

А.Ф. Александров, А.А. Рухадзе

ЛЕКЦИИ
ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
ПЛАЗМОПОДОБНЫХ СРЕД



А.Ф.Александров
А.А.Рухадзе

**ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
ПЛАЗМОПОДОБНЫХ СРЕД**

Издательство
Московского Университета
1999 г.

ББК 22.333

А 46

УДК 533.9

РЕЦЕНЗЕНТ

профессор Ю.Л.Климонтович

Александров А. Ф., Рухадзе А. А. **Лекции по электродинамике плазмоподобных сред.** – М.: Издательство Московского университета. Физический факультет МГУ, 1999.
ISBN 5–8279–0004–4

В книге последовательно изложена электродинамика проводящих сред с пространственной дисперсией, которые часто называют плазмоподобными средами. К числу таких сред, в первую очередь, относятся газовая и твердотельная плазма (металлы и полупроводники), а также коллоидные и молекулярные кристаллы, проводящая жидкость (электролиты, ртуть) и др. Следуя историческому пути развития представлений о таких средах, рассмотрены различные модели, используемые для их описания, обсуждены их достоинства и недостатки и показана наибольшая полнота кинетической модели, основанной на системе уравнений Власова-Максвелла. Рассмотрены как равновесные, так и неравновесные и неоднородные среды, их линейные и нелинейные электродинамические свойства.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области физики плазмы, физической электроники и физики твердого тела.

*Книга подготовлена при финансовой поддержке
ФЦП "Интеграция" (Проект №А-0111).*

ISBN 5–8279–0004–4

© Александров А.Ф., Рухадзе А.А., 1999

© Издательство Московского университета, 1999

© Физический факультет МГУ, 1999

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Книга написана на основе трех специальных курсов "Колебания и волны в плазменных средах", "Основы электродинамики плазموподобных сред" и "Взаимодействие электромагнитных волн с плазмой", вот уже более 30 лет читаемых авторами студентам отделения радиофизики и электроники и кафедры физической электроники физического факультета МГУ. По своему духу они близки к известному учебнику А.Ф.Александрова, Л.С.Богданкевич и А.А.Рухадзе "Основы электродинамики плазмы", второе издание которого было опубликовано в 1988 году и удостоено Государственной Премии СССР за 1991 год. Этот учебник, однако, слишком объемистый и по своему содержанию и стилю изложения (обилию подробностей и выкладок) выходит за рамки тех необходимых сведений, которые включены в указанные выше обязательные курсы лекций, не говоря уже о том, что он стал библиографической редкостью, трудно доступной студентам. Вместе с тем, в этом учебнике практически полностью отсутствует описание электромагнитных свойств плазмы твердого тела – металлов и полупроводников, что входит в обязательную программу обучения студентов на кафедре физической электроники.

Все сказанное выше побудило нас написать эту книгу, небольшую по объему, но вместе с тем включающую все необходимое в соответствии с программами указанных специальных курсов. Надеемся, что книга будет полезна студентам и всем специалистам, работающим в области физики плазмы, физической электроники и физики твердого тела, и они ее оценят по достоинству.

А.Ф.Александров
А.А.Рухадзе

ТЕМА I

**ПРЕДМЕТ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ
ПЛАЗМОПОДОБНЫХ СРЕД****§ 1.1. Какие среды называют плазмopodobными и какими физическими параметрами они характеризуются**

Термин "плазмopodobные среды" был введен в 1961 г. В.П.Силиным и А.А.Рухадзе в монографии "Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред", которая была первой книгой по электродинамике таких сред. Под этим термином авторы понимали такие казалось бы разные состояния вещества как ионизованный газ, или собственно плазма, металлы, полупроводники и даже молекулярные коллоидные кристаллы и электролиты. Важной определяющей характеристикой этих сред является наличие в них свободных носителей электрического заряда, создающих при своем движении в среде электрические и магнитные поля, которые существенно искажают внешние поля и влияют на характер движения самих носителей заряда. Именно необходимость самосогласованного описания поведения носителей заряда и электромагнитных полей оказалась общей для плазмopodobных сред и объединила в одну науку – физику плазмы – физику ионизованных газов, металлов и полупроводников, коллоидных кристаллов и электролитов, плодотворность чего будет продемонстрирована на протяжении всего настоящего курса лекций.

Первичным объектом, однако, была газовая плазма, или система кулоновски взаимодействующих заряженных частиц. Именно с такой газовой плазмы и началось последовательное изучение плазмopodobных сред. Мы будем также следовать такому принципу.

Первое, далеко не полное определение газовой плазмы принадлежит И. Ленгмюру, который в 1923 году ввел этот термин, назвав плазмой "ярко светящийся газ, состоящий из электронов, ионов разных сортов и нейтральных атомов и молекул". Однако еще до И. Ленгмюра о существовании плазмы как газа ионизованных частиц внятно заговорил О.Хевисайд, предсказавший 100 лет тому назад наличие

вокруг Земли на высотах 300-400 км слоя такого газа, способного отражать от себя, как от зеркала, радиоволны. Этот слой, названный им F-слоем ионосферы, и сегодня обеспечивает на Земле устойчивую радиосвязь. О.Хевисайд не только предсказал, но и объяснил происхождение и даже устойчивое существование в течение суток F-слоя ионосферы как результат ионизации атомов в верхних слоях атмосферы Земли коротковолновым излучением Солнца в дневное время и ее поддержания плазмохимическими процессами с участием возбужденных метастабильных атомов ночью. Так или иначе, по современным представлениям в F-слое ионосферы плотность заряженных частиц достигает $10^5 \div 10^6 \text{ см}^{-3}$ (в зависимости от времени суток) и резко спадает вблизи границы слоя на высоте h порядка 50 км, как это показано на рис.1.1 (здесь h – расстояние от поверхности Земли в километрах). При этом температура электронов в слое $T_e \approx (1 \div 2) 10^3 \text{ К}$, а отношение $T_i/T_e \approx 1/3$. Плотность нейтральных атомов в F-слое $n_0 \approx 10^8 \div 10^9 \text{ см}^{-3}$, т.е. степень ионизации плазмы в F-слое составляет $r \simeq \frac{n_e}{n_e + n_0} \approx 10^{-3} \div 10^{-2}$, т.е. газ ионизован лишь частично.

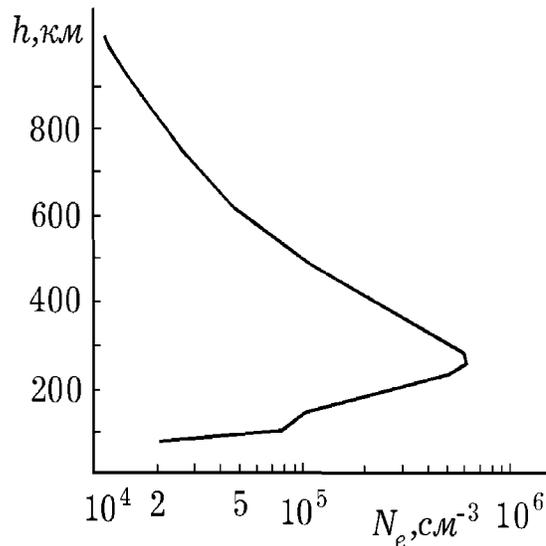


Рис. 1.1

Легко показать (это будет сделано нами чуть позже), что при таких параметрах ионосферной плазмы отражаться от F-слоя будут волны, длина волны которых $\geq 10 \text{ м}$, а для более коротких волн ионосфера прозрачна. Поэтому радиосвязь на Земле возможна на длинных волнах, либо на коротких, но только в условиях прямой видимо-

сти передатчика и приемника.

В лабораторных условиях систематическим изучением плазмы электрического разряда в газе низкого давления (тлеющий разряд) впервые занялся И.Ленгмюр, который не только ввел количественные характеристики для описания состояния плазмы – плотности ее различных компонент – электронной n_e , ионной n_i и нейтральной n_0 и их температуры T_e , T_i , T_0 , но и дал классический способ их измерения – метод зондов Ленгмюра. Более того, он обнаружил высокочастотные колебания плотности плазмы с фазовой скоростью, значительно большей тепловой скорости электронов и не зависящей от температуры ионов и нейтралов. Он определил и частоту этих колебаний, которая соответствовала формуле $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m}$. Эти колебания получили название ленгмюровских (или плазменных) колебаний, а их частота – ленгмюровской (плазменной) частоты. И.Ленгмюр обнаружил в плазме также и низкочастотные медленные волны с линейным законом дисперсии $\omega = kv_s$ и с фазовой скоростью, сравнимой с тепловой скоростью ионов (по крайней мере, существенно меньшей тепловой скорости электронов). Сам И.Ленгмюр низкочастотные волны считал звуком и старался их существование объяснить путем применения к плазме законов обычной гидродинамики. При этом фазовую скорость волн он считал равной

$$v_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{T_e + T_i}{M}}, \quad (1.1.1)$$

где давление $P = n(T_e + T_i)$, плотность $\rho = (m + M)n \simeq Mn$, $n = n_e = n_i$, M – масса ионов, а величина $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – отношение теплоемкостей. С величиной γ у И.Ленгмюра возникли трудности: по данным эксперимента она менялась в широких пределах, в то время как в теории считалась постоянной величиной. Так длилось до 1954 года, когда Г.Гордеев разрешил этот парадокс, однако об этом речь пойдет ниже (см. § 4.1).

Сегодня известно большое многообразие видов газоразрядной плазмы, создаваемой ионизирующим излучением различного типа. В физической электронике изучают и применяют в самых разнообразных целях ВЧ, СВЧ и оптические разряды. В первую очередь, это источники света, начиная от осветительных приборов дневного света и кончая мощными ультрафиолетовыми источниками некогерентного

излучения (ксеноновые, литиевые и др. лампы) для накачки квантовых генераторов и газоразрядными лазерами (разряды в оптически активных газах). Затем следует упомянуть многочисленные типы разрядников-коммутаторов тока, широко используемых в электротехнике, и наконец, преобразователи тепловой, либо направленной энергии течения плазмы в электрическую – слаботочные ТЭП (тепловые электрические преобразователи) и мощные МГД-преобразователи, в которых используется разряд в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Параметры газоразрядной плазмы меняются в широчайших пределах. Так в лампах дневного света $n = n_e \approx n_i \approx 10^{10} \div 10^{13} \text{ см}^{-3}$ при $n_0 \approx 10^{13} \div 10^{16} \text{ см}^{-3}$, т.е. $P_0 \approx 10^{-3} \div 1 \text{ Торр}$, $T_e \approx 10^4 \div 10^5 \text{ К}$ ($T_e \approx 1 \div 10 \text{ эВ}$) и $T_i \approx 1000 \text{ К}$ ($T_i \approx 0,1 \text{ эВ}$), т.е. плазма в них, как правило, слабоионизованная и сильно неизотермическая с $T_e \gg T_i$. Такого же порядка параметры плазмы в ТЭП-ах и плазмохимических реакторах. Вместе с тем плазма в МГД преобразователях весьма плотная: в ней при атмосферном давлении газа ($n_0 \approx 10^{19} \text{ см}^{-3}$) плотность заряженных частиц достигает $n \approx 10^{17} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$ при $T_e \approx T_i \approx 0,3 \text{ эВ} = 3000 \text{ К}$. Наконец, следует отметить, что в отличие от ионосферной плазмы, размеры которой исчисляются десятками и сотнями километров, вследствие чего ее практически можно считать пространственно неограниченной, плазма газового разряда существенно ограничена в пространстве, размеры ее не превышают десятков сантиметров, а в лучшем случае достигают метров (плазма в МГД-преобразователях).

Особое место занимает плазма в установках управляемого термоядерного синтеза. Исторически впервые в начале 50 годов А.Д.Сахаровым и И.Е.Таммом в СССР и Л.Спитцером в США было предложено создание, нагрев и удержание горячей водородной плазмы в так называемых магнитных ловушках, задача которых – удержать от контакта со стенками термоядерного реактора водородную плазму, нагретую до очень высоких температур, бóльших $T_i > 10^8 \text{ К}$. Такое значение температуры необходимо принципиально, поскольку реакция слияния легких ядер – пороговая. При таких температурах хаотические тепловые скорости частиц очень велики ($v_{Ti} = \sqrt{\frac{T_i}{M}} \approx 10^8 \text{ см/с}$) и, если не принять каких-либо специальных мер, они мгновенно, за

время $\tau = \frac{a}{v_{Ti}} \approx \frac{100 \text{ см}}{10^8 \text{ см/с}} \approx 10^{-6} \text{ с}$, уйдут на стенки. Чтобы этого не произошло, плазму помещают в магнитное поле такой конфигурации, которая препятствует движению частиц к стенкам. Это магнитное поле может быть создано либо внешними источниками, как например, в ловушке открытого типа "пробкотрон" (см. рис. 1.2), либо частично возбуждается разрядным током, создающим и нагревающим плазму, как это происходит в замкнутой ловушке тороидальной формы типа "токамак" (см. рис. 1.3). Необходимые значения плотности плазмы в термоядерном реакторе и времени ее устойчивого существования определяются так называемым критерием Лоусона, который для случая дейтерий-тритиевой плазмы записывается так:

$$n_i \tau > 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}, \quad (1.1.2)$$

где τ – время жизни плазмы. Обычно выбирают $n_i \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и соответственно $\tau \approx 1 \text{ с}$. В магнитных ловушках это достигается в полях $B_0 \approx 40 \text{ кГс} \approx 4 \text{ Тл}$. При этом давление магнитного поля намного превосходит газодинамическое давление плазмы, т.е.

$$\beta = \frac{8\pi nT}{B_0^2} \ll 1. \quad (1.1.3)$$

Это и обеспечивает удержание горячей плазмы в магнитных ловушках.

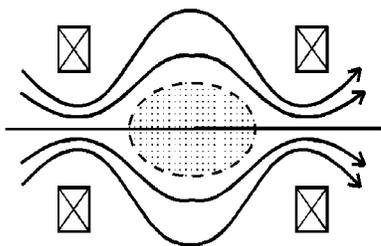


Рис. 1.2

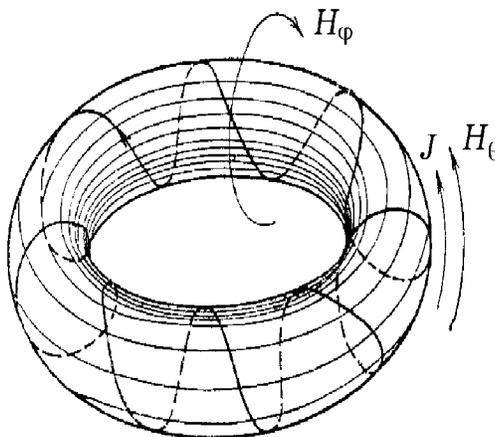


Рис. 1.3

Кроме стационарных установок с магнитным удержанием горячей термоядерной плазмы, существует также так называемый инерциальный "термояд", где плазму не удерживают, а стремятся быстро

нагреть до термоядерных температур, $T_i \geq 10$ КэВ, причем столь быстро, что плазма нагревается до термоядерных температур и живет в таком состоянии время, необходимое для выполнения критерия Лоусона. Очевидно, что это время равно времени инерционного разлета плазмы: $\tau = \frac{a_0}{v_s}$, где a_0 – размер термоядерной мишени (реактора), а v_s – скорость её теплового разлета, которая порядка скорости звука $v_s \approx \sqrt{\frac{T_e}{M}} \approx \sqrt{\frac{T_i}{M}} \approx 10^8$ см/с. Столь быстрый нагрев термоядерного горючего, например, небольшого шарика из твердого дейтерита лития или ”тяжелого” льда можно осуществить, облучая его симметричным образом из мощных источников излучения (см. рис. 1.4). В случае твердотельной мишени (лед) $n \approx 10^{22} \div 10^{23}$ см $^{-3}$ согласно (1.1.2), нужно, чтобы время разлета не превышало примерно $10^{-9} \div 10^{-8}$ с = $1 \div 10$ нс, а следовательно, размер мишени должен быть порядка $a_0 \approx 1$ мм. Для нагрева сферической мишени таких размеров до термоядерных температур мощность источника излучения должна быть свыше $5 \cdot 10^{14} \div 5 \cdot 10^{15}$ Вт при полной энергии $Q \approx 0,5 \div 5$ МДж.

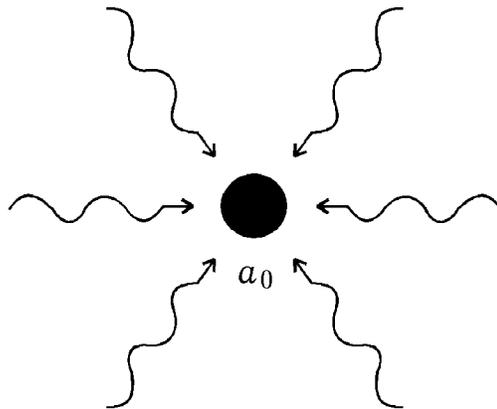


Рис. 1.4

На сегодняшний день наиболее широко распространены два способа реализации инерциального термоядерного синтеза: лазерный, предложенный в 1964 году Н.Г.Васовым и О.Н.Крохиным, и пучковый (электронный, либо ионный), предложенный в 1971 году Г.Винтербергом. В первом из них используется оптический разряд и нагрев плазмы в поле мощного лазерного излучения, а во втором – пучковый разряд и нагрев плазмы плотным сфокусированным пучком заряженных

частиц.

Очевидно, что говорить о необходимости для человека управляемого термоядерного синтеза после аварии на Чернобыльской АЭС излишне. На сегодняшний день это один из экологически наиболее чистых источников энергии.

Раз уж мы заговорили о термоядерной плазме, то следует упомянуть Солнце и многочисленные звезды Вселенной, представляющие собой примеры высокотемпературной плазмы. Правда, идя от сердцевины, т.е. центра звезды, к ее окраине, температура и плотность падают от $T \approx 10^9 \div 10^{10}$ К и выше и $n \approx 10^{25} \div 10^{26}$ см⁻³ и выше (в особенности в белых карликах), соответственно, до $T \approx 10^4$ К и $n \approx 1 \div 10$ см⁻³ на периферии и в межзвездной среде. Изучение такой плазмы – особый раздел астрофизики и выходит далеко за рамки настоящих лекций.

До сих пор, говоря о плотностях различных компонент плазмы: n_e, n_i и n_0 и их температурах T_e, T_i и T_0 , мы молчаливо предполагали, что плазма термодинамически равновесна, по крайней мере, частично, или, что то же самое, по отдельным ее компонентам (сортам частиц). А поэтому функцию распределения каждого сорта частиц $\alpha = e, i, 0$ следует считать максвелловской:

$$f_\alpha = \frac{n_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha}\right). \quad (1.1.4)$$

Максвелловское распределение для электронов $f_e(v)$ изображено на рис. 1.5 в виде кривой 1. Мы знаем, что такое распределение соответствует невырожденной плазме, что в упомянутых выше примерах газовой плазмы выполняется с большим запасом.

Такого, однако, уже не скажешь в общем случае, когда предположение о термодинамической равновесности плазмы (даже частичной), не выполняется. Так, например, газоразрядная плазма, как правило, поддерживается током, а следовательно, по крайней мере электроны обладают отличной от нуля средней направленной скоростью, и естественно, их функция распределения может сильно отличаться от (1.1.4). Еще в большей степени это относится к термоядерной плазме в установках типа токамак, в которых протекают огромные токи, способные собственным магнитным полем удерживать высокотемпературную плазму от разлета.

Сильно неравновесна также плазма высокочастотного и даже оп-

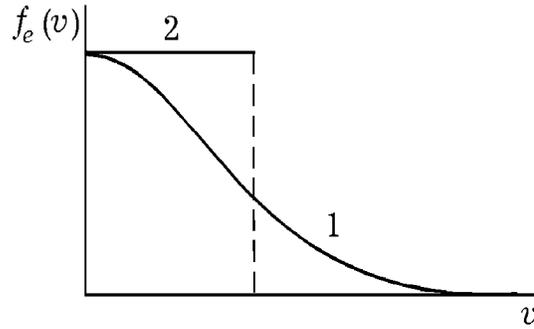


Рис. 1.5

тического разрядов. В них электроны под действием электрического поля излучения совершают осцилляторное движение и их распределение также отлично от (1.1.4).

Газовая плазма в подавляющем большинстве случаев неравновесна и тем не менее для ее описания мы часто будем пользоваться понятием средней (усредненной по функции распределения) энергии хаотического движения

$$\left\langle \frac{m_\alpha v^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} T_\alpha, \quad (1.1.5)$$

называя эту величину температурой и понимая при этом условность такого определения.

Несколько иная ситуация имеет место в плазме твердых тел – металлов и полупроводников, в которой носители заряда вследствие их высокой плотности могут оказаться вырожденными и их распределение по скоростям будет совсем не максвелловским (1.1.4). Но прежде чем обсуждать их функцию распределения, следует напомнить, что в твердых телах носители заряда вообще не являются реальными частицами подобно тому, как это имеет место в газовой плазме. Дело в том, что в полупроводниках и металлах реальные электроны находятся в сильном периодическом поле кристаллической решетки и следует говорить о квантово-механической задаче на собственные значения энергии. При этом возникают возбужденные состояния фермионного типа с положительным, либо отрицательным зарядом. Спектры собственных значений этих состояний $\mathcal{E}(p)$ образуют зон-

ную структуру, в которой чередуются заполненные зоны, зоны проводимости и запрещенные зоны, по порядку величины составляющие $1 \div 10$ эВ. Эффективные массы, определенные как $m^{*-1} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p^2}$ зависят от импульса \mathbf{p} и в случае полупроводников составляют: для положительных носителей заряда $m_+^* \approx m$ (порядка массы электрона), а для отрицательных $m_-^* \approx 0,1 \div 0,01m$. В металлах же $m_-^* \approx m$, причем можно считать, что электроны в металле образуют свободный газ (либо жидкость), поскольку ширина зоны проводимости очень велика, т.е. энергетический спектр металла как бы состоит из одной зоны проводимости. В теории металлов и полупроводников оперируют возбуждениями как свободными квазичастицами и применяют к ним все методы классической механики и теории газовой плазмы. Однако такой подход требует большой осторожности, поскольку любое воздействие, сравнимое по энергии с энергией запрещенной зоны и, тем более, с зоной проводимости меняет зонную структуру в целом и такой подход оказывается неприменимым.

Обсудим теперь функцию распределения носителей заряда в плазме твердого тела. В металлах плотность электронов очень высока, $n_e \approx 10^{21} \div 10^{22} \text{ см}^{-3}$, и при обычных температурах они оказываются сильно вырожденными. Это является следствием сильного неравенства

$$\mathcal{E}_{Fe} \equiv \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_e^{2/3}}{2m^*} \approx (1 \div 3) \text{ эВ} \gg T. \quad (1.1.6)$$

Здесь \mathcal{E}_{Fe} – энергия Ферми для электронов, а m^* – их эффективная масса в металле, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$ – постоянная Планка. В дальнейшем различием между эффективной массой электронов в металлах и свободной массой электрона $m = 0,91 \cdot 10^{-27} \text{ г}$ мы будем пренебрегать. При условии (1.1.6) распределение электронов по скоростям является фермиевским, т.е. все нижние энергетические состояния до значения $\mathcal{E} < \mathcal{E}_{Fe} \equiv \frac{p_{Fe}^2}{2m}$ заняты, а поэтому

$$f_e = \begin{cases} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} & \text{при } p < p_{Fe}, \\ 0 & \text{при } p > p_{Fe}. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Очевидно, что средняя кинетическая энергия электронов равна энергии Ферми \mathcal{E}_{Fe} . Следует отметить, что функция (1.1.7), также как и

(1.1.4), нормирована на плотность электронов, т.е.

$$\int f_e d\mathbf{p} = n_e. \quad (1.1.8)$$

На рис.1.5 распределение Ферми (1.1.7) изображено в виде кривой 2.

Что касается полупроводников, то в них плотность носителей значительно ниже: $n_e \approx n_i \approx 10^{14} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$ и, как следствие, зоны проводимости в них значительно уже, меньше или порядка 1 эВ, а эффективные массы сильно отличаются от массы свободного электрона: как отмечалось выше, $m_+^* \approx m$ и $m_-^* \approx 0,1 \div 0,01m$. В результате и вырождение носителей имеет место не при всяких температурах. Полупроводники с малым числом носителей, как правило, не вырождены и носители заряда в них подчиняются максвелловскому распределению. В полупроводниках с большим числом носителей возможно их вырождение, в особенности, электронов при пониженных (по сравнению с комнатной) температурах.

Вряд ли стоит много говорить о важной роли металлов и полупроводников для человека. Они, естественно, не так распространены в природе как газовая плазма (достаточно упомянуть звезды) и не имеют такого глобального значения для жизни на Земле вообще, но их роль трудно переоценить. Вся техника как макроскопическая, так и микроскопическая базируется на металлах и полупроводниках, на использовании их свойств, которые определяются именно носителями заряда, т.е. с точки зрения нашего подхода – плазмой носителей заряда.

Из всего сказанного с очевидностью следует важность изучения свойств плазмы и, в первую очередь, электромагнитных. Если к этому добавить очень широкое распространение плазмы в природе – 99% состояния материи во Вселенной оказывается плазменным, то станет понятным, почему известный советский физик Д.А.Франк-Каменецкий назвал плазму 4-ым агрегатным состоянием вещества. В действительности плазма как газоразрядная, так и твердотельная – это газ заряженных частиц, и в редких случаях – жидкость заряженных частиц.

§ 1.2. Когда плазменную среду можно считать газом

Рассматривая плазму как газ электронов, ионов (либо отрицательных и положительных носителей заряда) и нейтральных частиц, прежде всего надо хорошо представлять характер взаимодействия частиц разного сорта. Великий Л.Больцман, когда рассматривал эту проблему для газа из нейтральных атомов и молекул, прекрасно понимал, что взаимодействие между частицами сильное, но возникает на очень малых расстояниях (столкновение), а находятся они на большом расстоянии друг от друга и поэтому взаимодействуют редко, т.е. редко сталкиваются. Считая частицы твердыми шариками радиуса $a \approx 10^{-8} \div 10^{-7}$ см и представляя тем самым потенциал взаимодействия в виде

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a, \\ 0, & r > a, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

в качестве параметра, определяющего применимость газового приближения ("газового" параметра) он принимал малость радиуса взаимодействия по сравнению со средним расстоянием между частицами

$$\eta_0 = \frac{a}{r_{\text{ср}}} = an_0^{1/3}. \quad (1.2.2)$$

Очевидно, что это неравенство должно выполняться и в газовой плазме для взаимодействий электрон-нейтрал и ион-нейтрал, поскольку нейтральную частицу по отношению к процессу столкновения с электроном и ионом с хорошей степенью точности также можно считать твердым шариком с радиусом $a \approx 10^{-7} \div 10^{-8}$ см.

Неравенство (1.2.2) означает, что частицы, между которыми происходят столкновения, т.е. электроны, ионы и нейтралы, находятся настолько далеко друг от друга, что эти столкновения происходят редко и основное время частицы движутся свободно, не испытывая никаких воздействий. Этот результат есть следствие малости радиуса взаимодействия (или размера) частиц по сравнению со средним расстоянием между ними.

Условие применимости газового приближения при учете кулоновского взаимодействия между заряженными частицами имеет несколько иной физический смысл. Взаимодействие это – дальнедействующее, а поэтому газовое приближение справедливо, если энергия этого

взаимодействия мала по сравнению со средней тепловой энергией самой частицы, т.е.

$$U(r_{\text{ср}}) \approx e^2 n_e^{1/3} \ll \langle \mathcal{E} \rangle = \begin{cases} T & \text{при } T > \mathcal{E}_{Fe}, \\ \mathcal{E}_{Fe} & \text{при } \mathcal{E}_{Fe} > T. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Таким образом, газовый параметр записывается в виде:

$$\eta_1 = \frac{e^2 n_e^{1/3}}{\langle \mathcal{E} \rangle} \ll 1, \quad (1.2.4)$$

где $n_e \approx n_i \approx n$. Такой газовый параметр, который справедлив как для газоразрядной, так и твердотельной плазмы, был впервые введен Л.Ландау в 1936г.

Для невырожденной плазмы, в которой $\langle \mathcal{E} \rangle \approx T \sim T_e \sim T_i$, условия (1.2.2) и (1.2.4) в физическом отношении подобны: чем плазма менее плотная, как нейтральная, так и заряженная ее компоненты, тем она идеальнее, тем лучше выполняется условие применимости газового приближения. А вот если какая-либо заряженная компонента плазмы вырождена, то все наоборот. Поскольку $\langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E}_F \sim n^{2/3}$, то оказывается, что средняя энергия кулоновского взаимодействия с ростом плотности растет медленнее (как $n^{1/3}$), чем средняя энергия частиц $\mathcal{E} \sim n^{2/3}$. В результате $\eta_1 \sim n^{-1/3}$, а следовательно, чем плотнее вырожденная компонента плазмы, например, электроны металла, тем лучше для нее выполняется газовое приближение.

Как уже отмечалось выше, условие (1.2.2) означает, что среднее расстояние между нейтральными частицами, $n^{-1/3}$, с которыми взаимодействуют частицы плазмы, значительно больше a – радиуса взаимодействия, которое является короткодействующим. В этом смысле условие (1.2.4) имеет полностью противоположный смысл. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим потенциал пробного точечного заряда q , помещенного в невырожденную (для простоты) плазму в точке $r = 0$. Он находится из уравнения Пуассона, которое с учетом нормировки (1.1.8) записывается в виде

$$\Delta \Phi = -4\pi q \delta(\mathbf{r}) - 4\pi e \left[n_e e^{-\frac{e\Phi}{T_e}} - n_i e^{+\frac{e\Phi}{T_i}} \right]. \quad (1.2.5)$$

Заряды электронов и ионов для простоты считаем одинаковыми по величине, а их плотности в отсутствие пробного заряда равными, соответственно, n_e и n_i . Предполагая $|e\Phi| \ll T_e, T_i$, из (1.1.3) находим:

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} e^{-r/r_D}, \quad (1.2.6)$$

где $r_D = \left\{ \sum_{e,i} (v_{T\alpha}^2 / \omega_{L\alpha}^2)^{-1} \right\}^{-1/2}$ – так называемый дебаевский радиус. На расстоянии $r < r_D$ сохраняется кулоновский закон взаимодействия частиц, за дебаевским же радиусом, $r > r_D$, взаимодействие экспоненциально мало. Теперь мы можем сравнить среднее расстояние между заряженными частицами $n^{-1/3}$ с дебаевским радиусом r_D и убедиться, что

$$r_D n^{1/3} \approx \sqrt{\frac{T}{e^2 n^{1/3}}} \sim \frac{1}{\eta_1^{1/2}} \gg 1, \quad (1.2.7)$$

т.е. дебаевский радиус в газовой плазме намного превосходит среднее расстояние между частицами, а поэтому внутри дебаевской сферы заключено много заряженных частиц. Легко показать, что это утверждение справедливо и для вырожденной плазмы (см. задачу 1 по теме I).

Таким образом, условие (1.2.4) по физической природе противоположно условию (1.2.2). Первое носит временной характер – время свободного пролета частиц велико по сравнению со временем взаимодействия, т.е. частицы большую часть времени не испытывают взаимодействия. В случае (1.2.4), напротив, частицы все время испытывают взаимодействие друг с другом; более того, каждая частица одновременно взаимодействует с большим числом других частиц, и в этом смысле частицы плотно упакованы. Но при этом взаимодействие слабое и оно не может сильно исказить их свободное движение. В этом смысле эта ”плотная упаковка” является слабой.

Очевидно, плазму можно рассматривать как сплошную материальную среду, а не простую совокупность заряженных частиц, если ее размеры намного превосходят дебаевский радиус. Только при этом последний имеет физический смысл.

В заключение приведем оценку условий применимости газового приближения (1.2.2) и (1.2.4) для различных видов плазмы. Прежде всего заметим, что при $a \approx 10^{-7} \div 10^{-8}$ см (размер атомов и молекул)

условие (1.2.2) выполняется вплоть до $n_0 \leq 10^{21} \div 10^{22} \text{ см}^{-3}$, т.е. в газах при нормальной температуре до давления в сотни атмосфер. Очевидно, что в газовой плазме как в ионосферной, так и в лабораторной это условие выполняется с большим запасом.

Несколько иное положение имеет место для условия (1.2.4). Так в ионосферной плазме, где $n_e \sim 10^6 \div 10^7 \text{ см}^{-3}$, а $T_e \approx 10^4 \text{ К}$ имеем $\eta_1 \leq 10^{-4} \ll 1$, т.е. условие газового приближения выполняется прекрасно. В обычных газоразрядных лампах дневного света, а также в разрядах, используемых в лабораторных экспериментах, где $n_e \approx 10^{10} \div 10^{14} \text{ см}^{-3}$, а $T_e \approx 10^4 \div 10^5 \text{ К}$, величина $\eta_1 \ll 1$. Но вот в разрядах в плотных газах, используемых в качестве источников света для накачки лазеров, как правило $n_e \approx 10^{18} \div 10^{19} \text{ К}$, а $T_e \approx 1 \div 10 \text{ эВ}$. При этом $\eta_1 \approx 0,1 \div 0,5$, что свидетельствует о значительном нарушении условия применимости газового приближения и существенном проявлении свойств неидеальности плазмы, или, как говорят, жидкостных эффектов.

В термоядерной плазме в установках с магнитным удержанием $n_e \approx 10^{14} \div 10^{15} \text{ см}^{-3}$, а $T_e \approx T_i \approx 10^8 \text{ К}$. В результате имеем $\eta_1 \approx 10^{-5} \ll 1$, т.е. идеальность плазмы гарантирована. Но вот в плазме инерциального термоядерного реактора, где стремятся получить $n_e \sim n_i \sim 10^{24} \div 10^{25} \text{ см}^{-3}$ при $T \approx 10^8 \text{ К}$, оказывается, что $\eta_1 \geq 0,01$, а может, и еще больше, что, по-видимому, потребует учета слабой неидеальности, в особенности, в условиях загрязнения (наличие многозарядных ионов) и охлаждения плазмы.

Наконец, совсем кратко об идеальности электронной плазмы металлов. Даже в хороших проводниках типа меди, где $n_e \approx 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и $\mathcal{E}_{Fe} \sim 1 \text{ эВ}$ имеем $\eta_1 \sim 1$, т.е. плазма металлов всегда неидеальна и правильнее говорить об электронной жидкости. Тем не менее оказывается, что применение газового приближения к металлам приводит к хорошим результатам с точки зрения сравнения с экспериментом. И это было продемонстрировано в 1957-58 годах созданием теории ферми-жидкости Силина-Ландау. Но эти проблемы, так же как и проблемы неидеальной газовой плазмы, которые в настоящее время бурно обсуждаются в литературе, выходят за рамки наших лекций. Что касается электронно-дырочной плазмы полупроводников, то при нормальной температуре они не вырождены, благодаря малости плотности числа носителей. По этой же причине в ней, как правило, хорошо выполняется условие газового приближения (1.1.2). Исклю-

чение может проявиться лишь при низких температурах, когда могут нарушаться оба этих условия.

Задачи по теме I

Задача 1. Показать, что дебаевская экранировка электростатического поля имеет место и в вырожденной электронной плазме металлов.

Решение.

Энергия свободных электронов $p^2/2m$ при наличии поля с потенциалом $\Phi(\mathbf{r})$ равна $(p^2/2m + e\Phi)$. В результате распределение Ферми (1.1.7) становится равно-распределением в сферическом слое между $p_{min} = \sqrt{2me\Phi}$ и $p_{max} = \sqrt{p_{Fe}^2 + 2me\Phi}$. Учитывая это обстоятельство, находим выражение для плотности электронов:

$$n_e = n_{0e} \left(1 + \frac{e\Phi}{\mathcal{E}_{Fe}} \right)^{3/2}, \quad (1)$$

где n_{0e} – плотность в отсутствие поля, совпадающая с плотностью нейтрализующего ионного фона.

Теперь не представляет труда записать уравнение Пуассона для потенциала статического пробного заряда q в такой плазме:

$$\Delta\Phi = -4\pi q\delta(\mathbf{r}) - 4\pi en_{0e} \left[\left(1 + \frac{e\Phi}{\mathcal{E}_{Fe}} \right)^{3/2} - 1 \right]. \quad (2)$$

Решение этого уравнения в пределе слабых полей, $|e\Phi| \ll \mathcal{E}_{Fe}$, дает экранированный кулоновский потенциал:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} e^{-r/r_{De}} \quad (3)$$

с дебаевским радиусом следующего вида:

$$r_{De} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{Fe}}{6\pi e^2 n_{0e}}}. \quad (4)$$

Задача 2. На диаграмме $n(T)$ электронной плазмы указать области вырождения носителей заряда и применимости газового приближения.

Решение.

Условие вырождения для электронной плазмы записывается в виде $\mathcal{E}_F > T$. На диаграмме зависимости $\ln n$ от $\ln T$ (рис. 1.6) условие

$$\mathcal{E}_F = T = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n^{2/3}}{2m} \quad (1)$$

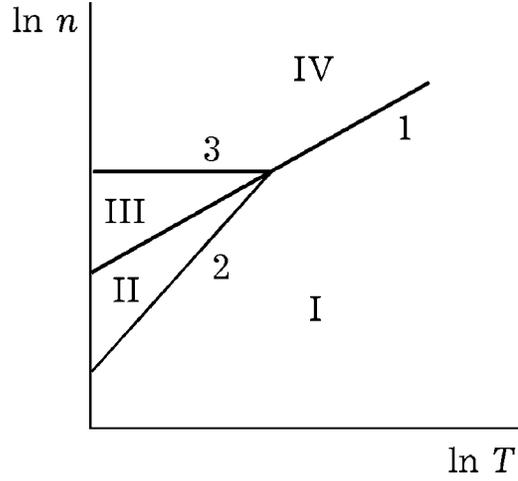


Рис. 1.6

дает прямую 1, разделяющую область вырожденной плазмы от невырожденной. Условие применимости газового приближения в невырожденном состоянии будет

$$\eta_{\text{кл}} = \frac{e^2 n^{1/3}}{T} < 1. \quad (2)$$

На той же диаграмме $\eta_{\text{кв}} = 1$ дает прямую 2. В вырожденном же состоянии для применимости газового приближения необходимо выполнение условия

$$\eta_{\text{кв}} = \frac{e^2 n^{1/3}}{\mathcal{E}_F} < 1. \quad (3)$$

Поскольку энергия Ферми не зависит от T , а зависит только от n , условие $\eta_{\text{кв}} = 1$ дает прямую 3, проходящую через точку, где пересекаются три прямые $\mathcal{E}_F = T = e^2 n^{1/3}$. Следовательно, в области I имеется невырожденная плазма со слабым взаимодействием, к которой применимо газовое приближение; в области II – невырожденная плазма с сильным взаимодействием, т.е. классическая жидкость; в области III – вырожденная плазма с сильным взаимодействием, т.е. квантовая жидкость. Как в области II, так и в области III газовое приближение неприменимо. Наконец, область IV изменения параметров n и T характеризует вырожденную плазму со слабым взаимодействием, к которой газовое приближение применимо.

Задача 3. Исследовать колебания однородной электронной плазмы, возникающие при малом смещении электронов относительно ионов.

Решение.

Обозначим вектор смещения электронов относительно ионов через \mathbf{S} . Плотность нескомпенсированного заряда электронов при смещении \mathbf{S} будет равна

$$\rho = \text{div } en_e \mathbf{S} = en_e \text{div } \mathbf{S}. \quad (1)$$

Этот заряд создает электрическое поле \mathbf{E} , величина которого определяется из уравнения Пуассона:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\pi n_e \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (2)$$

Отсюда, учитывая, что при $\mathbf{S} = 0$ и $\mathbf{E} = 0$, можно написать

$$\mathbf{E} = 4\pi e n_e \mathbf{S}. \quad (3)$$

Таким образом, поле \mathbf{E} параллельно смещению электронов \mathbf{S} и действует на каждый электрон с силой

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = -4\pi e^2 n_e \mathbf{S}, \quad (4)$$

стремящейся вернуть электрон в первоначальное равновесное положение. В результате имеем уравнение движения электрона вида

$$m \frac{d^2 \mathbf{S}}{dt^2} = -e\mathbf{E} = -4\pi e^2 n_e \mathbf{S}. \quad (5)$$

Это уравнение описывает колебания плазмы около равновесного положения ($\mathbf{S} = 0$) с частотой

$$\omega_0 = \omega_{Le} = \left(\frac{4\pi e^2 n_e}{m} \right)^{1/2}, \quad (6)$$

известной как электронная ленгмюровская частота.

ТЕМА II

**ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СРЕД
С ВРЕМЕННОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ
ДИСПЕРСИЕЙ****§ 2.1. Уравнения электромагнитного поля в среде и
граничные условия**

В предыдущей лекции уже подчеркивалось, что основной особенностью плазменных сред, таких как газовая плазма, плазма металлов, полуметаллов и полупроводников, является наличие в них большого числа свободных носителей зарядов. Именно это обстоятельство определяет сильную реакцию таких сред на воздействие электромагнитного поля. Под действием поля, которое первоначально может быть создано внешними источниками заряда и тока, приходят в движение носители заряда среды, в результате чего в ней возникают индуцированные заряды и токи. В свою очередь последние сами являются источниками поля и искажают поле, создаваемое внешними источниками.

Определение индуцированных токов и зарядов – задача конкретной модели среды. Однако, прежде чем перейти к обсуждению таких моделей плазмы, мы сформулируем основные положения электродинамики сред с учетом как временной, так и пространственной дисперсии и исходя из принципа причинности, общих соображений симметрии и физической измеряемости величин, найдем общие ограничения, которым должны удовлетворять рассматриваемые ниже модели плазменных сред.

Таким образом, в плазменных средах (а точнее, в любых материальных средах) имеет место сложное самосогласованное взаимодействие электромагнитного поля и носителей заряда. Уравнения поля в среде при этом должны учитывать индуцированные токи и заряды

и, следовательно, должны записываться в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi (\rho + \rho_0), \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0), & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Здесь \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля в среде, а \mathbf{B} – вектор магнитной индукции; они определяют известную силу Лоренца, действующую на пробный заряд q , движущийся в среде со скоростью \mathbf{v} :

$$\mathbf{F} = q \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\}. \quad (2.1.2)$$

Величины ρ_0 и \mathbf{j}_0 – это заданные внешние плотности заряда и тока, а ρ и \mathbf{j} – плотности, индуцированные в среде. Уравнения (2.1.1) есть не что иное как хорошо известные уравнения Максвелла, в которых в случае вакуума нужно положить $\rho = \mathbf{j} = 0$.

Образую дивергенцию от третьего уравнения системы (2.1.1), получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0).$$

Подставляя сюда значение $\operatorname{div} \mathbf{E}$ из первого уравнения системы (2.1.1), находим, что в отсутствие внешних источников (т.е. когда $\rho_0 = \mathbf{j}_0 = 0$) индуцированные в среде заряды и токи удовлетворяют уравнению непрерывности, выражающему закон сохранения количества электричества в среде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.1.3)$$

Этот закон остается в силе и при отличных от нуля ρ_0 и \mathbf{j}_0 , если только они сами удовлетворяют уравнению непрерывности вида (2.1.3).

Наличие скалярной связи (2.1.3) между индуцированными в среде зарядом ρ и током \mathbf{j} говорит о том, что в уравнениях поля для среды по сравнению с уравнениями поля для вакуума появляется на самом деле только одна дополнительная векторная величина \mathbf{j} (или три скалярных величины j_i , где $i = x, y, z$). Ради удобства вместо \mathbf{j} вводят величину \mathbf{D} , называемую вектором электрической индукции

и определяемую из соотношения

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{j}(\mathbf{r}, t'). \quad (2.1.4)$$

Используя это соотношение и уравнение непрерывности (2.1.3), из уравнений электромагнитного поля в среде (2.1.1) можно исключить плотности индуцированных зарядов и токов и записать эту систему в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho_0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Здесь уже явно видно, что в уравнениях поля в среде фигурирует только одна дополнительная векторная величина \mathbf{D} – вектор электрической индукции.

В литературе, особенно посвященной магнитным средам, распространена еще одна форма записи уравнений поля с введением вместо одной векторной величины (\mathbf{j} либо \mathbf{D}) двух дополнительных векторных величин \mathbf{D} и \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho_0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Эту форму записи можно получить из (2.1.1), если представить плотность индуцированного в среде тока \mathbf{j} в виде

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (2.1.7)$$

вводя при этом вектор намагниченности среды \mathbf{M} и вектор поляризуемости \mathbf{P} . Определив далее величины \mathbf{H} и \mathbf{D} с помощью соотношений

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad (2.1.8)$$

и используя уравнение непрерывности (2.1.3), переходим от системы (2.1.1) к системе (2.1.6).

Заметим, однако, что деление плотности индуцированного тока на два слагаемых (2.1.7) не является, вообще говоря, однозначной

процедурой. Поэтому неоднозначным оказывается в общем случае и определение величин \mathbf{H} и \mathbf{D} с помощью соотношений (2.1.8). Это обстоятельство побуждает нас в дальнейшем пользоваться в основном формой записи уравнений поля в виде (2.1.5), которая однозначно соответствует системе (2.1.1).

Для решения электродинамических задач система уравнений (2.1.1) или (2.1.5) должна быть дополнена граничными условиями, которые выводятся из самих уравнений поля путем их интегрирования по бесконечно тонкому пограничному слою раздела двух сред. "Бесконечно тонкий" пограничный слой означает, что характерные размеры пространственной неоднородности полей считаются намного превосходящими размер переходного слоя между двумя однородными в объеме материальными средами. Кроме того, при интегрировании системы уравнений поля предполагается, что поля \mathbf{E} и \mathbf{V} могут быть только конечными, либо терпеть конечные скачки. Это является следствием конечности величины силы Лоренца как измеряемой физической величины.

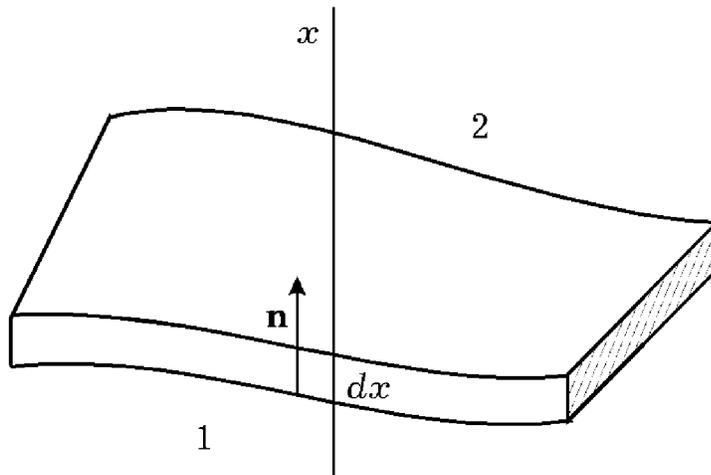


Рис. 2.1

Учитывая сказанное выше и считая для простоты поверхность раздела двух сред плоской и перпендикулярной оси x (см. рис. 2.1), из четвертого уравнения (2.1.5) получаем:

$$\int_1^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} dx + \int_1^2 \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dx = 0.$$

Здесь интегрирование ведется между бесконечно близко расположенными точками 1 и 2, лежащими соответственно в средах 1 и 2. Из конечности вектора \mathbf{B} и его тангенциальных (по отношению к границе раздела сред) производных следует, что второе слагаемое в полученном соотношении стремится к нулю. В результате получаем граничное условие вида

$$B_{2x} - B_{1x} = 0$$

или в общей форме:

$$\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n} = 0, \quad (2.1.9)$$

где \mathbf{n} – нормаль к границе раздела сред (в рассматриваемом случае она направлена вдоль оси Ox). Условие (2.1.9) означает непрерывность нормальной компоненты вектора \mathbf{B} на границе раздела сред.

Совершенно аналогично интегрирование второго уравнения (2.1.5) приводит к граничному условию, выражающему непрерывность тангенциальных компонент вектора напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = 0. \quad (2.1.10)$$

Новый момент возникает при интегрировании первого и третьего уравнений системы (2.1.5). Дело в том, что они содержат вектор индукции \mathbf{D} , который не является непосредственно измеряемой физической величиной. Более того, эта величина была введена для учета индуцированных электрическим полем токов и зарядов в среде. Поэтому она связана с полями \mathbf{E} и \mathbf{B} обобщенным функциональным соотношением и может, вообще говоря, обращаться в бесконечность и иметь произвольные скачки. В результате интеграл

$$\int_1^2 \left(\frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dx = \int_1^2 \operatorname{div} [\mathbf{n}[\mathbf{Dn}]] dx = -4\pi\sigma$$

уже не стремится к нулю. Поэтому следующее из первого уравнения (2.1.5) граничное условие запишется в виде

$$\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma_0), \quad (2.1.11)$$

где σ_0 – поверхностная плотность заряда, создаваемая внешними источниками. По аналогии величину

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \int_1^2 \left(\frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dx = \frac{1}{4\pi} \int_1^2 \operatorname{div} [\mathbf{n}[\mathbf{Dn}]] dx \quad (2.1.12)$$

мы будем называть поверхностной плотностью заряда, индуцированного в среде.

Наконец, интегрирование третьего уравнения системы (2.1.5) приводит к граничному условию

$$[\mathbf{n}, \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] = \mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{i} + \mathbf{i}_0), \quad (2.1.13)$$

где

$$\mathbf{i}_0 = \int_1^2 \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) dx \quad (2.1.14)$$

– поверхностная плотность тока внешних источников поля, а

$$\mathbf{i} = \frac{1}{4\pi} \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) dx = \int_1^2 \mathbf{j}(\mathbf{r}) dx \quad (2.1.15)$$

– поверхностная плотность тока, индуцированного в среде.

Соотношения (2.1.8) – (2.1.15) образуют полную систему граничных условий к уравнениям поля (2.1.5). Сформулированная граничная задача, однако, все еще не до конца определена, поскольку не определена величина вектора электрической индукции \mathbf{D} или плотность индуцированного в среде тока \mathbf{j} , если речь идет о системе уравнений поля в виде (2.1.1). Необходимо установить связь этих величин с причиной их появления – полями \mathbf{E} и \mathbf{B} . Сразу же заметим, что поле \mathbf{B} согласно третьему уравнению (2.1.5), не содержащему характеристик среды, выражается через \mathbf{E} . Поэтому без ограничения общности достаточно знать связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} либо \mathbf{j} и \mathbf{E} . Эти связи называются материальными уравнениями электродинамики – законом электрической индукции и дифференциальным законом Ома. В самом общем виде их можно записать как нелинейные функциональные соотношения:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)). \quad (2.1.16)$$

Установление явного вида этих соотношений является задачей конкретных моделей среды и, в частности, уравнений движения носителей заряда в материальных средах. Именно этой задачей мы и будем заниматься в последующих лекциях.

§ 2.2. Материальные уравнения линейной электродинамики. Тензор комплексной диэлектрической проницаемости

В пределе достаточно слабых полей в соотношениях (2.1.16) можно ограничиться линейной связью между \mathbf{D} и \mathbf{V} , либо \mathbf{j} и \mathbf{E} . Пределы применимости такого приближения находятся только в рамках нелинейной теории и об этом пойдет речь в дальнейшем при изучении конкретных плазменных сред. Здесь же без использования конкретной модели среды мы установим общие закономерности линейной электродинамики материальных сред.

С учетом пространственной и временной дисперсии и принципа причинности в наиболее общем виде линейные связи (2.1.16) следует писать так:

$$j_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \sigma_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') E_j(\mathbf{r}', t'), \quad (2.2.1)$$

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') E_j(\mathbf{r}', t').$$

В этих соотношениях, называемых материальными уравнениями линейной электродинамики, учтено, что состояние среды (индуцированные в ней заряды и токи) в заданный момент времени t и в заданной точке пространства \mathbf{r} может определяться значениями поля во все предшествующие моменты времени (в этом и состоит принцип причинности) и во всех точках пространства. В этом проявляются частотная (временная) и пространственная дисперсия среды. Физически частотная дисперсия связана с процессами релаксации носителей заряда в среде и с их инерцией, пространственная же дисперсия определяется процессами переноса носителей заряда в среде. Функции $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ и $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$, называемые функциями влияния и представляющие собой ядра интегральных соотношений (2.2.1), характеризуют эффективность передачи действия поля из одной точки пространства – времени в другую.

В случае пространственно однородных и стационарных во времени сред очевидно, что ядра интегральных соотношений (2.2.1) должны

быть разностными функциями своих аргументов, т.е.

$$j_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \sigma_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') E_j(\mathbf{r}', t'),$$
(2.2.2)

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') E_j(\mathbf{r}', t').$$

Это значительно облегчает анализ системы уравнений поля (2.1.1) либо (2.1.5). Действительно, эти уравнения в таком случае оказываются линейными интегро-дифференциальными уравнениями с разностными ядрами интегральных членов. Известно, что решения таких уравнений можно искать в виде плоских волн

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$
(2.2.3)

где ω – частота, \mathbf{k} – волновой вектор волны. Такая же зависимость принимается и для других входящих в уравнения поля величин.

Для плоских волн соотношения (2.2.2) принимают алгебраический вид:

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}),$$
(2.2.4)

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}),$$

где комплексный тензор проводимости $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и комплексный тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ связаны с функциями влияния следующими очевидными соотношениями:

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \sigma_{ij}(\mathbf{r}_1; t_1) e^{i\omega t_1 - i\mathbf{k}\mathbf{r}_1},$$
(2.2.5)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}_1; t_1) e^{i\omega t_1 - i\mathbf{k}\mathbf{r}_1},$$

где $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, а $t_1 = t - t'$. Зависимость тензоров $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от частоты ω определяет частотную (временную) дисперсию, а зависимость от волнового вектора \mathbf{k} – пространственную дисперсию электромагнитного поля в среде¹.

¹Термин "пространственная дисперсия" диэлектрической проницаемости впервые был введен М.Е.Герценштейном в 1952 году.

Очевидно, что тензоры $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ не являются независимыми. Действительно, используя (2.1.4), получаем:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}). \quad (2.2.6)$$

Имея в виду связь (2.2.6), в дальнейшем мы в основном будем пользоваться только понятием тензора диэлектрической проницаемости и записью уравнений поля в форме (2.1.5).

В случае изотропной среды, свойства которой не зависят от направления в пространстве, или, другими словами, в которой нет выделенных направлений, тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ является функцией одного вектора \mathbf{k} , причем функцией четной, не меняющейся при замене $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$. Такой тензор, очевидно, можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k). \quad (2.2.7)$$

Это означает, что в изотропной среде только две компоненты тензора являются независимыми, и поэтому все компоненты выражаются через две скалярные функции $\varepsilon^l(\omega, k)$ и $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$, зависящие только от модуля $k = |\mathbf{k}|$. Нетрудно видеть, что первое слагаемое выделяет переменную по отношению к направлению волнового вектора \mathbf{k} компоненту поля, вследствие чего скаляр $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ называется поперечной диэлектрической проницаемостью изотропной среды, а второе слагаемое – продольную компоненту, причем скаляр $\varepsilon^l(\omega, k)$ называется продольной диэлектрической проницаемостью. То, что для описания электромагнитных свойств изотропной среды при учете пространственной дисперсии необходимо введение двух скалярных величин, соответствует тому очевидному обстоятельству, что физические процессы в среде могут происходить неодинаково для случаев, когда поле волны и, соответственно, вызванное им движение частиц среды направлены либо поперек, либо вдоль направления распространения волны.

Аналогичным образом записывается и тензор проводимости $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ в изотропной среде, причем согласно (2.2.6)

$$\varepsilon^{l,tr}(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma^{l,tr}(\omega, k). \quad (2.2.8)$$

Заметим, что тензоры $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)$ и $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t)$ являются действительными функциями своих аргументов, так как они связывают между собой

действительные величины $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Этого уже нельзя сказать о тензорах $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ даже как о функциях действительных переменных ω и \mathbf{k} . Из действительности функций $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ с учетом (2.2.5) следует, что

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \sigma_{ij}^*(-\omega, -\mathbf{k}), \\ \operatorname{Re} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \operatorname{Re} \sigma_{ij}^*(-\omega, -\mathbf{k}), \\ \operatorname{Im} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= -\operatorname{Im} \sigma_{ij}^*(-\omega, -\mathbf{k}).\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

Аналогичным свойством обладает и тензор $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, но только с заменой $\operatorname{Re} \leftrightarrow \operatorname{Im}$.

Из чисто тензорных свойств диэлектрической проницаемости вытекает еще одно ее общее свойство. Тензор второго ранга как функция только одного вектора \mathbf{k} при зеркальном отражении системы координат не меняет знака. Отсюда следует, что

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{k}).\tag{2.2.10}$$

Если тензор диэлектрической проницаемости зависит еще от магнитного поля \mathbf{B}_0 (среда помещена во внешнее заданное магнитное поле), то вместо (2.2.10) имеем

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{B}_0) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{k}, -\mathbf{B}_0).\tag{2.2.11}$$

Наконец, для изотропной среды из (2.2.9) имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \sigma^{l, tr}(\omega, k) &= \operatorname{Re} \sigma^{l, tr}(-\omega, k), \\ \operatorname{Im} \sigma^{l, tr}(\omega, k) &= -\operatorname{Im} \sigma^{l, tr}(-\omega, k).\end{aligned}\tag{2.2.12}$$

Соотношение (2.2.10) при этом выполняется автоматически.

В заключение настоящего параграфа попытаемся установить связь магнитной проницаемости среды, которую приходится вводить при использовании системы уравнений поля в форме (2.1.6), с тензором диэлектрической проницаемости, определенным соотношениями (2.2.2) и (2.2.5). Ограничимся рассмотрением изотропной среды, для которой только и удастся однозначным образом установить эту связь.

Для изотропной однородной среды уравнения поля (2.1.6) при подстановке в них решений в виде плоских волн (2.2.3) сводятся к систе-

ме алгебраических уравнений. Чтобы замкнуть эту систему воспользуемся материальными уравнениями в виде¹

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) = \mu(\omega, k)\mathbf{H}(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.2.13)$$

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega, k)\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}),$$

где $\varepsilon(\omega, k)$ и $\mu(\omega, k)$ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости изотропной плазменной среды. Из сравнения полученной системы уравнений с системой, полученной из (2.1.5) при подстановке (2.2.3) с учетом (2.2.7), легко находим искомую связь между тензором диэлектрической проницаемости изотропной среды в виде (2.2.7) и диэлектрической и магнитной проницаемостями, фигурирующими в (2.2.13):

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, k) &= \varepsilon^l(\omega, k), \\ 1 - \frac{1}{\mu(\omega, k)} &= \frac{\omega^2}{c^2 k^2} [\varepsilon^{tr}(\omega, k) - \varepsilon^l(\omega, k)]. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Из соотношений (2.2.14) следуют два весьма важных вывода. Действительно, легко показать непосредственным интегрированием первого уравнения поля (2.1.5) для пробного точечного заряда $\rho_0(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, что потенциал Φ поля такого заряда дается выражением ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$):

$$\Phi(r) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})} = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}}{k^2 \varepsilon^l(\omega, k)}. \quad (2.2.15)$$

Отсюда видно, что в статическом пределе, т.е. при $\omega \rightarrow 0$, продольная диэлектрическая проницаемость изотропной термодинамически равновесной среды $\varepsilon^l(\omega, k)$ конечна (в более общем случае анизотропной среды при $\omega \rightarrow 0$ конечна свертка тензора $k_i k_j \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$).

Более того, из выражения (2.2.15) в случае вакуума, когда $\varepsilon^l(\omega, k) \rightarrow 1$, получаем хорошо известную формулу для кулоновского потенциала точечного заряда:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (2.2.16)$$

¹Строго говоря, такая запись не является общей, поскольку следовало бы даже в изотропной среде вводить тензоры $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\mu_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ в виде (2.2.7).

Если же $\varepsilon^l(0, k) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}$, то из (2.2.15) получаем экранированный кулоновский потенциал:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{R} e^{-R/r_D}, \quad (2.2.17)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$. Именно такое положение имеет место для термодинамически равновесных плазменных сред.

Обратимся теперь ко второму соотношению (2.2.14). Из него видно, что в статическом пределе магнитная проницаемость изотропной среды может быть отлична от единицы, если только тензор диэлектрической проницаемости имеет полюс второго порядка при $\omega \rightarrow 0$. В любой классической модели термодинамически равновесной среды статическая магнитная проницаемость должна тождественно равняться единице, поскольку свободная энергия системы носителей заряда в этом случае не зависит от магнитного поля и, следовательно, среда не обладает магнитными свойствами (теорема Бора – Ван-Левен). Магнитное поле статического тока в таких средах не может отличаться от поля в вакууме, а следовательно, их поперечная диэлектрическая проницаемость не может иметь полюса по ω порядка выше первого. Таким образом, появление магнитных свойств у сред в термодинамическом равновесии есть явление чисто квантовое, так же как и свойство сверхпроводимости. В изотропных магнитных и сверхпроводящих средах поперечная диэлектрическая проницаемость должна обладать полюсом второго порядка при $\omega \rightarrow 0$, поскольку продольная диэлектрическая проницаемость, как уже отмечалось выше, в статическом пределе особенностей не имеет. Именно так обстоит дело в сверхпроводниках и магнетиках, причем, поскольку мнимая часть диэлектрической проницаемости является нечетной функцией частоты, то полюсом второго порядка обладает ее действительная часть. Напротив, в случае классических проводников, таких как металлы и полупроводники, особенность имеет мнимая часть поперечной диэлектрической проницаемости, причем эта особенность соответствует полюсу первого порядка при $\omega \rightarrow 0$ и обусловлена наличием конечной активной проводимости у этих сред.

Наконец отметим, что в противоположном пределе очень высоких частот тензор диэлектрической проницаемости любых сред должен стремиться к единичному тензору, т.е. к проницаемости вакуума. Это очевидным образом следует из того факта, что при очень высоких ча-

стотах среда не успевает реагировать на действие поля и ведет себя как вакуум. Таким образом, при $\omega \rightarrow \infty$ $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow \delta_{ij}$. Легко понять, что и при $k \rightarrow \infty$ $\varepsilon_{ij}(\omega, k) \rightarrow \delta_{ij}$, так как в этом пределе расстояние, на которое передается информация о действии поля, стремится к нулю, и передача происходит практически мгновенно.

§ 2.3. Энергия электромагнитного поля в среде

Продолжая изучение общих свойств тензора диэлектрической проницаемости плазмopodobных сред, рассмотрим вопрос о диссипации энергии электромагнитного поля в такой среде. Внешние источники, создавая поле в среде, тем самым меняют ее энергию, что обусловлено работой поля над внешними источниками. Из уравнений поля (2.1.5) легко находим эту работу:

$$\frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{B}] \right\} = -\mathbf{E}\mathbf{j}_0. \quad (2.3.1)$$

Интегрируя это соотношение по большому объему и пренебрегая возникающим при этом поверхностным интегралом вследствие ограниченности полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , окончательно находим:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dA}{dt} = -\int d\mathbf{r} \mathbf{j}_0 \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r} \left(\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (2.3.2)$$

Здесь под W понимается энергия электромагнитного поля в среде, а под A – работа поля над внешними источниками. Естественно, их изменения во времени взаимно компенсируются, что и записано в (2.3.2).

Представим поле в среде в виде плоских волн, и, учитывая его действительность, запишем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (2.3.3)$$

В таком же виде представим поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$. Подставляя такие разложения в (2.3.2) и производя усреднение во времени, получим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{i\omega}{4\pi} \int d\mathbf{r} (\mathbf{E}\mathbf{D}^* - \mathbf{D}\mathbf{E}^*) = \frac{i\omega V}{4\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D}^* - \mathbf{D}\mathbf{E}^*), \quad (2.3.4)$$

где V – достаточно большой объем среды.

Учтем теперь материальное уравнение (2.2.4) и соотношение (2.2.9). При этом из (2.3.4) получаем выражение для плотности энергии поля, диссипируемой в среде в единицу времени:

$$\frac{Q}{V} = \frac{1}{V} \frac{dW}{dt} = \frac{i\omega}{4\pi} [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})] E_i E_j^*. \quad (2.3.5)$$

Из этого соотношения следует весьма важный вывод о свойствах материальных сред: если тензор диэлектрической проницаемости среды при действительных ω и \mathbf{k} является эрмитовым, т.е. $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}^*(\omega, \mathbf{k})$, то $Q = 0$. Это означает, что электромагнитная волна в такой среде не поглощается. За поглощение электромагнитных волн в материальной среде ответственна антиэрмитовая часть тензора диэлектрической проницаемости:

$$\frac{Q}{V} = q = \frac{\omega}{2\pi} \varepsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k}) E_i E_j^*. \quad (2.3.6)$$

Соотношения (2.3.5) и (2.3.6) принимают простой вид в случае изотропной среды, что позволяет сделать еще более определенные выводы. Имеем

$$q = \frac{\omega}{2\pi} \{ \text{Im} \varepsilon^l(\omega, k) |\mathbf{E}^l|^2 + \text{Im} \varepsilon^{tr}(\omega, k) |\mathbf{E}^{tr}|^2 \}. \quad (2.3.7)$$

Первое слагаемое описывает поглощение в среде продольного поля, $\mathbf{E}^l = \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E})/k^2$, а второе – поглощение поперечного поля, $\mathbf{E}^{tr} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^l$.

Если изотропная среда находится в состоянии термодинамического равновесия, то очевидно, что в ней энергия электромагнитной волны может только диссипировать, поглощаясь средой. А поэтому в такой среде при $\omega > 0$ всегда

$$\text{Im} \varepsilon^l(\omega, k) > 0, \quad \text{Im} \varepsilon^{tr}(\omega, k) > 0. \quad (2.3.8)$$

Нарушение какого-либо из этих условий означает, что среда может отдавать свою энергию электромагнитной волне, поскольку в ней q может стать отрицательной. Это возможно только в случае термодинамически неравновесной среды, обладающей избыточной энергией.

В случае непоглощающей среды можно определить и энергию электромагнитного поля, поскольку она не меняется со временем. Для ее определения, однако, недостаточно ограничиваться рассмотрением строго монохроматической волны типа (2.3.3). Реально поле в среде

всегда состоит из суперпозиции монохроматических полей с частотами, близкими к некоторому значению ω . Поэтому вместо (2.3.3) следует писать

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}, t)e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (2.3.9)$$

При этом в разложении Фурье поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ по времени амплитуда Фурье $\mathbf{E}(\omega', \mathbf{r})$ имеет резкие максимумы вблизи $\omega' = \pm\omega$. Учитывая это и аналогичные соотношения для $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}, t)$ и $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}, t)$, из (2.3.4) после усреднения по времени с точностью до членов первого порядка по $\omega \pm \omega'$ получим

$$q = \frac{1}{V} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} (B_i^* B_i) + \frac{1}{4\pi} E_i^* \frac{\partial E_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{1}{4\pi} E_j \frac{\partial E_i^*}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ji}^*(\omega, \mathbf{k}) + \frac{i\omega}{4\pi} [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})] E_i E_j^*, \quad (2.3.10)$$

где зависимость $\mathbf{E}, \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}, t)$ для сокращения записи опущена. В случае строго монохроматического поля, когда величины \mathbf{E} и \mathbf{B} не зависят от времени, это соотношение переходит в (2.3.5), т.е. отличным от нуля остается лишь последнее слагаемое. Если же поле не строго монохроматическое, а среда непоглощающая, т.е. $\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})$, то последним слагаемым в (2.3.10), напротив, можно пренебречь. В результате получим

$$q = \frac{dU}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[B_i^* B_i + E_i^* E_j \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right]. \quad (2.3.11)$$

Величину U при этом следует рассматривать как плотность энергии электромагнитного поля в непоглощающей среде.

В случае изотропной среды выражение для U упрощается и сводится к виду

$$U = \frac{|\mathbf{E}^l|^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon^l(\omega, k) + \frac{|\mathbf{E}^{tr}|^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \left[\varepsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right]. \quad (2.3.12)$$

Отсюда мы вновь можем сделать определенные выводы о диэлектрической проницаемости изотропных сред. В частности, в случае термодинамически равновесной среды энергия поля должна быть положительной, а поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon^l(\omega, k) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \left[\varepsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right] > 0. \quad (2.3.13)$$

В термодинамически неравновесной среде эти неравенства могут нарушаться. При этом говорят о волнах с отрицательной энергией соответственно для продольного (при нарушении первого из неравенств (2.3.13)) и поперечного (при нарушении второго неравенства (2.3.13)) электромагнитного поля. Отметим, что нарушение любого из неравенств (2.3.13) является также признаком неустойчивости среды, поскольку возрастание поля, согласно (2.3.12), при этом сопровождается уменьшением ее энергии. Отметим также, что неравенства (2.3.13), так же как и (2.3.8), справедливы только в пределе высоких частот, поскольку они получены из усредненных соотношений (2.3.12) и (2.3.7) соответственно.

§ 2.4. Электромагнитные волны в среде. Начальная и граничная задачи электродинамики

Как известно из общего курса теории поля, в вакууме в отсутствие внешних источников могут существовать электромагнитные волны вида $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, где ω – частота, а \mathbf{k} – волновой вектор волны. В вакууме ω и \mathbf{k} – действительные величины и связаны между собой простым дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = k^2 c^2. \quad (2.4.1)$$

Электромагнитные волны в вакууме – это нетривиальные решения уравнений поля (2.1.1) при $\rho = \rho_0 = 0$ и $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 = 0$, а соотношение (2.4.1) есть не что иное, как условие существования таких решений.

Очевидно, что электромагнитные волны могут существовать и в материальной среде. Действительно, из системы уравнений поля (2.1.5) в отсутствие внешних источников, т.е. при $\rho_0 = 0$ и $\mathbf{j}_0 = 0$, для решений вида $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ получаем

$$\begin{aligned} [\mathbf{kE}] &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, & k_i \varepsilon_{ij} E_j &= 0, \\ [\mathbf{kB}]_i &= -\frac{\omega}{c} \varepsilon_{ij} E_j, & k_i B_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

При написании этой системы мы воспользовались материальным уравнением (2.2.4).

Условие разрешимости однородной системы (2.4.2) и представляет собой дисперсионное уравнение, связывающее ω и \mathbf{k} для собственных электромагнитных колебаний материальной среды:

$$\Lambda(\omega, \mathbf{k}) \equiv \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0. \quad (2.4.3)$$

Решения этого уравнения, вообще говоря, комплексны, т.е. комплексными являются ω и \mathbf{k} . Это означает, с одной стороны, что электромагнитные волны, возбужденные в среде каким-либо источником поля, после выключения источника затухают, либо нарастают со временем. С другой, что электромагнитные волны, генерируемые источником в какой-либо области пространства, затухают, либо нарастают, распространяясь в среде. В первом из этих случаев говорят о начальной задаче, а во втором – о граничной задаче электродинамики материальных сред.

В случае изотропной среды с диэлектрической проницаемостью вида (2.2.7) уравнение (2.4.3) распадается на два:

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, k) &= 0, \\ \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k) \right]^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

описывающие соответственно продольные, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$, и поперечные, $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ волны, причем последние дважды вырождены, что соответствует двум возможным поляризациям поля. Заметим, кстати, что продольные волны возможны только в материальной среде, в вакууме $\varepsilon^l = \varepsilon^{tr} = 1$ и поэтому возможны только поперечные электромагнитные волны со спектром частот (2.4.1).

Деление волн на чисто продольные, а следовательно, потенциальные, и поперечные – непотенциальные, строго возможно лишь в изотропной среде. Однако, и в анизотропной среде в области малых фазовых скоростей, когда $\omega \ll kc$, среди электромагнитных волн имеются волны, которые с хорошей степенью точности являются потенциальными. Действительно, если в уравнениях поля (2.1.5), либо (2.4.2) перейти к пределу $c \rightarrow \infty$, то электрическое поле окажется потенциальным, $\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\Phi$, а следовательно, $\mathbf{V} = 0$. При этом из второго уравнения системы (2.4.2) получаем, что

$$k_i \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) k_j \Phi = 0. \quad (2.4.5)$$

Условие существования нетривиальных решений этого уравнения и представляет собой дисперсионное уравнение почти продольных, или, как говорят, квазипродольных волн в анизотропной среде и записывается в виде

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (2.4.6)$$

Саму же величину $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ называют продольной диэлектрической проницаемостью анизотропной среды. В случае изотропной среды уравнение (2.4.6), как и следовало ожидать, совпадает с первым уравнением (2.4.4), причем оно становится точным уравнением для собственных волн среды.

Как уже отмечалось выше, дисперсионное уравнение (2.4.3) (а также (2.4.4) и (2.4.6)) устанавливает связь между ω и \mathbf{k} для электромагнитных волн, которые могут существовать в среде в отсутствие внешних источников поля, или, иными словами, для собственных волн среды. С помощью дисперсионного уравнения можно при заданном \mathbf{k} определить комплексную частоту $\omega(\mathbf{k})$ или целый набор собственных частот $\omega_n(\mathbf{k})$, называемых спектром собственных электромагнитных колебаний среды. При этом говорят о временном развитии начальных возмущений с волновым вектором \mathbf{k} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \sim \sum_n e^{-i\omega_n(\mathbf{k})t} \mathbf{E}(0, \mathbf{k}). \quad (2.4.7)$$

Если среди корней дисперсионного уравнения (2.4.3) нет корней с положительной мнимой частью, т.е. для всех корней $\text{Im } \omega_n(\mathbf{k}) \leq 0$, то функция (2.4.7) не нарастает во времени, а наоборот, может затухать со временем, если для всех корней $\text{Im } \omega_n(\mathbf{k}) < 0$. В таких случаях говорят о затухании со временем начальных возмущений среды и поля, причем величины $\delta_n = \text{Im } \omega_n(\mathbf{k})$ характеризуют скорость их временного затухания и называются декрементами затухания собственных мод колебаний.

Напротив, если среди корней дисперсионного уравнения (2.4.3) есть хоть один корень с $\text{Im } \omega_n(\mathbf{k}) > 0$, то соответствующий член в сумме (2.4.7) будет нарастать со временем, а следовательно, будет расти со временем и поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. При этом говорят о неустойчивости среды и нарастании в ней начальных возмущений. Величину же $\delta_s = \text{Im } \omega_s(\mathbf{k})$ называют инкрементом нарастания колебаний. Следует подчеркнуть, что наличие у дисперсионного уравнения (2.4.3) корня с положитель-

ной мнимой частью является достаточным условием неустойчивости среды.

Поскольку дисперсионное уравнение полностью определяется диэлектрической проницаемостью среды $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, то из сказанного выше можно сделать определенные выводы об ее свойствах. Так, пусть среда либо слабопоглощающая, либо слабонеустойчивая, т.е. начальные возмущения в ней либо слабо затухают, либо слабо нарастают со временем. Это имеет место только в условиях, когда $\text{Im } \Lambda \ll \text{Re } \Lambda$. При этом приближенное решение уравнения (2.4.3) можно записать в виде

$$\omega \rightarrow \omega + i\delta, \quad (2.4.8)$$

где $\omega(\mathbf{k})$ – действительные корни уравнения

$$\text{Re } \Lambda(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (2.4.9)$$

и характеризуют спектр частот электромагнитных колебаний среды, а

$$\delta(\mathbf{k}) = -\frac{\text{Im } \Lambda(\omega, \mathbf{k})}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re } \Lambda(\omega, \mathbf{k})} \quad (2.4.10)$$

представляет собой декремент затухания (инкремент нарастания) этих колебаний. При $\delta(\mathbf{k}) < 0$ колебания затухают, и это означает, что происходит диссипация энергии колебаний в среде и среда нагревается. Если же $\delta(\mathbf{k}) > 0$, то, напротив, среда отдает свою избыточную энергию колебаниям, которые вследствие этого нарастают. Очевидно, это возможно только в термодинамически неравновесной и неустойчивой среде.

В случае изотропной среды соотношения (2.4.9) и (2.4.10) для продольной и поперечной волн соответственно записываются в виде

$$\text{Re } \varepsilon^l(\omega, k) = 0, \quad \delta^l(k) = -\frac{\text{Im } \varepsilon^l(\omega, k)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re } \varepsilon^l(\omega, k)}, \quad (2.4.11)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \text{Re } \varepsilon^{tr}(\omega, k), \quad \delta^{tr}(k) = -\frac{\text{Im } \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \text{Re } \varepsilon^{tr}(\omega, k)}.$$

Отсюда для термодинамически равновесной среды с учетом неравенств (2.3.8) получаем новые ограничения на вид продольной и по-

перечной проницаемостей, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \varepsilon^l(\omega, k) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \operatorname{Re} \varepsilon^{tr}(\omega, k) > 0. \quad (2.4.12)$$

Если в начальной задаче находятся комплексные решения дисперсионного уравнения $\omega_n(\mathbf{k})$ при действительных значениях \mathbf{k} , то при решении граничной задачи определяют комплексную проекцию $\mathbf{k}(\omega)$ на заданное направление в предположении, что ω и две другие ортогональные проекции $\mathbf{k}(\omega)$ действительны. Пространственное изменение поля в среде при этом определяется выражением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \sim \sum_n e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_n(\omega)\mathbf{r}} \mathbf{E}(0, \mathbf{k}_n), \quad (2.4.13)$$

где $\mathbf{k}_n(\omega)$ удовлетворяет дисперсионному уравнению (2.4.3), либо (2.4.4) в случае изотропной среды.

В общем случае $\mathbf{k}_n(\omega)$ – комплексные величины. Если $\operatorname{Im} k_{n\theta}(\omega)$ (здесь θ – угол между заданным направлением и вектором $\mathbf{k}_n(\omega)$), то волна будет затухать в заданном направлении, в противном случае волна нарастает. Однако делать заключение об устойчивости среды на основании знака $\operatorname{Im} k_{n\theta}(\omega)$ нельзя. Вопрос об устойчивости среды правильнее решать, исходя из анализа начальной задачи, определяя корни дисперсионного уравнения (2.4.3) относительно ω . Но если заранее уже известно, что среда устойчива, т.е. $\operatorname{Im} \omega(\mathbf{k}) < 0$, то из решения граничной задачи характер пространственного затухания поля в заданном направлении определяется по величине $\operatorname{Im} k_{n\theta}(\omega)$. И наоборот, для неустойчивой среды величина $\operatorname{Im} k_{n\theta}(\omega)$ определяет характер пространственного нарастания поля.

Для слабозатухающих либо слабонарастающих волн в условиях, когда $\operatorname{Im} \Lambda(\omega, \mathbf{k}) \ll \operatorname{Re} \Lambda(\omega, \mathbf{k})$, решения уравнения (2.4.3) следует искать в виде

$$k_\theta(\omega) = \operatorname{Re} k_\theta(\omega) + i \operatorname{Im} k_\theta(\omega), \quad (2.4.14)$$

где $\operatorname{Re} k_\theta(\omega)$ – действительные корни уравнения (2.4.9). Величина $\operatorname{Im} k_\theta(\omega)$ при этом определяется выражением

$$\operatorname{Im} k_\theta(\omega) = -\frac{\operatorname{Im} \Lambda(\omega, \mathbf{k})}{\frac{\partial}{\partial k_\theta} \operatorname{Re} \Lambda(\omega, \mathbf{k})}. \quad (2.4.15)$$

В случае изотропной среды это выражение для продольных и поперечных волн соответственно записывается в виде

$$\operatorname{Im} k_{\theta}^l(\omega) = -\frac{\operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k)}{\frac{\partial}{\partial k_{\theta}} \operatorname{Re} \varepsilon^l(\omega, k)}, \quad (2.4.16)$$

$$\operatorname{Im} k_{\theta}^{tr}(\omega) = -\frac{\operatorname{Im} \varepsilon^{tr}(\omega, k)}{\frac{\partial}{\partial k_{\theta}} \left[\operatorname{Re} \varepsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right]}.$$

Нетрудно установить связь между величиной $\delta(\mathbf{k})$, характеризующей временное поведение малых возмущений в среде, и величиной $\operatorname{Im} k_{\theta}(\omega)$, определяющей пространственное распределение этих возмущений. Для этого удобно ввести понятие групповой скорости, которая согласно (2.4.9) дается соотношением

$$\mathbf{v}_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = -\frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \operatorname{Re} \Lambda(\omega, \mathbf{k})}{\frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \Lambda(\omega, \mathbf{k})}. \quad (2.4.17)$$

Сравнивая теперь (2.4.10) и (2.4.15), легко находим

$$\operatorname{Im} k_{\theta}(\omega) = -\frac{\delta(\theta)}{v_{\text{гр}}(\theta)}, \quad (2.4.18)$$

где $v_{\text{гр}}(\theta) = \frac{\partial \omega}{\partial k_{\theta}}$ – проекция вектора групповой скорости волны на заданное направление.

В заключение заметим, что групповая скорость волны (2.4.17) может не совпадать по величине и направлению с фазовой скоростью, которая для слабопоглощающей (слабонеустойчивой) среды записывается в виде

$$\mathbf{v}_{\text{ф}} = \frac{\omega \mathbf{k}}{k^2} \quad (2.4.19)$$

и по направлению совпадает с направлением волнового вектора \mathbf{k} . Если $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ и $\mathbf{v}_{\text{ф}}$ параллельны, то говорят о прямой волне, или волне с положительной дисперсией. Если же $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ и $\mathbf{v}_{\text{ф}}$ имеют противоположные направления, то такую волну называют обратной, или волной с отрицательной дисперсией. Более строго такое деление волн на прямые и обратные следует проводить по знаку скалярного произведения ($\mathbf{v}_{\text{гр}} \mathbf{v}_{\text{ф}}$): если он положителен, то мы имеем прямую волну, если отрицателен, то волна обратная.

§ 2.5. Электромагнитное поле внешних источников в среде. Соотношения Крамерса-Кронига

Продолжая изучение общих свойств диэлектрической проницаемости материальных сред, рассмотрим задачу о поле внешних источников в среде. Эта задача имеет непосредственное отношение к потерям энергии быстрых заряженных частиц в среде, или, как говорят иначе, к характеристическим потерям быстрых заряженных частиц в среде. Источники поля будем считать заданными в виде $\rho_0(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)$. В частном случае быстрой заряженной частицы с зарядом q эти источники запишутся так:

$$\rho_0(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad (2.5.1)$$

где \mathbf{v} – скорость частицы.

Произведя фурье-преобразование

$$A(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.5.2)$$

систему уравнений поля (2.1.5) легко свести к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{0i}(\omega, \mathbf{k}). \quad (2.5.3)$$

Здесь $\mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k})$ – фурье-образ плотности тока внешних источников $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)$. При получении системы (2.5.3) мы воспользовались материальным уравнением поля (2.2.4).

Уравнения (2.5.3) легко решаются для изотропной среды, когда тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ имеет вид (2.2.7). Получаем

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi i \omega}{k^2} \left\{ \frac{k_i k_j}{\omega^2 \varepsilon^l(\omega, k)} - \frac{k^2 \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right)}{c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)} \right\} j_{0j}(\omega, \mathbf{k}) \quad (2.5.4)$$

Первое слагаемое описывает продольное поле в среде, создаваемое источником, а второе – поперечное электромагнитное поле. Подставив это выражение в формулу для преобразования Фурье (2.5.2), находим пространственно-временное распределение поля, создаваемого внешним источником.

Перейдем теперь к вопросу об общих свойствах тензора диэлектрической проницаемости изотропной среды, которые следуют из полученных выше соотношений. Прежде всего заметим, что согласно (2.5.4) электромагнитное поле в среде полностью определяется источником поля $\mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k})$, который мы можем задавать извне. В этом смысле именно источник является причиной, а поле следствием. Величины

$$\frac{1}{\varepsilon^l(\omega, k)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)}, \quad (2.5.5)$$

связывающие причину со следствием, называются функциями отклика среды на внешнее воздействие. Именно эти величины, являясь причинными функциями во времени, должны обладать свойствами аналитичности по частоте и не иметь полюсов в верхней полуплоскости комплексной ω . Поэтому эти функции должны удовлетворять интегралу Коши, или, другими словами, должны выполняться формулы Крамерса-Кронига

$$\frac{1}{\varepsilon^l(\omega, k)} - 1 = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\frac{1}{\varepsilon^l(\omega', k)} - 1}{\omega' - \omega}, \quad (2.5.6)$$

$$\frac{1}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{(\omega' - \omega)} \frac{1}{[k^2 c^2 - \omega'^2 \varepsilon^{tr}(\omega', k)]}.$$

Эти соотношения связывают действительные части диэлектрических проницаемостей $\varepsilon^l(\omega, k)$ и $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ с их мнимыми частями и тем самым отражают тот факт, что эти величины не являются полностью независимыми. Другими словами, зная мнимую часть $\varepsilon^l(\omega, k)$ и $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$, можно найти действительную, и наоборот.

Мы здесь рассмотрим следствия, вытекающие из соотношений (2.5.6) в стационарном пределе, т.е. при $\omega \rightarrow 0$. Из первого соотношения следует, что

$$\frac{1}{\text{Re} \varepsilon^l(\omega, k)} - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} \text{Im} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega', k)}. \quad (2.5.7)$$

В термодинамически равновесной среде, как было показано выше,

$\text{Im } \varepsilon^l(\omega, k) > 0$. Поэтому из (2.5.7) имеем

$$\frac{1}{\text{Re } \varepsilon^l(0, k)} < 1. \quad (2.5.8)$$

Это неравенство гласит, что в статическом пределе продольная диэлектрическая проницаемость термодинамически равновесных изотропных сред может быть либо отрицательной, как это имеет место в сверхпроводниках, где заряды одного знака вследствие этого обстоятельства притягиваются, либо быть больше единицы, как это имеет место в классических моделях плазмы как газовой, так и твердотельной (мнимая ее часть равна нулю).

Аналогичным образом из второго соотношения (2.5.6) получаем ограничение на статическое значение величины $\omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)$. В этом случае удобно ввести величину $\mu(\omega, k)$ в соответствии с определением (2.2.14). При этом из (2.5.6) имеем

$$\frac{\mu(0, k)}{c^2 k^2} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\omega'} \text{Im} \left(\frac{1}{\omega'^2 \varepsilon^l(\omega', k) - c^2 k^2 / \mu(\omega', k)} \right). \quad (2.5.9)$$

В термодинамически равновесной среде $\text{Im } \varepsilon^l(\omega, k) > 0$ и $\text{Im } \mu(\omega, k) > 0$. Поэтому из (2.5.9) следует, что

$$\mu(0, k) > 0. \quad (2.5.10)$$

Это означает, что статическая магнитная проницаемость термодинамически равновесных сред всегда положительна в отличие от ее статической диэлектрической проницаемости (которая совпадает с продольной диэлектрической проницаемостью). При этом если $\mu(0, k) > 1$, то это соответствует парамагнетикам, ферромагнетикам и антиферромагнетикам (в пределе $\mu(0, k) \rightarrow \infty$), если же $\mu(0, k) < 1$, то мы имеем диамагнетик.

Задачи по теме II

Задача 1. Найти магнитное поле, создаваемое постоянным линейным током в изотропной среде, исходя из уравнений (2.1.5), (2.2.7) и (2.1.6), (2.2.13).

Решение.

Совмещая ось $0z$ с направлением тока, имеем

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z j_0 \delta(x) \delta(y), \quad \rho_0 = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{e}_z – единичный орт по оси Oz . Разлагая все величины в интеграл Фурье

$$A(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(\mathbf{k}), \quad (2)$$

представим ток $\mathbf{j}_0(\mathbf{r})$ для удобства в виде $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$. Теперь мы можем этот ток подставить в уравнения (2.1.5) с учетом (2.2.7) и (2.1.6) с учетом (2.1.13). Соответственно получим: в первом случае

$$[\mathbf{kB}]_i + \frac{\omega}{c} \left\{ \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k) \right\} E_j(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{c} j_{0i}(\omega, \mathbf{k}), \quad (3)$$

$$(\mathbf{kB}) = 0, \quad \varepsilon^l(\omega, k)(\mathbf{kE}) = 0, \quad [\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B},$$

где $\mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k}) = e^{-i\omega t} \mathbf{j}_0(\mathbf{k})$; а во втором случае

$$[\mathbf{kH}]_i + \frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega, k) \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} j_{0i}(\omega, \mathbf{k}), \quad (\mathbf{kB}) = 0, \quad (4)$$

$$\varepsilon(\omega, k)(\mathbf{kE}) = 0, \quad [\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c} \mu(\omega, k) \mathbf{H}.$$

Из этих алгебраических уравнений находим решения: в первом случае

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi i}{c} \lim_{\omega \rightarrow 0} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} [\mathbf{k} \mathbf{j}_0(\mathbf{k})]}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k)}, \quad (5)$$

а во втором

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi i}{c} \lim_{\omega \rightarrow 0} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} [\mathbf{k} \mathbf{j}_0(\mathbf{k})]}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega, k) \mu(\omega, k)}. \quad (6)$$

Сравнивая эти два выражения, находим связь между μ , ε и ε^{tr} , которая при учете $\varepsilon^l = \varepsilon$, естественно, совпадает с (2.2.14). В статическом пределе ε^l ограничена, а поэтому согласно второму соотношению (2.2.14) статическая магнитная проницаемость $\mu_0 = \mu(0, k)$ удовлетворяет условию

$$1 - \frac{1}{\mu_0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k). \quad (7)$$

Отсюда следует, что у магнитных сред в статическом пределе $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ обладает полюсом второго порядка ($\varepsilon^{tr} \sim 1/\omega^2$).

В случае линейного тока (1) $\mathbf{j}_0(\mathbf{k}) = \frac{j_0 \mathbf{e}_z}{(2\pi)^2} \delta(k_z)$. При этом для любых немагнитных сред получаем результат, совпадающий с вакуумным:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{2j_0}{cr} \mathbf{e}_\varphi, \quad (8)$$

где \mathbf{e}_φ – единичный орт в азимутальном направлении.

Задача 2. Исходя из выражений (2.5.4), найти потери энергии быстрой заряженной частицы в термодинамически равновесной плазменной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^l = \varepsilon^{tr} = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}$.

Решение.

