, \mathbf{k}'_\alpha)$ определяется его известным выражением для частиц сорта α в собственной системе координат (см. часть 1).

Анализ устойчивости плазма-пучковых систем начнем с прямолинейного моноэнергетического электронного пучка, взаимодействующего с холодной плазмой. Очевидно, что такой пучок может двигаться лишь строго вдоль магнитного поля. Такая модель плазма-пучковой системы применима для описания быстрых процессов с характерными скоростями, намного превышающими тепловые скорости частиц пучка и плазмы, так что последними можно полностью пренебречь.

Для моноэнергетического электронного пучка в собственной системе координат и частиц холодной плазмы в лабораторной системе координат можно воспользоваться выражениями, полученными в первой части книги, которые при учете формул преобразования (2.2.7) и (2.2.8) приводят к следующим выражениям для компонент тензора диэлектрической проницаемости плазма-пучковой системы:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 {\omega'_\alpha}^2 \gamma_\alpha^{-1}}{\omega^2({\omega'_\alpha}^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\
\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = -i \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega'_\alpha \Omega_\alpha \gamma_\alpha^{-1}}{\omega^2({\omega'_\alpha}^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\
\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = -\sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega'_\alpha k_\perp u_\alpha}{\omega^2({\omega'_\alpha}^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\
\varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} = i \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_\alpha k_\perp u_\alpha}{\omega^2({\omega'_\alpha}^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\
\varepsilon_{zz} = 1 - \sum_\alpha \left[\frac{\omega_{L\alpha}^2 \gamma_\alpha^{-1}}{{\omega'_\alpha}^2} + \frac{\omega_{L\alpha}^2 \gamma_\alpha k_\perp^2 u_\alpha^2}{\omega^2({\omega'_\alpha}^2 - \Omega_\alpha^2)} \right].
\end{gathered}
\tag{4.2.1}
$$

Здесь $\omega_{L\alpha} = \sqrt{\dfrac{4\pi e_\alpha^2 N_{0\alpha}}{m_\alpha}}$ – ленгмюровская частота частиц сорта α ($N_{0\alpha}$ – их плотность в лабораторной системе координат), $\omega'_\alpha = (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha)\gamma_\alpha$, $\mathbf{u}_\alpha$ – направленная скорость частиц сорта α.

Подставляя (4.2.1) в уравнение (4.1.1), можно исследовать спектры колебаний любой многопотоковой плазмы в условиях пренебрежения тепловым движением частиц. Проанализируем их для случая, когда моноэнергетический электронный пучок малой плотности пронизывает холодную плазму. Заметим, что при инжекции электронного пучка в плазму в ней индуцируются заряды и токи, нейтрализующие заряд и ток пучка (см. задачу 1 по данной теме). В результате плазма-пучковая система оказывается бестоковой и полностью нейтрализованной по заряду. Что касается направленной скорости электронов плазмы, создающих обратный ток, нейтрализующий ток пучка, то при плотности плазмы N_p намного превышающей плотность электронов пучка N_b, она оказывается малой: $u_p = \dfrac{N_b}{N_p} u_b \ll u_b$, и ей можно пренебречь. Сказанное позволяет использовать для исследования свойств плазма-пучковой системы выражения (4.2.1).

Учитывая все это и в первом приближении пренебрегая пучковыми слагаемыми, из уравнения (4.1.1) получим дисперсионное уравнение для электромагнитных колебаний холодной магнитоактивной плазмы, подробно проанализированное в первой части книги. Учет пучковых слагаемых должен давать малые поправки к найденным там спектрам. Из (4.2.1) легко видеть, что эти поправки наиболее существенны в тех областях частот и фазовых скоростей волн, в которых пучковые слагаемые в компонентах тензора диэлектрической проницаемости неограниченно возрастают. Это имеет место в условиях

$$\omega = k_z u, \qquad \omega = k_z u \pm \Omega_e/\gamma, \tag{4.2.2}$$

причем при выполнении первого неравенства, называемого условием черепковского резонанса, пучковые слагаемые в случае прямолинейного пучка имеют полюс второго порядка, а при выполнении второго равенства, называемого условием циклотронного (доплеровского) резонанса – полюс первого порядка. Таким образом, для прямолинейного пучка наиболее сильное взаимодействие с плазмой следует ожидать при выполнении условия черенковского резонанса.

Анализ взаимодействия моноэнергетического электронного пучка с холодной плазмой начнем с простейшего случая, когда отсутствует внешнее магнитное поле, так что $\omega'_\alpha \gg \Omega_\alpha$. При этом (4.1.1) распадается на два уравнения:

$$k^2c^2 - \omega^2\left[1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2\gamma^{-1}}{\omega^2}\right] = 0,$$

$$(k^2c^2 - \omega^2 + \omega_{Le}^2 + \omega_b^2\gamma^{-1})\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2\gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2}\right) - \tag{4.2.3}$$

$$- \frac{k_\perp^2 u^2}{\omega^2}\frac{\omega_{Le}^2\omega_b^2\gamma^{-1}}{(\omega - k_z u)^2} = 0.$$

Здесь ω_{Le} и ω_b – ленгмюровские частоты электронов плазмы и пучка соответственно. При выводе уравнений (4.2.3) ионными слагаемыми было пренебрежено ввиду их малости, т.е. рассматривалось взаимодействие электронного пучка с высокочастотными колебаниями плазмы.

Легко видеть, что первое уравнение (4.2.3) описывает устойчивые колебания плазмы со спектром частот

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + \omega_b^2\gamma^{-1} + k^2c^2. \tag{4.2.4}$$

Вклад электронов пучка вследствие малости его плотности при этом ничтожно мал. Устойчивость колебаний легко понять, если учесть, что электрическое поле в них направлено вдоль оси $0y$ (чисто поперечная волна, $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$), а следовательно, работа поля волны над электронами пучка равна нулю:

$$\mathbf{Eu} = 0. \tag{4.2.5}$$

Второе уравнение (4.2.3) описывает продольно-поперечную волну с отличными от нуля компонентами поля E_x и E_z. Здесь $\mathbf{Eu} \neq 0$ и возможно воздействие поля на электроны пучка. Пучок может тормозиться полем волны, передавая ей часть своей энергии. Возникшая в системе флуктуационным образом волна будет нарастать во времени – система оказывается неустойчивой. Действительно, пучковые слагаемые в уравнении (4.2.3) наиболее существенны в области частот черепковского резонанса, поэтому решения этого уравнения следует искать в виде

$\omega = k_z u + \delta$[1], где $\delta \ll \omega$. В результате находим: при $\omega^2 \approx k_z^2 u^2 \neq \omega_{Le}^2$

$$\delta^2 = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{1 - \omega_{Le}^2 / k_z^2 u^2} \left[1 + \frac{k_\perp^2}{k_z^2} \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^2}{k^2 c^2 - k_z^2 u^2 + \omega_{Le}^2} \right], \qquad (4.2.6)$$

при $\omega^2 \approx k_z^2 u^2 \approx \omega_{Le}^2$

$$\delta_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \omega_{Le} \left(\frac{N_b}{2N_p} \frac{1}{\gamma} \frac{k_\perp^2 + k_z^2 \gamma^{-2}}{k^2} \right)^{1/3},$$

$$\delta_3 = \omega_{Le} \left(\frac{N_b}{2N_p} \frac{1}{\gamma} \frac{k_\perp^2 + k_z^2 \gamma^{-2}}{k^2} \right)^{1/3}. \qquad (4.2.6a)$$

Из соотношений (4.2.6) и (4.2.6a) видно, что колебания с частотой $\omega \approx k_z u$ неустойчивы ($\mathrm{Im}\,\omega = \mathrm{Im}\,\delta > 0$) и нарастают во времени, если $k_z u \leqslant \omega_{Le}$. В отсутствие резонанса, $\omega \approx k_z u \neq \omega_{Le}$, инкремент нарастания $\mathrm{Im}\,\delta \sim (N_b/N_p)^{1/2}$, для резонансной же неустойчивости, когда $\omega \approx k_z u \approx \omega_{Le}$, инкремент нарастания значительно больше: $\mathrm{Im}\,\delta \sim (N_b/N_p)^{1/3}$. Это и понятно, поскольку при резонансе скорость пучка совпадает с фазовой скоростью собственных колебаний плазмы, а именно, со скоростью продольных волн. Действительно, в резонансном случае происходит возбуждение чисто продольных волн релятивистским пучком, в чем легко убедиться, записав дисперсионное уравнение продольных волн в отсутствие магнитного поля

$$\varepsilon = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \frac{k_z^2 + k_\perp^2 \gamma^2}{k^2} = 0. \qquad (4.2.7)$$

В отсутствие пучка ($\omega_b = 0$) уравнение (4.2.7) описывает электронные ленгмюровские колебания плазмы. На пересечении спектра этих колебаний с частотой, соответствующей условию черепковского резонанса (рис. 4.1а), при $\omega_b \neq 0$ происходит сильное взаимодействие электронного пучка с плазмой и возбуждение колебаний. Именно в этих условиях решения уравнения (4.2.7) в точности совпадают с (4.2.6a). Рис. 4.1а при этом видоизменяется и переходит в рис. 4.1б, из которого следует, что в области $k_{z1} < k_z < k_{z2}$ действительные решения уравнения (4.2.7) для

[1]В этой и следующей темах для удобства будем иногда использовать подстановку $\omega \to \omega + \delta$, вместо использовавшейся $\omega \to \omega + i\delta$ в других темах книги. Сделано это ввиду того, что при исследовании пучково-плазменных неустойчивостей важное значение имеет также и вещественная поправка к частоте колебаний плазмы. Как будет видно из дальнейшего изложения она характеризует обгон пучком плазменной волны.

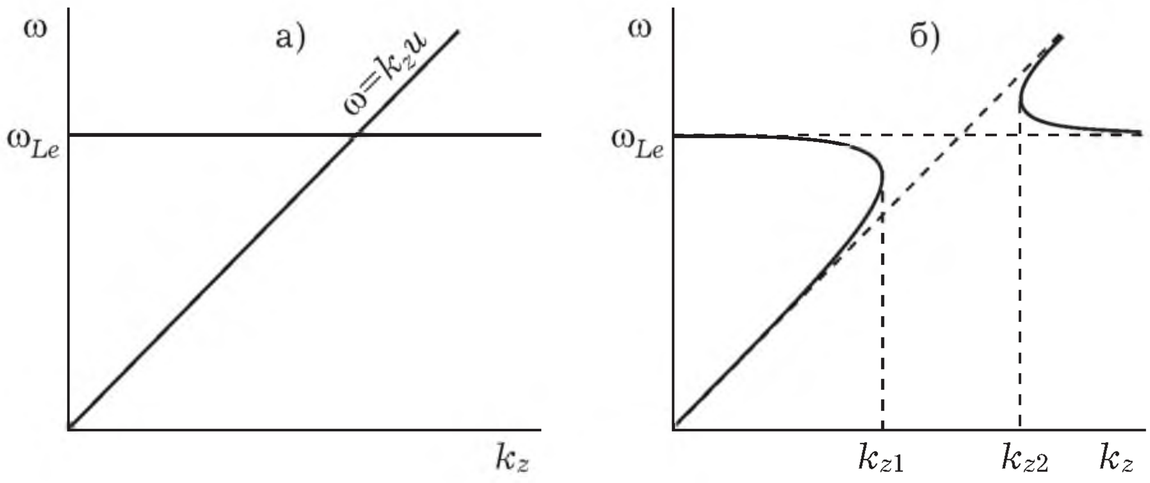

Рис. 4.1

ω отсутствуют – появляется неустойчивость, имеющая в соответствии с первым правилом Стэррока конвективный характер.

Таким образом, при взаимодействии электронного пучка малой плотности с изотропной плазмой в условиях черепковского резонанса происходит резонансное возбуждение продольных волн в плазме. Заметим, что поперечные электромагнитные волны в изотропной плазме возбуждаться не могут, поскольку их фазовая скорость, как было показано в первой части книги, всегда больше скорости света и электронный пучок с ними резонансно взаимодействовать не может. Кроме того, согласно (4.2.6а) для неустойчивого корня дисперсионного уравнения $\mathrm{Re}\,\delta_1 < 0$. Это означает, что $u > \omega/k_z$, т.е. электроны пучка обгоняя волну, попадают в тормозящие фазы поля, передавая часть своей кинетической энергии волне. Амплитуда поля при этом растет, возрастает и его энергия, поскольку возбуждаемая пучком продольная волна в случае изотропной плазмы является волной с положительной энергией:

$$|E^l|^2 \frac{\partial}{\partial\omega}\omega\varepsilon^l = |E^l|^2 \frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right)\right] > 0. \qquad (4.2.8)$$

Именно явление возбуждения продольных плазменных волн нерелятивистским электронным пучком в изотропной плазме в условиях черепковского резонанса и было предсказано теоретически в 1949 году Я.Б.Файнбергом и А.И.Ахиезером в СССР и Д.Бомом и Е.Гроссом в США. Это явление в то время получило название плазменно-пучковой неустойчивости и лишь спустя 10 лет была вскрыта суть явления как вынужденного черепковского излучения плотными пучками продольных плазменных волн. Первые же эксперименты 50-х годов подтвердили аномально сильное взаимодействие пучка с плазмой.

Рассмотренная черепковская неустойчивость электронного пучка в плазме имеет место и при наличии внешнего продольного магнитного поля. Если магнитное поле слабое, так что $|\delta| > \Omega_e \gamma^{-1}$, то в выражениях (4.2.1) им можно пренебречь, и справедливыми окажутся все полученные формулы. Если же магнитное поле сильное, $\Omega_e \gg \omega_{Le}$, то в формулах (4.2.1) можно перейти к пределу бесконечно сильного магнитного поля. При этом из (4.1.1) получим два уравнения:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0,$$

$$k_\perp^2 + \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2}\right) = 0. \tag{4.2.9}$$

Первое из них описывает чисто поперечную волну, в которой $\mathbf{E} \parallel 0y$, а фазовая скорость $\omega/k_z > c$; с этой волной пучок вообще не взаимодействует. Второе же уравнение описывает продольно-поперечные волны с отличными от нуля компонентами поля E_x и E_z и поэтому взаимодействующие с пучком. В отсутствие пучка это уравнение дает две ветви колебаний

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_{Le}^2 + k^2c^2 \pm \sqrt{(\omega_{Le}^2 + k^2c^2)^2 - 4\omega_{Le}^2 k_z^2 c^2}\right], \tag{4.2.10}$$

соответствующие быстрой и медленной волнам. Электронный пучок резонансно может взаимодействовать лишь с медленной волной и то при условии

$$\omega_{Le}^2 - k_\perp^2 u^2 \gamma^2 > 0. \tag{4.2.11}$$

На рис. 4.2а представлены дисперсионные кривые (4.2.10) и черепковская линия $\omega = k_z u$, пересекающая нижнюю ветвь при $\omega_b = 0$.

Решение второго уравнения (4.2.9), соответствующее нарастающим во времени колебаниям, при $\omega_b \neq 0$ имеет вид

$$\omega = k_z u + \delta,$$

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 - k_\perp^2 u^2 \gamma^2,$$

$$\delta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\frac{\omega}{\gamma}\left(\frac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3}\left[1 + \frac{k_\perp^2 u^2}{\omega_p^2}\gamma^2(\gamma^2 - 1)\right]^{-1/3}. \tag{4.2.12}$$

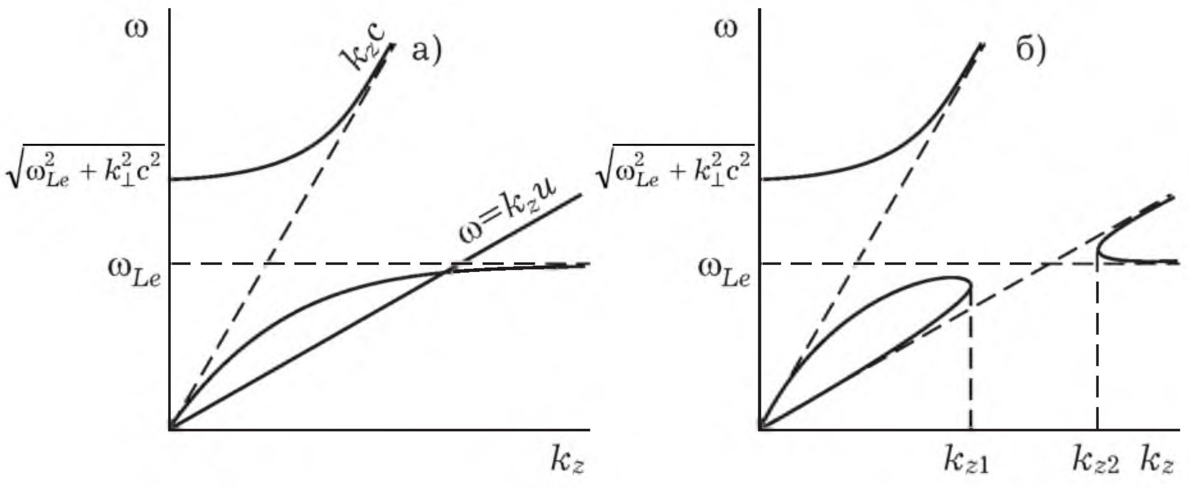

Рис. 4.2

В этом случае также $\mathrm{Re}\,\delta < 0$, поэтому $u > \omega/k_z$ и электроны пучка, обгоняя волну, попадают в тормозящие фазы поля, передавая часть своей кинетической энергии волне. Для нерелятивистского пучка, когда $\gamma \to 1$, возбуждаемая волна с большой степенью точности является квазипродольной (потенциальной), а с ростом γ становится сильно непотенциальной. При $\omega_b \neq 0$ рис. 4.2а преобразуется в рис 4.2б и неустойчивость оказывается конвективной.

В заключение обсудим вопрос о роли теплового движения электронов плазмы и пучка в развитии черепковской неустойчивости. Ранее тепловым движением частиц было полностью пренебрежено. Поэтому полученные формулы справедливы в условиях, когда фазовые скорости волн в лабораторной системе координат больше тепловых скоростей электронов плазмы, а в собственной системе координат пучка больше разброса электронов пучка по скоростям:

$$\frac{\omega}{k_z} \approx u \gg v_{Te}, \qquad \frac{\omega'}{k_z' u} \approx \frac{\delta\gamma^2}{\omega} \gg \frac{v_{Tb}}{u}. \tag{4.2.13}$$

Здесь v_{Te} – тепловая скорость электронов плазмы, а v_{Tb} – нерелятивистский разброс электронов пучка по скоростям в собственной системе координат.

Чтобы более строго обосновать условия (4.2.13), а также выяснить, как видоизменяется черепковская пучковая неустойчивость при их нарушении, рассмотрим взаимодействие пучка с плазмой при учете теплового движения частиц. Для упрощения ограничимся продольными волнами, возбуждаемыми пучком и распространяющимися строго вдоль направленной скорости пучка (и магнитного поля). Тогда дисперсионное уравнение колебаний электронной плазма-пучковой системы имеет вид

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 -$$
$$- \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left[1 - J_+\left(\frac{\omega}{k v_{Te}}\right)\right] - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{k'^2 v_{Tb}^2}\left[1 - J_+\left(\frac{\omega'}{k' v_{Tb}}\right)\right] = 0. \quad (4.2.14)$$

Отсюда видно, что неравенства (4.2.13) действительно представляют собой условия пренебрежения тепловым движением частиц в такой системе при развитии черенковской неустойчивости (при этом $k' = k\gamma^{-1}$). В этих условиях уравнение (4.2.14) сводится к виду

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{ku})^2} = 0, \quad (4.2.15)$$

причем оно совпадает с дисперсионным уравнением для продольных волн (4.2.7) при $k_\perp = 0$.

Рассмотренную черепковскую пучковую неустойчивость при полном пренебрежении тепловым движением частиц часто называют также гидродинамической, подчеркивая тем самым, что она является недиссипативной и может быть описана в рамках гидродинамики холодной плазмы. Как было показано, такая неустойчивость развивается при $\mathbf{ku} \leqslant \omega_{Le}$. Покажем, что при учете теплового движения частиц появляется черепковская неустойчивость и в области $\mathbf{ku} > \omega_{Le}$. В отличие от гидродинамической пучковой неустойчивости неустойчивость при $\mathbf{ku} > \omega_{Le}$ является диссипативной, обусловленной изменением знака черепковского затухания волн в плазме, и поэтому называется кинетической. В этих условиях вкладом пучка в действительную часть продольной диэлектрической проницаемости можно пренебречь и записать уравнение (4.2.14) следующим образом:

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\left(1 + 3\frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2}\right) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k^3 v_{Te}^3}\exp\left[-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right] +$$
$$+ i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_b^2(\omega - \mathbf{ku})\gamma^3}{k^3 v_{Tb}^3}\exp\left[-\frac{(\omega - \mathbf{ku})^2\gamma^4}{2k^2 v_{Tb}^2}\right] = 0 \quad (4.2.16)$$

с решением ($\omega \to \omega + \delta$)

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2,$$

$$\delta = -i\sqrt{\frac{\pi}{8}}\omega_{Le}^2 \left[\frac{\omega_b^2\gamma^3}{k^3 v_{Tb}^3}\left(1 - \frac{\mathbf{ku}}{\omega_{Le}}\right)\exp\left(-\frac{(\omega - \mathbf{ku})^2\gamma^4}{2k^2 v_{Tb}^2}\right) + \right. \tag{4.2.17}$$

$$\left. + \frac{\omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right)\right].$$

Видно, что при $\operatorname{Im}\delta > 0$ в системе возникает неустойчивость, которая возможна в области $\mathbf{ku} > \omega_{Le}$ и обусловлена изменением знака затухания Ландау на электронах пучка при выполнении черепковского условия $u > \omega/k \approx \omega_{Le}/k$. Следует отметить, что кинетическая пучковая неустойчивость, так же как и гидродинамическая неустойчивость, обладает вблизи частоты черепковского резонанса $\omega \approx \mathbf{ku} \approx \omega_{Le}$ максимальным инкрементом нарастания, величина которого падает с удалением от резонансной частоты.

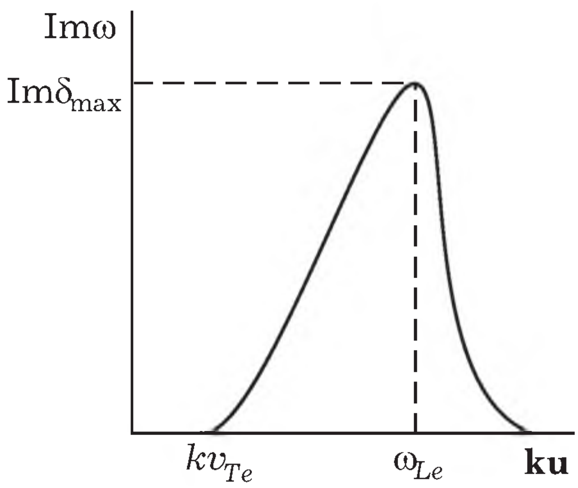

Рис. 4.3

На рис. 4.3 приведена зависимость инкремента нарастания черепковской пучковой неустойчивости от величины $\mathbf{ku}$; виден постепенный переход гидродинамической неустойчивости (нарастающая ветвь) к кинетической неустойчивости (спадающая ветвь).

§ 4.3. Взаимодействие вращающегося электронного пучка (потока осцилляторов) с плазмой. Циклотронная неустойчивость

В предыдущем параграфе отмечалось, что сильное взаимодействие электронного пучка с плазмой имеет место при выполнении черепковского, либо циклотронного резонанса. В случае прямолинейного пучка преобладающим является черепковское взаимодействие, поскольку в компонентах тензора диэлектрической проницаемости пучка (4.2.1) ему соответствуют полюсы второго порядка, в то время как циклотронное взаимодействие представлено полюсами первого порядка. Покажем, что при наличии у электронов пучка наряду с продольной также поперечной к внешнему магнитному полю компоненты направленной скорости циклотронное взаимодействие становится столь же сильным как и черепковское.

Из условия резонанса (4.2.2) видно, что при циклотронном взаимодействии не накладывается каких-либо ограничений на фазовую скорость: она может быть как больше, так и меньше скорости пучка. Важным является лишь соотношение между циклотронной частотой вращения электронов во внешнем магнитном поле и частотой электромагнитной волны. Поэтому, чтобы нагляднее пояснить механизм циклотронного взаимодействия, рассмотрим электромагнитные возмущения в системе вращающийся пучок – плазма, распространяющиеся строго поперек магнитного поля, полагая $k_z = 0$ н тем самым исключая черепковский резонанс. Для простоты ограничимся рассмотрением моноэнергетического вращающегося пучка, взаимодействующего с холодной электронной плазмой. При этом диэлектрическая проницаемость плазма-пучковой системы имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega) + \delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}), \tag{4.3.1}$$

где $\varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega)$ – диэлектрическая проницаемость холодной электронной плазмы, которая имеет хорошо известный вид (см. первую часть):

$$\varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp 0} & ig_0 & 0 \\ -ig_0 & \varepsilon_{\perp 0} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel 0} \end{pmatrix}, \tag{4.3.2}$$

где $\varepsilon_{\perp 0} = 1 - \dfrac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}$, $g_0 = -\dfrac{\omega_{Le}^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)}$, $\varepsilon_{\parallel 0} = 1 - \dfrac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}$, а $\delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ – поправка, обусловленная наличием электронного пучка.

Для вычисления $\delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ уже нельзя воспользоваться формулами преобразования Лоренца, поскольку здесь электроны пучка, кроме поступательной скорости, обладают еще и скоростью вращения, и для получения формул преобразования необходимо было бы перейти во вращающуюся систему координат. В этом случае удобнее вычислить $\delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ с помощью формул (4.1.7) и (4.1.8), подставляя в качестве равновесной функции распределения электронов пучка функцию (4.1.4). Опуская громоздкие вычисления, приведем окончательный вид компонент тензора $\delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ при $k_\perp \neq 0$ и $k_z \neq 0$:

$$\delta\varepsilon_{xx} = \sum_n \left[\frac{2}{z} n J_n(z) J_n'(z) P_n + n^2 J_n^2(z) Q_n\right],$$

$$\delta\varepsilon_{yy} = \sum_n \left[\frac{1}{z}\left(z^2 J_n'^2(z)\right)' P_n + z^2 J_n'^2(z) Q_n\right],$$

$$\delta\varepsilon_{zz} = -\frac{\omega_b^2}{\omega^2}\frac{1}{\gamma^2} + \sum_n \left[\left(\frac{2k_z u_\parallel}{\omega - k_z u_\parallel} J_n^2(z) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{u_\parallel^2}{u_\perp^2} 2z J_n(z) J_n'(z)\right) P_n + \frac{u_\parallel^2}{u_\perp^2} z^2 J_n^2(z) Q_n\right],$$

$$\delta\varepsilon_{xy} = -\delta\varepsilon_{yx} = -i \sum_n \left[\frac{n}{z}\left(z J_n(z) J_n'(z)\right)' P_n + \right. \tag{4.3.3}$$
$$\left. + n z J_n(z) J_n'(z) Q_n\right],$$

$$\delta\varepsilon_{xz} = \delta\varepsilon_{zx} = \sum_n \left[\left(\frac{n\Omega_e k_z}{k_\perp(\omega - k_z u_\parallel)} J_n^2(z) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{u}{u_\perp} 2n J_n(z) J_n'(z)\right) P_n + \frac{u_\parallel}{u_\perp} n z J_n^2(z) Q_n\right],$$

$$\delta\varepsilon_{yz} = -\delta\varepsilon_{zy} = i \sum_n \left[\left(\frac{\Omega_e k_z z J_n(z) J_n'(z)}{k_\perp(\omega - k_z u_\parallel)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{u_\parallel}{u_\perp}\left(z J_n(z) J_n'(z)]\right)'\right) P_n + \frac{u_\parallel}{u_\perp} z^2 J_n(z) J_n'(z) Q_n\right].$$

Здесь введены обозначения

$$
\begin{gathered}
P_n = \frac{\omega_b^2(\omega - k_z u_{\|})\gamma^{-1}}{\omega^2(\omega - k_z u_{\|} - n\Omega_e/\gamma)}, \\
Q_n = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3} \Omega_e^2(\omega^2 - k_z^2 c^2)}{\omega^2 c^2 k_\perp^2(\omega - k_z u_{\|} - n\Omega_e/\gamma)^2}, \\
z = \frac{k_\perp u_\perp}{\Omega_e}\gamma, \qquad \gamma = \left(1 - \frac{u_{\|}^2 + u_\perp^2}{c^2}\right)^{-1/2}.
\end{gathered}
\tag{4.3.4}
$$

Как уже отмечалось выше, мы проанализируем неустойчивость системы осцилляторов в плазме при $k_z = 0$, т.е. для чисто поперечного распространения волн. Из выражения (4.2.4) видно, что при $u_\perp \neq 0$ пучковые слагаемые компонент тензора диэлектрической проницаемости имеют полюсы второго порядка при $\omega = n\Omega_e/\gamma$. Это означает, что в этой области частот пучок сильно взаимодействует с электромагнитной волной. Чтобы убедиться в этом, проанализируем дисперсионное уравнение (4.1.1) для электромагнитных волн, распространяющихся поперек магнитного поля. В рассматриваемом случае это уравнение распадается на два уравнения:

$$
k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}}, \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{zz}, \tag{4.3.5}
$$

описывающие соответственно необыкновенную и обыкновенную волны. Здесь

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{\perp 0} + \delta\varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{xy} = ig_0 + \delta\varepsilon_{xy}, \\
\varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{\perp 0} + \delta\varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\|0} + \delta\varepsilon_{zz}.
\end{aligned}
\tag{4.3.6}
$$

Электрическое поле необыкновенной волны перпендикулярно к внешнему магнитному полю, а обыкновенной волны – параллельно ему. Поэтому необыкновенная волна может взаимодействовать лишь с поперечной компонентой импульса электронов пучка, а обыкновенная – с продольной.

В отсутствие пучка уравнения (4.3.5) описывают спектры колебаний холодной магнитоактивной плазмы, распространяющихся поперек магнитного поля. В первой части книги был проанализирован общий вид зависимости частот таких колебаний от волнового вектора $\mathbf{k}$. Для чисто электронных колебаний эту зависимость нетрудно найти и аналитически. Получаем

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\Omega_e^2 + 2\omega_{Le}^2 + k^2c^2 \pm \sqrt{4\omega_{Le}^2\Omega_e^2 + (k^2c^2 - \Omega_e^2)^2}\right], \quad \omega_3^2 = k^2c^2 + \omega_{Le}^2. \tag{4.3.7}$$

Частоты ω_1 и ω_2 соответствуют двум ветвям необыкновенной волны, а частота ω_3 – обыкновенной волне. Пересечения линий $\omega_\alpha(\mathbf{k})$ (где $\alpha = 1, 2, 3$) с линией $\omega = n\Omega_e/\gamma$ определяют области резонансного циклотронного взаимодействия вращающегося электронного пучка с указанными колебаниями плазмы (рис. 4.4а). Из рисунка видно: в условиях

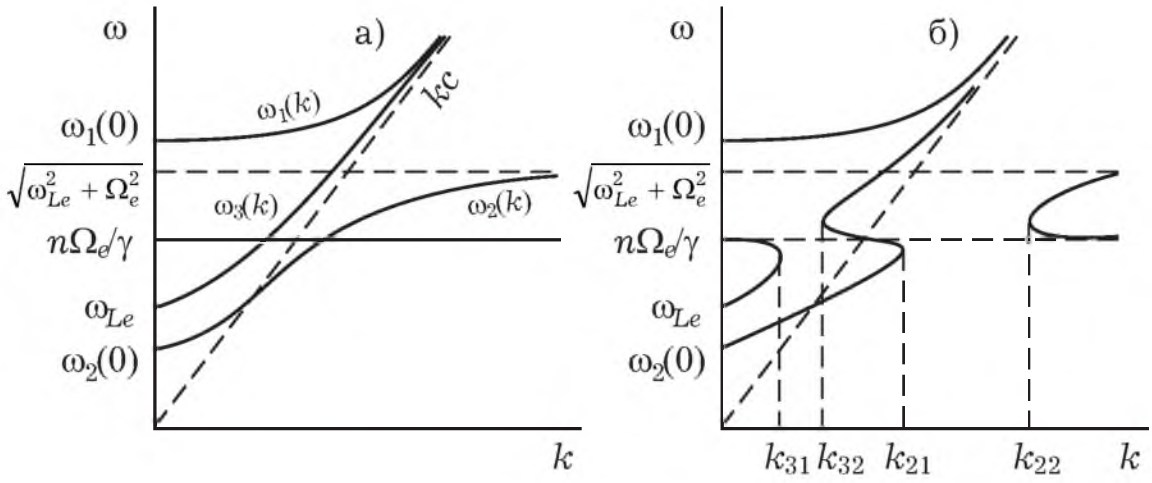

Рис. 4.4

$$\frac{n\Omega_e}{\gamma} < \omega_2(0) \tag{4.3.8}$$

циклотронный резонанс невозможен; в условиях

$$\omega_2(0) < \frac{n\Omega_e}{\gamma} < \omega_{Le} \tag{4.3.9}$$

возможно резонансное взаимодействие пучка с нижней ветвью необыкновенной волны; в условиях

$$\omega_{Le} < \frac{n\Omega_e}{\gamma} < \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2} \tag{4.3.10}$$

возможно резонансное взаимодействие пучка с нижней ветвью необыкновенной волны и с обыкновенной волной; в условиях

$$\sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2} < \frac{n\Omega_e}{\gamma} < \omega_1(0) \tag{4.3.11}$$

возможно резонансное взаимодействие пучка только с обыкновенной волной; в условиях

$$\frac{n\Omega_e}{\gamma} > \omega_1(0) \tag{4.3.12}$$

возможно резонансное взаимодействие пучка с обыкновенной волной и верхней ветвью необыкновенной волны.

Указанные условия определяют лишь возможность резонансного взаимодействия вращающегося пучка с собственными электромагнитными волнами холодной плазмы. О том, какие из этих волн будут возбуждаться пучком, можно судить, определив инкременты их нарастания. Для этого нужно решать уравнения (4.3.5) с учетом пучковых слагаемых в компонентах тензора диэлектрической проницаемости и условия резонансного взаимодействия $\omega = n\Omega_e/\gamma$. При определении инкрементов нарастания волн мы упростим задачу, а именно, рассмотрим предел редкой плазмы $\Omega_e \gg \omega_{Le}$. В § 4.2 было показано, что черенковское возбуждение волн прямолинейным пучком в такой плазме возможно при условии, когда плотность плазмы превышает некоторое критическое значение, хотя и сколь угодно малое для неограниченной в пространстве плазмы (см. условие (4.2.11)). Это было обусловлено требованием существования в плазме волны с фазовой скоростью, меньшей скорости света, которая могла бы находиться в черепковском резонансе с электронами пучка. В случае циклотронного резонанса это требование отпадает, поэтому отпадает и необходимость наличия плазмы: циклотронный резонанс возможен и при полном ее отсутствии. Тогда уравнения (4.3.5) существенно упрощаются:

$$\begin{gathered}
k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \frac{\omega_b^2\gamma^{-1}}{\omega^2}\frac{u_\perp^2}{c^2}\frac{{J'_n}^2\left(\dfrac{ku_\perp}{\Omega_e}\gamma\right)}{\left(1 - \dfrac{\omega\gamma}{n\Omega_e}\right)^2}\right], \\
k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \frac{\omega_b^2\gamma^{-1}}{\omega^2}\frac{u_\parallel^2}{c^2}\frac{J_n^2\left(\dfrac{ku_\perp}{\Omega_e}\gamma\right)}{\left(1 - \dfrac{\omega\gamma}{n\Omega_e}\right)^2}\right].
\end{gathered} \tag{4.3.13}$$

В этих уравнениях полностью пренебрежено плазменными слагаемыми в компонентах тензора диэлектрической проницаемости системы, а из пучковых слагаемых учтены только члены с полюсом второго порядка (для циклотронного резонанса).

