Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Ивановский государственный университет

Н. И. Яцкин

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ТЕОРЕМЫ И АЛГОРИТМЫ

***Рекомендовано Учебно-методическим советом
по математике и механике
Учебно-методического объединения
по классическому университетскому образованию РФ
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
010200 Математика и компьютерные науки***

Иваново
Издательство «Ивановский государственный университет»
2008

ББК 22.143
Я 936

Яцкин, Н. И.
Линейная алгебра : Теоремы и алгоритмы : учеб. пособие / Н. И. Яцкин. — Иваново : Иван. гос. ун-т, 2008. — 607 с.

Излагаются основы теории и приводятся указания к практическим и лабораторным занятиям по курсу алгебры и геометрии в рамках следующих тем: линейные пространства и линейные отображения, спектральная теория для линейных операторов, линейные, билинейные и квадратичные формы.

Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению «Математика. Компьютерные науки».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного университета

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор **В. Г. Дурнев**
(Ярославский государственный университет)

доктор физико-математических наук, профессор **Б. Я. Солон**
(Ивановский государственный химико-технологический университет)

ISBN 978-5-7807-0688-5

© Яцкин Н. И., 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 11

Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. БАЗИСЫ И РАЗМЕРНОСТИ 15

§ 1. Аксиомы линейного пространства над полем. Примеры линейных пространств. Линейные подпространства. Линейные отображения 15
1.1. Аксиомы поля 15
1.2. Аксиомы линейного пространства 15
1.3. Арифметические линейные пространства 18
1.4. Другие примеры конкретных линейных пространств 19
1.5. Линейные подпространства 21
1.6. Линейные отображения 24
1.7.* Пример линейного пространства над полем $\mathbb{F}_2$ 28

§ 2. Системы векторов в линейных пространствах и их линейные оболочки. Порождающие системы векторов. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства 33
2.1. Системы векторов в линейном пространстве и их линейные оболочки 33
2.2.* Линейные оболочки подмножеств в линейных пространствах . . . 36
2.3. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства . . . 38

§ 3. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов 41
3.1. Понятие линейно зависимой (линейно независимой) с.в. 41
3.2. Свойство единственности разложения вектора по линейно независимой с.в. 43
3.3.* Понятие линейной зависимости (независимости) для подмножеств в линейном пространстве 43
3.4. Линейно независимые системы векторов в функциональных пространствах 44

§ 4. Базисы в линейных пространствах; четыре способа характеризации; теорема существования 50
4.1. Определение базиса в линейном пространстве 50
4.2. Четыре способа характеризации базисов 52
4.3. Теорема существования базиса для к.л.п. 54
4.4.* Алгебраические базисы в произвольных линейных пространствах (базисы Гамеля) 55

4.5.* Понятие о топологических базисах 56

§ 5. Равномощность базисов. Размерность линейного пространства. Продолжение базисов 58
5.1. Оценка количества векторов в линейно независимой с.в. 58
5.2. Характеризация к.л.п. в терминах линейно независимых с.в. Конечномерность подпространств в к.л.п. 60
5.3. Равномощность всех базисов и понятие размерности для к.л.п. . . 61
5.4. Продолжение базисов 62
5.5. Свойство строгой монотонности размерности 63

§ 6. Основная теорема о линейных отображениях. Теорема об изоморфизме. Координатный изоморфизм 64
6.1. Основная теорема о линейных отображениях к.л.п. 64
6.2. Свойства линейных изоморфизмов 68
6.3. Теорема об изоморфизме для к.л.п. 69
6.4. Координатный изоморфизм к.л.п. на арифметическое линейное пространство 70

§ 7. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координатного столбца вектора при замене базиса 72
7.1. Матрица перехода от одного базиса в к.л.п. к другому. Свойства матриц перехода 72
7.2. Изменение координатного столбца вектора при замене базиса . . . 77
7.3. Задачи на вычисление матриц перехода и пересчет координатных столбцов при замене базисов 79
7.4. Применение системы Maple для решения задач, связанных с заменой базисов 85

§ 8. Сумма и пересечение линейных подпространств. Формула Грассмана 88
8.1. Линейные подпространства в к.л.п. и действия над ними 88
8.2. Сумма и пересечение конечномерных линейных подпространств. Формула Грассмана 91

§ 9. Прямые суммы и прямые дополнения 95
9.1. Внутренняя прямая сумма линейных подпространств. Критерий прямизны 95
9.2. Прямые дополнения к линейному подпространству 100
9.3. Полные прямые суммы. Операторы вложения и проектирования . 105
9.4. Внешняя прямая сумма линейных пространств 108

§ 10. Алгоритмы построения базисов в линейных подпространствах конечномерных линейных пространств 111
10.1. Два способа задания линейных подпространств и алгоритмы построения базисов в них 111
10.2. Алгоритм продолжения базиса 115
10.3. Алгоритмы построения базисов в сумме и пересечении линейных подпространств 117

§ 11. Примеры решения задач на построение базисов в линейных подпространствах 122
11.1. Типовой расчет по теме "Базисы в подпространствах" 122
11.2. Особые случаи расположения подпространств в расчете ТР1 . . . 133
11.3. Пакет Maple-процедур для решения ТР1 135

Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ 139

§ 12. Алгебраические действия над линейными отображениями. Матрица линейного отображения 139
12.1. Алгебраические действия над линейными отображениями 139
12.2. Матрица линейного отображения. Изоморфизмы между линейными пространствами линейных операторов и матриц 142
12.3. Матрица для композиции линейных отображений. Теорема об изоморфизме для алгебраических систем линейных операторов и матриц 145
12.4.* Арифметизация ("оцифровка") линейных операторов 147
12.5. Примеры вычисления матриц линейных отображений 150

§ 13. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов. Эквивалентные матрицы. Подобные матрицы . . . 156
13.1. Замена базисов и преобразование матрицы линейного отображения 156
13.2.* Изменение "оцифровки" для линейного оператора при замене базисов 158
13.3. Эквивалентные матрицы 158
13.4. Примеры пересчета матриц линейных отображений 161
13.5. Линейные эндоморфизмы и их матрицы 164
13.6. Подобные квадратные матрицы 165
13.7. Примеры пересчета матриц л.э. 167
13.8.* Оператор разностного дифференцирования 172
13.9. Определитель и след для линейного эндоморфизма 174

§ 14. Образ и ядро, ранг и дефект линейного отображения 177
14.1. Отображения множеств, образы и прообразы подмножеств 177
14.2. Образы и прообразы линейных подпространств при линейных отображениях 178
14.3. Алгоритмы построения базисов в ядре и образе линейного отображения 183

§ 15. Теоремы о линейных гомоморфизмах 186
15.1. Первая теорема о линейных гомоморфизмах 186
15.2. Вторая теорема о линейных гомоморфизмах 187
15.3. Критерии эпи-(моно-, изо-)морфности 189
15.4. Критерии обратимости (необратимости) линейных эндоморфизмов 190

Глава 3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ 192

§ 16. Собственные значения (спектр) и собственные подпространства для линейного эндоморфизма 192
16.1. Определение собственных значений, собственных векторов и собственных подпространств для линейного эндоморфизма 192
16.2. Примеры отыскания спектра и собственных подпространств . . . 194

§ 17. Характеристический многочлен и характеристические корни для линейного эндоморфизма 196
17.1. Характеристическая матрица и характеристический многочлен . . 196
17.2. Коэффициенты характеристического многочлена 200
17.3. Корни характеристического многочлена 203
17.4. Алгебраические кратности собственных значений 205

§ 18. Алгоритм отыскания спектра и собственных подпространств для линейного эндоморфизма 207
18.1. Арифметизация собственных подпространств 207
18.2. Геометрические кратности собственных значений 208
18.3. Алгоритм отыскания собственных значений и собственных подпространств для л.э. 209
18.4. Примеры отыскания спектра и базисов в собственных подпространствах 212

§ 19. Свойства собственных подпространств 218
19.1. Подпространства, инвариантные относительно л.э. 218
19.2. Инвариантность собственных подпространств 219
19.3. Независимость в совокупности собственных подпространств л.э. . 222

§ 20. Линейные эндоморфизмы в прямой сумме и их матрицы . . . 225
20.1. Операторы вложения и проектирования в полной прямой сумме и их матрицы 225
20.2. Полные прямые суммы и фильтрации 228
20.3. Матрица л.э., действующего в полной прямой сумме, и ее блочное строение 229
20.4.* Умножение блочных матриц 231
20.5. Блочная структура матрицы л.э. в случае инвариантности фильтрации 233

§ 21. Диагонализируемые линейные эндоморфизмы 237
21.1. Свойство диагонализируемости для линейных эндоморфизмов . . 237
21.2. Диагонализируемость на инвариантном подпространстве 239
21.3. Критерий диагонализируемости линейного эндоморфизма 240
21.4. Диагонализируемость операторов и диагонализируемость квадратных матриц 241
21.5. Линейные эндоморфизмы (квадратные матрицы) с простым спектром 242
21.6. Примеры недиагонализируемых л.э. 242
21.7. Алгоритм исследования линейного эндоморфизма на диагонализируемость 247

§ 22. Свойства характеристического многочлена 250
22.1. Характеристический многочлен для сужения л.э. на его инвариантное подпространство 250
22.2. Неравенства для геометрических и алгебраических кратностей собственных значений 251
22.3.* Собственная сумма и блочная структура для л.э. 253

§ 23. Итерированные ядра и образы, дефекты и ранги. Теорема о стабилизации 254
23.1. Итерированные ядра и образы, дефекты и ранги для л.э. 254
23.2. Теорема о стабилизации для л.э. 256
23.3. Стабильное ядро и стабильный образ; их взаимная дополнительность 258
23.4. Теорема о стабилизации в случае нильпотентного л.э. 260

§ 24. Приращения итерированных дефектов. Теорема Фробениуса. Вторые приращения дефектов 263
24.1. Приращения итерированных дефектов 263
24.2. Теорема Фробениуса 263
24.3. Вторые приращения итерированных дефектов 266

§ 25. Жорданов базис в стабильном ядре линейного эндоморфизма. Малая теорема Жордана 268
25.1. Понятие жорданова базиса для л.э. 268
25.2. Базисы в стабильном ядре л.э., организованные в виде столбчатых диаграмм 269
25.3. Малая теорема Жордана 272
25.4. Стабильный дефект как алгебраическая кратность нулевого собственного значения 274
25.5. Жорданов базис для нильпотентного л.э. 275
25.6. Алгоритм построения жорданова базиса в стабильном ядре л.э. . 276

§ 26. Корневые подпространства для линейного эндоморфизма . . 281
26.1. Корневые подпространства и корневые векторы 281
26.2. Инвариантность корневых подпространств 283
26.3.* Композиция многочленов. Сдвиг аргумента у многочлена 285
26.4. Размерность корневого подпространства 287
26.5. Жорданов базис в корневом подпространстве л.э. 290
26.6. Алгоритм построения жорданова базиса в корневом подпространстве 292

§ 27. Корневая сумма. Большая теорема Жордана 294
27.1. Независимость в совокупности корневых подпространств для л.э. . 294
27.2. Жорданов базис в корневой сумме. Большая теорема Жордана . 298
27.3. Жорданова нормальная форма и критерий подобия для квадратных матриц 301
27.4.* Комплексификация и овеществление. Обобщенная ж.н.ф. для действительных матриц 304

§ 28. Алгоритм построения жорданова базиса для линейного эндоморфизма 313
28.1. Обзор ранее изученых алгоритмов спектральной теории л.э. . . . 313
28.2. Алгоритм построения (частично) жорданова базиса для л.э. . . . 315
28.3. Типовой расчет по теме "Жорданов базис для линейного эндоморфизма" 318
28.4. Особые случаи в задаче о построении жордановых базисов 332
28.5. Отыскание ж.н.ф. матрицы с помощью системы Maple 334
28.6. "Процедура-сценарий" jrd для решения задач ТР2 337

§ 29. Многочлены от линейных эндоморфизмов и квадратных матриц. Аннулирующие многочлены 338
29.1. Значение многочлена от линейного эндоморфизма (от квадратной матрицы) 338
29.2. Аннулирующие многочлены для л.э. и для квадратных матриц . . 347
29.3. Теорема Гамильтона — Кэли 352
29.4.* Функции от матриц 357

§ 30.* Каноническая форма Смита для полиномиальной матрицы и ее применения 359
30.1. Матрицы над кольцом многочленов и алгебраические действия над ними 359
30.2. Каноническая форма Смита и эквивалентность полиномиальных матриц 363
30.3. Квадратные матрицы над кольцом многочленов и их представление в виде многочленов с матричными коэффициентами 370
30.4. Подобие квадратных матриц (над полем) и эквивалентность их характеристических матриц (над кольцом многочленов) 377
30.5. Инвариантные многочлены и элементарные делители для квадратных матриц над полем. Критерий подобия 381
30.6. Второй способ приведения квадратной матрицы к ж.н.ф. 382

Глава 4. ЛИНЕЙНЫЕ, БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ 396

§ 31. Линейные формы на конечномерном линейном пространстве. Двойственное линейное пространство 396
31.1. Понятие линейной формы 396
31.2. Матрица-строка и координатное выражение для линейной формы 398
31.3. Понятие двойственного (сопряженного) линейного пространства. Двойственный (сопряженный) базис 399
31.4. Влияние замены базиса на линейные формы 403

§ 32. Теория двойственности 406
32.1. Второе двойственное пространство. Канонический изоморфизм к.л.п. на его второе двойственное 406
32.2. Аннуляторы подмножеств и их свойства 411

32.3. Аннуляторы линейных подпространств 413
32.4. Соотношения двойственности 416

§ 33. Двойственный линейный оператор. Теорема Фредгольма . . . 417
33.1. Понятие двойственного линейного оператора 417
33.2. Матрица двойственного оператора 422
33.3. Теорема Фредгольма 425
33.4.* Неформальные рассуждения о природе двойственности 426

§ 34. Билинейные формы и их матрицы 429
34.1. Понятие билинейной формы на линейном пространстве 429
34.2. Матрица билинейной формы 432
34.3. Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса. Конгруэнтные матрицы 435
34.4. Ранг билинейной формы. Невырожденные б.ф. 437
34.5. Симметрические и антисимметрические б.ф. 438
34.6.* Два линейных гомоморфизма линейного пространства в двойственное, связанные с б.ф. 442

§ 35. Симметрические билинейные и квадратичные формы. Формула поляризации 447
35.1. Понятие квадратичной формы. Формула поляризации 447
35.2. Матрица и координатная запись для квадратичной формы 449
35.3. Диагонализирующие базисы для симметрических билинейных (квадратичных) форм 451

§ 36. Диагонализация по Лагранжу симметрических билинейных (квадратичных) форм 453
36.1. Алгоритм Лагранжа диагонализации с.б.ф. (кв.ф.) 453
36.2. Скелетный вид для с.б.ф. (кв.ф.) над алгебраически замкнутым полем 463

§ 37. Диагонализация по Якоби симметрических билинейных (квадратичных) форм. Метод Грам — Шмидта 465
37.1. Метод Якоби диагонализации с.б.ф. (кв.ф.) 465
37.2. Алгоритм Грама — Шмидта диагонализации с.б.ф. (кв.ф.) 474

§ 38. Симметрические билинейные (квадратичные) формы над полем действительных чисел. Сигнатура. Теорема инерции . . 478
38.1. Нормальный вид для с.б.ф. (кв.ф.) над полем $\mathbb{R}$ 478
38.2. Индексы инерции для с.б.ф. (кв.ф.) над полем $\mathbb{R}$. Теорема инерции 481
38.3. Знакоопределенные и знакопеременные с.б.ф. (кв.ф.) над полем $\mathbb{R}$ 485
38.4. Критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности с.б.ф. (кв.ф.) 489
38.5.* Исследование функций на экстремум и квадратичные формы . . 494

§ 39. Примеры решения задач на исследование симметрических билинейных (квадратичных) форм 497

39.1. Типовой расчет по теме "Диагонализация симметрических билинейных (квадратичных) форм" 497
39.2. Пакет Maple-процедур для решения ТР3 505

§ 40.* Одновременная диагонализация двух симметрических билинейных (квадратичных) форм 506
40.1. К.л.п. с фиксированной положительно определенной с.б.ф.; ортогональные и ортонормированные базисы 506
40.2. Ортогональные матрицы 509
40.3. Линейный изоморфизм между пространствами л.э. и б.ф., определяемый с помощью невырожденной с.б.ф. 510
40.4. Самосопряженные л.э. и их матрицы 511
40.5. Спектральные свойства самососопряженных линейных эндоморфизмов 514
40.6. Ортогональная диагонализируемость самосопряженного л.э. . . . 517
40.7. Ортогональная диагонализация (приведение к главным осям) с.б.ф. в евклидовом пространстве 519
40.8. Полулинейные, полуторалинейные и эрмитовы формы 524

Список рекомендуемой литературы 526

Список используемых сокращений 528

Приложение 1. Коды Maple-процедур 529

Приложение 2. Иллюстрации 594

Приложение 3. Столбчатые диаграммы 597

Приложение 4. Содержание [$\mathbf{A_1}$] — первой части курса 605

Предисловие

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов-первокурсников математического факультета, обучающихся по направлению "Математика. Компьютерные науки" (бакалавриат) и служит непосредственным продолжением учебного пособия

[A_1] Н. И. Яцкин. Алгебра: Теоремы и алгоритмы. Иваново. Изд-во "Ивановский государственный университет", 2006.

(Указано обозначение, которое будет использоваться в дальнейшем, при ссылках на первую книгу. В прил. 4, для удобства читателей, приводится ее оглавление.)

Во второй книге излагаются основы теории, а также даются указания к решению и образцы решения типовых задач по следующим большим темам (которым соответствуют главы предлагаемого издания).

1. Линейные пространства. Базисы и размерности.

2. Линейные отображения конечномерных линейных пространств.

3. Спектральная теория линейных эндоморфизмов в конечномерных линейных пространствах.

4. Линейные, билинейные и квадратичные формы на конечномерных линейных пространствах.

Этот материал, как правило, относится ко второму семестру. Он, однако, не исчерпывает всего содержания курса "Алгебра и геометрия" (изучаемого в первых двух семестрах). За рамками данного пособия остаются *геометрические главы*, заслуживающие, по мнению автора, отдельного, подробного и соответствующим образом иллюстрированного, тома.

Линейная алгебра — это наука, которая нужна всем. Практически любое реальное вычисление (точное или приближенное) опирается на алгоритмы линейной алгебры.

Например, центральной идеей математического анализа следует считать идею *линеаризации* нелинейных функций (отображений).

После того, как она реализована, рассматриваемая аналитическая проблема обычно сводится к той или иной задаче из линейной алгебры.

Еще один пример: геометрия настолько "переплелась" с алгеброй, что в университетских учебных планах эти две дисциплины объединяются, составляя комбинации типа: "алгебра и геометрия", "линейная алгебра и геометрия".

Не подумайте только, что алгебра "заменяет" или "включает в себя" геометрию или анализ. Наоборот, психологи утверждают, что геометры и алгебраисты даже мыслят "разными полушариями", что, однако, не исключает, но предполагает взаимодействие указанных наук. (Не зря же, все-таки, полушарий два.)

Учебников по линейной алгебре достаточно много. Вы можете сравнить список рекомендованной литературы, приводимый в данном пособии, с аналогичным списком в $[A_1]$: количество названий пришлось увеличить почти втрое. Среди указаных литературных источников есть и настоящие педагогические шедевры, и подробные курсы, и весьма информативные монографии.

И все-таки автор рассчитывает на то, что еще одно "сочинение на ту же тему" не затеряется в общем потоке.

Во-первых, потому, что оно относится к иному жанру: не учебник, не справочник, но — *книга для чтения*, настольная книга, напрямую обращающаяся к современному молодому читателю, учитывающая его компьютерную ориентацию, а также — чего греха таить! — определенные реалии нынешнего математического образования. Прекрасные книги второй половины прошлого века предъявляли гораздо более серьезные требования к математической культуре первокурсников; тогда как сегодня, вследствие низведения геометрии в разряд факультативных дисциплин, выпускники "обычных" средних школ очень смутно представляют себе, что стоит за словом "доказательство".

Во-вторых, предлагаемое пособие призвано помогать студентам в решении типовых задач, является *руководством к алгебраическому практикуму*. Опыт использования в учебном процессе его "черновых" (электронных) прототипов свидетельствует о том, что именно данная функция вызывает повышенный интерес читателей (в связи с выполнением контрольных работ, индивидуальных домашних заданий, типовых расчетов).

В-третьих, кое-что в нашей математической жизни меняется и в лучшую сторону. Речь идет о компьютеризации учебного процесса,

о возможности передачи компьютеру рутинных операций, что делает доступными такие вычислительные задачи, о которых при использовании лишь ручного счета не приходилось и мечтать. Классические задачники переполнены примитивными "одно-", "двух-" или "трехходовками", не дающими возможности продемонстрировать все тонкости и особые ситуации в работе "великих алгоритмов" (Гаусса, Жордана, Смита, Лагранжа, Якоби и др.).

Разработка *компьютерных алгебраических систем* (КАС) радикально изменила ситуацию. Названные программные средства дают возможность не приближенного, но *точного* решения очень многих математических задач (допускающих такое решение в принципе). Если система воспринимает дробь 1/3 как .33333333 — это одно, а если она умеет производить точные вычисления с рациональными дробями, а также с алгебраическими выражениями, содержащими переменные, — это уже совсем другое.

В [A_1] мы обучили читателей элементарному навыку — приведению (по Гауссу) матриц к ступенчатому виду. В данном томе перед нами — гораздо более сложные, "продвинутые" задачи, содержащие, в частности, многократные обращения к алгоритму Гаусса. Так давайте перепоручать КАС ранее освоенный рутинный счет! Знакомство с новыми идеями и методами (например, с алгоритмом приведения квадратных матриц к жордановой нормальной форме) будем проводить подробно, с обязательной долей ручной работы; но и это — только до тех пор, пока не придет очередь "стать рутинным" и вновь изученному навыку (скажем, при использовании жордановой нормальной формы для решения систем линейных дифференциальных уравнений).

В-четвертых, и теоретическая составляющая курса подвергается систематическому переосмыслению с точки зрения компьютерной реализации тех алгоритмов, которые зачастую содержатся в скрытом виде ("зашиты") в доказательствах теорем. Пусть, в ущерб лаконичности, мы стараемся (всякий раз, когда это возможно) сделать доказательства явно алгоритмическими.

Надо, разумеется, понимать, что доказательство может представлять из себя лишь *схему алгоритма*; иногда мы достигаем детализации этой схемы, но это уже — в *приложениях*, содержащих коды вычислительных процедур.

И здесь надо четко охарактеризовать используемый подход: наши процедуры категорически *не оптимальны*, они — не для профессиональных программистов, но — для математиков-компьютерщиков,

впервые изучающих некоторые (причем — довольно сложные) алгоритмы. Мы стараемся моделировать "человеческое" решение, иногда используя элементы *сценарной* организации работы, с выводом промежуточных результатов.

Оптимизации программ, экономии памяти и повышению быстродействия вас будут учить совсем в других курсах.

Организация текста в данном пособии вполне аналогична той, что была принята в $[A_1]$. Появились, правда, параграфы, пункты и замечания "со звездочками". Звездочки свидетельствуют, с одной стороны, — о "необязательности" этих рубрик для изучения, а с другой — об их повышенной "занимательности".

Под звездочки попадают, например, некоторые наши "экскурсии" в область математического анализа. Можно ли пропускать (при первом чтении) такие "отвлечения"? Скорее нет, чем да. Скажем, приложение теории квадратичных форм к экстремальным задачам является настолько ярким и важным, что даже краткое знакомство с данным материалом, несомненно, обогатит общематематическую культуру читателя, послужит побудительным фактором для обращения к более подробным источникам.

Как и в $[A_1]$, мы адресуем отдельные замечания "специалистам" (преподавателям или студентам-старшекурсникам), снабжая информацию меткой "для служебного пользования". (Читать эти замечания можно всем, секретов в них нет; чаще всего обсуждаются случаи неустранимого разнобоя в терминологии, которым грешат учебники и справочники.)

Уже в первом пособии довольно широко использовались аббревиатуры для особенно часто употребляемых математических терминов (например: *с.л.у.* = система линейных уравнений); во второй части их количество еще более возросло, в связи с чем в конце книги приводится полный список сокращений.

Завершим введение ко второму пособию той же фразой, которая фигурировала во введении к $[A_1]$: направление "Математика. Компьютерные науки" имеет целью подготовку *математиков, работающих в области компьютерных наук.* Это — не компьютерные игры! Это — напряженный, требующий значительных временны́х затрат (но благодарный!) труд.

Глава 1

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. БАЗИСЫ И РАЗМЕРНОСТИ

§ 1. Аксиомы линейного пространства над полем. Примеры линейных пространств. Линейные подпространства. Линейные отображения

1.1. Аксиомы поля. *Полем* называется (см. [A_1, п. 2.1.]) множество P, содержащее как минимум два элемента, на котором заданы две алгебраические операции (сложение и умножение), удовлетворяющие аксиомам:

1 $(\forall a, b, c \in P)\ [\,(a+b)+c = a+(b+c)\,]$;
2 $(\forall a, b \in P)\ [\,a+b = b+a\,]$;
3 $(\exists\, 0 \in P)\,(\forall\, a \in P)\ [\,a+0 = a\,]$;
4 $(\forall a \in P)\,(\exists\, b \in P)\ [\,a+b = 0\,]$;
5 $(\forall a, b, c \in P)\ [\,(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c\,]$;
6 $(\forall a, b, c \in P)\ [\,(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)\,]$;
7 $(\forall a, b \in P)\ [\,a\cdot b = b\cdot a\,]$;
8 $(\exists\, 1 \in P)\,(\forall\, a \in P)\ [\,a\cdot 1 = a\,]$;
9 $(\forall a \in P \setminus \{0\})\,(\exists\, b \in P)\ [\,a\cdot b = 1\,]$.

Примерами полей являются числовые поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, поле $\mathbb{F}_p$ классов вычетов целых чисел по простому модулю p.

1.2. Аксиомы линейного пространства

Определение 1.1. *Линейным (векторным) пространством* над полем P называется множество V (элементы которого именуются *векторами*) с заданными на нем алгебраическими действиями (операциями):

1) сложением векторов $(x, y) \mapsto x + y$;

2) умножением $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ векторов на *скаляры* из поля P,

в предположении, что эти операции удовлетворяют следующим восьми аксиомам:

(V_1) $(\forall\, x, y, z \in V)\ [\,(x + y) + z = x + (y + z)\,]$;

(V_2) $(\forall\, x, y \in V)\ [\,x + y = y + x\,]$;

(V_3) $(\exists\, 0 \in V)\,(\forall\, x \in V)\ [\,x + 0 = x\,]$;

(V_4) $(\forall\, x \in V)\,(\exists\, y \in V)\ [\,x + y = 0\,]$;

(V_5) $(\forall\, x \in V; \lambda, \mu \in P)\ [\,(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x\,]$;

(V_6) $(\forall\, x, y \in V; \lambda \in P)\ [\,\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y\,]$;

(V_7) $(\forall\, x \in V; \lambda, \mu \in P)\ [\,(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)\,]$;

(V_8) $(\forall\, x \in V)\ [\,1 \cdot x = x\,]$.

Прокомментируем аксиомы (V_1) — (V_8), заметив прежде всего, что понятие линейного пространства и указанные аксиомы (в менее строгом представлении) уже встречались в [A_1], в пп. 1.1, 2.2, 36.1 и др. [сравните, в частности, эти аксиомы с формулами (i) — (viii)].

Первые четыре из аксиом линейного пространства фактически совпадают с соответствующими аксиомами поля $\boxed{1}$ — $\boxed{4}$.

Используя понятие *группы*, также (на описательном уровне) знакомое нам из [A_1] (см. §§ 14 — 16), можно сказать, что как поле, так и всякое линейное пространство над полем являются (коммутативными) группами по сложению.

Поэтому общими для полей и для линейных пространств будут все следствия, выводимые из четырех аксиом сложения.

В частности, существует лишь один нулевой вектор. В самом деле, если как 0, так и $0'$ удовлетворяют (V_3), то $0 = 0'$, в чем убеждает следующая простая выкладка:

$$0 \overset{(V_3)}{=\!=} 0' + 0 \overset{(V_2)}{=\!=} 0 + 0' \overset{(V_3)}{=\!=} 0'.$$

Далее, вектор, противоположный данному вектору x, существующий согласно (V_4), также определен однозначно. В самом деле, если этому условию удовлетворяют два вектора, y и y', то

$$y \overset{(V_3)}{=\!=} y + 0 \overset{(V_4)}{=\!=} y + (x + y') \overset{(V_1)}{=\!=} (y + x) + y' \overset{(V_4)}{=\!=} 0 + y' \overset{(V_3)}{=\!=} y'.$$

Однозначность определения противоположного вектора мотивирует фиксацию для него обозначения: $y = -x$.

Седьмая и восьмая аксиомы относятся к операции умножения векторов на скаляры, а пятая и шестая (два дистрибутивных закона) —

увязывают два рассматриваемых алгебраических действия между собой. Отметим еще одно простое следствие из аксиом:

$$(\forall\, x \in V)\ [\,(-1)\cdot x = -x\,].$$

Попробуйте самостоятельно доказать это утверждение. В учебниках и сборниках задач вам встретятся и некоторые другие следствия. Одно из них мы выделим как

Предложение 1.1. *Произведение скаляра $\lambda \in P$ на вектор $x \in V$ является нулевым вектором тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей обращается в нуль, т. е.*

$$[\,\lambda \cdot x = 0\,] \Leftrightarrow [\,\lambda = 0\,] \vee [\,x = 0\,]. \tag{1.1}$$

Доказательство. 1. Докажем предварительно следующий вспомогательный факт: равенство $a + a = a$ в пространстве V влечет $a = 0$. В самом деле, добавляя к обеим частям данного равенства элемент $b = -a$, мы получим $(a + a) + b = a + b$, или, с использованием ассоциативности сложения, $a + (a + b) = 0$ и, далее, $a + 0 = 0$, а, значит, и $a = 0$.

1.1. Рассмотрим теперь случай $\lambda = 0$ и установим равенство $0 \cdot x = 0$. Для этого достаточно будет доказать, что вектор $a = 0 \cdot x$ удовлетворяет условию $a + a = a$:

$$0 \cdot x + 0 \cdot x \overset{(V_5)}{=\!=} (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x.$$

1.2. Совершенно аналогично рассматривается второй случай: $x = 0$. (Вас не смущает участие в формулах двух различных нулей: скалярного и векторного?)

После того, как вы убедитесь в справедливости равенства $\lambda \cdot 0 = 0$, можно будет констатировать, что в одну сторону (справа налево) утверждение (1.1) доказано.

2. Доказательство в другую сторону проводится так. Предположим, что $\lambda \cdot x = 0$, а $\lambda \neq 0$. Тогда, в силу аксиомы $\boxed{9}$, в поле P существует обратный скаляр λ^{-1}, на который можно будет умножить (слева) данное равенство. Получим:

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^{-1} \cdot 0.$$

Применяя в левой части последнего равенства аксиомы (V_7) и (V_8) и пользуясь (в правой части) полученным выше результатом (см. случай 1.2), приходим к равенству $x = 0$. $\square$

Оговорим теперь тот (наверное, уже привычный для читателей) факт, что знаки различных умножений (точечки) старательно выписываются только поначалу. Затем о них постепенно забывают, заменяя на "рядомнаписание" (= juxtaposition).

Приведем два простейших примера линейных пространств:

— *тривиальное* (нулевое) пространство $O = \{0\}$ состоит из одного (нулевого) элемента; алгебраические действия определяются единственно возможным образом: $0 + 0 = 0$ и $\lambda \cdot 0 = 0$ для любого $\lambda \in P$; все аксиомы превращаются в тавтологии $0 = 0$;

— произвольное поле P является линейным пространством над самим собой; аксиомы линейного пространства выполняются, поскольку они сводятся в этом случае к аксиомам поля (например, две аксиомы дистрибутивности (V_5) и (V_6) оказываются идентичными друг другу и полевой аксиоме $\boxed{5}$).

Нетривиальные примеры линейных пространств будут приведены в следующих пунктах.

1.3. Арифметические линейные пространства. Пространства векторов-столбцов

$$P^n = \{\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \ : \ x_i \in P,\ i = 1, \dots, n\} \tag{1.2}$$

являлись одним из основных объектов изучения в первой части курса $[A_1]$: для случая поля $P = \mathbb{R}$ они определялись уже в п. 1.3. Алгебраические действия в P^n производятся *покомпонентно*. Выполнимость аксиом обосновывалась в п. 2.3 пособия $[A_1]$ (см. замечание 2.5). В дальнейшем разъяснялся и многократно использовался следующий принцип: все рассуждения, проводимые над полем действительных чисел, но опирающиеся лишь на аксиомы поля, остаются справедливыми над произвольным полем.

В п. 2.2 определялись также арифметические пространства векторов-строк (понимаемых как транспонированные векторы-столбцы):

$$\overset{*}{P}{}^n = \{\overline{x}^t = (\, x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \ : \ x_i \in P;\ i = 1, \dots, n\}. \tag{1.3}$$

Арифметические линейные пространства P^n являются важнейшей *конкретной* реализацией *абстрактного* понятия линейного пространства над полем P. И сейчас самое время объяснить принятую

в настоящем пособии систему обозначений, относящихся к векторам различных типов. Мы даже особым образом выделим этот материал.

О б о з н а ч е н и я д л я в е к т о р о в

Абстрактные векторы никак не выделяются в обозначениях.

Векторный характер какой-либо величины a фиксируются лишь указанием (вида $a \in V$) на ее принадлежность линейному (векторному) пространству V.

Черточками над буквами помечаются лишь арифметические *векторы-столбцы*.

Арифметические *векторы-строки*, помимо черточек, снабжаются еще верхним индексом ^{t}, указывающим на *транспонирование*.

Иные конкретные типы векторов (матрицы, функции и т. д.; см. следующий пункт) чертами не выделяются.

1.4. Другие примеры конкретных линейных пространств

Пример 1.1. Линейные пространства матриц.

Множество $V = \mathrm{Mat}(m, n, P)$ прямоугольных матриц фиксированного размера $m \times n$ с элементами из поля P является (см. [A_1], замечание 2.5) линейным пространством над P (относительно *поэлементного* сложения и умножения на скаляр).

С точки зрения алгебры линейных пространств это пространство ничем принципиальным не отличается от арифметического линейного пространства P^{mn}. Можно указать отображение *векторизации*

$$\mathrm{vec} : \mathrm{Mat}(m, n, P) \longrightarrow P^{mn};\ \mathrm{vec}(A) = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \dots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

"распрямляющее" матрицу

$$\underset{m\times n}{A} = (\,\overline{a_1}\,|\,\overline{a_2}\,|\,\dots|\,\overline{a_n}\,) \in \mathrm{Mat}(m, n, P)$$

в "высокий" вектор-столбец, составленный из столбцов исходной матрицы.

Очевидны биективность отображения (1.4) и его согласованность с алгебраическими действиями (см. ниже п. 1.6).

Заметим, что именно в *векторизованном* (по столбцам либо по строкам) виде хранятся матрицы в памяти компьютера.

Пример 1.2. Пространство функций со значениями в поле.

Пусть P — произвольное поле, а M — произвольное непустое множество. Рассмотрим множество всевозможных функций (отображений), определенных на M и принимающих значения в P:

$$V = \mathcal{F}(M, P) = \{f : M \to P\}.$$

Напомним, что функции $f, g \in \mathcal{F}(M, P)$ считаются равными, если они равны *поточечно*, т. е.

$$[\, f = g \,] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\, (\forall x \in M)\, (f(x) = g(x)) \,].$$

Алгебраические действия над функциями также определяются поточечно:

$$(f+g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) + g(x);\ (\lambda \cdot f)(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda \cdot f(x);\ f, g \in \mathcal{F}(M, P);\ x \in M.$$

Аксиомы (V_1) — (V_8), очевидно, справедливы, поскольку они выполняются в каждой точке x. (Если для вас это не очевидно, то воспринимайте данное заявление как задание упражнения и честно проверяйте аксиомы, одну за другой, пока очевидность не будет достигнута.)

Заметим, что арифметическое линейное пространство векторов-столбцов P^n (и аналогичное пространство векторов-строк) можно трактовать как пространство P-значных функций на конечном множестве $M = \{1, ..., n\}$: каждый вектор $\overline{f} \in P^n$ может рассматриваться как функция (*конечная последовательность*), сопоставляющая номеру $i \in M$ соответствующую компоненту $f_i \in P$.

Данная конструкция может быть обобщена на *бесконечные последовательности* (векторы-строки) $\overline{f}^t = (f_i)_{i=1}^{\infty}$, рассматриваемые как функции $f : \mathbb{N} \to P;\ i \mapsto f_i$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Такие последовательности образуют линейное пространство, обозначаемое P^{∞}, которое уже встречалось нам в $[A_1]$, в п. 36.1 (см. замечание 36.2) в несколько ином облике, с началом нумерации в нуле, причем вектор $\overline{f}^t = (f_i)_{i=0}^{\infty}$ ассоциировался с *формальным степенным рядом*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + ... + f_k x^k + ... \qquad (1.5)$$

Напомним обозначение $P[[x]]$ для линейного пространства всех степенных рядов вида (1.5). При сложении степенных рядов складываются все соответствующие коэффициенты; при умножении на скаляр степенного ряда все его коэффициенты умножаются на этот скаляр.

Пример 1.3. Пространство многочленов.

Многочлены можно определять (см. [A_1, п. 36.1]) как *финитные* степенные ряды вида (1.5). Множество $P[x]$ многочленов над полем P является подмножеством в пространстве $P[[x]]$. Для каждого $f(x) \in P[x]$ (кроме нулевого многочлена) определено неотрицательное целое число $n = \deg(f(x))$ — *степень* многочлена; она является номером последнего ненулевого коэффициента в формуле (1.5); многочлен представляется (конечной) суммой

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k x^k = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + ... + f_n x^n. \qquad (1.6)$$

Множество многочленов само является линейным пространством над P. (Это следует из того, что алгебраические действия над финитными степенными рядами снова приводят к финитным рядам; см. в следующем пункте понятие линейного подпространства.)

Пример 1.4. Расширение поля как линейное пространство.

Допустим, поле P содержится (в качестве *подполя*) в более широком поле L. (В этом случае говорят также, что L является *расширением* P). Тогда L можно рассматривать как линейное пространство над P. В самом деле, произведение $\lambda \cdot x$ ($\lambda \in P$; $x \in L$) определено, поскольку оно определено в L, а все аксиомы линейного пространства над P выполняются, т. к. сводятся к соответствующим полевым аксиомам в L.

В частности, поле действительных чисел $\mathbb{R}$ является расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и поэтому может рассматриваться как линейное пространство над $\mathbb{Q}$.

Аналогично, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ является линейным пространством над $\mathbb{R}$. Кстати, именно так поле $\mathbb{C}$ вводилось в [A_1] (см. *векторную модель* в п. 31.3).

1.5. Линейные подпространства. Пусть V — линейное пространство над полем P.

Определение 1.2. Непустое подмножество $W \subseteq V$ называется *линейным подпространством* в пространстве V, если оно *устойчиво* относительно алгебраических действий над векторами, т. е. если 1) сумма двух векторов, принадлежащих W, снова принадлежит W и 2) при умножении вектора из W на произвольный скаляр снова получается вектор из W.

Для линейных подпространств используется обозначение $W \leqslant V$.

Два условия определения 1.2 можно заменить одним следующим: для любых векторов $x, y \in W$ и любых скаляров $\lambda, \mu \in P$ линейная комбинация $\lambda x + \mu y$ принадлежит W.

Очевидно, линейное подпространство $W \leqslant V$ само является линейным пространством над P, причем — относительно тех же алгебраических действий, которые были определены на V и *сужаются* на W (благодаря его устойчивости).

Столь же очевидно то, что линейное подпространство в линейном подпространстве является линейным подпространством и в исходном линейном пространстве.

С определением линейных подпространств (преимущественно для случая, когда данное линейное пространство является арифметическим) мы давно знакомы и уже активно работали (см. [A_1, пп. 3.2, 8.2]).

Из условий 1 и 2 определения 1.2 (с учетом непустоты подпространства) немедленно следует, что всякое линейное подпространство $W \leqslant V$ содержит нулевой вектор (в самом деле, произвольный вектор $x \in W$ можно умножить на нулевой скаляр и результат также будет принадлежать W).

Вместе с какими-либо векторами $a_1, \ldots, a_k$, принадлежащими подпространству W, произвольная *линейная комбинация* $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$ ($\lambda_i \in P$; $i = 1, \ldots, k$) также будет принадлежать W. (Подробнее о линейных комбинациях см. ниже, в п. 2.1.)

В любом линейном пространстве V можно указать два *тривиальных* подпространства: нулевое подпространство $W = O = \{0\}$ и подпространство, совпадающее со всем пространством: $W = V$.

С нетривиальными примерами линейных подпространств мы познакомимся в следующей серии примеров.

Пример 1.5. Два общих способа задания подпространств в арифметических линейных пространствах изучались в [A_1], в п. 13.1. Напомним эти способы.

Всякая $(m \times n)$-матрица A с элементами из P определяет два линейных подпространства:

1) нуль-пространство (ядро) матрицы A:

$$L_A^0 = \{\, \overline{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, A \cdot \overline{x} = \overline{0} \,\} \leqslant P^n; \tag{1.7}$$

2) образ (линейную оболочку столбцов) матрицы A:

$$R_A = \langle\, \overline{a_1},\, \overline{a_2},\, \ldots,\, \overline{a_n} \,\rangle \leqslant P^m. \tag{1.8}$$

Пример 1.6. В примере 1.3 пространство многочленов $P[x]$ изначально определялось как линейное подпространство в пространстве степенных рядов $P[[x]]$.

Зафиксировав неотрицательное целое число n, можно рассмотреть подмножество $P_n[x]$ тех многочленов над P, степени которых не превышают n. Свойства степени обеспечивают устойчивость этого подмножества относительно линейных алгебраических операций. Таким образом, $P_n[x] \leqslant P[x]$.

Пример 1.7. Если поле P является бесконечным, то (см. [A_1, пп. 39.1, 39.4]) многочлены можно рассматривать как *полиномиальные функции* и пространство многочленов $P[x]$ — как линейное подпространство в пространстве функций $\mathcal{F}(P, P)$.

Числовые поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ несут, помимо алгебраической, еще и другие математические структуры, связанные с понятием предельного перехода. Эти структуры изучаются в курсах математического анализа и топологии. С их помощью вводятся в рассмотрение классы *непрерывных* и *гладких* функций.

Класс $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *непрерывных* функций (заданных на всей действительной оси и принимающих действительные значения) вам хорошо знаком, и мы не будем здесь его описывать. Сумма непрерывных функций снова есть непрерывная функция, при умножении непрерывной функции на скаляр (константу) непрерывность также сохраняется. Поэтому можно констатировать, что множество $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ является линейным подпространством в пространстве всех функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Класс гладких (точнее: 1-*гладких*) функций $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ определяется как множество всех *непрерывно дифференцируемых* (имеющих непрерывную производную на $\mathbb{R}$) функций. Свойства производной и свойства дифференцируемых функций немедленно влекут тот факт, что гладкие функции образуют линейное подпространство

в пространстве непрерывных функций. Еще более узким подпространством является класс *бесконечно гладких* (имеющих производные любого порядка) функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Многочлены с действительными коэффициентами являются непрерывными, а также бесконечно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, поэтому возникает следующая цепочка подпространств:

$$\mathbb{R}[x] \leqslant C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \leqslant \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \leqslant \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \leqslant \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Отметим далее следующее важнейшее свойство линейных подпространств в линейном пространстве (характерное, впрочем, и для *подобъектов* вообще, в других типах *алгебраических объектов*, например, для *подгрупп* в *группе* и т. п.)

Предложение 1.2. *Пересечение любого семейства линейных подпространств в линейном пространстве V само является линейным подпространством в V.*

Доказательство. Пусть $(W_\iota)_{\iota\in I}$ — произвольное (конечное или бесконечное) семейство линейных подпространств $W_\iota \leqslant V$, *индексированное* элементами $\iota \in I$ некоторого множества I. Пересечение этого семейства

$$W = \bigcap_{\iota\in I} W_\iota = \{\, x \in V \,:\, (\forall \iota \in I)\,[\, x \in W_\iota \,]\,\}$$

состоит из тех и только тех векторов пространства V, которые принадлежат *всем* подпространствам данного семейства.

Если $x, y \in W$, то x и y принадлежат каждому из $W_\iota \leqslant V$. Поэтому любая линейная комбинация $\lambda x + \mu y$ $(\lambda, \mu \in P)$ принадлежит каждому из W_ι и, следовательно, их пересечению W. Значит, $W \leqslant V$. $\square$

1.6. Линейные отображения. Пусть V и W — линейные пространства над одним и тем же полем P, а $\varphi : V \to W$ является отображением из V в W.

Определение 1.3. Отображение φ называется *линейным отображением* (или *линейным оператором*, или *линейным гомоморфизмом*), если оно *согласовано* с линейными алгебраическими действиями (или, иначе говоря, *сохраняет* суммы и произведения на скаляр), т. е. если справедливы следующие два свойства:

$$(\forall\, x, y \in V)\ [\,\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)\,]; \tag{1.9}$$

$$(\forall\, x \in V,\ \lambda \in P)\ [\,\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi(x)\,]. \tag{1.10}$$

В пособии $[A_1]$ линейные отображения (для случая арифметических пространств) определялись в п. 15.1. Данное выше общее определение ничем (кроме обозначений для векторов) не отличается от того, которое приводилось в частном случае, изучавшемся в предыдущем семестре.

Остаются справедливыми все основные свойства линейных отображений. Например, *сохранение нуля* $\varphi(0) = 0$ доказывается так: равенство $0 + 0 = 0$ и свойство (1.9) влекут равенство $a + a = a$ для вектора $a = \varphi(0) \in W$, после чего остается воспользоваться вспомогательным результатом, установленным в начале доказательства предложения 1.1, и получить $a = 0$.

Линейные отображения сохраняют также линейные комбинации векторов:

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \ldots + \lambda_k \varphi(a_k), \tag{1.11}$$

где $a_i \in V;\ \lambda_i \in P\ (i = 1, \ldots, k)$.

Сохраняются обозначения и описание для *нулевых* отображений

$$o : V \to W;\ o(x) = 0;\ x \in V,$$

а также *тождественных* отображений

$$\varepsilon : V \to V;\ \varepsilon(x) = x;\ x \in V.$$

В случае необходимости, если требуется явно указать пространство, в обозначение тождественного отображения может включаться уточняющий индекс: ε_V.

Без всяких изменений (следует только убрать ненужные черты над векторами) на абстрактный случай переносятся такие свойства линейных отображений как *линейность композиции* двух линейных отображений, *линейность обратного отображения* для обратимого линейного отображения и т. п. (см. [A_1, пп. 15.1, 15.4]). Чтобы дать образец для самостоятельных упражнений, восстановим доказательство последнего из упомянутых фактов.

Пусть $\varphi : V \to W$ является обратимым линейным отображением. Это значит, что существует отображение $\psi : W \to V$ такое, что

$$\psi \circ \varphi = \varepsilon_V; \ \varphi \circ \psi = \varepsilon_W.$$

Пусть теперь на векторах $u, v \in W$ отображение ψ принимает значения $\psi(u) = x$, $\psi(v) = y$, где x, y — однозначно определенные векторы из пространства V, такие, что $\varphi(x) = u$ и $\varphi(y) = v$.

Свойство (1.9) для отображения ψ доказывается так:

$$\psi(u + v) = \psi(\varphi(x) + \varphi(y)) = \psi(\varphi(x + y)) = x + y = \psi(u) + \psi(v).$$

Свойство (1.10) проверяется аналогично, но еще проще.

Напомним, а точнее — воспроизведем в новой (абстрактной) ситуации, классификацию линейных отображений по типам. Для случая арифметических линейных пространств этот материал излагался в [A_1], в п. 15.6.

С л о в а р ь м о р ф и з м о в

Линейный *гомоморфизм*	Линейное отображение линейных пространств: $V \xrightarrow{\varphi} W$
Линейный *мономорфизм*	*Инъективный* линейный гомоморфизм
Линейный *эпиморфизм*	*Сюръективный* линейный гомоморфизм
Линейный *изоморфизм*	*Обратимый* линейный гомоморфизм; равносильно: (моно- и эпи-)морфизм
Линейный *эндоморфизм*	Линейный гомоморфизм линейного пространства *в себя*: $V \xrightarrow{\varphi} V$
Линейный *автоморфизм*	Обратимый линейный эндоморфизм

Рассмотрим далее несколько примеров линейных отображений.

Пример 1.8. Как показано в $[A_1]$, в п. 15.3, всякое линейное отображение арифметических линейных пространств $\varphi : P^n \to P^m$ однозначно определяется $(m \times n)$-матрицей A:

$$\varphi(\overline{x}) = A \cdot \overline{x}\,;\ \overline{x} \in P^n. \tag{1.12}$$

В п. 15.6 изучались условия (моно-, эпи-, изо-)морфности отображения (1.12).

Пример 1.9. Описанное в примере 1.1 отображение векторизации (1.4) является линейным изоморфизмом линейного пространства $(m \times n)$-матриц на арифметическое линейное пространство P^{mn}.

Пример 1.10. Оператор дифференцирования.

В этом примере в качестве поля P будет фигурировать поле действительных чисел $\mathbb{R}$. Рассмотрим пространство гладких функций $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (см. пример 1.7) и отображение $'$, сопоставляющее гладкой функции f ее производную f' [полученная функция (в силу гладкости исходной) будет непрерывной, т. е. будет принадлежать пространству $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$]. Из курса математического анализа известны свойства производной: производная суммы функций равна сумме производных; постоянный множитель можно выносить из-под знака производной. Эти свойства позволяют констатировать, что отображение

$$' : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R});\ f \mapsto f';\ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \tag{1.13}$$

является линейным оператором.

Оператор дифференцирования удобно рассматривать на линейном подпространстве $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, которое он переводит само в себя, т. е. является эндоморфизмом на нем. Возможно и дальнейшее сужение, на линейное подпространство многочленов $\mathbb{R}[x]$, и, поскольку производная многочлена снова является многочленом, то опять получается эндоморфизм:

$$' : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x];\ f(x) \mapsto f'(x);\ f(x) \in \mathbb{R}[x]. \tag{1.14}$$

Эндоморфизм (1.14) является (эпи-, но не моно-)морфизмом. (Почему? Проверьте свои познания в математическом анализе и, заодно, то, насколько вы овладели материалом словаря морфизмов.)

Можно еще сильнее сузить отображение (1.14), рассмотрев его на линейном подпространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n.

При дифференцировании степень (ненулевого) многочлена понижается на единицу, поэтому последнее сужение можно представить как гомоморфизм

$$' : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x];\ f(x) \mapsto f'(x);\ f(x) \in \mathbb{R}_n[x], \tag{1.14a}$$

который также будет (эпи-, но не моно-)морфизмом.

Пример 1.11. Останемся еще на некоторое время в сфере действия математического анализа и рассмотрим отображение, сопоставляющее функции f, непрерывной на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$, определенный интеграл от этой функции по заданному отрезку. Значение интеграла является действительным числом. Таким образом получается отображение из линейного пространства $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ всех функций, непрерывных на $[a,b]$, в поле $\mathbb{R}$, рассматриваемое как линейное пространство над самим собой:

$$\mathrm{int}_{[a,b]} : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R};\ f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx;\ f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}). \tag{1.15}$$

В силу свойств определенного интеграла, отображение (1.15) является линейным. Очевидна его эпиморфность: для любого числа $c \in \mathbb{R}$ можно найти функцию, интеграл от которой по отрезку $[a,b]$ равен числу c; достаточно взять константу $f(x) = c/(b-a)$.

1.7.* Пример линейного пространства над полем $\mathbb{F}_2$. Данный пункт не будет использоваться в дальнейшем. Он содержит некий познавательный материал. Но будущим компьютерщикам, для которых *конечные поля* и *булевы алгебры* являются важными рабочими инструментами, автор не рекомендовал бы пропускать эту необязательную вставку.

Рассмотрим произвольное непустое множество I и множество 2^I всех его подмножеств (включая пустое и само I):

$$2^I = \{\, A \,:\, A \subseteq I \,\}. \tag{1.16}$$

Замечание 1.1. Обратите внимание на *экспоненциальное обозначение* для множества всех подмножеств. Оно согласуется с общепринятым в теории множеств экспоненциальным обозначением Y^X

для множества всевозможных *отображений* из множества X в множество Y. Дело в том, что произвольное подмножество $A \subseteq I$ однозначно задается отображением (так называемой *характеристической функцией*)

$$\chi_A : I \longrightarrow \{0,1\};\ \chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A; \\ 1, & \text{если } x \in A. \end{cases} \tag{1.17}$$

Интересно также, как в обозначении (1.16) понимается символ 2. В теории множеств *числа* — это тоже *множества*. Знаете ли вы, что такое натуральное число 2? Чтобы знать это, нужно знать прежде, что такое числа 0 и 1. Число 0 определяется как пустое множество: $0 = \varnothing = \{\}$; число 1 — как множество $1 = \{0\}$; число 2 — это множество $2 = \{0,1\}$; и т. д.

Экспоненциальное обозначение (1.16) напоминает также о следующем важном *комбинаторном* факте. В случае, когда множество I конечно и содержит, скажем, n элементов, множество 2^I также конечно и содержит 2^n элементов. (В самом деле, для любого k, от нуля до n, имеется C_n^k k-элементных подмножеств данного n-элементного множества. Сумма $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$, в силу бинома Ньютона.)

На множестве

$$V = 2^I \tag{1.18}$$

заданы хорошо знакомые вам алгебраические действия: *объединение* и *пересечение* для двух подмножеств и взятие *дополнения* к подмножеству. В рассматриваемых здесь вопросах будет уместным заменить (не очень удобные в работе) знаки объединения и пересечения на обычные знаки *сложения* и *умножения*, а дополнение обозначать "надчеркиванием":

$$A + B = A \cup B;\ A \cdot B = A \cap B;\ \overline{A} = I \setminus A\ (A, B \in V). \tag{1.19}$$

Упростим мы и обозначение пустого подмножества, сделав его более похожим на *нуль*: $O = \varnothing$; а принятое изначально обозначение I для основного множества будет нам напоминать о *единице*.

Ниже приводится сводка из 19 законов, справедливых для алгебраических действий (1.19) в множестве (1.18). В этих формулах буквы A, B, C обозначают произвольные подмножества в основном множестве I.

Алгебра подмножеств (в заданном множестве) является важнейшим примером так называемой *булевой алгебры*, характеризуемой

законами (b.1) — (b.19). Не все из этих законов независимы. Большинство из них встречалось вам в курсе "Введения в анализ". Любой из них вы должны уметь доказывать и иллюстрировать на картинках (так называемых *диаграммах Венна*).

Обратите особое внимание на замечательную симметрию: каждому из законов соответствует *двойственный* закон, получаемый из исходного взаимной заменой сложения на умножение, нуля на единицу. Так, закону (b.7), выражающему дистрибутивность умножения относительно сложения, отвечает двойственный закон (b.16), выражающий дистрибутивность сложения относительно умножения (такого закона нет в "обычной" алгебре). Последний закон (b.19) является *самодвойственным*. Напомним, что формулы (b.9) и (b.18), играющие исключительно важную роль в булевой алгбре (и вообще в математике), называются *законами де Моргана*.

Законы булевой алгебры

(b.1) $(A+B)+C=A+(B+C)$	(b.10) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
(b.2) $A+B=B+A$	(b.11) $A\cdot B=B\cdot A$
(b.3) $A+O=A$	(b.12) $A\cdot I=A$
(b.4) $A+I=I$	(b.13) $A\cdot O=O$
(b.5) $A+A=A$	(b.14) $A\cdot A=A$
(b.6) $A\cdot(A+B)=A$	(b.15) $A+A\cdot B=A$
(b.7) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	(b.16) $A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$
(b.8) $A+\overline{A}=I$	(b.17) $A\cdot\overline{A}=O$
(b.9) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$	(b.18) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

(b.19) $\overline{\overline{A}}=A$

Займемся теперь алгебраической операцией сложения (объединения) подмножеств. Законы (b.1) — (b.3) идентичны (в условиях рассматриваемого примера) аксиомам (V_1) —(V_3). Однако аксиома (V_4) не выполняется. (В самом деле, равенство $A+B=O$ имеет место лишь в одном случае: $A=B=O$, т. е. ни для какого непустого подмножества не существует в булевой алгебре противоположного элемента.) Значит, булево сложение не годится для *наведения* в множестве V *структуры линейного пространства* (или хотя бы структуры коммутативной группы).

Придется модифицировать действие сложения, в связи с чем будет уместным следующее напоминание о взаимной связи *теории множеств* и *математической логики*.

Замечание 1.2. Сложению (объединению) множеств в математической логике соответствует *дизъюнкция* ($\vee$) *высказываний*, выражаемая логической связкой *или*. Элемент принадлежит объединению двух множеств тогда и только тогда, когда он принадлежит или первому множеству, или второму (причем не исключается его принадлежность *обоим* множествам). Это выражают фразой: "логическое *или* не является *разделительным*".

Умножению (пересечению) соответствует *конъюнкция* ($\wedge$), выражаемая связкой *и*. Элемент принадлежит пересечению тогда и только тогда, когда он принадлежит и первому множеству, и второму.

Дополнению множества отвечает *отрицание* высказывания, выражаемое частицей *не*. Элемент принадлежит дополнению некоторого подмножества (в заданном *основном* множестве) тогда и только тогда, когда он *не* принадлежит этому подмножеству.

Ниже мы введем в рассмотрение "новое" сложение подмножеств, соответствующее *разделительному или*. Будем обозначать это действие символом $\oplus$. Элемент считается принадлежащим сумме $A \oplus B$ двух подмножеств, если он принадлежит *одному и только одному* из них. (В этом плане автору трудно удержаться от бытовой аналогии с так называемой *женской* логикой: "или я, или она!" Вариант "или мы обе вместе" не рассматривается.)

Существует несколько равносильных формул, выражающих *разделительную сумму* подмножеств. Приведем две из них:

$$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = (A + B) \cdot \overline{(A \cdot B)}. \tag{1.20}$$

Очевидно, что если данные подмножества A и B не пересекаются (т. е. $A \cdot B = O$), то их разделительная сумма совпадает с обычной: $A \oplus B = A + B$.

Упомянем, что разделительная сумма часто именуется *симметрической разностью*, обозначается символом Δ и выражается формулой

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \tag{1.20а}$$

Диаграмму Венна для $A \oplus B$ см. на рис. 1.1 в прил. 2.

Докажем, что разделительное сложение определяет в множестве $V = 2^I$ структуру коммутативной группы, т. е. для этого действия справедливы первые четыре аксиомы линейного пространства.

Коммутативность (V_2) и свойство нулевого элемента (V_3) совершенно очевидны. Легко (и неожиданно) решается проблема с противоположными элементами: элементом, противоположным к $A \in V$,

будет сам этот элемент: $A \oplus A = O$. Так что и четвертая аксиома справедлива.

Немного повозиться придется с первой аксиомой — ассоциативностью разделительного сложения:

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C); \quad A, B, C \in V. \tag{1.21}$$

Распишем левую часть формулы (1.21).

[Задание: вставьте в нижеследующих преобразованиях, над каждым из знаков равенства ссылки на используемые законы булевой алгебры (b.1) — (b.19).]

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) \oplus C &= (A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B) \oplus C = \\
&= (A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B) \cdot \overline{C} + \overline{(A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B)} \cdot C = \\
&= A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \left(\overline{A \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B}\right) \cdot C = \\
&= A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B}) \cdot C = \\
&= A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot A \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + B \cdot A \cdot C + B \cdot B \cdot C = \\
&= A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C.
\end{aligned}$$

Получив в результате преобразования левой части (1.21) симметрический (не изменяющийся при любой перестановке букв A, B, C) результат, мы можем немедленно прийти к выводу, что после аналогичных преобразований в правой части, мы придем в точности к такому же результату. Тем самым формула (1.21) доказана. Но будет совершенно не вредно (и даже очень полезно), если вы не поленитесь самостоятельно провести все упомянутые преобразования.

Ассоциативность операции $\oplus$ позволяет записывать выражение $A \oplus B \oplus \mathrm{C}$ без использования скобок. Взгляните на диаграмму Венна для разделительной суммы трех слагаемых (рис. 1.2 в прил. 2). После этого для вас станет очевидна следующая формула:

$$A \oplus B \oplus \mathrm{C} = A \cdot B \cdot C \oplus A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \oplus \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \oplus \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C. \tag{1.22}$$

Итак, можно считать, что множество V является коммутативной группой относительно разделительного сложения $\oplus$.

Теперь мы выберем поле скаляров и зададим на V операцию умножения на скаляры. Выбор здесь совершенно ясен. В любом поле имеется единица 1, и, чтобы удовлетворить (V_5), мы должны иметь

$$(1 + 1) \cdot A = 1 \cdot A \oplus 1 \cdot A,$$

или, с учетом (V_8):

$$(1+1)\cdot A = A \oplus A = O. \tag{1.23}$$

Требование (1.23) будет удовлетворено, если в поле скаляров выполняется равенство $1+1=0$. Такие поля имеются, и простейшее из них — поле классов вычетов $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. (Заметьте, что в арифметике этого поля "нет двойки". А если все же определить: $2 = 1+1$, то придется считать, что $2 = 0$.) Примем по определению:

$$0 \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} O;\ 1 \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} A \tag{1.24}$$

и проверим аксиомы (V_5) — (V_7). Восьмую аксиому проверять не надо: она фигурирует как часть определения (1.24).

Три указанные аксиомы проверяются очень просто. Рассуждения однотипны, и мы ограничимся проверкой (V_5) :

$$(\lambda+\mu)\cdot A = \lambda \cdot A \oplus \mu \cdot A;\ \lambda, \mu \in \mathbb{F}_2;\ A \in V. \tag{1.25}$$

Имеют место четыре случая:
1) $\lambda = \mu = 0$; 2) $\lambda = \mu = 1$; 3) $\lambda = 0$; $\mu = 1$; 4) $\lambda = 1$; $\mu = 0$.

Первый из них тривиален, третий и четвертый ничем не отличаются друг от друга и столь же тривиальны; остается убедиться в справедливости (1.24) во втором случае. Но и это тривиально, поскольку выполняется в силу принятых определений [см. (1.22)].

Итак, проверены все восемь аксиом и мы можем констатировать: множество $V = 2^I$ всех подмножеств непустого множества I является линейным пространством над полем $\mathbb{F}_2$ (относительно разделительного сложения подмножеств и естественного умножения подмножеств на скаляры из $\mathbb{F}_2$).

§ 2. Системы векторов в линейных пространствах и их линейные оболочки. Порождающие системы векторов. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства

2.1. Системы векторов в линейном пространстве и их линейные оболочки. Пусть V — линейное пространство над полем P.

В настоящем параграфе нам предстоит "переизложить" на новом (абстрактном) уровне теорию систем векторов и их линейных оболочек (см. в частном случае арифметических пространств пп. 8.1, 8.2 пособия $[A_1]$).

Определение 2.1. Конечной *системой векторов (с.в.)* в пространстве V называется конечный *упорядоченный набор* (*список*, *конечная последовательность*)

$$\mathcal{A} = [\, a_1, a_2, \dots, a_k \,], \tag{2.1}$$

векторов $a_i \in V$ $(i = 1, \dots, k)$, где $k \in \mathbb{N}$. (Рассматривается также пустая система векторов $\emptyset = [\,]$.)

Термин *подсистема* понимается как *подпоследовательность* (*подсписок*, с сохранением порядка).

Определение 2.2. Линейной комбинацией (непустой) с.в. (2.1) называется *выражение* вида $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$, где $\lambda_i \in P$ $(i = 1, \dots, k)$.

Если в этом выражении произвести действия (умножения на скаляры и сложение), то получится вектор

$$a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \,, \tag{2.2}$$

который называется *значением* линейной комбинации.

Говорят таже, что вектор a *линейно выражается* через векторы, входящие в $\mathcal{A}$.

Значение линейной комбинации определено корректно в силу аксиом (V_1) — (V_8), однако различные линейные комбинации могут иметь одинаковые значения.

Определение 2.3. *Линейной оболочкой* (непустой) конечной с.в. (2.1) называется подмножество $\langle \mathcal{A} \rangle \subseteq V$, состоящее из значений всевозможных линейных комбинаций векторов этой системы:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A} \rangle &= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \,:\, \lambda_i \in P;\, i = 1, \dots, k \right\} = \\ &= \left\{ a \in V \,:\, [\, \exists \lambda_i \in P \ (i = 1, \dots, k) \,]\, [\, a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \,] \right\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Таким образом, для $\mathcal{A} \neq [\,]$ линейная оболочка $\langle\mathcal{A}\rangle$ состоит из всех векторов $a \in V$, линейно выражающихся через с.в. $\mathcal{A}$. Из коммутативности сложения вытекает, что линейная оболочка с.в. не зависит от порядка векторов в системе. Возможность перегруппировки слагаемых обеспечивает неизменность линейной оболочки при выбрасывании из с.в. повторяющихся элементов. Очевидно также, что на линейную оболочку с.в. не повлияет выбрасывание из нее нулевого вектора (если он присутствовал в системе).