Если заряд частицы равен q , и движется она со скоростью \mathbf{v} , то потери ее энергии на единицу длины пути определяются работой поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ над его источником, т.е. зарядом. Очевидно, что эти потери равны

$$\begin{aligned} W &= -q \frac{\mathbf{v}\mathbf{E}}{v} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t} = W^l + W^{tr} = \\ &= -\frac{4\pi i q^2}{(2\pi)^3 v} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{k^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)} - \frac{k^2 v^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{k^2 c^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \varepsilon^{tr}(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)} \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Величина W^l , определяемая первым слагаемым, описывает потери энергии частицей на создание продольного поля, а величина W^{tr} , соответственно, потери энергии на создание поперечного поля. Из (1) следует, что эти величины определяются полюсами подинтегральных выражений, которые в свою очередь совпадают с корнями дисперсионных уравнений продольных и поперечных волн (2.4.4) при $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$. Подставим теперь в (1) выражение $\varepsilon(\omega) = \varepsilon^{tr} = \varepsilon^l = 1 - \omega_{Le}^2/\omega^2 = 1 - \omega_{Le}^2/(\mathbf{k}\mathbf{v})^2$. Тогда сразу же замечаем, что второе слагаемое полюсов не имеет, поскольку при $c > v$

$$k^2 c^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 + \omega_{Le}^2 > 0. \quad (2)$$

Первое же слагаемое имеет полюс при

$$(\mathbf{k}\mathbf{v})^2 = \omega_{Le}^2,$$

т.е. когда частота $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ совпадает с собственной частотой продольных колебаний, равной в рассматриваемом случае ω_{Le} .

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} W^{tr} &= 0, \\ W^l &= \frac{2q^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 + \omega^2/v^2)} \frac{1}{(1 - \omega_{Le}^2/\omega^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

При вычислении этого интеграла следует иметь в виду, что в термодинамически равновесной среде $\text{Im } \varepsilon > 0$, а следовательно, в знаменателе подинтегрального выражения следует положить $\omega \rightarrow \omega + i\nu$ и затем перейти к пределу $\nu \rightarrow +0$. В результате получим

$$W^l = \frac{q^2 \omega_{Le}^2}{2v^2} \int_0^\infty \frac{d\xi^2}{\xi^2 + \omega_{Le}^2/v^2} \simeq \frac{q^2 \omega_{Le}^2}{2v^2} \ln \frac{v^2}{v_0^2}. \quad (4)$$

При вычислении последнего интеграла учитывалось, что логарифмическую расходимость следует обрезать на $\xi \leq \xi_{max}$. Из условия применимости выражения

$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{Le}^2/\omega^2$ (и это будет показано позже) следует $\omega > kv_0 > \xi v_0$, а поэтому $\xi_{max} = \omega_{Le}/v_0$, где v_0 – характерная скорость носителей заряда в среде (тепловая скорость электронов в случае газовой плазмы, либо скорость Ферми для электронов металла).

Величину W^l , определяемую формулой (4) называют также поляризационными потерями энергии быстрой частицы в плазменной среде.

Задача 3. Исходя из выражения для изменения энергии в среде получить выражение для средней силы, действующей на носители заряда сорта α в плазменной среде в высокочастотном электромагнитном поле.

Решение.

Среднее изменение плотности энергии электромагнитного поля в непоглощающей среде при малом изменении диэлектрической проницаемости равно

$$\frac{\delta W}{V} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \delta \mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \delta \mathbf{D}^* + \mathbf{E}^* \delta \mathbf{D}) = \frac{1}{4\pi} (E_i E_j^* \delta \varepsilon_{ij}^* + E_i^* E_j \delta \varepsilon_{ij}). \quad (1)$$

Величина $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, очевидно, зависит от плотности носителей. Поэтому, если плотность носителей заряда сорта α меняется на величину δn_α , то

$$\delta \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial n_\alpha} \delta n_\alpha. \quad (2)$$

При этом для непоглощающей среды из (1) получаем (тензор ε_{ij} эрмитов)

$$\frac{\delta W}{V} = \frac{1}{4\pi} E_i E_j^* \delta \varepsilon_{ij}^* = \frac{E_i^* E_j}{4\pi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial n_\alpha} \delta n_\alpha. \quad (3)$$

При $\delta n_\alpha \rightarrow 1$ это выражение следует отождествить со средней потенциальной энергией частицы сорта α в поле электромагнитной волны. Поэтому градиент этого выражения, который отличен от нуля в случае неоднородной амплитуды электромагнитного поля $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$, представляет собой среднюю силу, действующую на частицы сорта α в поле неоднородной электромагнитной волны:

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{\partial n_\alpha} \nabla E_i^* E_j. \quad (4)$$

В случае изотропной среды отсюда получаем

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})}{\partial n_\alpha} \nabla |\mathbf{E}^l|^2 + \frac{\partial \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k})}{\partial n_\alpha} \nabla |\mathbf{E}^{tr}|^2 \right\}. \quad (5)$$

При $\frac{\partial \varepsilon^{l,tr}(\omega, \mathbf{k})}{\partial n_\alpha} < 0$ частицы сорта α выталкиваются из области сильного поля, а при $\frac{\partial \varepsilon^{l,tr}(\omega, \mathbf{k})}{\partial n_\alpha} > 0$, напротив, втягиваются в область сильного поля.

В частности, при $\varepsilon^l = \varepsilon^{tr} = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}$ из (5) находим выражение для средней силы, известное как сила Миллера, которая действует на электрон плазменной среды в неоднородном высокочастотном поле

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} = -\frac{e^2}{m\omega^2} \nabla |\mathbf{E}|^2.$$

Эта сила выталкивает электроны среды из области сильного поля.

Задача 4. Исходя из уравнений электромагнитного поля в среде в форме (2.1.5), получить уравнения электростатики.

Решение.

Для перехода к статическому пределу в уравнениях электродинамики среды удобно ввести скалярный и векторный потенциалы

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Записав систему (2.1.5) через Φ и \mathbf{A} для полей вида $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, далее перейдем к пределу $\omega \rightarrow 0$. В результате получим:

$$\begin{aligned} k^2\Phi &= 4\pi [\rho(\mathbf{k}) + \rho_0(\mathbf{k})], & \rho(\mathbf{k}) &= \rho(0, \mathbf{k}), \\ k^2\mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} [\mathbf{j}(\mathbf{k}) + \mathbf{j}_0(\mathbf{k})], & \mathbf{j}(\mathbf{k}) &= \mathbf{j}(0, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (1)$$

При этом следует помнить, что

$$\begin{aligned} j_i(\omega, \mathbf{k}) &= \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \\ \omega \rho(\omega, \mathbf{k}) &= \mathbf{k}\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2)$$

Система (1) дополняется материальными уравнениями

$$\begin{aligned} \rho(0, \mathbf{k}) &= -k^2\alpha\Phi - \frac{1}{c} \hat{T}_i A_i, \\ j_i(0, \mathbf{k}) &= T_i\Phi + \Pi_{ij} A_j, \end{aligned} \quad (3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \frac{k_i k_j}{k^2} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}), \\ \Pi_{ij} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{i\omega}{c} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}), \\ T_i &= - \lim_{\omega \rightarrow 0} i\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) k_j, \\ \hat{T}_i &= - \lim_{\omega \rightarrow 0} i\sigma_{ji}(\omega, \mathbf{k}) k_j. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом (3) и (4) уравнения электростатики (1) окончательно принимают вид:

$$\begin{aligned} k^2(1 + 4\pi\alpha)\Phi + \frac{4\pi}{c} \hat{T}_i A_i &= 4\pi\rho_0(\mathbf{k}), \\ \left(k^2\delta_{ij} - \frac{4\pi}{c} \Pi_{ij} \right) A_j - \frac{4\pi}{c} T_i\Phi &= \frac{4\pi}{c} j_{0i}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда видим, что уравнения для потенциалов Φ и \mathbf{A} в общем случае в статическом пределе не расщепляются. Поэтому систему (5) мы и назвали уравнениями электромагнитостатики. Расщепление происходит, если в среде

$$T_i = \hat{T}_i \equiv 0, \quad (6)$$

что, в частности, имеет место в изотропной среде:

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \sigma^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \sigma^l(\omega, k), \quad (7)$$

что очевидно, но также и в анизотропных, но термодинамически равновесных классических средах, что уже не очевидно. Однако это так!

Согласно (5) статический заряд ($\rho_0 \neq 0$, $\mathbf{j}_0 \equiv 0$) может создать магнитное поле, а именно

$$\Phi = \frac{4\pi \rho_0}{k^2 \tilde{\varepsilon}(0, \mathbf{k})}, \quad (8)$$

$$A_i = \frac{4\pi}{c} \left(k^2 \delta_{ij} - \frac{4\pi}{c} \Pi_{ij} \right)^{-1} T_i \Phi,$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(0, \mathbf{k}) = \varepsilon(0, \mathbf{k}) + \left(\frac{4\pi}{ck} \right)^2 \hat{T}_i \left(k^2 \delta_{ij} - \frac{4\pi}{c} \Pi_{ij} \right)^{-1} T_j, \quad (9)$$

$$\varepsilon(0, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k}).$$

Соответственно, статический ток может создать электрическое поле.

Задача 5. Исходя из разложения по степеням волнового вектора, исследовать электромагнитные свойства изотропных сред с отсутствием центра инверсии.

Решение.

В области очень высоких частот, или, как мы часто будем говорить, в оптической области частот, когда $\omega \gg kv_0$, т.е. фазовые скорости волн намного превосходят характерные скорости хаотического движения частиц, пространственной дисперсией можно пренебречь. Однако, существует область оптических частот, в которой тем не менее даже слабую дисперсию следует учитывать, что приводит к появлению целого ряда качественно новых эффектов. В общем случае слабую пространственную дисперсию можно учесть простым разложением диэлектрической проницаемости по степеням \mathbf{k} :

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega) \delta_{ij} + i \gamma_{ijl} k_l + \alpha_{ijlm} k_l k_m. \quad (1)$$

Второе слагаемое в этом разложении существует только в средах, в которых отсутствует центр инверсии. Это следствие симметрии (2.2.10), справедливой для полностью изотропных сред.

В случае изотропной среды с отсутствием центра инверсии (такой средой является, например, раствор сахара, кристаллики которого не обладают центром инверсии; примерно на порядок больше эффект в кварце) второе слагаемое в (1) отлично

от нуля, и мы можем ограничиться только его учетом. Имеем

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega) \delta_{ij} + i\gamma(\omega) e_{ijl} \frac{c}{\omega} k_l. \quad (2)$$

Это соотношение эквивалентно записи материального уравнения в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega) \mathbf{E} - i\gamma(\omega) \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}]. \quad (3)$$

Очевидно, что второе слагаемое в (3) важно в области частот собственных продольных колебаний, в которой

$$\varepsilon(\omega) \simeq 0. \quad (4)$$

При подстановке выражения (2) в общее дисперсионное соотношение для колебаний электромагнитного поля в среде (2.4.3) оно распадается на систему двух независимых уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 0, \\ \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right]^2 &= \gamma^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} k^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Первое из этих уравнений описывает чисто продольную волну ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$), а второе – две поперечные волны с различными поляризациями.

Таким образом, спектр продольных колебаний не меняется при учете слабой пространственной дисперсии в изотропной среде с отсутствием центра инверсии. Что касается поперечных волн, то в изотропной среде без учета слабой дисперсии они были дважды вырождены. Учет дисперсии снимает вырождение и дает два спектра

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \pm |\gamma(\omega)| \frac{\omega}{c} k = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \pm |\gamma(\omega)| \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\varepsilon(\omega)}. \quad (6)$$

В задаче Френеля (в граничной задаче) это приводит к двойному лучепреломлению с поляризациями (при $\mathbf{k} \parallel 0z$)

$$E_x = \pm E_y, \quad (7)$$

что используется для определения содержания сахара в растворе (сахариметрия).

Несколько иное положение имеет место вблизи полюсов компонент диэлектрической проницаемости, которые соответствуют одночастичным колебаниям среды. В случае изотропной среды без центра инверсии при этом имеем

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\varepsilon(\omega)} \delta_{ij} - ig(\omega) \frac{c}{\omega} e_{ijl} k_l. \quad (8)$$

Это соотношение эквивалентно материальному уравнению

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon(\omega)} \mathbf{D} + ig(\omega) \frac{c}{\omega} [\mathbf{kD}], \quad (9)$$

откуда следует поперечность как поля \mathbf{D} , так и \mathbf{E} .

Подстановка этого соотношения в уравнения Максвелла, которые в этом случае сводятся к виду

$$\mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \mathbf{D}, \quad (10)$$

приводит к следующему дисперсионному соотношению для поперечного поля в плазме:

$$\left(\frac{k^2}{\varepsilon(\omega)} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 - g^2 \frac{c^2}{\omega^2} k^6 = 0. \quad (11)$$

Здесь также произошло расщепление поперечного поля волн двух поляризаций

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \pm |g(\omega)| \frac{c}{\omega} k^3 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \pm |g(\omega)| \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{3/2}(\omega). \quad (12)$$

Последнее слагаемое в (12), также как и в случае (6), указывает на появление двойного лучепреломления в изотропной среде со слабой пространственной дисперсией первого порядка, т.е. с учетом материальных уравнений в виде (3) или (9) для сред с отсутствием центра инверсии. Первое из этих соотношений существенно проявляет пространственную дисперсию в области собственных частот коллективных продольных колебаний, где $\varepsilon(\omega) \simeq 0$, в то время как второе указывает на важность учета эффекта слабой пространственной дисперсии в области собственных частот колебаний отдельных частиц среды, т.е. вблизи полюсов $\varepsilon(\omega)$, т.е. при $1/\varepsilon(\omega) \rightarrow 0$.

Имеется однако важное различие уравнений (11) и (5). Дело в том, что первое из них кубическое относительно k^2 , в то время как второе остается биквадратным. Это означает, что в последнем случае, соответствующем прямому разложению $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ в ряд (2), число поперечных волн не меняется, вблизи резонансной частоты коллективных продольных колебаний происходит снятие вырождения двух ветвей поперечных волн разной поляризации. В случае же разложения обратного тензора $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ в ряд (8) вблизи собственных частот отдельных частиц среды кроме снятия поляризационного вырождения, что соответствует соотношениям (12), появляется еще одна ветвь колебаний с дисперсионным соотношением

$$k^2 \simeq \frac{\omega^2/c^2}{\varepsilon^2(\omega)g^2(\omega)}. \quad (13)$$

Перепишав это соотношение в виде

$$\omega^2 = k^2 c^2 \varepsilon^2(\omega) g^2(\omega), \quad (14)$$

видим, что эта волна наиболее сильно проявляется именно в области частот вблизи полюсов $\varepsilon(\omega)$, т.е. полос одночастичного поглощения среды.

Задача 6. Рассмотреть электромагнитные волны в полностью изотропной среде со слабой дисперсией.

Решение.

В полностью изотропных средах, в которых имеется и центр инверсии как в микро-, так и в макромасштабах, разложение вблизи нулей $\varepsilon(\omega)$ и полюсов $\varepsilon(\omega)$ следует писать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \left(\varepsilon(\omega) - \alpha_1(\omega) \frac{c^2}{\omega^2} k^2\right) \delta_{ij} - \alpha_2(\omega) \frac{c^2}{\omega^2} k_i k_j, \\ \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) &= \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} + \beta_1(\omega) \frac{c^2}{\omega^2} k^2\right) \delta_{ij} + \beta_2(\omega) \frac{c^2}{\omega^2} k_i k_j. \end{aligned} \quad (1)$$

Первое из этих материальных уравнений удобно представить в привычной для изотропных сред форме (2.2.7). При этом

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = \varepsilon(\omega) - \alpha_1(\omega) \frac{k^2 c^2}{\omega^2}, \quad (2)$$

$$\varepsilon^l(\omega, k) = \varepsilon(\omega) - [\alpha_1(\omega) + \alpha_2(\omega)] \frac{k^2 c^2}{\omega^2}.$$

Учитывая второе из этих выражений, находим дисперсионное уравнение для продольных волн

$$\varepsilon^l(\omega, k) = \varepsilon(\omega) - [\alpha_1(\omega) + \alpha_2(\omega)] \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 0. \quad (3)$$

Отсюда для показателя преломления продольной волны получаем ($k = \frac{\omega}{c}n$):

$$n^2 = \frac{\varepsilon(\omega)}{\alpha_1(\omega) + \alpha_2(\omega)} \gg 1. \quad (4)$$

Как и следовало ожидать, для продольной волны $n^2 \gg 1$, т.е. $\omega^2 \ll k^2 c^2$.

Совершенно аналогично из первого выражения (2) получаем дисперсионное уравнение

$$c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k) = (1 + \alpha_1(\omega)) k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega) = 0, \quad (5)$$

откуда для показателя преломления волны следует

$$n^2 = \frac{\varepsilon(\omega)}{1 + \alpha_1(\omega)} \simeq \varepsilon(\omega) [1 - \alpha_1(\omega)]. \quad (6)$$

При этом очевидно, что двойное вырождение, соответствующее двум взаимортогональным поляризациям поля, сохраняется. Для обеих поляризаций поправка к коэффициенту преломления меняется мало.

Второе выражение (1) также представляется в привычной форме (2.2.7), причем

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon(\omega)} + \beta_1(\omega) \frac{k^2 c^2}{\omega^2}}, \quad (7)$$

$$\varepsilon^l(\omega, k) = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon(\omega)} + [\beta_1(\omega) + \beta_2(\omega)] \frac{k^2 c^2}{\omega^2}}.$$

Отсюда находим дисперсионное соотношение для продольной волны

$$\varepsilon^l(\omega, k) = \varepsilon(\omega) = 0, \quad (8)$$

которое осталось неизменным.

Что касается поперечной волны, то дисперсионное уравнение для него принимает вид

$$c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega) \left[1 + \beta_1 \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \varepsilon(\omega) \right]^{-1} = 0 \quad (9)$$

и сводится к уравнению четвертого порядка

$$\frac{c^4 k^4}{\omega^4} \beta_1(\omega) + \frac{c^2 k^2}{\varepsilon(\omega)} - \omega^2 = 0. \quad (10)$$

Следовательно, мы имеем две ветви дважды вырожденных поперечных мод колебаний

$$\frac{c^2}{\omega^2} k_{1,2}^2 = -\frac{1}{2\beta_1(\omega)\varepsilon(\omega)} \pm \sqrt{\frac{1}{4\beta_1^2(\omega)\varepsilon^2(\omega)} + \frac{1}{\beta_1(\omega)}}. \quad (11)$$

ТЕМА III

МОДЕЛИ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ
ПЛАЗМОПОДОБНЫХ СРЕД§ 3.1. Простейшая одночастичная модель плазменной среды
– ее успехи и провалы

3.1.1. Изотропная среда. Приступая к описанию свойств плазменных сред, следовало бы сразу же начать с наиболее строгого кинетического ее описания. Однако, исторически сначала применялись простейшие модели, которые в определенных случаях приводили к очень неплохим с точки зрения совпадения с экспериментом результатам. Окрыленные успехом, исследователи выходили порой за рамки применимости используемых моделей и тогда наступало разочарование. Искались причины неудач, модели усовершенствовались, пока не перешли к использованию самого полного и строгого описания динамики носителей заряда на основе кинетического уравнения с самосогласованным полем. Эту модель в литературе принято также называть системой уравнений Власова – Максвелла. Безусловно, эта модель, как самая полная, является и самой сложной и поэтому до сегодняшнего дня часто используются более простые модели, порой без оглядки на их ограниченность. Естественно, при этом не редки случаи ложных открытий и ошибочных утверждений.

Чтобы уберечься от таких ошибок, мы решили повторить вкратце исторический путь, который прошла теория плазмы, особо подчеркивая ограниченность областей применимости простейших моделей динамики носителей зарядов в плазме.

Начнем с самой простой модели – модели независимых частиц, представляющей собой систему уравнений Ньютона для электронов и ионов¹. Именно эта модель использовалась И.Ленгмюром для описания колебательных свойств газоразрядной плазмы, а особенно успешно – В.Л.Гинзбургом при описании распространения радиоволн через

¹Иногда ее называют теорией "среднего" электрона или элементарной теорией.

ионосферу¹. Полная система уравнений модели "среднего" электрона выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} &= \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{B}] \right\} - \nu_{e0} \mathbf{v}_e - \nu_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= -\frac{e}{M} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{B}] \right\} - \nu_{i0} \mathbf{v}_i - \nu_{ie} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Здесь \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_i – скорости электронов и ионов, возникающие под действием полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , а $\nu_{e0,i}$ и $\nu_{i0,e}$ – частоты их столкновений, определяющие тормозящие их движение силы трения, причем ν_{e0} – частота столкновений электронов с нейтральными атомами, а ν_{ei} – с ионами; соответственно для ионов это ν_{i0} и ν_{ie} . При этом согласно третьему закону Ньютона $m\nu_{ei} = M\nu_{ie}$. Для простоты электроны и ионы считаются однозарядными. Подобная система уравнений используется и для описания динамики твердотельной плазмы, причем под $\nu_e = \nu_{e0} + \nu_{ei}$ и $\nu_i = \nu_{i0} + \nu_{ie}$ понимаются обратные времена жизни электронов и дырок соответственно.

Уравнения движения (3.1.1) дополняются уравнениями Максвелла для полей \mathbf{E} и \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho = \sum_{\alpha} 4\pi e_{\alpha} n_{\alpha}, \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

где $\alpha = e, i$ – сорт частиц и согласно закону сохранения заряда для каждого сорта частиц (электронов и ионов) выполняется уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \text{div } n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = 0. \quad (3.1.3)$$

Таким образом, электромагнитные поля согласно (3.1.1) определяют движение заряженных частиц, а последние, в свою очередь, являясь источниками в уравнениях (3.1.2), определяют сами поля. Тем самым движение частиц и характер полей оказываются между собой согласованными. Эту идею согласования еще в двадцатые годы

¹См. монографию В.Л.Гинзбурга "Распространение электромагнитных волн в плазме", – М.:Наука, 1967 г.

выдвинул И.Ленгмюр, хотя некоторые физики эту идею до конца не понимают до сих пор.

Задачей модели является нахождение материального уравнения, связывающего ток с полем \mathbf{E} , т.е. нахождение закона Ома

$$j_i = \sum_{\alpha} en_{\alpha} v_{\alpha i} = \hat{\sigma}_{ij} E_j, \quad (3.1.4)$$

где $\hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{E})$ – в общем случае нелинейный тензорный оператор. Однако все достоинства и недостатки модели можно понять, рассмотрев чисто линейные задачи, считая переменные поля \mathbf{E} и \mathbf{V} и создающие их источники – заряды ρ и токи \mathbf{j} малыми.

Начнем со случая, когда внешние поля \mathbf{E}_0 и \mathbf{V}_0 отсутствуют, так же как отсутствуют и внешние источники ρ_0 и \mathbf{j}_0 . Более того, ограничимся для простоты рассмотрением слабоионизованной плазмы, считая $\nu_e \approx \nu_{e0} \gg \nu_{ei}$ и $\nu_i \approx \nu_{i0} \gg \nu_{ie}$. В этих предположениях из (3.1.1) находим очень простые решения, зависящие от времени и координат в виде $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. Именно:

$$\mathbf{v}_e = \frac{ie}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega + i\nu_e}, \quad \mathbf{v}_i = \frac{ie}{M} \frac{\mathbf{E}}{\omega + i\nu_i}. \quad (3.1.5)$$

Отсюда легко находим ток, индуцированный в среде, и ее проводимость

$$\mathbf{j} = \sum en\mathbf{v} = \sum \frac{ie^2}{m} \frac{n\mathbf{E}}{\omega + i\nu} \equiv \sigma\mathbf{E}. \quad (3.1.6)$$

Суммирование здесь, очевидно, распространяется по всем сортам заряженных частиц. Для сокращения записи мы опустили знак α у суммы и параметров носителей (n_{α} , e_{α} , m_{α} , ν_{α}).

Таким образом,

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma\delta_{ij}, \quad \sigma = \sum \frac{ie^2 n}{m(\omega + i\nu)}, \quad (3.1.7)$$

а согласно (2.2.6)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}, \quad \varepsilon = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (3.1.8)$$

где $\omega_{L\alpha} = \sqrt{\frac{4\pi e_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{m_{\alpha}}}$ – ленгмюровская частота частиц сорта α .

Исходя из выражений (3.1.6)–(3.1.8), покажем теперь основные достоинства и недостатки рассматриваемой модели. Прежде всего рассмотрим высокочастотный предел ($\omega \gg \nu_e$), в котором формула (3.1.8) не только качественно, но и количественно правильно описывает распространение поперечных электромагнитных волн в плазменной среде. Дисперсионное уравнение (2.2.4) при подстановке выражения (3.1.8) определяет в этом пределе следующий спектр поперечных колебаний ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{Le}^2, \quad \delta = -\frac{\nu_e}{2} \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 c^2 + \omega_{Le}^2}. \quad (3.1.9)$$

Существование такого спектра как в газовой, так и в твердотельной плазме подтверждено многочисленными экспериментами.

Что касается низкочастотного предела $\omega \ll \nu_e$, то из выражений (3.1.7) и (3.1.8) получаем

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma, \quad \sigma \approx \frac{e^2 n_e}{m \nu_e}. \quad (3.1.10)$$

При подстановке (3.1.10) в (2.2.4) получаем описание обычного скин-эффекта – непроникновения поля в среду из-за его сильного поглощения в поверхностном слое, причем для глубины скин-слоя находим выражение

$$\lambda_{\text{ск}} = \frac{1}{\text{Im } k} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \quad (3.1.11)$$

Формула эта оказывается правильной для слабоионизованного газа даже количественно – использование выражения для σ (3.1.10) во многих случаях приводит к хорошему совпадению с данными эксперимента. Однако, эксперимент показывает, что скинирование поля и его поглощение в поверхностном слое происходит также и в области частот $\omega \gg \nu_e$, что впервые было обнаружено А.Пиппардом в 1944 г., и не описывается изложенной выше моделью, в которой при $\omega > \nu_e$ возможно только недиссипативное скинирование (если $\nu_e < \omega < \omega_{Le}$), причем глубина проникновения поперечного поля в плазменную среду равна

$$\lambda_{\text{ск}} = \frac{1}{\text{Im } k} \approx \frac{c}{\omega_{Le}}. \quad (3.1.12)$$

Такое скинирование называют еще инерциальным, причем, как будет показано в дальнейшем, оно возможно только в области частот

$\omega > \frac{v_0}{c}\omega_{Le}$, где v_0 – характерная скорость носителей заряда в среде (тепловая скорость, либо скорость Ферми). В экспериментах же наблюдалось скинирование поперечного поля и в области частот $\frac{v_0}{c}\omega_{Le} > \omega > \nu_e$, что никак не объясняется формулами (3.1.7) и (3.1.8).

Еще в большой степени ограниченность модели проявляется на примере продольных волн, описываемых первым уравнением системы (2.2.4). Подставляя в него выражение (3.1.8), для области высоких частот находим спектр ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2, \quad \delta = -\frac{\nu_e}{2}. \quad (3.1.14)$$

Именно эти колебания были открыты И.Ленгмюром и получили поэтому название ленгмюровских.

Несмотря на успех в объяснении особенностей распространения высокочастотных поперечных волн и ленгмюровских колебаний, изложенная модель наткнулась, помимо отмеченной выше, и на другую серьезную трудность – она не смогла объяснить существование в разряде низкочастотных продольных волн с линейным законом дисперсии, которые были подобны звуковым волнам, и также наблюдались И.Ленгмюром. Однако, настоящей проверкой модели оказалась задача о потенциале поля пробного статического заряда в плазменной среде. Рассмотрим точечный переменный заряд $qe^{-i\omega t}$, помещенный в плазменную среду в точке $r = 0$. Легко показать, что поле такого заряда в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ определяется формулой

$$\Phi(r) = \frac{qe^{-i\omega t}}{r\varepsilon(\omega)}. \quad (3.1.15)$$

Однако, если сюда подставить выражение (3.1.8) и перейти к пределу $\omega \rightarrow 0$, то получим абсурдный результат, отличный от приведенного выше, а именно $\Phi(r) \rightarrow 0$, т.к. $\varepsilon(\omega) \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow 0$.

Таким образом, если высокочастотные свойства изотропной плазмы элементарной теорией объяснялись неплохо, то низкочастотные свойства оказались ей явно не по плечу.

3.1.2. Магнитоактивная плазменная среда. В то же самое время применение элементарной теории к магнитоактивной плазменной среде, в особенности, к проблемам распространения радиоволн в ионосфере, привели к триумфу модели, что, в первую очередь, следует отнести к заслугам В.Л.Гинзбурга. Решая линеаризованную систему

уравнений (3.1.1) при наличии внешнего однородного магнитного поля \mathbf{B}_0 , направленного вдоль оси Oz , после несложных вычислений, получим хорошо известное выражение для тензора диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы:

$$\varepsilon(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3.1.16)$$

где

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \sum \frac{\omega_L^2(\omega + i\nu)}{\omega[\Omega^2 - (\omega + i\nu)^2]}, \quad g = \sum \frac{\omega_L^2\Omega}{\omega[\Omega^2 - (\omega + i\nu)^2]}, \quad (3.1.17)$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega + i\nu)}.$$

С помощью этого тензора огромное число экспериментальных данных о характере распространения радиоволн через ионосферу Земли было понято и объяснено. Однако не будем касаться этих успехов, а более детально обсудим неудачи модели, заставившие ученых обратиться к более сложным моделям.

Дисперсионное соотношение, определяющее условия существования нетривиальных решений уравнений Максвелла (2.4.3) в отсутствие внешних источников, в рассматриваемом случае записывается в виде

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} \right| = k^2 (\varepsilon_{\perp} k_{\perp}^2 + \varepsilon_{\parallel} k_{\parallel}^2) - \frac{\omega^2}{c^2} [(\varepsilon_{\perp}^2 - g^2 - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}) k_{\perp}^2 + 2k^2 \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}] + \frac{\omega^4}{c^4} \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) = 0. \quad (3.1.18)$$

Здесь $k_{\perp} = k \sin \theta$, $k_{\parallel} = k \cos \theta$ – поперечная (поперек \mathbf{B}_0) и продольная (вдоль \mathbf{B}_0) составляющие волнового вектора \mathbf{k} , θ – угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{B} .

В общем случае дисперсионное уравнение является уравнением высокого порядка относительно ω и его решения в виде $\omega(\mathbf{k})$ никто в общем случае не ищет. Вместе с тем, оно весьма простое относительно $k(\omega)$ – всего лишь биквадратное. Именно в такой формулировке, которую принято называть оптической или граничной, и решалась

эта задача радиофизиками, которые, вводя комплексный показатель преломления $k = \frac{\omega}{c}n$, легко записывали решения (3.1.18) в виде

$$n_{1,2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (3.1.19)$$

где

$$A = \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta, \quad C = \varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_{\perp}^2 - g^2), \quad (3.1.20)$$

$$B = -\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} (1 + \cos^2 \theta) - (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2 - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}) \sin^2 \theta.$$

Волну с показателем n_1^2 — называют обыкновенной, а с n_2^2 — необыкновенной. С помощью этих формул были довольно хорошо объяснены особенности распространения радиоволн через ионосферу: области существования слабозатухающих волн ($\text{Re } n^2 > 0$), их поглощения ($\text{Im } n > 0$) и отражения ($\text{Re } n^2 < 0$) как функции угла θ . На рис. 3.1 представлены зависимости $n_{1,2}^2(\omega)$ для $\theta \neq 0, \pi/2$ и $\omega_{Le}^2 > \Omega_e^2$ (как это имеет место в F-слое ионосферы, где $\omega_{Le \max} \approx 10^8 \text{ с}^{-1}$, $\Omega_e \approx 10^7 \text{ с}^{-1}$).

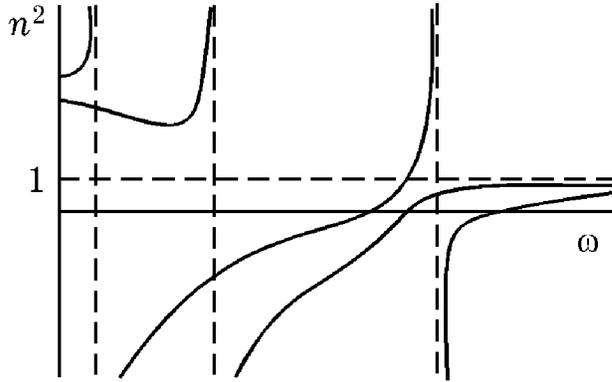


Рис. 3.1

Более того, хорошее количественное объяснение получили наблюдаемые в ионосфере низкочастотные поперечные волны в области частот $\Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$, известные как свистящие атмосферерики, или геликоны (в случае твердого тела), обладающие спектром частот

$$\omega = \frac{k^2 c^2 \cos \theta \Omega_e}{\omega_{Le}^2}. \quad (3.1.21)$$

Менее успешными оказались объяснения существования волн в области самых низких частот $\omega \ll \Omega_i$, спектры которых существенно зависят от ионной компоненты плазмы. Здесь теория, основанная на рассматриваемой одночастичной модели, предсказывала наличие двух ветвей колебаний:

$$\omega_1^2 = \frac{k_z^2 v_A^2}{1 + v_A^2/c^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + v_A^2/c^2}. \quad (3.1.22)$$

Первая из этих ветвей описывает чисто поперечную волну, известную как альфвеновская волна, а вторая – ветвь магнитогидродинамическую, называемую еще быстрой магнитозвуковой. Дело в том, что это смешанная волна, в ней сильная продольная составляющая и в ионосферных экспериментах ее спектр несколько отличается от описываемого формулой (3.1.22) – фазовая скорость оказывается несколько больше, чем следует из расчета по (3.1.22), причем это превышение зависит от массы ионов и температуры плазмы. В рассматриваемой же модели температура плазмы вообще не фигурирует. Более того, кроме 5 ветвей колебаний, представленных на рис. 3.1, в экспериментах наблюдалась и 6-ая ветвь с линейным законом дисперсии, которая и оказалась полностью отсутствующей в этой модели.

Последнюю точку в проблеме справедливости одночастичной модели поставила задача о потенциале поля пробного точечного заряда. Выше уже говорилось об этом для случая немагнитоактивной плазмы. Решим теперь эту задачу для магнитоактивной плазмы и определим поле переменного точечного заряда $qe^{-i\omega t}$ в плазме с диэлектрической проницаемостью вида (3.1.16), (3.1.17). Решение уравнения Пуассона с $\rho_0 = qe^{-i\omega t}\delta(\mathbf{r})$ при этом дает следующий ответ (ср. с (3.1.15)):

$$\Phi(\mathbf{r}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} qe^{-i\omega t} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} + k_{\parallel}^2 \varepsilon_{\parallel}} \rightarrow 0 \quad (3.1.23)$$

т.е. так же как и выше, имеем не только дебаевский экранированный потенциал, что следовало ожидать, согласно выводу, проведенному ранее (см. тему I), но вообще нулевой потенциал – абсурдный по своему физическому смыслу результат.

Таким образом, в квазистатическом пределе модель независимых частиц явно не пригодна и это было понято уже в начале 30-х годов, когда и начались поиски новой, более сложной и адекватной модели.

К сказанному выше добавлялись разногласия с экспериментом, связанные с характером диссипации волн: в рассмотренной выше модели вся диссипация обусловлена столкновениями частиц, трением одних сортов частиц о другие. В экспериментах же наблюдалась диссипация, обусловленная вязкостью, теплопроводностью и диффузией, с одной стороны, и вообще бесстолкновительная диссипация – с другой, причем природа последней не была ясной, но которая проявлялась в явно бесстолкновительных случаях.

Таким образом, требовалось как усовершенствование гидродинамического описания плазмы как сплошной среды, так и развитие кинетического описания плазменной среды как идеального газа со слабым кулоновским взаимодействием.

§ 3.2. Гидродинамические модели плазменных сред. Двухжидкостная и одножидкостная гидродинамики

3.2.1. Двухжидкостная гидродинамика. Заметив, что в одночастичной модели все трудности в описании плазменных сред возникали в области низких частот, исследователи сразу же обратили свой взор к гидродинамике, которая как раз и приспособлена к описанию низкочастотных процессов. И здесь их пути разошлись по двум направлениям. И.Ленгмюр решил усовершенствовать модель независимых частиц, введя в них парциальные давления частиц и сформулировав модель двухжидкостной гидродинамики. С другой стороны, Х.Альфвен применил для описания ионосферных экспериментов одножидкостную гидродинамику проводящей жидкости, которую сам и сформулировал. Ниже мы изложим простейшие варианты этих моделей, следуя указанной последовательности.

Начнем с модели двухжидкостной гидродинамики, представляющей собой простое обобщение системы (3.1.1) с учетом газокинетического давления частиц каждого сорта, считая, что электронное да-

вление действует только на электроны, а ионное – только на ионы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e &= \\ &= -\frac{\nabla n_e T_e}{m n_e} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}] \right\} - \nu_{e0} \mathbf{v}_e - \nu_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i &= \\ &= -\frac{\nabla n_i T_i}{M n_i} + \frac{e}{M} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}] \right\} - \nu_{i0} \mathbf{v}_i - \nu_{ie} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \end{aligned}$$

Эта система дополняется системой уравнений непрерывности (3.1.3) и уравнениями Максвелла в форме (3.1.2). Что касается уравнений для температур $T_{e,i}$, т.е. уравнений баланса энергии, то мы для простоты их рассматривать не будем, ограничившись изотермическим случаем $T_{e,i} = \text{const}$. Это существенно облегчает анализ и не влияет на определение границ применимости модели, которое и является целью данного параграфа.

Уравнения (3.2.1) отличаются от (3.1.1) двумя важными слагаемыми. Во-первых, они содержат нелинейные слагаемые $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ как для электронной, так и ионной компонент и это позволяет значительно расширить рамки одночастичной модели, включив в рассмотрение быстрые надтепловые потоки и процессы, связанные с наличием в плазме таких потоков. С другой стороны, они включают тепловые слагаемые и это позволяет надеяться на их применимость для описания низкочастотных процессов, при оценке которых одночастичная модель оказалась несостоятельной. Чтобы убедиться в сказанном, получим в рамках этой модели выражение для диэлектрической проницаемости, начав для простоты с незамагниченной покоящейся плазмы:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{v}_{0e,i} = 0, \quad n_{0e,i} = \text{const}. \quad (3.2.2)$$

Рассматривая малые отклонения от этого равновесного состояния, из (3.2.1) находим следующее выражение для тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{ij} = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr} + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l, \quad (3.2.3)$$

где

$$\varepsilon^{tr} = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (3.2.4)$$

$$\varepsilon^l = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega + i\nu) - k^2 v_T^2}.$$

Прежде всего заметим, что тензор диэлектрической проницаемости в рассматриваемой модели содержит две независимые компоненты: продольную и поперечную, что уже является правильным. Во-вторых, поперечная диэлектрическая проницаемость совпадает с (3.1.8) и поэтому все достоинства и недостатки модели независимых частиц по отношению к описанию поперечного поля (волны) сохраняются и в этой модели, а именно, в низкочастотной области формула (3.2.4) для $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ неправильно описывает характер проникновения поперечного электромагнитного поля в плазму – аномальный скин-эффект.

Что касается продольной диэлектрической проницаемости (3.2.4), то в пределе $\omega \rightarrow 0$ она принимает вид

$$\varepsilon^l(0, k) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}, \quad (3.2.5)$$

что правильно описывает дебаевскую экранировку потенциала точечного заряда в плазме (ср. с (3.1.15)):

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}}{k^2 \varepsilon^l(0, k)} = \frac{q}{r} e^{-r/r_D}, \quad (3.2.6)$$

где r_D – определенный выше дебаевский радиус. Таким образом, модель двухжидкостной гидродинамики с конечной температурой хорошо описывает статический предел продольной диэлектрической проницаемости и тем самым электростатические свойства изотропной плазмы.

Более того, следует отметить, что в низкочастотной области, $\omega \ll \nu$, продольная диэлектрическая проницаемость (3.2.4) хорошо описывает не только дебаевскую экранировку, но и процессы диффузии, как одночастичной (униполярной), так и коллективной (амбиполярной). Действительно, в этом пределе (3.2.4) принимает вид

$$\varepsilon^l = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{i\omega\nu - k^2 v_T^2}. \quad (3.2.7)$$

Для неоднородностей, размеры которых меньше дебаевского радиуса данного сорта частиц, т.е. $k^2 v_{T\alpha}^2 \gg \omega_{L\alpha}^2$, нули выражения (3.2.7) совпадают с ее полюсами:

$$i\omega\nu_\alpha - k^2 v_{T\alpha}^2 = 0. \quad (3.2.8)$$

Легко сообразить, что это соотношение совпадает с дисперсионным соотношением для униполярной (одночастичной) диффузии,

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} - \frac{v_{T\alpha}^2}{\nu_\alpha} \Delta n_\alpha = 0, \quad (3.2.9)$$

с коэффициентом униполярной диффузии частиц сорта α :

$$D_\alpha = \frac{v_{T\alpha}^2}{\nu_\alpha}. \quad (3.2.10)$$

Если же размер неоднородности больше дебаевского радиуса, то в выражении (3.2.2) единицей можно пренебречь, при этом его нули описывают амбиполярную диффузию:

$$i\omega\nu_i - k^2(v_s^2 + v_{Ti}^2) = 0, \quad (3.2.11)$$

где $v_s = \frac{T_e}{M}$. Так же как и выше это соотношение мы сопоставляем с диффузионным уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_a \Delta n = 0 \quad (3.2.12)$$

с коэффициентом амбиполяриой диффузии

$$D_\alpha = \frac{v_s^2 + v_{Ti}^2}{\nu_i} = \frac{T_e + T_i}{M\nu_i}. \quad (3.2.13)$$

Легко сообразить, что для процессов, фазовая скорость которых значительно превосходит тепловые скорости частиц, двухжидкостная модель совпадает с рассмотренной выше одночастичной моделью и в этом смысле все высокочастотные процессы ею описываются правильно, в том числе, и распространение радиоволн через ионосферу.

Однако, кроме указанного выше ограничения области применимости модели в низкочастотном пределе для поперечной диэлектрической проницаемости, имеется еще одно ограничение той же природы, но уже для продольной диэлектрической проницаемости. Именно, как видно из второго выражения (3.2.4), в бесстолкновительном пределе ($\nu \rightarrow 0$) оно обладает полюсами

$$\omega^2 = k^2 v_{T\alpha}^2. \quad (3.2.14)$$

Физически полюса продольной диэлектрической проницаемости соответствуют одночастичным (без учета самосогласованного поля) колебаниям плотности плазмы. Спектры (3.2.14) в этом смысле напоминают звуковые колебания. Но без учета полевого взаимодействия и при полном пренебрежении столкновениями таких колебаний быть не может и ниже будет показано, что благодаря бесстолкновительному механизму поглощения они сильно затухают в плазме.

Следует вместе с тем заметить, что формула (3.2.7), по крайней мере качественно, правильно учитывает тепловые поправки к спектру высокочастотных ленгмюровских колебаний (3.1.4). Действительно, эта формула для чисто электронной плазменной среды приводит к спектру (ср. (3.1.4))

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + k^2 v_{Te}^2, \quad \delta = -\frac{\nu_e}{2}. \quad (3.2.15)$$

Существование тепловых поправок в спектре ленгмюровских колебаний в условиях $\omega_{Le}^2 \gg k^2 v_{Te}^2$, т.е. для колебаний с длиной волны, большей электронного дебаевского радиуса, экспериментально установлено И.Ленгмюром и Дж.Тонксом (резонансы Тонкса – Даттнера). Формулы (3.2.15) правильно описывают наблюдаемые на эксперименте частоты колебаний, количественное отличие состоит в множителе при втором слагаемом для ω^2 , который вместо единицы оказался равным 3 (подробно об этом речь пойдет в дальнейшем).

Укажем на еще одну очень распространенную ошибку, которая часто допускается при анализе низкочастотных продольных волн в рамках двухжидкостной гидродинамики. Речь идет о колебаниях с длиной волны больше дебаевского радиуса плазмы и частотой ниже ленгмюровских частот электронов и ионов. Дисперсионное соотношение для таких колебаний согласно (3.2.4) имеет вид:

$$\omega^2 - k^2(v_{Ti}^2 + v_s^2) + i\omega\nu_i = 0. \quad (3.2.16)$$

Отсюда следует спектр слабозатухающих колебаний ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega = k\sqrt{\frac{T_e + T_i}{M}}, \quad \delta = -\frac{\nu_i}{2}. \quad (3.2.17)$$

Эти колебания называют ионным звуком. В действительности, однако, спектр этот не совсем точный, что будет показано ниже. Более того, ни в газоразрядной, ни в ионосферной плазме такой слабозатухающий спектр идентифицировать не удалось, поскольку хотя он

и похож на изотермический звук $\omega = kv_{\text{зв}}$, $v_{\text{зв}} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{T}{M}}$, с $\gamma = 1$, но плазма явно не удовлетворяет условию изотермичности (из условия $\omega \gg kv_{T_i}$, v_i следует $T_e \gg T_i$).

Выше мы умышленно ограничились анализом низкочастотных процессов в модели двухжидкостной гидродинамики только для изотропной плазмы, т.е. в отсутствие внешнего магнитного поля. Именно такая плазма и исследовалась в газовом разряде И.Ленгмюром в 30-ые годы. Что касается магнитоактивной плазмы, то она в это время интересовала ученых в основном в плане изучения распространения радиоволн в ионосфере. Низкочастотные процессы в ионосфере впервые заинтересовали в конце сороковых годов Х.Альфвена. И для их описания он применил одножидкостную магнитную гидродинамику, которую сам же и сформулировал в полной аналогии с обычной гидродинамикой. Опыт оказался успешным и только после этого ученые вновь обратились к модели двухжидкостной гидродинамики, считая ее более микроскопической и пытаясь с ее помощью обосновать одножидкостную гидродинамику. В нашем изложении мы будем следовать этому исторически пройденному пути, но прежде рассмотрим альфвеновскую одножидкостную магнитную гидродинамику.

3.2.2. Одножидкостная магнитная гидродинамика. Х.Альфвен, записывая уравнения магнитной гидродинамики, учел, что на проводящую жидкость с током в магнитном поле кроме градиента давления действует также сила Ампера

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}] = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B} \mathbf{B}]. \quad (3.2.18)$$

Обычный феноменологический вывод уравнений магнитной гидродинамики можно найти в книге Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица "Электродинамика сплошных сред". Мы здесь этого вывода воспроизводить не будем, а приведем сразу их окончательную форму, причем ограничимся случаем идеальной жидкости:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } [\mathbf{v}\mathbf{B}] = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad (3.2.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} [\text{rot } \mathbf{B} \mathbf{B}].$$

Здесь \mathbf{v} – скорость, ρ – плотность жидкости, а P – давление, которое определяется уравнением состояния, связывающим между собой

давление P , плотность ρ и температуру T жидкости:

$$P = P(\rho, T). \quad (3.2.20)$$

Как и выше, мы ограничимся здесь анализом уравнений магнитной гидродинамики в линейном приближении для малых возмущений, считая равновесное состояние однородным и стационарным:

$$\mathbf{v} = 0, \quad \rho_0 = \text{const}, \quad P_0 = \text{const}, \quad \mathbf{B}_0 \parallel 0z = \text{const}. \quad (3.2.21)$$

Тогда для малых возмущений $\delta\mathbf{B}$, \mathbf{v} , $\delta\rho$ из (3.2.19) и (3.2.20) получим систему:

$$\begin{aligned} \text{div } \delta\mathbf{B} &= 0, & \text{rot } [\mathbf{v}\mathbf{B}_0] &= \frac{\partial\delta\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{v_s^2}{\rho_0} \nabla\delta\rho - \frac{1}{4\pi\rho_0} [\mathbf{B}_0 \text{rot } \delta\mathbf{B}].$$

Здесь v_s – скорость изэнтропического звука, возникающая в идеальной жидкости при возмущении уравнения состояния (3.2.20), а именно:

$$\delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \delta\rho \equiv v_s^2 \delta\rho. \quad (3.2.23)$$

Для решений вида $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ уравнения (3.2.22) и (3.2.23) сводятся к системе алгебраических уравнений, из условия разрешимости которых находим следующие спектры колебаний:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= k_z^2 v_A^2, \\ \omega_{2,3}^2 &= \frac{k^2}{2} \left\{ (v_A^2 + v_s^2) \pm \sqrt{(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

где θ – угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 . Первое из этих соотношений описывает чисто поперечную волну (в ней $\delta\mathbf{B}$ и \mathbf{v} колеблются в плоскостях, перпендикулярных векторам \mathbf{B}_0 и \mathbf{k}), известную как альфвеновская волна. Именно эту волну открыл Х.Альфвен в ионосфере земли в 1950 году. Два вторых соотношения соответствуют так называемым быстрому и медленному звуку (или МГД волнам). Здесь, по

существо, проявилось расщепление обычного звукового спектра, обусловленного газокинетическим давлением P , на два звуковых спектра вследствие появления еще и магнитного давления $B_0^2/8\pi$.

Особо простой вид эти два последних спектра принимают в пределе плазмы низкого давления, $\beta = \frac{v_s^2}{v_A^2} = \frac{8\pi\rho_0}{B_0^2} \ll 1$, что как раз и имеет место в ионосфере (выше уже указывалось, что в ионосфере $\beta \approx 10^{-4} \ll 1$):

$$\omega_2^2 = k^2 v_A^2, \quad \omega_3^2 = k_z^2 v_s^2. \quad (3.2.25)$$

И здесь проявляется необоснованность применения к ионосфере всего описанного выше подхода. Дело в том, что спектры ω_1 и ω_2 были прекрасно идентифицированы, и это было безусловным триумфом теории Альфвена. Что же касается спектра обычного звука с частотой ω_3 , то появляются уже отмеченные выше трудности. Именно, для идеального газа скорость изотермического звука $v_s = \sqrt{\gamma \frac{T}{M}}$, где $\gamma = 5/3$ в случае одноатомного газа. В ионосферных измерениях так и не удалось согласовать скорость наблюдаемых звуковых волн с теорией изэнтропического звука. И тогда вообще встал вопрос: а почему наблюдаемые в ионосфере спектры волн с частотами ω_1 и ω_2 так хорошо согласуются с гидродинамической теорией, справедливой, строго говоря, для проводящей жидкости типа ртути?

Первая попытка вывода уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики была предпринята исходя из системы уравнений двухжидкостной гидродинамики (3.2.1). Как уже отмечалось, в середине 50-х годов эта система казалась микроскопической и такой вывод представлялся вполне справедливым.

Поскольку гидродинамика описывает низкочастотные и медленные процессы, мы ниже будем считать выполненными неравенства

$$\omega \ll \omega_{Li}, \quad kv_{Te}, \quad \Omega_i, \quad (3.2.26)$$

$$\nu_e \ll \Omega_e, \quad \nu_i \ll \Omega_i \ll \omega_{Li}.$$

Эти неравенства позволяют в первом уравнении (3.2.1) пренебречь левой частью и считать плазму квазинейтральной, т.е. $n_e = n_i = n$. В уравнении Максвелла током смещения также можно пренебречь, записав

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (3.2.27)$$

Используя это уравнение и складывая (3.2.1), получим уравнение движения ионов (плотности) плазмы ($\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$)

$$\begin{aligned} Mn \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = \\ = -\nabla [n(T_e + T_i)] - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}] - Mn\nu_{i0} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Кроме того, вторые неравенства (3.2.26) позволяют поперечную составляющую электрического поля выразить через магнитное поле:

$$\mathbf{E}_\perp = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}], \quad (3.2.29)$$

а поэтому уравнение Максвелла для поперечного электрического поля приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{B}]. \quad (3.2.30)$$

Если ко всему этому добавить уравнение непрерывности для ионов (плотности плазмы), окончательно получим следующую систему уравнений магнитной гидродинамики:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{B}] = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (3.2.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} [\operatorname{rot} \mathbf{B} \mathbf{B}] - \nu_{i0} \mathbf{v},$$

где $\rho = Mn$ – плотность плазмы, а $P = n(T_e + T_i)$ – формула для давления, заменяющая уравнение состояния (3.2.20). Кроме этого уравнение состояния, которое в модели двухжидкостной гидродинамики (3.2.1) более не уточняется, система (3.2.31) отличается от (3.2.19) еще и наличием силы трения $\nu_{i0} \mathbf{v}$ – трения проводящей жидкости о неподвижную нейтральную компоненту плазмы. В одножидкостной гидродинамике этого члена, естественно, нет.

Очевидно, что системе (3.2.31) присущи те же недостатки, что и (3.2.19), а именно, неправильные следствия из уравнения состояния, которое в приближении идеальной жидкости должно приводить в случае одноатомного газа к $\gamma = 5/3$, а в случае двухкомпонентной смеси одноатомных газов (электроны и ионы) к $\gamma = 10/3$ (при $T_e = T_i$ имеем $P = 2nT$).

Существуют и другие разновидности гидродинамических моделей плазмы (например, гидродинамика плазмы с анизотропным давлением Чу – Гольдбергера – Лоу) и множество попыток их вывода по аналогии с выводом уравнений обычной гидродинамики, исходя из уравнений Больцмана. Но все они также обладают своими недостатками и поэтому мы их здесь обсуждать не будем.

§ 3.3. Кинетическое уравнение Больцмана-Ландау

После того, как мы убедились в том, что система уравнений моментов, или, как говорят, уравнений гидродинамики не очень-то однозначна и имеет ограниченную применимость для описания динамики плазменных сред (причем каждая из гидродинамических моделей обладает в этом смысле своими особенностями), обратимся к наиболее строгому кинетическому описанию. Отметим, что первые попытки такого описания были предприняты еще до Второй мировой войны. Уже тогда появились первые работы по теории кинетических уравнений для частиц с кулоновским взаимодействием.

Метод кинетического уравнения подразумевает вероятностное описание путем введения для системы из n частиц – n -частичной функции распределения

$$f_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n, t), \quad (3.3.1)$$

представляющей собой вероятность обнаружения в момент времени t частиц с импульсами $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ в точках $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ соответственно. Функция (3.3.1), хотя и содержит полную информацию о системе частиц, но зависит от огромного числа аргументов и поэтому очень сложна и практически непригодна для описания динамики плазмы.

Вспомним, однако, что плазма – это газ. Первым об этом вспомнили С.Чепмен и Т.Каулинг, которые еще в 30-е годы в связи с работами И.Ленгмюра впервые попытались описать слабоионизованную плазму кинетически, считая ее газом и следуя кинетической теории Л.Больцмана. Замечая, что для столкновений электронов и ионов с нейтральными атомами последние с хорошей степенью точности являются твердыми шариками с радиусом a , для описания плазмы они воспользовались газовым приближением $\eta_0 = n_0^{1/3} a \ll 1$ (см. тему I) и записали функцию (3.3.1) в нулевом приближении по параме-

тру η_0 в виде произведения вероятностей

$$f_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n, t) = \prod_{i=1}^n f(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i, t). \quad (3.3.2)$$

Здесь $f(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i, t)$ – вероятность обнаружения i -ой частицы с импульсом \mathbf{p}_i в момент времени t в точке \mathbf{r}_i . В этом приближении взаимодействием частиц между собой полностью пренебрегается, а поэтому функция $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$, описывающая движение частиц, полностью детерминирована воздействием внешней силы \mathbf{F} на эту частицу. Это означает, что $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{df(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (3.3.3)$$

Здесь $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ и по определению – скорость, а

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} + m\mathbf{g}, \quad (3.3.4)$$

где \mathbf{F} – внешняя сила, \mathbf{E} и \mathbf{B} – электрические и магнитные поля, а \mathbf{g} – некоторое поле тяжести. Естественно, что уравнение (3.1.4) пишется для каждого сорта носителей заряда – электронов и ионов различных сортов.

Еще раз подчеркнем, что С.Чепмен и Т.Каулинг под \mathbf{F} понимали внешнюю силу, а частицы считали не взаимодействующими вовсе! Учет взаимодействия в первом порядке по параметру $\eta_0 \ll 1$, согласно Л.Больцману, сводится к появлению правой части в уравнении Лиувилля, которая учитывает столкновения частиц:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st} \equiv \sum_{\beta} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} \equiv \sum_{\beta} I_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta). \quad (3.3.5)$$

Здесь суммирование распространяется по всем сортам частиц β , с которыми сталкиваются частицы сорта α . Следуя Л.Больцману, запишем

$$I_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{p}_\beta d\mathbf{p}'_\beta d\mathcal{E}'_\beta v_{\alpha\beta} d\sigma_{\alpha\beta} [f_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}'_\beta) - f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta)] \times \quad (3.3.6)$$

$$\times \delta(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}'_\alpha - \mathbf{p}'_\beta) \delta(\mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}'_\alpha - \mathcal{E}'_\beta).$$

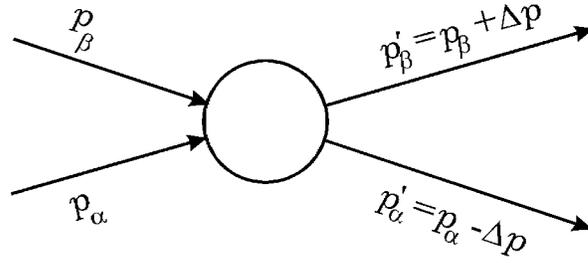


Рис. 3.2

В таком виде учитываются только упругие столкновения частиц (см. рис. 3.2), при которых выполняются законы сохранения энергии \mathcal{E} и импульса \mathbf{p} сталкивающихся частиц. При этом вероятности прямых и обратных процессов рассеяния считаются одинаковыми и равными произведению модуля относительной скорости сталкивающихся частиц $v_{\alpha\beta} = |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|$ на дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_{\alpha\beta}$. Для упругих столкновений

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\alpha,\beta} &= \pm\mu_{\alpha\beta}\mathbf{v}_{\alpha\beta} + \frac{m_{\alpha,\beta}}{m_\alpha + m_\beta}(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta), \\ \mathbf{p}'_{\alpha,\beta} &= \pm\mu_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta}\mathbf{n} + \frac{m_{\alpha,\beta}}{m_\alpha + m_\beta}(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta), \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

где $\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}$, а \mathbf{n} – единичный вектор направления скорости частицы сорта α – после рассеяния в системе центра инерции (в которой $\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta = 0$).

В случае рассеяния заряженных частиц плазмы на нейтральных атомах, считая последние твердыми шариками с радиусом a , имеем

$$d\sigma_{\alpha\beta} = a^2 d\Omega, \quad (3.3.8)$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла. Дальнейшее упрощение интеграла столкновений (3.3.6) невозможно (правда, для столкновений электрон-нейтрал упрощение возможно из-за малости отношения масс m/M_0). Однако, при расчете процессов релаксации он оказывается достаточно простым.

Следующий важный шаг в теории плазмы сделал Л.Д.Ландау, записавший в 1936 году интеграл столкновений заряженных частиц между собой. При этом он исходил из уравнения Больцмана (для

одночастичной функции распределения) (3.3.5) с интегралом парных столкновений (3.3.6). Для вычисления $d\sigma_{\alpha\beta}$ он учел кулоновское взаимодействие между частицами и воспользовался формулой Резерфорда

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\Omega} = \frac{4\pi e_\alpha^2 e_\beta^2}{\mu_{\alpha\beta}^2 v_{\alpha\beta}^4 \sin^4 \theta/2}, \quad (3.3.9)$$

где θ – угол рассеяния, т.е. угол поворота траектории частицы α по отношению к частице β после рассеяния.

И здесь проявилась мудрость Л.Ландау. Она была связана с анализом условия применимости газового приближения $\eta_0 \ll 1$, которое оказывается неприменимым для столкновений между собой заряженных частиц. Действительно, поле любого пробного заряда в плазменной среде дебаевски экранировано, причем дебаевский радиус $r_D \simeq \sqrt{T/e^2 n_e}$. Расстояние же между заряженными частицами порядка $n_e^{-1/3}$, а поэтому это условие следовало бы писать в виде $n_e^{1/3} r_D = \sqrt{T/e^2 n_e^{1/3}} = 1/\eta_1 \ll 1$, что противоположно условию применимости газового приближения для кулоновски взаимодействующих частиц $\eta_1 \ll 1$, введенного самим же Л.Ландау в 1936 г. (см. тему I). Тогда Л.Д.Ландау на это противоречие не обратил внимания и подставил выражение (3.3.9) в интеграл Больцмана (3.3.5), справедливый только в случае короткодействующих сил. Тем не менее, такое приближение оказалось достаточно точным, и это было обосновано значительно позже в знаменитом труде Н.Н.Боголюбова 1946 года ”Динамические проблемы в статистической физике”.

Немаловажным является также возможность упрощения интеграла Больцмана для кулоновски взаимодействующих частиц, т.е. при подстановке (3.3.9) в интеграл (3.3.5). Легко заметить, что в среднем выполняются условия

$$|\mathbf{p}'_{\alpha,\beta} - \mathbf{p}_{\alpha,\beta}| \ll \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \quad (3.3.10)$$

т.е. при кулоновском рассеянии происходит малое изменение импульса, т.к. в основном рассеяние происходит на малые углы, что не имеет места при рассеянии на твердых шариках. Это позволяет разлагать подынтегральное выражение в (3.3.6) по малым изменениям импульса. Вместе с тем, известно, что формула (3.3.9) приводит к расходимости полного сечения рассеяния при интегрировании по углам θ на малых углах рассеяния, что приводит в (3.3.6) к расходимости при

интегрировании по передаваемым импульсам. Л.Ландау правильно понял, что расходимость эта является следствием неприменимости чисто кулоновского потенциала взаимодействия на больших расстояниях, а следовательно, неприменимости и формулы (3.3.9). Эту расходимость он устранил путем обрезания кулоновского взаимодействия при $r \geq r_D$. Однако, этого оказалось недостаточно. Дело в том, что разложение по малой передаче импульса в среднем эквивалентно требованию применимости теории возмущений, или борновского приближения. А это означает, что не только $\eta_1 \ll 1$, но должно выполняться еще и неравенство $e^2/r_{min} \ll T$. Поэтому устранить расходимость на малых расстояниях можно, положив $r_{min} = T/e^2$. И использованные значения r_{max} и r_{min} являются оценочными, но возникающие неточности в конечном счете не очень существенны, поскольку расходимости оказываются логарифмическими и их устранение эквивалентно требованию

$$L = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r} = \int_{T/e^2}^{r_D} \frac{dr}{r} = \ln \frac{r_D}{r_{min}} = \ln \left(\frac{T_{e,i}}{e^2 n_{e,i}^{1/3}} \right)^3 = \ln 1/\eta_1^3 \gg 1, \quad (3.3.11)$$

которое автоматически выполняется из-за малости $\eta_1 \ll 1$. Величина L называется кулоновским логарифмом.

После несложных вычислений Л.Ландау из формулы (3.3.6) получил известный интеграл столкновений

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \int d\mathbf{p}_\beta \frac{2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 L}{u^3} (u^2 \delta_{ij} - u_i u_j) \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_{\alpha j}} f_\beta - \frac{\partial f_\beta}{\partial p_{\beta j}} f_\alpha \right], \quad (3.3.12)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$. Поэтому уравнение (3.1.5) с интегралом столкновений (3.1.12) называется кинетическим уравнением Ландау – Больцмана для полностью ионизованной плазмы, точнее, для плазменной среды, в которой преобладающую роль играют столкновения заряженных частиц между собой, а их столкновениями с нейтральными частицами можно пренебречь. В общем же случае нужно учитывать как столкновения заряженных частиц между собой, т.е. использовать интеграл (3.3.12), так и их столкновения с нейтральными частицами, т.е. использовать интеграл (3.3.12) с учетом (3.3.8), и представлять правую часть кинетического уравнения (3.3.5) в виде суммы двух интегралов столкновений.

Следует заметить, что приведенное выше выражение для интеграла столкновений Больцмана (3.3.6) относится к невырожденной плаз-

менной среде. Не представляет, однако, труда обобщить его на случай вырожденной плазменной среды. Для этого, очевидно, следует учесть принцип Паули и произвести следующую замену в квадратной скобке в подынтегральном выражении

$$\begin{aligned}
 & f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta) - f_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}'_\beta) \rightarrow \\
 & \rightarrow f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta) \left[1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha) \right] \left[1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\beta(\mathbf{p}'_\beta) \right] - \\
 & - f_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}'_\beta) \left[1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) \right] \left[1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\beta(\mathbf{p}_\beta) \right].
 \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Очевидно, что принцип Паули следует отнести только к электронам и ионам, т.е. частицам со спином. Поэтому (3.3.13) относится только к столкновениям заряженных частиц между собой. Окончательно после учета условия малости передачи импульса частиц при столкновениях обобщение интеграла Ландау (3.3.13) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha\beta} = & \int d\mathbf{p}'_\beta \frac{2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 L}{u^3} (u^2 \delta_{ij} - u_i u_j) \times \\
 & \times \left\{ 2 \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_{\alpha i}} \frac{\partial f_\beta}{\partial p_{\beta j}} \left[1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} (f_\alpha + f_\beta) \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial p_{\alpha i} \partial p_{\alpha j}} f_\beta \left[1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\beta \right] - \frac{\partial^2 f_\beta}{\partial p_{\beta i} \partial p_{\beta j}} f_\alpha \left[1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\alpha \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Приведенные выше кинетические уравнения с учетом как столкновений заряженных частиц с нейтральными, так и между собой с левой частью в виде (3.3.5) содержат только внешние поля \mathbf{E} и \mathbf{B} и внешнюю силу (3.3.4), но ни в коем случае не самосогласованные поля. По крайней мере, так это понимали С.Чепмен и Т.Каулинг и сам Л.Ландау. Это видно уже из того, как ими были рассмотрены процессы релаксации импульса и энергии в плазме при малом отклонении от термодинамического равновесия. И здесь следует особо подчеркнуть, что правые части кинетических уравнений, именуемые интегралами столкновений, получены исходя из интеграла Больцмана и поэтому очевидным образом их решением в отсутствие внешней силы являются термодинамически равновесные распределения –

распределения Максвелла в случае невырожденных носителей, либо распределения Ферми, если носители вырождены. Полное термодинамическое равновесие при этом подразумевает, что пространственные распределения плотностей $n_{0\alpha}$ и температур T_α однородны и, более того, плазма нейтральна и температуры всех частиц равны между собой:

$$T_e = T_i = T_0 = T, \quad \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{0\alpha} = 0. \quad (3.3.15)$$

Только в этом случае как левая, так и правая части кинетических уравнений (3.3.5) и (3.3.14) строго обращаются в нуль.

Рассмотрим теперь малое отклонение от равновесия и вычислим время возвращения системы в равновесное состояние, т.е. время релаксации. Начнем с релаксации импульса. Для этого рассмотрим следующую задачу: пусть в начальный момент времени электронная компонента обладает некоторой малой направленной скоростью \mathbf{u}_0 и выясним, как будет эта скорость релаксировать. Ограничимся для простоты рассмотрением невырожденной плазменной среды, считая, что вид функции распределения в процессе релаксации не меняется, оставаясь максвелловским с переменной направленной скоростью $\mathbf{u}_0(t)$ ("сдвинутый Максвелл"):

$$f_e = \frac{n_{0e}}{(2\pi m T_e)^{3/2}} e^{-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t))^2}{2T_e}}. \quad (3.3.16)$$

Заметим, что такое предположение, строго говоря, неверно, но качественно, с точностью до коэффициента порядка единицы, правильно описывает процесс. Подставляя функцию (3.3.16) в левую и правую части уравнения (3.3.5), умножая его на \mathbf{v} и интегрируя по импульсам, после несложных вычислений получим ответ:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nu_e \mathbf{u},$$

$$\nu_e = \begin{cases} \nu_{en} = \pi a^2 v_{Te} n_{0n} & \text{при } \nu_{en} \gg \nu_{эфф}, \\ \nu_{эфф} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^2 e_i^2 n_{0i} L}{T_e^{3/2}} & \text{при } \nu_{en} \ll \nu_{эфф}. \end{cases} \quad (3.3.17)$$

Здесь ν_{en} – частота столкновений электронов с нейтральными частицами, а $\nu_{эфф}$ – эффективная частота электрон-ионных столкновений.

В случае слабоионизованной плазмы $\nu_e = \nu_{en}$ и полученный ответ точен, а приближенность формулы (3.3.17) обусловлена только приближенностью модели твердых шариков. Что касается полностью ионизованной плазмы, то эта приближенность проявляется в предположении сохранения вида распределения (3.3.16) в процессе релаксации. Тем самым пренебрегается электрон-электронными столкновениями, которые при этом не дают вклада в релаксацию скорости $\mathbf{u}(t)$. Такое приближение принято называть лоренцовским, и в этом приближении из (3.3.17) находим закон релаксации:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 e^{-\nu_e t}. \quad (3.3.18)$$

Таким образом, $\tau_{\mathbf{u}} = 1/\nu_e$ – представляет собой характерное время релаксации импульса в плазме.

Рассмотрим теперь релаксацию энергии в невырожденной плазменной среде. Для этого предположим, что в начальный момент времени температура электронов T_{e0} не совпадает с температурой нейтрального газа (в случае слабоионизованной плазмы) либо ионов (в случае полностью ионизованной плазмы). И в этой задаче мы считаем, что распределения частиц в процессе релаксации остаются максвелловскими с переменной температурой $T_\alpha(t)$:

$$f_\alpha = \frac{n_\alpha}{[2\pi m_\alpha T_\alpha(t)]^{3/2}} e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2T_\alpha(t)}}. \quad (3.3.19)$$

Подставляя (3.3.19) в уравнение (3.3.5) для электронов и ионов, после несложных вычислений получим

$$\frac{\partial(T_e - T_n)}{\partial t} = 2\nu_{en} \frac{m}{M_n} (T_e - T_n), \quad (3.3.20)$$

$$\frac{\partial(T_e - T_i)}{\partial t} = 2\nu_{эфф} \frac{m}{M_i} \left(1 + \left|\frac{e_i}{e}\right|\right) (T_e - T_i).$$

При выводе этих соотношений в случае слабоионизованной плазмы температуру нейтралов T_n мы, естественно, считали постоянной (теплоемкость нейтральной компоненты намного больше, чем заряженной, из-за большей концентрации нейтральных частиц). Что касается полностью ионизованной плазмы, то необходимо учитывать изменение и температуры ионов, поскольку согласно закону сохранения

энергии очевидно

$$\frac{\partial(T_e + T_i)}{\partial t} = 0. \quad (3.3.21)$$

Из (3.1.21) следует экспоненциальная во времени релаксация разности температур, причем $\tau_\varepsilon \simeq \frac{1}{2} \frac{M}{m} \tau_u$, т.е. релаксация энергии происходит в $\frac{M}{m}$ раз медленнее, чем релаксация импульса. Важно отметить, что формулы (3.3.21) являются точными.

§ 3.4. Уравнения Власова и Власова-Максвелла

Выше мы неоднократно подчеркивали, что в уравнениях Больцмана для слабоионизованного газа и Больцмана-Ландау для полностью ионизованной плазмы поля \mathbf{E} и \mathbf{B} считаются внешними. Этим и объясняется то обстоятельство, что при исследовании релаксаций импульса и энергии полностью пренебрегалось электромагнитным полем. Как результат для процессов релаксации были получены аперiodические во времени зависимости с характерными временами, определяющимися частотами столкновений заряженных частиц (в рассмотренных выше случаях – столкновениями электронов).

Первый, кто обратил внимание на непоследовательность такой позиции, был А.А.Власов, который в 1938 году опубликовал работу, где утверждал, что в плазме в газовом приближении в уравнении Лиувилля (3.3.3) поля \mathbf{E} и \mathbf{B} следует считать не только внешними, а полными, учитывающими вклад полей, возбуждаемых в плазме индуцированными зарядами и токами с плотностями

$$\rho = \sum e \int f d\mathbf{p}, \quad \mathbf{j} = \sum e \int \mathbf{v} f d\mathbf{p}. \quad (3.4.1)$$

Здесь суммирование распространяется по всем сортам заряженных частиц плазмы. В результате будет учтено взаимодействие частиц с полями, создаваемыми всеми заряженными частицами, и это уравнение уже будет не нулевого порядка по параметрам взаимодействия η_0 и η_1 , а первого. И поэтому уравнения Лиувилля (соответственно для электронов и ионов) принимают вид

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = 0, \quad (3.4.2)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} – полные поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла, содержащим как внешние источники ρ_0 и \mathbf{j}_0 , так и индуцированные в плазме источники ρ и \mathbf{j} . Уравнения (3.4.1) и (3.4.2) образуют совместно с уравнениями Максвелла замкнутую систему, описывающую динамику плазмы в первом приближении по параметру взаимодействия. Таким образом, уравнение (3.4.2) дополняется с учетом (3.4.1) уравнениями поля

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \sum e \int f d\mathbf{p} + 4\pi\rho_0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum e \int \mathbf{v} f d\mathbf{p} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Уравнение (3.4.2) принято называть кинетическим уравнением Власова, а всю систему (3.4.2) и (3.4.3) – уравнениями Власова – Максвелла, или системой уравнений динамики плазмы с самосогласованным полем¹.

Первоначально А.А.Власов предполагал, что система (3.4.2) и (3.4.3) полностью описывает динамику плазмы, учитывая взаимодействие частиц между собой через самосогласованные поля, которое и является основным взаимодействием, а высшие приближения по параметрам η_0 и η_1 дают лишь малые поправки, по крайней мере, в случае сильноионизованной плазмы, в которой преобладает кулоновское взаимодействие. Это мнение А.А.Власова не совсем точно и поэтому позднее оно стало предметом дискуссии, которую мы вкратце воспроизведем в методических целях и отдавая дань истории.

Следуя А.А.Власову, рассмотрим малое отклонение δf_e функции распределения электронов от равновесного, однородного и стационарного распределения

$$f_e = f_{0e} + \delta f_e. \quad (3.4.5)$$

Однородное и стационарное распределение f_{0e} удовлетворяет уравнению (3.4.2), если поля $\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$, т.е. в условиях отсутствия внешних источников полей: $\rho_0 = 0$ и $\mathbf{j}_0 = 0$. Малое же отклонение δf_e (ионы считаем невозмущенными) в отсутствие внешних полей, соглас-

¹Этот термин поясняет преемственность идей А.А.Власова и работ И.Ленгмюра, который еще в 20-ые годы ввел понятие самосогласованного поля при гидродинамическом описании динамики плазмы.

но (3.4.2), удовлетворяет линеаризованному уравнению Власова

$$\frac{\partial \delta f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (3.4.6)$$

где поле \mathbf{E} определяется уравнениями (3.4.3). Мы будем предполагать, что поле \mathbf{E} потенциально (ниже будет показано, когда это действительно так), т.е. $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, и запишем для Φ уравнение Пуассона (3.4.3) в следующем виде:

$$\Delta \Phi = -4\pi e \int \delta f_e d\mathbf{p}. \quad (3.4.7)$$

Система уравнений (3.4.6) и (3.4.7) образует замкнутую систему линейных уравнений, позволяющую решить задачу временного развития любого начального возмущения $\delta f_e(0, \mathbf{r}, \mathbf{p})$. Предположим, что начальное возмущение можно представить в виде

$$\delta f_e(0, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \delta f(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (3.4.8)$$

Заметим, что при этом не нарушается общность рассмотрения, поскольку любое возмущение $\delta f_e(0, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ можно представить в виде ряда (или интеграла) Фурье как сумму возмущений типа (3.4.8).

Теперь мы можем искать решение системы (3.4.6) и (3.4.7) в виде $\delta f_e, \mathbf{E} \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ и из условия разрешимости этой системы найти $\omega(\mathbf{k})$; эта величина и будет описывать развитие начального возмущения вида (3.4.8) во времени. Из уравнения (3.4.6) при этом получаем

$$\delta f_e(\mathbf{v}) = \frac{-ie\mathbf{E} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{e\mathbf{k} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \Phi. \quad (3.4.9)$$

Подставляя это выражение в (3.4.7), получаем дисперсионное уравнение для определения $\omega(\mathbf{k})$:

$$1 - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} d\mathbf{p} = 0. \quad (3.4.10)$$

При решении этого уравнения возникли разногласия между А.А.Власовым и Л.Д.Ландау. А.А.Власов считал, что при интегрировании (3.4.10) полюс подынтегрального выражения нужно понимать в смысле главного значения. При этом еще в 1938 г. он нашел, что в

области характерных размеров возмущений, намного превосходящих дебаевский радиус электронов, т.е. при $kr_{De} \ll 1$, решение уравнения (3.4.10) имеет вид¹

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + 3k^2v_{Te}^2. \quad (3.4.11)$$

Это означает, что малые начальные возмущения с длиной волны $\frac{1}{k}$ будут осциллировать с частотой ω . Если возмущение содержит не одну длину k , а целый пакет с $\Delta k \ll k$, то оно будет расплываться с групповой скоростью

$$v_{гр} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 3 \frac{kv_{Te}}{\omega_{Le}} v_{Te} \ll v_{Te}. \quad (3.4.12)$$

Здесь следует отметить, что А.А.Власов понимал, что во времени кроме расплывания возмущения будут еще и затухать. Однако, этого затухания он не находил, отметив, что оно возникает лишь в следующем приближении по взаимодействию частиц, выходящем за рамки уравнения (3.4.6).

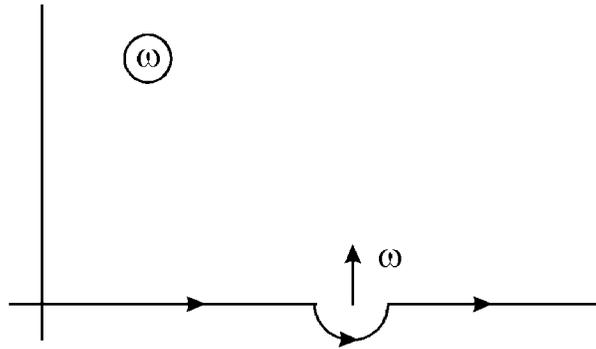


Рис. 3.3

Совершенно иначе подошел к решению уравнения (3.4.10) Л.Д.Ландау, анализируя его в 1946 году в статье, посвященной изучению развития начальных возмущений в плазме. Он правильно отметил, что согласно принципу причинности, полюс в подынтегральном выражении (3.4.10) следует обходить снизу (см. рис. 3.3), считая

$$\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{\mathcal{P}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (3.4.13)$$

¹Этот спектр колебаний отличается от спектра, найденного И.Ленгмюром, коэффициентом 3 вместо 1 в формуле (3.2.15), что указывает на неточность гидродинамического описания плазмы, отмеченную ранее.

В результате в дисперсионном уравнении появилось мнимое слагаемое, которое и привело к затуханию колебаний со спектром частот (3.4.11). Декремент затухания при этом легко находится и равен ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$)

$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}^4}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega_{Le}^2}{2k^2 v_{Te}^2}} - \frac{3}{2}. \quad (3.4.14)$$

Это и есть знаменитое "затухание Ландау", определяющее время релаксации $\tau = 1/\delta$ плазменных колебаний со спектром (3.4.11), найденным А.А.Власовым. Увлечшись критикой, Л.Ландау и не заметил противоречия со своей же работой 1936 года, когда он, решая задачу релаксации импульса (см. предыдущую лекцию), нашел совсем другую величину τ , а именно, $\tau = 1/\nu_e$.

Однако уже в 1946 году все парадоксы были разрешены Н.Н.Боголюбовым, который в известной монографии "Динамические проблемы статистической физики" обосновал как уравнение Больцмана в случае короткодействующих сил и выполнения условия применимости газового приближения $\eta_0 \ll 1$, так и уравнение Власова с интегралом столкновений Ландау для полностью ионизованной плазмы в приближении $\eta_1 \ll 1$. В некотором смысле А.А.Власов был прав, когда говорил, что его уравнение – лишь первое приближение; вторым приближением оказались либо интеграл столкновений Больцмана для слабоионизованной плазмы, либо интеграл столкновений Ландау – для полностью ионизованной плазмы.

Таким образом, мы теперь можем записать полное кинетическое уравнение для описания динамики заряженных частиц в плазме, обобщающее уравнение Власова (3.4.2):

$$\begin{aligned} \frac{d f_\alpha}{dt} &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = \\ &= \sum_\beta \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha n} + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha e} + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha i} \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Здесь $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha n}$ – интеграл столкновений заряженных частиц сорта α со всеми сортами нейтралов, который дается интегралом Больцмана (3.3.6) с учетом (3.3.8), $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha e, i}$ – интегралы столкновений Лан-

дау частиц сорта α с электронами и ионами различных сортов, т.е. интеграл Ландау (3.3.12) либо (3.3.14). Самосогласованные же электромагнитные поля, содержащиеся в левой части (3.4.15), учитывают взаимодействие частиц сорта α с полями, создаваемыми всеми заряженными частицами плазмы.

Здесь важно отметить, что самосогласованное взаимодействие всегда больше столкновительного, обусловленного столкновениями заряженных частиц между собой. В этом суть власовского приближения. Однако этого не скажешь о столкновениях заряженных частиц с нейтральными, ибо интеграл столкновений Больцмана выводится и без всякого учета самосогласованного поля, а поэтому это слагаемое в правой части (3.4.15) не считается малым по сравнению с последним слагаемым в левой части.

В заключение не лишне дать еще одно толкование сказанному. Именно, самосогласованное взаимодействие описывает взаимодействие заряженной частицы с полем, а интеграл столкновений – прямое, контактное взаимодействие частиц между собой. Таким образом мы показали, что взаимодействие заряженных частиц посредством самосогласованного поля в плазме всегда больше, чем их прямое взаимодействие между собой. В этом суть и сила власовского приближения. Отсюда проясняется и физический смысл затухания Ландау – оно состоит в поглощении плазменных колебаний (а здесь лучше говорить о плазменных волнах) со спектром частот (3.4.11) электронами плазмы. Электроны при своем тепловом движении, естественно, излучают и поглощают электромагнитные волны. Поскольку в отсутствие внешнего магнитного поля их движение свободное, а поэтому равномерное и прямолинейное, то единственным механизмом излучения и поглощения волн является черенковский механизм, носящий резонансный характер и, как известно из общих курсов электродинамики сред, имеющий место при условии

$$\omega = kv. \quad (3.4.16)$$

Именно это и отражено в правиле обхода полюса (3.4.13). Вероятности излучения и поглощения электронами плазмы электромагнитных волн равны между собой, но в распределении Максвелла число частиц, поглощающих волны, больше, чем излучающих (см. рис. 3.4), вследствие чего в суммарном эффекте поглощение волн преобладает и плазменные волны затухают со временем. Этой конкуренцией излу-

чения и поглощения объясняется вид декремента затухания Ландау (3.4.13), который повторяет распределение Максвелла. В следующем разделе мы убедимся, что он пропорционален производной равновесной функции распределения $f_0(p)$ частиц по энергии.

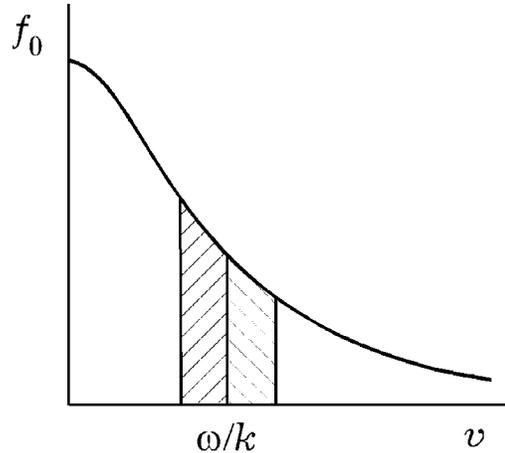


Рис. 3.4

§ 3.5. Интеграл столкновений Батнагара-Гросса-Крука

Кинетическое уравнение (3.4.15) благодаря его правой части оказывается сложным нелинейным интегральным уравнением, решить которое даже в линеаризованном пределе не очень легко. Поэтому уже давно физики научились конструировать более простые модельные интегралы столкновений, которые намного проще анализировать. При этом, однако, надо помнить, что они приближенные и лишь качественно правильно описывают динамику плазмы.

При конструировании любого модельного интеграла упругих столкновений, а мы только ими и ограничимся, следует исходить из общих законов сохранения числа частиц данного сорта, импульса сталкивающихся частиц и их энергии. Математически это означает, что долж-

ны выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{p} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} &= 0, \\ \int \mathbf{p}_\alpha \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} d\mathbf{p}_\alpha + \int \mathbf{p}_\beta \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial t} \right)_{st}^{\beta\alpha} d\mathbf{p}_\beta &= 0, \\ \int \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} d\mathbf{p}_\alpha + \int \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial t} \right)_{st}^{\beta\alpha} d\mathbf{p}_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Кроме того, интеграл столкновений должен обращаться в нуль при подстановке в него равновесных распределений Максвелла либо Ферми для функций распределения сталкивающихся частиц, что является следствием H -теоремы Больцмана.

Существует множество различных модельных интегралов столкновений. Самым совершенным из них является интеграл Батнагара-Гросса-Крука (БГК) для невырожденной плазмы, предложенный ими в 1954 году. Он имеет вид

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}(f_\alpha) = -\nu_{\alpha\beta}(f_\alpha - N_\alpha \Phi_{\alpha\beta}), \quad (3.5.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{(2\pi m_\alpha T_{\alpha\beta})^{3/2}} e^{-\frac{m_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)^2}{2T_{\alpha\beta}}}, \\ \mathbf{v}_\alpha &= \frac{1}{N_\alpha} \int d\mathbf{p} \mathbf{v} f_\alpha, \quad N_\alpha = \int d\mathbf{p} f_\alpha, \\ T_{\alpha\beta} &= \frac{m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}, \quad T_\alpha = \frac{m_\alpha}{2N_\alpha} \int d\mathbf{p} f_\alpha (\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)^2. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Наконец, для выполнения законов сохранения импульса и энергии, как легко показать из (3.5.1) и (3.5.2), необходимо, чтобы

$$m_\alpha N_\alpha \nu_{\alpha\beta} = m_\beta N_\beta \nu_{\beta\alpha}. \quad (3.5.4)$$

Физический смысл величин $\nu_{\alpha\beta}$ можно прояснить, рассмотрев с помощью модельного интеграла БГК задачи релаксации импульса и

энергии и сравнив результаты с полученными в предыдущей лекции с помощью точных интегралов столкновений Больцмана и Ландау. В итоге получим почти очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} \nu_{en} &= \pi a^2 v_{Te} n_{0n}, & \nu_{in} &= \pi a^2 v_{Ti} n_{0n}, \\ \nu_{ee} &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \frac{e^4 n_{0e} L}{T_e^{3/2}}, & \nu_{ei} &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^2 e_i^2 n_{0i} L}{T_e^{3/2}}, \\ \nu_{ii} &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{M}} \frac{e_i^4 n_{0i} L}{T_i^{3/2}}, & \nu_{ie} &= \frac{m}{M} \left| \frac{e_i}{e} \right| \nu_{ei}, \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

которые будут использоваться ниже. При этом следует иметь в виду, что полученные с помощью интеграла БГК результаты являются верными только качественно; количественно они могут быть использованы с точностью до множителя порядка единицы. Но простота интеграла БГК по сравнению с точными является настолько существенной, что ниже мы в основном и будем ограничиваться его использованием.

Не представляет труда обобщить интеграл БГК на случай вырожденных носителей плазмы твердого тела, в которой рассеяние носителей в основном происходит на колебаниях решетки (фононах) и поэтому приближение слабоионизованной плазмы хорошо оправдано. При этом следует учесть, что равновесным в такой плазменной среде является распределение Ферми, а поэтому в результате столкновений частиц именно оно и должно устанавливаться:

$$f_{0\alpha}(\mathcal{E}) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \begin{cases} 1 & \text{при } \mathcal{E} < \mathcal{E}_{F\alpha}, \\ 0 & \text{при } \mathcal{E} > \mathcal{E}_{F\alpha}. \end{cases} \quad (3.5.6)$$

Кроме того, поскольку при таком рассеянии происходят столкновения легких носителей заряда (электронов и дырок) с тяжелой решеткой, то передачей энергии при столкновениях можно пренебречь. В результате интеграл БГК для других типов рассеяния вырожденных носителей можно записать в виде:

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = -\nu_{\alpha\beta} (f_\alpha - f_{0\alpha}), \quad (3.5.7)$$

где $f_{0\alpha}$ дается формулой (3.5.6), а $\nu_{\alpha\beta}$ – обратные времена жизни носителей, которые определяются из эксперимента.

§ 3.6. Кинетическое уравнение для носителей заряда в плазме твердого тела с учетом динамики кристаллической решетки

До сих пор описание динамики носителей заряда носило микроскопический характер¹. В случае газовой плазмы, в которой электроны и ионы суть реальные слабо взаимодействующие между собой частицы, такое описание было полностью последовательным. В случае же плазмы твердого тела мы поступили не очень корректно, отождествляя электроны и дырки в металлах и полупроводниках с газом носителей заряда. Правда, мы уже отмечали, что носители заряда в плазме твердого тела – это не реальные частицы, а лишь возбуждения системы электронов в кристаллической решетке. Возбуждения с полуцелым спином и зарядом, положительным, либо отрицательным, но равным по величине заряду свободного электрона, называются дырками и электронами, соответственно, и описываются уравнениями движения реальных частиц. При этом энергетический спектр носителей заряда для заданного равновесного состояния кристаллической решетки, как отмечалось выше, определяет их эффективную массу $m_{ij}^{-1}(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 \mathcal{E}(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}$, которая является величиной тензорной. Только в случае квадратичной изотропной функции $\mathcal{E}(\mathbf{p})$ мы получаем, что эффективная масса носителей заряда оказывается скалярной и не зависящей от импульса величиной.