Теперь можно легко решить уравнения (4.3.13), найдя частоты возбуждаемых пучком электромагнитных волн и инкременты их нарастания:

$$\omega \to \omega + \delta = \frac{n\Omega_e}{\gamma} + \delta. \tag{4.3.14}$$

В рассматриваемом приближении частоты необыкновенной и обыкновенной волн совпадают:

$$\omega = \frac{n\Omega_e}{\gamma} = kc, \tag{4.3.15}$$

а инкременты их нарастания соответственно равны:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_{\text{необ}}}{\omega} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\omega_b^2\gamma}{2n^2\Omega_e^2}\frac{u_\perp^2}{c^2}J_n'^{\,2}\left(\frac{nu_\perp}{c}\right)\right]^{1/3}, \\
\frac{\delta_{\text{об}}}{\omega} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\omega_b^2\gamma}{2n^2\Omega_e^2}\frac{u_\parallel^2}{c^2}J_n^2\left(\frac{nu_\perp}{c}\right)\right]^{1/3}.
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

В выражениях (4.3.16) $\operatorname{Re}\delta > 0$, в отличие от случая черенковской неустойчивости. При черепковском взаимодействии, когда $\omega = ku + \delta$ с $\operatorname{Re}\delta < 0$, торможение пучка приводит к уменьшению слагаемого ku. Компенсировать это уменьшение можно увеличением $\operatorname{Re}\delta$, в то же время неустойчивость должна стабилизироваться, т.е. $\delta \to 0$, а это возможно только при $\operatorname{Re}\delta < 0$. В случае циклотронной неустойчивости, когда $\omega = n\Omega_e/\gamma + \delta$ торможение пучка уже приводит к увеличению слагаемого $n\Omega_e/\gamma$, а, соответственно, $\operatorname{Re}\delta$ должна уменьшаться, следовательно, $\operatorname{Re}\delta > 0$. Учет пучка в уравнениях (4.3.5) (либо упрощенных уравнениях (4.3.13)) приводит к появлению инкрементов нарастания для волн $\omega_3(k)$ и $\omega_2(k)$ и тем самым искажает их спектры, представленные на рис. 4.4а, преобразуя их к виду, изображенному на рис. 4.4б, где $k_{21,22}$ и $k_{31,32}$ определяются величинами $\delta_{\text{необ}}$ и $\delta_{\text{об}}$ соответственно.

Из выражений (4.3.16) видно, что инкремент нарастания необыкновенной волны отличен от нуля лишь при наличии поперечной компоненты скорости электронов $u_\perp \neq 0$, причем с ростом $u_\perp$ инкремент увеличивается. Для существования ненулевого инкремента нарастания обыкновенной волны необходимо наличие также продольной компоненты скорости электронов $u_\parallel \neq 0$. Следует отметить, что инкременты нарастания для обеих волн максимальны на низших циклотронных гармониках n, особенно при нерелятивистских значениях поперечной компоненты скорости электронов, когда $u_\perp \ll c$.

Выше была исследована циклотронная неустойчивость вращающегося пучка в отсутствие плазмы. Наличие плазмы затрудняет развитие такой неустойчивости и при плотностях

$$\omega_{Le}^2 > \frac{n^2\Omega_e^2}{\gamma^2}\left(1 + \frac{\gamma}{n}\right) \tag{4.3.17}$$

она становится невозможной. Это обусловлено тем, что циклотронная частота излучения вращающихся электронов $n\Omega_e/\gamma$ экранируется плазмой, т.е. перестает быть собственной частотой системы.

Наконец, заметим, что рассмотренная неустойчивость является гидродинамической в том смысле, что она не связана с диссипативными процессами в системе и проявляется при полном пренебрежении тепловым разбросом скоростей электронов пучка. Учет последнего может привести к развитию в системе слабой кинетической циклотронной неустойчивости (см. задачу 6 по данной теме).

§ 4.4. Механизмы вынужденного черенковского излучения электронных пучков

4.4.1. Спонтанное черенковское излучение. В основе рассмотренного выше преобразования энергии направленного движения электронных пучков в электромагнитное излучение лежит явление резонансного взаимодействия отдельного электрона с полем монохроматической волны. При анализе такого взаимодействия обычно вычисляют работу электромагнитного поля над электроном, совершающим заданное, не возмущенное этим полем движение. Именно так описывают в классической электродинамике эффект, называемый спонтанным излучением. Выясним условия, при которых возникает спонтанное излучение.

Вычислим работу поля монохроматической волны над равномерно и прямолинейно движущимся электроном, считая, что направление распространения волны и направление движения электрона совпадают.

Представляя поле волны в виде $\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}\sin(\omega t - k_{\|}z + \varphi)$, для работы за время взаимодействия электрона с волной получим следующее выражение:

$$A_T = e\int\limits_{-T/2}^{T/2} \left.|\mathbf{uE}(z,t)|\right|_{z=u_{\|}t}\, dt \stackrel{T\to\infty}{\longrightarrow} \pi e u_{\|}E_{\|}\sin\varphi\delta(\omega - k_{\|}u_{\|}). \qquad (4.4.1)$$

Здесь $u_{\|}$ – скорость электрона, направленная вдоль оси $0z$, $E_{\|}$ – составляющая электрического поля волны в направлении движения, а φ – начальная фаза поля.

Из (4.4.1) следует, что знак работы определяется фазой поля φ; работа отлична от нуля, если только отлична от нуля составляющая электрического поля волны в направлении движения электрона. Работа A_∞ не равна нулю только в условиях черепковского резонанса, т.е. при

$$\omega(k_{\|}) = k_{\|}u_{\|}. \qquad (4.4.2)$$

Возникающее в условиях (4.4.2) спонтанное излучение называется эффектом Черенкова. При $\sin\varphi > 0$ имеет место излучение, а при $\sin\varphi < 0$, напротив, происходит поглощение излучения и ускорение частицы.

Выражение для работы в виде (4.4.1) линейно по амплитуде поля электромагнитной волны, поскольку при его вычислении поле бралось в точках на заданной невозмущенной траектории электрона, т.е. на траектории нулевого приближения. Можно сказать, что это выражение характеризует эффект спонтанного излучения первого порядка. Возможны, однако, эффекты спонтанного излучения и более высокого порядка по полю, например, второго.

Пусть электрон движется прямолинейно в поле двух волн с продольной составляющей вида

$$E_{\|} = \sum_{n=1,2} E_{\|n}\sin(\omega_n t - k_{\|n}z + \varphi_n) \qquad (4.4.3)$$

и пусть $\omega_{1,2} - k_{\|1,2}u_{\|} \equiv \Omega_{1,2} \neq 0$, т.е. спонтанное (черенковское) излучение первого порядка отсутствует. Вычислим работу такого поля над электроном. В первом приближении усредненная работа, вычисленная по траектории нулевого приближения, равна нулю. В том же первом приближении электрон просто осциллирует в поле двух волн с частотами $\Omega_{1,2}$. Учтем эти осцилляции под интегралом в выражении (4.4.1) (т.е. подставим туда $z = u_{\|}t + \tilde{z}$, где $\tilde{z}$ – поправка первого приближения) и после простых вычислений получим, что

$$A_{\infty} = \pi \frac{e^2 u_{\|} E_{\|1} E_{\|2}}{2m|\Omega_1 \Omega_2|} \left\{ (k_{\|1} - k_{\|2}) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \delta(\Omega_1 - \Omega_2) + \right.$$
$$\left. + (k_{\|1} + k_{\|2}) \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \delta(\Omega_1 + \Omega_2) \right\}. \quad (4.4.4)$$

Таким образом, работа отлична от нуля при выполнения одного из условий комбинационного резонанса:

$$(\omega_1 - k_{\|1} u_{\|}) \mp (\omega_2 - k_{\|2} u_{\|}) = 0. \quad (4.4.5)$$

Рассмотренный процесс следует считать спонтанным излучением волны с частотой ω_1 электроном, совершающим заданное движение в поле волны с частотой ω_2, и наоборот. Процесс спонтанного излучения второго порядка, протекающий в условиях (4.4.5), есть уже известное томсоновское рассеяние волны на движущемся электроне, что соответствует черепковскому излучению второго порядка.

Спонтанные эффекты более высокого порядка, чем второй, проявляются сравнительно редко, поэтому мы на них останавливаться не будем.

4.4.2. Вынужденное черенковское излучение. Переходя к изложению теории вынужденного черенковского излучения электронных пучков, попытаемся сначала действовать так же, как выше при рассмотрении спонтанного излучения. А именно, для вычисления работы поля волны излучения над пучком вычислим работу этого поля над каждым невозмущенным электроном, а затем просуммируем полученные результаты. В случае монохроматического поля суммирование достаточно проводить только по электронам, приходящимся на одну длину волны излучения. Таким образом, используя формулу (4.4.1), получаем

$$A_{\infty} = \pi e u_{\|} E_{\|} \delta(\omega - k_{\|} u_{\|}) \sum_j \sin \varphi_j, \quad (4.4.6)$$

где φ_j – фаза поля относительно j-го электрона. Но если пучок не модулирован, то фазы φ_j равномерно распределены в интервале $(0, 2\pi)$. Поэтому сумма в (4.2.6) обращается в нуль.

Таким образом, суммирование по невозмущенным отдельным электронам излучения не дает. Это и понятно, поскольку когерентные волны от каждого электрона гасят друг друга в результате интерференции. Чтобы получить ненулевое когерентное излучение, необходимо отказаться от предположения о независимости (невозмущенности) движения отдельных электронов, т.е. нужно учесть обратное воздействие поля волны излучения на каждый электрон пучка и тем самым считать фазы изменяющимися под действием этого поля. Именно при таком самосогласованном подходе возникает фазировка электронов в поле волны и появляется эффект вынужденного когерентного излучения. Что же касается спонтанного излучения, то оно в немодулированных пучках отсутствует.

Начнем с рассмотрения вынужденного черепковского излучения на примере прямолинейного пучка электронов, совершающего одномерное движение вдоль очень сильного внешнего магнитного поля. Частоту поля излучаемой волны

$$E_{\|}(z,t) = \frac{1}{2}\left[E_{\|}\exp(-i\omega t + ik_{\|}z) + \text{к.с.}\right] \tag{4.4.7}$$

будем считать близкой к какой-либо из собственных частот системы, в которой распространяется пучок, т.е. $\omega \approx \omega(k_{\|})$. Строго говоря, частота ω содержит мнимую поправку δ (инкремент), обусловленную экспоненциальным ростом поля на линейной стадии процесса излучения, т.е. под ω следует подразумевать $\omega + i\delta$. В рассматриваемых условиях возмущение траекторий электронов определяется уравнениями движения

$$\frac{dz}{dt} = v_{\|}, \qquad \frac{dv_{\|}}{dt} = \frac{e}{m}\left(1 - \frac{v_{\|}^2}{c^2}\right)^{3/2} E_{\|}(z,t). \tag{4.4.8}$$

Однако запись уравнений движения (4.4.8) только с учетом поля излучения в правой части не является, вообще говоря, достаточной. Дело в том, что сам пучок является колебательной системой, содержащей целый набор коллективных собственных мод – плазменных колебаний. Если при излучении эти колебания возбуждаются, то в правую часть второго из уравнений(4.4.8) надо добавить соответствующие пучковые поля. Процессы, в которых коллективные моды пучка не возбуждаются, называют одночастичными. В настоящем разделе только они и рассматриваются. Что же касается коллективных процессов и критериев их возникновения, то они будут исследованы позднее.

Линеаризуя уравнения движения (4.4.8), найдем в первом порядке по полю поправку $\tilde{z}_j(t)$ к невозмущенной траектории j-го электрона $z_j = u_{\|}(t - t_0) + z_{0j}$, исходящей в момент t_0 из точки z_{0j}. При нахождении этой поправки удобно считать, что при $t = t_0 \to -\infty$ излучение отсутствует, что соответствует предположению об адиабатическом включении поля излучения в бесконечном прошлом. Подставляя далее $\tilde{z}_j$ во второе из уравнений (4.4.8), получим после усреднения по всем электронам, приходящимся на длину волны поля излучения, закон изменения средней плотности импульса пучка $P_e = N_b m \left\langle v_{\|}(1 - v_{\|}^2/c^2)^{-1/2} \right\rangle$:

$$\frac{dP_e}{dt} = k_{\|} \frac{|E_{\|}|^2}{8\pi} \frac{(\omega_b^2/\gamma^3)(\omega - k_{\|}u_{\|})\delta}{\left[(\omega - k_{\|}u_{\|})^2 + \delta^2\right]^2}, \tag{4.4.9}$$

в котором $\gamma = (1 - u_{\|}^2/c^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор невозмущенных электронов пучка, $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 N_b/m}$ – лепгмюровская частота электронов пучка, а N_b – их плотность. Поясним, что усреднение при выводе (4.4.9) проводилось обычным образом:

$$\langle X \rangle = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} X_j, \tag{4.4.10}$$

где N – число электронов на длине волны, а X_j – усредняемая характеристика электрона. Очевидно также, что малые изменения импульса P_e и средней плотности энергии пучка W_e связаны между собой соотношением

$$\delta W_e = u_{\|} \delta P_e. \tag{4.4.11}$$

Для дальнейшего понадобятся законы сохранения энергии и импульса при излучении:

$$\frac{d}{dt}(W + W_e) = 0, \qquad \frac{d}{dt}(P + P_e) = 0, \tag{4.4.12}$$

в которых W и P – плотности энергии и импульса волны, а также выражение для P через квадрат амплитуды поля излучения:

$$P = \frac{k_{\|}}{\omega} \frac{|E_{\|}|^2}{8\pi}. \tag{4.4.13}$$

Используя (4.4.11)–(4.4.13), преобразуем (4.4.9) в уравнения для плотностей энергии и импульса излучения

$$\frac{d}{dt}(W, P) = -\frac{\omega(\omega_b^2/\gamma^3)(\omega - k_{\|}u_{\|})\delta}{\left[(\omega - k_{\|}u_{\|})^2 + \delta^2\right]^2}(W, P). \tag{4.4.14}$$

Из (4.4.14) следует вывод общего характера: если энергия волны растет со временем, т.е. $\delta > 0$, то $\omega - k_{\|}u_{\|} < 0$ или излучающий пучок обязательно обгоняет волну. Для того, чтобы определить, насколько пучок обгоняет волну, максимизируем правую часть (4.4.14) по расстройке $\omega - k_{\|}u_{\|}$, т.е. найдем оптимальное условие излучения:

$$\omega = k_{\|}u_{\|} - \delta/\sqrt{3}. \tag{4.4.15}$$

Определим теперь инкремент δ. Учитывая, что $dW/dt = 2W\delta$ (плотность энергии W квадратична по полю, а значит, растет как $\exp(2\delta t)$), из (4.4.14) и (4.4.15) находим известный одночастичный инкремент (см. предыдущие параграфы) черепковской пучковой неустойчивости

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega\omega_b^2}{4\gamma^3}\right)^{1/3}. \tag{4.4.16}$$

Оптимальное условие вынужденного излучения (4.4.15) практически совпадает с условием спонтанного черенковского излучения (4.4.2). Кстати, из (4.4.2), (4.4.13) следует известная связь между энергией и импульсом волны любой природы:

$$P = \frac{k_{\|}}{\omega}W. \tag{4.4.17}$$

Описанный выше процесс называют одночастичным (томсоновским) вынужденным эффектом Черенкова. Для него характерна продольная группировка электронов в поле волны и образование в ее тормозящих фазах излучающих электронных сгустков. Этой особенностью и обусловлено отраженное в (4.4.15) известное черепковское условие: обгон пучком излучаемой волны.

§ 4.5. Вынужденное циклотронное излучение электронных пучков

4.5.1. Спонтанное циклотронное излучение. Сначала рассмотрим спонтанное циклотронное излучение одного электрона, считая, что электрон движется в продольном постоянном магнитном поле $\mathbf{B}_0 \parallel 0z$ с отличными от нуля продольной $u_{\|}$ (по отношению к магнитному полю) и поперечной $u_{\perp}$ скоростями. При этом $z = u_{\|}t$, $v_x + iv_y = u_{\perp}\exp(i\Omega t/\gamma)$, где $\gamma = (1 - u_{\|}^2/c^2 - u_{\perp}^2/c^2)^{-1/2}$. Таким образом, электрон наряду с равномерным продольным движением совершает вращательное поперечное движение с частотой вращения Ω/γ. Вычисление работы поля чисто поперечной циркулярно-поляризованной электромагнитной волны

$$E_x + iE_y = iE_\perp \exp[\pm i(\omega t - k_\| z) + i\varphi] \tag{4.5.1}$$

над таким электроном дает результат

$$A_\infty = \pi e u_\perp E_\perp \sin\varphi \delta(\omega - k_\| u_\| \mp \Omega/\gamma). \tag{4.5.2}$$

Отсюда находим условие циклотронного излучения одним электроном

$$\omega = k_\| u_\| \pm \Omega/\gamma. \tag{4.5.3}$$

В более общем случае при произвольных поляризациях поля излучения и направлении распространения волны условия излучения записываются в виде

$$\omega = k_\| u_\| \pm n\Omega/\gamma, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.5.4}$$

Спонтанное излучение, возникающее при выполнении условий (4.5.3) и (4.5.4), называют магнитотормозным или циклотронным излучением. Здесь так же знак работы (4.5.2) зависит от φ, который и может быть как положительным, так и отрицательным, соответственно знакопеременной оказывается и работа A_∞. Поэтому, если рассмотреть излучение немодулированного пучка как сумму в (4.5.2) по знакам $\sin\varphi$ отдельных электронов, в результате получим ноль, т.е. спонтанное циклотронное излучение немодулированного пучка так же как и черепковское невозможно.

4.5.2. Вынужденное циклотронное излучение. Учтем теперь обратное воздействие поля излучения на движение электронов пучка (как это делалось выше) и выясним, как видоизменяется вынужденное излучение пучка электронов в постоянном внешнем магнитном поле при наличии у них изначального запаса энергии поперечного движения.

Пусть электроны равномерно распределены на ларморовской орбите и скорости их направлены, как показано на рис. 4.5. Частота вращения таких электронов во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}_0$, как уже отмечалось, есть Ω/γ, т.е. зависит от их энергии. Пусть также, как и выше, вектор напряженности электрического поля циркулярно-поляризованной волны вращается в каждой точке пространства с частотой ω, близкой к Ω/γ. Если $\omega \approx \Omega/\gamma$, то на участке окружности ABC электроны получают от поля энергию; поэтому величина γ растет, а частота вращения

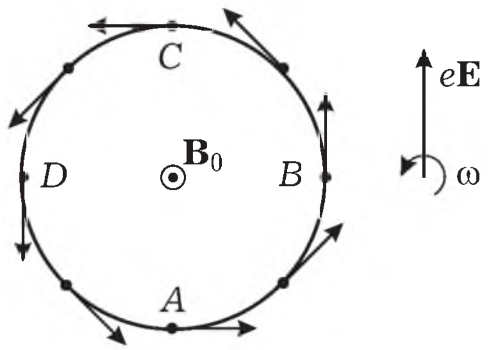

Рис. 4.5

электронов падает. В результате электроны с участка ABC стремятся сместиться к точке A. Легко видеть, что к этой же точке смещаются электроны и с участка ADC. В результате около точки A на ларморовской орбите возникает электронный сгусток. Однако, при $\omega = \Omega/\gamma$ из-за симметрии картины относительно направления $\mathbf{E}$ суммарная работа поля над электронами равна нулю. Симметрии нет при $\omega \neq \Omega/\gamma$, когда работа отлична от нуля и может возникнуть вынужденное циклотронное излучение, являющееся излучением вращающихся электронных сгустков, образованных под действием самого излучения. Ясно, что ключевым моментом здесь является зависимость частоты вращения электронов от γ т.е. релятивизм.

Для количественного исследования эффекта напишем уравнение для продольного импульса электрона пучка

$$\frac{dp_{\|}}{dt} = \frac{e}{2c}\left(v_{\perp}\frac{\partial A_{\perp}^{*}}{\partial z} + \text{к.с.}\right) \tag{4.5.5}$$

и представим продольную координату электрона, компоненты его скорости и поля излучения соответственно в виде

$$z = u_{\|}(t - t_0) + z_0 + \tilde{z}, \qquad v_{\|} = u_{\|} + \tilde{v}_{\|},$$

$$v_{\perp} = (u_{\perp} + \tilde{v}_{\perp})\exp[-i(\Omega/\gamma)(t - t_0) - i\varphi_0 - i\tilde{\varphi}], \tag{4.5.6}$$

$$A = A_0\exp(-i\omega t + ik_{\|}z), \qquad \omega \to \omega + i\delta,$$

где величины, отмеченные тильдой, суть малые возмущения, пропорциональные A_0, а z_0 и φ_0 – начальные координата и фаза вращения электрона. Усредним уравнение (4.5.5), учтя в нем члены вплоть до квадратичных по возмущениям. В результате получим соотношение

$$\frac{d\left\langle p_{\|}\right\rangle}{dt} = -ik_{\|}\frac{eN_b}{c}\times$$
$$\times\left\langle\frac{1}{2}\left[(u_\perp A_0+\tilde{v}_\perp A_0+iu_\perp\tilde{\theta}A_0)e^{i\Delta t+i\theta_0}-\text{к.с.}\right]\right\rangle,\quad (4.5.7)$$

в котором $\Delta=\omega-k_{\|}u_{\|}+\Omega/\gamma$, $\theta_0=\varphi_0-k_{\|}z_0$ – фаза движения электрона по спиральной траектории, а $\tilde{\theta}=\tilde{\varphi}-k_{\|}\tilde{z}$ – возмущение спиральной фазы.

Член, пропорциональный $u_\perp A_0$ в соотношении (4.5.7), определяет воздействие поля на невозмущенный электрон, т.е. отвечает за спонтанное излучение. При усреднении он исчезает. Член, пропорциональный $\tilde{v}_\perp A_0$, определяет вынужденное излучение одного электрона без фазовой группировки пучка. И наконец, член $u_\perp\tilde{\theta}A_0$ описывает фазовую группировку частиц. Именно он отвечает за вынужденное магнитотормозное излучение электронного пучка в целом.

Дальнейшее преобразование (4.5.7) сводится к вычислению в линейном приближении возмущений $\tilde{v}_\perp$ и $\tilde{\theta}$ и к применению закона сохранения импульса и формулы (4.4.13). Опуская простые промежуточные выкладки, приведем окончательное уравнение для плотности энергии и импульса излучения:

$$\frac{d}{dt}(W,P)=\omega(S_1+S_2)\,(W,P).\quad (4.5.8)$$

Здесь

$$S_1=\frac{(\omega_b/\gamma\omega)^2\Omega\delta}{(\omega-k_{\|}u_{\|}+\Omega/\gamma)^2+\delta^2},\quad (4.5.9)$$

$$S_2=\frac{u_\perp^2}{c^2}\left(1-\frac{k_{\|}^2c^2}{\omega^2}\right)\frac{(\omega_b^2/\gamma)(\omega-k_{\|}u_{\|}+\Omega/\gamma)\delta}{\left[(\omega-k_{\|}u_{\|}+\Omega/\gamma)^2+\delta^2\right]^2}.\quad (4.5.10)$$

При $u_\perp^2/c^2\to 0$, $|S_1|\gg|S_2|$, в то время как в наиболее интересном противоположном случае, когда

$$|S_2|\gg|S_1|,\quad (4.5.11)$$

уравнение (4.5.8) по структуре напоминает (4.4.14). Этого и следовало ожидать, поскольку эффект вынужденного циклотронного излучения связан, как вынужденный эффект Черенкова, с фазировкой электронов (в данном случае – с возмущением спиральной фазы $\tilde{\theta}$).

Учитывая, что в случае (4.5.11) уравнение (4.5.8) аналогично (4.4.14), запишем без труда инкремент неустойчивости при вынужденном циклотронном излучении:

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{4}\frac{u_\perp^2}{c^2}\frac{\omega_b^2}{\gamma}\left|\omega\left(1-\frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2}\right)\right|\right]^{1/3}. \qquad (4.5.12)$$

Условие же излучения имеет вид

$$\omega - k_\parallel u_\parallel + \Omega/\gamma = \pm\delta/\sqrt{3}. \qquad (4.5.13)$$

В последнем выражении знак плюс берется только при излучении волн с фазовой скоростью, большей $u_\parallel$, но меньшей скорости света c. В противном случае выбирается знак минус. Используя (4.5.9), (4.5.10) и (4.5.12) придадим явный вид неравенству (4.5.11):

$$\omega_b^2 \ll \left(\frac{u_\perp^2}{c^2}\gamma^2\right)^2\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^3\left[\omega\left(1-\frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2}\right)\right]^2. \qquad (4.5.14)$$

При увеличении плотности потока неравенство (4.5.14) нарушается и вынужденное циклотронное излучение становится невозможным. Иными словами, существует лишь одночастичное вынужденное циклотронное излучение при относительно малой плотности пучка. С увеличением плотности пучка величина $|S_1|$ становится преобладающим над $|S_2|$ и вынужденная пучковая неустойчивость отсутствует.

§ 4.6. Возбуждение низкочастотных волн в плазменной среде ионными пучками

В заключительном параграфе темы рассмотрим возможность черепковского возбуждения медленных волн в плазменной среде. Таких волн великое множество: ионный звук, альфвеновская волна, геликон или спиральная волна, связанные упруго-электромагнитные волны пьезосредах и т.п. Их фазовые скорости, как правило, меньше тепловых скоростей легких носителей – электронов, но больше тепловых скоростей ионов. Легко поэтому понять, что возбуждать такие волны быстрым электронным пучком мало эффективно – слишком велика разница между скорость пучка и фазовой скоростью волны. Значительно эффективнее они возбуждаются в среде ионными пучками. В связи с этим ниже мы рассмотрим задачу вынужденного черенковского излучения медленных волн быстрым ионным пучком, пронизывающим плазменную среду.

Начнем с рассмотрения излучения ионным пучком ионного звука, который может существовать как в изотропной, так и магнитоактивной неизотермической плазме. Дисперсионное уравнение для таких волн в плазменно-пучковой системе с учетом их потенциальности запишем в виде (массы ионов пучка и плазмы считаются равными):

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{k v_{Te}}\right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{bi}^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} = 0. \quad (4.6.1)$$

В длинноволновом пределе, когда $k^2 r_{De}^2 \ll 1$, отсюда находим спектр частот возбуждаемых благодаря черепковскому резонансу ионно-звуковых колебаний и инкремент их нарастания ($\omega = k v_s + \delta$):

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3}\omega & \text{при} \quad \left(\dfrac{N_b}{N_p}\right)^{1/3}\sqrt{\dfrac{M}{m}} > 1, \\[2ex] \dfrac{-1 + i}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{N_b}{N_p}\dfrac{2M}{\pi m}\right)^{1/2}\omega & \text{при} \quad \left(\dfrac{N_b}{N_p}\right)^{1/3}\sqrt{\dfrac{M}{m}} < 1. \end{cases} \quad (4.6.2)$$

Здесь $\mathrm{Re}\,\delta < 0$, что свидетельствует о черепковском механизме их возбуждения.

Формулы (4.6.2) сохраняют силу и в случае замагниченной плазмы. Ограничением на их применимость является требование $|\delta| > \nu_i$, где ν_i – обратное время релаксации скорости ионного пучка вследствие их рассеяния на ионах плазмы (в случае сильноионизованной плазмы), равное

$$\nu_i = \frac{2\pi e^4 N_p L}{\sqrt{2M}}\frac{1}{\left(\dfrac{Mu^2}{2}\right)^{3/2}}. \quad (4.6.3)$$

В случае пучка ионов водорода, взаимодействующего с водородной плазмой при $N_p \approx 10^{13}\,\text{см}^{-3}$ и $\mathcal{E}_b \simeq 10\,\text{кэВ}$, $N_b \simeq 10^8\,\text{см}^{-3}$ (что соответствует плотности тока пучка $j_b \simeq 1{,}5 \times 10^{-3}\,\text{А/см}^2 \simeq 1{,}5\,\text{мА/см}^2$, $\nu_i \simeq 200\,\text{с}^{-1}$, в то время как величина $\mathrm{Im}\,\delta$, согласно (4.6.2), может достигать $10^5 \div 10^6\,\text{с}^{-1}$, т.е. $|\delta| \gg \nu_i$.

Выше мы рассмотрели задачу возбуждения ионно-звуковых колебаний ионным пучком, пронизывающим неизотермическую газовую плазму. Покажем теперь, что ионный пучок может возбуждать и упругие звуковые колебания в твердом теле, если только это пьезополуроводник, либо пьезодиэлектрик. В пьезополупроводнике возбуждать упругие волны удобнее пропуская через образец электрический ток. В пьезодиэлектрике же их возбуждение возможно только пучком ионов, пролетающим над поверхностью образца. Исходя из этих соображений, мы здесь рассмотрим вторую задачу, поскольку первая уже была рассмотрена в теме II.

Предположим, что полуограниченный пьезодиэлектрик обладает гексагональной симметрией, причем главная ось симметрии направлена вдоль оси $0z$, а ограничивающей поверхностью является плоскость $x = 0$. Пьезодиэлектрик занимает область $x > 0$, а в области $x < 0$ параллельно поверхности вдоль оси $0y$ движется моноэнергетический ионный пучок с продольной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_{bi} = 1 - \frac{\omega_{bi}^2}{(\omega - k_y u)^2}. \tag{4.6.4}$$

Здесь u – скорость прямолинейного пучка ионов. Зазор между пучком и поверхностью отсутствует. Надо найти дисперсионное уравнение поверхностных волн (для простоты с $k_z = 0$) в такой системе и исследовать их спектр.

Сформулированная задача аналогична рассмотренной в первой части книги при изучении поверхностных волн. Отличие состоит в том, что поверхность $x = 0$ является границей раздела двух сред, а не среды с вакуумом. Поэтому проведем здесь обобщение рассмотренной там задачи для границы раздела двух сред. Это обобщение очевидно, а поэтому выпишем лишь окончательный результат – дисперсионное уравнение:

$$\int\limits_0^\infty \frac{dk_x}{k^2\varepsilon^{l(0)}(\omega,k) - \dfrac{4\pi k^2 \beta_1^{(0)2}}{\omega^2 \rho^{(m)(0)}} - \lambda_{tr}^{(0)} k^2} + \int\limits_0^\infty \frac{dk_x}{k^2\varepsilon^{l(1)}(\omega,k) - \dfrac{4\pi k^2 \beta_1^{(1)2}}{\omega^2 \rho^{(m)(1)}} - \lambda_{tr}^{(1)} k^2} = 0. \tag{4.6.5}$$

Здесь индексами 0 и 1 обозначены величины слева и справа от границы.

В рассматриваемом случае слева от границы раздела имеем только ионный пучок с диэлектрической проницаемостью (4.6.4), а справа – пьезодиэлектрик, диэлектрическую проницаемость которого для простоты примем равной единице: $\varepsilon^{l(1)} = 1$. Считая пьезоэффект слабым, т. е. $4\pi\beta_1^2/\rho^{(m)}v_{tr}^2 \ll 1$ (индексы 0 и 1 ввиду ненадобности опускаем), из уравнения (4.6.5) получаем:

$$(\omega^2 - k_y^2 v_{tr}^2)(1+\varepsilon_{bi}^2)^2 = \left(\frac{4\pi\beta_1^2}{\rho^{(m)}v_{tr}^2}\varepsilon_{bi}\right)^2 k_y^2 v_{tr}^2. \tag{4.6.6}$$

Уравнение (4.6.6) может обладать решениями, соответствующими нарастающим во времени поверхностным волнам. Такие решения существуют в условиях, когда

$$\omega = k_y v_{tr} + \delta = \omega - k_y u + \omega_b + \delta. \tag{4.6.7}$$

Причем нарастающим волнам соответствует решение

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4\pi\beta_1^2}{\rho^{(m)}v_{tr}^2}\right)^{2/3}\left(\frac{\omega_{bi}^2}{\omega^2}\right)^{1/3}. \tag{4.6.8}$$

Таким образом, ионный пучок может возбуждать в пьезодиэлектрике упругую волну, причем неустойчивость носит рамановский характер, что видно из условий (4.6.6). При развитии неустойчивости энергия пучка частично трансформируется в энергию упругих колебаний.

Задачи по теме IV

Задача 1. Пусть с момента времени $t = 0$ в пространственно неограниченную изотропную плазму в плоскости $z = 0$ инжектируется релятивистский электронный пучок с радиусом r_0 и скоростью $\mathbf{u} \parallel 0z$. Найти индуцированные в плазме заряд и ток. Плазму считать бесстолкновительной.

Решение.