Линейная оболочка пустой с.в. по определению считается состоящей из единственного (нулевого) вектора:

$$\langle\emptyset\rangle = O = \{0\}. \tag{2.3a}$$

Предложение 2.1. *1. Для любой с.в. (2.1) в линейном пространстве V ее линейная оболочка $\langle\mathcal{A}\rangle$ является линейным подпространством в V, т. е.*

$$\langle\mathcal{A}\rangle \leqslant V. \tag{2.4}$$

2. Это линейное подпространство является наименьшим из подпространств в V, содержащих все векторы, входящие в $\mathcal{A}$, т. е. если для какого-либо линейного подпространства $W \leqslant V$ справедливо $a_i \in W$ $(\forall i = 1, ..., k)$, то $\langle\mathcal{A}\rangle \subseteq W$.

Доказательство. Данное предложение получено обобщением (*абстрагированием*) предложения 8.1 пособия $[A_1]$. Вам предлагается модернизировать доказательство. (В основном это будет сводиться к смене обозначений, в частности, — к отказу от черточек над векторами. Заметьте также, что и для пустой с.в. утверждение предложения остается в силе.) □

Замечание 2.1. Легко понять, что при расширении с.в. ее линейная оболочка по крайней мере не сужается. Точнее, справедливо следующее утверждение: если с.в. $\mathcal{A}$ является *подсистемой* с.в. $\mathcal{B}$, то линейная оболочка $\langle\mathcal{A}\rangle$ является *линейным подпространством* линейной оболочки $\langle\mathcal{B}\rangle$.

Определение 2.4. Пусть W — линейное подпространство в пространстве V и $\mathcal{A}$ — система векторов, принадлежащих подпространству W. Говорят, что $\mathcal{A}$ *порождает* W (или является *порождающей* для W), если

$$\langle\mathcal{A}\rangle = W. \tag{2.5}$$

Если речь идет о *порождающей* с.в., без указания подпространства W, то имеется в виду, что она порождает *все пространство* V.

Всякая система векторов из W, содержащая с.в., порождающую подпространство W, сама является порождающей для W. (В самом деле, если вектор $a \in W$ линейно выражается через некоторую с.в., то он будет линейно выражаться и через более широкую систему.) Порождающая с.в. останется таковой, если из нее выбросить повторно встречающиеся, а также нулевые векторы.

Примеры порождающих с.в. для арифметических линейных пространств и их подпространств вам следует "подгрузить" в вашу оперативную память из пособия $[A_1]$. Здесь мы приведем только один простой пример. Он лишь на первый взгляд является новым; на самом деле, как мы вскоре убедимся, он сводится к разобранным в прошлом семестре.

Пример 2.1. Рассмотрим в пространстве $V = P_n[x]$ (см. пример 1.6) с.в.

$$\mathcal{B}_n = [\,1, x, x^2, \dots, x^n\,]. \tag{2.6}$$

Всякий многочлен степени не выше n представляется в виде линейной комбинации одночленов, входящих в (2.6), с коэффициентами из поля P. Следовательно $\mathcal{B}$ порождает V.

2.2.* Линейные оболочки подмножеств в линейных пространствах. В рабочих (вычислительных) вопросах линейной алгебры линейные пространства и их подпространства задаются как линейные оболочки конечных систем векторов, причем последние понимаются как списки. Если каким-либо образом переставить элементы в списке, то получится новый список. Однако линейная оболочка при этом не изменится.

В связи с этим (в основном, в теоретических вопросах) применяется иной подход (кратко о нем говорилось в замечании 8.5 в $[A_1]$). Вместо конечных *списков* рассматриваются конечные *множества*, которые не содержат повторяющихся элементов и не наделены каким-либо порядком.

При реальной записи множества (попарно различных) векторов

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \tag{2.1a}$$

[ср. со списком (2.1)] какой-то порядок (нумерация) все же используется, но при изменении этого порядка (перестановке векторов) множество считается неизменным.

Мы можем говорить о линейных комбинациях векторов из подмножества (2.1a), о линейной оболочке $\langle A \rangle$ для этого подмножества.

Но что самое важное, при таком подходе можно говорить об оболочке *произвольного* (не обязательно конечного) подмножества.

Определение 2.3а. Пусть A — любое подмножество в линейном пространстве V. *Линейная оболочка* $\langle A\rangle$ этого *подмножества* считается состоящей из всевозможных линейных комбинаций всевозможных *конечных* подмножеств множества A.

Элементы $\langle A\rangle$ представляются в виде конечных сумм

$$x = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_k a_k;\ \lambda_i \in P;\ a_i \in A\ (i = 1, ..., k), \qquad (2.7)$$

где k — произвольное натуральное число.

Следующее предложение является альтернативной версией предложения 2.1. (Здесь, в отличие от исходной версии, мы приведем более подробное доказательство.)

Предложение 2.1а. *Для любого подмножества A в линейном пространстве V его линейная оболочка $\langle A\rangle$ есть пересечение всех линейных подпространств в V, содержащих данное подмножество.*

Доказательство. Пересечение

$$W_0 = \bigcap\{\, W \leqslant V\ :\ A \subseteq W\,\}$$

всех линейных подпространств, содержащих подмножество A, само является (см. предложение 1.2) подпространством, причем также содержащим A. Таким образом, W_0 является наименьшим из линейных подпространств, содержащих A.

Кроме того, по определению подпространства, вместе с векторами из A, в W_0 содержатся произвольные конечные линейные комбинации таких векторов. Следовательно, линейная оболочка $\langle A\rangle \leqslant W_0$.

С другой стороны, оболочка $\langle A\rangle$ также является подпространством в пространстве V. В самом деле, сумма $x + y$ двух линейных комбинаций, (2.7) и

$$y = \mu_1 b_1 + ... + \mu_l b_l; \mu_j \in P;\ b_j \in A\ (j = 1, ..., l), \qquad (2.8)$$

является линейной комбинацией такого же вида (если указанные разложения содержат одинаковые векторы, то при суммировании следует провести перегруппировку и воспользоваться дистрибутивностью умножения на скаляр).

Подмножество A содержится в подпространстве $\langle A\rangle$ (в самом деле, каждый вектор $a \in A$ можно представить в виде линейной комбинации $a = 1 \cdot a$.)

В силу того, что W_0 является наименьшим из подпространств, содержащих A, получается второе включение: $W_0 \leqslant \langle A\rangle$.

Таким образом, доказано равенство $W_0 = \langle A\rangle$ и предложение в целом. □

Замечание 2.2. Из установленного выше факта с очевидностью вытекают следующие утверждения:

1) подмножество в линейном пространстве тогда и только тогда является линейным подпространством, когда оно совпадает со своей линейной оболочкой;

2) включение подмножеств $A \subseteq B$ влечет включение их линейных оболочек $\langle A\rangle \leqslant \langle B\rangle$;

3) для любого $A \subseteq V$ справедливо равенство

$$\langle\langle A\rangle\rangle = \langle A\rangle. \tag{2.9}$$

Пример 2.2. Рассмотрим в пространстве многочленов $V = P[x]$ (бесконечное) множество

$$B = \{\, 1,\, x\,, x^2\,, \ldots\,\} \tag{2.10}$$

всех одночленов. Из определения 2.3а непосредственно следует, что $\langle B\rangle = V$. Другими словами, множество одночленов (2.10) *порождает* пространство многочленов.

2.3. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства

Определение 2.5. Линейное пространство называется *конечномерным*, если для него существует конечная порождающая с.в., и *бесконечномерным* — в противоположном случае.

Вы, наверное, уже привыкли к необходимости "разъяснения в позитивных терминах", т. е. без использования отрицания (выражаемого частицей *не*), свойств, противоположных к определяемым. Как раскрыть в подобных терминах свойство бесконечномерности линейного пространства?

Линейное пространство V будет *бесконечномерным*, если никакая конечная с.в. не будет порождающей для V, т. е. если *для любой конечной с.в. $\mathcal{A}$ ее линейная оболочка $\langle\mathcal{A}\rangle$ отлична от V.*

Приведем далее несколько примеров конечномерных и бесконечномерных линейных пространств.

Пример 2.3. Арифметическое линейное пространство P^n является конечномерным. Оно порождается давно нам знакомой (см. [A_1, пример 8.2]) системой единичных векторов:

$$\mathcal{E}_n = [\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \dots,\overline{e_n}]. \tag{2.11}$$

Пример 2.4. Пространство $P_n[x]$ многочленов степени не выше n (см. пример 2.1) также является конечномерным. Напомним, что это пространство изоморфно арифметическому линейному пространству $\overset{*}{P}{}^{n+1}$: многочлену

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots + f_nx^n;\ f_k \in P\ (k = 1, \dots, n), \tag{2.12}$$

где не требуется, чтобы $f_n \neq 0$, сопоставляется вектор-строка

$$\overline{f}^t = (f_0, f_1, \dots, f_n). \tag{2.12a}$$

Пример 2.5. Пространство $P[x]$ всех многочленов над полем P (см. пример 1.3) является бесконечномерным. В самом деле, рассмотрим произвольную конечную с.в. в этом пространстве:

$$\mathcal{A} = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)];\ g_i(x) \in P[x];\ \deg(g_i(x)) = n_i\ (i = 1, \dots, k).$$

По свойствам степени, всякий (ненулевой) многочлен

$$g(x) = \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \dots + \lambda_k g_k(x) \in \langle\mathcal{A}\rangle$$

имеет степень, не превышающую $n = \max(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Значит, $\langle\mathcal{A}\rangle \neq P[x]$.

Пример 2.6. Поле $\mathbb{C}$, рассматриваемое как линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ (см. пример 1.4), является конечномерным, поскольку порождается системой из двух векторов $[1,\ i]$ (вспомните алгебраическую форму записи комплексного числа $z = a \cdot 1 + b \cdot i$; $a, b \in \mathbb{R}$).

В то же самое время $\mathbb{R}$ как расширение $\mathbb{Q}$ является бесконечномерным линейным пространством. Это доказывается с помощью понятия *мощности множества*, с которым вы знакомились в курсе "Введение в анализ".

Рассмотрим конечную систему $\mathcal{A} = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ действительных чисел (= векторов в $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$).

Всякий элемент $x \in \langle \mathcal{A} \rangle$ представляется в виде линейной комбинации $x = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_k x_k$ с рациональными коэффициентами $r_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 1, \ldots, k)$ и, следовательно, определяется набором из k рациональных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_k$. (Это соответствие не обязано быть взаимно однозначным: разным наборам коэффициентов могут соответствовать одинаковые суммы.)

Множество $\mathbb{Q}$ *счетно*. Множество $\mathbb{Q}^k$ всевозможных наборов из k рациональных чисел также счетно. Действительных чисел x, входящих в $\langle \mathcal{A} \rangle$, во всяком случае не больше, чем наборов в $\mathbb{Q}^k$. Другими словами множество $\langle \mathcal{A} \rangle$ *не более чем счетно*. (На самом деле, оно в точности *счетно*, поскольку *бесконечно*.)

Напротив, множество $\mathbb{R}$, как известно, *несчетно* (имеет, как говорят, *мощность континуума*). Значит $\langle \mathcal{A} \rangle \neq \mathbb{R}$, т. е. никакая конечная с.в. в $\mathbb{R}$ не порождает пространство $\mathbb{R}$, которое, таким образом, является бесконечномерным.

(Имейте в виду, что рассуждение, проведенное выше, не является вполне строгим. Чтобы достичь приемлемой строгости, надо изложить довольно много довольно абстрактного теоретико-множественного материала. Все это у вас еще впереди. А пока будем полагаться здесь не на строгость, а на убедительность.)

Пример 2.7. Последний пример будет, по сути, упражнением, причем — "с отложенным исполнением".

Вернитесь к описанному в примере 1.2 линейному пространству $V = \mathcal{F}(M, P)$ функций на множестве M со значениями в поле P и докажите, что это пространство является конечномерным тогда и только тогда, когда множество M является конечным.

Указание. Случай конечного множества M, состоящего, скажем, из n элементов, совсем прост, ибо приводит к пространству V, изо-

морфному P^n. Рассмотрение случая бесконечного M стоит отложить до вывода в § 5 критерия (бес)конечномерности (см. предложение 5.2).

Замечание 2.3. Предметом изучения линейной алгебры служат именно *конечномерные линейные пространства.* Весьма частое употребление последнего словосочетания вынуждает нас ввести еще одну аббревиатуру: *к.л.п.*

Бесконечномерные линейные пространства также важны и широко используются, например, в современной физике. Однако для их исследования одной алгебры мало.

Схематически дело обстоит следующим образом. Ничто бесконечномерное не может быть всерьез изучено без *конечномерных аппроксимаций* (приближений). Тематика, связанная со всякого рода приближениями, целиком относится к сфере *математического анализа* (и опирающихся на него "продвинутых" дисциплин).

Таким образом, *бесконечномерная линейная алгебра* должна быть неким "симбиозом" обычной (конечномерной) линейной алгбры и математического анализа. Именно такой характер носит (линейный) *функциональный анализ.*

§ 3. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

3.1. Понятие линейно зависимой (линейно независимой) с.в. В данном пункте материал также будет в какой-то степени повторением изложенного в § 9 пособия [A_1] (на более высоком уровне абстрагирования). Новыми будут, в основном, примеры.

Определение 3.1. Непустая с.в. $\mathcal{A}$ в линейном пространстве V над полем P, заданная формулой (2.1), называется *линейно зависимой*, если для $\mathcal{A}$ *существует линейная комбинация с нулевым значением*:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0, \tag{3.1}$$

не все коэффициенты которой $\lambda_i \in P$ $(i = 1, ..., k)$ *равны нулю.*

В противном случае, т. е. когда *из равенства* (3.1) *вытекает*, что *все коэффициенты равны нулю*:

$$\lambda_i = 0 \ (i = 1, ..., k), \tag{3.2}$$

с.в. (2.1) называется *линейно независимой*.

Пустая с.в. считается линейно независимой.

Очевидно (в силу коммутативности сложения), что факт линейной зависимости (независимости) с.в. никак не связан с порядком векторов в списке (2.1). С.в., содержащая нулевой вектор или повторяющиеся векторы, является линейно зависимой.

Вообще, все свойства линейно зависимых (независимых) с.в., изученные в пп. 9.1, 9.3 пособия $[A_1]$ для арифметических линейных пространств, остаются справедливми в общей ситуации абстрактных линейных пространств. В частности, сохраняет силу предложение 9.2, которое мы ниже, для полноты изложения, переформулируем.

Однако предварительно нам придется более четко описать, как понимается выражение "с.в. $\mathcal{A}$ является *подсистемой* в с.в. $\mathcal{B}$" (см. определение 2.1 и последующие комментарии). Эта фраза означает, что *список* (2.1) является *подсписком* (с сохранением порядка) в списке

$$\mathcal{B} = [\, b_1, \, b_2, \, \dots, b_l \,]; \ b_j \in V \ (j = 1, ..., l), \tag{3.3}$$

т. е.

$$a_1 = b_{j_1}; \ a_2 = b_{j_2}; \ \dots; \ a_k = b_{j_k} \tag{3.4}$$

для некоторой строго возрастающей последовательности номеров $[\, j_1, \, j_2, \, \dots, j_k \,]$ $(1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant l)$.

Предложение 3.1. *1. Пусть $\mathcal{B}$ — конечная с.в. в линейном пространстве V, $\mathcal{A}$ — ее подсистема. Тогда линейная зависимость системы $\mathcal{A}$ влечет линейную зависимость системы $\mathcal{B}$, а из линейной независимости $\mathcal{B}$ следует линейная независимость $\mathcal{A}$.*

2. С.в. $\mathcal{A}$ является линейно зависимой тогда и только тогда, когда некоторый вектор, входящий в систему $\mathcal{A}$, линейно выражается через остальные векторы этой системы.

3. Пусть с.в. $\mathcal{A}$ линейно независима, а с.в. $\mathcal{B}$ получается из системы $\mathcal{A}$ присоединением к ней (в конце списка) еще одного вектора $b \in V$. Тогда с.в. $\mathcal{B}$ будет линейно зависимой в том и только том случае, когда вектор b принадлежит линейной оболочке $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Доказательство. Вам поручается переоформить доказательство из $[A_1]$, слегка изменив обозначения и терминологию. □

3.2. Свойство единственности разложения вектора по линейно независимой с.в. Как мы знаем из § 2, всякая с.в. вида (2.1) порождает некоторое линейное подпространство — свою линейную оболочку $W = \langle \mathcal{A} \rangle$. Каждый вектор $x \in W$ линейно выражается через векторы a_i $(i = 1, ..., k)$, или, другими словами, допускает *разложение по с.в.* $\mathcal{A}$ вида

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i. \tag{3.5}$$

Однако коэффициенты этого разложения, $\lambda_i \in P$, определены, вообще говоря, не однозначно. Иначе обстоит дело в случае, когда данная с.в. является линейно независимой.

Предложение 3.2. *Если с.в. $\mathcal{A}$ линейно независима, то для любого вектора $x \in \langle \mathcal{A} \rangle$ разложение (3.5) определено однозначно.*

Доказательство практически очевидно: если, наряду с (3.5), имеется аналогичное разложение

$$x = \sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i, \tag{3.5a}$$

то, вычитая из первой формулы вторую, мы получаем соотношение

$$0 = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) a_i,$$

из которого, с учетом линейной независимости $\mathcal{A}$, вытекает совпадение коэффициентов: $\lambda_i = \mu_i$ $(i = 1, ..., k)$. □

3.3.* Понятие линейной зависимости (независимости) для подмножеств в линейном пространстве. Так же, как в п. 2.2, в связи с понятием линейной оболочки для с.в., в данном пункте, пользуясь упомянутым выше фактом сохранения системой свойства линейной зависимости (независимости) при произвольном изменении порядка в списке векторов, мы можем перейти от списков $\mathcal{A}$ вида (2.1) к (неупорядоченным) конечным подмножествам A вида (2.1а).

Получается, что можно корректным образом говорить о линейной зависимости (независимости) конечных подмножеств в линейном пространстве. Более того, эти понятия допускают распространение на случай бесконечных подмножеств A (в линейном пространстве V над полем P).

Определение 3.1а. *Бесконечное подмножество* $A \subseteq V$ называется *линейно зависимым*, если существует конечное подмножество $A' \subset A$, являющееся линейно зависимым (в смысле определения 3.1).

Как обычно, линейная независимость определяется через отрицание линейной зависимости. Законы математической логики приводят нас к следующему пониманию свойства линейной независимости: *бесконечное подмножество* является *линейно независимым* тогда и только тогда, когда таковым является каждое его конечное подмножество.

Пример 3.1. Порождающая система из единичных векторов $\mathcal{E}_n$ [см. (2.11)] является линейно независимой в арифметическом линейном пространстве P^n.

Аналогично, в пространстве $P_n[x]$, изоморфном P^{n+1}, порождающая система одночленов $\mathcal{B}_n$ [см. (2.6)] является линейно независимой. Это легко следует из определения равенства многочленов: многочлен (2.12) равен нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю.

Рассмотрим теперь в пространстве всех многочленов $P[x]$ бесконечное порождающее множество B всех одночленов [см. (2.10)]. Согласно определению 3.1а, оно будет линейно независимым. В самом деле, всякое конечное подмножество A в множестве B может быть включено в некоторое конечное множество вида B_n (содержащее те же элементы, что и список $\mathcal{B}_n$). Линейная независимость B_n влечет (в силу предложения 3.1) линейную независимость A.

3.4. Линейно независимые системы векторов в функциональных пространствах. Рассмотрим линейное пространство $V = \mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R})$ *бесконечно гладких* функций на (конечном или бесконечном) открытом интервале $D \subseteq \mathbb{R}$. (Ранее, в примере 1.7, мы рассматривали пространство 1-гладких, т. е. непрерывно дифференцируемых, функций. Бесконечно гладкая функция обязана иметь *производные всех порядков*; автоматически эти производные будут непрерывными функциями.)

Рассмотрим какую-либо конечную с.в.

$$\mathcal{A}_n = [\, f_1(x),\, f_2(x),\, \ldots,\, f_n(x)\,] \tag{3.6}$$

в пространстве V. Для исследования вопроса о линейной зависимости (независимости) таких систем функций используются особого рода функциональные определители.

Каждую из данных функций продифференцируем $n-1$ раз и составим квадратную матрицу n-го порядка

$$M_{\mathcal{A}_n}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Определение 3.2. Матрица (3.7) называется *матрицей Вронского*, а ее определитель

$$W_{\mathcal{A}_n}(x) = \det(M_{\mathcal{A}_n}(x)) \tag{3.8}$$

называется *определителем Вронского* (или *вронскианом*) системы функций (3.6).

Всякий определитель является полиномиальной функцией (многочленом) от своих элементов. Поэтому вронскиан (3.8), как и его элементы, является гладкой функцией от $x \in D$.

Выведем далее *необходимое условие линейной зависимости* системы $\mathcal{A}_n$.

Предложение 3.3. *Если система векторов-функций (3.6) линейно зависима, то вронскиан (3.8) тождественно равен нулю на интервале D.*

Доказательство. Пусть система $\mathcal{A}_n$ линейно зависима, т. е. найдутся действительные числа λ_k $(k = 1, ..., n)$, не все равные нулю и такие, что тождественно по x выполняется равенство

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + ... + \lambda_n f_n(x) = 0. \tag{3.9}$$

Тождество (3.9) почленно продифференцируем $n-1$ раз. Все полученные тождества с производными, вместе с исходным тождеством, объединим в следующую систему:

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + ... + \lambda_n f_n(x) = 0; \\ \lambda_1 f_1'(x) + \lambda_2 f_2'(x) + ... + \lambda_n f_n'(x) = 0; \\ \lambda_1 f_1''(x) + \lambda_2 f_2''(x) + ... + \lambda_n f_n''(x) = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 f_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 f_2^{(n-1)}(x) + ... + \lambda_n f_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Систему соотношений (3.10) можно рассматривать как квадратную систему из n линейных однородных уравнений относительно n действительных неизвестных λ_k.

Матрицей этой системы служит матрица Вронского (3.7); переменная x фигурирует в ней в качестве параметра. Краткой записью однородной с.л.у. (3.10) будет

$$M_{\mathcal{A}_n}(x) \cdot \overline{\lambda} = \overline{0}, \tag{3.10a}$$

где $\overline{\lambda}$ — вектор-столбец неизвестных, принадлежащий $\mathbb{R}^n$.

По предположению, существует набор чисел λ_k (среди которых есть ненулевые), удовлетворяющий (3.10) при любом значении переменной $x \in D$. Следовательно, эта однородная с.л.у. имеет нетривиальное решение (при всяком x). Это возможно, лишь если (при любом значении переменной) матрица Вронского вырождена, или, что равносильно, определитель Вронского равен нулю (см. [A_1, пп. 6.2, 28.2]). □

Ниже мы будем пользоваться предложением 3.3 в форме *достаточного условия линейной независимости* системы векторов-функций: если вронскиан $W_{\mathcal{A}_n}(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке области определения функций, то (в этой области) система $\mathcal{A}_n$ является линейно независимой.

Замечание 3.1. Наряду с действительным линейным пространством $V = \mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R})$, можно рассматривать комплексное пространство $W = \mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{C})$, состоящее из бесконечно гладких *комплексных функций действительной переменной*. Комплексная функция $w = f(x)$ действительной переменной $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ определяется как выражение $f(x) = g(x) + ih(x)$, где $u = g(x)$ и $v = h(x)$ являются действительными гладкими функциями ($g, h \in V$). Пространство W является линейным пространством над полем $\mathbb{C}$. Основные понятия математического анализа, такие как понятия предела, производной и т. д., без каких-либо изменений переносятся на случай комплексных функций, с сохранением всех основных фактов, формул и правил. (Мнимая единица фигурирует в вычислениях как константа.)

Предложение 3.3 также, очевидно, сохраняет силу для комплексных гладких функций действительной переменной.

Пример 3.2. Рассмотрим следующую систему гладких функций [векторов пространства $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$]:

$$\mathcal{A}_n = [\, e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x} \,], \tag{3.11}$$

где λ_k $(k = 1, ..., n)$ — попарно различные действительные числа. Докажем, что эта с.в. линейно независима.

Для этого достаточно вычислить все производные (до порядка $n-1$ включительно) от составляющих систему (3.11) *показательных* функций, а затем заполнить и вычислить вронскиан. В вычислениях нам понадобится свойство вынесения общего (в столбце) множителя за знак определителя и встретится известный (см. [A_1, п. 30а.5]) *определитель Вандермонда*:

$$W_{\mathcal{A}_n}(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x}\, \Delta_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (\lambda_l - \lambda_k)\,.$$

Результат вычислений отличен от нуля, ибо все показательные множители в нуль не обращаются и произведение также является ненулевым (в силу предположения о том, что λ_k попарно различны). По предложению 3.3, система функций (3.11) линейно независима.

Замечание 3.2. Все вычисления и вывод примера 3.2 остаются в силе в случае комплексных чисел $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ $(k = 1, ..., n)$; при этом показательные функции определяются известными (см. [A_1, п. 34.2]) формулами

$$f_k(x) = e^{\lambda_k x} = e^{\alpha_k x}(\cos \beta_k x + i \sin \beta_k x) \tag{3.12}$$

и являются бесконечно гладкими комплексными функциями действительной переменной [$f_k \in W = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$].

Такое заключение основано на том факте, что все формулы дифференциального исчисления, относящиеся к показательной функции

действительной переменной, сохраняют свою силу в поле $\mathbb{C}$ [об этом мы упоминали в первом пособии; см. формулу (34.6)].

Пример 3.2, с учетом замечания 3.2, позволяет рассмотреть еще один важнейший пример, напрямую связанный с так называемым *анализом Фурье* — особой ветвью математическуго анализа, исследующей колебательные процессы в природе (и, в частности, разъясняющей, что такое *музыка*).

Пример 3.3. Рассмотрим следующую систему из $2n+1$ бесконечно гладких (*тригонометрических*) функций :

$$\mathcal{T} = [\,1,\, \cos x,\, \sin x,\, \cos 2x,\, \sin 2x,\, \ldots,\, \cos nx,\, \sin nx\,]. \tag{3.13}$$

Докажем, что система (3.13) является линейно независимой. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию с.в. $\mathcal{T}$, значение которой равно нулю:

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot \cos x + \beta_1 \cdot \sin x + \alpha_2 \cdot \cos 2x + \beta_2 \cdot \sin 2x + \\ + \ldots + \alpha_n \cdot \cos nx + \beta_n \cdot \sin nx = 0. \tag{3.14}$$

Коэффициенты α_k и β_l $(k = 0, ..., n;\ l = 1, ..., n)$ в формуле (3.14) являются действительными числами. Надо доказать, что все они равны нулю.

Первую функцию в системе (константу) мы представим в виде $1 = e^{0\cdot x}$. Косинусы и синусы представим по формулам Эйлера (см. [A_1, п. 34.3]):

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx});\ \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}). \tag{3.15}$$

Подставляя (3.15) в (3.14), производя группировку по показательным функциям и упрощая выражения для (комплексных) коэффициентов перед ними, получим:

$$\gamma_0 \cdot e^{0\cdot x} + \gamma_1 \cdot e^{ix} + \gamma_2 \cdot e^{2ix} + \ldots + \gamma_n \cdot e^{nix} + \\ + \gamma_{-1} \cdot e^{-ix} + \gamma_{-2} \cdot e^{-2ix} + \ldots + \gamma_{-n} \cdot e^{-nix} = 0, \tag{3.16}$$

где

$$\gamma_0 = \alpha_0 :\ \gamma_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2};\ \gamma_{-k} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2}\ (k = 1, ..., n). \tag{3.17}$$

Система комплексных показательных функций

$$\mathcal{T}' = [\, e^{-nix}, \dots, e^{-2ix}, e^{-ix}, e^{0\cdot x}, e^{ix}, e^{2ix}, \dots, e^{nix} \,] \tag{3.13′}$$

линейно независима (в силу результата примера 3.2, с учетом замечания 3.2). Поэтому равенство (3.16) влечет обращение в нуль всех (комплексных) коэффициентов γ_k $(-n \leqslant k \leqslant n)$. Выражения (3.17) для γ_k позволяют заключить отсюда, что обращаются в нуль все (действительные) коэффициенты, фигурирующие в (3.14).

Последний пример будет несложным упражнением.

Пример 3.4. Рассмотрим систему *степенных* функций

$$\mathcal{A}_n = [\, x^{\alpha_1},\, x^{\alpha_2},\, \dots, x^{\alpha_n} \,], \tag{3.18}$$

где α_k $(k = 1, ..., n)$ — попарно различные действительные числа, а областью определения считается положительная полуось $D = (0, \infty)$.

Докажите, что с.в. (3.18) линейно независима в пространстве $\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R})$.

Указание. Воспользуйтесь представлением $x^{\alpha_k} = e^{\alpha_k \cdot \ln x}$ и заменой переменной $y = \ln x$.

*Замечание 3.3.** Предложению 3.3 и последующим примерам можно придать другую форму, если вместо конечных систем функций [(3.6), (3.11), (3.13) и (3.18)] рассмотреть аналогичные бесконечные системы или бесконечные множества векторов-функций.

Скажем, в условиях предложения 3.3 можно рассмотреть бесконечное множество (попарно различных) бесконечно гладких функций

$$A = \{\, f_1(x),\, f_2(x),\, \dots, f_k(x),\, \dots \}. \tag{3.6a}$$

Линейная зависимость (в смысле определения 3.1а) бесконечного множества (3.6а) влечет обращение в (тождественный) нуль определителя Вронского, отвечающего некоторому конечному подмножеству множества (3.6а). Всякое конечное подмножество в A можно расширить до подмножества A_n, содержащего первые n функций [оно соответствует системе $\mathcal{A}_n$ вида (3.6)]. Причем очевидно, что вронскиан, отвечающий A_n, равен нулю (как и все вронскианы с бóльшими номерами).

Если же все вронскианы $W_{\mathcal{A}_n}(x)$ будут отличны от тождественного нуля, то множество (3.6а) будет линейно независимым.

В частности, линейно независимыми будут бесконечные множества

— показательных функций

$$A = \{\, e^{\lambda_1 x},\, e^{\lambda_2 x},\, \dots, e^{\lambda_k x},\, \dots \}, \tag{3.11a}$$

с попарно различными (действительными или комплексными) коэффициентами λ_k;

— степенных функций

$$A = \{\, x^{\alpha_1},\, x^{\alpha_2},\, \dots, x^{\alpha_k},\, \dots \}, \tag{3.18a}$$

с попарно различными действительными показателями α_k.

Тот же вывод будет справедлив для бесконечного множества тригонометрических функций

$$T = \{\, 1,\, \cos x,\, \sin x,\, \cos 2x,\, \sin 2x,\, \dots, \cos kx,\, \sin kx,\, \dots \}. \tag{3.13a}$$

Последний факт служит краеугольным камнем теории *рядов Фурье*. (Вспомните об этом в четвертом семестре изучения математического анализа.)

§ 4. Базисы в линейных пространствах; четыре способа характеризации; теорема существования

4.1. Определение базиса в линейном пространстве. Перед изучением данного параграфа полезно вернуться к § 10 пособия $[A_1]$, где понятие базиса определялось для линейных подпространств в арифметических линейных пространствах. Здесь будет дано общее определение. Пусть V — линейное пространство над полем P.

Определение 4.1. Конечная с.в.

$$\mathcal{B} = [\, b_1,\, b_2,\, \dots, b_n \,] \tag{4.1}$$

в пространстве V называется *(конечным) базисом* V, если она

1) *порождает* V, т. е. $\langle \mathcal{B} \rangle = V$;

2) является *линейно независимой*.

Проанализируем данное выше определение. Из первого его условия вытекает, что линейное пространство, имеющее конечный базис, обязательно *конечномерно* (см. определение 2.5). Ниже, в п. 4.3 мы докажем обратное утверждению — *теорему существования (конечного) базиса* для любого к.л.п.

Из второго условия определения 4.1, с учетом предложения 3.2, следует, что всякий вектор $x \in V$ однозначно разлагается по базису (4.1), т. е. существуют и однозначно определены скаляры $\lambda_i \in P$ $(i = 1, ..., n)$, такие, что

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i. \tag{4.2}$$

Базисом нулевого пространства служит пустая с.в. Свойство с.в. "быть (конечным) базисом" не зависит от порядка векторов в системе. Но если в базисе произвести (нетривиальную) перестановку векторов — это будет уже другой базис.

Замечание 4.1. Как уже отмечалось, предметом изучения *линейной алгебры* являются именно *конечномерные* линейные пространства (и их линейные отображения). Поэтому в дальнейшем уточнение *конечный* перед термином *базис* будет, как правило, опускаться.

Здесь мы только оговорим, что можно ввести общее понятие *(алгебраического) базиса* для произвольных (может быть, бесконечномерных) линейных пространств. Иногда такие базисы называются *базисами Гамеля*. При их изучении удобнее бывает перейти от рассмотрения систем векторов (как упорядоченных *списков*) к рассмотрению (неупорядоченных) подмножеств (см. пп. 2.2, 3.3). Несколько подробнее мы остановимся на этих вопросах ниже, в п. 4.4. (Предупредим, однако, что бесконечные алгебраические базисы бесперспективны в вычислительных приложениях. Это — "мысленные артефакты", позволяющие сочинить красивую общую теорию.)

Там же мы приведем краткие сведения о весьма полезных (и в теории, и для практических приложений) бесконечномерных объектах — *топологических базисах* (ср. с информацией в замечании 2.3).

Пример 4.1. В арифметическом линейном пространстве P^n существует *естественный базис* $\mathcal{E}_n$ [см. (2.11)]. Так же обстоит дело в некоторых пространствах, родственных арифметическим.

Скажем, в пространстве $(m \times n)$-матриц $\mathrm{Mat}(m, n; P)$ (см. пример 1.1) естественный базис составляют матрицы E_{ij} $(i = 1, ..., m;$ $j = 1, ..., n)$. (Все элементы матрицы E_{ij} равны нулю, кроме одно-

го, который равен единице и располагается в позиции, указываемой двумя номерами в обозначении.)

В пространстве многочленов $P_n[x]$ (см. пример 1.3) естественный базис составляют одночлены x^k $(k = 0, , , , , n)$ [см. (2.6)].

В пространстве $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ (см. пример 1.4) базис составляют две единицы: настоящая и мнимая.

В *абстрактных* к.л.п., хотя и существуют базисы, но все они *равноправны* (среди них нет *выделенного*, который можно было бы назвать *естественным*).

4.2. Четыре способа характеризации базисов. В этом пункте мы сформулируем теорему, в которой будут сведены четыре утверждения, каждое из которых равносильно свойству "система векторов является базисом".

Теорема 4.1. *Пусть V — линейное пространство над полем P, а $\mathcal{B}$ — конечная с.в. вида (4.1) в пространстве V. Следующие четыре утверждения равносильны.*

(1) С.в. $\mathcal{B}$ является (конечным) базисом в V (т. е. $\mathcal{B}$ линейно независима и порождает V).

(2) С.в. $\mathcal{B}$ является порождающей и обладает свойством единственности разложения (т. е. любой вектор пространства V однозначно разлагается по $\mathcal{B}$).

(3) С.в. $\mathcal{B}$ является максимальной линейно независимой (т. е. $\mathcal{B}$ линейно независима и всякая с.в., строго содержащая $\mathcal{B}$, является линейно зависимой).

(4) С.в. $\mathcal{B}$ является минимальной порождающей (т. е. $\mathcal{B}$ порождает V и всякая с.в., строго содержащаяся в $\mathcal{B}$, не является порождающей).

Доказательство будет организовано по циклу:

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)\,.$$

На всех его этапах следует иметь в виду, что перестановка элементов в с.в. не отражается на ее свойствах, таких как линейная (не)зависимость или свойство "быть порождающей для V".

1. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) уже установлена (см. комментарии после определения 4.1).

2. Докажем импликацию (2) $\Rightarrow$ (3).

Пусть с.в. $\mathcal{B}$ *порождает* V и обладает свойством *единственности разложения*. Первое означает, что всякий вектор $x \in V$ разлагается по $\mathcal{B}$, т. е. представляется в виде линейной комбинации (4.2), а второе — что коэффициенты такого разложения определены однозначно. Докажем, что с.в. $\mathcal{B}$ является *максимальной линейно независимой*.

2.1. *Линейная независимость* $\mathcal{B}$ следует из того, что нулевой вектор $0 \in V$ должен иметь единственное разложение по $\mathcal{B}$. Всегда имеется тривиальное разложение, с нулевыми коэффициентами: $0 = 0 \cdot b_1 + ... + 0 \cdot b_n$. Поэтому наличие какого-либо разложения

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0 \tag{4.2h}$$

влечет равенство нулю всех коэффициентов: $\lambda_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$.

2.2. Докажем *максимальность* линейно независимой с.в. $\mathcal{B}$. Пусть с.в. $\mathcal{B}'$ *строго содержит* $\mathcal{B}$, т. е. $\mathcal{B}$ является подсистемой в $\mathcal{B}'$ и существует вектор b, входящий в $\mathcal{B}'$, но не входящий в $\mathcal{B}$.

Рассмотрим с.в. $[\mathcal{B}, b]$, полученную присоединением к $\mathcal{B}$ вектора b. (Напомним, что порядок векторов не важен. Можно, например, поставить добавочный вектор b на то место, которое ему предписывается порядком в $\mathcal{B}'$.) По предположению $\mathcal{B}$ является порождающей с.в. Следовательно, b линейно выражается через $\mathcal{B}$. Отсюда, по второму утверждению предложения 3.1, следует линейная зависимость $[\mathcal{B}, b]$. А поскольку эта с.в. является подсистемой в $\mathcal{B}'$, то, по первому утверждению того же предложения, система $\mathcal{B}'$ также линейно зависима.

3. Докажем импликацию (3) $\Rightarrow$ (4).

Пусть с.в. $\mathcal{B}$ является максимальной линейно независимой. Докажем, что она является *минимальной порождающей*.

3.1. То, что $\mathcal{B}$ *порождает* V доказывается так. Пусть x — произвольный вектор пространства V. Если этот вектор входит в $\mathcal{B}$, то он входит в линейную оболочку $\langle\mathcal{B}\rangle$. Если же x не входит в $\mathcal{B}$, то добавим его к этой системе и получим с.в. $[\mathcal{B}, x]$, строго содержащую $\mathcal{B}$. В силу предположения о максимальности $\mathcal{B}$ среди линейно независимых систем, новая с.в. является линейно зависимой. Третье утверждение предложения 3.1 позволяет отсюда заключить, что $x \in \langle\mathcal{B}\rangle$. Таким образом, доказано, что $\langle\mathcal{B}\rangle = V$.

3.2. Докажем *минимальность* $\mathcal{B}$ среди порождающих с.в. Пусть с.в. $\mathcal{B}'$ *строго содержится* в $\mathcal{B}$. Возьмем произвольный вектор b, входящий в $\mathcal{B}$, но не в $\mathcal{B}'$. Если бы $\mathcal{B}'$ была порождающей с.в., то b

линейно выражался бы через $\mathcal{B}'$. По второму утверждению предложения 3.1., отсюда следовала бы линейная зависимость $\mathcal{B}$, что противоречит предположению. Значит, никакая подсистема системы $\mathcal{B}$, отличная от $\mathcal{B}$, не является порождающей.

4. Докажем импликацию (4) $\Rightarrow$ (1).

Пусть с.в. $\mathcal{B}$ является минимальной порождающей для V. Докажем, что $\mathcal{B}$ — базис. Для этого достаточно установить *линейную независимость* $\mathcal{B}$. Предположим противное. Тогда, по второму утверждению предложения 3.1, найдется вектор b, принадлежащий $\mathcal{B}$ и линейно выражающийся через подсистему $\mathcal{B}'$, полученную из $\mathcal{B}$ выбрасыванием этого вектора. Нетрудно понять, что с.в. $\mathcal{B}'$ является порождающей. (В самом деле, всякий вектор $x \in V$ линейно выражается через $\mathcal{B}$. Подставив в это выражение, вместо вектора b, его разложение по $\mathcal{B}'$ и произведя необходимые упрощения, мы получим в итоге линейное выражение x через $\mathcal{B}'$.) Возникает противоречие с минимальностью $\mathcal{B}$ среди порождающих систем. Стало быть, предположение о линейной зависимости этой системы ложно. □

4.3. Теорема существования базиса для к.л.п. Как уже отмечалось выше, (конечный) базис может существовать только в конечномерном линейном пространстве. Сейчас мы докажем, что в любом конечномерном пространстве базис существует.

Теорема 4.2. *Пусть V — к.л.п. над полем P. Тогда*

1) в пространстве V существует (конечный) базис;

2) в любой (конечной) с.в., порождающей V, существует подсистема, являющаяся базисом.

Доказательство. Поскольку, в силу определения 2.5, в к.л.п. существует конечная порождающая с.в., доказательство можно сразу начать со второго пункта.

Пусть конечная с.в. $\mathcal{A}$ порождает V. Тогда

— либо $\mathcal{A}$ является *минимальной порождающей* и, следовательно, в силу теоремы 4.1, — базисом;

— либо в $\mathcal{A}$ найдется подсистема $\mathcal{A}'$ (содержащая меньше векторов, чем $\mathcal{A}$), также являющаяся порождающей.

Во втором случае по отношению к $\mathcal{A}'$ возникают те же логические возможности. Продолжая процесс, на каждом этапе которого мощность порождающей с.в. строго уменьшается, мы с неизбежностью (за конечное число шагов) доберемся до базиса. □

Замечание 4.2. Теорема существования базиса (в частном случае, когда V является линейным подпространством в арифметическом линейном пространстве P^n) должна быть знакома вам по пособию $[A_1]$ (см. теорему 10.1). Однако доказательное рассуждение в "старом" варианте теоремы было совершенно другим. Мы начинали с линейно независимой с.в. (может быть, пустой) в подпространстве V и добавляли к ней векторы, пока она не превращалась в базис. Гарантией *останова* было ограничение (числом n) мощности линейно независимой с.в. Базис получался как максимальная линейно независимая с.в.

В "новой", абстрактной ситуции такого ограничения у нас пока не было. Доказательство опиралось на факт существования конечной порождающей с.в., и был организован противоположный по направлению процесс: удаление из порождающей системы лишних векторов. Благодаря теореме 4.1, мы достигаем аналогичного результата — получаем базис как минимальную порождающую с.в.

В следующем параграфе мы вернемся к вопросу о расширении линейно независимых с.в. (в абстрактных к.л.п.), вплоть до достижения базиса.

4.4.* Алгебраические базисы в произвольных линейных пространствах (базисы Гамеля). Рассмотрим произвольное (может быть, бесконечномерное) линейное пространство V над полем P и произвольное (может быть, бесконечное) подмножество $B \subseteq V$.

Напомним (см. п. 2.2), что линейная оболочка $\langle B \rangle$ считается состоящей из значений всевозможных *конечных* линейных комбинаций векторов из B. Подмножество B является порождающим для V, если $\langle B \rangle = V$, т. е. если всякий вектор $x \in V$ представляется в виде конечной линейной комбинации векторов из B.

Напомним также (см. п. 3.3), что подмножество B считается линейно независимым, если таковым является каждое его *конечное* подмножество.

Определение 4.1а. Подмножество B называется *алгебраическим базисом* (или *базисом Гамеля*) для линейного пространства V, если оно порождает V и является линейно независимым.

Пример 4.2. Пространство P_0^∞ бесконечных, но *финитных* последовательностей элементов из P (см. $[A_1, \S\, 36]$) обладает естественным базисом Гамеля, состоящим из бесконечных векторов-строк

$$\overline{e_k}^{\,t} = (\,0, \dots, 0, 1, 0, \dots\,),$$

где единица стоит на k-м месте ($k = 0, 1, 2, ...$).

Это же пространство предстает в другом (изоморфном) облике пространства многочленов $P[x]$ (см. примеры 1.3 и 2.2).

На "языке многочленов" базис пространства составят одночлены x^k ($k = 0, 1, 2, ...$).

Можно доказать, что в любом линейном пространстве существует базис Гамеля.

В конечномерном случае понятие базиса Гамеля совпадает с обычным понятием (конечного) базиса. В бесконечномерном случае для доказательства теоремы существования (бесконечного) базиса Гамеля применяется самая таинственная (и самая скандальная) из аксиом теории множеств — *аксиома выбора.* (Часто она фигурирует в равносильной форме так называемой *леммы Цорна.*)

Характерной особенностью доказательств, основанных на аксиоме выбора, является их категорическая *неконструктивность*: они не позволят построить *алгоритм*, реально определяющий (*вычисляющий*) те математические объекты, *существование* которых устанавливается в ходе доказательства.

Несколько подробнее с затронутыми здесь вопросами можно познакомиться по учебнику [2]. Если же автору удалось заинтриговать вас до такой степени, что вы готовы читать внепрограммную литературу, то можно порекомендовать следующее историко-математическое сочинение: *Медведев Ф. А.* Ранняя история аксиомы выбора. М.: Наука, 1982.

4.5.* Понятие о топологических базисах. Чтобы дать первичное представление о бесконечномерной линейной алгебре, приведем (нестрогое) описание понятия *топологического базиса* в бесконечномерном линейном пространстве.

В функциональном анализе рассматриваются, как правило, такие линейные пространства V (над полем $P = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), в которых каким-либо образом введено понятие *предельного перехода.*

С помощью пределов могут быть определены *значения* некоторых *бесконечных сумм.*

Например, для бесконечного подмножества векторов

$$B = \{\, b_1,\, b_2,\, \dots, b_k,\, \dots \};\ b_k \in V\ (k = 1, 2, ...) \tag{4.3}$$

значение бесконечной линейной комбинации (с коэффициентами λ_k

из поля P) определяется как *предел* (конечных) *частичных сумм*:

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_k b_k, \tag{4.4}$$

в предположении, что этот предел существует. Бесконечные суммы обычно именуют *рядами* и в случае существования предела в (4.4) говорят, что соответствующий ряд *сходится*, элемент $a \in V$ называется *суммой ряда*. Говорят также о разложении элемента a в (сходящийся) ряд по множеству векторов (4.3).

Множество (4.3) называется *топологическим базисом* в пространстве V, если любой элемент $a \in V$ разлагается в сходящийся ряд по этому множеству, с некоторыми (причем однозначно определенными) коэффициентами λ_k.

Пример 4.3. В упоминавшемся уже (см. примеры 3.2 и 3.3) анализе Фурье рассматривается линейное пространство $V = L^2[-\pi, \pi]$ действительных функций $f(x)$, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$ и интегрируемых с квадратом по этому отрезку (т. е. таких, что существует интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$).

Сходимость последовательности функций $f_n(x) \xrightarrow{V} f(x)$ также определяется с помощью интегралов: должна стремиться к нулю последовательность действительных чисел $\int_{-\pi}^{\pi}(f_n(x)-f(x))^2dx$. (Некоторые, довольно существенные, детали в нашем рассказе, разумеется, опущены. Интеграл от квадрата разности двух функций, фигурирующий выше, интерпретируется как квадрат *расстояния* между ними.)

Множество тригонометрических функций T [см. (3.13)] оказывается топологическим базисом в пространстве V, т. е. всякая функция из этого пространства однозначно разлагается в сходящийся *ряд Фурье*:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{4.5}$$

где коэффициенты a_0 и a_k, b_k $(k = 1, 2, ...)$ однозначно определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;\ a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx;$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx. \tag{4.6}$$

В данном примере роль функций $f_n(x)$, приближающих данную функцию $f(x)$, играют частичные суммы ряда (4.5):

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{4.7}$$

Слагаемые, фигурирующие в бесконечной сумме (4.5) и конечных частичных суммах (4.7), принято называть *гармониками*, а работу по их вычислению — *гармоническим анализом.*

§ 5. Равномощность базисов. Размерность линейного пространства. Продолжение базисов

5.1. Оценка количества векторов в линейно независимой с.в. Данный параграф соотносится с § 11 (и частично — с § 10) пособия $[A_1]$. Разумеется, было бы желательным расположить первое пособие рядом со вторым и сравнить ход рассуждений. Логика развития темы в абстрактной ситуации будет отличаться от той, которая была реализована в конкретном случае арифметических пространств. Хотя некоторые доказательства повторяются практически один к одному. Так, предложение 5.1 является почти дословной вариацией предложения 11.1 из $[A_1]$. Можно было бы (как это уже делалось в предыдущих параграфах) перепоручить читателям модификацию доказательства. Но мы все-таки повторим рассуждение (в более сжатом виде).

Предложение 5.1. *Пусть в к.л.п. V над полем P заданы некоторый базис $\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, \ldots, b_n \,]$ и с.в. $\mathcal{A} = [\, a_1, a_2, \ldots, a_s \,]$, причем $s > n$. Тогда с.в. $\mathcal{A}$ линейно зависима.*

Доказательство. Требуется установить, что существует *линейное соотношение* между векторами системы $\mathcal{A}$ вида

$$\sum_{j=1}^{s} \lambda_j a_j = 0, \tag{5.1}$$

где не все коэффициеты $\lambda_j \in P$ равны нулю. Подставим в формулу (5.1) разложения

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i; \;\; j = 1, \ldots, s \tag{5.2}$$

векторов системы $\mathcal{A}$ по базису $\mathcal{B}$ и произведем в правой части стандартные преобразования над двойными суммами:

— перемену порядка суммирования;

— внесение постоянного скалярного множителя под знак суммы;

— вынесение постоянного векторного множителя из-под знака суммы (вправо);

— перестановку скалярных множителей под знаком суммы.

Получим следующую цепочку равенств:

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j a_j = \sum_{j=1}^{s}\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}b_i\right) = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_j a_{ij}b_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{s}\lambda_j a_{ij}b_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{s}\lambda_j a_{ij}\right)b_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\lambda_j\right)b_i = \sum_{i=1}^{n}[A\cdot\overline{\lambda}\,]_i b_i,$$

где на последнем шаге введены обозначения A — для $(n\times s)$-матрицы, составленной из коэффициентов a_{ij} разложений (5.2) и $\overline{\lambda}$ — для вектора-столбца размера $s\times 1$, составленного из неизвестных скаляров λ_j, после чего использовано правило умножения матриц.

В результате преобразований соотношение (5.1) приобретает равносильный вид:

$$\sum_{i=1}^{n}[A\cdot\overline{\lambda}\,]_i b_i = 0. \tag{5.3}$$

Равенство (5.3) в свою очередь равносильно (в силу линейной независимости с.в. $\mathcal{B}$) системе скалярных соотношений $[A\cdot\overline{\lambda}\,]_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$, или, в матричной записи, — системе линейных уравнений

$$\underset{n\times s}{A}\cdot\underset{s\times 1}{\overline{\lambda}} = \underset{n\times 1}{\overline{0}}. \tag{5.4}$$

В однородной с.л.у. (5.4) неизвестных больше, чем уравнений $(s > n)$. Поэтому она имеет (см. [A_1, предложение 6.1]) нетривиальное решение $\overline{\lambda}\neq\overline{0}$. Значит, найдутся скаляры λ_j, не все равные нулю, удовлетворяющие (5.1). □

Предложение 5.1 можно переформулировать так, чтобы оно относилось к линейно независимым с.в.: в к.л.п. *количество векторов*

в (любой) линейно независимой с.в. не может превышать количества векторов в (любом) базисе этого пространства. (Именно этот факт мы назвали в заголовке пункта *оценкой количества векторов в линейно независимой с.в.*)

5.2. Характеризация к.л.п. в терминах линейно независимых с.в. Конечномерность подпространств в к.л.п. Ограничение сверху на мощность линейно независимых систем векторов в конечномерном линейном пространстве, полученное в предыдущем пункте, позволяет сформулировать в терминах таких с.в. критерий (бес)конечномерности пространства и, заодно, доказать конечномерность подпространств в к.л.п.

Предложение 5.2. *Линейное пространство 1) конечномерно тогда и только тогда, когда в нем существует максимальная линейно независимая с.в., и 2) бесконечномерно тогда и только тогда, когда существует бесконечная строго возрастаюшая последовательность линейно независмых с.в.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно, благодаря теореме 4.1. Из него следует, что пространство является бесконечномерным, тогда и только тогда, когда в нем не существут максимальной линейно независимой с.в., т. е. любая линейно независимая система строго содержится в другой линейно независимой системе.

Линейно независимая с.в. имеется всегда (хотя бы пустая). Значит, если пространство бесконечномерно (и следовательно, среди линейно независимых с.в. нет максимальных), то мы можем начать строго возрастающую последовательность таких систем, которая никогда не закончится.

Если же пространство конечномерно, то всякая строго возрастающая последовательность линейно независимых с.в. оборвется на конечном шаге (в силу ограничения сверху на их мощность). □

Доказанный критерий (бес)конечномерности линейного пространства влечет следующее

Предложение 5.3. *Линейное подпространство в к.л.п. само является к.л.п.*

Доказательство. Пусть V — к.л.п., а W является подпространством в V. Предположим, W бесконечномерно. Тогда в нем найдется бесконечная строго возрастающая последовательность линейно независимых с.в. Она остается таковой же, будучи рассмотрена во всем пространстве V, что приводит к противоречию. □

5.3. Равномощность всех базисов и понятие размерности для к.л.п. Доказываемая ниже теорема 5.1 соответствует теореме 11.1 в $[A_1]$.

Теорема 5.1. *Любые два базиса в к.л.п. имеют одинаковое количество векторов (равномощны).*

Доказательство совершенно тривиально (и не отличается от приведенного в $[A_1]$). Пусть с.в. $\mathcal{A}$ в предложении 5.1, так же как и $\mathcal{B}$, является базисом. Тогда, в силу этого предложения, мы получаем два неравенства: $s \leqslant n$ и $n \leqslant s$. Вывод: $s = n$.

Полученный результат служит обоснованием корректности следующего определения.

Определение 5.1. *Размерностью* к.л.п. V называется количество векторов в некотором (и, следовательно, — в любом) базисе этого пространства. Обозначение размерности: $\dim(V)$.

Мы пользуемся также более коротким выражением "мощность базиса". (Здесь есть определенная "вольность" в терминологии, поскольку, в строгом смысле, термин *мощность* должен применяться к *множествам*, а мы говорим о *списках*. Но это безвредная вольность, т. к. базисы являются списками без повторяющихся элементов.)

Отметим, что размерность к.л.п. является неотрицательным целым числом. В нуль она обращается лишь для тривиального (нулевого) пространства.

Легко получить значения размерности для некоторых изученных ранее пространств.

Пример 5.1. Линейные пространства, рассмотренные в примере 4.1, имеют следующие размерности:

$$\dim(P^n) = n;\ \dim(\mathrm{Mat}(m, n; P)) = mn;\ \dim(P_n[x]) = n + 1.$$

Простым следствием теоремы 5.1 является следующее

Предложение 5.4. *Пусть V — линейное пространство размерности n над полем P. Всякая линейно независимая (порождающая) с.в. в пространстве V содержит не более (не менее) n векторов. Если она содержит в точности n векторов, то она является базисом.*

Доказательство. Некоторые из сформулированных утверждений установлены ранее (какие и где?); те, которые пока не доказаны, — докажите самостоятельно. □

*Замечание 5.1.** Теорема о равномощности базисов остается справедливой и для бесконечных базисов (базисов Гамеля; см. п. 4.4) в *бесконечномерных* линейных пространствах. Можно также ввести понятие *размерности* бесконечномерного пространства (как мощности базиса Гамеля), но это будет уже не натуральное число, а так называемое *кардинальное число*. (С *иерархией бесконечных кардиналов* можно познакомиться по учебникам теории множеств; см., например, *Архангельский А. В.* Канторовская теория множеств. М.: Изд-во МГУ, 1988.)

5.4. Продолжение базисов. Всякая линейно независимая с.в. является базисом в своей линейной оболочке. Ниже будут получены результаты, касающиеся включения линейно независимой с.в. в базис (во всем пространстве), или же базиса в некотором подпространстве — в базис в другом, более широком подпространстве. (В пособии $[A_1]$ соответствующий материал сосредоточен в п. 10.4.)

Предложение 5.5. *Пусть V — линейное пространство размерности n над полем P,*

$$\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, \dots, b_n \,] \tag{5.5}$$

— произвольный базис этого пространства.

1. Всякая линейно независимая с.в.

$$\mathcal{A} = [\, a_1, a_2, \dots, a_s \,] \tag{5.6}$$

в пространстве V может быть включена в некоторый базис

$$\mathcal{B}' = [\, b'_1, b'_2, \dots, b'_n \,] \tag{5.5$'$}$$

этого пространства.

2. Всякий базис в некотором линейном подпространстве W_1 пространства V может быть включен в некоторый базис в любом подпространстве W_2, таком, что $W_1 \leqslant W_2 \leqslant V$.

Доказательство. 1. Мы уже знаем (из предложения 5.4), что мощность с.в. (5.6) не превосходит мощность базиса (5.5): $s \leqslant n$. Но это, разумеется, не означает, что $\mathcal{A}$ содержится в $\mathcal{B}$. Требуется

подобрать друой базис (5.5′), который содержал бы $\mathcal{A}$ в качестве подсистемы.

Рассуждение будет похожим на то, которое применялось в [A_1] для доказательства теоремы 11.1.

Если $s = n$, то нечего доказывать: система $\mathcal{A}$ сама является базисом. Если же $s < n$, то $\mathcal{A}$ базисом не является, и, значит, — не является максимальной линейно независимой с.в. Поэтому найдется другая, строго более широкая линейно независимая система $\mathcal{A}'$, содержащая, скажем, s' векторов, где $s < s' \leqslant n$.

И снова, если $s' = n$, то базис найден, в противном случае — продолжаем процесс, который обязан закончиться через конечное число шагов (поскольку мощности линейно независимых с.в. в пространстве V ограничены числом n). В итоге будет получен некоторый базис $\mathcal{B}'$ в пространстве V, содержащий с.в. $\mathcal{A}$.

2. Второе утверждение является непосредственным следствием первого. В самом деле, произвольный базис в подпространстве W_1 можно рассматривать как линейно независимую с.в. в (более широком) подпространстве W_2, и, следовательно, по первому утверждению данного предложения, его можно включить в некоторый базис в W_2. □

5.5. Свойство строгой монотонности размерности. Доказываемое ниже предложение 5.6 является обобщением предложения 11.3 из пособия [A_1].

Предложение 5.6. *Пусть V — к.л.п. над полем P.*

1. Если W является подпространством в пространстве V (подпространством в V, отличным от всего пространства), то $\dim(W)$ *не превосходит (строго меньше, чем)* $\dim(V)$.

2. Если $W \leqslant V$ и $\dim(W) = \dim(V)$, *то $W = V$.*

Доказательство. Согласно предложению 5.5, базис $\mathcal{A}$ в подпространстве W может быть продолжен до базиса $\mathcal{B}$ в V. Поэтому справедлива импликация

$$[\, W \leqslant V \,] \Rightarrow [\, \dim(W) \leqslant \dim(V) \,], \tag{5.7}$$

выражающая *свойство монотонности размерности.*

Если W является подпространством в V, отличным от V, то и базис $\mathcal{A}$ является подсистемой в базисе $\mathcal{B}$, отличной от $\mathcal{B}$. (Случись иначе, совпадение базисов $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ повлекло бы совпадение их линейных оболочек: $W = V$, что противоречит предположению.)

Таким образом, свойство (5.7) допускает запись в более сильной форме свойства *строгой монотонности*:

$$[\, W < V \,] \Rightarrow [\, \dim(W) < \dim(V) \,]. \tag{5.7a}$$

Обе части первого утверждения доказаны. Со вторым утверждением разберитесь самостоятельно (от противного) $\square$

§ 6. Основная теорема о линейных отображениях. Теорема об изоморфизме. Координатный изоморфизм

6.1. Основная теорема о линейных отображениях к.л.п. Характерной особенностью математики является то, что вместе с *объектами* изучаются отображения (*морфизмы*) этих объектов. Например, изучение линейных пространств неинтересно (и практически невозможно) без изучения линейных отображений.

При изучении линейных гомоморфизмов к.л.п. проявляется ключевая роль, которую в линейной алгебре играют *базисы*. Выясняется, что линейное отображение

$$\varphi : V \longrightarrow W \tag{6.1}$$

из к.л.п. V (над полем P) в произвольное линейное пространство W (над тем же полем) однозначно определяется своими значениями на базисных векторах пространства V.

При формулировке следующей теоремы нам понадобится обозначение для образа с.в. под действием линейного отображения (6.1). Если

$$\mathcal{A} = [\, a_1, a_2, \dots, a_k \,] \tag{6.2}$$

— произвольная с.в. в пространстве V, то ее образ под действием φ определяется как система (из такого же количества векторов)

$$\varphi(\mathcal{A}) = [\, \varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_k) \,] \tag{6.3}$$

в пространстве W. Загляните также (если нужно) в словарь морфизмов в п. 1.6.

Теорема 6.1 (основная теорема о линейных отображениях — ОТЛО). *Пусть V и W — два линейных пространства над одним и тем же полем P, причем пространство V является конечномерным и* $\dim(V) = n$. *Пусть*

$$\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, \dots, b_n \,] \tag{6.4}$$

— базис пространства V и

$$\mathcal{C} = [\, c_1, c_2, \dots, c_n \,] \tag{6.5}$$

— произвольная с.в. в пространстве W.

Тогда

1) существует единственный линейный гомоморфизм (6.1), такой, что

$$\varphi(\mathcal{B}) = \mathcal{C}; \tag{6.6}$$

2) если система $\mathcal{C}$ линейно независима, то этот гомоморфизм является мономорфизмом;

3) если пространство W также является конечномерным и с.в. $\mathcal{C}$ порождает W, то гомоморфизм (6.1) является эпиморфизмом;

4) если W конечномерно и $\mathcal{C}$ является базисом W, то (6.1) является изоморфизмом.

Доказательство. 1.1. Докажем сначала *единственность* линейного отображения φ, удовлетворяющего условию (6.6), в предположении, что такое отображение существует.

Условие (6.6) в подробной записи выглядит следующим образом:

$$\varphi(b_i) = c_i;\ \ i = 1, \dots, n. \tag{6.6a}$$

Оно задает φ на базисных векторах пространства V. Произвольный вектор $x \in V$ *однозначно* разлагается по базису $\mathcal{B}$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i;\ \ x_i \in P\ (i = 1, \dots, n). \tag{6.7}$$

Будучи линейным, отображение φ *сохраняет линейные комбинации* [см. формулу (1.11)]. Поэтому значение φ на векторе (6.7) задается формулой

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(b_i) \overset{(6.6\text{a})}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{n} x_i c_i,$$

или, в окончательном виде:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i c_i. \tag{6.8}$$

Формулой (6.8) значение отображения (6.1) на произвольном векторе $x \in V$ *однозначно* определено.

1.2. В результате доказательства единственности линейного отображения (6.1), удовлетворяющего (6.6), получена формула (6.8), которую можно использовать для доказательства *существования* такого отображения. Примем эту формулу за *определение* искомого отображения φ.

Но, в такой редакции, нам заранее не известно, что получается *линейное* отображение. Убедимся в том, что это действительно так.

Пусть x и y — два произвольных вектора пространства V; для первого из них имеется разложение (6.7), а для второго — аналогичное разложение:

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i;\ \ y_i \in P\ (i = 1, ..., n). \tag{6.9}$$

Складывая формулы (6.7) и (6.9) и пользуясь аксиомами линейного пространства (V_1) — (V_8), мы получим разложение для суммы векторов:

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) b_i. \tag{6.10}$$

Применяя к вектору (6.10) определение (6.8) и снова пользуясь аксиомами, мы получим:

$$\varphi(x+y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) c_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i c_i + y_i c_i) =$$
$$= \sum_{j=i}^{n} x_i c_i + \sum_{i=1}^{n} y_i c_i = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Докажите самостоятельно справедливость второго утверждения: $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ для любого скаляра $\lambda \in P$.

Необходимо еще убедиться в том, что отображение, построенное по формуле (6.8), удовлетворяет условию (6.6). Но это практически

очевидно: если в качестве вектора x взять базисный вектор b_j, то в разложении (6.7) все коэффициенты x_i будут равны нулю, кроме одного, $x_j = 1$. А в формуле (6.8) фигурируют такие же коэффициенты, но — перед векторами c_i. Поэтому получается: $\varphi(b_j) = c_j$.

2. Теперь, в дополнение к предположениям первого пункта, предположим, что с.в. $\mathcal{C}$ линейно независима. Докажем, что тогда отображение, построенное по формуле (6.8), является *мономорфизмом*, т. е. докажем *инъективность* этого отображения.

Пусть на векторах $x, y \in V$ отображение φ принимает одинаковые значения: $\varphi(x) = \varphi(y)$, или, в силу определения (6.8),

$$\sum_{i=1}^{n} x_i c_i = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i. \tag{6.11}$$

Из равенства (6.11) следует равенство нулю значения линейной комбинации:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) c_i = 0, \tag{6.12}$$

что, с учетом линейной независимости $\mathcal{C}$, влечет равенство нулю всех коэффициентов этой комбинации. А значит, $x_i = y_i$ для любого номера $i = 1, ..., n$. Следовательно, $x = y$, и инъективность φ доказана.