Совершенно очевидно, что поскольку состояние решетки определяет энергетический спектр, а следовательно, и движение носителей

¹Здесь мы под словом "микроскопический" понимаем микроскопичность понятий самих частиц – электронов, ионов и нейтральных атомов и молекул. В этом смысле понятия носителей заряда в твердых телах – электронов и дырок, не являются понятиями микроскопическими. Это квазичастицы, поведение которых отождествляется с поведением реальных частиц. В связи со сказанным отметим, что понятием "микроскопичности" полей, которое обычно вводится в электродинамике материальных сред и которое связывается с усреднением по малым пространственным размерам, в нашем курсе мы не пользуемся. В электродинамике сред, учитывающей не только временную, но и пространственную дисперсию, в этом нет необходимости. Степень макроскопичности электродинамики определяется степенью макроскопичности модели среды, используемой при выводе материальных соотношений. В этом смысле наиболее микроскопическими являются модели, в которых для описания движения частиц среды как свободных, так и связанных, используются уравнения Ньютона (в классическом случае), либо уравнения Шредингера-Дирака (в квантовом случае), в которых электромагнитные поля тоже микроскопичны без каких-либо усреднений. Очевидно, такие модели просто необозримы и требуют компьютерных методов анализа. Все другие модели как гидродинамические, так и кинетические в той или иной степени основаны на пространственных, временных, либо статистических усреднениях и поэтому, строго говоря, макроскопичны.

заряда, то и само движение носителей заряда, в свою очередь, влияет на состояние кристаллической решетки, т.е. на характер ее движения. До сих пор мы эту взаимосвязь не учитывали. Перейдем теперь к ее учету, и поскольку вплоть до настоящего времени здесь нет последовательной микроскопической теории, то мы будем делать это во многом феноменологически. При этом мы будем ограничиваться лишь классическим рассмотрением, пренебрегая квантовыми эффектами в движении как носителей заряда, так и самой кристаллической решетки.

Если состояние кристаллической решетки изменяется, например, происходят деформации со смещением ее элементов относительно равновесного состояния $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, то меняется потенциал решетки и как следствие, спектр энергии носителей. Считая, что это происходит мгновенно, мы можем записать

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathcal{E}(\mathbf{p}) + \lambda_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial u_i}{\partial r_j}. \quad (3.6.1)$$

Здесь $\mathcal{E}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ – энергия носителей заряда в деформированной решетке, а $\mathcal{E}(\mathbf{p})$ – при отсутствии деформации, $\lambda_{ij}(\mathbf{p})$ – коэффициент пропорциональности между изменением энергии и смещением \mathbf{u} .

Формула (3.6.1) означает, что на частицу при деформациях кристалла действует сила

$$F_i^{\text{КР}} = -\lambda_{ks}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial r_i \partial r_s}, \quad (3.6.2)$$

которая, естественно, должна быть учтена в кинетическом уравнении с самосогласованным полем:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left\{ e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]) - \lambda_{ks}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial r_i \partial r_s} \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st}. \quad (3.6.3)$$

Из классического рассмотрения следует и выражение для скорости носителей заряда \mathbf{v} , которая фигурирует в уравнении (3.6.3):

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \lambda_{ij}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial u_i}{\partial r_j}. \quad (3.6.4)$$

Уравнение (3.6.3) должно быть дополнено наряду с уравнениями Максвелла также и уравнением движения для кристаллической решетки, которое берется из теории упругости. Однако, в последнем

кроме собственно сил упругости следует учитывать силу, действующую на решетку со стороны носителей заряда. Эта сила согласно (3.6.3) записывается в виде

$$F_i^{\text{н}} = \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial r_k} \int d\mathbf{p} \lambda_{ik}^{\alpha}(\mathbf{p}) f_{\alpha}(\mathbf{p}). \quad (3.6.5)$$

Здесь суммирование рспространяется по всем сортам носителей заряда в твердотельной плазме, т.е. по электронам и дыркам. В результате уравнение движения решетки приобретает вид

$$\begin{aligned} \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda_{iklj} \frac{\partial^2 u_j}{\partial r_k \partial r_l} + \rho^{(i)} E_i + \\ + \frac{1}{c} [\mathbf{j}^{(i)} \mathbf{B}]_i + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial r_k} \int d\mathbf{p} \lambda_{ik}^{\alpha}(\mathbf{p}) f_{\alpha}(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

Здесь $\rho^{(m)}$ – плотность вещества решетки, $\rho^{(i)}$ и $\mathbf{j}^{(i)}$ – соответственно плотности заряда и тока решетки (в случае заряженной решетки), а $\lambda_{iklm}(\mathbf{p})$ – тензор модулей упругости, определяющий упругую силу, возникающую при деформации решетки.

Плотности заряда и тока кристаллической решетки, как обычно, связаны между собой уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho^{(i)}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}^{(i)} = 0, \quad (3.6.7)$$

причем, если кристаллическая решетка заряженная, как это имеет место, например, в металлах, то задано $\rho^{(i)}$, а $\mathbf{j}^{(i)} = \rho^{(i)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$. Если же решетка не заряжена, то сила Лоренца в уравнении (3.6.6), вообще говоря, отсутствует. Исключение составляют так называемые пьезоэлектрики и пьезополупроводники, в которых при деформациях возникают электромагнитные поля, индуцирующие в решетке заряды $\rho^{(\Pi)}$ и токи $\mathbf{j}^{(\Pi)}$. Очевидно, что индуцированные заряды и токи связаны между собой уравнением непрерывности, причем в самом общем виде связь между $\mathbf{j}^{(\Pi)}$ и вектором смещения решетки $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ записывается как

$$j_i^{(\Pi)} = \beta_{i,kl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial r_l}, \quad (3.6.8)$$

где $\beta_{i,kl}$ – пьезоэлектрический тензор среды. При этом к правой части уравнения (3.6.6) следует добавить пьезоэлектрическую силу, ко-

торая согласно (3.6.8) дается выражением

$$F_i^{\Pi} = \frac{\partial}{\partial r_k} \beta_{i,kl} E_l. \quad (3.6.9)$$

Если среда обладает пьезоэлектрическими свойствами, то сила (3.6.9) намного превосходит силу (3.6.5), обусловленную деформационным потенциалом. Последняя проявляется только в непьезоэлектрических средах. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся анализом только сильных пьезоэлектрических эффектов, пренебрегая в уравнении (3.6.6) деформационным потенциалом. В результате для незаряженного пьезодиэлектрика это уравнение записывается в виде

$$\rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r_j} \left[\lambda_{ijklm} \frac{\partial u_l}{\partial r_m} + \beta_{i,jl} E_l \right]. \quad (3.6.10)$$

Это уравнение дополняется уравнениями Максвелла и кинетическими уравнениями для носителей заряда, причем полный индуцированный в среде ток представляется как сумма токов носителей заряда и пьезоэлектрического тока

$$j_i = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} v_i d\mathbf{p} + \beta_{i,kl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial r_l}. \quad (3.6.11)$$

Именно такой подход и используется в дальнейшем при исследовании связанных электромагнитных и упругих колебательных процессов в пьезоэлектрических средах.

В заключение заметим, что если кристаллическая решетка обладает магнитными свойствами, то следует учитывать и магнитное взаимодействие решетки с носителями заряда. Однако при этом, строго говоря, нужно прибегать к квантовому рассмотрению, что выходит за рамки настоящего курса.

§ 3.7. Квантовое кинетическое уравнение с самосогласованным полем

Выше мы неоднократно подчеркивали, что в настоящих лекциях мы ограничиваемся анализом лишь классических движений носителей заряда, описываемых классическим кинетическим уравнением с

самосогласованным электромагнитным полем. В конце § 1.1 отмечалось, что для квантового кинетического описания системы носителей заряда следует исходить из квантового уравнения движения – уравнения Шредингера. Хотя мы и не будем изучать в дальнейшем чисто квантовые эффекты, все же для полноты картины и некоторого дополнительного обоснования классического кинетического уравнения с самосогласованным полем (3.4.2) мы приведем здесь вывод квантового кинетического уравнения в том же одночастичном приближении, учитывая только взаимодействие носителей с электромагнитным полем и полностью пренебрегая их взаимной корреляцией.

Будем исходить из уравнения Шредингера для волновой функции заряженной частицы в поле электромагнитной волны

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi = \left[\frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi \right] \Psi. \quad (3.7.1)$$

Здесь Φ и \mathbf{A} – скалярный и векторный потенциалы поля

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (3.7.2)$$

а $\hat{\mathbf{P}}$ – оператор канонического импульса частицы, связанный с кинематическим импульсом \mathbf{p} , фигурирующим в изложенной выше классической кинетической теории, соотношением $\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$.

Определим одночастичную матрицу плотности, характеризующую статистические свойства системы невзаимодействующих между собой носителей заряда, с помощью соотношения

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}', t). \quad (3.7.3)$$

Легко понять, что $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ представляет собой вероятность нахождения частицы в точке \mathbf{r} в момент времени t .

Стремясь быть максимально близкими к классическому описанию, мы воспользуемся представлением Вигнера для матрицы плотности

$$f(\mathbf{P}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{\tau} e^{-i\boldsymbol{\tau} \mathbf{P}} \rho \left(\mathbf{r} - \frac{\hbar \boldsymbol{\tau}}{2}, \mathbf{r} + \frac{\hbar \boldsymbol{\tau}}{2}, t \right). \quad (3.7.4)$$

Функцию $f(\mathbf{P}, \mathbf{r}, t)$ принято называть квантовой функцией распределения. Она удобна тем, что с ее помощью средние величины определяются точно так же, как и с помощью классической функции распределения. Так, можно показать, что плотность тока носителей одного

сорта дается формулой

$$\mathbf{j} = \frac{e}{m} \int d\mathbf{P} f(\mathbf{P}, \mathbf{r}, t) \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = \frac{e}{m} \int d\mathbf{p} \mathbf{p} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t). \quad (3.7.5)$$

Соотношение (3.7.5) легко получается из уравнения для матрицы плотности, которое в соответствии с (3.7.1) имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) = (\hat{H} - \hat{H}'^*) \rho(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t). \quad (3.7.6)$$

Здесь \hat{H} – гамильтониан, действующий на координаты \mathbf{r} , а \hat{H}' – тот же оператор, действующий на \mathbf{r}' . Учитывая (3.7.3), из (3.7.5) находим уравнение для квантовой функции распределения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{P}, \mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{i}{\hbar} \int d\boldsymbol{\tau} d\boldsymbol{\eta} d\mathbf{P}' d\mathbf{r}' e^{i[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{P} - \mathbf{P}') + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] } \times \\ &\quad \times f(\mathbf{P}', \mathbf{r}', t) \left[H \left(\mathbf{P}' + \frac{\hbar\boldsymbol{\eta}}{2}, \mathbf{r}' - \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - H \left(\mathbf{P}' - \frac{\hbar\boldsymbol{\eta}}{2}, \mathbf{r}' + \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Здесь уже $H(\mathbf{P}, \mathbf{r})$ – функция Гамильтона, равная, согласно (3.7.1)

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi. \quad (3.7.8)$$

Уравнение (3.7.7) является квантовым обобщением уравнения (3.1.6). Более того, в классическом пределе при $\hbar \rightarrow 0$ это уравнение с учетом определений (3.7.2) переходит в (3.4.2) и тем самым обосновывает его. Тем не менее уравнение (3.7.7) является неполным, поскольку (3.7.1) полностью пренебрегает наличием спина у носителей заряда. Они же как в газовой, так и в твердотельной плазме являются частицами с полуцелым спином и описываются, строго говоря, не уравнением Шредингера (3.7.1), а матричными (спинорными) уравнениями Паули – Дирака. Спинором второго порядка оказывается при этом матрица плотности, подчиняющаяся матричному уравнению. Обсуждение всех этих вопросов даже в чисто иллюстративных

целях выходит, однако, далеко за рамки настоящего курса и поэтому мы отсылаем любознательного читателя к специальной литературе.

В заключение настоящего параграфа получим из уравнения Шредингера (3.7.1) аналог гидродинамических уравнений бесстолкновительной холодной плазмы с самосогласованным полем. Для этого представим волновую функцию в виде

$$\Psi = a(\mathbf{r}, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (3.7.9)$$

Используя квантомеханические определения средних плотностей заряда и тока (см. Л.Ландау и Е.Лифшиц "Квантовая механика", Москва, 1974)

$$\begin{aligned} \rho &\equiv en = e|\Psi|^2 = ea^2, \\ \mathbf{j} &\equiv en\mathbf{V} = \frac{ie\hbar}{2m} (\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi) - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A}|\Psi|^2 = \\ &= \frac{ea^2}{m} \left(\nabla S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right). \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Из уравнения (3.7.1) получаем замкнутую систему уравнений для $n(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{V} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}] \right\} + \\ &+ \frac{\hbar^2}{4m^2} \nabla \left\{ \frac{1}{n} \left[\Delta n - \frac{(\nabla n)^2}{2n} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

Уравнения (3.7.11) отличаются от уравнений гидродинамики холодной бесстолкновительной плазмы наличием в правой части уравнения Эйлера чисто квантовой силы. В классическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$) эта сила, естественно, отсутствует. Уравнения (3.7.11) известны как уравнения квантовой гидродинамики для холодной бесстолкновительной плазмы. Ниже мы покажем, что они очень удобны для изучения квантовых свойств плазмы, в особенности, в линейном приближении.

§ 3.8. Обоснование простейших гидродинамических моделей динамики плазменных сред

В своем изложении электродинамики плазменных сред мы в основном будем придерживаться кинетического описания динамики носителей заряда как наиболее общей и полной модели. Однако не следует забывать, что еще до появления кинетической теории использовались простые гидродинамические уравнения для описания динамики носителей. Гидродинамические модели, вообще говоря, более просты и, самое главное, более наглядны, чем кинетические, поскольку они имеют дело в основном с тремя функциями координат и времени. Это плотность, средняя скорость и средняя энергия носителей каждого сорта, которые представляют собой моменты функции распределения

$$N_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{p} f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t),$$

$$N_\alpha \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{p} \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \quad (3.8.1)$$

$$N_\alpha \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{p} \frac{m_\alpha v^2}{2} f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t).$$

Величины N_α , $\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ и $\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ являются функциями только \mathbf{r} и t , в то время как $f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ зависит еще и от непрерывно меняющегося аргумента \mathbf{p} , что и делает кинетическую модель существенно более сложной по сравнению с гидродинамической.

Из многочисленных гидродинамических моделей мы рассмотрим лишь самые простые, с помощью которых достигается наибольшая наглядность изложения, и дадим их обоснование, исходя из кинетической модели. Начнем с наиболее простого случая бесстолкновительной плазмы, описываемой уравнением Власова для каждого сорта носителей заряда в плазменной среде:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \mathbf{B}] \} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (3.8.2)$$

Поскольку мы пренебрегли столкновениями, то тем самым мы вправе рассматривать только такие процессы, которые протекают быстрее, чем время между столкновениями частиц, и пространственные масштабы

которых меньше длин свободного пробега частиц, т.е.

$$\frac{1}{\tau} \gg \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta}, \quad L \ll \frac{\langle v \rangle_{\alpha}}{\sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta}}. \quad (3.8.3)$$

Здесь $\langle v \rangle_{\alpha}$ – средняя скорость теплового движения носителей сорта α , τ – характерное время, а L – характерный пространственный масштаб рассматриваемых процессов.

Домножим уравнение (3.8.2) на 1 и \mathbf{p} и проинтегрируем по импульсу. В результате получим

$$\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div} N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} = 0, \quad (3.8.4)$$

$$\frac{\partial N_{\alpha} P_{\alpha i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_j} \Pi_{\alpha i j} = e_{\alpha} N_{\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_{\alpha} \mathbf{B}] \right\}_i,$$

где $\mathbf{P}_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}}{\sqrt{1 - V_{\alpha}^2/c^2}}$ – средний импульс частиц сорта α ,

$$\Pi_{\alpha i j} = \int d\mathbf{p} v_j p_i f_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t). \quad (3.8.5)$$

Первое уравнение (3.8.4) представляет собой уравнение непрерывности, а второе – уравнение движения, которое, однако, гидродинамически незамкнуто, так как величина (3.8.5) не выражена через гидродинамические величины. В бесстолкновительной плазме известны два предельных случая, когда удается $\Pi_{\alpha i j}$ выразить через гидродинамические величины. Первый из них известен как предел ”холодной” плазмы и соответствует процессам, характерная скорость которых больше тепловых скоростей частиц, т.е.

$$\frac{L}{\tau} \sim \frac{\omega}{k} \gg \langle v \rangle_{\alpha}. \quad (3.8.6)$$

В этом пределе тепловым разбросом частиц по скоростям можно пренебречь, а это значит, что

$$f_{\alpha} \sim \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_{\alpha}). \quad (3.8.7)$$

Подстановка этого распределения в (3.8.5) дает

$$\Pi_{\alpha i j} = N_{\alpha} m_{\alpha} V_{\alpha i} V_{\alpha j} (1 - V_{\alpha}^2/c^2)^{-1/2}.$$

В результате второе уравнение (3.8.4) легко сводится к виду уравнения Эйлера для релятивистского движения

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \nabla) \right] \frac{m_\alpha \mathbf{V}_\alpha}{\sqrt{1 - V_\alpha^2/c^2}} = e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \mathbf{B}] \right\}. \quad (3.8.8)$$

Уравнение (3.8.8) и первое уравнение (3.8.4) совместно с уравнениями Максвелла, в которых

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha \mathbf{V}_\alpha, \quad \rho = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha, \quad (3.8.9)$$

образуют полную систему уравнений двухжидкостной гидродинамики "холодной" бесстолкновительной плазменной среды. Две жидкости соответствуют носителям заряда двух знаков – электронам и ионам (либо дыркам).

Выше мы полностью пренебрегли столкновениями частиц, что соответствует условию применимости уравнения Власова (3.8.2). Однако, зная из предыдущего анализа как происходит релаксация импульса в плазменной среде, нетрудно сообразить, что учет столкновений в правой части (3.8.8) приведет к появлению силы трения. В случае слабо ионизованной плазмы это трение заряженных носителей о покоящийся нейтральный газ либо решетку. Эту силу следует писать в виде

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nu_{\alpha n} m_\alpha \mathbf{V}_\alpha. \quad (3.8.10)$$

Если же плазма сильно ионизована, то имеет место взаимное трение носителей заряда, причем

$$\mathbf{F}_e = -\mathbf{F}_i = -m\nu_{\text{эфф}}(\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i). \quad (3.8.11)$$

Учет столкновений приводит, кроме того, к двум другим эффектам, а именно, к омическому нагреву носителей в электрическом поле и процессам релаксации энергии, стремящимся выравнять температуры частиц разного сорта. Эти процессы, однако, уже лежат вне рамок приближения гидродинамики "холодной" плазмы.

Рассмотренная модель "холодной" плазмы по-существу полностью пренебрегает тепловым движением носителей, и поэтому с одинаковым успехом применима как в случае невырожденных, так и в случае вырожденных носителей заряда.

Рассмотрим теперь второй предельный случай, когда возможен вывод гидродинамических уравнений для бесстолкновительной плазменной среды. Этот предел соответствует таким характерным скоростям процессов, которые лежат между средними тепловыми скоростями электронов и ионов (либо тяжелых носителей заряда), т.е.

$$\langle v \rangle_i \ll \frac{L}{\tau} \sim \frac{\omega}{k} \ll \langle v \rangle_e. \quad (3.8.12)$$

При учете левого неравенства (3.8.12) из кинетического уравнения Власова для ионов получаем уравнение типа (3.8.8), которое для простоты запишем для случая отсутствия внешнего магнитного поля:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \right] \mathbf{V} = \frac{e_i}{M} \mathbf{E}. \quad (3.8.13)$$

Заметим, что здесь опущен индекс у ионной скорости, так как она совпадает с массовой скоростью всей плазмы \mathbf{V}_m . Далее, поскольку нас интересуют согласно (3.8.12) малые характерные скорости процессов, то используется нерелятивистский предел. Кроме того, в дальнейшем поле \mathbf{E} будем считать потенциальным, т.е. $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Это позволяет записать решение кинетического уравнения Власова для электронов в следующем виде:

$$f_e = f_e \left[\frac{1}{T_e} \left(\frac{mv^2}{2} + e\Phi \right) \right] = \frac{N_{0e} \exp \left[-\frac{mv^2}{2T_e} - \frac{e\Phi}{T_e} \right]}{(2\pi m T_e)^{3/2}}. \quad (3.8.14)$$

При получении этого решения была опущена временная производная в уравнении Власова для электронов и предположено, что они невырождены и подчиняются распределению Максвелла – Больцмана. Из (3.8.14) находим

$$N_e = N_{e0} \exp \left(-\frac{e\Phi}{T_e} \right). \quad (3.8.15)$$

Отсюда видно, что N_{e0} – плотность электронов в отсутствие поля, т.е. при $\Phi = 0$.

Теперь мы можем плотность электронов связать с электрическим полем и, воспользовавшись этим, исключить электрическое поле из (3.8.13). В результате получим

$$\rho_m \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_m \nabla) \right) \mathbf{V}_m = -\nabla P. \quad (3.8.16)$$

Здесь $\rho_m = N_i M$ – массовая плотность, $P = Z N_i T_e = N_e T_e$ – давление плазмы, которое определяется только электронной компонентой. Последнее является следствием левого неравенства (3.8.12). Действительно, из (3.8.16) следует, что характерная скорость процессов, описываемых этим уравнением, порядка $\sim \sqrt{P/\rho_m} \simeq \sqrt{T_e/M}$. Эта величина должна быть намного больше тепловой скорости ионов, что возможно, если только плазма сильно неизотермическая, причем $T_e \gg T_i$. В этом же случае при квазинейтральности плазмы ее полное давление, очевидно, определяется электронной компонентой.

Уравнение (3.8.4) для ионов (уравнение непрерывности), которое мы (умножив на e_i) перепишем в виде

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_m \mathbf{V}_m = 0, \quad (3.8.17)$$

образуют полную систему гидродинамических уравнений для изотропной неизотермической бесстолкновительной плазмы. Эта система уравнений по виду полностью совпадает с классическими уравнениями гидродинамики идеальной жидкости. Имеется, однако, одно принципиальное отличие. А именно, уравнения одножидкостной гидродинамики для плазмы не содержат аналога уравнению переноса тепла, что является, в конечном счете, следствием правого неравенства (3.8.12). Оно позволило нам найти решение (3.8.14), в котором $T_e = \text{const}$ (произвольная постоянная, не зависящая ни от времени, ни от координаты). Постоянство электронной температуры легко понять, если заметить, что в бесстолкновительном пределе электроны переносят тепло путем свободного пролета, т.е. с тепловой скоростью, которая намного превосходит характерную скорость рассматриваемых гидродинамических процессов. Как следствие этого температура электронов успевает выравняться во всем пространстве и стать однородной. Мы как бы имеем систему с неограниченно большой электронной теплопроводностью.

Не представляет труда обобщить полученную систему одножидкостной гидродинамики бесстолкновительной неизотермической плазмы на случай наличия магнитного поля. Вывод этих уравнений в условиях (3.8.12) также основывается на решении (3.8.14), и мы при-

ведем здесь окончательный результат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_m \mathbf{V}_m &= 0, \\ \rho_m \left[\frac{\partial \mathbf{V}_m}{\partial t} + (\mathbf{V}_m \nabla) \mathbf{V}_m \right] &= -\nabla P + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}], \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} [\mathbf{V}_m \mathbf{B}] &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (3.8.18)$$

Эти уравнения совпадают с известными уравнениями для идеальной магнитной гидродинамики в предположении постоянной температуры электронов $T_e = \text{const}$, когда давление дается формулой

$$P = N_e T_e = Z N_i T_e = \frac{Z \rho_m T_e}{M}. \quad (3.8.19)$$

Наконец, заметим, что рассмотренная здесь система одножидкостной гидродинамики неизотермической бесстолкновительной плазменной среды легко обобщается на случай вырожденных электронов, если $\mathcal{E}_{Fe} \gg T_e \gg T_i$. Для этого в ней нужно изменить уравнение для давления, т.е. уравнение состояния, записав его в виде

$$P = \frac{1}{5} \mathcal{E}_{Fe} N_e = \frac{(2\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N_e^{5/3}}{2m}. \quad (3.8.20)$$

В заключение еще раз подчеркнем, что мы ограничились лишь самыми простыми моделями гидродинамики плазмы – теми, которые используются в дальнейшем для наглядного толкования результатов кинетической модели.

Задачи по теме III

Задача 1. С помощью уравнения Власова – Ландау найти функцию распределения электронов и проводимость полностью ионизованной плазмы во внешнем относительно слабом постоянном электрическом поле \mathbf{E} .

Решение.

В § 3.3 отмечалась приближенность описания релаксации импульса электронов в полностью ионизованной плазме с помощью формулы (3.3.17) из-за предположения о сохранении функции распределения электронов в виде (3.3.16). Это

эквивалентно пренебрежению электрон-электронными столкновениями в процессе релаксации. Чтобы убедиться в этом, при решении сформулированной задачи учтем такие столкновения, для чего будем решать уравнение

$$\frac{e\mathbf{E}_0}{m} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ee} + \left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ei}, \quad (1)$$

используя при этом интеграл столкновений Ландау (3.3.12).

Внешнее поле \mathbf{E}_0 считаем слабым настолько, чтобы приобретаемая электронами дрейфовая скорость была мала по сравнению с их тепловой скоростью. Тогда можно записать $f_e = f_{0e} + \delta f_e$, где f_{0e} – максвелловское распределение, а δf_e – малая поправка. Что касается f_i , то его мы считаем невозмущенным максвелловским распределением, поскольку из-за большой массы ионов они действию поля практически не подвергаются. Линеаризуем (1) по δf_e и представим его в виде разложения по полиномам Сонина:

$$\delta f_e = \frac{\mathbf{v}\mathbf{E}_0}{v} \left[a_0 + a_1 \left(\frac{5}{2} - \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right) \right] f_{0e}, \quad (2)$$

где a_0 и a_1 – не зависящие от скорости \mathbf{v} коэффициенты разложения. Для них путем интегрирования линеаризованного уравнения (1) получаем:

$$\frac{eE_0}{T_e} = \nu_{\text{эфф}} \left(a_0 + \frac{3}{2} a_1 \right), \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} a_0 + \frac{13 + 4\sqrt{2}}{4} a_1 = 0.$$

При получении этих соотношений было принято, что $e_i = -e$, т.е. ионы считались однозарядными. Решая (3) и определяя тем самым δf_e , окончательно находим ток

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} \delta f d\mathbf{p} = 1,96 \frac{e^2 n_{0e}}{m\nu_{\text{эфф}}} \mathbf{E}_0. \quad (4)$$

Таким образом, проводимость полностью ионизованной плазмы определяется формулой, известной как формула Спитцера,

$$\sigma = 1,96 \frac{e^2 n_{0e}}{m\nu_{\text{эфф}}}. \quad (5)$$

Заметим, что коэффициент 1,96 здесь возник из-за учета электрон-электронных столкновений. Именно в этом проявляется неточность приближения, использованного выше при исследовании релаксации импульса в полностью ионизованной плазме. Заметим здесь же, что этот численный множитель все больше приближается к 1 с ростом зарядового числа ионов $Z = \left| \frac{e_i}{e} \right|$ и уже при $Z \geq 10$ он практически равен 1. Поэтому при больших Z полностью ионизованную плазму с хорошей степенью точности можно считать лоренцовским газом, для которого достаточно учитывать только электрон-ионные столкновения.

Наконец, следует отметить, что найденная функция δf_e определяет скорость электрического дрейфа электронов, которая согласно (4) оказывается равной

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n_{0e}} \int \delta f_e \mathbf{v} d\mathbf{p} = 1,96 \frac{e\mathbf{E}_0}{m\nu_{\text{эфф}}}. \quad (6)$$

Малость электрического поля \mathbf{E}_0 как раз и означает, что эта скорость по величине меньше тепловой скорости электронов, или другими словами

$$E_0 < E_{\text{кр}} = \frac{m\nu_{\text{эфф}}v_{Te}}{1,96e}. \quad (7)$$

Поле $E_{\text{кр}}$ было введено Р.Драйсером. Только в полях E_0 , меньших драйсеровского поля, возможно существование стационарного состояния. При $E_0 > E_{\text{кр}}$ электроны плазмы непрерывно ускоряются, поскольку сила трения, обусловленная электрон-ионными столкновениями, с ростом u падает. В результате электроны плазмы переходят в так называемый режим убегания.

Отметим, что в электрическом поле плазма к тому же будет греться в результате выделения джоулева тепла. Чтобы описать этот процесс, необходимо учесть конечность отношения m/M . Это, однако, приводит к отсутствию стационарного состояния, и поэтому следует исходить уже из нестационарного уравнения (3.3.5). Умножая это уравнение на $mv^2/2$ и интегрируя по импульсам с учетом полученного решения (2), окончательно находим

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = 1,96 \frac{e^2 E_0^2}{m\nu_{\text{эфф}}} - 2 \frac{m}{M} \nu_{\text{эфф}} (T_e - T_i). \quad (8)$$

Отсюда видно, что электроны греются во внешнем электрическом поле и отдают частично свое тепло ионам в результате упругих столкновений с ними. Согласно закону сохранения при этом должны греться также ионы, и поэтому стационарного состояния нет:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = 2 \frac{m}{M} \nu_{\text{эфф}} (T_e - T_i). \quad (9)$$

После выключения поля E_0 разность температур между электронами и ионами будет релаксировать с характерным временем релаксации энергии $\tau_{\mathcal{E}} \approx \left(\frac{m}{M} \nu_{\text{эфф}}\right)^{-1}$ по закону (3.3.20). Полная внутренняя энергия $\sim (T_e + T_i) = \text{const}$.

Задача 2. Исходя из интеграла столкновений Ландау, исследовать релаксацию малой анизотропии электронной температуры в полностью ионизованной плазме.

Решение.

Считаем, что функция распределения электронов в процессе релаксации сохраняет вид

$$f_e = \frac{n_e}{2\pi m T_{\perp} \sqrt{2\pi m T_{\parallel}}} \exp\left(-\frac{mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}} - \frac{mv_{\parallel}^2}{2T_{\parallel}}\right), \quad (1)$$

причем $|T_{\perp} - T_{\parallel}| \ll T_{\parallel} \approx T_{\perp} = T$. В релаксации анизотропии температуры важны как электрон-электронные, так и электрон-ионные столкновения. Поэтому воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{st}^{ee} + \left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{st}^{ei}. \quad (2)$$

Умножая это уравнение на $mv_{\perp}^2/2$ и на $mv_{\parallel}^2/2$ и интегрируя по импульсам, находим

$$\begin{aligned} \frac{dT_{\perp}}{dt} &= -\frac{1}{2}\nu_p(T_{\perp} - T_{\parallel}), & \frac{dT_{\parallel}}{dt} &= -\frac{1}{2}\nu_p(T_{\parallel} - T_{\perp}), \\ \frac{d}{dt}(T_{\perp} - T_{\parallel}) &= -\frac{3}{2}\nu_p(T_{\perp} - T_{\parallel}), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\nu_p = \frac{4}{5}\nu_{\text{эфф}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{e}{e_i} \right| \right), \quad \nu_{\text{эфф}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^2 e_i^2 N_i L}{T_e^{3/2}}. \quad (4)$$

Таким образом, релаксация малой анизотропии температуры, так же как и малой направленной скорости, происходит за время порядка $1/\nu_{\text{эфф}}$.

Задача 3. При помощи кинетического уравнения с модельным интегралом БГК исследовать функцию распределения электронов и нагрев плазмы во внешнем постоянном электрическом поле.

Решение.

Ограничиваясь учетом столкновений электронов с нейтральными частицами, запишем кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК

$$e\mathbf{E} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = -\nu_{en}(f_e - N_e \Phi_{en}), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{en} &= \frac{1}{(2\pi m T_{en})^{3/2}} \exp\left(-\frac{nv^2}{2T_{en}}\right), \\ T_{en} &= \frac{mT_n + MT_e}{m + M}, \end{aligned} \quad (2)$$

T_n – температура нейтральных частиц, а M – их масса.

Решение кинетического уравнения будем искать в виде

$$f_e = f_0(v) + \frac{\mathbf{v}\mathbf{f}_1(v)}{v}, \quad (3)$$

считая $|\mathbf{f}_1| \ll f_0$. В результате усреднения по углам получим два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{e}{3v^2 m} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E}\mathbf{f}_1) = -\nu_{en}(f_0 - N_e \Phi_{en}), \\ \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = -\nu_{en}\mathbf{f}_1. \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя \mathbf{f}_1 из второго уравнения в первое, будем иметь

$$\frac{e^2 E^2}{3m^2 \nu_{en}} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) + \nu_{en}(f_0 - N_e \Phi_{en}) = 0. \quad (5)$$

Решением этого уравнения является функция распределения Максвелла с температурой T_e , определяемой соотношением

$$\frac{2e^2 E^2}{m^2 \nu_{en}} - \nu_{en} \frac{3}{m+M} (T_e - T_n) = 0, \quad (6)$$

или

$$T_e \approx T_n + \frac{2}{3} \frac{M}{m} \frac{e^2 E^2}{m^2 \nu_{en}^2}. \quad (7)$$

Установившаяся температура есть результат баланса между омическим нагревом электронов и передачей энергии от электронов к нейтральным частицам.

Наконец, проводимость плазмы определяется из соотношения

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} \frac{\mathbf{v} \mathbf{f}_1}{v} d\mathbf{p} = \frac{e^2 N_e}{m \nu_{en}} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, \quad (8)$$

что дает

$$\sigma = \frac{e^2 N_e}{m \nu_{en}}.$$

Задача 4. В модели независимых частиц найти среднюю силу (силу Миллера), действующую на электроны плазмы во внешнем сверхвысокочастотном (СВЧ) электрическом поле с неоднородной амплитудой $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin \omega_0 t$. Ограничиться нерелятивистским случаем.

Решение.

Запишем уравнение движения электронов в виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = \frac{e \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{m} + \frac{e}{mc} [\mathbf{V} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}(t, \mathbf{r}))]. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{B}_0 – внешнее однородное магнитное поле, а

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos \omega_0 t, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{c}{\omega_0} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2)$$

Считая поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, а следовательно, и скорость \mathbf{V} малыми, в линейном приближении имеем

$$\frac{d\mathbf{V}_0}{dt} = \frac{e \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{m} + \frac{e}{mc} [\mathbf{V}_0 \mathbf{B}_0]. \quad (3)$$

Подставляя $\mathbf{V}_0(t)$ в малые нелинейные слагаемые уравнения (1) и усредняя по времени, находим среднюю силу

$$\mathbf{F}_{\text{cp}} = -m \overline{(\mathbf{V}_0(t) \nabla) \mathbf{V}_0(t)} + \frac{e}{c} \overline{[\mathbf{V}_0(t) \mathbf{B}_0(t, \mathbf{r})]}. \quad (4)$$

В отсутствие внешнего однородного магнитного поля $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$ находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= -\frac{e \mathbf{E}(\mathbf{r})}{m \omega_0} \cos \omega_0 t, \\ \mathbf{F}_{\text{cp}} &= -\frac{e^2}{2m\omega_0^2} \{(\mathbf{E}(\mathbf{r}) \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r})]\} = -\frac{e^2}{4m\omega_0^2} \nabla E^2(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5)$$

Видно, что средняя сила выталкивает электроны (а следовательно, и плазму) из области сильного СВЧ поля¹.

При наличии внешнего однородного магнитного поля возможна обратная ситуация, когда плазма втягивается в область сильного СВЧ поля.

Задача 5. Найти среднюю поперечную силу, действующую на электроны плазмы в слабонеоднородном магнитном поле.

Решение.

Предположим сначала, что электроны плазмы не обладают продольной (вдоль магнитного поля) скоростью и вращаются вокруг силовых линий магнитного поля с угловой скоростью $\Omega = \frac{eB(\mathbf{r})}{mc}$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t) + \boldsymbol{\xi}(t)$ ($\mathbf{r}_0(t)$ – радиус-вектор центра ларморовского вращения, а $\boldsymbol{\xi}(t)$ – положение электрона на орбите); $\mathbf{r}_0(t)$ – большая медленно меняющаяся, а $\boldsymbol{\xi}(t)$ – малая быстро меняющаяся величины, причем в модели независимых частиц

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \Omega \left[\boldsymbol{\xi} \frac{\mathbf{B}}{B} \right], \quad \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{\mathbf{B}}{B} \mathbf{v}_\perp \right]. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v}_\perp – линейная скорость вращения электронов.

Разлагая $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ по степеням $\boldsymbol{\xi}$ и усредняя силу Лоренца по времени, находим среднюю силу, действующую на электроны плазмы и направленную поперек магнитного поля:

$$\mathbf{F}_{1cp} = \frac{e}{c} [\boldsymbol{\xi} (\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{B}] = -\frac{mv_\perp^2}{2B} \left[\left[\frac{\mathbf{B}}{B} \nabla \right] \mathbf{B} \right] = -\frac{mv_\perp^2}{2} \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{mv_\perp^2}{2B} \mathbf{n}, \quad (2)$$

где R – радиус кривизны силовых линий магнитного поля, а \mathbf{n} – единичный вектор, направленный от центра кривизны в точку приложения силы.

При выводе выражения (2) использовались соотношения (1) и уравнения Максвелла для стационарного магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

а также было учтено, что

$$\xi_i \xi_j = \frac{1}{2} \xi^2 \delta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{\Omega^2} \delta_{ij}. \quad (4)$$

Если электроны плазмы наряду с вращением совершают продольное движение со скоростью v_\parallel , то путем перехода в систему координат, вращающуюся с угловой скоростью v_\parallel/R вокруг мгновенного центра кривизны силовой линии магнитного поля, вновь будем иметь дело с электронами, не обладающими продольной скоростью. В этой системе, однако, появляется дополнительная поперечная сила инерции – центробежная сила, равная

$$\mathbf{F}_{2cp} = \frac{mv_\parallel^2}{R} \mathbf{n}. \quad (5)$$

¹Средняя сила, действующая на ионы непосредственно со стороны СВЧ поля, в M/m раз меньше силы (5). Поэтому на ионы действует сила (5), но через электроны.

Сумма (2) и (5) дает искомую среднюю силу

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} = \mathbf{n} \frac{m}{R} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right). \quad (6)$$

Действие этой силы на электрон эквивалентно действию поля тяжести с ускорением

$$\mathbf{g} = \mathbf{n} \frac{1}{R} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right). \quad (7)$$

Очевидно, что подобная сила действует также на ионы плазмы, причем, поскольку сила (6) не зависит от знака заряда, силы действующие на электроны и ионы плазмы, направлены в одну сторону.

Задача 6. Исходя из уравнения Больцмана (3.3.6) с интегралом упругих столкновений, вывести уравнения Фоккера – Планка для произвольного закона парного взаимодействия с потенциалом взаимодействия $U(r)$. Передачу импульса при столкновениях частиц считать малой.

Решение.

Для решения задачи удобно записать интеграл упругих столкновений (3.3.6) в виде

$$I_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{p}_{\beta} d\mathbf{p}'_{\alpha} d\mathbf{p}'_{\beta} W(\mathbf{p}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\beta}; \mathbf{p}'_{\alpha}, \mathbf{p}'_{\beta}) [f_{\alpha}(\mathbf{p}'_{\alpha}) f_{\beta}(\mathbf{p}'_{\beta}) - f_{\alpha}(\mathbf{p}_{\alpha}) f_{\beta}(\mathbf{p}_{\beta})]. \quad (1)$$

Здесь $W(\mathbf{p}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\beta}; \mathbf{p}'_{\alpha}, \mathbf{p}'_{\beta})$ – вероятность упругих столкновений частиц α и β с переходом их импульсов $\mathbf{p}_{\alpha} \rightarrow \mathbf{p}'_{\alpha}$, $\mathbf{p}_{\beta} \rightarrow \mathbf{p}'_{\beta}$ при одном акте столкновений. Будем вычислять эту величину квантовомеханическим способом, так как он обладает большей наглядностью, чем классический. Предположим, что потенциальная энергия взаимодействия двух частиц в газе есть функция лишь мгновенного расстояния между ними:

$$U(|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|) = \int d\mathbf{k} U(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta})}, \quad (2)$$

$$U(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} U(|\mathbf{r}|) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Здесь $U(\mathbf{k})$ – Фурье-образ потенциала взаимодействия $U(\mathbf{r})$, который зависит только от величины вектора \mathbf{k} .

Вычисление вероятности рассеяния двух частиц в условиях, когда энергия их взаимодействия мала по сравнению с кинетической энергией, согласно квантовой механике сводится к вычислению матричного элемента взаимодействия по невозмущенным состояниям в начале и в конце процесса, т.е. по волновым функциям начального и конечного состояний. Такое приближение называется борновским приближением теории возмущений, причем оно справедливо, если $|U|r_0 \ll \hbar v$ (r_0 – радиус действия потенциала $U(r)$, а v – скорость рассеиваемой частицы). В борновском приближении

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| U_{\mathbf{p}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\beta}; \mathbf{p}'_{\alpha}, \mathbf{p}'_{\beta}} \right|^2, \quad (3)$$

где $U_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta; \mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}'_\beta}$ – матричный элемент потенциала взаимодействия по волновым функциям свободных частиц с импульсами \mathbf{p}_α и \mathbf{p}_β в начальном состоянии (до рассеяния) и \mathbf{p}'_α и \mathbf{p}'_β – в конечном состоянии (после рассеяния).

Согласно квантовой механике, волновая функция нерелятивистской свободной частицы с импульсом \mathbf{p} и энергией $\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}$ в однородной среде имеет вид плоской волны:

$$\Psi_p = A \exp\left(-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t + \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{\hbar}\right), \quad (4)$$

где $A = (2\pi\hbar)^{-3}$ – постоянная нормировки (напомним, что волновая функция свободной частицы нормируется на δ -функцию). Учитывая (4), для матричного элемента рассеяния имеем:

$$U_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta; \mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}'_\beta} = \int d\mathbf{k} U(\mathbf{k}) \langle \mathbf{p}'_\alpha | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} | \mathbf{p}_\alpha \rangle \langle \mathbf{p}'_\beta | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\beta} | \mathbf{p}_\beta \rangle. \quad (5)$$

Здесь $\langle \mathbf{p}'_\alpha | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} | \mathbf{p}_\alpha \rangle$ означает матричный элемент оператора $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha}$ по волновым функциям начального и конечного состояний одной частицы сорта α , т.е. по функциям (4). При вычислении этого матричного элемента следует учитывать, что частицы свободно движутся в плазме, поэтому в момент времени t , для которого проводятся вычисления, положение частицы определяется соотношением $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_{\alpha 0} + \mathbf{v}_\alpha t$. Учитывая это, получаем

$$\langle \mathbf{p}'_\alpha | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} | \mathbf{p}_\alpha \rangle = \delta(\mathbf{p}'_\alpha - \mathbf{p}_\alpha + \hbar\mathbf{k}) \delta\left(\frac{\mathbf{p}'_\alpha{}^2}{2m_\alpha} - \frac{\mathbf{p}_\alpha{}^2}{2m_\alpha} + \hbar\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha\right). \quad (6)$$

Аналогично вычисляется и матричный элемент $\langle \mathbf{p}'_\beta | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\beta} | \mathbf{p}_\beta \rangle$. Используемое приближение, как легко понять, представляет собой известное борновское приближение в теории рассеяния. Нетрудно видеть, что соотношение (6) учитывает законы сохранения импульса и энергии при рассеянии: частица сорта α с импульсом \mathbf{p}_α излучает "квант взаимодействия" и переходит в состояние с импульсом $\mathbf{p}'_\alpha = \mathbf{p}_\alpha - \hbar\mathbf{k}$ (см. рис. 3.2); этот квант поглощается частицей сорта β с импульсом \mathbf{p}_β , которая переходит в состояние с импульсом $\mathbf{p}'_\beta = \mathbf{p}_\beta + \hbar\mathbf{k}$. Таким образом, импульс "кванта взаимодействия" равен $\Delta\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, а энергия $\hbar\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha = \hbar\mathbf{k}\mathbf{v}_\beta$.

Подставляя (5) и (3) в (1), после несложных преобразований окончательно получаем выражение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} &= \frac{2\pi}{\hbar} \int d\mathbf{p}_\beta \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |U(\mathbf{k})|^2 \times \\ &\times \delta\left[\frac{(\mathbf{p}_\alpha - \hbar\mathbf{k})^2}{2m_\alpha} + \frac{(\mathbf{p}_\beta + \hbar\mathbf{k})^2}{2m_\beta} - \frac{\mathbf{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} - \frac{\mathbf{p}_\beta^2}{2m_\beta}\right] \times \\ &\times [f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha)f_\beta(\mathbf{p}_\beta) - f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha - \hbar\mathbf{k})f_\beta(\mathbf{p}_\beta + \hbar\mathbf{k})], \end{aligned} \quad (7)$$

в котором законы сохранения импульса и энергии учтены.

Выражение (7) в рамках применимости борновского приближения является общим, так как получено без каких-либо ограничений на закон взаимодействия частиц (кроме малости энергии взаимодействия по сравнению с кинетической энергией частиц). Упростим это выражение путем перехода к классическому пределу

$\hbar\mathbf{k} \ll \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta$, т.е. в предположении малости передаваемого при рассеянии импульса "кванта взаимодействия". Это предположение, кстати, находится в соответствии с предположением о малости энергии взаимодействия частиц – в результате такого взаимодействия изменение импульса должно быть малым. Разлагая подынтегральное выражение (7) по степеням $\hbar\mathbf{k}$ и учитывая, что $U(\mathbf{k})$ зависит лишь от модуля вектора \mathbf{k} , получаем

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \int d\mathbf{p}_\beta I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_{\alpha j}} f_\beta - f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial p_{\beta j}} \right], \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} I_{ij}^{\alpha\beta} &= \pi \int d\mathbf{k} (2\pi)^3 |U(\mathbf{k})|^3 \delta(\mathbf{k}\mathbf{u}) k_i k_j = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^2} \int (2\pi)^3 k^2 dk |U(\mathbf{k})|^2 \delta(\mathbf{k}\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (9)$$

а $\mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$ – относительная скорость сталкивающихся частиц.

Используя далее выражение (8) и (9), кинетическое уравнение (2) для функции распределения частиц сорта α с учетом столкновений со всеми частицами сорта β (где β , в частности, может совпадать с α) запишем в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = \sum_\beta \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \left(D_{ij} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_{\alpha j}} - A_i f_\alpha \right), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \sum_\beta \int d\mathbf{p}_\beta I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) f_\beta(\mathbf{p}_\beta), \\ A_i &= \sum_\beta \int d\mathbf{p}_\beta I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) \frac{\partial f_\beta}{\partial p_{\beta j}} \end{aligned} \quad (11)$$

– соответственно коэффициенты диффузии и трения в пространстве скоростей. Приведенное кинетическое уравнение часто называют также уравнением Фоккера – Планка.

Полученные интеграл столкновений (8) и кинетическое уравнение (10) пригодны при оговоренных условиях для любого газа, поскольку в них не конкретизирован закон взаимодействия частиц $U(\mathbf{r})$ (или $U(\mathbf{k})$). В частности, ими можно пользоваться для плазмы с любой степенью ионизации, если известны законы парного взаимодействия частиц между собой.

Задача 7. Применить развитый в предыдущей задаче формализм для получения интеграла столкновений кулоновски взаимодействующих частиц в плазме с учетом ее диэлектрической проницаемости (интеграл столкновений Ленарда – Балеску).

Решение.

Воспользуемся теперь полученными общими соотношениями для полностью ионизованной плазмы, в которой существенны лишь столкновения заряженных частиц между собой. Чтобы найти энергию взаимодействия двух заряженных частиц

в плазме, вычислим потенциал, создаваемый заряженной частицей сорта α , движущейся равномерно со скоростью \mathbf{v}_α , т.е. $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_{0\alpha} + \mathbf{v}_\alpha t$. Для нахождения потенциала поля заряда будем исходить из уравнения Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi e_\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\alpha} - \mathbf{v}_\alpha t). \quad (1)$$

Переходя к Фурье-представлению по пространственным переменным и используя материальное уравнение $D_i = \varepsilon_{ij}(\omega, k) E_j$ для потенциала поля ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$), создаваемого движущейся частицей, получаем

$$\Phi(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}|) = \frac{4\pi e_\alpha}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r})}}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{k})}. \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{k})$ – тензор диэлектрической проницаемости плазмы.

Очевидно, что искомая энергия взаимодействия частиц сортов α и β будет равна

$$U(\mathbf{r}) = e_\beta \Phi_\alpha = \frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{k})}. \quad (3)$$

Отсюда для Фурье-образа потенциала взаимодействия имеем:

$$U(\mathbf{k}) = \frac{e_\alpha e_\beta}{2\pi^2} \frac{1}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{k})}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в формулу (9) предыдущей задачи, в случае полностью ионизованной плазмы получаем

$$\Gamma_{ij}^{\alpha\beta} = \pi \left(\frac{e_\alpha e_\beta}{2\pi^2} \right)^2 \int d\mathbf{k} (2\pi)^3 \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}\mathbf{v}_\beta)}{|k_i k_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{k})|^2}. \quad (5)$$

Если в выражении (5) положить $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}$ (т.е. взаимодействие частиц отождествить с взаимодействием в вакууме) и устранить расходимость, "обрезая" интегрирование на нижнем ($k > k_{min}$) и верхнем ($k < k_{max}$) пределах, то получим известную формулу Ландау (ср. с (3.3.12)):

$$\Gamma_{ij}^{\alpha\beta} = 2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 L \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^3}, \quad (6)$$

где $L = \ln |k_{max}/k_{min}|$ – так называемый кулоновский логарифм, введенный Ландау.

Выражение (5), учитывающее поляризацию плазмы, было впервые получено в 1958 г. Р.Балеску и А.Ленардом. Кинетическое же уравнение с интегралом столкновений, учитывающим поляризацию плазмы, известно под названием уравнения Ленарда – Балеску.

ТЕМА IV

**ЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНОЙ
И НЕОГРАНИЧЕННОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ
ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ СРЕДЫ**

**§ 4.1. Линейные электромагнитные свойства
бесстолкновительной изотропной невырожденной
плазменной среды**

Приступая к строгому рассмотрению линейных электромагнитных свойств плазмы на основе кинетического уравнения, мы прежде всего проанализируем случай бесстолкновительной изотропной плазмы при отсутствии внешних полей. Как мы уже знаем, она описывается кинетическим уравнением Власова для носителей заряда (электронов и ионов)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (4.1.1)$$

В первую очередь определим равновесную функцию распределения, которая должна быть однородной и стационарной и удовлетворять уравнению (4.1.1) в отсутствие внешних полей. Такой функцией является распределение Максвелла в случае невырожденных, либо распределение Ферми – для вырожденных носителей, причем условия отсутствия полей и термодинамического равновесия требуют, чтобы выполнялись условия квазинейтральности и неизотермичности плазмы:

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{0\alpha} = en_{0e} + e_i n_{0i} = 0, \quad T_e = T_i = T. \quad (4.1.2)$$

Малое отклонение функции распределения δf от ее равновесного значения вызывает появление малых полей \mathbf{E} и \mathbf{B} . При этом линеаризованное уравнение (4.1.1) запишется в виде

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f = -\frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (4.1.3)$$

Здесь мы учли, что в линейном приближении $\delta f(\mathbf{r}, t)$ и поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ зависят от времени и координат в виде $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. Решение уравнения (4.1.3) для δf имеет вид

$$\delta f = -\frac{ie\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (4.1.4)$$

Подставляя (4.1.4) в формулу для индуцированного в среде тока, находим проводимость $j_i = \sigma_{ij}E_j$, а затем и диэлектрическую проницаемость, выражение для которой в случае равновесной максвелловской функции распределения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij} = \\ &= \delta_{ij} + \sum \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_i \frac{\partial f_0}{\partial p_j}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \\ &= \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k), \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon^{tr}(\omega, k) &= 1 + \sum \frac{4\pi e^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} = \\ &= 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega^2} J_+ \left(\frac{\omega}{kv_T} \right), \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, k) &= 1 + \sum \frac{4\pi e^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} = \\ &= 1 + \sum \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_T} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

и суммирование производится по всем сортам заряженных частиц. Здесь полюс в подынтегральных выражениях, как уже говорилось выше, надо понимать так:

$$\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{\mathcal{P}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (4.1.8)$$

т.е. при интегрировании полюс $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ обходится снизу. Функция $J_+(x)$ как раз и учитывает такой обход полюса и равна

$$J_+(x) = xe^{-x^2/2} \int_{i\infty}^x d\tau e^{-\tau^2/2} =$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \dots - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}xe^{-x^2/2}, & \text{Re}x \gg \text{Im}x \text{ и } |x| \gg 1, \\ -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}x + x^2 + \dots, & |x| \ll 1. \end{cases} \quad (4.1.9)$$

В первую очередь рассмотрим предельные выражения $\varepsilon^{l,tr}(\omega, k)$ при $\omega \rightarrow 0$ (статический предел). Имеем:

$$\varepsilon^l(0, k) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}, \quad (4.1.10)$$

$$\varepsilon^{tr}(\omega \rightarrow 0, k) = 1 + i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega k v_{Te}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1 + i \frac{4\pi\sigma^{tr}(0, k)}{\omega}. \quad (4.1.11)$$

Видно, что $\varepsilon^l(0, k)$ имеет вид, соответствующий дебаевской экранировке поля статического заряда в среде, чего и следовало ожидать, поскольку при выводе выражения для дебаевского потенциала выше мы никаких ограничений на частоту столкновений не накладывали и единственное, из чего исходили, было распределение Больцмана, которое содержится в максвелловском распределении при наличии потенциального поля $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ в виде добавки $e\Phi$ к энергии.

Более интересным и новым является выражение $\varepsilon^{tr}(\omega \rightarrow 0, k)$. Из (4.1.11) видно, что в низкочастотном пределе проводимость плазмы $\sigma^{tr}(0, k)$ оказывается функцией вида $\sim 1/k$, что соответствует нелокальной интегральной связи между током \mathbf{j} и полем \mathbf{E} , которую можно записать в форме:

$$\hat{\sigma}^{tr}(\mathbf{R}) = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^{3/2} \frac{\omega_{Le}^2}{v_{Te}} \frac{1}{R^2}, \quad (4.1.12)$$

$$\mathbf{j}^{tr}(\mathbf{r}) = \int \hat{\sigma}^{tr}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}^{tr}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Отметим, что формула (4.1.12) приводит при подстановке в уравнения Максвелла к следующей системе уравнений для диффузии поперечного поля в плазму:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \int \hat{\sigma}^{tr}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}^{tr}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^{tr} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.1.13)$$

Отсюда для зависимости вида $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$k^3 = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{c^2 v_{Te}}, \quad (4.1.14)$$

что соответствует аномальному скинированию поперечного поля с глубиной скин-слоя $\lambda_{ск}$, равной

$$\lambda_{ск} = (\operatorname{Im} k)^{-1} \approx \left(\frac{c^2 v_{Te}}{\omega_{Le}^2 \omega} \right)^{1/3}. \quad (4.1.15)$$

Такой скин-эффект в физике металлов был обнаружен в 1944 г. А.Пиппардом.

Рассмотрим теперь решения уравнений Максвелла в среде с диэлектрической проницаемостью (4.1.5) при произвольных частотах. Уравнения Максвелла для решений вида $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ сводятся к алгебраическим уравнениям

$$\left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} \right\} E_j = 0, \quad (4.1.16)$$

которые при подстановке выражения (4.1.5) распадаются на два независимых уравнения:

$$\mathbf{E}^l \varepsilon^l(\omega, k) = 0, \quad (4.1.17)$$

$$\mathbf{E}^{tr} [k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)]^2 = 0.$$

Первое описывает продольное поле в среде с $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ и условие существования нетривиальных решений этого уравнения,

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 0, \quad (4.1.18)$$

представляет собой дисперсионное уравнение для продольных волн. Второе же уравнение (4.1.17) описывает поперечное поле и условие его разрешимости,

$$k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k) = 0, \quad (4.1.19)$$

представляет собой дисперсионное уравнение для поперечных волн, которые в изотропной среде, как и ожидалось, оказались дважды вырожденными.

Кратко проанализируем теперь спектры продольных и поперечных волн, подставляя в (4.1.18) и (4.1.19) выражения (4.1.6) и (4.1.7) соответственно. В общем случае эти уравнения трансцендентны и обладают бесконечным множеством корней. Но интерес представляют, в основном, колебательные решения, когда $\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$. Начнем с продольных волн.

а) Рассмотрим область частот $\omega \gg kv_{Te}, kv_{Ti}$, т.е. быстрые высокочастотные волны. В этой области выражение (4.1.6) сводится к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + \\ + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k^3 v_{Te}^3} \exp(-\omega^2 / 2k^2 v_{Te}^2). \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

В результате из (4.1.18) находим спектр таких волн ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$) в пределе $k^2 r_{De}^2 \ll 1$:

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2, \\ \delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}}{k^3 r_{De}^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 r_{De}^2} - \frac{3}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Выше этот спектр, соответствующий плазменным колебаниям, затухающим благодаря их черенковскому поглощению электронами плазмы (затухание Ландау), мы уже проанализировали. Добавим только, что с ростом волнового числа k затухание Ландау экспоненциально растет и при $kr_{De} \sim 1$ декремент затухания становится порядка частоты ω . В этом пределе и поправка к ленгмюровской частоте в (4.1.21) становится уже не поправкой, а главным членом, и эти формулы теряют смысл. Заметим также, что эта поправка отличается от поправки, полученной в модели двухжидкостной гидродинамики, множителем 3 вместо 1. Если же поправкой пренебречь, то спектр частот ω соответствует модели независимых частиц, естественно, без наличия затухания Ландау.

б) В области промежуточных фазовых скоростей, когда

$kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$, из выражения (4.1.6) имеем:

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} \right). \quad (4.1.22)$$

При подстановке этого выражения из уравнения (4.1.18) находим спектр слабозатухающих колебаний ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Le}^2/k^2 v_{Te}^2} = \begin{cases} k^2 v_s^2 & \text{при } k^2 r_{De}^2 \ll 1, \\ \omega_{Li}^2 & \text{при } k^2 r_{De}^2 \gg 1, \end{cases} \quad (4.1.23)$$

$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} Z \frac{m}{M} \omega \ll \omega,$$

где $z = |e_i/e|$ – модуль отношения заряда ионов к заряду электронов. Наибольший интерес представляет длинноволновый предел этого спектра $k^2 r_{De}^2 \ll 1$, когда он становится линейным

$$\omega = kv_s, \quad \delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m}{M} Z \omega. \quad (4.1.24)$$

Рассмотренные волны со спектром (4.1.23) и (4.1.24) называются ионно-звуковыми и могут существовать только в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$. Это условие, которое следует из требования $\omega \gg kv_{Ti}$, впервые было получено Г.Гордеевым в 1954 году. Кстати, сейчас становится понятным, что рассмотренная выше модель одножидкостной гидродинамики требует выполнения условия $T_e \gg T_i$ и объясняет, почему звук (4.1.24) является изотермическим – за время колебаний электроны успевают выравнять температуру плазмы, поскольку $\omega \gg kv_{Ti}$. Кроме того, эта модель, очевидно, не учитывает бесстолкновительное затухание, обусловленное черенковским поглощением ионно-звуковых волн электронами плазмы. Спектры частот (4.1.21) и (4.1.23) представлены на рис. 4.1 (кривые 1 и 2).

в) Наконец заметим, что в области самых низких частот $\omega \ll kv_{Ti}$, как уже было показано выше, справедлива формула (4.1.10) и имеет место дебаевская экранировка продольного поля в плазме.

Рассмотрим теперь поперечные электромагнитные волны, описываемые уравнением (4.1.19). Здесь только два предельных случая.

а) Область $\omega \gg kv_{Te}$, когда справедливо выражение

$$\varepsilon^{tr}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \quad (4.1.25)$$

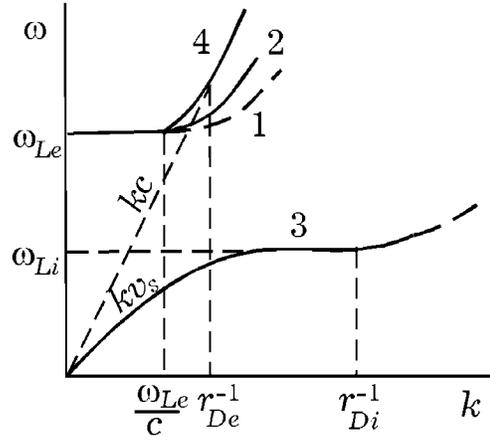


Рис. 4.1

и из (4.1.19) находим спектр частот незатухающих колебаний

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + k^2 c^2. \quad (4.1.26)$$

Этот спектр частот представлен на рис. 4.1 верхней кривой (кривая 3). Заметим, что фазовая скорость поперечных волн согласно (4.1.26) больше скорости света, и именно поэтому в рассматриваемом бесстолкновительном приближении они оказались незатухающими. Черенковского излучения и поглощения таких волн частицами плазмы не происходит. Отметим также, что этот спектр в точности совпадает с полученным в модели независимых частиц.

б) Если же $\omega \ll kv_{Te}$, то мы приходим к формуле (4.1.11) для $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$, которая, как мы уже знаем, описывает аномальный скин-эффект или диффузию низкочастотного поперечного поля в бесстолкновительную изотропную плазму.

§ 4.2. Линейные электромагнитные свойства бесстолкновительной плазмы с вырожденными носителями

Плазма с вырожденными носителями заряда заслуживает особого рассмотрения, поскольку электроны в металлах даже при обычных температурах сильно вырождены, так как энергия Ферми $\mathcal{E}_{Fe} \geq 1$ эВ. В случае полупроводников о вырождении носителей можно говорить

только при низких температурах (азотных ≈ 70 К, либо даже гелиевых ≤ 10 К). Процедура вычисления диэлектрической проницаемости в этом случае полностью аналогична проведенной в предыдущем параграфе. Изменения начинаются с формулы (4.1.5), в которой в качестве f_0 следует использовать равновесное распределение Ферми для сильно вырожденных носителей. В результате вместо (4.1.6) и (4.1.7) получаем:

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\omega}{k v_{F\alpha}} \operatorname{н} \frac{\omega + k v_{F\alpha}}{\omega - k v_{F\alpha}} \right], \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{2\omega^2} \left[1 - \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{\omega}{2k v_{F\alpha}} \operatorname{н} \frac{\omega + k v_{F\alpha}}{\omega - k v_{F\alpha}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Отметим сразу же, что в области частот $\omega > k v_{F\alpha}$ ($\alpha = e, i$), т.е. когда фазовые скорости больше скоростей Ферми для обоих сортов носителей, выражения (4.2.1) и (4.2.2) чисто действительные и в бесстолкновительном пределе диссипация в вырожденной плазме полностью отсутствует. Она появляется только в условиях $\omega < k v_{Fe}$, благодаря тому, что

$$\operatorname{н}(\omega - k v_{Fe}) = \operatorname{н}|\omega - k v_{Fe}| - i\pi\delta(\omega - k v_{Fe}). \quad (4.2.3)$$

а) Как и в предыдущем параграфе, начнем анализ дисперсионного соотношения (4.1.18) при подстановке в него выражения (4.2.1), описывающего продольное поле и продольные колебания. В высокочастотном пределе при

$$\omega \gg k v_{Fe, i} \quad (4.2.4)$$

выражение (4.2.1) – чисто действительное и уравнение (4.1.2) описывает чисто электронные колебания со спектром

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_{Fe}^2}{\omega_{Le}^2} \right) \equiv \omega_{Le}^2 \left(1 + \frac{1}{5} k^2 r_{De}^2 \right). \quad (4.2.5)$$

Здесь $r_{De} = \frac{\sqrt{3} v_{Fe}}{\omega_{Le}}$ – уже знакомое нам выражение для дебаевского радиуса вырожденных электронов. Спектр (4.2.5) аналогичен спектру частот (4.1.4) и также справедлив только в длинноволновом пределе $k^2 r_{De}^2 \ll 1$.

Следует, однако, отметить существенное отличие электронных колебаний вырожденной плазмы от ленгмюровских колебаний невырожденной плазмы. Высоочастотные электронные колебания вырожденной плазмы в отсутствие столкновений частиц совершенно не затухают, в то время как ленгмюровские колебания вырожденной плазмы хотя и экспоненциально слабо, но все-таки затухают, и декремент их затухания определяется формулой (4.1.21). Это объясняется особенностью распределения Ферми по скоростям. Дело в том, что в вырожденной плазме согласно распределению Ферми скорости хаотического движения электронов не могут превышать скорость Ферми, поэтому в поглощении волн с фазовой скоростью, большей скорости Ферми, электроны не участвуют.

Как следствие, электронные колебания в вырожденной плазме оказываются не затухающими вплоть до фазовых скоростей $\omega/k \rightarrow v_{Fe}$. Действительно, в пределе $k^2 r_{De}^2 \gg 1$ из уравнения (4.1.18) находим

$$\omega = kv_{Fe} \left[1 + 2 \exp \left(-\frac{2}{9} k^2 r_{De}^2 - 2 \right) \right]. \quad (4.2.6)$$

Эти колебания были предсказаны теоретически В.П.Силиным в 1952 году и получили название нулевого звука. На рис. 4.1 им соответствует кривая 4.

б) Рассмотрим теперь продольные колебания в области промежуточных фазовых скоростей, когда $v_{Fi} \ll \omega/k \ll v_{Fe}$ и уравнение (4.1.18) для вырожденной плазмы записывается в виде

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \left(1 + i \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{kv_{Fe}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} = 0, \quad (4.2.7)$$

откуда находим спектр частот и декремент затухания колебаний:

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2}}, \quad \delta = -\frac{3\pi}{4} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Fe}^3} \frac{M}{m} \frac{1}{Z}. \quad (4.2.8)$$

Здесь электроны плазмы принимают активное участие в поглощении волны, поскольку скорость их хаотического движения намного превышает ее фазовую скорость. Ионы же плазмы совершенно не участвуют в поглощении таких колебаний, поэтому декремент затухания полностью определяется электронным вкладом.

Рассмотренные низкочастотные колебания аналогичны ионно-звуковым колебаниям невырожденной плазмы, тем более, что они возможны не только в полностью вырожденной плазме, в которой вырождены как электроны, так и ионы (дырки), но и в частично вырожденной плазме, когда ионы не вырождены. Спектр частот (4.2.8) при этом не меняется, меняется лишь декремент затухания колебаний вследствие учета поглощения волн на максвелловски распределенных ионах плазмы:

$$\delta = -\frac{3\pi}{4} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Fe}^3} \frac{M}{m} \frac{1}{Z} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Ti}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right). \quad (4.2.9)$$

Следует отметить, что в вырожденной электронно-ионной плазме ионно-звуковые колебания простираются вплоть до фазовых скоростей $\omega/k \rightarrow v_{Fi}$. Однако, в отличие от (4.2.8) такие колебания возможны только в пределе $k^2 v_{Fi}^2 \gg \omega_{Li}^2$ и их спектр дается формулой

$$\omega = kv_{Fi} \left\{ 1 + 2 \left(1 - i\pi \frac{M v_{Fi}^3}{m v_{Fe}^3} \right) \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k^2 v_{Fi}^2}{\omega_{Li}^2} - 2\right) \right\}. \quad (4.2.10)$$

в) Наконец, в области самых низких частот $\omega \ll kv_{Fe}, kv_{Fi}$ в вырожденной плазме имеет место экранировка продольного поля, поскольку

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{v_{F\alpha}^2} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}. \quad (4.2.11)$$

Здесь $r_D = \left(\sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{v_{F\alpha}^2} \right)^{-1/2}$ – дебаевский радиус вырожденной плазмы, который определяет глубину экранировки низкочастотного поля в такой плазме.

Так же как и в невырожденной плазме, подобная экранировка в вырожденной плазме имеет место при $v_{Fi} \ll \omega/k \ll v_{Fe}$, в области частот $\omega_{Le}^2 \gg \omega^2 \gg \omega_{Li}^2$. Радиус экранировки, однако, при этом равен r_{De} .

Перейдем теперь к рассмотрению поперечных электромагнитных волн в вырожденной изотропной плазменной среде. Как и в случае невырожденной среды здесь различают только две характерные области частот.

а) Область быстрых волн с $\omega \gg kv_{Fe}$, когда пространственная дисперсия несущественна и выражение (4.1.25) оказывается справедливым и для вырожденной электронной плазмы. Очевидно, при этом

сохраняется и спектр частот незатухающих колебаний (4.1.26) – на рис. 4.1 он представлен кривой 3.

б) Иное положение имеет место в области низких частот, когда $\omega \ll kv_{Fe}$. Как и в невырожденной плазме в этой области частот в бесстолкновительной вырожденной плазме имеет место аномальный скин-эффект. Выражение для поперечной диэлектрической проницаемости при этом весьма схоже с (4.1.11):

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) \approx 1 + i \frac{3\pi\omega_{Le}^2}{4\omega kv_{Fe}}. \quad (4.2.12)$$

Подстановка этого выражения в (4.1.19) приводит к спектру аperiодически затухающих волн:

$$\omega = -i \frac{4}{3\pi} \frac{k^3 c^2 v_{Fe}}{\omega_{Le}^2}. \quad (4.2.13)$$

Отсюда получаем глубину проникновения низкочастотного поля в вырожденную плазму

$$\lambda_{ск} = \frac{1}{\text{Im } k} = 2 \left(\frac{4}{3\pi} \frac{c^2 v_{Fe}}{\omega_{Le}^2 \omega} \right)^{1/3}. \quad (4.2.14)$$

Как и следовало ожидать, формулы (4.2.12) и (4.2.14) по существу отличаются от (4.1.11), (4.1.13), (4.1.15) лишь заменой v_{Te} на v_{Fe} .

Из выражений (4.2.15) и (4.2.14) для глубины скин-слоя следует, что в бесстолкновительной плазме при $\omega \rightarrow 0$ величина $\lambda_{ск} \rightarrow \infty$, т.е. низкочастотное поперечное поле проникает в плазму сколь угодно глубоко. В этой связи напомним, что, как было показано, продольное поле в статическом пределе ($\omega \rightarrow 0$) экранируется, причем глубина проникновения электростатического поля в плазму определяется дебаевским радиусом.

§ 4.3. Влияние столкновений частиц на колебания в изотропной плазме

Переходя к учету столкновений мы в основном ограничимся анализом невырожденной слабоионизованной плазмы с использованием модельного интеграла столкновений БГК и лишь в отдельных случаях приведем результаты, которые получаются с помощью интеграла

столкновений Ландау для полностью ионизованной плазмы, а также дадим без вывода обобщение результатов на случай вырожденной плазмы. Более того, для простоты воспользуемся интегралом БГК в изотермическом приближении, считая $T_\alpha = \text{const}$, а массы ионов и нейтральных частиц равными. Уравнение Власова с таким интегралом столкновений записывается в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = -\nu_{\alpha n} (f_\alpha - N_\alpha \Phi_{\alpha n}), \quad (4.3.1)$$

где в изотермическом приближении

$$\Phi_{\alpha n} = \frac{1}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha}\right). \quad (4.3.2)$$

Интеграл столкновений БГК также обращается в нуль при равновесном максвелловском распределении $f_{0\alpha} = N_{0\alpha} \Phi_{\alpha n}$. Линеаризируя уравнения (4.3.1) по малому отклонению $\delta f_\alpha \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, получим интегральное уравнение типа Вольтерра:

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f_\alpha + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = -\nu_{\alpha n} \left(\delta f_\alpha - \Phi_{\alpha n} \int d\mathbf{p} \delta f_\alpha \right), \quad (4.3.3)$$

которое легко решается при учете уравнения непрерывности

$$\omega e_\alpha \int d\mathbf{p} \delta f_\alpha = \mathbf{k}\mathbf{j}_\alpha = e_\alpha \int \mathbf{k}\mathbf{v} \delta f_\alpha d\mathbf{p}. \quad (4.3.4)$$

При этом окончательно находим продольную и поперечную диэлектрические проницаемости изотропной плазмы с учетом столкновений в следующем виде:

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \frac{1 - J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{k v_{T\alpha}} \right)}{1 - \frac{i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n}} J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{k v_{T\alpha}} \right)}, \quad (4.3.5)$$

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_{\alpha n})} J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{k v_{T\alpha}} \right). \quad (4.3.6)$$

Как и следовало ожидать, в пределе $\nu_{\alpha n} \rightarrow 0$ эти выражения совпадают с формулами (4.1.6) и (4.1.7), полученными для бесстолкновительной плазмы.

Как и выше, прежде всего проанализируем выражение (4.3.5) в пределе низких частот, т.е. в статическом пределе $\omega \ll \nu_{an}$. Независимо от соотношения между ν_{an} и $kv_{T\alpha}$, т.е. длиной свободного пробега частиц и размером неоднородности поля, из (4.3.5) при этом следует формула (4.1.10), соответствующая дебаевской экранировке поля статического заряда в плазме.

Таким образом, в статическом пределе в столкновительной плазме так же как и в бесстолкновительной имеет место дебаевская экранировка продольного поля (т.е. поля статического заряда). И вновь, еще раз, повторим, что этого следовало ожидать, поскольку выше при первом выводе формулы для дебаевской экранировки поля статического заряда в плазме мы никаких ограничений, кроме требования $\omega \rightarrow 0$, на другие параметры плазмы не накладывали.

Несколько иное положение имеет место для поперечных колебаний. Из формулы (4.3.6) следует, что для появления аномального скин-эффекта недостаточно требования $\omega \ll kv_{Te}$; необходимо также выполнение требования $\nu_e \ll kv_{Te}$. Только одновременное выполнение этих неравенств приводит к выражению (4.1.11), описывающему аномальный скин-эффект с глубиной скин-слоя (4.1.15). Выполнение указанных выше условий приводит к следующим неравенствам:

$$\nu_e^3 \ll \omega \frac{v_{Te}^2}{c^2} \omega_{Le}^2 \ll \frac{v_{Te}^3}{c^3} \omega_{Le}^3. \quad (4.3.7)$$

При нарушении любого из них аномальный скин-эффект в области частот $\omega \gg \nu_e$ становится невозможным. Иными словами, аномальный скин-эффект возможен при $\omega \gg \nu_e$, если

$$\omega^2 \ll \frac{v_{Te}^2}{c^2} \omega_{Le}^2, \quad (4.3.8)$$

либо при $\nu_e \gg \omega$, если

$$\nu_e^2 \ll \frac{v_{Te}^2}{c^2} \omega_{Le}^2. \quad (4.3.9)$$

Если же последнее неравенство меняет знак, то при $\omega \ll \nu_e$ имеет место только хорошо известный из металлофизики нормальный скин-эффект, описываемый диэлектрической проницаемостью вида

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 + i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \nu_{en}} = 1 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega}. \quad (4.3.10)$$

Заметим, что в случае полностью ионизованной плазмы в формуле (4.3.10) следует заменить $\nu_{en} \rightarrow \nu_{эфф}/1,96$ (при $e_i = -e$).

Перейдем теперь к рассмотрению собственных продольных колебаний и волн в изотропной плазме, описываемых уравнением (4.1.18), но с учетом столкновений.

а) В области высоких частот, когда $\omega \sim \omega_{Le} \gg kv_{Te}, \nu_{en}$ из (4.3.5) получаем выражение (4.1.20) с поправкой

$$\Delta\varepsilon^l = i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{en}}{\omega^3}, \quad (4.3.11)$$

что приводит к поправке к затуханию Ландау (4.1.21)

$$\Delta\delta = -\frac{\nu_{en}}{2}. \quad (4.3.12)$$

Найденная поправка позволяет определить, когда можно столкновениями полностью пренебречь и с помощью уравнения Власова количественно правильно описать не только спектр частот, но и их затухание (с помощью формул (4.1.20)). Для этого поправку (4.3.11) надо сравнить с мнимой частью (4.1.20). Получим, что это возможно, если длина волны удовлетворяет условию

$$\frac{1}{k^3 r_{De}^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 r_{De}^2}\right) \gg \sqrt{\frac{30}{\pi}} \frac{\nu_e}{\omega_{Le}}. \quad (4.3.13)$$

В этих условиях столкновениями можно пренебречь; в противном случае столкновительное затухание преобладает над затуханием Ландау.

Имеет смысл уточнить здесь условие, когда плазму можно считать слабоионизованной, и когда, напротив, ее следует считать полностью ионизованной. Очевидно, что в рассматриваемом случае высокочастотных продольных волн это определяется отношением (здесь T_e – в градусах)

$$\frac{\nu_{en}}{\nu_{эфф}} \simeq \frac{n_n}{n_e} \frac{10^5 a^2 T_e^2}{2ZL}. \quad (4.3.14)$$

Если это отношение больше единицы, то плазма слабо ионизована, а если оно меньше единицы, то сильно ионизована. При $a \simeq 10^{-8}$ см, $T_e \simeq 10^5$ К, $Z = 1$ и $L \simeq 10$ отсюда следует, что уже при $\frac{n_e}{n_n} > 10^{-2}$ плазму следует считать сильноионизованной. Для почти термоядерной плазмы с $T_e \simeq 10^7$ К, напротив, при $\frac{n_n}{n_e} > 10^{-2}$, т.е. уже при столь

малой примеси нейтралов плазма оказывается, по-существу, слабоионизованной. Еще раз подчеркнем, что в рассматриваемом случае высокочастотных колебаний именно отношение частот упругих столкновений $\frac{\nu_{en}}{\nu_{эфф}}$ определяет степень ионизации плазмы.

б) Рассмотрим теперь влияние столкновений частиц на ионно-звуковые колебания. При учете столкновений, кроме условия $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$, необходимо потребовать выполнения неравенств $\nu_i \ll \omega$, а $\nu_e \ll kv_{Te}$. В этих условиях из (4.3.5) получаем выражение для ε^l , которое отличается от (4.1.10) появлением столкновительной добавки

$$\Delta\varepsilon^l = i\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \begin{cases} \frac{\nu_{in}}{\omega} & \text{— для слабоионизованной плазмы,} \\ \frac{8\nu_{ii}k^2v_{Ti}^2}{5\omega^3} & \text{— для сильноионизованной плазмы.} \end{cases} \quad (4.3.15)$$

В результате появляется столкновительная поправка к декременту затухания (4.1.23)

$$\Delta\delta = - \begin{cases} \nu_{in}/2 & \text{— для слабоионизованной плазмы,} \\ \frac{4\nu_{ii}T_i}{5ZT_e} & \text{— для сильноионизованной плазмы.} \end{cases} \quad (4.3.16)$$

Отсюда сразу же следует, что если

$$\frac{\nu_i}{\omega} > \sqrt{Z\frac{m}{M}},$$

$$\nu_i = \begin{cases} \nu_{in} & \text{— для слабоионизованной плазмы,} \\ \nu_{ii}\frac{T_i}{T_e} & \text{— для сильноионизованной плазмы,} \end{cases} \quad (4.3.17)$$

то столкновительное поглощение ионно-звуковых волн преобладает над черенковским; в обратном же случае преобладающим оказывается бесстолкновительное затухание, обусловленное черенковским поглощением волн электронами плазмы.

Из (4.3.16) можно сделать еще одно заключение, а именно, написать условия слабой, либо сильной ионизации плазмы. Они опреде-

ляются отношением

$$\frac{\nu_{in}}{\nu_{ii}} \frac{ZT_e}{T_i} = \frac{n_n}{n_e} \frac{10^5 a^2 T_e T_i}{Z^2 L}. \quad (4.3.18)$$

Отсюда следует, что при $T_e \simeq 10^5$ К, $T_i \simeq 10^3$ К и $Z = 1$ слабоионизованной можно считать только плазму со степенью ионизации $\frac{n_n}{n_e} > 10^4$. Таким образом при низких температурах кулоновские столкновения весьма и весьма существенны.

Наконец заметим, что в слабоионизованной столкновительной плазме возможно существование ионно-звуковых колебаний не только при $kv_{Te} \gg \nu_e$, но и при $\nu_{en} \gg kv_{Te}$. В этом легко убедиться, записав выражение (4.3.5) для $\varepsilon^l(\omega, k)$ в пределе $|\omega + i\nu_{\alpha n}| \gg kv_{T\alpha}$:

$$\varepsilon^l = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_{\alpha n}) \left[\omega - i\nu_{\alpha n} \frac{k^2 v_{T\alpha}^2}{(\omega + i\nu_{\alpha n})^2} \right]}. \quad (4.3.19)$$

Отсюда в условиях $\omega \gg \nu_{in}$, kv_{Ti} и $\nu_{en} \gg \omega$, kv_{Te} , но $\omega \nu_{en} \ll k^2 v_{Te}^2$, что соответствует сильной электронной диффузии, имеем

$$\varepsilon^l = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \frac{\omega \nu_{en}}{k^2 v_{Te}^2} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 + i \frac{\nu_{en}}{\omega} \right). \quad (4.3.20)$$

Действительная часть этого выражения полностью совпадает с действительной частью (4.1.22), которая, как было показано в предыдущем параграфе, определяет спектр частот ионно-звуковых волн в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$. Мнимая же часть является малой и определяется электронной диффузией и ионным трением, что приводит к следующему декременту затухания волн с частотным спектром (4.1.23) ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\frac{\delta}{\omega} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega \nu_{en}}{k^2 v_{Te}^2} + \nu_{in} \right). \quad (4.3.21)$$

Отметим здесь же, что из (4.3.19) в пределе частых столкновений как электронов, так и ионов, т.е. при $\nu_{e,i} \gg \omega$, $kv_{Te,i}$, получаем

$$\varepsilon^l = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{i\omega \nu_{\alpha n} - k^2 v_{T\alpha}^2}. \quad (4.3.22)$$

Это выражение уже встречалось ранее, когда мы исследовали двухжидкостную гидродинамику, и в низкочастотном пределе при рассмотрении моно- и амбиполярной диффузии слабоионизованной плазмы.

Таким образом, мы получили обоснование возможности использования этой модели для анализа продольного поля в низкочастотном пределе.

Наконец, осталось рассмотреть вопрос о роли столкновений частиц в затухании поперечных электромагнитных волн в невырожденной изотропной плазме. В предыдущем параграфе было показано, что в бесстолкновительном пределе такие волны, обладая сверхсветовой фазовой скоростью, вообще не поглощаются в плазме. Остается проанализировать вклад столкновений частиц. Поэтому вновь обратимся к выражению (4.3.6). Оно нами уже было исследовано в низкочастотном пределе, в котором поперечное поле оказывается скинированным. Выше мы выяснили, в каких условиях скинирование носит нормальный и в каких аномальный характер.

Рассмотрим теперь высокочастотный предел, когда $\omega \gg kv_{Te}, \nu_e$. В этом пределе из (4.3.6) следует

$$\varepsilon^{tr}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_{en}}{\omega} \right). \quad (4.3.23)$$

Подстановка этого выражения в дисперсионное уравнение для поперечных волн (4.1.19) приводит к спектру, который уже был нами получен раньше в модели независимых частиц. Выпишем его здесь:

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + k^2 c^2, \quad \delta = -\frac{1}{2} \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{en}}{\omega_{Le}^2 + k^2 c^2}. \quad (4.3.24)$$

В случае сильноионизованной плазмы ν_{en} следует заменить на $\nu_{эфф}$.

Условие слабой и сильной ионизации плазмы при этом, очевидно, определяется отношением (4.3.14), исследованным выше.

В заключение кратко остановимся на вопросе о влиянии столкновений частиц на колебательные свойства вырожденной плазмы. Прежде всего приведем выражения для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей, которые легко находятся путем решения уравнения Власова с интегралом БГК для вырожденных носителей (3.3.15). Линеаризируя это уравнение по малым возмущениям равновесного распределения Ферми, после несложных вычислений полу-

ЧИМ:

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{k v_{F\alpha}} \text{ и } \frac{\omega + i\nu_{\alpha} + k v_{F\alpha}}{\omega + i\nu_{\alpha} - k v_{F\alpha}} \right) \times \\ \times \left[1 - \frac{i\nu_{\alpha}}{2k v_{F\alpha}} \text{ и } \frac{\omega + i\nu_{\alpha} + k v_{F\alpha}}{\omega + i\nu_{\alpha} - k v_{F\alpha}} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{2\omega(\omega + i\nu_{\alpha})} \times \\ \times \left[1 + \frac{(\omega + i\nu_{\alpha})^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \left(1 - \frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{2k v_{F\alpha}} \text{ и } \frac{\omega + i\nu_{\alpha} + k v_{F\alpha}}{\omega + i\nu_{\alpha} - k v_{F\alpha}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Анализ уравнений (4.1.18) и (4.1.19) с использованием выражений (4.3.25) и (4.3.26) аналогичен проведенному выше с использованием (4.3.5) и (4.3.6). Поэтому здесь мы не будем проводить такой анализ и ограничимся приведением лишь его результатов.

В первую очередь отметим, что в высокочастотном пределе, когда $\omega \gg k v_{Fe}$, $\omega \gg \nu_e$, спектр частот продольных электронных колебаний (4.2.5) сохраняет свой вид, но появляется затухание с декрементом (ср. (4.3.12))

$$\delta = -\frac{\nu_e}{2}, \quad (4.3.27)$$

где $\nu_e = \nu_{en}$, либо $\nu_e = \nu_{эфф}$. Не меняется спектр и ионно-звуковых колебаний (4.2.7)–(4.2.9), тем более, что реально ионы (тяжелые носители) всегда не вырождены и поэтому эти формулы оказываются количественно правильными, если только $\nu_e \ll k v_{Fe}$. Не меняется и формула для дебаевской экранировки (4.2.11), справедливая для низкочастотного продольного поля, т.е. при $\omega \rightarrow 0$.

Наконец заметим, что в сильностолкновительном пределе в низкочастотной диффузионной области из (4.3.24) получаем формулу, аналогичную (4.3.21):

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{i k^2 D_{\alpha}}{k^2 r_{D\alpha}^2 (\omega + k^2 D_{\alpha})}. \quad (4.3.28)$$

Здесь для невырожденной плазмы $r_{D\alpha}^2 = v_{T\alpha}^2/\omega_{L\alpha}^2$, а $D_\alpha = v_{T\alpha}^2/\nu_\alpha$; для вырожденной же плазмы $r_{D\alpha}^2 = \frac{3v_{F\alpha}^2}{\omega_{L\alpha}^2}$, а $D_\alpha = v_{F\alpha}^2/\nu_\alpha$. Дальнейший анализ диффузионных решений уравнения (4.1.18) очевиден.

В заключение скажем несколько слов о влиянии столкновений на поведение поперечного электромагнитного поля в вырожденной плазме. В высокочастотном пределе, когда $\omega \gg kv_{F\alpha}, \nu_\alpha$, очевидно, ничего не меняется и полученные выше формулы (4.3.24) сохраняют силу. По существу не меняются и формулы (4.3.7)–(4.3.24), если в них произвести замену $v_{Te} \rightarrow v_{Fe}$, а под ν_e понимать обратное время жизни легких носителей.

§ 4.4. Связанные упруго-электромагнитные волны в изотропной плазме твердых тел

В § 3.5 при обсуждении кинетических уравнений для носителей заряда в твердом теле с учетом динамики кристаллической решетки мы рассмотрели два эффекта, связывающих носители заряда и решетку. Первый эффект обусловлен изменением закона дисперсии $\mathcal{E}(\mathbf{p})$ при деформациях решетки, что приводит к изменению кинетического уравнения для носителей заряда. При этом наряду с кинетическим уравнением меняется и уравнение динамики решетки, в котором появляется сила, действующая на нее со стороны носителей заряда. Второй эффект обусловлен пьезоэлектричеством и состоит в появлении дополнительной так называемой пьезоэлектрической силы в уравнении упругости. Кинетические же уравнения для носителей заряда при этом не меняются, хотя само поле, фигурирующее в этих уравнениях, меняется, поскольку кроме тока носителей заряда в уравнениях Максвелла следует учитывать пьезоэлектрический ток.

Анализ связанных электромагнитных и упругих волн при учете обоих эффектов одновременно очень сложен. Однако, в этом и нет необходимости, поскольку, если твердое тело является пьезоэлектриком, то этот эффект настолько силен, что нет необходимости учета деформационного потенциала. Последний проявляется в непьезоэлектрических средах. Исходя из приведенных соображений, здесь

мы рассмотрим только пьезоэлектрические плазменные среды, а более конкретно – пьезополупроводники.

Пренебрегая столкновениями, движение носителей будем описывать с помощью уравнения Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \mathbf{B}] \} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (4.4.1)$$

Уравнение же теории упругости запишем в виде

$$\rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial r_k \partial r_m} + \rho^{(i)} E_i + [\mathbf{j}^{(i)} \mathbf{B}]_i + \frac{\partial \beta_{ilk} E_l}{\partial r_k}. \quad (4.4.2)$$

Здесь $\rho^{(i)}$ и $\mathbf{j}^{(i)}$ – плотности заряда и тока, индуцированные в заряженном кристалле. Если кристалл является незаряженным, то $\rho^{(i)} = 0$ и $\mathbf{j}^{(i)} = 0$. Последнее слагаемое в (4.4.2) описывает пьезоэлектрическую силу, действующую на кристалл.

В пьезополупроводниках индуцируется ток

$$j_i^{(n)} = \beta_{ikl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial r_l}, \quad (4.4.3)$$

который вызывает появление индуцированного заряда $\rho^{(n)}$, причем $\rho^{(n)}$ и $\mathbf{j}^{(n)}$ связаны между собой уравнением непрерывности.

Уравнения (4.4.1)–(4.4.3), дополненные уравнениями Максвелла, в которых плотности тока и заряда состоят из суммы вкладов от носителей заряда и от решетки, образуют полную систему уравнений динамики пьезоэлектрической среды.