Плотность заряда пучка

$$\rho_0 = eN_b\eta(r_0 - r)\left[\eta(z) - \eta(z-ut)\right], \tag{1}$$

где $\eta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\eta(x) = 0$ при $x < 0$. Плотность тока пучка

$$\mathbf{j}_0 = \rho_0 u. \tag{2}$$

Индуцированные в плазме заряд ρ и ток $\mathbf{j}$ удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\partial\rho_0/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j}_0 = \partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{3}$$

Это означает, что в объеме плазмы не происходит рождения и гибели электронов. Диэлектрическую проницаемость плазмы представим в виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij} = \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right)\delta_{ij}. \tag{4}$$

Для решения системы уравнений поля

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}+\mathbf{j}_0), \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,\\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho+\rho_0)\end{gathered} \tag{5}$$

воспользуемся преобразованием Фурье–Лапласа

$$\begin{gathered}A(r,t) = \int\limits_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} d\omega\, e^{-i\omega t}\int d\mathbf{k}\, e^{i\mathbf{kr}}A(\mathbf{k},\omega),\\ A(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_0^\infty dt\, e^{i\omega t}\int d\mathbf{r}\, e^{-i\mathbf{kr}}A(\mathbf{r},t)\end{gathered} \tag{6}$$

и материальными уравнениями для изотропной плазмы

$$\begin{gathered}\mathbf{j}(\omega,\mathbf{k}) = \sigma\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k}) = \frac{(\varepsilon(\omega)-1)\,\omega}{4\pi i}\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k}),\\ \rho(\omega,\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{kj}(\omega,\mathbf{k})}{\omega}.\end{gathered} \tag{7}$$

Из уравнений (5) при этом легко находим Фурье-образ индуцированного в плазме электрического поля:

$$\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k}) = \frac{4\pi i}{\omega}\left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mathbf{j}_0(\omega,\mathbf{k}) - \mathbf{k}\left(\mathbf{kj}_0(\omega,\mathbf{k})\right)\right]\left[\varepsilon(\omega)\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right)\right]^{-1}, \tag{8}$$

где $\mathbf{j}_0(\omega,\mathbf{k})$ – Фурье-образ тока пучка:

$$\mathbf{j}_0(\omega,\mathbf{k}) = -\frac{eN_b r_0\mathbf{u}J_1(k_\perp r_0)}{4\pi^2 k_\perp k_z(\omega - \mathbf{ku})}. \tag{9}$$

Подстановка (8) и (7) в формулы обратного преобразования Фурье (6) решает поставленную задачу, т.е. определяет индуцированные в плазме заряд и ток в любой момент времени и в любой точке пространства. Проанализируем эти интегральные выражения в асимптотическом пределе при больших значениях времени t и координаты z, когда все переходные процессы затухают и функции $\rho(t,\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}(t,\mathbf{r})$

становятся функциями $t' = t - z/u$. Согласно теореме Лапласа, для таких асимптотических значений имеем

$$A_\infty(t,\mathbf{r}) = \lim_{\substack{t\to\infty\\ z\to\infty}} A(t,\mathbf{r}) = -i\int d\mathbf{k} \lim_{\omega\to\mathbf{ku}}(\omega - \mathbf{ku})A(\omega,\mathbf{k})e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}. \tag{10}$$

Учитывая это соотношение, находим

$$\rho_\infty(t,\mathbf{r}) = \frac{ieN_b r_0}{2\pi}\int\limits_0^\infty dk_\perp\, J_1(k_\perp r_0)J_0(k_\perp)\int\limits_{-\infty}^\infty dk_z\,\frac{e^{ik_z(z-ut)}}{k_z\varepsilon(k_z u)} - \rho_0,$$

$$\mathbf{j}_\infty(t,\mathbf{r}) = \frac{ieN_b r_0\omega_{Le}^2}{2\pi}\int\limits_0^\infty dk_\perp\, J_1(k_\perp r_0)\int\limits_{-\infty}^\infty dk_z\,\frac{e^{ik_z(z-ut)}}{k_z u\varepsilon\left(k^2 - \dfrac{k_z^2u^2}{c^2}\varepsilon\right)}\times \tag{11}$$

$$\times\left[i\frac{k_\perp}{k}J_1(k_\perp r)\mathbf{e}_r + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\varepsilon\right)J_0(k_\perp r)\mathbf{e}_z\right].$$

Интегралы (11) определяются полюсами подынтегральных выражений

$$k_{z\,1,2} = \pm\frac{\omega_{Le}}{u}, \qquad k_{z\,3,4} = \pm i\gamma\sqrt{k_\perp^2 + \frac{\omega_{Le}^2}{c^2}}. \tag{12}$$

Первые два корня соответствуют продольным колебаниям изотропной плазмы при $\omega = k_z u$, а последующие два – поперечным колебаниям. Естественно, наибольший интерес представляют значения ρ_∞ и $\mathbf{j}_\infty$ за фронтом пучка, на достаточно большом удалении от него $z' = z - ut \gg \dfrac{c}{\gamma\omega_p}$. Тогда

$$\rho_\infty = eN_b\eta(r_0 - r)\left(\cos\frac{\omega_{Le}z'}{u} - 1\right),$$

$$j_{z\infty} = eN_b u\frac{\omega_{Le}^2 r_0}{u^2}\left[\Psi_{00}(u)\cos\frac{\omega_{Le}z'}{u} - \frac{u^2}{c^2}T_{00}(c)\right], \tag{13}$$

$$j_{r\infty} = -eN_b u\frac{\omega_{Le}^2 r_0}{u^2}\Psi_{11}(u)\frac{u}{\omega_{Le}}\sin\frac{\omega_{Le}z'}{u},$$

где

$$\Psi_{nm}(u) = \int\limits_0^\infty dk_\perp\, k_\perp^m\frac{J_n(k_\perp r)J_0(k_\perp r_0)}{k_\perp^2 + \omega_{Le}^2/u^2},$$

$$T_{00}(c) = \int\limits_0^\infty dk_\perp\,\frac{J_0(k_\perp r)J_1(k_\perp r_0)}{k_\perp^2 + \omega_{Le}^2/c^2}. \tag{14}$$

Из (13) видно, что ток $j_{r\infty}$ является быстро осциллирующей функцией z' и при усреднении обращается в нуль. Усредненный индуцированный заряд в точности равен по величине и противоположен по знаку заряду пучка, так что полный заряд в плазме отсутствует – имеется усредненная зарядовая нейтрализация пучка. Индуцированный ток $j_{z\infty}$ при малой плотности плазмы, когда $\alpha = \omega_{Le}^2 r_0^2/c^2 \ll 1$, мал по сравнению с током пучка и составляет от него α-ю часть. В случае же плотной плазмы, когда $\alpha \gg 1$, ток $j_{z\infty}$ по величине порядка тока пучка, а усредненная его часть с точностью до членов $1/\alpha$ равна по величине и противоположна по знаку току пучка. Таким образом, в отличие от зарядовой нейтрализации, которая имеет место уже при плотностях плазмы, превышающих плотность пучка, токовая нейтрализация пучка происходит лишь в плотной плазме, в которой $\omega_{Le}^2 \gg c^2/r_0^2$.

Задача 2. Исследовать взаимодействие прямолинейного релятивистского электронного пучка малой плотности с высокочастотными электростатическими колебаниями холодной магнитоактивной плазмы.

Решение.

Дисперсионное уравнение, описывающее взаимодействие прямолинейного релятивистского электронного пучка с продольными электронными колебаниями магнитоактивной плазмы, записывается в виде

$$\frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_z^2}{k^2}\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) + \frac{k_\perp^2}{k^2}\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}\right) -$$

$$- \frac{k_z^2}{k^2}\frac{\omega_b^2\gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} - \frac{k_\perp^2\omega_b^2\gamma^{-1}}{(\omega - k_z u)^2 - \Omega_e^2\gamma^{-2}} = 0. \quad (1)$$

Отсюда находим спектры частот собственных продольных колебаний плазмы в отсутствие пучка:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2 \pm \sqrt{(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\frac{k_z^2}{k_\perp^2 + k_z^2}\omega_{Le}^2\Omega_e^2}\right]. \quad (2)$$

На рис. 4.6 приведены спектральные кривые $\omega_{1,2}(k_z)$. Здесь же приведены прямые

$$\omega = k_z u, \qquad \omega = k_z u \pm \Omega_e/\gamma, \quad (3)$$

соответствующие черепковскому и циклотронному взаимодействиям пучка с колебаниями плазмы. На пересечении этих прямых со спектральными кривыми $\omega_{1,2}(k_z)$ возникает сильное резонансное взаимодействие пучка с плазмой и возможно развитие черенковской и циклотронной неустойчивостей. Из рис. 4.6 видно, что прямая $\omega = k_z u - \Omega_e/\gamma$ пересекает обе ветви продольных волн, прямая $\omega = k_z u$ всегда пересекает верхнюю ветвь, а при $k_\perp u < \min(\omega_{Le}, \Omega_e)$ – также нижнюю ветвь; прямая $\omega = k_z u + \Omega_e/\gamma$ пересекает только верхнюю ветвь.

Простые формулы для частот и инкрементов нарастания колебаний удается получить в предельных случаях плотной $\omega_{Le}^2 \gg \Omega_e^2$ и разреженной $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$ плазмы. В плотной плазме при развитии черенковской неустойчивости ($\omega = k_z u + \delta$) происходит преимущественное возбуждение верхней ленгмюровской ветви колебаний со спектром

$$\omega \approx \omega_{Le}, \qquad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2\gamma}\left(\frac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3}\left[1 + \frac{k_\perp^2 u^2}{\omega_{Le}^2}\right]^{-1/3}. \quad (4)$$

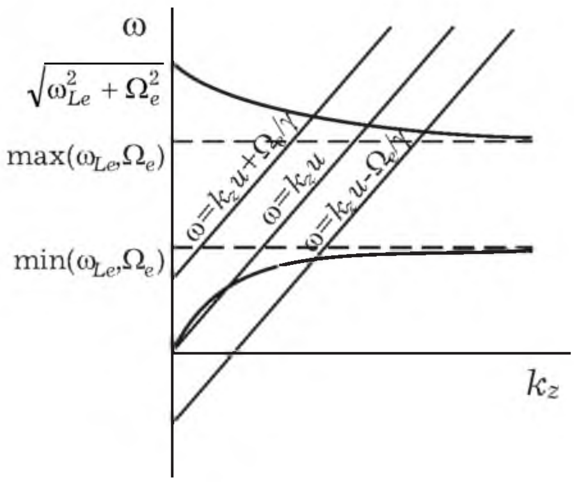

Рис. 4.6

Циклотронная неустойчивость ($\omega = k_z u \pm \Omega_e/\gamma + \delta$) в этих условиях также возбуждает преимущественно верхнюю ветвь колебаний, причем

$$\omega \approx \omega_{Le}, \qquad \frac{\delta}{\omega} \approx i\frac{1}{2}\left(\frac{N_b}{N_p}\frac{\omega_{Le}}{\Omega_e}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k_\perp^2 u^2}\right]^{-1/2}. \tag{5}$$

Из сравнения (4) и (5) видно, что инкремент развития черенковской неустойчивости $\operatorname{Im}\delta \sim (N_b/N_p)^{1/3}$, в то время как для циклотронной неустойчивости $\operatorname{Im}\delta \sim (N_b/N_p)^{1/2}$. Тем не менее циклотронная неустойчивость может оказаться преобладающей, если

$$\frac{1}{\gamma^{1/3}} > \left(\frac{\omega_{Le}}{\Omega_e}\right)^{1/2}\left(\frac{N_b}{N_p}\right)^{1/6} > \frac{1}{\gamma}, \tag{6}$$

что возможно в случае ультрарелятивистских электронных пучков. В разреженной плазме при развитии черенковской неустойчивости происходит преимущественное возбуждение нижней ленгмюровской ветви продольных колебаний со спектром

$$\omega \approx \sqrt{\omega_{Le}^2 + k_\perp^2 u^2}, \qquad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2\gamma}\left(\frac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3}. \tag{7}$$

Для циклотронной неустойчивости имеем

$$\omega \approx \omega_{Le}, \qquad \frac{\delta}{\omega} \approx i\frac{1}{3}\left(\frac{N_b}{6N_p}\right)^{1/2}\left(\frac{\omega_{Le}}{\Omega_e}\right)^{1/2}. \tag{8}$$

Этот инкремент всегда намного меньше, чем инкремент (7), поэтому в разреженной плазме циклотронная неустойчивость вообще не может проявиться.

Задача 3. Исследовать взаимодействие двух встречных одинаковых плазменных пучков, движущихся параллельно внешнему магнитному полю со скоростями, намного меньшими тепловой скорости электронов.

Решение.

Поскольку скорости движения пучков намного меньше скорости света, при исследовании их взаимодействия достаточно ограничиться анализом потенциальных (электростатических) возмущений. Дисперсионное уравнение для таких возмущений в системе двух сталкивающихся пучков записывается в виде

$$1+\sum_{e,i}\frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2v_{T\alpha}^2}\left[2-\sum_s\frac{\omega-\mathbf{ku}}{\omega-\mathbf{ku}-s\Omega_\alpha}A_s\left(\frac{k_\perp^2v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2}\right)J_+\left(\frac{\omega-\mathbf{ku}-s\Omega_\alpha}{k_zv_{T\alpha}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_s\frac{\omega+\mathbf{ku}}{\omega+\mathbf{ku}-s\Omega_\alpha}A_s\left(\frac{k_\perp^2v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2}\right)J_+\left(\frac{\omega+\mathbf{ku}-s\Omega_\alpha}{k_zv_{T\alpha}}\right)\right]=0. \quad (1)$$

Проанализируем это уравнение в двух предельных случаях: в отсутствие внешнего магнитного поля и при наличии бесконечно сильного продольного магнитного поля. В отсутствие магнитного поля из (1) получаем

$$1+\sum_{e,i}\frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2v_{T\alpha}^2}\left[2-J_+\left(\frac{\omega-\mathbf{ku}}{kv_{T\alpha}}\right)-J_+\left(\frac{\omega+\mathbf{ku}}{kv_{T\alpha}}\right)\right]=0. \quad (2)$$

Отсюда, в частности, следует, что в условиях $u\ll v_{Ti}$ колебания, описываемые этим уравнением, устойчивы, более того, они затухают во времени. Это означает, что взаимодействие между пучками плазмы отсутствует. При $v_{Ti}\ll u\ll v_{Te}$ из (2) имеем

$$1+2\frac{\omega_{Le}^2}{k^2v_{Te}^2}\left(1-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}}\right)-\frac{\omega_{Li}^2}{(\omega-\mathbf{ku})^2}-\frac{\omega_{Li}^2}{(\omega+\mathbf{ku})^2}=0. \quad (3)$$

Пренебрегая малым слагаемым в этом уравнении, описывающим черепковское поглощение волн электронами (и членами, учитывающими поглощение на ионах, как экспоненциально малыми), находим спектр

$$\omega_{1,2}^2=\left(1+2\frac{\omega_{Le}^2}{k^2v_{Te}^2}\right)^{-1}\left\{\omega_{Li}^2+(\mathbf{ku})^2\left(1+2\frac{\omega_{Le}^2}{k^2v_{Te}^2}\right)\pm\right.$$

$$\pm\left(\left[\omega_{Li}^2+(\mathbf{ku})^2\left(1+2\frac{\omega_{Le}^2}{k^2v_{Te}^2}\right)\right]^2+4(\mathbf{ku})^2\left(1+2\frac{\omega_{Le}^2}{k^2v_{Te}^2}\right)\times\ldots\right.$$

$$\left.\left.\ldots\times\left[2\omega_{Li}^2-(\mathbf{ku})^2\left(1+2\frac{\omega_{Le}^2}{k^2v_{Te}^2}\right)\right]\right)^{1/2}\right\}. \quad (4)$$

Видно, что при условии

$$2\omega_{Li}^2>(\mathbf{ku})^2\left(1+2\frac{\omega_{Le}^2}{k^2v_{Te}^2}\right) \quad (5)$$

корень $\omega_2^2\approx-(\mathbf{ku})^2<0$, т.е. колебания апериодически неустойчивы, что соответствует сильному взаимодействию сталкивающихся пучков. Согласно (5) такое взаимодействие возможно при скоростях $u<v_s=\sqrt{T_e/M}$, но поскольку $u\gg v_{Ti}$, оно имеет место только в неизотермической плазме с $T_e\gg T_i$.

Указанная гидродинамическая неустойчивость сохраняется и при наличии сильного продольного магнитного поля. Так, в пределе $B_0 \to \infty$ при $v_{Ti} \ll u \ll v_{Te}$ из (1) получаем

$$1 + 2\frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left(1 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{|k_z|v_{Te}}\right) - \frac{k_z^2}{k^2}\left[\frac{\omega_{Li}^2}{(\omega - \mathbf{ku})^2} + \frac{\omega_{Li}^2}{(\omega + \mathbf{ku})^2}\right] = 0. \qquad (6)$$

Из сравнения этого уравнения с (3) заключаем, что неустойчивость в случае взаимодействия сильно замагниченных плазменных пучков имеет такую же природу, как и в случае незамагниченных. Только условие (5) немного видоизменяется:

$$2\omega_{Li}^2 > k^2 u^2 \left(1 + 2\frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\right) \qquad (7)$$

и увеличивается инкремент нарастания неустойчивости:

$$\omega_2^2 \approx -k^2 u^2. \qquad (8)$$

Задача 4. Показать, что при инжекции пучка ионов в электронный пучок возможен их захват и ускорение при резонансе продольной электронной циклотронной волны с черенковской волной пучка ионов, т.е. при

$$\omega \approx k_z u_e - \Omega_e/\gamma \approx k_z u_i,$$

где u_e и u_i – направленные скорости электронов и ионов.

Решение.

Поскольку скорость ионов мала по сравнению со скоростью света, при исследовании взаимодействия электронного и ионного пучков можно ограничиться анализом устойчивости продольных волн, описываемых дисперсионным уравнением

$$\frac{k_\perp^2}{k^2}\left[1 - \frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-1}}{(\omega - k_z u_e)^2 - \Omega_e^2/\gamma^2}\right] + \frac{k_z^2}{k^2}\left[1 - \frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-3}}{(\omega - k_z u_e)^2}\right] - \frac{\omega_{Li}^2}{(\omega - k_z u_i)^2} = 0. \qquad (1)$$

При написании этого уравнения предполагалось, что $\omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$, т.е. ионы незамагничены. Электроны же, наоборот, сильно замагничены, $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2/\gamma$. Решение уравнения (1) в этих условиях можно искать в виде

$$\omega = \omega_0 + \delta = k_z u_i + \delta, \qquad (2)$$

где ω_0 определяется из (1) в отсутствие ионного пучка:

$$\omega_0 = k_z u_e - \frac{\Omega_e}{\gamma} + \frac{k_\perp^2}{k^2}\frac{\omega_{Le}^2\gamma^{-2}}{\Omega_e}. \qquad (3)$$

В результате находим

$$\delta^3 = -\frac{k_\perp^2}{k^2}\frac{\omega_{Le}^2\omega_{Li}^2}{2\Omega_e}. \qquad (4)$$

Неустойчивым колебаниям соответствует следующее решение этого уравнения:

$$\delta_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{k_\perp^2}{k^2}\frac{\omega_{Le}^2\omega_{Li}^2}{2\Omega_e}\right)^{1/3} \qquad (5)$$

Поскольку $\operatorname{Re}\delta_1 > 0$ фазовая скорость волны оказывается больше скорости ионов, ионы попадают в ускоряющую фазу поля, поэтому волна ускоряет их. Ионы получают энергию от волны, амплитуда которой растет во времени с инкрементом $\operatorname{Im}\delta_1 > 0$. Энергия волны при этом, однако, уменьшается, так как в рассматриваемых условиях $\omega = \omega_0 < k_z u_e$ энергия циклотронной волны в пучке отрицательна:

$$|E|^2 \left|\frac{\partial}{\partial\omega}\omega\varepsilon(\omega)\right|_{\omega=\omega_0} \approx 2|E|^2 \frac{k_\perp^2}{k^2} \frac{\omega(\omega_0 - k_z u_e)\omega_{Le}^2 \gamma^{-1}}{[(\omega_0 - k_z u_e)^2 - \Omega_e^2/\gamma^2]^2} < 0. \tag{6}$$

Задача 5. Исследовать возбуждение полуциклотронных волн в системе встречных вращающихся моноэнергетических электронных пучков, обладающих малой поперечной скоростью $u_\perp^2 \ll c^2$.

Решение.

Возбуждение полуциклотронных волн в системе встречных пучков возможно при выполнении условия двойного резонанса – черепковского и циклотронного:

$$\omega \approx k_z u, \qquad \omega \approx \Omega_e/\gamma - k_z u. \tag{1}$$

Для исследования двойного резонанса необходимо знание тензора диэлектрической проницаемости с $k_z \neq 0$, который в условиях $u_\perp^2 \ll c^2$ имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

причем

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 1 - \frac{\omega_b^2\gamma^{-1}}{2\omega^2}\left\{\frac{2(\omega - k_z u_{||})^2}{(\omega - k_z u_{||})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2} + \frac{2(\omega + k_z u_{||})^2}{(\omega + k_z u_{||})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2} + \right.$$

$$\left. + u_\perp^2\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left[\frac{(\omega - k_z u_{||})^2 + \Omega_e^2/\gamma^2}{\left[(\omega - k_z u_{||})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2\right]^2} + \frac{(\omega + k_z u_{||})^2 + \Omega_e^2/\gamma^2}{\left[(\omega + k_z u_{||})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2\right]^2}\right]\right\},$$

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -i\frac{\omega_b^2\gamma^{-1}}{2\omega^2}\left\{\frac{2(\omega - k_z u_{||})\Omega_e/\gamma}{(\omega - k_z u_{||})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2} + \frac{2(\omega + k_z u_{||})\Omega_e/\gamma}{(\omega + k_z u_{||})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2} + \right. \tag{3}$$

$$\left. + 2u_\perp^2\frac{\Omega_e}{\gamma}\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left[\frac{\omega - k_z u_{||}}{\left[(\omega - k_z u_{||})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2\right]^2} + \frac{\omega + k_z u_{||}}{\left[(\omega + k_z u_{||})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2\right]^2}\right]\right\},$$

$$\varepsilon_{33} = 1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_{||}^2}\left[\frac{1}{(\omega - k_z u_{||})^2} + \frac{1}{(\omega + k_z u_{||})^2}\right].$$

Подставляя выражение (3) в общее дисперсионное уравнение (4.1.1) и учитывая линейные по плотности пучка слагаемые, содержащие полюсы черепковского и циклотронного типов (1), получим

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \left(k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\frac{\omega_b^2\gamma^{-1}u_\perp^2}{2\omega^2}\frac{(\omega + k_z u_{||})^2 + \Omega_e^2/\gamma^2}{\left[(\omega + k_z u_{||})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2\right]^2} -$$

$$- \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_{||}^2}\frac{1}{(\omega - k_z u_{||})^2} = 0. \quad (4)$$

Решая это уравнение в условиях резонанса:

$$\omega = \omega_0 + \delta = \Omega_e/\gamma - k_z u_{||} + \delta, \quad (5)$$

где

$$\omega_0 = k_z u_{||} - \sqrt{\frac{\omega_b^2 k_z^2 \gamma^{-1}\gamma_{||}^{-2}}{k_\perp^2\gamma_{||}^2 + k_z^2}} \approx k_z u_{||} \approx \frac{\Omega_e}{2\gamma} \quad (6)$$

является решением уравнения (4) при $u_\perp = 0$, находим соотношение для определения инкремента нарастания полуциклотронной волны:

$$\frac{\delta^3}{\omega_0^3} = -i\frac{\omega_b^3 u_\perp^2(k_\perp^2 c^2 - k_z^2 u_{||}^2)}{8\omega_0^5 c^2\gamma_{||}\gamma^{3/2}}\left(\frac{k_z^2}{k_\perp^2\gamma_{||}^2 + k_z^2}\right)^{3/2}. \quad (7)$$

Задача 6. Исследовать устойчивость моноэнергетического электронного пучка с гауссовским распределением вектора скорости электронов по азимутальному углу относительно возбуждения циклотронных волн (такой пучок формируется при прохождении прямолинейного моноэнергетического пучка через тонкую фольгу).

Решение.

При этом функция распределения электронов

$$f_{0e} = A\delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)\exp\left(-\frac{\theta^2}{\theta_0^2}\right). \quad (1)$$

Здесь A – постоянная нормировки, $\mathcal{E}_0$ – энергия электронов, θ_0 – средний азимутальный угол ($\theta_0^2 \ll 1$). Далее имеем

$$\int f_{0e}\, d\mathbf{p} = N_e, \qquad A = \frac{N_e c^3}{2\pi\theta_0^2\mathcal{E}\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - m^2c^4}}. \quad (2)$$

Функцию распределения (1) можно записать также в виде

$$f_{0e} = A\delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)\exp\left(-\frac{p_\perp^2}{p^2\theta_0^2}\right), \quad (3)$$

удобном для вычисления тензора диэлектрической проницаемости.

Рассмотрим необыкновенную циклотронную волну, распространяющуюся поперек магнитного поля. В случае достаточно редкого пучка, когда $\Omega_e \gg \omega_b$, в дисперсионном уравнении для этой волны следует ограничиться лишь линейными слагаемыми по плотности пучка. Тогда получим

$$k^2 - \frac{\omega_2}{c^2}\varepsilon_{yy} = 0,$$

$$\varepsilon_{yy} = 1 + \frac{1}{4}\frac{\omega_b^2\theta_0^2}{(\omega - \Omega_e/\gamma)^2}\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^3}, \tag{4}$$

где $\gamma = \mathcal{E}_0/mc^2$. При вычислении ε_{yy} была учтена малость величины $\theta_0^2 \ll 1$, поэтому можно было ограничиться первым циклотронным резонансом $\omega \approx \Omega_e/\gamma$. Из уравнения (4) находим ($\omega \to \omega + \delta$)

$$\omega^2 = k^2c^2 = \Omega^2/\gamma^2,$$

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega_b^2}{8\omega^2}\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^3}\theta_0^2\right)^{1/3}. \tag{5}$$

Задача 7. На примере изотропной плазмы показать, что черепковская пучковая неустойчивость может развиваться также в условиях, когда инкремент ее нарастания меньше частоты столкновений плазменных электронов (диссипативная пучковая неустойчивость).

Решение.

Как было показано в § 4.2 при развитии черенковской неустойчивости в изотропной плазме происходит возбуждение продольных волн. При учете столкновений электронов плазмы вместо уравнения (4.2.7) имеем

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\left(1 - i\frac{\nu_e}{\omega}\right) - \frac{\omega_b^2\gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2}\frac{k_z^2 + k_\perp^2\gamma^2}{k^2} = 0. \tag{1}$$

В отсутствие пучка это уравнение описывает слабозатухающие плазменные колебания со спектром ($\omega \to \omega + \delta_0$)

$$\omega \approx \omega_{Le}, \qquad \delta_0 = -i\nu_e/2. \tag{2}$$

При наличии пучка подобные колебания могут оказаться нарастающими. Действительно, в условиях черенковского резонанса $\omega = k_z u + \delta = \omega_{Le} + \delta$ из (1) получаем

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\omega_{Le}\left(\dfrac{N_b}{2N_p}\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{k_\perp^2 + k_z^2\gamma^{-2}}{k^2}\right)^{1/3} & \text{при} \quad |\delta| > \nu_e, \\[2ex] \dfrac{-1 + i}{\sqrt{2}}\omega_{Le}\left(\dfrac{N_b}{N_p}\dfrac{\omega_{Le}}{\nu_e}\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{k_\perp^2 + k_z^2\gamma^{-2}}{k^2}\right)^{1/2} & \text{при} \quad |\delta| < \nu_e. \end{cases} \tag{3}$$

Верхнее из этих выражений соответствует инкременту нарастания бесстолкновительной неустойчивости (4.2.6а), а нижнее – диссипативной неустойчивости. Очевидно, что пучковая неустойчивость может быть реализована лишь при $|\delta| \gg \nu_b$, где $1/\nu_b$ – время релаксации направленной скорости электронов пучка.

ТЕМА V

ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫЕ НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПЛАЗМЕННЫЕ СРЕДЫ. ПЛАЗМЕННАЯ СВЧ ЭЛЕКТРОНИКА

§ 5.1. Плазменный волновод с током

5.1.1. Бунемановская неустойчивость. В этом разделе мы рассмотрим несколько характерных примеров неустойчивостей неравновесной ограниченной плазмы. Одним из наиболее распространенных в эксперименте примеров такой плазмы является плазменный цилиндр, вдоль оси которого протекает ток, поддерживаемый электрическим полем. Как и во второй теме, мы будем считать токовую скорость $\mathbf{u}$ постоянной, а электроны сильно замагниченными продольным магнитным полем $\mathbf{B}_0$. Ионы, напротив, считаются полностью незамагниченными. Кроме того, для простоты, тепловым движением частиц пренебрежем, а плазменный цилиндр будем считать продольно неограниченным и помещенным в цилиндрический металлический волновод радиуса R, который полностью заполнен плазмой. Мы уже знаем, что в токовой плазме может развиваться низкочастотная бунемановская неустойчивость.

Приступая к изучению бунемановской неустойчивости в плазменном волноводе, ограничимся анализом чисто потенциальных колебаний. Последнее оправдано тем, что $\omega/k_z \ll u \lesssim c$ и, как это хорошо видно из результатов §§ 2.3 и 2.5, слагаемые, пропорциональные ω^2/c^2 и учитывающие непотенциальность поля колебаний, в дисперсионные соотношения вклада не дают. В результате уравнение для потенциала поля колебаний ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) запишется в виде

$$\left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right)\Delta\Phi - \frac{\omega_{Le}^2 k_z^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2}\Phi = 0. \qquad (5.1.1)$$

Подставляя решение этого уравнения $\Phi = \Phi(r)e^{il\varphi + ik_z z - i\omega t}$, где

$$\Phi(r) = \Phi_0 J_l\left(\mu_{ls}\frac{r}{R}\right), \qquad (5.1.2)$$

в граничное условие на поверхности волновода

$$\Phi(r = R) = 0, \tag{5.1.3}$$

получим искомое дисперсионное соотношение

$$\left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right)\left(k_z^2 + \frac{\mu_{ls}^2}{R^2}\right) - \frac{\omega_{Le}^2 k_z^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} = 0. \tag{5.1.4}$$

Здесь μ_{ls} – корни функции Бесселя, $J_l(\mu_{ls}) = 0$.

Уравнение (5.1.4) совпадает с (2.3.2), если в последнем пренебречь членами $\sim \omega^2/c^2$ и положить $k_\perp^2 = \mu_{ls}^2/R^2$. Поэтому остаются справедливыми и формулы (2.3.3) и (2.3.4) с такой же заменой, а также и вывод о конвективном характере неустойчивости. А это означает, что в цилиндрическом волноводе, полностью заполненом плазмой, бунемановская неустойчивость может развиваться только при токах, превышающих некоторый пороговый ток. Величина этого порогового тока находится минимизацией равенства (2.3.3) по μ_{ls} и k_z (считается, что длина волновода намного больше его радиуса). Производя несложные вычисления, в результате получим

$$\begin{gathered} \mu_{ls\,\min} = \mu_{01} = 2{,}4, \\ J_b = \frac{mc^3}{4e}\mu_{01}^2(\gamma^2 - 1)^{3/2} = 24(\gamma^2 - 1)^{3/2}\,\text{кА}. \end{gathered} \tag{5.1.5}$$

Этот ток больше, чем предельный вакуумный ток электронного пучка, полностью заполняющего цилиндрическое дрейфовое пространство и определяемый потенциалом пространственного заряда электронов пучка:

$$J_0 = \frac{mc^3}{e}(\gamma^{2/3} - 1)^{3/2} \approx 17(\gamma^{2/3} - 1)^{3/2}\,\text{кА}. \tag{5.1.6}$$

Это выражение получается из формулы (10) задачи 1 к данной теме, известной как формула Чайльда–Ленгмюра для цилиндрического волновода. Поэтому легко понять, что в результате развития бунемановской неустойчивости потенциал поля возмущений может превзойти энергию электронов, что, естественно, приведет к полному их торможению и, тем самым, к срыву тока. В экспериментах как численных, так и реальных это действительно имеет место.

5.1.2. Пирсовская неустойчивость. Выше мы считали плазменную среду в продольном направлении неограниченной. Откажемся теперь от этого ограничения и покажем, что в продольно ограниченной плазменной среде с током (или нейтрализованном по заряду пучке) даже без учета конечной массы ионов возникает неустойчивость. Она обусловлена конечной длиной системы и поэтому инкремент ее нарастания обратно пропорционален этой длине. Убедимся в этом на примере плазменной среды с током с сильно замагниченными электронами и неподвижными (бесконечно тяжелыми) ионами.

Уравнение, описывающее малые колебания в такой системе, остается прежним – это уравнение (5.1.1), в котором, однако, следует положить $\omega_{Li} \to 0$. При этом остаются неизменными и соотношения (5.1.2)–(5.1.4). Вместе с тем, соотношение (5.1.4) при $\omega_{Li} \to 0$ не является уже дисперсионным уравнением, а представляет собой характеристическое уравнение для определения продольных волновых чисел k_z, которые в свою очередь определяют общее решение уравнения (5.1.1), записанное в виде

$$\Phi(z) = J_l\left(\mu_{ls}\frac{r}{R}\right)\sum_{n=1}^{4}\Phi_{0n}e^{ik_{zn}z}. \tag{5.1.7}$$

Из характеристического уравнения (5.1.4) находим четыре значения k_z:

$$\begin{gathered} k_{z\,1,2} = \pm\frac{1}{u}\left(\frac{\omega_{Le}^2}{\gamma^3} - k_\perp^2 u^2\right)^{1/2} + \frac{\omega\omega_{Le}^2}{\gamma^3 u}\left(\frac{\omega_{Le}^2}{\gamma^3} - k_\perp^2 u^2\right)^{-1}, \\ k_{z\,3,4} \simeq \omega\left(u \pm \frac{\omega_{Le}}{k_\perp\gamma^{3/2}}\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{5.1.8}$$

При нахождении этих решений мы предполагали, что $\omega \ll \omega_{Le}$, интересуясь тем самым областью вблизи порога возникновения неустойчивости, причем $k_\perp \equiv \mu_{ls}/R$.

Подставим теперь решение (5.1.7) в граничные условия. Считая торцы волновода заземленными, полагаем

$$\Phi|_{z=0,L} = 0. \tag{5.1.9}$$

Кроме того, очевидно, что на входе системы плазма с током не возмущена или, что тоже самое,

$$\rho_e|_{z=0} = j_{ze}|_{z=0} = 0. \tag{5.1.10}$$

Здесь ρ_e и j_{ze} – возмущенные заряд и продольный ток электронов, связанные с потенциалом поля колебаний Φ соотношениями

$$\rho_e = \frac{k_z j_{ze}}{\omega - k_z u} = \frac{e^2 N_b}{m}\frac{k_z\Phi}{(\omega - k_z u)^2}. \tag{5.1.11}$$

Учет соотношений (5.1.8) и (5.1.11) при подстановке решения (5.1.7) в граничные условия (5.1.9) и (5.1.10) приводит к следующему дисперсионному уравнению для малых колебаний:

$$\left(\frac{\omega_{Le}^2}{\gamma^3} - k_\perp^2 u^2\right)^{3/2} \left(e^{ik_{z1}L} - e^{ik_{z2}L}\right) - \\ - \frac{2\omega\omega_{Le}^2}{\gamma^3}\left(e^{ik_{z1}L} + e^{ik_{z2}L} - e^{-ik_{z3}L} - e^{-ik_{z4}L}\right) + \\ + \frac{\omega\omega_{Le}^2}{k_\perp u\gamma^{3/2}}\left(\frac{\omega_{Le}^2}{\gamma^3} - k_\perp^2 u^2\right)^{1/2}\left(e^{ik_{z3}L} - e^{ik_{z4}L}\right) = 0. \quad (5.1.12)$$

Уравнение (5.1.12) имеет решения ω, соответствующие неустойчивым колебаниям, т.е. с $\operatorname{Im}\omega > 0$, в областях

$$(2n-1)\frac{\pi u}{L} < \sqrt{\frac{\omega_{Le}^2}{\gamma^3} - k_\perp^2 u^2} < 2n\frac{\pi u}{L}, \quad (5.1.13)$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$. При $n = 1$ и $\mu_{ls} = \mu_{00} = 2{,}4$ левое неравенство (5.1.13) определяет пороговый ток возникновения неустойчивости в системе. Легко показать, что этот ток в точности совпадает с предельным током (5.1.5).

Неустойчивость возникает при превышении током порогового значения (5.1.5), причем максимальный инкремент развития неустойчивости

$$\operatorname{Im}\omega \simeq \frac{u}{L}. \quad (5.1.14)$$

Такая зависимость инкремента от длины системы как раз и является следствием того обстоятельства, что обратная связь в системе с конечной длиной и заземленными торцами обусловлена внешней цепью, поддерживающей постоянный нулевой потенциал торцов. Рассмотренная неустойчивость известна под названием пирсовской неустойчивости.

Отметим, что пирсовская неустойчивость так же как и бунемановская проявляется при токах пучка, превосходящих предельный вакуумный ток в системе, а поэтому при их развитии происходит полный срыв тока пучка. Укажем также, что в реальных условиях будет развиваться та неустойчивость, инкремент нарастания которой больше. Из сравнения (2.3.4) и (5.1.14) заключаем, что при $\left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3}\frac{\omega_{Le}}{\sqrt{\gamma}} > \frac{u}{L}$ доминирует бунемановская неустойчивость; при обратном же условии в системе будет развиваться пирсовская неустойчивость.

В заключение заметим, что в плазменном цилиндре с током возможно также развитие рассмотренной в § 2.3 для случая пространственно неограниченной плазменной среды неустойчивости филламентации, но при наличии внешнего сильного продольного магнитного поля развитие такой неустойчивости невозможно. Если же такое поле отсутствует, то сохраняются результаты § 2.3.

§ 5.2. Усиление и генерация плазменных волн в волноводах и резонаторах. Плазменная СВЧ электроника

Изложенные в настоящем параграфе задачи возбуждения волн электронными потоками в пространственно ограниченной плазме составляют основу новой перспективной области физической электроники – релятивистской плазменной СВЧ электроники. В дальнейшем мы конкретизируем эти задачи и рассмотрим возбуждение волн в плазменных волноводах и резонаторах.