3. В этом и следующем пунктах теоремы *конечномерность* W необходима: в бесконечномерных пространствах не существует конечных порождающих с.в. и базисов.

Предположим, что $\mathcal{C}$ порождает W, и докажем *эпиморфность* (т. е. *сюръективность*) φ. Возьмем произвольный вектор $w \in W$ и разложим его по порождающей с.в. $\mathcal{C}$:

$$w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i;\ \mu_i \in P\ (i = 1, ..., n).$$

Надо найти такой вектор $x \in V$, что $\varphi(x) = w$. Ясно, что для этого годится вектор

$$x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i.$$

Сюръективность φ доказана.

4. Четвертое утверждение теоремы немедленно следует из второго и третьего. □

6.2. Свойства линейных изоморфизмов. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые простые свойства изоморфизмов к.л.п. По определению, гомоморфизмы линейных пространств *сохраняют* суммы векторов и произведения векторов на скаляры. Как следствие, получается сохранение линейных комбинаций. Следующее предложение проясняет вопрос с сохранением при линейных отображениях свойств (конечных) систем векторов.

Предложение 6.1. *1. Всякий линейный гомоморфизм сохраняет свойство линейной зависимости с.в.*

2. Линейные мономорфизмы сохраняют свойство линейной независимости с.в.

3. Линейные эпиморфизмы сохраняют свойство с.в. быть порождающей.

4. Линейные изоморфизмы сохраняют все упомянутые выше свойства с.в., а также свойство с.в. быть базисом.

Доказательство. 1. Первое утверждение теоремы с очевидностью следует из сохранения линейных комбинаций и сохранения нуля (см. п. 1.6).

2. Рассмотрим линейный гомоморфизм (6.1), про который предположим, что он является мономорфизмом, и с.в. (6.2), являющуюся линейно независимой. Докажем, что ее образ, с.в. (6.3), также является линейно независимой. Рассмотрим линейную комбинацию с нулевым значением:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(a_i) = 0. \tag{6.13}$$

Ввиду линейности φ, (6.13) равносильно

$$\varphi(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i) = 0. \tag{6.14}$$

В силу свойства $\varphi(0) = 0$ и инъективности φ, равенство (6.14) влечет равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0,$$

которое, в свою очередь, в силу линейной независимости $\mathcal{A}$, влечет обращение в нуль всех коэффициентов λ_i $(i = 1, ..., k)$. Линейная независимость $\varphi(\mathcal{A})$ доказана.

3. Пусть теперь (6.1) является эпиморфизмом, а (6.2) порождает пространство V. Докажем, что (6.3) порождает W. Возьмем произвольный вектор $w \in W$. В силу сюръективности φ, найдется вектор $x \in V$, такой, что $\varphi(x) = w$. С.в. (6.2) порождает V, поэтому x можно разложить по $\mathcal{A}$:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i. \tag{6.15}$$

Применяя к (6.15) отображение (6.1) и пользуясь его линейностью, получим

$$w = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(a_i).$$

Значит, произвольный вектор пространства W линейно выражается через $\varphi(\mathcal{A})$, что и требовалось.

4. Линейный изоморфизм, будучи одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом, сохраняет как свойство линейной независимости, так и свойство быть порождающей системой, а значит — и свойство быть базисом. (Добавим, что, в силу четвертого утверждения теоремы 6.1, свойство *переводить базис в базис* является *характеристическим* для линейных изоморфизмов.) □

6.3. Теорема об изоморфизме для к.л.п. Следующая теорема дает критерий *изморфности* двух к.л.п. Напомним, что два линейных пространства, V и W, над одним и тем же полем P, называются изоморфными (и это обозначается $V \cong W$), если существует линейный изоморфизм одного из этих пространств *на* другое.

Теорема 6.2. *Два к.л.п. V и W над одним и тем же полем P изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности одинаковы:*

$$[\, V \cong W \,] \Leftrightarrow [\, \dim(V) = \dim(W) \,]. \tag{6.16}$$

Доказательство. 1. Если $V \cong W$, то существует изоморфизм $\varphi : V \to W$. По предложению 6.1, φ переводит базис пространства V в базис пространства W. Стало быть, эти базисы имеют одинаковое количество векторов (равномощны), т. е. размерности данных пространств равны.

2. Предположим, $\dim(V) = \dim(W)$, и выберем произвольные базисы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в пространствах V и W соответственно. Эти базисы имеют одинаковое количество векторов, следовательно, по теореме 6.1, существует изоморфизм V на W, переводящий $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$. □

6.4. Координатный изоморфизм к.л.п. на арифметическое линейное пространство. Согласно теореме 6.2, все к.л.п. одинаковой размерности попарно изоморфны. Рассмотрим произвольное к.л.п. V (ненулевой) размерности n и, вместе с ним, арифметическое линейное пространство P^n, которое, как известно (см. пример 5.1), также имеет размерность n. Стало быть, $V \cong P^n$.

Следующее предложение уточняет этот результат, указывая конкретный (называемый *координатным*) изоморфизм V на P^n, который определяется *выбором базиса* в пространстве V.

Предложение 6.2. *Рассмотрим линейное пространство V ненулевой размерности n над полем P и зафиксируем в нем какой-либо базис (6.4). Рассмотрим также арифметическое линейное пространство P^n, снабженное естественным базисом*

$$\mathcal{E}_n = [\,\overline{e_1},\, \overline{e_2},\, \ldots, \overline{e_n}\,]. \tag{6.17}$$

Определим отображение

$$\beta : V \longrightarrow P^n, \tag{6.18}$$

сопоставляя произвольному вектору $x \in V$ координатный вектор-столбец

$$\beta(x) = \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in P^n, \tag{6.19}$$

составленный из координат вектора x в базисе (6.4), т. е. из коэффициентов разложения (6.7).

Отображение (6.18) является линейным изоморфизмом к.л.п. V на пространство P^n, переводящим базис (6.4) в базис (6.17).

Доказательство. В соответствии с четвертым утверждением теоремы 6.1, существует однозначно определенный линейный изоморфизм пространства V на P^n, переводящий зафиксированный базис $\mathcal{B}$ в естественный базис $\mathcal{E}_n$. Обозначим этот изоморфизм буквой β и докажем для него формулу (6.19).

По построению, $\beta(\mathcal{B}) = \mathcal{E}_n$, т. е.

$$\beta(b_i) = \overline{e_i}\,;\ i = 1, ..., n. \tag{6.20}$$

Следовательно,

$$\beta(x) = \beta(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta(b_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \overline{x},$$

что совпадает с (6.19). □

В дальнейшем нам понадобится также изоморфизм

$$\beta^{-1} : P^n \longrightarrow V;\ \beta^{-1}(\overline{x}) = x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i;\ \overline{x} \in P^n, \tag{6.21}$$

обратный к (6.20).

Замечание 6.1. Выбор базиса в абстрактном к.л.п. есть дело "случайное" (см. пример 4.1); никакого предпочтительного выбора нет. Поэтому и изоморфизм (6.18), определяемый по базису в данном пространстве, является *случайным*.

При замене некоторого базиса $\mathcal{B}$ на новый базис $\mathcal{B}'$ изоморфизм β заменяется на другой изоморфизм β'. (О связи этих изоморфизмов см. ниже, в п. 7.3.)

Случайные изоморфизмы мало ценятся в теории. Бóльшую теоретическую ценность представляют так называемые *канонические* изоморфизмы, задание которых не зависит ни от каких случайных факторов (типа выбора базисов).

Заметим однако, что при описании *алгоритмов* линейной алгебры и организации практических *вычислений* в линейных пространствах неизбежно приходится фиксировать некоторый базис в к.л.п., фактически заменяя задачу, решаемую в этом пространстве, на аналогичную задачу в арифметическом линейном пространстве.

Все изучаемые далее алгоритмы работают именно (и исключительно) с арифметическими векторами. (С этим обстоятельством мы столкнемся уже вскоре, см. п. 7.4.)

§ 7. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координатного столбца вектора при замене базиса

7.1. Матрица перехода от одного базиса в к.л.п. к другому. Свойства матриц перехода. За исключением некоторых тривиальных случаев, в к.л.п. имеется более одного базиса. Если, к тому же, основное поле бесконечно, то и базисов в ненулевом пространстве будет бесконечно много. В абстрактном к.л.п. все эти базисы совершенно равноправны. Поэтому возникает необходимость описания перехода от одного базиса к другому.

Пусть V — ненулевое к.л.п. над полем P. Рассмотрим два базиса в данном пространстве, $\mathcal{B} = [\,b_1, b_2, \ldots, b_n]$ и $\mathcal{B}' = [\,b'_1, b'_2, \ldots, b'_n]$. Первый из этих базисов условно назовем "старым", а второй — "новым". (На самом деле они равноправны и легко могут поменяться ролями.)

Определение 7.1. *Матрицей перехода* от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$ называется квадратная матрица, составленная из координатных столбцов, которые соответствуют векторам нового базиса $\mathcal{B}'$ в старом базисе $\mathcal{B}$.

Опишем подробнее построение матрицы перехода. Каждый вектор b'_j $(j = 1, \ldots, n)$ нового базиса разложим по старому базису:

$$b'_j = t_{1j}b_1 + t_{2j}b_2 + \ldots + t_{nj}b_n = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}b_i. \tag{7.1}$$

Коэффициенты $t_{ij} \in P$ $(i = 1, \ldots, n)$ разложения (7.1) образуют вектор-столбец

$$\overline{b'_j} = \begin{pmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \cdots \\ t_{nj} \end{pmatrix} \in P^n. \tag{7.2}$$

Обратите внимание на принцип нумерации коэффициентов: второй номер j — это номер вектора из нового базиса, а первый номер i — это номер его координаты относительно старого базиса. Скаляры $t_{ij} = [b'_j]_i$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ составляют квадратную матрицу

$$\underset{n\times n}{T} = \left(\overline{b'_1} \,\middle|\, \overline{b'_2} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \overline{b'_n}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{array}\right), \tag{7.3}$$

которая и служит матрицей перехода от от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}'$

В следующем предложении собраны основные свойства таких матриц.

Предложение 7.1. *1. Матрицей перехода от базиса $\mathcal{B}$ к нему самому служит единичная матрица E_n.*

2. Пусть $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{B}''$ — три базиса в n-мерном линейном пространстве V. Если матрица T является матрицей перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$, а матрица S — матрицей перехода от $\mathcal{B}'$ к $\mathcal{B}''$, то матрица $T \cdot S$ является матрицей перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}''$.

3. Всякая матрица перехода является обратимой, причем если T служит матрицей перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}'$, то T^{-1} соответствует обратному переходу, от $\mathcal{B}'$ к $\mathcal{B}$.

Доказательство. 1. Первое утверждение совершенно очевидно. В самом деле, если вектор b_1 из базиса $\mathcal{B}$ разложить по самому этому базису, то получится: $b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + ... + 0 \cdot b_n$, т. е. вектору b_1 будет соответствовать координатный столбец $\overline{e_1}$ и т. д.

2. Матрица первого перехода

$$T = (t_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

описывается формулами (7.1). Выпишем аналогичные формулы, описывающие матрицу

$$S = (s_{jk})_{j,k=1}^{n}$$

второго перехода:

$$b''_k = s_{1k}b'_1 + s_{2k}b'_2 + ... + s_{nk}b'_n = \sum_{j=1}^{n} s_{jk}b'_j;\ k = 1, ..., n. \qquad (7.1a)$$

(Обратите внимание на необходимость обозначения номера вектора в третьем базисе новой буквой — того требуют правила обращения с двойными суммами; см. [A_1, п. 2.2].)

Введем в рассмотрение матрицу

$$R = (r_{ik})_{i,k=1}^{n},$$

соответствующую переходу от первого базиса (сразу) к третьему. Для нее будем иметь еще один, совершенно аналогичный набор разложений:

$$b''_k = r_{1k}b_1 + r_{2k}b_2 + ... + r_{nk}b_n = \sum_{i=1}^{n} r_{ik}b_i;\ k = 1, ..., n. \qquad (7.1b)$$

Подставим разложения (7.1) в разложения (7.1a) и произведем манипуляции с двойными суммами, подробно описанные при доказательстве предложения 5.1:

$$b''_k = \sum_{j=1}^{n} s_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} b_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_{jk} t_{ij} b_i \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{jk} t_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{jk} t_{ij} \right) b_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} s_{jk} \right) b_i = \sum_{i=1}^{n} [T \cdot S]_{ik} b_i,$$

где на заключительном шаге использовано правило перемножения матриц.

Последний результат сравним с формулами (7.2b). Получены два разложения одного и того же вектора b''_k по базису $\mathcal{B}$. В силу свойства единственности (см. п. 4.2), коэффициенты этих разложений должны совпадать:

$$r_{ik} = [T \cdot S]_{ik};\ i, k = 1, ..., n,$$

а это есть равенство матриц:

$$R = T \cdot S.$$

3. Если применить два первых утверждения (доказанных выше) к последовательности переходов: от базиса $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}'$ (с матрицей перехода T), а затем назад, от $\mathcal{B}'$ к $\mathcal{B}$ (с матрицей S), то получится равенство матриц $T \cdot S = E_n$, из которого следует обратимость (и взаимная обратность) матриц перехода: $S = T^{-1}$. $\square$

Предложение 7.1 позволяет описать совокупность всех базисов в данном n-мерном к.л.п. V (над полем P). С этой целью нужно зафиксировать один из них, после чего все базисы в V будут находиться во взаимно однозначном соответствии с обратимыми $(n \times n)$-матрицами с элементами из P. Точнее, справедливо следующее

Предложение 7.2. *Зафиксируем произвольный базис*

$$\mathcal{A} = [\, a_1,\, a_2,\, \ldots, a_n \,] \tag{7.4}$$

в n-мерном линейном пространстве V (над полем P) и рассмотрим произольную с.в.

$$\mathcal{B} = [\, b_1,\, b_2,\, \ldots, b_n \,], \tag{7.5}$$

также содержащую n векторов. Разложим векторы, входящие в (7.5), по базису (7.4):

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} a_i;\ j = 1, \ldots, n. \tag{7.6}$$

Из коэффициентов разложений (7.6) составим матрицу

$$T = (t_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{Mat}(n, n; P). \tag{7.7}$$

Тогда

1) с.в. (7.5) является базисом в V в том и только том случае, когда соответствующая матрица (7.7) обратима;

2) существует биекция между множеством всех базисов в пространстве V и множеством (группой) обратимых матриц $GL(n, P)$.

Доказательство. 1. Если система (7.5) является базисом, то матрица (7.7) есть не что иное, как матрица перехода от а $\mathcal{A}$ к $\mathcal{B}$ (см. определение 7.1), и ее обратимость вытекает из предложения 7.1.

Обратно, предположим, что матрица T является обратимой и докажем, что с.в. (7.5) есть базис. Согласно предложению 5.4, для этого достаточно проверить линейную независимость $\mathcal{B}$. Рассмотрим линейную комбинацию с нулевым значением:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j = 0. \tag{7.8}$$

Требуется доказать обращение в нуль всех коэффициентов $\lambda_i \in P$ $(i = 1, ..., n)$. Подставим разложения (7.6) в равенство (7.8) и произведем еще раз уже привычные преобразования с двойными суммами:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} a_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \lambda_j \right) a_i = \sum_{i=1}^{n} [T \cdot \overline{\lambda}\,]_i a_i$$

(сравните с доказательством предложения 5.1, но не запутайтесь: буквы используются другие).

Из последнего равенства, с учетом линейной независимости $\mathcal{A}$, вытекает обращение в нуль всех координат $[T \cdot \overline{\lambda}]_i$ $(i = 1, ..., n)$, т. е. векторное равенство $T \cdot \overline{\lambda} = \overline{0}$ (где $\overline{\lambda}, \overline{0} \in P^n$), домножая которое слева на T^{-1}, мы получим $\overline{\lambda} = \overline{0}$, что и требовалось.

2. Итак, если T — обратимая матрица, то формулы (7.6) определяют базис (7.5), причем матрица T как раз будет матрицей перехода от (7.4) к (7.5). Биекция

$$\{\,\text{базисы в } V\,\} \;\Longleftrightarrow\; \{\,\text{обратимые } (n \times n)\text{-матрицы}\,\}$$

установлена. □

Замечание 7.1. Результат предложения 7.2 можно пересказать несколько иначе (менее формально): в n-мерном к.л.п. столько базисов, сколько существует обратимых $(n \times n)$-матриц с элементами из основного поля.

При $n = 1$ получается, что базисов (в одномерном пространстве) столько, сколько в поле ненулевых элементов. (Единственным случаем, когда базис определен однозначно, является случай пространства над полем $P = \mathbb{F}_2$.)

Полезная комбинаторная задача: подсчитать, сколько имеется обратимых $(n \times n)$-матриц с элементами из поля $P = \mathbb{F}_q$, конечной мощности q. (Из курсов общей алгебы или дискретной математики вы вскоре должны узнать, что конечные поля бывают только *примарного* порядка, т. е. число q обязательно должно иметь вид $q = p^k$, где p — *простое*, а k — натуральное число.)

Решив эту задачу, вы определите количество различных базисов в конечномерном пространстве над конечным полем.

Замечание 7.2. Для арифметического линейного пространства $V = P^n$ имеется предпочтительный (естественный) выбор фиксированного базиса: $\mathcal{A} = \mathcal{E}_n$. Тогда матрицей перехода от естественного базиса к произвольному базису

$$\mathcal{B} = [\,\overline{b_1},\, \overline{b_2},\, \ldots,\, \overline{b_n}\,] \tag{7.5a}$$

будет матрица, составленная из векторов-столбцов, входящих в список (7.5a):

$$B = \left(\,\overline{b_1}\,\middle|\,\overline{b_2}\,\middle|\,\ldots\,\middle|\,\overline{b_n}\,\right). \tag{7.7a}$$

Если, помимо (7.5a), задан еще один базис

$$\mathcal{B}' = [\,\overline{b'_1},\, \overline{b'_2},\, \ldots,\, \overline{b'_n}\,], \tag{7.5b}$$

и введена соответствующая матрица

$$B' = \left(\,\overline{b'_1}\,\middle|\,\overline{b'_2}\,\middle|\,\ldots\,\middle|\,\overline{b'_n}\,\right), \tag{7.7b}$$

то можно, с помощью предложения 7.1, вычислить матрицы переходов от (7.5a) к (7.5b) и обратно:

$$T = B^{-1} \cdot B'; \quad S = T^{-1} = (B')^{-1} \cdot B. \tag{7.9}$$

7.2. Изменение координатного столбца вектора при замене базиса. Как объяснялось в п. 6.4, фиксация базиса в к.л.п. позволяет определить координатный изоморфизм этого пространства на арифметическое линейное пространство, сопоставляющий векторам их координатные столбцы (относительно выбранного базиса). Там же замечалось, что при изменении базиса меняется и координатный изоморфизм. В данном пункте мы проследим это явление более детально.

Рассмотрим в n-мерном линейном пространстве V (над полем P) два базиса: условно старый базис $\mathcal{B}$, заданный описанием (7.5), и условно новый базис, заданный аналогичным описанием

$$\mathcal{B}' = [\,b'_1,\, b'_2,\, \ldots,\, b'_n\,]. \tag{7.5′}$$

Введем два координатных изоморфизма [вида (6.19)]:

$$\beta : V \to P^n;\ \beta(x) = \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}; \tag{7.10}$$

$$\beta' : V \to P^n;\ \beta'(x) = \overline{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \tag{7.10′}$$

где $x \in V$ и векторы-столбцы $\overline{x}, \overline{x}' \in P^n$ составляются по разложениям

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j b'_j. \tag{7.11}$$

Замечание 7.3 (для служебного пользования). В обозначении $\overline{x}'$ штрих относится скорее к черточке, чем к вектору x. Меняется не вектор, а базис, по которому он разлагается. *Черта со штрихом* обозначает координатный столбец, соответствующий x, в новом базисе. (Если бы нам понадобилось ввести новый вектор x', то столбец, соответствующий ему в старом базисе, мы обозначили бы $\overline{x'}$.)

Рассмотрим далее матрицу перехода (7.2), определяемую по разложениям (7.1). Справедливо следующее

Предложение 7.3. *При замене в n-мерном пространстве V базиса $\mathcal{B}$ на базис $\mathcal{B}'$, с матрицей перехода T, для любого вектора $x \in V$ соответствующие координатные столбцы $\overline{x}, \overline{x}' \in P^n$ связаны формулами*

$$\overline{x} = T \cdot \overline{x}';\ \overline{x}' = S \cdot \overline{x}, \tag{7.12}$$

где $S = T^{-1}$ — матрица перехода для обратной замены.

Доказательство. Подставим во вторую из формул (7.11) выражение (7.1) для b'_j и (в который уже раз!) повторим манипуляции с двойными суммами:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j b'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j \right) b_i = \sum_{i=1}^{n} [T \cdot \overline{x}']_i b_i.$$

Сравним полученный результат с первой из формул (7.11). Мы имеем два разложения одного и того же вектора x по одному и тому же базису $\mathcal{B}$. В силу свойства единственности, соответствующие коэффициенты в этих разложениях должны совпадать:

$$x_i = [T \cdot \overline{x}']_i;\ i = 1, ..., n,$$

или, в векторном виде: $\overline{x} = T \cdot \overline{x}'$.

Первая из формул (7.12), выражающая старый координатный столбец через новый, доказана. Вторая из нее немедленно следует. □

*Замечание 7.4.** Результат предложения 7.3 допускает *операторное* выражение, использующее линейные изоморфизмы

$$\beta, \beta' : V \xrightarrow{\cong} P^n, \tag{7.13}$$

заданные формулами (7.10) и (7.10′).

Введем в рассмотрение *линейные автоморфизмы*

$$\tau : P^n \longrightarrow P^n;\ \tau(\overline{x}') = T \cdot \overline{x}';\ \overline{x}' \in P^n \tag{7.14}$$

и

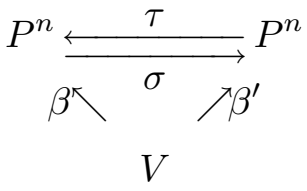
$$\sigma : P^n \longrightarrow P^n;\ \sigma(\overline{x}) = S \cdot \overline{x};\ \overline{x} \in P^n, \tag{7.15}$$

определяемые квадратными матрицами T и S соответственно.

Тот факт, что (7.14) и (7.15) действительно являются автоморфизмами (т. е. обратимыми эндоморфизмами) арифметического линейного пространства P^n, вытекает из взаимной обратности матриц T и S (см. [A_1, п. 14.5]).

Автоморфизмы τ и σ также взаимно обратны: $\sigma = \tau^{-1}$. Они, вместе с изоморфизмами (7.13), составляют следующую диаграмму.

Диагр. 7.1



Для морфизмов, составляющих диаграмму 7.1, справедливы соотношения:

$$\beta = \tau \circ \beta';\ \beta' = \sigma \circ \beta. \tag{7.16}$$

Они следуют из (имеющих место для любого вектора $x \in V$) формул (7.12). Первой из этих формул можно придать такой вид:

$$\beta(x) = T \cdot \beta'(x) = \tau(\beta'(x))\ (\forall\, x \in V).$$

А это равносильно первой из формул (7.16). Аналогично обосновывается вторая формула.

7.3. Задачи на вычисление матриц перехода и пересчет координатных столбцов при замене базисов. Рассмотрим n-мерное линейное пространство V над полем P. Для постановки и решения любой вычислительной задачи в пространстве V надо позаботиться о выборе в нем некоторого *исходного* базиса (см. по этому поводу замечание 6.1).

Будем считать, что такой базис $\mathcal{A}$ выбран. Теперь, в соответствии с предложением 7.2, произвольный базис в пространстве V однозначно определяется матрицей перехода от $\mathcal{A}$ к этому базису. Однако, чтобы придать описанному соответствию реально вычислимый характер, придется воспользоваться координатным изоморфизмом $\alpha : V \xrightarrow{\cong} P^n$ и фактически *отождествить* V и P^n. При изоморфизме сохраняются все линейные соотношения между векторами и, следовательно, такие свойства систем векторов, как линейная зависимость (независимость). Сохраняются также линейные оболочки систем векторов; подпространства переходят в подпространства, с сохранением размерности. (Все это следует из предложения 6.1 и теоремы 6.2.)

В приводимой ниже таблице фиксируется соответствие между реальной "сценой" — абстрактным к.л.п. и "оцифровкой" в арифметическом линейном пространстве.

"О ц и ф р о в к а" (а р и ф м е т и з а ц и я)
а б с т р а к т н о й л и н е й н о й а л г е б р ы

Абстрактное линейное пространство V	Арифметическое линейное пространство P^n
Фиксированный базис $\mathcal{A}$	Естественный базис $\mathcal{E}_n$
Абстрактный вектор x	Вектор-столбец $\overline{x}$
Базисы в V: $\mathcal{B} = [\, b_1, ..., b_n \,]$; $\mathcal{B}' = [\, b'_1, ..., b'_n \,]$	Базисы в P^n: $\widetilde{\mathcal{B}} = [\, \overline{b_1}, ..., \overline{b_n} \,]$; $\widetilde{\mathcal{B}'} = [\, \overline{b'_1}, ..., \overline{b'_n} \,]$; записываются в матрицы B, B'
Матрица T перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}'$	Матрица T (та же самая) перехода от $\widetilde{\mathcal{B}}$ к $\widetilde{\mathcal{B}'}$: $T = B^{-1} \cdot B'$

Тот факт, что в правом столбце таблицы получается та же матрица перехода T, что и в левом, является проявлением упомянутого выше сохранения линейных соотношений: коэффициенты разложения векторов базиса $\widetilde{\mathcal{B}'}$ по базису $\widetilde{\mathcal{B}}$ совпадают с коэффициентами разложения векторов $\mathcal{B}'$ по $\mathcal{B}$.

Формула для T взята из замечания 7.2 [см. (7.9)]; в этом замечании использованы несколько иные обозначения: над именами базисов нет тильд.

При использовании нескольких базисов (а у нас в задаче их три) приходится усложнять обозначения для координатных столбцов:

— координатный столбец вектора $x \in V$ относительно фиксированного базиса $\mathcal{A}$ будет обозначаться просто $\overline{x}$;

— для координатного столбца того же вектора относительно базиса $\mathcal{B}$ (или $\mathcal{B}'$) примем обозначение $\overline{x}_{\mathcal{B}}$ (соответственно $\overline{x}_{\mathcal{B}'}$).

Правило (7.12) пересчета координатных столбцов при замене базиса в новых обозначениях примет вид:

$$\overline{x}_{\mathcal{B}} = T \cdot \overline{x}_{\mathcal{B}'}; \quad \overline{x}_{\mathcal{B}'} = S \cdot \overline{x}_{\mathcal{B}}, \tag{7.12a}$$

где матрицы T и $S = T^{-1}$ вычисляются по формулам (7.9).

Заметим, наконец, что в задачниках по линейной алгебре, во многих упражнениях отождествление линейного пространства с арифметическим (то, что мы назвали оцифровкой) уже считается выполненным. Условия изначально записываются для арифметических векторов.

Пример 7.1. Выполним следующее типовое упражнение.

З а д а ч а. В пространстве $\mathbb{R}^4$ даны две с.в.:

$$\mathcal{B} = [\,\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \overline{b_4}\,]; \ \mathcal{C} = [\,\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}, \overline{c_4}\,],$$

элементы которых записаны (в качестве столбцов) в соответствующие матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Требуется:

1) доказать, что обе данные с.в. являются базисами;

2) вычислить матрицы перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{C}$ и обратно.

После этого рассматривается вектор $\overline{a} \in \mathbb{R}^4$, имеющий в базисе $\mathcal{B}$ координатный столбец

$$\overline{a}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

и требуется

3) найти координатный столбец $\overline{a}_{\mathcal{C}}$ этого вектора относительно базиса $\mathcal{C}$.

Р е ш е н и е. Прежде всего заметим, что все векторы, фигурирующие как элементы данных с.в. $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, заданы своими разложениями по естественному базису $\mathcal{E}_4$. В то же время запись вектора $\overline{a}$ в этом базисе заранее не известна.

1. Чтобы установить обратимость матриц B и C, можно было бы вычислить их определители, они должны быть ненулевыми. Мы предпочтем другой подход: применим алгоритм Жордана — Гаусса (см. [A_1, п. 14.6]). Это позволит попутно найти обратные матрицы, B^{-1} и C^{-1}, которые далее понадобятся для вычисления матриц перехода.

Приводим к виду Жордана — Гаусса следующую матрицу-конкатенацию:

$$(B\,|\,E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right).$$

Можно констатировать, что матрица B обратима, и выписать

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично проверяется обратимость C и выписывается

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 9/2 & -1 & -1 & -1/2 \\ 9/2 & -1 & 0 & -3/2 \\ -3/2 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Тем самым установлено, что данные с.в. действительно являются базисами в $\mathbb{R}^4$. Заметим также, что матрицы B и C могут рассматриваться как матрицы перехода от $\mathcal{E}_4$ к $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ соответственно.

2. Матрица T перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{C}$ находится по первой из формул (7.9):

$$T = B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица S, соответствующая обратному переходу, находится либо по второй из формул (7.9), либо — непосредственным обращением матрицы T:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Координатный столбец $\overline{a}_{\mathcal{C}}$ вычисляется по второй из формул (7.12a):

$$\overline{a}_{\mathcal{C}} = S \cdot \overline{a}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если потребуется найти "истинный вид" этого вектора, т. е. его координатный стобец $\overline{a} = \overline{a}_{\mathcal{E}}$ в естественном базисе $\mathcal{E} = \mathcal{E}_4$, то можно использовать первую из формул (7.12a), с матрицей B в роли матрицы перехода:

$$\overline{a} = \overline{a}_{\mathcal{E}} = B \cdot \overline{a}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 7.2. В $(n+1)$-мерном проостранстве $P_n[x]$ многочленов степени не выше n естественный базис (см. пример 4.1) составляют одночлены:

$$\mathcal{B} = [\,1,\, x,\, x^2, \dots, x^n\,]. \tag{7.17}$$

Без всяких вычислений ясно, что для любого $a \in P$ базис в этом пространстве будут составлять "сдвинутые" одночлены:

$$\mathcal{B}_a = [\,1,\, x-a,\, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n\,]. \tag{7.18}$$

В самом деле, с.в. (7.18) сводится к (7.17) заменой переменной $y = x - a$ (и поэтому также линейно независима).

Многочлену

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + ... + f_n x^n \tag{7.19}$$

в базисе $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$ отвечает вектор-столбец

$$\overline{f}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix} \in P^{n+1}. \tag{7.20}$$

(Впрочем, чаще в этой теме используются векторы-строки $\overline{f}^t_{\mathcal{B}}$.)

Применяя *формулу Тейлора* для многочленов (см. [A_1, п. 47.3]), можно выписать разложение многочлена (7.19) по базису $\mathcal{B}_a$:

$$f(x) = h_0 + h_1(x-a) + h_2(x-a)^2 + ... + h_n(x-a)^n, \tag{7.21}$$

где коэффициенты выражаются через производные многочлена $f(x)$ в точке a:

$$h_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!};\ k = 0, ..., n. \tag{7.22}$$

Таким образом, многочлену (7.19) в базисе (7.18) будет соответствовать столбец

$$\overline{f}_{\mathcal{B}_a} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f'(a) \\ f''(a)/2! \\ \cdots \\ f^{(n)}(a)/n! \end{pmatrix}. \tag{7.23}$$

Чтобы найти матрицу перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}_a$, надо разложить вектор (одночлен) $(x-a)^k$ по старому базису $\mathcal{B}$. Это разложение получается по биному Ньютона:

$$(x-a)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j a^{k-j} x^j.$$

Таким образом получается матрица

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & \cdots & (-1)^n a^n \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & \cdots & (-1)^{n-1} n a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & -3a & \cdots & (-1)^{n-2} C_n^2 a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{n-3} C_n^3 a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -na \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.24}$$

Обратная матрица выглядит проще. Чтобы ее составить, надо разложить старые базисные векторы x^k по новому базису $\mathcal{B}_a$:

$$x^k = ((x-a)+a)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j a^{k-j}(x-a)^j,$$

после чего выписывается матрица

$$S = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & \cdots & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & 3a & \cdots & C_n^2 a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & C_n^3 a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & na \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.25}$$

Вектор-столбец $\overline{f}_{\mathcal{B}_a}$, отвечающий данному многочлену в новом базисе, уже вычислен выше [см. формулу (7.23)], исходя из независимых соображений. Поэтому формулу

$$\overline{f}_{\mathcal{B}_a} = S \cdot \overline{f}_{\mathcal{B}} \tag{7.26}$$

для пересчета координатного столбца можно использовать теперь для контроля правильности вычислений. (Попробуйте разобраться с этой проверкой самостоятельно.)

7.4. Применение системы Maple для решения задач, связанных с заменой базисов. Читатели первого пособия [A_1] наверняка помнят, что в нем значительное место уделяется Maple-вычислениям. Мы намерены продолжить эту линию и во втором пособии. Будут, однако, довольно существенные изменения в нашей Maple-стратегии. Прежде всего, мы перейдем от использования пакета linalg, ориентированного на решение задач линейной алгебры, к использованию другого пакета LinearAlgebra, ориентированного на те же задачи, но более современного. В ранних версиях Maple (заметим, что их вполне достаточно для наших скромных целей) оба упомянутых пакета фигурировали как равноправные. В последних версиях пакет linalg характеризуется как "замещенный": работать в нем можно, но рекомендуется переходить на использование *модуля* LinearAlgebra.

Разумеется, здесь не место для подробного описания организации и функционировании вновь привлекаемого программного средства. Но на некоторых особенностях *интерфейса* пакета LinearAlgebra остановиться придется. Начинаются нововведения с имени пакета: оно стало длиннее, содержит *целые слова*, которые записываются *с большой буквы* и *слитно*. Аналогичный характер будут иметь все команды, входящие в пакет. Это довольно удобно для англоязычных пользователей: аббревиатуры, хотя они и короче, требуют запоминания, а длинные имена из полных слов являются "говорящими" и легко восстанавливаются по смыслу.

Читатели данного пособия, скорее всего, не являются англоязычными. Но они собираются стать программистами и должны учитывать то обстоятельство, что представители данной профессии "принимают англоязычие" в числе первых.

Пример 7.3. Перерешаем задачу из примера 7.1 средствами системы Maple. Загружаем пакет:

```
> with(LinearAlgebra):
```

(Если вместо двоеточия в конце строки поставить точку с запятой, то будет выдан перечень команд, доступных в вызванном пакете.)

Продемонстрируем, как в новом пакете вводятся матрицы. Первый способ задания вполне аналогичен применявшемуся в пакете linalg:

```
> B:=Matrix([[1,1,1,1],[1,2,1,3],[1,1,2,2],[1,1,1,3]]):
```

Но при этом определяется объект нового типа 'Matrix', отличного от использовавшегося в linalg типа 'matrix'. (Системы компьютерной алгебры, подобные Maple, очень тщательно отслеживают *типы данных*. Объекты разных типов не могут использоваться совместно. Скажем, нельзя сложить 'matrix' и 'Matrix'. Возможна, однако, *конвертация* одного из этих типов в другой.)

Второй способ задания матриц использует укороченные обозначения (по-английски: shortcuts) и для небольших матриц является более удобным:

```
> C:=<<1,0,3,3>|<-2,-3,-5,-4>|<2,2,5,4>|<-2,-3,-4,-4>>:
```

(При этом матрицы вводятся не по строкам, а по столбцам. Но можно сделать и наоборот: вводить матрицы по строкам, поменяв ролями вертикальную черту | и запятую.)

В отличие от пакета linalg, арифметика модуля LinearAlgebra допускает прямое выполнение сложения $A + B$, вычитания $A - B$ и умножения $A \,.\, B$ матриц. Обратите внимание на то, что для обозначения матричного умножения используется обычная (*синтаксическая*) точка. Отпадает потребность в использовании ключевой для linalg команды evalm (вычислить матрицу). Напомним, что в старом пакете, чтобы перемножить две матрицы, требовалось набрать evalm(A&∗B).

В LinearAlgebra имеется особая команда для задания единичной матрицы:

```
> E := IdentityMatrix( 4 ):
```

С помощью shortcuts легко выражается конкатенация матриц:

```
> BE := << B | E >> ;
```

$$BE := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

А вот команда gaussjord из linalg, приводящая матрицу к виду Жордана — Гаусса, в пакете LinearAlgebra заменяется на длинное выражение из четырех слов (*приведенная строчно эшелонированная форма*; такое словосочетание вполне привычно для англоязычного пользователя):

```
> BG := ReducedRowEchelonForm( BE ) ;
```

$$BG := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Из правой "полуматрицы" матрицы BG можно (с помощью команды SubMatrix) "добыть" матрицу B^{-1}, но можно и непосредственно, одной командой найти матрицу перехода:

> T := MatrixInverse (B) . C ;

$$T := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Покажем еще действия с векторами:

> aB := Vector ([1, -1, 1, -1]) ; aC := Inverse(T) . aB ;

$$aB := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$aC := \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

§ 8. Сумма и пересечение линейных подпространств. Формула Грассмана

8.1. Линейные подпространства в к.л.п. и действия над ними. Понятие линейного подпространства $W \leqslant V$ в линейном пространстве V (над полем P) введено в самом начале нашего курса, в п. 1.5. Там же рассматривалось первое алгебраическое действие над подпространствами — *пересечение* двух или произвольного (конечного или бесконечного) семейства подпространств, которое, согласно предложению 1.2, также оказывается подпространством.

В то же время, объединение двух линейных подпространств, как правило, подпространством не является. (Исключение составляет случай, когда одно из объединяемых подпространств содержит второе.)

Существует, однако, другое алгебраическое действие над линейными подпространствами — *сложение* двух или нескольких подпространств, результатом которого снова является подпространство. Переходим к его описанию.

Определение 8.1. Пусть $\{W_i\}_{i=1}^s$ — конечное семейство линейных подпространств в линейном пространстве V. *Сумма* этих подпространств определяется как следующее подмножество

$$W_1 + W_2 + ... + W_s = \{\, y_1 + y_2 + ... + y_s \,:\, y_i \in W_i \ (i = 1, ..., s) \,\} \quad (8.1)$$

в пространстве V.

Для суммы (8.1) используется также обозначение $\sum_{i=1}^s W_i$.

Предложение 8.1. *Сумма $W = \sum_{i=1}^s W_i$ линейных подпространств $W_i \leqslant V$ $(i = 1, ..., s)$ сама является линейным подпространством: $W \leqslant V$, причем это подпространство является наименьшим из подпространств в V, содержащих все подпространства-слагаемые.*

Доказательство. Тот факт, что W действительно является подпространством практически очевиден: взяв два произвольных вектора

$$x = y_1 + y_2 + ... + y_s, \ x' = y_1' + y_2' + ... + y_s'$$

из подмножества W $(y_i, y_i' \in W_i;\ i = 1, ..., s)$ и произвольный скаляр $\lambda \in P$, мы легко убеждаемся, что векторы

$$x + x' = (y_1 + y_1') + (y_2 + y_2') + ... + (y_s + y_s'),\ \lambda x = (\lambda y_1) + (\lambda y_2) + ... + (\lambda y_s)$$

также принадлежат W.

Очевидны также включения $W_i \subseteq W$. Остается установить, что W является наименьшим из подпространств, содержащих все W_i, т. е. доказать, что W содержится в любом линейном подпространстве W', содержащем W_i $(i = 1, ..., s)$.

Но и это не вызывает затруднений, поскольку если подпространство W' содержит произвольные векторы y_i из W_i, то оно обязано содержать и всевозможные суммы вида $y_1 + y_2 + ... + y_s$. Значит, W' содержит все векторы из W. □

Замечание 8.1. Законы коммутативности и ассоциативности для сложения векторов переносятся, разумеется, на сложение (непустых) *подмножеств* в линейном пространстве, в частности, — на сложение *линейных подпространств*. Именно поэтому мы, не беспокоясь ни о каких скобках и не заботясь о порядке слагаемых, сразу ввели понятие суммы для нескольких подпространств. Однако, другие свойства сложения подпространств все же серьезно отличаются

от свойств сложения векторов. Скажем, если одно из двух подпространств содержится в другом: $W_1 \leqslant W_2$, то сумма этих подпространств совпадает с бóльшим из них: $W_1 + W_2 = W_2$. В самом деле, всякий элемент $x \in W_1 + W_2$ имеет, по определению, вид $x = y_1 + y_2$, где $y_2 \in W_2$ и y_1 тоже принадлежит (в силу включения) W_2, а значит и $x \in W_2$. Очевидно, верно и обратное: равенство $W_1 + W_2 = W_2$ влечет включение $W_1 \leqslant W_2$.

Так что, имеем эквивалентность:

$$[\, W_1 \leqslant W_2 \,] \Leftrightarrow [\, W_1 + W_2 = W_2 \,],$$

которая, кстати, является аналогом другой, совершенно очевидной эквивалентности:

$$[\, W_1 \leqslant W_2 \,] \Leftrightarrow [\, W_1 \cap W_2 = W_1 \,].$$

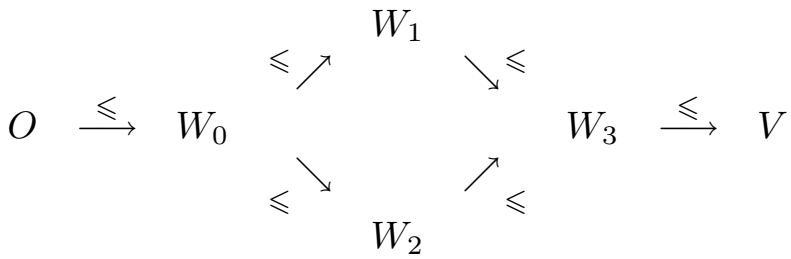
Замечание 8.2. Приведем важную для дальнейшего диаграмму включений, демонстрирующую все обязательные включения между следующими подпространствами в пространстве V:

— тривиальные подпространства O и V;

— произвольные подпространства W_1 и W_2;

— их сумма $W_3 = W_1 + W_2$ и пересечение $W_0 = W_1 \cap W_2$.

Диаграмма 8.1



В диаграмме 8.1 стрелки со знаками неравенства обозначают (линейные) отображения вложения, сопоставляющие каждому вектору из некоторого подпространства этот же самый вектор, но рассматриваемый в некотором другом, более широком подпространстве. Любопытно, что если какая-либо из "сторон ромба" тривиализуется (превращается в равенство), то тривиализуется и противоположная сторона. (Это следует из замечания 8.1.)

*Замечание 8.3.** В бесконечномерной линейной алгебре вводится определение для суммы $\sum_{\iota \in I} W_i$ произвольного (может быть, бесконечного) семейства $W = \{W_\iota\}_{\iota \in I}$ линейных подпространств.

И в этом случае W состоит из *конечных* сумм векторов, каждый из которых принадлежит какому-либо одному из подпространств-слагаемых. Остается справедливым утверждение о том, что W является наименьшим из подпространств, содержащих все W_ι.

Кстати, с учетом предложения 2.1а, это заключение можно высказать в следующих равносильных формах:

— сумма семейства подпространств равна *пересечению* всех подпространств, содержащих все подпространства, входящие в семейство;

— сумма равняется *линейной оболочке объединения* данных подпространств.

8.2. Сумма и пересечение конечномерных линейных подпространств. Формула Грассмана. Если линейное пространство V конечномерно, то, в соответствии с предложением 5.3, конечномерными будут и все линейные подпространства в V, причем, по свойству монотонности размерности (см. предложение 5.6), размерности подпространств не превышают размерность всего пространства.

В произвольном линейном пространстве (может быть, бесконечномерном) также можно (и нужно) рассматривать конечномерные подпространства. Совершенно очевидно, что *пересечение* $W_0 = W_1 \cap W_2$ двух конечномерных подпространств $W_1, W_2 \leqslant V$ является конечномерным подпространством (поскольку оно содержится в каждом из данных).

Но конечномерной будет и *сумма* $W_3 = W_1 + W_2$ двух конечномерных подпространств. В самом деле, конечную порождающую с.в. для суммы можно получить объединением (конкатенацией) конечных порождающих систем для каждого из слагаемых. Так что, размерность суммы не будет превышать сумму размерностей слагаемых. Ниже будет доказана точная формула для размерности суммы двух конечномерных подпространств.

Теорема 8.1 (теорема Грассмана). *Пусть V — линейное пространство над полем P, W_1 и W_2 — два конечномерных линейных подпространства в пространстве V. Тогда сумма $W_1 + W_2$ также является конечномерным подпространством в V и для ее размерности справедливо следующее соотношение:*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2). \qquad (8.2)$$

Доказательство. Обозначим $d_i = \dim(W_i)$ (где $i = 0, 1, 2, 3$) размерности задействованных в формуле (8.2) подпространств (напомним, что W_3 — это сумма, W_0 — пересечение подпространств W_1 и W_2). В силу свойства монотонности размерности, имеют место неравенства: $d_0 \leqslant d_1$, $d_2 \leqslant d_3$. Докажем соотношение

$$d_3 = d_1 + d_2 - d_0. \tag{8.2a}$$

В таком виде мы будем использовать формулу в дальнейшем (например, при описании алгоритмов построения базисов в следующем параграфе). В доказательстве, однако, эти обозначения были бы чересчур громоздкими, и мы их временно укоротим: $d_0 = m$; $d_1 = k$; $d_2 = l$; $d_3 = s$.

Выберем произвольный базис

$$\mathcal{B}_0 = [\, b_1, \dots, b_m \,] \tag{8.3}$$

в подпространстве W_0 и, пользуясь предложением 5.5, продолжим его двояко:

— до базиса

$$\mathcal{B}_1 = [\, b_1, \dots, b_m,\ g_1, \dots, g_{k-m} \,] \tag{8.4}$$

в подпространстве W_1;

— до базиса

$$\mathcal{B}_2 = [\, b_1, \dots, b_m,\ h_1, \dots, h_{l-m} \,] \tag{8.5}$$

в подпространстве W_2.

Затем составим следующую систему из $m + (k - m) + (l - m) = k + l - m$ векторов:

$$\mathcal{B}_3 = [\, b_1, \dots, b_m,\ g_1, \dots, g_{k-m},\ h_1, \dots, h_{l-m} \,]. \tag{8.6}$$

Доказав, что $\mathcal{B}_3$ является базисом в W_3, мы, как следствие, получим равенство (8.2a).

Сначала убедимся в том, что с.в. (8.6) *порождает* W_3. В самом деле, всякий вектор $x \in W_3$, по определению суммы подпространств, представляется в виде $x = y + z$, где $y \in W_1$, а $z \in W_2$. Вектор y можно представить разложением по базису (8.4), а z — разложением по (8.5); сложив два этих разложения и приведя подобные члены (содержащие векторы из $\mathcal{B}_0$), получим разложение для x по с.в. (8.6).

Остается проверить линейную независимость последней с.в. Рассмотрим линейную комбинацию с нулевым значеним:

$$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m + \mu_1 g_1 + ... + \mu_{k-m} g_{l-m} + \nu_1 h_1 + ... + \nu_{l-m} h_{l-m} = 0. \quad (8.7)$$

Докажем, что обращаются в нуль все ее коэффициенты

$$\lambda_1, ..., \lambda_m, \mu_1, ..., \mu_{k-m}, \nu_1, ..., \nu_{l-m} \in P.$$

Перенесем в формуле (8.7) в правую часть слагаемые из третьей группы:

$$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m + \mu_1 g_1 + ... + \mu_{k-m} g_{k-m} = -\nu_1 h_1 - ... - \nu_{l-m} h_{l-m}. \quad (8.8)$$

Обозначим буквой u вектор, являющийся общим значением левой и правой частей равенства (8.8). Этот вектор, в силу своего "левого" представления, принадлежит подпространству W_1, а, в силу "правого", — подпространству W_2. Значит, он принадлежит пересечению W_0 и его можно разложить по базису (8.4):

$$u = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_m b_m \ (\alpha_1, ..., \alpha_m \in P). \quad (8.9)$$

Приравняем выражение (8.9) к правой части (8.8) и перенесем в полученном равенстве все члены в левую часть. Будем иметь:

$$\alpha_1 b_1 + ... + \alpha_m b_m + \nu_1 h_1 + ... + \nu_{l-m} h_{l-m} = 0. \quad (8.10)$$

В равенстве (8.10) фигурирует линейная комбинация с нулевым значением для базиса $\mathcal{B}_2$. Значит, должны равняться нулю все ее коэффициенты:

$$\alpha_1 = ... = \alpha_m = \nu_1 = ... = \nu_{l-m} = 0.$$

Как следствие, получаем равенство нулю вектора u, а значит и левой части (8.8):

$$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m + \mu_1 g_1 + ... + \mu_{k-m} g_{k-m} = 0. \quad (8.11)$$

Снова имеем линейную комбинацию с нулевым значением, теперь уже — для базиса $\mathcal{B}_1$. Как и выше, приходим к равенству нулю коэффициентов:

$$\lambda_1 = ... = \lambda_m = \mu_1 = ... = \mu_{k-m} = 0.$$

Все доказано. □

Замечание 8.4. Из формулы Грассмана следует уже упоминавшееся в начале данного пункта свойство: размерность суммы двух подпространств не превышает суммы размерностей слагаемых. Это утверждение остается справедливым и для суммы нескольких конечномерных подпространств:

$$\dim(\sum_{i=1}^{n} W_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim(W_i). \tag{8.12}$$

В самом деле, выберем в каждом из слагаемых базис $\mathcal{B}_i$, содержащий, скажем, n_i векторов. Тогда с.в.

$$\mathcal{B} = [\,\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_s\,] \tag{8.13}$$

является порождающей для W и, следовательно, по теореме 4.2, содержит некоторый базис в W, мощность которого, т. е. размерность пространства W, мы обозначим n. Убеждаемся в справедливости неравенства

$$n \leqslant \sum_{i=1}^{s} n_i,$$

совпадающего с (8.12).

*Замечание 8.5.** Формула Грассмана (8.2) имеет разнообразные аналоги в других математических науках, а также — обобщения на случай нескольких слагаемых.

Рассмотрим сначала два *конечных* множества A_1 и A_2, содержащие d_1 и d_2 элементов соответственно. Пусть их *пересечение* $A_0 = A_1 \cap A_2$ и *объединение* $A_3 = A_1 \cup A_2$ содержат d_0 и d_3 элементов соответственно. Если сложить числа d_1 и d_2, то элементы пересечения будут посчитаны дважды. Удаляя это повторение, получаем: $d_3 = d_1 + d_2 - d_0$. Вспоминая "плохое" обозначение (с помощью палочек; см. замечание 16.4 в пособии $[A_1]$) для мощности множеств, можем записать простейший случай так называемой *формулы включений и исключений*:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

В самом общем виде формула с таким названием позволяет вычислить мощность произвольного конечного объединения $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$.

Ее вы будете изучать в курсе *дискретной математики*. Познакомиться с ней можно по любому учебнику комбинаторики или, скажем, по очень занимательной "детской" книжке: *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

В нашем основном задачнике по алгебре [4] эта формула фигурирует в качестве одного из начальных упражнений (см. задачу 103).

После знакомства с (обобщенным) комбинаторным аналогом формулы Грассмана вам наверняка захочется обобщить и самое эту формулу, т. е. вычислить размерность $\dim(\sum_{i=1}^{n} W_i)$ суммы нескольких конечномерных подпространств.

Есть еще и геометрические аналоги формулы включений и исключений. Например, для двух пересекающихся плоских фигур, A_1 и A_2, справедлива следующая формула для *площади* объединения:

$$S(A_1 \cup A_2) = S(A_1) + S(A_2) - S(A_1 \cap A_2).$$

Эта формула сохраняет силу для трехмерных *объемов* (и других геометрических *мер*) и также допускает обобщение на случай произвольного числа фигур (тел, множеств и т. п.).

§ 9. Прямые суммы и прямые дополнения

9.1. Внутренняя прямая сумма линейных подпространств. Критерий прямизны. Согласно определению 8.1, сумма

$$W = \sum_{i=1}^{s} W_i \tag{9.1}$$

линейных подпространств $W_i \leqslant V$ $(i = 1, ..., s)$ состоит из тех и только тех векторов x в линейном пространстве V, которые представляются в виде

$$x = \sum_{i=1}^{s} y_i, \tag{9.2}$$

где $y_i \in W_i$. Ниже определяется частный случай этого понятия — *прямая сумма* линейных подпространств.

Определение 9.1. Сумма (9.1) называется *внутренней прямой суммой* линейных подпространств, если для любого вектора $x \in W$

представление (9.2) определено *однозначно*, т. е. все *компоненты* (слагаемые) y_i в правой части этой формулы определены единственным образом.

Для прямой суммы используются обозначения:

$$W = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_s. \tag{9.3}$$

Замечание 9.1. В определении 9.1 уточняющий эпитет *внутренняя* перед термином *прямая сумма* не был мотивирован. А появился он в связи с тем, что сумма (9.1) *содержит свои слагаемые* в качестве линейных подпространств, в отличие от (определяемой в п. 9.4) *внешней* прямой суммы линейных *пространств*, которая *свои слагаемые не содержит* (хотя содержит их *изоморфные копии*).

И еще хотелось бы прокомментировать рискованный термин *прямизна* (в отношении суммы подпространств). В словарях русского языка это слово присутствует, однако математики его старательно избегают. Автор берет на себя определенную лингвистическую смелость, полагая, что употребление необщепринятого термина оправдывается его выразительностью.

Ниже устанавливаются два *критерия прямизны*. Первый из них справедлив безусловно, а второй — в предположении конечномерности подпространства (9.1). Для формулировки этих результатов нам понадобится следующее

Определение 9.2. 1. Два линейных подпространства W_1 и W_2 в линейном пространстве V называются *независимыми*, если их пересечение тривиально:

$$W_1 \cap W_2 = O. \tag{9.4}$$

2. Семейство $\{W_i\}_{i=1}^{s}$ линейных подпространств $W_i \leqslant V$ называется *независимым в совокупности*, если любое из них имеет тривиальное пересечение с суммой остальных, т. е. если для любого номера $j = 1, ..., s$ справедливо:

$$W_j \cap \widehat{W}_j = O, \tag{9.5}$$

где

$$\widehat{W}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} W_i \tag{9.6}$$

есть сумма всех подпространств семейства, кроме j-го.

Замечание 9.2. При $s > 2$ свойство семейства линейных подпространств быть *независимым в совокупности* сильнее, нежели свойство *попарной независимости.* Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть три попарно различных одномерных подпространства в двумерном пространстве P^2.

Предложение 9.1. *Сумма (9.1) является прямой тогда и только тогда, когда ее слагаемые независимы в совокупности.*

Доказательство. 1. Пусть сумма (9.1) является прямой. Докажем тривиальность любого пересечения (9.5). Для этого рассмотрим произвольный элемент $x \in W_j \cap \widehat{W}_j$. Для этого элемента имеем два представления, которые можно приравнять:

$$y_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} y_i;\ y_i \in W_i\ (i = 1, ..., s). \tag{9.7}$$

В левом представлении x все компоненты, кроме, может быть, j-й, равны нулю. В правом представлении, наоборот, именно j-я компонента обращается в нуль. Элемент x принадлежит сумме (9.1), в силу прямизны которой, представление для него [вида (9.2)] определено однозначно. Значит, все компоненты, как в левой, так и в правой частях (9.7), должны быть нулевыми, и, следовательно, $x = 0$.

2. Обратно, пусть подпространства W_i независимы в совокупности. Рассмотрим произвольный элемент $x \in W$ и докажем для него единственность представления вида (9.2).

Если имеются два представления для x, (9.2) и аналогичное:

$$x = \sum_{i=1}^{s} y'_i, \tag{9.2'}$$

то, приравнивая эти представления, а затем перенося в левую часть равенства j-е компоненты разложений, а остальные собирая в правой, получим:

$$y_j - y'_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (y'_i - y_i). \tag{9.8}$$

Левая часть равенства (9.8) принадлежит подпространству W_j, а правая — сумме $\widehat{W}_j$. Значит, элемент $z \in W$, являющийся общим

значением левой и правой частей (9.8), принадлежит пересечению $W_j \cap \widehat{W}_j$, которое, по предположению, должно быть нулевым. Следовательно, $y_j = y'_j$. Номер j в предыдущем рассуждении был произвольным, так что разложения (9.2) и (9.2′) идентичны, что и требовалось. □

Перейдем теперь к рассмотрению конечномерных пространств. Пока нам достаточно будет предполагать, что конечномерным является подпространство W — сумма для семейства подпространств $\{W_i\}_{i=1}^s$. Следующее предложение играет вспомогательную роль и будет использовано при выводе второго критерия прямизны суммы.

Предложение 9.2. *Пусть W является конечномерным линейным подпространством в линейном пространстве V и $\dim(W) = n$.*

1. Предположим, что базис $\mathcal{B}$ этого подпространства разбит в объединение

$$\mathcal{B} = [\,\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_s\,] \tag{9.9}$$

попарно не пересекающихся подсистем векторов, причем мощность системы $\mathcal{B}_i$ равняется n_i, где

$$\sum_{i=1}^{s} n_i = n. \tag{9.10}$$

Рассмотрим линейные подпространства

$$W_i = \langle \mathcal{B}_i \rangle \leqslant W;\ \dim(W_i) = n_i;\ i = 1, \ldots, s. \tag{9.11}$$

Тогда

$$W = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i. \tag{9.12}$$

2. Обратно, предположим, что подпространство W разбито в прямую сумму (9.12). Тогда в W существует базис вида (9.9), где системы векторов $\mathcal{B}_i$ попарно не пересекаются и каждая из них является базисом в соответствующем W_i.

Доказательство. 1. Рассмотрим некоторое разбиение (9.9) некоторого базиса в W. Ясно, что $W = \sum_{i=1}^{s} W_i$. (Действительно, всякий вектор $x \in W$ разлагается по базису $\mathcal{B}$ и это разложение можно сгруппировать в сумму $x = y_1 + \ldots + y_s$, где каждый из векторов y_i принадлежит соответствующему W_i.)

Убедимся в том, что W является прямой суммой. В силу предложения 9.1, для этого достаточно доказать, что для любого номера $j = 1, ..., s$ пересечение $W_j \cap \widehat{W_j}$ тривиально. Но это так, поскольку W_j состоит из тех и только тех векторов $x \in W$, у которых при разложении по базису $\mathcal{B}$ могут быть ненулевыми лишь координаты, отвечающие базисным векторам, входящим в $\mathcal{B}_j$, а в подпространство $\widehat{W_j}$ попадают лишь те векторы у которых все указанные координаты равны нулю.

2. Пусть теперь имеется прямая сумма конечномерных подпространств (9.12). В каждом из слагаемых W_i выберем (произвольный) базис $\mathcal{B}_i$ и затем все эти базисы объединим в с.в. (9.9). Согласно замечанию 8.4, эта с.в. является порождающей для W. Остается доказать ее линейную независимость.

Предположим, что существует линейная комбинация для с.в. $\mathcal{B}$, значение которой равно нулю. Слагаемые в линейной комбинации сгруппируем в соответствии с разбиением (9.9), а именно: сумму всех слагаемых, отвечающих векторам из $\mathcal{B}_i$, обозначим y_i. Получим равенство

$$y_1 + y_2 + ... + y_s = 0;\ y_i \in W_i\ (i = 1, ..., s). \tag{9.13}$$

По предположению сумма W является прямой, следовательно нулевой вектор может иметь представление вида (9.13) лишь со всеми нулевыми y_i.

Вектор y_i, по построению, является линейной комбинацией векторов базиса $\mathcal{B}_i$, поэтому тот факт, что $y_i = 0$, влечет обращение в нуль всех коэффициентов этой линейной комбинации.

Так обстоит дело при любом $i = 1, ..., s$. Значит, равны нулю вообще все коэфициенты исходной (имевшей нулевое значение) линейной комбинации для с.в. $\mathcal{B}$. Линейная независимость $\mathcal{B}$ доказана. □

Замечание 9.3. Базис в прямой сумме подпространств, который имеет блочную структуру (9.9), где каждая из подсистем (блоков) является базисом в сооветствующем подпространстве-слагаемом W_i, мы будем в дальнейшем называть *приспособленным* к прямой сумме (9.12) [или *согласованным* с этой суммой].

Ниже доказывается второй критерий прямизны для суммы конечномерных подпространств.

Предложение 9.3. *Предположим, что сумма (9.1) является конечномерным линейным подпространством в линейном пространст-*

ве V. Тогда прямизна этой суммы равносильна равенству

$$\dim(W) = \sum_{i=1}^{s} \dim(W_i). \tag{9.14}$$

Доказательство. 1. Пусть сумма (9.1) является прямой. По второму утверждению предложения 9.2, в W существует приспособленный к прямой сумме базис, из построения которого ясно, что его мощность равна сумме мощностей базисов в слагаемых, т. е. справедлива формула (9.14).

2. Обратно, предположим, что выполнено условие (9.14). Докажем, что сумма (9.1) является прямой. Снова выберем в каждом из слагаемых W_i некоторый базис $\mathcal{B}_i$ и составим с.в. (9.9), которая (см. замечание 8.4) является порождающей для W. Но, в силу (9.14), эта порождающая с.в. содержит ровно столько векторов, сколько должно быть в базисе. Значит, она является базисом в W (см. предложение 5.4). Более того, этот базис разбит в объединение [вида (9.9)] попарно непересекающихся подсистем (базисов в W_i). По первому утверждению предложения 9.2, сумма (9.1) является прямой. □

9.2. Прямые дополнения к линейному подпространству. Рассмотрим снова линейное пространство V над полем P и линейное подпространство $W \leqslant V$.

Определение 9.3. Линейное подпространство $W' \leqslant V$ называется *прямым дополнением* к подпространству W, если

$$W \oplus W' = V. \tag{9.15}$$

Замечание 9.4. Прокомментируем данное выше определение. Ясно, что если W' является прямым дополнением к W, то и W является прямым дополнением к W'. Таким образом, можно говорить о двух *взаимно дополнительных* подпространствах (в заданном пространстве). Взаимно дополнительными в пространстве V являются тривиальные подпространства V и O. В случае конечномерного пространства V *существование* прямого дополнения для любого подпространства W будет доказано ниже, в предложении 9.4.

Кроме тривиального случая $V \oplus O = V$, всегда существует более одного прямого дополнения к заданному подпространству. (Этот

факт можно усмотреть по ходу доказательства предложения 9.4; попытайтесь сделать это самостоятельно.)

Представьте себе также простейшую ситуацию координатной плоскости $V = \mathbb{R}^2$ (или P^2, над любым полем P): одномерными подпространствами в V являются прямые W, проходящие через начало координат (и только они). Прямым дополнением к W будет любая прямая W', отличная от W.

Предложение 9.4. *Пусть V — линейное пространство размерности n над полем P, а W — произвольное линейное подпространство (размерности k) в пространстве V. Тогда*

1) существует прямое дополнение W' для подпространства W, причем размерность любого прямого дополнения равна коразмерности данного пространства:

$$\dim(W') = \operatorname{codim}(W) = n - k; \tag{9.16}$$

более того,

2) для любого подпространства $U \leqslant V$, независимого с W, т. е. такого, что

$$W \cap U = O, \tag{9.17}$$

существует прямое дополнение к W, содержащее U.

Доказательство. 1. Выберем произвольный базис

$$\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, \dots, b_k \,] \tag{9.18}$$

в подпространстве W и продолжим (в соответствии с предложением 5.5) этот базис до базиса

$$\mathcal{D} = [\, b_1, b_2, \dots, b_k,\ c_1,\ c_2, \dots, c_{n-k} \,] \tag{9.19}$$

в пространстве V. Обозначим

$$W' = \langle \mathcal{C} \rangle$$

линейную оболочку системы дополнительных векторов

$$\mathcal{C} = [\, c_1,\ c_2, \dots, c_{n-k} \,]. \tag{9.20}$$

С.в. (9.20) является базисом подпространства W', которое, таким образом, имеет размерность, равную $n - k$. Понятие *коразмерности*

(для случая линейных подпространств в арифметических линейных пространствах) определялось в [A_1] (см. замечание 11.3) как разность между размерностью всего пространства и размерностью подпространства. Так что формула (9.16) уже установлена.

Базис (9.19) в пространстве V, по построению, разбит на две не пересекающиеся подсистемы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, являющиеся базисами в W и W' соответственно. Согласно предложению 9.2, пространство V разбивается в прямую сумму (9.15), т. е. W' является прямым дополнением к W.

2. Второе утверждение предложения доказывается небольшой модификацией доказательства первого утверждения. Если уже имеется некоторое подпространство $U \leqslant V$, независимое с W и имеющее, скажем, размерность l, то сумма $W + U$ будет прямой, и ее размерность будет равна $k + l$. Можно выбрать в этой сумме *приспособленный* базис $[\mathcal{B}, \mathcal{G}]$, где $\mathcal{G} = [\, g_1, \ldots, g_l]$ — произвольный базис в U, а затем, добавляя еще $n - (k + l)$ векторов, продолжить этот базис до базиса во всем пространстве.