Рассмотрим равновесное однородное в пространстве и стационарное во времени состояние пьезоэлектрической плазменной среды. Распределения носителей заряда по скоростям при этом являются распределением Максвелла, если носители не вырождены, либо Ферми, если они вырождены. Решетка в равновесном состоянии считается невозмущенной, т.е. $\mathbf{j}_0^{(n)} = 0$, $\rho_0^{(n)} = 0$. Внешние поля тоже считаются отсутствующими: $\mathbf{E}_0 = 0$ и $\mathbf{B}_0 = 0$. При возмущениях в среде возникают малые отклонения от равновесных значений \mathbf{E} , \mathbf{B} , $\rho^{(n)}$ и $\mathbf{j}^{(n)}$. Линеаризованная система уравнений для этих величин записывается

в виде

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial r_k \partial r_m} + \frac{\partial \beta_{ilk} E_l}{\partial r_k},$$

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0, \quad (4.4.4)$$

$$\mathbf{j} = \sum e \int \mathbf{v} \delta f d\mathbf{p} + \mathbf{j}^{(n)} = \sum e \int \mathbf{v} \delta f d\mathbf{p} + \beta_{ikl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial r_l}.$$

Решение системы (4.4.4), как обычно, будем искать в виде плоских волн $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. Кроме того, легко видеть, что из этой системы можно исключить кинетическое уравнение для носителей заряда, воспользовавшись уже известным нам выражением для диэлектрической проницаемости плазмы, состоящей только из носителей. В результате получим уравнение движения решетки совместно с уравнениями поля:

$$\omega^2 \rho^{(m)} u_i - \lambda_{iklm} k_k k_m u_l + i k_k \beta_{ikl} E_l = 0, \quad (4.4.5)$$

$$\left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j - \frac{4\pi i \omega^2}{c^2} \beta_{ikl} k_l u_k = 0.$$

Условие разрешимости этой системы зацепляющихся уравнений и представляет собой искомое дисперсионное уравнение для связанных упруго-электромагнитных волн в пьезоэлектрической плазме твердого тела. Воспользовавшись явным видом диэлектрической проницаемости изотропной плазмы, решение второго уравнения системы (4.4.5) запишем в виде

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi i \omega^2}{k^2} \left\{ \frac{k_i k_j}{\omega^2 \varepsilon^l(\omega, k)} - \frac{k^2 (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2)}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)} \right\} \beta_{jkl} k_l u_k. \quad (4.4.6)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (4.5.5), окончательно получим искомое дисперсионное уравнение для связанных волн:

$$\left| \omega^2 \rho^{(m)} \delta_{ij} - \lambda_{ikjl} k_k k_l - \right.$$

$$\left. - \frac{4\pi \omega^2 k_k \beta_{lik}}{k^2} \left\{ \frac{k_l k_s}{\omega^2 \varepsilon^l} - \frac{k^2 \delta_{ls} - k_l k_s}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}} \right\} \beta_{sjm} k_m \right| = 0. \quad (4.4.7)$$

Уравнение (4.4.7) описывает связь упругих звуковых колебаний решетки с колебаниями изотропной плазмы носителей заряда. Поскольку звуковые колебания решетки относительно медленные, они сильно могут быть связаны только с медленными же колебаниями плазмы носителей заряда, каковыми являются продольные плазменные колебания. Ниже мы только эту связь и будем учитывать, положив формально в (4.4.7) $c \rightarrow \infty$. Более того, для простоты рассмотрим кристаллическую решетку с гексагональной симметрией. При этом положим, что ось симметрии четвертого порядка совпадает с осью Oz , а четыре оси второго порядка лежат в плоскости xy . В кристалле с такой симметрией отличные от нуля компоненты тензора β_{ijk} равны¹

$$\beta_1 = \beta_{xxz} = \beta_{zxx} = \beta_{yyz} = \beta_{zyy}, \quad (4.4.8)$$

$$\beta_2 = \beta_{zxx} = \beta_{zyy}, \quad \beta_3 = \beta_{zzz},$$

т.е. тензор β_{ijk} определяется тремя числами β_i , которые мы будем называть константами пьезоэлектрической связи.

Что касается тензора λ_{ijkl} , то поскольку кристалл с гексагональной симметрией слабо отличается от изотропной среды, его приближенно можно представить в виде²

$$\lambda_{ijkl} \frac{k_k k_l}{k^2} = \lambda^{tr} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \lambda^l \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (4.4.9)$$

Легко показать, что в указанных выше приближениях без потери

¹Заметим, что в изотропной среде пьезоэлектрический эффект отсутствует, поскольку тензор третьего ранга $\beta_{ijk} = 0$, так как $\beta_{ijk} = \beta_{ikj}$.

²Величины λ^{tr} и λ^l связаны с коэффициентами упругости среды – модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона σ :

$$\lambda^{tr} = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad \lambda^l = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}.$$

Отсюда следует, что $\lambda^{tr}/\lambda^l < 1/2$. В действительности кристалл с гексагональной симметрией характеризуется пятью числами:

$$\begin{aligned} \lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy} = a + b, & \quad \lambda_{xxyy} = \lambda_{yyxx} = a - b, \\ \lambda_{xxzz} = \lambda_{zzxx} = \lambda_{yyzz} = \lambda_{zzyy} = c, & \quad \lambda_{zzzz} = f, \\ \lambda_{xyxy} = \lambda_{yxyx} = \lambda_{yxxy} = \lambda_{xyyx} = b, & \\ \lambda_{xzzz} = \lambda_{zyyz} = \lambda_{zxxz} = \lambda_{zzzx} = \lambda_{zzzy} = \lambda_{yzzz} = \lambda_{zyyz} = \lambda_{zyzy} = d. & \end{aligned}$$

Переход к изотропной среде происходит наложением трех связей

$$a + b = f, \quad a - b = c, \quad b = d,$$

которые в реальных гексагональных кристаллах приближенно всегда выполняются. При этом $b = \lambda^{tr}$, $a = \lambda^l - \lambda^{tr}$.

общности можно положить $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_z)$. В результате дисперсионное уравнение (4.4.7) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, k) \left(\omega^2 \rho^{(m)} - k^2 \lambda^{tr} \right) \left(\omega^2 \rho^{(m)} - k^2 \lambda^l \right) = \\ = 4\pi k^2 \left[(\beta_1 + \beta_2)^2 \frac{k_{\perp}^2 k_z^2}{k^4} \left(\omega^2 \rho^{(m)} - k_{\perp}^2 \lambda^{tr} - k_z^2 \lambda^l \right) - \right. \\ \left. - (\beta_1 + \beta_2) \left(\beta_1 \frac{k_{\perp}^2}{k^2} + \beta_3 \frac{k_z^2}{k^2} \right) \frac{k_{\perp}^2}{k^2} (\lambda^l - \lambda^{tr}) + \right. \\ \left. + \left(\beta_1 \frac{k_{\perp}^2}{k^2} + \beta_3 \frac{k_z^2}{k^2} \right) \left(\omega^2 \rho^{(m)} - k_{\perp}^2 \lambda^l - k_z^2 \lambda^{tr} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

При получении этого уравнения из (4.4.7) для простоты мы ограничились рассмотрением потенциального поля $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Поэтому это уравнение описывает связь упругих волн (продольного и поперечного звука) с электростатическими (продольными) колебаниями носителей заряда. Мы проанализируем эту связь для чисто поперечного ($k_z = 0$) и чисто продольного ($k_{\perp} = 0$) распространения волн.

В случае чисто продольного распространения волн ($k_{\perp} = 0$) из (4.4.10) имеем

$$\varepsilon^l(\omega, k) \left(\omega^2 \rho^{(m)} - \lambda^l k^2 \right) = 4\pi \beta_3^2 k^2, \quad (4.4.11)$$

т.е. связанными между собой оказываются продольная плазменная и продольная упругая волны. Для чисто поперечного распространения волн ($k_z = 0$) уравнение (4.4.10) сводится к виду

$$\varepsilon^l(\omega, k) \left(\omega^2 \rho^{(m)} - \lambda^{tr} k^2 \right) = 4\pi \beta_1^2 k^2, \quad (4.4.12)$$

т.е. продольная плазменная волна оказывается связанной с поперечным звуком.

Уравнения (4.4.11) и (4.4.12) имеют одинаковую структуру, и поэтому можно провести их общий анализ. Видно, что наиболее сильное взаимодействие плазменной и упругих волн имеет место, если одновременно выполняются соотношения

$$\omega^2 - k^2 \frac{\lambda^{l,tr}}{\rho^{(m)}} \equiv \omega^2 - k^2 v_{l,tr}^2 = 0, \quad \varepsilon^l(\omega, k) = 0, \quad (4.4.13)$$

где $v_{l,tr} = \sqrt{\frac{\lambda^{l,tr}}{\rho^{(m)}}}$ – скорости продольных и поперечных упругих звуковых колебаний, а v_s – фазовая скорость плазменной волны. Это означает, что частоты упругих звуковых и плазменных волн близки друг к другу. Очевидно, что плазменные колебания при этом должны быть низкочастотными. Такие низкочастотные колебания существуют в неизотермической изотропной плазме носителей заряда при $T_e \gg T_i$ (либо $\mathcal{E}_{Fe} \gg T_i$) и спектр их частот дается известными выражениями (см. §§ 4.1 и 4.2):

$$\omega^2 = \omega_s^2 = \frac{k^2 v_s^2}{1 + k^2 r_{De}^2}, \quad \delta_s = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \kappa \frac{\omega^2}{k v_0}, \quad (4.4.14)$$

где v_s – скорость ионного звука; $\kappa = 1$, $v_0 = v_{Te}$ или $\kappa = \frac{\pi}{2}$, $v_0 = v_{Fe}$. В пренебрежении пьезоэффектом (т.е. при $\beta_i = 0$) упругие и плазменные волны независимы, причем в рассматриваемом приближении упругие колебания вообще не затухают, а ионно-звуковые колебания затухают довольно сильно вследствие черенковской диссипации на электронах. При учете пьезоэлектрической связи этих волн затухающими оказываются и упругие звуковые колебания, причем они затухают вследствие их поглощения электронами плазмы. Действительно, запишем уравнение (4.4.10) для носителей заряда в бесстолкновительном пределе для области частот ионно-звуковых колебаний и при $k = k_\perp$ или $k = k_z$ соответственно. Имеем:

$$(\omega^2 - k^2 v_{l,tr}^2) \left(\omega^2 - \omega_s^2 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \kappa \frac{\omega^3}{k v_0} \right) = \frac{4\pi \beta_{3,1}^2 \omega^2 k^4 v_s^2}{\rho^{(m)} \omega_{Li}^2}. \quad (4.4.15)$$

В области пересечения дисперсионных кривых $\omega = \omega_s$ и $\omega = k v^{tr,l}$ решение уравнения (4.4.15) следует искать в виде

$$\omega = k v_{l,tr} + i\delta = \omega_s + i\delta. \quad (4.4.16)$$

В результате для величины δ получаем:

$$\delta_{1,2} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \kappa \frac{\omega^2}{2k v_0} \pm \sqrt{\frac{\pi \kappa \omega^4}{32 k^2 v_0^2} - \frac{\pi \beta_{3,1}^2 k^4 v_s^2}{\rho^{(m)} \omega_{Li}^2}}. \quad (4.4.17)$$

Верхний знак относится к упругим колебаниям решетки, нижний – к колебаниям носителей заряда.

При больших значениях констант пьезоэлектрического эффекта β_1 и β_3 , когда подкоренное выражение в (4.4.17) положительно, имеем

$$\delta_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\pi}{\rho^{(m)}} \frac{k^2 v_s \beta_{3,1}}{\omega_{Li}}} - \sqrt{\frac{\pi}{2} \kappa \frac{\omega^2}{2k v_0}}. \quad (4.4.18)$$

Видно, что в этом случае происходит ”раздвижка” пересекающихся спектров колебаний. Учет диссипации приводит к слабому затуханию как упругих, так и плазменных ионно-звуковых колебаний, причем ионный звук затухает слабее, чем при пренебрежении пьезоэффектом. При малых же значениях коэффициентов β_1 и β_3 из (4.4.17) имеем

$$\delta_1 = -\frac{2\pi\beta_3^2 k^4 v_s^2 k v_0}{\rho^{(m)} \omega_{Li}^2 \kappa \omega^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \delta_2 = -\sqrt{\pi} \frac{\kappa \omega^2}{4k v_0}. \quad (4.4.19)$$

Здесь уже затухание упругих волн, обусловленное пьезоэффектом, намного слабее, чем затухание плазменных волн.

§ 4.5. Квантовые эффекты в линейной электродинамике изотропной плазменной среды

В заключительном параграфе темы IV рассмотрим роль квантовых эффектов в линейной электродинамике изотропной плазменной среды. Заметим при этом, что рассмотренные в § 4.2 электромагнитные свойства изотропной вырожденной плазмы квантовых эффектов, строго говоря, не касались. Там лишь равновесное распределение бралось квантовым – распределением Ферми. Движение же носителей заряда считалось классическим, поскольку для его описания использовалось кинетическое уравнение Власова. Теперь же мы учтем квантовые эффекты в движении носителей, для чего воспользуемся квантовым кинетическим уравнением (3.7.7).

Линеаризуя квантовое кинетическое уравнение (3.7.7) в отсутствие внешних полей по малому отклонению относительно равновесной функции распределения $f_0(p)$ (кстати, не обязательно распределения Фер-

ми) получим для δf :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \\
& = \frac{e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{i}{\hbar} \int d\boldsymbol{\tau} d\mathbf{p}' e^{i\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})} f_0(\mathbf{p}') \times \\
& \quad \times \left\{ \left[\hbar \boldsymbol{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} - \Phi \left(\mathbf{r} + \frac{\hbar \boldsymbol{\tau}}{2} \right) + \Phi \left(\mathbf{r} - \frac{\hbar \boldsymbol{\tau}}{2} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mathbf{v}'}{c} \left[\left(\hbar \boldsymbol{\tau} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{A} - \mathbf{A} \left(\mathbf{r} + \frac{\hbar \boldsymbol{\tau}}{2} \right) + \mathbf{A} \left(\mathbf{r} - \frac{\hbar \boldsymbol{\tau}}{2} \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Здесь Φ и \mathbf{A} – скалярный и векторный потенциалы поля возмущений, которые также как δf будем искать в виде $\sim e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. В результате после стандартных вычислений получим выражения для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей при произвольном значении $\hbar\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^l(\omega, k) &= 1 + \sum \frac{4\pi e^2}{\omega \hbar k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \times \\
& \quad \times \left\{ f_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2} \right) \right\},
\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{tr}(\omega, k) &= 1 + \sum \frac{2\pi e^2}{\omega^2 k^2} \int d\mathbf{p} [\mathbf{k}\mathbf{v}]^2 \times \\
& \quad \times \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} + \frac{1}{\hbar} \frac{f_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2} \right)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Выражения (4.5.2) и (4.5.3) описывают квантовые эффекты в плазменной среде при пренебрежении столкновениями носителей заряда. Поэтому при оценке их роли мы будем проводить сравнение с результатами §§ 4.1 и 4.2, полученными с помощью классического уравнения Власова. Более того, мы здесь рассмотрим только чисто электронную вырожденную плазму, поскольку квантовые эффекты наиболее сильно проявляются в движении легких носителей заряда в плотной плазме. Из выражений (4.5.2) и (4.5.3) следует, что при условии

$\hbar k \ll p$ они переходят в свои классические аналоги (4.1.6) и (4.1.7). Вместе с тем, при $\hbar k \sim p$ квантовые эффекты становятся не только существенными, но и определяющими. Легко видеть, что в коротковолновой области при $k \sim \frac{\omega_{Le}}{v_{Fe}}$ отношение

$$\frac{\hbar k}{p} \sim \frac{\hbar \omega_{Le}}{p_{Fe} v_{Fe}} \sim \left(\frac{e^2 n^{1/3}}{\mathcal{E}_{Fe}} \right)^{1/2} \ll 1, \quad (4.5.4)$$

а это значит, что квантовые эффекты в этой области длин волн малы. Они могут оказаться существенными только в области длинных волн, когда пространственная дисперсия мала. Поэтому анализом именно этой области длин волн мы и ограничиваемся.

Начнем с продольных волн, описываемых нулями продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^l(\omega, k)$. В случае распределения Ферми $f_0(p)$ выражения (4.5.2) легко вычисляются, причем для $\varepsilon^l(\omega, k)$ получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, k) = & 1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_{Le}^2 m}{\hbar k^5 v_{Fe}} \times \\ & \times \left\{ \left[\left(\omega + \frac{\hbar k^2}{2m} \right)^2 - k^2 v_{Fe}^2 \right] \Pi \frac{\omega + \frac{\hbar k^2}{2m} + k v_{Fe}}{\omega + \frac{\hbar k^2}{2m} - k v_{Fe}} - \right. \\ & \left. - \left[\left(\omega - \frac{\hbar k^2}{2m} \right)^2 - k^2 v_{Fe}^2 \right] \Pi \frac{\omega - \frac{\hbar k^2}{2m} + k v_{Fe}}{\omega - \frac{\hbar k^2}{2m} - k v_{Fe}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

В области слабой пространственной дисперсии, используя разложение по степеням k , из этого выражения находим спектр продольных волн электронной плазмы с учетом квантовых эффектов

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + \frac{3}{5} k^2 v_{Fe}^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2}. \quad (4.5.6)$$

Отсюда видно, что квантовые эффекты становятся существенными в области относительно коротких длин волн, в которой выполняется условие

$$\frac{\hbar^2 k^2}{m^2} \gtrsim \frac{12}{5} v_{Fe}^2. \quad (4.5.7)$$

При этом, однако, колебания считаются все еще длинноволновыми в том смысле, что $\left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2 \ll \omega_{Le}^2$. Нарушение этого последнего неравенства наряду с (4.5.7) означает нарушение условия газового приближения (4.5.4).

Заметим, что при выполнении сильного неравенства (4.5.7) тепловым движением носителей заряда полностью можно пренебречь, приняв $f_0(p) \sim \delta(p)$. В результате из выражения (4.5.5) следует

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2}. \quad (4.5.8)$$

Отсюда, в частности, находим, что частота $\omega_q = \frac{\hbar k^2}{2m}$, как полюс $\varepsilon^l(\omega, k)$, соответствует одночастичным квантовым колебаниям свободного электрона, а условие (4.5.7) есть превышение энергии кванта $\hbar\omega_q$ над тепловой энергией \mathcal{E}_{Fe} . В пределе $\omega \rightarrow 0$ из (4.5.8) следует, что $\varepsilon^l(0, k)$ описывает осциллирующую экранировку статического продольного поля в квантовой плазме. Однако, такой результат выходит за пределы применимости газового приближения (4.5.4) и поэтому не является верным. Из точного выражения (4.5.5) в статическом пределе, $\omega \rightarrow 0$, при условии (4.5.4) получается обычная формула дебаевской экранировки, рассмотренная в § 4.1 и обусловленная тепловым движением носителей.

Несколько иное положение имеет место для поперечных волн, определяемых поперечной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$. В области больших фазовых скоростей, когда тепловым движением носителей можно пренебречь, приняв $f_0(\mathbf{p}) \sim \delta(\mathbf{p})$, из выражения (4.5.3) находим

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}. \quad (4.5.9)$$

Таким образом, в этом пределе квантовые эффекты вообще не проявляются и спектр высокочастотных поперечных волн как в вырожденной, так и невырожденной электронной плазме определяется классической формулой (4.1.26).

При учете теплового движения электронов квантовые эффекты становятся существенными. Покажем это для случая распределения

Ферми $f_0(p)$, когда из (4.5.3) следует выражение

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{tr}(\omega, k) = & 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + \frac{3 \omega_{Le}^2 m}{4 \hbar k^2 \omega^2} \times \\
& \times \left\{ \frac{5 \hbar k^2}{3 \cdot 2m} - \frac{1}{2} \frac{\left(\omega + \frac{\hbar k^2}{2m}\right)^3 - \left(\omega - \frac{\hbar k^2}{2m}\right)^3}{k^2 v_{Fe}^2} + \right. \\
& + \frac{\left[\left(\omega + \frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2 - k^2 v_{Fe}^2\right]^2}{4k^3 v_{Fe}^3} \text{ и } \frac{\omega + \frac{\hbar k^2}{2m} + kv_{Fe}}{\omega + \frac{\hbar k^2}{2m} - kv_{Fe}} - \\
& \left. - \frac{\left[\left(\omega - \frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2 - k^2 v_{Fe}^2\right]^2}{4k^3 v_{Fe}^3} \text{ и } \frac{\omega - \frac{\hbar k^2}{2m} + kv_{Fe}}{\omega - \frac{\hbar k^2}{2m} - kv_{Fe}} \right\}
\end{aligned} \tag{4.5.10}$$

В низкочастотном пределе при условии $\omega, \frac{\hbar k^2}{2m} \ll kv_{Fe}$ отсюда находим:

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = -\frac{1}{4} \frac{\omega_{Le}^2 k^2 \hbar^2}{\omega^2 m^2 v_{Fe}^2} + i \frac{3\pi \omega_{Le}^2}{4\omega kv_{Fe}}. \tag{4.5.11}$$

Первое слагаемое в этом выражении, обладающее полюсом второго порядка при $\omega \rightarrow 0$, чисто квантовой природы и приводит к появлению статических магнитных свойств свободного электронного газа при учете квантовых эффектов (см. задачу 5 по данной теме). Второе же слагаемое совпадает с классическим выражением для $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ в низкочастотном пределе (см. § 4.2) и описывает аномальный скин-эффект. Легко показать, что наличие первого квантового слагаемого в (4.5.11) не меняет формулу аномального скин-эффекта (4.2.14), поскольку приводит к пренебрежимо малой поправке порядка

$$\frac{\omega_{Le}^2 \hbar^2}{m^2 c^2 v_{Fe}^2} \lesssim 10^{-5} \ll 1. \tag{4.5.12}$$

Задачи по теме IV

Задача 1. Исследовать характер проникновения поперечного поля в плазму в зависимости от частоты ω .

Решение.

Характер проникновения поперечного поля определяется корнями $k(\omega)$ дисперсионного уравнения

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k). \quad (1)$$

Глубина проникновения поля

$$\lambda_{ск} = \frac{1}{\text{Im } k(\omega)}. \quad (2)$$

Проанализируем уравнение (1) в различных областях частот.

а) В области $\omega \gg \nu_e, kv_0$ (ν_e – частота столкновений электронов, v_0 – средняя скорость их хаотического движения: $v_0 = v_{Te}$ – для невырожденной плазмы и $v_0 = v_{Fe}$ – для вырожденной плазмы) имеем

$$\varepsilon^{tr} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_e}{\omega}\right). \quad (3)$$

Здесь $\nu_e = \nu_{en}$ – для слабоионизованной невырожденной и вырожденной плазмы, $\nu_e = \nu_{эфф}$ – для полностью ионизованной невырожденной плазмы и $\nu_e = \nu_{Fe}$ – для вырожденной плазмы.

Из (1) при подстановке (3) получаем

$$\lambda_{ск} = \begin{cases} \frac{2c\omega^2}{\omega_{Le}^2 \nu_e} & \text{при } \omega \gg \omega_{Le}, \\ \frac{c}{\omega_{Le}} & \text{при } \omega_{Le} \frac{v_0}{c} \ll \omega \ll \omega_{Le}. \end{cases} \quad (4)$$

б) В области $kv_0 \gg \omega, \nu_e$ имеем

$$\varepsilon^{tr} = 1 + i\alpha \frac{\omega_{Le}^2}{\omega kv_0}. \quad (5)$$

Здесь $\alpha = \sqrt{\pi/2}$ – для невырожденной и $\alpha = (3\pi)/4$ – для вырожденной плазмы. В этой области частот из (1) получаем

$$\lambda_{ск} = 2 \left(\frac{c^2 v_0}{\alpha \omega_{Le}^2 \omega} \right)^{1/3} \quad \text{при } \omega^{*2} \ll \omega^2 \ll \omega_{Le}^2 \frac{v_0^2}{c^2}, \quad (6)$$

где $\omega^* = \nu_e^3 c^2 / \omega_{Le}^2 v_0^2$.

Таким образом, область существования решения (6), соответствующего аномальному скин-эффекту, дается неравенством $\nu_e^2 \ll \frac{v_0^2}{c^2} \omega_{Le}^2$. Аномальный скин-эффект возможен только в области частот $\omega > \omega^*$ независимо от соотношения величин ω и ν_e .

в) В области $\nu_e \gg kv_0, \omega$ имеем

$$\varepsilon^{tr} = 1 + i\alpha_1 \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \nu_e}. \quad (7)$$

Здесь $\alpha_1 = 1$ – для слабоионизованной и $\alpha = 1,96$ – для полностью ионизованной плазмы. В результате находим

$$\lambda_{ск} = \left(\frac{2\nu_e c^2}{\alpha_1 \omega_{Le}^2 \omega} \right)^{1/2} \quad \text{при } \omega \ll \omega^*, \nu_e. \quad (8)$$

Таким образом, решение (8), соответствующее нормальному скин-эффекту, существует в области частот $\omega \ll \omega^*$ независимо от соотношения величин ω^* и ν_e . Результаты проведенного анализа представлены на рис. 4.2, где $\alpha \rightarrow \alpha \omega_{Le}$.

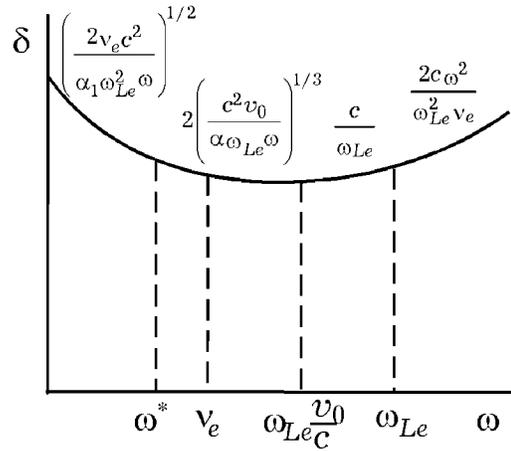


Рис. 4.2

Задача 2. Вывести выражение для диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской невырожденной ($T_e \gg mc^2$) электронной плазмы и исследовать спектры высокочастотных волн.

Решение.

Поскольку энергия ультрарелятивистских частиц $\mathcal{E} = cp$, функция распределения электронов в такой плазме имеет вид

$$f_{oe}(p) = \frac{N_e}{8\pi} \left(\frac{c}{T_e} \right)^3 \exp \left(-\frac{cp}{T_e} \right). \quad (1)$$

Скорость электронов при этом равна скорости света: $v = \partial \mathcal{E} / \partial p = c$ и в этом смысле функция распределения (1) подобна распределению Ферми. Подставляя

функцию распределения (1) в (4.1.4), получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon^l &= 1 + \frac{4\pi e^2 N_e}{k^2 T_e} \left\{ 1 - \frac{\omega}{2ck} \ln \frac{\omega + ck}{\omega - ck} \right\}, \\ \varepsilon^{tr} &= 1 - \frac{\pi e^2 N_e c}{\omega k T_e} \left\{ \frac{2\omega}{ck} - \left(\frac{\omega^2}{c^2 k^2} - 1 \right) \ln \frac{\omega + ck}{\omega - ck} \right\}.\end{aligned}\quad (2)$$

По своей структуре эти выражения схожи с (4.3.25) и (4.3.26). Из них непосредственно следует, что при $\omega/k > c$ мнимые части ε^l и ε^{tr} равны нулю и поглощение волн в плазме отсутствует. Спектры частот колебаний при этом определяются соотношениями

$$\omega^2 = \begin{cases} \frac{4\pi e^2 N_e c^2}{3T_e} + \frac{3}{5} k^2 c^2 & \text{при } \omega \gg ck, \\ \frac{2\pi e^2 N_e c^2}{T_e} + k^2 c^2 & \text{при } \omega \rightarrow ck, \end{cases}\quad (3)$$

– для поперечных волн,

$$\omega^2 = \frac{4\pi e^2 N_e c^2}{3T_e} + \frac{3}{5} c^2 k^2 \quad \text{при } \omega \gg ck, \quad (4)$$

$$\omega = ck \left[1 + 2 \exp \left(-2 - \frac{k^2 T_e}{2\pi e^2 N_e} \right) \right] \quad \text{при } \omega \rightarrow ck,$$

– для продольных волн.

В области малых фазовых скоростей (низких частот), когда $\omega < ck$, мнимые части ε^l и ε^{tr} велики и поле в плазме сильно поглощается, либо экранируется. Действительно, при $\omega \ll ck$ имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon^l &= 1 + \frac{4\pi e^2 N_e}{k^2 T_e} \left(1 + i \frac{\pi \omega}{2 ck} \right), \\ \varepsilon^{tr} &= 1 + i\pi \frac{\pi e^2 N_e c}{\omega k T_e}.\end{aligned}\quad (5)$$

Отсюда видно, что радиус экранирования продольного поля в плазме равен дебаевскому радиусу $\lambda_{\text{СК}}^l = \left(\frac{T_e}{4\pi e^2 N_e} \right)^{1/2}$, а глубина проникновения поперечного поля определяется аномальным скин-эффектом $\lambda_{\text{СК}}^{tr} \simeq \left(\frac{2}{\pi} \frac{T_e c}{\pi e^2 N_e \omega} \right)^{1/3}$.

Задача 3. Исследовать процесс релаксации анизотропии температуры электронов ($T_{\perp} - T_{\parallel}$) в полностью ионизованной неизотермической плазме в условиях $T_e \gg T_i$ при учете поляризационного взаимодействия электронов (взаимодействие посредством ионного звука).

Решение.

В изотропизации температуры электронов, как было показано в задаче 5 по теме III, принимают участие как электрон-электронные, так и электрон-ионные

столкновения. При решении этой задачи было пренебрежено поляризацией плазмы в интеграле столкновений и тем самым взаимодействием электронов вследствие испускания и поглощения плазменных волн (волновое взаимодействие). Такое приближение справедливо для не очень сильно неизотермической плазмы, в которой невозможны ионно-звуковые колебания. В неизотермической плазме в условиях $T_e \gg T_i$ электроны интенсивно взаимодействуют с ионным звуком и могут быстро обмениваться импульсом посредством испускания и поглощения таких волн. Поэтому здесь учтем только такое волновое взаимодействие и выясним, когда оно становится определяющим. С этой целью воспользуемся кинетическим уравнением Ленарда – Балеску

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ee} = \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\mathbf{p}' I_{ij}^{ee}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \left(\frac{\partial f_e(\mathbf{p})}{\partial p_j} f_e(\mathbf{p}') - f_e(\mathbf{p}) \frac{\partial f_e(\mathbf{p}')}{\partial p'_j} \right) \quad (1)$$

и учтем в интеграле электрон-электронных столкновений только волновое (поляризационное) взаимодействие, т.е. представим $I_{ij}^{ee}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ в виде

$$\begin{aligned} I_{ij}^{ee}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= \pi \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{4\pi e^2}{k^2} \right)^2 \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')}{|\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)|^2} \simeq \\ &\simeq -\frac{\pi^2}{(2\pi)^3} \int_{kr_{Di} < 1} d\mathbf{k} \left(\frac{4\pi e^2}{k^2} \right)^2 \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') \delta[\operatorname{Re} \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)]}{|\operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)|^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Это выражение учитывает лишь вклад, обусловленный волновым (поляризационным) взаимодействием электронов с ионно-звуковыми колебаниями, поэтому интегрирование по k проводится только в области $kr_{Di} < 1$, где такие колебания существуют. Оно дает аддитивный вклад в релаксацию анизотропии температуры наряду с ближними столкновениями (область $kr_{Di} > 1$), учтенными в задаче 5 по теме III. Учтем теперь тот факт, что для ионно-звуковых волн $\omega \ll kv_{Te}$, и запишем (2) в иной форме:

$$I_{ij}^{ee}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2\pi e^4 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{kr_{Di} < 1} d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^4} \frac{\delta[\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, k)]}{|\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, k)|} \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}'). \quad (3)$$

Считая анизотропию температуры электронов малой, получим

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Li}^2}{k^3 v_{Te}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right).$$

Подставляя (4) в (3), после громоздких вычислений будем иметь:

$$\begin{aligned} I_{ij}^{ee}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= 4\sqrt{2\pi} v_{Te} e^4 I \frac{[\mathbf{v}\mathbf{v}']_i [\mathbf{v}\mathbf{v}']_j}{|[\mathbf{v}\mathbf{v}']|^2}, \\ I &= \frac{1}{2} \left| \frac{e_i}{e} \right| \frac{T_e}{T_i} \frac{1}{\ln \frac{e_i^2 M T_e^3}{e^2 m T_i^3}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда видно, что по порядку величины $I_{ij}^{ee} \sim \frac{e^4 I}{v_{Te}}$, в то время как отброшенный интеграл ближних столкновений давал $I_{ij}^{ee} \sim \frac{e^4}{v_{Te}} L$. Таким образом, используемое пренебрежение ближними столкновениями по сравнению с поляризационным взаимодействием обоснованно при условии $I \gg L$, или что то же самое при

$$\frac{T_e}{T_i} \frac{1}{\ln \frac{e_i^2 M T_e^3}{e^2 m T_i^3}} \gg L = \ln \frac{r_{Di}}{r_{min}}. \quad (6)$$

Это условие реально выполняется при $T_e/T_i > (10^2 \div 10^3)$.

Подставляя далее (5) в (1), домножая (1) на $mv_{\perp}^2/2$ и $mv_{\parallel}^2/2$ и интегрируя по импульсам, так же как и в задаче 5 по теме III, получаем

$$\frac{d}{dt} (T_{\perp} - T_{\parallel}) = -\nu_{ee} (T_{\perp} - T_{\parallel}), \quad (7)$$

где

$$\nu_{ee} = \frac{6}{5} \nu_{эфф} \left| \frac{e}{e_i} \right| \frac{I}{L}, \quad \nu_{эфф} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^2 e_i^2 N_i L}{T_e^{3/2}}. \quad (8)$$

Учитывая аддитивный вклад в релаксацию ближних столкновений, найденный в задаче 5 по теме III, окончательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T_{\perp} - T_{\parallel}) &= -\nu_n (T_{\perp} - T_{\parallel}), \\ \nu_n &= \frac{6}{5} \nu_{эфф} \left\{ 1 + \left| \frac{e}{e_i} \right| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\sqrt{2}I}{L} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Задача 4. Исследовать затухание звука вследствие столкновений электронов, при нерезонансном взаимодействии носителей заряда с колебаниями решетки.

Решение.

Пьезоэффект проявляется не только в условиях пересечения дисперсионных кривых для упругих и плазменных волн. Просто в этом случае указанный эффект является резонансным и поэтому наиболее сильным. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, как влияет на характер затухания упругих волн высокочастотное продольное поле в условиях частых столкновений электронов. Легко видеть, что уравнение (4.4.7) остается справедливым и при учете столкновений частиц. Действительно, при учете столкновений носителей заряда меняются уравнение (4.4.1) и первое уравнение системы (4.4.4) – в них появляются отличные от нуля столкновительные члены. Сама же методика и идеология решения задачи о связанных волнах, однако, не меняется, и поэтому система (4.4.5) и найденные при решении этой системы соотношения (4.4.6) и (4.4.7) полностью сохраняют свой вид, если в них под $\varepsilon(\omega, k)$ понимать диэлектрическую проницаемость плазмы носителей заряда с

учетом их столкновений. Учитывая все сказанное, уравнение (4.4.10) в высокочастотном пределе и в условиях частых столкновений электронов запишем в виде (опять для $k = k_{\perp}$ и $k = k_z$ соответственно)

$$(\omega^2 - k^2 v_{l,tr}^2) \left(1 + i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \nu_e} \right) = \frac{4\pi \beta_{3,1}^2 k^2}{\rho^{(m)}}. \quad (1)$$

Учитывая, что в звуковой области частот $\omega \ll \omega_{Le}^2/\nu_e$, отсюда находим спектр частот упругих волн и декремент их затухания, обусловленного электронным трением ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega^2 \simeq k^2 v_{l,tr}^2, \quad \delta_{l,tr} = -\frac{2\pi \beta_{3,1}^2 k^2 \nu_e}{\rho^{(m)} \omega_{Le}^2}. \quad (2)$$

Задача 5. Исходя из формул (4.5.2) и (4.5.3), получить выражение для магнитной проницаемости свободного электронного газа.

Решение.

Используя связь магнитной проницаемости с $\varepsilon^l(\omega, k)$ и $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ (см. § 2.3):

$$1 - \frac{1}{\mu(\omega, k)} = \frac{\omega^2}{c^2 k^2} [\varepsilon^{tr}(\omega, k) - \varepsilon^l(\omega, k)], \quad (1)$$

находим искомую величину $\mu(\omega, k)$. Интерес представляет статический предел $\mu(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\omega/k \rightarrow 0} \mu(\omega, k)$, определяемый соотношением

$$1 - \frac{1}{\mu(0, 0)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2\pi e^2}{c^2 k^4} \int d\mathbf{p} [\mathbf{k}\mathbf{v}]^2 \times \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} - \frac{f_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right)}{\hbar \mathbf{k}\mathbf{v}} \right\} = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{3c^2 m^2} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}}. \quad (2)$$

Для вырожденного электронного газа, т.е. для распределения Ферми $f_0(p)$, отсюда находим

$$\mu(0, 0) = 1 + 4\pi \chi(0, 0), \quad (3)$$

$$\chi(0, 0) = - \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 \frac{4mn_e^{1/3}}{2\pi\hbar} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3}.$$

Для нерелятивистского же максвелловского распределения $f_0(\mathbf{p})$

$$\chi(0, 0) = - \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 \frac{n_e}{3T_e}. \quad (4)$$

Наконец, для невырожденного электронного газа с ультрарелятивистской температурой (см. задачу 2 по теме IV):

$$\chi(0, 0) = - \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 \frac{n_e}{3mc^2}. \quad (5)$$

Легко видеть, что во всех рассмотренных случаях имеет место слабый диамагнетизм свободного электронного газа, открытый в случае вырожденного газа (формула (3)) и равный 1/3 спинового парамагнетизма такого газа. Формулы (4) и (5), обобщающие теорему Л.Ландау на случаи максвелловского распределения с произвольной температурой, были получены В.П.Силиным и А.А.Рухадзе в 1960 г.

Задача 6. Исходя из уравнений квантовой гидродинамики для холодной плазмы (3.7.11), вывести тензор диэлектрической проницаемости в отсутствие внешних полей, но при наличии направленной скорости электронов и после усреднения по равновесной функции распределения по скоростям получить выражения (4.5.2) и (4.5.3).

Решение.

Линеаризуя систему (3.7.11) в однородной $n = \text{const}$ электронной плазме с направленной скоростью $\mathbf{v} \neq 0$ и замечая, что квантовое уравнение Эйлера отличается от классического заменой

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} - i\mathbf{k} \frac{\hbar^2 k^2}{4me} \frac{\delta n}{n}, \quad (1)$$

где δn – возмущение плотности n зависящее (как и все возмущенные величины) от времени и координат в виде $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, легко заключаем, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{\text{KB}}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{\text{KL}}(\omega, \mathbf{k}) - \\ - \frac{\omega_q^2}{\omega_{Le}^2} \delta\varepsilon_{i\mu}^{\text{KL}}(\omega, \mathbf{k}) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \delta\varepsilon_{\nu j}^{\text{KL}}(\omega, \mathbf{k}) \left[1 + \frac{\omega_q^2}{\omega_{Le}^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \delta\varepsilon_{\mu\nu}^{\text{KL}}(\omega, \mathbf{k}) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\omega_q \equiv \frac{\hbar k^2}{2m}$, а $\varepsilon_{ij}^{\text{KB}}(\omega, \mathbf{k})$ – гидродинамическая квантовая диэлектрическая проницаемость, а $\varepsilon_{ij}^{\text{KL}}(\omega, \mathbf{k})$ – классическая, причем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{\text{KL}}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}^{\text{KL}}(\omega, \mathbf{k}) = \\ = \delta_{ij} - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2} \left[\delta_{ij} + \frac{k^2 v_i v_j}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} + \frac{k_i v_j + k_j v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь можно перейти от моноскоростной гидродинамики к кинетике, производя усреднение по функции распределения по скоростям $f_0(\mathbf{p})$ путем замены

$$n \rightarrow \int d\mathbf{p} f_0(\mathbf{p}) [\dots]. \quad (4)$$

После несложных вычислений получаем

$$\varepsilon_{ij}^{\text{KB}}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon_{ij}^{\text{tr}}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}^l(\omega, \mathbf{k}), \quad (5)$$

где $\varepsilon_{ij}^l(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}^{\text{tr}}(\omega, \mathbf{k})$ совпадают с (4.5.2) и (4.5.3). Заметим, кстати, что если по рецепту (4) усреднить $\varepsilon_{ij}^{\text{KL}}(\omega, \mathbf{k})$, то из (3) следуют классические выражения (4.1.6) и (4.1.7).

ТЕМА V

**ЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНОЙ
НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕННОЙ СРЕДЫ
ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

**§ 5.1. Линейные электромагнитные явления в
бесстолкновительной равновесной магнитоактивной
плазменной среде**

Плазменная среда во внешнем магнитном поле обладает таким большим числом степеней свободы и различных ветвей колебаний, что сколь-нибудь подробное их описание становится просто невозможным. Поэтому мы здесь ограничимся рассмотрением принципиально новых явлений, присущих только магнитоактивной плазменной среде.

Прежде всего следует отметить ларморовское вращение заряженных частиц вокруг силовых линий магнитного поля с частотой $\Omega_\alpha = \frac{e_\alpha B_0}{m_\alpha c}$, где \mathbf{B}_0 – индукция внешнего магнитного поля, которую мы считаем направленным вдоль оси $0z$. Частота ларморовского вращения – ларморовская частота представляет собой как бы собственную частоту колебаний отдельной частицы, не зависящую от наличия других частиц и, соответственно, коллективных эффектов, обусловленных наличием самосогласованного поля. Иными словами, Ω_α – ”одночастичная” частота и она должна проявиться в диэлектрической проницаемости в виде полюсов его компонент, или резонансов при $\omega = n\Omega_\alpha$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Кроме того, из общих курсов электродинамики известно, что ларморовское вращение заряженных частиц в магнитном поле приводит к циклотронному излучению (а следовательно, и поглощению) электромагнитных волн с частотами $\omega = n\Omega_\alpha$, что также проявляется в наличии полюсов компонент тензора диэлектрической проницаемости плазменной среды.

Во-вторых, внешнее магнитное поле обладает определенной упругостью и оказывает на плазму давление $\approx B_0^2/8\pi$, которое будет действовать наряду с газокINETическим давлением $P_0 = \sum_{\alpha} N_{\alpha} T_{\alpha}$, но только поперек силовых линий магнитного поля. В конечном счете, это должно проявиться в спектрах акустических колебаний в виде появления новой ветви. Наконец, раз Ω_{α} – одночастичные собственные частоты, то вблизи этих частот, т.е. при $\omega \simeq \Omega_{\alpha}$, магнитоактивная плазма должна напоминать изотропную в области низких частот, т.е. в пределе $\omega \rightarrow 0$. Именно на эти эффекты и будет обращено основное внимание ниже.

Как и раньше, начнем рассмотрение с бесстолкновительной плазменной среды, т.е. будем исходить из уравнения Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (5.1.1)$$

Равновесная функция распределения f_0 удовлетворяет этому уравнению в однородном и стационарном пределе и при наличии внешнего однородного магнитного поля $\mathbf{B}_0 \parallel 0z$, т.е.

$$\frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \Omega \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} = 0, \quad (5.1.2)$$

где введена цилиндрическая система координат в пространстве скоростей (импульсов): $v_x = v_{\perp} \cos \varphi$, $v_y = v_{\perp} \sin \varphi$, $v_z = v_z$. В частности, f_0 может быть термодинамически равновесным распределением Максвелла, либо распределением Ферми. Кроме того, сама плазма, как и выше, считается квазинейтральной, т.е. $\sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} = 0$.

Малое отклонение от равновесного распределения δf находится из решения линеаризованного уравнения Власова

$$i(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}) \delta f + \Omega \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} = e \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (5.1.3)$$

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее очевидному условию периодичности

$$\delta f(\varphi + 2\pi) = \delta f(\varphi), \quad (5.1.4)$$

записывается в виде

$$\delta f = \frac{e}{\Omega} \int_c^{\varphi} d\varphi' \left(\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\varphi'} \exp \left[\frac{i}{\Omega} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_{\varphi''}) \right], \quad (5.1.5)$$

где $|c| \rightarrow \infty$, причем знак постоянной c совпадает со знаком заряда e , так чтобы $\delta f(c) \rightarrow 0$. Подставляя это выражение в формулу для тока, индуцированного в плазме

$$\mathbf{j} = \sum e \int \mathbf{v} \delta f d\mathbf{p}, \quad (5.1.6)$$

находим тензор проводимости $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, а затем и тензор диэлектрической проницаемости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij} = \delta_{ij} + \sum \frac{4\pi i e^2}{\omega \Omega} \times \\ \times \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} v_i \int_0^\infty d\varphi' v_j(\varphi') \exp \left(i \int_\varphi^{\varphi'} d\varphi'' \left[\frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\varphi''}}{\Omega} \right] \right). \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Здесь как и далее знак суммирования без индекса означает суммирование по сортам частиц α . Этот тензор состоит из 6-ти независимых компонент

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & -\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (5.1.8)$$

имеющих довольно громоздкий вид, и мы здесь их в общем случае выписывать не будем. Явный вид тензора можно найти в книге А.Ф.Александрова, Л.С.Богданкевич и А.А.Рухадзе "Основы электродинамики плазмы", Москва, Изд. "Высшая школа", 1988г. Тем более не будем анализировать общее дисперсионное уравнение малых электромагнитных колебаний

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0, \quad (5.1.9)$$

которое описывает бесчисленное множество ветвей и содержит всю информацию о линейных электромагнитных свойствах плазмы (подробности можно найти в упомянутой выше книге; см. также § 3.1).

Рассмотрим только два выражения и вытекающие из них следствия. Это величина

$$\varepsilon_{\perp}(\omega, k_z) = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} = 1 + \sum \frac{2\pi e^2}{\omega} \int \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{v_{\perp}^2 d\mathbf{p}}{\omega - k_z v_z \mp \Omega}, \quad (5.1.10)$$

описывающая поперечные ($\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$) поля, неоднородные только вдоль внешнего магнитного поля (продольное распространение волн, $k_{\perp} = 0$, $k_z = k$), и величина

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \left[1 - \sum_n \frac{\omega J_n^2(b)}{\omega - k_z v_z - n\Omega} \right], \quad (5.1.11)$$

описывающая продольное (потенциальное $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) поле с произвольной пространственной неоднородностью ($k_{\perp} \neq 0$, $k_z \neq 0$). Здесь $J_n(x)$ – функция Бесселя, $b = k_{\perp} v_{\perp} / \Omega$. Два знака в формуле (5.1.10) соответствуют двум возможным поперечным поляризациям поля \mathbf{E} .

Прежде всего заметим, что подинтегральные выражения (5.1.10) и (5.1.11) имеют полюса

$$\omega - k_z v_z - n\Omega = 0, \quad (5.1.12)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Как и в случае изотропной плазменной среды наличие полюсов соответствует появлению диссипации, обусловленной излучением и поглощением электромагнитных полей заряженными частицами. Часто при $n = 0$ такое взаимодействие частиц с полем называют черенковским излучением и поглощением, а при $n \neq 0$ – циклотронным. Легко понять, однако, что такое деление весьма условно, поскольку, если учесть, что частицы в магнитном поле вращаются и тем самым обладают собственной частотой колебаний, то и циклотронное взаимодействие можно считать черенковским, но с учетом сдвига частоты на собственную частоту $n\Omega$ вследствие эффекта Доплера. Так или иначе, но полюса в (5.1.10) и (5.1.11) следует понимать в смысле Ландау, т.е. при учете принципа причинности – отсутствии возмущений при $t \rightarrow -\infty$, т.е.

$$\frac{1}{\omega - k_z v_z - n\Omega} = \frac{\mathcal{P}}{\omega - k_z v_z - n\Omega} - i\pi\delta(\omega - k_z v_z - n\Omega). \quad (5.1.13)$$

Как мы уже знаем, это соответствует появлению бесстолкновительной диссипации энергии поля в среде. Для получения явных конкретных соотношений приведем вид выражений (5.1.10) и (5.1.11) для случая равновесного распределения Максвелла (в случае невырожденных носителей) и для распределения Ферми (в случае сильного вырождения носителей).

В случае невырожденных носителей заряда, распределенных по

Максвеллу

$$\varepsilon_{\perp}(\omega, k_z) = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega \mp \Omega)} J_+ \left(\frac{\omega \mp \Omega}{k_z v_T} \right), \quad (5.1.10a)$$

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} \left[1 - \sum_n \frac{\omega A_n(z)}{\omega - n\Omega} J_+ \left(\frac{\omega - n\Omega}{k_z v_T} \right) \right], \quad (5.1.11a)$$

где $A_n(x) = I_n(x)e^{-x}$, $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя, а $z = k_{\perp}^2 v_T^2 / \Omega^2$.

Для сильно вырожденных носителей с равновесным распределением Ферми

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp}(\omega, k_z) &= 1 + \sum \frac{3\omega_L^2}{4\omega k v_F} \times \\ &\times \left[\left(\frac{(\omega \mp \Omega)^2}{k_z^2 v_F^2} - 1 \right) \ln \left(\frac{\omega \mp \Omega + k_z v_F}{\omega \mp \Omega - k_z v_F} \right) - 2 \frac{\omega \mp \Omega}{k_z v_F} \right], \end{aligned} \quad (5.1.10б)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) &= 1 + \sum \frac{\omega_L^2}{k^2 v_F^2} \left[1 - \sum_n \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \times \right. \\ &\times \left. J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_F \sin \theta}{\Omega} \right) \frac{\omega}{2(\omega - k_z v_F \cos \theta - n\Omega)} \right]. \end{aligned} \quad (5.1.11б)$$

Эффект Доплера в формулах (5.1.10) и (5.1.11) проявляется и в характере поведения электромагнитного поля в магнитоактивной плазменной среде. Так, поперечное поле в электронной плазме скинировано не в области низких частот, а в области циклотронных частот, когда $|\omega \mp \Omega_e| \ll k_z v_0$, где $v_0 = v_{Te}$ – для невырожденной плазмы и $v_0 = v_{Fe}$ – для вырожденной. Используя (5.1.10) для определения глубины скинирования поля в этой области частот получаем¹

$$k^2 c^2 = \omega^2 \varepsilon_{\perp} = i \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k v_0} \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{при } \mathcal{E}_{Fe} < T_e, \\ \frac{3\pi}{4} & \text{при } \mathcal{E}_{Fe} > T_e. \end{cases} \quad (5.1.14)$$

¹Ниже для простоты мы ограничиваемся чисто электронной плазмой.

Это уравнение аналогично уравнению (4.1.14), рассмотренному выше, и приводит к формуле (4.1.15), описывающей аномальный скин-эффект (см. также (4.2.14))

$$\lambda_{\text{ск}} = \frac{1}{\text{Im } k} = 2 \left(\frac{\omega_{Le}^2 \omega}{v_0 c^2} \right)^{-1/3} \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^{1/3} & \text{при } \mathcal{E}_{Fe} < T_e, \\ \left(\frac{4}{3\pi} \right)^{1/3} & \text{при } \mathcal{E}_{Fe} > T_e. \end{cases} \quad (5.1.15)$$

Можно этот результат представить и на волновом (спектральном) языке. Именно, сказать, что вблизи циклотронной частоты появляются поперечные циклотронные волны, затухающие благодаря их сильному черенковскому поглощению

$$\omega = \pm \Omega_e - i \frac{k^3 c^2 v_0}{\omega_{Le}^2} \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{при } \mathcal{E}_{Fe} < T_e, \\ \frac{4}{3\pi} & \text{при } \mathcal{E}_{Fe} > T_e. \end{cases} \quad (5.1.16)$$

Вдали же от циклотронной частоты, когда $\omega \gg |\omega \mp \Omega_e| \gg k_z v_0$, или как говорят в оптике, вне линии циклотронного поглощения, из (5.1.10) следует, что в невырожденной максвелловской плазме существуют слабозатухающие волны, причем для них

$$k^2 c^2 \simeq - \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{\omega \mp \Omega_e} \left[1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \mp \Omega_e}{k v_{Te}} \exp \left(- \frac{(\omega \mp \Omega_e)^2}{2 k^2 v_{Te}^2} \right) \right]. \quad (5.1.17)$$

Отсюда находим частоту и декремент затухания ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$) циклотронной волны вне линии поглощения

$$\omega = \pm \Omega_e - \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k^2 c^2}, \quad (5.1.18)$$

$$\delta = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k^2 c^2} \right)^2 \frac{1}{k v_{Te}} \exp \left(- \frac{(\omega \mp \Omega_e)^2}{2 k^2 v_{Te}^2} \right).$$

Раз мы заговорили на оптическом языке, запишем и решение уравнения (5.1.17) для комплексного показателя преломления $n = \frac{c}{\omega} k$ как функцию действительной частоты $\omega \sim \pm \Omega_e$. Имеем ($n \rightarrow n + i\chi$):

$$n^2 \simeq \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega \mp \Omega_e)}, \quad \chi = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}^2 c}{\omega^2 v_{Te} n^2} \exp \left(- \frac{(\omega \mp \Omega_e)^2 c^2}{2 n^2 v_{Te}^2} \right). \quad (5.1.19)$$

Что касается вырожденной плазмы, то вне линии поглощения при $|\omega \mp \Omega_e| \gg k_z v_0$ мнимая часть $\varepsilon_{\perp}(\omega, k)$ в (5.1.10б) обращается в нуль, а поэтому поглощение вовсе отсутствует.

Все сказанное выше справедливо только вдали от линии циклотронного поглощения, пока $|\omega \mp \Omega_e| \gg n \frac{v_0}{c}$. Внутри же этой линии, т.е. при выполнении обратного неравенства, мы должны воспользоваться уравнением (5.1.14), которое дает сильное поглощение волны как в невырожденной, так и в вырожденной плазме

$$n^3 = i \frac{\omega_{Le}^2 c}{\omega^2 v_0} \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{при } \mathcal{E}_{Fe} < T_e, \\ \frac{3\pi}{4} & \text{при } \mathcal{E}_{Fe} > T_e. \end{cases} \quad (5.1.20)$$

На рис. 5.1 представлены решения (5.1.19) и (5.1.20) вблизи циклотронной частоты. Заштрихованная область соответствует сильному поглощению и реализуется только для невырожденной плазменной среды.

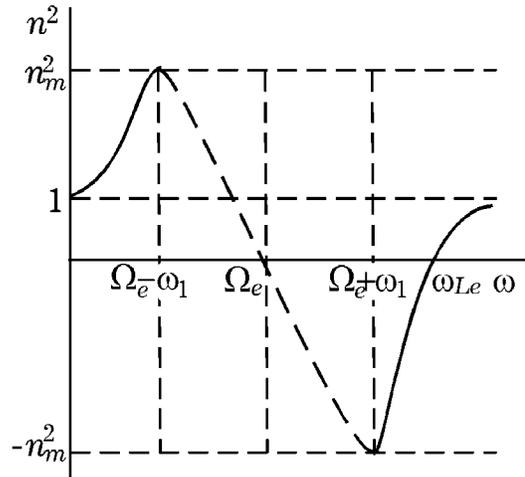


Рис. 5.1

Следует отметить, что явление циклотронного поглощения в плазменной среде уже давно приобрело прикладное значение. Электронный и ионный циклотронные резонансы являются мощным средством нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза. Электронный циклотронный резонанс с успехом используется для создания плазмы в плазменных технологических установках. Наконец,

электронно-дырочный циклотронный резонанс в плазме твердого тела позволяет измерять эффективные массы носителей.

Собственная частота колебаний частиц проявляется и в характере продольного поля в магнитоактивной плазменной среде. Правда, это не касается дебаевского экранирования продольного поля, которое имеет место в статическом пределе. В магнитоактивной плазменной среде подобная экранировка сохраняется, в чем легко убедиться, перейдя в формуле (5.1.11) к пределу $\omega \rightarrow 0$. Имеем

$$\varepsilon(0, k) = 1 + \sum \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}. \quad (5.1.21)$$

Это выражение, как мы уже знаем, описывает дебаевскую экранировку поля статического заряда в плазменной среде.

Вместе с тем, из выражения (5.1.11) видно, что вблизи циклотронных частот, т.е. при $\omega \approx n\Omega_e$, величина $\varepsilon(\omega, k)$ обладает полюсами, а это значит, что даже в редкой плазме существует неограниченное число циклотронных мод колебаний. Для простоты здесь мы проанализируем эти моды для случая электронной плазмы и строго поперечного их распространения, т.е. при $k_z = 0$. В этом пределе из (5.1.11) получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \left[1 - \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\Omega_e} J_n^2 \left(\frac{k^2 v_{\perp}^2}{\Omega_e^2} \right) \right] \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} d\mathbf{p} = \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{Le}^2 n^2 \Omega_e^2}{k^2 v_{Te}^2 (\omega^2 - n^2 \Omega_e^2)} A_n \left(\frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

Последнее соотношение относится к невырожденной электронной плазме с максвелловским распределением (см. (5.1.11a)). Для вырожденной электронной плазмы с распределением Ферми при $k_z = 0$ из (5.1.11б) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, k) &= 1 - \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \times \\ &\times \sum_n \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \frac{n^2 \Omega_e^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} J_n^2 \left(\frac{k v_{Fe} \sin \theta}{\Omega_e} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

Определив предельные частоты: при $k \rightarrow 0$ – это $\omega = n\Omega$ (для $n > 1$) и $\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}$ (для $n = 1$); а при $k \rightarrow \infty$ – это $\omega = n\Omega$ для любых n , легко представить бесконечное число решений (5.1.22) и (5.1.23) в виде, показанном на рис. 5.2 и 5.3, которые в литературе известны как моды Бернштейна (заметим, что для вырожденной плазмы при $kv_0 > \Omega_e$ кривые, показанные пунктиром, слегка осциллируют). Модам Бернштейна обычно уделяется мало внимания, хотя они очень интересны тем, что обладают отрицательной дисперсией – в них $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ и $\mathbf{v}_{\text{ф}}$ антипараллельны.

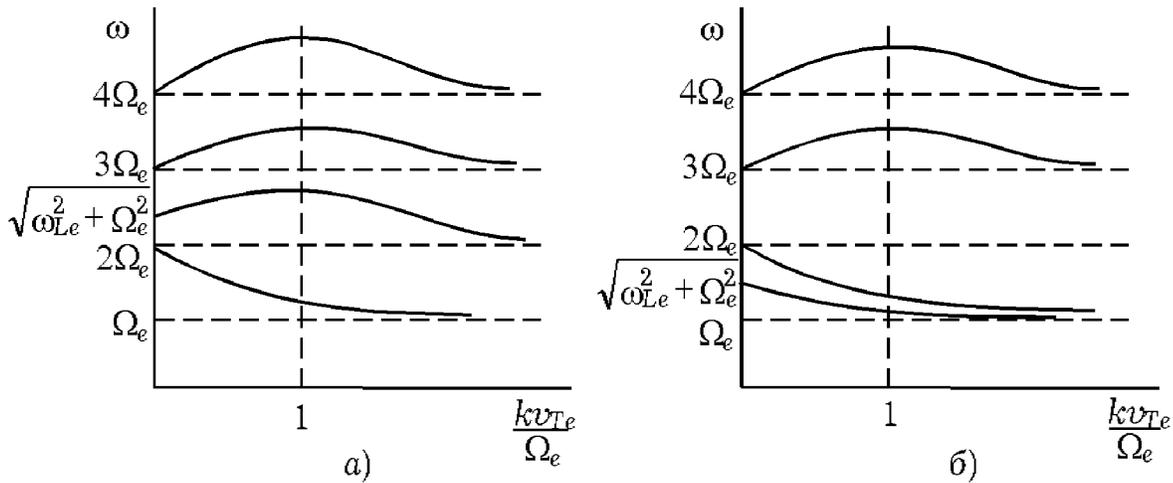


Рис. 5.2

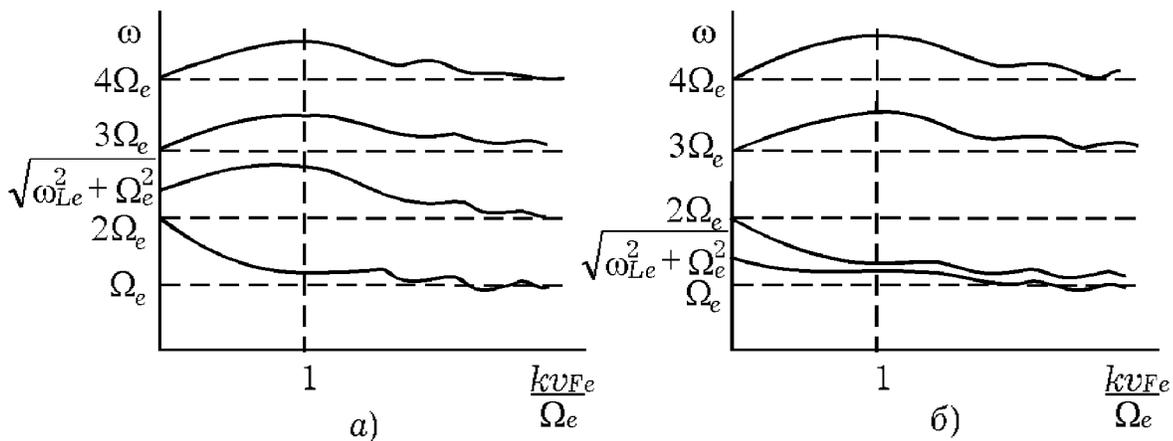


Рис. 5.3

Выше мы специально осветили только некоторые вопросы элек-

тродинамики магнитоактивной плазменной среды: с одной стороны, такие, которые характерны только для такой плазмы, либо, с другой, недостаточно освещены в известных книгах по физике плазмы (см. упомянутую выше монографию "Основы электродинамики плазмы", 1988г.). В заключение же кратко обсудим вопросы, которые обычно подробно излагаются в этих книгах.

В первую очередь рассмотрим предел "холодной" замагниченной плазмы. Он следует из (5.1.7) в условиях

$$\frac{\omega - n\Omega_\alpha}{k_z v_0} \gg 1, \quad \frac{k_\perp^2 v_0^2}{\Omega_\alpha^2} \ll 1, \quad (5.1.24)$$

т.е. когда фазовая скорость с учетом доплеровского сдвига намного превосходит тепловую скорость частиц, а длина волны много больше их ларморовского радиуса. В нулевом приближении по этим параметрам получаем:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}, \quad (5.1.25)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_\perp &= 1 - \sum \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2}, \\ g &= \sum \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_\alpha}{\omega(\omega^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\ \varepsilon_\parallel &= 1 - \sum \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

Это выражение в точности совпадает с полученным в модели независимых частиц (либо в модели двухжидкостной гидродинамики холодной бесстолкновительной плазмы). Выше нами были исследованы свойства магнитоактивной плазмы в этой модели. Таким образом, неравенства (5.1.24) можно считать условиями применимости простейшей модели двухжидкостной гидродинамики холодной плазмы.

Вторая простейшая модель, которая была обоснована выше – это модель одножидкостной гидродинамики бесстолкновительной неизотермической плазмы с $T_e \gg T_i$, которая совпадает с идеальной одножидкостной магнитной гидродинамикой Альфвена. Она следует из

(5.1.7) в условиях

$$\omega^2 \ll \Omega_i^2 \ll \omega_{Li}^2, \quad \frac{k_{\perp} v_{T\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \ll 1, \quad v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}, \quad (5.1.27)$$

когда справедливо выражение

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ 0 & -\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (5.1.28)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} = \frac{c^2}{v_A^2}, \\ \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} &= -i \frac{\omega_{Le}^2 k_{\perp}}{\omega \Omega_e k_z}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\omega_{Le}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

Здесь, стремясь к точному переходу к магнитной гидродинамике идеальной жидкости, мы полностью пренебрегли диссипацией энергии в плазме. Подстановка (5.1.29) в дисперсионное уравнение (5.1.9) приводит к спектрам гидродинамических волн, исследованных в модели одножидкостной гидродинамики. Таким образом, неравенства (5.1.27) являются условиями применимости этой модели.

§ 5.2. Учет столкновений частиц при описании свойств магнитоактивной плазменной среды

Учет столкновений еще больше усложняет многообразие свойств магнитоактивной плазменной среды. Поэтому и здесь мы ограничимся только наиболее характерными явлениями, обусловленными столкновениями частиц, и так же как в случае изотропной плазмы продемонстрируем это с помощью использования кинетического уравнения с модельным интегралом столкновений БГК в изотермическом приближении. При этом для малого отклонения функции распределения от равновесной имеем интегральное уравнение типа Вольтерра

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f_{\alpha} + e_{\alpha}\mathbf{E}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} - \Omega_{\alpha}\frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial \varphi} = -\nu_{\alpha n}(\delta f_{\alpha} - f_{0\alpha}\eta_{\alpha}), \quad (5.2.1)$$

где $\eta_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int d\mathbf{p} \delta f_\alpha$, а $f_{0\alpha}$ – равновесное распределение, совпадающее с распределением Максвелла, либо Ферми. Это уравнение решается совершенно так же, как это было сделано в случае изотропной плазмы. Поэтому мы здесь опустим все промежуточные выкладки и приведем окончательные формулы для эффективной поперечной диэлектрической проницаемости, пригодной для описания поперечного электромагнитного поля, неоднородного только вдоль внешнего магнитного поля, т.е. при $k_\perp = 0$, $k_z \neq 0$ (ср. с (5.1.10)):

$$\begin{aligned} \varepsilon_\perp(\omega, k_z) &= 1 + \sum_\alpha \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{\omega} \left[\varepsilon_{xx}^{(\alpha)}(\omega + i\nu) - 1 \pm i\varepsilon_{xy}^{(\alpha)}(\omega + i\nu) \right] = \\ &= 1 + \sum_\alpha \frac{2\pi e_\alpha^2}{\omega} \int \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathcal{E}_\alpha} d\mathbf{p} \frac{v_\perp^2}{\omega \mp \Omega_\alpha + i\nu_{\alpha n} - k_z v_z}, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

а также для эффективной продольной диэлектрической проницаемости, описывающей потенциальное поле ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) с произвольной пространственной неоднородностью, т.е. при $k_\perp \neq 0$, $k_z \neq 0$ (ср. с (5.1.11))

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) &= 1 - \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathcal{E}_\alpha} \times \\ &\times \left[1 - \sum_n \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - k_z v_z - n\Omega_\alpha} J_n^2(b_\alpha) \right] \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - k_z v_z - n\Omega_\alpha} J_n^2(b_\alpha) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

В случае равновесного максвелловского распределения $f_{0\alpha}$ выражения (5.2.2) и (5.2.3) интегрируются, что дает:

$$\varepsilon_\perp(\omega, k_z) = 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_{\alpha n} \mp \Omega_\alpha)} J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n} \mp \Omega_\alpha}{k_z v_{T\alpha}} \right), \quad (5.2.2a)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \times \\
&\times \left\{ 1 - \sum_n \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - n\Omega_{\alpha}} A_n(z_{\alpha}) J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n} - \Omega_{\alpha}}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right\} \times \quad (5.2.3a) \\
&\times \left\{ 1 - \sum_n \frac{i\nu_{\alpha n} A_n(z_{\alpha})}{\omega + i\nu_{\alpha n} - n\Omega_{\alpha}} J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n} - \Omega_{\alpha}}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right\}^{-1}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляются из (5.2.2) и (5.2.3) выражения $\varepsilon_{\perp}(\omega, k_z)$ и $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ для вырожденной плазмы с равновесным распределением $f_{0\alpha}$ в виде распределения Ферми:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\perp}(\omega, k_z) &= 1 - \sum \frac{3}{4} \frac{\omega_L^2}{\omega k v_F} \left[\left(\frac{(\omega + i\nu_{\alpha} \mp \Omega_{\alpha})^2}{k_z^2 v_F^2} - 1 \right) \times \right. \\
&\times \left. \ln \frac{\omega + i\nu_{\alpha} \mp \Omega_{\alpha} + k_z v_{F\alpha}}{\omega + i\nu_{\alpha} \mp \Omega_{\alpha} - k_z v_{F\alpha}} - 2 \frac{\omega + i\nu_{\alpha} \mp \Omega_{\alpha}}{k_z v_{F\alpha}} \right], \quad (5.2.2b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) &= 1 + \sum \frac{3\omega_L^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \times \\
&\times \left[1 - \sum_n \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sin \theta J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{F\alpha} \sin \theta}{\Omega_{\alpha}} \right)}{\omega + i\nu_{\alpha} - k_z v_{F\alpha} \cos \theta - n\Omega_{\alpha}} \right] \times \quad (5.2.3b) \\
&\times \left[1 - \sum_n \frac{i\nu_{\alpha}}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sin \theta J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{F\alpha} \sin \theta}{\Omega_{\alpha}} \right)}{\omega + i\nu_{\alpha} - k_z v_{F\alpha} \cos \theta - n\Omega_{\alpha}} \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

При $\nu_{\alpha n} \rightarrow 0$, т.е. в пределе бесстолкновительной плазмы, выражения (5.2.2) и (5.2.3) очевидным образом переходят в (5.1.10) и (5.1.11), соответственно.

Начнем с анализа эффективной поперечной диэлектрической проницаемости (5.2.2). Из сравнения этого выражения с (5.1.10) совершенно так же, как в случае изотропной плазмы в области низких частот, мы видим, что в магнитоактивной плазменной среде в области

электронной циклотронной частоты характер диссипации поперечного поля существенным образом зависит от отношения $\frac{\nu_{en}}{k_z v_0} \sim \frac{\nu_{en}}{v_0} \left(\frac{c^2 v_0}{\omega \omega_{Le}^2} \right)^{1/3}$. Если это отношение меньше единицы, то диссипация определяется черенковским поглощением поля и имеет место аномальный скин-эффект. В обратном же пределе при $|\omega - \Omega_e| < \nu_{en}$ вместо (5.1.15) имеем

$$\lambda_{\text{ск}} \simeq \frac{1}{\text{Im } k} \simeq \left(\frac{c^2 v_0}{\omega \omega_{Le}^2} \right)^{1/2}. \quad (5.2.4)$$

На языке же спектров собственных колебаний в этом случае вместо (5.1.16) мы должны записать

$$\omega = \Omega_e - i \frac{k^2 c^2 \nu_{en}}{\omega \omega_{Le}^2}. \quad (5.2.5)$$

И здесь мы также видим аналогию со спектром поперечных колебаний изотропной плазменной среды в области низких частот и заключаем, что наличие магнитного поля эквивалентно доплеровскому сдвигу частоты на Ω_e .

Перейдем теперь к обсуждению эффективной продольной диэлектрической проницаемости (5.2.3). Прежде всего отметим, что в статическом пределе, т.е. при $\omega \rightarrow 0$, из (5.2.3) следует

$$\varepsilon(0, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathcal{E}} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}. \quad (5.2.6)$$

Как и следовало ожидать, это выражение совпадает с (5.1.21) и свидетельствует о том, что в магнитоактивной плазменной среде, так же, как и в изотропной, в статическом пределе независимо от наличия столкновений частиц имеет место дебаевская экранировка продольного поля.

То новое, которое возникает для продольного поля в магнитоактивной плазме, связано с характером расплывания неоднородности плотности среды, или другими словами, с диффузией частиц при наличии градиентов плотности. Чтобы убедиться в этом, запишем выражение (5.2.3а) для невырожденной плазменной среды в низкоча-

стотном пределе ω , $kv_{T\alpha} \ll \nu_{\alpha n}, \Omega_\alpha$:

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \frac{\frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2 \nu_{\alpha n}}{\Omega_{\alpha}^2 + \nu_{\alpha n}^2} + \frac{k_z^2 v_{T\alpha}^2}{\nu_{\alpha n}}}{\omega + i \nu_{\alpha n} \left(\frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2 + \nu_{\alpha n}^2} + \frac{k_z^2 v_{T\alpha}^2}{\nu_{\alpha n}^2} \right)}. \quad (5.2.7)$$

Из полюсов этого выражения мы находим характерные времена диффузии (расплывания) мелкомасштабных (меньше дебаевского радиуса) неоднородностей плотности; при этом сам процесс описывается одночастичным уравнением диффузии

$$\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial t} - \mathcal{D}_{\perp}^{(\alpha)} \Delta_{\perp} N_{\alpha} - \mathcal{D}_{\parallel}^{(\alpha)} \frac{\partial^2 N_{\alpha}}{\partial z^2} = 0, \quad (5.2.8)$$

где

$$\mathcal{D}_{\perp}^{(\alpha)} = \frac{v_{T\alpha}^2 \nu_{\alpha n}}{\Omega_{\alpha}^2 + \nu_{\alpha n}^2}, \quad \mathcal{D}_{\parallel}^{(\alpha)} = \frac{v_{T\alpha}^2}{\nu_{\alpha n}} \quad (5.2.9)$$

соответственно поперечный и продольный коэффициенты диффузии частиц сорта α .

В случае же крупномасштабных неоднородностей диффузию определяют нули диэлектрической проницаемости (5.2.7). Это приводит к амбиполярной диффузии при квазинейтральных возмущениях ($N_e = N_i = N$), уравнение которой, однако, просто можно записать только, когда либо $k_{\perp} = 0$, либо $k_{\parallel} = 0$:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \mathcal{D}_{\perp}^a \Delta_{\perp} N = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial t} - \mathcal{D}_{\parallel}^a \frac{\partial^2 N_{\alpha}}{\partial z^2} = 0. \quad (5.2.10)$$

Если же одновременно $k_{\perp} \neq 0$ и $k_{\parallel} \neq 0$, то уравнения (5.2.10) оказываются весьма сложными и в общем случае практически необозримыми:

$$\begin{aligned} & \omega \left[(k_{\perp}^2 \mathcal{D}_{\perp}^e + k_{\parallel}^2 \mathcal{D}_{\parallel}^e) + \frac{T_e}{T_i} (k_{\perp}^2 \mathcal{D}_{\perp}^i + k_{\parallel}^2 \mathcal{D}_{\parallel}^i) \right] + \\ & + i \left(k_{\perp}^2 \mathcal{D}_{\perp}^e + k_{\parallel}^2 \mathcal{D}_{\parallel}^e \right) \left(k_{\perp}^2 \mathcal{D}_{\perp}^i + k_{\parallel}^2 \mathcal{D}_{\parallel}^i \right) \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) = 0, \\ & \omega \left(k_{\parallel}^2 \mathcal{D}_{\parallel}^e + \frac{T_e}{T_i} k_{\perp}^2 \mathcal{D}_{\perp}^i \right) + \\ & + i \left(k_{\perp}^2 \mathcal{D}_{\perp}^e + k_{\parallel}^2 \mathcal{D}_{\parallel}^e \right) \left(k_{\perp}^2 \mathcal{D}_{\perp}^i + k_{\parallel}^2 \mathcal{D}_{\parallel}^i \right) \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Коэффициенты поперечной и продольной амбиполярной диффузии при этом записываются в виде

$$\mathcal{D}_{\perp}^a = \frac{\nu_{en}(v_{Ti}^2 + v_s^2)}{\nu_{en}\nu_{in} + |\Omega_e\Omega_i|}, \quad \mathcal{D}_{\parallel}^a = \frac{v_{Ti}^2 + v_s^2}{\nu_{in}}, \quad (5.2.12)$$

причем $\mathcal{D}_{\perp}^a < \mathcal{D}_{\parallel}^a$.

В заключение приведем связь между одночастичными коэффициентами диффузии и парциальными статическими проводимостями в плазме. Согласно соотношению Эйнштейна

$$\mathcal{D}_{ij}^{(\alpha)} = \frac{T_{\alpha}}{e_{\alpha}^2 N_{\alpha} \sigma_{ij}^{\alpha}(0)}. \quad (5.2.13)$$

Учитывая (5.2.9), отсюда находим парциальные поперечную и продольную проводимости¹

$$\sigma_{\perp}^{\alpha} = \frac{e_{\alpha}^2 \nu_{\alpha n} N_{\alpha}}{m_{\alpha}(\Omega_{\alpha}^2 + \nu_{\alpha n}^2)}, \quad \sigma_{\parallel}^{\alpha} = \frac{e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{m_{\alpha} \nu_{\alpha n}}. \quad (5.2.14)$$

Отметим, что эти соотношения справедливы только в статическом пределе и в условиях применимости двухжидкостной гидродинамики, причем они определяют лишь диагональные компоненты тензора проводимости.

Наконец заметим, что все полученные выше соотношения легко обобщаются на случай вырожденной плазмы простой заменой $\nu_{T\alpha} \rightarrow \nu_{F\alpha}$. Более строго количественное рассмотрение этого вопроса предоставим сделать читателю, исходя из выражений (5.1.106) и (5.1.116).

§ 5.3. Связанные упруго-электромагнитные волны в магнитоактивной плазменной среде

Выше мы уже рассмотрели проблему связанных упруго-электромагнитных волн в изотропной плазменной среде. Рассмотрим теперь этот же вопрос для упругой замагниченной плазменной среды. Не производя промежуточные выкладки, приведем лишь окончательное

¹Выражения (5.2.14) легко получаются так же расчетом σ_{ij} по стандартной схеме в рамках простейшей модели независимых частиц.

уравнение, описывающее спектр собственных колебаний в такой упругой среде, т.е. спектр связанных упруго-электромагнитных волн, который находится из дисперсионного уравнения вида

$$\left| \omega^2 \rho^{(m)} \delta_{ij} - \lambda_{ikjl} k_k k_l - \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \beta_{lik} k_k \mathcal{A}_{lm}^{-1} \beta_{mjn} k_n \right| = 0. \quad (5.3.1)$$

Здесь тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ – парциальная диэлектрическая проницаемость, описывающая вклад только носителей заряда, а

$$\mathcal{A}_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \equiv k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}).$$

Уравнение (5.3.1) значительно сложнее исследованного выше для случая изотропной среды и прежде всего из-за большого многообразия различных ветвей колебаний, присущих самим носителям заряда в магнитоактивной плазме. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только низкочастотных волн, которые наиболее сильно связаны с упругими колебаниями решетки. Такие волны обладают малыми фазовыми скоростями и поэтому с хорошей степенью точности потенциальны. В потенциальном же приближении, когда $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, уравнение (5.3.1) принимает вид

$$\left| \omega^2 \rho^{(m)} \delta_{ij} - \lambda_{ikjl} k_k k_l - \frac{4\pi k_n \beta_{lin} k_l k_s \beta_{sjm} k_m}{k^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \right| = 0. \quad (5.3.2)$$

Здесь $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ – продольная диэлектрическая проницаемость магнитоактивной плазмы, явные выражения для которой приведены в предыдущих параграфах настоящего раздела.

Не следует, однако, думать, что медленными электромагнитными волнами в твердотельной магнитоактивной плазме являются только потенциальные волны. Выше мы неоднократно убеждались в существовании в такой среде чисто поперечных медленных волн типа альфеновских волн, геликонов, быстрых и медленных магнитозвуковых колебаний. Чтобы учесть связь таких волн с упругими колебаниями кристаллической решетки, мы здесь проанализируем уравнение (5.3.1) также для чисто продольного распространения ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0 \parallel 0z$), но без предположения о потенциальности. При этом тензор $\mathcal{A}_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$

имеет относительно простой вид

$$\mathcal{A}_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{xx}^{-1} & \mathcal{A}_{xy}^{-1} & 0 \\ \mathcal{A}_{yx}^{-1} & \mathcal{A}_{yy}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{zz}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.3.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{zz}^{-1} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}}, & \mathcal{A}_{xx}^{-1} &= \mathcal{A}_{yy}^{-1} = \frac{k^2 - \omega^2 \varepsilon_{xx}/c^2}{(k^2 - \omega^2 \varepsilon_{xx}/c^2)^2 + \omega^4 \varepsilon_{xy}^2/c^4}, \\ \mathcal{A}_{xy}^{-1} &= -\mathcal{A}_{yx}^{-1} = \frac{\omega^2 \varepsilon_{xy}/c^2}{(k^2 - \omega^2 \varepsilon_{xx}/c^2)^2 + \omega^4 \varepsilon_{xy}^2/c^4}. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Для упрощения задачи будем рассматривать кристаллическую решетку с гексагональной симметрией, ось симметрии четвертого порядка которой совпадает с осью $0z$, т.е. параллельна магнитному полю. Тензор β_{ijl} при этом имеет следующие отличные от нуля компоненты:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_{x,xz} = \beta_{x,zx} = \beta_{y,yz} = \beta_{y,zy}, \\ \beta_2 &= \beta_{z,xx} = \beta_{z,yy}, & \beta_3 &= \beta_{z,zz}, \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

а тензор λ_{ijkl} обладает с хорошей степенью точности симметрией изотропной среды, т.е.

$$\lambda_{ijkl} k_k k_l = \lambda^{tr} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) k^2 + \lambda^l k_i k_j. \quad (5.3.6)$$

В этих предположениях уравнение (5.3.2) принимает вид

$$(\omega^2 - k^2 v_{l,tr}^2) \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{8\pi \beta_{3,1}^2 k^2}{\rho^{(m)}}, \quad (5.3.7)$$

где $v_{l,tr} = \sqrt{\frac{\lambda^{l,tr}}{\rho^{(m)}}}$ – скорость продольного и поперечного звука, а $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ – продольная диэлектрическая проницаемость. Это уравнение связывает упругие звуковые волны с продольными колебаниями плазмы носителей заряда.

Существенно упрощается и уравнение (5.3.1) для одномерных поперечных волн, распространяющихся строго вдоль магнитного поля, когда \mathcal{A}_{ij}^{-1} имеет вид (5.3.3). Оно сводится к системе двух независимых уравнений

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k^2 v_{tr}^2) \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}) \right] &= \frac{4\pi\omega^2 \beta_1^2 k^2}{c^2 \rho^{(m)}}, \\ (\omega^2 - k^2 v_l^2) \varepsilon_{zz} &= \frac{4\pi\beta_3^2 k^2 \omega^2}{c^2 \rho^{(m)}}, \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

связывающих упругие звуковые колебания решетки кристалла с обыкновенной и необыкновенной электромагнитными волнами в плазме свободных носителей твердого тела.

Из структуры уравнений (5.3.7) и (5.3.8) видно, что в пьезополупроводниках упругие звуковые колебания решетки связаны с электромагнитными – связь с продольными волнами описывается уравнением (5.3.7), а с поперечными волнами – уравнениями (5.3.8). Последние были довольно подробно исследованы в предыдущих разделах, где приведены спектры частот колебаний и декременты их затухания $\omega \rightarrow \omega_\alpha + i\delta_\alpha$. Под α при этом надо понимать ветви собственных колебаний плазмы: ионный звук, альфвеновскую либо спиральную (геликон) волны и др. Как уже отмечалось ранее, связь упругих звуковых волн с электромагнитными наиболее существенно проявляется в условиях, когда их частоты близки. Учитывая это обстоятельство, запишем уравнения (5.3.7) и (5.3.8) для волн, распространяющихся строго вдоль внешнего магнитного поля:

$$(\omega^2 - k^2 v_\beta^2)(\omega - \omega_\alpha + i\delta_\alpha) = A, \quad (5.3.9)$$

где величины A и v_β^2 даются соотношениями:

$$A = \frac{8\pi\beta_3^2 k^2}{\rho^{(m)}} \left(\frac{\partial \varepsilon(\omega_\alpha)}{\partial \omega_\alpha} \right)^{-1}, \quad v_\beta^2 = v_l^2 \quad (5.3.10)$$

в случае уравнения (5.3.7) и

$$A = -\frac{4\pi\omega^2 \beta_1^2 k^2}{c^2 \frac{\partial}{\partial \omega_\alpha} \left[\frac{\omega_\alpha^2}{c^2} (\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}) \right]}, \quad v_\beta^2 = v_{tr}^2; \quad (5.3.11)$$

$$A = -\frac{4\pi\omega_\alpha^2 \beta_3^2 k^2}{c^2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \omega_\alpha} \right)^{-1}, \quad v_\beta^2 = v_l^2$$

в случае уравнений (5.3.8).

Из уравнения (5.3.9) видно, что наиболее сильная связь упругих волн с электромагнитными имеет место в условиях резонанса, когда

$$\omega_\alpha(k) = kv_\beta. \quad (5.3.12)$$

Если в этой области решение (5.3.9) искать в виде $\omega = \omega_\alpha + i\delta = kv_\beta + i\delta$, то для δ получим уравнение

$$\delta^2 + \delta\delta_\alpha + \frac{A}{2\omega} = 0. \quad (5.3.13)$$

При анализе уравнения (5.3.13) следует иметь в виду следующее. Выше при учете резонанса (5.3.12) мы уже приняли, что электромагнитные колебания являются слабозатухающими ($\delta_\alpha \ll \omega_\alpha$), а следовательно, в рассматриваемой области частот мнимая (антиэрмитовская) часть тензора диэлектрической проницаемости мала. Поэтому в выражении для A ею можно пренебречь, считая A чисто действительной величиной. Учитывая это обстоятельство и малость пьезоэлектрической связи, находим декременты затухания волн

$$\delta_1 = -\delta_\alpha, \quad \delta_2 = -\frac{A}{2\omega\delta_\alpha}. \quad (5.3.14)$$

Первый из этих декрементов δ_1 описывает затухание электромагнитной волны – в приближении слабой пьезоэлектрической связи он не изменился, а второй δ_2 описывает затухание упругой звуковой волны, которая без учета связи вообще не затухала и поэтому ее затухание чисто плазменной природы.

Рассмотрим конкретные примеры применения общих формул (5.3.7)–(5.3.14). Так, для области существования ионно-звуковых колебаний в сильно замагниченной классической бесстолкновительной плазме

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}. \quad (5.3.15)$$

Спектр таких колебаний, определяемый нулями этого выражения, дается известными формулами

$$\omega_\alpha^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Le}^2/k^2 v_{Te}^2}, \quad \delta_\alpha = -\sqrt{\frac{\pi m}{8M}} \omega_\alpha. \quad (5.3.16)$$

При учете слабой пьезоэлектрической связи, как отмечалось выше, спектр этот в первом приближении не меняется. Упругие же звуковые волны приобретают декремент затухания (5.3.14), который оказывается равным

$$\delta_\beta = -\frac{2\pi\beta_3^2 k^4 v_{Te}^2}{\delta_\alpha \omega_{Li}^2 \rho^{(m)}}. \quad (5.3.17)$$

Затухание при этом обусловлено черенковской диссипацией на электронах.

В качестве другого примера рассмотрим связь упругих волн со спиральной волной (геликоном) в сильно столкновительной твердотельной плазме. Из предыдущих параграфов мы уже знаем спектр спиральной волны, распространяющейся строго вдоль магнитного поля:

$$\omega_\alpha = \frac{k^2 c^2 \Omega_e}{\omega_{Le}^2}, \quad \delta_\alpha = -\nu_\alpha \frac{k^2 c^2}{\omega_{Le}^2}, \quad (5.3.18)$$

где $\nu_e = \nu_{\text{эфф}}$ для сильноионизованной невырожденной плазмы, $\nu_e = \nu_{Fe}$ для вырожденной, и $\nu_e = \nu_{en}$ для слабоионизованной плазмы. Величина же A согласно (5.3.11) дается формулой

$$A = \frac{4\pi\beta_1^2 \omega^2 k^2 \Omega_e}{\omega_{Le}^2 \rho^{(m)}}. \quad (5.3.19)$$

Учитывая соотношения (5.3.18) и (5.3.19), для декремента затухания звука находим:

$$\delta_3 = -\frac{2\pi\omega_\alpha \beta_1^2 k^2 \Omega_e}{\delta_\alpha \omega_{Le}^2 \rho^{(m)}}. \quad (5.3.20)$$

Это затухание звука обусловлено столкновительным поглощением электронами плазмы спиральных волн, связанных согласно уравнению (5.3.9) со звуковыми колебаниями кристалла.

§ 5.4. Квантовые эффекты в замагниченной электронной плазме

В § 4.5 мы показали, что в изотропной электронной плазме квантовые эффекты могут проявляться в дисперсии продольных волн, причем они обусловлены одночастичными квантовыми колебаниями

свободного электрона с частотой $\omega_q = \frac{\hbar k^2}{2m}$. Они становятся существенными, когда энергия кванта таких колебаний превосходит энергию теплового движения электронов (энергию Ферми в случае вырожденной электронной плазмы; ср. с условием (4.5.5)):

$$\hbar\omega_q = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > \mathcal{E}_{Fe}. \quad (5.4.1)$$

Очевидно, что это условие проявления квантовых эффектов движения электронов сохранится и в случае замагниченной плазмы.

Кроме того, при наличии внешнего магнитного поля, как уже отмечалось в настоящем разделе, существенной становится еще одна характерная частота одночастичного движения электронов, именно, частота их ларморовского вращения $\Omega_e = \frac{eB_0}{mc}$. Отсюда и новая возможность проявления квантовых эффектов движения электронов – превышение энергии ларморовского кванта над энергией теплового движения (энергией Ферми)

$$\hbar\Omega_e > \mathcal{E}_{Fe}. \quad (5.4.2)$$

При выполнении этого условия движение электрона поперек магнитного поля становится квантованным и кинетическая энергия отдельного электрона дается формулой

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\Omega_e + \frac{p_z^2}{2m}, \quad (5.4.3)$$

где $n = 1, 2, \dots$ – целые числа.

Ниже мы рассмотрим проявления обоих указанных квантовых эффектов в замагниченной плазме по отдельности. Начнем с рассмотрения первого из этих эффектов, считая магнитное поле ”классическим” в том смысле, что выполняется обратное условие (5.4.2). Вместе с тем поле \mathbf{B}_0 предполагается достаточно сильным, так, чтобы можно было полностью пренебречь движением электронов поперек магнитного поля. При таком предположении решение линеаризованного кинетического уравнения (3.7.7) приводит к следующему выражению для продольной диэлектрической проницаемости электронной

ПЛАЗМЫ

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\omega, k) &= \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2 \Phi} \int d\mathbf{p} \delta f(\mathbf{p}) = \\
&= 1 + \frac{2\pi e^2 |k_z|}{m\omega_q k} \int d\mathbf{p} f_0(\mathbf{p}) \times \\
&\times \left[\frac{1}{\omega - k_z v_z + \omega_q \frac{|k_z|}{k}} - \frac{1}{\omega - k_z v_z - \omega_q \frac{|k_z|}{k}} \right]
\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

В случае чисто продольной неоднородности поля, т.е. когда $k = |k_z|$ это выражение путем замены переменного интегрирования очевидно сводится к $\varepsilon^l(\omega, k)$ в (4.5.1).