Прежде чем перейти к изложению основ плазменной СВЧ электроники, напомним закон Чайльда–Ленгмюра. Этот закон гласит, что в вакуумном цилиндрическом волноводе с длиной L, много большей его радиуса R (а мы будем изучать волноводы только с такой геометрией), ток прямолинейного моноэнергетического электронного пучка с продольной скоростью u ограничен пространственным зарядом и определяется формулой (5.1.6). Такой ток достигается при полном заполнении волновода пучком. Если волновод заполнить плазмой и тем самым нейтрализовать пространственный заряд пучка, то ток пучка будет ограничиваться развитием пирсовской неустойчивости и определяться формулой (5.1.5). Отношение токов (5.1.5) и (5.1.6) при $\gamma \gg 1$ порядка γ^2:

$$\frac{J_b}{J_0} = \frac{J_{\Pi}}{J_0} \approx \frac{3}{2}\left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^{2/3} - 1}\right)^{3/2} > \gamma^2. \tag{5.2.1}$$

Следует подчеркнуть, что формулы (5.1.5) и (5.1.6) для предельного вакуумного и пирсовского токов справедливы только при наличии достаточно сильного продольного магнитного поля, удерживающего пучок от поперечного расплывания (либо сжатия). Это означает, что давление внешнего магнитного поля намного больше давления собственного магнитного поля тока и сил электростатического расталкивания. В результате имеем

$$\Omega_e = \frac{eB_0}{mc} \gg \omega_b^2 \frac{R}{c\gamma}, \tag{5.2.2}$$

где $\omega_b = \sqrt{\dfrac{4\pi e^2 N_b}{m}}$ – ленгмюровская частота электронов пучка.

Предельный ток (5.1.6) по порядку величины соответствует концентрации электронов, при которой $\omega_{b0} = \sqrt{\gamma}u/R$, а поэтому при токах меньше предельного $\omega_b < \sqrt{\gamma}c/R$. Собственная частота колебаний электронного пучка $\sim \omega_b/\gamma^{3/2}$ при этом удовлетворяет условию $\dfrac{\omega_b}{\gamma^{3/2}} < \dfrac{c}{R\gamma} < \dfrac{c}{R}$. Это означает, что в вакуумном волноводе эта частота меньше критической частоты и пучок можно рассматривать как малое возмущение электродинамической системы волновода.

Если пучок нейтрализован плазменной средой, то $\omega_{b\Pi} \simeq c\gamma^{3/2}/R$. И даже в этом случае для токов, меньших пирсовского, собственная частота колебаний пучка $\omega_b/\gamma^{3/2} \approx c/R$ и это означает, что возмущение электродинамических свойств волновода пучком уже не мало и его надо учитывать.

Плазменный СВЧ генератор и усилитель. После приведенных общих соображений перейдем к рассмотрению конкретных плазменных источников СВЧ излучения. Пусть цилиндрический волновод с $L \gg R$ заполнен холодной бесстолкновительной плазменной средой и пронизывается прямолинейным электронным пучком. Вся система помещена в очень сильное продольное магнитное поле, замагничивающее как пучок, так и плазменную среду. Такой схематический источник излучения представлен на рис. 5.1. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega, k_z)$ такой

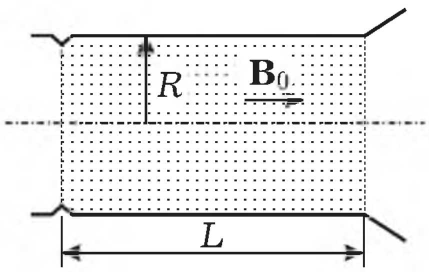

Рис. 5.1

плазма-пучковой системы, как уже отмечалось выше, имеет вид (4.2.1). Подстановка этого выражения в уравнения Максвелла приводит к следующему дифференциальному уравнению для E-волны волновода:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l^2}{r^2}\right)E_z-\left(k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\varepsilon(\omega,k_z)E_z=0, \qquad (5.2.3)$$

где l – азимутальное, а k_z – продольное волновое число; ω – частота колебаний.

Уравнение (5.2.3) дополняется очевидным граничным условием на металлической поверхности волновода

$$E_z|_{r=R}=0. \qquad (5.2.4)$$

Подставляя общее решение уравнения (5.2.3)

$$E_z(r)=E_{z0}J_l\left(ir\sqrt{\left(k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\varepsilon(\omega,k_z)}\right) \qquad (5.2.5)$$

в граничное условие (5.2.4), находим дисперсионное уравнение колебаний

$$\left(k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left[1-\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}-\frac{\omega_b^2\gamma^{-3}}{(\omega-k_zu)^2}\right]+\frac{\mu_{ls}^2}{R^2}=0, \qquad (5.2.6)$$

где μ_{ls} – нули функции Бесселя $J_l(\mu_{ls})=0$.

Уравнение (5.2.6) совпадает со вторым уравнением (4.2.9), если под $k_\perp$ понимать μ_{ls}/R. Поэтому проведенный там анализ и в нашем случае сохраняет силу с точностью до этой замены. Но эта замена весьма существенна. В частности, из (4.2.12) при ее учете следует, что при выполнении неравенств

$$\left(\frac{3{,}8u}{R}\gamma\right)^2>\omega_{Le}^2>\left(\frac{2{,}4u}{R}\gamma\right)^2 \qquad (5.2.7)$$

в системе может возбуждаться только одна аксиально-симметричная ($l=0$) мода колебаний E-типа. При этом частота возбуждаемой волны меньше плазменной частоты, но примерно в γ раз превышает критическую частоту волновода.

Временной инкремент нарастания колебаний определяется формулами (4.2.12) с заменой $k_\perp\to\mu_{00}/R$ (для основной моды). Зная инкремент и групповую скорость возбуждаемой сносовой волны (равную u поскольку в условиях черепковского резонанса $\omega=k_zu$), находим коэффициент ее пространственного усиления

$$\delta k_z=\frac{\delta}{\partial\omega/\partial k_z}=\frac{\delta}{u}. \qquad (5.2.8)$$

Таким образом, волна E-типа с амплитудой E_0, подаваемая на вход волновода, будет усиливаться экспоненциально и на выходе из него ее амплитуда достигнет величины $E_0 \exp\left(\frac{\delta}{u}L\right)$. Отразившись от конца волновода как от зеркала с коэффициентом отражения $\varkappa \simeq \frac{1}{4\gamma^2}$ (нижняя граница коэффициента отражения следует из условия выхода излучения из плазмы в вакуум), она вновь попадает на вход системы и таким образом осуществляется обратная связь. Далее процесс будет повторяться, и если выполнено условие

$$L\frac{\delta}{u} > \ln\frac{1}{\varkappa}, \tag{5.2.9}$$

то излучение в волноводе будет непрерывно нарастать во времени – в нем начнется генерация электромагнитной волны.

Условие (5.2.9), таким образом, определяет стартовый ток возбуждения плазменного генератора. Так, если инкремент δ определяется первой из формул (4.2.12), то стартовый ток возбуждения плазменного генератора на основной моде с частотой ω дается соотношением

$$J_{\text{ст}} = 70\frac{\gamma^7 u^3}{\omega^3 L^3}\left(\ln\frac{1}{\varkappa}\right)^3 \text{ кА}. \tag{5.2.10}$$

С ростом поля излучения в генераторе происходит интенсивное торможение пучка и при некотором значении поля генератор насыщается – вся энергия, передаваемая пучком полю, излучается из генератора и рост поля прекращается. Исходя из этих соображений, можно оценить КПД плазменного генератора. Действительно, потеря энергии электронов пучка должна равняться энергии электромагнитного поля, т.е.

$$N_b m c^2 \gamma^3 \frac{u\Delta u}{c^2} = \frac{E^2}{8\pi}. \tag{5.2.11}$$

Вместе с тем сдвиг частоты генерации, обусловленный торможением пучка, не может превосходить величину δ, определяющую не только инкремент, но и полосу частот генерации, т.е.

$$\Delta\omega = k_z \Delta u = \omega\frac{\Delta u}{u} = \delta. \tag{5.2.12}$$

Из (5.2.11) и (5.2.12) находим КПД генератора

$$\eta = \frac{E^2}{8\pi N_b m c^2 \gamma} \simeq \frac{\gamma^2\delta}{\omega}. \tag{5.2.13}$$

Приведем численный пример: при $\gamma \simeq 2$, $\varkappa = 1/16$, и $\omega \simeq 6 \cdot 10^{10}\,\text{с}^{-1}$ (что соответствует трехсантиметровой длине волны излучения) стартовый ток плазменного генератора с $L \simeq 15$ см равен $J_{\text{ст}} \simeq 3$ кА. Этот ток меньше предельного вакуумного тока $J_0 \simeq 8$ кА и тем более пирсовского тока $J_{\Pi} \simeq 30$ кА. Плазменный генератор с такими параметрами действительно был впервые реализован экспериментально в ИОФАН в лаборатории П.С.Стрелкова в 1982 году. При этом была достигнута мощность генерации в несколько сот мегаватт при КПД $\eta \simeq 10\%$.

Наконец, заметим, что если ток пучка меньше стартового тока, то в системе генерация невозможна, возможно только усиление волны в определенной области частот, определяемой формулой (4.2.10) в полосе $\Delta\omega \sim \delta$. В таких условиях говорят, что система работает как усилитель. Теория плазменных генераторов и усилителей СВЧ излучения была разработана А.А.Рухадзе и М.В.Кузелевым.

Нерезонансный пирсовский излучатель плазменной волны – плазменный монотрон. Такой излучатель принципиально отличается от рассмотренных выше резонансных генераторов, основанных на черепковском и циклотронном механизмах неустойчивостей. Он основан на нерезонансной излучательной пирсовской неустойчивости, которая возможна только в продольно ограниченных системах, обусловлена отражением волн от торцов системы и носит глобальный характер. В случае прямолинейного пучка, пронизывающего плазменный волновод, излучательная пирсовская неустойчивость в чистом виде проявляется в условиях, когда черепковский резонанс в плазменном волноводе выполняться не может, поскольку

$$\omega_{Le}^2 < k_\perp^2 u^2 \gamma^2 \approx \left(\frac{2{,}4u}{R}\gamma\right)^2. \tag{5.2.14}$$

Более того, будем считать, что и ток пучка много меньше предельного пирсовского тока

$$J_b \ll J_{\Pi} = 24(\gamma^2 - 1)^{3/2}\,\text{кА} \tag{5.2.15}$$

и поэтому пучок устойчив.

Дисперсионное уравнение в этом случае, очевидно, такое же как в случае черенковского излучателя, т.е. совпадает с (5.2.6). Однако, в силу условия (5.2.14) это уравнение неустойчивых решений не имеет. Неустойчивость возникает только в продольно ограниченной системе. Поэтому примем, что излучатель представляет собой кусок цилиндрического волновода, $0 \le z \le L$, через левый торец которого $(z = 0)$

инжектируется невозмущенный релятивистский электронный пучок со скоростью u, а через правый он выходит беспрепятственно. Электромагнитное поле в системе имеет вид:

$$E_z = \sum_{\nu=1}^{4} A_\nu e^{ik_{z\nu}z - i\omega t}. \tag{5.2.16}$$

Электромагнитная волна, распространяющаяся в отрицательном направлении, от левого конца полностью отражается в попутные волны, которые на правом конце частично трансформируются снова в обратную и частично выходят из системы. Эти условия записываются в виде

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{4} \frac{k_{z\nu}^2 - \omega^2/c^2}{(\omega - k_{z\nu}u)^2} k_{z\nu} A_\nu = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{4} k_{z\nu} A_\nu = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{4} \frac{k_{z\nu}^2 - \omega^2/c^2}{(\omega - k_{z\nu}u)^2} A_\nu = 0, \quad A_2 e^{ik_{z2}L} = \sum_{\nu\neq 2} \varkappa_\nu A_\nu e^{ik_{z\nu}L}.\end{gathered} \tag{5.2.17}$$

Четырем волнам (5.2.16) соответствуют четыре решения характеристического уравнения (5.2.6) $k_{z\,1,2,3,4}$, причем введены следующие обозначения: волны A_1 и A_2 – электромагнитные, соответственно, прямая ($k_{z1} > 0$) и обратная ($k_{z2} < 0$), а волны A_3 и A_4 – пучковые ($k_{z\,3,4} > 0$). Коэффициенты трансформации волн на правой границе системы: $\varkappa_1$ – падающей волны A_1 в обратную A_2 и пучковых волн $\varkappa_3$ и $\varkappa_4$ в волну A_2 определяются условиями отражения и излучения на торце $z = L$. Именно, волна A_2 осуществляет в системе обратную связь и при отсутствии трансформаций (все $\varkappa_\nu = 0$) неустойчивость в системе отсутствует. Поскольку спектры пучковых волн – быстрой и медленной $\omega_{3,4}(k_z)$ отличаются малым слагаемым $\sim \omega_b$, то при малой плотности пучка, когда

$$\frac{\omega_b \gamma^{-3/2}}{\omega} \ll 1, \tag{5.2.18}$$

величины $\varkappa_3 = \varkappa_4 \equiv \varkappa_b$. Величина же $\varkappa_1$ определяется добротностью резонатора, т.е. излучением электромагнитной волны из системы.

При условии (5.2.19) легко найти и волновые числа $k_{z\nu}$, которые для интересующей нас низкочастотной (плазменной) ветви колебаний согласно (5.2.6) равны

$$k_{z\,1,2} = \pm a \pm \frac{\beta_{1,2}}{2a}\omega_b^2, \qquad k_{z\,3,4} = \frac{\omega}{u} \pm \alpha\omega_b. \tag{5.2.19}$$

Здесь введены обозначения

$$a^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega_p^2}\right), \;\; \beta_{1,2} = -\frac{k_\perp^2 \gamma^{-3}\omega^2}{\omega_p^2(\omega \mp au)^2}, \;\; \alpha = i\frac{\omega}{u}\frac{\gamma^{-3/2}}{\sqrt{\omega_p^2 - k_\perp^2 u^2 \gamma^2}}, \tag{5.2.20}$$

причем предполагается, что $\omega_p^2 - k_\perp^2 u^2\gamma^2 = \Omega^2_{\text{рез}} < 0$ и поэтому черепковский резонанс в системе отсутствует.

Подставляя выражения (5.2.19) в граничные условия (5.2.18), получим систему однородных алгебраических уравнений, условие разрешимости которой представляет собой дисперсионное уравнение, определяющее искомый спектр частот колебаний. Мы здесь не будем выписывать это уравнение. Выпишем только мнимую часть поправки δ к частоте ω для низкочастотной плазменной ветви

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 c^2 \omega_p^2}{\omega_p^2 + k_\perp^2 c^2} \tag{5.2.21}$$

в отсутствие черепковского резонанса, т.е. когда $\Omega^2_{\text{рез}} < 0$. Величина $\operatorname{Im}\delta$ представляет собой временной инкремент развития излучательной пирсовской неустойчивости

$$\operatorname{Im}\delta = (-1)^n \frac{|\varkappa_b|}{\sqrt{|\varkappa_1|}}\frac{\omega_p^3}{\omega^3}\frac{k_\perp^2 u^2\gamma^4}{\sqrt{\omega_p^2 + k_\perp^2 c^2}}\frac{\alpha\omega_b u c}{L|\Omega^2_{\text{рез}}|}\sin(\alpha\omega_b L)e^{i\theta}, \tag{5.2.22}$$

где пролетный угол θ равен

$$\theta = \frac{\omega L}{u} + \arg\varkappa_b - \frac{1}{2}\arg\varkappa_1. \tag{5.2.23}$$

Частота же возбуждаемых колебаний находится из дисперсионного уравнения при пренебрежении вкладом пучка и дается соотношением

$$a = \frac{\pi n}{L} - \frac{1}{2L}\arg\varkappa_1 + \frac{i}{2L}\ln|\varkappa_1| \tag{5.2.24}$$

или

$$\omega = c\sqrt{k_\perp^2 + (\operatorname{Re} a)^2}. \tag{5.2.25}$$

Декремент затухания, обусловленный конечной добротностью системы, при этом дается формулой

$$\operatorname{Im}\delta_{\text{затух}} = \frac{c}{2L}\frac{\omega_p}{\sqrt{\omega_p^2 + k_\perp^2 c^2}}\ln\frac{1}{|\varkappa_1|}. \tag{5.2.26}$$

Очевидно, что неустойчивость будет развиваться, если $\operatorname{Im}\delta > \operatorname{Im}\delta_{\text{затух}}$, что приводит к неравенству

$$(-1)^{n+1}\sin(\alpha\omega_p L)\sin\theta > \frac{\omega_{b\,st}}{\omega_p}, \tag{5.2.27}$$

где $\omega_{b\,st}$ дается выражением

$$\omega_{b\,st} = \frac{\omega^2}{2\omega_p^2}\frac{|\Omega_{\text{рез}}|^3}{k_\perp^2 u^2\gamma^{5/2}}\frac{\sqrt{|\varkappa_1|}}{|\varkappa_b|}\ln\frac{1}{|\varkappa_1|}. \tag{5.2.28}$$

Эта величина определяет стартовый ток возбуждения генератора

$$\theta = \frac{\omega L}{u} = \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi \tag{5.2.29}$$

– хорошо известное в вакуумной СВЧ электронике выражение для монотрона.

В заключение заметим, что если величины $\varkappa_b$ и $\varkappa_1$ действительны, т.е. $\arg\varkappa_{b,1} = 0$, то из выражения (5.2.22) находим условие максимального инкремента неустойчивости.

§ 5.3. Вакуумные СВЧ источники, основанные на пучковой неустойчивости

Релятивистский гиротрон. В качестве второго примера использования пучковой неустойчивости в СВЧ электронике рассмотрим гиротрон – прибор, основанный на механизме вынужденного циклотронного излучения потока осцилляторов в вакуумном волноводе конечной длины с $L \gg R$. Принципиальная схема гиротрона такая же, как плазменного генератора (см. рис. 5.1), но волновод пустой и пронизывается потоком осцилляторов. Здесь мы также воспользуемся результатами § 4.1, но несколько усложним задачу, учитывая $k_z \neq 0$. Кроме того, ограничимся рассмотрением только необыкновенной волны, которая в волноводной терминологии называется волной H-типа. Предполагая выполненным условие циклотронного резонанса, $\omega = k_z u_\parallel + \Omega_e/\gamma$, и считая поперечную скорость электронов малой, $u_\perp \ll c$, запишем уравнение Максвелла для волны H-типа в виде

$$\Delta B_z + \frac{\omega^2}{c^2}B_z = \frac{u_\perp^2}{4c^2}\frac{(k_z^2-\omega^2/c^2)\omega_b^2\gamma^{-1}}{(\omega - k_z u_\parallel - \Omega_e/\gamma)^2}B_z. \tag{5.3.1}$$

Уравнение (5.3.1) дополняем очевидным граничным условием на поверхности волновода

$$\left.\frac{\partial B_z}{\partial r}\right|_{r=R} = 0. \tag{5.3.2}$$

Подставляя в это условие общее решение уравнений (5.3.1)

$$B_z = B_{z0} J_l(k_\perp r), \tag{5.3.3}$$

где

$$k_\perp^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\left[1 + \frac{u_\perp^2}{4c^2}\frac{\omega_b^2\gamma^{-1}}{(\omega - k_z u_\parallel - \Omega_e/\gamma)^2}\right], \tag{5.3.4}$$

окончательно находим искомое дисперсионное соотношение

$$\frac{\mu'^2_{ls}}{R^2} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\left[1 + \frac{u_\perp^2}{4c^2}\frac{\omega_b^2\gamma^{-1}}{(\omega - k_z u_\parallel - \Omega_e/\gamma)^2}\right]. \tag{5.3.5}$$

Здесь μ'_{ls} – корни производной функции Бесселя, т.е. корни уравнения $J'_l(\mu'_{ls}) = 0$.

Из соотношения (5.3.5) следует, что наиболее сильное взаимодействие пучка с полем H-волны действительно происходит в условиях циклотронного резонанса, когда выполнено равенство

$$\omega - k_z u_\parallel - \frac{\Omega_e}{\gamma} = \sqrt{k_z^2 c^2 + \mu'^2_{ls} c^2/R^2}. \tag{5.3.6}$$

Отсюда находим частоты генерации (см. рис. 5.2)

$$\omega_{1,2} = \frac{\gamma_\parallel^2 \Omega_e}{\gamma}\left(1 - \frac{u_\parallel}{c}\sqrt{1 - \frac{\mu'^2_{ls} c^2 \gamma^2}{R^2 \Omega_e^2 \gamma_\parallel^2}}\right). \tag{5.3.7}$$

Видно, что существуют две частоты генерации, соответствующие двум точкам пересечения дисперсионных кривых пучка (левая часть (5.3.7)) и волновода (правая часть (5.3.7)) на рис. 5.2: нижней с $\omega_1 \sim \Omega_e/\gamma$ и верхней $\omega_2 \sim \Omega_e\gamma$. При этом, если $\dfrac{\Omega_e}{\gamma} < \omega_{\text{кр}} = \mu'_{ls}\dfrac{c}{R}$, то обе точки пересечения лежат в области $k_z > 0$ (т.е. $k_{z1} > 0$, $k_{z2} > 0$); если же $\Omega_e/\gamma > \omega_{\text{кр}}$, то $k_{z2} > 0$, $k_{z1} < 0$. Волны с $k_z > 0$ называются попутными, в них фазовая и групповая скорости направлены вдоль скорости пучка. Волна же с $k_z < 0$ называется встречной, в ней энергии поля переносится навстречу пучку. Если $k_{z1} > 0$ и $k_{z2} > 0$, то обе волны попутные и переносят энергию вдоль распространения пучка. В

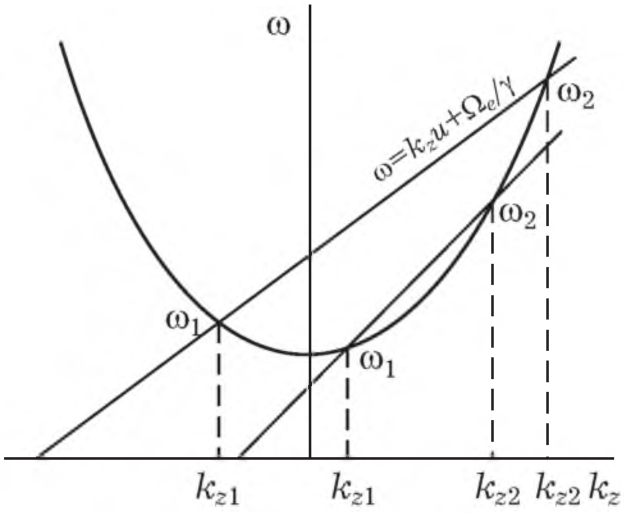

Рис. 5.2

этом случае неустойчивость конвективная. Если же $k_{z1} < 0$, а $k_{z2} > 0$, то первая волна встречная и переносит энергию навстречу пучку. В таком случае говорят, что в системе имеет место распределенная обратная связь, неустойчивость – абсолютная и без всякого отражения волны от правой границы волновода будет происходить генерация волны.

При возбуждении же попутных волн энергия поля сносится пучком и, как отмечалось, неустойчивость в этом случае конвективная (сносовая), а для генерации электромагнитной волны необходимо наличие обратной связи в системе в виде отражающего волну зеркала на правом конце волновода.

Второй вывод, который можно сделать из вида (5.3.7), касается возможности реализации одномодового возбуждения генератора. Действительно, если потребовать выполнения неравенств

$$3{,}8 > \frac{R\gamma_{\|}\Omega_e}{c\gamma} > 1{,}8, \tag{5.3.8}$$

в системе будет возбуждаться только одна мода H_{11} с радиальным волновым числом $\mu_{11} = 1{,}8$.

При вычислении стартового тока в случае плазменного генератора мы воспользовались формулами § 4.2, так как там считалось $k_z \neq 0$. Здесь мы не можем поступить так. Поэтому вычислим стартовый ток, исходя прямо из уравнения (5.3.5). Ищем решения этого уравнения в виде $k_z + \delta k_z$, где k_z определяются соотношением (5.3.6), корни эти изображены на рис. 5.2. Учитывая это обстоятельство, находим решение (5.3.5), соответствующее нарастающему вдоль волновода полю (в направлении движения пучка для попутной волны и навстречу пучку – для встречной)

$$\delta k_z = \frac{1 + i\sqrt{3}\mathrm{sign}k_z}{2} k_z \left(\frac{\omega_b^2 {\mu'}_{ls}^2 u_\perp^2}{8R^2 c^2 \gamma k_z^4 u_\parallel^2} \right)^{1/3} . \qquad (5.3.9)$$

Для нахождения стартового тока для попутной волны необходимо, как это делалось выше, потребовать выполнения условия

$$\mathrm{Im}\,\delta k_z \geqslant \frac{u_\parallel}{c} \ln\frac{1}{\varkappa}, \qquad (5.3.10)$$

где $\varkappa$ – коэффициент отражения волны от правого торца. Для встречной же волны с распределенной обратной связью стартовый ток находится из условия

$$\mathrm{Im}\,\delta k_z \geqslant \frac{u_\parallel}{c}. \qquad (5.3.11)$$

Приведем здесь выражение для стартового тока при возбуждении в генераторе попутных волн (случай $\Omega_e/\gamma < \omega_{\text{кр}}$) радиальной моды μ'_{ls}:

$$J_{\text{ст}} \simeq 50 \frac{u_\parallel^2}{u_\perp^2} \frac{R^4 k_z}{L^3 {\mu'}_{ls}^2} \frac{u_\parallel}{c} \left(\ln\frac{1}{\varkappa} \right) \text{кА}. \qquad (5.3.12)$$

Видно, что при одинаковых прочих параметрах стартовый ток для возбуждения гиротрона на высокой частоте (с большим k_z) в $\gamma_\parallel^2$ раз больше, чем на низкой частоте. Это же видно из формул (5.3.9), (5.3.10).

КПД релятивистского гиротрона вычисляется так же, как и КПД плазменного черепковского генератора, т.е. насыщение поля определяется расстройкой резонанса в результате торможения электронов при излучении. Однако, имеется существенное отличие, состоящее в том, что циклотронный резонанс зависит непосредственно от γ, т.е. энергии пучка. Это приводит к тому, что КПД в гиротроне определяется выражением

$$\eta = \frac{E^2}{8\pi N_b m c^2 \gamma} \simeq \frac{\delta}{\omega}, \qquad (5.3.13)$$

где $\delta = \delta k_z u$ – временной инкремент развития неустойчивости дается выражением (5.3.10). Отсюда, кстати, видно, что КПД гиротрона, работающего на верхней частоте, намного ниже, чем на нижней. При токе, меньше стартового, гиротрон как любой резонансный излучатель может работать как усилитель.

Слаборелятивистский гиротрон – один из наиболее распространенных во всем мире приборов и используется, в основном, для электронного циклотронного нагрева плазмы в токамаках. Характерная мощность слаборелятивистских гиротронов в миллиметровой области длин волн достигает 100–200 кВт (на пучке с $\mathcal{E} \simeq 70$ кэВ и $J_b \simeq 10$–20 кА) при КПД 20–25%. В этом смысле следует отметить реализованный в ИОФАН в лаборатории П.С.Стрелкова релятивистский гиротрон на H_{13}-моде: в трехсантиметровой области длин волн при токе пучка $J_b \simeq 1$ кА, $u_{\|}/u_{\perp} \simeq 1$ и энергии 400 кэВ была достигнута мощность 70 МВт при КПД $\simeq 25\%$, а на длине волны 8 мм мощность составляла 25 МВт при КПД $\simeq 8\%$.

§ 5.4. Возбуждение упругих звуковых волн в полуограниченном пьезодиэлектрике. Твердотельная электроника

Возбуждение поверхностных упругих волн ионным пучком. Выше мы рассмотрели задачу возбуждения ионно-звуковых колебаний электронным пучком, пронизывающим неизотермическую газовую плазму. Можно показать, что электронный пучок может возбудить и упругие звуковые колебания в твердом теле, если только твердое тело – пьезополупроводник, либо пьезодиэлектрик. Однако, поскольку упругие звуковые волны обладают очень малой фазовой скоростью, их возбуждение происходит значительно более эффективно с помощью ионных пучков, что мы и рассмотрим в настоящем параграфе. В пьезополупроводнике возбуждать упругие волны удобнее с помощью тока в самом образце. В пьезодиэлектрике же их возбуждение возможно только с помощью пучка заряженных частиц, пролетающего над поверхностью образца. Исходя из этих соображений мы здесь и рассмотрим задачу возбуждения упругих звуковых волн в пьезодиэлектрике с помощью ионного пучка.

Рассмотрим полуограниченный пьезодиэлектрик с гексагональной симметрией, главная ось симметрии которого направлена вдоль оси $0z$, а ограничивающей поверхностью является плоскость $x = 0$. Пьезодиэлектрик занимает область $x > 0$, а в области $x < 0$ параллельно поверхности вдоль оси $0y$ движется моноскоростной ионный пучок с продольной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_{bi} = 1 - \frac{\omega_{bi}^2}{(\omega - k_y u)^2}. \tag{5.4.1}$$

Здесь u – скорость прямолинейного пучка ионов. Зазор между пучком и поверхностью образца пусть отсутствует. Надо найти дисперсионное уравнение колебаний с $k_z = 0$ и исследовать их спектр.

Сформулированная задача аналогична рассмотренной в первой части лекций задаче существования поверхностных волн. Отличие состоит в том, что поверхность $x = 0$ является границей раздела двух материальных сред, а не среды с вакуумом. Поэтому приведем здесь обобщение задачи на случай поверхностных волн на границе двух пьезодиэлектрических сред. Поскольку это обобщение очевидно, выпишем лишь окончательный результат – дисперсионное уравнение для продольных (потенциальных) поверхностных волн на такой границе:

$$\int_0^\infty \frac{dk_x}{k^2\varepsilon^{l(0)}(\omega, k) - \dfrac{4\pi k^2 \beta_1^{(0)\,2}}{\omega^2\rho^{(m)(0)} - \lambda_{tr}^{(0)} k^2}} + \\ + \int_0^\infty \frac{dk_x}{k^2\varepsilon^{l(1)}(\omega, k) - \dfrac{4\pi k^2 \beta_1^{(1)\,2}}{\omega^2\rho^{(m)(1)} - \lambda_{tr}^{(1)} k^2}} = 0. \tag{5.4.2}$$

Здесь индексами 0 и 1 обозначены величины слева и справа от границы раздела.

В рассматриваемом нами случае слева от границы раздела имеем только ионный пучок с диэлектрической проницаемостью (5.4.1), а справа – пьезодиэлектрик, диэлектрическую проницаемость которого для простоты примем равной единице: $\varepsilon^{l(1)} = 1$. Считая пьезоэффект малым, т.е. $4\pi\beta_1^2/\rho^{(m)}v_{tr}^2 \ll 1$ (индексы 0 и 1 ввиду ненадобности опускаем), из уравнения (5.4.2) при этом получаем

$$(\omega^2 - k_y^2 v_{tr}^2)(1 + \varepsilon_b^2)^2 = \left(\frac{4\pi\beta_1^2}{\rho^{(m)}v_{tr}^2}\varepsilon_{bi}\right)^2 k_y^2 v_{tr}^2. \tag{5.4.3}$$

Это уравнение может обладать решениями типа поверхностных волн с нарастающей во времени амплитудой, что обусловлено неравновесностью системы из-за наличия ионного пучка. Такое решение существует в области частот

$$\omega = k_y v_{tr} + \delta = \omega - k_y u + \omega_b + \delta, \tag{5.4.4}$$

причем нарастающим колебаниям соответствует решение

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{4} \left(\frac{4\pi\beta_1^2}{\rho^{(m)} v_{tr}^2} \right)^{2/3} \left(\frac{\omega_b^2}{\omega^2} \right)^{1/3}. \tag{5.4.5}$$

Таким образом, ионный пучок будет возбуждать упругую волну, причем неустойчивость носит черепковский рамановский характер, что видно из условия (5.4.3). Энергия для нарастания звуковых колебаний черпается из направленного движения пучка, которое благодаря пьезоэффекту трансформируется в упругие колебания.

Возбуждение поверхностных упругих волн в пьезодиэлектрике током в плазме. В пьезодиэлектрике возбуждение упругих звуковых волн возможно лишь внешним источником, поскольку в самом образце свободные носители заряда отсутствуют. В предыдущем пункте мы рассмотрели такую возможность, когда возбуждение происходило пучком быстрых ионов, пролетающих над поверхностью полуограниченного образца пьезодиэлектрика. Неустойчивость при этом носила недиссипативный характер и была связана с вынужденным черепковским излучением поверхностных волн моноэнергетическим потоком ионов.

Здесь мы проанализируем возможность возбуждения поверхностных упругих звуковых волн в полуограниченном образце пьезодиэлектрика при протекании тока в редкой слабоионизованной газовой плазме, граничащей с образцом. Для простоты пренебрежем пространственной дисперсией как в пьезодиэлектрике, так и в газовой плазме и запишем дисперсионное уравнение связанных поверхностных волн, бегущих вдоль поверхности образца ($k = k_y$):

$$\omega^2 = k^2 v_{tr}^2 \left(1 + \frac{4\pi\beta_1^2}{\rho^{(m)} v_{tr}^2 \varepsilon_1} \right) \left[1 - \left(\frac{4\pi\beta_1^2/\rho^{(m)}}{v_{tr}^2 + 4\pi\beta_1^2/\varepsilon_1\rho^{(m)}} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^2 \right]. \tag{5.4.6}$$

Здесь $\varepsilon_1(\omega)$ – диэлектрическая проницаемость пьезодиэлектрика, которую мы считаем константой, а $\varepsilon_2(\omega)$ – проницаемость слабоионизованной газовой плазмы. Мы будем также считать, что $\varepsilon_2(\omega)$ имеет вид (5.4.1), причем плазма редкая, а поэтому $\mathrm{Re}\,\varepsilon_2(\omega)$ близка к единице, мнимая же часть $\operatorname{Im}\varepsilon_2(\omega)$ мала. В этих предположениях решение уравнения (5.4.6) находится легко ($\omega \to \omega + \delta$):

$$\omega^2 = k^2 v_{tr}^2 \left(1 + \frac{4\pi\beta_1^2}{\rho^{(m)} v_{tr}^2 \varepsilon_1}\right) \left[1 - \left(\frac{4\pi\beta_1^2/\rho^{(m)}}{v_{tr}^2 + \dfrac{4\pi\beta_1^2}{\rho^{(m)}}(\varepsilon_1 + 1)}\right)^2\right], \tag{5.4.7}$$

$$\delta = -i\frac{\omega_{Le}^2}{\nu_e}\left(1 - \frac{u}{v_ф}\cos\theta\right),$$

где $v_ф = \omega/k$ – фазовая скорость упругой волны, с хорошей степенью точности равная v_{tr}. Исходя из вида решения (5.4.7) для δ, мы опять приходим к выводу, что при условии

$$u > \frac{v_{tr}}{\cos\theta} \tag{5.4.8}$$

происходит раскачка упругих звуковых волн, но механизм неустойчивости уже диссипативный и связан с вынужденным тормозным излучением электронами плазмы поверхностных звуковых волн в пьезодиэлектрике.

Задачи по теме V

Задача 1. Найти предельный ток моноэнергетического релятивистского электронного пучка через эквипотенциальное вакуумное дрейфовое пространство в сильном продольном магнитном поле. Рассмотреть плоский и цилиндрический случаи.

Решение.

Электроны пучка при своем движении в эквипотенциальном дрейфовом пространстве создают пространственно распределенный заряд, который приводит к объемному изменению потенциала, а поэтому к торможению пучка. В результате в плоском дрейфовом пространстве установится распределение потенциала с максимумом в центре. Уравнение Пуассона для потенциала $\Phi(x)$ запишем в виде

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{4\pi j}{v} = -\frac{4\pi j}{c}\left[1 - \left(\gamma - \frac{e\Phi}{mc^2}\right)^{-2}\right]. \tag{1}$$

Здесь j – постоянная плотность тока пучка, а $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор, причем u – скорость инжектируемых электронов. При выводе уравнения (1) учтен интеграл движения

$$mc^2(1 - v^2/c^2)^{-1/2} + e\Phi = mc^2\gamma. \tag{2}$$

Уравнение (1) должно быть дополнено граничными условиями

$$\Phi|_{x=\pm d} = 0, \qquad \Phi|_{x=0} = \Phi_0. \tag{3}$$

Сформулированная задача является переопределенной: потенциал на оси однозначно определяется при заданной плотности пучка. Поэтому решение задачи позволяет связать функциональным соотношением j и Φ_0:

$$j = F(\Phi_0). \tag{4}$$

Для определения предельного тока это соотношение следует максимизировать по Φ_0 и найти $j_0 = j_{\max}$.