(Разумеется, не исключается случай нулевого подпространства U; тогда базис $\mathcal{G}$ будет пустым.) □

Пример 9.1. Рассмотрим арифметическое линейное пространство $V = P^n$ и два подпространства в нем: $(n-1)$-мерное подпространство W_1, определяемое однородной системой из одного линейного уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, и одномерное подпространство W_2, порожденное вектором

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти подпространства, очевидно, *независимы*: вектор $\lambda\overline{a}$, пропорциональный базисному вектору в W_2, принадлежит W_1 тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$. Следовательно, сумма $W_1 + W_2$ является прямой, а поскольку ее размерность равна n, то она совпадает со всем пространством V. Значит, данные подпространства *взаимно дополнительны*. (Можете сопоставить полученный результат с примером 13.1 в [A_1].)

Пример 9.2. Рассмотрим n^2-мерное пространство квадратных матриц $V = L(n, P)$ и в нем подмножества *симметрических* и *антисимметрических* матриц:

$$L_s(n, P) = \{\, A \in L(n, P) \,:\, A^t = A \,\}; \tag{9.21}$$

$$L_a(n,P) = \{\, A \in L(n,P) \,:\, A^t = -A \,\}. \tag{9.22}$$

Проделайте простейшее упражнение на законы матричной алгебры (связанные с операцией транспонирования): докажите, что (9.21) и (9.22) являются линейными подпространствами в $L(n,P)$.

Введем дополнительное предположение: будем считать, что *поле P имеет характеристику, отличную от* 2 (см. [A_1, п. 47.1]). Это означает, что в поле P

$$2 \cdot 1 = 1 + 1 \neq 0. \tag{9.23}$$

(Выражаясь не совсем строго, можно сказать, что поле P содержит отличный от нуля элемент $2 \stackrel{\text{def}}{=\!=} 2 \cdot 1 = 1 + 1$. Как следствие аксиомы $\boxed{9}$, получим тогда, что в поле P существует элемент $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Не все поля таковы. В п. 1.7 мы как раз работали с полем $\mathbb{F}_2$, в котором — наоборот: "$2 = 0$" или, что равносильно, "$-1 = 1$".)

В предположении (9.23) можно доказать независимость подпространств (9.21) и (9.22). В самом деле, если матрица A принадлежит обоим этим подпространствам, то она удовлетворяет равенству $A = -A$, которое можно переписать в виде $A + A = O$, или, с учетом выкладки

$$A + A = 1 \cdot A + 1 \cdot A = (1 + 1) \cdot A = 2 \cdot A,$$

в равносильном виде $2 \cdot A = O$. Последнее равенство можно домножить на элемент $\frac{1}{2} \in P$ [существующий в силу предположения (9.23)] и перейти к равносильному равенству $A = O$. Следовательно, рассматриваемые подпространства имеют нулевое пересечение.

Условие (9.23) позволяет также доказать, что сумма линейных подпространств (9.21) и (9.22) совпадает со всем пространством квадратных матриц. Действительно, любую матрицу $A \in L(n,P)$ можно *симметризовать*, сопоставив ей матрицу

$$B = \frac{1}{2}(A + A^t) \in L_s(n,P), \tag{9.24}$$

и *антисимметризовать*, сопоставив матрицу

$$C = \frac{1}{2}(A - A^t) \in L_a(n,P). \tag{9.25}$$

Симметричность ($B^t = B$) матрицы B и антисимметричность ($C^t = -C$) матрицы C доказываются элементарно, с помощью законов алгебры матриц. Множитель $\frac{1}{2}$ в формулах (9.24) и (9.25) никак не отражается на факте симметричности (антисимметричности) соответствующих матриц. Он нужен для обеспечения равенства

$$A = B + C, \tag{9.26}$$

благодаря которому можно утверждать, что

$$L(n, P) = L_s(n, P) \oplus L_a(n, P). \tag{9.27}$$

Итак, установлено, что подпространства симметрических и антисимметрических матриц являются взаимно дополнительными в пространстве всех квадратных матриц.

Полезно определить базисы, приспособленные к прямой сумме (9.27). Согласно примеру 4.1, естественный базис $\mathcal{E}$ в $L(n, P)$ составляют n^2 матриц E_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$. Среди них есть n диагональных (и, следовательно, симметрических) матриц

$$E_{ii};\ i = 1, ..., n. \tag{9.28}$$

Если $i \neq j$, то матрица E_{ij} не является ни симметрической, ни антисимметрической. Предположим, что $i < j$ и подвергнем каждую из C_n^2 матриц такого вида симметризации (9.24) и антисимметризации (9.25). Получим C_n^2 симметрических матриц

$$F_{ij} = \frac{1}{2}(E_{ij} + E_{ji});\ 1 \leqslant i < j \leqslant n \tag{9.29}$$

и столько же антисимметрических матриц

$$G_{ij} = \frac{1}{2}(E_{ij} - E_{ji});\ 1 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{9.30}$$

Автор надеется, что для читателей будет несложным упражнением доказать, что матрицы видов (9.28) и (9.29) составляют базис $\mathcal{E}_s$ (из $n + C_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ элементов) в подпространстве $L_s(n, P)$, а матрицы вида (9.30) составляют базис $\mathcal{E}_a$ (из $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ элементов) в подпространстве $L_a(n, P)$. Так что подпространства-слагаемые в (9.27) имеют размерности:

$$\dim(L_s(n, P)) = \frac{n(n+1)}{2};\ \dim(L_a(n, P)) = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{9.31}$$

Объединение базисов $\mathcal{E}_s$ и $\mathcal{E}_a$ будет приспособленным базисом в прямой сумме (9.27).

Замечание 9.5. В дальнейшем нам понадобится, как принято говорить, *относительная* версия определения 9.3. Рассматривается линейное подпространство W_1 в линейном подпространстве W в линейном пространстве V и определяется прямое дополнение к подпространству W_1 в подпространстве W (как такое подпространство $W_2 \leqslant W$, что $W_1 \oplus W_2 = W$).

Ничего принципиально нового в понятии *относительного прямого дополнения* нет, ибо подпространство W в линейном пространстве V само является линейным пространством. Однако, именно в такой версии нам придется многократно использовать понятие прямого дополнения в самой сложной (и важной), третьей главе настоящего пособия.

9.3. Полные прямые суммы. Операторы вложения и проектирования. В данном пункте будет описана конструкция, обобщающая (на случай произвольного количества слагаемых) разбиение (9.15) линейного пространства в сумму двух взаимно дополнительных подпространств.

Определение 9.4. Сумма семейства $\{W_i\}_{i=1}^s$ линейных подпространств $W_i \leqslant V$ называется *полной*, если она совпадает со всем пространством V :

$$V = \sum_{i=1}^{s} W_i. \tag{9.32}$$

Особенно важны *полные прямые* суммы:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i. \tag{9.33}$$

Частным случаем суммы (9.33) является разбиение данного пространства V в прямую сумму двух взаимно дополнительных подпространств:

$$V = W_1 \oplus W_2. \tag{9.34}$$

Со всякой полной прямой суммой вида (9.33) [и, в частности, с суммой (9.34)] связаны семейства линейных отображений (операторов, гомоморфизмов) *вложения* и *проектирования*. (См. определения и словарь морфизмов в п. 1.6.)

Вообще, для любого линейного подпространства $W \leqslant V$ определен линейный оператор

$$\alpha_{W,V} : W \longrightarrow V;\ \alpha_{W,V}(x) = x;\ x \in W, \tag{9.35}$$

сопоставляющий вектору x из подпространства W тот же самый вектор x, но рассматриваемый как элемент пространства V. Этот оператор является, очевидно, *мономорфизмом*.

Беря в качестве W каждое из слагаемых W_i в полной прямой сумме (9.33), мы получим семейство *операторов вложения*

$$\alpha_i = \alpha_{W_i,V} : W_i \longrightarrow V;\ \alpha_i(y_i) = y_i;\ y_i \in W_i\ (i = 1, ..., s). \tag{9.36}$$

Имеются также *встречные* отображения — *операторы проектирования*

$$\pi_i : V \longrightarrow W_i;\ \pi_i(x) = y_i;\ x \in V\ (i = 1, ..., s), \tag{9.37}$$

сопоставляющие произвольному вектору x из прямой суммы i-ю компоненту y_i в его [однозначно определенном; см. формулу (9.2)] разложении $x = \sum_{i=1}^{s} y_i$. (Докажите линейность и *эпиморфность* операторов π_i.)

Каждый оператор π_i является *левым обратным* для соответствующего оператора α_i, т. е.

$$\pi_i \circ \alpha_i = \varepsilon_{W_i};\ i = 1, ..., s. \tag{9.38}$$

Другими словами, вектор из подпространства-слагаемого можно вложить в прямую сумму, а затем — спроектировать на то же самое подпространство; при этом мы вернемся к исходному вектору.

(Если хотите вспомнить терминологию, связанную с *левыми*, *правыми* и *двусторонними* обратными к линейным отображениям, то просмотрите еще раз § 15 в пособии [A_1].)

Правым обратным для α_i оператор π_i не является (если, конечно, число слагаемых $s > 1$). Композиция

$$\rho_i = \alpha_i \circ \pi_i : V \longrightarrow V;\ \rho_i(x) = y_i;\ x \in V \tag{9.39}$$

является линейным *эндоморфизмом* пространства V, сопоставляющим произвольному вектору x его i-ю компоненту, но рассматриваемую [в отличие от формулы (9.37)] как элемент пространства V.

Эндоморфизмам ρ_i присваивается имя *проекторы*. В отличие от операторов проектирования π_i, проекторы не являются эпиморфизмами.

Отметим еще некоторые свойства операторов α_i, π_i и ρ_i.

Если $i \neq j$, то композиция

$$\pi_i \circ \alpha_j = o, \tag{9.40}$$

т. е. если вектор из W_j вложить в V, а затем спроектировать на W_i $(i \neq j)$, то получится нулевой результат.

Вспоминая (см. [A_1, п. 15.1]) понятие *суммы линейных отображений* (она определяется *поточечно*; подробнее см. ниже, в п. 12.1), мы можем легко понять, что сумма всех проекторов (9.39) является тождественным эндоморфизмом пространства V:

$$\sum_{i=1}^{s} \rho_i = \varepsilon_V. \tag{9.41}$$

В самом деле, сложив все проекции (компоненты) вектора x, мы снова получим этот вектор.

Далее, каждый из проекторов совпадает со своим квадратом:

$$\rho_i^2 = \rho_i;\ \ i = 1, ..., s. \tag{9.42}$$

В самом деле, на подпространстве W_i проектор ρ_i действует тождественно. Применив этот проектор к любому вектору $x \in V$ дважды, мы при первом применении попадаем в подпространство W_i и, следовательно, второе применение уже ничего не меняет.

Композиция двух проекторов с разными номерами равна нулевому эндоморфизму:

$$\rho_i \circ \rho_j = o;\ \ i, j = 1, ..., s;\ \ i \neq j. \tag{9.43}$$

Это доказывается примерно так же, как свойство (9.40).

Пример 9.3. В случае разбиения $V = W_1 \oplus W_2$ линейного пространства V в сумму двух взаимно дополнительных подпространств, имеются два оператора вложения и два проектора. Скажем, в условиях примера 9.2, проекторы $\rho_1, \rho_2 : L(n, P) \to L(n, P)$ являются не чем иным, как операторами симметризации и антисимметризации:

$$\rho_1(A) = \frac{1}{2}(A + A^t);\ \ \rho_2(A) = \frac{1}{2}(A - A^t);\ \ A \in L(n, P).$$

Проведите самостоятельно в этом примере *непосредственную* проверку соотношений:

$$\rho_1 + \rho_2 = \varepsilon;\ \rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1 = o;\ \rho_1^2 = \rho_1;\ \rho_2^2 = \rho_2.$$

9.4. Внешняя прямая сумма линейных пространств. В данном пункте мы работаем не с подпространствами в каком-то фиксированном линейном пространстве, а с семейством $\{V_i\}_{i=1}^s$ линейных пространств (над одним и тем же полем P).

Из ознакомительного курса "Введение в математику" вам должно быть известно понятие *декартова произведения* для (двух и нескольких) множеств. Декартово произведение состоит из *упорядоченных наборов* элементов, взятых по одному из каждого из перемножаемых множеств. (Такие наборы принято записывать по типу векторов-строк, но — с использованием запятых как разделителей.)

Определение 9.5. Декартово произведение

$$V = \prod_{i=1}^{s} V_i = V_1 \times V_2 \times ... \times V_s = \\ = \{\, x = (x_1, x_2, ..., x_s) \,:\, x_i \in V_i \ (i = 1, ..., s) \,\} \quad (9.44)$$

линейных пространств, входящих в заданное семейство, наделенное *покомпонентными* алгебраическими действиями сложения и умножения на скаляр:

$$(x_1, x_2, ..., x_s) + (y_1, y_2, ..., y_s) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_s + y_s); \quad (9.45)$$

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_s) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_s), \quad (9.46)$$

где $x_i, y_i \in V_i$ $(i = 1, ..., s)$; $\lambda \in P$, называется *внешней прямой суммой* данных линейных пространств и обозначается

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_s. \quad (9.47)$$

Совершенно стандартной является проверка выполнения в V аксиом (V_1) — (V_8), после осуществления которой мы получаем право

говорить о множестве (9.47) как о *линейном пространстве* (над тем же полем P).

Сразу заметим, что пространства-слагаемые V_i не содержатся в своей прямой сумме (9.47), в связи с чем эта последняя и называется *внешней*.

Замечание 9.6 (для служебного пользования). В данной теме происходит своеобразное наслоение *мультипликативной* и *аддитивной* терминологии (и соответствующих обозначений).

Мультипликативная терминология происходит от использования декартова *произведения* (линейных пространств, рассматриваемых как множества). И обозначения при этом [в формуле (9.44)] используются мультипликативные.

Однако, как данные множества V_i, так и их произведение V несут аддитивную структуру (наделены алгебраическим действием *сложения*). В связи с этим к ним применяется аддитивная терминология: V называется не "прямым произведением", а *прямой суммой*, что закрепляется и в обозначениях [см. формулу (9.47)].

Интересная коллизия (непоследовательность в обозначениях) возникает при рассмотрении прямой суммы нескольких одинаковых слагаемых. Сумма

$$\underbrace{V \oplus V \oplus V \oplus \ldots \oplus V}_{s \text{ раз}}$$

обозначается мультипликативно, как степень V^s, и, соответственно, называется *прямой степенью* линейного пространства V.

С этим явлением мы знакомы с первых страниц данного курса, поскольку с самого начала работаем с арифметическими линейными пространствами типа $\mathbb{R}^n$, которые, как теперь очевидно, являются, по сути, прямыми степенями пространства (поля) $\mathbb{R}$. Точнее было бы говорить об их *изоморфизме* с прямыми степенями; отличие здесь — сугубо "косметическое", оно выражается в стиле записи (в столбик или в строчку).

Далее будет установлена связь введенного в данном пункте понятия внешней прямой суммы линейных пространств с рассматривавшимся в п. 9.2 понятием внутренней прямой суммы линейных подпространств в некотором линейном пространстве.

Как уже отмечалось, пространства V_i не содержатся в пространстве V. Имеются однако естественные *линейные мономорфизмы*, изоморфно вкладывающие слагаемые в их (внешнюю) прямую сумму.

Эти *операторы вложения* действуют и обозначаются несколько иначе, нежели аналогичные операторы для внутренней прямой суммы (см. п. 9.3). Определяются они формулами

$$\beta_i : V_i \longrightarrow V;\ \beta_i(x_i) = (0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0); i = 1, ..., s, \tag{9.48}$$

где элемент $x_i \in V_i$ ставится на *свое место* (с номером i); все остальные элементы в наборе являются нулевыми векторами (в соответствующих пространствах).

Линейность и инъективность отображений (9.48) совершенно очевидны, так что применение к этим отображениям термина *линейный мономорфизм* является обоснованным. Всякий мономорфизм является *изоморфизмом на свой образ*. Для любого $i = 1, ..., s$ образом мономорфизма (9.47) является подмножество

$$W_i = \beta_i(V_i) = \{\ (0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0)\ :\ x_i \in V_i\ \} \tag{9.49}$$

в пространстве V, являющееся линейным подпространством в V, по построению изоморфным пространству V_i.

Предложение 9.5. *Внешняя прямая сумма (9.47) линейных пространств $\{V_i\}_{i=1}^s$ является внутренней прямой суммой*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i \tag{9.50}$$

линейных подпространств $W_i \leqslant V$, которые заданы формулами (9.49) и изоморфны соответствующим пространствам V_i.

Доказательство. Должны быть очевидны *независимость в совокупности* подпространств (9.49) и тот факт, что эти подпространства *порождают* V. (Если не очевидно, то еще раз просмотрите доказательство предложения 9.2. Здесь рассуждение совершенно аналогично.)

Значит, по предложению 9.1, пространство V является (внутренней) прямой суммой подпространств (9.49). □

§ 10. Алгоритмы построения базисов в линейных подпространствах конечномерных линейных пространств

10.1. Два способа задания линейных подпространств и алгоритмы построения базисов в них. Как только дело доходит до алгоритмов практического нахождения базисов в подпространствах некоторого к.л.п., мы возвращаемся к ситуации, когда требуется "оцифровка" (*арифметизация*) данного пространства с помощью фиксации в нем некоторого исходного базиса (см. выше п. 7.3). В данном пункте мы будем считать, что арифметизация уже проведена, т. е. фактически будем работать в пространстве $V = P^n$.

Кроме того, надо помнить о двух основных способах задания линейных подпространств в арифметическом линейном пространстве (см. пример 1.5, а также § 13 в $[A_1]$).

Здесь (с целью систематизации) мы дадим краткий пересказ трех уже изученных (в указанном параграфе первого пособия) алгоритмов, связанных с построением базисов в подпространствах, при различных способах их задания. В следующих пунктах мы (в аналогичном ключе) изложим еще три алгоритма (продолжение базисов, построение базисов в сумме и пересечении). Числовым примерам будет посвящен отдельный параграф.

Еще раз подчеркнем, что наши описания алгоритмов будут сугубо схематическими, все подробности разбирались ранее, а доведение излагаемых схем до "настоящих" алгоритмов — предмет не нашего курса.

А л г о р и т м 10. 1.
Построение базиса в линейном подпространстве, заданном первым способом: $W = L^0_A \leqslant P^n$

Рассмотрим $(m \times n)$-матрицу A с элементами из поля P и линейное подпространство

$$W = L^0_A = \{\, \overline{x} \in P^n \,:\, A \cdot \overline{x} = \overline{0} \,\}, \tag{10.1}$$

состоящее из всех решений однородной с.л.у.

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\overline{x}} = \underset{m\times 1}{\overline{0}}\,. \tag{10.2}$$

1. Приведем, с помощью элементарных преобразований *над строками*, данную матрицу A к *виду Жордана — Гаусса* $\underset{r\times n}{A'}$, где число строк $r = \operatorname{rank}(A)$. Тем самым мы получим новое задание W, опять же первым способом:

$$W = L^0_{A'}\,, \tag{10.1$'$}$$

но экономное (не содержащее лишних уравнений). Другими словами, от с.л.у. (10.2) мы переходим к равносильной с.л.у.

$$\underset{r\times n}{A'}\cdot\underset{n\times 1}{\overline{x}} = \underset{r\times 1}{\overline{0}}\,. \tag{10.2$'$}$$

2. Решим с.л.у. (10.2$'$) (см. [A_1, п. 13.2]) и сформируем *фундаментальную матрицу* F, размера $n \times d$, где $d = n - r$, затем перейдем ко второму способу задания данного подпространства:

$$W = R_F, \tag{10.3}$$

в виде линейной оболочки векторов-столбцов матрицы F. Эти столбцы будут составлять базис W. Полученное представление данного подпространства вторым способом окажется, по построению, экономным (не будет лишних порождающих столбцов).

3. Размерность данного подпространства определяется формулой:

$$\dim(W) = d = n - r = n - \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(F). \tag{10.4}$$

А л г о р и т м 10. 2.
Построение базиса в линейном подпространстве, заданном вторым способом: $W = R_G \leqslant P^n$

Рассмотрим $(n\times k)$-матрицу G с элементами из поля P и линейное подпространство, являющееся линейной оболочкой столбцов матрицы G :

$$W = R_G = \langle \overline{g_1},\, \overline{g_2},\, \ldots,\, \overline{g_k}\rangle \leqslant P^n. \tag{10.5}$$

1. Приведем матрицу G к *ступенчатому виду* (с помощью элементарных преобразований *над строками*, хотя можно допустить и *перестановки столбцов*, если позаботиться о *метках* для них, сохраняющих память об изначальной нумерации). Определим *базисные*

столбцы и соберем их (в исходном виде) в подматрицу B, размера $n \times r$, где $r = \mathrm{rank}(G)$.

2. Данное подпространство (10.5) снова окажется заданным вторым способом:

$$W = R_B, \tag{10.6}$$

но уже экономно, без лишних порождающих столбцов; столбцы B будут составлять базис W.

3. Размерность данного подпространства определяется формулой:

$$\dim(W) = r = \mathrm{rank}(G) = \mathrm{rank}(B). \tag{10.7}$$

А л г о р и т м 10. 3.
Переход от задания линейного подпространства вторым способом ($W = R_G$)
к его заданию первым способом ($W = L_A^0$)

Рассмотрим линейное подпространство W размерности r, заданное вторым способом, посредством описания (10.5).

С помощью алгоритма 10.2 можно перейти к экономному заданию (10.6). Считаем далее, что это уже сделано, т. е. $W = R_B$, где $(n \times r)$-матрица B имеет полный ранг по столбцам:

$$r = \mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(G).$$

(Данный предварительный этап не является обязательным: слегка модифицированный алгоритм работает с исходной матрицей G, без удаления лишних порождающих векторов.)

1. Будем искать построчно $((n-r) \times n)$-матрицу A, такую, чтобы она задавала первым способом подпространство W. Каждая строка $\overline{a}^t$ неизвестной матрицы A должна удовлетворять однородной с.л.у.

$$\underset{1\times n}{\overline{a}^t} \cdot \underset{n\times r}{B} = \underset{1\times r}{\overline{0}^t}, \tag{10.8}$$

т. е. все произведения $\overline{a}^t$ на базисные векторы $\overline{b_j}$ $(j = 1, ..., r)$ должны быть нулевыми. Причем требуется найти ровно $n - r$ линейно независимых строк, удовлетворяющих (10.8). Тогда полученная

матрица A, размера $m \times n$, где $m = n - r$, будет определять *нульпространство* (ядро) L_A^0, которое, во-первых, содержит W, а, во-вторых, имеет такую же размерность: $n - (n - r) = r$. Тем самым мы добьемся равенства $W = L_A^0$.

2. Транспонируем обе части уравнения (10.8), переходя к привычной записи с.л.у., с расположением неизвестных в столбец:

$$\underset{r\times n}{B^t} \cdot \underset{n\times 1}{\overline{a}} = \underset{r\times 1}{\overline{0}}, \tag{10.8^t}$$

где

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

— "переделанная в столбец" неизвестная строка матрицы A.

3. Решая с.л.у. (10.8^t), определяем *фундаментальную матрицу* F, размера $n \times (n - r)$. Эта матрица будет иметь полный ранг по столбцам; искомая матрица A, которая должна иметь полный ранг по строкам, получается из F транспонированием:

$$A = F^t. \tag{10.9}$$

4. Необязательный, но полезный этап: проведем контроль правильности вычислений с помощью проверки выполнения матричного равенства

$$\underset{(n-r)\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{G} = \underset{(n-r)\times k}{O},$$

где можно было вторым множителем взять матрицу B, а можно — и исходную матрицу G.

Замечание 10.1. Последний алгоритм заметно сложнее двух предыдущих. Но он очень важен для дальнейшего и, в частности, будет играть ключевую роль в описании алгоритма 10.6. В связи с этим вам рекомендуется вернуться к более детальному изложению данного вопроса в п. 13.4 пособия [A_1].

Запомните, что *размерность* линейного подпространства есть мощность (любого) базиса в этом подпространстве и, следовательно, равна количеству столбцов в матрице, экономно задающей данное подпространство вторым способом.

А *коразмерность* линейного подпространства равняется количеству линейных однородных уравнений в экономном задании этого подпространства первым способом.

Оговорим особые (крайние) случаи: $W = O$ и $W = V$.

Нулевое подпространство имеет пустой базис; можно (условно) считать, что вторым способом оно задается с помощью *пустой матрицы* (размера $n \times 0$). [Для программистов пустые матрицы — отнюдь не экзотика, но суровая необходимость!]

Первым способом подпространство O можно (причем — экономно) задать с помощью однородной с.л.у.

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0,$$

имеющей стандартную запись вида (10.2), с единичной матрицей E_n в качестве матрицы A.

Наибольшее из подпространств $W = V = P^n$ может быть задано вторым способом (причем — экономно) как линейная оболочка столбцов единичной матрицы E_n.

Считается (условно), что экономное задание наибольшего подпространства первым способом осуществляется с помощью *пустой системы уравнений.* (Можно, конечно, задать это подпространство и непустой однородной с.л.у., например, одним уравнением

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0,$$

но это не будет экономным заданием.)

10.2. Алгоритм продолжения базиса. Переходим к описанию новых (не разбиравшихся в первом семестре) алгоритмов. Четвертый алгоритм будет решать задачу *продолжения базиса* в некотором подпространстве $W_1 \leqslant V$ до базиса в некотором другом, более широком подпространстве W_2 ($W_1 \leqslant W_2 \leqslant V$); см. по этому поводу п. 5.4 выше. Добавочные векторы, дополняющие базис в W_1 до базиса в W_2, составляют базис в некотором *прямом дополнении* (см. п. 9.2 и, в частности, замечание 9.5) к меньшему подпространству в большем.

А л г о р и т м 10. 4.
Продолжение базиса в линейном подпространстве $W_1 \leqslant V$ до базиса в более широком подпространстве $W_2 \leqslant V$.

Построение базиса в некотором прямом дополнении к подпространству W_1 в подпространстве W_2

Рассмотрим два вложенных подпространства

$$W_1 \leqslant W_2 \leqslant V = P^n, \tag{10.10}$$

каждое из которых задано вторым способом:

$$W_1 = R_{B_1};\ W_2 = R_{B_2}, \tag{10.11}$$

причем матрицы B_1 и B_2 имеют полные ранги по столбцам и размеры $n \times r_1$ и $n \times r_2$ соответственно, где $r_1 = \dim(W_1)$ и $r_2 = \dim(W_2)$, т. е. описания (10.11) являются экономными. (Впрочем, данный алгоритм, как и предыдущий, с небольшими модификациями, будет работать и в случае наличия в данных матрицах лишних столбцов.) Будем стремиться изменить матрицу B_2 и перейти к другому заданию подпространства W_2:

$$W_2 = R_{B_2'}, \tag{10.12}$$

такому, в котором $(n \times r_2)$-матрица B_2' снова имеет полный ранг по столбцам, но, кроме того, содержит B_1 в качестве (начальной слева) подматрицы. Тогда столбцы B_2' будут составлять искомый базис в W_2, продолжающий базис в W_1, образованный столбцами B_1, а добавочные столбцы $\overline{c_1}$, $\overline{c_2}$, ..., $\overline{c_p}$ (где $p = r_2 - r_1$), дополняющие базис в W_1 до базиса в W_2, составят базис некоторого прямого дополнения U к подпространству W_1 в подпространстве W_2. Матрица C, размера $n \times p$, составленная из добавочных столбцов, будет определять (вторым способом) подпространство U.

Опишем ход работы алгоритма более детально.

1. Составляем матрицу-конкатенацию

$$\underset{n\times(r_1+r_2)}{M} = \left(\begin{array}{c|c} \underset{n\times r_1}{B_1} & \underset{n\times r_2}{B_2} \end{array}\right) \tag{10.13}$$

столбцы которой образуют (избыточную) порождающую с.в. для W_2. Найдем подсистему в этой с.в., являющуюся базисом в W_2 и содержащую все столбцы матрицы B_1.

2. С этой целью приводим матрицу (10.13), с помощью элементарных преобразований *над строками*, к *ступенчатому* виду M'.

[Как и в алгоритме 10.2, здесь не возбраняются (сопровождаемые метками) *перестановки столбцов*, внутри каждой из *зон* по отдельности; ни в коем случае нельзя "заступать" за вертикальную черту, разделяющую зоны. Хотя, скорее всего, какие-либо перестановки столбцов могут потребоваться лишь при работе с неподготовленными матрицами, содержащими лишние столбцы.]

В ступенчатом виде, в первой зоне (на месте блока B_1) ступеньки будут идти *подряд* (в количестве r_1); во второй зоне образуется $p = r_2 - r_1$ ступенек (идущих уже не обязательно подряд).

3. Векторы, проходящие через ступеньки M', собираем (в их исходном виде, как в матрице M) в новую матрицу

$$\underset{n\times r_2}{B_2'} = \left(\begin{array}{c|c} \underset{n\times r_1}{B_1} & \underset{n\times p}{C} \end{array}\right), \tag{10.14}$$

в которой уже содержится подматрица B_1 и фигурируют *добавочные* векторы-столбцы матрицы C, дополняющие базис в W_1, заключенный в матрицу B_1, до базиса в W_2.

4. Столбцы матрицы C составляют базис подпространства

$$U = R_C = \langle \overline{c_1}, \overline{c_2}, \ldots, \overline{c_p} \rangle \tag{10.15}$$

в пространстве W_2, являющегося прямым дополнением к W_1, т. е. имеет место равенство

$$W_2 = W_1 \oplus U. \tag{10.16}$$

Замечание 10.2. Важным частным случаем применения алгоритма 10.4 является случай, когда бóльшее подпространство W_2 совпадает со всем пространством V. В такой ситуации, в качестве базиса во втором подпространстве, естественно выбрать *естественный* базис, элементы которого составляют единичную матрицу: $B_2 = E_n$; дополнительные векторы будут набираться из числа единичных векторов $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$.

10.3. Алгоритмы построения базисов в сумме и пересечении линейных подпространств. Рассмотрим два (произвольных) линейных подпространства, W_1 и W_2, в линейном пространстве $V = P^n$ и, вместе с ними — их пересечение $W_0 = W_1 \cap W_2$ и сумму $W_3 = W_1 + W_2$ (см. диаграмму 8.1). Сохраним обозначения пункта 8.2 для размерностей рассматриваемых подпространств: $d_i = \dim(W_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Переходим к описанию пятого алгоритма, обеспечивающего построение базиса в сумме двух линейных подпространств (определение суммы см. в п. 8.1).

А л г о р и т м 10. 5.
Построение базиса в сумме $W_3 = W_1 + W_2$
двух линейных подпространств $W_1, W_2 \leqslant V$

Линейные подпространства W_1 и W_2 должны быть заданы вторым способом, причем желательно (но не обязательно) экономное задание (10.11), с теми же предположениями относительно матриц B_1 и B_2, которые были перечислены после указанного описания. (Если одно или оба подпространства заданы первым способом, то следует предварительно применить алгоритм 10.1.) Матрицы B_1 и B_2 содержат базисы подпространств W_1 и W_2. Размерности этих подпространств известны:

$$d_i = r_i = \operatorname{rank}(B_i);\ i = 1, 2.$$

1. Так же, как и в предыдущем алгоритме, составляем матрицу-конкатенацию M [см. (10.13)], столбцы которой образуют (возможно, избыточную) порождающую с.в. для суммы W_3.

2. Приводим (с помощью элементарных преобразований над строками) матрицу M к *ступенчатому* виду M'. (Перестановки столбцов снова допустимы — внутри каждой из двух зон, при условии использования меток.) В первой зоне r_1 ступенек будут идти подряд. Подсчитаем количество ступенек p во второй зоне. Размерность суммы W_3 данных подпространств найдется по формуле

$$d_3 = \dim(W_3) = \operatorname{rank}(B_1|B_2) = r_1 + p. \tag{10.17}$$

3. Выберем из матрицы B_2 добавочные векторы (образы которых в степенчатом виде M' проходят через ступеньки) и составим из них матрицу

$$\underset{n\times p}{C} = (\overline{c_1}\ |\overline{c_2}\ |\dots\ |\overline{c_p})\,. \tag{10.18}$$

Матрица B_3, содержащая базис W_3, определяется как конкатенация

$$\underset{n\times d_3}{B_3} = \left(\begin{array}{c|c} \underset{n\times d_1}{B_1} & \underset{n\times p}{C} \end{array}\right). \tag{10.19}$$

Этот базис можно охарактеризовать, как базис в W_3, *продолжающий* заданный базис в W_1. Формула

$$W_3 = R_{B_3} \tag{10.20}$$

представляет собой экономное задание вторым способом для суммы $W_3 = W_1 + W_2$.

4. Побочным результатом работы данного алгоритма оказывается значение размерности d_0 для пересечения $W_0 = W_1 \cap W_2$ данных подпространств. Оно находится с помощью формулы Грассмана (8.2):

$$d_0 = d_1 + d_2 - d_3. \tag{10.21}$$

Замечание 10.3. В алгоритме 10.5 подпространства W_1 и W_2 равноправны и конкатенацию вида (10.13) можно записывать, начиная с матрицы B_2. Тогда, в результате работы алгоритма, будет получен базис в W_3, продолжающий заданный базис в W_2.

Переходим к заключительному алгоритму в данной серии, обеспечивающему построение базиса в пересечении двух линейных подпространств.

А л г о р и т м 10. 6.
Построение базиса в пересечении $W_0 = W_1 \cap W_2$
двух линейных подпространств $W_1, W_2 \leqslant V$

Для того чтобы можно было применить описываемый ниже алгоритм, линейные подпространства W_1 и W_2 должны быть заданы *первым способом*. Желательно (но не обязательно) экономное задание:

$$W_1 = L^0_{A_1};\ W_2 = L^0_{A_2}, \tag{10.22}$$

где матрицы A_1 и A_2 имеют полные ранги по строкам и размеры $r_1 \times n$ и $r_2 \times n$ соответственно.

(Если одно или оба данных подпространства заданы вторым способом, то следует предварительно применить алгоритм 10.3.)

Вектор $x \in V$ принадлежит подпространству W_i $(i = 1, 2)$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет однородной с.л.у.

$$\underset{r_i \times n}{A_i} \cdot \underset{n \times 1}{\overline{x}} = \underset{r_i \times 1}{\overline{0}};\ i = 1, 2. \tag{10.23}$$

Он будет принадлежать пересечению W_0 тогда и только тогда, когда будет удовлетворять *обеим* системам (10.23), или, что равносильно, — одной (объединенной) с.л.у.

$$\underset{(r_1+r_2)\times n}{\widetilde{A}_0} \cdot \underset{n\times 1}{\overline{x}} = \underset{(r_1+r_2)\times 1}{\overline{0}}, \tag{10.24}$$

где матрица $\widetilde{A}_0$ определяется как *стек* (вертикальная конкатенация)

$$\widetilde{A}_0 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right). \tag{10.25}$$

Теперь все готово к описанию хода работы алгоритма.

1. Составляем матрицу (10.25). Подпространство-пересечение W_0 можно задать первым способом:

$$W_0 = L^0_{\widetilde{A}_0}, \tag{10.26}$$

т. е. как подмножество решений однородной с.л.у. (10.24).

Описание (10.26), вообще говоря, не является экономным, но размерность пересечения d_0 уже можно вычислить:

$$d_0 = n - r_0, \tag{10.27}$$

где $r_0 = \operatorname{rank}(\widetilde{A}_0)$.

2. Применяя к подпространству (10.26) алгоритм 10.1, мы, прежде всего, получаем экономное задание этого подпространства

$$W_0 = L^0_{A_0}, \tag{10.26$'$}$$

где $(r_0 \times n)$-матрица A_0 является видом Жордана — Гаусса матрицы $\widetilde{A}_0$ и имеет полный ранг по строкам.

3. Решая с.л.у.

$$\underset{r_0\times n}{A_0} \cdot \underset{n\times 1}{\overline{x}} = \underset{r_0\times 1}{\overline{0}}, \tag{10.28}$$

находим фундаментальную матрицу F_0, размера $n \times (n - r_0)$, содержащую базис в пересечении W_0. (С целью сохранения общего стиля обозначений в описаниях данного и предыдущего алгоритмов можно переобозначить: $F_0 = B_0$.) Получаем задание подпространства W_0 вторым способом:

$$W_0 = R_{B_0}. \tag{10.29}$$

4. В качестве побочного результата работы алгоритма получается (по формуле Грассмана) значение размерности d_3 для суммы W_3 данных подпространств:

$$d_3 = d_1 + d_2 - d_0. \tag{10.30}$$

Замечание 10.4. Опишем особые ситуции, которые могут возникнуть по ходу работы алгоритмов 10.1 — 10.6 и повлечь то, что можно назвать *досрочным выходом из алгоритма.*

1. В работе алгоритма 10.1 особым можно считать случай, когда матрица A, определяющая (первым способом) линейное подпространство $W = L_A^0 \leqslant V = P^n$, имеет максимально возможный ранг: $\operatorname{rank}(A) = n$. Тогда подпространство W является нулевым, искомый базис — пустым.

2. Аналогично, в работе алгоритма 10.2 особым будет случай, когда максимальный ранг (равный n) имеет матрица G, задающая (вторым способом) подпространство $W = R_G \leqslant V = P^n$. В этом случае подпространство W совпадает со всем пространством V, и алгоритм выдаст какой-то базис в P^n. Но можно этого не дожидаться и взять естественный базис $\mathcal{E}_n$.

3. О крайностях, возможных в работе алгоритма 10.3, мы уже говорили в замечании 10.1.

4. В работе алгоритма 10.4 может проявиться несколько иная особенность. Пусть вложенные подпространства W_1 и W_2 ($W_1 \leqslant W_2$) оба заданы вторым способом (не обязательно экономно): $W_i = R_{G_i}$ ($i = 1, 2$). По предположению, $\operatorname{rank}(G_1) \leqslant \operatorname{rank}(G_2) = \operatorname{rank}(G_1|G_2)$.

В ходе работы алгоритма может встретиться ситуация, когда $\operatorname{rank}(G_1) = \operatorname{rank}(G_1|G_2)$. Это будет свидетельствовать о совпадении подпространств: $W_1 = W_2$; добавочные векторы в этом случае отсутствуют; прямое дополнение к W_1 в W_2 тривиально: $W_2 = W_1 \oplus O$.

На самом деле ситуация еще сложнее (и интереснее). По "внешнему виду" матриц G_1, G_2 никак не усматривается взаимное расположение соответствующих подпространств W_1, W_2 и, в частности, наличие (или отсутствие) включения (или даже равенства) между ними. На том, как "разъяснить" этот вопрос, мы остановимся чуть ниже, а пока подумаем, что дает алгоритм 10.4 без дополнительного предположения о наличии включения $W_1 \leqslant W_2$. Ответ: в такой ситуации алгоритм 10.4 сводится к алгоритму 10.5 и выдает базис в прямом дополнении к W_1 в сумме $W_3 = W_1 + W_2$. (Наличие включения $W_1 \leqslant W_2$ влечет равенство $W_3 = W_2$; см. замечания 8.1 и 8.2.)

5. Обратимся теперь к алгоритмам 10.5 и 10.6. Условия досрочного выхода из этих алгоритмов усматриваются из сравнения четырех чисел $d_i = \dim(W_i)$; $i = 0, 1, 2, 3$. (Благодаря формуле Грассмана, достаточно знать какие-либо три из этих чисел, четвертое по ним однозначно определяется. Имеются также очевидные неравенства между размерностями d_i, вытекающие из включений, показанных на диаграмме 8.2.) Искомые базисы $\mathcal{B}_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) или, что равносильно, содержащие эти базисы матрицы B_i иногда можно определить без вычислений.

5.1. Если $\boxed{d_0 = 0}$, то пересечение W_0 тривиально и базис $\mathcal{B}_0$ пуст (как и соответствующая матрица B_0); сумма W_3 является прямой; базис $\mathcal{B}_3$ находится простым объединением базисов $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$; соответствующая матрица находится как конкатенация $B_3 = (B_1|B_2)$.

5.2. Если $\boxed{d_3 = n}$, то сумма является полной: $W_3 = V$; алгоритм может выдать какой-то базис в $V = P^n$, но можно взять "всегда готовый" естественный базис $\mathcal{B}_3 = \mathcal{E}_n$.

5.3. Необходимым и достаточным условием наличия включения $W_1 \leqslant W_2$ является равенство $W_3 = W_2$, которое, в свою очередь, равносильно (по свойствам размерности; см. предложение 5.6) равенству $\boxed{d_3 = d_2}$. Еще раз обращаясь к диаграмме 8.2 (или к формуле Грассмана), замечаем, что равносильным вариантом последнего равенства является $\boxed{d_0 = d_1}$. Любая из обведенных в боксы формул может послужить сигналом для остановки вычислений. Искомые базисы в сумме и пересечении могут быть выбраны совпадающими с базисами в бóльшем и меньшем подпространстве соответственно: $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_2$; $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1$.

5.4. Разумеется, подпространства W_1 и W_2 могут поменяться ролями, и досрочный выход произойдет по сигналам $\boxed{d_3 = d_1}$ или $\boxed{d_0 = d_2}$. Возможна и совсем тривиальная ситуация $\boxed{d_3 = d_0}$, когда совпадают все четыре рассматриваемые подпространства и вообще ничего больше не надо искать.

§ 11. Примеры решения задач на построение базисов в линейных подпространствах

11.1. Типовой расчет по теме "Базисы в подпространствах". Ниже будет описано индивидуальное задание (ТР1 — *mu-*

повой расчет № 1) на применение алгоритмов 10.1 — 10.6 для построения базисов в линейных подпространствах в некотором линейном пространстве и будет приведено подробное решение демонстрационного варианта.

Как уже неоднократно подчеркивалось, постановка и решение вычислительных задач линейной алгебры предполагает фиксацию в рассматриваемом линейном пространстве V (размерности n, над полем P) некоторого базиса, что позволяет отождествить V с арифметическим линейным пространством P^n. Обычно считается, что отождествление уже произведено, т. е. $V = P^n$ (с естественным базисом $\mathcal{E}_n$ в качестве исходного).

Для задания подпространств $W \leqslant V$ могут быть использованы два известных способа: либо V определяется как образ (линейная оболочка векторов-столбцов) некоторой матрицы G (число строк в которой равно n), либо — как ядро (нуль-пространство) некоторой матрицы A (число столбцов в которой равняется n).

В качестве основного поля в типовом расчете будет фигурировать поле рациональных чисел $P = \mathbb{Q}$ или любое расширение этого поля (например, поле действительных чисел $\mathbb{R}$, что является наиболее привычным для первокурсников, которых пока смущает разнообразие полей в математике).

Общее условие типового расчета по теме "Базисы в подпространствах"

В линейном пространстве

$$V = \mathbb{R}^n$$

заданы два линейных подпространства W_1 и W_2. Первое из них задано вторым способом:

$$W_1 = R_G,$$

а второе — первым способом:

$$W_2 = L_H^0.$$

Рассматриваются *сумма*

$$W_3 = W_1 + W_2$$

и *пересечение*

$$W_0 = W_1 \cap W_2$$

данных подпространств, а также предлагается определить некоторое *прямое дополнение* W_4 к подпространству W_0 в подпространстве W_3 :

$$W_0 \oplus W_4 = W_3.$$

Для каждого из подпространств W_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ требуется

— построить *базис*, который следует записать в матрицу B_i; тем самым будет получено *экономное представление* подпространства W_i *вторым способом*:

$$W_i = R_{B_i};$$

— вычислить *размерность* $d_i = \dim(W_i)$;

— найти матрицу A_i, определяющую *экономное задание* подпространства W_i *первым способом*:

$$W_i = L^0_{A_i};$$

— указать *коразмерность* $c_i = n - d_i$ подпространства W_i;

— *расписать* (в координатах) *определяющую с.л.у.*

$$A_i \cdot \overline{x} = \overline{0}.$$

Далее требуется выявить *особые случаи* взамного расположения рассматриваемых подпространств, каковыми считаются те ситуации, когда по крайней мере два из подпространств

$$O,\ W_0,\ W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4,\ V$$

совпадают между собой. (В таких ситауциях предлагается *выбирать базисы и определяющие с.л.у.* для подпространств *с учетом специфики случая.*)

И с х о д н ы е д а н н ы е
к д е м о н с т р а ц и о н н о м у в а р и а н т у:

$$n = 6;$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -7 & -8 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -6 & -4 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е д е м о н с т р а ц и о н н о г о в а р и а н т а

Ниже приводятся основные *этапы* решения. Все подробности, связанные с приведением матриц к ступенчатому виду (виду Жордана — Гаусса), решением систем линейных уравнений, формированием для них фундаментальных матриц и т. п., опускаются.

(В случае необходимости освежить соответствующие навыки вам придется заглянуть в свои конспекты за первый семестр или в книгу [A_1].)

1. Следуя алгоритму 10.2, приведем (с помощью элементарных преобразований над строками) матрицу G к ступенчатому виду (нулевые строки удалим):

$$\underset{6\times 6}{G} \to \ldots \to \underset{3\times 6}{G'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По виду матрицы G' определяем, что базис подпространства W_1 составят первый, второй и четвертый столбцы матрицы G. Получаем экономное задание W_1 вторым способом: $W_1 = R_{B_1}$, где

$$\underset{6\times 3}{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

определяем также размерность $d_1 = 3$.

Найдем (экономное) задание W_1 первым способом. Для этого, следуя алгоритму 10.3, приведем к виду Жордана — Гаусса транспонированную матрицу B_1^t :

$$\underset{3\times 6}{B_1^t} \to ... \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

По полученной матрице составляем однородную с.л.у.

$$\begin{cases} \alpha_1 & & +\alpha_3 & & -\alpha_5 & -\alpha_6 & = 0; \\ & \alpha_2 & & & & & = 0; \\ & & & \alpha_4 & +2\alpha_5 & & = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему [относительно неизвестных α_j $(j = 1, ..., 6)$ — элементов строки искомой матрицы A_1], находим фундаментальную матрицу

$$\underset{6\times 3}{F_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

транспонируя которую мы получаем

$$\underset{3\times 6}{A_1} = F_1^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линейное пространство W_1 является ядром (нуль-пространством) матрицы A_1 (которая имеет полный ранг по строкам). Так что получается экономное представление первым способом: $W_1 = L_{A_1}$. Иначе говоря, W_1 является подпространством решений однородной с.л.у. $A_1 \cdot \overline{x} = \overline{0}$, количество уравнений в которой равно коразмерности $c_1 = \operatorname{codim}(W_1) = n - d_1 = 3$.

И, наконец, представим последнюю систему в подробной координатной записи:

$$\begin{cases} -x_1 & & +x_3 & & & & & = 0; \\ x_1 & & & & -2x_4 & +x_5 & & = 0; \\ x_1 & & & & & & +x_6 & = 0. \end{cases}$$

2. Приступаем к работе с подпространством W_2. В соответствии с алгоритмом 10.1, приведем матрицу H к виду Жордана — Гаусса (который можно будет рассматривать как искомую матрицу A_2, определяющую W_2 опять же первым способом, но — экономно):

$$\underset{5\times 6}{H} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underset{4\times 6}{A_2}.$$

Выписывая и решая однородную с.л.у. $A_2 \cdot \overline{x} = \overline{0}$, мы найдем фундаментальную матрицу этой системы, которую сразу обозначим B_2, поскольку она будет содержать базис для W_2:

$$\underset{6\times 2}{B_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вносим в сводку ответов размерность $d_2 = \dim(W_2) = 2$, а также коразмерность $c_2 = \operatorname{codim}(W_2) = 4$ второго подпространства.

3. Займемся подпространством W_3, представляющим из себя сумму двух данных подпространств. Следуя алгоритму 10.5, составим конкатенацию G_3 матриц B_1 и B_2, приведем ее к ступенчатому виду (с выброшенными нулевыми строками), затем выберем (и запишем в матрицу B_3) базис в подпространстве W_3, продолжающий базис в W_1 (содержащийся в матрице B_1):

$$\underset{6\times 5}{G_3} = (B_1|B_2) = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right);$$

$$\underset{6\times 4}{B_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уже определены размерность и коразмерность суммы:

$$d_3 = \dim(W_3) = 4;\ c_3 = \operatorname{codim}(W_3) = 2.$$

Осталось задать W_3 первым способом. Повторяя вычисления, аналогичные проведенным выше для W_1, находим (с помощью алгоритма 10.3) матрицу, имеющую полный ранг по строкам, нуль-пространством которой является подпространство W_3. Покажем без комментариев основные этапы работы:

$$B_3^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \alpha_1 & & & & & +\alpha_6 & = 0; \\ & \alpha_2 & & & & & = 0; \\ & & \alpha_3 & & -\alpha_5 & -2\alpha_6 & = 0; \\ & & & \alpha_4 & +2\alpha_5 & & = 0; \end{cases}$$

$$\underset{6\times 2}{F_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\underset{2\times 6}{A_3} = F_3^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} & & x_3 & -2x_4 & +x_5 & & = 0; \\ -x_1 & +2x_2 & & & & +x_6 & = 0. \end{cases}$$

Благодаря формуле Грассмана, уже известна размерность пересечения W_0 данных подпространств: $d_0 = d_1 + d_2 - d_3 = 1$.

4. Переходим к отысканию базиса и определяющей с.л.у. для подпространства W_0. Следуя алгоритму 10.6, составляем вертикальную конкатенацию $\widetilde{A}_0$ матриц A_1 и A_2; затем приводим эту конкатенацию к виду Жордана — Гаусса (без нулевых строк), получая тем самым матрицу A_0, задающую первым способом (причем экономно) подпространство W_0:

$$\underset{5\times 6}{\widetilde{A}_0} = \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \underset{5\times 6}{A_0}.$$

Выяснилось, что в данном примере уже сама конкатенация $\widetilde{A}_0$ имеет полный ранг по строкам, т. е. определяет W_0 экономно. Это можно было понять и без преобразований, поскольку из предыдущего пункта ясно, что $c_0 = \operatorname{codim}(W_0) = 5$, а матрица $\widetilde{A}_0$ как раз и содержит 5 строк. Однако преобразования все же нужны, поскольку только решив с.л.у. $A_0 \cdot \overline{x} = \overline{0}$, мы можем найти базис (и задание вторым способом) для W_0. Фундаментальная матрица для этой системы (содержащая базис для W_0) видна, что называется, "невооруженным глазом":

$$\underset{6\times 1}{B_0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Осталось рассмотреть последнее подпространство W_4. Обратим особое внимание на то, что подпространства W_3 и W_0 определяются по заданным подпространствам W_1 и W_2 совершенно однозначно. Разумеется, базисы в них (кроме тривиальных случаев) определены неоднозначно. Напротив, W_4 (прямое дополнение к W_0 в W_3)

определено неоднозначно как подпространство (тоже за исключением тривиальных случаев), и отыскание этого подпространства сводится к отысканию некоторого базиса в нем, состоящего из векторов, дополняющих (ранее найденный) базис в W_0 до базиса в W_3. (Можно сказать, что сначала ищется базис, а потом — само подпространство, как линейная оболочка базисных векторов.)

Следуя алгоритму 10.4 составляем матрицу, являющуюся конкатенацией матриц B_0 и B_3, приводим эту матрицу к ступенчатому виду (без нулевых строк) и, руководствуясь расположением ступенек в правой зоне последней матрицы, выбираем из B_3 добавочные векторы, которые составят базис в некотором прямом дополнении W_4; они будут записаны в матрицу B_4:

$$(B_0|B_3) = \left(\begin{array}{c|cccc} -1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \ldots \to \left(\begin{array}{c|cccc} -1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$\underset{6\times 3}{B_4} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Размерность прямого дополнения, разумеется, ясна заранее:

$$d_4 = d_3 - d_0 = 3;$$

коразмерность

$$c_4 = \operatorname{codim}(W_4) = n - d_4 = 3.$$

Осталось найти матрицу A_4, задающую W_4 первым способом и выписать соответствующую однородную с.л.у. Для этого (как и в пп. 1 и 3 решения) понадобится алгоритм 10.3.

Приводим к виду Жордана — Гаусса матрицу B_4^t, составляем и решаем соответствующую полученной матрице однородную с.л.у. (напомним, что неизвестные в ней надо обозначать не "иксами", а иначе; выше мы использовали обозначения α_j); транспонируя фундаментальную матрицу F_4, получаем искомую матрицу A_4, по которой выписываем однородную линейную систему (уже относительно неизвестных x_j), определяющую подпространство W_4:

$$B_4^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \alpha_1 & & & -\frac{1}{2}\alpha_4 & -\alpha_5 & +\alpha_6 & = 0; \\ & \alpha_2 & & -\frac{1}{2}\alpha_4 & -\alpha_5 & & = 0; \\ & & \alpha_3 & +\alpha_4 & +\alpha_5 & -2\alpha_6 & = 0; \end{cases}$$

$$\underset{6\times 3}{F_4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\underset{3\times 6}{A_4} = F_4^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & -x_3 & +x_4 & & & = 0; \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & & = 0; \\ -x_1 & & +2x_3 & & & +x_6 & = 0. \end{cases}$$

О т в е т полезно бывает представить в виде сводной таблицы. Ниже мы приведем такую таблицу, полученную средствами Maple. (Об использовании Maple-процедур при решении типового расчета см. ниже, в п. 11.3.)

$$\left[\ W_1,\ B_1=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, d_1=3, A_1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c_1=3,\right.$$

$$\left.\left[-x_1+x_3=0, x_1-2x_4+x_5=0, x_1+x_6=0 \right]\ \right]$$

$$\left[\ W_2,\ B_2=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, d_2=2, A_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, c_2=4,\right.$$

$$\left.\left[x_1+2x_5-x_6=0, x_3+x_5=0, x_4=0 \right]\ \right]$$

$$\left[\ W_3,\ B_3=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, d_3=4, A_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c_3=2,\right.$$

$$\left.\left[x_3-2x_4+x_5=0, -x_1+2x_2+x_6=0, \right]\ \right]$$

$$\left[\ W_0,\ B_0=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d_0=1, A_0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, c_0=5,\right.$$

$$\left.\left[x_1+x_6=0, x_2=0, x_3+x_6=0, x_4=0, x_5-x_6=0 \right]\ \right]$$

$$\left[\ W_4,\ B_4=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, d_4=3, A_4=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c_4=3,\right.$$

$$\left.\left[\tfrac{1}{2}x_1+\tfrac{1}{2}x_2-x_3+x_4=0, x_1+x_2-x_3+x_5=0, -x_1+2x_3+x_6=0 \right]\ \right]$$

В заключение заметим, что особых случаев, выявление которых предписывается заданием ТР1, в разобранном выше примере нет (примеры с особенностями мы разберем в следующем пункте). Помимо этого, порекомендуем исполнителям расчета следующую проверку: для каждого из номеров $i = 0, 1, 2, 3, 4$ должно выполняться матричное равенство $A_i \cdot B_i = O$, причем ранги матриц A_i и B_i в сумме должны составлять $n = \dim(V)$.

11.2. Особые случаи расположения подпространств в расчете ТР1. Особенности, вызывающие досрочный выход из алгоритмов 10.1 — 10.6, охарактеризованы в замечании 10.4. Ниже приводятся простые примеры, в которых эти особенности усматриваются и исследуются почти без вычислений.

Пример 11.1. Пусть в обозначениях предыдущего пункта

$$n = 4;\ G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};\ H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица G имеет, очевидно, полный ранг по столбцам; поэтому $B_1 = G$ и $d_1 = 2$. Матрице H отвечает однородная линейная система из одного уравнения: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Первый столбец матрицы G удовлетворяет этому уравнению, а второй — нет. Значит, размерность пересечения равна в точности единице, а размерность суммы — четырем.

Сумма оказывается *полной*: $W_3 = V$; ее коразмерность равна нулю и матрица A_3 является пустой. Пересечение W_0 имеет базис, представляемый матрицей

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Если бы мы выполняли расчет "прямолинейно", не взирая на особенности, то, решив указанное выше уравнение, мы получили бы базис в W_2, записанный в матрицу

$$B_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, применяя к матрицам B_1 и B_2 алгоритм 10.5, мы получили бы матрицу

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

содержащую базис в $W_3 = V$, продолжающий исходный базис в W_1.

Матрица B_3 содержит в качестве начальной подматрицы (одностолбцовую) матрицу B_0. Следовательно, в роли матрицы B_4 (содержащей базис в некотором прямом дополнении к W_0 в W_3) может выступить подматрица из трех последних столбцов B_3. Убедитесь сами, что

$$A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Есть, однако, другая возможность. Тот факт, что сумма W_3 совпадает со всем пространством V, позволяет выбрать в ней естественный базис, т. е. заменить B_3 на единичную матрицу: $B_3' = E_4$.

Следует иметь в виду, что этот базис уже не будет продолжать выбранный базис в пересечении. И прямое дополнение W_4' к W_0 получится другим. Если мы применим алгоритм 10.4 к матрицам B_0 и B_3', то получим:

$$B_4' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; A_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. W_4' оказывается заданным одним уравнением $x_4 = 0$.

Пример 11.2. Рассмотрим в пространстве $V = \mathbb{R}^5$ подпространства $W_1 = R_G$ и $W_2 = L_H^0$, где

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \; H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущем примере, имеем $B_1 = G$. Применяя алгоритм

10.1, т. е. решая с.л.у. $H \cdot \overline{x} = \overline{0}$, получаем:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из вида матриц B_1 и B_2 ясно, что пересечение W_0 тривиально ($d_0 = 0$; матрица B_0 пуста). Сумма W_3 является *прямой* (см. п. 9.1):

$$W_0 = O;\ W_3 = W_1 \oplus W_3.$$

Матрица B_3 получается простой конкатенацией матриц B_1 и B_2. Прямое дополнение к (нулевому) подпространству W_0 в подпространстве W_3 совпадает с W_3; матрица B_4 совпадает с B_3.

Пример 11.3. Пусть

$$n = 4;\ G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подпространство W_1 двумерно, а W_3 — трехмерно (поскольку задается единственным уравнением $x_2 - x_3 = 0$). Оба базисных вектора W_1 удовлетворяют этому уравнению. Значит, W_1 является подпространством в W_2. Следовательно, сумма W_3 совпадает с бóльшим из подпространств, W_2, а пересечение W_0 — с меньшим, W_1. В частности, можно взять $B_3 = B_2$ и $B_0 = B_1$. Убедитесь самостоятельно, что некоторе прямое дополнение к $W_0 = W_1$ в $W_3 = W_2$ может быть задано матрицей

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11.3. Пакет Maple-процедур для решения ТР1. Пакет LinearAlgebra располагает исчерпывающими средствами для решения всех пунктов типового расчета. Например, команда NullSpace позволяет найти базис в ядре (нуль-пространстве) матрицы, т. е. выполняет ту же работу, что и алгоритм 10.1; команда ColumnSpace

позволяет найти базис в образе (линейной оболочке столбцов) матрицы; имеются команды SumBasis и IntersectionBasis для отыскания базисов в сумме и пересечении подпространств и т. д. Для всех указанных команд характерен высокий уровень универсальности: они расчитаны на восприятие самых разных типов данных. Для учебных целей автору показалось уместным создание нового пакета, специально приспособленного к выполнению заданий TP1.

Пакет назван BiS ("Bases in Subspaces"); в нем используются самые простые версии алгоритмов Гаусса (GaussElimination) и Жордана — Гаусса (ReducedRowEchelonForm), но зато процедуры этого пакета возвращают значительно больше полезной информации: размерности подпространств, некоторые промежуточные результаты, необходимые для взаимодействия с другими процедурами, и т. п.

Пакет содержит шесть процедур (по числу изученных алгоритмов), их листинги приведены в прил. 1. Ознакомление читателей с простейшими приемами Maple-программирования является "побочной целью" разработки пакета BiS, в связи с чем все процедуры очень подробно прокомментированы.

Обратите внимание на названия процедур. Они имеют вид:

имя_пакета [имя_процедуры].

Код каждой из процедур должен располагаться внутри одной *группы* (Execution Group; выделяется квадратной скобкой слева и начинается с приглашения >); при его наборе не используется клавиша Enter, переход на следующую строку осуществляется с помощью Shift+Enter.

Если полностью набранная программа не содержит синтаксических ошибок, то нажатие Enter приводит к следующей реакции системы: в пределах той же рабочей группы будет выдан краткий (без комментариев) листинг процедуры.

Разработка пакета завершается его сохранением: у нас — в виде файла BiS.m, в специально созданном каталоге MaplePackages; у вас, вероятно, будет другой адрес сохранения; работа по составлению и отладке процедур проводится в другом файле: BiS.mws.

Перед применением пакета необходимо прочитать ранее сохраненный файл и "подгрузить" его командой with (наравне со стандартным пакетом LinearAlgebra):

```
> restart; with(LinearAlgebra):
> read "F:/MaplePackages/BiS.m"; with(BiS);
```

$[algorithm_1, algorithm_2, algorithm_3, algorithm_4, algorithm_5, algorithm_6]$

Система откликнулась, назвав шесть новых, ставших доступными процедур. Правила загрузки матриц в пакете LinearAlgebra объяснялись в примере 7.3. Будем считать, что данные матрицы G и H уже загружены.

Применим к матрице G процедуру algorithm_2; возвращаемую последовательность данных обозначим w1:

```
> w1 := algorithm_2( G );
```

Будет выдана последовательность из четырех элементов: матрица B_1, содержащая базис в W_1, размерность d_1 этого подпространства, а также — вспомогательные сведения (промежуточные результаты): ступенчатый вид матрицы G и список номеров главных столбцов. В данном примере нам понадобятся только первые два члена этой последовательности. Их значения мы присвоим предписанным переменным B_1 и d_1:

```
> B[1], d[1] := w1[1], w1[2];
```

Результаты совпадут с полученными в п. 11.1, поэтому мы их здесь не повторяем. Чтобы получить дополнительные сведения о подпространстве W_1, применим к матрице B_1 процедуру algorithm_3 и произведем соответствующие присваивания:

```
> u1 := algorithm_3( B[1] ); A[1], sys[1] := u1[1], u1[2];
```

Получим (такую же, как в п. 11.1) матрицу A_1; а вот однородная с.л.у. sys_1 будет записана несколько иначе, в виде списка уравнений:

$$sys_1 := [\, -x_1 + x_3 = 0,\ x_1 - 2x_4 + x_5 = 0,\ x_1 + x_6 = 0 \,]$$

(Именно так эта система фигурирует в приведенном в конце п. 11.1 ответе.)

Процедура algorithm_1 отвечает на все вопросы типового расчета, касающиеся подпространства W_2:

```
> w2 := algorithm_1( H );
> B[2], d[2], A[2], sys[2] := w2[1], w2[2], w2[3], w2[4];
```

Результат будет совпадать с приведенным во второй строке таблицы, представляющей ответ в п. 11.1.

Далее, к матрицам B_1 и B_2 применяется процедура algorithm_5, производятся присваивания, подключается algorithm_3 и снова производятся присваивания, после чего — вся необходимая информация о подпространстве W_3 будет получена:

```
> w3 := algorithm_ 5( B[1], B[2] ); B[3], d[3] := w3[1], w3[2];
> u3 := algorithm_ 3( B[3] ); A[3], sys[3] := u3[1], u3[2];
```

Затем разрешаются все вопросы с подпространством W_0:

```
> w0 := algorithm_ 6( A[1], A[2] );
> B[0], d[0], A[0], sys[0] := w0[1], w0[2], w0[3], w0[4];
```

Чтобы исследовать подпространство W_4, к ранее вычисленным матрицам B_0 и B_3 применяется процедура algorithm_ 4; получается последовательность из пяти элементов (причем два последних из них сами являются списками); из этой последовательности выбираются два первых результата: матрица B_4, содержащая базис в некотором прямом дополнении W_4 к подпространству W_0 в подпространстве W_3, и размерность d_4 подпространства W_4:

```
> w4 := algorithm_ 4( B[0], B[3] ); B[4], d[4] := w4[1], w4[2];
```

Последние оставшиеся неизвестными компоненты общего ответа находятся с помощью процедуры algorithm_ 3:

```
> u4 := algorithm_ 3( B[4] ); A[4], sys[4] := u4[1], u4[2];
```

Так завершается работа над TP1 с помощью Maple-пакета BiS. Как получить средствами Maple *табличный* ответ — разберитесь сами: может быть, у вас получится более изящно.

Глава 2

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 12. Алгебраические действия над линейными отображениями. Матрица линейного отображения

12.1. Алгебраические действия над линейными отображениями. Определение и простейшие свойства линейных отображений (гомоморфизмов) рассматривались выше, в п. 1.6. В важнейшем конкретном случае (для арифметических линейных пространств) эта тема изучалась в [A_1, § 15]. В частности, мы уже знакомы с алгебраическими действиями над линейными отображениями и законами для них. Здесь мы продублируем (в полной общности) основные определения, а затем приведем список законов для алгебры линейных операторов.

Напомним обозначение $\mathcal{L}(V, W)$ для множества линейных отображений из линейного пространства V (над полем P) в линейное пространство W (над тем же полем).