Формула (5.4.4) пригодна для произвольной равновесной функции распределения $f_0(\mathbf{p})$. Для случая вырожденного электронного газа с распределением Ферми интеграл в (5.4.4) легко вычисляется, что приводит к следующему выражению (ср. с (4.5.3)):

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) &= 1 + \frac{3}{4} \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_q^2 k^3 v_{Fe}^3} \times \\
&\times \left\{ \left[\left(\omega + \omega_q \frac{k_z}{k} \right)^2 - k_z^2 v_{Fe}^2 \right] \ln \frac{\omega + \omega_q \frac{|k_z|}{k} + k_z v_{Fe}}{\omega + \omega_q \frac{|k_z|}{k} - k_z v_{Fe}} - \right. \\
&\quad \left. - \left[\left(\omega - \omega_q \frac{k_z}{k} \right)^2 - k_z^2 v_{Fe}^2 \right] \ln \frac{\omega - \omega_q \frac{|k_z|}{k} + k_z v_{Fe}}{\omega - \omega_q \frac{|k_z|}{k} - k_z v_{Fe}} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Нули $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$, как нам известно, определяют спектры продольных волн. Из выражения (5.4.5) в условиях слабой пространственной дисперсии (малых k_z) находим спектр продольных волн

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 \frac{k_z^2}{k^2} + \omega_q^2 \frac{k_z^2}{k^2} + \frac{3}{5} k_z^2 v_{Fe}^2. \tag{5.4.6}$$

Этот спектр аналогичен спектру (4.5.4) и поэтому весь анализ проведенный в § 4.5 сохраняет силу. В частности, при условии (5.4.1),

которое совпадает с (4.5.5), дисперсия в спектре продольных волн определяется квантовыми эффектами. Вместе с тем, квантовая дисперсия по условию получения спектра (5.4.6) должна оставаться малой. В противном случае нарушается условие применимости газового приближения, как это было показано в § 4.5. Как следствие этого обстоятельства предельное выражение

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2 \frac{k_z^2}{k^2}}{\omega^2 - \omega_q^2 \frac{k_z^2}{k^2}}, \quad (5.4.7)$$

получаемое из (5.4.5) при пренебрежении тепловым движением, правильно описывает спектр (5.4.6) (без последнего слагаемого), но не пригодно для описания экранировки статического продольного поля в плазме. Экранировка такого поля как и в случае изотропной электронной плазмы имеет место при обратном условии (5.4.1) и дается классической дебаевской формулой с радиусом экранировки $r_D = \frac{3v_{Fe}}{\omega_{Le}}$.

Перейдем теперь к учету квантовых эффектов при выполнении неравенства (5.4.2), когда квантованным становится поперечное движение электронов и одночастичный спектр энергии определяется формулой (5.4.3). В этом случае для вывода диэлектрической проницаемости удобнее оказывается исходить из уравнений квантовой гидродинамики (см. § 3.7) и использовать метод, примененный в задаче 6 по теме IV.

Как и выше ограничимся рассмотрением потенциального электромагнитного поля и выведем выражения для квантовой продольной диэлектрической проницаемости. При этом поскольку нас интересуют квантовые эффекты, обусловленные сильным квантующим магнитным полем и выполнением неравенства (5.4.2), эффектами связанными с квантовой частотой осцилляций свободного электрона ω_q пренебрежем, считая выполненным обратное неравенство (5.4.1). В результате из соотношения (2) задачи 6 по теме IV следует, что квантовое выражение для тензора диэлектрической проницаемости холодной электронной плазмы в модели квантовой гидродинамики совпадает с классическим гидродинамическим выражением. По этой причине совпадает с классическим выражением и квантовый тензор диэлектрической проницаемости, учитывающий тепловое движение

электронов. Иными словами, справедливым остается тензор (5.1.7), если только выполняется обратное условие (5.4.1) при произвольном соотношении $\hbar\Omega_e/\mathcal{E}_F$ (либо T для невырожденной плазмы).

Однако, если движение электронов квантованно благодаря наличию сильного магнитного поля \mathbf{B}_0 и имеет место быть соотношение (5.4.3) выбирать функцию $f_0(\mathbf{p})$ в виде распределения Максвелла, либо Ферми уже нельзя. Из общего курса статистической физики (см. Л.Ландау и Е.Лифшиц "Статистическая физика", Москва, 1976) известно, что в случае невырожденного электронного газа в произвольном магнитном поле равновесное распределение по импульсам имеет вид¹

$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{n}{(2\pi m)^{3/2} T_e^{1/2} E_\perp} \exp\left(-\frac{p_z^2}{2mT_e} - \frac{p_\perp^2}{2mE_\perp}\right). \quad (5.4.8)$$

Здесь

$$E_\perp = \frac{\hbar\Omega_e}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\Omega_e}{2T_e} \simeq \begin{cases} T_e, & T_e \gg \hbar\Omega_e, \\ \hbar\Omega_e, & \hbar\Omega_e \gg T_e, \end{cases} \quad (5.4.9)$$

т.е. величина E_\perp играет роль поперечной температуры, совпадает с ней при $\hbar\Omega_e \ll T_e$ и равна $\hbar\Omega_e$ в обратном пределе. Необходимо заметить, что условие отсутствия вырождения в общем случае при наличии внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 также изменяется и принимает вид

$$\mathcal{E}_{Fe} \ll T_e^{1/3} E_\perp^{2/3}, \quad (5.4.10)$$

который в случае $T_e \gg \hbar\Omega_e$, как и следовало ожидать, совпадает с используемым нами до сих пор.

После всего сказанного не представляет труда обобщить выражение для продольной диэлектрической проницаемости электронной плазмы (5.1.11а) на случай наличия квантующего магнитного поля, т.е. на случай $\hbar\Omega_e \gg T_e$:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[1 - \sum_n \frac{\omega A_n(z_{\text{КВ}})}{\omega - n\Omega_e} J_+ \left(\frac{\omega - n\Omega_e}{k_z v_{Te}} \right) \right], \quad (5.4.11)$$

где $z_{\text{КВ}} = \frac{k_\perp^2 \hbar\Omega_e}{m\Omega_e^2} = \frac{k_\perp^2 \hbar}{m\Omega_e}$, причем роль ларморовского радиуса играет

так называемая квантовая длина $\lambda_{\text{КВ}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega_e}}$.

¹При произвольной (в том числе сильной) степени вырождения распределение $f_0(\mathbf{p})$ имеет существенно более сложный вид (см. упомянутый выше курс "Статистической физики").

Из выражения следует, что в статическом пределе продольное поле экранируется, причем радиус экранировки независимо от величины магнитного поля определяется дебаевским радиусом, зависящим от температуры электронов T_e .

Иное положение имеет место для продольных волн, распространяющихся строго поперек магнитного поля (моды Бернштейна), т.е. при $k_z = 0$. В случае квантующего магнитного поля дисперсионное уравнение для таких волн видоизменяется и вместо (5.1.22) принимает вид, явно зависящий от квантовой длины $\lambda_{\text{кв}}$:

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{Le}^2 n^2 \Omega_e^2}{k^2 v_{Te}^2 (\omega^2 - n^2 \Omega_e^2)} A_n(k^2 \lambda_{\text{кв}}^2) = 0. \quad (5.4.12)$$

Решения этого уравнения аналогичны изображенным на рис. 5.2 с той лишь разницей, что по оси абсцисс отложена величина $k_{\perp} \lambda_{\text{кв}}$, не зависящая от температуры, причем изменение характера дисперсии происходит при $k_{\perp} \lambda_{\text{кв}} \sim 1$. По оси же ординат величина ω_{Le} заменяется на $\omega_{Le} \sqrt{\frac{\hbar \Omega_e}{T_e}} \gg \omega_{Le}$.

Задачи по теме V

Задача 1. Исследовать продольные волны в бесстолкновительной невырожденной электронной плазме, распространяющиеся строго поперек магнитного поля (моды Бернштейна).

Решение.

Дисперсионное уравнение для таких волн согласно (5.1.22) записывается в виде

$$1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{Le}^2 n^2 \Omega_e^2}{k^2 v_{Te}^2 (\omega^2 - n^2 \Omega_e^2)} A_n \left(\frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \right) \quad (1)$$

или в области длинных волн $k^2 v_{Te}^2 \ll \Omega_e^2$

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega_{Le}^2 n^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} \frac{1}{n!} \left(\frac{k^2 v_{Te}^2}{2\Omega_e^2} \right)^{n-1} = 0. \quad (2)$$

Отсюда видно, что в пределе $k \rightarrow 0$ решениями этого уравнения являются

$$\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}, \quad \omega = n\Omega_e. \quad (3)$$

С другой стороны, в области коротких волн $k^2 v_{Te}^2 \gg \Omega_e^2$ имеем

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{Le}^2 n^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\Omega_e^2}{k^2 v_{Te}^2} \right)^{3/2} = 0, \quad (4)$$

т.е. при $k \rightarrow \infty$ решением дисперсионного уравнения будет

$$\omega \rightarrow n\Omega_e.$$

Графически решения уравнения (1) представлены на рис. 5.2, а – при $\omega_{Le} > \Omega_e$, б – при $\omega_{Le} < \Omega_e$.

Задача 2. Исследовать моды Бернштейна для вырожденной электронной плазмы.

Решение.

В случае вырожденной электронной плазмы дисперсионное уравнение для продольных волн, распространяющихся поперек магнитного поля, имеет вид

$$1 - \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \frac{n^2 \Omega_e^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} J_n^2 \left(\frac{k v_{Fe} \sin \theta}{\Omega_e} \right) = 0. \quad (1)$$

В пределе $k \rightarrow 0$ решениями этого уравнения, как и в случае невырожденной плазмы (см. предыдущую задачу), являются

$$\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}, \quad \omega = n\Omega_e. \quad (2)$$

В пределе же $k v_{Fe} \gg \Omega_e$ имеем

$$1 - \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} d\theta \frac{n^2 \Omega_e^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} \frac{2\Omega_e}{\pi k v_{Fe}} \cos \left[\frac{k v_{Fe} \sin \theta}{\Omega_e} - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] = 0, \quad (3)$$

или

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\omega_{Le}^2 \Omega_e^3}{\pi k^3 v_{Fe}^3} \frac{n^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} J_0 \left(\frac{k v_{Fe}}{\Omega_e} \right) = 0. \quad (4)$$

Здесь также при $k \rightarrow \infty$ частота колебаний $\omega \rightarrow n\Omega_e$, но эта зависимость носит осциллирующий характер, как показано на рис. 5.3, а – при $\omega_{Le} > \Omega_e$, б – при $\omega_{Le} < \Omega_e$.

Задача 3. Оценить бесстолкновительное поглощение обыкновенной волны, распространяющейся строго поперек магнитного поля, обусловленное релятивистскими эффектами движения электронов в нерелятивистской ($mc^2 \gg T_e$) максвелловской плазме.

Решение.

Для обыкновенной волны, распространяющейся строго поперек магнитного поля в электронной плазме, имеем

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz} = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_z^2 J_n^2 \left(\frac{kv_{Te}}{\Omega_e} \gamma \right)}{\omega - n\Omega_e/\gamma}.$$

Ограничиваясь колебаниями с длиной волны, намного большей ларморовского радиуса электронов, т.е. $\Omega \gg kv_{Te}$, из (1) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - i\pi \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{v_z^2 k^2 v_{\perp}^2}{4\Omega^2/\gamma^2} \left[\delta \left(\omega - \frac{\Omega_e}{\gamma} \right) + \delta \left(\omega + \frac{\Omega_e}{\gamma} \right) \right] = \\ &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + \frac{i\pi}{15} \frac{2\pi e^2}{\omega^3} \frac{k^2}{T_e} \int d\mathbf{p} f_0 v^4 \times \\ &\quad \times \left[\delta \left(\omega - \Omega_e + \frac{\Omega_e}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) + \delta \left(\omega - \Omega_e - \frac{\Omega_e}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Считая для определенности $\Omega_e/\omega > 0$, находим

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{15} \frac{\omega_{Le}^2 k^2 c^2}{\omega^3 \Omega_e} \frac{c^5}{v_{Te}^5} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega_e} \right)^{5/2} \exp \left[-\frac{2c^2}{v_{Te}^2} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega_e} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1) дает спектр частот и декремент затухания обыкновенной волны ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_{Le}^2 + k^2 c^2, \\ \delta = \text{Im } \omega &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{16}{15} \frac{\omega_{Le}^2 k^2 c^2}{\omega^2 \Omega_e} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega_e} \right)^{5/2} \exp \left[-\frac{2c^2}{v_{Te}^2} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega_e} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Видно, что поглощение существует только вблизи циклотронной частоты $\omega \approx \Omega_e$.

Задача 4. Получить показатель преломления и коэффициент затухания электромагнитных волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля в области частот ионного циклотронного резонанса в бесстолкновительной невырожденной плазме.

Решение.

В области частот $\omega \approx \Omega_i \ll \Omega_e$ общее дисперсионное уравнение записывается в виде

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left[1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \Omega_e} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega(\omega - \Omega_i)} J_+ \left(\frac{\omega - \Omega_i}{kv_{Ti}} \right) \right]. \quad (1)$$

Вдали от линии резонансного поглощения, когда $\frac{\omega - \Omega_i}{kv_{Ti}} \gg 1$, $\frac{\omega - \Omega_i}{\omega} \ll 1$, вкладом электронных слагаемых в (1) всегда можно пренебречь. Для показателя преломления и коэффициента затухания ионной циклотронной волны при этом имеем ($k = \frac{\omega}{c}(n + i\chi)$):

$$n^2 = -\frac{\omega_{Li}^2}{\omega(\omega - \Omega_i)}, \quad (2)$$

$$\chi = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \frac{c}{v_{Ti}} \frac{1}{n^2} \exp \left[-\frac{c^2(\omega - \Omega_i)^2}{2n^2\omega^2v_{Ti}^2} \right].$$

Внутри же линии поглощения, когда $(\omega - \Omega_i)/kv_{Ti} \ll 1$, электронные слагаемые могут оказаться существенными. Так, при $v_A \gg v_{Ti}$ (плазма высокого давления) из уравнения (1) получаем спектр слабозатухающих электронных волн

$$n^2 \approx \frac{\omega_{Le}^2}{\omega\Omega_e}, \quad \chi = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \frac{c}{v_{Ti}} \frac{1}{n^2}. \quad (3)$$

При $v_A \gg v_{Ti}$ (плазма низкого давления) электронные слагаемые в уравнении (1) малы, и мы получаем спектр сильнозатухающих ионных циклотронных волн

$$n + i\chi = \frac{i + \sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \frac{c}{v_{Ti}} \right)^{1/3}. \quad (4)$$

Величина $\lambda_{ск} = \frac{c}{\omega\chi} = 2 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c^2v_{Ti}}{\omega\omega_{Li}^2} \right)^{1/3}$ характеризует при этом глубину проникновения ионной циклотронной волны в плазму.

Задача 5. Исследовать ионно-звуковые колебания в неизотермической замагниченной плазме с $T_e \gg T_i \approx 0$ в условиях $\Omega_e^2 \gg \omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$.

Решение.

В указанных условиях ионно-звуковые волны существуют как при $\omega < \Omega_i$, так и при $\omega > \Omega_i$. Дисперсионное уравнение для таких волн записывается в виде

$$1 - \frac{k_{\perp}^2 \omega_{Li}^2}{k^2(\omega - \Omega_i^2)} - \frac{k_z^2 \omega_{Li}^2}{k^2 \omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) = 0. \quad (1)$$

Отсюда, пренебрегая малой мнимой частью, находим уравнение для спектра частот

$$\omega^4 \left(1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_s^2} \right) - \omega \left[\omega_{Li}^2 + \Omega_i \left(1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_s^2} \right) \right] + \omega_{Li}^2 \Omega_i^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (2)$$

При $\omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$ и $\theta \neq 0$ имеем приближенные корни

$$\omega_+^2 = \frac{\omega_{Li}^2 + \Omega_i^2(1 + \omega_{Li}^2/k^2v_s^2)}{1 + \omega_{Li}^2/k^2v_s^2}, \quad (3)$$

$$\omega_-^2 = \frac{\omega_{Li}^2 \Omega_i^2 \cos^2 \theta}{\omega_{Li}^2 + \Omega_i^2(1 + \omega_{Li}^2/k^2v_s^2)}.$$

Этот спектр изображен на рис. 5.4. При $\theta \rightarrow 0$ согласно (1) имеем

$$\omega_+^2 \rightarrow \Omega_i^2, \quad \omega_-^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Li}^2/k^2 v_s^2}. \quad (4)$$

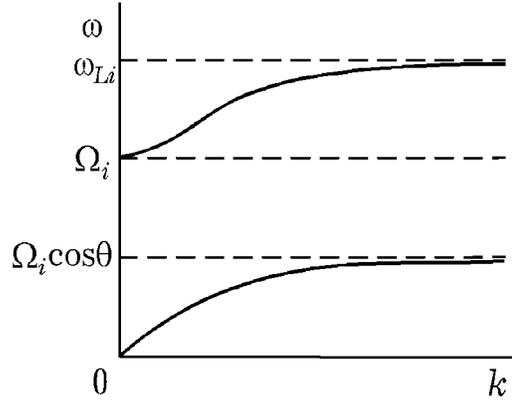


Рис. 5.4

Декремент затухания с учетом малой мнимой части (1):

$$\delta_{\pm} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{\pm}^4}{|k_z^3| v_{Te} v_s^2} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta \frac{\omega_{\pm}^4}{(\omega_{\pm}^2 - \Omega_i^2)^2}}. \quad (5)$$

Задача 6. Найти спектр частот и декремент затухания ионно-звуковых волн в слабоионизованной вырожденной электронно-дырочной плазме в области частот $\Omega_e \gg \omega \gg \Omega_i$ и в условиях $\Omega_e \gg \nu_{en} \gg k_z v_{Fe}$, $\omega \gg \nu_{in}$.

Решение.

Ионно-звуковые волны существуют в области фазовых скоростей $v_{Fe} \gg \omega/k \gg v_{Fi}$ и, являясь продольными, удовлетворяют уравнению

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \frac{\frac{i}{3} \frac{k^2 D}{\omega}}{1 + \frac{i}{3} \frac{k^2 D}{\omega}} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_{in}}{\omega}\right) = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$D = \frac{k_{\perp}^2}{k^2} D_{\perp} + \frac{k_z^2}{k^2} D_{\parallel}, \quad (2)$$

причем $D_{\parallel} = \frac{v_{Fe}^2}{\nu_{en}}$, $D_{\perp} = \frac{v_{Fe}^2 \nu_{en}}{2\Omega_e^2}$ – соответственно продольный и поперечный коэффициенты диффузии электронов в сильном магнитном поле.

Из (1) видно, что слабозатухающие ионно-звуковые волны существуют в области частот $\omega \ll k^2 D$ и их спектр частот и декремент затухания определяются соотношениями ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Le}^2/k^2 v_{Fe}^2}, \\ \delta &= -\frac{\nu_{in}}{2} - \frac{3}{2} \frac{\omega^2}{k^2 D} \frac{1}{1 + k^2 v_{Fe}^2/\omega_{Le}^2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Задача 7. Исследовать распространение обыкновенной волны поперек магнитного поля в бесстолкновительной вырожденной электронной плазме в условиях $\omega_{Le}^2 \gg \Omega_e^2 \gg \omega^2$.

Решение.

Дисперсионное уравнение для обыкновенной волны

$$k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_{zz} = 0 \quad (1)$$

в указанных условиях сильно упрощается, поскольку в ε_{zz} (см. формулы (5.1.7) и (5.1.8)) основной вклад дает слагаемое с $n = 0$:

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta J_0^2 \left(\frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \sin \theta \right). \quad (2)$$

Учитывая соотношения

$$\begin{aligned}J_0(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta) d\theta, \\ J_0''(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos(z \sin \theta) d\theta,\end{aligned}$$

в пределе $kv_{Fe} \gg \Omega_e$ получаем

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{3\omega_{Le}^2}{\omega^2} \frac{\Omega_e}{kv_{Fe}} \left[J_0 \left(\frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \right) + J_0'' \left(\frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \right) \right] = 0. \quad (3)$$

Таким образом, при $\omega \ll \omega_{Le}$ имеем:

$$k^2 c^2 + 3\omega_{Le}^2 \frac{\Omega_e}{kv_{Fe}} \left[J_0 \left(\frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \right) + J_0'' \left(\frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \right) \right] = 0. \quad (4)$$

Решения этого уравнения существуют только в условиях, когда

$$J_0''(z) + J_0(z) = -\frac{1}{z} J_0'(z) = \frac{J_1(z)}{z} \approx 0,$$

т.е.

$$k^2 c^2 + 3 \frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e^2}{k^2 v_{Fe}^2} J_1 \left(\frac{k v_{Fe}}{\Omega_e} \right) = 0. \quad (5)$$

Это уравнение имеет решения с $k^2 > 0$ (область прозрачности плазмы), если $\frac{k v_{Fe}}{\Omega_e} \approx \mu_{1s}$, где μ_{1s} – корни функции Бесселя $J_1(\mu_{1s}) = 0$. Это означает, что вырожденная плазма большой плотности может оказаться прозрачной для низкочастотных колебаний с длиной волны, кратной ларморовскому радиусу электронов.

Такое просветление плотной магнитоактивной плазмы относительно недавно (в 1970г.) было обнаружено в металлических пленках при низких температурах и получило название размерного эффекта.

Задача 8. Исходя из уравнения (5.3.7) получить декремент затухания звуковых волн в пьезополупроводнике в бесконечно сильном внешнем магнитном поле.

Решение.

Выше мы рассмотрели слабую связь слабозатухающих волн в пьезополупроводниках и нашли, что упругие волны могут поглощаться носителями заряда, т.е. испытывать чисто плазменное затухание благодаря наличию такой связи волн. Плазменное затухание звука, однако, может возникнуть благодаря пьезоэлектрической связи и в области частот, где не существуют слабозатухающие электромагнитные волны, если антиэрмитовская часть диэлектрической проницаемости в этой области частот велика. Так, например, в сильностолкновительной замагниченной плазме в области низких частот продольная диэлектрическая проницаемость является чисто мнимой

$$\varepsilon(\omega) = i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \nu_e} \frac{k_z^2}{k^2}. \quad (1)$$

Учитывая это выражение, из уравнения (5.3.7) находим частоты и декременты затухания упругих звуковых волн, обусловленные их поглощением электронами плазмы ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$)

$$\omega = k v_{l,tr}, \quad \delta_{l,tr} = - \frac{4\pi \beta_{3,1}^2 k^4 \nu_e}{\omega_{Le}^2 \rho^{(m)} k_z^2}. \quad (2)$$

Задача 9. Исходя из выражений (5.1.11a) и (5.4.11) исследовать косую ленгмюровскую волну (волна Трайвелписа-Гоулда).

Решение.

Косой ленгмюровской волной называется низкочастотная ($\omega \ll \Omega_e$) продольная волна, распространяющаяся под углом к внешнему магнитному полю ($k_z \neq 0$). Она существует только в длинноволновой области ($z \ll 1$, $k_z^2 v_{Te}^2 \ll \omega^2$) и поэтому согласно (5.1.11a) и (5.4.11) описывается дисперсионным уравнением

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \frac{k_z^2}{k^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} z = 0, \quad (1)$$

где $z = \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2}$ – в классическом ($\hbar\Omega_e \ll T_e$) магнитном поле и $z = z_{\text{КВ}} = \frac{k_{\perp}^2 \hbar}{m\Omega_e}$ – в квантовом ($\hbar\Omega_e \gg T_e$). Из (1) находим

$$\omega^2 = \frac{\frac{k_z^2}{k^2} \omega_{Le}^2}{1 + \frac{\omega_{Le}^2 z}{k^2 v_{Te}^2}} \rightarrow \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{z} = \begin{cases} \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \Omega_e^2, & T_e \gg \hbar\Omega_e, \\ \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \frac{m v_{Te}^2 \Omega_e}{\hbar}, & T_e \ll \hbar\Omega_e. \end{cases} \quad (2)$$

ТЕМА VI

ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНАЯ
ПЛАЗМЕННАЯ СРЕДА

§ 6.1. Приближение геометрической оптики

В предыдущих разделах были исследованы линейные электромагнитные свойства пространственно-однородных плазменных сред, параметры которых не менялись от точки к точке. Реально плазменные среды всегда неоднородны: достаточно указать на очевидную их неоднородность – ограниченность в пространстве. Неоднородна плазма ионосферы и газового разряда, горячая плазма, удерживаемая магнитным полем в термоядерных установках, и наконец, часто неоднородна и плазма твердых тел полупроводников и металлов, особенно, если происходит разогрев носителей заряда либо протекающим по твердому телу током, либо при поглощении падающего на него излучения.

В случае неоднородных сред тензор $\hat{\varepsilon}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ уже не является разностной функцией координат, а поэтому и уравнения Максвелла не сводятся к интегро-дифференциальным уравнениям с разностным ядром. На сегодняшний день не существует общих методов решения таких уравнений. Поэтому приходится прибегать к различным приближениям, упрощающим задачу.

Исследование свойств неоднородной плазменной среды мы начнем с простейшего случая, когда среда является стационарной, а пространственной дисперсией полностью можно пренебречь. Это означает, что $\hat{\varepsilon}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является функцией вида $\hat{\varepsilon}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{\varepsilon}_{ij}(t - t', \mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. При этом можно ввести тензор

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) = \int_0^{\infty} dt_1 \hat{\varepsilon}_{ij}(t_1, \mathbf{r}) e^{i\omega t_1}. \quad (6.1.1)$$

Этот тензор по существу совпадает с полученными выше выражениями для диэлектрической проницаемости плазмы носителей заряда

в пределе $k/\omega \rightarrow 0$, т.е. с $\varepsilon_{ij}(\omega, 0)$ – диэлектрической проницаемостью сред в условиях пренебрежения пространственной дисперсией. Мы уже знаем, что это предел ”холодной” плазмы, когда эффектами, обусловленными хаотическим тепловым движением носителей, можно пренебречь.

Уравнения Максвелла в отсутствие внешних источников поля для решений вида $e^{-i\omega t}$ при учете (6.1.1) сводятся к уравнению

$$\Delta \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0. \quad (6.1.2)$$

Это уравнение в общем случае также достаточно сложно для анализа, и поэтому мы еще его упростим, а именно, рассмотрим одномерно-неоднородную среду, считая $\varepsilon_{ij}(\omega, x)$ функцией только одной координаты x . Тогда по остальным двум координатам решение можно представить в виде $e^{ik_y y + ik_z z}$ и свести (6.1.2) к виду

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dx^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, x) - k_y^2 - k_z^2 \right] \mathbf{E} = 0. \quad (6.1.3)$$

При написании этого уравнения для простоты мы считали среду к тому же изотропной, а следовательно, полагали $\varepsilon_{ij}(\omega, x) = \varepsilon(\omega, x) \delta_{ij}$.

Уравнение (6.1.3) по виду совпадает с уравнением Шредингера

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [W - V(x)] \Psi = 0, \quad (6.1.4)$$

где Ψ – волновая функция частицы с массой m , находящейся в поле с потенциалом $V(x)$, а W – энергия частицы. Как известно, Ψ и W называются соответственно собственными функциями и собственными значениями уравнения (6.1.4). В квантовой механике разработан общий метод определения собственных функций и собственных значений уравнения Шредингера в пределе $\hbar \rightarrow 0$, известном как квазиклассический предел. Метод этот называется методом Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна (ВКБ) и позволяет найти собственные функции и собственные значения не основных, а высоких квантовых уровней, на которых движение почти классическое. Для таких уровней в области неоднородности потенциала $V(x)$ собственная функция $\Psi(x)$ меняется быстро, имея вид стоячей волны с большим числом узлов, и для определения собственных значений W справедлива формула

квантования Бора – Зоммерфельда

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [W - V(x)]} = \pi n, \quad (6.1.5)$$

где $n \gg 1$ – номер квантового уровня, а x_1 и x_2 – точки, ограничивающие область классического движения, или точки поворота, в которых $V(x_1) = V(x_2) = W$; интегрирование ведется по области положительности функции $[W - V(x)]$, или, как говорят, области прозрачности среды (см. рис. 6.1).

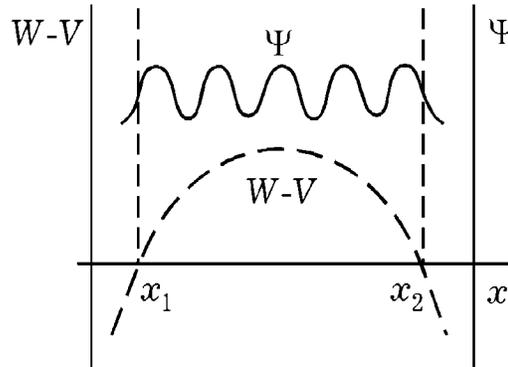


Рис. 6.1

Все сказанное мы можем применить к решению уравнения (6.1.3). При этом малым параметром типа параметра квазиклассичности ($\hbar \rightarrow 0$) окажется отношение размера неоднородности поля, $\lambda \sim \frac{c}{\omega \sqrt{\varepsilon(\omega, x)}}$, к характерному размеру неоднородности среды, $L_0^{-1} \sim \frac{d}{dx} \ln \varepsilon(\omega, x)$, т.е.

$$\frac{\lambda}{L_0} = \frac{c}{\omega \sqrt{\varepsilon(\omega, x)}} \frac{d}{dx} \ln \varepsilon(\omega, x) \ll 1. \quad (6.1.6)$$

Отсюда и становится понятным, почему квазиклассическое приближение (или приближение ВКБ) в электродинамике (точнее, в оптике) неоднородных сред называется приближением геометрической оптики. При этом дисперсионное уравнение, определяющее спектры собственных электромагнитных колебаний среды, по аналогии с (6.1.5)

записывается в виде

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega, x) - k_y^2 - k_z^2} = \pi n. \quad (6.1.7)$$

Уравнение (6.1.7) можно представить также в несколько иной форме, допускающей обобщение. Именно, будем искать решение уравнения (6.1.3) в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp \left[i \int^x dx k_x(\omega, x) \right]. \quad (6.1.8)$$

Тогда в первом приближении по параметру (6.1.6), пренебрегая членами, содержащими производные функции $k_x(\omega, x)$, получим

$$k_x^2(\omega, x) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega, x) - k_y^2 - k_z^2. \quad (6.1.9)$$

Величина $\int^x dx k_x(\omega, x)$ называется эйконалом, а уравнение (6.1.9) – уравнением эйконала. Дисперсионное же соотношение (6.1.7) с учетом (6.1.9) принимает вид

$$\int_{x_1}^{x_2} dx k_x(\omega, x) = \pi n, \quad (6.1.7')$$

причем интегрирование ведется по области прозрачности среды, в которой $k_x^2(\omega, x) \geq 0$, и решение (6.1.8) носит колебательный характер; как говорят, колебания заперты внутри области прозрачности среды.

Первое простое обобщение уравнения (6.1.7) состоит в переходе к поглощающим средам, когда $\varepsilon(\omega, x)$ – комплексная величина. Если поглощение слабое, т.е. $\text{Im} \varepsilon(\omega, x)$ мало по сравнению с $\text{Re} \varepsilon(\omega, x)$, то ω тоже будет комплексной величиной с малой мнимой частью, $\omega \rightarrow \omega + i\delta$. Тогда из (6.1.7) получаем:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \text{Re} k_x(\omega, x) = \pi n, \quad (6.1.10)$$

$$\delta = - \int_{x_1}^{x_2} dx \text{Im} k_x(\omega, x) \Big/ \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} k_x(\omega, x).$$

Второе обобщение состоит в переходе к общему случаю сред с пространственной дисперсией. Запишем тензор $\hat{\varepsilon}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в виде $\hat{\varepsilon}_{ij}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{r})$. Если зависимость этой функции от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ является более сильной, чем зависимость от \mathbf{r} , то мы можем ввести тензор

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int_0^{\infty} dt_1 \int d\mathbf{R} \hat{\varepsilon}_{ij}(t_1, \mathbf{R}, \mathbf{r}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{R}}. \quad (6.1.11)$$

Этот тензор в первом приближении геометрической оптики будет играть роль тензора диэлектрической проницаемости, а уравнением эйконала будет уравнение

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) \right| = 0, \quad (6.1.12)$$

которое получается из системы уравнений Максвелла, если поле искать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp \left[-i\omega t + i \int \mathbf{k} d\mathbf{r} \right] \quad (6.1.13)$$

и пренебречь производными $\mathbf{k}(\mathbf{r})$.

Как мы уже знаем, в области медленных волн с малыми по сравнению со скоростью света фазовыми скоростями уравнение (6.1.12) упрощается и принимает вид

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) \equiv \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0. \quad (6.1.14)$$

Дальнейший анализ задачи распространения электромагнитных волн в неоднородных плазменных средах удастся провести только в случае одномерно-неоднородных сред. Поэтому ниже величину $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$ мы будем считать функцией только одной координаты x , т.е. положим $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x)$. При этом из уравнений (6.1.12) и (6.1.14) следует определять величину $k_x(\omega, x)$; проекции k_y и k_z считаются заданными и постоянными.

В наиболее интересных случаях уравнения (6.1.12) и (6.1.14) имеют попарно сопряженные корни $\pm k_{xs}(\omega, x)$, где $s = 1, 2, \dots$ — число таких корней. Если эти корни и области прозрачности для соответствующих волновых решений, в которых $k_{xs}(\omega, x) > 0$, достаточно разделены друг относительно друга в пространстве, то каждой паре

корней $\pm k_{xs}(\omega, x)$ можно сопоставить в первом приближении геометрической оптики дифференциальное уравнение типа (6.1.3):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k_{xs}^2(\omega, x)y = 0. \quad (6.1.15)$$

А это означает, что для этой пары корней мы можем воспользоваться правилом квантования Бора – Зоммерфельда (6.1.10). При этом имеем s уравнений

$$\int_{x_{1s}}^{x_{2s}} dx \operatorname{Re} k_{xs}(\omega, x) = \pi n, \quad (6.1.16)$$

$$\delta = - \int_{x_{1s}}^{x_{2s}} dx \operatorname{Im} k_{xs}(\omega, x) \bigg/ \int_{x_{1s}}^{x_{2s}} dx \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} k_{xs}(\omega, x),$$

которые определяют спектры s ветвей колебаний, запертых в соответствующих s областях прозрачности среды. Тем самым уравнения (6.1.16) решают поставленную задачу определения спектров колебаний неоднородной плазменной среды в первом приближении геометрической оптики, т.е. для коротковолновых колебаний с длиной волны меньше размеров неоднородности.

Наконец, отметим, что переход к однородной и неограниченной в пространстве среде производится чисто формальным образом. В этом случае $k_{xs}^2(\omega)$ не зависит от x и отсутствуют точки поворота. Такие точки вводят формально и обозначают $\frac{\pi n}{x_2 - x_1} \equiv k_{xs}$, т.е.

$$k_{xs}(\omega, x) = k_{xs} = \text{const}. \quad (6.1.17)$$

Корни этого уравнения $\omega(\mathbf{k})$ совпадают, естественно, с корнями уравнения эйконала (6.1.12), которое в этом случае становится дисперсионным уравнением.

Часто так поступают и в случае неоднородной среды, т.е. определяют корни $\omega(\mathbf{k}, x)$ непосредственно из уравнений эйконала (6.1.12) или (6.1.14). Естественно, что найденные при этом решения – локальные спектры колебаний – носят качественный характер и количественно не совсем верны. Однако, для качественного анализа устойчивости неоднородной среды и оценки характерных времен колебательных движений в такой среде так поступать можно. В частности, и

мы будем поступать так же, зная, что количественный анализ всегда можно провести с помощью точных правил квантования (6.1.16).

В ряде случаев область прозрачности располагается на периферии плазмы в области пониженной плотности носителей плазмы. В этом случае правило квантования, определяющее спектр частот колебаний, принимает вид:

$$\int_{x_0}^a k_x(\omega, x) dx = \pi n, \quad (6.1.18)$$

где x_0 – точка отражения волны со стороны области высокой плотности, а точка a – граница, удерживающая плазму от расплывания, либо граница области, где применима формула для $k_x^2(\omega, x) \geq 0$. Так имеет место, например, в случае изотропной плазмы со слабой дисперсией, когда продольная диэлектрическая проницаемость дается выражением

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2(x)}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right). \quad (6.1.19)$$

Продольные колебания при этом существуют в области частот $\omega^2 \geq \omega_{Le}^2$, причем для определения спектра согласно (6.1.14) и (6.1.18) имеем уравнение

$$\int_{x_0}^a dx \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{Le}^2(x)}{3v_{Te}^2}} = \pi n. \quad (6.1.20)$$

Между точкой x_0 , где $\omega_{min}^2 = \omega_{Le}^2(x_0)$, и точкой a может располагаться целая серия собственных частот с разным n , причем $\omega_n^2 > \omega_{Le}^2(x_0)$. Такие колебания действительно наблюдались в газовом разряде и проявлялись в виде резонансов спектра поглощения; они получили название резонансов Тонкса – Датнера.

Совершенно иное положение имеет место в случае ионно-звуковых колебаний неизотермической изотропной плазмы. Эти колебания, напротив, существуют только в области высокой плотности плазмы, в которой $\omega^2 < \omega_{Li}^2$, что непосредственно следует из вида диэлектрической проницаемости $\varepsilon^l(\omega, k)$ для области ионно-звуковых частот:

$$\varepsilon^l = 1 - \frac{\omega_{Li}^2(x)}{\omega^2} + \frac{\omega_{Li}^2(x)}{k^2 v_s^2}. \quad (6.1.21)$$

С учетом (6.1.14) при этом находим дисперсионное соотношение, определяющее спектр ионно-звуковых колебаний, запертых в области

плотной плазмы:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\omega \omega_{Li}(x)}{v_s \sqrt{\omega_{Li}^2 - \omega^2}} = \pi n. \quad (6.1.22)$$

Здесь точки отражения x_1 и x_2 определяются из равенств $\omega_{Li}^2(x_{1,2}) = \omega^2$ и расположены на периферии плотной плазмы. Колебания же заперты в плазме между этими точками. Ионно-звуковые резонансы с дискретными частотами также наблюдались на эксперименте одним из авторов настоящих лекций (А.Ф.Александров).

§ 6.2. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной неоднородной плазменной среды и проблема устойчивости ее магнитного удержания

Выше мы умышленно не затрагивали вопроса об удержании плазмы от расплывания, считая, что если она твердотельная, то удерживается кристаллической решеткой; если же газовая – то она удерживается диэлектриком, который электродинамически не отличается от вакуума. К этому очень сложному вопросу мы будем возвращаться ниже неоднократно. Теперь же в общем виде постараемся проанализировать неоднородную плазму, удерживаемую в силовом равновесии магнитным полем. Эта проблема имеет огромное прикладное значение для управляемого термоядерного синтеза (УТС), в которой горячая сильно ионизованная плазма удерживается в магнитных ловушках. Поэтому ниже, проблему УТС и будем в основном иметь в виду.

Обсудим свойства такой плазмы, ограничиваясь как всегда вначале рассмотрением линейных свойств. Как и раньше, поведение плазменной среды во внешнем магнитном поле будем описывать с помощью уравнений Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (6.2.1)$$

Считая плазму неоднородной вдоль оси $0x$, а магнитное поле, удерживающее плазму от поперечного расплывания, направленным вдоль

оси $0z$, уравнение (6.2.1) для стационарной равновесной функции распределения запишем в виде

$$\mathbf{v}_\perp \cos \varphi \frac{\partial f_0}{\partial x} - \Omega(x) \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} = 0. \quad (6.2.2)$$

Здесь для удобства решения выбрана цилиндрическая система координат в пространстве скоростей: $v_x = v_\perp \cos \varphi$, $v_y = v_\perp \sin \varphi$, v_z , а $\Omega(x) = eB_0(x)/mc$ – ”неоднородная” ларморовская частота.

Общим решением уравнения (6.2.2) является произвольная функция характеристик \mathcal{E} и C :

$$f_0 = f_0(\mathcal{E}, C), \quad C = v_\perp \sin \varphi + \int^x dx' \Omega(x'). \quad (6.2.3)$$

Если учесть, что характерный размер неоднородности плазмы, удерживаемой магнитным полем, как правило, намного больше ларморовского радиуса частиц, то можно провести разложение характеристики C , записав решение (6.2.3) в виде

$$f_0(\mathcal{E}, C) = \left(1 + \frac{v_\perp \sin \varphi}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) F(\mathcal{E}, x). \quad (6.2.4)$$

Под $F(\mathcal{E}, x)$ мы будем понимать распределение Максвелла, если речь пойдет о невырожденной плазме, либо распределение Ферми, когда будем говорить о плазме твердого тела с вырожденными носителями заряда.

Распределение (6.2.4), естественно, должно быть согласовано с уравнениями Максвелла. Учитывая квазинейтральность плазменной среды, остается согласовать лишь уравнение для магнитного поля:

$$\text{rot } \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 = \frac{4\pi}{c} \sum e \int \mathbf{v} f_0(\mathcal{E}, C) d\mathbf{p}. \quad (6.2.5)$$

Подставляя сюда распределение (6.2.4), получим окончательно следующее уравнение, которое представляет собой условие силового равновесия при магнитном удержании плазменной среды:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_0^2}{8\pi} + P_0 \right) = 0, \quad (6.2.6)$$

где P_0 – газокINETическое давление: для невырожденной плазмы $P_0 = \sum NT$, а для плазмы с вырожденными носителями заряда $P_0 = \sum \hbar^2 (2\pi^2)^{2/3} N^{5/3} / 5m^2$.

Плазму можно эффективно удерживать магнитным полем, если магнитное давление намного превосходит газокINETическое, т.е. если

$$\beta = \frac{8\pi P_0}{B_0^2} \ll 1. \quad (6.2.7)$$

Такую плазму принято называть плазмой низкого давления. Видно, что характерный размер неоднородности магнитного поля $L_B \sim B_0 \left/ \frac{\partial B_0}{\partial x} \right.$ в такой плазме намного превосходит размер неоднородности плотности и температуры носителей $L_p \sim P_0 \left/ \frac{\partial P_0}{\partial x} \right.$, так как согласно (6.2.6) $L_p/L_B \sim \beta \ll 1$. Поэтому магнитное поле с хорошей степенью точности можно считать практически однородным в пространстве.

Итак, мы установили, что возможно существование силового равновесия, которое и обеспечивает магнитное удержание неоднородной плазменной среды. Однако неоднородная плазменная среда является термодинамически неравновесной и со временем благодаря процессам диффузии и теплопроводности носителей должна стать однородной в пространстве. Эти процессы обусловлены столкновениями носителей и за времена, меньшие, чем времена между столкновениями, пока среду можно считать бесстолкновительной, не проявляются. Но не возникнут ли в такой среде более быстрые бесстолкновительные процессы, приводящие к появлению больших полей, рассеивающих частицы и тем самым приводящих к сглаживанию пространственной неоднородности? Другими словами, устойчиво ли найденное нами равновесие и не разовьются ли в плазменной среде быстрые бесстолкновительные неустойчивости, разрушающие найденное силовое равновесие (6.2.6)? Чтобы ответить на поставленный вопрос, нам нужно исследовать малые колебания среды вблизи состояния равновесия. Мы исследуем их в приближении геометрической оптики, т.е. рассмотрим колебания с длиной волны меньшей размера неоднородности. Представим отклонение функции распределения от равновесной в виде

$$\delta f = \delta f(x) e^{-i\omega t + ik_y y + ik_z z}$$

и, подставив его в предварительно линеаризованное уравнение Вла-

сова (6.1.2), получим

$$\begin{aligned}
 (\omega - k_y v_y - k_z v_z) \delta f + i v_x \frac{\partial \delta f}{\partial x} - i \Omega \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} = \\
 = -ie \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}.
 \end{aligned}
 \tag{6.2.8}$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{B} – малые поля колебаний, а f_0 дается выражением (6.2.4).

Характеристика уравнения (6.2.8) совпадает с (6.2.3). Учитывая это обстоятельство и полагая поле \mathbf{B}_0 однородным (т.е. считая $\beta \ll 1$), легко находим общее решение (6.2.8):

$$\begin{aligned}
 \delta f(x) = \frac{e}{\Omega} \int_{\infty}^{\varphi} d\varphi' \left\{ \mathbf{E}(x) + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}(x)] \right\}_{\varphi'} \frac{\partial f_0(\varphi', x')}{\partial \mathbf{p}} \times \\
 \times \exp \left[\frac{i}{\Omega} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - k_y v_{\perp} \sin \varphi'' - k_z v_z) \right].
 \end{aligned}
 \tag{6.2.9}$$

Величины x' , φ' и x , φ связаны между собой уравнением характеристики

$$v_{\perp} \sin \varphi + \Omega x = v_{\perp} \sin \varphi' + \Omega x' = C. \tag{6.2.10}$$

Представляя далее $\delta f(x)$, $\mathbf{E}(x)$ и $\mathbf{B}(x)$ в виде $\exp \left[i \int^x k_x(x') dx' \right]$ и ограничиваясь первым приближением геометрической оптики, находим

$$\begin{aligned}
 \delta f(k, x) = \frac{e}{\Omega} \int_{\infty}^{\varphi} d\varphi' \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) \delta_{ij} + \frac{v_i k_j}{\omega} \right] \times \\
 \times \frac{\partial f_0(x', \varphi')}{\partial p_j} E_i(k, \omega) \exp \left[\frac{i}{\Omega} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})_{\varphi''} \right].
 \end{aligned}
 \tag{6.2.11}$$

Это выражение по виду совпадает с решением уравнения Власова в случае однородной магнитоактивной плазмы; отличие состоит только в виде равновесной функции, которая в рассматриваемом случае дается формулой (6.2.4).

Дальнейшее вычисление тока в плазменной среде, обусловленного наличием неравновесной поправки δf , подобно уже проделанному в предыдущей главе для случая однородной магнитоактивной плазмы и мы его здесь опустим, приведя лишь окончательные результаты расчета. Тензор диэлектрической проницаемости неоднородной магнитоактивной плазменной среды в первом приближении геометрической оптики оказывается равным

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) = & \delta_{ij} + \\ & + \sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} \left(1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x} \right) T_{\alpha} [\varepsilon_{ij}^{\alpha}(\omega, \mathbf{k}, x) - \delta_{ij}], \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

если носители заряда невырождены, и

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) = & \delta_{ij} + \\ & + \sum_{\alpha} \left(1 - \frac{2 k_y v_{F\alpha}^2}{3 \omega \Omega_{\alpha}} \frac{\partial \ln N_{\alpha}}{\partial x} \right) [\varepsilon_{ij}^{\alpha}(\omega, \mathbf{k}, x) - \delta_{ij}], \end{aligned} \quad (6.2.12a)$$

если носители вырождены. В формулах (6.2.12) и (6.2.13) под $\varepsilon_{ij}^{\alpha}(\omega, \mathbf{k}, x)$ следует понимать соответствующую парциальную диэлектрическую проницаемость частиц сорта α в пространственно однородной среде, в которой, однако, плотность и температура носителей считаются функциями x .

Теперь мы можем исследовать спектры электромагнитных колебаний неоднородной магнитоактивной плазменной среды и ответить на вопрос об устойчивости магнитного удержания такой среды. Для этого достаточно выражение (6.2.12) или (6.2.12a) подставить в уравнение эйконала (6.1.12), определить функцию $k_{xs}(\omega, x)$ и далее, воспользовавшись формулами квантования Бора – Зоммерфельда (6.1.16), проанализировать полученные таким путем дисперсионные соотношения. Нам, однако, здесь удобнее анализировать непосредственно уравнение (6.1.12), так как найденные прямо из этого уравнения локальные спектры колебаний дают качественно правильные результаты, особенно, если речь идет об устойчивости среды.

Прежде, однако, заметим, что в формулах (6.2.12) и (6.2.12a) явно появилась новая частота, характерная для неоднородной магнитоактивной плазмы, которая называется дрейфовой частотой,

$$\omega_{\text{др}} \sim \frac{k_y v_{0\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}} \frac{1}{L_0}, \quad (6.2.13)$$

где $v_{0\alpha}$ – средняя скорость хаотического теплового движения носителей $v_{0\alpha} = v_{T\alpha}$, либо $v_{0\alpha} = v_{F\alpha}$. Видно, что в области частот, больших чем дрейфовые, когда $\omega \gg \omega_{др}$, выражения (6.2.12) и (6.2.12а) по виду совпадают с диэлектрическими проницаемостями однородных плазменных сред. Поэтому в этой области и не следует ожидать появления новых ветвей колебаний и качественно новых явлений, хотя уже из самого факта неоднородности среды следует возможность существования точек поворота и областей прозрачности среды для тех или иных уже известных из теории ветвей колебаний однородных сред. Наличие таких точек, естественно, свидетельствует о возможности запираения колебаний внутри плазменной среды.

Именно такое положение имело место выше, когда мы рассматривали высокочастотные плазменные колебания, запертые между плотной плазмой и диэлектрической стенкой, удерживающей плазму, а также низкочастотные ионно-звуковые колебания, запертые внутри области высокой плотности плазмы. Совершенно аналогично, в магнитоактивной плазме спиральные волны (геликоны) оказываются запертыми внутри плазмы высокой плотности, в которой $\omega_{Le}^2 \gg \Omega_e^2$; альфвеновские волны также заперты в плотной плазме, в которой $\omega_{Li}^2(x) > \Omega_e^2$, для ионно-звуковых волн также необходимо наличие высокой плотности плазмы, ибо они существуют только в области частот $\omega^2 \ll \omega_{Li}^2$. Вместе с тем ленгмюровские колебания и при наличии сильного внешнего магнитного поля возможны в редкой плазме, в которой $\omega < \Omega_e$, а $\omega_{Le} < \Omega_e$ (косая ленгмюровская волна), хотя при этом требуется $\omega < \omega_{Li}$. Воспользовавшись общим дисперсионным уравнением для колебаний пространственно однородной плазмы, которое было весьма подробно рассмотрено в предыдущих разделах, нетрудно написать соответствующие правила квантования и обобщение уравнений для определения аналогичных спектров колебаний в случае неоднородной магнитоактивной плазмы. Но как уже отмечалось, здесь ничего принципиально нового ждать не следует.

Качественно новых явлений, характерных только для неоднородных плазменных сред, следует ожидать в области частот $\omega \leq \omega_{др}$, в которой диэлектрическая проницаемость сред полностью изменяется. Поэтому колебания с именно такими частотами и будут рассмотрены ниже.

Появление новой характерной частоты $\omega_{др}$ имеет глубокий физический смысл. При наличии магнитного поля в неоднородной плаз-

менной среде в поперечном к нему направлении возникает так называемый ларморовский дрейф носителей. Он не связан с их реальным переносом в пространстве, но с ним связан ток в плазме, называемый ларморовским дрейфовым током. Его природа хорошо видна из рис. 6.2, если заметить, что ток этот можно оценить по формуле

$$j_{y\alpha} \approx e_\alpha N_\alpha(x + \Delta x) v_{0\alpha}(x + \Delta x) - e_\alpha N_\alpha(x) v_{0\alpha}(x) \sim \\ \sim e_\alpha \Delta x \frac{\partial N_\alpha v_{0\alpha}}{\partial x} \sim \frac{e_\alpha N_\alpha v_{0\alpha}^2}{\Omega_\alpha} \frac{\partial \ln N_\alpha}{\partial x} \sim e_\alpha N_\alpha v_{др\alpha}.$$

Здесь $v_{др\alpha} \sim \frac{v_{0\alpha}^2}{\Omega_\alpha} \frac{\partial \ln N_\alpha}{\partial x} \ll v_{0\alpha}$ является скоростью ларморовского дрейфа носителей, направленного вдоль оси Oy . Доплеровская частота, связанная с этим дрейфом, и есть ларморовская дрейфовая частота $\omega_{др\alpha} = k_y v_{др\alpha}$.

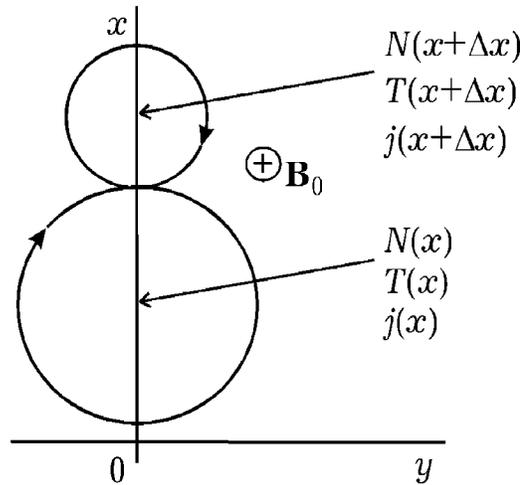


Рис. 6.2

Легко видеть, что в условиях, когда радиус ларморовского вращения носителей мал по сравнению с размером неоднородности среды, эта частота мала по сравнению с циклотронными частотами носителей $\omega_{др\alpha} \ll \Omega_\alpha$. Мы учтем это обстоятельство и проанализируем колебания плазмы только в области низких частот $\omega \leq \omega_{др\alpha} \ll \Omega_\alpha$. Кроме того, рассматривая плазму низкого давления ($\beta \ll 1$), ограничимся анализом только продольных электростатических колебаний.

Для классической плазмы с максвелловским распределением ча-

стиц по скоростям уравнение эйконала при этом запишется в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left\{ 1 - \right. \\ \left. - \left[1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} \left(\frac{\partial \ln N_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_{\alpha}} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \mathcal{A}_0 \left(\frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Приступая к анализу уравнения (6.2.14), еще раз заметим, что в области частот $\omega \gg \omega_{др}$ оно описывает хорошо известные спектры низкочастотных продольных колебаний магнитоактивной плазмы, но уже неоднородной в пространстве. Чтобы убедиться в этом, проанализируем его для быстрых волн, $\omega/k_z \gg v_{T\alpha}$, в длинноволновом пределе, $k_{\perp} v_{T\alpha} \ll \Omega_{\alpha}$. Из (6.2.14) для этой области получаем:

$$1 - \frac{k_z^2}{k^2} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} = 0. \quad (6.2.15)$$

Это уравнение как раз и описывает так называемые косые ленгмюровские волны в магнитоактивной плазменной среде. Но поскольку в рассматриваемом случае среда считается неоднородной – неоднородна ее плотность $N(x)$, то из (6.2.15), согласно изложенному в предыдущем параграфе, для нахождения спектров колебаний мы должны сначала найти эйконал $k_x(\omega, x)$:

$$k_x^2(\omega, x) = -k_y^2 + k_z^2 \left(\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - 1 \right) / \left(1 + \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} \right), \quad (6.2.16)$$

а уже затем подстановка этого выражения в правила квантования Бора-Зоммерфельда приводит к следующему дисперсионному уравнению колебаний:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ -k_y^2 + k_z^2 \left(\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - 1 \right) / \left(1 + \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} \right) \right\} dx = \pi n. \quad (6.2.17)$$

Видим, что колебания заперты между точками поворота x_1 и x_2 в области, где подкоренное выражение положительно. Очевидно, что в этой области $\omega^2 < \omega_{Le}^2$. Для случая пространственно однородной плазменной среды это обстоятельство уже отмечалось ранее.

Принципиально нового типа волны в неоднородной плазме возникают в области частот $\omega < \omega_{\text{др}}$. Приступая к их анализу, прежде всего заметим, что и в этой области частот самые медленные волны, для которых $\omega \ll k_z v_{Ti}$, вообще не существуют: столь медленные колебания в плазменной среде отсутствуют, поскольку для них $\varepsilon = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2}$ и имеет место дебаевская экранировка поля. Это легко понять из чисто физических соображений. Дело в том, что в бесстолкновительной плазме благодаря свободному пролету частиц за время $\frac{1}{k_z v_{Ti}} \sim \frac{\lambda_z}{v_{Ti}}$ происходит выравнивание неоднородностей распределения как ионов, так и электронов. Условие $\omega \ll k_z v_{Ti}$ означает, что время выравнивания неоднородностей на длине волны колебаний мало по сравнению с периодом самих колебаний. Очевидно, что такие колебания в среде существовать не могут.

Рассмотрим теперь обратный предел быстрых колебаний, для которых $\omega \gg k_z v_{Te}$. Будем также считать, что $\lambda_{\perp} \gg v_{Ti}/\Omega_i$, ограниченный же на отношение $\omega_{\text{др}}/\omega$ не будем накладывать. В результате из уравнения (6.2.14) получим:

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \frac{k_z^2}{k^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln NT_e}{\partial x} \right) + \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x} \right) = 0. \quad (6.2.18)$$

В области частот $\omega \gg \omega_{\text{др}}$ это уравнение переходит в проанализированное выше уравнение (6.2.15), описывающее уже известную ветвь устойчивых колебаний магнитоактивной плазмы – косых ленгмюровских волн. В области же низких частот, когда $\omega \ll \omega_{\text{др}}$, из (6.2.18) находим локальный спектр

$$\omega^2 = - \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \frac{T_e}{T_i} \frac{M}{m} \Omega_i^2 \frac{\partial \ln NT_e}{\partial \ln NT_i}. \quad (6.2.19)$$

Мы нашли качественно новую ветвь колебаний неоднородной магнитоактивной среды с частотой ниже дрейфовых частот электронов и ионов. И более того, поскольку реально всегда

$$\frac{\partial \ln NT_e}{\partial \ln NT_i} > 0, \quad (6.2.20)$$

то такая неоднородная плазменная среда оказывается всегда неустойчивой. Поэтому эта неустойчивость получила название универсальной. Инкремент ее нарастания может достигать по величине дрейфовой частоты, т.е. $\text{Im } \omega \leq \frac{v_{Ti}^2}{\Omega_i} \frac{1}{L_0^2}$, где $L_0 \sim L_\perp$ – характерный размер неоднородности среды. Заметим только, что в действительности для развития этой неустойчивости необходимо, чтобы $\omega^2 \ll \Omega_i^2$, а это означает, что необходимо выполнение неравенства

$$\frac{k_z}{k_\perp} \sim \frac{L_\perp}{L_\parallel} \ll \sqrt{\frac{m T_i}{M T_e}}. \quad (6.2.21)$$

Отсюда следует, что эта неустойчивость может развиваться только в достаточно длинных системах, таких, в которых продольный размер среды превышает ее поперечный размер по крайней мере в $\sqrt{M/m} \geq 40$ раз.

Рассмотренная универсальная неустойчивость неоднородной плазмы является недиссипативной, она не связана ни с черенковским, ни с циклотронным механизмами диссипации энергии электромагнитного поля в среде. В этом смысле ее еще называют гидродинамической неустойчивостью. В неоднородной плазме возможна, однако, и кинетическая неустойчивость, обусловленная обращением знака черенковской диссипации вследствие ларморовского дрейфа носителей. Это имеет место в области фазовых скоростей $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$. Уравнение (6.2.14) при этом записывается в виде

$$1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_s^2} \left[1 + \frac{k_y v_s^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x} - \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial x} \right) \right] + \\ + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} = 0. \quad (6.2.22)$$

Отсюда находим следующие локальные спектры ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$): первый

$$\omega_1 = -\frac{k_y v_s^2}{\Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x}, \quad (6.2.23a)$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_1^2}{|k_z| v_{Te}} \left(k^2 r_{De}^2 + \frac{k_\perp^2 v_s^2}{\Omega_i^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right),$$

справедливый в области $\omega^2 \gg k_z^2 v_s^2$, и второй

$$\omega_2 = \frac{k_z^2 \Omega_i}{k_y \frac{\partial \ln N}{\partial x}}, \quad (6.2.23б)$$

$$\delta_2 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_2^2}{|k_z| v_{Te}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right),$$

справедливый в области частот $\omega^2 \ll k_z^2 v_s^2$ (при $T_e \gg T_i$), а также спектры

$$\omega_3^2 = -k_z^2 v_{Ti}^2 \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}, \quad (6.2.23в)$$

$$\omega_4^2 = -k_z^2 v_s^2 \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i^2} \frac{\partial \ln T_i}{\partial x},$$

справедливые в области частот $\omega \ll \omega_{др}$ и при условии $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$. Первые два спектра называют дрейфово-диссипативными; неустойчивости на этих ветвях колебаний (возникающие при $\delta > 0$) обусловлены обращением знака черенковского поглощения электромагнитного поля электронами плазменной среды. Последние же два спектра суть недиссипативные дрейфовые колебания, существующие в среде с резким градиентом температуры, а поэтому они называются дрейфово-температурными колебаниями.

Колебания со спектрами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ могут существовать в относительно коротких системах – для их существования достаточно потребовать выполнения неравенства $\omega_{др} > k_z v_{Ti}$, которое сводится к виду

$$\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} > \frac{L_{\perp} \Omega_i}{v_{Ti}} \gg 1, \quad (6.2.24)$$

(ср. с (6.2.21)).

В заключение настоящего параграфа обобщим полученные выше общие соотношения на случай вырожденной плазмы. В первую очередь отметим, что формулы (6.2.15)–(6.2.17), естественно, сохраняют силу и в вырожденной плазме, поскольку они вообще не зависят явно от характеристик теплового движения носителей. Формулы же (6.2.18)–(6.2.23) изменяются. Однако по существу все сводится к замене температуры носителей на энергию Ферми. Так, например, в случае вырожденных электронов и невырожденных ионов в области

фазовых скоростей $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Fe}$ и при условии $\omega \leq \omega_{др} \ll \Omega_i$ имеем (при этом $v_s^2 = \frac{m}{3M}v_{Fe}^2$):

$$1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_s^2} \left[1 + \frac{k_y v_s^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x} - \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial x} \right) \right] +$$

$$+ i \frac{\pi}{2} \frac{3 \omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{k_y v_{Fe}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right) = 0. \quad (6.2.25)$$

Это уравнение очень напоминает уравнение (6.2.22), а поэтому и решения его подобны (6.2.23). Так, в области частот $\omega^2 \gg k_z^2 v_s^2$ имеем ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega_1 = -\frac{k_y v_s^2}{\Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x}, \quad \delta_1 = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_1^2}{|k_z| v_{Fe}} \frac{k^2 v_s^2}{\omega_{Li}^2}. \quad (6.2.26a)$$

Если же $\omega^2 \ll k_z^2 v_s^2$, то

$$\omega_2 = \frac{k_z^2 \Omega_i}{k_y \frac{\partial \ln N}{\partial x}}, \quad \delta_2 = -\frac{\pi}{2} \frac{\omega_2^2}{|k_z| v_{Fe}}, \quad (6.2.26б)$$

и, наконец, при $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$ в области частот $\omega \ll \omega_{др}$

$$\omega_3^2 = -k_z^2 v_{Ti}^2 \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}, \quad \omega_4^2 = -k_z^2 v_s^2 \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i^2} \frac{\partial \ln T_i}{\partial x}. \quad (6.2.26в)$$

Так же как и в невырожденной плазме, колебания со спектрами (6.2.26) могут существовать в относительно коротких системах, в которых $\omega_{др} \gg k_z v_{Ti}$. Последнее, очевидно, сводится к неравенству (6.2.24).

§ 6.3. Влияние столкновений носителей заряда на спектр дрейфовых колебаний плазменной среды

Выше мы убедились, что ларморовский дрейф носителей заряда в неоднородной магнитоактивной плазменной среде становится причиной ее неустойчивости. Причем при пренебрежении столкновительной диссипацией неустойчивость эта не только не стабилизируется

бесстолкновительной черенковской диссипацией, но и, наоборот, последняя обращается по знаку и сама может привести к развитию диссипативной дрейфовой неустойчивости в области частот

$$\omega \leq \omega_{\text{др}} \sim \frac{k_y v_0^2}{\Omega} \frac{1}{L_0} \sim \frac{v_0^2}{\Omega L_0^2}, \quad (6.3.1)$$

где v_0 – тепловая скорость носителей, L_0 – характерный размер неоднородности, который порядка поперечного размера среды L_{\perp} . Единственным ограничением области существования дрейфовой неустойчивости является неравенство

$$\omega_{\text{др}\alpha} \sim \frac{v_{0\alpha}^2}{\Omega_{\alpha} L_{\perp}^2} \gg k_z v_{0i} \sim \frac{v_{0i}}{L_{\parallel}}, \quad (6.3.2)$$

где v_{0i} – тепловая скорость тяжелых носителей (ионов), L_{\parallel} – продольный размер плазменной среды. Условие (6.3.2), которое сводится к (6.2.24), имеет ясный физический смысл: в бесстолкновительном пределе время L_{\parallel}/v_{0i} есть максимальное время ”диффузионного” рассасывания неоднородности, связанной с возмущением плотности среды вдоль магнитного поля. Если это время больше времени дрейфовой неустойчивости $\sim L_{\perp}^2 \Omega_{\alpha}/v_{0\alpha}^2$, то она успевает развиться прежде, чем неоднородность расплывается, в противном случае дрейфовая неустойчивость развиться не успевает. Если исходить из такой физической картины, то в столкновительной плазме для существования дрейфовых колебаний, очевидно, следует потребовать выполнения неравенства

$$\omega_{\text{др}\alpha} \sim \frac{v_{0\alpha}^2}{\Omega_{\alpha} L_{\perp}^2} > \frac{k_z^2 v_{0i}^2}{\nu_i} \sim \frac{v_{0i}^2}{\nu_i L_{\parallel}^2}. \quad (6.3.3)$$

Здесь ν_i – частота столкновений тяжелых носителей (ионов), а в правой части неравенства стоит обратное время диффузии ионов в плазменной среде.

Условие (6.3.3) является необходимым, но не достаточным. Легко понять, что для существования дрейфового движения необходимо, чтобы частица сорта α за время между столкновениями успевала многократно совершить ларморовское вращение, т.е. должно быть

$$\Omega_{\alpha} \gg \nu_{\alpha}, \quad (6.3.4)$$

по крайней мере для легких носителей (электронов). Если неравенства (6.3.4) выполнены для носителей обоих типов, то равновесная

функция распределения остается такой же, как и в отсутствие столкновений, т.е. дается формулами (6.2.3), (6.2.4).

Учтем теперь столкновения носителей. Следуя общему методу анализа колебаний среды, будем их учитывать при вычислении неравновесной добавки к равновесной функции распределения и нахождении тензора диэлектрической проницаемости.

Начнем с наиболее простого случая слабоионизованной плазменной среды, столкновения носителей в которой описываются интегралом БГК. Для неравновесной добавки к функции распределения

$$\delta f_\alpha = \delta f_\alpha(x) e^{-i\omega t + ik_y y + ik_z z}$$

в нулевом приближении геометрической оптики имеем:

$$\begin{aligned} -i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f_\alpha - \Omega_\alpha \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \varphi} = \\ = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}] \} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} - \nu_\alpha \left(\delta f_\alpha - \frac{f_{0\alpha}}{N_\alpha} \int d\mathbf{p} \delta f_\alpha \right). \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Здесь мы ограничились изотермической моделью интеграла БГК. Примем, кроме того, что плазма – низкого давления, и ограничимся анализом потенциального поля возмущений, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -ik\Phi$, $\mathbf{B} = 0$. Проведение дальнейших вычислений, связанных с решением уравнения (6.3.5) и нахождением продольной диэлектрической проницаемости, не представляет большого труда, поэтому мы сразу же выпишем ответы.

Для слабоионизованной газовой плазмы и твердотельной плазмы с невырожденными носителями заряда имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[1 - i \frac{\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n}} \mathcal{A}_0 \left(\frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \right) \times \right. \\ \times J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{k_z v_{T\alpha}} \right) \left. \right]^{-1} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha (\omega + i\nu_{\alpha n})} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\partial \ln N_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_\alpha} \right) \right] \mathcal{A}_0 \left(\frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

В случае же сильного вырождения носителей

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = & 1 + \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \times \\
& \times \left[1 - i\nu_{\alpha n} \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin \theta J_0^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{F\alpha} \sin \theta}{\Omega_{\alpha}} \right)}{\omega + i\nu_{\alpha n} - k_z v_{F\alpha} \cos \theta} \right]^{-1} \left[1 - \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{2} \times \right. \\
& \times \left. \left(1 - \frac{1}{3} \frac{k_y v_{F\alpha}^2}{\Omega_{\alpha} (\omega + i\nu_{\alpha n})} \frac{\partial \ln N_{\alpha}}{\partial x} \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin \theta J_0^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{F\alpha} \sin \theta}{\Omega_{\alpha}} \right)}{\omega + i\nu_{\alpha n} - k_z v_{F\alpha} \cos \theta} \right) \right]. \tag{6.3.7}
\end{aligned}$$

При получении формул (6.3.6), (6.3.7) мы положили $\omega \ll \Omega_{\alpha}$, что оправдано, поскольку $\omega_{др\alpha} \ll \Omega_{\alpha}$, а для длинноволновых дрейфовых колебаний всегда $\omega \ll \Omega_{\alpha}$.

В случае же полностью ионизованной плазмы дело обстоит сложнее, поскольку интеграл столкновений Ландау имеет интегральный вид со сложным ядром. Кинетическое уравнение для носителей заряда, даже линеаризованное по возмущениям, с интегралом столкновений Ландау в общем виде решить не удастся. Поэтому здесь мы рассмотрим несколько простых примеров, однако таких, которые продемонстрируют роль кулоновских столкновений в развитии дрейфовой неустойчивости. Для простоты ионы будем считать бесстолкновительными, полагая $\omega_{др\alpha} \gg \nu_{ii}$. Что же касается электронов, то при отсутствии вырождения в условиях $(\omega, \nu_e, kv_{Te}) \ll \Omega_e$ кинетическое уравнение Власова-Ландау сводится к виду

$$\begin{aligned}
(\omega - k_z v_z) \delta f_e = & \frac{e\Phi}{T_e} \left\{ k_z v_z - \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} \left[\frac{\partial \ln N_e}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \left(-\frac{3}{2} + \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right) \right] f_{0e} + i \left[\left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ee} + \left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ei} \right] \right\}. \tag{6.3.8}
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое в правой части уравнения учитывает столкновения электронов с электронами и ионами и имеет вид, приведенный в § 3.3 (мы здесь его выписывать не будем).

При решении уравнения (6.3.8) ограничимся случаем частых столкновений электронов, когда $\nu_e \gg \omega, k_z v_{Te}$. При этом столкновительный член в (6.3.8) становится главным, и это уравнение можно решать методом Чепмена – Энскога, считая функцию распределения близкой к равновесной. Представим δf_e в виде

$$\delta f_e = -\frac{k_y v_{Ti}^2 e}{\omega \Omega_e T_e} \left[\frac{\partial \ln N_e}{\partial x} + \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \left(-\frac{3}{2} + \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right) \right] \Phi f_{0e} + F_e. \quad (6.3.9)$$

Для нахождения F_e из (6.3.8) получаем

$$\begin{aligned} \frac{ie}{T_e} k_z v_z \Phi f_{0e} \left\{ 1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \left[\frac{\partial \ln NT_e}{\partial x} + \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{5}{2} - \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right) \right] \right\} = \left(\frac{\partial F_e}{\partial t} \right)_{st}^{ee} + \left(\frac{\partial F_e}{\partial t} \right)_{st}^{ei}. \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Суть метода Чепмена – Энскога состоит в разложении F_e по полиномам Сонина – Ляггера

$$F_e = v_z f_{0e} \left[a_0 + a_1 \left(\frac{5}{2} - \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right) \right]. \quad (6.3.11)$$

Коэффициенты a_0 и a_1 подлежат определению из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{e}{T_e} k_z \Phi \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln NT_e}{\partial x} \right) = i\nu_{\Delta\phi\phi} \left(a_0 + \frac{3}{2} a_1 \right), \\ \frac{e}{T_e} k_z \Phi \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} = i\nu_{\Delta\phi\phi} \left(\frac{3}{2} a_0 + \frac{13 + 4\sqrt{2}}{4} a_1 \right). \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Находя отсюда a_0 и a_1 , получим F_e и δf_e и далее – вклад электронов в диэлектрическую проницаемость. Опуская эти вычисления, приведем окончательный результат для электронного вклада в продольную диэлектрическую проницаемость:

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon^e(\omega, \mathbf{k}, x) = \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left[\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} + \right. \\ \left. + i 1,96 \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega \nu_{\Delta\phi\phi}} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

при $\omega\nu_{\text{эфф}} \gg k_z^2 v_{Te}^2$ и

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon^e(\omega, \mathbf{k}, x) = & \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left[1 + \right. \\ & \left. + 1,44 \frac{\omega\nu_{\text{эфф}}}{k_z^2 v_{Te}^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e} \frac{\partial \ln NT_e^{-0,56}}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

при $\omega\nu_{\text{эфф}} \ll k_z^2 v_{Te}^2$.

Теперь мы можем приступить к выяснению роли столкновений в развитии дрейфовых неустойчивостей в плазменной среде. Как уже отмечалось, в качестве наиболее яркого примера рассмотрим предел частых столкновений электронов, для которых $\nu_e \gg k_z v_{Te}, \omega$, и бесстолкновительных ионов, для которых $\omega \gg \nu_i, k_z v_{Ti}$. Если при этом $\omega\nu_e \sim \omega_{\text{др}}\nu_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$, то уравнение эйконала в первом приближении геометрической оптики записывается в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = & 1 + \frac{\omega_{Li}^2 k_{\perp}^2}{\Omega_e^2 k^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega\Omega_i} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x} \right) + \\ & + i \frac{k_z^2 \omega_{Le}^2}{\omega\nu_e k^2} \alpha \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e} \frac{\partial \ln NT_e^{\beta}}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

Здесь $\nu_e = \nu_{en}$, $\alpha = \beta = 1$ для слабоионизованной плазменной среды с невырожденными носителями заряда и $\nu = \nu_{\text{эфф}}$, $\alpha = 1,96$, $\beta = 1,71$ для сильноионизованной плазмы. Столкновениями ионов в (6.3.15) так же, как и черенковской диссипацией на электронах, полностью пренебрегается.

Уравнение (6.3.15) – квадратное и легко решается в общем случае. Однако для наглядности мы здесь приведем лишь предельные случаи общего решения. Для колебаний с длиной волны больше дебаевского радиуса электронов в условиях $\omega_{\text{др}} \ll \omega_s \equiv \alpha \frac{k_z^2 M \Omega_i^2}{k^2 m \nu_e}$ имеем ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} \frac{\partial \ln NT_e^{\beta}}{\partial x}, \\ \delta_1 = & \frac{\omega_1^2}{\omega_s} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln NT_e^{\beta}} \right). \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

Если же $\omega_{др} \gg \omega_s$, то

$$\omega_2 = i\omega_s \frac{T_e}{T_i} \frac{\partial \ln NT_e^\beta}{\partial \ln NT_i}. \quad (6.3.17)$$

Видно, что рассматриваемые дрейфовые колебания в неоднородной магнитоактивной плазменной среде в условиях частых столкновений электронов всегда неустойчивы, причем с ростом частоты столкновений электронов инкремент их нарастания даже возрастает, т.е. столкновения электронов оказываются как бы причиной неустойчивости. В действительности столкновительная диссипация, в данном случае – трение электронов, обращает свой знак в области частот $\omega \leq \omega_{др}$. И в этом как раз и состоит причина неустойчивости.

Дрейфовая неустойчивость остается и в условиях $\omega\nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$, когда диссипация носит диффузионный характер. И здесь также в дрейфовой области частот обращается знак диффузионной диссипации продольных колебаний. Действительно, уравнение эйконала в этих условиях записывается в виде

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[1 + \frac{k_y v_s^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x} - \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x} \right) \right] + \quad (6.3.18)$$

$$+ i\alpha_1 \frac{\omega_{Le}^2 \omega \nu_e}{k^2 k_z^2 v_{Te}^4} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \frac{N}{T_e^{\beta_1}} \right) = 0.$$

Здесь $\nu_e = \nu_{en}$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$ в случае слабоионизованной плазмы и $\nu_e = \nu_{эфф}$, $\alpha_1 = 1,44$, $\beta_1 = 0,56$ для сильноионизованной.

Уравнение (6.3.18) имеет вид, аналогичный (6.2.22), и отличается от последнего только малым диссипативным слагаемым. В уравнении (6.2.22) его появление обусловлено черенковской диссипацией волн на электронах, а в (6.3.18) – диффузией электронов. Учитывая это сходство, мы можем отметить, что неустойчивые дрейфовые колебания, описываемые уравнениями (6.2.23), с небольшими очевидными изменениями сохраняют силу в рассматриваемом столкновительном пределе, причем причиной неустойчивости является обращение знака диффузионной диссипации в области частот $\omega \leq \omega_{др}$.

Не представляет труда убедиться в том, что дрейфовые неустойчивости проявляются в столкновительном пределе и в случае вырожденной плазменной среды. Так, для вырожденных электронов, но невырожденных ионов в условиях, когда $\nu_e \gg k_z v_{Fe}, \omega_{др}$, а

$\omega_{\text{др}} \gg k_z v_{Ti}, \nu_i$ причем $\omega_{\text{др}} \nu_e \gg k_z^2 v_{Fe}$, из (6.3.7) получаем следующее уравнение эйконала:

$$1 + \frac{\omega_{Li}^2 k_{\perp}^2}{\Omega_i^2 k^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x} \right) + \quad (6.3.19)$$

$$+ i \frac{\omega_{Le}^2 k_z^2}{\omega \nu_e k^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{3\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right) = 0.$$

Это уравнение по виду совпадает с (6.3.15) с точностью до замены $v_{Te} \rightarrow v_{Fe}$. Поэтому все сказанное выше о дрейфовых колебаниях при учете столкновений электронов сохраняет силу и в случае вырожденной плазмы.

Дрейфовую неустойчивость могут вызвать и столкновения ионов. Единственным ограничением для существования дрейфовой неустойчивости в столкновительной плазме является необходимость выполнения неравенства $\omega_{\text{др}} \nu_{\alpha} \gg k_z^2 v_{0\alpha}^2$, которое позволяет пренебречь диффузией электронов и ионов в процессе развития дрейфовой неустойчивости. Эти неравенства обуславливают возможность существования продольной неоднородности за время развития дрейфовой неустойчивости. В безразмерном виде они записываются так:

$$\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} > \sqrt{\frac{\Omega_{\alpha}}{\nu_{\alpha}}} > 1. \quad (6.3.20)$$

В противном случае неоднородности распределений частиц в возмущениях вследствие диффузии и теплопроводности будут выравниваться быстрее, чем успеет заметно развиться дрейфовая неустойчивость.

В заключение отметим, что появление в неоднородной плазме, удерживаемой сильным магнитным полем, нового типа низкочастотных колебаний – дрейфовых колебаний на сегодняшний день представляется почти очевидным. Их отличительная особенность состоит в том, что они являются неустойчивыми даже в термодинамически равновесной по функциям распределения частиц плазме. Поэтому их амплитуды должны намного превышать амплитуды других типов низкочастотных волн, исследованных в термодинамически равновесной и пространственно однородной магнитоактивной плазме. Кроме того, дрейфовые колебания имеют спиральную структуру (в них отличны от нуля и k_y и k_z) и, более того, они однонаправленны – их

спектр частот нечетен по k_y , а поэтому $\omega(k_y) \neq \omega(-k_y)$. Эти обстоятельства существенно облегчили их экспериментальную идентификацию и исследование. Они весьма детально были изучены в специальных установках для создания равновесной плазмы, так называемых Q -машинах. Эксперименты полностью подтвердили теоретические представления. Кроме того, исследования мерцающих ионосферных неоднородностей с помощью шаров-зондов и искусственных спутников Земли также свидетельствуют об их дрейфовой природе. Наконец, аномально большая диффузия плазмы поперек магнитного поля в термоядерных установках с магнитным удержанием связывается с наличием дрейфовых неустойчивостей в высокотемпературной плазме. Если считать, что время диффузии порядка $\tau \sim \frac{L_{\perp}^2}{D_{\perp}} \sim \frac{1}{\omega_{др}}$, где L_{\perp} – поперечный размер плазмы, то отсюда следует $D_{\perp} \sim B_0$, что подтверждается экспериментально. Следует отметить, что дрейфовые колебания, сопровождаемые аномальной диффузией плазмы поперек магнитного поля, впервые экспериментально наблюдались в обычном газовом разряде при достаточно сильных магнитных полях и высоком давлении газа (А.А.Зайцев).

§ 6.4. Дрейфовая раскачка упругих колебаний в неоднородной плазменной среде

Выше мы убедились, что пространственная неоднородность плотности и температуры носителей в магнитоактивной плазменной среде может стать причиной неустойчивости. Такая неоднородность приводит к появлению ларморовского дрейфа носителей и дрейфовой частоты, которая и оказывается характерной частотой, разделяющей области устойчивых и неустойчивых мод колебаний. В частности, в неизотермической плазме в условиях, когда ларморовская дрейфовая частота превосходит частоту ионно-звуковых колебаний, происходит раскачка последних. В настоящем же параграфе мы покажем, что неоднородность носителей может стать причиной раскачки упругих колебаний кристаллической решетки в пьезополупроводниках. При этом сам кристалл мы будем считать пространственно однородным, носители же заряда – распределенными в пространстве неоднородно. Очевидно, в этих условиях для пьезополупроводника в нулевом

приближении геометрической оптики останется справедливым уравнение (5.5.1), полученное в предыдущем разделе, если только под ε_0 понимать тензор диэлектрической проницаемости в нулевом приближении для неоднородной плазменной подсистемы. Это уравнение, однако, теперь уже следует трактовать как уравнение эйконала.

Ограничиваясь рассмотрением низкочастотных потенциальных (квазипродольных) колебаний, мы будем анализировать здесь уравнение (5.5.2). Более того, будем считать, что решетка обладает гексагональной симметрией с главной осью симметрии, направленной вдоль поля $\mathbf{B}_0 \parallel 0z$, и запишем (5.5.2) в виде уравнения (5.5.7):

$$(\omega^2 - k^2 v_{l,tr}^2) \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = \frac{8\pi\beta_{3,1}^2 k^2}{\rho^{(m)}}. \quad (6.4.1)$$

Здесь $v_{l,tr}$ – скорость упругих звуковых волн, а для $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x)$ следует воспользоваться выражением (6.3.15) либо (6.3.19), считая плазму твердого тела сильностолкновительной и к тому же неизотермической с холодными ионами (тяжелыми носителями), т.е.

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \frac{k_{\perp}^2 \omega_{Li}^2}{k^2 \Omega_i^2} + i\alpha \frac{\omega_{Le}^2 k_z^2}{\omega \nu_e k^2} \left(1 - \frac{\omega_{др}}{\omega}\right). \quad (6.4.2)$$

Здесь $\alpha = 1$ и $\nu_e = \nu_{en}$ для слабоионизованной плазмы с невырожденными электронами, причем $\omega_{дрe} = \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} \frac{\partial \ln NT_e}{\partial x}$, если же невырожденная электронная плазма сильноионизована, то $\alpha = 1,96$, $\nu_e = \nu_{эфф}$, $\omega_{дрe} = \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} \frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial x}$. Наконец, в случае вырожденной электронной плазмы $\alpha = 1$, $\nu_e = \nu_{en}$, $\omega_{дрe} = \frac{k_y v_{Fe}^2}{3\Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x}$.

Теперь мы можем решить уравнение (6.4.1) с учетом выражения (6.4.2). Легко видеть, что при $\omega = \omega_{s\alpha} = kv_{s\alpha} < \omega_{дрe}$ под действием ларморовского дрейфа легких носителей (электронов) будет происходить возбуждение звуковых упругих волн в пьезополупроводнике, причем

$$\omega = kv_{l,tr} + \frac{4\pi\beta_{3,1}^2}{\rho^{(m)}} \frac{k^2}{1 + \frac{k_{\perp}^2 \omega_{Li}^2}{k^2 \Omega_i^2}} \left[1 - i\alpha \frac{\omega_{Le}^2 k_z^2}{\omega \nu_e k^2} \left(1 - \frac{\omega_{др}}{\omega}\right)\right]. \quad (6.4.3)$$

Видно, что при $\omega = kv_{l,tr} < \omega_{др}$ колебания неустойчивы, причем неустойчивость обусловлена обращением знака мнимой части диэлек-

трической проницаемости носителей в этой области частот и пьезоэффектом.

В заключение заметим, что дрейфовое возбуждение упругих волн в пьезополупроводниках обсуждается как один из возможных методов измерения очень сильных импульсных магнитных полей ($B_0 \geq 10^6$ Гаусс), генерируемых при взрывном обжатии соленоидов (метод А.Д.Сахарова).

Задачи по теме VI

Задача 1. Исследовать в нулевом приближении геометрической оптики спектр частот спиральных волн (геликонов) в плазме с неоднородной плотностью $n(x) = n_0 \sqrt{1 - x^2/x_0^2}$ и сравнить его со спектром в однородной плазме с плотностью n_0 (локальным спектром).

Решение.

В этом случае следует рассматривать геликон, распространяющийся под углом к магнитному полю $\mathbf{B}_0 \parallel Oz$, локальный спектр которого имеет вид

$$\omega = \frac{k|k_z|c^2\Omega_e}{\omega_{Le}^2}. \quad (1)$$

Здесь $k^2 = k_x^2 + k_z^2$, $\omega_{Le}^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m} \gg \Omega_e^2 = \frac{e^2 B_0^2}{m^2 c^2}$. В нулевом приближении уравнение (1) является уравнением эйконала, причем $n_0 \rightarrow n(x) = n_0 \sqrt{1 - x^2/x_0^2}$. Определив из (1) $k_x(\omega, x)$ и используя правило квантования, находим дисперсионное соотношение для определения спектра геликона в неоднородной плазме:

$$\int_0^{x_1} \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega_{Le}^4 \omega^2}{c^4 \Omega_e^2 k_z^2} \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right)} dx = \frac{\pi n}{2}, \quad (2)$$

где x_1 , определяется областью прозрачности плазмы по отношению к геликону, т.е.

$$\frac{x_1^2}{x_0^2} = 1 - \frac{k_z^4 c^4 \Omega_e^2}{\omega^2 \omega_{Le}^4}. \quad (3)$$

После несложного интегрирования находим спектр частот искомым колебаний ($\omega^2 > 0$):

$$\omega = \frac{c^2 |k_z| \Omega_e}{\omega_{Le}^2} \left(\frac{n}{x_0} + \sqrt{k_z^2 + \frac{n^2}{x_0^2}} \right), \quad (4)$$

где n – большое целое число. Сравнение этого спектра с (1) показывает их существенное различие при $\frac{n}{x_0} > k_z$.

Задача 2. Показать, что в неоднородной плазме, удерживаемой внешним магнитным полем с криволинейной конфигурацией силовых линий поля ("магнитная бутылка" – пробкотрон) возникает аperiодическая неустойчивость, обусловленная наличием этой кривизны поля, даже при полном пренебрежении тепловым движением носителей.

Решение.

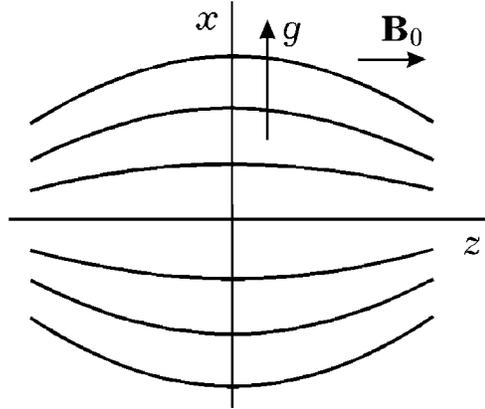


Рис. 6.3

Силовые линии магнитного поля пробкотрона изображены на рис. 6.3. В таком поле частицы совершают свободное движение вдоль силовых линий магнитного поля. В результате на частицу действует центробежная сила (см. задачу 5 по теме III):

$$\mathbf{F}_ц = \mathbf{n} \frac{m_\alpha}{R} \left(v_{\parallel\alpha}^2 + \frac{v_{\perp\alpha}^2}{2} \right). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{n} – единичный вектор от центра кривизны вдоль неоднородности плазмы, R – радиус кривизны. Усредненная по частицам эта сила порядка

$$F_\alpha = \frac{m_\alpha \langle v_\alpha^2 \rangle}{R}, \quad (2)$$

где $\langle v_\alpha^2 \rangle$ – квадрат тепловой скорости (скорости свободного движения на магнитной поверхности пробкотрона). При наличии продольной составляющей магнитного поля эта сила вызывает реальный центробежный дрейф частиц в радиальном направлении (в плоской геометрии вдоль оси θz) со скоростью

$$u_\alpha = -\frac{\langle v_\alpha^2 \rangle}{\Omega_\alpha R} \equiv -\frac{g_\alpha}{\Omega_\alpha}, \quad (3)$$

где введено обозначение поля центробежных сил $g_\alpha = \frac{\langle v_\alpha^2 \rangle}{R}$. После этого о самом тепловом движении можно забыть. Учет дрейфа (3) в уравнении эйконала (6.2.14)

происходит путем простой замены $\omega \rightarrow \omega'_\alpha = \omega - k_y u_\alpha$. Переходя теперь в этом уравнении к $T_\alpha \rightarrow 0$, а поэтому считая $\omega'_\alpha \gg \omega_{др}$, получим:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2} \left(\frac{k_z^2}{\omega'^2_\alpha} - \frac{k_\perp^2}{\Omega_\alpha^2} - \frac{k_y}{\omega'_\alpha \Omega_\alpha} \frac{\partial \ln n_\alpha}{\partial x} \right) = 0. \quad (4)$$

В это уравнение вообще не входит температура частиц. Это означает, что его можно получить в модели независимых частиц при формальном введении поля тяжести $g_\alpha = v_{T\alpha}^2/R$, направленного вдоль неоднородности, т.е. оси $0x$.

Считая фазовую скорость $\frac{\omega}{k} \gg u_\alpha$, из (4) находим локальный спектр:

$$\omega^2 = \frac{-k_y^2 g_{эфф} \frac{\partial \ln n}{\partial x} + k_z^2 \omega_{Le}^2 v_A^2 / c^2}{k^2 (1 + v_A^2 / c^2)}. \quad (5)$$

Здесь $g_{эфф} = -\frac{v_{Ti}^2 + v_s^2}{R}$ – эффективное поле тяжести.

Из (5) видно, что наличие кривизны силовых линий магнитного поля стремится дестабилизировать плазму, возбудить аperiодическую электростатическую неустойчивость; конечное же значение k_z стабилизирует неустойчивость. Поскольку неустойчивость развивается при малых $k_z \rightarrow 0$, ее называют желобковой или перестановочной неустойчивостью (она приводит к перестановке силовых линий магнитного поля и в замороженных в них частиц вдоль неоднородности плазмы).