Аналитическое решение задачи находится в предельных случаях нерелятивистского ($e\Phi \ll mc^2$, $\gamma \approx 1$) и ультрарелятивистского ($e\Phi \gg mc^2$, $\gamma \gg 1$) пучка, причем для предельной плотности тока j_0 получаем:

$$j_0 = \frac{mc^3}{2\pi e d^2}\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}}{9}(\gamma-1)^{3/2} & \text{при} \quad \gamma = 1 + \dfrac{u^2}{2c^2}, \\ \gamma & \text{при} \quad \gamma \gg 1. \end{cases} \tag{5}$$

Эти два выражения можно записать единой интерполяционной формулой

$$j_0 = \frac{mc^3}{2\pi e}\frac{(\gamma^{2/3}-1)^{3/2}}{d^2}. \tag{6}$$

При $\gamma \gg 1$ это выражение совпадает с (5), а при $\gamma = 1 + u^2/2c^2$ отличается от (5) множителем $\sqrt{3}$.

Совершенно аналогично формулируется и решается задача прохождения пучка вдоль оси цилиндрического дрейфового пространства:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{4\pi j(r)}{v} = -\frac{4\pi j(r)}{c}\left[1 - \left(\gamma - \frac{e\Phi}{mc^2}\right)^{-2}\right], \tag{7}$$

$$\Phi|_{r=R} = 0, \qquad \Phi|_{r=0} = \Phi_0. \tag{8}$$

Распределение тока пучка по радиусу примем в виде

$$j(r) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r > r_0, \\ \text{const} & \text{при} \quad r \geqslant r_0. \end{cases} \tag{9}$$

При решении сформулированной задачи следует учитывать непрерывность потенциала и его производной на границе пучка при $r = r_0$. Окончательно находим

$$J_0 = \pi r_0^2 j_0 = \frac{mc^3}{e}\frac{(\gamma^{2/3}-1)^{3/2}}{1 + 2\ln(R/r_0)}. \tag{10}$$

Наконец заметим, что аналогичный расчет для тонкого трубчатого пучка со средним радиусом r_0 и толщиной $a \ll r_0$ приводит к следующему выражению для предельного тока:

$$J_0 = \frac{mc^3}{4\pi e}\frac{(\gamma^{2/3}-1)^{3/2}}{a/r_0 + 2\ln(R/r_0)}. \tag{11}$$

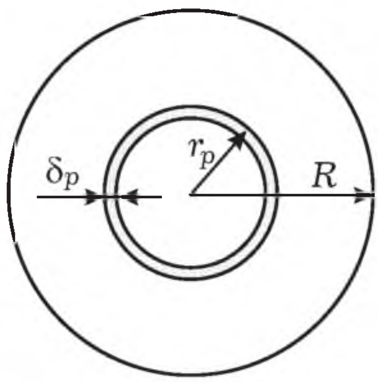

Рис. 5.3

Заметим, что величина $mc^3/e \approx 17\,\text{кА}$.

Задача 2. Определить пороговый ток развития бупемаповской неустойчивости в топкой трубчатой плазме со средним радиусом r_p и толщиной $\delta_p \ll r_p$, помещенной в металлический волновод радиуса R. Электроны считать сильно замагниченными продольным магнитным нолем, а ионы нет.

Решение.

Для решения задачи исходим из уравнения (5.1.1), которое нужно решать в трех областях (см. рис. 5.3): $r \leqslant r_p - \delta_p/2$, $r_p - \delta_p/2 \leqslant r \leqslant r_p + \delta_p/2$ и $r_p + \delta_p/2 \leqslant r \leqslant R$, далее сшить решения на границах $r_1 = r_p - \delta_p/2$, $r_2 = r_p + \delta_p/2$ и на металлической поверхности при $r = R$:

$$\{\Phi\}_{r=r_1} = 0, \quad \{\Phi\}_{r=r_2} = 0, \quad \Phi|_{r=R} = 0,$$
$$\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\}_{r=r_1} = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}, \quad \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\}_{r=r_2} = -\left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right). \tag{1}$$

Ограничиваемся аксиально симметричными решениями вида $\Phi = \Phi(r)e^{ik_z z - i\omega t}$, где

$$\Phi(r) = \begin{cases} C_1 I_0(k_z r), & r \leqslant r_1, \\ C_2 I_0(\varkappa_0 r) + C_3 K_0(\varkappa_0 r), & r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \\ C_4 I_0(k_z r) + C_5 K_0(k_z r), & r_2 \leqslant r \leqslant R. \end{cases} \tag{2}$$

Подставляя эти решения в граничные условия (1), получим довольно громоздкую систему уравнений для коэффициентов $C_1 \ldots C_5$. Условие существования нетривиальных решений этой системы дает дисперсионное уравнение. Мы приведем здесь это уравнение в пределе $k_z R \ll 1$, считая длину волновода L много больше радиуса R:

$$\left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right)\frac{1}{r_p\delta_p \ln R/r_p} - \frac{k_z^2\omega_{Le}^2\gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} = 0. \tag{3}$$

Отсюда находим порог возникновения бупемаповской неустойчивости в области частот $\omega \ll k_z u$:

$$\omega_{Le}^2 > \omega_{Le\,\text{пор}}^2 = \frac{u^2\gamma^3}{r_p\delta_p \ln R/r_p} \tag{4}$$

и пороговый ток (ср. с (5.1.5)):

$$J_{b\,\text{пор}} = \frac{mc^3}{2e}\frac{(\gamma^2-1)^{3/2}}{\ln R/r_p} \approx 8\frac{(\gamma^2-1)^{3/2}}{\ln R/r_p}\,\text{кА}. \tag{5}$$

Задача 3. Исследовать возбуждение плазменных волн в тонком трубчатом замагниченном плазменном слое (рис. 5.3), обдуваемом трубчатым пучком с радиусом $r_b > r_p$ и толщиной δ_b. Найти временной инкремент, коэффициент усиления и стартовый ток пучка для возбуждения резонатора конечной добротности.

Решение.

В данном случае следует решать уравнение (5.2.4) в пяти областях: $r \leqslant r_p - \delta_p/2$, $r_p - \delta_p/2 \leqslant r \leqslant r_p + \delta_p/2$, $r_p + \delta_p/2 \leqslant r \leqslant r_b - \delta_b/2$, $r_b - \delta_b/2 \leqslant r \leqslant r_b + \delta_b/2$, $r_b + \delta_b/2 \leqslant r \leqslant R$ и далее сшить эти решения в точках $r_{p1} = r_p - \delta_p/2$, $r_{p2} = r_p + \delta_p/2$, $r_{b1} = r_b - \delta_b/2$, $r_{b2} = r_b + \delta_b/2$, с помощью граничных условий

$$\{E_z\}_{r_{p1},r_{p2},r_{b1},r_{b2}} = 0, \qquad \left\{\frac{\partial E_z}{\partial r}\right\}_{r_{p1},r_{p2},r_{b1},r_{b2}} = 0, \qquad E_z|_{r=R} = 0. \tag{1}$$

При этом следует помнить, что в области, занятой плазмой ($r_p - \delta_p/2 \leqslant r \leqslant r_p + \delta_p/2$),

$$\varepsilon = \varepsilon_p = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \tag{2}$$

а в области, занятой пучком ($r_b - \delta_b/2 \leqslant r \leqslant r_b + \delta_b/2$),

$$\varepsilon = \varepsilon_b = 1 - \frac{\omega_b^2\gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2}. \tag{3}$$

Ограничиваясь только симметричными решениями уравнения (5.2.3), находим:

$$E_z = \begin{cases} C_2 J_l\left(ir\sqrt{k_z^2 - \omega^2/c^2}\right), & r \leqslant r_{p1}, \\ C_2 J_l\left(ir\sqrt{(k_z^2 - \omega^2/c^2)\varepsilon_p}\right) + C_3 N_l\left(ir\sqrt{(k_z^2 - \omega^2/c^2)\varepsilon_p}\right), & r_{p1} \leqslant r \leqslant r_{p2}, \\ C_2 J_l\left(ir\sqrt{k_z^2 - \omega^2/c^2}\right) + C_5 N_l\left(ir\sqrt{k_z^2 - \omega^2/c^2}\right), & r_{p2} \leqslant r \leqslant r_{b1}, \\ C_8 J_l\left(ir\sqrt{(k_z^2 - \omega^2/c^2)\varepsilon_b}\right) + C_7 N_l\left(ir\sqrt{(k_z^2 - \omega^2/c^2)\varepsilon_b}\right), & r_{b1} \leqslant r \leqslant r_{b2}, \\ C_8 J_l\left(ir\sqrt{k_z^2 - \omega^2/c^2}\right) + C_9 N_l\left(ir\sqrt{k_z^2 - \omega^2/c^2}\right), & r_{b2} \leqslant r \leqslant R. \end{cases} \tag{4}$$

Имеем 9 граничных условий для 9 коэффициентов $C_1 \ldots C_9$. Подстановка решений (4) в граничные условия (1) приводит к громоздкому дисперсионному уравнению,

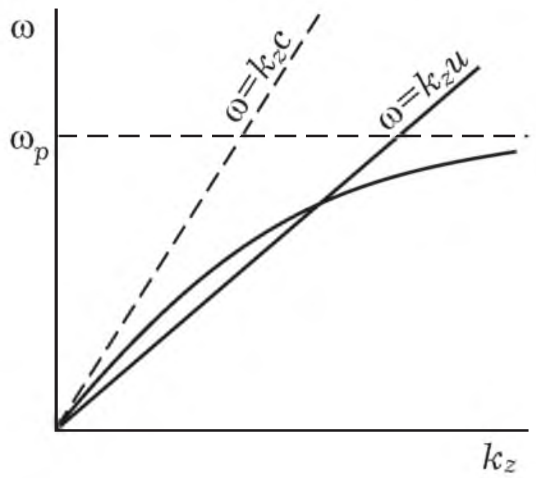

Рис. 5.4

которое в длинноволновом пределе, когда все аргументы функций в (4) малы, упрощается и сводится к виду (ср. с (5.2.6))

$$\left(k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left[1-\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}-\frac{\delta_b r_b}{\delta_p r_p}\frac{\omega_b^2\gamma^{-3}}{(\omega-k_z u)^2}\right]+\frac{1}{r_p\delta_p\ln R/r_p}=0. \tag{5}$$

В уравнении (5) учтен малый член 1 в квадратных скобках, чтобы правильно описать спектр плазменной волны при $\omega\to\omega_p$ (как это показано на рис. 5.4). Без учета этого члена и при пренебрежении вкладом пучка спектр плазменной волны описывается соотношением

$$\omega^2=\frac{k_z^2c^2}{1+\dfrac{c^2}{\omega_p^2 r_p\delta_p\ln R/r_p}}. \tag{6}$$

Это выражение показывает, что фазовая скорость плазменной волны меньше скорости света в вакууме. Поэтому эта волна может возбуждаться электронным пучком, если только (ср. с (5.2.7))

$$\omega_p^2>\frac{u^2\gamma^2}{r_p\delta_p\ln R/r_p}. \tag{7}$$

Уравнение (5) аналогично (5.2.6) с заменой $k_\perp=\dfrac{1}{r_p\delta_p\ln R/r_p}$, поэтому и условие возбуждения волны аналогично (5.2.7). В свою очередь, уравнение (5.2.7), как уже отмечалось, совпадает со вторым уравнением (4.2.9). Это позволяет детальный анализ уравнения (5) здесь не производить и привести лишь окончательные выражения для коэффициента усиления и стартового условия возбуждения генератора:

$$\delta k_z=\frac{\delta}{\partial\omega/\partial k_z}\simeq\frac{\delta}{u},\qquad L\frac{\delta}{u}>\ln\frac{1}{\varkappa}. \tag{8}$$

Величина δ – временной инкремент нарастания неустойчивости в неограниченной системе, равный

$$\delta=\left(\frac{1}{2}\frac{\delta_b r_b}{\delta_p r_p}\frac{N_b}{N_p}\right)^{1/3}\frac{\omega}{\gamma^{5/3}}. \tag{9}$$

Задача 4. Расчитать вакуумный (без плазмы) слабо релятивистский гиротрон ($u_\perp \ll c$) на E-волне.

Решение.

Уравнение для E-волны отличается от уравнения (5.3.1) и записывается в виде

$$\Delta E_z + \frac{\omega^2}{c^2}E_z = \frac{u_\perp^2 u_\parallel^2}{4c^4}\frac{(k_z^2 - \omega^2/c^2)\omega_b^2\gamma^{-1}}{(\omega - k_z u_\parallel - \Omega_e/\gamma)^2}E_z = 0. \qquad (1)$$

Видоизменяется и граничное условие (5.3.2), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$E_z|_{r=R} = 0. \qquad (2)$$

Дальнейший анализ полностью аналогичен проведенному выше и приводит к дисперсионному уравнению

$$\frac{\mu_{ls}^2}{R^2} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\left[1 + \frac{u_\perp^2 u_\parallel^2}{4c^4}\frac{\omega_b^2\gamma^{-1}}{(\omega - k_z u_\parallel - \Omega_e/\gamma)^2}\right] = 0, \qquad (3)$$

где μ_{ls} – нули функций Бесселя $J_l(\mu_{ls})$. Это уравнение сходно с (5.3.5), но отличается от него пучковым членом. Поэтому сохраняются соотношения (5.3.6) и (5.3.7) с заменой μ'_{ls} на μ_{ls}, а также сохраняется весь последующий анализ с той же заменой. Изменяется условие одномодовости возбуждения – вместо (5.3.8) оно записывается в виде

$$5{,}6 > \frac{R\gamma_\parallel\Omega_e}{c\gamma} > 2{,}4. \qquad (4)$$

Коэффициент усиления δk_z вместо (5.3.10) теперь дается формулой

$$\delta k_z = \frac{1 + i\sqrt{3}\operatorname{sign} k_z}{2}\left(\frac{u_\perp^2}{8R^2c^4}\frac{\omega_b^2\mu_{ls}^2}{\gamma k_z^4}\right)^{1/3} k_z. \qquad (5)$$

Меняется также и условие возбуждения генератора (5.3.11) и стартовый ток пучка (5.3.12), нахождение которых не представляет труда.

Задача 5. Показать, что при протекании тока в объеме пьезополупроводника с отрицательной дифференциальной проводимостью происходит возбуждение упругих звуковых волн.

Решение.

В последнем параграфе темы IV было показано, что в плазменной среде с отрицательной дифференциальной проводимостью возникает электростатическая неустойчивость с нарастающим во времени электрическим полем низкой частоты. Покажем теперь, что если среда к тому же пьезоэлектрическая, то в ней возбуждаются также упругие звуковые колебания. Чтобы получить дисперсионное уравнение связанных упруго-электромагнитных волн, к току носителей заряда следует добавить пьезоток

$$\delta j_i^{(\Pi)} = \beta_{ikl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial r_l}, \qquad (1)$$

где u_k – вектор смещения кристаллической решетки, подчиняющийся уравнениям теории упругости.

Опуская все промежуточные выкладки, аналогичные проведенным в § 5.3, приведем здесь окончательное дисперсионное уравнение в той же геометрии, т. е. для $k = k_\perp$ и $k = k_z$:

$$(\omega^2 - k^2 v_{tr,l}^2)(\omega + i4\pi\sigma_D) = \frac{4\pi\beta_{1,3}^2 k^2}{\rho^{(m)}}. \tag{2}$$

В отсутствие пьезоэффекта это уравнение описывает рассмотренную выше неустойчивость плазмы носителей заряда с отрицательной дифференциальной проводимостью. В пьезополупроводнике возможна также раскачка упругих звуковых колебаний. Считая $\omega \simeq kv_{tr,l} \gg 4\pi\sigma_D$, находим инкремент нарастания звуковых колебаний $(\omega \to \omega + i\delta)$:

$$\delta_{tr,l} \simeq -\frac{2\pi\beta_{1,3}^2 k^2}{\rho^{(m)}} \frac{4\pi\sigma_D}{\omega^3}. \tag{3}$$

При $\sigma_D < 0$ величина $\delta_{tr,l} > 0$ и имеет место раскачка звука.

ТЕМА VI

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕРАВНОВЕСНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ СРЕДАХ

§ 6.1. Общая характеристика нелинейных волновых явлений

В первой части лекций этой проблеме была посвящена последняя, десятая тема. При этом были рассмотрены нелинейные волновые явления только в равновесных средах. В неравновесных плазменных средах нелинейные явления значительно многообразнее и поэтому этой проблеме здесь будет уделено значительно больше места. Чтобы часто не отсылать читателя к первой части мы некоторые необходимые сведения повторим здесь, не вдаваясь однако в их обоснования (которые даны в первой части). В отличие от хорошо разработанной линейной теории колебаний и волн, нелинейная теория еще далека от совершенства: в настоящее время она по-существу только создается. Поэтому во введении к настоящей теме мы попытаемся очертить круг важнейших нелинейных волновых явлений в плазменных средах, которые и составят предмет нашего изучения в последующих параграфах. Кроме того, учитывая сложную, порой мало наглядную физическую природу нелинейных процессов, мы нарушим традиционный способ изложения и откажемся от анализа проблемы в рамках наиболее общей модели плазменных сред – модели кинетического уравнения и во введении на простейших и наглядных примерах продемонстрируем основные виды и закономерности исследуемых нами нелинейных явлений.

Следует заметить, что линейная теория, строго говоря, справедлива для описания бесконечно малых возмущений. При любом конечном значении возмущений должны проявиться нелинейные эффекты. Так, например, мы уже знаем из результатов, полученных в линейной теории, что даже в термодинамически равновесной плазменной среде малые электромагнитные колебания и волны вследствие диссипативных процессов – столкновительных, либо бесстолкновительных, поглощаются носителями заряда и со временем их амплитуда падает. Носители при этом, естественно, "разогреваются", что в свою очередь должно сказаться на характере поглощения волн в среде. В линейной теории таким проявлением диссипативных процессов пренебрегалось. Это чисто нелинейный эффект и его можно описать только в рамках нелинейной теории.

В качестве примера рассмотрим сильностолкновительную полностью ионизованную и однородную в пространстве плазму, в которой в начальный момент возбуждена высокочастотная ($\omega \gg \omega_{Le} \gg \nu_e$) электромагнитная волна с амплитудой $\mathbf{E}_0$, причем температура электронов равна T_{e0}. Со временем волна поглощается в плазме, амплитуда поля $\mathbf{E}(t)$ падает, а температура электронов $T_e(t)$ растет. Этот процесс (см. первую часть) описывается следующими уравнениям:

$$\frac{dN_eT_e}{dt} = \frac{\omega\varepsilon''(\omega)}{4\pi}E^2, \qquad \frac{dE^2}{dt} = -\omega\varepsilon''(\omega)E^2. \tag{6.1.1}$$

Здесь $\varepsilon''(\omega) \approx \omega_{Le}^2\nu_{ei}/\omega^3$ – мнимая часть диэлектрической проницаемости, а $\nu_{ei} = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{\pi}{m}}\dfrac{e^4N_eL}{T_e^{3/2}}$ – эффективная частота электрон-понных столкновений, причем $N_e = N_i = \mathrm{const}$, а $\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) \approx 1$. Начальные условия к системе (6.1.1), как уже отмечалось выше, имеют вид

$$E^2\big|_{t=0} = E_0^2, \qquad T_e|_{t=0} = T_{e0}. \tag{6.1.2}$$

Из системы (6.1.1) следует закон сохранения энергии в очевидной форме

$$\frac{E^2}{4\pi} + N_eT_e = \frac{E_0^2}{4\pi} + N_eT_{e0}. \tag{6.1.3}$$

Учитывая его, перепишем первое уравнение (6.1.1) в виде

$$\frac{dN_eT_e}{dt} = \frac{\omega_{Le}^2\nu_{e0}}{\omega^2}\left(\frac{T_{e0}}{T_e}\right)^{3/2}\left[N_e(T_{e0} - T_e) + \frac{E_0^2}{4\pi}\right], \tag{6.1.4}$$

где $\nu_{e0} = \nu_{ei}(T_{e0})$. Из (6.1.4) находим установившуюся температуру электронов

$$T_{e\infty} = T_{e0} + \frac{E_0^2}{4\pi N_e}, \tag{6.1.5}$$

которая достигается после полного поглощения электромагнитного поля, т.е. при $t \to \infty$, когда $E^2\big|_{t\to\infty} \to 0$.

В процессе поглощения сильно меняется и сам характер поглощения. На начальной стадии, пока разогрев электронов несуществен, оно носит экспоненциальный характер, что видно из второго уравнения (6.1.1). Но затем в процессе сильного разогрева электронов (что возможно при $E_0^2 \gg 4\pi N_e T_{e0}$) характер поглощения меняется и становится степенным. Общий закон изменения температуры электронов со временем при этом дается соотношением вида

$$\sqrt{T_e} - \sqrt{T_{e0}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_0^2}{4\pi N_e}} \ln \frac{\sqrt{E_0^2/4\pi} - \sqrt{T_{e0} N_e}}{\sqrt{E_0^2/4\pi} - \sqrt{T_e N_e}} = -\beta t, \qquad (6.1.6)$$

где $\beta = 2\pi N_e \omega_{Le}^2 \nu_{ei} T_e^{3/2}/\omega^2 E_0^2$. Отсюда видно, что экспоненциальный закон изменения $T_e(t)$ (а следовательно, и $E(t)$) имеет место только в начале процесса разогрева и в конце при выходе на новое стационарное состояние, когда поле уже практически полностью поглощено плазменной средой.

Рассмотренный процесс релаксации электромагнитного поля в плазме полностью определяется столкновениями электронов и в некотором смысле не очень типичен для сильноионизованной плазмы. В плазме, как правило, бесстолкновительные механизмы релаксации преобладают над столкновительными. Только в случае изотропной плазмы характер поглощения поперечной электромагнитной волны определяется столкновениями электронов (в бесстолкновительном пределе она не поглощается). Поэтому проведенный выше анализ диссипации электромагнитного поля в плазме не вполне обоснован. И хотя рассмотренный пример не типичен, он весьма нагляден и поясняет природу такого типа нелинейных эффектов в плазме, которые мы будем называть разогревными. В действительности же речь пойдет об изменении равновесной функции распределения носителей при поглощении электромагнитного поля в плазменной среде, вид которой, в свою очередь, будет влиять на характер поглощения поля. При этом, в отличие от рассмотренного выше примера, может установиться новое стационарное состояние, в котором величина поля волны останется конечной, хотя поглощение полностью прекратится. Исследование динамики такого нелинейного процесса, который известен как процесс квазилинейной релаксации, очевидно, возможно только в кинетической модели плазменных сред. Именно такая квазилинейная релаксация плазменных волн исследуется в следующих параграфах, причем для термодинамически неравновесных плазменных сред (термодинамически равновесные среды рассматривались в первой части лекций).

Приведем теперь другой пример нелинейного волнового процесса, совершенно не связанного с линейными механизмами поглощения волн. Более того, для наглядности такими механизмами поглощения мы здесь полностью пренебрежем. В теме IV было показано, что в плазменной среде в поле заданной электромагнитной волны происходит параметрическое возбуждение плазменных колебаний. Естественно, что при этом часть энергии электромагнитного поля переходит в энергию этих колебаний. Однако, ослаблением поля внешней волны мы пренебрегали, считая его заданным. Такое пренебрежение, строго говоря, не законно. Правильный нелинейный анализ процесса параметрического взаимодействия волн с плазменной средой должен учитывать не только возбуждение плазменных колебаний, но также и обусловленное таким возбуждением затухание самой волны накачки, или иными словами, учитывать процесс нелинейного поглощения электромагнитной волны.

В отсутствие диссипации параметрическое возбуждение плазменных колебаний в термодинамически равновесной плазменной среде должно носить колебательный характер. Дело в том, что в силу закона сохранения энергии в этом случае с нарастанием амплитуды плазменных колебаний и волн амплитуда волны накачки уменьшается до тех пор, пока какая-либо из плазменных волн не поменяется ролью с волной накачки. После этого такая плазменная волна сама становится волной накачки, процесс начнет протекать в обратную сторону и приобретет периодически меняющийся во времени характер. Однако, в термодинамически неравновесной среде возможна иная ситуация, когда за счет избыточной энергии, обусловленной неравновесностью, будут нарастать амплитуды всех взаимодействующих в плазме волн. В таких случаях говорят о взрывном характере развития параметрической неустойчивости на нелинейной стадии. Эти вопросы также будут обсуждаться в настоящей теме в параграфах, посвященных нелинейному взаимодействию волн в плазменной среде, причем мы ограничимся лишь процессами трехволнового взаимодействия.

Наконец, следует отметить еще один вид нелинейности волновых явлений в плазменных средах – так называемые регулярные нелинейные волны. К такому типу волн относятся локализованные в пространстве уединенные волны, или, как их еще называют, солитоны. В ряде случаев такие солитоны образуют целые структуры в плазменных средах и тогда говорят о процессах самоорганизации нелинейных волн. Иногда же в плазменных средах возникает солитонный хаос, в таких случаях говорят о газе солитонов, совершенно так же как в линейной электродинамике говорят о монохроматических когерентных волнах либо о широком спектре волн – газе фотонов и плазмонов. Все эти вопросы выходят за рамки настоящих лекций и поэтому ниже будут рассмотрены лишь отдельные примеры нелинейных уединенных волн в неравновесной плазменной среде. Напомним, что общая теория солитонов и их примеры для равновесной плазменной среды уже были рассмотрены в первой части настоящих лекций. Некоторые моменты этой теории ниже повторяются.

Учитывая, что в плазменной среде бесстолкновительные процессы являются доминирующими, ниже при изучении нелинейных волновых явлений столкновениями частиц мы полностью пренебрежем. Следует при этом помнить, что столкновения частиц есть ни что иное, как их рассеяние на тепловых флуктуациях, причем малость столкновительных процессов в термодинамически равновесных плазменных средах определяется малостью отношения

$$\frac{\langle E^2\rangle_{\text{ф}}}{4\pi N\langle\mathcal{E}\rangle} \approx \frac{\nu_{ei}}{\omega_{Le}} \ll 1. \tag{6.1.7}$$

Здесь $\langle\mathcal{E}\rangle$ – средняя энергия теплового движения частиц, равная температуре в случае невырожденной плазмы, либо энергии Ферми в случае вырожденной плазмы; $\langle E^2\rangle_{\text{ф}}/4\pi$ – энергия поля флуктуаций. Очевидно, что пренебрежение столкновениями частиц при анализе нелинейных волновых явлений в неравновесных плазменных средах будет справедливо, если энергия колебаний больше энергии поля флуктуаций. Поэтому ниже считаются выполненными неравенства

$$\frac{\langle E^2\rangle}{4\pi N\langle\mathcal{E}\rangle} \gg \frac{\langle E^2\rangle_{\text{ф}}}{4\pi N\langle\mathcal{E}\rangle} \approx \frac{\nu_{ei}}{\omega_{Le}}, \qquad \frac{\langle E^2\rangle}{4\pi N\langle\mathcal{E}\rangle} \ll 1. \tag{6.1.8}$$

Именно первое из этих неравенств позволяет пренебрегать столкновениями частиц в плазменных средах, в то время как второе неравенство означает, что энергия нелинейных волн мала по сравнению с тепловой энергией плазмы, а поэтому нелинейность все еще можно считать слабой.

§ 6.2. Уравнения квазилинейной теории плазменных колебаний

Здесь мы напомним полученные в первой части книги основные уравнения квазилинейной теории плазменных колебаний, с изложения которой и начинаем изучение нелинейных явлений в неравновесных средах. Именно, рассмотрим влияние поглощения поля колебаний на равновесную функцию распределения носителей и обратное воздействие этого эффекта на сам характер поглощения колебаний. Как всегда, исходим из уравнений Власова, причем для простоты ограничимся анализом только потенциальных полей $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. В отсутствие внешнего магнитного поля имеем

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \mathbf{E}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int d\mathbf{p}\, f_\alpha, \tag{6.2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int d\mathbf{p}\,\mathbf{v} f_\alpha = 0.$$

Обе последние формы записи уравнений поля эквивалентны, в чем легко убедиться, воспользовавшись уравнением непрерывности.

Считая колебания малыми, представим функцию распределения частиц в виде

$$f_\alpha(\mathbf{p},t) = f_{0\alpha}(\mathbf{p},t) + f_{1\alpha}(\mathbf{p},t) = \\ = f_{0\alpha}(\mathbf{p},t) + \sum_{\mathbf{k}} \operatorname{Re}\{f_{1\alpha\mathbf{k}} e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}\}. \tag{6.2.2}$$

Здесь $|f_{1\alpha}| \ll f_{0\alpha}$, причем $f_{1\alpha}$ разложена в ряд по волновым векторам возмущения, а $\omega(\mathbf{k})$ – собственная частота колебаний. Положим, что колебания в плазменной среде слабо затухают (либо нарастают) со временем, т. е. $f_{1\alpha\mathbf{k}}(t)$ является медленно меняющейся функцией времени по сравнению с $e^{-i\omega(\mathbf{k})t}$. При этом медленно будет меняться и равновесная функция $f_{0\alpha}(t)$, изменение которой обусловлено поглощением колебаний, вследствие чего $f_{0\alpha}(t)$ не может меняться быстрее чем $f_{1\alpha\mathbf{k}}(t)$.

Разложим теперь поле $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ в ряд по гармоникам
$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\sum_{\mathbf{k}}\mathrm{Re}\,\{\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\omega,t)e^{-i\omega(\mathbf{k})t+i\mathbf{kr}}\}, \tag{6.2.3}$$
подставим (6.2.2) и (6.2.3) в систему (6.2.1) и усредним по быстрым осцилляциям. Получим следующую систему уравнений:
$$\begin{gathered}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial t}+e_\alpha\langle\mathbf{E}\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial\mathbf{p}}\rangle=0,\\ \frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial\mathbf{r}}+e_\alpha\mathbf{E}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial\mathbf{p}}=0.\end{gathered} \tag{6.2.4}$$
Из второго уравнения (6.2.4) следует, что
$$f_{1\alpha\mathbf{k}}=-\frac{ie_\alpha\mathbf{E}_{\mathbf{k}}}{\omega-\mathbf{kv}}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial\mathbf{p}}. \tag{6.2.5}$$
Этот результат, естественно, совпадает с результатом линейной теории. Таким образом, в рассматриваемой схеме колебания плазмы описываются линейной теорией. Их спектр дается дисперсионным уравнением
$$\varepsilon(\omega,\mathbf{k})=1+\sum_\alpha\frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2}\int\frac{\mathbf{k}\dfrac{\partial f_{0\alpha}}{\partial\mathbf{p}}}{\omega-\mathbf{kv}}\,d\mathbf{p}, \tag{6.2.6}$$
причем
$$\begin{gathered}\frac{\partial|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t}=2\delta_{\mathbf{k}}|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2,\\ \delta_{\mathbf{k}}=-\frac{1}{2}\sum_\alpha\frac{4\pi e_\alpha^2\omega}{k^2}\int d\mathbf{p}\,\mathrm{Im}\,\frac{\mathbf{k}\dfrac{\partial f_{0\alpha}}{\partial\mathbf{p}}}{\omega-\mathbf{kv}}.\end{gathered} \tag{6.2.7}$$
В отличие от линейной теории здесь, однако, $f_{0\alpha}(t)$ – медленно меняющаяся функция времени, что обусловлено учетом разогрева носителей из-за поглощения ими энергии малых колебаний. Это изменение $f_{0\alpha}(t)$ описывается первым уравнением (6.2.7), которое и является нелинейным в рассматриваемой схеме. При учете (6.2.5) и (6.2.3) оно записывается в виде
$$\begin{gathered}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial p_i}D_{\alpha ij}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j},\\ D_{\alpha ij}=-\frac{e_\alpha^2}{2}\sum_{\mathbf{k}}\frac{k_ik_j}{k^2}|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2\mathrm{Im}\,\frac{1}{\omega-\mathbf{kv}}.\end{gathered} \tag{6.2.8}$$

Система уравнений (6.2.6)–(6.2.8) образует полную систему уравнений квазилинейной теории колебаний бесстолкновительной плазменной среды, которая учитывает влияние поглощения колебаний на вид равновесной функции распределения носителей, т.е. нелинейный эффект их разогрева.

Заметим теперь, что система квазилинейных уравнений обеспечивает выполнение трех основных законов сохранения: числа носителей, импульса и энергии

$$\frac{d}{dt}\int f_{0\alpha}\,d\mathbf{p}=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha}\int f_{0\alpha}\mathbf{p}\,d\mathbf{p}+\sum_{\mathbf{k}}\frac{\mathbf{k}|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2}{8\pi\omega}\right)=0, \tag{6.2.9}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha}\int \mathcal{E}_{\alpha}f_{0\alpha}\,d\mathbf{p}+\sum_{\mathbf{k}}\frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2}{8\pi}\right)=0.$$

В этом легко убедиться непосредственной проверкой. Заметим также, что все полученные выше соотношения пригодны как для невырожденной, так и вырожденной плазменной среды.

Перейдем к выводу квазилинейных уравнений для магнитоактивной плазмы. Так же как и ранее, ограничимся рассмотрением лишь продольных колебаний плазмы и разобьем функцию распределения частиц на медленную и быструю части, согласно соотношениям (6.2.2) и (6.2.3). Исходя из уравнения Власова для магнитоактивной плазмы

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}}+e_\alpha\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]\right\}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}}=0, \tag{6.2.10}$$

для $f_{0\alpha}$ и $f_{1\alpha}$ получаем выражения[1]

$$\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mu t}+e_\alpha\langle\mathbf{E}\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial \mathbf{p}}\rangle+e_\alpha[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}=0, \tag{6.2.11}$$

$$\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial \mathbf{r}}+e_\alpha\mathbf{E}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}+e_\alpha[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial \mathbf{p}}=0. \tag{6.2.12}$$

Ограничимся далее рассмотрением аксиально симметричных функций $f_{0\alpha}=f_{0\alpha}(p_z,p_\perp)$. Такая ситуация возникает при взаимодействии

[1] Для обозначения медленного изменения во времени мы ввели параметр μt, который впоследствии будет заменен на t.

пучка частиц с плазмой, либо в плазме, находящейся в электрическом поле и т.п.[1] Используя разложение (6.1.3) и учитывая потенциальность поля $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, находим решение уравнения (6.2.10)

$$f_{1\alpha\mathbf{k}} = -\frac{ie_\alpha\gamma_\alpha}{\Omega_\alpha}\Phi_\mathbf{k}\int\limits_C^\varphi d\varphi' \left(\mathbf{k}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\varphi'} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{i\gamma_\alpha}{\Omega_\alpha}\int\limits_\varphi^{\varphi'} d\varphi''\,(\omega - \mathbf{kv})_{\varphi''}\right] = e_\alpha \sum_{n,m} \frac{J_n\left(\dfrac{k_\perp v_\perp \gamma_\alpha}{\Omega_\alpha}\right) J_m\left(\dfrac{k_\perp v_\perp \gamma_\alpha}{\Omega_\alpha}\right)}{\omega - k_z v_z - n\Omega_\alpha/\gamma_\alpha} \times$$

$$\times \Phi_\mathbf{k}\left(\frac{n\Omega_\alpha}{v_\perp\gamma_\alpha}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_\perp} + k_z\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_z}\right)\exp[i(m-n)\varphi], \quad (6.2.13)$$

где $|C| \to \infty$, причем знак постоянной C совпадает со знаком заряда e_α так, чтобы $f_{1\alpha k}(C) \to 0$.