Определение 12.1. 1. Суммой линейных отображений (операторов) $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V, W)$ называется оператор

$$\varphi + \psi : V \longrightarrow W;\ (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x);\ x \in V. \tag{12.1}$$

2. Произведение оператора $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ на скаляр $\lambda \in P$ определяется формулой

$$\lambda \cdot \varphi : V \longrightarrow W;\ (\lambda \cdot \varphi)(x) = \lambda \cdot (\varphi(x));\ x \in V. \tag{12.2}$$

Данное выше определение можно пересказать так: сложение и умножение на скаляр для линейных отображений осуществляются

поэлементно (или, как иначе говорят, *поточечно*), т. е. эти действия выполняются над значениями отображений в каждой точке (на любом векторе) $x \in V$.

Проверка факта линейности для отображений, заданных формулами (12.1) и (12.2), совершенно элементарна и вполне по силам любому читателю настоящего пособия, добравшемуся до второй главы.

Роль умножения для (последовательно действующих) линейных отображений $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\psi \in \mathcal{L}(W, U)$ играет их композиция $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(V, U)$, факт линейности которой уже объяснялся ранее.

Предложение 12.1. *Алгебраические действия над линейными отображениями (операторами) подчиняются следующим тринадцати законам:*

(i) $(\forall V \overset{\varphi,\psi,\chi}{\Longrightarrow} W)$ $[(\varphi + \psi) + \chi = \varphi + (\psi + \chi)]$;
(ii) $(\forall V \overset{\varphi,\psi}{\Longrightarrow} W)$ $[\varphi + \psi = \psi + \varphi]$;
(iii) $(\exists V \xrightarrow{o} W)(\forall V \xrightarrow{\varphi} W)$ $[\varphi + o = o + \varphi = \varphi]$;
(iv) $(\forall V \xrightarrow{\varphi} W)(\exists V \xrightarrow{\psi} W)$ $[\varphi + \psi = \psi + \varphi = o]$;
(v) $(\forall \lambda, \mu \in P;\ V \xrightarrow{\varphi} W)$ $[(\lambda + \mu) \cdot \varphi = \lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \varphi]$;
(vi) $(\forall \lambda \in P;\ V \overset{\varphi,\psi}{\Longrightarrow} W)$ $[\lambda \cdot (\varphi + \psi) = \lambda \cdot \varphi + \lambda \cdot \psi]$;
(vii) $(\forall \lambda, \mu \in P;\ V \xrightarrow{\varphi} W)$ $[(\lambda \cdot \mu) \cdot \varphi = \lambda \cdot (\mu \cdot \varphi)]$;
$(viii)$ $(\forall V \xrightarrow{\varphi} W)$ $[1 \cdot \varphi = \varphi]$;
(ix) $(\forall U \xrightarrow{\chi} V \overset{\varphi,\psi}{\Longrightarrow} W)$ $[(\varphi + \psi) \circ \chi = \varphi \circ \chi + \psi \circ \chi]$;
(x) $(\forall U \overset{\psi,\chi}{\Longrightarrow} V \xrightarrow{\varphi} W)$ $[\varphi \circ (\psi + \chi) = \varphi \circ \psi + \varphi \circ \chi]$;
(xi) $(\forall \lambda \in P;\ U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W)$ $[(\lambda \cdot \varphi) \circ \psi = \varphi \circ (\lambda \cdot \psi) = \lambda \cdot (\varphi \circ \psi)]$;
(xii) $(\forall Y \xrightarrow{\chi} U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W)$ $[(\varphi \circ \psi) \circ \chi = \varphi \circ (\psi \circ \chi)]$;
$(xiii)$ $(\exists V \xrightarrow{\varepsilon} V)(\forall U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W)$ $[(\varphi \circ \varepsilon = \varphi) \wedge (\varepsilon \circ \psi = \psi)]$.

Доказательство. Первые восемь законов не требуют особого доказательства, поскольку (благодаря поточечному характеру действий сложения и умножения на скаляр) каждое из соответствующих восьми равенств выполняется на любом векторе $x \in V$.

Проверка оставшихся пяти могла бы составить предмет очень простого упражнения для читателей, но мы все же продемонстрируем доказательства для девятого и десятого законов с тем, чтобы подчеркнуть (вопреки внешнему сходству) их глубокое алгебраическое различие.

Правая дистрибутивность (ix) вытекает непосредственно из определения поточечной суммы отображений и имеет место для произвольных (не обязательно линейных) φ, ψ и χ:

$$((\varphi+\psi)\circ\chi)(u) = ((\varphi+\psi)(\chi(u)) = \varphi(\chi(u)) + \psi(\chi(u)) = \\ = (\varphi\circ\chi)(u) + (\psi\circ\chi)(u) = (\varphi\circ\chi + \psi\circ\chi)(u)$$

для любого $u \in U$.

В то же время, доказательство *левой дистрибутивности* (x) использует линейность отображения φ:

$$(\varphi\circ(\psi+\chi))(u) = \varphi((\psi+\chi)(u)) = \varphi(\psi(u)+\chi(u)) \overset{(1.9)}{=\!=} \\ = \varphi(\psi(u)) + \varphi(\chi(u)) = (\varphi\circ\psi)(u) + (\varphi\circ\chi)(u) = (\varphi\circ\psi + \varphi\circ\chi)(u).$$

Напомним также (об этом говорилось в п. 15.3 пособия $[A_1]$), что ассоциативность композиции (xii) имеет место для произвольных отображений. Разобраться со свойствами (xi) и $(xiii)$ будет вашей работой. □

Замечание 12.1. В силу свойств (i) — $(viii)$, всякое множество линейных операторов $\mathcal{L}(V,W)$ является *линейным пространством* относительно поточечного сложения и умножения на скаляр (над тем же полем, над которым заданы линейные пространства V и W).

При $W = V$ множество $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$ *линейных эндоморфизмов* пространства V оказывается *кольцом* относительно сложения и композиции эндоморфизмов.

Замечание 12.2. Обозначения законов (i) — $(xiii)$ являются мнемонической отсылкой к аналогичным законам (i) — (xiii) алгебры матриц (см. п. 2.2 в $[A_1]$). Здесь, в отличие от случая матриц, в обозначениях использован *курсив*. Сходство упомянутых законов отнюдь не является случайным, и мы объясним его в следующем пункте.

Между тем, внимательные читатели, вероятно, заметят, что для алгебры матриц мы формулировали 17 законов (последние четыре относились к операции транспонирования матриц). Что соответствует законам (xiv) — (xvii) в алгебре линейных операторов? Ответ на этот вопрос будет дан значительно позже, в четвертой главе настоящего пособия. (Так что очень любознательным читателям придется немного потерпеть.)

12.2. Матрица линейного отображения. Изоморфизмы между линейными пространствами линейных операторов и матриц. Рассмотрим конечномерные пространства V и W (размерностей n и m соответственно) над полем P и линейное отображение

$$\varphi : V \longrightarrow W. \tag{12.3}$$

Зафиксируем в пространствах V и W базисы

$$\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, \ldots, b_n \,] \tag{12.4}$$

и

$$\mathcal{C} = [\, c_1, c_2, \ldots, c_m \,] \tag{12.5}$$

соответственно.

Для каждого из базисных векторов b_j $(j = 1, \ldots, n)$ рассмотрим его образ $a_j = \varphi(b_j) \in W$ и разложим этот вектор по базису $\mathcal{C}$:

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i. \tag{12.6}$$

При фиксированном $j = 1, \ldots, n$ коэффициенты

$$a_{ij} = [\varphi(b_j)]_i;\ i = 1, \ldots, m \tag{12.7}$$

являются координатами вектора (12.6) относительно базиса $\mathcal{C}$; они образуют арифметический вектор

$$\overline{a_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix};\ j = 1, \ldots, n. \tag{12.8}$$

Из векторов-столбцов (12.8) можно составить матрицу

$$\underset{m\times n}{A} = \left(\overline{\varphi(b_1)} \,\middle|\, \overline{\varphi(b_2)} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \overline{\varphi(b_n)}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right). \tag{12.9}$$

Определение 12.2. Матрица (12.9) называется *матрицей линейного отображения* (12.3) *относительно базисов* (12.4) и (12.5). (Говорят также, что матрица A *отвечает* оператору φ в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$.)

Замечание 12.3. Определение 12.2, подобно многим другим, ранее изученным определениям *абстрактной* линейной алгебры, не является для нас принципиально новым. В первом семестре, занимаясь линейной алгеброй *конкретных* (арифметических) линейных пространств, мы уже встречались с понятием матрицы линейного отображения $\varphi : P^n \to P^m$ относительно естественных базисов $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_m$ (см. [A_1, п. 15.2]). Важность абстрактного подхода состоит в том, что даже в арифметических линейных пространствах матрица линейного отображения относительно других, "неестественных" базисов может оказаться существенно проще, нежели относительно естественных. Более того, отыскание таких базисов можно считать одной из основных практических задач линейной алгебры, поскольку именно линейные отображения (операторы) являются основными "действующими лицами" этой науки. Матрица же служит "портретом" (оцифровкой) линейного оператора. Базисы можно сравнить с "приборами" (цифровыми камерами), от выбора которых существенно зависит "качество" оцифровки. Желательно подобрать базисы так, чтобы важнейшие свойства оператора легко определялись (усматривались) по его матрице.

Предложение 12.2. *Пусть V и W — конечномерные линейные пространства (размерностей n и m соответственно) над полем P, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ — некоторые базисы в этих пространствах. Сопоставление линейному оператору $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ матрицы $A \in \mathrm{Mat}(m, n; P)$, отвечающей φ в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, задает линейный изоморфизм*

$$\mu : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Mat}(m, n; P);\ \mu(\varphi) = A. \tag{12.10}$$

В частности, линейное пространство $\mathcal{L}(V, W)$ конечномерно и имеет размерность mn. Базис в нем составляют линейные операторы

$$\varepsilon_{ij} : V \longrightarrow W\ (i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n), \tag{12.11}$$

заданные (в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$) формулами

$$\varepsilon_{ij}(b_k) = \delta_{jk} c_i\ (k = 1, ..., n), \tag{12.12}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

Доказательство. Линейный оператор φ переводит базис $\mathcal{B}$ в с.в.

$$\mathcal{A} = [\, a_1, a_2, \dots, a_n \,]. \tag{12.13}$$

Матрица (12.9) составлена из координатных столобцов векторов системы (12.13) в базисе $\mathcal{C}$. Если последний базис фиксирован, то определена биекция между системами векторов вида (12.13) и матрицами вида

$$\underset{m\times n}{A} = (\overline{a_1} \,|\overline{a_2}\,| \dots |\overline{a_n}) \,. \tag{12.14}$$

С другой стороны, согласно теореме 6.1 (ОТЛО), линейный оператор φ полностью определяется своими значениями на базисных векторах, т. е. системой векторов $\mathcal{A} = \varphi(\mathcal{B})$, или, что равносильно, — матрицей A. Следовательно, отображение (12.10) инъективно: разным линейным операторам отвечают разные матрицы.

Из той же ОТЛО вытекает и сюръективность (12.10): по любой матрице (12.14) однозначно определяется с.в. (12.13) в пространстве W, по которой можно построить линейное отображение (12.3) такое, что $\varphi(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

Остается убедиться в линейности отображения μ. Пусть заданы два линейных оператора $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}(V, W)$, которым соответствуют матрицы $A, A' \in \mathrm{Mat}(m, n; P)$. Сумме $\varphi + \varphi'$ этих операторов будет соответствовать матрица, составленная из векторов-столбцов

$$\overline{(\varphi + \varphi')(b_j)} = \overline{\varphi(b_j) + \varphi'(b_j)} = \overline{\varphi(b_j)} + \overline{\varphi'(b_j)} = \overline{a_j} + \overline{a'_j},$$

т. е. не что иное как $A + A'$. Аналогичным рассуждением доказывается, что оператору $\lambda \cdot \varphi$ ($\lambda \in P$) отвечает матрица $\lambda \cdot A$.

Итак, выбор базисов (12.4) и (12.5) определяет линейный изоморфизм (12.10) между линейным пространством линейных операторов $\mathcal{L}(V, W)$ и линейным пространством матриц $\mathrm{Mat}(m, n; P)$.

В пространстве матриц имеется (см. пример 4.1) естественный базис, составленный из mn матриц E_{ij} ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$). При изоморфизме μ этому базису соответствует некоторый базис в пространстве $\mathcal{L}(V, W)$, составленный из mn линейных операторов ε_{ij}, таких, что $\mu(\varepsilon_{ij}) = E_{ij}$.

В матрице оператора отражается его действие на базисные векторы. В E_{ij} все столбцы, кроме j-го, являются нулевыми, и, значит, для любого b_k ($k = 1, \dots, n$; $k \neq j$) будем иметь

$$\varepsilon_{ij}(b_k) = 0. \tag{12.15a}$$

Далее, j-й столбец E_{ij} представляет из себя единичный арифметический вектор $\overline{e_i} \in P^m$ и, следовательно, является "изображением" i-го базисного вектора c_i. Действительно,

$$c_i = 0 \cdot c_1 + ... + 1 \cdot c_i + ... + 0 \cdot c_m \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{e_i}.$$

Это означает, что

$$\varepsilon_{ij}(b_j) = c_i. \tag{12.15b}$$

Равенства (12.15a) и (12.15b) можно объединить в одно — (12.12), если использовать символ Кронекера (см. [A_1, (2.8)]):

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq k; \\ 1, & \text{если } j = k. \end{cases} \tag{12.16}$$

Произвольный линейный оператор φ разлагается по базису, составленному из операторов ε_{ij}, по формуле:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_{ij}, \tag{12.17}$$

где скаляры a_{ij} являются элементами матрицы (12.14), отвечающей φ в указанных базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$.

Все утверждения предложения доказаны. □

12.3. Матрица для композиции линейных отображений. Теорема об изоморфизме для алгебраических систем линейных операторов и матриц. Важным дополнением к предложению 12.2, утверждающему согласованность алгебраических действий сложения и умножения на скаляр для линейных операторов и для соответствующих им матриц, является следующее предложение, утверждающее аналогичную согласованность *композиции* линейных операторов и *умножения* матриц.

Предложение 12.3. *Рассмотрим два последовательно действующих линейных отображения*

$$V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U, \tag{12.18}$$

где V, W и U — линейные пространства над полем P, размерностей n, m и p соответственно. Пусть в этих пространствах зафиксированы какие-либо базисы $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно, где первые два заданы списками (12.4) и (12.5), а последний — списком

$$\mathcal{D} = [\, d_1, d_2, \ldots, d_p \,]. \tag{12.19}$$

Пусть линейному оператору φ отвечает (в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$) $(m \times n)$-матрица A, а оператору ψ (в базисах $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$) — $(p \times m)$-матрица H.

Тогда композиции $\psi \circ \varphi$ будет отвечать (в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$) $(p \times n)$-матрица $H \cdot A$.

Доказательство. Обозначим буквой G $(p \times n)$-матрицу, отвечающую оператору $\psi \circ \varphi$ в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$. Эта матрица составляется из векторов-столбцов $\overline{g_j}$, где

$$g_j = (\psi \circ \varphi)(b_j) \in U \ (j = 1, \ldots, n), \tag{12.20}$$

а черта над g_j обозначает координатный столбец, отвечающий "надчеркиваемому" вектору в базисе $\mathcal{D}$.

Но [см. (12.6)]

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \ (j = 1, \ldots, n), \tag{12.21}$$

и, аналогично,

$$\psi(c_i) = \sum_{k=1}^{p} h_{ki} d_k \ (i = 1, \ldots, m), \tag{12.22}$$

и, по тому же принципу,

$$g_j = \sum_{k=1}^{p} g_{kj} d_k \ (j = 1, \ldots, n). \tag{12.23}$$

Выразим вектор g_j, подставляя разложения (12.21) и (12.22) в формулу (12.20):

$$g_j = \psi(\varphi(b_j)) = \psi(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \psi(c_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} h_{ki} d_k \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij} h_{ki} d_k \right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} h_{ki} d_k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} h_{ki} a_{ij} \right) d_k = \sum_{k=1}^{p} \left([H \cdot A]_{kj} \right) d_k,$$

где использована линейность ψ, а также, как обычно, следующие "правила манипуляции" с суммами и двойными суммами: вынесение (внесение) постоянного множителя из-под знака (под знак) суммы; перемена порядка суммирования в двойной сумме; перестановка скалярных множителей под знаком суммы.

Сравнивая последний результат с формулой (12.23) и пользуясь единственностью разложения вектора по базису, мы получаем:

$$g_{kj} = [H \cdot A]_{kj} \ (j = 1, ..., n;\ k = 1, ..., p),$$

или $G = H \cdot A$, что и требовалось доказать. □

Объединяя предложения 12.1 и 12.2, мы сформулируем ниже *теорему об изоморфизме* для алгебраической системы линейных операторов в конечномерных линейных пространствах (над полем P) и алгебраической системы прямоугольных матриц (с элементами из P), являющуюся "абстрактной версией" теоремы 15.1 из $[A_1]$, которая описывала случай линейных операторов в арифметических линейных пространствах.

Теорема 12.1. *Выбор базисов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в конечномерных линейных пространствах V и W, размерностей m и n соответственно (над полем P) определяет линейный изоморфизм линейного пространства линейных операторов $\mathcal{L}(V, W)$ на линейное пространство матриц $\mathrm{Mat}(m, n; P)$.*

Все такие изоморфизмы согласованы с алгебраическими действиями композиции (для линейных операторов) и умножения (для матриц), а именно: для любых трех пространств V, W и U, с выбранными в них базисами $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, матрицей для композиции $\psi \circ \varphi$ двух последовательно действующих операторов $V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U$ служит произведение матриц, отвечающих ψ и φ (порядок матриц-сомножителей таков же, каков порядок операторов в композиции). □

12.4.* Арифметизация ("оцифровка") линейных операторов. Соответствие между линейными операторами и матрицами

$$\mathcal{L}(V, W) \ni \varphi \longleftrightarrow A \in \mathrm{Mat}(m, n; P),$$

описанное в предыдущем пункте, на самом деле осуществляется в два этапа:

1) базисы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в линейных пространствах V и W обеспечивают (как это объяснялось в п. 6.4) "оцифровку" (арифметизацию) этих

пространств и, как следствие, определяют линейный оператор $\Phi : P^n \to P^m$ в арифметических линейных пространствах, изоморфных данным;

2) действие оператора Φ задается умножением арифметических векторов на некоторую $(m \times n)$-матрицу A.

Второй этап соответствия рассматривался в п. 15.3 пособия $[A_1]$; ниже будет детально описан первый этап. Ключевую роль в арифметизации играют *координатные изоморфизмы* [см. формулы (6.18) и (6.19)]:

$$\beta : V \longrightarrow P^n;\ \beta(x) = \overline{x}_{\mathcal{B}};\ x \in V \tag{12.24}$$

и

$$\gamma : W \longrightarrow P^m;\ \gamma(y) = \overline{y}_{\mathcal{C}};\ y \in W, \tag{12.25}$$

сопоставляющие векторам их координатные столбцы (относительно указываемых базисов).

Оператор Φ, реализующий арифметизацию оператора φ, может быть задан формулой

$$\Phi = \gamma \circ \varphi \circ \beta^{-1} : P^n \to P^m \tag{12.26}$$

и представлен на следующей диаграмме.

Диагр. 12.1

$$\begin{array}{ccc} P^n & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & P^m \\ \beta\uparrow\downarrow\beta^{-1} & & \gamma\uparrow\downarrow\gamma^{-1} \\ V & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & W \end{array}$$

Линейность оператора Φ немедленно вытекает из (12.26); опишем подробнее его действие. Любой арифметический вектор $\overline{x} \in P^n$ может быть представлен в виде $\overline{x} = \beta(x)$, где $x \in V$. Поэтому

$$\Phi(\overline{x}) = \overline{\varphi(x)}. \tag{12.27}$$

Черты, используемые в левой и правой частях последней формулы, имеют различный смысл: $\overline{x} = \overline{x}_{\mathcal{B}}$ для вектора $x \in V$ и $\overline{y} = \overline{y}_{\mathcal{C}}$ для вектора $y = \varphi(x) \in W$. Можно утверждать, что запись $y = \varphi(x)$ действия исходного оператора в абстрактных линейных пространствах равносильна формуле

$$\overline{y} = \Phi(\overline{x}) \tag{12.28}$$

в арифметических линейных пространствах, являющейся, как говорят, *координатным выражением* действия φ.

Напомним (см. п. 6.4), что координатные изоморфизмы (12.24) и (12.25) переводят базисы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ (в V и W соответственно) в естественные базисы $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_m$ (в P^n и P^m):

$$\beta(\mathcal{B}) = \mathcal{E}_n;\ \gamma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}_m. \tag{12.29}$$

Теперь мы переходим ко второму этапу арифметизации и пользуемся материалом упомянутого выше пункта из первого пособия. Оператор Φ, как всякий линейный оператор в арифметических линейных пространствах, однозначно определяется своей матрицей относительно естественных базисов, которая составляется из векторов-столбцов

$$\overline{a_j} = \Phi(\overline{e_j});\ j = 1, ..., n \tag{12.30}$$

и имеет вид

$$\underset{m\times n}{A} = (\overline{a_1}\,|\,\overline{a_2}\,|\,...\,|\,\overline{a_n})\,. \tag{12.31}$$

Действие оператора Φ выражается как левое умножение вектора из P^n на матрицу (12.31):

$$\Phi(\overline{x}) = A\cdot\overline{x};\ \overline{x}\in P^n. \tag{12.32}$$

Применяя в формуле (12.30) выражение (12.27) для действия Φ, мы получим [с учетом $\overline{e_j} = \beta(b_j)$, см. (12.29)]:

$$\overline{a_j} = \overline{\varphi(b_j)}, \tag{12.33}$$

а это означает, что матрица (12.31), отвечающая оператору Φ в базисах $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_m$, в точности совпадает с матрицей (12.9), отвечающей φ в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Итог проведенному анализу подводит следующее

Предложение 12.4. *Пусть V и W — линейные пространства размерностей n и m соответственно, с зафиксированными в них базисами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, заданными списками (12.4) и (12.5). Тогда определены попарные изоморфизмы между линейными пространствами*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(V,W) & \xrightarrow{\ \cong\ } & \mathcal{L}(P^n,P^m) \\ \cong\searrow & & \swarrow\cong \\ & \mathrm{Mat}(m,n;P) & \end{array}$$

такие, что линейному оператору $\varphi\in\mathcal{L}(V,W)$ соответствует линейный оператор $\Phi\in\mathcal{L}(P^n,P^m)$, заданный формулой (12.26), и, далее, — матрица A, являющаяся матрицей оператора φ относительно

базисов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ и, в то же время, — матрицей оператора Φ относительно естественных базисов $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_m$ в пространствах P^n и P^m.

Указанные изоморфизмы согласованы с алгебраическими действиями композиции линейных операторов и умножения матриц.

Доказательство. Почти все высказанные в предложении утверждения уже доказаны выше, перед формулировкой. Согласно теореме 12.1 и теореме 15.1 из $[A_1]$, соответствия $\varphi \rightleftarrows A$ и $\Phi \rightleftarrows A$ являются линейными изоморфизмами, согласованными с композициями и умножениями. Следовательно, теми же свойствами обладает соответствие $\varphi \rightleftarrows \Phi$. Впрочем, последний факт легко установить и непосредственно: из формулы (12.26) ясна линейность и обратимость этого соответствия, а его согласованность с композициями усматривается из следующей диаграммы (в которой координатный изоморфизм δ порождается некоторым базисом $\mathcal{D}$ в линейном пространстве U).

Диагр. 12.2

$$\begin{array}{ccccc} P^n & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & P^m & \xrightarrow{\quad\Psi\quad} & P^l \\ \beta\uparrow\downarrow\beta^{-1} & & \gamma\uparrow\downarrow\gamma^{-1} & & \delta\uparrow\downarrow\delta^{-1} \\ V & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & W & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & U \end{array}$$

Действительно, если операторам φ и ψ отвечают "оцифровки" Φ и Ψ соответственно, то композиции $\psi\circ\varphi$ будет отвечать "оцифровка" $\delta\circ(\psi\circ\varphi)\circ\beta^{-1} = (\delta\circ\psi\circ\gamma^{-1})\circ(\gamma\circ\varphi\circ\beta^{-1}) = \Psi\circ\Phi$. $\square$

12.5. Примеры вычисления матриц линейных отображений

Пример 12.1. Рассмотрим пространства многочленов $V = \mathbb{R}_n[x]$ и $W = \mathbb{R}_{n-1}[x]$ и оператор дифференцирования $\varphi = '$, который, очевидно, можно рассматривать действующим из V в W. В естественных базисах $\mathcal{B} = \mathcal{B}_n = [1, x, ..., x^n]$ и $\mathcal{C} = \mathcal{B}_{n-1} = [1, x, ..., x^{n-1}]$ (см. примеры 2.4 и 3.1) этому оператору отвечает матрица

$$\underset{n\times(n+1)}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & n \end{pmatrix}. \qquad (12.34)$$

В самом деле, $(1)' = 0$ и $(x^k)' = 0\cdot 1 + 0\cdot x + ... + k\cdot x^{k-1} + ... + 0\cdot x^{n-1}$ при $k = 1, ..., n$.

К оператору дифференцирования многочленов мы вернемся (но будем рассматривать его несколько иначе: как линейный эндоморфизм пространства V) в следующем параграфе (см. пример 13.4).

Пример 12.2. Рассмотрим теперь (опять же — на многочленах: $V = \mathbb{R}_n[x]$) оператор вычисления определенного интеграла (см. пример 1.11):

$$\mathrm{int}_{[a,b]} : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) \mapsto \int_a^b f(x)dx;\ f(x) \in V. \tag{12.35}$$

Здесь роль второго пространства играет поле $\mathbb{R}$, в котором мы выберем естественный базис $\mathcal{C} = \mathcal{E}_1 = [\,1\,]$, состоящий из единственного элемента (числа) 1; в первом пространстве V, как и в предыдущем примере, выбирается естественный базис $\mathcal{B}_n$.

Матрица оператора (12.35) будет иметь вид:

$$\underset{1\times(n+1)}{A} = \left(\tfrac{b-a}{1} \quad \tfrac{b^2-a^2}{2} \quad ... \quad \tfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \right).$$

Действительно, для любого $k = 0, ..., n$ имеем:

$$\mathrm{int}_{[a,b]}(x^k) = \int_a^b x^k dx = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Замечание 12.4. Оператор (12.34) является примером так называемых *линейных форм*, определяемых как линейные отображения из данного линейного пространства в одномерное линейное пространство, совпадающее с *основным полем*. Линейные формы являются одним из важнейших объектов изучения в линейной алгебре. В настоящем пособии основы соответствующей теории будут излагаться в начале четвертой главы. Как правило, в поле, рассматриваемом как линейное пространство над самим собой, выбирается одноэлементный базис $\mathcal{E}_1 = [\,1\,]$. (Именно так мы поступили в примере 12.2.) Матрица линейной формы всегда является *матрицей-строкой*.

Пример 12.3. Рассмотрим два линейных пространства матриц (см. пример 1.1): $V_1 = \mathrm{Mat}(3, 2; P)$ и $V_2 = \mathrm{Mat}(2, 2; P)$; зафиксируем матрицу

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

и определим отображение (очевидно, являющееся линейным) умножения слева матриц из V_1 на матрицу A (результат будет матрицей из V_2):

$$\lambda_A : V_1 \longrightarrow V_2;\ X \mapsto A \cdot X;\ X \in V_1. \tag{12.36}$$

В пространствах V_1 и V_2 рассмотрим естественные базисы $\mathcal{E}^{(1)}$ и $\mathcal{E}^{(2)}$, составленные из матриц вида E_{ij} (см. пример 4.1), содержащих лишь один ненулевой элемент — единицу, в указываемой индексами позиции. Базис остается базисом при произвольном переупорядочивании своих элементов. Но это уже будет другой базис. И для составления матрицы линейного отображения (12.36) порядок, в котором записываются элементы базисов, отнюдь не безразличен.

Примем следующий порядок элементов в первом базисе:

$$\mathcal{E}^{(1)} = [\, E_{11}^{(1)}, E_{21}^{(1)}, E_{31}^{(1)}, E_{12}^{(1)}, E_{22}^{(1)}, E_{32}^{(1)} \,]. \tag{12.37}$$

(Мы вынуждены здесь снабдить матрицы еще одним, третьим индексом (в скобках, вверху), чтобы отличать базисы в разных пространствах. Матрица E_{11} в размере 3×2 и матрица с таким же обозначением в размере 2×2 — это разные матрицы.)

Такой выбор порядка элементов базиса приводит к описанному ранее (в примере 1.9) линейному изоморфизму — *оператору векторизации* vec, сопоставляющему матрице

$$\underset{3\times 2}{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} \in V_1$$

"высокий" вектор-столбец

$$\overline{x} = \left(\begin{array}{c} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ \hline x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{array}\right) \in P^6,$$

составленный из записанных один под другим столбцов матрицы X.

Аналогичным образом выбирается базис в пространстве V_2:

$$\mathcal{E}^{(2)} = [\, E_{11}^{(1)}, E_{21}^{(2)}, E_{12}^{(2)}, E_{22}^{(2)} \,]. \tag{12.38}$$

В базисах (12.37) и (12.38) оператору (12.36) будет отвечать матрица (для обозначения которой мы применим полужирный шрифт и которую естественным образом разобьем на *блоки*):

$$\underset{4\times 6}{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \underset{2\times 3}{A} & \underset{2\times 3}{O} \\ \hline \underset{2\times 3}{O} & \underset{2\times 3}{A} \end{array}\right). \tag{12.39}$$

Поясним заполнение, скажем, четвертого столбца матрицы $\mathbf{A}$. Применим оператор λ_A к четвертой матрице в списке (12.37):

$$\lambda_A(E_{12}^{(1)}) = A \cdot E_{12}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \cdot E_{11}^{(2)} + 0 \cdot E_{21}^{(2)} + a_{11} \cdot E_{12}^{(2)} + a_{12} \cdot E_{22}^{(2)}.$$

В базисе (12.38) матрице $\lambda_A(E_{12}^{(1)})$ будет отвечать вектор-столбец (фактически: векторизация этой матрицы):

$$\overline{\lambda_A(E_{12}^{(1)})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}.$$

Пример 12.4. Рассмотрим снова пространство матриц V_2, то же самое, что и в предыдущем примере, и с тем же базисом (12.38), и, наряду с ним — пространство $V_3 = \mathrm{Mat}(4, 2; P)$ с базисом

$$\mathcal{E}^{(3)} = [\, E_{11}^{(3)}, E_{21}^{(3)}, E_{12}^{(3)}, E_{22}^{(3)}, E_{13}^{(3)}, E_{23}^{(3)}, E_{14}^{(3)}, E_{24}^{(3)} \,]. \tag{12.40}$$

Зафиксируем матрицу

$$\underset{2\times 4}{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$$

и рассмотрим линейный оператор правого умножения матриц из V_2 на матрицу B (результат будет матрицей из V_3):

$$\rho_B : V_2 \longrightarrow V_3;\ Y \mapsto Y \cdot B;\ Y \in V_2. \tag{12.41}$$

Столь же простыми рассуждениями, как и в предыдущем примере, получаем матрицу для оператора (12.41):

$$\underset{8\times 4}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{21} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{21} \\ b_{12} & 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{12} & 0 & b_{22} \\ b_{12} & 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{12} & 0 & b_{22} \\ b_{14} & 0 & b_{24} & 0 \\ 0 & b_{14} & 0 & b_{24} \end{pmatrix}. \tag{12.42}$$

На первый взгляд, строение матрицы (12.42) совсем не похоже на строение матрицы (12.39) из предыдущего примера. Не видно блоков, равных B. Но зато легко усматривается 8 блоков, пропорциональных единичной матрице E размера 2×2:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} b_{11}\underset{2\times 2}{E} & b_{21}\underset{2\times 2}{E} \\ \hline b_{12}\underset{2\times 2}{E} & b_{22}\underset{2\times 2}{E} \\ \hline b_{13}\underset{2\times 2}{E} & b_{23}\underset{2\times 2}{E} \\ \hline b_{14}\underset{2\times 2}{E} & b_{24}\underset{2\times 2}{E} \end{array}\right). \tag{12.43}$$

После разбора еще одного примера мы объясним (см. замечание 12.5), что же все-таки имеется общего в облике матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Пример 12.5. Рассмотрим теперь композицию

$$\mu_{A,B} = \rho_B \circ \lambda_A : V_1 \longrightarrow V_3;\ X \mapsto A \cdot X \cdot B;\ X \in V. \tag{12.44}$$

Согласно предложению 12.3, матрица оператора (12.44) относительно базисов (12.37) и (12.40) находится как произведение:

$$\underset{8\times 6}{\mathbf{C}} = \underset{8\times 4}{\mathbf{B}} \cdot \underset{4\times 6}{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} & b_{11}a_{13} & b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12} & b_{21}a_{13} \\ b_{11}a_{21} & b_{11}a_{22} & b_{11}a_{23} & b_{21}a_{21} & b_{21}a_{22} & b_{21}a_{23} \\ \hline b_{12}a_{11} & b_{12}a_{12} & b_{12}a_{13} & b_{22}a_{11} & b_{22}a_{12} & b_{22}a_{13} \\ b_{12}a_{21} & b_{12}a_{22} & b_{12}a_{23} & b_{22}a_{21} & b_{22}a_{22} & b_{22}a_{23} \\ \hline b_{13}a_{11} & b_{13}a_{12} & b_{13}a_{13} & b_{23}a_{11} & b_{23}a_{12} & b_{23}a_{13} \\ b_{13}a_{21} & b_{13}a_{22} & b_{13}a_{23} & b_{23}a_{21} & b_{23}a_{22} & b_{23}a_{23} \\ \hline b_{14}a_{11} & b_{14}a_{12} & b_{14}a_{13} & b_{24}a_{11} & b_{24}a_{12} & b_{24}a_{13} \\ b_{14}a_{21} & b_{14}a_{22} & b_{14}a_{23} & b_{24}a_{21} & b_{24}a_{22} & b_{24}a_{23} \end{array}\right),$$

с легко усматриваемым блочным строением:

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c|c} b_{11}\underset{2\times 3}{A} & b_{21}\underset{2\times 3}{A} \\ \hline b_{12}\underset{2\times 3}{A} & b_{22}\underset{2\times 3}{A} \\ \hline b_{13}\underset{2\times 3}{A} & b_{23}\underset{2\times 3}{A} \\ \hline b_{14}\underset{2\times 3}{A} & b_{24}\underset{2\times 3}{A} \end{array}\right). \tag{12.45}$$

Обратите внимание на такую деталь: скалярными множителями в блоках, перед матричными множителями A служат элементы матрицы B^t, транспонированной к B.

Замечание 12.5. Остается прояснить общую закономерность, прослеживаемую в трех последних примерах. С этой целью придется ввести новое алгебраическое действие над матрицами, называемое *кронекеровским умножением*.

Для любых прямоугольных матриц A и B, произвольных размеров $m \times n$ и $p \times q$ соответственно, определяется следующая матрица размера $mp \times nq$:

$$\underset{mp\times nq}{C} = \underset{m\times n}{A} \otimes \underset{p\times q}{B} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \hline a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{array}\right). \tag{12.46}$$

Принцип составления матрицы (12.46) таков: каждай элемент a_{ij} первой матрицы заменяется на блок $a_{ij}B$, равный произведению этого элемента на вторую матрицу.

Матрица $A \otimes B$ называется *кронекеровским* (или, иногда, *тензорным*) произведением матриц A и B.

Теперь можно объявить, что матрица (12.45) есть не что иное, как кронекеровское произведение

$$\mathbf{C} = B^t \otimes A. \tag{12.47}$$

Матрицы (12.39) и (12.43) также можно представить в виде кронекеровских произведений:

$$\mathbf{A} = E \otimes A; \quad \mathbf{B} = B^t \otimes E. \tag{12.48}$$

Важно то, что полученное в примере 12.5 представление для матрицы линейного оператора $X \mapsto AXB$ в виде тензорного произведения (12.47) сохраняет свою силу при любых размерах матриц A и B (размеры переменной матрицы X обязаны быть такими, чтобы были осуществимы оба умножения).

Подробнее со свойствами и приложениями кронекеровского произведения можно познакомиться, например, по справочнику [10].

Интересно, что эта алгебраическая операция играет ключевую роль при исследовании *линейных матричных уравнений* (в связи с чем читателям можно напомнить, что блочные матрицы, являющиеся по сути кронекеровскими произведениями, встречались нам в [A_1, § 7]).

§ 13. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов. Эквивалентные матрицы. Подобные матрицы

13.1. Замена базисов и преобразование матрицы линейного отображения. В § 7 были определены матрицы перехода от одного базиса в конечномерном линейном пространстве к другому и были установлены правила пересчета координатных столбцов при замене базисов. В данном параграфе мы рассмотрим зависимость матрицы линейного отображения (оператора) $\varphi : V \to W$ в конечномерных линейных пространствах V и W (над полем P) от выбора базисов в этих пространствах.

Теорема 13.1. *Пусть в n-мерном линейном пространстве V заданы два базиса $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$, с матрицей перехода T от первого базиса ко второму. Аналогично, пусть в m-мерном пространстве W заданы базисы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ и матрица перехода Q. Рассмотрим линейный оператор*

$$\varphi : V \longrightarrow W, \tag{13.1}$$

и пусть ему отвечает в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ матрица A, а в базисах $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{C}'$ — матрица A'. Тогда

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot T; \tag{13.2a}$$

$$A = Q \cdot A' \cdot T^{-1}. \tag{13.2b}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $x \in V$ и его образ $y = \varphi(x) \in W$ при отображении (13.1). Согласно (12.32), будем иметь:

$$\overline{y} = A \cdot \overline{x}; \tag{13.3a}$$

$$\overline{y}' = A' \cdot \overline{x}', \tag{13.3b}$$

где векторы-столбцы $\overline{x}$ и $\overline{x}'$ ($\overline{y}$ и $\overline{y}'$) связаны формулами типа (7.12):

$$\overline{x} = T \cdot \overline{x}';\ \overline{x}' = T^{-1} \cdot \overline{x}; \tag{13.4a}$$

$$\overline{y} = Q \cdot \overline{y}';\ \overline{y}' = Q^{-1} \cdot \overline{y}. \tag{13.4b}$$

Обратите внимание на то, что (как и в § 7) штрихи в формулах (13.3b), (13.4a) и (13.4b) относятся не к буквам x или y, а к чертам над ними; так арифметические векторы $\overline{x}$ и $\overline{x}'$ изображают один и тот же абстрактный вектор $x \in V$, но в разных базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$.

Подставляя во вторую из формул (13.4b) значение $\overline{y}$ из формулы (13.3a), а в полученный результат — значение $\overline{x}$ из (13.4a), получим (с учетом ассоциативности матричного умножения):

$$\overline{y}' = (Q^{-1} \cdot A \cdot T) \cdot \overline{x}'. \tag{13.5}$$

Приравнивая правые части формул (13.3b) и (13.5), получим равенство

$$A' \cdot \overline{x}' = (Q^{-1} \cdot A \cdot T) \cdot \overline{x}', \tag{13.6}$$

которое должно иметь место для любого вектора $x \in V$, или, что равносильно, для любого вектора-столбца $\overline{x}' \in P^n$. (Соответствие между x и $\overline{x}'$ является изоморфизмом, и когда x пробегает все V — $\overline{x}'$ пробегает все P^n.)

Неопытные читатели захотят здесь просто "сократить" равенство (13.6) на $\overline{x}'$. Но, увы, "сокращение на вектор" абсолютно незаконно! Из соотношения

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\overline{x}} = \underset{m\times n}{B} \cdot \underset{n\times 1}{\overline{x}} \tag{13.7}$$

отнюдь не следует $A = B$. Однако это заключение становится справедливым, если (13.7) верно *для любого* $\overline{x} \in P^n$. Действительно, тогда в качестве $\overline{x}$ можно выбирать по очереди все векторы естественного базиса $\overline{e_j}$ ($j = 1, ..., n$), в результате чего окажутся равными все соответствующие столбцы рассматриваемых матриц: $\overline{a_j} = \overline{b_j}$ ($j = 1, ..., n$). Следовательно, будут равны и сами матрицы: $A = B$.

С соотношением (13.6) у нас как раз такая ситуация: $\overline{x}'$ пробегает все арифметическое линейное пространство P^n. Поэтому из (13.6) вытекает (13.2a).

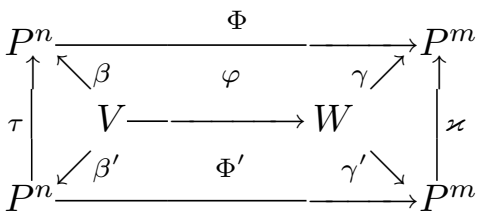
Равенство (13.2b) очевидным образом получается из (13.2a) домножением обеих частей (слева на Q, а справа — на T^{-1}). □

13.2.* Изменение "оцифровки" для линейного оператора при замене базисов. В п. 12.4 арифметизацией (или "оцифровкой") линейного оператора (13.1) назывался оператор

$$\Phi : P^n \longrightarrow P^m, \tag{13.8}$$

определяемый с помощью координатных изоморфизмов как композиция (12.26). Замена базисов меняет и оператор (13.8). Все соотношения между двумя "оцифровками" и координатными изоморфизмами усматриваются на следующей диаграмме, содержащей в себе две диаграммы типа 12.1 и две диаграммы типа 7.1.

Диагр. 13.1



Приведем также сводку формул, связывающих стрелки (отображения) диаграммы 13.1:

$$\begin{gathered}
y = \varphi(x); \\
\overline{x} = \beta(x); \quad \overline{y} = \gamma(y); \\
\overline{x}' = \beta'(x); \quad \overline{y}' = \gamma'(y); \\
\overline{x} = \tau(\overline{x}') = T \cdot \overline{x}'; \quad \overline{y} = \varkappa(\overline{y}') = Q \cdot \overline{y}'; \\
\overline{y} = \Phi(\overline{x}) = A \cdot \overline{x}; \quad \overline{y}' = \Phi'(\overline{x}') = A' \cdot \overline{x}'; \\
\Phi \circ \tau = \varkappa \circ \Phi'; \quad \Phi' = \varkappa^{-1} \circ \Phi \circ \tau; \\
A' = Q^{-1} \cdot A \cdot T.
\end{gathered}$$

13.3. Эквивалентные матрицы. При замене базисов матрица линейного оператора (гомоморфизма) преобразуется так [см. формулу (13.2a)]: слева и справа она домножается на обратимые квадратные матрицы (соответствующих размеров). В связи с этим, оказывается важным исследование следующего *отношения* на множестве всех матриц (фиксированного размера).

Определение 13.1. Две матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}(m, n; P)$ называются *эквивалентными* (и это обозначается $A \sim B$), если существуют две *обратимые* квадратные матрицы, L (размера $m \times m$) и R (размера $n \times n$), такие, что

$$B = L \cdot A \cdot R. \tag{13.9}$$

Отношение $A \sim B$ является *отношением эквивалентности*, т. е. оно *рефлексивно*, *симметрично* и *транзитивно*. В самом деле, рефлексивность

$$A \sim A$$

получается, если в (13.9) взять в качестве L и R единичные матрицы; симметричность

$$[\, A \sim B \,] \Longrightarrow [\, B \sim A \,]$$

следует из того, что (13.9) влечет

$$A = L^{-1} \cdot B \cdot R^{-1}, \tag{13.9$'$}$$

а транзитивность

$$[\, A \sim B \,] \wedge [\, B \sim C \,] \Longrightarrow [\, A \sim C \,]$$

доказывается так:

$$[\, B = L \cdot A \cdot R \,] \wedge [\, C = L_1 \cdot B \cdot R_1 \,] \Longrightarrow [\, C = (L_1 L) \cdot A \cdot (R R_1) \,],$$

где произведения $L_1 L$ и $R R_1$ являются обратимыми матрицами.

Замечание 13.1. Мы не впервые в курсе алгебры сталкиваемся с отношениями эвивалентности. Скажем, в п. 36.5 пособия [A_1] вводилось отношение *ассоциированности* для элементов коммутативного кольца, которое также является отношением эквивалентности. Более того, оно обозначалось тем же символом $\sim$ (в связи с чем уже говорилось о "перегруженности" последнего). Разумеется, это — совершенно разные отношения, заданные на разных множествах.

Можно заметить, однако, что любое отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно задано, в объединение попарно не пересекающихся подмножеств — *классов эквивалентности* (в один класс попадают эквивалентные друг другу элементы; элементы различных классов не эквивалентны между собой).

В [A_1, п. 44.3] говорилось также о "проблеме представительства": требуется "назначить" *канонических представителей*, по одному от каждого класса эквивалентености. Ниже эта задача будет решена для отношения эквивалентности прямоугольных матриц.

Предложение 13.1. *Следующие четыре утверждения о матрицах* $A, B \in \mathrm{Mat}(m, n; P)$ *равносильны:*

1) матрицы A *и* B *эквивалентны* ($A \sim B$);

2) от одной из этих матриц можно перейти к другой за конечное число шагов — элементарных преобразований типов I — III над строками и столбцами;

3) матрицы A *и* B *имеют одинаковые ранги:*

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B); \tag{13.10}$$

4) матрицы A *и* B *имеют одинаковые скелетные виды.*

Доказательство. Данное предложение фактически уже доказано в первом семестре, хотя там не было явной формулировки, поскольку не был еще введен термин *эквивалентные матрицы.* Тем не менее, равносильность второго, третьего и четвертого утверждений установлена в [A_1] по ходу доказательства *первой теоремы о ранге матрицы* (теоремы 12.1): две матрицы имеют одинаковые ранги тогда и только тогда, когда они приводятся к одному и тому же скелетному виду. (Напомним, что в скелетном виде $\widehat{A}$ матрицы A в начале главной диагонали стоят $r = \mathrm{rank}(A)$ единиц, а все остальные элементы равны нулю.)

Далее, в п. 14.4 [A_1], при изучении обратимых матриц установлено, что такие матрицы представляются как произведения *элементарных матриц*, или, что равносильно, получаются из единичной матрицы *элементарными преобразованиями* над строками и столбцами. Из предложения 14.4 усматривается также тот факт, что две матрицы можно соединить конечной цепочкой элементарных преобразований (типов I — III, над строками и столбцами) тогда и только тогда, когда каждая из них получается из другой домножением слева и справа на обратимые матрицы. А это уже означает, что первое утверждение настоящего предложения равносильно любому из трех последующих. □

Замечание 13.2. Возвращаясь к проблематике замечания 13.1, можно констатировать, что в каждом классе эквивалентности $(m \times n)$-матриц имеется однозначно определенная матрица скелетного вида. Ясно также, что общее количество классов эквивалентности в $\mathrm{Mat}(m, n; P)$ конечно и равно $1 + \min(m, n)$. (Почему?) Один из классов эквивалентности является одноэлементным, т. е. содержит единственную матрицу. (Какую?)

Выше, в замечании 7.1, объяснялось, что в каждом n-мерном пространстве существует биекция между множеством всех базисов и множеством обратимых матриц $GL(n, P)$. Поэтому факт, упомянутый в предыдущем замечании, можно трактовать иначе, на языке линейных отображений.

Предложение 13.2. *Для любого линейного оператора (13.1), действующего в конечномерных линейных пространствах V и W, существуют такие базисы в этих пространствах, в которых оператору соответствует матрица скелетного вида.*

Доказательство. Выберем сначала в пространствах V и W произвольные базисы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ соответственно. Пусть в этих базисах оператору φ отвечает матрица A. Приведем ее к скелетному виду $\widehat{A}$ и запишем представление

$$\widehat{A} = L \cdot A \cdot R, \tag{13.11}$$

с обратимыми матрицами L и R. Построим в V новый базис $\mathcal{B}'$, такой, что матрицей перехода к нему от $\mathcal{B}$ служит $T = R$. В пространстве W также построим новый базис $\mathcal{C}'$, матрицей перехода к которому от старого базиса $\mathcal{C}$ служит $Q = L^{-1}$. Тогда формула (13.11) приобретет знакомый [см. (13.2а)] вид:

$$\widehat{A} = Q^{-1} \cdot A \cdot T. \tag{13.11$'$}$$

Следовательно, в базисах $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{C}'$ оператору φ будет соответствовать матрица скелетного вида $\widehat{A}$. □

Замечание 13.3. Ниже, в § 15 (см. замечание 15.4), мы передокажем результат, полученный в предложении 13.2, исходя из других, более наглядных соображений.

13.4. Примеры пересчета матриц линейных отображений

Пример 13.1. Выполним следующее типовое упражнение.

З а д а ч а. Линейный оператор $\varphi : V \longrightarrow W$ действует из трехмерного линейного пространства V в четырехмерное пространство W (все — над полем $\mathbb{R}$). В некоторых базисах $\mathcal{B} = [b_1, b_2, b_3]$ и

$\mathcal{C} = [c_1, c_2, c_3, c_4]$ в указанных пространствах оператору φ отвечает матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора φ в новых базисах $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{C}'$, связанных с исходными формулами

$$\begin{cases} b'_1 = b_1 + b_2 + b_3; \\ b'_2 = b_1 + b_2 \quad ; \\ b'_3 = b_1 \quad ; \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} c'_1 = 2c_1 - c_2 \quad ; \\ c'_2 = 2c_2 + c_3 \quad ; \\ c'_3 = 2c_3 + c_4; \\ c'_4 = c_1 + c_2 + c_3 \quad . \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Составляем матрицы перехода

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Во избежание неожиданных неприятностей в последующих вычислениях, рекомендуется немедленно проверить корректность поставленной задачи: действительно ли заданные формулами перехода системы векторов $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{C}'$ являются базисами? Чтобы гарантировать это, мы должны проверить обратимость матриц T и Q. Для этого достаточно найти их *ранги* (и убедиться в том, что они *полные*) или вычислить их *определители* (и убедиться в том, что они *ненулевые*).

Проверку обратимости Q следует "довести до конца", т. е. явно вычислить обратную матрицу Q^{-1}. После этого останется применить формулу (13.2а) и получить

О т в е т: в базисах $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{C}'$ оператору φ соответствует матрица

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 5 \\ 18 & 15 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ -23 & -19 & -9 \end{pmatrix}.$$

Замечание 13.4. В вычислениях с обратными матрицами бывают полезны "маленькие хитрости". Вспомните из первого пособия [A_1, п. 14.6] алгоритм Жордана — Гаусса вычисления A^{-1}: конкатенация $(A|E)$ приводится (если удается) к виду Ж.—Г. $(E|B)$, из которого считывается $A^{-1} = B$ (неудача свидетельствует о необратимости A).

Секрет этого алгоритма состит в том, что элементарные преобразования над строками, дающие E на месте A, равносильны умножению $(A|E)$ слева на матрицу A^{-1} (если она существует). Тот же прием можно применить, например, к конкатенации $(Q|A)$ и — если матрица Q обратима — добиться вида $(E|C)$, из которого прочитать: $Q^{-1} \cdot A = C$. Выигрыш состоит в том, что (не нужная "в чистом виде") матрица Q^{-1} не вычисляется (хотя ее существование устанавливается).

Пример 13.2. Еще одна типовая

З а д а ч а. Линейному оператору $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, составленных из векторов-столбцов матриц

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно, отвечает матрица

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{13}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{8}{3} \\ \\ \frac{31}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{52}{3} \end{pmatrix}.$$

Определить, какая матрица будет отвечать этому оператору в базисах $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{C}'$, составленных из столбцов матриц

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$C' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Как и в предыдущем примере, сначала надо обеспокоиться обратимостью данных матриц B, C, B' и C'. Затем следует обратиться к результату замечания 7.2 — формулам для матриц перехода от одного базиса в арифметическом линейном пространстве к другому и обратно. По первой из формул (7.9), будем иметь: $T = B^{-1} \cdot B'$ и $Q = C^{-1} \cdot C'$. При реализации указанных вычислений можно прибегнуть к "хитростям" замечания 12.4. (Между прочим, попутно контролируется обратимость матриц B и C, но, увы, не B' и C'.) И, наконец, нужно воспользоваться формулой (12.3а).

О т в е т:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Наверное, проницательные читатели сообразили, что при составлении последней задачи автор действовал "от ответа": взял вполне приличную матрицу A' и (наудачу) подверг ее преобразованиям; получилась более сложная матрица A, которую и было предложено подвергнуть обратным преобразованиям. Составители ваших задачников часто поступают подобным образом.)

13.5. Линейные эндоморфизмы и их матрицы. Линейные *эндоморфизмы* (далее: *л.э.*) являются линейными гомоморфизмами из некоторого линейного пространства в само это пространство:

$$\varphi : V \longrightarrow V. \tag{13.12}$$

Имеется важная особенность в определении *матрицы л.э.*: второй базис $\mathcal{C}$ (см. определение 12.2) считается совпадающим с первым базисом $\mathcal{B}$. Естественно, матрица

$$\underset{n\times n}{A} = \left(\overline{\varphi(b_1)} \,\middle|\, \overline{\varphi(b_2)} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \overline{\varphi(b_n)} \right) \tag{13.13}$$

л.э. (13.12) оказывается квадратной. Но важно не только это. Очень существенно то, что мы оказываемся значительно более "ограниченными в заменах". Вместо независимой замены двух базисов [описываемой двумя матрицами перехода, T и Q; см. формулу (13.2а)], мы можем себе позволить лишь замену одного базиса.

Указанная формула пересчета матрицы линейного оператора остается справедливой, но надо считать, что $Q = T$. Переформулировкой теоремы 13.1 для случая линейных эндоморфизмов является следующая (не требующая отдельного доказательства)

Теорема 13.1′. *Пусть в n-мерном линейном пространстве V заданы два базиса $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$, с матрицей перехода T от первого базиса ко второму. Рассмотрим линейный эндоморфизм (13.12). Пусть ему отвечают в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ (квадратные) матрицы A и A' соответственно. Тогда*

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T. \ \square \tag{13.14}$$

13.6. Подобные квадратные матрицы. По тому же принципу, как формула пересчета (13.2а) для матрицы линейного оператора (гомоморфизма) инициировала определение 13.1 эквивалентных матриц, формула пересчета (13.14) для матрицы л.э. инициирует следующее

Определение 13.2. Две квадратные $(n \times n)$-матрицы A и B называются *подобными* (и это обозначается $A \backsim B$), если найдется обратимая $(n \times n)$-матрица T, такая, что

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T. \tag{13.15}$$

Таким образом, при замене базиса в линейном пространстве матрица л.э. заменяется на подобную. Обратно, если матрица A соответствует некоторому л.э. в некотором базисе $\mathcal{B}$, то подобная матрица (13.15) будет соответствовать тому же эндоморфизму в базисе $\mathcal{B}'$, который строится по базису $\mathcal{B}$ и матрице перехода T (см. замечание 7.1).

Легко убедиться в том, что отношение подобия $\backsim$ на множестве

$$L(n, P) = \mathrm{Mat}(n, n; P)$$

является отношением эквивалентности, но это — *более сильное* отношение эквивалентности, нежели отношение $\sim$, также определенное на этом множестве:

$$[\, A \backsim B \,] \Longrightarrow [\, A \sim B \,]. \tag{13.16}$$

(Символ $\backsim$ является не стандартным, но "самодельным"; он нарисован автором средствами TEX с тем, чтобы помочь читателям разобраться в многочисленных отношениях эквивалентности, для обозначения которых зачастую используется одна и та же тильда.)

Более сильному отношению эквивалентности соответствует более "мелкое" разбиение на классы эквивалентности.

Между прочим, в тривиальном случае $n = 1$ все ненулевые одноэлементные матрицы (т. е. попросту — скаляры) эквивалентны, но никакие две из них не подобны.

В общем случае, в соответствии с замечанием 13.2, множество $L(n, P)$ разбивается на $n + 1$ классов по отношению $\sim$.

С отношением $\backsim$ все гораздо сложнее и интереснее! Выводу *критериев подобия* квадратных матриц будет посвящена вся следующая глава.

Даже удивительно, насколько важную роль в совершенно "рабочих" (прикладных) разделах линейной алгебры играет такой (казалось бы, частный) вопрос, как условия подобия матриц.

Замечание 13.5. Отметим специфический частный случай замены базиса в линейном пространстве — *перестановку базисных векторов*. Иначе говоря, производится *перенумерация* векторов, составляющих базис. Совершенно очевидно, что матрица перехода при этом будет иметь следующий специальный вид: ее элементами будут только нули и единицы, причем в каждой строке и в каждом столбце будет присутствовать лишь одна единица.

Например, переходу от базиса $\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, b_2, b_4, b_5, b_6 \,]$ к базису $\mathcal{B} = [\, b_4, b_6, b_5, b_2, b_3, b_1 \,]$ соответствовать матрица

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы "перестановочного" перехода однозначно определяются *перестановками* (в смысле главы 3 пособия [A_1]). Скажем, выписанная выше матрица соответствует перестановке

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

В общем случае перстановке $\sigma \in S_n$ соответствует $(n \times n)$-матрица T_σ, однозначно определяемая равенствами $T_\sigma \cdot \overline{e_j} = \overline{e_{\sigma(j)}}$ $(j = 1, \dots, n)$.

Определитель матрицы перестановочного перехода определяется формулой

$$\det(T_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Попробуйте самостоятельно обосновать это утверждение, исходя из свойств определителей; см. [A_1, п. 24.2].

Отображение $\sigma \mapsto T_\sigma$ из группы перестановок S_n в группу обратимых матриц $GL(n, P)$ является *гомоморфизмом групп*. (Это — еще одно простое упражнение; понятие гомоморфизма вводилось в [A_1]; см. замечание 15.1.)

13.7. Примеры пересчета матриц л.э.

Пример 13.3. Решите самостоятельно следующую совершенно стандартную задачу, аналогичную рассмотренной в примере 13.1. Для пересчета матрицы л.э. при замене базиса должна использоваться формула (13.14): $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$.

З а д а ч а. В некотором базисе $\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, b_3 \,]$ трехмерного линейного пространства V (над полем $\mathbb{R}$) л.э. $\varphi : V \to V$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -3 & -6 & -10 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить матрицу A' этого эндоморфизма в новом базисе $\mathcal{B}'$, который связан со старым базисом $\mathcal{B}$ формулами:

$$\begin{cases} b'_1 = & -2b_2 & +b_3; \\ b'_2 = -b_1 & - b_2 & +b_3; \\ b'_3 = 2b_1 & - b_2 & . \end{cases}$$

О т в е т (см. обозначения в следующем примере): $A' = \boxed{J_3(-1)}$.

Пример 13.4. Вернемся к исследованию оператора дифференцирования многочленов (см. пример 12.1). Но на этот раз будем рассматривать его как л.э. пространства $V = \mathbb{R}_n[x]$:

$$\varphi = {}' : V \longrightarrow V;\ f(x) \mapsto f'(x);\ f(x) \in V. \qquad (13.18)$$

Если вы усвоили принцип составления матриц для линейных отображений, то вам будет легко понять, что матрица A, отвечающая эндоморфизму (13.18) в базисе $\mathcal{B}_n = [\,1, x, ..., x^n\,]$, будет отличаться от матрицы (12.34) присутствием еще одной (нулевой) строки:

$$\underset{(n+1)\times(n+1)}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.19}$$

В пространстве многочленов $V = \mathbb{R}_n[x]$ имеется базис, лишь слегка (наличием скалярных множителей при базисных одночленах) отличающийся от естественного базиса $\mathcal{B}_n$:

$$\mathcal{B}'_n = [\,1,\, x,\, \frac{x^2}{2!},\, ...\,,\, \frac{x^n}{n!}\,]. \tag{13.20}$$

Найдем матрицу A' эндоморфизма (13.19) в базисе (13.20). Матрица перехода от $\mathcal{B}_n$ к $\mathcal{B}'_n$ устроена очень просто: она является диагональной, причем по диагонали стоят коэффициенты $1/k!$ (где $k = 0, ..., n$). Но в данном примере, невзирая на простоту матрицы перехода, использование формулы (13.14) было бы излишеством. Гораздо легче найти A' непосредственно.

В силу того, что при любом $k = 1, ..., n$ мы имеем

$$\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,,$$

для действия оператора (13.19) на новые базисные векторы

$$b'_k = \frac{x^k}{k!}\ (k = 0, 1, ..., n) \tag{13.21}$$

получаются соотношения

$$\varphi(b'_0) = 0;\ \varphi(b'_k) = b'_{k-1}\ (k = 1, ..., n), \tag{13.22}$$

и матрица эндоморфизма (13.18) в новом базисе приобретет замечательный вид:

$$\underset{(n+1)\times(n+1)}{A'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (13.19')$$

Квадратные матрицы вида (13.19′) играют совершенно выдающуюся роль в линейной алгебре. Они именуются *нильпотентными жордановыми ящиками* (или *клетками*, или *блоками*). Все элементы такого ящика равны нулю, за исключением тех, которые находятся на первой "наддиагонали" и равняются единице.

Стандартным обозначением нильпотентного жорданова ящика (*н.ж.я.*) является $J_n(0)$; мы сделаем это обозначение более бросающимся в глаза с помощью *выделения боксами*; ящик будет "выглядеть как ящик": $\boxed{J_n(0)}$. Поясним, что индексом служит порядок матрицы, а нуль в скобке указывает на то, что по главной диагонали стоят нули. Теперь мы понимаем, что в формуле (13.19′) фигурирует ящик $\boxed{J_{n+1}(0)}$.

Просто *жордановы ящики* (*ж.я.*) обозначаются $\boxed{J_n(\lambda_0)}$; по диагонали у них должен стоять скаляр $\lambda_0 \in P$, указываемый в обозначении (в скобках).

Почему так важны ж.я. и откуда они возникают, мы разберемся в следующей главе. А сейчас разъясним термин "нильпотентная" (применительно к матрице) или "нильпотентный" (применительно к линейному оператору). Возьмите ящик, скажем, пятого порядка, $\boxed{J_5(0)}$ и возводите его в квадрат, куб, четвертую степень; пятая степень окажется нулевой.

Другой вариант: вычислим пятую производную от многочлена, степень которого не выше четырех (другими словами, применим к такому многочлену пятую степень оператора дифференцирования). Ясно, что результат будет нулевым. Это означает, что на $\mathbb{R}_4[x]$ пятая степень оператора $\varphi ='$ есть нулевой оператор.

Кстати, и несколько более сложная матрица (13.19) также является нильпотентной. Этот факт можно проверить непосредственным

возведением в степень, вплоть до $A^{n+1} = O$, но косвенно он немедленно следует из установленной выше нильпотентности оператора: $\varphi^{n+1} = o$.

Далее напомним читателям об иной проблематике, связанной с пространствами многочленов.

В примере 7.2 рассматривались базисы вида $[\,1, x-a, ..., (x-a)^n\,]$. Введем "усовершенствованный" базис

$$\mathcal{T}_n^{(a)} = [\,1,\, x-a,\, \frac{(x-a)^2}{2!},\, ...\,,\, \frac{(x-a)^n}{n!}\,], \tag{13.23}$$

который можно было бы назвать *тейлоровским* (в силу очевидной связи с одноименной формулой из математического анализа; см. также [A_1, п. 47.3]).

Определите, какую матрицу будет иметь оператор дифференцирования, заданный на пространстве $V = \mathbb{R}_n[x]$, относительно базиса (13.23). [Это даже не упражнение, но очень простой контрольный вопрос.]

Пример 13.5. Предыдущий пример 13.4 можно (отправляясь не от л.э., но от квадратной матрицы) трактовать следующим образом: н.ж.я. $\boxed{J_{n+1}(0)}$ "моделируется" с помощью оператора дифференцирования, рассматриваемого на пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n (с действительными коэффициентами).

Допускает ли аналогичную операторную трактовку ж.я. общего вида $\boxed{J_{n+1}(\lambda_0)}$ (где $\lambda_0 \in \mathbb{R}$)?

Разумеется. Причем в качестве моделирующего оператора снова можно взять оператор $\varphi = {}'$. Однако рассматривать его придется на другом линейном пространстве; а именно — на линейном подпространстве

$$\mathbb{R}_{n,\lambda_0}[x] = e^{\lambda_0 x}\mathbb{R}_n[x] \leqslant \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

состоящем из всевозможных произведений вида $e^{\lambda_0 x} f(x)$ фиксированной показательной функции $e^{\lambda_0 x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ на произвольный многочлен $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$.

Тот факт, что такие функции в линейном пространстве всех бесконечно гладких функций действительно образуют линейное подпространство (причем — инвариантное относительно оператора дифференцирования) совершенно очевиден.

Очевидно и то, что подпространство $\mathbb{R}_{n,\lambda_0}[x]$ изоморфно подпространству $\mathbb{R}_n[x]$, причем изоморфизм задается (обратимым) линейным оператором умножения на (нигде не обращающуюся в нуль) функцию $e^{\lambda_0 x}$.