В системах конечной длины вдоль оси $0z$ такая неустойчивость развивается при условии

$$\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} > \sqrt{R \frac{M}{m} \frac{\Omega_i}{\sqrt{v_{Ti}^2 + v_s^2}}}. \quad (6)$$

Отметим, что именно желобковая неустойчивость, очень быстро развивающаяся и поэтому очень опасная, стала причиной закрытия работ по пробкотронам, как бесперспективным термоядерным установкам.

Задача 3. Показать, что в сильно замагниченном холодном плазменном потоке, имеющем неоднородный профиль направленной скорости, симметричные моды колебаний при $k_y = 0$ затухают из-за резонансного взаимодействия колебаний с потоком (аналог затухания Ландау).

Решение.

Уравнение эйконала для таких мод продольных колебаний в неоднородном потоке холодной замагниченной плазмы записывается в виде

$$k_x^2 \left(1 + \frac{\omega_{Le}^2(x)}{\Omega_e^2} \right) + k_z^2 \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2(x)}{(\omega - k_z u(x))^2} \right) = 0. \quad (1)$$

Считая для простоты $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$, из (1) в области частот $(\omega - k_z u)^2 \ll \omega_{Le}^2$ при учете (6.1.7') получаем дисперсионное уравнение

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\omega_{Le}(x)}{\omega - k_z u(x)} dx = \frac{\pi n}{|k_z|}, \quad (2)$$

где n – целые числа, а интегрирование ведется по области прозрачности, $x_1 \leq x \leq x_2$, которая определяется условием $(\omega - k_z u)^2 \ll \omega_{Le}^2$.

Пусть это условие выполняется во всей области, занятой плазмой, $|x| \leq a$, причем на границе плазмы заданы недиссипативные граничные условия. Тогда в (2) интегрирование ведется по области $-a \leq x \leq a$. При интегрировании следует учитывать полюс $k_z u(x) = \omega$, соответствующий резонансному взаимодействию волны с неоднородным электронным пучком в точках, где скорость пучка совпадает с фазовой скоростью волны. Следствием подобного взаимодействия может оказаться поглощение волны в резонансных точках пучка.

Для пучка с однородной плотностью $N = \text{const}$ и неоднородной скоростью $u(x) = u_0 x/a$ из (2) получаем:

$$\frac{\omega_{Le} a}{u_0} \left[\text{Im} \left| \frac{\omega + k_z u_0}{\omega - k_z u_0} \right| - \frac{i\pi}{2} \left(1 + \frac{k_z u_0 - \omega}{|k_z u_0 - \omega|} \right) \right] = \pi n. \quad (3)$$

Отсюда находим условие применимости геометрической оптики:

$$\omega_{Le} a \gg u_0. \quad (4)$$

Из уравнения (3) следует, что в рассматриваемых условиях колебания возможны лишь в области частот $\omega > k_z u_0$, когда мнимое слагаемое тождественно равно нулю и поглощение волны отсутствует. При этом спектр колебаний имеет вид

$$\omega = k_z u_0 \text{cth} \frac{\pi n u_0}{2 \omega_{Le} a}. \quad (5)$$

В области частот $\omega \leq k_z u_0$ вследствие сильного поглощения в резонансных точках колебания оказываются невозможными.

Иное положение имеет место, если неоднородна также плотность пучка. Пусть $N = N_0 \exp(x^2/L_0^2)$ и $L_0^2 \ll a^2$. Тогда из (2) получаем:

$$1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_{Le}(0) |k_z| L_0}{\omega n} J_+ \left(\frac{\omega a}{k_z u_0 L_0} \right) = 0. \quad (6)$$

Легко видеть, что в пределе $\omega < k_z u_0 L_0/a$ из-за сильного поглощения в резонансных точках колебания в пучке невозможны. В области же частот $\omega \gg k_z u_0 L_0/a$ уравнение (6) приводит к следующему спектру слабозатухающих колебаний ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_{Le}(0) |k_z|}{n} L_0, \quad (7)$$

$$\frac{\delta}{\omega} = -\frac{\omega_{Le}(0) a}{n u_0} \exp \left(-\frac{1}{\pi} \frac{\omega_{Le}^2(0) a^2}{n^2 u_0^2} \right).$$

Рассмотренный механизм поглощения аналогичен черенковскому механизму поглощения волн, обусловленному тепловым движением частиц в плазме и приводящему к затуханию Ландау. В данном случае, однако, это поглощение существенно зависит от вида функции $u(x)$.

Задача 4. В приближении геометрической оптики получить квазиклассические правила квантования для дифференциальных уравнений четвертого порядка при наличии точек ветвления.

Решение.

В общем виде уравнение четвертого порядка, возникающее при изучении малых колебаний слабонеоднородной плазмы без учета диссипативных эффектов в первом приближении геометрической оптики, можно записать в виде

$$y^{IV} + 2p(\omega, x)y'' + 2\varepsilon(\omega, x)y' + q(\omega, x)y = 0. \quad (1)$$

Здесь $p(\omega, x)$, $q(\omega, x)$ – медленно меняющиеся действительные функции x , так что

$$\eta \sim \frac{p'}{p^{3/2}} \sim \frac{q'}{q^{5/2}} \ll 1, \quad (2)$$

а действительная функция $\varepsilon(\omega, x)$ сама имеет первый порядок малости по η .

Решение уравнения (1) запишем в виде

$$y = C \exp \left(i \int^x k(\omega, x) dx \right). \quad (3)$$

Тогда в нулевом приближении геометрической оптики (т.е. по η) для $k(\omega, x)$ получаем:

$$k_{1,2}^2(x) = p \pm \sqrt{p^2 - q}. \quad (4)$$

В первом приближении по η находим поправку

$$\delta k_{1,2} = \frac{i}{2} \left\{ [\ln k_{1,2}(p^2 - q)]' + \frac{p' - \varepsilon}{k_{1,2}^2 - p} \right\}. \quad (5)$$

Видно, что приближение геометрической оптики нарушается (поправка δk неограниченно растет) вблизи точек

$$k_{1,2}(\omega, x) = 0 \quad \text{и} \quad p^2(\omega, x) = q(\omega, x). \quad (6)$$

Первая из этих точек называется точкой поворота, вторая – точкой ветвления. Поведение решений вблизи точек поворота было изучено выше. Здесь рассмотрим поведение решений вблизи точек ветвления. В этих точках k_1^2 и k_2^2 совпадают и происходит трансформация различных собственных решений друг в друга, что приводит к зацеплению k_1 и k_2 в правилах квантования уже в нулевом приближении геометрической оптики.

Действительно, рассмотрим случай, когда имеются только две точки ветвления a и b и между ними нет других особых точек (рис. 6.4), причем $p(x) > 0$. При этом в области II (область прозрачности) вдали от точек ветвления общее решение уравнения (1) с точностью до членов первого порядка малости по η запишется в

виде

$$\begin{aligned}
 y^{\text{II}} = & \frac{C_1}{[k_1^2(p^2 - q)]^{1/4}} \exp \left(i \int^x k_1 dx - \frac{1}{2} \int^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right) + \\
 & + \frac{C_2}{[k_1^2(p^2 - q)]^{1/4}} \exp \left(-i \int^x k_1 dx - \frac{1}{2} \int^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right) + \\
 & + \frac{C_3}{[k_2^2(p^2 - q)]^{1/4}} \exp \left(i \int^x k_2 dx - \frac{1}{2} \int^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right) + \\
 & + \frac{C_4}{[k_2^2(p^2 - q)]^{1/4}} \exp \left(-i \int^x k_2 dx - \frac{1}{2} \int^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right).
 \end{aligned} \tag{7}$$

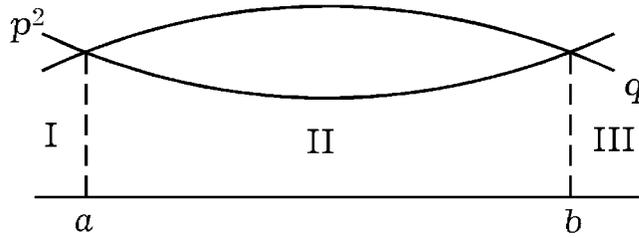


Рис. 6.4

В областях I и III (области непрозрачности) в соответствии с финитностью решений при $x \rightarrow \pm\infty$ должны быть отброшены нарастающие решения. При этом имеем

$$\begin{aligned}
 y^{\text{I}} = & \frac{C'_1}{[\bar{k}_1^2(q - p^2)]^{1/4}} \exp \left(i \int_a^x \bar{k}_1 dx + \frac{i}{2} \int_a^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{q - p^2}} dx \right) + \\
 & + \frac{C'_4}{[\bar{k}_2^2(q - p^2)]^{1/4}} \exp \left(-i \int_a^x \bar{k}_2 dx - \frac{i}{2} \int_a^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{q - p^2}} dx \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 y^{\text{III}} = & \frac{C'_2}{[\bar{k}_1^2(q - p^2)]^{1/4}} \exp \left(i \int_x^b \bar{k}_1 dx + \frac{i}{2} \int_x^b \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{q - p^2}} dx \right) + \\
 & + \frac{C'_3}{[\bar{k}_2^2(q - p^2)]^{1/4}} \exp \left(-i \int_x^b \bar{k}_2 dx - \frac{i}{2} \int_x^b \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{q - p^2}} dx \right),
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\bar{k}_{1,2}^2 = p \pm i\sqrt{q - p^2}.$$

Сшивая эти решения путем обхода вокруг точек a и b в комплексной плоскости x , найдем связь между коэффициентами C_i и C'_i ($i = 1, 2, 3, 4$). При этом каждое из двух линейно независимых решений в областях непрозрачности разлагается по двум независимым решениям в области прозрачности. Из требования однозначности решения в области прозрачности получаем искомого правила квантования, определяющие спектр собственных значений ω :

$$\int_a^b (k_1 - k_2) dx \pm i \int_a^b \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (10)$$

где n – целые числа.

Наличие мнимых слагаемых в правилах квантования соответствует возможности перекачки энергии из одной ветви колебаний во вторую в точках ветвления, где k_1^2 и k_2^2 совпадают.

Если в области изменения x имеется лишь одна точка ветвления a и на второй границе области прозрачности b заданы недиссипативные граничные условия $y(b) = y'(b) = 0$, то правило квантования запишется в виде

$$\int_a^b (k_2 - k_1) dx = \pi n. \quad (11)$$

Здесь опущены малые действительные слагаемые порядка η как несущественные.

ТЕМА VII

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА
ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕННОЙ СРЕДЫ****§ 7.1. Электромагнитные свойства пространственно
полуограниченной холодной плазмы. Поверхностные волны
в холодной плазме**

В случае пространственно-ограниченной среды появляются две новые проблемы: первая – это проблема новых типов волн – волн, существенно связанных с поверхностью среды, распространяющихся вдоль поверхности и затухающих при удалении от нее как в глубь среды, так и вне ее, и потому известных как поверхностные, и вторая – давно и хорошо известная проблема Френеля – проблема отражения и преломления электромагнитных волн, падающих на поверхность раздела сред (см. рис. 7.1). Вторая проблема тесно связана с первой, поскольку при ее решении необходимо знание всех типов волн, которые могут возбудиться в среде при падении на нее внешней электромагнитной волны. Кроме того, проблема собственных колебаний, в отличие от задачи Френеля, получила свое развитие относительно недавно, начиная с 70-х годов, поэтому мы начнем с анализа именно первой проблемы.

Изучение свойств ограниченной плазменной среды невозможно без знания граничных условий. И здесь возникают свои неприятности и свои трудности. Так, при использовании кинетического описания плазменной среды возникает вопрос об ее удержании, а именно, вопрос о том, что удерживает плазму от теплового расширения, и о том, как ее частицы отражаются от поверхности, какова структура самого приграничного слоя. Эти вопросы существенным образом зависят от того, удерживается ли плазма в стеклянном (или любом другом) сосуде, или носители заряда удерживаются магнитным полем, либо полем кристаллической решетки. В случае магнитного удержания можно вполне определенно судить о движении частиц вблизи границы плазмы, что мы и сделаем в одном из последующих разделов. В

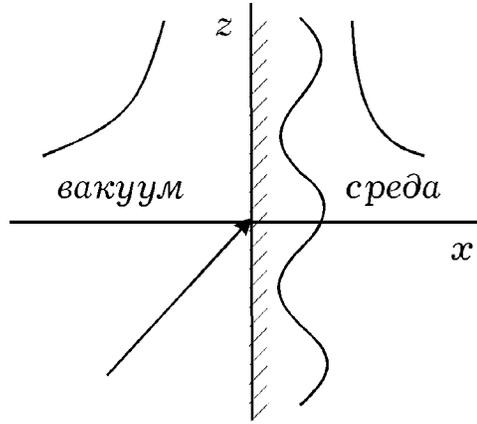


Рис. 7.1

настоящем же параграфе в основном ограничимся простейшими моделями плазмы, когда вопрос о граничных условиях решается очевидным образом.

Начнем с рассмотрения "холодной" плазмы, которую не надо удерживать и которая описывается моделью независимых частиц. Диэлектрическая проницаемость такой плазмы в отсутствие внешних полей имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{r})\delta_{ij}, \quad \varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2(\mathbf{r})}{\omega(\omega + i\nu_{\alpha})}. \quad (7.1.1)$$

И очень важно, что это выражение справедливо в случае произвольно неоднородной плотности частиц $n_{\alpha}(\mathbf{r})$. Поэтому, рассматривая полуограниченную плазму, мы будем считать, что (см. рис. 7.1)

$$n_{\alpha}(\mathbf{r}) = \begin{cases} n_{0\alpha} = \text{const} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (7.1.2)$$

Теперь мы можем записать уравнения Максвелла с учетом (7.1.1) и (7.1.2), представив поля без ограничения общности в виде $A(x)e^{-i\omega t + ik_z z}$ (ось $0z$ направлена вдоль поверхности плазмы).

Имеем:

$$\begin{aligned}
k_z E_y + \frac{\omega}{c} B_x &= 0, & k_z B_y - \frac{\omega}{c} \varepsilon(x) E_x &= 0, \\
k_z E_x + i \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c} B_y &= 0, & k_z B_x + i \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\omega}{c} \varepsilon(x) E_y &= 0, \\
i \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\omega}{c} B_z &= 0, & i \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\omega}{c} \varepsilon(x) E_z &= 0.
\end{aligned} \tag{7.1.3}$$

Эти уравнения дополняются очевидными граничными условиями, которые получаются непосредственно из них же путем интегрирования по бесконечно малому (по сравнению с размером неоднородности полей $\mathbf{E}(x)$ и $\mathbf{B}(x)$) слою между точками $x = 0 - \delta$ и $x = 0 + \delta$, где $\delta \rightarrow 0$. В результате имеем:

$$\{E_z\}_{x=0} = \{E_y\}_{x=0} = \{B_z\}_{x=0} = \{B_y\}_{x=0} = 0. \tag{7.1.4}$$

При получении этих соотношений учитывались конечность полей \mathbf{E} и \mathbf{B} как физических величин и конечность скачка плотности $n_\alpha(x)$.

Уравнения (7.1.3) легко сводятся к двум уравнениям для компонент полей E_z и B_z :

$$\varepsilon(x) \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - k_z^2 E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) E_z \right) = 0, \tag{7.1.5a}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - k_z^2 B_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) B_z = 0. \tag{7.1.5b}$$

Остальные компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{B} выражаются через E_z и B_z с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{i}{\kappa^2} k_z \frac{\partial E_z}{\partial x}, & B_y &= -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\
E_y &= \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial B_z}{\partial x}, & B_x &= -\frac{i}{\kappa^2} k_z \frac{\partial B_z}{\partial x},
\end{aligned} \tag{7.1.6}$$

где $\kappa^2 = k_z^2 - \omega^2 \varepsilon / c^2$.

Уравнения (7.1.5) и соотношения (7.1.6) пригодны во всей области изменения x , как внутри среды при $x \geq 0$, так и вне ее при $x \leq 0$. Поэтому мы можем найти поля в этих областях и сшить найденные решения с помощью граничных условий (7.1.4).

Прежде, однако, заметим, что существует решение уравнения (7.1.5а)

$$\varepsilon(\omega, x) = 0, \quad (7.1.7)$$

соответствующее чисто потенциальной объемной волне, запертой внутри плазмы и обладающей спектром локализованных около точки x электронных плазменных колебаний.

Остальные уравнения делятся на два не связанных между собой класса для компонент E_x , E_z , B_y , и B_x , B_z , E_y . Первый класс называют ТМ или Е-волной, а второй ТЕ или В-волной. При анализе решений этих уравнений, как уже говорилось, следует различать две постановки задачи: задачу на собственные значения, или как говорят, задачу о существовании локализованных вблизи поверхности волн, известных как поверхностные волны, и задачу Френеля об отражении и преломлении падающей на поверхность плазменной среды электромагнитной волны. В настоящем параграфе рассматривается только первая из этих задач. Вторая будет рассмотрена в задачах по теме VII.

Можно показать, что уравнение (7.1.5б) для волны В-типа не допускает решений в виде поверхностной волны. Поэтому ограничимся анализом уравнения (7.1.5а) для волны Е-типа и в соответствии с постановкой задачи о поверхностной волне запишем его решение в виде

$$E_z = \begin{cases} C_1 \exp \left[-\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon} x \right] & \text{при } x \geq 0, \\ C_2 \exp \left[\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} x \right] & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (7.1.8)$$

При этом предполагается, что $\omega^2 < k_z^2 c^2$, т.е. волна медленная, и $k_z^2 c^2 > \omega^2 \varepsilon$, что при $\omega > \nu_e$, т.е. в слабостолкновительной плазме, выполняется легко. Структура поля (7.1.8) показана на рис. 7.1.

Подставляя (7.1.8) в граничные условия для E_z и B_z (с учетом (7.1.6)), окончательно получим дисперсионное уравнение для иско-

мой поверхностной волны Е-типа:

$$\begin{aligned} \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon} + \varepsilon \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} = \\ = \sqrt{k_z^2 c^2 + \omega_{Le}^2 - \omega^2} + \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} = 0. \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

При написании последнего соотношения мы полностью пренебрегли столкновениями, т.е. положили $\nu_e \rightarrow 0$. Решение уравнения (7.1.9) представлено на рис. 7.2. В длинноволновом (низкочастотном) пределе $\omega = k_z c$ и поле волны в сильной степени непотенциально (поперечно)¹, в то время как в коротковолновом (высокочастотном) случае $\omega \simeq \frac{\omega_{Le}}{\sqrt{2}} \ll k_z c$ и поле почти потенциально. В этом последнем пределе для ее описания можно было исходить из уравнения Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial r_i} \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} - k_z^2 \varepsilon \Phi = 0, \quad (7.1.10)$$

откуда путем интегрирования вблизи $x = 0$ находятся и граничные условия:

$$\{\Phi\}_{x=0} = \left\{ \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\}_{x=0} = 0. \quad (7.1.11)$$

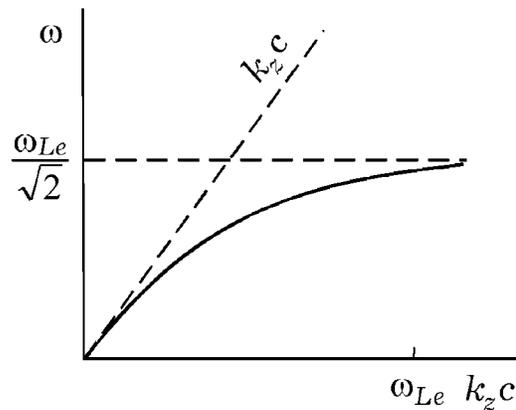


Рис. 7.2

¹Следует заметить, что сильно непотенциальная волна существует и в плотной сильностолкновительной плазме (металле), когда $\varepsilon = i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \nu_e} \rightarrow \infty$. Эта волна в металлах известна как волна Пеннике-Зоммерфельда.

Сформулированная задача приводит к следующему дисперсионному уравнению для поверхностной волны:

$$\varepsilon = -1 \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\omega_{Le}}{\sqrt{2}} - i\frac{\nu_e}{2}. \quad (7.1.12)$$

Здесь мы учли слабое столкновительное затухание высокочастотной (коротковолновой) плазменной поверхностной волны. Учет столкновений приводит к слабому затуханию и в длинноволновом пределе, в чем предоставляем читателю убедиться самому. Заметим, однако, что учет теплового движения и связанного с ним бесстолкновительного затухания для поверхностной волны оказывается более важным. Это связано с затуханием поля в поперечном к поверхности плазмы направлении, что приводит к эффективному "замедлению" волны и возрастанию роли бесстолкновительного поглощения. Этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе.

Здесь же обсудим вопрос о поверхностных волнах в замагниченной плазменной среде, считая магнитное поле параллельным поверхности среды. При наличии внешнего магнитного поля задача в общем случае становится весьма громоздкой и поэтому мы ограничимся рассмотрением только медленных волн, считая поле потенциальным. Тензор диэлектрической проницаемости в модели независимых частиц, который раньше выписывался неоднократно, оказывается справедливым и для случая произвольно неоднородной плотности носителей и мы для простоты воспользуемся им в бесстолкновительном приближении:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (7.1.13)$$

где

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad g = \sum \frac{\omega_L^2 \Omega}{\omega(\omega^2 - \Omega^2)}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}. \quad (7.1.14)$$

При наличии магнитного поля $\mathbf{B}_0 \parallel 0z$ решения уравнений поля уже следует искать в виде $A(x) \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$. В результате уравнение Пуассона примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial r_j} = \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{\perp} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - k_y^2 \varepsilon_{\perp} \Phi - k_y \Phi \frac{\partial g}{\partial x} - k_z^2 \varepsilon_{\parallel} \Phi = 0. \quad (7.1.15)$$

Отсюда находим граничные условия:

$$\{\Phi\}_{x=0} = 0, \quad \left\{ \varepsilon_{\perp} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - k_y g \Phi \right\}_{x=0} = 0. \quad (7.1.16)$$

Подставляя решения уравнения (7.1.15)

$$\Phi = \begin{cases} C_1 \exp \left(-\sqrt{k_y^2 + k_z^2 \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} x \right) & \text{при } x > 0, \\ C_2 \exp \left(\sqrt{k_y^2 + k_z^2} x \right) & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (7.1.17)$$

в граничные условия, получаем дисперсионное уравнение потенциальной поверхностной волны вблизи поверхности замагниченной полугораниченной плазменной среды:

$$\varepsilon_{\perp} \sqrt{k_y^2 + k_z^2 \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} + k_y g + \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = 0. \quad (7.1.18)$$

Из анализа этого уравнения следуют два важных следствия. Во-первых, поверхностная волна в магнитоактивной плазме существует только при конечной величине внешнего магнитного поля, пока второе слагаемое в уравнении (7.1.18) остается определяющим. Во-вторых, благодаря именно этому слагаемому поверхностная волна оказывается не взаимной (однонаправленной) в том смысле, что

$$\omega(k_y) \neq \omega(-k_y). \quad (7.1.19)$$

В этом особенно легко убедиться для волн с $k_z = 0$ и $\Omega_e \gg \omega \gg \Omega_i$, когда решение (7.1.18) записывается в виде

$$\omega = \frac{k_y}{|k_y|} \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e (2 + \omega_{Le}^2 / \Omega_e^2)}. \quad (7.1.20)$$

О независимых однонаправленных поверхностных волнах впервые заговорили в начале 80-х годов применительно к плазме твердого тела. Здесь следует заметить, что все полученные в этом параграфе результаты применимы как для газовой плазмы и невырожденной плазмы носителей твердого тела, так и для вырожденной плазмы металлов и полупроводников, поскольку они получены при полном пренебрежении тепловым движением носителей. Именно использованием особенностей распространения таких волн в конечных образцах твердого тела (они излучаются в одном направлении с границы

образца) для диагностики плотности носителей объясняется бурное развитие в последние годы теории поверхностных волн и экспериментальной техники их детектирования.

§ 7.2. Кинетическая теория поверхностных волн в полуограниченной плазменной среде. Модель зеркально отражающей поверхности

Перейдем теперь к вопросу о влиянии теплового движения носителей на характер распространения и поглощения поверхностных волн в полуограниченной плазме. Это требует уже использования кинетического уравнения, решение которого, в свою очередь, возможно при известных граничных условиях. Здесь мы рассмотрим простейшую и очень распространенную модель зеркального (упругого) отражения носителей от поверхности среды. Такая модель более или менее обоснована для плазмы твердого тела и то – как мы убедимся ниже – только в отсутствие внешнего магнитного поля. Плазменную среду, удерживаемую магнитным полем, рассмотрим в следующем параграфе.

Таким образом рассмотрим плоскую границу, разделяющую изотропную плазму и вакуум, как это показано на рис. 7.1 (обобщение на случай границы раздела двух плазменных сред не представляет труда). Равновесную функцию распределения носителей заряда будем считать максвелловской, либо фермиевской с сильным вырождением, когда плотность носителей меняется скачкообразно:

$$n_{\alpha}(x) = \begin{cases} n_{0\alpha} = \text{const}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (7.2.1)$$

Кроме того, для простоты плазменную среду будем считать изотропной и бесстолкновительной, описываемой уравнением Власова при отсутствии внешних полей. Это вполне оправдано: как мы неоднократно подчеркивали, в плазменной среде бесстолкновительные процессы протекают, как правило, быстрее, чем столкновительные. Выпишем поэтому линеаризованное уравнение Власова для возмущения функции распределения δf , которое без ограничения общности

мы будем искать в виде $\delta f(x) \exp(-i\omega t + ik_z z)$. Тогда для δf получим уравнение

$$-i\omega\delta f + ik_z v_z \delta f + v_x \frac{\partial \delta f}{\partial x} + e\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (7.2.2)$$

Это уравнение является дифференциальным и требует задания граничного условия.

Проблема граничных условий – одна из сложнейших проблем физики поверхности сплошных сред. Что представляет собой поверхность среды, каким образом она удерживает носители заряда? От этого зависит конкретный вид граничных условий. Если поверхность среды жесткая, точнее, если вблизи поверхности имеется потенциальный барьер для носителей заряда, то скорее всего носители будут отражаться от этой поверхности, возвращаясь назад в среду. Такая ситуация имеет место в плазме твердых тел. Но и в случае газовой плазмы, удерживаемой стенками стеклянного сосуда либо магнитным полем, носители заряда (во всяком случае, легкие частицы – электроны) отражаются от ограничивающей ее поверхности. При этом возможно частичное поглощение носителей на поверхности – их рекомбинация, прилипание и т.п. Такими процессами мы будем пренебрегать, считая, что носители заряда упруго отражаются от границы плазменной среды. Это сводится к требованию

$$\delta f(0, v_x > 0) = \delta f(0, v_x < 0), \quad (7.2.3)$$

которое называется условием зеркального отражения носителей от поверхности (границы) плазменной среды.

Условие (7.2.3), вообще говоря, недостаточно для решения уравнения Власова (7.2.2). Его следует дополнить требованием затухания (убывания) $\delta f(x)$, а также полей $\mathbf{E}(x)$ и $\mathbf{B}(x)$ при удалении от поверхности плазменной среды по обе ее стороны. Именно в этом и состоит новая характерная особенность поверхностных типов волн в полуограниченной среде.

Теперь уже задача корректно сформулирована, и для ее решения представим $\delta f(x, v_x)$ в виде суммы:

$$\delta f(x, v_x) = \delta f^+(x, v_x) + \delta f^-(x, v_x),$$

$$\delta f^\pm(x, v_x) = \begin{cases} \delta f(x, v_x > 0), \\ \delta f(x, v_x < 0). \end{cases} \quad (7.2.4)$$

При этом сформулированные выше граничные условия записываются в виде

$$\delta f^+(0, v_x) = \delta f^-(0, v_x), \quad (7.2.5)$$

$$\delta f^-(\infty, v_x) = 0,$$

причем очевидно, что функции $\delta f^\pm(x, v_x)$ по отдельности удовлетворяют уравнению Власова (7.2.2).

Дальнейшая процедура решения уравнений Власова для $\delta f^\pm(x, v_x)$ состоит в следующем. Вначале находим $\delta f^-(x, v_x)$, используя второе граничное условие (7.2.5):

$$\delta f^-(x, v_x) = e \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{1}{v_x} \int_x^\infty dx' \mathbf{E}(x') \exp \left[\frac{i}{v_x} (x - x') (\omega - k_z v_z) \right]. \quad (7.2.6)$$

Подставляя далее (7.2.6) в первое условие (7.2.5), находим

$$\begin{aligned} \delta f^+(x, v_x) = & \\ & = -e \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{1}{v_x} \left\{ \int_0^x dx' \mathbf{E}(x') \exp \left[i \frac{(x - x')}{v_x} (\omega - k_z v_z) \right] + \right. \\ & \left. + \int_0^\infty dx' \mathbf{E}(x') \exp \left[i \frac{(x - x')}{v_x} (\omega + k_z v_z) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

Теперь мы можем, используя (7.2.4), найти описываемый возмущением δf индуцированный в плазменной среде ток

$$\begin{aligned} j_i(x) = \sum e \int d\mathbf{p} [\delta f^+(x, v_x) + \delta f^-(x, v_x)] = \\ = \int_0^\infty dx' [K_{ij}(|x - x'|) + K_{ij}(|x + x'|)] E_j(x'), \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

где

$$K_{ij}(x) = - \sum e^2 \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{v_x} \frac{\partial f_0}{\partial p_j} \exp \left[i \frac{|x|}{v_x} (\omega - k_z v_z) \right]. \quad (7.2.9)$$

При подстановке выражения (7.2.8) в уравнения поля получается система интегральных уравнений со сложным неразностным ядром,

причем эта система распадается на две подсистемы для компонент E_x , E_z , B_y и B_x , B_z , E_y соответственно. Решения типа поверхностной волны допускает только первая из них. Для решения этой подсистемы уравнений мы поступим следующим образом. Мысленно продолжим плазменную среду в область $x < 0$, т.е. примем $n_0(x) = n_0(-x)$, и запишем там решение в том же виде, что и для случая однородной среды. Аналогично решение, найденное для области вакуума, продолжим на область $x > 0$. При этом $E_x(x)$ и $B_y(x)$ продолжаются нечетно, а $E_z(x)$ – четно. Далее эти два решения сошьем в точке $x = 0$, используя электродинамические граничные условия, которые получаются путем интегрирования уравнения поля вблизи границы раздела среда – вакуум. В результате окончательно находим условие существования решений уравнений поля в виде поверхностных волн, которое и есть дисперсионное уравнение для волн на границе изотропная плазма-вакуум:

$$\sqrt{\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} - 1} + \frac{2\omega}{\pi c} \int_0^\infty \frac{dk_x}{k^2} \left[\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon^l(\omega, k)} - \frac{k_x^2 c^2}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)} \right] = 0. \quad (7.2.10)$$

Уравнение (7.2.10) определяет спектр поверхностных волн $\omega = \omega(k_z)$ без каких-либо ограничений на их фазовую скорость. Однако, если интересоваться только медленными волнами с фазовой скоростью, намного меньшей скорости света, то в (7.2.10) можно перейти к пределу $c \rightarrow \infty$. При этом уравнение (7.2.10) сводится к виду

$$1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk_x |k_z|}{k^2 \varepsilon^l(\omega, k)} = 0. \quad (7.2.11)$$

Оно описывает продольные (потенциальные) поверхностные волны на границе изотропная плазменная среда – вакуум. С анализа этого уравнения мы и начнем изучение поверхностных волн.

Прежде всего рассмотрим предел холодной бесстолкновительной плазменной среды, для которой $\varepsilon^l(\omega, k) = \varepsilon(\omega, k) = 1 - \omega_{Le}^2/\omega^2$. Из (7.2.11) в этом пределе имеем:

$$\varepsilon(\omega) + 1 = 2 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} = 0. \quad (7.2.12)$$

Отсюда следует спектр частот незатухающих поверхностных волн на плоской границе раздела холодная плазменная среда – вакуум:

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2/2, \quad (7.2.13)$$

который уже был исследован выше (см. (7.1.12)).

Можно сказать, что эти колебания представляют собой поверхностный аналог объемных ленгмюровских (плазменных) колебаний холодной плазменной среды. Так же, как и объемные ленгмюровские волны, поверхностные колебания со спектром (7.2.12) не обладают дисперсией. Но если это так, то учет теплового движения должен привести к появлению как дисперсии, так, и это более важно, затухания этих волн, обусловленного их черенковским поглощением электронами. В случае объемных волн при условии $\omega/k \gg v_{Te}$ это затухание оказывается экспоненциально малым. Как же обстоит дело для поверхностных волн? Ведь их пространственная структура существенно отличается от структуры объемных волн – их амплитуда довольно резко убывает при удалении от поверхности плазменной среды. Прежде чем анализировать этот вопрос количественно, заметим, что такая структура поверхностных волн должна сказаться на величине их эффективной фазовой скорости, а следовательно, на поглощении этих волн электронами. Действительно, в уравнении (7.2.11) содержится интегрирование по k_x вплоть до $k_x \rightarrow \infty$. Это означает, что и величина k_x может быть сколь угодно большой, а фазовая скорость ω/k , напротив, малой. Как следствие в значительной области изменения k_x мнимая часть $\varepsilon^l(\omega, k)$ велика и поглощение существенно. По этой причине при учете теплового движения носителей уравнение (7.2.11) удастся точно анализировать только численно. Однако, если $\omega/k \gg v_{Te}$, то можно воспользоваться приближенным анализом этого уравнения, подставляя в него $\varepsilon^l(\omega, k)$ для невырожденной плазмы в виде

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right). \quad (7.2.14)$$

Учитывая далее, что основной вклад в интеграл (7.1.11) даст область больших k_x , окончательно получим дисперсионное уравнение в виде

$$2 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - 2i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|k_z| v_{Te}}{\omega}\right) = 0. \quad (7.2.15)$$

Отсюда находим декремент затухания высокочастотных поверхностных волн, обусловленный их черенковским поглощением электронами ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\delta = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} |k_z| v_{Te}. \quad (7.2.16)$$

Декремент (7.2.16), хотя и мал по сравнению с частотой (7.2.13), но не экспоненциально мал, а это как раз и является следствием определяющего вклада в мнимую часть $\varepsilon^l(\omega, k)$ от области больших k_x . В этом и заключается основная новизна поверхностного аналога ленгмюровских волн в плазменной среде, спектр частот которых изображен на рис. 7.3.

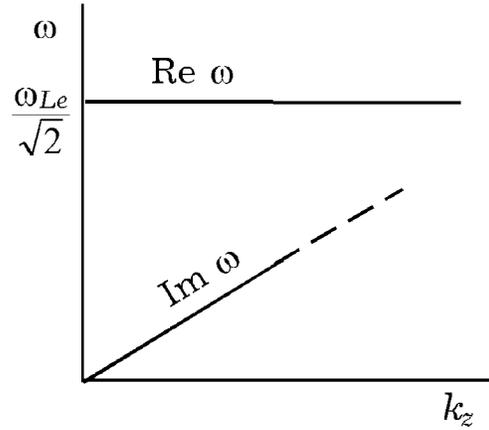


Рис. 7.3

Заметим, что линейный рост затухания поверхностной волны с ростом волнового вектора в бесстолкновительной плазме был недавно обнаружен в так называемом сурфатроне, использующем такую волну для генерации плазмы.

Аналогичное положение имеет место и в случае вырожденной электронной плазмы. Действительно, если в (7.2.11) подставить выражение

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + \frac{3}{2} i \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k^3 v_{Fe}^3} \theta(kv_{Fe} - \omega), \quad (7.2.17)$$

то (7.2.11) принимает вид

$$2 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{3}{4} \frac{|k_z| v_{Fe}}{\omega} \right) = 0. \quad (7.2.18)$$

Отсюда находим декремент затухания ленгмюровских поверхностных волн в вырожденной плазме ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$)

$$\delta = -\frac{3}{8} |k_z| v_{Fe}. \quad (7.2.19)$$

Заметим, что объемные колебания в этой области частот в электронной плазме вообще не затухают.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании поверхностных ионно-звуковых волн в изотропной плазменной среде. Так же, как и объемные волны, они могут существовать только в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$ в области фазовых скоростей $v_{Te} \gg \omega/k \gg v_{Ti}$. Ионно-звуковые поверхностные волны, очевидно, являются продольными и описываются общим дисперсионным уравнением (7.2.11), которое при подстановке выражения

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) \quad (7.2.20)$$

легко интегрируется и сводится к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon_i + \left(1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k_z^2 v_s^2 \varepsilon_i} \right)^{-1/2} - i \sqrt{\frac{2m}{\pi M}} \frac{\omega_{Li}^2 \omega}{|k_z|^3 v_s^3} \frac{1}{\varepsilon_i} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1} (x^2 + 1 + \omega_{Li}^2 / k_z^2 v_s^2 \varepsilon_i)^2} = 0, \end{aligned} \quad (7.2.21)$$

где

$$\varepsilon_i = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}.$$

Отсюда следует, что поверхностные ионно-звуковые волны могут существовать только в области частот $\omega \leq \omega_{Li}/\sqrt{2}$, причем их спектр дается следующими асимптотическими формулами ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega^2 = \begin{cases} k_z^2 v_s^2 & \text{при } k_z^2 v_s^2 \ll \omega_{Li}^2, \\ \omega_{Li}^2 / 2 & \text{при } k_z^2 v_s^2 \gg \omega_{Li}^2, \end{cases} \quad (7.2.22)$$

$$\frac{\delta}{\omega} = - \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi m}{8M}} & \text{при } k_z^2 v_s^2 \ll \omega_{Li}^2, \\ \frac{1}{6} \sqrt{\frac{m}{\pi M}} \frac{\omega_{Li}^3}{k_z^3 v_s^3} & \text{при } k_z^2 v_s^2 \gg \omega_{Li}^2. \end{cases} \quad (7.2.23)$$

Спектр частот (7.2.22) представлен графически на рис. 7.4.

Заметим, что формулы (7.2.22)–(7.2.23) легко обобщаются на случай плазменной среды с вырожденными электронами. Для этого под

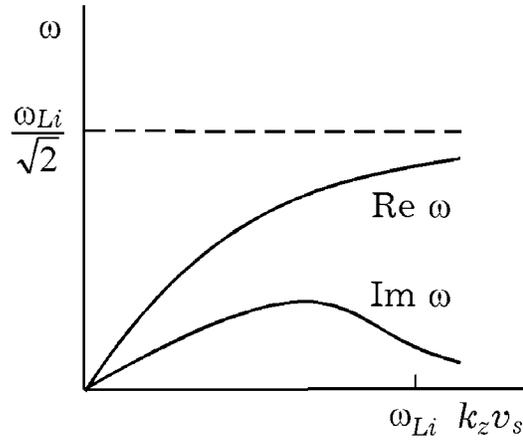


Рис. 7.4

v_s следует понимать $v_s = \sqrt{\frac{3m}{M}} v_{Fe}$, а в выражениях для δ надо ввести множитель $\sqrt{\pi/2}$.

До сих пор мы говорили о потенциальных поверхностных волнах, учитывая малость их фазовых скоростей по сравнению со скоростью света, и пренебрегали непотенциальной частью поля в этих волнах. При этом остался открытым вопрос о том, когда строго применимо это приближение и как выглядит спектр поверхностных волн в непотенциальном приближении. На этот вопрос мы ответим для случая холодной плазмы, для которой $\varepsilon^l = \varepsilon^{tr} = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}$. В этом простейшем пределе общее дисперсионное уравнение (7.2.10) принимает довольно простой вид:

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)} + \varepsilon(\omega) \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} = \\ & = \sqrt{k_z^2 c^2 + \omega_{Le}^2 - \omega^2} + \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} = 0, \end{aligned} \quad (7.2.24)$$

проанализированный выше (см. (7.1.8)).

Уравнение (7.2.10), полученное для изотропной плазмы, в принципе можно обобщить на случай анизотропной замагниченной плазменной среды. Но это довольно громоздкая процедура, которая, однако, становится простой в потенциальном пределе, когда это уравнение

записывается в виде:

$$1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk_x \sqrt{k_y^2 + k_z^2}}{(k_y^2 + k_z^2)\varepsilon_{\perp} + k_z^2\varepsilon_{\parallel}} = 0. \quad (7.2.25)$$

Легко показать, что в условиях среды без пространственной дисперсии, когда ε_{\perp} и ε_{\parallel} являются только функциями частоты, из (7.2.25) получаем:

$$\sqrt{k_y^2 + k_z^2} + \varepsilon_{\perp} \sqrt{k_z^2 + k_y^2 \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}} = 0. \quad (7.2.26)$$

Это уравнение отличается от уравнения от (7.2.18) отсутствием слагаемого $k_y g$, что указывает на независимость поверхностных волн в магнитоактивной среде. Таким образом, модель зеркального отражения неадекватно учитывает поверхностные эффекты, в частности, это видно на примере холодной магнитоактивной плазмы, где в дополнительных граничных условиях вообще нет необходимости. Это утверждение весьма серьезно, если учесть, что существование однонаправленных поверхностных волн в замагниченной плазменной среде не только доказано экспериментально, но как отмечалось выше, они эффективно используются для измерения плотности носителей в таких средах вблизи поверхности.

§ 7.3. Неустойчивость границы плазмы, удерживаемой магнитным полем

Исследуем теперь полуограниченную плазму, удерживаемую сильным магнитным полем, параллельным поверхности плазмы и направленным вдоль оси Oz . Неоднородная граница плазмы, удерживаемой магнитным полем, обладает характерным размером, намного превышающим ларморовские радиусы частиц. Эту границу будем считать расположенной вблизи плоскости $x = 0$ (рис. 7.5). Для простоты столкновениями заряженных частиц в плазме пренебрежем, предполагая выполненными неравенства $\Omega_{\alpha} \gg \nu_{\alpha}$, где $\alpha = e, i$. Невозмущенную электромагнитным полем колебаний функцию распределения частиц сорта α при этом находим так же, как это было сделано в разделе, посвященном геометрико-оптическому приближению

(см. тему VI):

$$f_{0\alpha} = \left(1 + \frac{v_{\perp} \sin \varphi}{\Omega_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x} F_{0\alpha}(\mathcal{E}, x) \right), \quad (7.3.1)$$

где $F_{0\alpha}(\mathcal{E}, x)$ является либо функцией распределения Максвелла, либо функцией распределения Ферми, но с зависящими от x температурой и плотностью частиц.

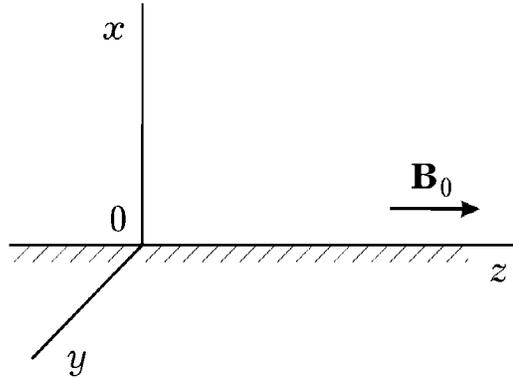


Рис. 7.5

В отличие от темы VI, где плазма считалась плавно неоднородной, здесь плазма неоднородна в узком слое вблизи плоскости $x = 0$ (поверхность плазмы). В этом слое и проявляется отличие функции распределения (7.3.1) от равновесной и именно здесь локализованы диамагнитные токи, обусловленные ларморовским вращением частиц в пространственно неоднородной плазме. Как было показано выше, диамагнитные токи могут стать причиной возбуждения в области неоднородности плазмы коротковолновых (по сравнению с размером неоднородности) дрейфовых колебаний, описываемых в рамках приближения геометрической оптики. В дальнейшем будет показано, что диамагнитные токи могут возбуждать также колебания с длиной волны, значительно большей размера неоднородности границы плазмы. Это поверхностные волны, затухающие в глубь плазмы.

Для поверхностных волн границу плазмы можно считать бесконечно тонкой и диамагнитные токи рассматривать как граничные условия к уравнениям электромагнитного поля. Задачей исследования, таким образом, является вывод уравнений поля и граничных усло-

вий к ним, учитывающих неоднородность поверхностного слоя плазмы и возникающие в нем диамагнитные токи. Сформулированную задачу будем решать на примере продольных (потенциальных) волн, поскольку в случае удержания плазмы магнитным полем магнитное давление намного превышает газодинамическое и колебания плазмы с хорошей степенью точности можно считать потенциальными. По этой же причине, как и выше, будем пренебрегать неоднородностью магнитного поля по сравнению с неоднородностью плазмы.

При указанных ограничениях кинетическое уравнение для неравновесной добавки к функции распределения (7.3.1), зависящей от времени и координат как

$$\delta f_\alpha = \delta f_\alpha(x) \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z), \quad (7.3.2)$$

записывается в виде

$$(\omega - k_y v_y - k_z v_z) \delta f_\alpha + i v_x \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial x} - i \Omega_\alpha \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \varphi} = -e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (7.3.3)$$

Здесь \mathbf{E} – потенциальное поле возмущений $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$.

Решение уравнение (7.3.3) находим путем интегрирования по характеристике

$$v_\perp \sin \varphi + \Omega_\alpha x = \text{const}. \quad (7.3.4)$$

При этом

$$\begin{aligned} \delta f_\alpha(x) = & -\frac{e_\alpha}{m_\alpha \Omega_\alpha} \int_{-\infty}^{\varphi} d\varphi' \nabla \Phi(x') \frac{\partial f_{0\alpha}(x')}{\partial \mathbf{v}} \times \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\Omega_\alpha} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - k_y v_\perp \sin \varphi'' - k_z v_z) \right]. \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Здесь x' и x , φ' и φ связаны между собой соотношением характеристики (7.3.4).

Подставляя решение (7.3.5) в формулу для плотности заряда

$$\rho(x) = \sum_{\alpha} e_\alpha \int \delta f_\alpha d\mathbf{p} \quad (7.3.6)$$

и используя уравнение Пуассона

$$\Delta \Phi = -4\pi \rho(x), \quad (7.3.7)$$

после довольно громоздких вычислений (подобных проведенным выше) окончательно получаем в случае невырожденной плазмы следующее уравнение для потенциала поля колебаний:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = \sum_{\alpha} \int dk_x \Phi(k_x) e^{ik_x x} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \left\{ 1 - \sum_s \frac{\omega}{\omega - s\Omega_{\alpha}} \times \right. \\ \times \left[1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} \frac{\partial^0}{\partial x} \left(1 - \frac{s}{z_{\alpha}} \frac{\omega}{\Omega_{\alpha}} \right) - i \frac{k_x v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} \frac{\partial^0}{\partial x} \frac{A'_s(z_{\alpha})}{A_s(z_{\alpha})} \right] \times \\ \left. \times A_s(z_{\alpha}) J_+ \left(\frac{\omega - s\Omega_{\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

где

$$z_{\alpha} = \frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2}, \quad \frac{\partial^0}{\partial x} = \frac{\partial \ln n_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_{\alpha}}.$$

Оператор $\partial^0/\partial x$ действует на все стоящие справа от него величины.

Следует отметить, что уравнение (7.3.8) пригодно во всем пространстве как в плазме (область $x \geq 0$), так и в вакууме (область $x < 0$). Поэтому оно не требует задания специальных граничных условий; их можно получить путем интегрирования самого уравнения (7.3.8) по физически бесконечно узкому переходному слою вблизи поверхности плазмы, малому по сравнению с длиной волны поверхностных волн.

Анализ уравнения (7.3.8) начнем с холодной плазмы, когда магнитными токами в поверхностном слое можно полностью пренебречь. Другими словами, рассмотрим колебания с фазовой скоростью, намного большей тепловых скоростей частиц, и с длиной волны, значительно превышающей их ларморовские радиусы. В уравнении (7.3.8) при этом следует перейти к пределу $T \rightarrow 0$. В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \Phi - \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \right) k_z^2 \Phi + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2} \right) + k_y \Phi \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_{\alpha}}{\omega(\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2)} = 0, \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

совпадающее с (7.1.15). Как уже отмечалось выше, это уравнение не зависит от вида функции распределения частиц, и поэтому справед-

ливо как для невырожденной, так и для вырожденной плазмы. Оно подробно проанализировано в § 7.1, где было показано, что в холодной бесстолкновительной замагниченной плазме в условиях полного пренебрежения тепловым движением частиц поверхностные волны в плазме с резкой границей всегда устойчивы. Более того, учет столкновений частиц приводит к их затуханию (см. задачу 3 по данной теме). В этом нет ничего удивительного, поскольку в рассматриваемом приближении полностью пренебрегается диамагнитными токами в неоднородном поверхностном слое плазмы, которые могут привести к раскачке колебаний.

Картина качественно меняется при учете конечной температуры плазмы, а вместе с ней и конечного ларморовского радиуса частиц. При этом, кроме того, что вступают в силу диссипативные эффекты, обусловленные бесстолкновительным черенковским поглощением и излучением волн частицами плазмы, существенными становятся диамагнитные токи в неоднородном поверхностном слое плазмы, которые могут оказаться причиной неустойчивости поверхностных волн в плазме. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение (7.3.8) в области низкочастотных ($\omega \ll \Omega_\alpha$) и длинноволновых ($k_\perp^2 v_{T\alpha}^2 \ll \Omega_\alpha$) колебаний. Разлагая функции $A_s(z_\alpha)$ по степеням z_α и ограничиваясь в сумме по циклотронным гармоникам членом с $s = 0$, из интегродифференциального уравнения (7.3.8) получаем дифференциальное уравнение второго порядка¹

$$\Delta\Phi = \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \left\{ \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) + \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \Omega_\alpha} \frac{\partial^0}{\partial x} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right] \Phi + \right. \\ \left. + \frac{v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \left(k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \frac{\partial^0}{\partial x} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right\}. \quad (7.3.10)$$

При выводе этого уравнения было принято еще одно упрощающее допущение, а именно, $\omega^2 k_\perp^2 \ll k_z^2 \Omega_i^2$.

Граничные условия для потенциала Φ получают путем интегрирования уравнения (7.3.10) по переходному слою вблизи границы плаз-

¹Следует отметить, что в приближении геометрической оптики из уравнения (7.3.8) получаем уравнение эйконала для бесстолкновительной плазмы вида $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 0$, которое в низкочастотном пределе подробно было проанализировано в предыдущем разделе.

мы так же, как это было сделано ранее. В результате имеем:

$$\{\Phi\}_{x=0} = 0, \quad (7.3.11)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\Omega_{\alpha}}{\omega} k_y \Phi \right) \right\}_{x=0} = 0.$$

Теперь, когда получены граничные условия, можно записать уравнение (7.3.10) в следующем виде:

для плазмы ($x \geq 0$, $\Phi = \Phi_1$)

$$\Delta \Phi_1 = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \left\{ \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right] \Phi_1 + \right. \\ \left. + \frac{v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \left(k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi_1 \right\}, \quad (7.3.12)$$

для вакуума ($x < 0$, $\Phi = \Phi_2$)

$$\Delta \Phi_2 = 0. \quad (7.3.13)$$

Решения этих уравнений, затухающие при $x \rightarrow \pm\infty$, соответственно имеют вид

$$\Phi_1(x) = C_1 e^{-\chi x}, \quad \Phi_1(x) = C_1 e^{x \sqrt{k_y^2 + k_z^2}}, \quad (7.3.14)$$

где

$$\chi^2 = k_y^2 + \frac{k_z^2 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right]}{1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right)}. \quad (7.3.15)$$

Подставив решения (7.3.14) в граничные условия (7.3.11), получим систему однородных алгебраических уравнений для постоянных C_1 и C_2 , условие разрешимости которой представляет искомое дисперсионное уравнение для поверхностных волн в полуограниченной плазме с учетом диамагнитных токов на ее поверхности:

$$\left[1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right] \chi + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 k_y}{\omega \Omega_{\alpha}} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) + \\ + \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = 0. \quad (7.3.16)$$

Приступая к анализу дисперсионного уравнения (7.3.16), прежде всего заметим, что поверхностные волны возможны лишь в области частот, где $\chi^2 > 0$; при этом в области частот $\omega \gg k_z v_{Te}$ тепловым движением частиц можно пренебречь и уравнение (7.3.16) переходит в (7.3.15). В этом пределе пренебрегается также диамагнитными токами на поверхности плазмы и, как следует ожидать, колебания не нарастают во времени. Как подчеркивалось, учет диамагнитных токов может привести к раскачке поверхностных колебаний. Чтобы убедиться в этом, исследуем решения уравнения (7.3.16) в области частот $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$, в которой существенны эффекты, обусловленные тепловым движением электронов. Из уравнения (7.3.16) в этой области частот получаем:

$$\left(1 + \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2}\right) \chi + \frac{\omega_{Li}^2 k_y}{\omega \Omega_i} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}}\right) + \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = 0, \quad (7.3.17)$$

причем

$$\chi^2 = k_y^2 + \frac{k_z^2 \left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right) + \frac{\omega_{Li}^2}{v_s^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}}\right)}{1 + \omega_{Li}^2 / \Omega_i^2}. \quad (7.3.18)$$

Для мод с $k_y^2 \gg k_z^2$ при условии $\omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$ (которое, как правило, с большим запасом выполнено в реальной плазме, удерживаемой магнитным полем) из уравнения (7.3.17) находим следующий спектр слабонарастающих колебаний ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega^2 = k_y^2 v_s^2, \quad \delta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2}{|k_z| v_{Te}}, \quad (7.3.19)$$

где $v_s^2 = \frac{T_e}{M}$. Отсюда видно, что в полуограниченной плазме, удерживаемой сильным магнитным полем, под действием диамагнитных токов, протекающих в тонком неоднородном поверхностном слое с размером порядка ларморовского радиуса частиц, происходит раскачка поверхностных ионно-звуковых волн, распространяющихся почти под прямым углом к внешнему магнитному полю ($|k_y| \gg |k_z|$) и убывающих в глубь плазмы на глубине порядка v_s / Ω_i . Только в сильно неизоотермической плазме с $T_e \gg T_i$ этот размер больше ларморовского радиуса ионов (а следовательно, толщины поверхностного слоя).

Наконец заметим, что обобщение рассмотренного явления на случай плазмы с вырожденными носителями заряда не представляет большого труда и проводится в одной из задач по данной теме.

§ 7.4. Связанные упруго-электромагнитные поверхностные волны

При наличии связи между упругими и электромагнитными характеристиками плазменных сред поверхностные волны уже не могут быть чисто электромагнитной природы. В ограниченном образце пьезополупроводника, который мы только и рассматриваем, электромагнитное поле поверхностной волны, проникая в глубь образца, вызывает движение элементов кристаллической решетки, и поверхностная волна оказывается упруго-электромагнитной. Очевидно, аналогичное явление имеет место также и в непьезополупроводнике, если только учесть влияние поля поверхностной волны на деформацию кристаллической решетки через деформационный потенциал. Этот эффект, однако, намного слабее и ниже нами не рассматривается.

Описание связанных упруго-электромагнитных поверхностных волн в плазменных средах дело довольно сложное, особенно в условиях, когда существенны эффекты теплового движения носителей заряда и для их описания необходимо использовать кинетическое уравнение. Поэтому мы здесь ограничимся рассмотрением простейшего случая изотропной плазменной среды в отсутствие внешних полей. Кроме того, электромагнитное поле поверхностной волны будем считать потенциальным, полагая $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, $\mathbf{B} = 0$. Уравнения теории упругости, описывающие колебания решетки, как обычно, записываем в виде

$$\rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}, \quad (7.4.1)$$

где

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \lambda_{ijlm}(\mathbf{x}) u_{lm} - \beta_{lij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}, \quad (7.4.2)$$

а уравнения поля сводятся к уравнению Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + 4\pi \beta_{jkl}(\mathbf{x}) u_{kl} \right] = -4\pi \rho(\mathbf{x}). \quad (7.4.3)$$

Здесь $\rho(\mathbf{x})$ – плотность носителей заряда, определяемая возмущениями функций распределений:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum e \int \delta f d\mathbf{p}, \quad (7.4.4)$$

причем $\delta(\mathbf{x})$ является решением уравнения Власова

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} - e \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (7.4.5)$$

Уравнения (7.4.1) и (7.4.5) должны быть дополнены граничными условиями. Из (7.4.1) непосредственно следует условие на поверхности (нормаль к поверхности совпадает с осью $0x$) пьезополупроводника:

$$\sigma_{xj}|_{x=0} = 0. \quad (7.4.6)$$

Что касается граничного условия для уравнения Власова, то мы будем предполагать, как и выше, выполненным условие зеркального отражения носителей от поверхности пьезополупроводника:

$$\delta f(x, v_x > 0)|_{x=0} = \delta f(x, v_x < 0)|_{x=0}. \quad (7.4.7)$$

Для упрощения задачи, как и всюду выше, пьезокристалл считаем гексагонально симметричным с главной осью симметрии вдоль оси $0z$, а тензор λ_{ijklm} аппроксимируем изотропным тензором. Кроме того, ограничимся рассмотрением волн, распространяющихся строго поперек главной оси симметрии, и представим все возмущенные величины в виде $A(x) \exp(-i\omega t + k_y y)$. При этих ограничениях уравнение (7.4.1) для компоненты u_z запишется в виде

$$-\omega^2 \rho^{(m)} u_z = \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{tr} \frac{\partial u_z}{\partial x} - k_y^2 \lambda_{tr} u_z - \frac{\partial}{\partial x} \beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - k_y^2 \beta_1 \Phi = 0. \quad (7.4.8)$$

Уравнения для компонент u_x и u_y отщепляются и вообще не содержат электромагнитного поля, т.е. описывают чисто упругие колебания кристаллической решетки, поэтому они здесь не рассматриваются. Из (7.4.8) следует граничное условие (7.4.6)

$$\left(\lambda_{tr} \frac{\partial u_z}{\partial x} - \beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = 0. \quad (7.4.9)$$

Уравнение Пуассона (7.4.3) для рассматриваемой волны принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - k_y^2 \Phi - 4\pi k_y^2 \beta_1 u_z + 4\pi \frac{\partial}{\partial x} \beta_1 \frac{\partial u_z}{\partial x} - 4\pi \rho(x) = 0. \quad (7.4.10)$$

Здесь $\rho(x)$ – плотность индуцированного носителями заряда, которая находится по формуле (7.4.4) с подстановкой решения уравнения

Власова (7.4.5) с граничным условием (7.4.7). Решение этого уравнения, так же как и уравнения поля (7.4.10), полностью аналогично проведенному в § 7.1. Поэтому здесь мы не будем его повторять. Отметим только, что $\Phi(x)$ продолжается в вакуумную область четным образом, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_z}{\partial x}$ – нечетным. Далее решения в областях $x \geq 0$ и $x \leq 0$ сшиваются с помощью обычных граничных условий электродинамики, что окончательно приводит к следующему дисперсионному уравнению для поверхностной волны на границе раздела пьезополупроводник-вакуум:

$$1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk_x |k_y|}{k^2 \varepsilon^l(\omega, k) - \frac{4\pi k^4 \beta_1^2}{\omega^2 \rho^{(m)} - \lambda_{tr} k^2}} = 0. \quad (7.4.11)$$

В отсутствие пьезоэффекта, т.е. в пределе $\beta_1 \rightarrow 0$, уравнение (7.4.11) переходит в дисперсионное уравнение для продольных волн полуограниченной изотропной плазменной среды, подробно исследованное в § 7.1. Можно показать непосредственно из уравнений (7.4.1) и (7.4.2), что в рассматриваемой геометрии чисто упругие поверхностные волны существовать не могут. Поэтому появление связанной упруго-электромагнитной поверхностной волны, описываемой уравнением (7.3.11), в действительности есть проявление поверхностной электромагнитной волны в пьезополупроводнике: благодаря пьезосвязи электромагнитных и упругих свойств поверхностная электромагнитная волна вызывает вынужденные упругие колебания кристаллической решетки, которые так же, как поле электромагнитной волны, затухают в глубь пьезополупроводника.

Чтобы убедиться в сказанном, рассмотрим простейший случай высокочастотных поверхностных волн, считая $\varepsilon^l(\omega, k)$ функцией только частоты и пренебрегая тем самым пространственной дисперсией носителей заряда в пьезополупроводнике. В этом случае интегрирование в (7.4.11) легко выполняется и это уравнение сводится к виду

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho^{(m)} = k_y^2 \left(\lambda_{tr} + \frac{4\pi \beta_1^2}{\varepsilon(\omega)} \right) \times \\ \times \left[1 - \left(\frac{4\pi \beta_1^2}{[1 + \varepsilon(\omega)][\lambda_{tr} \varepsilon(\omega) + 4\pi \beta_1^2]} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

В условиях, когда мы имеем пьезодиэлектрик и $\varepsilon(\omega) = \text{const}$, соотношение (7.4.12) описывает закон дисперсии поверхностной волны и она называется волной Гуляева – Блюштейна, которые впервые получили это уравнение. Надо заметить, что эта волна получила широкое применение в акустоэлектронике после ее экспериментального обнаружения, как одно из эффективных средств создания периодических структур на поверхности пьезодиэлектриков, и принесла мировую известность ее первооткрывателям.

Заметим, что уравнение (7.4.12) можно получить, и не решая кинетического уравнения Власова (7.4.5). Следует исходить из уравнения теории упругости (7.4.8) и уравнения Пуассона (7.4.10), записанного в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\varepsilon(\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + 4\pi \beta_{ikl}(x) u_k u_l \right] = 0. \quad (7.4.13)$$

При этом к граничному условию (7.4.9) добавляется условие непрерывности потенциала Φ на поверхности $x = 0$ и условие

$$\left\{ \varepsilon(\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 4\pi \beta_1 \frac{\partial u_z}{\partial x} \right\}_{x=0} = 0, \quad (7.4.14)$$

которое получается из (7.4.10) при интегрировании по бесконечно тонкому поверхностному слою вблизи $x = 0$. Решение этих уравнений внутри и вне пьезополупроводника и их сшивка на границе плазменной среды окончательно приводит к дисперсионному уравнению (7.4.12).

Рассмотренная поверхностная волна, как уже отмечалось, в действительности является квазиповерхностной упругой волной, поскольку при $\beta_1 \rightarrow 0$, т.е. в отсутствие пьезоэффекта в кристалле, она существовать не может и переходит в объемную упругую волну, однородную вдоль оси $0x$ (вдоль этой оси она не затухает). Учет пьезоэффекта замедляет скорость объемной волны и тем самым обуславливает существование поверхностной упругой волны. Кроме замедления пьезоэффект приводит к качественно новому явлению – плазменному затуханию упругих колебаний. Формально оно является следствием наличия мнимой части у диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$, имеющей в высокочастотной области хорошо известный вид:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_e}{\omega^3}. \quad (7.4.15)$$

Здесь ν_e – частота электронных столкновений, а поэтому диссипация звуковой волны обусловлена трением электронов в пьезополупроводнике.

Обратим внимание еще на одну интересную особенность поведения связанных упруго-электромагнитных волн вблизи собственных частот электромагнитных поверхностных колебаний, где

$$\varepsilon(\omega) + 1 = 0, \quad \omega = \omega^l. \quad (7.4.16)$$

В этой области частот, учитывая малость пьезоэффекта, уравнение (7.4.12) запишем в виде

$$(\omega^2 - k_y^2 v_{tr}^2) [\varepsilon(\omega) + 1]^2 = -k_x^2 v_{tr}^2 \left(\frac{4\pi\beta_1^2}{\rho^{(m)} v_{tr}^2} \right), \quad (7.4.17)$$

где $v_{tr}^2 = \lambda_{tr}/\rho^{(m)}$. Будем искать решение уравнения (7.4.17) в виде

$$\omega = k_y v_{tr} + \delta = \frac{\omega_{Le}}{\sqrt{2}} + \delta. \quad (7.4.18)$$

Находим:

$$2\delta^3 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right)^2 = -\omega \left(\frac{4\pi\beta_1^2}{\rho^{(m)} v_{tr}^2} \right)^2. \quad (7.4.19)$$

Формально это уравнение имеет три решения:

$$\delta_1 = - \left\{ \frac{\omega}{2} \left(\frac{4\pi\beta_1^2}{\rho v_{tr}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}} \right)^2 \right\}^{1/3}, \quad (7.4.20)$$

$$\delta_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \left\{ \frac{\omega}{2} \left(\frac{4\pi\beta_1^2}{\rho v_{tr}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}} \right)^2 \right\}^{1/3},$$

однако легко показать, что только первый корень удовлетворяет требованию поверхностной локализации рассматриваемой волны, пространственный коэффициент затухания которой

$$\kappa = - \frac{4\pi\beta_1^2}{\rho v_{tr}^2} \frac{1}{\delta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}} \quad (7.4.21)$$

положителен при $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} > 0$. Именно такое положение имеет место в термодинамически равновесной среде с $\varepsilon(\omega)$ в виде (7.4.15).

Задачи по теме VII

Задача 1. (задача Френеля). На плоскую поверхность холодной полуограниченной изотропной плазменной среды, плотность которой возрастает в области $0 \leq z \leq a$ от нуля до $n_p = \text{const}$, падает E -волна с частотой $\omega < \omega_p$, причем $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg a$. Оценить поглощаемую плазмой энергию поля вследствие трансформации падающей волны в плазменную в резонансной точке $z \in [0, a]$, где $\varepsilon(z_0) = 1 - \frac{\omega_p^2(z_0)}{\omega^2} = 0$.

Решение.

Уравнения поля для E -волны сводятся к одному уравнению для $B_y = B_y(z) \exp(-i\omega t + ik_x x)$:

$$\varepsilon(z) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{dB_y}{dz} \right] + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(z) - k_x^2 \right) B_y = 0. \quad (1)$$

При этом

$$E_x = -\frac{ic}{\omega \varepsilon(z)} \frac{dB_y}{dz}, \quad E_z = \frac{k_x c}{\omega \varepsilon(z)} B_y. \quad (2)$$

Затухающее в области $z \geq a$, где $\varepsilon(a) = 1 - \frac{\omega_p^2(a)}{\omega^2} < 0$, решение (1) имеет вид

$$B_y(z) = B_y(a) e^{-\kappa(a)z}, \quad \kappa^2 = k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon. \quad (3)$$

В области же $z \leq 0$ решение (1) состоит из падающей и отраженной волн, причем

$$E_{x\text{отр}}(0) = r E_{x\text{пад}}(0), \quad (4)$$

где r – коэффициент отражения, а $A = 1 - |r|^2$ – доля поглощаемой плазмой энергии поля.

Для решения (1) в области $0 \leq z \leq a$ учтем, что $\kappa(a)a \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1$. Тогда с точностью до членов $\sim \frac{a}{\lambda}$ найдем:

$$B_y(z) = C_1 \int_0^z dz' \varepsilon(z') + C_2 - \int_0^z dz' \varepsilon(z') \int_0^{z'} dz'' \frac{\kappa^2(z'')}{\varepsilon(z'')} \left[C_2 + C_1 \int_0^{z'''} dz''' \varepsilon(z''') \right], \quad (5)$$

$$E_x(z) = -\frac{ic}{\omega} C_1 \left[1 - \int_0^z dz' \frac{\kappa^2(z')}{\varepsilon(z')} \int_0^{z'} dz'' \varepsilon(z'') \right] + \frac{ic}{\omega} C_2 \int_0^z dz' \frac{\kappa^2(z')}{\varepsilon(z')},$$

где $\kappa^2(z) = k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(z)$. Поскольку в области $0 \leq z \leq a$ в точке $z = z_0$ $\varepsilon(z_0) = 0$, а $\kappa a \ll 1$, то с хорошей степенью точности

$$B_y \simeq C_2, \quad E_x(z) \simeq -\frac{ic}{\omega}C_1 + \frac{ic}{\omega}C_2 \int_0^z \frac{\kappa^2(z')}{\varepsilon(z')} dz'. \quad (6)$$

Отсюда

$$E_x(0) = -\frac{ic}{\omega}C_1, \quad E_x(a) = E_x(0) - \frac{c\pi}{\omega}\eta k_x^2 B_y(0), \quad (7)$$

$$B_y(a) = B_y(0) = 0,$$

$$\text{где } \eta^{-1} = \left| \frac{d\varepsilon(z_0)}{dz_0} \right| = \left| \frac{d \ln \varepsilon(z_0)}{dz_0} \right|.$$

С другой стороны, согласно (2) и (3)

$$E_x(a) = \frac{ic\kappa(a)}{\omega\varepsilon} B_y(a). \quad (8)$$

Из соотношений (6)–(8) находим поверхностный импеданс

$$Z = \frac{4\pi}{\omega} \left[i \frac{\kappa(a)}{\varepsilon} + \pi \eta k_x^2 \right], \quad E_x(0) = \frac{c}{4\pi} Z B_y(0), \quad (9)$$

а следовательно, и коэффициент отражения

$$r = -\frac{1 - \frac{\omega}{4\pi\kappa_0} Z}{1 + \frac{\omega}{4\pi\kappa_0} Z}, \quad (10)$$

где $\kappa_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 > 0$.

Поскольку поглощение, обусловленное неоднородностью плазмы, мало по параметру $a/\lambda \ll 1$, то $\text{Re } Z \ll \text{Im } Z$. Учитывая это, окончательно находим:

$$A = \frac{4\pi\eta k_x^2 \kappa_0 \varepsilon^2}{\kappa_0^2 \varepsilon^2 + \kappa^2(a)} \approx \frac{4\pi\eta k_x^2}{\kappa_0} \approx 4\pi \frac{\eta c}{\omega} \simeq 2 \frac{a}{\lambda} \ll 1. \quad (11)$$

Таким образом, только малая часть падающей поперечной волны преобразуется в резонансной точке в продольную волну и поглощается в плазме. Генерируемая в резонансной точке плазменная волна захватывает и ускоряет часть электронов, причем

$$\frac{n_{\text{уск}}}{n_p(z_0)} \approx 8\pi \left(\frac{a}{\lambda} \right)^3, \quad \varepsilon_{\text{уск}} \simeq \frac{e^2 E_{\text{пад}}^2}{2m\omega^2} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2. \quad (12)$$

Здесь $n_{\text{уск}}$ – число ускоренных электронов, а $E_{\text{пад}}$ – амплитуда падающей волны.

Задача 2. Исследовать проникновение квазистатического монохроматического поля с частотой ω в полуограниченную изотропную плазму с резкой границей. Отражение частиц от поверхности плазмы принять зеркальным.

Решение.

Считая поле нормальным к поверхности для области $x \geq 0$ (в плазме), можно записать

$$\frac{\partial D(x)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

или

$$D(x) = E_0, \quad (2)$$

где E_0 – напряженность электрического поля на поверхности плазмы.

С другой стороны, $D(x)$ можно определить, продолжив $D(x)$ в область $x < 0$ четным образом и произведя преобразование Фурье

$$D(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(x) e^{-ikx} dx, \quad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} D(k) e^{ikx} dk. \quad (3)$$

В результате из (2) получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(k) e^{ikx} dk = \frac{E_0}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} dk. \quad (4)$$

Отсюда, учитывая, что при зеркальном отражении частиц от поверхности плазмы для продольного поля

$$D(k) = \varepsilon^l(\omega, k) E(k), \quad (5)$$

получаем

$$E(k) = \frac{1}{\pi i} \frac{E_0}{k \varepsilon^l(\omega, k)} \quad (6)$$

или, подставляя это выражение в (3),

$$E(x) = \frac{E_0}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k \varepsilon^l(\omega, k)} dk. \quad (7)$$

Эта формула определяет проникновение квазистатического поля в полуограниченную изотропную плазму нормально к ее поверхности.

Интеграл (7) существенно определяется полюсами подынтегральной функции

$$k = 0, \quad \varepsilon^l(\omega, k) = 0. \quad (8)$$

На больших расстояниях от поверхности плазмы, $x \gg \frac{v_{0e}}{|\omega + i\nu_e|}$, где v_{0e} – скорость хаотического движения электронов, вклад в интеграл (7) дает только первый из этих полюсов. При этом

$$E(x) = \frac{E_0}{\varepsilon^l(\omega, 0)} = \frac{E_0}{1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)}}. \quad (9)$$

На малых же расстояниях от поверхности плазмы, $x \ll \frac{v_{0e}}{|\omega + i\nu_e|}$, существенными становятся также полюсы, определяемые нулями диэлектрической проницаемости $\varepsilon^l(\omega, k)$. Для чисто электронной плазмы ($\omega^2 \gg \omega_{Le}^2$) при условии $|\omega + i\nu_e| \ll \omega_{Le}$ эти полюсы находятся из уравнения

$$1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left(1 + i\alpha \frac{\omega}{|k|v_{0e}} \right) = 0, \quad (10)$$

где $\alpha = \sqrt{\pi/2}$, $r_{De}^2 = v_{Te}^2/\omega_{Le}^2$ – для невырожденной электронной плазмы и $\alpha = \pi/2$, $r_{De}^2 = v_{Fe}^2/3\omega_{Le}^2$ – для вырожденной. В результате имеем:

$$E(x) = E_0 e^{-x/r_{De}} \left(1 + i \frac{\alpha}{2} \frac{\omega x}{v_{0e}} \right). \quad (11)$$

Часто вводят понятие импеданса слоя d плазмы:

$$Z = \frac{\int_0^d E(x) dx}{\frac{1}{4\pi i} \omega E_0}. \quad (12)$$

В числителе фигурирует падение напряжения на слое d , а в знаменателе – ток, проходящий через этот слой. Величина $\text{Re } Z$ характеризует поглощение поля в слое d .

На больших расстояниях от поверхности плазмы импеданс характеризует объемное поглощение, причем согласно (9)

$$Z_{\text{об}} = \frac{4\pi i(\omega + i\nu_e)}{\omega(\omega + i\nu_e) - \omega_{Le}^2} d. \quad (13)$$

На малых расстояниях можно ввести понятие поверхностного импеданса, используя (11):

$$Z_{\text{пов}} = \frac{4\pi i}{\omega} \int_0^\infty dx e^{-x/r_{De}} \left(1 + i \frac{\alpha}{2} \frac{\omega x}{v_{0e}} \right) = \frac{4\pi i}{\omega} r_{De} \left(1 + i \frac{\alpha}{2} \frac{\omega r_{De}}{v_{0e}} \right). \quad (14)$$

Задача 3. Найти столкновительную поправку к декременту затухания высокочастотных поверхностных волн в электронной плазме.

Решение.

При учете столкновений электронов независимо от степени вырождения плазмы в дисперсионном уравнении (7.1.9) следует положить

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_e}{\omega} \right), \quad (1)$$

где $\nu_e = \nu_{ei}$ – для полностью ионизованной плазмы и $\nu_e = \nu_{en}$ – для слабоионизованной плазмы. В результате из (7.1.9) получаем ($\omega \rightarrow \omega + i\delta_{ст}$):

$$\omega^2 \approx \begin{cases} k_z^2 c^2 & \text{при } k_z^2 c^2 \ll \omega_{Le}^2, \\ \omega_{Le}^2/2 & \text{при } k_z^2 c^2 \gg \omega_{Le}^2, \end{cases} \quad (2)$$

$$\delta_{ст} = -\frac{\nu_e}{2} \begin{cases} k_z^2 c^2 / \omega_{Le}^2 & \text{при } k_z^2 c^2 \ll \omega_{Le}^2, \\ 1 & \text{при } k_z^2 c^2 \gg \omega_{Le}^2. \end{cases} \quad (3)$$

Предел $k_z^2 c^2 \gg \omega_{Le}^2$ соответствует продольным колебаниям, поэтому $\delta_{ст}$ в этом пределе совпадает с найденным в (7.1.12).

Задача 4. Исходя из общего выражения (7.2.10), вычислить поверхностный импеданс при нормальном падении электромагнитной волны на поверхность полуограниченной плазмы при $\nu_e, \omega \ll \omega_{Le}$ и связать его с коэффициентами отражения и поглощения волны.

Решение.

При нормальном падении волны $k_z = 0$ и поверхностный импеданс дается выражением

$$Z_{пл} = i8\omega \int_0^\infty \frac{dk}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)}. \quad (1)$$

Проникновение поля в плазму при этом определяется формулой

$$E_z(x) = \frac{i}{2\pi} \frac{B_y(0)\omega}{c} \int_0^\infty \frac{e^{ikx} dk}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k)}. \quad (2)$$

На больших расстояниях от поверхности плазмы, $x \gg \frac{v_{Te}}{|\omega + i\nu_e|}$, пространственной дисперсией в $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ можно пренебречь, записав:

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) \rightarrow \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)}. \quad (3)$$

В этом случае

$$E_z(x) \approx -\frac{B_y(0)}{4\sqrt{\varepsilon(\omega)}} e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}x} \equiv -\frac{B_y(0)}{4\sqrt{\varepsilon(\omega)}} e^{-x/\lambda_{ск}}. \quad (4)$$

Отсюда, в частности, видно, что при $\omega_{Le} \gg \omega \gg \nu_e$ поле в плазме затухает по экспоненциальному закону, причем длина затухания (глубина проникновения)

$$\lambda_{ск} = i\frac{c}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} \approx \frac{c}{\omega_{Le}}. \quad (5)$$

Если $\omega < \nu_e$, то следует ввести комплексную длину затухания

$$\lambda_{\text{ск}} = i \frac{c}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} = \frac{(i+1)c}{\sqrt{2\omega_{Le}^2 \omega / \nu_e}} = \frac{(i+1)c}{\sqrt{8\pi\sigma\omega}}, \quad (6)$$

где $\sigma = \omega_{Le}^2 / 4\pi\nu_e$ – статическая проводимость плазмы.

Отметим, что при подстановке (3) в (2) получаем для холодной плазмы:

$$Z_{\text{пл}} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \lambda_{\text{ск}} = -\frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}c}. \quad (7)$$

Наконец, при нормальном падении электромагнитной волны на поверхность полуграниченной плазмы с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ коэффициент отражения определяется модулем комплексной величины

$$r = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{1 + \sqrt{\varepsilon(\omega)}} = \frac{1 + \frac{c}{4\pi} Z_{\text{пл}}(\omega)}{1 - \frac{c}{4\pi} Z_{\text{пл}}(\omega)}. \quad (8)$$

На малых же расстояниях от поверхности плазмы, $x \ll \frac{v_{Te}}{|\omega + i\nu_e|}$, при вычислении интеграла (2) существенным становится учет сильной пространственной дисперсии $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$. При этом

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 + i\alpha \frac{\omega_{Le}^2}{\omega |k| v_{Te}}, \quad (9)$$

где $\alpha = \sqrt{\pi/2}$ – для невырожденной плазмы и $\alpha = 3\pi/4$ – для вырожденной. Подстановка (9) в (2) и (1) дает экспоненциальный спад поля в глубь плазмы, причем

$$E_z(x) \approx e^{-x/\lambda_{\text{ск}}},$$

$$\lambda_{\text{ск}} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{c^2 v_{Te}}{\alpha \omega \omega_{Le}^2} \right)^{1/3}, \quad (10)$$

$$Z_{\text{пл}} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \lambda_{\text{ск}}, \quad r = \frac{1 + \frac{c}{4\pi} Z_{\text{пл}}}{1 - \frac{c}{4\pi} Z_{\text{пл}}}.$$

Задача 5. Показать, что поверхность плазмы, удерживаемой магнитным полем с положительной кривизной силовых линий (т.е. с внешней нормалью, направленной от поверхности плазмы), неустойчива по отношению к низкочастотным желобковым возмущениям.

Решение.

Кривизну силовых линий магнитного поля будем учитывать введением центростремительного ускорения для частиц сорта α , равного $v_{T\alpha}^2/R$, где R – радиус кривизны

силовых линий магнитного поля, и направленного вдоль внешней нормали к поверхности плазмы. Это приводит к дрейфу частиц вдоль поверхности плазмы (ось Oy) со скоростью $u_\alpha = -\frac{v_{T\alpha}^2}{R\Omega_\alpha}$. В результате в дисперсионном уравнении (7.3.15) величина ω заменяется на $\omega - k_y u_\alpha$ и для желобковых мод колебаний в области низких частот $\omega - k_y u_\alpha \ll \Omega_\alpha$ получаем:

$$\left(2 + \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2}\right) + |k_y| \frac{\omega_{Li}^2 (v_s^2 + v_{Ti}^2)}{\Omega_i^2 R \omega^2} = 0, \quad (1)$$

где $v_s^2 = T_e/M$ – скорость ионного звука. Отсюда

$$\omega^2 = -\frac{|k_y| g_{\text{эфф}}}{1 + 2v_A^2/c^2}. \quad (2)$$

Здесь $g_{\text{эфф}}$ – эффективное гравитационное поле, учитывающее кривизну силовых линий удерживающего плазму магнитного поля.

Поскольку $\omega^2 < 0$, заключаем, что поверхность плазмы, удерживаемой магнитным полем с положительной кривизной силовых линий, всегда неустойчива. Неустойчивость эта аналогична исследованной в § 7.3 неустойчивости границы плазмы, удерживаемой магнитным полем, – обе они обусловлены поверхностными токами. В рассматриваемом случае, однако, поверхностный ток возникает из-за реального дрейфа частиц в криволинейном магнитном поле, в то время как в § 7.3 поверхностный ток в плазме возникал из-за учета конечного ларморовского радиуса частиц и не был связан с реальным их движением (см. также следующую задачу).

Задача 6. Обобщить полученные в § 7.3 результаты по неустойчивости границы плазмы, удерживаемой внешним магнитным полем, на случай вырожденных носителей.

Решение.

Все формулы (7.3.1)–(7.3.7), очевидно, не зависят от явного вида равновесной функции $F_{0\alpha}(\mathcal{E}, x)$. В случае фермиевского распределения меняются лишь окончательные уравнения (7.3.8) и (7.3.10) (для низкочастотных длинноволновых возмущений), что, в свою очередь, приводит к изменению граничных условий (7.3.11). Обобщение тривиально и мы здесь приведем лишь результаты вычислений. Вместо (7.3.10) получим уравнение

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{v_{F\alpha}^2} \left\{ \left[1 - \frac{\omega}{2k_z v_{F\alpha}} \operatorname{Im} \frac{\omega + k_z v_{F\alpha}}{\omega - k_z v_{F\alpha}} \right] \Phi - \frac{v_{F\alpha}^2}{4\Omega_\alpha^2} \left[\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{F\alpha}^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega}{2k_z v_{F\alpha}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{F\alpha}^2} \right) \operatorname{Im} \frac{\omega + k_z v_{F\alpha}}{\omega - k_z v_{F\alpha}} \right] \left(k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

справедливое как внутри плазмы ($x \geq 0$), так и вне ее ($x \leq 0$). Граничные же

условия, дополняющие (1), записываются в виде (ср. с (7.3.11))

$$\begin{aligned} \{\Phi\}_{x=0} &= 0, \\ \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{4\Omega_{\alpha}^2} \left[\frac{\omega^2}{k_z^2 v_{F\alpha}^2} + \frac{\omega}{2k_z v_{F\alpha}} \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 v_{F\alpha}^2} \right) \operatorname{Im} \frac{\omega + k_z v_{F\alpha}}{\omega - k_z v_{F\alpha}} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - k_y \frac{\Omega_{\alpha}}{\omega} \Phi \right) \right\}_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение сформулированной задачи полностью аналогично проведенному в § 7.3. В области частот $k_z v_{Fi} \ll \omega \ll k_z v_{Fe}$ оно выглядит следующим образом ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$, ср. с (7.3.19)):

$$\omega^2 = k_y^2 v_s^2, \quad \delta = \frac{\pi \omega^2}{|k_z| v_{Fe}}, \quad (3)$$

причем $v_s^2 = \frac{m}{3M} v_{Fe}^2$.

ТЕМА VIII

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА
ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННОЙ
ПЛАЗМЕННОЙ СРЕДЫ**

**§ 8.1. Линейные электромагнитные волны в плоском слое
изотропной плазменной среды в условиях зеркального
отражения носителей от его границ**

В этом разделе мы изучим линейные волны в полностью ограниченной плазменной среде, причем как и выше рассмотрим два предельных случая граничных условий: а) когда плазма удерживается твердой гладкой поверхностью и носители заряда отражаются от этой поверхности зеркально и б) когда плазма удерживается внешним магнитным полем большой, но конечной напряженности. Рассмотрение начнем со случая плоского слоя плазменной среды, в котором плотность носителей отлична от нуля в области $0 \leq x \leq a$ (см. рис. 8.1), причем от ограничивающих поверхностей $x = 0, a$ носители заряда отражаются зеркально.

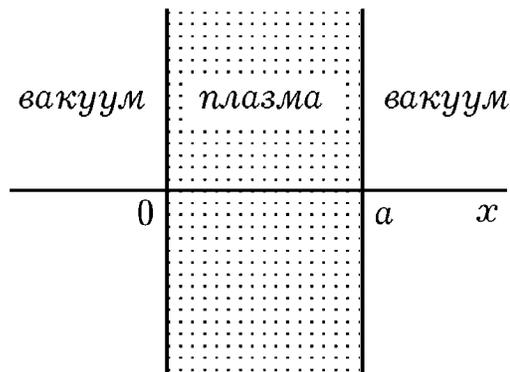


Рис. 8.1

В отличие от предшествующего раздела рассмотрение начнем сразу же с учетом теплового движения носителей, т.е. будем исходить из линеаризованного кинетического уравнения Власова

$$-i\omega\delta f + ik_z v_z \delta f + i\frac{\pi n}{a} v_x \delta f + e\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (8.1.1)$$

Здесь f_0 – равновесное распределение Максвелла либо Ферми, причем учитывая геометрию задачи, решение ищем в виде

$$\delta f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta f_n e^{-i\omega t + ik_z z + i\frac{\pi n}{a} x}, \quad (8.1.2)$$

где a – толщина плазменного слоя. Естественно, в таком же виде ищутся и решения для компонент полей в уравнениях поля. В результате эти уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} i\frac{\pi n}{a} E_z - ik_z E_x - i\frac{\omega}{c} B_y &= 0, \\ ik_z B_y - i\frac{\omega}{c} E_x + i\frac{4\pi}{c} j_x &= 0, \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

$$i\frac{\pi n}{a} B_y + \frac{2}{a} \left[B_y(a) e^{-i\pi n} - B_y(0) \right] + i\frac{\omega}{c} E_x - i\frac{4\pi}{c} j_z = 0.$$

Здесь $B_y(0)$ и $B_y(a)$ – значения $B_y(x)$ на границах слоя, а j_x и j_z , также как и E_x , E_z и B_y – коэффициенты разложения соответствующих величин в ряд Фурье. В случае изотропной плазмы

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \left[\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \sigma^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \sigma^l(\omega, k) \right] E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (8.1.4)$$

где $\sigma^{l,tr}(\omega, k)$ – известные нам продольная и поперечная проводимости неограниченной однородной плазменной среды, в которых, однако, следует полагать $\mathbf{k} = \left(\frac{\pi n}{a}, 0, k_z \right)$.

Уравнения (8.1.3) справедливы как внутри слоя $|x| \leq a$, так и вне слоя $x \leq 0$ и $x \geq a$, где $\mathbf{j} = 0$. Поэтому мы определяем из этой алгебраической системы величину $B_y(\omega, k)$ и, используя обратное преобразование Фурье, находим $B_y(\omega, k_z, x)$ как внутри, так и вне плазменного слоя. Далее, используя непрерывность функции $B_y(\omega, k_z, x)$ на границах $x = 0, a$, сшиваем эти три функции между собой. В результате получаем алгебраическую систему уравнений, условие разрешимости

которой представляет собой искомое дисперсионное уравнение линейных электромагнитных волн в плазменном слое, затухающих вне слоя (аналог поверхностных волн, но по отношению ко всему слою):

$$\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} - \frac{2}{a} \sum'_{n \geq 0} G_n \pm \frac{2}{a} \sum'_{n \geq 0} e^{in\pi} G_n = 0. \quad (8.1.5)$$

Здесь штрих над знаком суммирования означает, что слагаемое с $n = 0$ должно домножаться на величину $1/2$. Два знака соответствуют двум поверхностям и привязанным к ним двум ветвям колебаний. Кроме того, введено следующее обозначение:

$$G_n = \frac{1}{k^2} \left(\frac{k_z^2}{\varepsilon^l(\omega, k)} - \frac{\omega^2 \pi^2 n^2 / c^2}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)} \right), \quad (8.1.6)$$

где $\mathbf{k} = \left(\frac{\pi n}{a}, 0, k_z \right)$, а поэтому $k^2 = k_z^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}$.

В дальнейшем для простоты мы ограничимся рассмотрением медленных волн, а поэтому в (8.1.5) перейдем к пределу $c \rightarrow \infty$. В результате получаем дисперсионное уравнение для продольных электростатических или потенциальных волн в плоском слое плазменной среды:

$$1 + \frac{2}{a|k_z|} \sum'_{n \geq 0} [1 \pm (-1)^n] \frac{k_z^2}{k^2 \varepsilon^l(\omega, k)} = 0. \quad (8.1.7)$$

Двум знакам в этом уравнении соответствуют четные (знак "+") и нечетные (знак "-") моды колебаний.

Прежде всего отметим, что в пределе достаточно толстого слоя, когда $|k_z|a \gg 1$, т.е. длина волны вдоль слоя намного меньше толщины слоя, в уравнениях (8.1.5) и (8.1.7) от суммирования можно перейти к интегрированию, считая $a \rightarrow \infty$ и вводя $dk_x = \frac{\pi \Delta n}{a}$, где $\Delta n = 1$. В результате из (8.1.5) и (8.1.7), соответственно, получим уравнения (7.2.10) и (7.2.11), исследованные в предыдущем разделе как уравнения для поверхностных волн полуограниченной плазменной среде.