Подставим это решение в уравнение (6.2.11) и произведем усреднение по времени. Учитывая при этом, что последнее слагаемое для аксиально симметричных функций $f_{0\alpha}$ обращается в нуль, и производя усреднение по φ, окончательно получаем квазилинейное уравнение для "медленной"части функции распределения

$$\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mu t} = -\frac{e_\alpha^2}{2}\sum_\mathbf{k}\sum_n \Phi_\mathbf{k}\Phi_\mathbf{k}^*\left(k_z\frac{\partial}{\partial p_z} + \frac{n\Omega_\alpha}{v_\perp\gamma_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\perp}\right) J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp\gamma_\alpha}{\Omega_\alpha}\right) \times$$

$$\times \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\omega - k_z v_z - n\Omega_\alpha/\gamma_\alpha}\right)\left(k_z\frac{\partial}{\partial p_z} + \frac{n\Omega_\alpha}{v_\perp\gamma_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\perp}\right) f_{0\alpha}. \quad (6.2.14)$$

В пределе $\Omega_\alpha \to 0$ это уравнение переходит в (6.2.5), но только для одномерного движения (вдоль оси $0z$).

Уравнение квазилинейной теории для поля $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ выводится из последнего уравнения (6.2.1). Умножая это уравнение скалярно на $\mathbf{E}$ и усредняя по быстрым осцилляциям, получаем первое соотношение (6.2.7), в котором

$$\delta_\mathbf{k} = \frac{1}{2}\sum_\alpha\sum_n \frac{4\pi e_\alpha^2\omega}{k^2}\int d\mathbf{p}\,\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\omega - k_z v_z - n\Omega_\alpha/\gamma_\alpha}\right) \times$$

$$\times J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp\gamma_\alpha}{\Omega_\alpha}\right)\left(\frac{n\Omega_\alpha}{v_\perp\gamma_\alpha}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_\perp} + k_z\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_z}\right) \quad (6.2.15)$$

[1]Функция $f_{0\alpha}(p)$ может быть также функцией φ, например, в случае неоднородной магнитоактивной плазмы. При этом квазилинейная теория существенно усложняется.

представляет собой инкремент нарастания (декремент затухания) колебаний.

Уравнения (6.2.7) с учетом (6.2.14) и (6.2.15) образуют замкнутую систему уравнений квазилинейной теории для продольных колебаний магнитоактивной плазмы, спектр которых определяется соотношением

$$\varepsilon(\mu t, \omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha}\sum_{n} \frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2} \int d\mathbf{p} \times$$
$$\times \frac{J_n^2\left(\dfrac{k_\perp v_\perp \gamma_\alpha}{\Omega_\alpha}\right)}{\omega - k_z v_z - n\Omega_\alpha/\gamma_\alpha} \left(k_z \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_z} + \frac{n\Omega_\alpha}{v_\perp \gamma_\alpha}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_\perp}\right). \quad (6.2.16)$$

Легко показать, что и эти уравнения удовлетворяют законам сохранения (6.2.9).

§ 6.3. Квазилинейная релаксация пучковой неустойчивости в плазме

Применим теперь полученные выше уравнения квазилинейной теории колебаний к вопросу о релаксации пучковой неустойчивости в плазме. В теме III при изложении линейной теории взаимодействия пучка малой плотности с плазмой было показано, что в такой системе при отсутствии внешнего магнитного поля могут развиваться неустойчивости двух типов: гидродинамическая и кинетическая. Если прямолинейный пучок нерелятивистских электронов достаточно моноэнергетический, так что $v_{Tb} \ll u\left(\dfrac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3}$, где v_{Tb} – тепловой разброс скоростей электронов пучка, u – их направленная скорость, а N_b/N_p – отношение плотности пучка к плотности плазмы, то неустойчивость носит гидродинамический характер и сопровождается возбуждением плазменных волн с частотой

$$\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{u} \approx \omega_{Le}, \quad (6.3.1)$$

инкремент нарастания которых

$$\delta = \delta_k \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3}\omega_{Le} \ll \omega. \quad (6.3.2)$$

Для гидродинамической пучковой неустойчивости определяющими факторами являются макроскопические параметры системы: плотность, скорость и т.п. Наоборот, для пучков с большим тепловым разбросом скоростей, когда $v_{Tb} > u\left(\dfrac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3}$, пучковая неустойчивость является кинетической; она определяется явным видом функции распределения электронов по скоростям.

Анализ квазилинейной стадии развития пучковой неустойчивости начнем с гидродинамической неустойчивости. Ограничимся одномерным случаем и запишем квазилинейные уравнения для функции $F_0(p)$, нормированной на единицу ($\int F_0(p)\,dp = 1$), в виде

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} D \frac{\partial F_0}{\partial p}, \qquad \frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = 2\delta_k |E_k|^2, \tag{6.3.3}$$

где

$$D = -\frac{e^2}{2} \sum_k |E_k|^2 \frac{\delta_k}{(\omega - kv)^2 + \delta_k^2}. \tag{6.3.4}$$

На гидродинамической стадии нарастания колебаний $\omega - kv \approx \delta_k/\sqrt{3} \gg kv_{Tb}$, причем инкремент δ_k не зависит от волнового вектора. Учитывая сказанное, запишем

$$\begin{gathered} \frac{\partial D}{\partial t} = 2\delta D, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial t} = D\frac{\partial^2 F_0}{\partial p^2}, \\ D = -\frac{3}{8}\frac{e^2}{\delta} \sum_k |E_k|^2. \end{gathered} \tag{6.3.5}$$

Для решения задачи развития во времени пучковой неустойчивости система уравнений (6.3.5) должна быть дополнена начальным условием, которое в случае моноэнергетического электронного пучка, очевидно, имеет вид

$$F_0(0) = \delta(p - mu). \tag{6.3.6}$$

Произведем далее замену

$$\frac{d\tau}{dt} = D(t), \qquad \frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau}.$$

Тогда уравнения (6.3.5) можно переписать следующим образом

$$\frac{\partial F_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial p^2} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial \tau} = 2\delta,$$
$$D = -\frac{3\pi e^2}{\delta} W, \tag{6.3.7}$$

где $W = \dfrac{1}{8\pi} \sum\limits_k |E_k|^2$ – энергия поля колебаний. Решение системы (6.3.7) с начальным условием (6.3.6) имеет вид

$$F_0(\tau) = \frac{A}{\sqrt{\tau}} \exp\left[-\frac{(p - mu)^2}{4\tau}\right]. \tag{6.3.8}$$

Из условия нормировки $\int F_0\, dp = 1$ при этом имеем $A = 1/\sqrt{\pi}$.

Таким образом, при развитии пучковой неустойчивости мопоэпергетическое вначале распределение (6.3.6) со временем размывается, причем эффективная температура растет во времени: $T = 2\tau/m \sim t$. Такое размытие, однако, продолжается до тех пор, пока не нарушится условие применимости гидродинамического рассмотрения $\delta > kv_{Tb}$, или $v_{Tb} = \sqrt{\dfrac{T}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\tau}{m^2}} < \left(\dfrac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3} u$. В результате находим

$$T_{\max} = \frac{2\tau_{\max}}{m} = mu^2 \left(\frac{N_b}{2N_p}\right)^{2/3}. \tag{6.3.9}$$

Отсюда следует, что на разогрев пучка при развитии гидродинамической пучковой неустойчивости уходит $2\left(\dfrac{N_b}{2N_p}\right)^{2/3}$ часть кинетической энергии пучка, т.е.

$$\frac{T_{\max}}{mu^2/2} = 2\left(\frac{N_b}{2N_p}\right)^{2/3}. \tag{6.3.10}$$

Легко оценить и энергию поля колебаний при развитии гидродинамической пучковой неустойчивости. Действительно, согласно (6.3.7) $D \sim 2\delta\tau \sim e^2 W/\delta$, поэтому $W_{\max} \sim \dfrac{\delta^2}{2\pi e^2}\tau_{\max}$ или

$$\frac{W_{\max}}{N_b mu^2/2} = \frac{1}{2\pi}\frac{\delta^2}{me^2 N_b}\left(\frac{N_b}{2N_p}\right)^{2/3} = \left(\frac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3}, \tag{6.3.11}$$

т.е. кратная $\left(\dfrac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3}$ часть энергии пучка передается плазменным колебаниям. Из соотношений (6.3.10) и (6.3.11) следует, что потери энергии пучка на гидродинамической стадии невелики, причем они расходуются в основном на возбуждение волн и в меньшей степени на разогрев пучка.

Наконец, оценим время квазилинейной релаксации $t_{\text{кв}}$ гидродинамической пучковой неустойчивости. Учитывая, что $D \sim 2\delta\tau \approx 2\delta D t$, легко показать, что

$$t_{\text{кв}} \sim \frac{1}{\delta} \approx \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2N_p}{N_b}\right)^{1/3}\frac{1}{\omega_{Le}}. \tag{6.3.12}$$

Наиболее характерная особенность развития гидродинамической пучковой неустойчивости – ее нестационарность. Это является следствием того, что инкремент нарастания δ гидродинамической неустойчивости не зависит от вида функции распределения электронов пучка и вообще не изменяется во времени. Поэтому в процессе своего развития неустойчивость не стабилизируется. Однако, она приводит, как было показано, к размытию функции распределения электронов пучка (их нагреву). При этом очень скоро, за время $\sim 1/\delta$, неустойчивость приобретает кинетический характер и нарушается неравенство $v_{Tb} < u\left(\dfrac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3}$.

Чтобы проследить поведение пучка на кинетической стадии развития неустойчивости, рассмотрим квазилинейную релаксацию размытого пучка в плазме. Пусть в начальный момент времени полная функция распределения электронов в плазме имеет вид, показанный на рис. 6.1 сплошной линией, и в одномерном случае можно записать

$$F_0(v,0) = \left(\frac{m}{2\pi T_e}\right)^{1/2} e^{-mv^2/2T_e} - \\ - \frac{N_b}{N_p}\left(\frac{m}{2\pi T_b}\right)^{1/2} e^{-m(v-u)^2/2T_b}. \tag{6.3.13}$$

Обычно принимают $T_b \gg T_e$.

Инкремент нарастания кинетической неустойчивости в отличие от гидродинамической полностью определяется функцией распределения

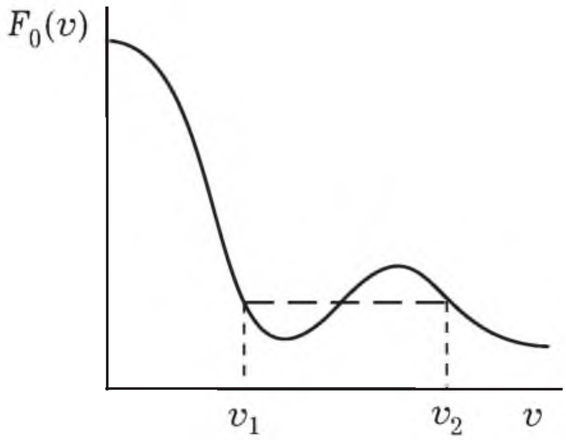

Рис. 6.1

по скоростям и, как показано в теме IV, составляет

$$\delta_k = \frac{\pi}{2}\frac{\omega_{Le}^3}{k^2}\left.\frac{\partial F_0}{\partial v}\right|_{v=\omega/k}. \tag{6.3.14}$$

Спектр же частот возбуждаемых колебаний при развитии неустойчивости в условиях $N_b \ll N_p$ совпадает со спектром ленгмюровских колебаний плазмы:

$$\omega \approx \omega_{Le}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{Le}^2}\right). \tag{6.3.15}$$

Систему квазилинейных уравнений для кинетически неустойчивых колебаний можно записать в виде

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p}D\frac{\partial F_0}{\partial p}, \qquad \frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = 2\delta_k|E_k|^2,$$

$$D = -\frac{e^2}{2}\sum_k |E_k|^2 \mathrm{Im}\,\frac{1}{\omega - kv} = \frac{\pi e^2}{2}\sum_k |E_k|^2\delta(\omega - kv) = \frac{e^2}{2}\frac{|E_k|^2}{kv}. \tag{6.3.16}$$

При получении этой системы из (6.3.3) и (6.3.4) было учтено, что в пределе $\omega - kv \gg \delta_k \to 0$, который всегда выполняется для кинетической пучковой неустойчивости,

$$\frac{\delta_k}{(\omega - kv)^2 + \delta_k^2} \to \pi\delta(\omega - kv). \tag{6.3.17}$$

Видно, что система (6.3.16) допускает сосуществование стацпонарного решения, в котором $\left.\dfrac{\partial F_0}{\partial v}\right|_{v=\omega/k} \to 0$, т.е. на функции распределенпя электронов по скоростям образуется "плато"в области скоростей $v \approx \omega/k$. Точнее, такое "плато", представленное на рис. 6.1 пунктирной линией образуется в области скоростей $v_1 \leqslant v \leqslant v_2$. Задача квазилинейной теории состоит в определении значений v_1 и v_2 и высоты $F_0(v,\infty)$ в этой области. Для этой цели имеем три известных соотношения: закон сохранения числа частиц

$$\int\limits_{v_1}^{v_2} F_0(v,0)\,dv = \int\limits_{v_1}^{v_2} F_0(v,\infty)\,dv = F_0(v,\infty)(v_2 - v_1) \tag{6.3.18}$$

и два очевидных равенства

$$F_0(v_1,0) = F_0(v_2,0) = F_0(v,\infty). \tag{6.3.19}$$

Рассмотрим теперь, какая доля энергии пучка переходит в колебания поля на квазилинейной стадии кинетической пучковой неустойчивости. Заметим, что подобно (6.2.3) из (6.3.16) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(F_0 - \frac{\partial}{\partial v}\frac{e^2|E_k|^2}{2\pi m^2 k^2 v^4}\right) = 0. \tag{6.3.20}$$

Отсюда

$$F_0(v,t) = F_0(v,0) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{e^2|E_k(t)|^2}{2\pi m^2 k_0^2 v^4}. \tag{6.3.21}$$

Интегрируя это соотношение по скоростям, окончательно находим

$$|F_k(\infty)|^2 = \frac{2\pi m^2 k^2 v^4}{e^2}\int\limits_{v_1}^{v_2}[F_0(v,\infty) - F_0(v,0)]\,dv, \tag{6.3.22}$$

где $v = \omega/k \approx \omega_p/k \approx u$. Заметим, что величина $|E_k(\infty)|^2$ отлична от нуля лишь в области фазовых скоростей $v_1 < v = \omega/k < v_2$, так как только в этой области происходит возбуждение плазменных волн электронным пучком.

Из (6.3.22) видно, что в установившемся в результате квазилинейной релаксации состоянии системы плотность энергии колебаний поля распределена по фазовым скоростям неравномерно; в распределении энергии по фазовым скоростям преобладают колебания с большими скоростями. Кроме того, из (6.3.22) нетрудно оценить отношение

$$\frac{|E_k(\infty)|^2}{N_b m u^2/2} \approx \frac{v_2 - v_1}{u} \sim \left(\frac{N_b}{N_p}\right)^{1/3}. \tag{6.3.23}$$

Таким образом, при квазилинейной релаксации кинетической пучковой неустойчивости плазменным колебаниям передается малая доля энергии порядка $(N_b/N_p)^{1/3}$. Время квазилинейной релаксации кинетической пучковой неустойчивости при этом оказывается порядка

$$t_{\text{кв}} \sim \frac{m^2 v^2}{D} \sim \frac{m^2 u^2 \omega_{Le}}{e^2 |E_k|^2} \sim \frac{1}{\omega_{Le}} \left(\frac{N_p}{N_b}\right)^{1/3}. \tag{6.3.24}$$

Это время в $N_p/N_b \gg 1$ раз превосходит время релаксации пучковой неустойчивости на гидродинамической стадии.

Кинетическая неустойчивость в отличие от гидродинамической развивается с замедлением, так как уменьшается величина $\partial F_0/\partial v$. На конечной стадии этот процесс бесконечно замедлен. Поэтому становится важным учет явлений, восстанавливающих наклон функции распределения, таких как столкновения частиц.

§ 6.4. Нелинейная динамика параметрической неустойчивости в плазменной среде – трехволновое приближение

В теме IV при рассмотрении параметрического возбуждения волн в плазменных средах было показано, что в условиях, когда частота внешнего поля ω_0 близка к сумме частот собственных колебаний среды ω_1 и ω_2, т.е.

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \tag{6.4.1}$$

уже в низшем, квадратичном по амплитуде внешнего поля приближении происходит одновременное возбуждение обоих типов колебаний. Этот процесс был назван резонансным распадом волны накачки на две собственные волны плазменной среды. При рассмотрении такого распада амплитуда волны накачки E_0 считалась заданной и неизменной. Это предположение, однако, явно противоречит закону сохранения энергии, особенно, если речь идет о плазменной среде, находящейся в термодинамическом равновесии, и для подпитки возбуждаемых волн энергию неоткуда брать, кроме как от самой волны накачки. Другими словами, в процессе параметрического возбуждения плазменных волн энергия волны накачки должна уменьшаться. Это чисто нелинейный эффект, не описываемый в рамках квазилинейной теории колебаний и непосредственно не связанный с диссипативными процессами в самой плазменной среде. Энергия волны накачки при этом преобразуется в энергию возбуждаемых волн, не нагревая саму среду.

Наряду с прямым процессом распада имеет место и обратный процесс слияния плазменных волн, приводящий к усилению волны накачки. Этот процесс, однако, будет превалировать над процессом распада после того, как амплитуды плазменных волн значительно возрастут и сравняются с амплитудой волны накачки. Поскольку как прямой, так и обратный процессы недиссипативны, а среда находится в термодинамическом равновесии и не может отдать энергию полю, то в системе установится колебательный процесс с перекачкой энергии от волны накачки плазменным колебаниям и обратно. Естественно, такой процесс может быть описан только в рамках нелинейной теории взаимодействия волн в плазменной среде.

Заметим, что в термодинамически неравновесной плазменной среде нелинейный процесс распада волны накачки может протекать совершенно иначе. Здесь возможна передача энергии от среды к полю и нарастание во времени всех трех волн: плазменных волн и волны накачки. Такой процесс возможен при параметрическом возбуждении волн, как например, в электронном пучке. Именно таким является рассмотренный в теме IV процесс вынужденного рассеяния электромагнитной волны на релятивистском электронном пучке, лежащий в основе работы генератора коротковолнового излучения – лазера на свободных электронах.

Резонансный трехволновой процесс в плазменной среде с затуханием волны накачки можно описать, представив поле в среде в виде суммы трех волн

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}_0(t)\cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0\mathbf{r}) + \\
&\qquad + \mathbf{E}_1(t)\cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(t)\cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r}), \\
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\omega_0}[\mathbf{k}_0\mathbf{E}_0]\cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0\mathbf{r}) + \\
&\quad + \frac{1}{\omega_1}[\mathbf{k}_1\mathbf{E}_1]\cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r}) + \frac{1}{\omega_2}[\mathbf{k}_2\mathbf{E}_2]\cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{6.4.2}$$

Решая далее уравнение Власова путем разложения по степеням поля с точностью до кубических членов и считая амплитуды полей $\mathbf{E}_0(t)$, $\mathbf{E}_1(t)$ и $\mathbf{E}_2(t)$ слабо зависящими от времени, находим индуцированные в плазме заряды и токи. Подставляя затем найденные выражения в уравнения Максвелла, учитывая только первые производные по времени и считая выполненным наряду с (6.4.1) также и условие

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \tag{6.4.3}$$

получим уравнение для амплитуд полей.

Такой подход к построению теории нелинейного взаимодействия волн удобен в трехволновом приближении, если все три волны являются собственными волнами среды. Это сильно сужает возможности метода, поскольку он не учитывает нерезонансный модифицированный распад, не говоря уж о таких очевидных нелинейных процессах как появление высших гармоник волны накачки, и действие квадратичной по полю накачки усредненной пондеромоторной силы, которая была введена еще в первой части книги. Поэтому ниже мы будем излагать теорию с несколько иных, более общих позиций.

Считая электромагнитное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ произвольным, но относительно слабым, будем решать уравнения Власова для данного сорта носителей заряда

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]\right\}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{6.4.4}$$

разложением по степеням поля

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \ldots, \tag{6.4.5}$$

где $f_n \sim E^n$, причем f_0 – равновесное распределение Максвелла, либо Ферми. Из (6.4.4) и (6.4.5) в отсутствие внешних полей получаем систему зацепляющихся уравнений

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{r}} + e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]\right\}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial \mathbf{p}} = 0. \tag{6.4.6}$$

Разлагая далее $f_n(\mathbf{r},t)$ и поля $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ в интегралы Фурье

$$A(\mathbf{r},t) = \int d\omega \int d\mathbf{k}\, e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(\omega,\mathbf{k}),$$

из уравнения (6.4.6) находим

$$f_1(\mathbf{p},\omega,\mathbf{k}) = \frac{-ie\alpha_{ij}(\omega,\mathbf{k},\mathbf{v})}{\omega-\mathbf{kv}}E_j(\omega,\mathbf{k})\frac{\partial f_0(\mathbf{p})}{\partial p_i},$$

$$f_2 = (-ie)^2\int d\omega_1\int d\mathbf{k}_1\,\frac{\alpha_{i_1j_1}(\omega-\omega_1,\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,\mathbf{v})}{\omega-\mathbf{kv}}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial p_{i_1}}\frac{\alpha_{i_2j_2}(\omega_1,\mathbf{k}_1,\mathbf{v})}{\omega_1-\mathbf{k}_1\mathbf{v}}\frac{\partial f_0}{\partial p_{i_2}}E_{j_1}(\omega-\omega_1,\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)E_{j_2}(\omega_1,\mathbf{k}_1) \qquad (6.4.7)$$

и т.д.

При получении (6.4.7) нами учтено, что для равновесной функции

$$f_0(\mathbf{p},\omega,\mathbf{k}) = f_0(\mathbf{p})\delta(\omega)\delta(\mathbf{k}),$$

а

$$\mathbf{B}(\omega,\mathbf{k}) = \frac{1}{\omega}[\mathbf{kE}(\omega,\mathbf{k})].$$

Теперь не представляет труда найти разложение тока в среде по степеням поля. Для данного сорта носителей

$$\mathbf{j}(\omega,\mathbf{k}) = e\int d\mathbf{p}\,\mathbf{v}f = \mathbf{j}_1+\mathbf{j}_2+\ldots+\mathbf{j}_n+\ldots. \qquad (6.4.8)$$

Подставляя сюда функции (6.4.7), окончательно находим вектор индукции

$$D_i(\omega,\mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})E_j(\omega,\mathbf{k}) + \sum_{n=2}^{\infty}\int d\omega_1 d\mathbf{k}_1\ldots d\omega_{n-1}d\mathbf{k}_{n-1}\times$$
$$\times\,\varepsilon_{ij_1\ldots j_n}(\omega,\mathbf{k},\omega_1,\mathbf{k}_1,\ldots,\omega_{n-1},\mathbf{k}_{n-1})E_{j_1}(\omega-\omega_1,\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\ldots$$
$$\ldots E_{j_{n-1}}(\omega_{n-2}-\omega_{n-1},\mathbf{k}_{n-2}-\mathbf{k}_{n-1})E_{j_n}(\omega_{n-1},\mathbf{k}_{n-1}). \qquad (6.4.9)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})$ – хорошо известный нам двухнндексный тензор диэлектрической проницаемости плазменной среды; $\varepsilon_{ij_1\ldots j_n}(\omega,\mathbf{k},\ldots,\omega_{n-1},\mathbf{k}_{n-1})$ – многоиндексный тензор, определенный в первой части лекций в теме X.

Подстановка (6.4.9) в уравнение поля

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = 0 \qquad (6.4.10)$$

приводит к нелинейному интегральному уравнению для амплитуды Фурье-разложения $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$, вообще говоря, бесконечного порядка:

$$\left[\frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2} - \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})\right)\right] E_j(\omega, \mathbf{k}) = \sum_{n=2}^{\infty} \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \dots d\omega_{n-1} d\mathbf{k}_{n-1} \times$$
$$\times\, \varepsilon_{ij_1\dots j_n}(\omega, \mathbf{k}, \omega_1, \mathbf{k}_1, \dots, \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) E_{j_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \dots$$
$$\dots E_{j_{n-1}}(\omega_{n-2} - \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-2} - \mathbf{k}_{n-1}) E_{j_n}(\omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}). \quad (6.4.11)$$

Это уравнение является основным в нелинейной электродинамике материальных сред, построенной методом разложения по степеням поля.

В первом, линейном приближении уравнение (6.4.11) имеет нетривиальные монохроматические волновые решения, удовлетворяющие дисперсионному соотношению

$$\left| k^2\delta_{ij} - k_ik_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0. \quad (6.4.12)$$

Если продвигаться в разложении по степеням поля дальше, то нелинейные слагаемые в (6.4.11) приведут к появлению высших гармоник линейных волн, эффектам их взаимодействия и появления комбинационных волн и т.д. Это все означает, что амплитуды линейных волновых решений окажутся медленно меняющимися функциями времени (из-за слабой нелинейности), т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}} + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}) e^{i\omega t - i\mathbf{kr}}. \quad (6.4.13)$$

Задача нелинейной электродинамики как раз и состоит в получении уравнений для этих амплитуд. При этом удобно исходить из уравнений поля, записанных в виде сохранения энергии:

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\,[\mathbf{EB}] = 0. \quad (6.4.14)$$

Подставляя в (6.4.14) разложение (6.4.9), причем в линейном приближении – используя представление (6.4.13), а в нелинейных слагаемых зависимостью амплитуд поля от времени пренебрегая, после усреднения по быстрым процессам, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\omega\varepsilon^{\text{э}}_{ij}(\omega,\mathbf{k})+\frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{u^2}\right)\right]E_j(\omega,\mathbf{k})E^*_i(\omega,\mathbf{k})\right\}=$$
$$=2i\omega\varepsilon^{\text{a}}_{ij}(\omega,\mathbf{k})E_j(\omega,\mathbf{k})E^*_i(\omega,\mathbf{k})+i\omega\sum_{n=2}^{\infty}\int d\omega_1 d\mathbf{k}_1\dots d\omega_{n-1}d\mathbf{k}_{n-1}\times$$
$$\times\,\varepsilon_{ij_1\dots j_n}(\omega,\mathbf{k},\dots,\omega_{n-1},\mathbf{k}_{n-1})E^*_i(\omega,\mathbf{k})E_{j_1}(\omega-\omega_1,\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\dots$$
$$\dots E_{j_n}(\omega_{n-1},\mathbf{k}_{n-1})-i\omega\sum_{n=2}^{\infty}\int d\omega_1 d\mathbf{k}_1\dots d\omega_{n-1}d\mathbf{k}_{n-1}\times$$
$$\times\,\varepsilon_{ij_1\dots j_n}(\omega,\mathbf{k},\dots,\omega_{n-1},\mathbf{k}_{n-1})E_i(\omega,\mathbf{k})\times$$
$$\times\,E^*_{j_1}(\omega-\omega_1,\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\dots E^*_{j_n}(\omega_{n-1},\mathbf{k}_{n-1}).\quad(6.4.15)$$

Дальнейшее упрощение нелинейной электродинамики плазменных сред связано с "укорочением"уравнения (6.4.15). Мы ограничимся самым низшим, так называемым трехволновым приближением. Считая поля $\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})$ полями со случайными фазами, введем функцию

$$W(\omega,\mathbf{k})=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega M^{\text{э}}_{ij}(\omega,\mathbf{k})]\langle E_iE_j\rangle_{\omega,\mathbf{k}}.\quad(6.4.16)$$

Здесь

$$M_{ij}(\omega,\mathbf{k})=\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})-\frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right),$$
$$\langle\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\rangle=0,\quad(6.4.17)$$
$$\langle E_i(\omega,\mathbf{k})E^*_j(\omega_1,\mathbf{k}_1)\rangle=\langle E_iE_j\rangle_{\omega,\mathbf{k}}\delta(\omega-\omega_1)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1),$$

а символ $\langle\dots\rangle$ означает усреднение по случайным фазам поля. Тройные и четверные корреляции легко выражаются через двойные. В итоге получаем следующее нелинейное уравнение трехволнового приближения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega M^{\text{э}}_{ij}(\omega,\mathbf{k})]\langle E_iE_j\rangle_{\omega,\mathbf{k}}\right\}=2i\varepsilon^{\text{э}}_{ij}(\omega,\mathbf{k})\langle E_jE_i\rangle_{\omega,\mathbf{k}}+$$
$$+\operatorname{Im}\int d\omega' d\mathbf{k}'\,\left\{M^{-1*}_{ia}(\omega,\mathbf{k})S_{ijs}(\omega,\mathbf{k},\omega',\mathbf{k}')S_{abc}(\omega,\mathbf{k},\omega',\mathbf{k}')\times\right.$$
$$\times\,\langle E_sE_c\rangle_{\omega',\mathbf{k}'}\langle E_jE_b\rangle_{\omega-\omega',\mathbf{k}-\mathbf{k}'}+2M^{-1}_{jb}(\omega-\omega',\mathbf{k}-\mathbf{k}')\times$$
$$\times\,S_{ijs}(\omega,\mathbf{k},\omega',\mathbf{k}')S_{bca}(\omega-\omega',\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega,\mathbf{k})\times$$
$$\left.\times\,\langle E_sE_c\rangle_{\omega',\mathbf{k}'}\langle E_aE_i\rangle_{\omega,\mathbf{k}}-2V_{isac}(\omega,\mathbf{k},\omega',\mathbf{k}')\langle E_aE_i\rangle_{\omega,\mathbf{k}}\langle E_sE_c\rangle_{\omega',\mathbf{k}'}\right\}.\quad(6.4.18)$$

Заметим, что это уравнение наряду с нелинейным взаимодействием волн между собой учитывает также линейное поглощение, обусловленное диссипативными процессами, но не учитывает влияние этого процесса на равновесное состояние, т.е. рассмотренный нами выше квазилинейный эффект.

В случае чисто продольного поля и изотропной плазменной среды, когда

$$\langle E_i E_j \rangle_{\omega,\mathbf{k}} = \langle E^2 \rangle_{\omega,\mathbf{k}} \frac{k_i k_j}{k^2},$$
$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^l(\omega, k) \frac{k_i k_j}{k^2} + \varepsilon^{tr}(\omega, k) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \tag{6.4.19}$$

уравнение (6.4.18) конкретизируется и принимает вид

$$\frac{\partial \mathrm{Re}\, \varepsilon^l(\omega, k)}{\partial \omega} \frac{\partial \langle E^2 \rangle_{\omega,\mathbf{k}}}{\partial t} = -2 \mathrm{Im}\, \varepsilon^l(\omega, k) \langle E^2 \rangle_{\omega,\mathbf{k}} + 2 \langle E^2 \rangle_{\omega,\mathbf{k}} \int d\omega' d\mathbf{k}' \times$$
$$\times \frac{k_i k_a}{k^2} \frac{k'_c k'_s}{k'^2} \langle E^2 \rangle_{\omega',\mathbf{k}'} \mathrm{Im} \left\{ S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') S_{bca}(\omega'', \mathbf{k}'', \omega, \mathbf{k}) \frac{k''_j k''_b}{k''^2 \varepsilon^l(\omega'', \mathbf{k}'')} - \right.$$
$$\left. - V_{icas}(\omega, \mathbf{k}', \omega, \mathbf{k}') \right\} + 2 \langle E^2 \rangle_{\omega,\mathbf{k}} \int d\omega' d\mathbf{k}' \times$$
$$\times \langle E^2 \rangle_{\omega',\mathbf{k}'} \frac{k_i k_a}{k^2} \frac{k'_c k'_s}{k'^2} \mathrm{Im} \left\{ \left(\delta_{bj} - \frac{k''_b k''_j}{k''^2} \right) \left[\varepsilon^{tr}(\omega'', k'') - \frac{k''^2 c^2}{\omega''^2} \right]^{-1} \times \right.$$
$$\left. \times S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') S_{bca}(\omega'', \mathbf{k}'', \omega, \mathbf{k}) \right\} + \int d\omega' d\mathbf{k}' \times$$
$$\times \langle E^2 \rangle_{\omega',\mathbf{k}'} \langle E^2 \rangle_{\omega'',\mathbf{k}''} \mathrm{Im} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega, k)} \left| S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') \frac{k_i k''_j k'_s}{k k' k''} \right|^2. \tag{6.4.20}$$

Здесь введены обозначения

$$\omega'' = \omega - \omega', \qquad \mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'.$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (6.4.20) учитывает линейное поглощение поля в среде, обусловленное диссипативным процессом, второе и третье описывают нелинейные процессы индуцированного рассеяния продольной волны с образованием "виртуальных"продольного и поперечного плазменных волновых полей соответственно и, наконец, последнее слагаемое соответствует распаду продольной волны на две такие же продольные волны (либо, напротив, слиянию продольных волн в одну продольную волну). При этом все нелинейные процессы протекают с участием трех волн.

Обычно указанные процессы рассматриваются по отдельности. Мы здесь рассмотрим только один из них, а именно, индуцированное рассеяние высокочастотной продольной волны с образованием виртуального также высокочастотного продольного поля. Другими словами, в уравнении (6.4.20) оставим первое и второе слагаемые в правой части, причем ограничимся одномерным случаем, считая $[\mathbf{k}\mathbf{k}'] = 0$, и учтем только электронный вклад в многоиндексные тензоры. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial W^l(\mathbf{k})}{\partial t} = W^l(\mathbf{k}) \int dk'\, Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') W^l(\mathbf{k}'), \tag{6.4.21}$$

где введены обозначения

$$W^l(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega \mathrm{Re}\, \varepsilon^l(\omega, k)]\langle E^2\rangle_{\omega,\mathbf{k}},$$

$$\frac{|E|^2}{8\pi} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\, W^l(\mathbf{k}), \tag{6.4.22}$$

$$Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|^2}{16\pi^3 m N_e \omega_{Le}} \mathrm{Im}\, \frac{1}{\varepsilon^l(\omega'', k'')}.$$

Обсудим некоторые общие следствия, вытекающие из уравнения (6.4.21). Поскольку ядро $Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ антисимметрично, т.е. меняет знак при замене $\mathbf{k} \rightleftarrows \mathbf{k}'$, то сохраняется величина

$$\frac{|E|^2}{8\pi} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\, W^l(\mathbf{k}) = \mathrm{const}, \tag{6.4.23}$$

представляющая собой энергию продольного поля в среде. Таким образом, энергия продольного поля в среде при рассеянии продольной волны на продольных колебаниях среды сохраняется. При этом, однако, происходит перекачка энергии из одних мод колебаний в другие. Действительно, пусть волновой пакет состоит из двух мод – падающей и рассеянной волны:

$$W^l(\mathbf{k}) = W_1(t)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1) + W_2(t)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2) \tag{6.4.24}$$

и заданы начальные условия $W_1(0)$ и $W_2(0)$. Из (6.4.21) для $W_1(t)$ и

$W_2(t)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dt} &= Q(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) W_1 W_2, \\ \frac{dW_2}{dt} &= -Q(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) W_1 W_2. \end{aligned} \tag{6.4.25}$$

Из выражения (6.4.22) следует, что $Q(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) < 0$, если $k_1 > k_2$, и $Q(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) > 0$ при $k_1 < k_2$. Это означает, что при $k_1 > k_2$ величина $W_1(t)$ растет со временем, а $W_2(t)$ падает – происходит перекачка энергии из коротковолновых мод колебаний в длинноволновые. Точное временное изменение $W_1(t)$ и $W_2(t)$ находится из общего решения системы (6.4.25) и имеет вид

$$\begin{aligned} W_1(t) + W_2(t) = W_1(0) + W_2(0) = W_0 = \mathrm{const}, \\ \frac{W_1(t)}{W_2(t)} = W_0 \left\{ W_1(0) + W_2(0) e^{-Q(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) W_0 t} \right\}^{-1}. \end{aligned} \tag{6.4.26}$$

Если одну из мод колебаний, например, $W_2(t)$ считать большой, так что $|W_2| \gg |W_1|$, а поэтому $W_2 \approx W_0 = \mathrm{const}$, то $W_1(t)$ будет экспоненциально нарастать со временем. При этом мы имеем типичную картину возбуждения плазменных колебаний в поле заданной продольной волны накачки. Общее уравнение такого параметрического процесса было исследовано в теме IV. Однако решение (6.4.26) отличается от приведенного там, что связано с предположением об отсутствии полюса в ядре $Q(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$. Если частота волны накачки $\omega - \omega'$ близка к собственной частоте колебаний плазменной среды, то учет полюса в (6.4.22) необходим и мы приходим к результату, полученному выше.