Следовательно,

$$\dim(\mathbb{R}_{n,\lambda_0}[x]) = \dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$$

и в качестве базиса в этом подпространстве можно выбрать систему функций

$$\mathcal{C}_{n,\lambda_0} = [\, e^{\lambda_0 x},\, xe^{\lambda_0 x},\, \frac{x^2}{2!}e^{\lambda_0 x},\, \ldots,\, \frac{x^n}{n!}e^{\lambda_0 x}\,]. \tag{13.20a}$$

(Здесь уместно проинформировать читателей о специальном термине *квазимногочлены*. Так называются функции, являющиеся суммами произведений многочленов и экспонент. С квазимногочленами вы обязательно встретитесь при изучении линейных дифференциальных уравнений. Введенное выше подпространство (13.20a) состоит из квазимногочленов простейшего вида: у них у всех один и тот же показательный множитель.)

Применим теперь к базисным элементам (функциям)

$$c_k = \frac{x^k}{k!}e^{\lambda_0 x}\ (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{13.21a}$$

оператор дифференцирования $\varphi = {}'$.

Получим соотношения

$$\begin{aligned}
&\varphi(c_0) = (e^{\lambda_0 x})' = \lambda_0 e^{\lambda_0 x} = \lambda_0 c_0;\\
&\varphi(c_k) = (\frac{x^k}{k!}e^{\lambda_0 x})' = \lambda_0 \frac{x^k}{k!}e^{\lambda_0 x} + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_0 x} =\\
&\qquad\qquad = \lambda_0 c_k + c_{k-1}\ (k = 1, \ldots, n),
\end{aligned} \tag{13.22a}$$

в силу которых эндоморфизм $\varphi = {}'$ имеет в базисе (13.20a) матрицу — жорданов ящик $\boxed{J_{n+1}(\lambda_0)}$.

13.8.* Оператор разностного дифференцирования. Начиная с п. 1.6, мы неоднократно обращались к *оператору дифференцирования* как к примеру линейного отображения. Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ определяется с помощью предельного перехода:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \tag{13.24}$$

существует она не всегда, и оператор $' : f(x) \mapsto f'(x)$ мы рассматривали на линейном пространстве $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *гладких* (непрерывно дифференцируемых) функций. Значениями этого оператора являются просто непрерывные функции.

Оператор $'$ можно рассматривать также как л.э. пространства *бесконечно гладких* функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ или пространства многочленов $\mathbb{R}[x]$. Однако все эти пространства бесконечномерны. И только рассматривая оператор $'$ на $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}_n[x]$, мы можем применить к нему методы конечномерной линейной алгебры, той науки, которую сейчас изучаем.

Выражение, стоящее в правой части формулы (13.24) *под знаком предела*, представляет не меньший интерес, чем его предел (т. е. производная). Это выражение имеет специальное обозначение

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{13.25}$$

и название — *разностная производная*. Переменная h входит в него как параметр.

Разностная производная $\Delta_h f(x)$ определена для произвольных (даже не обязательно — непрерывных) функций. Таким образом, возникает отображение

$$\Delta_h : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});\ f \mapsto \Delta_h(f);\ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{13.26}$$

Выше нам пришлось несколько усложнить обозначения: отображение Δ_h переводит функцию f в новую функцию $\Delta_h(f)$, значение которой на произвольном элементе $x \in \mathbb{R}$ определяется формулой (13.25), т. е. $\Delta_h(f)\,(x) = \Delta_h f(x)$. Такое усложнение, увы, необходимо: нам важно подчеркнуть, что аргументом Δ_h служит f, а, уже в свою очередь, как f, так и $\Delta_h(f)$ зависят от переменной x.

Убедимся в линейности отображения (13.26). Первым делом требуется доказать, что для любых функций $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ справедливо свойство

$$\Delta_h(f+g) = \Delta_h(f) + \Delta_h(g). \tag{13.27a}$$

Соотношение (13.27a) подлежит проверке при любом значении переменной $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Delta_h(f+g)(x) &= \frac{1}{h}((f+g)(x+h) - (f+g)(x)) = \\ &= \frac{1}{h}((f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))) = \\ &= \frac{1}{h}((f(x+h)-f(x)) + \frac{1}{h}(g(x+h)-g(x)) = \\ &= \Delta_h(f)(x) + \Delta_h(g)(x) = (\Delta_h(f)+\Delta_h(g))(x).\end{aligned}$$

Потрудитесь проверить второе из требуемых соотношений:

$$\Delta_h(\lambda f) = \lambda \Delta_h(f). \tag{13.27b}$$

Разностная производная константы, как и обычная, равна нулю. Для многочлена степени $k \geqslant 1$ разностная производная является многочленом степени $k-1$.

В силу линейности оператора Δ_h, последнее утверждение достаточно проверить на одночленах $f(x) = x^k$. С помощью бинома Ньютона получается:

$$\begin{aligned}\Delta_h(x^k) &= \frac{1}{h}((x+h)^k - x^k) = \\ &= \frac{1}{h}(x^k + C_k^1 h x^{k-1} + \ldots + h^k - x^k) = \frac{1}{h}(C_k^1 h x^{k-1} + \ldots + h^k).\end{aligned}$$

Значит, *оператор разностного дифференцирования* можно рассматривать как л.э.

$$\Delta_h : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x];\ \ f(x) \mapsto \Delta_h f(x);\ \ f(x) \in \mathbb{R}_n[x]. \tag{13.28}$$

Важнейшим при изучении разностных производных является случай единичного параметра ($h = 1$), оператор Δ_1 переобозначается в простое Δ и формула (13.25) принимает особенно простой вид:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x). \tag{13.29}$$

Выражение (13.29) представляет из себя не что иное, как приращение функции $f(x)$, отвечающее приращению аргумента $\Delta x = 1$.

Вычислим матрицу л.э. (13.29), рассматриваемого на пространстве многочленов $V = \mathbb{R}_n[x]$ относительно естественного базиса $\mathcal{B}_n = [\,1, x, ..., x^n\,]$. Имеем: $\Delta(1) = 0$ и для любого $k = 1, ..., n$:

$$\Delta(x^k) = C_k^1 x^{k-1} + C_k^2 x^{k-2} + ... + C_k^{k-1} x + 1. \tag{13.30}$$

(Мы просто взяли $h = 1$ в проведенных выше вычислениях для оператора Δ_h.) Таким образом, получается матрица

$$\underset{(n+1)\times(n+1)}{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & ... & C_{n-1}^{n-2} & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & ... & C_{n-1}^{n-3} & C_n^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & C_{n-1}^{n-4} & C_n^{n-3} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & n-1 & C_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.31}$$

Сравните матрицу (13.31), отвечающую оператору разностного дифференцирования, с матрицей A, заданной формулой (13.19) и отвечающей (в том же базисе) оператору обычного дифференцирования. Обе эти матрицы являются *верхними нильтреугольными* (на главной диагонали и ниже стоят нули), у них совпадают "первые наддиагонали". А вот выше матрица B выглядит значительно сложнее, чем A. Тем не менее, B тоже нильпотентна. (Непосредственная проверка этого была бы весьма непростой, однако косвенное доказательство совершенно очевидно: оператор Δ, так же, как и оператор $'$, понижает степень многочлена ровно на единицу, и поэтому $\Delta^{n+1} = o$.)

С привлечением более серьезной алгебраической техники можно доказать, что в пространстве многочленов найдется такой базис, в котором оператору Δ отвечает матрица, в точности совпадающая с (13.19′), т. е. — с н.ж.я. $(n+1)$-го порядка. Другими словами, этот ящик и матрица B *подобны*: $B \backsim \boxed{J_{n+1}(0)}$.

13.9. Определитель и след для линейного эндоморфизма. Здесь читателям безусловно необходимо освежить в своей оперативной памяти (достаточно непростой) материал четвертой главы первого пособия, относящийся к теории определителей.

Предложение 13.3. *Подобные матрицы имеют одинаковые определители:*

$$[\, A \backsim B \,] \Rightarrow [\, \det(A) = \det(B) \,]. \tag{13.32}$$

Доказательство предложения немедленно следует из мультипликативного свойства определителя (см. п. 27.2 в $[A_1]$) и из формулы для определителя обратной матрицы (см. там же п. 28.2):

$$\det(B) = \det(T^{-1} \cdot A \cdot T) = (\det(T))^{-1} \cdot \det(A) \cdot \det(T) = \det(A). \ \square$$

Введем в рассмотрение еще одну числовую характеристику для квадратных матриц.

Определение 13.3. *Следом* квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ называется сумма ее диагональных элементов. Используется (происходящее от английского 'trace') обозначение:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{13.33}$$

След, очевидно, является *линейной формой* (см. замечание 12.4) на линейном пространстве $L(n, P)$ квадратных $(n \times n)$-матриц:

$$\operatorname{tr} : L(n, P) \longrightarrow P;\ A \mapsto \operatorname{tr}(A);\ A \in L(n, P). \tag{13.34}$$

В следующем предложении приводятся два основных свойства функции (13.34).

Предложение 13.4. *1. Для любых матриц $A, B \in L(n, P)$ справедлива формула*

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A). \tag{13.35}$$

2. Подобные матрицы имеют одинаковые следы:

$$[\, A \backsim B \,] \Rightarrow [\, \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) \,]. \tag{13.36}$$

Доказательство. 1. Первое утверждение доказывается следующей простой выкладкой:

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{n} [A \cdot B]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} [B \cdot A]_{jj} = \operatorname{tr}(B \cdot A).$$

(Не исключено, что приведенная выше цепочка преобразований над суммами, как и многие предыдущие, аналогичные, вас не только не убедит, но и огорчит... Тогда вам может помочь простой эксперимент: возьмите две квадратные матрицы, скажем, третьего порядка, перемножьте их "так и эдак" и найдите следы для обоих произведений. По ходу опыта вы наверняка заметите, что при вычислении произведений достаточно заполнять лишь диагональные клеточки, поскольку именно их содержимое идет в расчет при отыскании следов.)

2. Второе утверждение предложения легко следует из первого:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(T^{-1}\cdot A\cdot T) &= \operatorname{tr}((T^{-1}\cdot A)\cdot T) \overset{(13.35)}{=\!=\!=} \\ &= \operatorname{tr}(T\cdot(T^{-1}\cdot A)) = \operatorname{tr}((T\cdot T^{-1})\cdot A) = \operatorname{tr}(E\cdot A) = \operatorname{tr}(A).\ \square\end{aligned}$$

Теперь мы возвращаемся к линейным эндоморфизмам. Свойства (13.32) и (13.36) обеспечивают корректность следующего определения. Пусть V — конечномерное линейное пространство, φ — л.э., действующий в этом пространстве.

Определение 13.4. *Определитель* и *след* линейного эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ задаются формулами

$$\det(\varphi) = \det(A); \tag{13.37}$$

$$\operatorname{tr}(\varphi) = \operatorname{tr}(A), \tag{13.38}$$

где A — матрица, отвечающая φ в некотором базисе $\mathcal{B}$ пространства V.

В самом деле, хотя матрица A зависит от выбора базиса $\mathcal{B}$, при замене базиса она меняется на *подобную* [см. формулу (13.14)], и, следовательно, ее определитель и след не изменяются.

Замечание 13.6. Свойства определителя и следа для алгебры матриц, установленные (или упомянутые) выше, автоматически переносятся на алгебру линейных эндоморфизмов. Приведем их сводку:

$$\det(\psi\circ\varphi) = \det(\psi)\cdot\det(\varphi); \tag{13.39}$$

$$\operatorname{tr}(\lambda\cdot\varphi + \mu\cdot\psi) = \lambda\cdot\operatorname{tr}(\varphi) + \mu\cdot\operatorname{tr}(\psi); \tag{13.40}$$

$$\operatorname{tr}(\psi\circ\varphi) = \operatorname{tr}(\varphi\circ\psi). \tag{13.41}$$

§ 14. Образ и ядро, ранг и дефект линейного отображения

14.1. Отображения множеств, образы и прообразы подмножеств. Данный пункт является, можно сказать, "теоретико-множественным отвлечением": мы напомним некоторые факты и обозначения из общей теории множеств и их отображений. (В учебном плане нет такой дисциплины — "Теория множеств"; ее начала излагаются в "пусковом" курсе "Введение в математику"; часть материала рассредоточена по курсам алгебры, анализа и др.; более абстрактные аспекты этой науки изучаются в курсе математической логики.)

Рассмотрим отображение множеств $f : X \to Y$ и два подмножества: $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$. *Образом подмножества* A при отображении f называется подмножество

$$f(A) = \{\, f(x) : x \in X \,\} \subseteq Y. \tag{14.1}$$

В случае $A = X$ получается образ всего множества X, который иначе называется *образом отображения* f и обозначается

$$\mathrm{Im}(f) = f(X). \tag{14.2}$$

По определению, отображение f *сюръективно*, если $\mathrm{Im}(f) = Y$.

Прообразом подмножества B называется подмножество

$$\overset{-1}{f}(B) = \{\, x \in X \,:\, f(x) \in B \,\} \subseteq X. \tag{14.3}$$

Обратите внимание на расположение минус единицы *над* знаком отображения (а не справа-сверху, где ставятся показатели степени). Дело в том, что эта -1 показателем степени не является.

Минус первая степень отображения есть не что иное, как обратное отображение, которое существует далеко не всегда. Прообразы же определены для любых отображений и любых подмножеств.

В том случае, когда f^{-1} существует, разница теряется: прообраз B при отображении f совпадает с образом B при отображении f^{-1}:

$$\overset{-1}{f}(B) = f^{-1}(B). \tag{14.4}$$

По определению, отображение f *инъективно*, если для любого элемента $y \in \mathrm{Im}(f)$ его прообраз $\overset{-1}{f}(y)$ [т. е. прообраз *одноэлементного* подмножества $B = \{y\}$ в образе] также является *одноэлементным*.

*Замечание 14.1.** Отображения взятия образа и прообраза можно рассматривать на *булеанах* [множествах всех подмножеств; см. обозначение (1.16)]:

$$2^X \underset{\overset{-1}{f}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} 2^Y. \tag{14.5}$$

"Встречные" отображения (14.5) отнюдь не являются взаимно обратными. В общем случае справедливы лишь включения:

$$\overset{-1}{f}(f(A)) \supseteq A;\ A \subseteq X; \tag{14.6}$$

$$f(\overset{-1}{f}(B)) \subseteq B;\ B \subseteq Y. \tag{14.7}$$

Чтобы убедить в этом читателей, автор предпочитает известное восклицание древнегреческих геометров "Смотри!" и отсылку к рисункам 14.1 и 14.2 в прил. 2. Если вы усмотрели причины того, что включения (14.6) и (14.7) могут оказаться строгими, то вам легко будет также уяснить следующие факты: (14.6) обращается в равенство при дополнительном условии, что f инъективно, а (14.7) — при условии сюръективности f.

14.2. Образы и прообразы линейных подпространств при линейных отображениях. Возвращаясь в область линейной алгебры, рассмотрим два линейных пространства V и W (над одним и тем же полем P) и линейное отображение (гомоморфизм)

$$\varphi : V \to W. \tag{14.8}$$

Для любого линейного подпространства $V_1 \leqslant V$ определен его образ $\varphi(V_1)$ при отображении φ, являющийся подмножеством (ниже мы докажем, что — подпространством) в W. В частности, определен образ линейного отображения $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(V)$.

Для любого линейного подпространства $W_1 \leqslant W$ определен его прообраз $\overset{-1}{\varphi}(V_1)$ при отображении φ, являющийся подмножеством (фактически — подпространством) в V. Особую роль будет играть прообраз нулевого подпространства $W_1 = O$ (состоящий из тех и только тех векторов в V, которые под действием φ переходят в нуль). Для этого прообраза вводится особый термин и обозначение.

Определение 14.1. *Ядром* линейного отображения (14.8) называется подмножество

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \overset{-1}{\varphi}(O) = \{\, x \in V \,:\, \varphi(x) = 0 \,\}. \tag{14.9}$$

Предложение 14.1. *Образы и прообразы линейных подпространств при линейном отображении сами являются линейными подпространствами:*

$$[\, V_1 \leqslant V \,] \Rightarrow [\, \varphi(V_1) \leqslant W \,];\ [\, W_1 \leqslant W \,] \Rightarrow [\, \overset{-1}{\varphi}(W_1) \leqslant V \,]. \tag{14.10}$$

В частности,

$$\mathrm{Im}(\varphi) \leqslant W;\ \mathrm{Ker}(\varphi) \leqslant V. \tag{14.11}$$

Доказательство является совсем простым упражнением. Например, при проверке справедливости второго из утверждений (14.10) может быть применена следующая цепочка заключений:

$$[\, x, u \in \overset{-1}{\varphi}(W_1) \,] \Rightarrow [\, \varphi(x), \varphi(u) \in W_1 \,] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\, \varphi(x+u) = \varphi(x) + \varphi(u) \in W_1 \,] \Rightarrow [\, x + u \in \overset{-1}{\varphi}(W_1) \,].$$

Вам предлагается восстановить все подробности. □

Замечание 14.2. В частном случае линейного отображения $\varphi : P^n \to P^m$ арифметических линейных пространств понятия образа и ядра фигурировали в [A_1, § 15]. Для образа оператора φ использовалось обозначение R_φ, увязанное с обозначеним образа (линейной оболочки векторов-столбцов) соответствующей $(m \times n)$-матрицы A:

$$R_\varphi = R_A = \langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n} \rangle\,. \tag{14.12}$$

Для ядра (см. определение 15.8) также использовалось иное обозначение, отсылающее к матричному заданию оператора:

$$L^0_\varphi = L^0_A = \{\, \overline{x} \in P^n \,:\, A \cdot \overline{x} = \overline{0} \,\}. \tag{14.13}$$

Далее мы предполагаем, что данные линейные пространства V и W являются конечномерными, размерностей n и m соответственно. Тогда определены размерности образа и ядра линейного отображения (14.8).

Определение 14.2. Размерность образа линейного отображения (14.8) называется *рангом* этого отображения; используется обозначение:

$$\operatorname{rank}(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}(\varphi)). \tag{14.14}$$

Размерность ядра (14.9) отображения (14.8) называется *дефектом* этого отображения; используется обозначение:

$$\operatorname{dfc}(\varphi) = \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)). \tag{14.15}$$

Зафиксируем в пространствах V и W какие-либо базисы

$$\mathcal{B} = [b_1, b_1, \dots, b_n] \tag{14.16}$$

и

$$\mathcal{C} = [c_1, c_1, \dots, c_m]. \tag{14.17}$$

В этих базисах оператору φ соответствует $(m \times n)$-матрица A. Ранг и дефект оператора φ оказываются связанными с рангом матрицы A. Точнее, справедливо следующее

Предложение 14.2. *1. Образ* $\operatorname{Im}(\varphi)$ *линейного оператора (14.8) является линейной оболочкой образа* $\varphi(\mathcal{B})$ *базиса (14.16):*

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \langle \varphi(\mathcal{B}) \rangle . \tag{14.18}$$

2. Ранг оператора φ *совпадает с рангом соответствующей матрицы:*

$$\operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{rank}(A); \tag{14.19}$$

дефект φ *выражается формулой*

$$\operatorname{dfc}(\varphi) = n - \operatorname{rank}(A). \tag{14.20}$$

3. Сумма ранга и дефекта линейного отображения равняется размерности первого пространства:

$$\operatorname{rank}(\varphi) + \operatorname{dfc}(\varphi) = \dim(V). \tag{14.21}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольный вектор $y = \varphi(x)$, принадлежащий $\operatorname{Im}(\varphi)$. Разлагая $x \in V$ по базису $\mathcal{B}$ и пользуясь линейностью φ, мы получаем для y разложение по с.в. $\varphi(\mathcal{B})$; включение

$\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \langle \varphi(\mathcal{B}) \rangle$ доказано. Обратное включение очевидно ввиду того, что линейная оболочка $\langle \varphi(\mathcal{B}) \rangle$ является *наименьшим* из линейных подпространств, содержащих все векторы $\varphi(b_j)$ $(j = 1, \dots, n)$.

2. Рассмотрим диаграмму 12.1, описывающую арифметизацию Φ оператора φ; напомним, что в этой диаграмме β и γ являются *координатными изоморфизмами*, определяемыми выбранными базисами.

Убедимся в том, что эти изоморфизмы отображают ядро (образ) оператора φ на ядро (образ) оператора Φ, или, что равносильно, докажем следующие утверждения:

$$\begin{aligned} [\, x \in \mathrm{Ker}(\varphi)\,] &\Leftrightarrow [\, \overline{x} \in \mathrm{Ker}(\Phi)\,]; \\ [\, y \in \mathrm{Im}(\varphi)\,] &\Leftrightarrow [\, \overline{y} \in \mathrm{Im}(\Phi)\,], \end{aligned} \tag{14.22}$$

где "надчеркнутые" векторы, как обычно, обозначают координатные столбцы, отвечающиее (в выбранных базисах) исходным (абстрактным) векторам $x \in V$ и $y \in W$.

Первое из утверждений (14.22) доказывается так: если $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, т. е. $\varphi(x) = 0$, то, в силу (12.27), $\Phi(\overline{x}) = \overline{\varphi(x)} = \overline{0}$, т. е. $\overline{x} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$; обратно, если $\Phi(\overline{x}) = \overline{0}$, то $\overline{\varphi(x)} = \overline{0}$ и, следовательно, $\varphi(x) = 0$.

Второе из утверждений (14.22) проверяется аналогично, займитесь этим самостоятельно.

Из того, что ядро и образ оператора φ изоморфны (соответственно) ядру и образу Φ, вытекает, что указанные операторы имеют одинаковые ранги и дефекты. Более того, по установленному ранее первому утверждению данного предложения [см. также формулу (14.13)], $\mathrm{Im}(\Phi)$ порождается векторами $\Phi(\overline{e_j}) = A \cdot \overline{e_j} = \overline{a_j}$ $(j = 1, ..., n)$, т. е. является линейной оболочкой столбцов матрицы A.

Напомним еще раз, что, начиная с п. 13.1 книги $[A_1]$ (см. также в настоящем пособии: п. 10.1 и замечание 14.2), мы говорили об *образе R_A матрицы*, понимая под этим линейную оболочку ее столбцов. Этот образ оказывается не чем иным, как образом R_Φ:

$$R_A = R_\Phi = \mathrm{Im}(\Phi) \cong \mathrm{Im}(\varphi). \tag{14.23}$$

Для рангов получим:

$$\mathrm{rank}(\varphi) = \mathrm{rank}(\Phi) = \dim(R_A) = \mathrm{rank}(A). \tag{14.24}$$

Аналогично, второе из утверждений (14.22) влечет совпадение *ядра* (*нуль-пространства*) L^0_A *матрицы* A [см. (14.14)] с ядром L^0_Φ, в свою очередь, изоморфным ядру исходного оператора:

$$L^0_A = L^0_\Phi = \mathrm{Ker}(\Phi) \cong \mathrm{Ker}(\varphi). \tag{14.25}$$

Для дефектов получим:

$$\mathrm{dfc}(\varphi) = \mathrm{dfc}(\Phi) = \dim(L_A^0) = n - \mathrm{rank}(A). \tag{14.26}$$

Второе утверждение предложения доказано. Добавим только, что величина $n - \mathrm{rank}(A)$ получает название *дефекта матрицы* A и обозначение $\mathrm{dfc}(A)$.

3. Третье утверждение предложения (известное как *связь ранга и дефекта* для линейного отображения) немедленно следует из (14.22). [В следующем параграфе (см. замечание 15.3) это важное утверждение получит новую, более наглядную трактовку и независимое доказательство.] $\square$

Из предложения 14.2 немедленно следуют несколько простых, но очень часто используемых свойств рангов и дефектов для линейных отображений и для матриц. Мы соберем эти утверждения в следующем предложении.

Предложение 14.3. *1. Всякий линейный оператор (14.8) обладает свойством неповышения размерности, выражаемым формулами:*

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leqslant \dim(V) \tag{14.27}$$

и

$$(\forall\, V_1 \leqslant V)\,[\,\dim(\varphi(V_1)) \leqslant \dim(V_1)\,]. \tag{14.28}$$

2. Для композиции $V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U$ имеют место неравенства

$$\mathrm{rank}(\psi \circ \varphi) \leqslant \min(\mathrm{rank}(\varphi), \mathrm{rank}(\psi)) \tag{14.29}$$

и

$$\mathrm{dfc}(\psi \circ \varphi) \geqslant \mathrm{dfc}(\varphi). \tag{14.30}$$

3. Аналогичные неравенства справедливы для произведения матриц (согласованных размеров):

$$\mathrm{rank}(B \cdot A) \leqslant \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)); \tag{14.31}$$

$$\mathrm{dfc}(B \cdot A) \geqslant \mathrm{dfc}(A). \tag{14.32}$$

Доказательство. 1. Из (14.21) вытекает неравенство

$$\mathrm{rank}(\varphi) \leqslant \dim(V),$$

которое можно переписать в виде (14.27). Неравенство (14.28) получается применением (14.27) к сужению $\varphi\big|_{V_1}$ оператора φ на подпространство V_1.

2. Из очевидного включения

$$\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) = \psi(\varphi(V)) \subseteq \psi(W) = \mathrm{Im}(\psi) \tag{14.33}$$

следует, что $\mathrm{rank}(\psi\circ\varphi) \leqslant \mathrm{rank}(\psi)$. Применяя (14.28) к оператору ψ и подпространству $W_1 = \varphi(V)$, мы получим, что $\mathrm{rank}(\psi\circ\varphi) \leqslant \mathrm{rank}(\varphi)$. Значит, справедливо неравенство (14.29).

Неравенство (14.30) выводится из включения

$$\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi) \supseteq \mathrm{Ker}(\varphi). \tag{14.34}$$

[Обратите внимание на то, что для дефектов нет полного аналога неравенства (14.29). Контрпример легко построить, если в качестве φ взять, скажем, нулевой оператор.]

3. Результаты для матриц не требуют отдельного доказательства [в силу теоремы 12.1 (о соответствии между опреаторами и матрицами) и формулы (14.19)]. Заметим, что эти неравенства могут быть получены и без привлечения линейных операторов, на языке матриц, но такое доказательство оказывается значительно менее "прозрачным". □

14.3. Алгоритмы построения базисов в ядре и образе линейного отображения. Как уже не раз объяснялось, для пуска алгоритмов требуется, чтобы исходные объекты были арифметизованы (оцифрованы). В данном случае:

— в линейных пространствах V и W должны быть зафиксированы некоторые базисы (14.14) и (14.15), после чего рассматриваемые пространства отождествляются с арифметическими, P^n и P^m соответственно;

— линейное отображение φ определяется своей матрицей A относительно выбранных базисов (фактически оно отождествляется со своей оцифровкой Φ).

После этого вполне естественно, что алгоритм построения базиса в $\mathrm{Ker}(\varphi)$ сводится к алгоритму 10.1, определяющему базис в L_A^0, а алгоритм построения базиса в $\mathrm{Im}(\varphi)$ — к алгоритму 10.2, находящему базис в R_A.

Заметьте, что ядро линейного оператора оказывается заданным первым способом, а образ — вторым.

Замечание 14.3. Между прочим, именно теперь становится ясным происхождение этих способов: задать подпространство в некотором линейном пространстве *первым* способом — это значит представить его как *ядро* некоторого линейного оператора, действующего *из данного* линейного пространства в некоторое другое; задать подпространство *вторым* способом — значит представить его как *образ* оператора, действующего из некоторого другого линейного пространства — *в данное*. Применяя алгоритм 10.1, мы находим по оператору, ядром которого служит данное подпространство, другой оператор, для которого это подпространство является образом. Наоборот, применяя алгоритм 10.3, по оператору, образом которого служит рассматриваемое подпространство, мы отыскиваем другой оператор, имеющий это подпространство своим ядром.

Пример 14.1. Решим средствами Maple следующую типовую задачу. Рассмотрим линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$, заданный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Как обычно, оцифровка считается уже произведенной, а оператор — действующим в арифметических линейных пространствах.)

Загрузим пакет LinearAlgebra, введем заданную матрицу и применим команду, возвращающую (в виде списка векторов) базис в ядре данного оператора (нуль-пространстве матрицы A).

```
> with(LinearAlgebra):
>A := <<1, 2, 1, 0, 1, −1>|<−2, −1, 1, 1, 0, −2>|
    <−1, 1, 2, 1, 1, −3>|<−4, 1, 5, 3, 2, −8>|<0, 1, 0, 1, 0, 0>>:
>N:=NullSpace(A);
```

$$N := \left[\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

Векторы-столбцы, порождающие ядро, можно проверить, умножив их слева на A. Получатся нулевые векторы.

```
> A . N[1], A . N[2];
```

Столь же просто находится базис в образе оператора φ, т. е. в линейной оболочке векторов-столбцов матрицы A:

```
> M := ColumnSpace(A);
```

$$M := \left[\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix}\right]\right]$$

Однако базис, представленный списком M, выбирается не из числа порождающих векторов (столбцов A). Если требуется найти базис из числа порождающих, то можно применить другую команду — Basis, которая, к сожалению, ожидает на вход не матрицы, а списки векторов. Придется "рассы́пать" A на отдельные столбцы. Мы их будем выбирать как одностолбцовые подматрицы в A, затем конвертировать в векторы и накапливать в списке VA. В ответе получим новый базис в $\mathrm{Im}(\varphi)$, в виде списка $M1$.

```
> VA := []:
> for j from 1 to ColumnDimension(A) do
    VA := [ VA[], convert(
       SubMatrix( A, 1..RowDimension(A), j..j ), Vector ) ]:
    od:
> M1 := Basis(VA);
```

$$M1 := \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$$

К полученным результатам можно добавить значения ранга и дефекта:

$$\mathrm{rank}(\varphi) = 3;\ \mathrm{dfc}(\varphi) = 2.$$

§ 15. Теоремы о линейных гомоморфизмах

15.1. Первая теорема о линейных гомоморфизмах. В общей алгебре важную роль играют так называемые *теоремы о гомоморфизмах*. Они сходным образом формулируются для различных типов алгебраических объектов: групп, колец и т. п. Мы изучаем линейные пространства. В этом случае формулировки теорем о гомоморфизмах имеют некоторые особенности: их можно сделать проще (хотя не исключается и более абстактный, "общий" вариант). В наши планы (в данном семестре) не входит изучение общей алгебры, но мы надеемся, что те из читателей, которым в будущем придется заниматься *гомоморфизмами групп* и/или *колец*, вспомнят приводимые здесь версии теорем о *гомоморфизмах линейных пространств*, или, что то же, — о *линейных отображениях*.

Теорема 15.1 (первая теорема о линейных гомоморфизмах). *Пусть V и W — линейные пространства над одним и тем же полем P, φ — линейный гомоморфизм из V в W, $N = Ker(\varphi)$ — его ядро.*

1. Значения гомоморфизма φ на векторах $x, y \in V$ совпадают тогда и только тогда, когда разность этих векторов принадлежит N, т. е.

$$[\,\varphi(x) = \varphi(y)\,] \Leftrightarrow [\,y - x \in N\,]. \tag{15.1}$$

2. Гомоморфизм φ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда его ядро тривиально, т. е. $N = O$.

Доказательство. 1. Равенство $\varphi(x) = \varphi(y)$ равносильно равенству $\varphi(y) - \varphi(x) = 0$ и, далее, в силу линейности φ, — равенству $\varphi(y-x) = 0$, т. е. факту принадлежности разности $u = y - x$ ядру N.

2. Пусть φ — мономорфизм, т. е. является инъективным отображением. Тогда, в частности, в нуль может перейти только нуль, а значит $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ состоит лишь из нулевого вектора.

Обратно, пусть $N = O$. тогда, в силу первой части данного предложения, равенство $\varphi(x) = \varphi(y)$ равносильно $x = y$, что свидетельствует об инъективности (мономорфности) φ. □

Замечание 15.1. Первое утверждение теоремы 15.1 можно трактовать следующим образом. Линейное отображение работает "послойно": ядро N целиком отображается в нуль, всякий *слой* (аффинное подпространство $x + N$) целиком отображается в одну точку $\varphi(x)$.

[Напомним (см. [A_1, п. 3.2]), что *аффинное подпространство* определяются как *сдвиг* на какой-либо вектор *линейного подпространства*.] В случае мономорфизма как ядро, так и все слои являются одноточечными.

Терема 15.1, вместе с настоящим замечанием, иллюстрируется рис. 15.1 в прил. 2.

15.2. Вторая теорема о линейных гомоморфизмах. Первая теорема о линейных гомоморфизмах является совершенно элементарным фактом, справедливым, кстати, для произвольных (не обязательно конечномерных) линейных пространств. Это утверждение громко именуется теоремой исключительно по традиции. Вторая теорема — значительно более содержательна и (в приводимой здесь формулировке) имеет место только для *конечномерных* линейных пространств.

Теорема 15.2 (вторая теорема о линейных гомоморфизмах). *Пусть V и W — конечномерные линейные пространства над полем P, φ — линейный гомоморфизм из V в W, $N = Ker(\varphi)$ — его ядро, N' — какое-либо прямое дополнение к подпространству N в пространстве V, $M = Im(\varphi)$ — образ гомоморфизма φ. Рассмотрим сужение $\varphi' = \varphi\big|_{N'}$ гомоморфизма φ на подпространство N'.*

Тогда φ' является изоморфизмом N' на M.

Доказательство. Очевидно, образ сужения $\mathrm{Im}(\varphi')$ содержится в $M = \mathrm{Im}(\varphi)$. Докажем, что эти подпространства на самом деле равны.

Возьмем любой вектор $y = \varphi(x) \in M$. Вектор $x \in V = N \oplus N'$, по определению прямой суммы, однозначно представляется в виде $x = u + v$, где $u \in N$ и $v \in N'$. Поскольку $\varphi(u) = 0$, мы получаем:

$$y = \varphi(u + v) = \varphi(v) = \varphi'(v) \in \mathrm{Im}(\varphi'),$$

что и требовалось.

Таким образом, φ' можно рассматривать как эпиморфизм

$$\varphi' : N' \longrightarrow M;\ v \mapsto \varphi(v);\ v \in N'. \tag{15.2}$$

Рассмотрим ядро эпиморфизма (15.2). Если вектор $v \in N'$ принадлежит $\mathrm{Ker}(\varphi')$, то, поскольку φ' действует так же, как φ, получаем, что $v \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N$. Но $N \cap N' = O$, значит $v = 0$. Приходим к выводу о тривиальности ядра φ'. Следовательно, по теореме 15.1, φ' является моно-, а значит, и изоморфизмом. □

Замечание 15.2. Теорему 15.2 иллюстрирует рис. 15.2 в прил. 2

Замечание 15.3. Если ввести обозначения для размерностей

$$\dim(V) = n,\ \dim(N) = \mathrm{dfc}(\varphi) = d,\ \dim(M) = \mathrm{rank}(\varphi) = r,$$

то, в силу изоморфизма $N' \cong M$, мы получим, что

$$\dim(N') = \dim(M) = r, \tag{15.3}$$

и, в силу наличия прямой суммы $V = N \oplus N'$, — что

$$n = d + r. \tag{15.4}$$

Последнее равенство выражает (выведенную ранее из других соображений; см. предложение 14.2) связь ранга и дефекта для линейного отображения.

Замечание 15.4. Выполним обещание, данное в замечании 13.3, — докажем существование таких базисов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в V и W соответственно, в которых оператору φ отвечает матрица скелетного вида. Для достижения этого достаточно:

— взять любой базис $\mathcal{B}'$ в подпространстве N';

— взять любой базис $\mathcal{B}''$ в ядре N;

— составить базис $\mathcal{B} = [\,\mathcal{B}',\, \mathcal{B}''\,]$ в пространстве V;

— взять образ $\mathcal{C}' = \varphi(\mathcal{B}')$ выбранного базиса в N' при изоморфизме (15.3);

— дополнить $\mathcal{C}'$ до базиса $\mathcal{C}$ в W.

В базисах $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{C}'$ изоморфизм $\varphi\,'$ будет иметь единичную матрицу. В базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ гомоморфизм φ будет иметь матрицу скелетного вида (с r единицами на диагонали).

В качестве очевидного следствия из теоремы 15.2 получается простое, но многократно используемое в следующей главе

Предложение 15.1. *Сужение линейного гомоморфизма*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

на любое подпространство $U \leqslant V$, независимое с ядром $N = Ker(\varphi)$ (т. е. такое, что $N \cap U = O$), является изоморфизмом:

$$\varphi\big|_U : U \xrightarrow{\cong} \varphi(U) \leqslant W. \tag{15.5}$$

Доказательство. В силу предложения 9.4, подпространство U, независмое с подпространством N, расширяется до некоторого прямого дополнения N' к N. Согласно теореме 15.2, сужение φ на N' является изоморфизмом на образ $\varphi(N') = \varphi(V) = M$.

Любое сужение изоморфизма также является изоморфизмом — *на свой образ*. Значит, можно утверждать, что является изоморфизмом отображение (15.5). □

*Замечание 15.5** (для служебного пользования). Обращаясь к опытным читателям, уточним особые черты теорем о гомоморфизмах, присущие конечномерной линейной алгебре и не характерные для общей алгебры. (Мы упоминали о том, что такие особенности имеются, в начале данного пункта.)

В теориях групп, колец и многих других типов алгебраических систем *подобъекты* (подгруппы, подкольца и т. д.) не обязаны иметь *прямые дополнения* (которым полагается тривиально пересекаться с данным подобъектом).

Определенной заменой прямым дополнениям могут служить так называемые *фактор-объекты*, которые имеют даже некоторые преимущества: в отличие от дополнений, они определены однозначно. (Однако фактор-объекты уже не являются подобъектами в данном объекте.)

Идея *факторизации* является одной из самых выдающихся и плодотворных идей в математике. По сути она очень проста и сводится к *отождествлению* элементов по подходящему *отношению эквивалентности*. Но, как показывает опыт, уровень абстрагирования при реализации этой идеи "зашкаливает" возможности первокурсников.

Так что, хотя в наших основных учебниках [1] и [2] понятие *фактор-пространства* появляется уже на первых страницах, мы предпочитаем отложить обстоятельное знакомство с ним до второго курса. (Не в последнюю очередь это связано с тем, что компьютерщики являются обычно людьми весьма "конкретными".)

15.3. Критерии эпи-(моно-, изо-)морфности. Линейный гомоморфизм $\varphi : V \to W$ конечномерных линейных пространств [размерностей $\dim(V) = n$ и $\dim(W) = m$] является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}(\varphi) = W$.

Если в некоторых базисах оператор φ задается $(m \times n)$-матрицей A ранга r, то *условие эпиморфности* можно выразить числовым равенством $r = m$. (В этом случае мы говорим, что матрица A имеет *полный ранг по строкам*.)

В частности, не существует эпиморфизма n-мерного пространства на m-мерное, если $n < m$.

В силу теоремы 15.1, необходимым и достаточным *условием мономорфности* φ является тривиальность его ядра, или, что равносильно, равенство нулю его дефекта. В терминах матрицы A, дефект которой выражается через ранг формулой $d = n - r$, получается следующий критерий мономорфности: $r = n$. (Матрица A здесь имеет *полный ранг по столбцам.*)

В частности, не существует мономорфизма из n-мерного пространства в m-мерное, если $n > m$.

Гомоморфизм φ является *изоморфизмом* тогда и только тогда, когда $m = n = r$, т. е. матрица A должна быть квадратной и *невырожденной.*

Замечание 15.6. Все результаты данного пункта в частном случае арифметических линейных пространств уже фигурировали в п. 15.6 пособия [A_1]. Правда, при лекционной реализации курса автору очень редко удавалось изложить этот материал, и в книгу он включен из логических соображений и из надежды на существование вдумчивых (и даже въедливых) читателей.

15.4. Критерии обратимости (необратимости) линейных эндоморфизмов. А этот пункт является "затравкой" для следующей главы, самой объемной и сложной в курсе. Линейный эндоморфизм (л.э.) является (см. п. 13.5) линейным гомоморфизмом

$$\varphi : V \longrightarrow V \tag{15.6}$$

из линейного пространства V в само это пространство.

Если $\dim(V) = n$ и в пространстве V выбран некоторый базис $\mathcal{B}$, то оператору (15.6) сопоставляется квадратная $(n \times n)$-матрица A, ранг которой, мы, как и выше, обозначим r. Будет использоваться также дефект $d = n - r$.

При $m = n$ условия эпиморфности и мономорфности, приведенные в предыдущем пункте, оказываются равносильными друг другу, а также — условию изоморфности. (Напомним, что изоморфизм линейного пространства на себя называется *автоморфизмом.*)

В терминах матрицы л.э. можно утверждать, что

— если $r < n$ (или, что равносильно: $d > 0$; матрица A *необратима*), то эндоморфизм не является ни моно-, ни эпиморфизмом;

— если $r = n$ (или, что равносильно: $d = 0$; матрица A *обратима*), то эндоморфизм является автоморфизмом.

Сформулированные выше условия используют лишь одну числовую характеристику матрицы — ее *ранг* (или же — связанный с ним — *дефект*). Однако для л.э. существуют и другие инструменты исследования их свойств, главным из которых можно назвать *определитель* (*детерминант*); см. п. 13.9. Напомним, что определитель л.э. считается равным определителю его матрицы в каком-либо базисе (от выбора базиса результат не зависит).

Л.э. является обратимым (необратимым) тогда и только тогда, когда его определитель отличен от нуля (равен нулю). Это сразу следует из аналогичного факта для матриц.

Кроме того, можно выразить интересующие нас условия на языке однородных с.л.у.: невырожденность (вырожденность) матрицы A равносильна отсутствию (наличию) у системы $A \cdot \overline{x} = \overline{0}$ нетривиальных решений.

Соберем все упоминавшиеся выше критерии обратимости (необратимости) для эндоморфизмов в виде следующей сводки.

Условия обратимости (необратимости) для линейных эндоморфизмов

Линейный эндоморфизм $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, заданный $(n \times n)$-матрицей A,

обратим тогда и только тогда, когда выполнено любое из равносильных условий:	*необратим* тогда и только тогда, когда выполнено любое из равносильных условий:
$\operatorname{Ker}(\varphi) = O$;	$\operatorname{Ker}(\varphi) \neq O$;
$\operatorname{dfc}(\varphi) = 0$;	$\operatorname{dfc}(\varphi) > 0$;
$\operatorname{Im}(\varphi) = V$;	$\operatorname{Im}(\varphi) \neq V$;
$\operatorname{rank}(\varphi) = n$;	$\operatorname{rank}(\varphi) < n$;
$\det(\varphi) \neq 0$;	$\det(\varphi) = 0$;
$\operatorname{dfc}(A) = 0$;	$\operatorname{dfc}(A) > 0$;
$\operatorname{rank}(A) = n$;	$\operatorname{rank}(A) < n$;
$\det(A) \neq 0$;	$\det(A) = 0$;
с.л.у. $A \cdot \overline{x} = \overline{0}$ имеет лишь тривиальное решение.	с.л.у. $A \cdot \overline{x} = \overline{0}$ имеет нетривиальное решение.

Глава 3

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 16. Собственные значения (спектр) и собственные подпространства для линейного эндоморфизма

16.1. Определение собственных значений, собственных векторов и собственных подпространств для линейного эндоморфизма. Мы приступаем к изучению ключевого раздела линейной алгебры, который принято красиво именовать *спектральной теорией* (или *спектральным анализом*) линейных операторов. Без сомнения, эта теория является важнейшим инструментом познания природы (причем не только природы математических, но также и реальных объектов — в естествовознании, экономике, технике).

Пусть V — линейное пространство над полем P, φ — линейный эндоморфизм, действующий в V.

Определение 16.1. *Собственным вектором* для л.э. φ называется такой *ненулевой* вектор $x \in V$, который под действием φ переходит в пропорциональный вектор

$$\varphi(x) = \lambda x, \tag{16.1}$$

где λ — коэффициент пропорциональности (скаляр, принадлежащий полю P), который называется *собственным значением* для л.э. φ. При этом говорят, что собственный вектор x *отвечает* (*соответствует*) собственному значению λ.

Множество всех собственных значений для л.э. φ называется *спектром* этого эндоморфизма и обозначается $\sigma(\varphi)$.

Прокомментируем данное выше определение. Согласно ему, скаляр λ принадлежит спектру оператора φ тогда и только тогда, когда найдется ненулевой вектор $x \in V \setminus \{0\}$ такой, что выполняется равенство (16.1). Это равенство можно (с привлечением тождественного эндоморфизма ε) представить в виде $\varphi(x) - \lambda\varepsilon(x) = 0$, или же

$$(\varphi - \lambda\varepsilon)(x) = 0. \tag{16.2}$$

Уравнение (16.2) равносильно факту принадлежности вектора x ядру оператора (эндоморфизма) $\varphi - \lambda\varepsilon$. Таким образом, x удовлетворяет (16.1) тогда и только тогда, когда

$$x \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon). \tag{16.3}$$

Далее, скаляр λ принадлежит $\sigma(\varphi)$ в том и только том случае, когда найдется ненулевой вектор x, удовлетворяющий (16.1), или, что равносильно, принадлежащий $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)$. Выходит, что принадлежность λ спектру равносильна тому, что указанное ядро является ненулевым:

$$[\,\lambda \in \sigma(\varphi)\,] \Leftrightarrow [\,\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon) \neq O\,]. \tag{16.4}$$

Ядро любого линейного оператора является линейным подпространством; оно может быть нулевым или ненулевым. Согласно сводке условий обратимости (необратимости) для линейных эндоморфизмов (см. п. 15.4), нетривиальность ядра в (16.4) равносильна необратимости л.э. $\varphi - \lambda\varepsilon$. Поэтому

$$[\,\lambda \in \sigma(\varphi)\,] \Leftrightarrow [\,\text{эндоморфизм } \varphi - \lambda\varepsilon \text{ необратим}\,]. \tag{16.5}$$

Подпространство $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)$ в случае, когда оно является *ненулевым*, содержит все собственные векторы для л.э. φ, отвечающие собственному значению λ, и, кроме них, это подпространство содержит лишь *нулевой вектор*, который, по определению, *собственным вектором не считается*. В связи с этим дается следующее

Определение 16.2. Пусть $\lambda \in \sigma(\varphi)$. *Собственным подпространством*, отвечающим собственному значению λ, называется ядро оператора $\varphi - \lambda\varepsilon$. Используется обозначение:

$$S_\lambda(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon). \tag{16.6}$$

По построению, всякое собственное подпространство является ненулевым. Резюмируем полученные результаты в следующем предложении.

Предложение 16.1. *Скаляр $\lambda \in P$ является собственным значением для л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих утверждений:*
(1) $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon) \neq O$;
(2) л.э. $\varphi - \lambda\varepsilon$ необратим. $\square$

16.2. Примеры отыскания спектра и собственных подпространств

Пример 16.1. Зафиксируем скаляр $\lambda_0 \in P$ и рассмотрим *скалярный эндоморфизм* $\varphi = \lambda_0\varepsilon \in \mathcal{L}(V)$ [при $\lambda_0 = 0$ получается нулевой оператор, при $\lambda_0 = 1$ — тождественный].

Для любого $x \in V$ будем иметь $\varphi(x) = \lambda_0 x$, поэтому всякий вектор $x \in V \setminus \{0\}$ является собственным для φ, отвечающим собственному значению λ_0. Спектр является одноточечным: $\sigma(\varphi) = \{\lambda_0\}$; единственное собственное подпространство свопадает со всем пространством: $S_{\lambda_0}(\varphi) = V$.

Пример 16.2. В соответствии с предложением 16.1, нуль является собственным значением для л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ тогда и только тогда, когда оператор φ необратим; при этом его ядро является ненулевым и служит собственным подпространством:

$$S_0(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi). \tag{16.7}$$

Выделим полученный результат (для дальнейшего использования):

$$[\,0 \in \sigma(\varphi)\,] \Leftrightarrow [\,\varphi \text{ необратим}\,]. \tag{16.8}$$

Пример 16.3. Рассмотрим *евклидову плоскость* $V = \mathbb{R}^2$. Мы считаем ее *состоящей из векторов*, которые все приложены в начале координат. (Это — *алгебраический* подход; в *геометрии* плоскость считается состоящей из *точек* и векторы могут прикладываться в любой точке.) Рассмотрим оператор $\varphi = r_\alpha$ поворота плоскости вокруг начала координат, против часовой стрелки, на угол α (см. [A_1, пример 15.2]).

Если угол $\alpha \neq \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), то при повороте ни один ненулевой вектор не перейдет в себе пропорциональный. Таким образом, собственных векторов не существует. Значит, не существует и собственных значений: $\sigma(\varphi) = \varnothing$.

Контрольный вопрос: а что будет, если $\alpha = \pi k$?

Пример 16.4. Выйдем с нашим оператором поворота в трехмерный мир $V = \mathbb{R}^3$, в евклидово пространство с естественным базисом $[\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}]$ и координатами x_1, x_2, x_3 (в аналитической геометрии вы привыкли к $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и x, y, z). Поворот $\varphi = r_\alpha$ будем производить вокруг "вертикальной оси" Ox_3, которую мы (со своей алгебраической точки зрения) будем понимать как линейное подпространство $W = \langle \overline{e_3} \rangle$. Рассмотрим также "горизонтальную плоскость" Ox_1x_2 — как подпространство $U = \langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle$.

Все векторы подпространства W остаются при действии φ *неподвижными*, т. е. являются для этого оператора собственными векторами, отвечающими собственному значению $\lambda = 1$. Все остальные векторы реально поворачиваются и, в силу предположения $\alpha \neq \pi k$, не могут переходить в себе пропорциональные.

Так что, $\sigma(\varphi) = \{1\}$ и $S_1(\varphi) = W$.

Пример 16.5. Останемся еще немного в "сфере влияния" геометрии и сохраним обозначения предыдущего примера. Но эндоморфизм будем рассматривать другой. А именно, определим оператор $\psi : V \to V$ как *ортопроектор* на плоскость U: под действием ψ всякий вектор $\overline{x} \in V$ переходит в свою ортопроекцию $\overline{x'} \in U$.

При проектировании векторы из U остаются неподвижными и, следовательно, они составят собственное подпространство $S_1(\varphi)$. Векторы из W проектируются в нуль, они составляют ядро оператора ψ, которое (см. пример 16.2) есть не что иное, как собственное подпространство $S_0(\psi)$. Больше собственных векторов нет.

Итог: $\sigma(\psi) = \{0, 1\}$; $S_0(\psi) = W$; $S_1(\psi) = U$.

Пример 16.6. Теперь нам предстоит небольшая "интервенция" на территорию, подконтрольную математическому анализу. Рассмотрим оператор дифференцирования $\varphi = {}'$ как л.э. (бесконечномерного) пространства гладких функций $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\varphi(f)\,(x) = f'(x);\ f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ x \in \mathbb{R}. \tag{16.9}$$

Для любого скаляра $\lambda \in \mathbb{R}$ существует ненулевая гладкая функция f, такая, что

$$f'(x) = \lambda f(x). \tag{16.10}$$

Нужную функцию вы сами легко угадаете:

$$f(x) = e^{\lambda x}. \tag{16.11}$$

Можно доказать, что множество всех решений *дифференциального уравнения* (16.10) исчерпывается функциями $ae^{\lambda x}$ ($a \in \mathbb{R}$), пропорциональными экспоненте (16.11). [В специальной математической дисциплине "Дифференциальные уравнения", которую вы скоро начнете изучать, устанавливаются общие теоремы о существовании и единственности решений для таких уравнений.]

В результате оказывается, что любое действительное число является собственным значением для оператора дифференцирования (16.9), а соответствующие собственные подпространства являются одномерными, с порождающими (16.11):

$$\sigma(') = \mathbb{R};\ S_\lambda(') = \left\langle e^{\lambda x} \right\rangle\ (\lambda \in \mathbb{R}). \tag{16.12}$$

Пример 16.7. Картина резко меняется, если оператор дифференцирования рассмотреть на (более узком, но тоже бесконечномерном) пространстве многочленов $W = \mathbb{R}[x]$. Поскольку при дифференцировании степень ненулевого многочлена уменьшается на единицу, то результат может оказаться пропорциональным исходному многочлену лишь в случае многочленов нулевой степени (констант). Коэффициентом пропорциональности в этом случае будет нуль. Таким образом, нуль является единственным собственным значением, а соответствующее собственное подпространство состоит из всех констант.

Этот вывод сохраняется, если, вместо бесконечномерного пространства всех многочленов, рассматривать конечномерное пространство $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени, не превосходящей n.

§ 17. Характеристический многочлен и характеристические корни для линейного эндоморфизма

17.1. Характеристическая матрица и характеристический многочлен. В предыдущем парагарафе линейное пространство V, на котором был задан л.э. φ не предполагалось конечномерным. Теперь мы это предположение сделаем и зафиксируем базис

$$\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, \dots, b_n \,] \tag{17.1}$$

в пространстве V. Пусть оператору φ в базисе $\mathcal{B}$ отвечает матрица A.

Рассмотрим л.э., который фигурировал (и играл самую существенную роль) в § 16:

$$\psi(\lambda) = \varphi - \lambda\varepsilon. \tag{17.2}$$

Здесь мы будем считать $\lambda \in P$ параметром. Таким образом, $\psi(\lambda)$ есть л.э. (оператор), зависящий от параметра. В базисе $\mathcal{B}$ ему соответствует (также зависящая от λ) матрица

$$B(\lambda) = A - \lambda E. \tag{17.3}$$

Как станет ясно ниже (см. замечание 17.2), в некоторых формулах удобнее использовать противоположную матрицу:

$$C(\lambda) = -B(\lambda) = \lambda E - A. \tag{17.4}$$

Сразу дадим ей имя.

Определение 17.1. Матрица (17.4) называется *характеристической матрицей* для квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

Матрицы (17.3) и (17.4) могут рассматриваться *над кольцом многочленов* $P[\lambda]$. В самом деле, их элементами служат многочлены (степени не выше первой) от переменной λ. Приведем развернутую запись характеристической матрицы:

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{17.5}$$

Далее нам надо "освежить" (и, в некоторой степени, расширить) представление читателей об *определителях*. В четвертой главе пособия [A_1] определялись и изучались определители для квадратных матриц с элементами из поля действительных чисел $\mathbb{R}$, при этом объяснялось, что все результаты остаются справедливыми *над произвольным полем*. Между тем, большинство формул и теорем теории определителей (все те, в которых *не используется деление*) сохраняют силу и *над* произвольным *коммутативным кольцом*.

Например, теорема Лапласа 25.1, обеспечивающая вычисление определителя *разложением по строке или столбцу*, теорема 27.1 (*определитель блочно-треугольной матрицы*) и теорема 27.2 (*мультипликативное свойство определителя*) — переносятся на случай

матриц с элементами из коммутативного кольца. (Несколько иначе обстоит дело с вопросами обратимости матриц, но нас это пока не коснется. Подробнее об этом см. ниже, в п. 30.1.)

Итак, можно обычным образом вычислить определитель полиномиальной матрицы (17.5) и быть заранее уверенным, что результат тоже будет полиномом (многочленом). Для этого многочлена также вводится имя и обозначение.

Определение 17.2. *Характеристическим многочленом* для квадратной матрицы A называется определитель ее характеристической матрицы. Используется обозначение:

$$h_A(\lambda) = \det(C(\lambda)). \tag{17.6}$$

Изучим влияние выбора базиса на характеристическую матрицу и характеристический многочлен. Пусть

$$\mathcal{B}' = [\, b'_1, b'_2, \dots, b'_n \,] \tag{17.1'}$$

— еще один базис в пространстве V и T — матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда в новом базисе $\mathcal{B}'$ л.э. φ будет, в соответствии с формулой (13.14), иметь матрицу

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T, \tag{17.7}$$

подобную A.

Предложение 17.1. *При замене матрицы на подобную ее характеристическая матрица также заменится на подобную, а характеристический многочлен не изменится.*

Доказательство. Характеристическая матрица для матрицы A' может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} C'(\lambda) = \lambda E - A' = \lambda E - T^{-1}AT = \\ = T^{-1}(\lambda E)T - T^{-1}A \cdot T = T^{-1}(\lambda E - A)T = T^{-1}C(\lambda)T. \end{aligned}$$

(Вставляя множители T^{-1} и T слева и справа от матрицы λE, мы использовали тот факт, что последняя матрица *коммутирует* со всеми матрицами.)

Формула

$$C'(\lambda) = T^{-1}C(\lambda)T \tag{17.8}$$

может рассматриваться над полем P (при каждом фиксированном значении переменной). При любом $\lambda \in P$ матрицы $C(\lambda)$ и $C'(\lambda)$ подобны и, следовательно, по предложению 13.3, имеют одинаковые определители:

$$\det(C'(\lambda)) = \det(C(\lambda)).$$

Значит, при любом λ равны значения многочленов:

$$h_{A'}(\lambda) = h_A(\lambda), \tag{17.9}$$

т. е. равны *полиномиальные функции*, соответствующие этим многочленам.

О тонком различии между *многочленами* и *полиномиальными функциями* (которое проявляется лишь в случае, когда поле P *конечно*) говорилось в [A_1, п. 39.4]. Пока мы получили (17.9) как *равенство полиномиальных функций*. В случае бесконечного P этого достаточно. В общем же случае надо рассмотреть (17.8) над кольцом многочленов $P[\lambda]$ и воспользоваться (справедливой и над кольцами) мультипликативностью определителя. [На первый взгляд, формула (17.8) "содержит деление", поскольку в ней фигурирует обратная матрица T^{-1}. Но T является (обратимой) матрицей с элементами из P, она не содержит переменную λ. А деление на ненулевые константы в кольце многочленов, разумеется, допустимо.]

При таком подходе становится ясным, что (17.9) является *равенством многочленов*. □

Предложение 17.1 позволяет дать иную версию определения 17.2, которая относится уже не к матрицам, но к линейным эндоморфизмам.

Определение 17.2′. *Характеристическим многочленом* для *линейного эндоморфизма* φ называется характеристический многочлен для матрицы A, соответствующей этому эндоморфизму (в произвольном базисе):

$$h_\varphi(\lambda) = h_A(\lambda). \tag{17.10}$$

Замечание 17.1. При каждом фиксированном значении λ можно рассматривать (17.2) как линейный эндоморфизм, для которого (см. п. 13.9) имеет смысл понятие определителя, в связи с чем формулу (17.10) можно переписать в инвариантном виде:

$$h_\varphi(\lambda) = \det(\lambda\varepsilon - \varphi). \tag{17.10′}$$

Пример 17.1. Рассмотрим скалярный л.э. $\varphi = \lambda_0\varepsilon$ ($\lambda_0 \in P$). В любом базисе ему будет отвечать скалярная матрица $A = \lambda_0 E$. Следовательно, характеристический многочлен будет выражаться формулой

$$h_{\lambda_0\varepsilon}(\lambda) = \det((\lambda - \lambda_0)E) = (\lambda - \lambda_0)^n, \tag{17.11}$$

где $n = \dim(V)$.

17.2. Коэффициенты характеристического многочлена. Раскроем определитель (17.6) матрицы (17.5) по определению определителя (или, как еще говорят, *по формуле полного разложения*; см. [A_1, § 23]).

Разложение будет содержать $n!$ членов, каждый из которых будет определяться некоторой *перестановкой* σ степени n и будет представлять из себя произведение знакового множителя $\operatorname{sgn}(\sigma)$ и n элементов матрицы (взятых по одному из каждой ее строки и каждого столбца; перестановка σ указывает, какие по номеру элементы выбираются в строках).

Тождественной перестановке $\sigma = \varepsilon$ соответствует произведение диагональных элементов матрицы (17.5):

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})...(\lambda - a_{nn}) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})\lambda^{n-1} + ... \tag{17.12}$$

В правой части формулы (17.12) мы уже начали раскрывать это произведение. Всего после перемножения n двучленов получится (в неприведенном виде) 2^n слагаемых. Одно из них является старшим членом λ^n. Еще n слагаемых содержат множителем λ^{n-1}; они образуются, если из всех скобок, кроме одной, выбрать член λ; из оставшейся скобки будет выбран член $-a_{ii}$ ($i = 1, ..., n$). Сгруппировав полученные члены степени $n - 1$, мы придем к выражению, показанному в формуле. Все остальные слагаемые будут иметь степень не выше $n - 2$; в формуле их сумма заменена на многоточие.

Любой нетождественной перестановке σ будет соответствовать произведение n элементов матрицы $C(\lambda)$, в котором *как минимум два множителя являются недиагональными.* (В самом деле, диагональные элементы, входящие в произведение, соответствуют номерам, остающимся неподвижными при действии σ; если в перестановке имеется $n - 1$ таких номеров, то, очевидно, все n номеров неподвижны и $\sigma = \varepsilon$.)

Значит, при раскрытии скобок в этом произведении получится многочлен степени не выше $n - 2$.

Приходим к выводу, что определитель (17.6), т. е. характеристический многочлен для $(n \times n)$-матрицы A, имеет степень, в точности равную n. Более того, этот многочлен является *нормализованным*: его старший коэффициент равен единице, что непосредственно усматривается из формулы (7.12).

Кстати, из этой же формулы усматривается и коэффициент, следующий за старшим: при λ^{n-1} стоит взятый с противоположным знаком *след* матрицы A (см. определение 13.3).

Запишем характеристический многочлен по убывающим степеням λ, сначала — в общем виде (учтя нормализованность):

$$h_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + ... + c_{n-2}\lambda^2 + c_{n-1}\lambda + c_n. \quad (17.13)$$

Затем отметим, что коэффициент c_1 уже определен:

$$c_1 = -\mathrm{tr}(A). \quad (17.14)$$

Не составляет труда определить также и свободный член, но при этом применяется другой прием. Свободный член любого многочлена равен значению этого многочлена в нуле. Значит, $c_n = h_A(0)$. Подставляя $\lambda = 0$ в формулу (17.6), мы получаем, что $c_n = \det(-A)$, или окончательно:

$$c_n = (-1)^n \det(A). \quad (17.15)$$

Можно подвести первые итоги исследования вида характеристического многочлена.

Предложение 17.2. *Характеристический многочлен $(n\times n)$-матрицы A является нормализованным многочленом степени n. Его коэффициенты c_1 и c_n выражаются через скалярные характеристики данной матрицы (след и определитель) формулами (17.14) и (17.15).*

Доказательство см. выше, перед формулировкой. □

Замечание 17.2. Если характеристический многочлен определять не по матрице $C(\lambda)$, а по $B(\lambda)$ [см. формулу (17.3)], то он получится "не совсем нормализованным": старший коэффициент c_0 окажется равным $(-1)^n$, что гораздо менее удобно (хотя в некоторых учебниках делается именно так).

Принятый нами вариант определения тоже имеет недостатки: нам придется постоянно использовать в последующих вычислениях матрицу (17.3), и одновременно будет фигурировать определитель, но не этой матрицы, а — противоположной к ней.

Замечание 17.3. В качестве информации приведем общие формулы, выражающие коэффициенты характеристического многочлена через некоторые скалярные характеристики матрицы:

$$c_k = (-1)^k g_k(A);\ k = 1, ..., n, \tag{17.16}$$

где $g_k(A)$ есть сумма всех *главных миноров* порядка k для матрицы A.

Главными называются миноры вида

$$\overset{k}{M}{}^{i_1,i_2,...,i_k}_{i_1,i_2,...,i_k};\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n,$$

т. е. такие, которые получаются, если строки и столбцы A, определяющие минор, имеют одни и те же номера (определения и обозначения см. в [A_1, п. 30.1]).

Можно выписать явную формулу для характеристик $g_k(A)$:

$$g_k(A) = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} \overset{k}{M}{}^{i_1,i_2,...,i_k}_{i_1,i_2,...,i_k}. \tag{17.17}$$

Доказательство формул (17.16) можно найти, например, в [16, п. 2.1]. Отметим, что главные миноры первого порядка — это просто диагональные элементы, а их сумма — это след матрицы:

$$g_1(A) = \mathrm{tr}(A). \tag{17.18}$$

Существует только один минор порядка n, равный определителю матрицы; он является главным, так что

$$g_n(A) = \det(A). \tag{17.19}$$

Замечание 17.4. Согласно предложению 17.1, характеристический многочлен является *инвариантом подобия*, т. е. не меняется при замене данной матрицы на подобную. Напомним, что равенство многочленов определяется покоэффициентно. В связи с этим, все коэффициенты c_k $(k = 1, ..., n)$ оказываются инвариантами подобия. А поскольку эти коэффициенты не более чем знаком могут отличаться от характеристик $g_k(A)$, мы приходим к выводу об инвариантности последних:

$$[\, A \backsim A' \,] \Rightarrow [\, (\forall k = 1, ..., n)\, (g_k(A) = g_k(A'))\,]. \tag{17.20}$$

Для $k = 1$ и $k = n$ этот результат нам уже известен из п. 13.9.

И так же, как функции tr и det, все характеристики g_k могут быть отнесены не только к конкретной квадратной матрице, но и — к линейному эндоморфизму:

$$g_k(\varphi) = g_k(A);\ k = 1, ..., n, \tag{17.21}$$

где A — матрица отвечающая л.э. φ в некотором базисе.

17.3. Корни характеристического многочлена. Снова рассмотрим характеристический многочлен (17.6) для $(n \times n)$-матрицы A.

Определение 17.3. Корни (в поле P) многочлена $h_A(\lambda)$ называются *характеристическими корнями* для A. *Спектром матрицы* A называется множество $\sigma(A)$ всех ее характеристических корней.

Количество (попарно различных) корней многочлена не может превышать его степени (см. [A_1, п. 39.3]). Следвательно, мощность спектра $\sigma(A)$ для $(n \times n)$-матрицы A не превосходит n.