Поэтому здесь мы рассмотрим обратный предел, когда $|k_z|a \ll 1$, причем основное внимание будем уделять анализу спектров продольных волн, описываемых уравнением (8.1.7). Начнем анализ с области высоких частот, в которой пространственной дисперсией можно пренебречь, считая

$$\varepsilon^l(\omega, k) = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)}. \quad (8.1.8)$$

Подставим (8.1.8) в уравнение (8.1.7) и учтем следующие математические соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi^- &= \sum'_{n \geq 0} \frac{1 - (-1)^n}{n^2 + \eta^2} = \\ &= \frac{\pi}{2\eta} [\coth \pi\eta - \cosh \pi\eta] = \begin{cases} \frac{\pi^2}{2}, & \eta \ll 1, \\ \frac{\pi}{2\eta}, & \eta \gg 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (8.1.9a)$$

$$\begin{aligned} \varphi^+ &= \sum'_{n \geq 0} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 + \eta^2} = \\ &= \frac{\pi}{2\eta} [\coth \pi\eta + \cosh \pi\eta] + \frac{1}{\eta^2} = \begin{cases} \frac{2}{\eta^2}, & \eta \ll 1, \\ \frac{\pi}{2\eta}, & \eta \gg 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.1.9б)$$

В результате из уравнения (8.1.7) получаем:

$$\varepsilon(\omega) + \frac{2}{a|k_z|} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)} + \frac{2}{a|k_z|} = 0. \quad (8.1.10)$$

Отсюда находим следующий спектр высокочастотных продольных колебаний в тонком слое плазменной среды:

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Le}^2 |k_z| a}{2}, \quad \delta = -\frac{\nu_e}{2} \ll \omega, \quad (8.1.11)$$

$$\omega = -i \frac{\omega_{Le}^2}{2\nu_e} |k_z| a = -2\pi\sigma |k_z| a \ll \nu_e,$$

где $\sigma = \frac{\omega_{Le}^2}{4\pi\nu_e}$ – низкочастотная проводимость плазмы. Верхнее из этих выражений соответствует так называемому спектру ”глубокой воды” в тонком плазменном слое (см. Л.Ландау и Е.Лифшиц ”Механика сплошных сред”, Москва, 1954, или ”Гидродинамика”, Москва, 1980), нижнее описывает так называемую максвелловскую релаксацию неравновесного заряда легких носителей (электронов) в таком слое. Видно, что полученные спектры существенным образом зависят от толщины слоя a .

Формулы (8.1.11) пригодны как для невырожденной, так и для вырожденной плазмы, единственным ограничением является малость тепловых скоростей по сравнению с фазовыми скоростями волн, т.е.

$$\omega \gg k_z v_{Te}, k_z v_{Fe}.$$

Рассмотрим теперь волны в тонком плазменном слое в условиях сильной пространственной дисперсии, соответствующие области частот ионного звука, т.е. $k_z v_{0i} \ll \omega \ll k_z v_{0e}$, где $v_{0e,i}$ – скорость хаотического движения носителей, $v_{0e,i} = v_{Te,i}$ – в случае максвелловского распределения, либо $v_{0e,i} = v_{Fe,i}$ – в случае распределения Ферми. В этой области частот

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_i}{\omega}\right) + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left(1 + i \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} \\ \frac{\pi \omega}{k v_{Fe}} \end{array} \right. \right). \quad (8.1.12)$$

Верхнее выражение для мнимой части во втором слагаемом относится к невырожденной плазме, причем $r_{De}^2 = v_{Te}^2 / \omega_{Le}^2$, а нижнее, соответственно, к вырожденной, причем $r_{De}^2 = \frac{v_{Fe}^2}{3\omega_{Le}^2}$. Подставляя (8.1.12) в уравнение (8.1.7), получим явный вид дисперсионного уравнения. Как и выше, рассмотрим волны в тонком слое, а поэтому примем $a|k_z| \ll 1$, но $a^2 \gg r_{De}^2$ (что реально всегда выполняется). Используя формулы (8.1.9) из уравнения (8.1.7) получим:

$$\frac{2}{a|k_z|} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_i}{\omega}\right) \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left(1 + i \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \\ \frac{\pi \omega}{|k_z| v_{Fe}} \end{array} \right. \right) = 0. \quad (8.1.13)$$

Отсюда находим следующий спектр ионно-звуковых волн в тонком слое плазмы ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{\frac{2}{a|k_z|} + \frac{1}{k_z^2 r_{De}^2}}, \quad \delta = -\frac{\nu_i}{2} - \frac{\omega^2}{k_z^2 v_s^2} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}}, \\ \frac{\pi \omega}{|k_z| v_{Fe}}, \end{array} \right. \quad (8.1.14)$$

где $v_s = \sqrt{r_{De}^2 \omega_{Li}^2}$ – скорость ионного звука в среде. Здесь также мы видим зависимость спектра от толщины слоя a , которая проявляется в условиях $a|k_z| \ll k_z^2 r_{De}^2$, т.е. в коротковолновой части спектра, принимающего вид спектра ”глубокой воды” для ионной компоненты.

В заключение данного параграфа заметим, что нетрудно обобщить полученные выше результаты и на случай магнитоактивной плазменной среды с зеркальным отражением носителей от поверхности. В частности, уравнение (8.1.7), описывающее продольные волны ($c \rightarrow \infty$, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$), сохраняет свой вид, если под $\varepsilon^l(\omega, k)$ понимать $\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, где $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ – уже известный нам тензор диэлектрической проницаемости неограниченной плазменной среды. В частности, в отсутствие пространственной дисперсии в (8.1.7) следует k_z^2 заменить на $k_{\parallel}^2 = k_z^2 + k_y^2$ (поле $\mathbf{B}_0 \parallel 0z$), а

$$\varepsilon(\omega) = \left(k_y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \right) \varepsilon_{\perp}(\omega) + k_z^2 \varepsilon_{\parallel}(\omega), \quad (8.1.15)$$

где $\varepsilon_{\perp}(\omega)$ и $\varepsilon_{\parallel}(\omega)$ – известные поперечная и продольная компоненты тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазменной среды.

Из выражения (8.1.15) сразу же видна несовершенство модели зеркального отражения носителей от поверхности плазменной среды. Именно, уравнение (8.1.7) при подстановке (8.1.15) вместо $\varepsilon^l(\omega, k)$ оказывается четным по отношению к k_y , что свидетельствует об отсутствии однонаправленных (невзаимных) волн в такой среде. Из предыдущего раздела мы знаем, что в замагниченной полуограниченной плазме при $k_y \neq 0$ такие волны, локализованные вблизи поверхностей, обязательно должны существовать. В следующем параграфе будет показано, что с уменьшением толщины слоя a невзаимность таких волн ослабевает, но принципиально не пропадает.

§ 8.2. Электромагнитные колебания плоского слоя плазменной среды, удерживаемой внешним магнитным полем

Весь вывод уравнения для потенциала, проведенный в § 7.4 сохраняет силу и в рассматриваемом случае. Поэтому мы здесь выпишем

уравнение (7.4.10) для невырожденной плазмы

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \left\{ \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) + \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} \frac{\partial^0}{\partial x} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right] \Phi + \right. \\ \left. + \frac{v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \left(k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} \frac{\partial^0}{\partial x} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

и граничные условия к нему, которые имеют вид (4.7.11), но уже на обеих границах слоя:

$$\begin{aligned} \{\Phi\}_{x=0,a} = 0, \\ \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\Omega_{\alpha}}{\omega} k_y \Phi \right) \right\}_{x=0,a} = 0. \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

Теперь мы можем записать решения (8.2.1) вне плазменного слоя

$$\Phi = \begin{cases} C_1 \exp \left(-x \sqrt{k_y^2 + k_z^2} \right), & x \geq 0, \\ C_2 \exp \left(x \sqrt{k_y^2 + k_z^2} \right), & x \leq 0 \end{cases} \quad (8.2.3)$$

и внутри слоя

$$\Phi = C_3 \exp(\kappa x) + C_4 \exp(-\kappa x), \quad (8.2.4)$$

где

$$\kappa^2 = k_y^2 + \frac{k_z^2 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right]}{1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right)}. \quad (8.2.5)$$

Подставляя решения (8.2.3) и (8.2.4) в граничные условия (8.2.2), получаем дисперсионное уравнение для продольных поверхностных колебаний плазменного слоя, удерживаемого внешним сильным магнитным полем:

$$\left[(1 + \beta)^2 \kappa^2 + k_y^2 k_z^2 - \gamma^2 \right] \tanh(\kappa a) + 2\kappa(1 + \beta) \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = 0. \quad (8.2.6)$$

Здесь введены обозначения

$$\beta = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right), \quad \gamma = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} k_y J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right). \quad (8.2.7)$$

В пределе $\kappa a \gg 1$ уравнение (8.2.6) переходит в два уравнения:

$$(1 + \beta)\kappa + \sqrt{k_y^2 + k_z^2} \pm \gamma = 0, \quad (8.2.8)$$

описывающие независимые поверхностные волны для толстого слоя плазмы (по существу, полуограниченной плазмы). Они были подробно исследованы в предыдущем разделе. Главное, что там отмечалось, это наличие однонаправленных поверхностных волн и неустойчивость поверхностных звуковых волн при магнитном удержании плазмы.

Рассмотрим теперь обратный предел тонкого плазменного слоя, считая $\kappa \ll 1$. Уравнение (8.2.6) в низшем приближении по этому параметру сводится к виду

$$(1 + \beta)^2 \kappa^2 + k_y^2 + k_z^2 - \gamma^2 + \frac{2}{a}(1 + \beta)\sqrt{k_y^2 + k_z^2} \pm \gamma = 0. \quad (8.2.9)$$

Из этого уравнения сразу же видно, что в рассматриваемом приближении невзаимность, обеспечивающая существование однонаправленных волн, отсутствует. Это результат слияния двух поверхностных волн на противоположных границах слоя в одну. Естественно, в следующем порядке по параметру κa слабая невзаимность вновь появляется.

Решение уравнения (8.2.9) в условиях $\omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$ (что практически всегда имеет место в сильном магнитном поле) записывается в виде

$$\omega^2 = \frac{k_y^2 v_s^2}{1 + \frac{2|k_y|v_s^2}{a\omega_{Li}^2}} \left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z|v_{Te}} \right). \quad (8.2.10)$$

Отсюда видно, что колебания неустойчивы, причем сильная зависимость от толщины слоя проявляется в коротковолновой области спектра, когда он принимает характер спектра "глубокой воды" ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2 |k_y| a}{2}, \quad \delta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2}{|k_z| v_{Te}}.$$

Полученные результаты легко обобщаются на случай вырожденной плазмы. С этой целью мы вновь воспользуемся уравнением (1) задачи 6 предыдущего раздела, дополнив его граничными условиями

на двух поверхностях $x = 0, a$:

$$\Delta\Phi = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{v_{F\alpha}^2} \left\{ \left[1 - \frac{\omega}{2k_z v_{F\alpha}} \ln \frac{\omega + k_z v_{F\alpha}}{\omega - k_z v_{F\alpha}} \right] \Phi - \frac{v_{F\alpha}^2}{4\Omega_{\alpha}^2} \left[\frac{\omega^2}{k_z^2 v_{F\alpha}^2} + \right. \right. \quad (8.2.11)$$

$$\left. \left. + \frac{\omega}{2k_z v_{F\alpha}} \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 v_{F\alpha}^2} \right) \ln \frac{\omega + k_z v_{F\alpha}}{\omega - k_z v_{F\alpha}} \right] \left(k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi \right\},$$

$$\{\Phi\}_{x=0,a} = 0,$$

$$\left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{4\Omega_{\alpha}^2} \left[\frac{\omega^2}{k_z^2 v_{F\alpha}^2} + \frac{\omega}{2k_z v_{F\alpha}} \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 v_{F\alpha}^2} \right) \times \right. \right. \quad (8.2.12)$$

$$\left. \left. \times \ln \frac{\omega + k_z v_{F\alpha}}{\omega - k_z v_{F\alpha}} \right] \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - k_y \frac{\Omega_{\alpha}}{\omega} \Phi \right) \right\}_{x=0,a} = 0.$$

Дальнейшие вычисления полностью подобны проведенным выше и приводят к спектру (ср. (8.2.10))

$$\omega^2 = \frac{k_y^2 v_s^2}{1 + \frac{2|k_y|v_s^2}{a\omega_{Li}^2}} \left(1 + i \frac{\pi\omega}{|k_z|v_{Fe}} \right). \quad (8.2.13)$$

Естественно, подобен проведенному выше и анализ этого спектра.

Таким образом, в плазменном слое, удерживаемом магнитным полем, проявляются два качественно новых явления, не описываемые моделью зеркального отражения носителей от границ: а) наличие однонаправленных волн, которые с уменьшением отношения $|k_z|a \simeq \simeq \frac{a}{\lambda_{\parallel}} \ll 1$ в первом приближении по этому параметру вообще отсутствуют, и б) появление зарядов (и токов) на поверхности плазмы, приводящих к неустойчивости ее границы. Наличие однонаправленных волн и неустойчивости границы присущи и полуограниченным плазменным средам при магнитном удержании плазмы. Более того, эти два явления тесно связаны: именно, однонаправлены волны с $k_y \neq 0$ и они же неустойчивы и возбуждаются благодаря появлению на границе поверхностного тока вдоль оси $0y$. Такой ток возникает только, если носители замагничены ($\Omega_{\alpha} > \nu_{\alpha}$) и магнитное давление превосходит газокINETическое ($B_0^2 > 8\pi P_0$). В реальном эксперименте

это явление должно проявляться в виде надтеплого микроволнового ($c \omega \gg \nu_i$) излучения, сильно анизотропного поперек поля и параллельного поверхности плазмы. Эксперименты с импульсными мегагауссными магнитными полями действительно указывают на существование такого эффекта.

§ 8.3. Поверхностные волны в тонком слое пьезополупроводника

Для анализа электромагнитных колебаний в тонком слое пьезополупроводника при зеркальном отражении носителей от ограничивающих его поверхностей мы, естественно, можем воспользоваться системой уравнений (7.5.8) и (7.5.10), дополнив ее граничными условиями (7.5.9) и требованием непрерывности потенциала поля на границах $x = 0, a$. Опуская выкладки, полностью аналогичные проведенным в §§ 7.5 и 8.1, окончательно получим следующее уравнение для продольных колебаний слоя полупроводника с изотропным распределением носителей по скоростям (ср. с (7.5.11) и (8.1.7)):

$$1 + \frac{2}{a|k_z|} \sum'_{n \geq 0} [1 \pm (-1)^n] \frac{k_z^2}{k^2 \varepsilon^l(\omega, k) - \frac{4\pi k^4 \beta_1^2}{\omega^2 \rho^m - \lambda_{tr} k^2}}, \quad (8.3.1)$$

где $\mathbf{k} = \left(\frac{\pi n}{a}, 0, k_z\right)$, $\mathbf{V}_0 \parallel 0z$.

Обобщение уравнения (8.3.1) на магнитоактивную плазму является очевидным и состоит в следующих заменах $k_z^2 \rightarrow k_y^2 + k_z^2$, $k^2 \rightarrow k_y^2 + k_z^2 + \pi^2 n^2/a^2$, $\varepsilon^l(\omega, k) \rightarrow \varepsilon(\omega, k) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, k)$, где $\varepsilon(\omega, k)$ – квазипродольная компонента диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы носителей заряда.

В пределе $a|k_z| \gg 1$ в уравнении (8.3.1) от суммирования можно перейти к интегрированию, в результате чего получим уравнение (7.5.11), проанализированное в предыдущем параграфе. Поэтому здесь рассмотрим противоположный предел $a|k_z| \ll 1$ и, как и выше, ограничимся средой без пространственной дисперсии, полагая

$$\left[\left(\varepsilon(\omega) + \frac{2}{a|k_z|} \right) \right] (\omega^2 - k_z^2 v_{tr}^2) = \frac{4\pi \beta_1^2 k_z^2}{\rho^m}. \quad (8.3.2)$$

Вновь мы имеем два связанных колебательных контура: первая скобка в левой части соответствует продольным колебаниям тонкого слоя плазмы носителей, а вторая – объемному поперечному звуку в кристаллической решетке пьезополупроводника. Связь осуществляется малой правой частью, содержащей пьезоэффект. В рассматриваемом случае, когда пространственной дисперсией пренебрегается,

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)} \simeq 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - i\frac{\nu_e}{\omega}\right). \quad (8.3.3)$$

Пренебрегая далее столкновениями, находим максимальную поправку δ_{max} к частотам колебаний обеих колебательных систем, полагая

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_{Le}^2 |k_z| a}{2}} + \delta_{max} = |k_z| v_{tr} + \delta_{max}. \quad (8.3.4)$$

В результате для δ_{max} находим

$$\delta_{max}^2 = \frac{\pi \beta_1^2 |k_z|^3 a}{\rho^m}. \quad (8.3.5)$$

Без особого труда анализируется уравнение (8.3.1) и в области частот ионного звука при $kv_{0i} \ll \omega \ll kv_{0e}$. В этом случае (см. (8.1.12)):

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 - i\frac{\nu_i}{\omega}\right) + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left(1 + \begin{matrix} i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} \\ i\frac{\pi\omega}{kv_{Fe}} \end{matrix}\right) \quad (8.3.6)$$

Подставляя это выражение в (8.3.1) и пренебрегая как и выше диссипацией (она учитывается в одной из задач к этому разделу), получаем искомое уравнение для связанных ионно-звуковых и упругих колебаний в пьезополупроводнике:

$$\left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{1}{k_z^2 r_{De}^2} + \frac{2}{a|k_z|}\right) (\omega^2 - k_z^2 v_{tr}^2) = \frac{4\pi\beta_1^2 k_z^2}{\rho^m}. \quad (8.3.7)$$

Здесь также имеем связанные колебания и поэтому решение этого уравнения можно искать в виде

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_{Li}^2}{2} + \frac{1}{a|k_z|} + \frac{1}{k_z^2 r_{De}^2}} + \delta_{max} = |k_z| v_{tr} + \delta_{max}. \quad (8.3.8)$$

Для максимальной раздвижки спектров при этом имеем

$$\delta_{max}^2 = \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} \frac{2\pi\beta_1^2 k_z^2}{\rho^m}. \quad (8.3.9)$$

Наконец, отметим, что все полученные в этом параграфе результаты пригодны как для невырожденной, так и вырожденной плазмы носителей (при правильном понимании величины r_{De}).

§ 8.4. Плазменный волновод

В предыдущих параграфах мы начали изучать электромагнитные колебания неоднородной плазмы в пределе $\lambda \gg L$, т.е. в случае, когда существует резкая граница (поверхность) раздела, и обнаружили новый тип колебаний – поверхностные волны, затухающие при удалении от поверхности и бегущие вдоль нее. В плазме, которая имеет изотропную функцию распределения по скоростям, т.е. в которой нет внешних электрических и магнитных полей, поверхностные волны, которые связаны с анизотропией самой среды, в общем случае не являются ни чисто продольными, ни чисто поперечными. В области малых фазовых скоростей они с хорошей степенью точности являются продольными, в области же $v_{Te} \ll \omega/k_z \leq c$ они электронные и имеют отличную от нуля поперечную составляющую. Наибольший интерес представляет область малых k_z , так как именно в этой области поверхностные волны имеют фазовую скорость $v_\phi \rightarrow c$, сильно непотенциальны и для них отличен от нуля вектор Пойнтинга. Такие волны хорошо излучаются из плазмы, что и придает им особый интерес. В связи с этим следует рассмотреть вопрос о существовании поверхностных волн в реальной геометрии, близкой к эксперименту.

Итак, пусть плазменный цилиндр с радиусом r_0 помещен в металлический волновод с радиусом $R \geq r_0$ (см. рис. 8.2). Если $R = r_0$, то говорят, что плазма полностью заполняет металлический волновод; если $R \rightarrow \infty$ (т.е. $r_0 \ll R$), то имеем плазменный волновод со свободной поверхностью. Эти два случая и рассматриваются ниже. Вся система считается помещенной во внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_0 \parallel 0z$ (оси волновода), удерживающее плазму от расплывания. Условия, накладываемые на величину \mathbf{B}_0 , будут обсуждены ниже. В дальнейшем

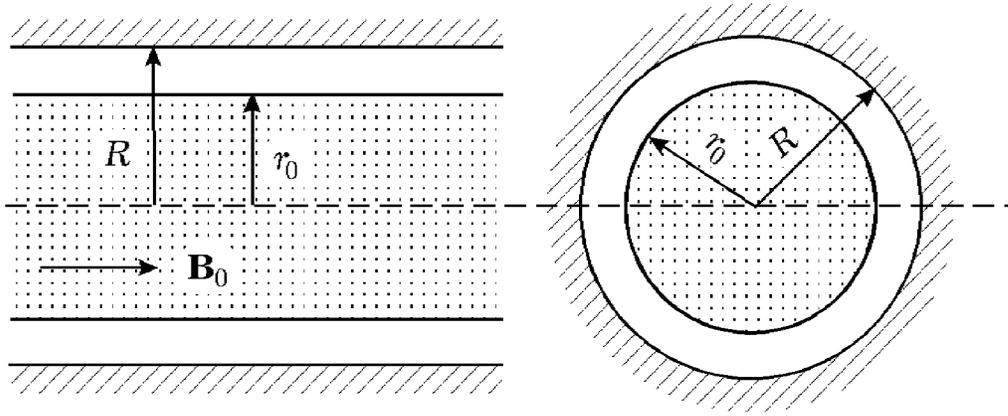


Рис. 8.2

будем интересоваться волнами, фазовые скорости которых намного больше тепловых скоростей частиц, вследствие чего тепловое движение носителей заряда можно не учитывать. Мы уже знаем, что волны в таких условиях можно анализировать, используя простейшую модель – модель независимых частиц или модель холодной плазмы:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0, \quad (8.4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\}.$$

Будем считать, что в равновесном состоянии $n = n_0$ при $r \leq r_0$, а $\mathbf{v}_0 = 0$, и решим эти уравнения в цилиндрической системе координат.

Как обычно, считаем далее, что все неравновесные величины зависят от времени и координат в виде

$$A = A(r) \exp(-i\omega t + il\varphi + ik_z z). \quad (8.4.2)$$

Подставляя такую зависимость в (8.4.1), получаем систему алгебраических уравнений, из которой находим направленную скорость, вызванную действием электрического поля. После этого можно записать

$$j_i = en_0 v_i = \sigma_{ij} E_j, \quad (8.4.3)$$

а отсюда уже нетрудно определить тензор диэлектрической прони-

цаемости в цилиндрической системе координат

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\varphi} & 0 \\ \varepsilon_{\varphi r} & \varepsilon_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (8.4.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2(r)}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \\ \varepsilon_{r\varphi} = -\varepsilon_{\varphi r} = ig &= -i \frac{\omega_{Le}^2(r)\Omega_e}{(\omega^2 - \Omega_e^2)\omega}, \\ \varepsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2(r)}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

Зная диэлектрическую проницаемость, мы можем подставить ее в уравнения поля, которые тоже следует записать в цилиндрической системе координат. С учетом (8.4.2) при этом получим:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad (8.4.6)$$

причем

$$D_i(\omega, k_z, l, r) = \varepsilon_{ij}(r) E_j(\omega, k_z, l, r),$$

поскольку в модели независимых частиц материальное уравнение является локальным.

Окончательно уравнения поля с учетом (8.4.4) и (8.4.5) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{l}{r} E_z - k_z E_\varphi &= \frac{\omega}{c} B_r, & \frac{l}{r} B_z - k_z B_\varphi &= -\frac{\omega}{c} (\varepsilon_{\perp} E_r + ig E_\varphi), \\ k_z E_r + i \frac{\partial E_z}{\partial r} &= \frac{\omega}{c} B_\varphi, & k_z B_r + i \frac{\partial B_z}{\partial r} &= -\frac{\omega}{c} (\varepsilon_{\perp} E_\varphi - ig E_r), \\ \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_\varphi + \frac{l}{r} E_r &= -\frac{\omega}{c} B_z, & \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\varphi + \frac{l}{r} B_r &= -\frac{\omega}{c} \varepsilon_{\parallel} E_z. \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

Эта система уравнений справедлива при любой степени неоднородности плазменной среды, т.е. она пригодна как для среды ($r \leq r_0$), так и для вакуума ($r_0 \leq r \leq R$). Поэтому граничные условия можно получить непосредственно из этих же уравнений путем их интегрирования по бесконечно тонкому переходному слою среда-вакуум. В

результате имеем

$$\{E_z\}_{r=r_0} = \{E_\varphi\}_{r=r_0} = \{B_z\}_{r=r_0} = \{B_\varphi\}_{r=r_0} = 0. \quad (8.4.8)$$

На поверхности металлического волновода должны выполняться естественные условия

$$E_z|_{r=R} = E_\varphi|_{r=R} = 0. \quad (8.4.9)$$

Итак, имеется система дифференциальных уравнений с граничными условиями. Из этой системы можно определить спектры собственных электромагнитных колебаний в плазменном волноводе в пределе холодной плазмы, когда фазовые скорости частиц намного превышают их тепловые скорости. Здесь мы рассмотрим два предельных случая: предел, когда $r_0 = R$, т.е. плазма полностью заполняет волновод и может удерживаться стенками волновода, при этом возможно равновесие плазмы и при $\mathbf{B}_0 = 0$, и случай, когда $R \rightarrow \infty$, т.е. плазменный цилиндр со свободной поверхностью, удерживаемой полем \mathbf{B}_0 .

Анализ задачи начнем с первого случая, когда можно считать, что внешнее магнитное поле отсутствует ($\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$), т.е. $\Omega_\alpha \rightarrow 0$ и плазма изотропна. В этом пределе для компонент поля E_z и B_z получаем два независимых уравнения второго порядка:

$$\varepsilon \left(\Delta E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon E_z \right) = 0, \quad \Delta B_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon B_z = 0, \quad (8.4.10)$$

причем

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij} \varepsilon(\omega) = \delta_{ij} \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right).$$

Все остальные компоненты поля выражаются через E_z и B_z , а именно:

$$\begin{aligned} E_r &= \kappa^{-2} \left(-ik_z \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega l}{c^2 r} B_z \right), \\ E_\varphi &= \kappa^{-2} \left(k_z \frac{l}{r} E_z + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \\ B_r &= -\kappa^{-2} \left(\frac{\omega l}{c^2 r} \varepsilon E_z + ik_z \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \\ B_\varphi &= -\kappa^{-2} \left(i \frac{\omega}{c^2} \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} - k_z \frac{l}{r} B_z \right), \end{aligned} \quad (8.4.11)$$

где

$$\kappa^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon. \quad (8.4.12)$$

Поскольку компоненты E_z и B_z не связаны друг с другом, можно рассмотреть два случая:

а) $E_z \neq 0, B_z = 0$. Такие волны называются волнами Е-типа, а иногда ТН-волнами, у них продольная составляющая магнитного поля равна нулю (трансверсальное или поперечное магнитное поле);

б) $E_z = 0, B_z \neq 0$. Такие волны называются волнами Н-типа, а иногда ТЕ-волнами; у них имеется трансверсальная (поперечная) составляющая электрического поля.

Рассмотрим волны Е-типа. Уравнение, описывающее эти волны,

$$\varepsilon \left(\Delta E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon E_z \right) = 0 \quad (8.4.13)$$

распадается на два уравнения. Первое из них,

$$\varepsilon(\omega) = 0, \quad (8.4.14)$$

соответствует чисто продольным колебаниям, которые в отсутствие внешнего магнитного поля всегда существуют в плазме. Их спектр дается формулой $\omega^2 = \omega_{Le}^2$, собственные функции $E_z(r)$ произвольны. Второе уравнение

$$\Delta E_z + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0, \quad (8.4.15)$$

решением которого является сумма функций Бесселя

$$E_z = C_1 J_l(i\kappa r) + C_2 N_l(i\kappa r), \quad (8.4.16)$$

соответствует волнам Е-типа в плазменном волноводе. Поскольку при $r \rightarrow 0, N_l \rightarrow \infty$, а поле E_z должно быть ограничено, то $C_2 = 0$.

Если плазма полностью заполняет металлический волновод, то на границе с металлом имеем $E_z(R) = 0$. Отсюда находим $i\kappa R = \mu_{ls}$ или $\kappa^2 = -\mu_{ls}/R^2 = -k_{\perp}^2$, а следовательно, дисперсионное уравнение волны Е-типа записывается в виде

$$k^2 = k_{\perp}^2 + k_z^2 = \frac{\mu_{ls}^2}{R^2} + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \right), \quad (8.4.17)$$

причем величина $k_{\perp}^2 = \mu_{ls}^2/R^2$ принимает дискретные значения. Таких поперечных мод имеется бесконечное число, соответствующее корням

функции Бесселя $J_l(\mu_{ls})$. Для каждой радиальной моды имеется своя критическая частота, при которой $k_z = 0$, а

$$\omega_{\text{кр}}^2 = \frac{\mu_{ls}^2 c^2}{R^2} + \omega_{Le}^2. \quad (8.4.18)$$

Распространение волны в волноводе с частотой $\omega < \omega_{\text{кр}}$ оказывается невозможным.

Для волн Н-типа имеем

$$B_z = B_{z0} J_l(i\kappa r). \quad (8.4.19)$$

Удовлетворив граничному условию $E_\varphi(R) = 0$, получаем

$$J_l'(\mu'_{ls}) = 0. \quad (8.4.20)$$

Отсюда следует, что спектр колебаний имеет такой же вид, как для волн Е-типа, но только с заменой $\mu_{ls} \rightarrow \mu'_{ls}$.

Спектры Е- и Н-волн в изотропном плазменном волноводе представлены на рис. 8.3.

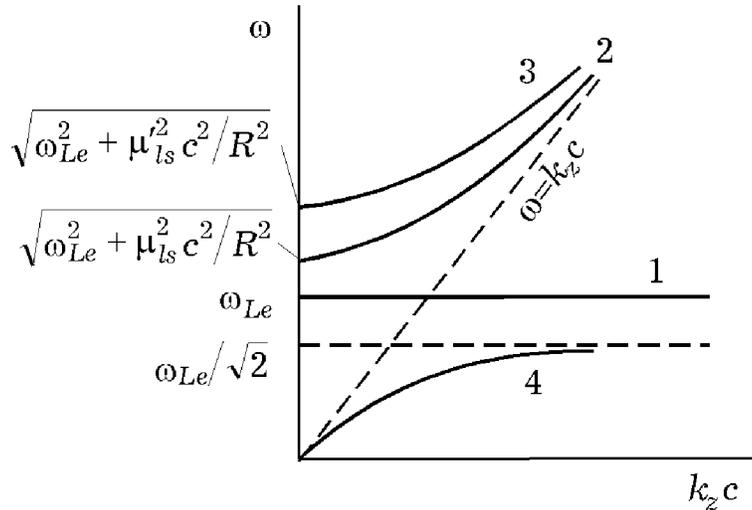


Рис. 8.3

Пусть теперь $r_0 \neq R$, т.е. плазменная среда не полностью заполняет волновод. Более того, будем считать, что $R \rightarrow \infty$, т.е. среда имеет свободную поверхность (границу). Тогда при решении системы уравнений (8.4.10) мы должны рассмотреть две области: область I, где

$r \leq r_0$, и область II, где $r_0 \leq r \leq R$. В области I решения уравнений поля для волны E-типа имеют тот же вид, что и выше:

$$E_{zI} = E_{zI0} I_l(\kappa_I r). \quad (8.4.21)$$

В области же II с учетом конечности полей при $r \rightarrow \infty$ имеем

$$E_{zII} = E_{zII0} K_l(\kappa_{II} r). \quad (8.4.22)$$

Здесь

$$\kappa_I^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon, \quad \kappa_{II}^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Удовлетворив граничным условиям (8.4.3) при $r = r_0$, получим дисперсионное уравнение для электромагнитных волн E-типа в плазменном цилиндре со свободной поверхностью. В общем случае оно имеет громоздкий вид, поэтому проанализируем его в двух предельных случаях: коротковолновом, $\kappa_{I,II} r_0 \gg 1$, и длинноволновом, $\kappa_{I,II} r \ll 1$. В коротковолновом пределе для симметричных мод колебаний с $l = 0$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{\kappa_{II}} + \frac{\varepsilon}{\kappa_I} = 0 \quad (8.4.23)$$

или

$$\sqrt{k_z^2 c^2 + \omega_{Le}^2 - \omega^2} + \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} = 0. \quad (8.4.24)$$

Это уравнение в точности совпадает с дисперсионным уравнением для поверхностных волн в полуограниченной плазме. Этого и следовало ожидать, так как в коротковолновом пределе геометрия поверхности плазменной среды не играет никакой роли. Из условий $\kappa_{I,II} r_0 \gg 1$ при этом, однако, следует, что в плазменном цилиндре такие коротковолновые поверхностные колебания существуют только в случае достаточно плотной среды, когда $\omega_{Le}^2 r_0^2 \gg c^2$, $k_z^2 r_0^2 \gg 1$.

В редкой же плазменной среде, в которой $\omega_{Le}^2 r_0^2 \ll c^2$, возможны только длинноволновые поверхностные колебания с $\kappa_{I,II} r_0 \ll 1$. Дисперсионное уравнение для аксиально симметричных мод ($l = 0$) таких колебаний имеет вид

$$\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) \ln r_0 \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} - \frac{2}{r_0^2 (k_z^2 - \omega^2/c^2)} = 0. \quad (8.4.25)$$

Отсюда следует, что длинноволновые поверхностные колебания, так же как и коротковолновые, существуют только в области частот $\omega < k_z c, \omega_{Le}$; при этом длинноволновые колебания близки к чисто потенциальным, а их спектр определяется соотношением

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 r_0^2}{2} \omega_{Le}^2 \ln \frac{1}{|k_z| r_0}. \quad (8.4.26)$$

В общем случае решение дисперсионного уравнения, т.е. спектр частот поверхностных волн, имеет вид, представленный на рис. 8.3, кривая 4. Заметим, что поверхностные волны могут быть только Е-типа (ТМ). Поверхностных волн Н-типа (ТЕ) нет.

При наличии внешнего магнитного поля анализ собственных колебаний плазменного волновода становится столь сложным, что в общем случае его удастся провести только численными методами. Аналитически исследовать можно только предел бесконечно сильного магнитного поля $\mathbf{B}_0 \rightarrow \infty$. В этом случае тензор $\varepsilon_{ij}(\omega)$ сильно упрощается; отличны от нуля только компоненты

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = 1, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}. \quad (8.4.27)$$

Уравнения поля для E_z и B_z при этом записываются в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} E_z - \kappa^2 \varepsilon E_z &= 0, & \kappa^2 &= k_z^2 - \omega^2/c^2, \\ \Delta_{\perp} B_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon B_z &= 0, & \Delta_{\perp} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (8.4.28)$$

причем поля E_{φ} , E_r , B_{φ} , B_z легко выражаются через E_z и B_z :

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{\kappa^2} \left(ik_z \frac{\partial E_z}{\partial r} + \omega \frac{l}{r} B_z \right), & B_r &= -\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{\omega l}{cr} E_z + ik_z \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \\ E_{\varphi} &= \frac{1}{\kappa^2} \left(k_z \frac{l}{r} E_z + \omega \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), & B_{\varphi} &= -\frac{1}{\kappa^2} \left(i \frac{\omega}{c} \frac{\partial E_z}{\partial r} - k_z \frac{l}{r} B_z \right). \end{aligned} \quad (8.4.29)$$

В пределе сильного магнитного поля не существует строго продольных колебаний, как это имело место в изотропном плазменном цилиндре. Более того, для волн Н-типа среда вообще не играет никакой роли и закон дисперсии для них такой же, как и для вакуумного волновода. Уравнение же для Е-волны принципиального изменения

не претерпело. Поэтому спектр объемных колебаний Е-типа в волноводе, полностью заполненном плазмой, находится аналогично тому, как это было сделано выше. Разница только в том, что нет плазменной объемной волны. Графически спектры объемных колебаний замагниченного плазменного волновода изображены на рис. 8.4.

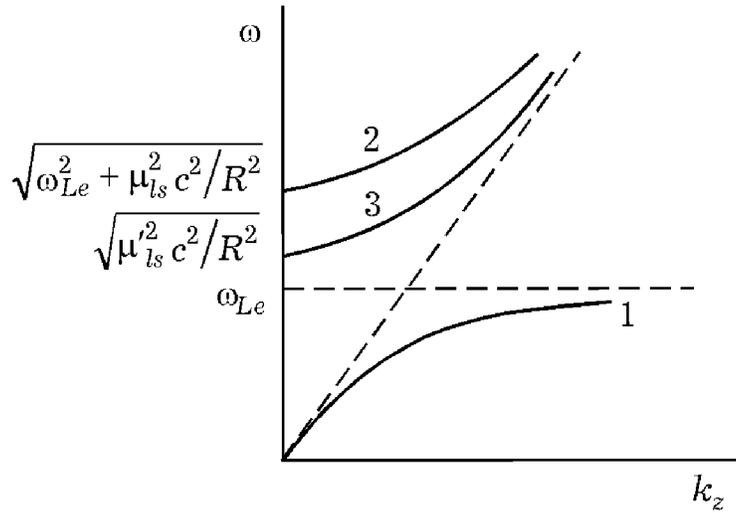


Рис. 8.4

В плазменном цилиндре со свободной поверхностью ($R \rightarrow \infty$) в сильном магнитном поле также возможны поверхностные волны, убывающие вне плазменного цилиндра. Легко показать, что в коротковолновом пределе поверхностные колебания в плазменном цилиндре в сильном магнитном поле существовать не могут. В длинноволновом же пределе $\kappa^2 r_0^2 \ll 1$, $\kappa^2 r_0^2 \varepsilon \ll 1$ уравнение, описывающее поверхностные колебания, имеет тот же самый вид, что и для плазменного цилиндра в отсутствие магнитного поля:

$$\varepsilon(\omega) \ln(\kappa r_0) - \frac{2}{\kappa^2 r_0^2} = 0, \quad (8.4.30)$$

поэтому его анализ проводится точно так же, как это сделано выше. Единственное отличие состоит в том, что в изотропном плазменном цилиндре поле E_z слабо затухает в направлении от поверхности цилиндра к его оси, в то время как в магнитоактивной плазме оно, наоборот, слабо нарастает, достигая максимума на оси волновода.

В заключение заметим, что проведенный в этом параграфе анализ электромагнитных волн в плазменном волноводе относился к пределу холодной плазменной среды, т.е. тепловым движением носителей пренебрегалось. Поэтому все сказанное выше справедливо при произвольном вырождении носителей заряда.

Задачи по теме VIII

Задача 1. Найти частоту собственных электростатических (потенциальных) колебаний плоского слоя холодной электронной плазмы толщиной $2d$, помещенной между обкладками плоского конденсатора (рис. 8.5). Электрическое поле колебаний считать нормальным к поверхности слоя. Расстояние между обкладками $2L$.

Решение.

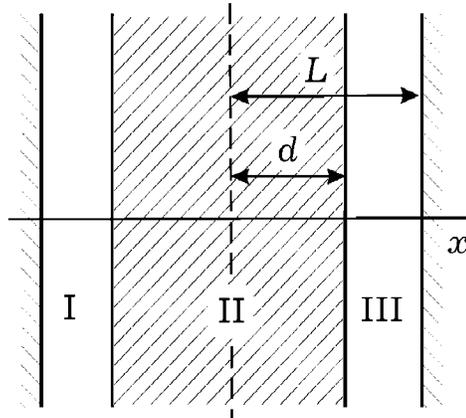


Рис. 8.5

Уравнение поля во всех трех областях имеет один и тот же вид:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

поэтому его решения запишем таким образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} a_1x + a_2 & \text{при } -L \leq x \leq d, \\ b_1x + b_2 & \text{при } |x| \leq d, \\ c_1x + c_2 & \text{при } d < x < L. \end{cases} \quad (2)$$

Подстановка этих решений в граничные условия

$$\begin{aligned}\Phi(-L) &= \Phi(+L) = 0, \\ \{\Phi\}_{x=-d} &= \{\Phi\}_{x=d} = 0, \\ \left\{ \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\}_{x=-d} &= \left\{ \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\}_{x=d} = 0,\end{aligned}\tag{3}$$

где $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2(x)}{\omega^2}$, причем $\omega_{Le}^2(x) \neq 0$ только при $|x| \leq d$, приводит к дисперсионному соотношению

$$\varepsilon + \frac{d}{L-d} = 0.\tag{4}$$

Отсюда находим спектр частот колебаний:

$$\omega^2 = \frac{L-d}{L} \omega_{Le}^2 < \omega_{Le}^2.\tag{5}$$

Это хорошо известный из эксперимента так называемый геометрический резонанс.

Задача 2. Исследовать уравнение (8.1.5) в плазменном слое без дисперсии в области частот, в которой $\varepsilon^{tr} = \varepsilon^l = \varepsilon(\omega) \gg 1$, и происходит скинирование поперечного электромагнитного поля.

Решение.

В изотропной плазменной среде без пространственной дисперсии

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)} \approx -\frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)}.\tag{1}$$

В этом случае скинирование поля имеет место в условиях

$$\omega_{Le}^2 \gg \omega^2 \gg \nu_e^2 \quad \text{либо} \quad \omega_{Le}^2 \gg \omega\nu_e \gg \omega^2.\tag{2}$$

Первая область соответствует бесстолкновительной плазме и скинирование обусловлено отрицательностью диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = -\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} < 0$ и $|\varepsilon| \gg 1$. Такое скинирование называют инерционным. Вторая же область частот соответствует обычному скин-эффекту в сильно диссипативной среде с $\varepsilon(\omega) \approx i\frac{\omega_{Le}^2}{\omega\nu_e}$ и $|\varepsilon| \gg 1$ (металл).

При подстановке (1) в уравнение (8.1.5) получаем:

$$\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \frac{2a \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right)}{\pi^2 \varepsilon(\omega)} \sum_{n \geq 0}' \frac{1 \pm (-1)^n}{n^2 + \frac{a^2}{\pi^2} \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right)} = 0.\tag{3}$$

Нас интересует только случай $\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right) a^2 \ll 1$, поскольку в противоположном пределе получаем уравнение для поверхностной волны в полуограниченной среде. Вместе с тем для скинирования непотенциального поля необходимо, чтобы $\varepsilon(\omega)|k_z|a \gg 1$. В этом пределе решения уравнения (3), которое для симметричных мод (четных n) приобретает вид

$$\varepsilon(\omega) \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2}} + \frac{2}{a|k_z|} = 0, \quad (4)$$

записываются в виде ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$):

$$\omega = |k_z|c \mp i\delta, \quad \delta = \begin{cases} \frac{4c^2\omega^2\nu_e}{a^2\omega_{Le}^4} & \text{при } \omega_{Le} \gg \omega \gg \nu_e, \\ \frac{4c^2\omega^2\nu_e^3}{a^2\omega_{Le}^6} & \text{при } \omega_{Le}^2 \gg \nu_e^2 \gg \omega^2. \end{cases} \quad (5)$$

Глубина проникновения поля в плазменный слой при этом равна:

$$\lambda_{ск} = \frac{1}{\text{Im } k_z} = + \frac{c}{|\delta|}, \quad (6)$$

где δ – дается формулой (5), причем верхнее выражение соответствует инерционному, а нижнее – диссипативному скин-эффекту. Из (5) и (6) следует, что поперечное поле полностью проникает в слой, поскольку $a^2 \ll c^2/\omega_{Le}^2$ – в случае инерционного скин-эффекта, и $a^2 \ll \frac{c^2\omega\nu_e}{\omega_{Le}^2}$ – в случае нормального скин-эффекта.

Для несимметричных мод (нечетные n) из уравнения (8.1.5) в пределе $\left|k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right| a \ll 1$ находим уравнение

$$\varepsilon(\omega) \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c^2}} + \frac{\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right) a^2}{a|k_z|} = 0, \quad (7)$$

решение которого ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$) имеет вид (ср. с (5)):

$$\omega = |k_z|c - i\delta, \quad \delta = \begin{cases} \frac{a^2\omega^6}{c^2\omega_{Le}^4\nu_e} & \text{при } \omega_{Le} \gg \omega \gg \nu_e, \\ \frac{a^2\omega^4\nu_e}{c^2\omega_{Le}^2} & \text{при } \omega_{Le} \gg \nu_e \gg \omega. \end{cases} \quad (8)$$

Глубина скинирования поля здесь также дается формулой (6), в которой под δ следует понимать (8); здесь также верхнее выражение соответствует инерционному, а нижнее – диссипативному скин-эффекту.

Задача 3. Исследовать то же, что и в задаче 2, но в условиях сильной пространственной дисперсии, когда $|\omega + i\nu_e| \ll k_z v_0$, где $v_0 = v_{Te}$ – тепловая скорость в случае невырожденной среды, либо $v_0 = v_{Fe}$ – для вырожденной.

Решение.

В этой области частот

$$\varepsilon^l = 1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \simeq \frac{1}{k^2 r_{De}^2}, \quad \varepsilon^{tr} = 1 + i\alpha \frac{\omega_{Le}^2}{\omega k v_0} \simeq i\alpha \frac{\omega_{Le}^2}{\omega k v_0}, \quad (1)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ при $v_0 = v_{Te}$, и $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ при $v_0 = v_{Fe}$; соответственно понимается и r_{De} .

В результате подстановки (1) в уравнение (8.1.5) получаем:

$$\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c^2}} + |k_z| r_{De} - \frac{2a\omega^2}{\pi c^2 |k_z|} \sum_{n \geq 0}' \frac{1 \pm (-1)^n}{n^3 - i\gamma^3} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\gamma^3 = \alpha \frac{\omega a^3 \omega_{Le}^2}{\pi^2 c^2 v_0} = \frac{a^3}{\lambda_{ск}^3}$, где $\lambda_{ск}$ – глубина скин-слоя для объемной плазменной среды.

Проанализируем уравнение (2) только в пределе тонкого слоя, считая $a^3/\gamma^3 \ll 1$ (в противном случае приходим к уравнению для полуограниченной плазменной среды). При этом для симметричных (верхнее выражение) и несимметричных (нижнее выражение) мод соответственно из (2) получаем:

$$\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c^2}} + |k_z| r_{De} - \frac{2a\omega^2(1-i)}{2\pi c^2 |k_z|} \times \begin{Bmatrix} \theta \\ \eta \end{Bmatrix} = 0, \quad (3)$$

где θ и η находятся из суммирования последнего слагаемого в (2). Приближенно $\theta \simeq 0,34$, а $\eta \simeq 2,47$.

Решение уравнения (3) мы вновь ищем в виде (5):

$$\omega = |k_z|c - i\delta, \quad \delta = \frac{4}{9} |\omega| a^2 k_z^2 \times \begin{Bmatrix} \theta^2 \\ \eta^2 \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Мы здесь (так же как всюду выше) опустили малую поправку к реальной части ω , обусловленную вторым слагаемым (3), полагая $a \gg r_{De}$. Глубина скинирования при этом определяется соотношением

$$\lambda_{ск} = \frac{1}{\text{Im } k_z} = \frac{c}{|\delta|}, \quad (5)$$

где δ дается формулами (4).

Задача 4. При получении величины δ_{max} в спектрах (8.4.4) и (8.4.8) мы пренебрегли диссипацией. Найти поправки к δ_{max} , учитывая малую диссипацию.

Решение.

При получении спектра (8.4.4) мы воспользовались выражением (8.4.3) при условии $\nu_e \rightarrow 0$. Подставляя это выражение в уравнение (8.4.2) с учетом конечного значения ν_e , получим следующее соотношение для определения δ_{max} (ср. с (8.4.5)):

$$\left(\delta_{max} + i \frac{\nu_e}{2} \right) \delta_{max} = \frac{\pi \beta_1^2 a |k_z|^3}{\rho^m}. \quad (1)$$

При $\delta_{max} \gg \nu_e$ мы имеем решение (8.4.5). В обратном же пределе находим поправку

$$\delta_{max} = -i \frac{2\pi\beta_1^2 |k_z|^3 a}{\rho^m}, \quad (2)$$

соответствующую затуханию волн "глубокой воды" и упругого звука.

Совершенно аналогично при использовании выражения (8.4.6) с учетом диссипации вместо соотношения (8.4.9) получим:

$$\left(\delta_{max} + i \frac{\nu_i}{2} + i \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^2}{|k_z| v_{Te}} \\ \frac{2\pi\omega^2}{|k_z| v_{Fe}} \end{array} \right. \right) \delta_{max} = \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} \frac{2\pi\beta_1^2 |k_z|^2}{\rho^m}. \quad (3)$$

При пренебрежении мнимыми слагаемыми в (3) мы получаем формулу (8.4.9). В обратном же пределе находим декременты затухания ионно-звуковых и упругих волн в слое, причем они равны между собой:

$$\delta_{max} = -i \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} \frac{2\pi\beta_1^2 k_z^2}{\rho^m} \left(\frac{\nu_i}{2} + \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2}{|k_z| v_{Te}} \\ \frac{2\pi\omega^2}{|k_z| v_{Fe}} \end{array} \right. \right)^{-1}. \quad (4)$$

ТЕМА IX

**ТЕПЛОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
В ПЛАЗМЕННОЙ СРЕДЕ****§ 9.1. Корреляционные функции системы заряженных
частиц. Общее рассмотрение**

В предыдущих разделах плазма рассматривалась как система частиц, характеризующаяся набором макроскопических параметров, представляющих собой средние значения соответствующих микроскопических величин. В то же время известно, что параметры любой системы могут испытывать отклонение от средних значений, которые называются флуктуациями физических величин.

В этом разделе мы изучим флуктуационные явления в плазменной среде и некоторые связанные с ними процессы. Помимо самостоятельного интереса (поскольку, например, тепловые флуктуации электромагнитного поля определяют уровень "шумов" в плазме) изучение флуктуаций важно и с других точек зрения. В частности, вследствие тепловых флуктуаций могут протекать такие процессы, как рассеяние и трансформация волн в плазме. Ниже будет показано, что флуктуации определяют интеграл столкновений заряженных частиц в плазменной среде и более того, в случае равновесной плазмы он совпадает с интегралом Ленарда – Балеску (или Ландау, см. тему IV).

Теорию флуктуаций в плазме будем излагать на основе макроскопических характеристик электромагнитных свойств плазменной среды (диэлектрическая проницаемость и проводимость), которые были изучены в предыдущих разделах, исходя из наиболее общей модели среды – кинетического уравнения с самосогласованным полем. Однако возможен и обратный подход к изучению электромагнитных явлений – определение с помощью микроскопической теории флуктуаций в плазме ее диэлектрической проницаемости.

Для количественной характеристики флуктуаций введем так называемые корреляционные функции. Рассмотрим флуктуации некоторой величины, например, плотности тока $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$, считая эту величину вещественной, а ее среднее значение – равным нулю

$$\langle \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (9.1.1)$$

В общем случае усреднение в (9.1.1) должно проводиться как по всем возможным квантовомеханическим состояниям системы, так и по вероятности статистического распределения этих состояний, т.е. по статистическому ансамблю, что эквивалентно усреднению по времени.

Пространственно-временную корреляционную функцию (или просто коррелятор) определяют как среднее значение произведения флуктуаций величины $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ в различных точках пространства в различные моменты времени. При этом, если среда однородна не только в пространстве, но и во времени¹, то квадратичную пространственно-временную корреляционную функцию записывают в виде

$$\langle j_i j_j \rangle_{t, \mathbf{r}} = \langle j_i(t_1, \mathbf{r}_1) j_j(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle_{t, \mathbf{r}} \quad (9.1.2)$$

где $t = t_1 - t_2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Поскольку рассматривается пространственно однородная и стационарная плазменная среда, можно применить преобразование Фурье

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega d\mathbf{k} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}), \quad (9.1.3)$$

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = \int dt d\mathbf{r} e^{+i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{j}(t, \mathbf{r}),$$

определив спектральное распределение пространственно-временной корреляционной функции в виде

$$\langle j_i(t_1, \mathbf{r}_1) j_j(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \int dt d\mathbf{r} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} \langle j_i j_j \rangle_{t, \mathbf{r}}. \quad (9.1.4)$$

Введенную величину называют также спектральной плотностью корреляционной функции. Используя (9.1.3) и определение (9.1.4),

¹Ниже мы ограничимся случаем пространственно неограниченной однородной плазменной среды, так как ограниченность или неоднородность среды не приводит к появлению принципиально новых результатов. Кроме того, возникающие здесь особенности можно учесть с помощью изложенного общего анализа флуктуаций в однородной среде.

легко показать, что имеется следующее соотношение

$$\langle j_i^*(\omega, \mathbf{k}) j_j(\omega', \mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^4 \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle j_i(t_1, \mathbf{r}_1) j_j(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle_{\omega, \mathbf{k}}, \quad (9.1.5)$$

связывающее среднее значение произведения Фурье-компонент флуктуирующих величин со спектральным распределением корреляционной функции.

Часто флуктуации удобно характеризовать пространственной

$$\langle j_i(t, \mathbf{r}_1) j_j(t, \mathbf{r}_2) \rangle = \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{r}} \quad (9.1.6)$$

или временной (автокорреляционной)

$$\langle j_i(t_1, \mathbf{r}) j_j(t_2, \mathbf{r}) \rangle = \langle j_i j_j \rangle_t \quad (9.1.7)$$

корреляционными функциями, представляющими среднее значение флуктуаций величин либо в заданный момент времени, но в различных точках пространства, либо в заданной точке пространства, но в различные моменты времени.

Нетрудно убедиться, что имеются следующие соотношения для спектральных компонент корреляционных функций

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}, \quad (9.1.8)$$

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}.$$

Это означает, в частности, что спектральная плотность автокорреляционной функции представляет собой интеграл по всем волновым векторам от спектральной плотности пространственно-временного распределения флуктуаций.

С помощью автокорреляционной функции можно определить среднюю по всему спектру характерную частоту флуктуаций

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{\int \omega^2 \langle j_i j_j \rangle_{\omega} d\omega}{\int \langle j_i j_j \rangle_{\omega} d\omega}. \quad (9.1.9)$$

Аналогично, с помощью пространственной корреляционной функции можно найти характерную длину, на которой происходит корреляция между флуктуациями данной величины.

Отметим одно важное следствие соотношения (9.1.1), для чего перепишем его в виде равенства нулю среднего значения амплитуд Фурье-компонент флуктуирующих величин

$$\langle j_i(\omega, \mathbf{k}) \rangle = 0. \quad (9.1.10)$$

Комплексную амплитуду $\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})$ можно представить как

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = |j_i(\omega, \mathbf{k})| e^{i\varphi}, \quad (9.1.11)$$

где φ – фаза соответствующей Фурье-компоненты плоской волны. Тогда из (9.1.10) следует, что фазы Фурье-компонент флуктуирующих величин случайны, и усреднение (9.1.10) означает усреднение по случайным фазам. В этом состоит существенное различие между флуктуационными возмущениями равновесного состояния среды от возмущений с регулярной фазой, которые соответствуют собственным колебаниям среды, подробно рассмотренным в предыдущих разделах.

Основной задачей общей теории флуктуаций в материальных средах является нахождение связи корреляционных функций для различных физических величин с макроскопическими характеристиками среды – диэлектрической проницаемостью или проводимостью. Для плазмы как системы заряженных частиц такая задача решается строго благодаря наличию малого параметра η – отношения энергии взаимодействия к среднему значению энергии теплового движения. В первом приближении заряженные частицы в плазменной среде можно считать невзаимодействующими.

Переходя к расчету флуктуаций различных конкретных параметров среды, вспомним, что введенная нами одночастичная функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ является, по определению, средним статистическим значением микроскопической функции распределения

$$f_M(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{s=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s(t)), \quad (9.1.12)$$

характеризующей микроскопическое распределение электронов в фазовом пространстве, т.е.

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \langle f_M(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle. \quad (9.1.13)$$

Здесь усреднение производится по распределению различных возможных состояний рассматриваемого статистического ансамбля из

N частиц, т.е. по так называемой функции распределения Лиувилля, зависящей от координат и скоростей всех N частиц, образующих ансамбль – $F(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t)$. Поэтому естественно рассмотреть прежде всего флуктуацию самой функции распределения, которую следует определить как разность микроскопического распределения в фазовом пространстве (9.1.12) и его среднего значения

$$\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv f_M(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (9.1.14)$$

Очевидно, что в системе невзаимодействующих частиц в отсутствие внешних полей их траектории – прямые линии, вследствие чего в (9.1.12) следует положить $\mathbf{v}_s^0(t) = \mathbf{v}_s^0 = \text{const}$, $\mathbf{r}_s^0(t) = \mathbf{r}_s^0 + \mathbf{v}_s^0(t - t_0)$, где индекс "0" означает, что данная величина относится к системе без взаимодействия, а \mathbf{r}_s^0 и \mathbf{v}_s^0 – начальные положение и скорость частицы. Функция распределения Лиувилля представляется при этом в виде

$$F_N^0(\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_N^0, \mathbf{v}_1^0, \dots, \mathbf{v}_N^0) = \prod_{s=1}^N f(\mathbf{v}_s^0). \quad (9.1.15)$$

Здесь учтено, что в силу пространственной однородности и стационарности системы одночастичные функции распределения $f(\mathbf{v}_s^0)$ зависят только от скорости $\mathbf{v}_s^0 = \mathbf{v}$.

Образую коррелятор для флуктуаций распределения частиц одного сорта и производя далее усреднение по функции (9.1.15), можно показать, что в отсутствие взаимодействия между частицами пространственно-временная корреляционная функция для флуктуаций функции распределения имеет вид¹

$$\begin{aligned} \langle \delta f^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f^0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle &\equiv \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}^0 = \\ &= \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')] f(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (9.1.16)$$

Переходя к Фурье-образам, находим для спектрального распределения флуктуаций функций распределения в отсутствие взаимодействия выражение

$$\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = 2\pi \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f(\mathbf{v}). \quad (9.1.17)$$

Здесь $f(\mathbf{v})$ – произвольная неравновесная функция распределения.

¹Заметим, что при усреднении микроскопической функции $f_M(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ по распределению (9.1.15) получаем соотношение $\langle f_M^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = f(\mathbf{v}_s^0)$.

С помощью коррелятора (9.1.17) легко найти спектральные распределения для флуктуаций всех параметров, характеризующих систему невзаимодействующих заряженных частиц. Так, например, умножая (9.1.17) сначала на e^2 , а затем – на $e^2 v_i v'_j$ и дважды интегрируя по импульсам, находим спектральные распределения пространственно-временных корреляционных функций соответственно для плотности заряда, плотности частиц и плотности тока в отсутствие взаимодействия частиц

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = e^2 \langle \delta n^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = 2\pi e^2 \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (9.1.18)$$

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = 2\pi e^2 \int d\mathbf{p} v_i v_j f(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (9.1.19)$$

При наличии внешних полей для вычисления корреляционных функций необходимо знать закон движения частиц в этих полях. В частности, если на плазму наложено внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 , то

$$\mathbf{r}(t) = \left\{ -\frac{v_{\perp} \gamma}{\Omega} \cos\left(\frac{\Omega t}{\gamma} + \varphi\right), \frac{v_{\perp} \gamma}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{\gamma} + \varphi\right), v_{\parallel} t \right\}, \quad (9.1.20)$$

где γ – релятивистский фактор; $\Omega = \frac{eB_0}{mc}$ – циклотронная частота; v_{\perp} и v_{\parallel} – поперечная и продольная (по отношению к внешнему магнитному полю) компоненты скорости заряженных частиц; φ – фаза в начальный момент времени $t = 0$; магнитное поле считается направленным вдоль оси $0z$.

Образуя, как и в изотропной плазменной среде, корреляционную функцию флуктуаций плотности тока согласно (9.1.14), после вычислений, аналогичных проведенным в § 5.1 при выводе тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы, получаем

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = 2\pi e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{p}) \Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{p}) \delta\left(\omega - \frac{n\Omega}{\gamma} - k_{\parallel} v_{\parallel}\right) d\mathbf{p}, \quad (9.1.21)$$

где тензор $\Pi_{ij}^{(n)}$ определяется подынтегральным выражением формулы (5.1.7).

Выражение для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда оказывается более простым

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = 2\pi e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{p}) J_n^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp} \gamma}{\Omega}\right) \delta\left(\omega - \frac{n\Omega}{\gamma} - k_{\parallel} v_{\parallel}\right) d\mathbf{p}. \quad (9.1.22)$$

Корреляционную функцию флуктуаций плотности частиц получают из (9.1.22) простым делением на e^2 .

Соотношения (9.1.18)–(9.1.22) связывают флуктуации плотностей заряда и тока в системе невзаимодействующих частиц с функцией распределения $f(\mathbf{p})$. В этом приближении (при полном пренебрежении взаимодействием частиц) флуктуации в электронной и ионной компонентах плазмы независимы, и найденные соотношения можно рассматривать для каждой из них отдельно. Затем следует учесть взаимодействие между частицами плазмы посредством самосогласованного поля. Для этого плотность флуктуационного тока $\mathbf{j}^0(\omega, \mathbf{k})$ нужно подставить в систему уравнений Максвелла в качестве внешнего источника и определить поле, создаваемое этим током. В результате имеем

$$\left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j(\omega, \mathbf{k}) \equiv \quad (9.1.23)$$

$$\equiv \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sum_{\alpha} j_i^{\alpha 0}(\omega, \mathbf{k}).$$

Здесь суммирование распространяется по всем сортам заряженных частиц $\alpha = e, i$, а $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ – тензор диэлектрической проницаемости среды.

Решение уравнения (9.1.23) можно формально записать в виде

$$E_j(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sum_{\alpha} \Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) j_j^{\alpha 0}(\omega, \mathbf{k}), \quad (9.1.24)$$

где $\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ – тензор, обратный тензору $\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ (т.е. $\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij}$).

Используя (9.1.5) и (9.1.24), находим спектральное распределение флуктуаций самосогласованного поля в плазменной среде

$$\langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{16\pi^2 \omega^2}{c^4} \Lambda_{ik}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{jl}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \sum_{\alpha} \langle j_k^{\alpha} j_l^{\alpha} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0. \quad (9.1.25)$$

При выводе этого соотношения было учтено, что в приближении невзаимодействующих частиц

$$\langle j_i^{\alpha} j_j^{\beta} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = \delta_{\alpha\beta} \langle j_i^{\alpha} j_j^{\alpha} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0. \quad (9.1.26)$$

Формулы (9.1.25) и (9.1.21) связывают коррелятор $\langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$ с функцией распределения частиц в плазме.

Теперь, когда известна корреляционная функция флуктуаций самосогласованного поля, можно найти поправки к флуктуациям тока и заряда, обусловленные самосогласованным взаимодействием частиц в плазменной среде. Так, под действием флуктуаций самосогласованного поля возникает поправка к флуктуации плотности тока частиц сорта α :

$$\delta j_i^\alpha(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\omega}{4\pi} \delta \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}). \quad (9.1.27)$$

В результате полная плотность флуктуационного тока частиц сорта α :

$$j_i^\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{c^2} \delta \varepsilon_{i\mu}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \sum_{\beta} j_\nu^{\beta 0}(\omega, \mathbf{k}) + j_i^{\alpha 0}(\omega, \mathbf{k}). \quad (9.1.28)$$

Отсюда получаем искомую связь между спектральным распределением флуктуаций плотности тока, учитывающим самосогласованное взаимодействие частиц в среде, и коррелятором флуктуаций плотности тока невзаимодействующих частиц:

$$\begin{aligned} \langle j_i^\alpha j_j^\beta \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 &= \sum_{\alpha'} \left[\delta_{i\mu} \delta_{\alpha\alpha'} - \frac{\omega^2}{c^2} \delta \varepsilon_{is}^{\alpha*}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{s\mu}^{-1*}(\omega, \mathbf{k}) \right] \times \\ &\times \left[\delta_{j\nu} \delta_{\alpha'\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} \delta \varepsilon_{js}^{\beta}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{s\nu}(\omega, \mathbf{k}) \right] \langle j_\mu^{\alpha'} j_\nu^{\beta'} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0. \end{aligned} \quad (9.1.29)$$

Спектральное распределение корреляций плотности заряда при учете самосогласованного взаимодействия частиц в среде легко получить, используя уравнение непрерывности. В результате имеем

$$\langle \rho^\alpha \rho^\beta \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = \frac{k_i k_j}{\omega^2} \langle j_i^\alpha j_j^\beta \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0. \quad (9.1.30)$$

Делением этого соотношения на $e_\alpha e_\beta$ находим коррелятор флуктуаций плотности частиц $\langle n_\alpha n_\beta \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0$.

Аналогично находятся корреляционные функции флуктуаций магнитного поля, среднего значения энергии и других физических величин. Все они выражаются через коррелятор флуктуаций плотности тока невзаимодействующих частиц, который в свою очередь согласно

(9.1.18) и (9.1.21) определяется интегралом от функций распределения частиц по скоростям.

В заключение еще раз подчеркнем, что полученные в этом параграфе соотношения носят общий характер и применимы как к равновесной, так и к неравновесной среде. Единственным ограничением является требование устойчивости среды, что, в частности, заложено в предположении ее пространственной однородности и стационарности равновесного состояния.

§ 9.2. Флуктуации в равновесной плазменной среде. Флуктуационно-диссипативная теорема

Применим полученные общие результаты к термодинамически равновесной плазме. Начнем с невырожденной изотропной бесстолкновительной плазмы, имеющей максвелловскую функцию распределения $f_{0\alpha}(\mathbf{p})$ и температуру T для всех сортов частиц. При этом вклад частиц сорта α в антиэрмитовскую часть диэлектрической проницаемости определяется выражением (5.1.11), из которого следует соотношение

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{ij}^{\alpha\alpha}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{\delta\varepsilon_{ij}^{\alpha}(\omega, \mathbf{k}) - \delta\varepsilon_{ji}^{\alpha*}(\omega, \mathbf{k})}{2} = \\ &= i\pi \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega T} \int d\mathbf{p} v_i v_j f_{0\alpha} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

Сравнивая это выражение с (9.1.19), получаем связь коррелятора токов невзаимодействующих частиц с антиэрмитовской частью парциального тензора диэлектрической проницаемости

$$\langle j_i^{\alpha} j_j^{\alpha} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = -\frac{i\omega T}{2\pi} \delta\varepsilon_{ij}^{\alpha\alpha}(\omega, \mathbf{k}). \quad (9.2.2)$$

Из формулы (9.2.2) видно, что флуктуации в плазме пропорциональны ее температуре и антиэрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости, ответственной за диссипацию энергии электромагнитного поля в плазме.

Учтем далее, что в изотропной плазме

$$\Lambda_{ij} = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k) + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k) + k^2 \right]. \quad (9.2.3)$$

Используя соотношения (9.1.29) и (9.2.2), коррелятор флуктуаций плотности полного тока после несложных выкладок можно привести к виду

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{T\omega}{2\pi} \left[\frac{k_i k_j \operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k)}{k^2 |\varepsilon^l(\omega, k)|^2} + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \frac{\operatorname{Im} \varepsilon^{tr}(\omega, k)}{\left| \varepsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right|^2} \right]. \quad (9.2.4)$$

Соотношение (9.2.4) представляет собой так называемую флуктуационно-диссипативную теорему для невырожденной термодинамически равновесной изотропной плазмы. Она является частным случаем более общей флуктуационно-диссипативной теоремы, справедливой для термодинамически равновесной анизотропной плазменной среды

$$\begin{aligned} \langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} &= -\frac{ic^2 T}{4\pi\omega} \Lambda_{is}^0 (\Lambda_{ls}^{-1} - \Lambda_{sl}^{-1*}) \Lambda_{lj}^0 = \\ &= -\frac{ic^2 T}{4\pi\omega} \frac{1}{\Lambda} \Lambda_{ik}^0 (\Delta_{lk} - \Delta_{kl}^*) \Lambda_{lj}^0, \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

где $\Lambda = |\Lambda_{ij}|$ – определитель, составленный из элементов матрицы Λ_{ij} , Δ_{ij} – алгебраическое дополнение $\Delta_{is}\Delta_{sj} = \Lambda\delta_{ij}$, а

$$\Lambda_{ij}^0(\omega, \mathbf{k}) = \lim_{\varepsilon_{ij} \rightarrow \delta_{ij}} \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left[\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \delta_{ij} - k_i k_j \right]. \quad (9.2.6)$$

Флуктуационно-диссипативная теорема вида (9.2.5) применима также к произвольной анизотропной плазменной среде, как невырожденной, так и вырожденной. Необходимо только, чтобы среда находилась в состоянии термодинамического равновесия с температурой T , одинаковой для всех сортов заряженных частиц. Кроме того, при выводе этой теоремы предполагалось выполненным неравенство $\hbar\omega \ll T$, что обусловило применимость классического рассмотрения. В квантовой статистической физике флуктуационно-диссипативная теорема дока-

зывается в более общем виде без учета этого неравенства

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = -\frac{i}{4\pi} \frac{\hbar c^2}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} \frac{1}{\Lambda} \Lambda_{is}^0 (\Delta_{ls} - \Delta_{sl}^*) \Lambda_{lj}^0, \quad (9.2.7)$$

В пределе $\hbar\omega \ll T$ она переходит в (9.2.5).

При использовании флуктуационно-диссипативной теоремы в (9.2.5) и (9.2.7) следует подставлять $\Lambda(\omega, \mathbf{k})$, $\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\Delta_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, вычисленные с учетом соответствующих ограничений. В настоящей книге для описания движения заряженных частиц в плазме в основном использовалось классическое кинетическое уравнение с самосогласованным взаимодействием, справедливое в условиях $\hbar\omega \ll \langle \mathcal{E} \rangle$, где $\langle \mathcal{E} \rangle$ – среднее значение энергии хаотического движения частиц¹. Это означает: для невырожденной плазмы $\hbar\omega \ll T$, для вырожденной плазмы $\hbar\omega \ll \mathcal{E}_F$; отношение $\hbar\omega/T$ может быть произвольным. Поэтому далее для невырожденной плазмы будем пользоваться флуктуационно-диссипативной теоремой (9.2.5), а для вырожденной – (9.2.7).

Из соотношений (9.2.5) и (9.2.7) следует, в частности, один общий весьма важный вывод: спектральная плотность флуктуаций резко возрастет в случае, когда возможно выполнение равенства

$$\Lambda = \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0. \quad (9.2.8)$$

Это есть не что иное, как дисперсионное уравнение для спектров собственных колебаний плазмы, подробно исследованное в предыдущих разделах. Таким образом, флуктуации имеют резкие максимумы вблизи частот собственных колебаний плазмы.

С помощью соотношений (9.2.4)–(9.2.7) были выражены флуктуации в равновесной плазменной среде через макроскопическую характеристику ее электромагнитных свойств – диэлектрическую проницаемость, точнее, ее антиэрмитовскую часть $\varepsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k})$. Можно поступить и обратным образом – с помощью формулы (9.2.2) выразить антиэрмитовскую часть диэлектрической проницаемости через коррелятор плотности тока для системы невзаимодействующих частиц

$$\varepsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k}) = i \frac{(2\pi)^2}{\omega T} \langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0. \quad (9.2.9)$$

¹Условие $\hbar\omega \ll \langle \mathcal{E} \rangle$ следует из приближения $\mathbf{p} \gg \hbar \mathbf{k}$, примененного при выходе кинетического уравнения с учетом столкновений частиц (см. тему III). Домножив это неравенство на скорость $v = \omega/k$, которая для плазменных волн порядка тепловых скоростей частиц, приходим к исходному условию.

Приведенное соотношение составляет математическое содержание так называемого обращения флуктуационно-диссипативной теоремы, с помощью которого можно найти тензор диэлектрической проницаемости среды, если предварительно определить из микроскопической теории флуктуации плотности тока или заряда в плазме.

§ 9.3. Спектральное распределение флуктуаций в равновесной бесстолкновительной плазменной среде

Рассмотрим флуктуации в равновесной бесстолкновительной электронной плазме. Начнем с наиболее простого случая изотропной невырожденной плазмы. Будем исходить из выражения (9.2.4) для коррелятора флуктуаций плотности тока. Используя далее связь самоогласованного поля и плотности тока

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^l(\omega, k) &= -\frac{i\omega}{4\pi} \delta\varepsilon^l(\omega, k) \mathbf{E}^l(\omega, k), \\ \mathbf{j}^{tr}(\omega, k) &= -\frac{i\omega}{4\pi} \delta\varepsilon^{tr}(\omega, k) \mathbf{E}^{tr}(\omega, k), \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

можно с помощью (9.2.4) определить коррелятор флуктуаций самоогласованного поля

$$\begin{aligned} \langle E_i E_j \rangle_{\omega, k} &= \frac{8\pi T}{\omega} \left[\frac{k_i k_j \operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k)}{k^2 |\varepsilon^l(\omega, k)|^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \frac{\operatorname{Im} \varepsilon^{tr}(\omega, k)}{\left| \varepsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right|^2} \right]. \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

Из формул (9.2.4) и (9.3.2) видно, что корреляторы флуктуаций плотности тока и электрического поля распадаются на два слагаемых, характеризующих продольные и поперечные флуктуации. Таким образом, в изотропной плазменной среде продольные и поперечные флуктуации оказываются независимыми.

Из уравнения непрерывности

$$\omega\rho = \mathbf{kj}(\omega, \mathbf{k}), \quad (9.3.3)$$

учитывая (9.2.4), легко находим коррелятор флуктуаций плотности заряда

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2}{16\pi^2} \langle E^{l2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2 T \operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k)}{2\pi\omega |\varepsilon^l(\omega, k)|^2}. \quad (9.3.4)$$

Естественно, что флуктуации плотности заряда зависят только от продольной диэлектрической проницаемости.

Выразим теперь корреляционные функции через параметры среды, для чего используем явный вид диэлектрической проницаемости. Ограничимся вначале случаем чисто электронной невырожденной плазмы, воспользовавшись для $\varepsilon^l(\omega, k)$ и $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ соответствующими выражениями (4.1.7) и (4.1.6) (см. тему IV).

Рассмотрим флуктуации плотности заряда. Проанализируем область высоких частот (больших фазовых скоростей) $\omega \gg kv_{Te}$, в которой существуют продольные слабозатухающие ленгмюровские волны со спектром, определяемым дисперсионным уравнением $\varepsilon^l(\omega, k) = 0$. Для этой области частот из (9.3.4) имеем

$$\begin{aligned} \langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} &= \frac{k^2}{16\pi^2} \langle E^{l2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = -\frac{k^2 T}{2\pi\omega} \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega, k)} \approx \\ &\approx \frac{k^2 T}{2\pi\omega} \pi\delta [\operatorname{Re} \varepsilon^l(\omega, k)]. \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

При получении этой формулы была использована возможность формальной замены

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega, k)} = -\pi\delta [\operatorname{Re} \varepsilon^l(\omega, k)], \quad (9.3.6)$$

справедливой для области прозрачности среды, когда $\operatorname{Re} \varepsilon^l(\omega, k) \gg \operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k)$.

Подставляя в (9.3.5) выражение для $\varepsilon^l(\omega, k)$, которое в рассматриваемой области имеет вид

$$\operatorname{Re} \varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right), \quad (9.3.7)$$

окончательно находим

$$\begin{cases} \langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2 T}{2\omega} \omega_{Le}^2 \delta(\omega^2 - \omega_{Le}^2 - 3k^2 v_{Te}^2), \\ \langle E^{l2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{16\pi}{k^2} \langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{8\pi^2 T}{\omega} \omega_{Le}^2 \delta(\omega^2 - \omega_{Le}^2 - 3k^2 v_{Te}^2). \end{cases} \quad (9.3.8)$$

Здесь учтено, что спектр продольных волн лежит в узком диапазоне частот $\omega^2 \geq \omega_{Le}^2$.

Таким образом, в высокочастотной области спектра флуктуации плотности заряда в плазме существуют только в узком диапазоне частот, соответствующем спектру плазменных колебаний. Это иллюстрируется рис. 9.1, на котором представлена зависимость спектральных распределений величины $2\langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} / (e^2 n_e)$ от безразмерной частоты ω / kv_{Te} . Видно, что максимумы резкие только при малых значениях $k^2 r_{De}^2$, а с уменьшением длины волны (увеличением волнового числа k) полностью пропадают из-за сильного затухания Ландау.

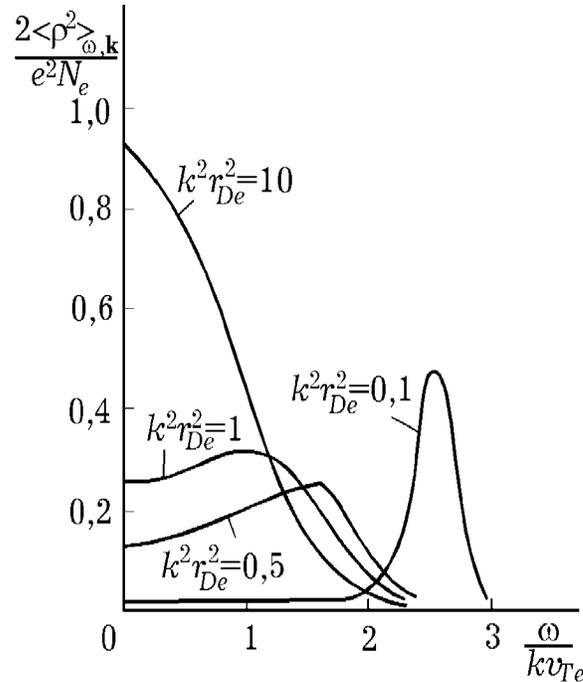


Рис. 9.1

Используя асимптотику функции $J_+(\omega / kv_{Te})$ при малых значениях ω / kv_{Te} , можно исследовать и область низких частот, однако соответствующие расчеты не приводят к простым выражениям и выписывать их здесь не представляет интереса.

Для дальнейшей характеристики флуктуаций удобно рассмотреть временную корреляцию флуктуаций с заданной длиной волны, которая получается интегрированием спектрального распределения корреляционной функции по частотам

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} d\omega, \quad \langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle E^{l2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} d\omega. \quad (9.3.9)$$

Интегрирование в (9.3.9) легко провести с помощью формулы Крамера-Кронига, которую следует применить к функции $[\varepsilon^l(\omega, k)]^{-1}$

$$\frac{\operatorname{Re} \varepsilon^l(\omega, k)}{|\varepsilon^l(\omega, k)|^2} - 1 = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega', k)}{(\omega' - \omega) |\varepsilon^l(\omega', k)|^2} d\omega'. \quad (9.3.10)$$

Полагая в (9.3.10) $\omega = 0$ и учитывая, что $\operatorname{Im} \varepsilon^l(0, k) = 0$, из (9.3.9) находим

$$\begin{cases} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{k^2 T}{4\pi} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon^l(0, k)} \right], \\ \langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{k}} = 4\pi T \left[1 - \frac{1}{\varepsilon^l(0, k)} \right]. \end{cases} \quad (9.3.11)$$

Таким образом, спектральная плотность пространственной корреляционной функции флуктуаций плотности заряда и продольного электрического поля полностью определяется продольной статической диэлектрической проницаемостью. Подставляя в (9.3.11) значение $\varepsilon^l(0, k)$ для изотропной плазменной среды

$$\varepsilon^l(0, k) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2},$$

получаем

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{e^2 n_e k^2}{k^2 + 1/r_D^2}, \quad \langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{16\pi^2 e^2 n_e}{k^2 + 1/r_D^2}. \quad (9.3.12)$$

Производя обратное преобразование Фурье, нетрудно найти пространственные корреляционные функции флуктуаций плотности за-

ряда и продольного электрического поля¹

$$\begin{cases} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{r}} = 2e^2 n_e \left[\delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-r/r_D)}{r r_D^2} \right], \\ \langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{r}} = 8\pi e^2 n_e \frac{\exp(-r/r_D)}{r}. \end{cases} \quad (9.3.13)$$

Отсюда следует, что характерным расстоянием, на котором происходит корреляция между флуктуациями плотности заряда и продольного электрического поля в плазменной среде, является дебаевский радиус. В этом случае при $\eta \ll 1$ энергия флуктуаций продольного поля мала по сравнению с тепловой энергией электронов

$$\frac{\langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{r}}}{4\pi n_e T} \approx \frac{e^2 n_e}{r_D e n_e T} \approx \left(\frac{e^2 n_e^{1/3}}{T} \right)^{3/2} \ll 1. \quad (9.3.14)$$

Найдем далее среднюю квадратичную частоту флуктуаций, которая определяется выражением (9.1.9)

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} d\omega}. \quad (9.3.15)$$

Интегрирование в этом соотношении также удобно провести с помощью формулы Крамерса-Кронига, что дает

$$\langle \omega^2 \rangle = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 [1 - \varepsilon^l(\omega, k)] \left[1 - \frac{1}{\varepsilon^l(0, k)} \right]^{-1}. \quad (9.3.16)$$

Как неоднократно было показано ранее и как следует из общих физических соображений, в области высоких частот пространственная дисперсия несущественна и для $\varepsilon^l(\omega, k)$ при $\omega \gg kv_{Te}$ можно пользоваться формулой элементарной теории

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}.$$

¹Далее для простоты ионы считаются однозарядными.

С учетом этого средняя квадратичная частота флуктуаций

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{\omega_{Le}^2}{1 - \frac{1}{\varepsilon^l(0, k)}} \approx \omega_{Le}^2 + \frac{1}{2} k^2 v_{Te}^2, \quad (9.3.17)$$

откуда видно, что она меньше частоты собственных плазменных колебаний $\omega^2 = \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2$. Из (9.3.17) следует также, что все полученные формулы, основанные на (9.3.4), справедливы при условии $\hbar\omega \ll T$, которое, как правило, всегда хорошо выполняется в невырожденной плазменной среде.

Проанализируем особенности флуктуаций в вырожденной электронной плазменной среде. Будем исходить из выражения (9.2.7) для коррелятора $\langle j_i j_j \rangle_{\omega, k}$. Используя уравнение непрерывности (9.3.3), можно получить из (9.2.7) выражение для коррелятора флуктуаций электронной плотности в изотропной среде

$$\langle \delta n_e^2 \rangle_{\omega, k} = \frac{k^2}{\pi e^2} \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} \frac{\text{Im}\varepsilon^l(\omega, k)}{|\varepsilon^l(\omega, k)|^2}. \quad (9.3.18)$$

Отметим прежде всего следующее важное обстоятельство. Согласно флуктуационно-диссипативной теореме в классическом пределе, т.е. когда $\hbar\omega \ll T$ и справедливо соотношение (9.2.5), при $T = 0$ флуктуации невозможны. В вырожденной плазменной среде это не так. Действительно, из (9.3.18) видно, что флуктуации в вырожденной плазменной среде возможны и при $T = 0$ (полное вырождение), но только с отрицательными частотами $\omega < 0$. Физически это является следствием того, что при $T = 0$ частицы системы занимают все возможные низшие энергетические уровни, т.е. система ферми-частиц находится в основном энергетическом состоянии и допускает переходы только в состояние с большей энергией, что соответствует поглощению кванта энергии, т.е. отрицательному значению частоты. Флуктуации при $T = 0$ являются чисто квантовыми и пропорциональны постоянной Планка \hbar .

Проанализируем выражение (9.3.18) при произвольном отношении $\hbar\omega/T$, используя в качестве $\varepsilon^l(\omega, k)$ формулу для вырожденной плазмы. Начнем с области высоких частот $\omega > kv_{Fe}$. При этом мнимая часть диэлектрической проницаемости в бесстолкновительном пределе строго равна нулю и флуктуации в плазменной среде невозможны.

Однако при учете редких столкновений частиц проявляется отличная от нуля мнимая часть $\varepsilon^l(\omega, k)$, а вместе с ней и флуктуации на частотах собственных незатухающих плазменных колебаний:

$$\begin{aligned} \langle \delta n_e^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} &= \frac{k^2}{2e^2} \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} \delta [\varepsilon^l(\omega, k)] \approx \\ &\approx \frac{k^2 \omega_{Le}^2}{2e^2} \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} \delta \left[\omega^2 - \omega_{Le}^2 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_{Fe}^2}{\omega_{Le}^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.3.19)$$

В области низких частот $\omega \ll kv_{Fe}$ для $\varepsilon^l(\omega, k)$ справедливо статическое асимптотическое представление, подстановка которого в (9.3.18) дает

$$\langle \delta n_e^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k\omega}{4e^2 v_{Fe}} \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} \frac{1}{1 + k^2 v_{Fe}^2 / 3\omega_{Le}^2}. \quad (9.3.20)$$

Отсюда для области малых длин волн ($k^2 r_{De}^2 \gg 1$) получаем

$$\langle \delta n_e^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{3\pi}{2} \frac{n_e}{\mathcal{E}_{Fe}} \frac{\omega}{kv_{Fe}} \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1}. \quad (9.3.21)$$

В области больших длин волн ($k^2 r_{De}^2 \ll 1$), когда существенны коллективные эффекты, из (9.3.20) следует

$$\langle \delta n_e^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = 2\pi \frac{n_e}{\mathcal{E}_{Fe}} \frac{\omega kv_{Fe}}{\omega_{Le}^2} \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1}. \quad (9.3.22)$$

Сравнение полученных выражений (9.3.21) и (9.3.22) показывает, что в области низких частот (малых фазовых скоростей) основную роль играют длинноволновые флуктуационные возбуждения; флуктуации с малой длиной волны в системе невзаимодействующих ферми-частиц относительно малы.

Наконец, заметим, что, зная флуктуации плотности электронов, нетрудно определить флуктуации плотности заряда и продольного

электрического поля в плазме

$$\begin{cases} \langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = e^2 \langle \delta n_e^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}, \\ \langle E^{l2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{16\pi^2}{k^2} e^2 \langle \delta n_e^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}. \end{cases} \quad (9.3.23)$$

Оценка по этой формуле энергии, связанной с флуктуацией продольного поля, показывает, что так же как и для невырожденной плазменной среды, она мала по сравнению с энергией хаотического движения электронов. Так, в пределе $\hbar\omega \ll T$ имеем

$$\frac{\langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{r}}}{4\pi n_e \mathcal{E}_{Fe}} \approx \left(\frac{e^2 n_e^{1/3}}{\mathcal{E}_{Fe}} \right)^{3/2} \ll 1. \quad (9.3.24)$$

Таким образом, в вырожденной изотропной плазменной среде, так же как и в невырожденной, возможны высокочастотные флуктуации плотности заряда и продольного электрического поля на частотах, близких к ленгмюровской частоте электронов. Однако, в отличие от невырожденной среды такие флуктуации в вырожденной плазме имеют место как при $\hbar\omega < T$, когда они определяются температурой (подобно невырожденной плазме), так и при $\hbar\omega_{Le} > T \rightarrow 0$, когда они носят чисто квантовый характер.

В заключение кратко проанализируем флуктуации в невырожденной магнитоактивной плазме, находящейся в состоянии термодинамического равновесия. Коррелятор флуктуаций плотности тока определяют в этом случае с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы (9.2.5). Входящие в это соотношение величины выражаются через тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы с $T_e = T_i = T$. Видно, что в общем случае анализ флуктуаций в магнитоактивной плазме связан с громоздкими вычислениями. Тем не менее вид спектрального распределения корреляционных функций качественно остается прежним: он характеризуется наличием резких максимумов вблизи собственных частот колебаний магнитоактивной плазмы, которые детально проанализированы в теме V. Поэтому ограничимся простым примером. Вычислим корреляционную функцию флуктуаций плотности заряда в пределе холодной плазмы. С помощью (9.2.5) и уравнения непрерывности (9.3.3) получаем

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2 T}{2\pi\omega} \operatorname{Im} \left[1 - \frac{P(\omega, k)}{\Lambda(\omega, k)} \right], \quad (9.3.25)$$

где

$$P(\omega, k) = \frac{k^4 c^4}{\omega^4} - (\varepsilon_{\perp} \cos^2 \theta + \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel} \sin^2 \theta) \frac{k^2 c^2}{\omega^2} +$$

$$+ (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) \cos^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta, \quad (9.3.26)$$

$$\Lambda(\omega, k) = \frac{k^4 c^4}{\omega^4} (\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta) -$$

$$- \frac{k^2 c^2}{\omega^2} [2\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} + (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2 - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}) \sin^2 \theta] + \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2),$$

где θ – угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 , а компоненты тензора диэлектрической проницаемости ε_{\perp} , ε_{\parallel} и g для рассматриваемого случая чисто электронной плазмы определяются формулами

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \quad g = -\frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)}. \quad (9.3.27)$$

Ограничиваясь пределом $(k^2 c^2 / \omega^2) \gg 1$, когда волны в магнитоактивной плазме с хорошим приближением можно считать потенциальными, выражение (9.3.25) можно упростить

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2 T}{2\pi\omega} \operatorname{Im} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta} \right). \quad (9.3.28)$$

При учете исчезающе малых мнимых частей ε_{\perp} и ε_{\parallel} , обусловленных, например, столкновениями частиц, из (9.3.28) находим

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2 T}{4} \frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} \frac{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2}{\omega^4 \sin^2 \theta + (\omega^2 - \Omega_e^2)^2 \cos^2 \theta} \times$$

$$\times [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_2) + \delta(\omega + \omega_2)], \quad (9.3.29)$$

где частоты ω_1 и ω_2 определяются корнями дисперсионного уравнения для продольных ленгмюровских волн в магнитоактивной плазме

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}{2} \pm \sqrt{(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \theta}. \quad (9.3.30)$$

Этот спектр можно получить, используя формулы § 5.1.

Из условия применимости теоремы (9.2.5) следует, что формулы (9.3.25), (9.3.28) справедливы при $\hbar\omega_{1,2} \ll T$. Так как они относятся

к холодной магнитоактивной плазме, то пригодны как для невырожденной, так и для вырожденной плазмы. Более того, не представляет труда обобщение этих формул на случай вырожденной плазмы при произвольном отношении $\hbar\omega_{1,2}/T$. Для этого величину T в них следует заменить на $\hbar\omega [\exp(\hbar\omega/T) - 1]^{-1}$. Видно, что аналогично изотропной плазме в магнитоактивной вырожденной плазме возможны чисто квантовые флуктуации в пределе $T \rightarrow 0$, причем частоты этих флуктуаций также отрицательны.

§ 9.4. Флуктуации и столкновения частиц

В предыдущих параграфах флуктуации в плазменной среде рассматривались в пренебрежении столкновениями частиц. Проанализируем связь столкновительных и флуктуационных процессов, которая особенно наглядно проявляется для среды как системы заряженных частиц, силы взаимодействия которых – дальнотействующие. Этот вопрос имеет два аспекта. Первый из них заключается в том, что столкновения должны оказывать существенное влияние на вид корреляторов флуктуаций электромагнитных полей и параметров среды, так как флуктуации определяются диссипацией электромагнитной энергии в среде, которая, в частности, обусловлена столкновениями частиц. Учет столкновений при этом можно достаточно просто провести с привлечением рассмотренных общих методов. Действительно, поскольку флуктуации полностью определяются (по крайней мере, в термодинамически равновесной плазме) диэлектрической проницаемостью среды, точнее, ее антиэрмитовской частью, расчет флуктуаций можно проводить с помощью приведенных в предыдущих параграфах соотношений, например (9.2.2), (9.2.4) для равновесной плазмы, в которые следует подставить выражения для тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, учитывающие столкновения частиц и приведенные в §§ 4.3 и 5.2.