В заключение заметим, что аналогичным образом рассматриваются и другие нелинейные процессы, описываемые уравнением (6.4.20) и более общим уравнением (6.4.18).

§ 6.5. Нелинейные уединенные волны и солитоны в неравновесных плазменных средах

В последнем параграфе первой части лекций были изложены основы общей теории солитонов – солитонов акустического типа, солитонов оптического типа и солитонов огибающих. В качестве примеров были рассмотрены нелинейная поперечная волна в холодной изотропной плазме и ионно-звуковой солитон в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$. Это были примеры термодинамически равновесной плазмы.

В настоящем параграфе мы не будем излагать общую теорию. Напомним только, что солитон акустического типа является локализованным решением уравнения Кортевега-де-Вриза (КдВ) при $m > 1$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\alpha_s}{m} \frac{\partial \Phi^m}{\partial x} + \beta_s \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0. \tag{6.5.1}$$

Путем замены $\Phi = \alpha_s^{1-m} f(x - v_0 t, t)$ это уравнение сводится к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial f^m}{\partial x} + \beta_s \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \tag{6.5.2}$$

первый интеграл которого

$$\beta_s \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - v_0 f + \frac{f^m}{m} = 0, \tag{6.5.3}$$

где $\xi = x - v_0 t$, допускает солитонное решение в виде бегущего со скоростью v_0 локализованного колокола

$$f(\xi) = \frac{f_{\max}}{\mathrm{ch}^{2n}\left(\dfrac{\xi}{\Delta}\right)}. \tag{6.5.4}$$

Величины $f_{\max}$, n и Δ при этом определяют характеристики солитона (6.5.4), причем

$$n = \frac{1}{m-1} > 0,$$

$$\frac{2(1+n)(1+2n)}{\Delta^2} \beta_s = f_{\max}^{m-1}, \tag{6.5.5}$$

$$v_0 = \frac{2n f_{\max}^{n-1}}{(2n+1)(n+1)}.$$

С оптическим солитоном дело обстоит сложнее. Его строят, исходя из нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \omega_o \Phi - \alpha_o |\Phi|^{2m}\Phi + \beta_o \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \tag{6.5.6}$$

Для "стационарного"решения вида $\Phi = \Psi e^{-i\omega t}$ для Ψ получаем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left(\frac{U(x,t)}{6\beta_o} + \mathcal{E}\right)\Psi = 0, \tag{6.5.7}$$

где $U(x,t) = -6\alpha_o |\Psi|^{2m}$ медленно меняющаяся во времени потенциальная энергия, а $\mathcal{E} = \dfrac{\omega - \omega_o}{\beta_o}$ – собственное значение. Если функция $\dfrac{U(x,t)}{6\beta_o} > 0$ в конечной области x стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, то уравнение (6.5.7) имеет локализованное в этой области солитонное решение. Но если к тому же $U(x,t)$ является решением уравнение КдВ (6.5.2), то $\mathcal{E} = \text{const}$.

Когда функция $U(x,t)$ совпадает с (6.5.4) при $n = 0$, т.е.

$$U(x,t) = \frac{6\beta_o v_0}{\operatorname{ch}^2\left(\dfrac{\xi}{\Delta}\right)} = -6\alpha_o |\Psi|^{2m}, \tag{6.5.8}$$

то уравнение (6.5.7) при $m = 1$ имеет решение Ψ_k в виде гипергеометрической функции (полином с целой степенью $k = 0, 1, 2, \ldots$), причем каждому k соответствует собственное значение с $s < k$:

$$s = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 4v_0\Delta^2} - 1\right), \qquad \mathcal{E}_k = -\frac{(s-k)^2}{\Delta^2}. \tag{6.5.9}$$

Поскольку $m = 1$, то $v_0\Delta^2 = 2$, $s = 1$, а $k = 0$ и $\mathcal{E} = v_0/2$.

Таким образом, мы получим оптический солитон, локализованный внутри акустического солитона, переносящего его энергию. Такой солитон называется солитоном огибающей.

После напоминания общих основ теории солитонов и уединенных локализованных нелинейных волн, приведем несколько примеров таких структур. Начнем с наиболее полно исследованной нами проблемы пучково-плазменной неустойчивости. В предыдущем параграфе нами была рассмотрена квазилинейная релаксация пучковой неустойчивости как на гидродинамической, так и на кинетической стадиях. Такая релаксация имеет место при возбуждении широкого спектра плазменных колебаний электронным пучком. В общем случае при инжекции пучка в плазму действительно всегда так и происходит. Однако, если пучок заранее промодулировать, то можно добиться возбуждения монохроматической волны с узким спектром как по частотам, так и по волновым векторам. И тогда квазилинейное описание взаимодействия пучка с плазмой уже не справедливо. Следует изучать взаимодействие монохроматической волны с моноэнергетическим пучком, что и будет сделано ниже.

Как мы уже знаем из темы III, моноэнергетический электронный пучок малой плотности в замагниченной плазме возбуждает продольные волны с фазовой скоростью, близкой к скорости пучка (черепковская неустойчивость). Поэтому в системе плазма–пучок интерес представляет волна с конечной амплитудой. Естественно, нелинейность такой волны в первую очередь сказывается на движении электронов пучка. Взаимодействие волны с электронами плазмы можно считать линейным, а саму плазму – холодной.

Движение электронов моноэнергетического пучка описывается моделью независимых частиц, т.е. системой уравнений непрерывности и Эйлера. В поле монохроматической волны все величины можно считать зависящими от $\xi = t - \dfrac{kz}{\omega}$, при этом ось $0z$ совпадает с направлением распространения волны. Кроме того, ограничимся рассмотрением одномерной задачи, считая скорость электронов пучка в системе покоя волны нерелятивистской и параллельной оси $0z$, а поле E – потенциальным, т.е.

$$E = \frac{k}{\omega}\frac{d\Phi}{d\xi}, \tag{6.5.10}$$

где $\Phi(\xi)$ – потенциал поля волны. В указанных ограничениях находим интегралы уравнений непрерывности и движения:

$$\begin{gathered} N_p\left(\frac{\omega}{k} - v\right) = N_b\left(\frac{\omega}{k} - u\right), \\ \frac{kc}{\omega}\sqrt{p^2 + m^2c^2} - p + \frac{ek}{\omega}\Phi = \frac{kc}{\omega}mc\gamma\left(1 - \frac{u\omega}{kc^2}\right), \end{gathered} \tag{6.5.11}$$

где $p = mv(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ – импульс; $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, а u и N_b – скорость и плотность электронов пучка в точках, где $\Phi = 0$; N_p – плотность плазмы.

Определяя из системы (6.5.11) плотность электронов и подставляя ее в уравнение Пуассона, получаем

$$\left(1-\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right)\frac{d^2\Phi}{d\xi^2}=\frac{\omega_b^2\omega^2 m}{ek^2}\left[\frac{u-\omega/k}{\sqrt{\left(u-\dfrac{\omega}{k}\right)^2-\dfrac{2e\Phi}{m\gamma^3}}}-1\right]. \qquad (6.5.12)$$

В линейном приближении, т.е. в пределе $m\gamma^3(u-\omega/k)^2 \gg 2e\Phi$, решение этого уравнения следует искать в виде $\Phi(\xi)=\Phi_0\cos\omega\xi$, что приводит к известному дисперсионному соотношению, описывающему нарастающие во времени (а следовательно, нестационарные) потенциальные волны (см. тему III). Нестационарными являются и волны конечной амплитуды, если только кинетическая энергия электронного пучка в системе покоя волны больше потенциала поля волны и электроны могут двигаться относительно волны, преодолевая "горбы"потенциала. Стационарной оказывается нелинейная волна с амплитудой

$$2e\Phi_0=m\gamma^3\left(u-\frac{\omega}{k}\right)^2. \qquad (6.5.13)$$

При этом условии электроны пучка захватываются полем волны и обмен энергией между ними прекращается.

Подставляя решение $\Phi(\xi)=\Phi_0\cos\omega\xi$ в (6.5.12) и усредняя по ξ, получаем

$$e\Phi_0=\frac{mu^2\gamma}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{N_b}{N_p}\right)^{2/3}. \qquad (6.5.14)$$

Из этого выражения легко находится амплитуда поля плазменной волны $E_0=ik\Phi$, а затем и эффективность преобразования энергии пучка в энергию плазменной волны в результате развития пучково-плазменной неустойчивости

$$\frac{E_0^2}{8\pi N_b mc^2(\gamma-1)}=\frac{\gamma+1}{2}\left(\frac{N_b}{N_p}\right)^{2/3}. \qquad (6.5.15)$$

Таким образом, в лабораторной системе плазмы мы получили бегущую с фазовой скоростью волны последовательность сгустков (солитонов).

В качестве второго примера рассмотрим нелинейную динамику одномерной нерезонансной бунемановской неустойчивости в сильно столкновительной продольно ограниченной в пространстве плазме с током, считая $\omega \ll ku < \omega_{Li}$ (см. тему IV). Электроны плазмы при этом подчиняются стационарным уравнениям непрерывности и движения

$$\frac{\partial N_e v_e}{\partial x} = 0, \qquad v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} = \frac{e}{m} E. \tag{6.5.16}$$

Ионы же следует описывать динамическими уравнениями

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{eE}{M\nu_i} N_i = 0, \qquad v_i = -\frac{eE}{M\nu_i}, \tag{6.5.17}$$

в которых они считаются сильно столкновительными и однозарядными. Система уравнений (6.5.16) и (6.5.17) дополняется уравнением Пуассона

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(N_e - N_i). \tag{6.5.18}$$

Система (6.5.16)–(6.5.18) легко сводится к одному нелинейному уравнению для величины $y = N_0/N_e$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a_0^2 y^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y^2 \left[\frac{\partial z}{\partial t} - a_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(zy \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] = 0. \tag{6.5.19}$$

Здесь $a_0^2 = \dfrac{m}{M}\dfrac{u^2}{\nu_i}$, $z = \dfrac{N_i - N_e}{N_0} = -\dfrac{u^2}{\omega_{Le}^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{y^2}{2}$, $\omega_{Le}^2 = \dfrac{4\pi e^2 N_0}{m}$, где $N_0 = \text{const}$ равновесная плотность заряженных частиц в области $-\dfrac{L}{2} < x < \dfrac{L}{2}$, занятой плазмой.

Из уравнения (6.5.19) видно, что в плотной плазме, пока градиенты малы, так что $u^2/L^2 \ll \omega_{Le}^2$, определяющими являются первые два слагаемых этого уравнения. Любые начальные возмущения величины y (относительно равновесного значения $y_{\text{рав}} = 1$) при этом взрывным образом нарастают во времени из-за нелинейного и отрицательного коэффициента диффузии $D = -a_0^2 y^2$. Рост величины y и обострение профиля плотности плазмы прекращается как только градиенты становятся большими и в уравнении (6.5.19) доминирующими оказываются два последних слагаемых в квадратных скобках. В этом пределе уравнение сохраняет диффузионный вид, но уже с положительным коэффициентом диффузии, что приводит к стабилизации нарастающих возмущений.

В результате устанавливается самосжатое распределение плотности плазмы, описываемое нелинейным стационарным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{u^2}{8\omega_{Le}^2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0. \tag{6.5.20}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее очевидным граничным условиям

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0, \qquad y\left(-\frac{L}{2}\right) = y\left(\frac{L}{2}\right), \qquad \int\limits_{-L/2}^{L/2} y(x)\,dx = 1, \tag{6.5.21}$$

записывается в виде

$$\sqrt{y - y_0}(y + 2y_0) = \pm\frac{3\omega_{Le}}{\sqrt{2u}}x. \tag{6.5.22}$$

Верхний знак соответствует области $x > 0$, а нижний – области $x < 0$, величина же $y_0 = y(0)$ определяется последним условием (6.5.21) (нормировкой плотности).

Решение (6.5.22) для величины $1/y$ (точнее, для $N_e(x)$) представлено на рис. 6.2 и описывает установившееся продольное (вдоль тока) распределение плотности плазмы с характерным масштабом неоднородности порядка L. Очевидно, что если размер системы много больше L, то таких уединенных самосжатых конфигураций будет много.

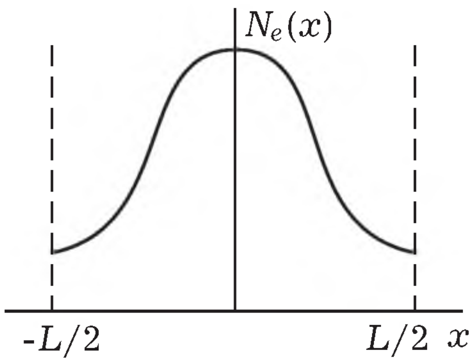

Рис. 6.2

Задачи по теме VI

Задача 1. Найти скорость и профиль одномерной нелинейной ионно-звуковой волны (ионно-звуковой солитон).

Решение.

Систему уравнений, описывающую динамику плазмы в области ионно-звуковых частот, запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{m}\frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial N_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(N_i v) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -4\pi e\left[N_i - N_0\exp(e\Phi/T_e) - \Delta N\right].$$

Здесь N_0 – плотность электронов и ионов плазмы при $\Phi = 0$ (для простоты полагаем $e_i = -e$), а $\Delta N = \dfrac{4N_0}{3\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{e\Phi}{T_e}\right)^{3/2}$ – число захваченных волной электронов.

Будем искать решение системы (1) в виде функции переменной $\xi = x - ut$, считая u постоянной величиной. Первые два уравнения системы (1) при этом сводятся к виду

$$(v-u)v' = -\frac{e}{M}\Phi', \qquad (N_i v)' - uN_i' = 0. \tag{2}$$

Для уединенной волны (солитона) $\Phi = 0$, $v \to 0$ и $N_i \to N_0$ при $\xi \to 0$. Учитывая это, находим

$$e\Phi = \frac{Mu^2}{2} - \frac{M(u-v)^2}{2}, \qquad N_i = \frac{N_0 u}{\sqrt{u^2 - 2e\Phi/M}}. \tag{3}$$

Теперь можно решить последнее уравнение системы (1), которое принимает вид

$$\Phi^2 = -2\pi e N_0\int\limits_0^{\Phi} d\Phi\left[\frac{u}{\sqrt{u^2-2e\Phi/M}} - \exp\left(\frac{e\Phi}{T_e}\right)\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{e\Phi}{T_e}\right)^{3/2}\right]. \tag{4}$$

Отсюда следует, что скорость распространения уединенной волны определяется амплитудой волны – максимальным значением $\Phi(\xi)$. Действительно, обозначая амплитуду волны через Φ_m ($\Phi' = 0$ при $\Phi = \Phi_m$), из (4) получаем связь между u и Φ_m:

$$\frac{Mu^2}{T_e}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2e\Phi_m}{Mu^2}}\right] = \exp\left(\frac{e\Phi}{T_e}\right) - 1 + \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{e\Phi}{T_e}\right)^{3/2}. \tag{5}$$

Очевидно, что $e\Phi_m < Mu^2/2$.

Соотношение (5) значительно упрощается при слабой нелинейности волны, когда $e\Phi_m \ll T_e$. При этом

$$u \approx v_s\left(1 + \frac{8}{15}\sqrt{\frac{e\Phi_m}{\pi T_e}}\right). \tag{6}$$

Из уравнения (4) легко находим в этом случае и профиль волны:

$$\Phi(\xi) = \frac{\Phi_m}{\mathrm{ch}^4\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{15}r_{De}}\sqrt[4]{\dfrac{e\Phi_m}{\pi T_e}}\right)}. \tag{7}$$

Задача 2. Пусть в изотропной электронной плазме в моменты времени $t = 0$ и $t = \tau$ внешним источником последовательно возбуждаются гармонические возмущения поля $E_1(z,t) = E_1\delta(t)\sin k_1 z$ и $E_2(z,t) = E_2\delta(t-\tau)\sin k_2 z$, длины волн которых $\lambda_1 = 1/k_1$ и $\lambda_2 = 1/k_2$ меньше ларморовского радиуса электронов, в результате чего такие возмущения в плазме быстро затухают; время τ намного превосходит время затухания полей возмущений. Найти отклик системы по прошествии времени, когда указанные возмущения полей в плазме затухнут (плазменное эхо).

Решение.

Отклик системы на первый сигнал находим из уравнения

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \pm ik_1 v f_1 = \frac{e}{m}E_1\frac{\partial f_0}{\partial v}\delta(t)\exp(\pm ik_1 z), \tag{1}$$

где f_0 – невозмущенная функция распределения электронов. Решение (1) имеет вид

$$f_1 = \Theta(t)E_1\frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}\exp\left(\pm ik_1(z - vt)\right), \tag{2}$$

где $\Theta(t)$ – функция единичного скачка ($\Theta(t) = 1$ при $t > 0$ и $\Theta(t) = 0$ при $t < 0$).

Интеграл по скоростям от выражения (2) из-за быстрых осцилляций во времени при больших t стремится к нулю, т.е. модулированный поток электронов, создаваемый первым источником, по прошествии большого времени t уже не возмущает электрическое поле в плазме, хотя возмущение самой функции распределения не исчезает.

Второй источник действует на уже возмущенную первым сигналом функцию распределения электронов, т.е.

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} \pm ik_2 v f_2 = \frac{e}{m}E_2\frac{\partial (f_0 + f_1)}{\partial v}\delta(t-\tau)\exp(\pm ik_2 z). \tag{3}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f_2 = \Theta(t-\tau)\frac{e}{m}E_2\frac{\partial f_0}{\partial v}\exp\left\{\pm ik_2\left[z - v(t-\tau)\right]\right\} + \\ + \Theta(t)\Theta(t-\tau)\frac{e^2}{m^2}E_1E_2\exp\left\{\pm ik_2\left[z - v(t-\tau)\right]\right\}\frac{\partial}{\partial v}\exp\left[\pm ik_1(z - vt)\right]\frac{\partial f_0}{\partial v}. \end{aligned} \tag{4}$$

Возмущение, вызванное первым слагаемым в (4), по прошествии достаточно большого времени, как и выше, не возмущает поле в плазме, т.е. поле затухнет. Второе же слагаемое в (4) при условии

$$t = \frac{k_2}{k_2 \pm k_1}\tau \tag{5}$$

не зависит от скорости, а следовательно, не содержит быстрых осцилляций. В результате в системе оказываются отличными от нуля возмущения тока и заряда, а поэтому, и поля.

Таким образом, в момент времени (5) в плазме возникают макроскопические колебания плотности электронов и электрического поля, что называют плазменным эхо.

Задача 3. Исследовать одномерную релаксацию прямолинейного моноэнергетического электронного пучка малой плотности ($\omega_{L0}^2 \gg \omega_b^2$, где ω_{L0} и ω_b – ленгмюровские частоты плазмы и пучка, соответственно) при его инжекции в полуограниченную замагниченную плазму ($z \geqslant 0$).

Решение.

При $\omega_{L0} > \nu_e$, где ν_e – частота столкновений электронов пучка и плазмы, пучок возбуждает плазменные колебания и тормозится. В результате скорость пучка уменьшается: $u = u_0 - \delta u$, а его плотность возрастает: $N_b = N_{b0}(1+\delta u/u_0)$. Из закона сохранения потока энергии при этом следует:

$$v_g W_e = N_{b0} m u^2 \gamma_0^3 \delta u. \tag{1}$$

Здесь $\gamma_0 = (1 - u_0^2/c^2)^{-1/2}$, $W_e = \omega \dfrac{\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon}{\partial \omega}\dfrac{E^2}{8\pi}$ – плотность энергии возбуждаемой пучком волны, $v_g = \dfrac{\partial \mathrm{Re}\,\omega}{\partial k}$ – ее групповая скорость, а

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{L0}^2}{\omega^2}\left(1 + 3\frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} - i\frac{\nu_e}{\omega}\right) - \frac{\omega_b^2 \gamma_0^{-3}}{(\omega - k u_0)^2} \tag{2}$$

– диэлектрическая проницаемость системы. Релаксация пучка – рост W_e и δu продолжается до тех пор, пока электроны пучка не окажутся захваченными полем волны. При развитии черенковской пучковой неустойчивости, когда $\omega \simeq \omega_{L0} \simeq k u_0$, захват происходит в поле

$$E_{\text{зах}} = \frac{m(\delta u)^2}{2 e u_0}\omega_{L0}\gamma_0^3. \tag{3}$$

Учитывая это, из (6.5.17) находим

$$\begin{gathered} \frac{\delta u_{\text{зах}}}{u_0} = \frac{2}{\gamma_0}\left(\frac{u_0}{v_g}\frac{N_{b0}}{N_0}\omega\frac{\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon}{\partial \omega}\right)^{1/3}, \\ W_{\text{зах}} = 2 N_{b0} m c^2 (\gamma_0^2 - 1)\left(\frac{v_g^4}{u_0^4}\frac{N_{b0}}{N_0}\frac{\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon}{\partial \omega}\right)^{-1/3}, \end{gathered} \tag{4}$$

где N_0 – плотность электронов плазмы.

Чтобы завершить решение задачи, осталось определить групповую скорость волны v_g в условиях черепковского резонанса. Учитывая дисперсионное уравнение $\varepsilon(\omega, k) = 0$, получаем

$$\begin{gathered} \omega\frac{\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon}{\partial \omega} = 2\left[1 + \frac{\omega_b^2 \gamma_0^{-3}\omega_{L0}}{(\omega - k u_0)^3}\right], \\ v_g = \left[\frac{3 v_{Te}^2}{u_0} + \frac{\omega_b^2 \gamma_0^{-3}\omega_{L0} u_0}{(\omega - k u_0)^3}\right]\left[1 + \frac{\omega_b^2 \gamma_0^{-3}\omega_{L0}}{(\omega - k u_0)^3}\right]^{-1}. \end{gathered} \tag{5}$$

В бесстолкновнтельном пределе ($\nu_e \to 0$), полагая в дисперсионном уравнении $k = k_0 + \delta k$, где $k_0 u_0 = \omega_{L0}$, находим

$$\delta k = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega_b^2 \gamma_0^{-3} u_0^2}{6\omega_{L0}^2 v_{Te}^2}\right)^{1/3} k_0, \tag{6}$$

мнимая часть которой представляет собой обратную длину релаксации пучка, причем

$$v_g \simeq 3\frac{v_{Te}^2}{u_0^2}u_0 \ll u_0, \qquad \omega\frac{\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon}{\partial\omega} = 2,$$

$$\frac{W_{\text{зах}}}{N_{b0}mc^2(\gamma_0-1)} = 2(\gamma_0+1)\left(\frac{u_0^2}{9v_{Te}^2}\right)^{4/3}\left(\frac{N_{b0}}{2N_0}\right)^{1/3}. \tag{7}$$

Заметим, что поле захвата при инжекции пучка в полуограниченную плазму, определяемое последним соотношением (7), намного превосходит поле захвата в неограниченной плазма-пучковой системе (см. § 6.5). Это обусловлено явлением накопления колебаний из-за малой их групповой скорости, $v_g \ll u_0$, которая намного меньше, чем в случае неограниченной плазмо-пучковой системы.

Бесстолкновительный предел справедлив при выполнении неравенства

$$\eta = \frac{\nu_e^{3/2}\gamma_0^{3/2}u_0^2}{6\omega_b\sqrt{\omega_{L0}}v_{Te}^2} \ll 1. \tag{8}$$

В случае частых столкновений, когда $\eta \gg 1$, тепловым движением электронов плазмы можно пренебречь, положив $v_{Te} = 0$. В результате из дисперсионного уравнения $\varepsilon(\omega, k) = 0$ получаем ($k = k_0 + \delta k$):

$$\delta k = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\omega_b}{N_0\gamma_0^{3/2}}\left(\frac{\omega_{L0}}{\nu_e}\right)^{1/2},$$

$$v_g = u_0\frac{\nu_e^{3/2}\gamma_0^{3/2}}{\omega_b\sqrt{2\omega_{L0}}} \ll u_0, \qquad \omega\frac{\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon}{\partial\omega} = 2. \tag{9}$$

Отсюда видно, что хотя групповая скорость волны мала, $v_g \ll u$, она намного превосходит значение, полученное в бесстолкновительном пределе. Это означает, что с ростом частоты столкновений эффект накопления уменьшается. В свою очередь, это проявляется в увеличении длины релаксации пучка и уменьшении поля захвата

$$\frac{W_{\text{зах}}}{N_{b0}mc^2(\gamma-1)} = 2(\gamma+1)\left(\frac{2N_{b0}}{N_0}\right)^{1/3}\left(\frac{\omega_b^2\omega_{L0}}{\gamma_0^3\nu_e^3}\right)^{2/3}. \tag{10}$$

ТЕМА VII

ОСНОВЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 7.1. Основные понятия и принципы численного моделирования плазмы

В предыдущих параграфах настоящей книги мы рассматривали плазменные процессы, в основном, в линейном приближении. Это было связано, естественно, с существованием весьма общих методов решения линейных уравнений (или систем таких уравнений). Решение линеаризованной системы уравнений Максвелла–Власова давало нам важную информацию о дисперсионных свойствах исследуемой плазмы: мы определяли спектры возможных плазменных волн, декременты столкновительного и бесстолкновительного затуханий, а в случае неравновесной плазмы – инкременты неустойчивости и стартовые условия ее развития. Однако, очевидно, что описание плазмы в линейном приближении имеет ограниченную область применимости. Так, при развитии неустойчивости амплитуда электромагнитного поля в плазме неограниченно возрастает и пренебрежение нелинейными членами в системе уравнений Максвелла–Власова уже невозможно. Учет же этих слагаемых должен, естественно, давать насыщение колебаний и стабилизацию неустойчивости. Для нелинейных уравнений не существует сколь-нибудь общих и универсальных методов решения, поэтому система уравнений Максвелла–Власова не может быть решена точно. Это означает, что для исследования процессов, где существенны нелинейные эффекты необходимо использовать или приближенные методы, или численное решение уравнений. Приближенные методы позволяют получать приближенное аналитическое решение, но требуют существования в системе малого параметра. Ранее нами были рассмотрены задачи насыщения пучковой неустойчивости и нелинейного поглощения электромагнитной волны в плазме. Исследование проводилось в рамках квазилинейного приближения, т.е. не рассматривалось взаимодействие волн, но учитывалось обратное влияние волны на функцию распределения в основном состоянии, изменение которой со временем предполагалось малым за период колебаний поля. При рассмотрении вопросов, посвященных нелинейному взаимодействию волн, наоборот, пренебрегалось воздействием поля на основное состояние системы, но учитывалось взаимное влияние различных волн друг на друга, что приводило к генерации гармоник, слиянию и распаду волн. Но при этом амплитуды взаимодействующих волн предполагались малыми, что обеспечивало возможность учета нелинейных слагаемых как возмущений. При отсутствии в системе малого параметра приближенные методы также не дадут результата и тогда возможным оказывается только численное решение уравнений.

В настоящей книге основной моделью используемой для описания плазмы является модель кинетического уравнения с самосогласованным полем (уравнение Власова). Охарактеризуем поэтому основные методы его численного решения. Наиболее очевидным является введение в фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ сетки и замена производных в исходных уравнениях на конечные разности. Такие конечно-разностные методы достаточно хорошо изучены и разработаны различные численные схемы. Однако, применяются они для численного решения уравнения Власова сравнительно редко из-за большого количества недостатков. Во-первых, при решении ряда конкретных задач у функции распределения могут образовываться большие градиенты как по координатам, так и в пространстве скоростей, что потребует сильного измельчения сетки. Во-вторых, нужно знать область возможных изменений скорости, что потребует априорных оценок или усложнения алгоритма для выбора предельных значений скорости в процессе вычислений. И в-третьих, требуется проводить большое количество вычислений для двумерных и трехмерных задач.

Другим, но тоже сравнительно редко используемым методом, является метод "водяного мешка". Он основывается на том факте, что уравнение Власова представляет собой уравнение движения для элемента несжимаемой жидкости в фазовом пространстве. Элемент жидкости имеет неизменный объем, но изменяющуюся форму. Его граница – это линия (в одномерном случае) на фазовой плоскости постоянного значения функции распределения $f(t, x, v) = \mathrm{const}$. Таким образом исследование динамики функции распределения сводится к исследованию динамики таких линий. Однако, в ряде конкретных задач форма линии $f(t, x, v) = \mathrm{const}$ с течением времени может сильно искажаться, что, так же как и в случае конечно-разностных методов, потребует сильного измельчения расчетной сетки. Имеются сложности и при переходе к двумерным и трехмерным задачам.

Для одномерных задач с периодическими граничными условиями используется метод преобразований. Суть его заключается в следующем. Искомая функция распределения $f(t, x, v)$ разлагается в ряд по ортогональным полиномам в пространстве скоростей и в ряд Фурье по координате x. Получается система обыкновенных дифференциальных уравнений по t для коэффициентов разложения, к которой и применяются численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Недостатком данного метода является то, что получающаяся система не замкнута (бесконечна). Для решения такая система требует обрыва тем или иным способом, адекватный выбор которого представляет довольно сложную задачу.

Наибольшее распространение при решении задач теории бесстолкновительной плазмы получил метод частиц (другие названия: метод крупных частиц, метод макрочастиц и т.п.). Основная суть метода состоит в том, что плазма представляется набором частиц, движение которых описывается уравнениями Ньютона. По положениям частиц можно восстановить плотность зарядов и токов, а по ним, решая уравнения Максвелла, поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Эти поля, в свою очередь, определяют силы, действующие на частицы, и динамику их движения. Очевидно, что метод довольно прост в использовании, допускает обобщение на двумерные и трехмерные задачи. Мы далее будем рассматривать именно метод частиц, как метод численного исследования плазмы, которую при этом будем предполагать бесстолкновительной.

В соответствии с указанным выше принципом построения вычислительного цикла в методе крупных частиц мы в данной теме рассмотрим численное интегрирование уравнений Ньютона, численное решение уравнений поля, восстановление плотности заряда по известным положениям частиц и аппроксимацию поля в произвольную точку расчетной области, где может находиться частица, по известным значениям в узлах численной сетки. В последнем параграфе кратко обсудим вопросы влияния на дисперсионные свойства исследуемой плазмы таких неотъемлемых элементов численного моделирования как пространственная сетка и ограниченность числа частиц. Изложение будет вестись таким образом, чтобы дать лишь самые основные понятия метода частиц. В частности, для простоты будем рассматривать только нерелятивистские уравнения движения частиц и потенциальное приближение для поля.

Не будет проводиться сравнение различных численных схем при решении уравнений и т.п. За подробным и полным изложением методов численного моделирования плазмы отсылаем читателя к специальным пособиям, которые можно найти в списке рекомендуемой литературы.

Обратим внимание на соотношение между численными значениями параметров реальной плазмы и плазмы, движение частиц которой вычисляется на компьютере – модельной плазмы. Очевидно, что реальная плазма содержит такое количество частиц, что заменить каждую реальную частицу на "машинную"не представляется возможным. Количество частиц, которое используется в расчетах обычно не превышает нескольких тысяч. Следовательно, возникает вопрос, насколько точно такая плазма воспроизводит поведение реальной плазмы. Будем обозначать штрихами величины, относящиеся к машинной плазме. Из естественных условий сохранения заряда и массы получаем $e' = \alpha e$, $m' = \alpha m$, где $\alpha = N/N'$ – отношение концентраций реальной плазмы и ее машинного аналога. Динамика частиц остается неизменной, поскольку $e'/m' = e/m$. Легко проверить, останутся без изменений плазменная частота $\omega_p' = \omega_p$ и дебаевский радиус $r_D' = r_D$. Очевидно, число частиц в дебаевской сфере уменьшится в α раз: $N_D'/N_D = n'{r_D'}^3/nr_D^3 = 1/\alpha$, что означает меньшую разреженность плазмы, а, следовательно, возрастание роли столкновений. Для реальных плазм N_D изменяется в пределах $10^2 - 10^6$. Чтобы выполнить условие малости столкновений для машинной плазмы необходимо брать $N_D \gtrsim 10$. Таким образом машинная плазма дает бо́льшую роль столкновений по сравнению с реальной. Однако, во многих практически важных случаях можно взять значительно меньше частиц в дебаевской сфере, при этом машинная плазма с хорошей степенью точности будет оставаться бесстолкновительной.

§ 7.2. Численное интегрирование уравнений движения крупных частиц

В настоящем параграфе рассмотрим методы численного решения уравнений движения частиц. Электрическое и магнитное поля будем считать известными из предыдущего шага вычислительного цикла. Как хорошо известно, нерелятивистское движение заряженной частицы под действием силы Лоренца описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right), \qquad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}. \tag{7.2.1}$$

Уравнения (7.2.1) для произвольных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в общем случае не могут быть решены точно, поэтому возникает необходимость их численного решения. Для этого разбиваем период времени T, в течение которого наблюдаем за поведением системы, на одинаковые части. Продолжительность одной части обозначим через τ. Неизвестные функции $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ в уравнении (7.2.1), а также поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ будем относить теперь только к дискретным моментам времени, производные в уравнениях заменим конечными разностями. Естественно, что временной шаг τ необходимо выбирать достаточно малым, чтобы решение, найденное по численной схеме, было как можно ближе к точному. При выборе конкретной численной схемы необходимо учитывать то обстоятельство, что численное решение должно, по возможности, удовлетворять основным свойствам исходного, точного уравнения. Это прежде всего обратимость во времени и сохранение энергии.

Рассмотрим движение частицы сначала только в электрическом поле, затем только в магнитном, и наконец, как в электрическом, так и в магнитном одновременно. Начнем с электрического поля. Наиболее популярной и часто используемой является схема "с перешагиванием":

$$\frac{\mathbf{r}^{n+1} - \mathbf{r}^{n}}{\tau} = \mathbf{v}^{n+1/2}, \qquad \frac{\mathbf{v}^{n+1/2} - \mathbf{v}^{n-1/2}}{\tau} = \frac{e}{m}\mathbf{E}^{n}. \tag{7.2.2}$$

Смысл "перешагивания"заключается в том, что координаты частиц относятся к целым моментам времени $t^n = n\tau$, а скорости – к полуцелым $t^{n+1/2} = (n+1/2)\tau$. Вычисление по схеме (7.2.2) осуществляется последовательным расчетом $\mathbf{r}^{n+1}$ и $\mathbf{v}^{n+1/2}$ через $\mathbf{r}^{n}$ и $\mathbf{v}^{n-1/2}$. Изначально должны быть заданы $\mathbf{r}^{0}$ и $\mathbf{v}^{1/2}$. Координата в начальный момент времени $\mathbf{r}^{0}$ задается начальным условием, а $\mathbf{v}^{1/2}$ определяется из численного интегрирования уравнения движения по обычной (без "перешагивания") схеме на первом шаге $\dfrac{\mathbf{v}^{1/2} - \mathbf{v}^{0}}{\tau/2} = \dfrac{e}{m}\mathbf{E}^{0}$.

Ввиду использования в соотношениях (7.2.2) центральных разностей для производных схема "с перешагиванием"имеет второй порядок аппроксимации по τ. В этом легко убедиться, разлагая в ряд Тейлора координаты $\mathbf{r}^{n+1}$ и $\mathbf{r}^{n}$ из первого уравнения (7.2.2) в окрестности $t^{n+1/2}$, а также $\mathbf{v}^{n+1/2}$ и $\mathbf{v}^{n-1/2}$ из второго уравнения (7.2.2) в окрестности t^n. При этом следует ограничиться членом разложения $\sim \tau^3$.