Поскольку характеристический многочлен для матрицы является инвариантом подобия, то тем же свойством обладает и спектр. Следовательно, как и в замечании 17.4, это понятие может быть отнесено к линейному эндоморфизму. Но у нас уже есть понятие спектра для л.э. (см. определение 16.1) — как множества всех *собственных значений* для этого эндоморфизма.

"Круг замыкается" следующим предложением.

Предложение 17.3. *Рассмотрим л.э. φ в конечномерном линейном пространстве V. Пусть в некотором базисе этого пространства оператору φ отвечает матрица A. Тогда скаляр $\lambda_0 \in P$ является собственным значением для л.э. φ, если и только если он является характеристическим корнем для A. Спектры л.э. и соответствующей матрицы совпадают:*

$$\sigma(\varphi) = \sigma(A). \tag{17.22}$$

Доказательство является совершенно очевидным, но здесь необходимо пояснить, что в данном предложении и всюду далее (в отличие от § 16) *собственные значения* будут обозначаться буквой λ с теми или иными *индексами*; "чистая", без индексов буква λ сохраняется для обозначения *переменной* в характеристическом многочлене.

Согласно предложению 16.1, скаляр $\lambda_0 \in P$ является собственным значением для л.э. φ тогда и только тогда, когда л.э.

$$\psi_0 = \varphi - \lambda_0 \varepsilon, \tag{17.23}$$

необратим. Это, в свою очередь, равносильно (см. сводку в конце п. 15.4) необратимости матрицы

$$B_0 = A - \lambda_0 E \tag{17.24}$$

или, — необратимости противоположной матрицы

$$C_0 = -B_0 = \lambda_0 E - A. \tag{17.25}$$

Последний же факт равносилен обращению в нуль определителя матрицы C_0, т. е. равенству

$$h_A(\lambda_0) = 0, \tag{17.26}$$

свидетельствующему о том, что λ_0 является характеристическим корнем для A. $\square$

Замечание 17.5. Как мы убедились выше, спектр л.э., действующего в *конечномерном* линейном пространстве V, является *конечным* подмножеством в поле P, причем его мощность не может превышать размерности $n = \dim(V)$.

Спектр вполне может оказаться *пустым* (вспомните оператор поворота из примера 16.3). Причиной этого является использование "не достаточно хорошего" (с алгебраической точки зрения) поля.

Если основное поле P является *алгебраически замкнутым* (см. [A_1, п. 40.3]), то любой многочлен положительной степени над P имеет в P хотя бы один корень. В такой ситуации спектр любого л.э. (любой квадратной матрицы) непуст.

Добавим еще, что в бесконечномерных пространствах спектр может оказаться бесконечным. (В примере 16.6 оператор дифференцирования имел спектр, совпадающий со всем полем $\mathbb{R}$.)

Замечание 17.6. В самом начале настоящей главы мы декларировали, что понятие спектра линейного оператора является одним из центральных в "работающей математике". Скорее всего, читателям пока не вполне ясна важность и глубина спектральной теории, но

автор надеется, что каждый последующий параграф будет приближать их к осознанию этого.

Автору очень нравится следующий пассаж А. А. Кириллова (см. его захватывающую книжку "Что такое число?" — М.: Наука, 1993. С. 38):

"*...матричные элементы составляют лишь бренное тело преобразования* (...), *в то время как спектр выражает его бессмертную душу*".

Развивая метафору А. А. Кириллова, мы можем напомнить (см. замечание 12.3) другой образ, представляющий линейные операторы в качестве "главных героев" линейной алгебры, а матрицы — как их "портреты" (либо "оцифровки").

Добавим, что матрица является "очень хорошим портретом": все свойства оператора могут быть (в принципе) установлены и исследованы по его матрице. Хотя, как и полагается портрету, матрица зависит не только от оператора, но и от "камеры", фиксирующей оцифровку, т. е. от базиса (или базисов).

Однако хочется, как всегда, большего. Было бы очень интересно (и важно) получить такой "портрет", на котором можно было бы видеть "душу" портретируемого.

17.4. Алгебраические кратности собственных значений. Пусть скаляр $\lambda_0 \in P$ является собственным значением для линейного эндоморфизма φ, действующего в n-мерном пространстве V. Согласно предложению 17.3, этот факт равносилен тому, что λ_0 является корнем характеристического многочлена $h_\varphi(\lambda)$, явный вид которого может быть определен по матрице A, отвечающей φ в какомлибо базисе $\mathcal{B}$ пространства V.

Итак, λ_0 является характеристическим корнем. Пусть m_0 — его кратность (как корня многочлена $h_A(\lambda)$; см. [A_1, п. 40.1]), т. е. такой показатель степени, что имеет место разложение

$$h_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_0} g(\lambda);\ g(\lambda_0) \neq 0. \tag{17.27}$$

Определение 17.4. Натуральное число m_0, для которого справедливо (17.27), называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ_0.

Выражаясь проще, алгебраическая кратность собственного значения — это его кратность как характеристического корня. Рассмотрим теперь всю совокупность (попарно различных) собственных значений (= характеристических корней) для л.э. φ:

$$\sigma(\varphi) = \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}. \tag{17.28}$$

Определим также список соответствующих алгебраических кратностей

$$m_1, m_2, \dots, m_s \tag{17.29}$$

и вычислим их сумму:

$$m' = \sum_{i=1}^{s} m_i. \tag{17.30}$$

Непосредственным следствием общих фактов теории многочленов (см. [A_1, пп. 40.2, 40.3]) является следующее

Предложение 17.4. *Сумма (17.30) алгебраических кратностей всех собственных значений для линейного эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ не превышает $n = \dim(V) = \deg(h_\varphi(\lambda))$.*

Справедливо разложение на множители

$$h_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda - \lambda_s)^{m_s} g(\lambda), \tag{17.31}$$

в котором $g(\lambda)$ является нормализованным многочленом степени $n - m'$, не имеющим корней в поле P.

В случае алгебраически замкнутого поля P для любого эндоморфизма имеет место равенство $m' = n$ и разложение (17.31) приобретает вид:

$$h_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda - \lambda_s)^{m_s}. \tag{17.32}$$

Доказательство. Достаточно обратиться к следующим формулам из указанных выше пунктов первого пособия: (40.6), (40.7) и (40.10). (Старший коэффициент в данном случае равняется единице.) □

Замечание 17.7. Характеристическое уравнение для квадратной матрицы A (т. е. уравнение вида $h_A(\lambda) = 0$) стало использоваться в математических работах довольно давно, еще в XVIII веке, и прежде всего — в *механике*, в том числе *небесной*. В старых трактатах сохранился (со времен Лапласа и Лагранжа, применявших уравнения такого типа в расчетах возмущений в движении планет) термин *вековое* уравнение.

§ 18. Алгоритм отыскания спектра и собственных подпространств для линейного эндоморфизма

18.1. Арифметизация собственных подпространств. В предыдущем параграфе, используя матрицу A (или, что равносильно, — арифметизацию Φ; см. п. 12.4) для л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, мы фактически пришли к *алгоритму вычисления спектра* φ. Матрица A и оператор

$$\Phi : P^n \longrightarrow P^n;\ \Phi(\overline{x}) = A\overline{x};\ \overline{x} \in P^n \tag{18.1}$$

зависят от выбора базиса $\mathcal{B}$ в пространстве V, а характеристический многочлен $h_A(\lambda)$ и его корни λ_i (вместе с их алгебраическими кратностями m_i; $i = 1, ..., s$) — не зависят.

Арифметизацией "оператора с параметром"

$$\psi(\lambda) = \varphi - \lambda\varepsilon : V \longrightarrow V \tag{18.2}$$

будет служить оператор

$$\Psi(\lambda) = \Phi - \lambda\varepsilon : P^n \longrightarrow P^n;\ \overline{x} \mapsto B(\lambda)\overline{x};\ \overline{x} \in P^n, \tag{18.3}$$

заданный матрицей (17.3).

Арифметизациями операторов

$$\psi_i = \varphi - \lambda_i\varepsilon : V \longrightarrow V; i = 1, ..., s \tag{18.4}$$

будут являться операторы

$$\Psi_i = \Phi - \lambda_i\varepsilon : P^n \longrightarrow P^n;\ \overline{x} \mapsto B_i\overline{x};\ \overline{x} \in P^n, \tag{18.5}$$

определяемые матрицами [вида (17.24)]:

$$B_i = A - \lambda_i E;\ i = 1, ..., s. \tag{18.6}$$

Ядро оператора (18.5), т. е. собственное подпространство

$$W_i' = S_{\lambda_i}(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Psi_i) = L^0_{B_i}, \tag{18.7}$$

представляет из себя арифметизацию (и служит описанием) для ядра оператора (18.2), т. е. — собственного подпространства

$$W_i = S_{\lambda_i}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi_i). \tag{18.8}$$

Напомним, что в практических примерах, как правило, уже не делается различия между линейным оператором и его оцифровкой (арифметизацией); отождествляются: V и P^n, x и $\overline{x}$, φ и Ф, W_i и W_i', и т. д., и т. п.

После этого привлекается алгоритм построения базиса в ядре линейного оператора (см. п. 14.3), т. е. , фактически, — алгоритм 10.1, позволяющий собственное подпространство W_i, заданное первым способом, как нуль-пространство матрицы B_i, представить вторым способом:

$$W_i' = R_{F_i}, \tag{18.9}$$

как линейную оболочку векторов-столбцов фундаментальной матрицы F_i для однородной с.л.у.

$$B_i \cdot \overline{x} = \overline{0}. \tag{18.10}$$

18.2. Геометрические кратности собственных значений. Введем в рассмотрение еще один вид "спектральных характеристик" для л.э. — *размерности собственных подпространств*. Для этих чисел будут использоваться два названия и два обозначения.

Определение 18.1. *Геометрической кратностью* собственного значения $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$ называется размерность соответствующего собственного подпространства (18.8). Будем использовать обозначение:

$$n_i = \dim(S_{\lambda_i}(\varphi)). \tag{18.11}$$

Второе название мотивируется тем, что собственное подпространство (для φ, отвечающее λ_i), является ядром (для ψ_i), и поэтому его размерность есть не что иное, как *дефект* оператора ψ_i. В связи с этим используется обозначение:

$$n_i = d_i = \mathrm{dfc}(\psi_i). \tag{18.12}$$

Вспоминая тот факт, что собственные подпространства, по построению, являются ненулевыми, мы приходим к заключению, что геометрические кратности n_i $(i = 1, ..., s)$ являются натуральными числами, не превышающими $n = \dim(V)$.

Процесс арифметизации задачи о собственных значениях и собственных подпространствах, описанный в предыдущем пункте, связывает n_i с числовыми характеристиками матриц B_i. Точнее, справедливо следующее

Предложение 18.1. *Рассмотрим л.э. φ, действующий в n-мерном линейном пространстве V (над полем P), и его спектр*

$$\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}. \tag{18.13}$$

Пусть в некотором базисе $\mathcal{B}$ пространства V эндоморфизму φ отвечает матрица A. Тогда каждое собственное подпространство $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi) \leqslant V$ изоморфно своей арифметизации $W_i' = L^0_{B_i} \leqslant P^n$ (где $B_i = A - \lambda_i E$) и имеет размерность, равную

$$n_i = n - r_i, \tag{18.14}$$

где

$$r_i = \operatorname{rank}(B_i). \tag{18.15}$$

Подпространство W_i' может быть представлено как линейная оболочка векторов столбцов $(n \times n_i)$-матицы F_i — фундаментальной матрицы для однородной с.л.у. (18.10).

Доказательство немедленно следует из общих фактов, касающихся (определяемого с помощью базиса $\mathcal{B}$; см. п. 6.4) координатного изоморфизма $\beta : V \to P^n$, с учетом соотношения $d_i + r_i = n$ между рангом и дефектом линейного оператора ψ_i [или матрицы B_i; см. формулу (14.21)]. □

18.3. Алгоритм отыскания собственных значений и собственных подпространств для л.э. Резюмируем все изложенное выше в виде схемы алгоритма, позволяющего *вычислить спектр* л.э. и для каждого элемента спектра (т. е. собственного значения) вычислить соответствующее собственное подпространство (под этим понимается: *найти базис собственного подпространства*).

А л г о р и т м 18. 1.
Отыскание собственных значений (спектра) л.э. $\varphi : V \to V$ и соответствующих собственных подпространств

В конечномерном (размерности n) линейном пространстве V (над полем P) должен быть выбран базис $\mathcal{B}$, в котором линейному эндоморфизму φ будет соответствовать квадратная $(n \times n)$-матрица A.

1. Составляем матрицу с параметром $B(\lambda) = A - \lambda E$.

2. Вычисляем *характеритический многочлен* для л.э. φ — как определитель характеристической матрицы $C(\lambda)$ [противоположной матрице $B(\lambda)$]:

$$h_\varphi(\lambda) = \det(\lambda E - A).$$

3. Находим все корни $\lambda_i \in P$ $(i = 1, \dots, s)$ для многочлена $h_\varphi(\lambda)$ (*характеристические корни*), вместе с их *алгебраическими кратностями* m_i. (При этом могут использоваться те или иные алгоритмы теории многочленов; см. гл. 6 пособия $[A_1]$.)

Тем самым уже определен *спектр*

$$\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}.$$

4. Выписываем *разложение характеристического многочлена на множители*:

$$h_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} g(\lambda),$$

где многочлен $g(\lambda)$ корней в поле P не имеет.

5_i. Для каждого собственного значения $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$ $(i = 1, \dots, s)$ вычисляем матрицу

$$B_i = A - \lambda_i E$$

и составляем однородную с.л.у.

$$B_i \cdot \overline{x} = \overline{0}.$$

6_i. Для каждого $i = 1, \dots, s$ находим *фундаментальную матрицу* F_i указанной с.л.у.; количество столбцов в этой матрице будет равно *геометрической кратности* n_i собственного значения λ_i, т. е. размерности соответствующего собственного подпространства.

7_i. Представляем каждое *собственное подпространство*

$$W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$$

как *линейную оболочку*

$$W_i = \langle f_1, \dots, f_{n_i} \rangle$$

системы из $n_i = n - \operatorname{rank}(B_i)$ векторов f_j $(j = 1, \dots, n_i)$, которые изображаются (в базисе $\mathcal{B}$) векторами-столбцами $\overline{f_j}$ $(j = 1, \dots, n_i)$ матрицы F_i.

8. Формируем списки:
— собственных значений

$$\lambda_1, \dots, \lambda_s;$$

— их алгебраических кратностей

$$m_1, \dots, m_s;$$

— геометрических кратностей

$$n_1, \dots, n_s;$$

— матриц, содержащих базисы, в собственных подпространствах

$$F_1, \dots, F_s.$$

9. Вычисляем суммы алгебраических и геометрических кратностей:

$$m' = \sum_{i=1}^{s} m_i; \tag{18.16}$$

$$n' = \sum_{i=1}^{s} n_i. \tag{18.17}$$

Замечание 18.1. Некоторые этапы алгоритма 18.1 в определенной степени "избыточны": получаемая в них информация найдет применение лишь в дальнейшем (при описании других алгоритмов, работа которых будет начинаться там, где завершает работу данный).

Замечание 18.2. В предложении 22.2 будет доказано, что (для любого собственного значения) геометрическая кратность не превышает алгебраическую:

$$n_i \leqslant m_i; \ i = 1, \dots, s. \tag{18.18}$$

Пока же вы (при решении задач, с целью контроля правильности вычислений) следите за выполнением неравенств (18.18).

Особенно важными будут случаи выполнения условия $m' = n$, или же — более сильного — условия $n' = n$. Если выполняется первое условие (а в случае алгебраически замкнутого поля P это всегда так), то, как будет установлено ниже (см. § 27), для л.э. существует так называемый *жорданов базис*. Второе условие выполняется не всегда, даже над алгебраически замкнутыми полями. Оно обеспечивает существование так называемого *диагонализирующего базиса* для л.э. (Этим вопросом мы займемся совсем скоро, в § 21.)

18.4. Примеры отыскания спектра и базисов в собственных подпространствах

Пример 18.1. Выполним следующее типовое упражнение. (Обратите внимание на то, что "оцифровка" уже считается произведенной, т. е. линейный оператор предполагается действующим в арифметическом линейном пространстве и рассматривается его матрица в естественном базисе этого пространства.)

З а д а ч а. Линейный оператор φ действует в арифметическом линейном пространстве $\mathbb{R}^6$ и имеет (в естественном базисе этого пространства) матрицу

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти спектр и базисы в собственных подпространствах для этого оператора.

Р е ш е н и е. Следуем пунктам алгоритма 18.1.

1. Составляем матрицу:

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4-\lambda & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем характеристический многочлен [как определитель матрицы $C(\lambda) = -B(\lambda)$]:

$$h_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda+4 & -4 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^6 + 8\lambda^5 + 26\lambda^4 + 44\lambda^3 + 41\lambda^2 + 20\lambda + 4.$$

(При "ручных" вычислениях этот этап часто оказывается довольно трудоемким. Но в данном случае, с помощью умелого выбора строк (столбцов), по которым раскрывается определитель, можно получить результат даже "в лучшем виде" — разложенным на линейные множители.)

3. В общем случае отыскание корней многочлена — серьезная задача. Чаще всего она разрешима лишь приближенно. Однако учебные примеры (в нашем курсе) подбираются так, чтобы корни находились *точно*, элементарными методами, изученными в гл. 6 пособия $[A_1]$.

Многочлен $h_\varphi(\lambda)$ имеет целые коэффициенты и является нормализованным, поэтому все его рациональные корни (если они есть) обязаны быть целыми и их следует искать среди делителей свободного члена.

"Подозрительными" оказываются значения $\pm1, \pm2, \pm4$. Алгоритм § 42 из $[A_1]$ (использующий *схему Горнера*) дает (с учетом кратностей) шесть характеристических корней: $\lambda_1 = -1$ (кратности $m_1 = 4$) и $\lambda_2 = -2$ (кратности $m_2 = 2$).

Спектр состоит из двух точек: $\sigma(\varphi) = \{-1, -2\}$.

4. Разложение на множители для характеристического многочлена имеет вид:

$$h_\varphi(\lambda) = (\lambda + 1)^4(\lambda + 2)^2.$$

Многочлен $g(\lambda)$, фигурирующий в общей формуле, в данном случае сводится к единице. Это произошло потому, что сумма алгебраических кратностей (см. этап 9) $m' = m_1 + m_2 = 6 = n$.

5.1. Составляем матрицу:

$$B_1 = A - \lambda_1 E = A + E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.1. Находим нуль-пространство (ядро) матрицы B_1, т. е. (см. алгоритм 10.1) решаем однородную с.л.у. с матрицей B_1. Получаем фундаментальную матрицу

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Количество столбцов в этой матрице дает геометрическую кратность $n_1 = 2$ для первого собственного значения.

7.1. Первое собственное подпространство может быть представлено в виде:

$$W_1 = S_{\lambda_1}(\varphi) = R_{F_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

5.2.

$$B_2 = A - \lambda_2 E = A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2.

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \ n_2 = 1.$$

7.2.

$$W_2 = S_{\lambda_2}(\varphi) = R_{F_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

8 — 9. Оформляем сводную таблицу:

$$\lambda_1 = -1; \quad m_1 = 4; \quad S_{\lambda_1}(\varphi) = R_{F_1}; \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad n_1 = 2;$$

$$\lambda_2 = -2; \quad m_2 = 2; \quad S_{\lambda_2}(\varphi) = R_{F_2}; \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad n_2 = 1;$$

$m' = 6 = n; \quad n' = 3 < n.$

Пример 18.2. Опишем возможности системы Maple в задачах *спектральной теории матриц.* Сохраним условия предыдущего примера. Подгрузим пакет LinearAlgebra и введем матрицу A (см. п. 7.4).

Сразу отметим некоторое расхождение нашей терминологии с терминологией Maple: мы называли *характеристической* для матрицы A матрицу $C(\lambda) = \lambda E - A = -B(\lambda)$; Maple присваивает это имя матрице $B(\lambda)$. При этом характеристический многочлен понимается так же, как и у нас: $h_A(\lambda) = \det(C(\lambda))$, что, по-видимому, является не очень последовательным. Мы придерживаемся традиций отечественной учебной литературы.

Функция

```
> C := - CharacteristicMatrix( A, lambda );
```

возвращает характеристическую матрицу в нашем смысле. Вычислив (с помощью функции Determinant) ее определитель, мы получим характеристический многочлен. Но это можно сделать сразу:

```
> h := CharacteristicPolynomial( A, lambda );
```

$$h := \lambda^6 + 8\lambda^5 + 26\lambda^4 + 4\lambda^3 + 41\lambda^2 + 20\lambda + 4$$

Можно использовать команду разложения многочлена на множители (см. п. 40.5 пособия $[A_1]$):

```
> factor( h );
```

$$(\lambda + 1)^4(\lambda + 2)^2$$

Из полученного разложения усматриваются характеристические корни, вместе с их (алгебраическими) кратностями. Другой способ отыскания спектра состоит в применении команды roots (также известной нам из указанного выше пункта первого пособия).

Однако есть и "специализированная" команда Eigenvalues, возвращающая (по умолчанию) *вектор-столбец*, составленный из собственных значений, каждое из которых повторяется столько раз, какова его кратность:

> Eigenvalues(A);

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Можно переопределить *формат вывода* и получить в ответе *список* собственных значений:

> Eigenvalues(A, output = 'list');

$$[-1, -1, -1, -1, -2, -2]$$

Кратко обсудим "лингвистический" вопрос: что за "полунемецкое словечко" используется для обозначения функции вычисления спектра? Пути распространения математической терминологии, ее восприятия различными языками бывают весьма затейливыми. В "английский математический" термин *собственное значение* пришел из немецкого, где он выглядит следующим образом: Eigenwert. Англичане "перевели полслова" и получили: eigenvalue. В таком виде термин перекочевал в Maple, в пакет linalg. В пакете LinearAlgebra все команды пишутся с большой буквы (что еще более сближает используемое слово с немецким первоисточником).

Впрочем, функция Eigenvalues не представляет серьезного интереса, поскольку имеется ее значительно расширенный вариант — функция Eigenvectors, возвращающая не только собственные значения (с кратностями), но и *базисы в собственных подпространствах*.

В самой краткой своей форме эта функция работает следующим образом:

> Eigenvectors(A);

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Обратите внимание, прежде всего, на то, что ответ представляет собой *последовательность*. Это особый *тип данных* ('exprseq') в системе Maple. По "внешнему виду" он отличается от списка ('list') отсутствием окружающих квадратных скобок. (Но имеются и более существенные отличия — в правилах манипулирования с переменными указанных типов.)

Далее, первый элемент в последовательности совпадает с тем, что выводит команда Eigenvalues. Вторым элементом служит матрица, содержащая базисные векторы в собственных подпространствах и, может быть, — нулевые векторы (которые собственными, как известно, не являются и поэтому "подлежат безжалостному удалению"). Последнее обстоятельство делает принятый по умолчанию интерфейс не слишком удачным. Но все можно исправить, отрегулировав output:

> ev := Eigenvectors(A, output = 'list');

$$ev := \left[\left[-1, 4, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[-2, 2, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \right]$$

Теперь на выходе мы получили *список* из двух трехэлементных *списков* вида

[собств. значение, алг. кратность, {базис в собств. подпространстве}].

Третьим элементом показанного выше списка служит (заключенное в фигурные скобки) *множество* ('set'), элементами которого являются базисные векторы в собственном подпространстве.

Фундаментальные матрицы, которые как раз и составляются из этих базисных векторов, легко "добыть" из общего ответа *ev*:

> F1 := < ev[1][3][1] | ev[1][3][2] >; F2 := < ev[2][3][1] >;

Поясним, во-первых, что в командах выше используются shortcuts (обозначения, содержащие *угловые и вертикальные ограничители*; см. п. 7.4).

Во-вторых, расшифруем выражение ev[1][3][1]: в списке ev берется первый элемент — тоже список, в нем выбирается третий элемент — множество, из которого извлекается его первый элемент — вектор-столбец. Аналогично понимаются все подобные выражения. Не упустите такое обстоятельство: даже в множестве, состоящем из одного единственного элемента, этот элемент следует "выбирать" (как первый).

§ 19. Свойства собственных подпространств

19.1. Подпространства, инвариантные относительно л.э. Введем одно из важнейших понятий теории линейных эндоморфизмов (операторов).

Определение 19.1. Линейное подпространство $W \leqslant V$ в линейном пространстве V называется *инвариантным относительно линейного оператора* $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ (или: *φ-инвариантным*), если

$$\varphi(W) \subseteq W, \tag{19.1}$$

т. е. если это подпространство переходит в себя под действием эндоморфизма φ.

Всякий линейный оператор $\varphi : V \to V$ можно сузить (ограничить) на любое подпространство $W \leqslant V$. При этом возникает новый оператор (при $W \neq V$ уже — не эндоморфизм): $\varphi' = \varphi\big|_W : W \to V$. Если W является φ-инвариантным, то образ φ' содержится в W и этот оператор можно рассматривать как л.э.

$$\varphi' : W \longrightarrow W;\ \varphi'(x) = \varphi(x);\ x \in W. \tag{19.2}$$

Тривиальные подпространства $W = O$ и $W = V$ инвариантны относительно любого л.э.

Имеется "противоположная крайность": если эндоморфизм является *скалярным*: $\varphi = \lambda\varepsilon$ ($\lambda \in P$), то любое подпространство является относительно него инвариантным.

Из последнего факта следует, что если подпространство W является φ-инвариантным, то оно является также инвариантным относительно оператора $\psi(\lambda) = \varphi - \lambda\varepsilon$ при любом $\lambda \in P$.

Приведем еще примеры инвариантных подпространств.

Пример 19.1. Для любого л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ инвариантными являются его *ядро* $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ и *образ* $N = \mathrm{Im}(\varphi)$: $\varphi(N) = O \subseteq N$; $\varphi(M) \subseteq \varphi(V) = M$. Заметим, что сужение оператора на свое ядро является нулевым оператором: $\varphi' = \varphi\big|_N = o$.

(Данный пример имеет далеко идущее продолжение; см. предложение 23.3.)

Пример 19.2. Оператор дифференцирования $'$, рассматриваемый как л.э. пространства гладких функций $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, имеет бесконечную последовательность вложенных друг в друга инвариантных подпространств:

$$O < \mathbb{R} = \mathbb{R}_0[x] < \mathbb{R}_1[x] < \mathbb{R}_2[x] < ... < \mathbb{R}_n[x] < ... < \mathbb{R}[x] < V. \quad (19.3)$$

Два последних пространства в цепочке (19.3) бесконечномерны, остальные — конечномерны.

Можно заметить также, что подпространство $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ является образом оператора $'$, если его рассматривать на $\mathbb{R}_n[x]$.

Замечание 19.1. Отметим очевидные свойства φ-инвариантных подпространств: пересечение и сумма любого семейства таких подпространств также являются φ-инвариантными.

Для пересечения это вообще очевидно, а для суммы

$$W = W_1 + ... + W_s$$

φ-инвариантных подпространств W_i $(i = 1, ..., s)$ доказательство проводится так: если $x = y_1 + ... + y_s \in W$, то

$$\varphi(x) = \varphi(y_1 + ... + y_s) = \varphi(y_1) + ... + \varphi(y_s) \in W_1 + ... + W_s = W.$$

19.2. Инвариантность собственных подпространств. Рассмотрим теперь л.э. φ, действующий в n-мерном линейном пространстве V, его спектр $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\}$ и семейство собственных подпространств $\{W_i\}_{i=1}^s$, где $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$.

Предложение 19.1. *1. Каждое собственное подпространство $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$ является φ-инвариантным, причем сужение*

$$\varphi_i' = \varphi\big|_{W_i} : W_i \longrightarrow W_i;\ \varphi_i'(x) = \varphi(x);\ x \in W_i \tag{19.4}$$

является скалярным оператором:

$$\varphi_i' = \lambda_i \varepsilon_i, \tag{19.5}$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon_{W_i}$ — тождественный эндоморфизм i-го собственного пространства; $i = 1, ..., s$.

2. Кроме того, каждое из подпространств W_i является (при любом $j = 1, ..., s$) ψ_j-инвариантным, где

$$\psi_j = \varphi - \lambda_j \varepsilon, \tag{19.6}$$

причем сужение $\psi_j\big|_{W_i}$ также является скалярным оператором:

$$\psi_j\big|_{W_i} = (\lambda_i - \lambda_j)\varepsilon_i; \tag{19.7}$$

в частности (при $j = i$) сужение $\psi_i\big|_{W_i}$ является нулевым.

Доказательство. 1. Если $x \in W_i$, то, по определению собственного подпространства,

$$\varphi(x) = \lambda_i x = (\lambda_i \varepsilon)(x).$$

Значит, во-первых, вектор $\varphi(x)$ также принадлежит W_i, а во-вторых, в силу произвольности x, справедливо равенство операторов (19.5).

2. Второе утверждение немедленно следует из первого: ограничение на W_i оператора φ дает $\lambda_i \varepsilon_i$, а ограничение скалярного оператора $\lambda_j \varepsilon$ — скалярный оператор $\lambda_j \varepsilon_i$. □

Замечание 19.2. Факт φ-инвариантности ядра $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ (см. пример 19.1) можно считать частным случаем первого утверждения предложения 19.1. В самом деле, ядро линейного оператора является (в случае своей нетривиальности) не чем иным, как собственным подпространством $S_0(\varphi)$.

Определение 19.2. Сумму всех собственных подпространств для л.э. φ, т. е. линейное подпространство

$$W' = \sum_{i=1}^{s} W_i, \tag{19.8}$$

будем называть *собственной суммой* для φ и обозначать $S(\varphi)$.

(В случае пустоты спектра л.э., т. е. при $s = 0$, собственная сумма считается нулевым подпространством.)

Из предложения 19.1 и замечания 19.1 немедленно следует

Предложение 19.2. *Собственная сумма*

$$S(\varphi) = \sum_{i=1}^{s} S_{\lambda_i}(\varphi) \tag{19.9}$$

является φ-инвариантным подпространством. □

Замечание 19.3. Подпространство $S(\varphi)$ содержит *все собственные векторы* для л.э. φ. Однако, вообще говоря, не все его векторы являются собственными.

С этим связана известная "задачка-ловилка" для студентов: "Верно ли утверждение, что сумма двух собственных векторов для линейного оператора снова является собственным вектором для этого оператора?"

Простодушные студенты не замечают того, что им не уточнили, *одному и тому же* или *разным* собственным значениям отвечают данные собственные векторы, и заявляют примерно так: "Да, поскольку собственные векторы образуют подпространство."

Однако сумма двух собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, никогда не будет собственным вектором. (Убедитесь в этом самостоятельно, с помощью предложения 19.3, которое мы чуть ниже докажем.)

Более того, приведенное выше "студенческое" утверждение ложно даже в том случае, когда рассматриваются собственные векторы, отвечающие одному и тому же собственному значению. Дело в том, что сумма двух таких векторов может оказаться *нулевым* вектором, который, по определению, не считается собственным.

Правильный ответ: сумма двух собственных векторов будет собственным вектором тогда и только тогда, когда они отвечают одному и тому же собственному значению и не противоположны.

19.3. Независимость в совокупности собственных подпространств л.э. В данном пункте мы докажем, что собственная сумма для л.э. является на самом деле *прямой*. (Разумеется, нужно исключить случай пустого спектра. Случай одноточечного спектра также является бессодержательным, хотя, конечно, никто не мешает нам считать прямой "сумму", содержащую одно слагаемое.)

Предварительно нам придется доказать вспомогательное (но важное и само по себе)

Предложение 19.3. *Конечная система*

$$\mathcal{A} = [\, a_1, a_2, \dots, a_k \,], \tag{19.10}$$

составленная из собственных векторов a_j $(j = 1, \dots, k)$ *для л.э.* φ, *отвечающих попарно различным собственным значениям* λ_j, *линейно независима.*

Доказательство проведем индукцией по количеству k векторов в с.в. (19.10).

При $k = 1$ эта система состоит из одного вектора: $\mathcal{A} = [a_1]$, причем — ненулевого (в силу определения собственного вектора). Следовательно, в этом случае с.в. $\mathcal{A}$ линейно независима.

Предположим теперь, что утверждение предложения справедливо для любой с.в., содержащей k собственных векторов, отвечающих k попарно различным собственным значениям, и докажем его для произвольной системы

$$\mathcal{A}' = [\, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1} \,];\ a_j \in S_{\lambda_j}(\varphi), \tag{19.11}$$

из $k + 1$ собственного вектора, где снова все собственные значения $\lambda_j \in \sigma(\varphi)$ $(j = 1, \dots, k + 1)$ попарно различны.

Предположим, что система (19.11) линейно зависима, и учтем тот факт, что ее подсистема $\mathcal{A}$, составленная из первых k векторов и имеющая вид (19.10), будет, в силу предположения индукции, линейно независимой.

Из этого, при посредстве предложения 3.1, следует, что вектор a_{k+1}, последний из входящих в $\mathcal{A}'$, линейно выражается через $\mathcal{A}$, т. е. найдутся скаляры $\mu_j \in P$ $(j = 1, \dots, k)$ такие, что

$$a_{k+1} = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k. \tag{19.12}$$

Применим к обеим частям равенства (19.12) оператор φ, воспользуемся его линейностью, а также определением собственных векторов:

$$\varphi(a_j) = \lambda_j a_j;\ j = 1, \dots, k+1. \tag{19.13}$$

Получим:

$$\lambda_{k+1} a_{k+1} = \mu_1 \lambda_1 a_1 + \mu_2 \lambda_2 a_2 + \dots + \mu_k \lambda_k a_k, \tag{19.14}$$

или, после подстановки в левую часть (19.14) выражения (19.12) для вектора a_{k+1}:

$$\lambda_{k+1}(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k) = \mu_1 \lambda_1 a_1 + \mu_2 \lambda_2 a_2 + \dots + \mu_k \lambda_k a_k. \tag{19.14$'$}$$

Перенося в равенстве (19.14$'$) все слагаемые в левую часть и группируя их (с использованием аксиом линейного пространства), мы придем к следующему соотношению:

$$\mu_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)a_1 + \mu_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)a_2 + \dots + \mu_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)a_k = 0. \tag{19.15}$$

Равенство (19.15) представляет некоторую линейную комбинацию для с.в. $\mathcal{A}$, значение которой равно нулю. В силу линейной независимости системы $\mathcal{A}$, все коэффициенты этой линейной комбинации должны равняться нулю:

$$\mu_j(\lambda_{k+1} - \lambda_j) = 0;\ j = 1, \dots, k. \tag{19.16}$$

Однако разности $\lambda_{k+1} - \lambda_j$ $(j = 1, \dots, k)$ в формулах (19.16) отличны от нуля, т. к., по предположению, все собственные значения попарно различны. Значит, обращаются в нуль все коэффициенты μ_j $(j = 1, \dots, k)$.

Возвращаясь к выражению (19.12), получаем, что $a_{k+1} = 0$. А это уже противоречие: собственный вектор не может быть нулевым. Убеждаемся в ошибочности предположения о линейной зависимости с.в. $\mathcal{A}'$. Следовательно, эта система линейно независима; шаг индукции успешно завершен; предложение доказано. □

Теперь мы в состоянии доказать "прямизну" собственной суммы (19.9).

Теорема 19.1. *1. Собственные подпространства* $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$ $(i = 1, ..., s)$ *для линейного эндоморфизма* φ, *действующего в конечномерном пространстве* V, *независимы в совокупности.*

2. Собственная сумма является прямой:

$$S(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^{s} S_{\lambda_i}(\varphi). \tag{19.17}$$

3. В подпространстве $W' = S(\varphi)$ *можно выбрать базис вида*

$$\mathcal{B}' = [\,\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_s\,], \tag{19.18}$$

где все $\mathcal{B}_i$ $(i = 1, ..., s)$ *являются базисами в соответствующих собственных подпространствах* W_i.

4. Размерность подпространства (19.17) равняется сумме n' *геометрических кратностей всех собственных значений:*

$$\dim(W') = n' = \sum_{i=1}^{s} n_i. \tag{19.19}$$

Доказательство. 1. Докажем что собственные подпространства $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$ независимы в совокупности (см. определение 9.2), т. е. установим тривиальность всех пересечений:

$$W_j \cap \widehat{W}_j = O;\ \ j = 1, ..., s, \tag{19.20}$$

где

$$\widehat{W}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} W_i. \tag{19.21}$$

Предположим, что существует ненулевой вектор x, принадежащий пересечению $W_j \cap \widehat{W}_j$. Тогда имеет место равенство

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} y_i, \tag{19.22}$$

где $x \in W_j;\ \ y_i \in W_i\ (i = 1, \dots, s;\ \ i \neq j)$.

Среди векторов-слагаемых в правой части (19.22) обязательно существуют ненулевые (иначе нулевым был бы вектор x). Оставим в сумме только их и новую сумму (без нулевых слагаемых) пометим штрихом:

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{s}{}' y_i. \tag{19.22'}$$

Последняя формула представляет собой линейное соотношение для системы векторов, составленной из вектора x и тех y_i, которые отличны от нуля. Следовательно, указанная с.в. будет линейно зависимой.

Между тем она составлена из *собственных* векторов для л.э. φ, отвечающих *попарно различным* собственным значениям. Получилось противоречие с результатом предыдущего предложения. Значит, предположение о нетривиальности какого-либо из пересечений (19.20) ошибочно, и первое утверждение теоремы доказано.

2. Второе утверждение немедленно вытекает из первого в силу "критерия прямизны" (см. предложение 9.1).

3. Напомним (см. замечание 9.3) термин: базис, *приспособленный* к прямой сумме. О существовании именно такого базиса говорится в третьем утверждении теоремы. Оно справедливо в силу предложения 9.2.

4. Четвертое утверждение вытекает из третьего (и, в свою очередь, влечет неравенство $n' \leqslant n$). □

§ 20. Линейные эндоморфизмы в прямой сумме и их матрицы

20.1. Операторы вложения и проектирования в полной прямой сумме и их матрицы. Данный параграф не относится непосредственно к спектральной теории линейных эндоморфизмов. Мы систематизируем в нем (уже неоднократно "всплывавший") материал, относящийся к линейным операторам, которые действуют в линейном пространстве, разбитом в (полную) прямую сумму линейных подпространств. Если в таком пространстве выбрать *приспособленный* к указанному разбиению базис, то всякому л.э. будет соответствовать (квадратная) матрица, имеющая особое — *блочное* (или *клеточное*) — строение.

Блочные матрицы (не обязательно квадратные) нам встречались, начиная с § 5 пособия [A_1]; см. также п. 27.1 этого пособия, в котором доказывалась теорема об определителе квадратной, блочно треугольной матрицы. Кроме того, вы можете припомнить материал примера 12.3 из настоящего пособия. Ясно, что блочные матрицы очень важны и удобны в вычислениях. Нам предстоит подробно разобраться в том, как и почему они возникают, какой *операторный* смысл имеют.

Первый пункт параграфа фактически будет продолжением п. 9.3, в котором были введены в рассмотрение *операторы вложения* прямых слагаемых в сумму и *операторы проектирования* суммы на прямые слагаемые. Мы разберемся с этими операторами более детально, вычислим соответствующие им матрицы (в предположении, что прямая сумма наделяется приспособленным базисом).

Итак, пусть n-мерное линейное пространство V (над полем P) разбито в прямую сумму

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i \tag{20.1}$$

линейных подпространств $W_i \leqslant V$ [$\dim(W_i) = n_i$; $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$].

Рассмотрим порождаемые разложением (20.1) операторы вложения [см. (9.36)]

$$\alpha_i : W_i \longrightarrow V;\ \alpha_i(y_i) = y_i;\ y_i \in W_i\,(i = 1, \dots, s), \tag{20.2}$$

а также [см. (9.37)] — операторы проектирования

$$\pi_i : V \longrightarrow W_i;\ \pi_i(x) = y_i;\ x = \sum_{i=1}^{s} y_i \in V\,(i = 1, \dots, s). \tag{20.3}$$

Напомним соотношения между этими операторами [см. формулы (9.38) и (9.40)]:

$$\pi_i \circ \alpha_i = \varepsilon_i; \tag{20.4}$$

$$\pi_i \circ \alpha_j = o\ (i \neq j), \tag{20.5}$$

где $i, j = 1, \dots, s$; o — нулевые операторы, а ε_i — тождественные (в подпространствах с соответствующими номерами).

Будут использоваться также *эндоморфизмы проектирования* [или, как они короче именуются, *проекторы*; см.(9.39)]

$$\rho_i = \alpha_i \circ \pi_i : V \longrightarrow V;\ i = 1, \dots s, \tag{20.6}$$

обладающие [см. (9.41) — (9.43)] свойствами:

$$\rho_i^2 = \rho_i; \;\; \rho_i \circ \rho_j = o \;\; (i \neq j); \;\; \sum_{i=1}^{s} \rho_i = \varepsilon. \tag{20.7}$$

Выберем в каждом из прямых слагаемых W_i произвольный базис $\mathcal{B}_i$. Объединив эти базисы и приняв *сквозную нумерацию* векторов, мы получим [приспособленный к разбиению (20.1)] базис в пространстве V:

$$\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_s] = [b_1, \dots, b_{n_1}, \, b_{n_1+1}, \dots, b_{n_1+n_2}, \dots, b_n]. \tag{20.8}$$

Вектор, занимающий k-ю позицию в базисе $\mathcal{B}_i$ $(1 \leqslant k \leqslant n_i)$ будет иметь сквозной номер

$$k' = n_1 + \dots + n_{i-1} + k \tag{20.9}$$

в объединенном базисе (20.8).

Определим матрицу оператора вложения (20.2) относительно базисов $\mathcal{B}_i$ в W_i и $\mathcal{B}$ в V. Образом k-го вектора из базиса $\mathcal{B}_i$ при вложении α_i будет этот же самый вектор, но рассматриваемый во всем пространстве V. Если разложить этот вектор по объединенному базису $\mathcal{B}$, то все координаты будут равны нулю, кроме одной (равной единице), которая будет иметь "сквозной номер" k', определяемый формулой (20.9). Так что получится координатный столбец $\overline{e_{k'}} \in P^n$. Приходим к выводу, что оператору α_i будет соответствовать матрица

$$\underset{n\times n_i}{E_i} = \begin{pmatrix} \underset{n_1\times n_i}{O} \\ \hline \cdots \\ \hline \underset{n_i\times n_i}{E} \\ \hline \cdots \\ \hline \underset{n_s\times n_i}{O} \end{pmatrix}. \tag{20.10}$$

Матрица, отвечающая π_i (в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_i$), должна иметь размеры $n_i \times n$; векторы базиса $\mathcal{B}_i$ оператором π_i отображаются сами в себя; при этом элемент базиса $\mathcal{B}$ со сквозным номером k' переходит в элемент $\mathcal{B}_i$ с номером k, что дает единичный вектор $\overline{e_k}$ в качестве столбца с номером k' в матрице, соответствующей π_i; остальные базисные векторы, входящие в $\mathcal{B}$, отображаются в нуль. Таким образом, оператору π_i соответствует матрица

$$\underset{n_i\times n}{\Pi_i} = \left(\underset{n_i\times n_1}{O} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underset{n_i\times n_i}{E} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underset{n_i\times n_s}{O} \right). \tag{20.11}$$

Матрица P_i проектора ρ_i находится либо непосредственно, либо — как произведение:

$$\underset{n\times n}{P_i} = \underset{n\times n_i}{E_i} \cdot \underset{n_i\times n}{\Pi_i} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \underset{n_1\times n_1}{O} & \cdots & \underset{n_1\times n_i}{O} & \cdots & \underset{n_1\times n_s}{O} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline \underset{n_i\times n_1}{O} & \cdots & \underset{n_i\times n_i}{E} & \cdots & \underset{n_i\times n_s}{O} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline \underset{n_s\times n_1}{O} & \cdots & \underset{n_s\times n_i}{O} & \cdots & \underset{n_s\times n_s}{O} \end{array}\right). \tag{20.12}$$

Разумеется, свойства (20.4), (20.5), (20.7) операторов (20.2), (20.3), (20.6) находят свое матричное выражение. [Например, последнее из свойств (20.7) проявляется в том, что сумма всех матриц P_i равняется единичной $(n \times n)$-матрице.]

20.2. Полные прямые суммы и фильтрации. Сумму линейных подпространств (20.1) можно "собирать постепенно", формируя *частичные суммы*

$$W_{\overline{0}} = O;\ W_{\overline{i}} = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_i;\ i = 1, ..., s. \tag{20.13}$$

Частичные суммы (20.13) образуют строго возрастающую (если, конечно, среди слагаемых нет нулевых) последовательность подпространств

$$O = W_{\overline{0}} < W_{\overline{1}} < W_{\overline{2}} < ... < W_{\overline{s}} = V, \tag{20.14}$$

которую принято называть *фильтрацией* или *флагом*.

Обратно, по всякой фильтрации

$$O = Y_0 < Y_1 < Y_2 < ... < Y_{s-1} < Y_s = V, \tag{20.15}$$

можно (хотя и не однозначно) построить прямую сумму вида (20.1) такую, что $W_{\overline{i}} = Y_i$ $(i = 1, \dots, s)$, если положить $W_1 = Y_1$ и для любого i $(1 < i \leqslant s)$ взять в качестве W_i (произвольное) прямое дополнение к Y_{i-1} в Y_i.

В фильтрации (20.14) размерностями подпространств $W_{\overline{i}}$ будут *кумулятивные* (накапливаемые) размерности

$$n_{\overline{i}} = n_1 + n_2 + ... + n_i;\ i = 1, \dots, s. \tag{20.16}$$

Попробуйте обосновать следующее простое утверждение: сумма эндоморфизмов проектирования

$$\rho_{\overline{i}} = \rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_i$$

является проектором на подпространство $W_{\overline{i}}$.

20.3. Матрица л.э., действующего в полной прямой сумме, и ее блочное строение. Рассмотрим л.э.

$$\varphi : V \longrightarrow V \tag{20.17}$$

полной прямой суммы (20.1) в себя. Его можно сузить на любое из прямых слагаемых W_j $(j = 1, ..., s)$. Получатся линейные операторы (гомоморфизмы)

$$\varphi_j = \varphi\big|_{W_j} = \varphi \circ \alpha_j : W_j \longrightarrow V;\ \varphi_j(x) = \varphi(x);\ x \in W_j. \tag{20.18}$$

(Обратите внимание на то, что сужение оператора на подпространство можно представить как его композицию с оператором вложения для подпространства.)

Далее, для любого $i = 1, ..., s$ можно взять композицию оператора (20.18) и (применяемого следующим) оператора π_i; так возникают операторы

$$\varphi_{ij} = \pi_i \circ \varphi_j = \pi_i \circ \varphi \circ \alpha_j : W_j \longrightarrow W_i, \tag{20.19}$$

действующие по правилу:

$$\varphi_{ij}(x) = \pi_i(\varphi(x));\ x \in W_j. \tag{20.20}$$

При $i = j$ оператор φ_{ii} является эндоморфизмом подпространства W_i.

Снова привлечем базисы $\mathcal{B}_i$ в подпространствах-слагаемых и приспособленный к прямой сумме базис (20.8) и опишем матрицу, отвечающую л.э. φ.

Предложение 20.1. *Пусть операторам φ_{ij} отвечают (в базисах $\mathcal{B}_j$ и $\mathcal{B}_i$) матрицы A_{ij} $(i, j = 1, ..., s)$. Тогда операторам φ_j будут соответствовать (в базисах $\mathcal{B}_j$ и $\mathcal{B}$) матрицы*

$$\underset{n\times n_j}{A_j} = \begin{pmatrix} \underset{n_1\times n_j}{A_{1j}} \\ \hline \underset{n_2\times n_j}{A_{2j}} \\ \hline \cdots \\ \hline \underset{n_s\times n_j}{A_{sj}} \end{pmatrix}, \tag{20.21}$$

а исходный л.э. φ будет иметь (в базисе $\mathcal{B}$) матрицу

$$\underset{n\times n}{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \underset{n_1\times n_1}{A_{11}} & \underset{n_1\times n_2}{A_{12}} & \dots & \underset{n_1\times n_s}{A_{1s}} \\ \hline \underset{n_2\times n_1}{A_{21}} & \underset{n_2\times n_2}{A_{22}} & \dots & \underset{n_2\times n_s}{A_{2s}} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \underset{n_s\times n_1}{A_{s1}} & \underset{n_s\times n_2}{A_{s2}} & \dots & \underset{n_s\times n_s}{A_{ss}} \end{array}\right). \tag{20.22}$$

Доказательство. В самом деле, рассмотрим какой-либо вектор (скажем, k-й) из базиса $\mathcal{B}_j$. Образ этого вектора при действии оператора φ (или, что равносильно, — оператора φ_j) можно разложить по базису $\mathcal{B}$, а затем в полученной сумме сгруппировать слагаемые по их принадлежности подпространствам W_i. Сумма первых n_1 слагаемых является первой проекцией полученного вектора; в этой сумме скалярные коэффициенты при векторах базиса $\mathcal{B}_1$ образуют $(n_1\times 1)$-столбец, который (по определению матрицы линейного оператора) будет k-м столбцом $(n_1\times n_j)$-матрицы A_{1j}. Аналогично, сумма следующих n_2 слагаемых в разложении вектора-образа определит k-й столбец $(n_2\times n_j)$-матрицы A_{2j}; и т. д.

Соединенные в один, все эти столбцы составят k-й столбец матрицы, отвечающей оператору φ_j, которая, таким образом, будет иметь блочный вид (20.21). Далее, k-й столбец A_j входит в матрицу для оператора φ под сквозным номером $k' = n_1 + \dots + n_{j-1} + k$ [ср. с формулой (20.9)]. Значит, матрица для φ имеет блочный вид (20.22). □

Пример 20.1. Давно замечено, что "формулы с многоточиями" (заменяющими оборот "и т. д.") вызывают у многих первокурсников (вспомним английское "freshmen") страх и недоумение. Попробуем объяснить идею блочной структуры матриц, не употребляя многоточий (но и без комментариев), на небольшом примере.

$$\varphi : V \longrightarrow V;\ V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3;\ n = 6;\ n_1 = 3,\ n_2 = 1,\ n_3 = 2;$$
$$\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3];\ \mathcal{B}_1 = [b_1, b_2, b_3];\ \mathcal{B}_2 = [b_4];\ \mathcal{B}_3 = [b_5, b_6];$$

$$\varphi(b_1)=\varphi_1(b_1)=\varphi_{11}(b_1)+\varphi_{21}(b_1)+\varphi_{31}(b_1)=(a_{11}b_1+a_{21}b_2+a_{31}b_3)+a_{41}b_4+(a_{51}b_5+a_{61}b_6);$$
$$\varphi(b_2)=\varphi_1(b_2)=\varphi_{11}(b_2)+\varphi_{21}(b_2)+\varphi_{31}(b_2)=(a_{12}b_1+a_{22}b_2+a_{32}b_3)+a_{42}b_4+(a_{52}b_5+a_{62}b_6);$$
$$\varphi(b_3)=\varphi_1(b_3)=\varphi_{11}(b_3)+\varphi_{21}(b_3)+\varphi_{31}(b_3)=(a_{13}b_1+a_{23}b_2+a_{33}b_3)+a_{43}b_4+(a_{53}b_5+a_{63}b_6);$$

$$\varphi(b_4)=\varphi_2(b_4)=\varphi_{12}(b_4)+\varphi_{22}(b_4)+\varphi_{32}(b_4)=(a_{14}b_1+a_{24}b_2+a_{34}b_3)+a_{44}b_4+(a_{54}b_5+a_{64}b_6);$$
$$\varphi(b_5)=\varphi_3(b_5)=\varphi_{13}(b_5)+\varphi_{23}(b_5)+\varphi_{33}(b_5)=(a_{15}b_1+a_{25}b_2+a_{35}b_3)+a_{45}b_4+(a_{55}b_5+a_{65}b_6);$$
$$\varphi(b_6)=\varphi_3(b_6)=\varphi_{13}(b_6)+\varphi_{23}(b_6)+\varphi_{33}(b_6)=(a_{16}b_1+a_{26}b_2+a_{36}b_3)+a_{46}b_4+(a_{56}b_5+a_{66}b_6);$$

$$\underset{6\times6}{A}=\left(\overline{\varphi(b_1)}\,\middle|\,\overline{\varphi(b_2)}\,\middle|\,\overline{\varphi(b_3)}\,\middle|\,\overline{\varphi(b_4)}\,\middle|\,\overline{\varphi(b_5)}\,\middle|\,\overline{\varphi(b_6)}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ \hline a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{array}\right)=\left(\underset{6\times3}{A_1}\,\middle|\,\underset{6\times1}{A_2}\,\middle|\,\underset{6\times2}{A_3}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c} \underset{3\times3}{A_{11}} & \underset{3\times1}{A_{12}} & \underset{3\times2}{A_{13}} \\ \hline \underset{1\times3}{A_{21}} & \underset{1\times1}{A_{22}} & \underset{1\times2}{A_{23}} \\ \hline \underset{2\times3}{A_{31}} & \underset{2\times1}{A_{32}} & \underset{2\times2}{A_{33}} \end{array}\right).$$

20.4.* Умножение блочных матриц. Рассмотрим две $(n\times n)$-матрицы с *одинаковым блочным строением*: матрицу A вида (20.22) и аналогичного вида матрицу

$$\underset{n\times n}{B}=\left(\begin{array}{c|c|c|c} \underset{n_1\times n_1}{B_{11}} & \underset{n_1\times n_2}{B_{12}} & \dots & \underset{n_1\times n_s}{B_{1s}} \\ \hline \underset{n_2\times n_1}{B_{21}} & \underset{n_2\times n_2}{B_{22}} & \dots & \underset{n_2\times n_s}{B_{2s}} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \underset{n_s\times n_1}{B_{s1}} & \underset{n_s\times n_2}{B_{s2}} & \dots & \underset{n_s\times n_s}{B_{ss}} \end{array}\right). \tag{22.23}$$

Предложение 20.2. *Произведение $C=A\cdot B$ имеет блочное строение, такое же, как и матрицы-сомножители:*

$$\underset{n\times n}{C}=\left(\begin{array}{c|c|c|c} \underset{n_1\times n_1}{C_{11}} & \underset{n_1\times n_2}{C_{12}} & \dots & \underset{n_1\times n_s}{C_{1s}} \\ \hline \underset{n_2\times n_1}{C_{21}} & \underset{n_2\times n_2}{C_{22}} & \dots & \underset{n_2\times n_s}{C_{2s}} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \underset{n_s\times n_1}{C_{s1}} & \underset{n_s\times n_2}{C_{s2}} & \dots & \underset{n_s\times n_s}{C_{ss}} \end{array}\right). \tag{20.24}$$

Блоки матрицы (20.24) вычисляются по формулам:

$$\underset{n_i\times n_l}{C_{il}} = \sum_{j=1}^{s} \underset{n_i\times n_j}{A_{ij}} \cdot \underset{n_j\times n_l}{B_{jl}} . \tag{20.25}$$

Доказательство. Представим матрицу A в виде суммы s^2 матриц:

$$A = \sum_{i,j=1}^{s} \overline{A_{ij}}, \tag{20.26}$$

каждая из которых имеет блочное строение, совпадающее с блочным строением A, при том, что все блоки, кроме A_{ij}, являются нулевыми. Аналогичным образом представим B:

$$B = \sum_{k,l=1}^{s} \overline{B_{kl}}. \tag{20.27}$$

Произведение представится в виде суммы s^4 матриц:

$$C = A \cdot B = \sum_{i,j,k,l=1}^{s} \overline{A_{ij}} \cdot \overline{B_{kl}}. \tag{20.28}$$

Нетрудно заметить, что при $j \neq k$ произведение $\overline{A_{ij}} \cdot \overline{B_{kl}} = O$. (Ненулевая зона строк A, проходящих через блок A_{ij}, "разминётся" с ненулевой зоной столбцов B, проходящих через блок B_{kl}.) Следовательно, в правой части (20.28) останется s^3 слагаемых, которые мы сгруппируем следующим образом:

$$C = A \cdot B = \sum_{i,l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{s} \overline{A_{ij}} \cdot \overline{B_{jl}} \right) . \tag{20.29}$$

Заметим далее, что каждое из произведений $\overline{A_{ij}} \cdot \overline{B_{jl}}$ $(j = 1, ..., s)$ имеет единственный ненулевой $(n_i \times n_l)$-блок (на пересечении i-й зоны по строкам и l-й зоны по столбцам), который мы обозначим

$$C_{il}^{(j)} = A_{ij} \cdot B_{jl}. \tag{20.30}$$

В принятых выше обозначениях получится:

$$\overline{A_{ij}} \cdot \overline{B_{jl}} = \overline{C_{il}^{(j)}}. \tag{20.31}$$

Таким образом, для матрицы C мы будем иметь представление, аналогичное (20.26) и (20.27):

$$C = \sum_{i,l=1}^{s} \overline{C_{il}}, \tag{20.32}$$

с блоками

$$C_{il} = \sum_{j=1}^{s} C_{il}^{(j)} = \sum_{j=1}^{s} A_{ij} \cdot B_{jl}, \tag{20.33}$$

и предложение доказано. □

Замечание 20.1. Правило умножения блочных (квадратных) матриц оказывается идентичным по форме правилу умножения обычных матриц (со скалярными элементами). Есть однако очень существенная особенность: в отличие от скалярного случая, в формуле (20.25) нельзя переставлять сомножители A_{ij} и B_{jk}.

Замечание 20.2. Не составляет большого труда обобщить доказанное в предложении 20.2 правило на случай умножения прямоугольных блочных матриц. При этом должны быть *согласованы* не только размеры перемножаемых матриц, но и их *блочные структуры*. Допускают "перемножение блоками" $(m \times n)$-матрица A, разбитая на st блоков размеров $m_i \times n_j$ (где $i = 1, \dots, s$; $j = 1, \dots, t$; $m_1 + \dots + m_s = m$; $n_1 + \dots + n_t = n$), и $(n \times p)$-матрица B, разбитая на tu блоков размеров $n_j \times l_k$ ($j = 1, \dots, t$; $k = 1, \dots, u$; $l_1 + \dots + l_u = p$); в результате получится $(n \times p)$-матрица $C = AB$, разбитая на su блоков размеров $m_i \times l_k$.

20.5. Блочная структура матрицы л.э. в случае инвариантности фильтрации. Рассмотрим л.э. φ, действующий в n-мерном линейном пространстве V и имеющий *нетривиальное* (т. е. ненулевое и отличное от V) *инвариантное подпространство* W_1 размерности n_1 ($0 < n_1 < n$). Выберем произвольное прямое дополнение W_2

к подпространству W_1; оно будет иметь размерность $n_2 = n - n_1$ (и совсем не обязательно будет φ-инвариантным). Таким образом, л.э. окажется действующим в прямой сумме $V = W_1 \oplus W_2$.

В рассматриваемом случае набор (20.20) будет состоять из четырех линейных операторов φ_{11}, φ_{12}, φ_{21}, и φ_{22}, причем третий из них будет нулевым ($\varphi_{21} = o$). В самом деле φ отображает W_1 в себя, а проекция π_2 отображает W_1 в нуль, следовательно, и композиция $\pi_2 \circ \varphi \circ \alpha_1$ будет нулевой.

В такой ситуации оператор $\varphi_{11} : W_1 \to W_1$ оказывается не чем иным, как сужением φ на W_1, если это сужение рассматривать не как оператор из W_1 во всё V, но как линейный эндоморфизм, действующий в W_1. Мы будем применять запись:

$$\varphi_1' = \varphi\big|_{W_1} : W_1 \longrightarrow W_1;\ \varphi_1'(x) = \varphi(x);\ x \in W_1. \tag{20.34}$$

Подчеркнем, что л.э. φ_{22} таким свойством, вообще говоря, не обладает. Если же W_2, так же как W_1, окажется φ-инвариантным, то будет справедливо равенство $\varphi_{12} = o$ и можно будет считать φ_{22} сужением φ на W_2: $\varphi_{22} = \varphi_2'$.

Выберем теперь приспособленный к прямой сумме $V = W_1 \oplus W_2$ базис $\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2]$. В таком базисе эндоморфизму φ отвечает блочная матрица A, четыре блока которой A_{ij} $(i, j = 1, 2)$ соответствуют четырем рассмотренным выше линейным операторам φ_{ij}. В частности, $(n_2 \times n_1)$-блок A_{21} оказывается нулевым, а $(n_1 \times n_1)$-блок A_{11} является матрицей линейного эндоморфизма $\varphi_1' = \varphi\big|_{W_1} \in \mathcal{L}(W_1)$, в связи с чем мы переобозначим этот блок следующим образом: $A_{11} = A_1'$.

Окончательно получаем следующую матрицу *блочно-треугольного* вида:

$$\underset{n\times n}{A} = \left(\begin{array}{c|c} \underset{n_1\times n_1}{A_1'} & \underset{n_1\times n_2}{A_{12}} \\ \hline \underset{n_2\times n_1}{O} & \underset{n_2\times n_2}{A_{22}} \end{array}\right). \tag{20.35}$$

В частном случае, когда прямое дополнение W_2 является φ-инвариантным, матрица (20.35) становится *блочно-диагональной*:

$$\underset{n\times n}{A} = \left(\begin{array}{c|c} \underset{n_1\times n_1}{A'_1} & \underset{n_1\times n_2}{O} \\ \hline \underset{n_2\times n_1}{O} & \underset{n_2\times n_2}{A'_2} \end{array}\right). \tag{20.36}$$

Итог нашим рассмотрениям подводит следующее

Предложение 20.3. *Пусть л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ имеет нетривиальное инвариантное подпространство W_1. Тогда в пространстве V можно выбрать базис так, что матрица A, отвечающая φ, примет блочно-треугольный вид (20.35), в котором квадратный блок A'_1 отвечает сужению $\varphi'_1 = \varphi\big|_{W_1}$.*

Если к подпространству W_1 выбрано φ-инвариантное прямое дополнение W_2, то базис в V можно выбрать так, чтобы матрица данного л.э. стала блочно-диагональной вида (20.36); при этом второй диагональный блок A'_2 отвечает сужению $\varphi'_2 = \varphi\big|_{W_2}$. □

Выше мы рассматривали действие л.э. в линейном пространстве, разбитом в прямую сумму простейшего вида, содержащую всего два слагаемых, одно из которых *является* инвариантным, а второе — *может являться*. Полученный результат допускает обобщение на случай произвольного количества прямых слагаемых, в предположении, что соответствующая *фильтрация* (см. п. 20.3) является инвариантной в следующем смысле.

Определение 20.1. Рассмотрим л.э. φ, действующий в прямой сумме вида (20.1). Фильтрация (20.14), соответствующая этой прямой сумме, называется φ-инвариантной, если каждая из частичных сумм $W_{\overline{i}}$ $(i = 0, \dots, s)$ является φ-инвариантным подпространством.

Прокомментируем данное выше определение. Нулевое подпространство $W_{\overline{0}} = O$ и все пространство $W_{\overline{s}} = V$ инвариантны автоматически. Требуется, чтобы было инвариантным первое прямое слагаемое $W_{\overline{1}} = W_1$. Не требуется инвариантность второго прямого слагаемого W_2, но требуется инвариантность суммы $W_{\overline{2}} = W_1 \oplus W_2$; и т. д. Если же оказываются инвариантными все W_i, то автоматически будет инвариантной и соответствующая фильтрация.

Предложение 20.4. *Пусть л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ действует в прямой сумме (20.1), такой, что соответствующая фильтрация (20.14) φ-инвариантна. Тогда в пространстве V можно выбрать базис так, что матрица A, отвечающая φ, примет следующий блочно-треугольный вид:*

$$\underset{n\times n}{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \underset{n_1\times n_1}{A'_1} & \underset{n_1\times n_2}{A_{12}} & \underset{n_1\times n_3}{A_{13}} & \dots & \underset{n_1\times n_s}{A_{1s}} \\ \hline \underset{n_2\times n_1}{O} & \underset{n_2\times n_2}{A_{22}} & \underset{n_2\times n_3}{A_{23}} & \dots & \underset{n_2\times n_s}{A_{2s}} \\ \hline \underset{n_3\times n_1}{O} & \underset{n_3\times n_2}{O} & \underset{n_3\times n_3}{A_{33}} & \dots & \underset{n_3\times n_s}{A_{2s}} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \underset{n_s\times n_1}{O} & \underset{n_s\times n_2}{O} & \underset{n_s\times n_3}{O} & \dots & \underset{n_s\times n_s}{A_{ss}} \end{array}\right), \tag{20.37}$$

причем блок A'_1, занимающий северо-западный угол, отвечает сужению данного эндоморфизма на первое прямое слагаемое.