С принципиальной точки зрения дальнейшее рассмотрение флуктуаций электромагнитных полей и параметров среды не затруднительно, но связано с громоздкими выкладками. Физически же влияние столкновений на корреляторы флуктуаций различных величин вполне ясно. В самом деле, столкновительная диссипация должна приводить к двоякого рода эффектам. С одной стороны, вдали от

областей прозрачности среды флуктуации должны возрастать вследствие дополнительного диссипативного механизма. С другой – по той же причине должно измениться и спектральное распределение флуктуаций вблизи резонансных частот. В предыдущих параграфах считалось, что вблизи частот собственных слабозатухающих колебаний среды флуктуации пропорциональны δ -функциям от соответствующих частот, т.е. неограниченно возрастают вблизи них. Однако, реально флуктуации конечны и при резонансных частотах в силу наличия затухания Ландау. При этом резонансные пики имеют не только конечную амплитуду, но и конечную ширину. Учет столкновений должен привести к усилению этих эффектов, а именно, к уменьшению амплитуды резонансных флуктуаций и уширению резонанса.

Рассмотрим в качестве примера флуктуации плотности заряда в изотропной плазме при учете столкновений частиц вблизи частот собственных плазменных колебаний. Если частоту столкновений считать малой: $\omega \gg \nu_e, kv_{Te}$, то столкновительная поправка к продольной диэлектрической проницаемости как для слабоионизованной, так и для полностью ионизованной плазмы будет иметь вид (см. § 4.1)

$$\text{Im } \delta \varepsilon_{st}^l(\omega, k) = \frac{\omega_{Le}^2 \nu_e}{\omega^3}, \quad (9.4.1)$$

где $\nu_e = \nu_{en}$ – для слабоионизованной плазмы и $\nu_e = \nu_{эфф}$ – для полностью ионизованной плазмы.

Подставляя выражение (9.4.1) в (9.3.4), получаем следующие соотношения для флуктуаций плотности заряда: вблизи резонансной частоты $\omega^2 = \omega_{рез}^2 = \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2$

$$\langle \rho^2 \rangle_{рез \omega, k} \approx \frac{k^2 T}{2\pi \omega} \frac{1}{\text{Im } \varepsilon^l(\omega, k)} \approx \frac{k^2 T \omega^2}{(2\pi)^3 \omega_{Le}^2 \nu_e}, \quad (9.4.2)$$

в области частот вне резонанса

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, k} \approx \frac{k^2 T}{2\pi} \frac{\omega_{Le}^2 \nu_e}{(\omega^2 - \omega_{Le}^2 - 3k^2 v_{Te}^2)^2 + \left(\frac{\omega_{Le}^2 \nu_e}{\omega} \right)^2}. \quad (9.4.3)$$

Из этих соотношений видно, что при возрастании ν_e величина $\langle \rho^2 \rangle_{\omega, k}$ снижается, а ширина резонансной кривой растет. При $\nu_e \rightarrow 0$ из (9.4.3) получаем выражение (9.3.8) для бесстолкновительной плазмы.

Другой аспект рассматриваемого вопроса состоит в том, что сами столкновения тесно связаны с флуктуациями. Для столкновений с нейтральными частицами в слабоионизованной плазме это особенно очевидно, так как там силы взаимодействия очень быстро убывают с расстоянием и столкновение есть в прямом смысле слова тесное сближение частиц. Но это и есть флуктуация по отношению к однородному в среднем пространственному распределению частиц. Несколько сложнее дело обстоит в случае полностью ионизованной плазмы, в которой силы взаимодействия частиц медленно убывают с расстоянием. По существу этот вопрос был затронут в общей форме при обсуждении возможности описания плазмы с помощью бесстолкновительного кинетического уравнения Власова. Действительно, определив поле в плазменной среде через функцию распределения частиц, усредненную по флуктуациям, флуктуационные эффекты, также связанные с кулоновским взаимодействием частиц, можно было вынести в правую часть кинетического уравнения и отождествить их со столкновениями. Для обычного газа, в котором частицы в целом нейтральны, вследствие чего силы взаимодействия между ними очень быстро убывают с расстоянием, такое отождествление вполне закономерно и используется в кинетической теории газов. В полностью ионизованной плазме, в которой силы взаимодействия частиц медленно убывают с расстоянием, вклад во флуктуационное взаимодействие, связанный с одновременным взаимодействием многих, хотя и достаточно удаленных частиц, оказывается более существенным, чем отдельные сближения частиц, которые и являются парными столкновениями. Поэтому в полностью ионизованной плазме понятие столкновения имеет условный смысл, и для описания флуктуационного взаимодействия более удобна непрерывная модель, рассматривающая его не как дискретный процесс парных столкновений, а как непрерывно действующую силу кулоновского трения. Следствием этого и явился тот факт, что процесс вычисления интеграла столкновений для полностью ионизованной плазмы привел к уравнению Фоккера – Планка (см. задачу 6 по теме III), которое является основным в непрерывной модели описания различных случайных процессов. Для пояснения сказанного получим уравнение Фоккера-Планка общим методом.

Рассмотрим поведение функции распределения заряженных частиц в плазменной среде под влиянием флуктуационного взаимодействия, или иначе под влиянием кулоновских соударений. Пусть в мо-

мент времени t функция распределения $f(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, t)$, а в момент времени $t + \Delta t$ под влиянием флуктуационного взаимодействия она изменится и станет $f(\mathbf{v}, t + \Delta t)$. Если вероятность такого перехода из одного состояния в другое (с одной фазовой траектории на другую) равна $W(\Delta\mathbf{v}, \Delta t)$, то можно записать

$$f(\mathbf{v}, t + \Delta t) = \int f(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, t) W(\Delta\mathbf{v}, \Delta t) d\Delta\mathbf{v}, \quad (9.4.4)$$

где $d\Delta\mathbf{v}$ – полный дифференциал, т.е. произведение дифференциалов компонент вектора изменения скорости.

Разлагая левую часть уравнения (9.4.4) в ряд Тейлора по степеням Δt , а правую – по степеням $\Delta\mathbf{v}$ и ограничиваясь первыми членами разложений, можно преобразовать его в дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial v_i} \frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{v}, t)}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle}{\Delta t}, \quad (9.4.5)$$

которое называется уравнением Фоккера – Планка. Здесь

$$\int W(\Delta\mathbf{v}, \Delta t) d\Delta\mathbf{v} = 1,$$

$$\int W(\Delta\mathbf{v}, \Delta t) \Delta v_i d\Delta\mathbf{v} = \langle \Delta v_i \rangle, \quad (9.4.6)$$

$$\int W(\Delta\mathbf{v}, \Delta t) \Delta v_i \Delta v_j d\Delta\mathbf{v} = \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle,$$

причем первое соотношение является условием нормировки, а следующие – обычным определением средних значений. Уравнение (9.4.5) можно записать также в форме

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial v_j} - A_i f(\mathbf{v}, t) \right), \quad (9.4.7)$$

где величины

$$A_i = -\frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta t}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle}{\Delta t} \quad (9.4.8)$$

называются коэффициентами Фоккера – Планка. Уравнение (9.4.7) по виду совпадает с полученным в задаче 6 по теме III, однако коэффициенты Фоккера – Планка (коэффициенты динамического трения

и диффузии в пространстве скоростей) непосредственно выражены через флуктуации скоростей.

Заметим, что согласно кинетической теории газов отброшенные члены в разложении (9.4.5), содержащие более высокие степени Δv_i , описывают парные столкновения, при которых скорость претерпевает резкие скачкообразные изменения, а их суммирование приводит к интегралу столкновений Больцмана. Из физических соображений ясно, что коэффициент динамического трения в пространстве скоростей A_i характеризует среднее изменение абсолютного значения скорости частиц за единицу времени, вследствие чего он может быть выражен через потери энергии направленного движения заряженных частиц в плазме. Коэффициент D_{ij} имеет чисто флуктуационное происхождение и характеризует направленное изменение скорости частиц вследствие рассеяния на флуктуационных полях в плазме, поэтому он называется коэффициентом диффузии в пространстве скоростей.

Коэффициенты A_i и D_{ij} можно вычислить из формул (9.4.8) и уравнений движения заряженных частиц во флуктуационных полях. Однако поступим иначе. Выразим коэффициенты A_i и D_{ij} через флуктуации продольного поля и потери энергии пробной частицы на возбуждение продольного поля в плазме. Для простоты ограничимся рассмотрением невырожденной изотропной электронной плазмы с учетом лишь электрон-электронных столкновений. Согласно § 3.3 коэффициенты D_{ij} и A_i при этом запишутся в виде

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = 2e^4 \int d\mathbf{p}' f(\mathbf{v}') \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')}{k^2 |\varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)|^2}, \quad (9.4.9)$$

$$A_i(\mathbf{v}) = 2e^4 \int d\mathbf{p}' \frac{\partial f(\mathbf{v}')}{\partial p'_j} \int \frac{d\mathbf{k}}{2} \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')}{k^2 |\varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)|^2}.$$

С другой стороны, согласно (9.3.1) для электронной плазмы имеем

$$\langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}} = \frac{32\pi^3 e^2}{k^2 |\varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)|^2} \int d\mathbf{p}' f(\mathbf{v}') \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}'). \quad (9.4.10)$$

Из сравнения (9.4.9) и (9.4.10) следует, что

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{e^2}{16\pi^3} \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^2} \langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}}, \quad (9.4.11)$$

т.е. коэффициент диффузии выражается через флуктуации продольного поля в плазменной среде.

Выразим теперь коэффициент динамического трения A_i через поляризационные потери энергии пробной частицы в плазменной среде. С этой целью запишем выражение для продольного поля излучения движущегося электрона в изотропной среде

$$\mathbf{E}^l(\mathbf{kv}, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi ie}{k^2} \frac{\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \varepsilon^l(\mathbf{kv}, k)}. \quad (9.4.12)$$

Учитывая, что

$$\text{Im } \varepsilon^l(\omega, k) = -i\pi \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{(\mathbf{kv})\mathbf{k}}{k^2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \delta(\omega - \mathbf{kv}), \quad (9.4.13)$$

находим окончательно

$$A_i(\mathbf{v}) = \frac{1}{32\pi^2} \int d\mathbf{k} k_i \text{Im } \varepsilon^l(\mathbf{kv}, k) \mathbf{E}^l(\mathbf{kv}, \mathbf{k}) \mathbf{E}^{l*}(\mathbf{kv}, \mathbf{k}). \quad (9.4.14)$$

Отсюда видно, что коэффициент динамического трения выражается через продольное поле, создаваемое в плазменной среде движущимся электроном. Это поле ответственно за поляризационные потери энергии движущегося электрона.

Отметим, что коэффициенты A_i и D_{ij} выражены через продольные поля в плазме. В действительности вклад дают также поперечные поля – потери на излучение волн и флуктуации поперечного поля. Однако в нерелятивистской плазменной среде вклад поперечных полей пренебрежимо мал. В изотропной среде поперечные волны вообще не излучаются, а флуктуации поперечного поля малы по сравнению с флуктуациями продольного поля в c^3/v_{Te}^3 раз (см. задачу 1 по этой теме). Поэтому и рассеянием частиц на флуктуациях поперечного поля можно пренебречь.

Таким образом, нами показано, что интеграл столкновений в кинетическом уравнении для заряженных частиц в полностью ионизованной нерелятивистской плазменной среде выражается через флуктуации продольного поля. Это означает, что изменение импульса заряженных частиц из-за кулоновских столкновений можно трактовать как потери энергии и диффузию в пространстве скоростей вследствие рассеяния частиц в случайных электростатических полях, обусловленных тепловыми флуктуациями в среде. Такую тесную взаимосвязь между тепловыми флуктуациями и столкновениями заряженных частиц в термодинамически равновесной полностью ионизованной плазме можно усмотреть также из соотношения (9.3.14), если

переписать его в виде

$$\frac{\langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{r}}}{4\pi n_e T_e} \approx \left(\frac{e^2 n_e^{1/3}}{T_e} \right)^{3/2} \approx \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega_{Le}} \ll 1. \quad (9.4.15)$$

Из этого соотношения следует равенство относительной энергии флуктуации продольного поля (по отношению к тепловой энергии) и относительной эффективной частоты столкновений электронов в плазме (по отношению к собственной частоте плазменных колебаний).

Задачи по теме IX

Задача 1. Получить выражение для флуктуаций магнитного поля в равновесной изотропной плазме.

Решение.

Из соотношения (9.3.2) определяем коррелятор флуктуации поперечного электрического поля в изотропной плазме

$$\langle E^{tr2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{8\pi T}{\omega} \frac{\text{Im } \varepsilon^{tr}(\omega, k)}{\left| \varepsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right|^2}. \quad (1)$$

Используя далее связь $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}]$, получаем

$$\langle B^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \langle E^{tr2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{8\pi T k^2 c^2}{\omega^3} \frac{\text{Im } \varepsilon^{tr}(\omega, k)}{\left| \varepsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right|^2}. \quad (2)$$

В области прозрачности плазмы, т.е. в пределе $\omega \gg kv_{Te}$, когда $\varepsilon^{tr}(\omega, k) \approx 1 - \omega_{Le}^2/\omega^2$, отсюда находим

$$\langle B^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{16\pi^2 T k^2 c^2}{|\omega|} \delta(\omega^2 - \omega_{Le}^2 - k^2 c^2). \quad (3)$$

Интегрирование этого выражения по частотам дает

$$\langle B^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{8\pi^2 T k^2 c^2}{\omega_{Le}^2 + k^2 c^2}. \quad (4)$$

Отсюда легко найти пространственную корреляционную функцию

$$\langle B^2 \rangle_{\mathbf{r}} = 8\pi^2 T \left[\delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-r/r_{\text{кор}})}{r^2 r_{\text{кор}}} \right], \quad (5)$$

где $r_{\text{кор}} = c/\omega_{Le}$ – длина корреляции флуктуаций магнитного поля в изотропной плазме, равная глубине поляризационного скип-эффекта.

Из (5) при $r \approx r_{\text{кор}}$ получаем

$$\frac{\langle B^2 \rangle_{\mathbf{r}}}{4\pi n_e T} \sim \frac{\langle E^{tr2} \rangle_{\mathbf{r}}}{4\pi n_e T} \sim \frac{1}{r_{\text{кор}}^3 n_e} \sim \frac{v_{Te}^3}{c^3} \frac{1}{r_{De}^3 n_e} \sim \frac{v_{Te}^3}{c^3} \frac{\langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{r}}}{4\pi n_e T}. \quad (6)$$

Таким образом, энергия флуктуации поперечного поля в плазме в c^3/v_{Te}^3 раз меньше энергии флуктуации продольного поля.

Задача 2. Определить относительный вклад интенсивности высокочастотных флуктуаций в полную интенсивность флуктуаций плотности заряда в равновесной электронной плазме.

Решение.

Интегральный вклад высокочастотных флуктуаций определяем путем интегрирования выражения (9.3.8) по частотам

$$\langle \tilde{\rho}^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^2 n_e k^2 v_{Te}^2}{\omega} \delta(\omega^2 - \omega_{Le}^2 - 3k^2 v_{Te}^2) \approx \frac{1}{2} \frac{e^2 n_e k^2}{3k^2 + 4\pi e^2 n_e / T} \quad (1)$$

Искомое отношение высокочастотной интенсивности к полной находим с использованием выражения (9.3.12) для полной интенсивности

$$\frac{\langle \tilde{\rho}^2 \rangle_{\mathbf{k}}}{\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}}} = \frac{1 + k^2 r_{De}^2}{1 + 3k^2 r_{De}^2}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что при $k^2 r_{De}^2 \ll 1$, т.е. в области больших по сравнению с дебаевским радиусом длин волн, в спектре флуктуаций остаются практически только высокочастотные флуктуации на плазменной частоте. С уменьшением длины волны роль низкочастотных флуктуаций возрастает и при $k^2 r_{De}^2 \gg 1$ основной вклад в полную интенсивность дают низкочастотные флуктуации.

ТЕМА X

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕННЫХ СРЕДАХ

§ 10.1. Многоиндексные тензоры диэлектрической проницаемости. Укороченное уравнение для взаимодействия волн

Современная нелинейная электродинамика плазменных сред развивается в двух направлениях: а) построение теории нелинейной диэлектрической проницаемости (нелинейный закон Ома) на основе решения кинетических уравнений методом разложения по степеням электромагнитного поля с последующим решением укороченных (оборванных на некоторой степени поля) уравнений и б) точный учет линейного поглощения поля в среде и сопровождающих это явление изменений равновесной функции распределения либо равновесных параметров с самосогласованным анализом линейных свойств в этом новом состоянии. Первое направление известно как теория нелинейного взаимодействия волн в плазменной среде, а второе – как квазилинейная теория колебаний и волн.

Естественно, нелинейная электродинамика среды должна учитывать как эффекты нелинейного взаимодействия волн, так и эффекты квазилинейной релаксации. Но это одновременно сделать сложно и поэтому их рассматривают отдельно и сравнивают времена их проявления, определяя условия, при которых тот или иной эффект является доминирующим.

В настоящем параграфе мы начинаем излагать основы первого из отмеченных выше направлений в нелинейной электродинамике плазменных сред. Как обычно исходим из уравнения Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (10.1.1)$$

представляя f в виде разложения по степеням поля

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots, \quad (10.1.2)$$

где $f_n \sim E^n$, а f_0 – равновесное однородное распределение Максвелла либо Ферми.

Для простоты ограничимся рассмотрением изотропной плазменной среды в отсутствие внешних полей. Тогда из (10.1.1) и (10.1.2) получаем

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{r}} + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (10.1.3)$$

Разложим все $f_n(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ в интегралы Фурье

$$A(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \int d\mathbf{k} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(\omega, \mathbf{k}).$$

В результате из (10.1.3) $f_n(\omega, \mathbf{k})$ выражается через $f_{n-1}(\omega, \mathbf{k})$ и т.д., $f_1(\omega, \mathbf{k})$ – через f_0 . Найдя затем индуцированный ток в виде ряда по степеням поля

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = \sum e \int f \mathbf{v} d\mathbf{p} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 + \dots + \mathbf{j}_n + \dots, \quad (10.1.4)$$

а вместе с ним нелинейный закон индукции

$$\begin{aligned} D_i(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \int d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_{n-1} \times \\ &\times \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1; \dots \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) \times \\ &\times E_{j_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \dots E_{j_n}(\omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}). \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ – известный тензор диэлектрической проницаемости второго ранга, а $\varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1; \dots \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1})$ – многоиндексные тензоры

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1; \dots \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) &= \\ &= \delta_{n1} \delta_{ij_1} - 4\pi (-ie)^{n-1} \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega} g \hat{\Gamma}_{j_1} \dots g_n \hat{\Gamma}_{j_n} f_0, \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

где

$$g = \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \quad g_n = \frac{1}{\omega_n - \mathbf{k}_n\mathbf{v}},$$

$$\hat{\Gamma}_{jn} = \frac{1}{\omega_{n-1} - \omega_n} [(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{n-1})_{jn} \mathbf{v}_j +$$

$$+ \delta_{jn}(\omega_{n-1} - \omega_n - \mathbf{v}(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{n-1}))] \frac{\partial}{\partial p_j}.$$
(10.1.7)

Как отмечалось, соотношение (10.1.5) является точным. Дальнейшее упрощение связано с обрезанием ряда на каком-либо $n > 2$. Естественно, наименьшим нелинейным приближением является так называемое трехволновое приближение, когда в правой части (10.1.5) учитывают члены только до кубического включительно. При этом важную роль играет линейное приближение в (10.1.5), которое и приводит при подстановке в уравнения Максвелла к условию существования ненулевых решений в виде плоских монохроматических волн

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0. \quad (10.1.8)$$

Это уравнение определяет все возможные волны в среде и их закон дисперсии $\omega(\mathbf{k})$. При учете нелинейных членов в соотношении (10.1.5) появляются нелинейные и комбинационные гармоники линейных волн, что приводит к слабой зависимости от времени этих волн, т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}, t) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (10.1.9)$$

Уравнение для этих амплитуд находится, исходя из (10.1.5) и закона сохранения энергии

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{div} [\mathbf{E} \mathbf{B}] = 0. \quad (10.1.10)$$

Кроме того, считая фазы полей случайными, проводится усреднение

по фазам (или по времени)¹:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t) \rangle &= 0, \\ \langle E_i(\omega, \mathbf{k}, t) E_j^*(\omega_1, \mathbf{k}_1, t) \rangle &= \langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_1) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1), \\ W(\omega, \mathbf{k}) &\equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} [M_{ij}^{\text{э}}(\omega, \mathbf{k}) \omega] \langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}, \\ M_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

Коррелятор 4-го порядка выражается как произведение корреляторов второго порядка (10.1.11). В результате в трехволновом приближении получается довольно громоздкое уравнение для $\langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$, которое ниже представлено только схематически

$$\begin{aligned} \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \left[M_{ij}^{\text{э}}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t} \langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \right] &= 2i \varepsilon_{ij}^{\text{э}}(\omega, \mathbf{k}) \langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} + \\ + \int d\omega' d\mathbf{k}' \{ &Q_{1ij\mu\nu}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E_i E_j \rangle_{\omega', \mathbf{k}'} \langle E_\mu E_\nu \rangle_{\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'} + \\ &+ Q_{2ij\mu\nu}(\omega, \mathbf{k}; \omega' - \omega, \mathbf{k}' - \mathbf{k}) \langle E_i E_j \rangle_{\omega', \mathbf{k}'} \langle E_\mu E_\nu \rangle_{\omega', \mathbf{k}'} \}. \end{aligned} \quad (10.1.12)$$

Ядра этого интегрального уравнения $Q_{1ij\mu\nu}$ и $Q_{2ij\mu\nu}$ являются сложными функциями параметров плазмы и имеют громоздкий вид. Мы их здесь не будем выписывать (их можно найти в рекомендуемых ниже учебниках), отметим только, что они пропорциональны обратному тензору M_{ij}^{-1} , а поэтому их полюса соответствуют собственным линейным волнам, зависимость амплитуд которых от времени и учитывает левая часть уравнения (10.1.12). Первое же слагаемое в правой части учитывает линейное затухание, обусловленное мнимой частью линейной диэлектрической проницаемости; оно же определяет порог развития нелинейных процессов, обусловленных вторым и третьим слагаемыми.

Уравнение (10.1.12) описывает все многообразие трехволновых процессов в плазме, их великое множество. Естественно, мы здесь их не будем даже перечислять, а рассмотрим только некоторые, наиболее важные в прикладном отношении. Все эти случаи будут к тому же

¹Индекс "э", как обычно, означает эрмитовую часть тензора.

наиболее простыми для анализа, поскольку в них одна волна будет считаться заданной, называемой волной накачки. При этом уравнение (10.1.12) сведется к линейному уравнению, описывающему рождение плазменных волн под действием падающей заданной волны накачки. Следовательно, решение этого уравнения сведется к анализу условия его разрешимости – дисперсионного уравнения возбуждения в плазме волн при взаимодействии с заданной нелинейной волной. Ниже рассмотрим несколько примеров применения уравнения (10.1.12) при заданном поле волны накачки.

§ 10.2. Параметрическая раскачка плазменных колебаний в плазменной среде во внешнем однородном СВЧ электрическом поле

Рассмотрим плазму во внешнем однородном СВЧ поле

$$\mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t. \quad (10.2.1)$$

Эту задачу мы будем решать, предполагая, что $\omega_0 \geq \omega_{Le}, \Omega_e$, допуская тем самым возможность резонансного возбуждения в плазменной среде собственных колебаний и их комбинационных гармоник. Единственным ограничением является относительная малость амплитуды \mathbf{E}_0 , что позволяет ограничиться учетом только квадратичных членов по \mathbf{E}_0 . Это заложено в уравнении (10.1.12). Кроме того, для простоты и две другие волны будем считать продольными (СВЧ поле, как однородное в пространстве, очевидно, является продольным). Таким образом, если говорить на языке взаимодействия волн, то мы рассматриваем трехволновые процессы с участием только продольных волн. В результате из (10.1.12) следует дисперсионное уравнение

$$\frac{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}) [1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})]} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)^2}{4} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega + \omega_0, \mathbf{k})} + \frac{1}{\varepsilon(\omega - \omega_0, \mathbf{k})} \right] = 0, \quad (10.2.2)$$

где $\mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{v}_E}{\omega_0} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega_0^2}$ – амплитуда осцилляций электрона в поле СВЧ волны, а

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}),$$

где $\delta\varepsilon_{e,i}(\omega, \mathbf{k})$ – эффективные парциальные продольные диэлектрические проницаемости электронов и ионов.

Из уравнения (10.2.2) сразу же видно, что наиболее сильное воздействие СВЧ поле оказывает на плазменную среду в условиях, когда одновременно выполняются соотношения

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad \varepsilon(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k}) = 0. \quad (10.2.3)$$

Это означает, что ω и $\omega \pm \omega_0$ одновременно являются частотами собственных продольных колебаний среды, т.е.

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad (10.2.4)$$

где ω_0 , ω_1 и ω_2 – частоты собственных колебаний. Это условие называется распадным.

Анализ распадных процессов начнем с изотропной максвелловской плазмы, в которой, как мы уже знаем, существуют только две ветви продольных колебаний – высокочастотная электронная ленгмюровская с $\omega_1 \simeq \omega_{Le}$ и низкочастотная ионно-звуковая $\omega_2 \simeq kv_s$, существующая в неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) в области частот $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$. Из уравнения (10.2.2) именно в этой области частот имеем

$$-\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} + \frac{k^2 v_s^2}{\omega_{Li}^2} \left(1 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}}\right) \frac{(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)^2}{2} \frac{\Delta}{\Delta^2 - 4\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = 0, \quad (10.2.5)$$

где $\Delta = \left(\frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2} - 1\right)$ – так называемая расстройка резонанса. Легко видеть, что при условии

$$\omega_0 \simeq \omega_{Le} + kv_s = \omega_1 + \omega_2 \quad (10.2.6)$$

решение уравнения (10.2.5) имеет вид

$$\omega = kv_s + i\delta = \omega_2 + i\delta, \quad (10.2.7)$$

$$\delta = \frac{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2}{16\omega^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)^2}{k^2 r_{De}^2} kv_{Te}.$$

Отсюда следует, что в области $\omega_0 > \omega_{Le}$, (или $\Delta > 0$), т.е. в области прозрачности плазмы, $\delta > 0$ и имеет место неустойчивость, соответствующая распаду СВЧ поля на электронные ленгмюровские и

ионно-звуковые колебания при выполнении распадного условия (10.2.6). Очевидно, что такой распад возможен, если инкремент δ превосходит декремент затухания ленгмюровских колебаний, который порядка $\nu_e/2$, т.е.

$$\eta = \frac{E_0^2}{8\pi n T_e} > \sqrt{8\pi \frac{m}{M} \frac{\nu_e}{\omega_0}}. \quad (10.2.8)$$

В магнитоактивной плазменной среде число ветвей колебаний значительно разнообразнее. Более богатым оказывается и возможность распадов. Ограничимся лишь демонстрацией существования такого распада и поэтому рассмотрим только один простой пример. Именно, рассмотрим слабозамагниченную плазму, в которой $\omega_{Le,i}^2 \gg \Omega_{e,i}$. В такой плазме существуют две высокочастотные (электронные) ветви продольных колебаний

$$\omega_1^2 \simeq \omega_{Le}^2, \quad \omega_2^2 \simeq \Omega_e^2 \frac{k_z^2}{k^2} = \Omega_e^2 \cos^2 \vartheta, \quad (10.2.9)$$

где ϑ – угол между направлением распространения волны и магнитным полем (осью $0z$). СВЧ поле с частотой $\omega \simeq \omega_1 + \omega_2$ приводит к параметрической раскачке именно этих колебаний, в чем легко убедиться из дисперсионного соотношения

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_{Le}^2} + i \frac{\omega_1}{2\delta} - \frac{(\mathbf{k}r_E)^2 \omega_2 (\omega_2^2 - \Omega_e^2)}{8 (\Delta + i\delta) \omega_1^2} = 1, \quad (10.2.10)$$

при получении которого из (10.2.2) было принято $\omega = \omega_1 + i\delta$. Здесь $\Delta = \omega_0 - \omega_1 - \omega_2$ – расстройка. При $\Delta \gg \delta$, если принять

$$\Delta = -\frac{m (\mathbf{k}r_E)^2 \Omega_e^3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta}{M 8 \omega_{Le}^2},$$

то получаем

$$\delta^2 = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{(\mathbf{k}r_E)^2 \Omega_e^3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta}{16 \omega_{Le}} = \frac{m \Delta \omega_{Le}}{M 2}. \quad (10.2.11)$$

Поскольку $\delta^2 > 0$, то и $\delta > 0$ и система неустойчива. Порог неустойчивости при этом, очевидно, определяется из условия $\delta > \nu_e/2$, т.е. инкремент должен превосходить линейное затухание, обусловленное столкновениями.

Обобщение полученных выше результатов на случай вырожденной плазменной среды очевидно: необходимо всюду произвести замену $v_{T\alpha} \rightarrow v_{F\alpha}$.

§ 10.3. Плазменная среда в поле сильной электромагнитной волны. Вынужденное рассеяние волн

В предыдущем параграфе мы рассмотрели задачу распада волн в плазменной среде, помещенной в пространственно однородное СВЧ электрическое поле. Учтем теперь пространственную неоднородность, или конечную длину волны этого поля. Тем самым мы переходим к задаче распада в поле сильной электромагнитной волны, амплитуда которой считается заданной. Последнее облегчает рассмотрение задачи в рамках трехволнового приближения.

Из всех возможных трехволновых процессов мы ограничимся рассмотрением задачи рассеяния высокочастотной поперечной электромагнитной волны в изотропной среде с возбуждением продольных плазменных колебаний, считая амплитуду падающей волны заданной. При этом из уравнения (10.1.12) получаем следующее дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, k) + \frac{\delta\varepsilon_e^l(\omega, k)}{4\omega_0^2(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})^2} \times \\ \times \frac{k^2(\omega_0 - \omega)^2 [(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \times \mathbf{v}_E]^2}{(\omega_0 - \omega)^2 \varepsilon^{tr}(\omega - \omega_0, k) - c^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} = 0. \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

При получении уравнения (10.3.1) предполагалось, что частота падающей волны $\omega_0 \gg \omega, \omega_{Le} \gg kv_{Te}, \omega_{Li}$. Волна накачки с частотой ω_0 и рассеянная волна с частотой $\omega_s = \omega_0 - \omega$ считаются поперечными, т.е. $\mathbf{E}_s \perp (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$, а $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}_0$, причем ω и \mathbf{k} — частота и волновой вектор возбуждаемой в процессе рассеяния плазменной волны. В принятых выше ограничениях

$$\varepsilon^l(\omega, k) \simeq 1 + \delta\varepsilon_e^l(\omega, k) \simeq 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_e^{tr}(\omega_0 - \omega, k) \simeq 1, \quad (10.3.2)$$

а уравнение (10.3.1) можно переписать в виде

$$(\omega^2 - \omega_{Le}^2) (\omega_s^2 - c^2 k_s^2) = \frac{\omega_{Le}^2 k^2 v_E^2}{4}, \quad (10.3.3)$$

где $\omega_s = \omega_0 - \omega$, а $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$, причем $\omega_0 \simeq ck_0$, а $\omega_s \simeq ck_s$.

Теперь мы можем решать уравнение (10.3.3). Здесь следует различать два предельных случая: а) случай $\omega \gg \omega_{Le}$, именуемый томсоновским рассеянием и б) случай $\omega = \omega_{Le} + i\delta$, где $\delta \ll \omega_{Le}$, именуемый рамановским рассеянием.

Для случая томсоновского рассеяния из (10.3.3) следует выражение для инкремента нарастания продольной волны

$$\text{Im } \omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{k^2 v_E^2 \omega_{Le}^2}{8\omega_0} \right)^{1/3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_0 \omega_{Le}^2 v_E^2}{2c^2} \right)^{1/3}. \quad (10.3.4)$$

Максимум инкремента достигается при $k = 2k_0 = 2\frac{\omega_0}{c}$, т.е. для рассеяния назад. Из условия $\text{Im } \omega \gg \omega_{Le}$ находим условие применимости томсоновского приближения

$$\frac{v_E^2}{c^2} \gg \frac{\omega_{Le}}{\omega_0}, \quad (10.3.5)$$

которое можно считать также порогом рассматриваемого процесса.

При нарушении неравенства (10.3.5) процесс рассеяния меняет свой характер – из томсоновского он переходит в рамановский, когда $\omega = \omega_{Le} + i\delta$. Для δ при этом из (9.3.3) находим

$$\delta = \left(\frac{k^2 v_E^2 \omega_{Le}}{16\omega_0} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{v_E^2}{4c^2} \omega_0 \omega_{Le} \right)^{1/2}. \quad (10.3.6)$$

Здесь также максимум инкремента достигается для рассеяния назад, когда $k = 2k_0 \simeq 2\frac{\omega_0}{c}$. Для рамановского рассеяния порог уже определяется столкновительным затуханием возбуждаемых плазменных волн и дается неравенством $\delta > \nu_e/2$, или

$$\frac{v_E^2}{2c^2} \omega_0 \omega_{Le} > \frac{\nu_e^2}{4}. \quad (10.3.7)$$

В заключение настоящего параграфа рассмотрим вынужденное рассеяние падающей поперечной волны на ионно-звуковых колебаниях неизотермической плазмы ($T_e \gg T_i$), известное как рассеяние Мандельштама – Бриллюена. Считая амплитуду падающей волны достаточно большой и поэтому заданной, будем исходить из уравнения (10.3.1), подставляя в него выражения

$$\delta \varepsilon_e^l(\omega, k) = \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} \right), \quad \delta \varepsilon_i(\omega) = -\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}. \quad (10.3.8)$$

В результате из (10.3.1) получаем

$$\begin{aligned} k^2 r_{De}^2 - \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} k^2 r_{De}^2 = \\ = \frac{k^2}{4(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \frac{[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times \mathbf{v}_E]^2}{2\omega\omega_0 + c^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} = 0. \end{aligned} \quad (10.3.9)$$

Знаменатель правой части уравнения (10.3.9) соответствует частоте рассеянной волны $\omega_s = \omega_0 - \omega$ с волновым вектором $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$. Учитывая, что $\omega \ll \omega_0$, мы здесь произвели преобразование

$$(\omega_0 - \omega)^2 \varepsilon^{tr}(\omega_0 - \omega) - c^2(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})^2 \simeq 2\omega\omega_0 + c^2(k^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0). \quad (10.3.10)$$

Кроме того, в уравнении (10.3.1) следует учесть также слагаемые с $(\omega_0 + \omega)$ и $(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)$, добавив аналогичную второму слагаемому поправку. Такая же поправка, очевидно, возникнет и в правой части (10.3.9). Полученное в результате уравнение имеет решение следующего вида

$$\omega = kv_s + i\delta, \quad (10.3.11)$$

причем для δ при условии (10.3.10) находим выражение

$$\delta_{max} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\pi m}{2M} k^2 v_s^2 + \frac{\omega_{Li}^2}{4\omega_0 k v_s} [v_E^2 k^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}_E)^2]} - \sqrt{\frac{\pi m}{8M} k v_s} \right\} > 0, \quad (10.3.12)$$

которое свидетельствует о нарастании рассеянной ионно-звуковой волны. Однако, порог у этого процесса все-таки есть и он следует из условия пренебрежения столкновительным затуханием падающей волны

$$\delta_{max} > \frac{\nu_e \omega_{Le}^2}{2\omega_0^2}. \quad (10.3.13)$$

Обобщение полученных результатов на случай вырожденной плазмы очевидно.

§ 10.4. Квазилинейная теория колебаний плазменной среды

Выше мы рассмотрели такие нелинейные явления в плазме, которые не изменяли ее основного равновесного состояния $f_0(p)$. К таким явлениям относятся нелинейное взаимодействие волн, вынужденное рассеяние с возбуждением плазменных колебаний и комбинационных гармоник. Здесь же мы рассмотрим, напротив, изменение основного состояния плазмы в результате поглощения электромагнитной волны, как бы из-за "нагрева" плазмы полем волны, изменяющего, в свою очередь, характер самого поглощения, поскольку он определяется основным состоянием $f_0(p, t)$. Тем самым процесс поглощения

волны и изменения равновесного состояния взаимно согласуются. Такое приближение, в котором волна считается "линейной" и описывается формулами линейной теории, но в этих формулах учитывается медленное изменение равновесной функции $f_0(p, t)$ вследствие поглощения волны, известно как квазилинейное приближение.

Мы здесь изложим основы квазилинейной теории на примере продольных колебаний поля ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) и рассмотрим несколько простейших примеров ее применения. В отсутствие внешнего магнитного поля будем исходить из уравнения Власова и уравнений Максвелла в форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (10.4.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum e \int f d\mathbf{p} \quad \text{либо} \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \sum e \int f \mathbf{v} d\mathbf{p} = 0.$$

Обе последние формы записи уравнений поля при $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ эквивалентны, в чем не трудно убедиться, воспользовавшись уравнением непрерывности. Будем считать поле относительно слабым, так, что

$$\left(\frac{e^2 n^{1/3}}{T_e} \right)^{3/2} \simeq \frac{\nu_e}{\omega_{Le}} \ll \frac{E^2}{8\pi n T_e} \ll 1. \quad (10.4.2)$$

Левая часть этого неравенства позволяет пренебречь столкновениями частиц в плазме, а правая – использовать линейное приближение для описания малых колебаний, представив $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ в виде

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= f_0(\mathbf{p}, t) + f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \\ &= f_0(\mathbf{p}, t) + \sum_k \operatorname{Re} \left\{ f_{1k} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right\}. \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

Здесь $f_0(\mathbf{p}, t)$ – медленно меняющаяся по сравнению с $f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ функция времени, причем $f_1 \ll f_0$. Так же можно представить и поле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_k e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right\}. \quad (10.4.4)$$

Подставляя (10.4.3) и (10.4.4) в уравнение (10.4.1) и проводя усреднение по времени, легко получаем два уравнения для медленной $f_0(\mathbf{p}, t)$

и быстрой $f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ частей функции распределения

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + e \langle \mathbf{E} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} \rangle = 0, \quad (10.4.5)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Поскольку второе уравнение линейное, а f_0 – медленно меняющаяся функция, то используя (10.4.3) получаем

$$f_{1k} = -\frac{ie\mathbf{E}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (10.4.6)$$

В таком же приближении для малых колебаний справедливо дисперсионное уравнение

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} d\mathbf{p} = 0, \quad (10.4.7)$$

причем

$$\frac{\partial |\mathbf{E}_k|^2}{\partial t} = 2\delta_k |\mathbf{E}_k|^2, \quad (10.4.8)$$

$$\delta_k = -\frac{1}{2} \sum \frac{4\pi e^2 \omega}{k^2} \int d\mathbf{p} \operatorname{Im} \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}.$$

Для получения уравнения для $f_0(\mathbf{p}, t)$ подставляем (10.4.6) в первое уравнение (10.4.5). В результате получим уравнение диффузии в пространстве импульсов

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij} \frac{\partial f_0}{\partial p_j}, \quad (10.4.9)$$

$$D_{ij} = -\frac{e^2}{2} \sum_k \frac{k_i k_j}{k^2} |\mathbf{E}_k|^2 \operatorname{Im} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}.$$

Уравнения (10.4.7)–(10.4.9) образуют полную систему уравнений квазилинейной теории для продольных колебаний изотропной плазмы. Ее нетрудно обобщить на случай магнитоактивной плазмы и произвольных непотенциальных колебаний. Легко показать, что эта система обеспечивает выполнение трех основных законов сохранения:

числа частиц, импульса и энергии

$$\frac{d}{dt} \int f d\mathbf{p} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left[\sum \int f d\mathbf{p} \mathbf{p} + \sum_k \frac{\mathbf{k} |\mathbf{E}_k|^2}{8\pi\omega} \right] = 0, \quad (10.4.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\sum \int f d\mathbf{p} \frac{p^2}{2m} + \sum_k \frac{|\mathbf{E}_k|^2}{8\pi} \right] = 0,$$

в чем можно убедиться простой проверкой.

Применим теперь полученную систему уравнений к решению конкретных задач. Пусть в начальный момент времени в изотропной термодинамически равновесной электронной плазме в некоторой достаточно узкой области фазовых скоростей заданы плазменные колебания (ограничиваемся одномерным случаем):

$$W_k(0) = \frac{|E_k(0)|^2}{8\pi} = \begin{cases} 0, & \frac{\omega}{k} \leq v_1, \\ W_0, & v_1 \leq \frac{\omega}{k} \leq v_2, \\ 0, & \frac{\omega}{k} \geq v_2. \end{cases} \quad (10.4.11)$$

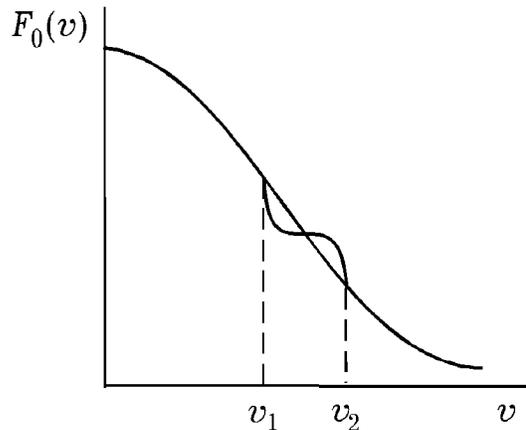


Рис. 10.1

На рис. 10.1 изображено начальное одномерное максвелловское распределение $F_0(v, 0)$, нормированное на единицу, $\int F_0(v, 0) dv = 1$, и указана область фазовых скоростей плазменных колебаний $v_1 \leq \frac{\omega}{k} \leq v_2$, причем предполагается $v_1, v_2 \gg v_{Te}$ с тем, чтобы обеспечить малость затухания Ландау, $\Delta v = v_2 - v_1 \ll v_{Te}$. В результате поглощения колебаний начальная функция распределения

$$F_0(v, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T_e}} e^{-\frac{mv^2}{2T_e}} \quad (10.4.12)$$

будет искажаться. Требуется описать временную динамику $W_k(t)$ и $F_0(v, 0)$, исходя из квазилинейных уравнений, которые в одномерном случае записываются в виде

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial F_0}{\partial v},$$

$$D = -\frac{e^2}{2m^2} \sum_k |E_k|^2 \text{Im} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{\pi}{2} \sum_k \frac{e^2 |E_k|^2}{m^2 k v},$$

$$\frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = 2\delta_k |E_k|^2, \quad (10.4.13)$$

$$\delta_k = -\frac{\omega_{Le}^2}{4k^2} \int dv k \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \text{Im}(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) = \frac{\pi \omega_{Le}^2}{2 k^2} \left. \frac{\partial F_0}{\partial v} \right|_v = \frac{\omega}{k}.$$

Из этой системы видно, что существует стационарное решение с $\frac{\partial F_0}{\partial v} = 0$ в области $v_1 \leq v \leq v_2$, причем в этом состоянии $\delta_k = 0$ и поэтому $|E_k(t \rightarrow \infty)|^2 \neq 0$. Такое решение описывает образование "плато" на функции $F_0(v)$ и реализуется, если в начальном состоянии энергия колебаний $|E_k(0)|^2$ достаточно велика. На рис. 10.1 образование "плато" указано пунктирной линией.

Уравнения (10.4.13) описывают временную динамику квазилинейной релаксации плазменных колебаний. Мы здесь выпишем лишь результаты, относящиеся к конечному состоянию с образовавшимся на функции распределения "плато". Из закона сохранения числа частиц в интервале скоростей (v_1, v_2) определяется установившаяся высота

”плато”

$$F_0(v, \infty) = \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} F_0(v, 0) dv. \quad (10.4.14)$$

Уравнения же (10.4.13) при использовании этого соотношения дают установившуюся амплитуду плазменных колебаний

$$W_k(\infty) - W_k(0) = \frac{m^2 \omega_{Le}^4}{4\pi e^2 k^2} \int_{v_1}^{v_2} dv \left[\frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} dv F_0(v, 0) - F_0(v, 0) \right]. \quad (10.4.15)$$

Заметим, что описанное установившееся состояние с образованием ”плато” достигается только при достаточно высоком уровне начальных колебаний. При малом уровне колебания могут полностью поглотиться в плазме, прежде чем на функции распределения образуется ”плато”. Тем самым процесс релаксации досрочно завершится.

Наконец, приведем оценку времени установления ”плато”. Согласно первому уравнению (10.4.13) оно порядка

$$\tau_p \simeq \frac{v^2}{D} \simeq \frac{v^2 n T_e}{v_{Te}^2 \omega_{Le} W_k} \simeq \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \frac{n T_e}{W_k \omega_{Le}} \gg \frac{1}{\omega_{Le}}. \quad (10.4.16)$$

Более того, это время больше чем $1/\delta_k$.

§ 10.5. Солитоны и нелинейные волны в плазменной среде

В этом заключительном параграфе нашего курса мы рассмотрим некоторые точные решения уравнений поля, наиболее распространенные в нелинейной динамике плазменных сред. Прежде, однако, изложим общий математический аппарат, используемый при этом.

а) **Основы теории солитонов в плазме.** Наиболее распространенные спектры $\omega(k)$ в плазменной среде можно разбить на два класса: спектры акустического типа

$$\omega(k) = kv_s - \beta_s k^3 \quad (10.5.1)$$

и спектры оптического типа

$$\omega(k) = \omega_0 + \beta_0 k^2. \quad (10.5.2)$$

Действительно, к первому типу относятся ионно-звуковые колебания, которые при малой дисперсии ($k^2 r_{De}^2 \ll 1$) для невырожденной среды приобретают вид (10.5.1)

$$\omega(k) = kv_s - k^3 v_s r_{De}^2 = kv_s - k^3 \beta_s, \quad (10.5.3)$$

$$\beta_s = v_s r_{De}^2.$$

Ко второму типу относятся ленгмюровские колебания, которые в этом же пределе в случае максвелловской плазмы записываются в виде (10.5.2)

$$\omega = \omega_{Le} + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{2\omega_{Le}} = \omega_{Le} + \beta_0 k^2, \quad \beta_0 = \frac{3}{2} v_{Te} r_{De}. \quad (10.5.4)$$

Оба эти колебания чисто потенциальные и потенциалы их полей соответствуют следующим уравнениям (в одномерном случае)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_s \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta_s \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0 \quad (10.5.5)$$

в случае колебаний акустического типа и

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \omega_0 \Phi + \beta_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (10.5.6)$$

для колебаний оптического типа. Благодаря последним слагаемым происходит линейное дисперсионное расплывание описываемых ими колебаний акустического и оптического типов.

Учтем теперь нелинейности. Для акустических колебаний они, в первую очередь, связаны с разогревом среды (в плазме – электронов), который при малом нагреве можно учесть через зависимость скорости звука v_s от потенциала поля (через T_e)

$$v_s = v_0 + \alpha_s \Phi^{m-1}, \quad (10.5.7)$$

где $m > 1$. Подстановка этого выражения в (10.5.5) приводит к известному нелинейному уравнению Картевега-де-Вриза (КдВ)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\alpha_s}{m} \frac{\partial \Phi^m}{\partial x} + \beta_s \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0. \quad (10.5.8)$$

Путем замены $\Phi = \frac{1}{\alpha_s^{m-1}} f(x - v_0 t, t)$ это уравнение сводится к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial f^m}{\partial x} + \beta_s \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \quad (10.5.9)$$

и имеет очевидный первый интеграл

$$\beta_s \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - v_0 f + \frac{f^m}{m} = 0, \quad (10.5.10)$$

где $\xi = x - v_0 t$, причем учтено, что $f(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. В свою очередь уравнение (10.5.10) допускает солитонное (уединенное) решение

$$f(\xi) = \frac{f_{max}}{\operatorname{ch}^{2n} \left(\frac{\xi}{\Delta} \right)}. \quad (10.5.11)$$

Прямой подстановкой этого решения в (10.5.10) находим связь между характеристиками солитона (10.5.11)

$$n = \frac{1}{m-1} > 0,$$

$$\frac{2(1+n)(1+2n)}{\Delta^2} \beta_s = f_{max}^{m-1}, \quad (10.5.12)$$

$$v_0 = \frac{2n f_{max}^{n-1}}{(2n+1)(n+1)}.$$

Общий вид солитона при $\beta_s > 0$ представлен на рис. 10.2. При $\beta_s < 0$ эта кривая меняет знак. Таким образом, солитон существует при любом знаке β_s .

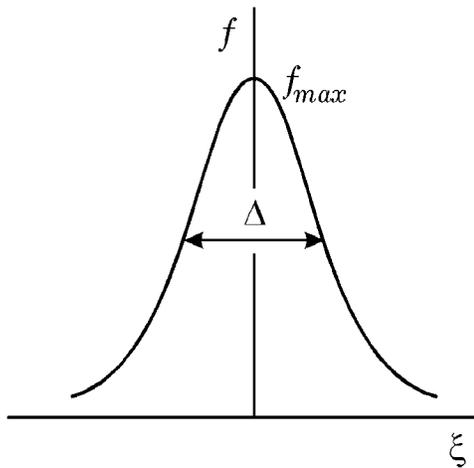


Рис. 10.2

Рассмотрим теперь нелинейную оптическую волну при учете зависимость ω_0 от амплитуды поля

$$\omega_0 = \omega_{00} + \alpha_0 |\Phi|^{2m}, \quad (10.5.13)$$

где $m > 0$. Подстановка (10.5.12) в уравнение (10.5.6) в одномерном случае приводит к нелинейному уравнению Шредингера (НУШ)

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \omega_{00} \Phi - \alpha_0 |\Phi|^{2m} \Phi + \beta_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (10.5.14)$$

Для "стационарного" решения вида $\Phi = \Psi e^{-i\omega t}$ отсюда имеем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left[\frac{\mathcal{U}(x, t)}{6\beta_0} + \mathcal{E} \right] \Psi = 0. \quad (10.5.15)$$

Здесь $\mathcal{U}(x, t) = -6\alpha_0 |\Psi|^{2m}$ играет роль медленно меняющейся со временем потенциальной энергии, а $\mathcal{E} = \frac{\omega - \omega_{00}}{\beta_0}$ — роль собственного значения.

Если функция $\frac{\mathcal{U}(x, t)}{6\beta_0} > 0$ в конечной области и стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$, то уравнение (10.5.15) описывает финитное движение, локализованное в области положительности $\mathcal{U}(x, t)$. Если же $\mathcal{U}(x, t)$ является решением уравнения КдВ, т.е. уравнения (10.5.9), то несмотря на зависимость этой функции от времени, собственное значение $\mathcal{E} = \text{const}$.

Пусть $\mathcal{U}(x, t)$ совпадает с (10.5.11) при $n = 1$, т.е.

$$\mathcal{U}(x, t) = \frac{6\beta_0 \mathcal{U}_0}{\text{ch}^2 \frac{\xi}{\Delta}} = -6\alpha_0 |\Psi|^{2m}, \quad (10.5.16)$$

где $\xi = x - vt$. Тогда уравнение (10.5.15) при $m = 1$ имеет решение в виде гипергеометрической функции Ψ_k (полинома степени $k = 0, 1, \dots$), причем каждому уравнению k , соответствует собственное значение s $k > s$

$$s = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 4\mathcal{U}\Delta^2} - 1 \right), \quad \mathcal{E}_k = -\frac{(s - k)^2}{\Delta^2}. \quad (10.5.17)$$

Если учесть, что $m = 1$ согласно (9.5.11) $\mathcal{U}_0 \Delta^2 = 2$, а поэтому $s = 1$ и $k = 0$, то

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{\Delta^2} = -\frac{\mathcal{U}_0}{2}. \quad (10.5.18)$$

Таким образом, мы нашли оптический солитон, локализованный в бегущей потенциальной яме акустического солитона, которым является величина $|\Psi|^2$, представляющая собой энергию оптической волны. Такой акустический солитон называется солитоном огибающей.

б) **Ионно-звуковой солитон в неизотермической плазме.** Выше уже отмечалось, что примером акустической волны в плазме является ионно-звуковая волна, которая существует в плазме с $T_e \gg T_i$ и описывается одножидкостной гидродинамикой. Чтобы учесть нелинейную динамику этой волны, мы выйдем за рамки одножидкостной гидродинамики и учтем малое отклонение от квазинейтральности плазмы, записав уравнения в одномерном случае:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 4\pi e(n_e - n_i), \quad (10.5.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{e}{M} \nabla \Phi, \quad n_e = n_0 e^{e\Phi/T_e}.$$

Из этой системы уравнений, используя разложение по степеням Φ , в наинизшем приближении с $e\Phi \ll T_e$ получаем

$$\frac{T_e r_{De}^2}{2e} \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} - \frac{T_e}{e} \left(1 - \frac{v_s}{u}\right) \Phi + \frac{1}{2} \Phi^2 = 0, \quad (10.5.20)$$

где $\xi = x - vt$, $r_{De} = \sqrt{T_e/4\pi e^2 n_0}$ – дебаевский радиус электронов, а u подлежит определению. Это уравнение совпадает по виду с (10.5.10) и поэтому его решение сводится к

$$\Phi = \frac{\Phi_{max}}{\text{ch}^2\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)}, \quad (10.5.21)$$

где

$$1 - \frac{v_s}{u} = \frac{e\Phi_{max}}{\pi T_e} \ll 1, \quad \frac{e\Phi_{max}}{6T_e} = \frac{r_{De}^2}{\Delta^2} \ll 1. \quad (10.5.22)$$

Таким образом, $u \approx v_s$, а рассмотренное решение есть ионно-звуковой солитон.

Задачи по теме X

Задача 1. Рассмотреть рассеяние внешней электромагнитной волны на плазменных колебаниях произвольно движущейся холодной плазмы (электронном пучке).

Решение.

Для решения этой задачи заметим, что полученные в § 10.3 результаты легко обобщаются на случай рассеяния сильной электромагнитной волны на релятивистском электронном пучке. Электронный пучок – это такая же электронная плазма как и рассмотренная выше, в особенности, если перейти в движущуюся систему координат, связанную с пучком. Вместе с тем, эта задача имеет большое прикладное значение, поскольку при таком рассеянии частота рассеянного излучения может значительно отличаться от частоты падающей волны. Так, при рассеянии назад, используя обычные формулы преобразования Лоренца, получаем, что

$$\omega_s = 4\gamma^2\omega_0, \quad (1)$$

где $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор пучка. При $\gamma \gg 1$ получаем значительное преобразование частоты и даже переход от СВЧ области ($\omega_0 \simeq 10^{10} - 10^{11} \text{ с}^{-1}$) в оптическую ($\omega_s \simeq 10^{14} - 10^{15} \text{ с}^{-1}$). Поэтому устройства, где реализуется процесс рассеяния на релятивистском электронном пучке с возбуждением пучковых ленгмюровских колебаний, называют лазером на свободных электронах (ЛСЭ).

Дисперсионное уравнение для ЛСЭ получается из (10.3.1) простой заменой ω и \mathbf{k} на лоренцовски преобразованные их аналоги ω' и \mathbf{k}' , что является следствием перехода в движущуюся систему пучка и нами уже изучалось. Поэтому, получив формулы для частот и инкрементов нарастания волн в этой системе, которые, очевидно, легко находятся из полученных в § 10.3 с помощью указанной замены $\omega \rightarrow \omega'$ и $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ (при этом надо еще учитывать преобразование плазменной частоты $\omega_{Le}^2 \rightarrow \omega_{Le}^2/\gamma$) легко произвести обратный переход в лабораторную систему, что приводит к следующему выражению для инкремента

$$\delta = 2\delta', \quad (2)$$

где δ' – инкремент в движущейся системе.

Отметим, что ЛСЭ на сильноточных релятивистских электронных пучках в настоящее время интенсивно используются для преобразования мощного СВЧ излучения в миллиметровое и даже в оптическое излучение.

Задача 2. На примере ленгмюровских колебаний изотропной плазмы показать, что при учете столкновений электронов в результате квазилинейной релаксации устанавливается распределение с конечным наклоном функции распределения по скоростям в резонансной области скоростей частиц.

Решение.

Столкновения частиц стремятся превратить функцию распределения в термодинамически равновесную, т.е. максвелловскую. Учитывая, что ленгмюровские колебания искажают распределение частиц в области $v \gg v_{Te}$, в случае полностью

ионизованной плазмы квазилинейное уравнение для функции распределения электронов с учетом электрон-электронных столкновений запишем в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D_e \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} (f_0 - f_M). \quad (1)$$

Здесь v_{\parallel} и v_{\perp} – соответственно проекции скорости вдоль и поперек направления распространения волны; f_M – максвелловская функция распределения;

$$D = \frac{e^2}{2m^2} \frac{|E_k|^2}{v_{\parallel} k}, \quad D_e = \nu_e \frac{2v_{Te}^3}{v_{\parallel}^3} (v_{\perp}^2 + v_{Te}^2), \quad \nu_e = \frac{2\pi e^4 n_0 L}{m^2 v_{Te}^3}. \quad (2)$$

Из (1) видно, что время релаксации функции распределения к максвелловской вследствие столкновений частиц равно $\tau_e = \frac{1}{\nu_e} \left(\frac{\Delta v_{\parallel}}{v_{Te}} \right)^2 \gg \frac{1}{\nu_e}$, где Δv_{\parallel} – ширина резонансной области, в которой искажается функция распределения электронов под действием колебаний.

Таким образом, в (1) учитываются как квазилинейное искажение функции распределения электронов, т.е. образование "плато", так и столкновительная ее релаксация к максвелловской. В результате этих двух процессов устанавливается стационарное распределение (в предположении, что поле колебаний поддерживается стационарным внешним источником)

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} = \frac{\partial f_M}{\partial v_{\parallel}} \frac{1}{1 + D/D_e}. \quad (3)$$

В отсутствие столкновений $D_e \rightarrow 0$, а следовательно, и $\partial f_0 / \partial v_{\parallel} \rightarrow 0$.

В слабоионизованной плазме вместо (1), используя кинетическое уравнение с модельным интегралом столкновений БГК, получаем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} - \nu_e (f_0 - f_M), \quad (4)$$

где $\nu_e = \text{const}$.

Здесь также видно, что при $\nu_e \neq 0$ и $\partial f_0 / \partial v_{\parallel} \neq 0$.

Задача 3. Получить уравнения квазилинейной теории для низкочастотных дрейфовых колебаний бесстолкновительной магнитоактивной неоднородной плазмы в нулевом приближении геометрической оптики.

Решение.

Уравнения квазилинейной теории можно записать только для слабонарастающих кинетически неустойчивых дрейфовых колебаний, поскольку для них $\omega \approx \omega_{др} \gg \delta$. За раскачку указанных колебаний в бесстолкновительной плазме ответственна черепковская диссипация волн на электронах плазмы. Поэтому в результате развития подобных неустойчивостей будет искажаться функция распределения электронов.

Следуя § 10.4 и учитывая явный вид функции распределения электронов в однородной плазме (см. § 6.8), для низкочастотных дрейфовых колебаний ($\omega \ll \Omega_e$) вместо (10.4.9) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \sum_k |\Phi_k|^2 \left(k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{k_y}{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \right) \times \\ & \times J_0^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_e} \right) \left(\text{Im} \frac{1}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \right) \left(k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{k_y}{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \right) f_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для слабонарастающих неустойчивых колебаний имеем

$$\text{Im} \frac{1}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} = -\pi \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}).$$

Учитывая это обстоятельство, из (1) находим уравнение для стационарной функции распределения

$$\left(\frac{\omega}{v_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{k_y}{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \right) f_0 = 0. \quad (2)$$

Отсюда видно, что при развитии дрейфовых неустойчивостей на квазилинейной стадии устанавливается состояние без "плато", т.е. $\partial f_0 / \partial v_{\parallel} \neq 0$. Учитывая малое отклонение f_0 от максвелловской функции распределения, приближенно можно записать

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \approx -\frac{k_y v_{\parallel}}{\omega \Omega_e} \frac{\partial f_M}{\partial x}. \quad (3)$$

Задача 4. Исследовать нелинейную поперечную волну в изотропной холодной плазме, распространяющуюся вдоль оси $0z$.

Решение.

Рассмотрим поперечную электромагнитную волну с частотой ω и отличными от нуля компонентами $E_y \exp(-i\omega t)$ и $B_x \exp(-i\omega t)$, которые подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dB_x}{dz} &= \frac{4\pi}{c} en_e v_y - \frac{i\omega}{c} E_y, \\ \frac{dE_z}{dz} &= -\frac{i\omega}{c} B_x. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти уравнения мы дополним уравнением движения электронов

$$m \frac{dv_y}{dx} = -im\omega v_y = eE_y \quad (2)$$

и условием равновесия – равенством градиента давления электронов (температуру которых для простоты считаем постоянной) и усредненной поперечной силы, действующей на электроны в поле волны, обеспечивающим отсутствие движения вдоль оси $0z$

$$\frac{T_e}{n_e} \frac{dn_e}{dz} = -\frac{e^2}{4\pi\omega^2} \frac{dE_y^2}{dz}. \quad (3)$$

Исключая из системы уравнений (1) и (2) магнитную индукцию B_x и скорость v_y , сведем ее к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dE_y^2}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{4\pi e^2 n_e}{m\omega^2} \right) E_y &= 0, \\ n_e &= n_{e0} \exp \left(-\frac{e^2 E_y^2}{4m\omega^2 T_e} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где n_{e0} – плотность электронов в отсутствие поля (либо в точках, где поле E_y равно нулю).

Таким образом, самосогласованное пространственное распределение электромагнитного поля и плотности электронов описывается сложным нелинейным уравнением с экспоненциальной нелинейностью. Первый интеграл этого уравнения представляет собой условие равновесия плазменной среды в поле волны

$$\frac{E_y^2 + B_x^2}{8\pi} + n_e T_e = \text{const} = \frac{C_1}{2}. \quad (5)$$

Из этого соотношения, а также из закона распределения плотности электронов в поле волны видно, что электроны вытесняются из областей сильного поля; распределение их плотности подчиняется барометрическому закону в потенциальном поле усредненной силы.

Наконец, общий интеграл (5), представляющий решение задачи, имеет вид

$$\pm \int_0^{E_y^2} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} \sqrt{C_1 - \tau - n_{e0} T_e e^{-\alpha\tau}}} = \frac{\omega}{c} (z - z_0), \quad (6)$$

где $\alpha = c^2/4\pi\omega^2 T_e$, z_0 – точка обращения поля в нуль.

В зависимости от соотношения между постоянными интегрирования C_1 и $2n_{e0}T_e$ имеем различные распределения поля E_y в пространстве. Так, если $C_1 > 2n_{e0}T_e$, т.е. когда плотность электронов пренебрежимо мала, из (6) находим распределение

$$E_y = \sqrt{2C_1} \sin \left[\frac{\omega}{c} (z - z_0) \right], \quad (7)$$

соответствующее стоячей электромагнитной волне. Напротив, если $C_1 < 2n_{e0}T_e$, то распределение (6) сильно отличается от (7), в частности, величина E_y^2 уже нигде не обращается в нуль, а заключена в некоторой конечной области, как это показано на рис. 10.3. Имеет место пространственная модуляция плотности электронов плазменной среды периодическим в пространстве полем электромагнитной волны. В свою очередь, среда искажает пространственное распределение поля, которое оказывается существенно отличающимся от распределения поля в вакууме в виде стоячей волны (7). В целом устанавливается самосогласованная периодическая в пространстве структура.

Задача 5. Исправить формулы (10.5.20)–(10.5.22) для ионно-звукового солитона с учетом захвата электронов в поле волны.

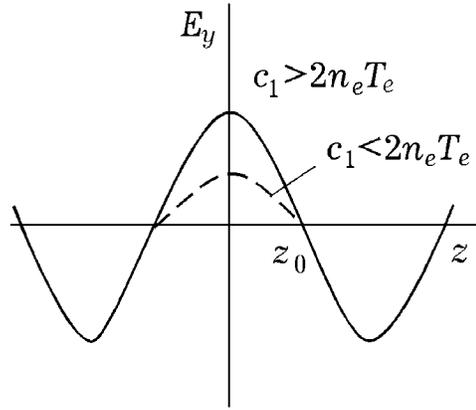


Рис. 10.3

Решение.

Заметим, что полученные в § 10.5 формулы для ионно-звукового солитона, строго говоря, не точны, поскольку неточной является модель (10.5.19), не учитывающая эффект захвата (увлечения) электронов в поле ионно-звуковой волны. Число таких электронов легко оценить из условия захвата электронов с энергией $\frac{mv^2}{2} \leq e\Phi$

$$\Delta n = \int d\mathbf{p} f_{0e} \simeq \frac{4}{3} \frac{n_0}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{e\Phi}{T_e} \right)^{3/2}. \quad (1)$$

С учетом захвата электронов уравнение (10.4.21) переписывается в виде

$$\frac{d^2\Phi}{dx_i^2} = 4\pi en_0 \left[\exp\left(\frac{e\Phi}{T_e}\right) - \frac{1}{1 - 2e\Phi/Mv^2} - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{e\Phi}{T_e}\right)^{3/2} \right]. \quad (2)$$

В результате в уравнении Пуассона появляется нелинейное слагаемое более низкого порядка, чем в (10.5.20)

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_e}{e}} r_{De}^2 \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} - \sqrt{\frac{T_e}{e}} \left(1 - \frac{v_s}{u}\right) \Phi + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \Phi^{3/2} = 0, \quad (3)$$

что приводит к изменению формы солитона (ср. с (10.5.21))

$$\Phi = \frac{\Phi_{max}}{\text{ch}^4\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)}. \quad (4)$$

Здесь уже Φ_{max} , Δ и u связаны между собой отличными от (10.5.22) соотношениями

$$1 - \frac{v_s}{u} = \frac{8}{15} \left(\frac{e\Phi_{max}}{\pi T_e} \right)^{1/2} \ll 1, \quad \frac{e\Phi_{max}}{\pi T_e} = \frac{225 r_{De}^4}{\Delta^4} \ll 1, \quad (5)$$

однако, качественные зависимости $u(\Phi_{max})$ и $\Delta(\Phi_{max})$ остаются неизменными. Вид кривых (10.4.23) и (10.4.26) хотя и различен, но качественно они выглядят сходным образом так, как это изображено на рис. 10.2 (только с заменой f на Φ).

Учебное издание

АЛЕКСАНДРОВ Андрей Федорович
РУХАДЗЕ Анри Амвросиевич

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ПЛАЗМОПОДОБНЫХ СРЕД

Компьютерная верстка:
Карташов И.Н., Красильников М.А.

Подписано в печать 20.12.99. Формат 60×88 1/16
Печать офсетная. Бумага офсетная №1
Объем 21 п.л. Тираж 1000 экз. Зак.

Ордена «Знак Почета» Издательство Московского университета.
ЛР 040414 от 18.04.97
103009, Москва, ул. Б.Никитская, 5/7.

Физический факультет МГУ. ЛР 021293 от 18.06.98.
Москва, 119899, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова,
физический факультет. Тел. (095)939-5494.
Интернет: <http://publish.phys.msu.su>

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ
140010, Люберцы, Октябрьский пр-кт, 403.
Тел. 554-2186

ПРИЛОЖЕНИЕ

Элементы тензорного исчисления

Понятие о тензоре тесно связано с преобразованием систем координат. В книге использовалась в основном трехмерная ортогональная декартова система координат $Oxyz$, которую далее будем записывать в симметричной форме $Ox_1x_2x_3$. Пусть заданы две декартовы системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Ox'_1x'_2x'_3$ с общим началом координат O . Тогда координаты любой точки M в нештрихованной и штрихованной системах связаны между собой соотношениями

$$x_k = e_{kj}x'_j, \quad x'_k = e_{kj}^{-1}x_j = e_{jk}x_j, \quad (1)$$

где e_{ij} – косинусы углов между осями штрихованной и нештрихованной систем:

$$\begin{array}{cccc} & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x_1 & e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ x_2 & e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ x_3 & e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{array}, \quad (2)$$

а по повторяющимся (немым) индексам везде далее подразумевается суммирование от 1 до 3.

Легко показать, что имеет место соотношение

$$e_{ik}e_{jk} = e_{ki}e_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (3)$$

Преобразование (1) называют ортогональным аффинным преобразованием (поворотом системы координат), а матрицу

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \quad (4)$$

– матрицей преобразования.

Поскольку с точкой M связан вектор \mathbf{x} с компонентами x_1, x_2, x_3 , либо \mathbf{x}' с компонентами x'_1, x'_2, x'_3 соответственно в нештрихованной и штрихованной системах координат, соотношения (1) выражают законы преобразования векторных величин при поворотах системы координат. Более того, совокупность трех чисел, преобразующихся согласно (1), является вектором.

Если заданы два вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то их скалярное произведение, определенное соотношением

$$(\mathbf{ab}) = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad (5)$$

оказывается инвариантным при преобразованиях системы координат (1), т.е.

$$a_i b_i = a'_i b'_i. \quad (6)$$

Действительно,

$$a'_i b'_i = e_{ki} a_k e_{si} b_s = \delta_{ks} a_k b_s = a_s b_s,$$

что и требовалось показать.

Свойство инвариантности скалярного произведения (6) часто используется в качестве определения вектора. Так, если заданы вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и совокупность трех чисел $a_i = (a_1, a_2, a_3)$, причем линейная форма

$$F_1 = a_i x_i \quad (7)$$

инвариантна при преобразованиях системы координат (1), то совокупность a_i образует вектор, $(a_i) = \mathbf{a}$.

По аналогии определяется и тензор второго ранга: если заданы два вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ и квадратичная форма

$$F_2 = d_{ij} x_i y_j \quad (8)$$

инвариантна при преобразованиях системы координат (1), то совокупность 9 чисел d_{ij} называют тензором второго ранга.

Легко показать, что совокупность δ_{ij} , определенная соотношением (3), является тензором второго ранга. Действительно,

$$\delta_{ij} x_i y_j = x_j y_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \text{const}. \quad (9)$$

Из определения (8) следуют формулы преобразования для тензора второго ранга

$$d_{ij} x_i y_j = d'_{ij} x'_i y'_j = d'_{ij} e_{mi} x_m e_{nj} y_n = d'_{sk} e_{is} e_{jk} x_i y_j, \quad (10)$$

или

$$d_{ks} = e_{ki} e_{sj} d'_{ij}. \quad (11)$$

Аналогично получается формула

$$d'_{ks} = e_{ik} e_{js} d_{ij}. \quad (12)$$

Таким образом, тензор второго ранга преобразуется как общее произведение двух векторов $a_i b_j$. Поэтому часто тензор второго ранга определяется как совокупность 9 чисел, преобразующихся как общее произведение двух векторов.

Аналогично определяются тензоры более высоких рангов. Так, тензором третьего ранга β_{ijk} называется совокупность 27 чисел, оставляющих инвариантом при преобразованиях (1) кубическую форму

$$F_3 = \beta_{ijk} x_i y_j z_k, \quad (13)$$

когда \mathbf{x} , \mathbf{y} и \mathbf{z} – векторы, либо совокупность чисел β_{ijk} , преобразующихся как общее произведение трех векторов a_i , b_j , c_k и т.д. При этом скалярную величину можно рассматривать как тензор нулевого ранга, а векторную – как тензор первого ранга.

Компоненты тензоров могут быть как действительными, так и комплексными числами. Поэтому в общем случае говорят о комплексных тензорах. При этом важное значение имеет понятие об эрмитовости тензора. Так, тензор второго ранга называется эрмитовским, если (звездочка "*" означает знак комплексного сопряжения)

$$\alpha_{ij}^{*\bar{a}} = \alpha_{ji}^{\bar{a}}. \quad (14)$$

Если же

$$\alpha_{ij}^{*a} = -\alpha_{ji}^a, \quad (15)$$

то тензор называется антиэрмитовским. Очевидно, что любой тензор можно разложить на сумму эрмитовской и антиэрмитовской частей.

Ранее говорилось о тензорах как о совокупности комплексных чисел. Компоненты тензора, однако, могут быть функциями как скалярных (например, времени, $\alpha_{ij}(t)$), так и векторных, (например, координат, $\alpha_{ij}(\mathbf{r})$) величин. Поэтому в общем случае следует записывать:

- $\varphi(t, \mathbf{r})$ – скаляр (тензор нулевого ранга),
- $a_i(t, \mathbf{r})$ – вектор (тензор первого ранга),
- $\alpha_{ij}(t, \mathbf{r})$ – тензор второго ранга,
- $\beta_{ijk}(t, \mathbf{r})$ – тензор третьего ранга и т.д.

Аналогично определяются тензоры как функции многих скалярных и векторных (а также тензорных) переменных.

При дифференцировании тензора по скаляру ранг его не меняется; дифференцирование же тензора по вектору увеличивает его ранг. Так,

- $\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{r})}{\partial r_i}$ – вектор (тензор первого ранга),
- $\frac{\partial a_i(t, \mathbf{r})}{\partial r_j}$ – тензор второго ранга,
- $\frac{\partial \alpha_{ij}(t, \mathbf{r})}{\partial r_k}$ – тензор третьего ранга и т.д.

Это обстоятельство следует учитывать при разложении тензора в ряд по степеням векторной величины

$$\alpha_{ij}(t, \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \alpha_{ij}(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial \alpha_{ij}(t, \mathbf{r})}{\partial r_k} \Delta r_k + \frac{\partial^2 \alpha_{ij}(t, \mathbf{r})}{\partial r_k \partial r_s} \Delta r_k \Delta r_s + \dots \quad (16)$$

Разложение в ряд по степеням скалярной величины проводят обычным образом.

До сих пор говорилось о повороте системы координат и определялись тензорные величины как обладающие определенной симметрией по отношению к преобразованию поворота (1). Введем преобразование зеркального отражения осей симметрии координат. При этом все тензорные величины следует делить на истинные и псевдовеличины. Так, истинным скаляром называется величина, которая инвариантна не только при поворотах системы координат, но и при преобразовании зеркального отражения. Если же величина не меняется при поворотах системы координат, но меняет свой знак при зеркальном отражении, то она называется псевдоскаляром. Подобным образом определяют истинные и псевдотензоры любого ранга. Истинный тензор четного ранга не меняет знака при преобразовании зеркального отражения, а псевдотензор меняет. Истинный тензор нечетного ранга меняет знак при преобразовании зеркального отражения, а псевдотензор не меняет.

К числу истинных векторов в трехмерном пространстве относятся радиус-вектор \mathbf{r} , векторы скорости \mathbf{v} и импульса \mathbf{p} , волновой вектор \mathbf{k} , векторы напряженности электрического поля \mathbf{E} и электрической индукции \mathbf{B} , вектор плотности тока \mathbf{j} и др. Истинными скалярами являются время t , плотность заряда ρ , энергия частицы $\mathcal{E}(p)$ и частота $\omega(\mathbf{k})$, причем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathcal{E}(p)}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{v}_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega(k)}{\partial \mathbf{k}}. \quad (17)$$

Псевдовектор можно образовать как векторное произведение двух истинных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , т.е. $[\mathbf{ab}]$ является псевдовектором. Наоборот, векторное произведение истинного вектора \mathbf{a} на псевдовектор \mathbf{d} дает истинный вектор $[\mathbf{ad}]$. Поэтому магнитное поле \mathbf{B} является псевдовектором – его векторное произведение на вектор скорости \mathbf{v} дает истинный вектор силы $\mathbf{F} \sim [\mathbf{vB}]$.

Особую роль в электродинамике материальных сред играет единичный полностью антисимметричный тензор третьего ранга e_{ijk} , определяемый соотношением

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{— если какая-либо пара индексов } i, j \text{ и } k \text{ совпадает,} \\ 1 & \text{— если индексы } i, j \text{ и } k \text{ образуют правильную} \\ & \text{последовательность чисел } 1, 2, 3, \\ -1 & \text{— если индексы } i, j \text{ и } k \text{ образуют неправильную} \\ & \text{последовательность чисел } 1, 2, 3. \end{cases} \quad (18)$$

Правильной называется циклическая последовательность чисел 1, 2, 3, неправильной – нециклическая последовательность этих чисел.

Тензор e_{ijk} является псевдотензором третьего ранга. Поэтому векторное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} можно записать в виде

$$[\mathbf{ab}]_i = e_{ijk} a_j b_k. \quad (19)$$

Скалярное произведение истинного вектора \mathbf{a} на псевдовектор \mathbf{d} в отличие от скалярного произведения двух истинных векторов является псевдоскаляром

$$(\mathbf{ad}) = a_i d_j = a_i e_{ijk} b_j c_k. \quad (20)$$

Здесь $d_i = e_{ijk} b_j c_k$ – псевдовектор, а \mathbf{b} и \mathbf{c} – истинные векторы.

Сказанное справедливо не только для числовых и функциональных векторов $a_i(r)$ и тензоров $\alpha_{ij}(r)$, $\beta_{ijk}(r)$, но также для векторных и тензорных операторов. Как отмечалось, при дифференцировании по векторному аргументу ранг матрицы увеличивается. Теперь можно ввести оператор дифференцирования как вектор $\frac{\partial}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}}$ и определить операцию дифференцирования как векторное, либо скалярное произведение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_i} \varphi(\mathbf{r}) &= \nabla_{\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{r}), \\ \frac{\partial}{\partial r_i} a_i(\mathbf{r}) &= \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \text{div } \mathbf{a}(\mathbf{r}), \\ e_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} a_k(\mathbf{r}) &= [\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r})]_i = \text{rot } \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (21)$$

При этом, если $\varphi(\mathbf{r})$ – истинный скаляр, а \mathbf{r} – истинный вектор, то первая из величин (21) – истинный вектор; если же $\varphi(\mathbf{r})$ – псевдоскаляр, а \mathbf{r} – истинный вектор, то эта величина – псевдовектор; псевдовектором она будет также, если $\varphi(\mathbf{r})$ истинный скаляр, а \mathbf{r} – псевдовектор. Аналогично расшифровываются и другие величины (21), а также высшие производные и операторы высшего порядка. Например,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} \varphi(\mathbf{r}) = \Delta \varphi(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(\mathbf{r}), \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) &= [\nabla_{\mathbf{r}} [\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r})]]_i = e_{imn} e_{njk} \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial r_m} a_k = \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} a_j(\mathbf{r}) - \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} a_i(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) - \Delta \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (22)$$

Изложенную теорию трехмерных тензоров легко обобщить на четырехмерный случай. В четырехмерном пространстве времени и координат (t, \mathbf{r}) преобразованием поворота являются преобразования Лоренца, которые и положены в основу определения четырехмерных векторов и тензоров. Четырехмерными векторами, кроме (t, \mathbf{r}) , являются плотности тока и заряда (ρ, \mathbf{j}) , волновой вектор и частота (ω, \mathbf{k}) и др. Теорию четырехмерных тензоров, однако, здесь не будем излагать, поскольку в настоящей книге они по-существу не использовались.

Пример 1. Сокращением тензора по двум индексам называется суммирование диагональных элементов квадратной матрицы тензора по этим индексам. При сокращении тензора по двум индексам его ранг уменьшается на два.

Сократить единичный тензор второго ранга δ_{ij} , т.е. найти δ_{ii}

$$\delta_{ii} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Пример 2. Составить общий тензор второго ранга $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(-\mathbf{k})$ из одного истинного вектора \mathbf{k} и сократить его по индексам:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}) = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 k_i k_j = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr} + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l,$$

т.е.

$$\alpha_1 = \varepsilon^{tr}, \quad \alpha_2 = \frac{\varepsilon^l - \varepsilon^{tr}}{k^2}.$$

В пределе $\mathbf{k} \rightarrow 0$ отсюда имеем $\varepsilon_{ij}(0) = \alpha_1 \delta_{ij}$, а $\varepsilon^l = \varepsilon^{tr} = \varepsilon$. Таким образом, общим тензором второго ранга в отсутствие какого-либо вектора, $\mathbf{k} \rightarrow 0$, является $\varepsilon_{ij}(0) = \varepsilon \delta_{ij}$:

$$\varepsilon_{ii}(k) = (3 - 1)\varepsilon^{tr} + \varepsilon^l = 2\varepsilon^{tr} + \varepsilon^l, \quad \varepsilon_{ii}(0) = 3\varepsilon.$$

Пример 3. Составить тензор второго ранга $\varepsilon_{ij}(\mathbf{B}) = \varepsilon_{ij}(-\mathbf{B})$ из одного псевдовектора \mathbf{B} и сократить его по индексам:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{B}) = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 b_i b_j + \alpha_3 e_{ijk} b_k \equiv \varepsilon_{\perp} \delta_{ij} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) b_i b_j + i g e_{ijk} b_k,$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$.

В матричной форме этот тензор имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(B) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Здесь ось $0x_3 = 0z$ направлена вдоль вектора \mathbf{B} . В отсутствие вектора \mathbf{B} имеем

$$\varepsilon_{ij}(0) = \varepsilon \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\parallel} = \varepsilon.$$

Наконец,

$$\varepsilon_{ii}(\mathbf{B}) = 2\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}, \quad \varepsilon_{ii}(0) = 3\varepsilon.$$

Пример 4. Составить тензор второго ранга $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{B}) = \varepsilon_{ji}(-\mathbf{k}, -\mathbf{B})$ из истинного вектора \mathbf{k} и псевдовектора \mathbf{B} и сократить его по индексам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{B}) = & \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 k_i k_j + \alpha_3 b_i b_j + \alpha_4 e_{ijm} b_m + \alpha_5 e_{imn} e_{jrs} k_m b_n k_r b_s + \\ & + \alpha_6 (e_{imn} k_m b_n k_j - e_{jmn} k_m b_n k_i), \end{aligned}$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$.

Направив ось $0x_3 = 0z$ вдоль вектора \mathbf{b} , а ось $0x_1 = 0x$ так, чтобы вектор $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel})$, получим

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \alpha_1 + \alpha_2 k_{\perp}^2, & \varepsilon_{22} &= \alpha_1 + \alpha_5 k_{\perp}^2, \\ \varepsilon_{12} &= \alpha_4 + \alpha_6 k_{\perp}^2, & \varepsilon_{23} &= -\alpha_6 k_{\perp} k_{\parallel}, \\ \varepsilon_{13} &= \alpha_2 k_{\perp} k_{\parallel}, & \varepsilon_{33} &= \alpha_1 + \alpha_2 k_{\parallel}^2 + \alpha_3. \end{aligned}$$

Сокращая полученный тензор по индексам, находим

$$\varepsilon_{ii}(\mathbf{k}, \mathbf{B}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3\alpha_1 + \alpha_2 k^2 + \alpha_3 + \alpha_5 k_{\perp}^2.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. – М.: Высшая школа, I изд. 1978, II изд. 1988.
2. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Колебания и волны в плазменных средах. – М.: Изд. МГУ, 1990.
3. Ахиезер А.И. и др. Электродинамика плазмы. – М.: Наука, 1974.
4. Балеску Р. Статистическая механика заряженных частиц. – М.: Мир, 1965.
5. Боголюбов Н.Н. Динамические проблемы статистической физики. – М.: Гостехиздат, 1946.
6. Гинзбург В.Л. и Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. – М.: Наука, 1975.
7. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967.
8. Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е. Основы физики плазмы. – М.: Госатомиздат, 1975.
9. Ишимару С. Основные принципы физики плазмы. – М.: Госатомиздат, 1975.
10. Кролл Н. и Трайвелпис А. Основы физики плазмы. – М.: Мир, 1975.
11. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Гостехиздат. 1957.
12. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. – М.: Изд. МГУ, 1964.
13. Платцман Ф. и Вольф П. Волны и взаимодействия в плазме твердых тел. – М.: Мир, 1975.
14. Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. – М.: Наука, 1975.
15. Сплин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. – М.: Наука, 1971.
16. Силян В.П. и Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. – М.: Госатомиздат, 1961.
17. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1979.
18. Басс Ф.Г., Гуревич Ю.Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. – М.: Наука, 1975.
19. Владимиров В.В., Волков А.Р., Мейлихов Е.З. Плазма полупроводников. – М.: Атомиздат, 1979.
20. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. – М.: Наука, 1976.
21. Кондратенко А.Н. Плазменные волноводы. – М.: Атомиздат, 1976.
22. Кондратенко А.Н. Проникновение поля в плазму. – М.: Атомиздат, 1979.
23. Кондратенко А.Н. Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. – М.: Атомиздат, 1987.
24. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979.
25. Пажела Ю.К. Плазма и токовые неустойчивости в полупроводниках. – М.: Наука, 1977.
26. Цытович В.Н. Нелинейные эффекты в плазме. – М.: Наука, 1967.
27. Бломберген Н. Нелинейная оптика. – М.: Мир, 1966.
28. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Проблемы нелинейной оптики. – М.: Наука, 1964.
29. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. – М.: Мир, 1983.
30. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. – М.: Наука, 1997.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тема I. Предмет электродинамики плазмоподобных сред	4
§ 1.1. Какие среды называют плазмоподобными и какими физическими параметрами они характеризуются	4
§ 1.2. Когда плазменную среду можно считать газом	14
Задачи по теме I	18
 Тема II. Основы электродинамики сред с временной и пространственной дисперсией	 21
§ 2.1. Уравнения электромагнитного поля в среде и граничные условия .	21
§ 2.2. Материальные уравнения линейной электродинамики. Тензор комплексной диэлектрической проницаемости	27
§ 2.3. Энергия электромагнитного поля в среде	33
§ 2.4. Электромагнитные волны в среде. Начальная и граничная задачи электродинамики	36
§ 2.5. Электромагнитное поле внешних источников в среде. Соотношения Крамерса-Кронига	42
Задачи по теме II	44
 Тема III. Модели описания динамики плазмоподобных сред	 54
§ 3.1. Простейшая одночастичная модель плазменной среды – ее успехи и провалы	54
§ 3.2. Гидродинамические модели плазменных сред. Двухжидкостная и одножидкостная гидродинамики	62
§ 3.3. Кинетическое уравнение Больцмана-Ландау	71
§ 3.4. Уравнения Власова и Власова-Максвелла	79
§ 3.5. Интеграл столкновений Батнагара-Гросса-Крука	85
§ 3.6. Кинетическое уравнение для носителей заряда в плазме твердого тела с учетом динамики кристаллической решетки	88
§ 3.7. Квантовое кинетическое уравнение с самосогласованным полем ..	91
§ 3.8. Обоснование простейших гидродинамических моделей динамики плазменных сред	95
Задачи по теме III	100
 Тема IV. Линейная электродинамика термодинамически равновесной и неограниченной в пространстве изотропной плазменной среды	 110
§ 4.1. Линейные электромагнитные свойства бесстолкновительной изотропной невырожденной плазменной среды	110

§ 4.2. Линейные электромагнитные свойства бесстолкновительной плазмы с вырожденными носителями	116
§ 4.3. Влияние столкновений частиц на колебания в изотропной плазме	120
§ 4.4. Связанные упруго-электромагнитные волны в изотропной плазме твердых тел	128
§ 4.5. Квантовые эффекты в линейной электродинамике изотропной плазменной среды	134
Задачи по теме IV	139
Тема V. Линейная электродинамика термодинамически равновесной неограниченной плазменной среды во внешнем магнитном поле	146
§ 5.1. Линейные электромагнитные явления в бесстолкновительной равновесной магнитоактивной плазменной среде	146
§ 5.2. Учет столкновений частиц при описании свойств магнитоактивной плазменной среды	156
§ 5.3. Связанные упруго-электромагнитные волны в магнитоактивной плазменной среде	161
§ 5.4. Квантовые эффекты в замагниченной электронной плазме	166
Задачи по теме V	171
Тема VI. Пространственно неоднородная плазменная среда	179
§ 6.1. Приближение геометрической оптики	179
§ 6.2. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной неоднородной плазменной среды и проблема устойчивости ее магнитного удержания	186
§ 6.3. Влияние столкновений носителей заряда на спектр дрейфовых колебаний плазменной среды	197
§ 6.4. Дрейфовая раскачка упругих колебаний в неоднородной плазменной среде	205
Задачи по теме VI	207
Тема VII. Электромагнитные свойства полуограниченной плазменной среды	214
§ 7.1. Электромагнитные свойства пространственно полуограниченной холодной плазмы. Поверхностные волны в холодной плазме	214
§ 7.2. Кинетическая теория поверхностных волн в полуограниченной плазменной среде. Модель зеркально отражающей поверхности	221
§ 7.3. Неустойчивость границы плазмы, удерживаемой магнитным полем	229
§ 7.4. Связанные упруго-электромагнитные поверхностные волны	236
Задачи по теме VII	241

Тема VIII. Электромагнитные свойства пространственно-ограниченной плазменной среды	249
§ 8.1. Линейные электромагнитные волны в плоском слое изотропной плазменной среды в условиях зеркального отражения носителей от его границ	249
§ 8.2. Электромагнитные колебания плоского слоя плазменной среды, удерживаемой внешним магнитным полем	254
§ 8.3. Поверхностные волны в тонком слое пьезополупроводника	258
§ 8.4. Плазменный волновод	260
Задачи по теме VIII	269
Тема IX. Тепловые флуктуации электромагнитного поля в плазменной среде	274
§ 9.1. Корреляционные функции системы заряженных частиц. Общее рассмотрение	274
§ 9.2. Флуктуации в равновесной плазменной среде. Флуктуационно-диссипативная теорема	282
§ 9.3. Спектральное распределение флуктуаций в равновесной бесстолкновительной плазменной среде	285
§ 9.4. Флуктуации и столкновения частиц	294
Задачи по теме IX	300
Тема X. Нелинейные волновые явления в плазменных средах ..	302
§ 10.1. Многоиндексные тензоры диэлектрической проницаемости. Укороченное уравнение для взаимодействия волн	302
§ 10.2. Параметрическая раскачка плазменных колебаний в плазменной среде во внешнем однородном СВЧ электрическом поле	306
§ 10.3. Плазменная среда в поле сильной электромагнитной волны. Вынужденное рассеяние волн	309
§ 10.4. Квазилинейная теория колебаний плазменной среды	311
§ 10.5. Солитоны и нелинейные волны в плазменной среде	316
Задачи по теме X	321
Приложение	326
Рекомендуемая литература	332