Легко проверить также обратимость во времени схемы (7.2.2). Для этого заменим $\tau \to -\tau$, $n+1 \to n-1$, $n+1/2 \leftrightarrow n-1/2$, что соответствует расчету в обратном по времени направлении. Полученная схема будет эквивалентна исходной системе (7.2.2).

Обратимся теперь к вопросу о сохранении энергии при вычислениях. Записывая второе соотношение (7.2.2) в виде

$$\mathbf{v}^{n+1/2} - \frac{\tau}{2}\frac{e}{m}\mathbf{E}^n = \mathbf{v}^{n-1/2} + \frac{\tau}{2}\frac{e}{m}\mathbf{E}^n, \tag{7.2.3}$$

возводя в квадрат и преобразуя, получим

$$\frac{m(\mathbf{v}^{n+1/2})^2}{2} - \frac{m(\mathbf{v}^{n-1/2})^2}{2} = \tau\frac{e}{2}\mathbf{E}^n(\mathbf{v}^{n+1/2} + \mathbf{v}^{n-1/2}) = \frac{e}{2}\mathbf{E}^n(\mathbf{r}^{n+1} - \mathbf{r}^{n-1}). \tag{7.2.4}$$

Здесь левая часть есть изменение кинетической энергии частицы за один шаг, а правая – аппроксимация работы поля с порядком точности $\sim \tau^3$. Таким образом, энергия за время расчета T будет сохраняться с точностью $\sim \tau^2$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости схемы. В процессе вычисления всегда имеются погрешности. Это могут быть погрешности, вызванные не точным заданием начальных условий, сил, действующих на частицу, или ошибки округления. Они могут приводить к тому, что численное решение не будет стремится к точному с уменьшением шага τ. Перепишем систему уравнений (7.2.2) в виде одного разностного уравнения второго порядка:

$$\mathbf{r}^{n+1} - 2\mathbf{r}^n + \mathbf{r}^{n-1} = \tau^2\frac{e}{m}\mathbf{E}^n. \tag{7.2.5}$$

Предположим, что в результате вычислений значение координаты $\mathbf{r}^n$ приобрело некоторую погрешность $\boldsymbol{\delta}^n$. Подставляя в (7.2.5) выражение $\mathbf{r}^n + \boldsymbol{\delta}^n$ вместо $\mathbf{r}^n$ для всех n и линеаризуя по $\boldsymbol{\delta}^n$ получим уравнение, описывающее в линейном приближении динамику погрешности:

$$\boldsymbol{\delta}^{n+1} - 2\boldsymbol{\delta}^n + \boldsymbol{\delta}^{n-1} = \tau^2\frac{e}{m}(\boldsymbol{\delta}^n\nabla)\mathbf{E}^n. \tag{7.2.6}$$

Будем, как обычно, искать решение разностного уравнения в виде $\boldsymbol{\delta}^n = \mathbf{A}e^{-i\omega t}$. После подстановки в (7.2.6) в одномерном случае получим дисперсионное уравнение

$$\sin^2\frac{\omega\tau}{2} = \left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)^2, \tag{7.2.7}$$

где обозначено $\omega_0^2 = -\tau^2 \dfrac{e}{m} E'^n$. Из этого уравнения видно, что при $\left|\dfrac{\omega_0 \tau}{2}\right| < 1$ имеются только вещественные корни ω, и поэтому погрешность не нарастает, а только незначительно осциллирует вблизи точного решения. При $\left|\dfrac{\omega_0 \tau}{2}\right| > 1$, наоборот, решения становятся мнимыми и при этом существуют решения с положительной мнимой частью, что соответствует неограниченному росту погрешности. Из приведенных рассуждений видно, что шаг τ необходимо выбирать достаточно малым по сравнению с характерным периодом изменения поля.

Рассмотрим теперь движение частицы в магнитном поле $\mathbf{B}$. Уравнения движения для этого случая запишутся в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}]\,, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \tag{7.2.8}$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \dfrac{e\mathbf{B}}{mc}$. Будем считать, что поле однородно, постоянно и направлено вдоль оси $0z$, и таким образом достаточно рассмотреть движение только в плоскости перпендикулярной этой оси. Поскольку в правую часть первого уравнения (7.2.8) входит скорость, то использование рассмотренной схемы "с перешагиванием", когда значения координат и скоростей задавались поочередно во времени, приведет к различию в поведении частицы на четных и нечетных временных слоях. Частица будет совершать зигзагообразное движение между двумя круговыми орбитами; при уменьшении шага по времени расстояние между центрами этих орбит будет уменьшаться.

Часто используется другая схема:

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\tau} = \left[\frac{(\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n+1})}{2}\boldsymbol{\Omega}\right], \quad \frac{\mathbf{r}^{n+1} - \mathbf{r}^n}{\tau} = \frac{(\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n+1})}{2}. \tag{7.2.9}$$

Эта схема может быть разрешена относительно $\mathbf{v}^{n+1}$ и $\mathbf{r}^{n+1}$. В начальный момент времени требуется задание скорости $\mathbf{v}^0$ и координаты $\mathbf{r}^0$, которые определяются начальным распределением модельных частиц в системе. Легко проверить, что схема (7.2.9) имеет второй порядок аппроксимации, обратима во времени, обеспечивает точное сохранение энергии и устойчива при любом временном шаге τ.

И, наконец, не представляет труда обобщить написанную схему, включив в нее электрическое поле. Имеет смысл разбить движение частицы на два вида: вдоль магнитного поля под действием параллельной к $\mathbf{B}$ составляющей электрического поля и поперек него. Первый случай есть движение частицы только в электрическом поле (оно может быть рассчитано по схеме (7.2.2)), а второй – под действием магнитного поля и перпендикулярных к нему составляющих электрического поля $\mathbf{E}_\perp$. Схема (7.2.9) для второго случая может быть записана в виде

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1}-\mathbf{v}^n}{\tau} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_\perp + \left[\frac{(\mathbf{v}^n+\mathbf{v}^{n+1})}{2}\boldsymbol{\Omega}\right], \quad \frac{\mathbf{r}^{n+1}-\mathbf{r}^n}{\tau} = \frac{(\mathbf{v}^n+\mathbf{v}^{n+1})}{2}. \tag{7.2.10}$$

Она также может быть разрешена относительно $\mathbf{v}^{n+1}$ и $\mathbf{r}^{n+1}$, требует задания в начальный момент скорости $\mathbf{v}^0$ и координаты $\mathbf{r}^0$, имеет второй порядок аппроксимации, обратима во времени и устойчива.

§ 7.3. Численное решение уравнений поля

Обратимся к определению электрических полей по известной плотности заряда. Для простоты ограничимся потенциальным приближением и одномерным случаем. Обобщение на случай большего числа измерений достаточно очевидно.

Решая уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho(x), \tag{7.3.1}$$

можно определить потенциал φ, а значит и электрическое поле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Однако, при произвольной зависимости $\rho(x)$ решить уравнение (7.3.1) не представляется возможным. Возникает необходимость использования численных алгоритмов.

Выберем в области $0 \leqslant x \leqslant X$ сетку с шагом $h = X/J$, $x_j = jh$, где J – число шагов, j – индекс, нумерующий узлы сетки (либо совокупность индексов в случае нескольких измерений), причем $x_0 = 0$, $x_J = X$. Плотность заряда, потенциал и электрическое поле будем относить к узлам введенной сетки: ρ_j, φ_j, E_j. Тогда разностная запись уравнения Пуассона будет иметь следующий вид:

$$\frac{\varphi_{j+1}-2\varphi_j+\varphi_{j-1}}{h^2} = -4\pi\rho_j, \tag{7.3.2}$$

причем электрическое поле определяется центральной разностью

$$E_j = -\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1}}{2h}. \tag{7.3.3}$$

Аналогично предыдущему параграфу, можно убедиться, что данная схема обеспечивает порядок аппроксимации $\sim h^2$. Существует достаточно большое число методов решения уравнения Пуассона, описанных в литературе. Мы остановимся на одном из них, основанном на использовании преобразования Фурье.

Пусть все функции – плотность заряда, потенциал и поле являются функциями периодическими с периодом X. Тогда, очевидно, каждую из них можно разложить в ряд Фурье. Это позволяет использовать метод дискретного преобразования Фурье для численного решения уравнения Пуассона. Как хорошо известно, для функции $\rho(x)$, заданной на отрезке $0 \leqslant x \leqslant X$, где x пробегает непрерывный ряд значений, разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\rho(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}_k e^{i\frac{2\pi}{X}kx}, \tag{7.3.4}$$

где

$$\hat{\rho}_k = \frac{1}{X} \int_0^X \rho(x) e^{-i\frac{2\pi}{X}kx}\, dx. \tag{7.3.5}$$

Переход к сеточным функциям означает рассмотрение плотности ρ в узлах сетки $x_j = jh$. Тогда для сеточной плотности имеем:

$$\rho_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}_k e^{i\frac{2\pi}{J}kj}, \tag{7.3.6}$$

причем, очевидно, что суммировать бесконечное число слагаемых не нужно. В самом деле,

$$\rho_j = \sum_{k=0}^{J-1} e^{i\frac{2\pi}{J}kj} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}_{k+pJ} = \sum_{k=0}^{J-1} \tilde{\rho}_k e^{i\frac{2\pi}{J}kj}, \tag{7.3.7}$$

где $\tilde{\rho}_k = \sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}_{k+pJ}$. Приведенные рассуждения показывают, что с введением сетки ряд Фурье содержит конечное число членов. Домножая (7.3.7) на $\exp\left(-i\dfrac{2\pi}{J}kj\right)$ и суммируя по j получим выражение, определяющее коэффициенты разложения в ряд Фурье:

$$\tilde{\rho}_k = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} \rho_j e^{-i\frac{2\pi}{J}kj}. \tag{7.3.8}$$

Соотношения (7.3.7) и (7.3.8) справедливы также для φ и E.

Подставляя (7.3.7) и аналогичное соотношение для потенциала в разностное уравнение Пуассона, домножая на $\exp\left(-i\dfrac{2\pi}{J}kj\right)$ и суммируя по j от 0 до $J-1$, получим соотношение, связывающее сеточные гармоники плотности заряда с потенциалом:

$$\tilde{\varphi}_k = \frac{\pi h^2}{\sin^2 \dfrac{\pi}{J} k} \tilde{\rho}_k. \tag{7.3.9}$$

Величину $\tilde{\varphi}_0$ находить не нужно, т.к. она дает лишь постоянный аддитивный вклад в φ_j и при вычислении поля не проявляется. Соотношение (7.3.9) является сеточным аналогом связи Фурье-гармоник потенциала и плотности заряда функций непрерывно изменяющегося аргумента x. Подставляя (7.3.9) в разложение потенциала, аналогичное (7.3.7), мы можем найти его значения в узлах сетки. Далее, беря разностную производную, по формуле (7.3.3) определяем значения поля. В одномерном случае возможно также нахождение поля из уравнения $\dfrac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\rho$. В неодномерном – решение уравнения Пуассона предпочтительнее.

§ 7.4. Вычисление плотности заряда. Аппроксимация сил, действующих на частицы

В предыдущих двух параграфах мы познакомились с методами численного интегрирования уравнений движения и уравнений поля. В уравнениях движения сила, входящая в правую часть, предполагалась нами известной в точке нахождения частицы. В уравнениях поля, в свою очередь, предполагалось известным распределение плотности заряда в узлах сетки. В соответствии с вычислительным циклом необходимо рассмотреть вопросы нахождения плотности заряда по известным положениям частиц, перенесении его на узлы сетки, и аппроксимации сил по известным значениям полей на сетке в произвольную точку расчетной области.

Начнем с вопроса о восстановлении плотности заряда. Плотность заряда в случае реальных частиц определялась из функции распределения интегрированием по скоростям:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}, \tag{7.4.1}$$

где функция распределения f являлась решением кинетического уравнения. В случае модельной плазмы в виде точечных частиц, моделирующих функцию распределения, ее естественно было бы представить в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i), \tag{7.4.2}$$

где индекс i нумерует частицы. Интегрируя по скоростям, получим распределение плотности в виде суммы δ-функций. Очевидно, что вычислять таким образом $\rho(\mathbf{r})$ нельзя: ввиду малого числа частиц имеются большие флуктуации плотности, кроме того, на малых расстояниях частицы сильно взаимодействуют друг с другом, что повышает роль столкновений. Однако, сказанное не относится к вычислению сеточной плотности, т.е. вычислению значений плотности $\rho(\mathbf{r})$ в узлах сетки, о чем будет сказано ниже.

Для уменьшения роли флуктуаций и столкновений необходимо использовать частицы конечного размера, которые могут свободно проникать друг через друга. Различные формы распределения заряда в частице дадут нам сглаживание плотности и устранят сингулярность поля, присущую точечным зарядам. Обозначим через $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ распределение заряда в частице, находящейся в точке $\mathbf{r}_i$. Если под f понимать распределение частиц как целого, то распределение плотности можно представить в виде:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i e_i R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \tag{7.4.3}$$

Из условия нормировки заряда получаем $\int\limits_V R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\, d\mathbf{r} = 1$.

Рассмотрим два конкретных значения $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, часто используемых на практике. Ограничимся одномерным случаем; обобщение на двумерный и трехмерный случаи очевидно.

Наиболее простой является форма частиц в виде прямоугольника. Пусть длина частицы равна 2Δ, тогда из условия нормировки легко написать выражение для профиля $R(x - x_i)$:

$$R(x - x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta}, & |x - x_i| < \Delta, \\ 0, & |x - x_i| > \Delta. \end{cases} \tag{7.4.4}$$

Подставляя $R(x - x_i)$ в формулу (7.4.3), легко сообразить, что расчет плотности заряда в произвольной точке x сведется просто к подсчету числа частиц, находящихся на расстоянии, меньшем Δ от точки x. Сама плотность будет, таким образом, кусочно-постоянной функцией координаты.

Большего сглаживающего эффекта можно добиться, используя треугольную форму частицы с длиной основания 2Δ:

$$R(x - x_i) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{|x - x_i|}{\Delta}\right)\Delta^{-1}, & |x - x_i| < \Delta, \\ 0, & |x - x_i| > \Delta. \end{cases} \tag{7.4.5}$$

Непрерывность функции $R(x-x_i)$ приведет, очевидно, к непрерывности найденной с ее помощью плотности $\rho(x)$. При этом плотность будет представлять собой кусочно-линейную функцию.

Используя более гладкие представления для формы частицы, мы будем получать более гладкую плотность. Однако, чрезмерное усложнение формы потребует увеличения времени расчета и усложнения алгоритма. Более сложные формы частиц используются редко и нами здесь рассматриваться не будут.

Описанные выше методы позволяют рассчитать плотность заряда в произвольной точке пространства. Подставляя ее в уравнения Максвелла (или в нашем случае в уравнение Пуассона), мы, в принципе, можем определить электромагнитное поле. Однако, точное решение уравнений поля, вообще говоря, невозможно. Численное же решение требует введения в пространстве расчетной сетки и приближенное представление уравнений в разностном виде. Для расчета полей численными методами нам необходимо перенести найденую плотность $\rho(x)$ на сетку. Сделать это простым приписыванием значения плотности в узле сетки x_j этому узлу, т.е. $\rho_j = \rho(x_j)$, нельзя. Чтобы убедиться в этом, введем в расчетной области $0 \leqslant x \leqslant X$ сетку с шагом h (рассматриваем, как обычно, одномерный случай). Предположим, что размер частиц меньше шага h. Тогда возможной оказывается такая ситуация: частица, находясь вблизи одного из узлов и давая вклад в плотность заряда в этом узле, уходит от этого узла на расстояние, большее размера частицы, но к другому (соседнему) узлу еще не подходит. Таким образом, заряд уходит с одного узла и не приходит на другой, т.е. имеется нарушение закона сохранения электрического заряда, а, как мы уже говорили, численная схема должна обеспечивать основные свойства системы и законы сохранения, в частности.

Будем строить процедуру перенесения плотности на узлы сетки, исходя из закона сохранения заряда

$$Q = \int \rho\, d\mathbf{r} = h \sum_j \rho_j, \tag{7.4.6}$$

где Q – полный заряд. Очевидно, что закон сохранения заряда будет иметь место, если представить

$$\rho_j = \frac{1}{h} \int\limits_{V_j} \rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \tag{7.4.7}$$

т.е. считать, что плотность заряда в j-ом узле равна суммарному заряду, находящемуся в j-ой ячейке, деленному на размер ячейки. При этом под ячейкой подразумевается область, ограниченная плоскостями, проведенными через середины отрезков, соединяющих соседние узлы, перпендикулярно к ним. Подставляя сюда ρ из (7.4.3), можно определить ρ_j.

Рассмотрим конкретные формы $R(x-x_i)$ частиц. Начнем с точечных $R(x-x_i) = \delta(x-x_i)$. Как уже указывалось выше, точечные частицы дают большие флуктуации плотности при расчете $\rho(x)$ как функции непрерывного аргумента x. При вычислении же ρ_j в узлах сетки мы, фактически, проводим усреднение заряда по ячейке вблизи узла, и при достаточном числе частиц в ячейке (обычно оно составляет несколько десятков) флуктуации плотности становятся малыми. При выборе формы частиц в виде δ-функции $R(x-x_i) = \delta(x-x_i)$ для расчета ρ_j в j-м узле, как видно из формулы (7.4.3), мы просто должны просуммировать все частицы, находящиеся в j-ой ячейке и поделить на размер ячейки. Такая модель позволяет быстро произвести расчет и легко программируется. Она была разработана одной из первых и называется NGP (nearest-grid-point) или модель ближайшего узла.

Большего сглаживающего эффекта, но с увеличением числа операций, необходимых для расчета, можно добиться, используя форму частиц (7.4.4) в виде прямоугольника. Очевидно, в этом случае в ячейку может попасть только часть частицы, и поэтому при расчете плотности в j-ом узле ρ_j по формуле (7.4.7) суммироваться частицы будут с учетом веса – доли частицы, которая попала в j-ую ячейку. Размер частицы 2Δ может быть больше, меньше, или равен шагу сетки h. В случае когда

$2\Delta = h$ модель обычно называется PIC (particle-in-cell) или частица в ячейке, в остальных случаях – CIC (could-in-cell) или облако в ячейке.

Аналогично может быть вычислена сеточная плотность для $R(x-x_i)$ в виде (7.4.5) и других. Однако, указанные варианты не представляются наглядными и поэтому здесь не приводятся.

Обратимся теперь к аппроксимации полей, известных в узлах сетки, на произвольную точку расчетной области и вычислению силы, действующей на модельную частицу. В общем случае выражение для аппроксимации поля в произвольную точку x может быть записано в виде

$$E(x) = \sum_j E_j S(x - x_j). \tag{7.4.8}$$

Здесь E_j – известные значения поля в узлах сетки, $S(x - x_j)$ – функция, задающая форму аппроксимации. По найденному значению поля в произвольной точке можно легко определить силу, действующую на модельную частицу. Учитывая конечный размер частиц, имеем

$$F(x_i) = e_i \int E(x)R(x - x_i)\,dx = e_i \sum_j E_j \int S(x - x_j)R(x - x_i)\,dx. \tag{7.4.9}$$

Индекс i, как обычно, нумерует частицы, а индекс j – узлы сетки.

Рассмотрим несколько простейших случаев. Пусть для начала $R(x - x_i) = \delta(x - x_i)$, а

$$S(x - x_j) = \begin{cases} 1, & |x - x_j| \leqslant h/2, \\ 0, & |x - x_j| > h/2, \end{cases} \tag{7.4.10}$$

т.е. частицы являются точечными, а поле в пределах j-ой ячейки постоянно и равно его значению E_j в j-ом узле. Стоящий в формуле (7.4.9) интеграл легко вычисляется и окончательно получим:

$$F(x_i) = e_i E_{j'}, \tag{7.4.11}$$

где j' означает номер ближайшего к точке x_i узла. Таким образом, имеем кусочно-постоянную аппроксимацию поля.

В более сложном случае (7.4.4) прямоугольной частицы с шириной 2Δ и $S(x - x_j)$, даваемым формулой (7.4.10), для силы, действующей на частицу, находящуюся в точке x_i, имеем

$$F(x_i) = \frac{e_i}{2\Delta} \sum_j E_j \int\limits_{x_i-\Delta}^{x_i+\Delta} S(x - x_j)\,dx \tag{7.4.12}$$

Более сложные формы частиц приводят к громоздким выражениям и поэтому здесь не рассматриваются.

Рассмотрим, наконец, для точечных частиц случай, когда поле в точке x определяется линейной интерполяцией между значениями поля в соседних узлах. Выражение для $E(x)$ при $x_j < x < x_{j+1}$ имеет вид

$$E(x) = E_j + \frac{E_{j+1} - E_j}{h}(x - x_j). \tag{7.4.13}$$

Подставляя это выражение в формулу (7.4.9) с $R(x - x_i) = \delta(x - x_i)$, найдем

$$F(x_i) = e_i \left\{ E_j \left(1 - \frac{x_i - x_j}{h} \right) + E_{j+1} \frac{x_i - x_j}{h} \right\}, \tag{7.4.14}$$

где j и $j+1$ – номера узлов сетки, между которыми лежит точка x_i. Более сложные случаи аппроксимации здесь не рассматриваются.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим вопрос о размещении модельных частиц в фазовом пространстве при $t = 0$. В реальной физической задаче в начальный момент времени будет задана функция распределения частиц по координатам и скоростям. Нам требуется, исходя из этой функции распределения, разместить частицы так, чтобы они воспроизводили это начальное распределение, и по возможности, обеспечивали низкий уровень флуктуаций из-за ограниченного числа частиц.

Рассмотрим вначале распределение по координатам. Пусть в области $0 \leqslant x \leqslant X$ задана плотность частиц $N(x)$. Требуется расположить в начальный момент времени модельные частицы так, чтобы при усреднении получалась заданная функция $N(x)$. Эта плотность определяет число частиц в интервале от x до $x + dx$. Построим интегральную плотность распределения

$$N_{int}(x) = \frac{\int\limits_0^x N(x)\,dx}{\int\limits_0^X N(x)\,dx}, \tag{7.4.15}$$

которая определяет долю числа частиц, находящихся в интервале от 0 до x. Величина $N_{int}(x)$ принимает значения от 0 в точке $x = 0$ до 1 в точке $x = X$. Далее зададим однородный набор чисел R_i от 0 до 1 и будем определять точки расположения частиц из условия $N_{int}(x_i) = R_i$, т.е. используем кусочно-постоянную аппроксимацию для интегральной плотности распределения частиц. Очевидно, что построенное таким образом распределение модельных частиц по координатам будет соответствовать заданной концентрации $N(x)$.

Рассмотрим теперь распределение частиц по скоростям. Во многих практически важных задачах начальное распределение частиц имеет вид максвелловского распределения. Продемонстрируем основные моменты процедуры распределения модельных частиц именно для этого случая. Прежде всего, следует отметить, что использование всех частиц для моделирования максвелловского распределения неудобно, т.к. ограниченность числа модельных частиц приводит к большим флуктуациям (бо́льшим чем в реальной плазме). Обычно используют так называемую методику спокойного старта. Для этого расчетная область разбивается на ряд подобластей по I частиц каждая. Затем скорости этих I частиц выбираются такими, чтобы они аппроксимировали функцию распределения Максвелла в выбранной подобласти. Во всех остальных подобластях частицам приписываются такие же значения скорости. Таким образом, начальное распределение задается в виде I пучков частиц. Определить скорости каждого из пучков можно, используя описанную выше процедуру: приравниваем интегральную функцию распределения

$$f_{int}(v) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{v} \exp\left(-v^2/v_T^2\right)\, dv}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-v^2/v_T^2\right)\, dv} \tag{7.4.16}$$

однородному набору чисел в интервале от 0 до 1 и определяем набор скоростей пучков. Такая методика позволяет уменьшить флуктуации, связанные с ограниченным числом модельных частиц, но она предопределяет развитие пучковой неустойчивости модельных частиц, что в данном случае является нефизическим эффектом.

Как видно из формулы (7.4.16), разность скоростей пучков, моделирующих функцию распределения Максвелла при скоростях, сравнимых с тепловой v_T, больше, чем при малых скоростях. Поэтому использование описанной выше процедуры для исследования процессов со скоростями, бо́льшими тепловой, не совсем удобно, т.к. требует задания большого числа пучков. Для этих целей более рациональным является задание пучков с постоянной разностью скоростей Δv. При этом для задания распределения по скоростям заряд и масса каждой частицы умножаются на $\exp\left(-v^2/v_T^2\right)$. Динамика движения не меняется, а инкремент неустойчивости при том же количестве пучков уменьшается. Недостатком такого подхода является то, что при исследовании динамики возмущений с длиной волны λ существует время возврата $\lambda/\Delta v$, когда один пучок проскальзывает относительно другого и система отчасти восстанавливает свое первоначальное состояние. Поэтому при исследовании процессов со скоростями, меньшими тепловой, имеет смысл использовать первый подход, а в обратном случае – второй.

§ 7.5. Влияние вычислительных эффектов на свойства модельной плазмы

При численном анализе свойств модельной плазмы мы ввели ряд понятий, не свойственных реальной плазме, но в тоже время необходимых для численных расчетов. В первую очередь, это конечный размер частиц и сетка в координатном пространстве. Нами уже обсуждались эффекты, связанные с малым числом частиц, такие как повышение роли столкновений. Для их уменьшения мы использовали усреднение заряда по некоторой области. При этом использование частиц конечных размеров способствовало устранению сингулярности на малых расстояниях, но, очевидно, должно изменять дисперсионные свойства плазмы. Введение сетки приведет к появлению новых волновых чисел. Это должно приводить к появлению новых резонансов и возможному развитию нефизических неустойчивостей. В этом параграфе обсуждаются основные эффекты, связанные с введением модельной плазмы.

Рассмотрим вначале частицы конечного размера, а время и координату будем предполагать непрерывными. Законность такого предположения будет обеспечиваться условиями $k_{\max}h \ll 1$ и $\omega_{\max}\tau \ll 1$, где $k_{\max}$ и $\omega_{\max}$ – максимальные волновое число и частота системы в рассматриваемой задаче. Плотность заряда в системе частиц конечного размера определяется по формуле (7.4.3). Применяя к ней преобразование Фурье, получим:

$$\rho(k,t) = R(k)\sum_i e_i e^{-ikx_i} = R(k)\rho_{\text{точ}}(k,t), \tag{7.5.1}$$

где $R(k) = \int R(x)\exp(-ikx)\,dx$ и $\rho_{\text{точ}}(k,t)$ – Фурье-образы функций $R(x)$ и плотности точечных частиц $\rho_{\text{точ}} = \sum\limits_i e_i\delta(x - x_i)$. Аналогично, применяя преобразование Фурье к выражению (7.4.9) для силы, действующей на частицу, найдем

$$F(k,t) = e_i R(k) E(k,t). \tag{7.5.2}$$

Очевидно, что беря в качестве $R(x) = \delta(x)$, получим $R(k) = 1$, и все формулы сводятся к соответствующим соотношениям для точечных частиц. Написанные формулы позволяют видеть, что учет конечности размеров частиц в Фурье-представлении сводится просто к замене заряда e на эффективный заряд $eR(k)$. Тогда спектр хорошо известных ленгмюровских колебаний холодной изотропной плазмы $\omega^2 = \omega_p^2$, не зависящий от k, в случае частиц конечного размера примет вид $\omega^2 = \omega_p^2 R^2(k)$.

В случае частиц, имеющих прямоугольную форму длиной 2Δ, как легко вычислить, $R(k) = \dfrac{\sin k\Delta}{k\Delta}$. При этом возможность использования модельных частиц имеется в случае $k\Delta \ll 1$, т.е. когда размеры частиц меньше длин волн рассматриваемых в системе колебаний.

И наконец, обратимся к исследованию роли пространственной сетки в вычислениях. Для простоты не будем учитывать конечность размеров модельных частиц и ограниченность их числа. Это значит, что в качестве уравнений движения среды будем использовать уравнения гидродинамики, но с полем, заданным только в узлах сетки. Сначала кратко напомним основные моменты, связанные с использованием преобразования Фурье для функций дискретного аргумента, изменяющегося в области $-\infty < x < \infty$. Для обычной функции непрерывного аргумента $\rho(x)$ прямое и обратное преобразования Фурье имеют вид

$$\begin{aligned} \rho(k) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)e^{-ikx}\,dx, \\ \rho(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(k)e^{ikx}\,dk. \end{aligned} \tag{7.5.3}$$

Аналогично для потенциала, поля и т.д. Если $\rho(x)$ определена только в точках $x_j = jh$, имеем

$$\rho(x_j) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(k) e^{ikx_j}\, dk = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \rho(k + 2\pi p/h) e^{ikjh}\, dk. \tag{7.5.4}$$

Вводя обозначение

$$\tilde{\rho}(k) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \rho(k + 2\pi p/h), \tag{7.5.5}$$

соотношение (7.5.4) запишем в виде

$$\rho(x_j) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \tilde{\rho}(k) e^{ikx_j}\, dk. \tag{7.5.6}$$

Это выражение можно рассматривать как разложение в интеграл Фурье для функции, заданной в дискретных точках оси x. Если обратить внимание, что оно по форме напоминает выражение для коэффициента разложения периодической функции в ряд Фурье, то нетрудно написать и обратное к (7.5.6) преобразование

$$\tilde{\rho}(k) = h\sum_j \rho(x_j) e^{-ikx_j}. \tag{7.5.7}$$

Заметим, что из формулы (7.5.5) следует $\tilde{\rho}(k + 2\pi/h) = \tilde{\rho}(k)$.

Для анализа влияния пространственной сетки на свойства модельной плазмы получим дисперсионное уравнение системы. Для этого подставим (7.5.6) и аналогичное выражение для φ в разностное уравнение Пуассона (7.3.2) и разностное соотношение, определяющее поле через потенциал (7.3.3). Обозначая как $\tilde{\rho}(k)$, $\tilde{\varphi}(k)$ и $\tilde{E}(k)$ Фурье-образы функций ρ_j, φ_j и E_j, соответственно, получим

$$\begin{aligned} k^2\left(\frac{\sin kh/2}{kh/2}\right)^2 \tilde{\varphi}(k) &= 4\pi\tilde{\rho}(k), \\ -ik\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)\tilde{\varphi}(k) &= \tilde{E}(k). \end{aligned} \tag{7.5.8}$$

В силу указанных выше условий точечности частиц и достаточно большого их числа, будем описывать их динамику непрерывными уравнениями гидродинамики с полем, аппроксимированным в произвольную точку x по известным значениям в узлах сетки:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\\ \frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m} \sum_j E_j S(x - x_j).\end{aligned} \tag{7.5.9}$$

Применяя к этим уравнениям преобразование Фурье для функций непрерывного аргумента, получим

$$\rho(k) = \frac{k}{\omega - kv_0} \rho_0 v = i \frac{k}{(\omega - kv_0)^2} \rho_0 \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \left[\sum_j E_j S(x - x_j) \right] =$$

$$= i \frac{k}{(\omega - kv_0)^2} \rho_0 \frac{e}{m} \left[\sum_j E_j e^{-ikx_j} \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(x - x_j) e^{-ik(x - x_j)} \, dx \right] =$$

$$= i \frac{k}{(\omega - kv_0)^2} \rho_0 \frac{e}{m} \frac{1}{h} \tilde{E}(k) S(k). \tag{7.5.10}$$

Используя соотношения (7.5.5), (7.5.8), (7.5.10) и учитывая периодичность $\tilde{\rho}(k)$, легко получить дисперсионное уравнение потенциальных колебаний электронной плазмы с учетом сетки:

$$1 - \omega_p^2 \frac{\operatorname{ctg} kh/2}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{k_p S(k_p)}{(\omega - k_p v_0)^2} = 0, \tag{7.5.11}$$

где $k_p = k + 2\pi p/h$. Беря $S(x)$ в простейшем виде (7.4.10) $S(k_p) = \dfrac{\sin k_p h/2}{k_p/2}$. При достаточно малом шаге сетки h сумма в (7.5.11) будет быстро сходиться и основной вклад даст слагаемое с $p = 0$. Используя более гладкую аппроксимацию поля, можно еще улучшить сходимость этой суммы и тем самым уменьшить роль сетки.

Очевидно, что в случае неподвижной плазмы ($v_0 = 0$) дисперсионное уравнение (7.5.11) определяет плазменные колебания с частотой

$$\omega^2 = \omega_p^2 \left[\frac{\operatorname{ctg} kh/2}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k_p S(k_p) \right], \tag{7.5.12}$$

которая искажается сеткой фактором в квадратных скобках.

В случае, когда $v_0 \neq 0$ уравнение (7.5.11) аналогично дисперсионному уравнению для системы многих пучков, а в такой системе возможно развитие численной неустойчивости.

Учебное издание

АЛЕКСАНДРОВ Андрей Федорович
РУХАДЗЕ Анри Амвросьевич

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
ПЛАЗМОПОДОБНЫХ СРЕД
часть II
(неравновесные среды)

Компьютерная верстка: *Карташов И.Н.*

Подписано в печать Формат 60×88 1/16
Печать офсетная. Бумага офсетная №1
Объем 15 п.л. Тираж 500 экз. Зак.

Ордена «Знак Почета» Издательство Московского университета.
ЛР 040414 от 18.04.97
103009, Москва, ул. Б.Никитская, 5/7.

Физический факультет МГУ. ЛР 021293 от 18.06.98.
Москва, 119899, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова,
физический факультет. Тел. (095)939-5494.
Интернет: http://publish.phys.msu.su

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ
140010, Люберцы, Октябрьский пр-кт, 403.
Тел. 554-2186

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Ф., Рухадзе А.А. Лекции по электродинамике плазмоподобных сред. – М.: Изд. МГУ, 1999.
2. Александров А.Ф., Богданкевпч Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. – М.: Высшая школа, I изд. 1978, II изд. 1988.
3. Александров А.Ф., Богданкевпч Л.С., Рухадзе А.А. Колебания и волны в плазменных средах. – М.: Изд. МГУ, 1990.
4. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. Электродинамика плазмы. – М.: Наука, 1974.
5. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. – М.: Наука, I изд. 1970, II изд. 1975.
6. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. – М.: Атомиздат, 1961.
7. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. – М.: Наука, 1976.
8. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979.
9. Цытович В.Н. Нелинейные эффекты в плазме. – М.: Наука, 1967.
10. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитопов. – М.: Мир, 1983.
11. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. – М.: Наука, 1997.
12. Дэвидсон Р. Теория заряженной плазмы. – М.: Мир, 1978.
13. Ерохин Н.С., Кузелев М.В., Моисеев С.С. и др. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. – М.: Наука, 1982.
14. Иванов А.А. Физика сильнонеравновесной плазмы. – М.: Атомиздат, 1977.
15. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. – М.: Атомиздат, том 1 1975, том 2 1977.
16. Незлин М.В. Динамика пучков в плазме. – М.: Энергия, 1982.
17. Рухадзе А.А., Богданкевпч Л.С., Роспнскпй С.Е., Рухлин В.Г. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. – М.: Атомиздат, 1980.
18. Силин В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. – М.: Наука, 1973.
19. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. – М.: Наука, 1990.
20. Энциклопедия низкотемпературной плазмы, под ред. акад. В.Е.Фортова, раздел X, Плазменная электроника, т.4, с.3. М.: Наука, 2000.
21. Березин Ю.А., Федорук М.П. Моделирование нестационарных плазменных процессов. – Новосибирск: Наука, 1993.
22. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. – Новосибирск: Наука, 1980.
23. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. – М.: Энергоатомиздат, 1989.

ОГЛАВЛЕНИЕ