В предположении φ-инвариантности всех прямых слагаемых, базис можно выбрать так, что матрица данного л.э. примет следующий блочно-диагональный вид:

$$\underset{n\times n}{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \underset{n_1\times n_1}{A'_1} & \underset{n_1\times n_2}{O} & \underset{n_1\times n_3}{O} & \dots & \underset{n_1\times n_s}{O} \\ \hline \underset{n_2\times n_1}{O} & \underset{n_2\times n_2}{A'_2} & \underset{n_2\times n_3}{O} & \dots & \underset{n_2\times n_s}{O} \\ \hline \underset{n_3\times n_1}{O} & \underset{n_3\times n_2}{O} & \underset{n_3\times n_3}{A'_3} & \dots & \underset{n_3\times n_s}{O} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \underset{n_s\times n_1}{O} & \underset{n_s\times n_2}{O} & \underset{n_s\times n_3}{O} & \dots & \underset{n_s\times n_s}{A'_s} \end{array}\right), \tag{20.38}$$

причем каждый из диагональных блоков A'_i $(i = 1, ..., s)$ отвечает сужению $\varphi'_i = \varphi\big|_{W_i}$ данного эндоморфизма на соответствующее прямое слагаемое.

Доказательство проводится повторным применением предложения 20.3: сначала рассматривается прямая сумма из двух слагаемых $(W_1 \oplus ... \oplus W_{s-1}) \oplus W_s$, для которой получается блочно-треугольный вид (20.35); затем от сгруппированной суммы "отщепляется" еще одно слагаемое и т. д.

Замечание 20.3. Выше, в предложении 20.2, было сформулировано правило перемножения блочных квадратных матриц с одинаковым блочным строением, из которого легко усматривается следующий факт: произведение двух блочно-треугольных (блочно-диагональных) матриц (одинакового блочного строения) снова является

блочно-треугольной (блочно-диагональной) матрицей (с таким же блочным строением).

Замечание 20.4. Широко употребительным является следующее обозначение для блочно-диагональных матриц вида (20.38):

$$A = \operatorname{diag}(A'_1, A'_2, \dots, A'_s). \tag{20.38'}$$

Блочно-диагональные квадратные матрицы (с одинаковым блочным строением) можно складывать и перемножать "поблочно". Для умножения это правило [в обозначениях (20.38′)] можно выразить следующей формулой:

$$\operatorname{diag}(A'_1, A'_2, \dots, A'_s) \cdot \operatorname{diag}(B'_1, B'_2, \dots, B'_s) = \\ = \operatorname{diag}(A'_1 \cdot B'_1, A'_2 \cdot B'_2, \dots, A'_s \cdot B'_s). \tag{20.39}$$

§ 21. Диагонализируемые линейные эндоморфизмы

21.1. Свойство диагонализируемости для линейных эндоморфизмов. Вспомним метафору (см. замечание 17.6): объект изучения — линейный оператор, матрица — его портрет, спектр — его душа. Существуют такие линейные операторы (эндоморфизмы), у которых, что называется, — "душа нараспашку".

Определение 21.1. Линейный эндоморфизм φ, действующий в n-мерном линейном пространстве V, называется *диагонализируемым*, если в пространстве V существует базис $\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, \dots, b_n \,]$, в котором этому эндоморфизму отвечает диагональная матрица. Такой базис называется *диагонализирующим* для л.э. φ.

Почему "нараспашку"? Дело в том, что (см. предложение 17.3) спектр л.э. совпадает со спектром его матрицы (в произвольном базисе), а для диагональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{21.1}$$

ее спектр "виден": он совпадает с множеством попарно различных элементов, стоящих на диагонали. В самом деле, характеристический многочлен для матрицы (21.1), очевидно, равен

$$h_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \\ = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - \lambda_n \end{vmatrix} = \\ = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n). \quad (21.2)$$

Следовательно, скаляры λ_i $(i = 1, ..., n)$ являются характеристическими корнями (= *собственными значениями*) для φ. Кроме того, базисные векторы b_i (в соответствии с общим правилом составления матрицы для линейного оператора) оказываются *собственными векторами* для φ:

$$\varphi(b_i) = \lambda_i b_i; \ i = 1, ..., n. \quad (21.3)$$

Видны также и *алгебраические кратности собственных значений*. Действительно, пусть скаляры

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$$

попарно различны и каждый из них встречается на диагонали матрицы A (соответственно)

$$m_1, m_2, ..., m_s$$

раз. Перестановкой базисных векторов можно добиться того, чтобы одинаковые диагональные элементы шли *подряд*. Тогда матрицу (21.2) можно будет представить *в блочном виде*:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{m_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{m_s} \end{pmatrix}, \quad (21.4)$$

где каждый диагональный блок $\lambda_i E_{m_i}$ есть скалярная $(m_i \times m_i)$-матрица, а внедиагональные (нулевые) блоки не показываются.

Характеристический многочлен для матрицы (21.4) будет иметь вид

$$h_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}...(\lambda - \lambda_s)^{m_s}, \quad (21.5)$$

из которого ясно, что натуральные числа m_i $(i = 1, \dots, s)$ представляют из себя не что иное, как алгебраические кратности соответствующих собственных значений.

Важно также то, что в данном случае сумма всех алгебраических кратностей равна размерности пространства V:

$$m' = \sum_{i=1}^{s} m_i = n. \tag{21.6}$$

В случае диагонализируемого оператора не составляет труда определить и *геометрические кратности* n_i собственных значений λ_i $(i = 1, \dots, s)$. Согласно формуле (18.14), они выражаются через ранги матриц $B_i = A - \lambda_i E$:

$$n_i = n - \operatorname{rank}(B_i). \tag{21.7}$$

В данном случае, скажем, матрица B_1 имеет вид

$$B_1 = A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} O_{m_1} & & & \\ & (\lambda_2 - \lambda_1)E_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_s - \lambda_1)E_{m_s} \end{pmatrix}, \tag{21.8}$$

с нулевым $(m_1 \times m_1)$-блоком O_{m_1}. Поскольку в остальных блоках на диагонали стоят ненулевые скаляры, то $\operatorname{rank}(B_i) = n - m_1$ и, следовательно, $n_1 = n - (n - m_1) = m_1$.

Аналогичные равенства получаются для остальных i. Таким образом, для любого $i = 1, ..., s$ имеем:

$$n_i = m_i. \tag{21.9}$$

В силу (21.6), оказывается справедливым следующее равенство для суммы геометрических кратностей:

$$n' = \sum_{i=1}^{s} n_i = n. \tag{21.10}$$

21.2. Диагонализируемость на инвариантном подпространстве. В некоторых случаях диагонализируемость линейного эндоморфизма φ может иметь место не на всем пространстве V, а на некотором φ-инвариантном подпространстве $W \leqslant V$ $(\varphi(W) \subseteq W)$.

Определение 21.1′. Линейный эндоморфизм $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, называется диагонализируемым на φ-инвариантном линейном подпространстве $W \leqslant V$ (размерности k), если в подпространстве W существует базис $\mathcal{B}' = [\, b_1, b_2, \dots, b_k \,]$, относительно которого суженный эндоморфизм $\varphi' = \varphi\big|_W \in \mathcal{L}(W)$ имеет диагональную матрицу.

Просто "диагонализируемый" л.э. — это эндоморфизм, диагонализируемый на всем пространстве. С целью достижения единообразия формулировок, считается, что любой л.э. является диагонализируемым на тривиальном (нулевом) подпространстве.

Предложение 21.1. *Всякий л.э. φ диагонализируем на своей собственной сумме $S(\varphi)$.*

Доказательство. Во-первых *собственная сумма* (т. е. прямая сумма $W' = S(\varphi)$ всех собственных подпространств) является (см. предложение 19.2) φ-инвариантным подпространством.

Во-вторых, это подпространство распадается в прямую сумму (также φ-инвариантных) подпространств $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$ $(i = 1, \dots, s)$, причем для любого i сужение данного л.э. на W_i является (см. предложение 19.1) скалярным эндоморфизмом

$$\varphi'_i = \varphi\big|_{W_i} = \lambda_i \varepsilon_i, \tag{21.11}$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon_{W_i}$.

Значит, если выбрать приспособленный к указанной прямой сумме базис в W', то в этом базисе, в силу предложения 20.4, суженному эндоморфизму $\varphi' = \varphi\big|_{W'}$ будет отвечать блочно-диагональная (а в данном случае фактически — диагональная) матрица

$$\underset{n' \times n'}{D'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{m_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{m_s} \end{pmatrix}. \ \square \tag{21.12}$$

21.3. Критерий диагонализируемости линейного эндоморфизма. В п. 21.1 выявлены некоторые *необходимые условия* диагонализируемости л.э. В частности, такие эндоморфизмы обязаны иметь *базис из собственных векторов*. Другое необходимое условие: сумма геометрических кратностей всех собственных значений должна равняться размерности пространства. Ниже мы докажем, что каждое из этих условий является не только необходимым, но и *достаточным* для диагонализируемости эндоморфизма.

Теорема 21.1. *Пусть л.э. φ действует в n-мерном линейном пространстве V и пусть его спектр представляет из себя множество*

$$\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}, \tag{21.13}$$

причем геометрические кратности собственных значений равны (соответственно) $n_1, n_2, \dots, n_s$ и сумма этих кратностей равна n'.

Следующие три утверждения равносильны:

(1) л.э. φ является диагонализируемым;

(2) в пространстве V существует базис, составленный из собственных векторов для φ;

(3) сумма геометрических кратностей всех собственных значений равна размерности данного пространства: $n' = n$.

Доказательство. В пункте 21.1 уже установлено, что утверждение (1) влечет (2) и (3). Вполне очевидно, что (2) также влечет (1). (Если все векторы b_i, составляющие некоторый базис $\mathcal{B}$ пространства V, являются собственными для φ, то для любого $i = 1, \dots, n$ мы имеем $\varphi(b_i) = \lambda_i b_i$, где $\lambda_i \in P$. Значит, оператору φ в базисе $\mathcal{B}$ отвечает диагональная матрица и диагональ ее составляют скаляры λ_i.)

Чтобы "замкнуть круг", достаточно доказать, что (3) $\Rightarrow$ (1). Но если $n' = n$, то собственная сумма $W' = S(\varphi)$ совпадает со всем пространством V, и диагонализирующий базис, который, в силу предложения 21.1, существует в W', оказывается для φ диагонализирующим базисом во всем пространстве. □

21.4. Диагонализируемость операторов и диагонализируемость квадратных матриц. Согласно общему факту изоморфизма между алгебраическими системами линейных операторов и матриц, кольцо линейных эндоморфизмов $\mathcal{L}(V)$ изоморфно кольцу квадратных матриц $L(n, P)$, причем конкретный изоморфизм (арифметизация) фиксируется после выбора какого-либо базиса в пространстве V. Если в базисе $\mathcal{B}$ оператору φ отвечает матрица A, то в новом базисе $\mathcal{B}'$ (переход к которому от старого базиса $\mathcal{B}$ задается матрицей T) оператор φ будет иметь *подобную* матрицу

$$A' = T^{-1}AT. \tag{21.14}$$

Квадратную матрицу A естественно назвать *диагонализируемой*, если она *подобна диагональной матрице*. Очевидно следующее

Предложение 21.2. *Линейный эндоморфизм диагонализируем тогда и только тогда, когда диагонализируема его матрица.* □

21.5. Линейные эндоморфизмы (квадратные матрицы) с простым спектром

Определение 21.2. Говорят, что линейный эндоморфизм φ, действующий в n-мерном пространстве V, имеет *простой спектр*, если он имеет ровно n попарно различных собственных значений.

Данное определение можно "представить на языке матриц": л.э. обладает простым спектром тогда и только тогда, когда его матрица (в каком-либо и, следовательно, в любом базисе) имеет ровно n попарно различных характеристических корней.

Предложение 21.3. *Л.э. с простым спектром является диагонализируемым.*

Доказательство. Пусть л.э. φ, который действует в n-мерном пространстве V, имеет простой спектр:

$$\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}. \tag{21.15}$$

Тогда каждая из *алгебраических кратностей* $m_i = 1$. Но и *геометрические кратности* должны быть равны единице, поскольку меньше они быть не могут, а их сумма n' не должна превышать n. Выходит, что $n' = n$, и, следовательно, в силу теоремы 21.1, эндоморфизм φ является диагонализируемым. □

Замечание 21.1. В некоторые вопросы линейной алгебры (как правило, над числовыми полями) может активно "вмешиваться" топология. Например, оказывается, что любая числовая матрица с любой степенью точности *приближается* диагонализируемыми матрицами. Поэтому, доказав какую-либо теорему для диагонализирумых матриц, часто можно утверждать, что "по непрерывности" она остается справедливой для произвольных матриц.

Если вам симпатично такое содружество и взаимодействие алгебры, топологии и анализа, то вы найдете для себя много интересного в оригинальной и очень содержательной книге В. В. Прасолова [20].

21.6. Примеры недиагонализируемых л.э. Если для линейного эндоморфизма удается найти диагонализирующий базис, то мы

можем считать, что узнали об этом операторе всё. Характер его действия полностью определяется его собственными значениями, которые, как мы помним, фигурируют в качестве диагональных элементов в диагональной форме его матрицы.

Однако, увы, диагонализирумыми являются не все линейные эндоморфизмы.

Пример 21.1. Рассмотрим л.э. φ, действующий в n-мерном (где $n > 1$) пространстве V (над произвольным полем P) и имеющий в некотором базисе этого пространства матрицу следующего вида:

$$\underset{n\times n}{A} = \boxed{J_n(\lambda_0)} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \qquad (21.16)$$

где $\lambda_0 \in P$.

У нас уже имело место предварительное знакомство с матрицами такого вида — в примерах 13.4 и 13.5; там же был введен термин *жорданов ящик* (ж.я.) и "небанальное" обозначение (с заключением ящиков в ящики).

Характеристический многочлен для матрицы (21.16) имеет, очевидно, следующий вид:

$$h_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n. \qquad (21.17)$$

Единственным характеристическим корнем (алгебраической кратности $m_0 = n$) является λ_0. Найдем геометрическую кратность n_0 собственного значения λ_0. Для этого достаточно вычислить ранг матрицы

$$B_0 = A - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{J_n(0)}. \qquad (21.18)$$

Он, очевидно, равен $n - 1$. Значит,

$$n_0 = n - \operatorname{rank}(B_0) = n - (n-1) = 1.$$

Поскольку собственное значение только одно, то сумма n' всех геометрических кратностей также сводится к $n_0 = 1 < n$. По теореме 21.1, л.э. φ не является диагонализируемым.

Замечание 21.2. Весь пафос оставшейся части настоящей главы состоит в том, что примеров хуже, чем только что рассмотренный, не существует. Простейшим видом, к которому может быть приведена матрица произвольного л.э., оказывается *блочно-диагональный вид, с жордановыми ящиками на диагонали.* (Правда, такое заключение справедливо лишь над алгебраически замкнутыми полями.)

Замечание 21.3. Если же поле не является алгебраически замкнутым, то спектр л.э. может содержать "слишком мало элементов", что выражается в наличии строгого неравенства $m' < m$ (см. предложение 17.4). Самым крайним здесь является случай пустоты спектра. (То, что такое возможно, нам известно из примера 16.3.) Если спектр л.э. пуст, то нельзя даже ставить вопрос о диагонализируемости: диагонализирующий базис должен состоять из собственных векторов, а их нет ввиду того, что нет собственных значений.

В некоторых случаях такое положение дел может быть исправлено с помощью расширения основного поля P до *алгебраического замыкания* $\overline{P}$ (см. [A_1, замечание 40.4]).

Пример 21.2 (продолжение примера 16.3). Рассмотрим линейный оператор $\varphi = r_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ поворота евклидовой плоскости на угол $\alpha \neq \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). В естественном базисе $\mathcal{E}_2$ ему отвечает матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

характеристический многочлен для которой имеет, как легко убедиться, вид

$$h_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1$$

и не имеет действительных корней, поскольку его дискриминант $D = -4\sin^2\alpha < 0$. Значит, $\sigma(\varphi) = \varnothing$, что нами уже получено из геометрических соображений.

Алгебраическим замыканием поля действительных чисел служит поле комплексных чисел: $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{R}}$. Всякую матрицу с действительными элементами допустимо рассматривать как матрицу с комплексными элементами. Поэтому, помимо оператора φ, действующего по

формуле $\varphi(\overline{x}) = A \cdot \overline{x}$ на векторы $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$, можно ввести линейный оператор $\psi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, действующий по аналогичной формуле $\psi(\overline{z}) = A \cdot \overline{z}$ на векторы $\overline{z} \in \mathbb{C}^2$. Матрица A отвечала оператору φ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^2$; она же будет отвечать ψ в естественном базисе пространства $\mathbb{C}^2$ (который снова обозначается $\mathcal{E}_2$, хотя это — уже другой базис).

Здесь мы впервые сталкиваемся с важным понятием *комплексификации* для линейных пространств и линейных отображений над полем действительных чисел. Несколько подробнее эта идея будет обсуждаться ниже; см. п. 27.4.

В поле $\mathbb{C}$ многочлен $h_A(\lambda)$ имеет два различных (сопряженных друг другу) комплексных корня: $\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$.

Применение надчеркивания для обозначения векторов-столбцов запрещает нам здесь применять его для обозначения *комплексного сопряжения*. Придется "выкручиваться"; во втором случае мы (временно) будем использовать не черту, а *волну* (тильду):

$$\lambda_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha;\ \ \lambda_2 = \widetilde{\lambda_1} = \cos\alpha - i\sin\alpha.$$

Укажем также на возможность использования показательной формы записи комплексных чисел: $\lambda_1 = e^{i\alpha}$, $\lambda_2 = e^{-i\alpha}$.

Комплексные числа $\lambda_{1,2}$ будут собственными значениями для ψ. Выясняется, что этот оператор имеет *простой спектр*:

$$\sigma(\psi) = \{\, e^{i\alpha},\, e^{-i\alpha} \,\}.$$

По предложению 21.3, он является диагонализируемым, причем в диагонализирующем базисе ему соответствует матрица:

$$D = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}.$$

Для практического определения диагонализирующего базиса необходимо найти (базисные) собственные векторы, отвечающие λ_k $(k = 1, 2)$.

Для λ_1 выписываем и преобразуем следующую матрицу:

$$B_1 = A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -i\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -i\sin\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix},$$

где на последенем шаге замечено, что первая строка пропорциональна второй (с коэффициентом пропорциональности $-i$).

Однородная с.л.у. $B_1 \cdot \overline{z} = \overline{0}$ сводится к уравнению $z_1 - iz_2 = 0$, решая которое мы получаем первый базисный вектор

$$\overline{f_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Действуя совершенно аналогично, для второго собственного значения λ_2 найдем базисный собственный вектор

$$\overline{f_2} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Полезно заметить, что он получился комплексно-сопряженным первому: $\overline{f_2} = \widetilde{\overline{f_1}}$.

Таким образом, матрица перехода от исходного (естественного) базиса в $\mathbb{C}^2$ к диагонализирующему базису определяется формулой

$$F = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Проверьте вычисления, убедившись в справедливости равенства $D = F^{-1}AF$.)

Пример 21.3. Maple позволяет сразу исследовать на диагонализируемость, как данный л.э., так и его *комплексификацию* (см. пример 21.2). Пусть, например, л.э. задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Применение уже известной нам (см. пример 18.3) команды Eigenvectors дает:

> Eigenvectors(A);

$$\begin{bmatrix} 2+3I \\ 2-3I \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4}-\frac{3}{4}I & \frac{3}{4}+\frac{3}{4}I & 1 \\ \frac{5}{4}-\frac{3}{4}I & \frac{5}{4}+\frac{3}{4}I & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Выясняется, что над $\mathbb{C}$ эндоморфизм имеет простой спектр (он показан в первом выведенном столбце) и, следовательно, является диагонализируемым. Диагонализирующий базис представлен вторым элементом вывода — матрицей.

Над $\mathbb{R}$ имеется только одно собственное значение, которому отвечает одномерное собственное подпространство. Диагонализируемости, естественно, нет.

Еще раз подчеркнем, что бывают операторы и матрицы, недиагонализируемость которых не устранима никаким расширением основного поля P (см. жордановы ящики в примере 21.1), а бывают такие, недиагонализируемость которых проистекает от "несовершенства" этого поля. В последнем случае положение исправляется переходом к алгебраическому замыканию $\overline{P}$.

21.7. Алгоритм исследования линейного эндоморфизма на диагонализируемость. Описываемый ниже алгоритм является по сути продолжением изученного ранее алгоритма 18.1. Даже нумерацию этапов мы начнем с десятого.

А л г о р и т м 21. 1 (продолжение алгоритма 18.1).
Исследование л.э. $\varphi : V \to V$ на диагонализируемость. Отыскание (частично) диагонализирующего базиса

10. Если $n' = n$, то заключаем, что оператор φ *является диагонализируемым.* Диагонализирующий базис будут составлять столбцы $(n \times n)$-матрицы

$$F = (F_1 \,|F_2\,| \ldots |\, F_s)\,. \tag{21.19}$$

В этом базисе оператору φ будет отвечать матрица

$$D = F^{-1}AF = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{n_s} \end{pmatrix}. \tag{21.20}$$

(Формулу $FD = AF$ и условие $\det(F) \neq 0$ можно использовать для проверки.)

11. Если $n' < n$, то матрица

$$\underset{n\times n'}{F'} = (F_1 \,|F_2\,| \ldots |\, F_s) \tag{21.19$'$}$$

будет содержать базис в *собственной сумме* $W' = S(\varphi)$. С помощью алгоритма 10.4 продолжим этот базис в W' до базиса во всем пространстве. Будут добавлены $n'' = n - n'$ векторов, составляющие базис в некотором прямом дополнении W'' к подпространству W'. Припишем содержащую эти векторы $(n \times n'')$-матрицу K к матрице (21.19). Квадратная $(n \times n)$-матрица

$$T = (F' \,|K) \tag{21.21}$$

содержит *частично диагонализирующий* базис в V, в котором оператору φ будет соответствовать *частично диагональная* (блочно-треугольная с диагональным северо-западным блоком) матрица

$$A' = T^{-1}AT = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \lambda_1 E_{n_1} & O & \dots & O & C'_1 \\ \hline O & \lambda_2 E_{n_2} & \dots & O & C'_2 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline O & O & \dots & \lambda_s E_{n_s} & C'_s \\ \hline O & O & \dots & O & C'' \end{array}\right), \tag{21.22}$$

последний "блочный стоьбец" которой составлен из $(n_i \times n'')$-блоков C'_i $(i = 1, \dots, s)$ и $(n'' \times n'')$-блока C''.

Пример 21.4 (продолжение примера 18.1). Дорешаем задачу, рассмотренную в примере 18.1.

Поскольку $n' = 3 < 6 = n$, матрица

$$F' = (F_1|F_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

содержит базис только лишь в собственной сумме, не совпадающей со всем пространством. Чтобы найти базис в каком-либо прямом дополнении к собственной сумме, составляем матрицу-конкатенацию $(F'|E)$ и приводим ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Разобравшись со ступеньками, определяем, что к матрице F' надо присоединить единичные векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ и $\overline{e_4}$. Получим матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

содержащую частично диагонализирующий базис. В этом базисе данный л.э. будет иметь матрицу частично диагонального вида, которая вычисляется с помощью перемножения:

$$D = T^{-1}AT = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Северо-западный (3×3)-блок представляет "диагонализируемую часть" данного оператора, т. е. его сужение на прямую сумму собственных подпространств.

§ 22. Свойства характеристического многочлена

22.1. Характеристический многочлен для сужения л.э. на его инвариантное подпространство. Снова, как и в пункте 20.5, рассмотрим л.э. φ, действующий в n-мерном линейном пространстве V и имеющий нетривиальное инвариантное подпространство $W_1 \leqslant V$ [$\dim(W_1) = n_1$]. Возьмем произвольное прямое дополнение W_2 к W_1 и выберем базис $\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2]$, приспособленный к прямой сумме $V = W_1 \oplus W_2$. В соответствии с предложением 20.3, оператору φ будет соответствовать в базисе $\mathcal{B}$ матрица

$$\underset{n\times n}{A} = \left(\begin{array}{c|c} \underset{n_1\times n_1}{A_1'} & \underset{n_1\times n_2}{A_{12}} \\ \hline \underset{n_2\times n_1}{O} & \underset{n_2\times n_2}{A_{22}} \end{array}\right). \tag{22.1}$$

Блок A_1' матрицы (22.1) соответствует (в базисе $\mathcal{B}_1$) суженному эндоморфизму $\varphi_1' = \varphi\big|_{W_1}$. Аналогичный факт, вообще говоря, не имеет места для блока A_{22}, который отвечает л.э. φ_{22}, действующему (если W_2 не инвариантно) иначе, нежели φ.

Рассмотрим теперь оператор с параметром (17.2), определенный формулой $\psi(\lambda) = \varphi - \lambda\varepsilon$.

В базисе $\mathcal{B}$ ему будет соответствовать матрица $B(\lambda) = A - \lambda E_n$, которая также зависит от параметра $\lambda \in P$ и может считаться заданной над кольцом многочленов $P[\lambda]$.

Характеристический многочлен для л.э. φ может быть вычислен как определитель матрицы

$$C(\lambda) = \lambda E_n - A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda E_{n_1} - A_1' & -A_{12} \\ \hline O & \lambda E_{n_2} - A_{22} \end{array}\right), \tag{22.2}$$

противоположной $B(\lambda)$. При этом используется теорема 27.1 из [A_1] об определителе блочно-треугольной матрицы, причем в несколько усиленной форме: применительно к матрицам над коммутативными кольцами.

(На вопросах, связанных с определителями *многочленных матриц*, мы уже кратко останавливались в п. 17.1. Большинство изученных в первом семестре теорем об определителях над полем остаются справедливыми для определителей над любым коммутативным кольцом. Напомним, что "тонкости с многочленами" становятся существенными лишь в случае конечного поля P коэффициентов.)

Итак, мы приходим к следующему выражению для характеристического многочлена:

$$h_\varphi(\lambda) = \det(C(\lambda)) = \det(\lambda E_{n_1} - A'_1) \cdot \det(\lambda E_{n_2} - A_{22}),$$

или

$$h_\varphi(\lambda) = h_{\varphi'_1}(\lambda) \cdot h_{\varphi_{22}}(\lambda). \tag{22.3}$$

Отсюда немедленно вытекает следующее

Предложение 22.1. *1. Если л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ имеет нетривиальное инвариантное подпространство $W_1 \leqslant V$, то характеристический многочлен для сужения $\varphi'_1 = \varphi\big|_{W_1}$ делит характеристический многочлен для φ:*

$$h_{\varphi'_1}(\lambda) \,|\, h_\varphi(\lambda). \tag{22.4}$$

2. Если пространство V разбито в прямую сумму φ-инвариантных подпространств W_i $(i = 1, ..., s)$, то характеристический многочлен для φ разлагается в произведение характеристических многочленов для соответствующих сужений :

$$h_\varphi(\lambda) = h_{\varphi'_1}(\lambda) \cdot h_{\varphi'_2}(\lambda) \cdot ... \cdot h_{\varphi'_s}(\lambda), \tag{22.5}$$

где $\varphi'_i = \varphi\big|_{W_i}$.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из разложения (22.3). Второе (при $s = 2$) также получается из этой формулы, если (в случае инвариантности W_2) представить л.э. φ_{22} как сужение φ'_2:

$$h_\varphi(\lambda) = h_{\varphi'_1}(\lambda) \cdot h_{\varphi'_2}(\lambda). \tag{22.3$'$}$$

В общем случае (при произвольном s) доказательство (22.5) проводится по индукции. □

22.2. Неравенства для геометрических и алгебраических кратностей собственных значений. Рассмотрим спектр

$$\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\} \tag{22.6}$$

линейного эндоморфизма φ, действующего в n-мерном линейном пространстве V (предполагая, естественно, что он не пуст, — иначе *спектральная теория* не применима).

Каждому собственному значению λ_i сопоставляются два натуральных числа: алгебраическая кратность

$$m_i = \max\{k \in \mathbb{N} : (\lambda - \lambda_i)^k \,|\, h_\varphi(\lambda)\} \tag{22.7}$$

и геометрическая кратность

$$n_i = \dim(S_{\lambda_i}(\varphi)). \tag{22.8}$$

Сейчас мы докажем важный факт, информация о котором уже давалась в замечании 18.2.

Предложение 22.2. *Геометрическая кратность любого собственного значения не превышает его алгебраической кратности:*

$$n_i \leqslant m_i;\ i = 1, \dots, s. \tag{22.9}$$

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство

$$W_i = S_{\lambda_i}(\varphi). \tag{22.10}$$

Согласно предложению 19.1, оно является φ-инвариантным и сужение на него эндоморфизма φ является скалярным эндоморфизмом [см. (19.5)]:

$$\varphi'_i = \lambda_i \varepsilon_i;\ \varepsilon_i = \varepsilon_{W_i}. \tag{22.11}$$

Характеристический многочлен для л.э. (22.11) выражается формулой [см. (17.11)]:

$$h_{\varphi'_i}(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{n_i}. \tag{22.12}$$

В силу предложения 22.1, он обязан делить характеристический многочлен для φ:

$$(\lambda - \lambda_i)^{n_i} \,|\, h_\varphi(\lambda). \tag{22.13}$$

Неравенство (22.9) вытекает теперь из определения (22.7) алгебраической кратности. $\square$

22.3.* Собственная сумма и блочная структура для л.э. Рассмотрим теперь прямую сумму $W' = \oplus_{i=1}^{s} W_i$ всех собственных подпространств для л.э. φ, т. е. собственную сумму $S(\varphi)$. Это подпространство имеет размерность равную сумме n' всех геометрических кратностей, является φ-инвариантным, и на нем эндоморфизм φ является диагонализируемым. Если выбрать какое-либо прямое дополнение W'' к W', а также базис

$$\mathcal{B} = [\,\mathcal{B}', \mathcal{B}''\,] = [\,\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_s, \mathcal{B}''\,], \tag{22.14}$$

приспособленный к прямой сумме

$$V = \left(\bigoplus_{i=1}^{s} W_i\right) \oplus W'', \tag{22.15}$$

то φ будет сопоставленна матрица блочно-треугольного вида (21.20), причем юго-восточный $(n'' \times n'')$-блок G'' будет соответствовать л.э.

$$\varphi'' = \pi'' \circ \varphi\big|_{W''} \in \mathcal{L}(W''), \tag{22.16}$$

где π'' есть оператор проектирования на прямое слагаемое W''.

Используя предложение 22.1 и формулу (22.12), мы получаем следующее разложение характеристического для φ многочлена на множители:

$$h_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} q(\lambda), \tag{22.17}$$

где

$$q(\lambda) = h_{\varphi''}(\lambda) \tag{22.18}$$

является многочленом степени $n - n'$.

В отличие от разложения (17.31), в котором двучлены $\lambda - \lambda_i$ фигурируют в степенях m_i и последний множитель $g(\lambda)$ (степени $n - m'$) не имеет корней в P, в разложении (22.17) многочлен $q(\lambda)$ может иметь корни (те из λ_i, для которых $m_i > n_i$). Корням $q(\lambda)$ соответствуют собственные векторы для φ'', но они не будут собственными для φ (все векторы, собственные для φ, собраны в W').

В случае диагонализируемости φ (на всем пространстве V) подпространство W'' тривиализуется (становится нулевым), геометрические кратности оказываются равными алгебраическим:

$$n_i = m_i \ (i = 1, \ldots, s). \tag{22.19}$$

(Это следует из критерия диагонализируемости $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$, неравенств $n_i \leqslant m_i$ $(i = 1, \dots, s)$ и неравенства $\sum_{i=1}^{s} m_i \leqslant n$.)

Равенства (22.19) являются достаточными для диагонализируемости лишь при дополнительном предположении $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$, которое гарантированно выполняется над алгебраически замкнутым полем.

В случае диагонализируемости φ разложения (17.31) и (22.17) идентичны, заключительные множители в них отсутствуют (сводятся к единице).

§ 23. Итерированные ядра и образы, дефекты и ранги. Теорема о стабилизации

23.1. Итерированные ядра и образы, дефекты и ранги для л.э. Рассмотрим линейный эндоморфизм φ, действующий в n-мерном линейном пространстве V (над полем P). Вместе с ним в пространстве V будут действовать произвольные неотрицательные степени

$$\varepsilon = \varphi^0,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \dots,\ \varphi^k,\ \dots, \tag{23.1}$$

также принадлежащие $\mathcal{L}(V)$.

Степень φ^k л.э. φ понимается как его повторное (k-кратное) применение. В связи с этим, наряду с термином *степень*, употребляется также термин *итерация* (повторение): φ^k называется k-й итерацией л.э. φ.

Каждый из эндоморфизмов (23.1) обладает своим ядром и образом (см. п. 14.2); так возникают две последовательности линейных подпространств в пространстве V:

$$N^{(k)} = \operatorname{Ker}(\varphi^k);\ k = 0, 1, 2, \dots; \tag{23.2}$$

$$M^{(k)} = \operatorname{Im}(\varphi^k);\ k = 0, 1, 2, \dots. \tag{23.3}$$

(Поясним, что номер ядра или образа ставится как верхний индекс, причем — в скобках, во избежание путаницы с показателями степени.)

Определение 23.1. Подпространства, входящие в последовательность (23.2) [соответственно (23.3)], называются *итерированными ядрами* [соответственно *итерированными образами*] для л.э. φ.

Вспоминая (см. определение 14.2), что размерность ядра линейного оператора называется его *дефектом*, а размерность образа — *рангом*, мы даем следующее

Определение 23.2. Размерности итерированных ядер (соответственно образов), т. е. неотрицательные целые числа

$$d^{(k)} = \operatorname{dfc}(\varphi^k) = \dim(N^{(k)});\ k = 0, 1, 2, \dots, \tag{23.4}$$

$$r^{(k)} = \operatorname{rank}(\varphi^k) = \dim(M^{(k)});\ k = 0, 1, 2, \dots, \tag{23.5}$$

называются *итерированными дефектами* (соответственно *итерированными рангами*) для л.э. φ.

В следующем предложении собраны простейшие свойства итерированных ядер, образов, дефектов и рангов.

Предложение 23.1. *1. Последовательность итерированных ядер для линейного эндоморфизма φ, действующего в n-мерном линейном пространстве V, является неубывающей последовательностью линейных подпространств:*

$$O = N^{(0)} \leqslant N^{(1)} \leqslant N^{(2)} \leqslant \dots \leqslant N^{(k)} \leqslant N^{(k+1)} \leqslant \dots \leqslant V. \tag{23.7}$$

2. Последовательность итерированных дефектов является неубывающей последовательностью неотрицательных целых чисел:

$$0 = d^{(0)} \leqslant d^{(1)} \leqslant d^{(2)} \leqslant \dots \leqslant d^{(k)} \leqslant d^{(k+1)} \leqslant \dots \leqslant n. \tag{23.8}$$

3. Последовательность итерированных образов является невозрастающей последовательностью линейных подпространств:

$$V = M^{(0)} \geqslant M^{(1)} \geqslant M^{(2)} \geqslant \dots \geqslant M^{(k)} \geqslant M^{(k+1)} \geqslant \dots \geqslant O. \tag{23.9}$$

4. Последовательность итерированных рангов является невозрастающей последовательностью неотрицательных целых чисел:

$$n = r^{(0)} \geqslant r^{(1)} \geqslant r^{(2)} \geqslant \dots \geqslant r^{(k)} \geqslant r^{(k+1)} \geqslant \dots \geqslant 0. \tag{23.10}$$

5. Для всякого целого $k \geqslant 0$ справедливо соотношение:

$$d^{(k)} + r^{(k)} = n. \tag{23.11}$$

6. Все итерированные ядра и образы являются φ-инвариантными подпространствами. Более точно, имеют место включения:

$$\varphi(N^{(k)}) \leqslant N^{(k-1)} \leqslant N^{(k)} \ (k = 1, 2, 3, ...); \tag{23.12}$$

$$\varphi(M^{(k)}) \leqslant M^{(k+1)} \leqslant M^{(k)} \ (k = 0, 1, 2, ...). \tag{23.13}$$

Доказательство. 1. Объясним прежде всего тот факт, что последовательность (23.2) начинается с нулевого подпространства. В самом деле, $\varphi^0 = \varepsilon$ и, следовательно, $N^{(0)} = \mathrm{Ker}(\varepsilon) = O$.

Далее, пусть $x \in N^{(k)}$, т. е. $\varphi^k(x) = 0$. Тогда

$$\varphi^{k+1}(x) = \varphi(\varphi^k(x)) = \varphi(0) = 0.$$

Значит, $x \in N^{(k+1)}$. Включение $N^{(k)} \leqslant N^{(k+1)}$ (для любого $k \geqslant 0$) доказано.

2. В силу свойств размерности (см. п. 5.5), из включений (23.7) вытекают неравенства (23.8).

3. Последовательность (23.3) начинается с наибольшего подпространства $M^{(0)} = V$, поскольку $\mathrm{Im}(\varphi^0) = \mathrm{Im}(\varepsilon) = V$.

Если $x \in M^{(k+1)}$ $(k \geqslant 0)$, т. е. $x = \varphi^{k+1}(u)$ для некоторого $u \in V$, то $x = \varphi^k(\varphi(u)) \in M^{(k)}$. Включение $M^{(k+1)} \leqslant M^{(k)}$ доказано.

4. Неравенства (23.10) для итерированных рангов вытекают из включений (23.9) для итерированных образов.

5. Соотношения (23.10) являются проявлением общей "жесткой связи" между рангом и дефектом для линейного отображения [см. формулу (14.25); здесь она применяется в частном случае, когда линейный оператор (гомоморфизм) является эндоморфизмом].

6.1. Тривиальное подпространство $N^{(0)} = O$ является, как известно, φ-инвариантным. Если же $x \in N^{(k)}$ $(k \geqslant 1)$, т. е. $\varphi^k(x) = 0$, то $\varphi^{(k-1)}(\varphi(x)) = 0$ и, следовательно, $\varphi(x) \in N^{(k-1)}$. Этим доказано включение $\varphi(N^{(k)}) \leqslant N^{(k-1)}$. С учетом (23.7), получаем (23.12).

6.2. Если $x = \varphi^k(u) \in M^{(k)}$, то $\varphi(x) = \varphi^{k+1}(u) \in M^{(k+1)}$, что, вместе с (23.9), приводит к (23.13). □

23.2. Теорема о стабилизации для л.э. В данном пункте будут установлены более глубокие свойства последовательностей (23.7) — (23.10), две из которых, первая и третья, являются последовательностями линейных подпространств, а две другие — последовательностями неотрицательных целых чисел. А именно, будет доказано

существование такого неотрицательного целого числа $l \leqslant n$ (которое получит название *показатель стабилизации* для л.э. φ), что

— при $0 \leqslant k \leqslant l$ все четыре последовательности *строго монотонны* (первые две строго возрастают, две другие — строго убывают);

— при $k \geqslant l$ они *стабилизируются*, т. е. в каждой из последовательностей все члены, начиная с l-го, равны между собой.

Точнее, имеет место следующая

Теорема 23.1. *Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$; $\dim(V) = n$. Существует неотрицательное целое число $l \leqslant n$, такое, что последовательности (23.7) — (23.10) имеют вид:*

$$O = N^{(0)} < N^{(1)} < N^{(2)} < ... < N^{(l)} = N^{(l+1)} = ... \leqslant V; \qquad (23.7')$$

$$0 = d^{(0)} < d^{(1)} < d^{(2)} < ... < d^{(l)} = d^{(l+1)} = ... \leqslant n; \qquad (23.8')$$

$$V = M^{(0)} > M^{(1)} > M^{(2)} > ... > M^{(l)} = M^{(l+1)} = ... \geqslant O; \qquad (23.9')$$

$$n = r^{(0)} > r^{(1)} > r^{(2)} > ... > r^{(l)} = r^{(l+1)} = ... \geqslant 0. \qquad (23.10')$$

Доказательство. Прежде чем начинать рассуждение, поясним, что в последовательностях $(23.8')$ и $(23.10')$ знаки $<$ и $>$ имеют обычный смысл строгих числовых неравенств, а в последовательностях $(23.7')$ и $(23.9')$ эти же знаки выражают отношения строгого включения между линейными подпространствами.

Далее, особым является случай, когда л.э. φ является *обратимым*. Тогда обратимы и все его итерации φ^k $(k \geqslant 0)$. Согласно критериям обратимости л.э. из п. 14.3 (см. сводную таблицу), это равносильно

— тривиальности всех итерированных ядер $N^{(k)} = O$;

— обращению в нуль всех итерированных дефектов $d^{(k)} = 0$;

— факту совпадения всех итерированных образов с полным пространством: $M^{(k)} = V$;

— факту совпадения всех итерированных рангов с размерностью пространства: $r^{(k)} = n$.

Выходит, что в особом случае стабилизация наступает с самого начала, при $l = 0$.

Далее считаем, что л.э. φ *необратим* и, следовательно, ядро

$$N^{(1)} = \mathrm{Ker}(\varphi) \neq O,$$

или, что равносильно, $d^{(1)} > 0$.

Обратимся к (числовой) последовательности (23.8). По предположению, первое неравенство в ней является строгим. Все неравенства строгими быть не могут, поскольку дефекты $d^{(k)}$ ограничены сверху размерностью n. Пусть l — номер первого из дефектов, который совпадает со следующим за ним (другими словами: до номера l дефекты строго возрастают, а при $k = l$ наступает первое совпадение: $d^{(l)} = d^{(l+1)}$). Поскольку каждое строгое неравенство дает приращение дефекта как минимум на единицу, этот номер l не может превышать n.

В силу свойств размерности (см. предложение 5.6), совпадение дефектов влечет равенство ядер: $N^{(l)} = N^{(l+1)}$. Докажем, что это равенство "продолжится до бесконечности", т. е. и все последующие ядра $N^{(k)}$ $(k \geqslant l+1)$ будут совпадать с $N^{(l)}$.

Действительно, имеет место включение $N^{(l+1)} \leqslant N^{(l+2)}$. Чтобы убедиться в том, что на самом деле оно является равенством, нужно доказать противоположное включение.

Возьмем произвольный элемент $x \in N^{(l+2)}$. Имеем: $\varphi^{l+2}(x) = 0$. Значит, $\varphi^{l+1}(\varphi(x)) = 0$ и элемент $\varphi(x)$ принадлежит ядру $N^{(l+1)}$, которое, по предположению, совпадает с $N^{(l)}$. Но тот факт, что $\varphi(x) \in N^{(l)}$, влечет равенство $\varphi^{l+1}(x) = \varphi^l(\varphi(x)) = 0$ и, следовательно, принадлежность x ядру $N^{(l+1)}$. Требуемое включение доказано.

Итак, равенство l-го и $(l+1)$-го ядер влечет равенство $(l+1)$-го и $(l+2)$-го ядер. Очевидно, что и дальше, до бесконечности продолжится цепочка из совпадающих ядер.

То из утверждений теоремы, которое относится к итерированным ядрам [т. е. (23.7′)], установлено. Утверждение (23.8′) из него немедленно следует (по свойствам размерности).

Теперь обратимся к последовательности итерированных рангов. Ранги связаны с дефектами соотношениями (23.11), поэтому строгое возрастание дефектов влечет строгое убывание рангов. А когда (при $k = l$) дефекты стабилизируются (начнут совпадать), то же самое произойдет и с рангами. Утверждение (23.10′) доказано; (23.9′) из него следует (опять же, в силу свойств размерности). □

23.3. Стабильное ядро и стабильный образ; их взаимная дополнительность. Ниже дается определение уже упоминавшегося (в начале предыдущего пункта) показателя стабилизации, а также других "стабильных характеристик" для л.э.

Определение 23.2. Натуральное число (номер) l, начиная с которого наступает (описанная в теореме 23.1) стабилизация итериро-

ванных ядер, дефектов, образов, рангов, называется *показателем стабилизации* для л.э. φ.

Стабильными ядром, дефектом, образом, рангом называются соответственно $N^{(l)}$, $d^{(l)}$, $M^{(l)}$, $r^{(l)}$.

Установим важную особенность взаимного расположения стабильного ядра и стабильного образа как линейных подпространств данного пространства V. Нулевое ядро тривиально, а нулевой образ совпадает со всем V. С ростом номера k ядро $N^{(k)}$ расширяется, а образ $M^{(k)}$ сужается. Оказывается, что в момент стабилизации они становятся взаимно дополнительными.

Предложение 23.2. *1. Стабильное ядро $N^{(l)}$ и стабильный образ $M^{(l)}$ линейного эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ являются взаимно дополнительными φ-инвариантными подпространствами, т. е.*

$$V = N^{(l)} \oplus M^{(l)}. \tag{23.14}$$

2. Сужение φ на второе прямое слагаемое в (23.14) является обратимым л.э.

Доказательство. 1. Согласно предложению 23.1, свойством φ-инвариантности обладают все итерированные ядра и образы, в том числе и стабильные. Докажем независимость подпространств $N^{(l)}$ и $M^{(l)}$ (т. е. тривиальность их пересечения).

Возьмем любой элемент $x \in N^{(l)} \cap M^{(l)}$. С одной стороны, этот элемент должен удовлетворять условию $\varphi^l(x) = 0$, а, с другой стороны, — допускать представление в виде $x = \varphi^l(u)$ для некоторого $u \in V$. Для элемента u получается равенство:

$$\varphi^{2l}(u) = \varphi^l(\varphi^l(u)) = \varphi^l(x) = 0.$$

Следовательно, $u \in N^{(2l)}$. Но $N^{(2l)} = N^{(l)}$ (поскольку $2l \geqslant l$). Поэтому $u \in N^{(l)}$, т. е. $\varphi^l(u) = 0$. Вывод: $x = 0$. Тривиальность пересечения доказана.

Из независимости рассматриваемых подпространств и из того, что сумма их размерностей равна n, следует (см. предложение 9.2) равенство (23.14).

2. Первое ядро $N^{(1)} = \operatorname{Ker}(\varphi)$ содержится в стабильном ядре, следовательно (только что доказанная) независимость стабильного образа со стабильным ядром влечет его независимость с ядром $\operatorname{Ker}(\varphi)$.

Согласно предложению 15.1, сужение $\varphi\big|_{M^{(l)}}$ является мономорфизмом. В силу инвариантности $M^{(l)}$, это сужение есть л.э. Следовательно, его мономорфность влечет (см. п. 15.4) его обратимость. □

Замечание 23.1. Вспомним введенное в п. 20.2 понятие *фильтрации* в линейном пространстве и заметим, что итерированные ядра (с номерами $k \leqslant l$) образуют фильтрацию в стабильном ядре. Эта фильтрация является φ-инвариантной. Подчеркнем, однако, что (в отличие от п. 20.2) происходит она не из какой-либо (ранее введенной) *прямой суммы*. Имеется, однако, возможность, выбирая в каждом $N^{(k)}$ $(k = 1, ..., l)$ какое-либо прямое дополнение $C^{(k)}$ к более узкому ядру $N^{(k-1)}$, такую прямую сумму восстановить:

$$N^{(k)} = N^{(k-1)} \oplus C^{(k)};\ k = 1, \dots, l; \tag{23.15}$$

$$N^{(l)} = \bigoplus_{k=1}^{l} C^{(k)}. \tag{23.16}$$

23.4. Теорема о стабилизации в случае нильпотентного л.э. Понятия нильпотентного л.э. и нильпотентной квадратной матрицы уже возникали у нас "мимоходом", в примере 13.4 и п. 13.8 (см. также пример 21.1). Сейчас мы приступаем к их систематическому изучению.

Определение 23.4. Л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ называется *нильпотентным*, если существует натуральная степень k этого эндоморфизма, равная нулевому оператору: $\varphi^k = o$. Наименьшее из таких чисел, т. е.

$$l = \min\{k \in \mathbb{N} : \varphi^k = o\}, \tag{23.17}$$

называется *показателем нильпотентности* для л.э. φ.

Очевидно, что единственным нильпотентным оператором с показателем нильпотентности $l = 1$ является нулевой оператор.

Всякий нильпотентный л.э. необратим (в противном случае не только он, но и все его степени были бы обратимыми эндоморфизмами). Из этого следует, в частности, нетривиальность ядра для нильпотентного л.э.

В примере 13.4 (см. также пример 23.1 ниже) показано, что оператор дифференцирования $\varphi = {}'$ на $(n+1)$-мерном пространстве многочленов $V = \mathbb{R}_n[x]$ нильпотентен с показателем $l = n + 1$.

В примере 19.1 объяснялось, что всякий л.э., будучи суженным на свое ядро, становится нулевым (стало быть нильпотентным с показателем 1). Очевидно, если второе итерированное ядро $N^{(2)}$ для оператора φ строго шире первого, то сужение $\varphi\big|_{N^{(2)}}$ является нильпотентным оператором с показателем нильпотентности 2. В самом деле, этот оператор не является нулевым (иначе второе ядро совпадало бы с первым), и, в то же время, нулевым является его квадрат:

$$(\varphi\big|_{N^{(2)}})^2 = \varphi^2\big|_{N^{(2)}} = o.$$

Столь же просто устанавливается следующий более общий факт:

Предложение 23.3. *Рассмотрим φ-инвариантную фильтрацию*

$$O = N^{(0)} < N^{(1)} < N^{(2)} < ... < N^{(l)} \leqslant V \tag{23.18}$$

стабильного ядра $N^{(l)}$ для л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$.

Сужение этого эндоморфизма на любое из ядер $N^{(k)}$ $(k = 1, ..., l)$ нильпотентно с показателем k.

В частности, сужение на стабильное ядро имеет показатель нильпотентности, равный показателю стабилизации. □

Теперь подойдем к проблеме с другой стороны: рассмотрим л.э., *нильпотентный* (с показателем l) *на всем пространстве V*, и перескажем для него теорему о стабилизации.

Предложение 23.4. *Пусть л.э. φ действует в n-мерном пространстве V и является нильпотентным с показателем l. Тогда*

1) показатель стабилизации для φ совпадает с показателем нильпотентности l;

2) стабильное ядро совпадает со всем пространством: $N^{(l)} = V$;

3) стабильный дефект равен размерности: $d^{(l)} = n$;

4) стабильный образ тривиален: $M^{(l)} = O$;

5) стабильный ранг равен нулю: $r^{(l)} = 0$.

Доказательство. Достаточно убедиться в справедливости первых двух утверждений: остальные из них, очевидно, следуют.

Имеем, по предположению: $\varphi^l = o$ и $\varphi^{l-1} \neq o$. Следовательно, $N^{(l)} = V$ и $N^{(l-1)} \neq V$. Приходим к выводу, что стабилизация итерированных ядер происходит ровно при показателе l, причем в качестве стабильного ядра достигается все пространство V. □

Замечание 23.2. Очевидно также и обратное утверждение: если стабильное ядро совпадает со всем пространством, то данный л.э. нильпотентен (на всем пространстве).

Замечание 23.3. Из предложения 23.4 вытекает *оценка показателя нильпотентности* l для нильпотентного л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$:

$$l \leqslant n = \dim(V).$$

В самом деле, это неравенство, в силу теоремы 23.1, справедливо для *показателя стабилизации.*

Пример 23.1 (продолжение примера 19.2). Следующая последовательность вложенных друг в друга линейных пространств многочленов

$$O < \mathbb{R} = \mathbb{R}_0[x] < \mathbb{R}_1[x] < \mathbb{R}_2[x] < \ldots < \mathbb{R}_n[x] = V \tag{23.19}$$

[ср. с (19.3)] является не чем иным, как фильтрацией (23.18) итерированных ядер для оператора дифференцирования $\varphi = '$.

Теперь поговорим о нильпотентности квадратных матриц. Определение нильпотентной матрицы является "матричной калькой" операторного определения 23.4.

Определение 23.4′. Матрица $\underset{n\times n}{A}$ называется *нильпотентной*, с показателем l, если $A^l = O$, а для $k = 1, \ldots, l-1$ матрица $A^k \neq O$.

Из общей теоремы 12.1 (о соответствии между линейными операторами и матрицами) вытекает, что л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ является нильпотентным тогда и только тогда, когда нильпотентна его матрица A (в произвольном базисе пространства V).

Пример 23.2. Рассмотрим л.э. n-мерного пространства V, которому в некотором базисе $\mathcal{B} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ пространства V соответствует матрица, имеющая вид н.ж.я. (см. пример 13.4):

$$A = \boxed{J_n(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23.20}$$

На векторы базиса $\mathcal{B}$ этот л.э. действует следующим образом:

$$b_n \overset{\varphi}{\mapsto} b_{n-1} \overset{\varphi}{\mapsto} .... \overset{\varphi}{\mapsto} b_2 \overset{\varphi}{\mapsto} b_1 \overset{\varphi}{\mapsto} 0. \tag{23.21}$$

Отсюда ясно, что оператор φ нильпотентен с показателем $l = n$ и его итерированные ядра имеют вид:

$$N^{(k)} = \langle b_1, b_2, ..., b_k \rangle ; \ k = 1, ..., n. \tag{23.22}$$

Между прочим, предыдущий пример 23.1 (путем использования базиса $\mathcal{B} = [\, 1, x, x^2/2!, ..., x^n/n! \,]$) сводится к данному, с единственным отличием: н.ж.я. будет иметь порядок $n + 1$.

§ 24. Приращения итерированных дефектов. Теорема Фробениуса. Вторые приращения дефектов

24.1. Приращения итерированных дефектов. Рассмотрим л.э. φ, действующий в n-мерном линейном пространстве V. Пусть l — его показатель стабилизации и

$$0 = d^{(0)} < d^{(1)} < d^{(2)} < ... < d^{(l-1)} < d^{(l)} = d^{(l+1)} = ... \tag{24.1}$$

— последовательность итерированных дефектов.

Введем последовательность приращений

$$p^{(k)} = d^{(k)} - d^{(k-1)}; \ k = 1, 2, ... \tag{24.2}$$

итерированных дефектов.

Заметим, что

— $p^{(1)} = d^{(1)}$;

— при $k = 1, ..., l$ приращения положительны: $p^{(k)} > 0$;

— при $k > l$, по причине стабилизации итерированных дефектов, приращения становятся нулевыми.

24.2. Теорема Фробениуса. По своему смыслу приращения (24.2) являются размерностями (произвольных) прямых дополнений $C^{(k)}$ к предыдущему ядру в последующем [см. (23.15)]:

$$N^{(1)} = C^{(1)}; \ N^{(k)} = N^{(k-1)} \oplus C^{(k)}; \ k = 2, ..., l; \tag{24.3}$$

$$\dim(C^{(k)}) = p^{(k)};\ k = 1, \dots, l. \tag{24.4}$$

В дальнейшем, однако, нам понадобится выбирать эти прямые дополнения отнюдь не произвольно. Руководящим принципом будет следующий:

— процесс должен начинаться с последнего по номеру прямого дополнения $C^{(l)}$;

— построив очередное прямое дополнение $C^{(k)}$ $(k = l, l-1, \dots, 3, 2)$, следующее (а по номеру — предыдущее) дополнение $C^{(k-1)}$ мы будем выбирать так, чтобы оно содержало образ $\varphi(C^{(k)})$.

Обоснованием возможности реализации описанного выше плана является

Теорема 24.1 (теорема Фробениуса). *Пусть φ — л.э., действующий в n-мерном пространстве V, l — показатель стабилизации для φ. Рассмотрим последовательности:*

— итерированных ядер $\{N^{(k)}\}_{k=0}^{l}$;

— итерированных дефектов $\{d^{(k)}\}_{k=0}^{l}$;

— приращений итерированных дефектов $\{p^{(k)}\}_{k=1}^{l}$.

Пусть $k \in \{2, \dots, l\}$ и выбрано какое-либо прямое дополнение $C^{(k)}$ в ядре $N^{(k)}$ к предыдущему ядру $N^{(k-1)}$.

Сузим л.э. φ на $N^{(k)}$ и рассмотрим это сужение как линейный оператор (гомоморфизм)

$$\varphi\big|_{N^{(k)}} : N^{(k)} \longrightarrow N^{(k-1)}. \tag{24.5}$$

Тогда

1) дальнейшее сужение гомоморфизма (24.5) на подпространство $C^{(k)} \leqslant N^{(k)}$ является линейным изоморфизмом на образ $\varphi(C^{(k)})$;

2) размерность этого образа определяется формулой

$$\dim(\varphi(C^{(k)})) = p^{(k)}; \tag{24.6}$$

3) $N^{(k-2)}$ и $\varphi(C^{(k)})$ являются независимыми подпространствами в пространстве $N^{(k-1)}$;

4) прямое дополнение $C^{(k-1)}$ к $N^{(k-2)}$ в $N^{(k-1)}$ можно выбрать так, чтобы выполнялось включение

$$\varphi(C^{(k)}) \leqslant C^{(k-1)}. \tag{24.7}$$

Если произвольным образом выбрать прямое дополнение $C^{(l)}$ к предстабильному ядру $N^{(l-1)}$ в стабильном ядре $N^{(l)}$, то

5) выбор всех прямых дополнений $C^{(k)}$ с меньшими номерами можно осуществить так, чтобы для любого $k = 2, ..., l$ выполнялось включение (24.7);

6) для любого $k = 2, ..., l$ справедливо неравенство

$$p^{(k)} \leqslant p^{(k-1)}, \tag{24.8}$$

т. е. последовательность $\{p^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ приращений итерированных дефектов является невозрастающей.

Доказательство. 1. Тот факт, что $\varphi(N^{(k)}) \leqslant N^{(k-1)}$, установлен в предложении 23.1; благодаря ему сужение л.э. φ на $N^{(k)}$ можно рассматривать как гомоморфизм (24.5).

Линейное подпространство $C^{(k)} \leqslant N^{(k)}$ является прямым дополнением к подпространству $N^{(k-1)} \leqslant N^{(k)}$, которое, в силу предложения 23.1 (и предположения $k \geqslant 2$), содержит первое из итерированных ядер $N^{(1)} = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Следовательно, подпространства $C^{(k)}$ и $N^{(1)}$ *независимы* (имеют нулевое пересечение).

Согласно предложению 15.1, сужение (24.5) на $C^{(k)}$, т. е., как сказано в формулировке теоремы, "дальнейшее сужение" $\varphi\big|_{C^{(k)}}$, является линейным изоморфизмом *на свой образ*, который, в данном случае, есть не что иное, как $\varphi(C^{(k)})$.

2. Наличие изоморфизма $\varphi(C^{(k)}) \cong C^{(k)}$ влечет равенство размерностей (24.6).

3. Докажем независимость подпространств $N^{(k-2)}$ и $\varphi(C^{(k)})$, т. е. тривиальность их пересечения.

Пусть $x \in \varphi(C^{(k)}) \cap N^{(k-2)}$. С одной стороны, это означает, что x представляется в виде $x = \varphi(u)$, где $u \in C^{(k)}$, а с другой — что для этого вектора справедливо равенство $\varphi^{k-2}(x) = 0$. Объединяя два указанных факта, получаем: $\varphi^{k-1}(u) = \varphi^{k-2}(\varphi(u)) = \varphi^{k-2}(x) = 0$.

Значит, вектор u принадлежит ядру $N^{(k-1)}$ и, следовательно, — пересечению $N^{(k-1)} \cap C^{(k)}$, которое является нулевым (в силу определения прямого дополнения).

Получаем, что $u = 0$ и, следовательно, $x = 0$.

4. Независимость двух линейных подпространств в конечномерном линейном пространстве влечет, в силу предложения 9.4, существование такого прямого дополнения к одному (любому) из этих подпространств, которое содержит другое подпространство. Так что

к подпространству $N^{(k-2)} \leqslant N^{(k-1)}$ найдется прямое дополнение $C^{(k-1)}$, удовлетворяющее включению (24.7).

5. По выбранному произвольным образом дополнению $C^{(l)}$ мы можем, в соответствии с предыдущим утверждением, подобрать дополнение $C^{(l-1)}$ так, чтобы выполнялось требуемое включение. По уже определенному $C^{(l-1)}$ аналогичным образом находится $C^{(l-2)}$; и т. д., вплоть до $C^{(2)}$. Завершающий этап будет иметь некоторую особенность: поскольку $N^{(0)} = O$, то (единственным) прямым дополнением к нему будет $C^{(1)} = N^{(1)}$, и образ $\varphi(C^{(2)})$ будет содержаться в нем автоматически.

6. Неравенства (24.8) вытекают из включений (24.7), с учетом равенств (24.6). □

Замечание 24.1. Если *строгое возрастание итерированных дефектов* (вплоть до стабилизации) является вполне элементарным свойством, то *невозрастание их приращений* есть более глубокий факт. Неравенству (24.8) можно придать другую форму, если от приращений итерированных дефектов возвратиться к самим дефектам:

$$d^{(k)} - 2d^{(k-1)} + d^{(k-2)} \leqslant 0;\ k = 2, \dots, l. \qquad (24.8')$$

В таком виде оно известно как *неравенство Фробениуса* и иногда выражается следующим образом: последовательность итерированных дефектов обладает свойством *вогнутости*.

[Аналогичный термин употребляется в математическом анализе применительно к функциям и вам, несомненно, знаком. Любителям анализа будет совсем не вредно задуматься о взаимоотношении понятий вогнутости (а также выпуклости) для функций и для последовательностей.]

24.3. Вторые приращения итерированных дефектов. Приращения для возрастающей последовательности положительны, для невозрастающей — неположительны. *Вторые приращения* — это приращения для последовательности (первых) приращений.

Применительно к последовательности итерированных дефектов вторыми приращениями будут числа

$$p^{(k)} - p^{(k-1)} = d^{(k)} - 2d^{(k-1)} + d^{(k-2)}. \qquad (24.9)$$

Именно они фигурировали в формуле (24.8′), вместе с утверждением об их неположительности.

В последующих "рабочих вычислениях" нам удобнее будет пользоваться вторыми приращениями, взятыми с обратным знаком и со сдвигом нумерации на единицу. Эти величины вводятся в следующем определении.

Определение 24.2. *Абсолютными вторыми приращениями* итерированных дефектов будем называть числа

$$q^{(k)} = p^{(k)} - p^{(k+1)};\ k = 1, \dots, l, \tag{24.10}$$

где $p^{(k)}$ определяются формулами (24.2).

Напомним, что (по причине наступившей стабилизации) имеет место равенство $p^{(l+1)} = 0$. Следовательно, $q^{(l)} = p^{(l)}$.

В следующем предложении проясняется смысл абсолютных вторых приращений дефектов.

Предложение 24.1. *Пусть подпространства $C^{(k)}$ выбраны в соответствии с пятым утверждением теоремы Фробениуса. Тогда абсолютные вторые приращения дефектов $q^{(k)}$ имеют следующий смысл:*

$$q^{(l)} = p^{(l)} = \dim(C^{(l)}) \tag{24.11a}$$

и (для любого $k = 1, \dots, l-1$)

$$q^{(k)} = \dim(D^{(k)}), \tag{24.11b}$$

где $D^{(k)}$ является прямым дополнением к образу $\varphi(C^{(k+1)})$ в $C^{(k)}$.

Доказательство совершенно очевидно: достаточно подсчитать размерность второго прямого слагаемого в сумме

$$C^{(k)} = \varphi(C^{(k+1)}) \oplus D^{(k)}. \ \square \tag{24.12}$$

Замечание 24.2. В качестве информации (которая в дальнейшем будет подтверждена вычислительными примерами) укажем на то, что любое из чисел $q^{(k)}$ $(k = 1, \dots, l-1)$ может оказаться равным нулю. Это свидетельствует о наличии равенства $\varphi(C^{(k+1)}) = C^{(k)}$ и, следовательно, о тривиальности дополнения: $D^{(k)} = O$. Число $q^{(l)}$, по построению, всегда положительно.

§ 25. Жорданов базис в стабильном ядре линейного эндоморфизма. Малая теорема Жордана

25.1. Понятие жорданова базиса для л.э. Напомним (см. пример 21.1), как выглядят матрицы, именуемые *жордановыми ящиками* (ж.я.):

$$\boxed{J_n(\lambda_0)} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}. \tag{25.1}$$

Предполагается, что матрица (25.1) имеет размер $n \times n$. Не исключается случай $n = 1$, т. е. допускаются одноэлементные ж.я. вида

$$\boxed{J_1(\lambda_0)} = (\lambda_0)\,. \tag{25.1а}$$

При $n \geqslant 2$ матрицу (25.1) можно представить в виде суммы скалярной матрицы и *нильпотентного жорданова ящика* (н.ж.я.):

$$\boxed{J_n(\lambda_0)} = \lambda_0 E_n + \boxed{J_n(0)}. \tag{25.2}$$

Согласно упомянутому примеру, такие матрицы являются недиагонализируемыми.

Определение 25.1. *Жордановым базисом* для л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ называется такой базис в пространстве V, в котором этому эндоморфизму отвечает блочно-диагональная матрица с жордановыми ящиками (возможно, различных размеров и с различными диагональными элементами) в качестве блоков.

Если W является (нетривиальным) φ-инвариантным линейным подпространством в пространстве V, то под *жордановым базисом для φ в подпространстве W* понимается жорданов базис для л.э. $\varphi' = \varphi\big|_W \in \mathcal{L}(W)$.

Замечание 25.1. Диагонализирующий базис (см. определения 21.1 и 21.1′) является частным случаем жорданова базиса, характеризующимся тем, что все ж.я. являются одноэлементными.

25.2. Базисы в стабильном ядре л.э., организованные в виде столбчатых диаграмм. Рассмотрим эндоморфизм $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, действующий в n-мерном линейном пространстве V и *не являющийся обратимым*. В этом случае его ядро $N^{(1)} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ является ненулевым (и оказывается к тому же не чем иным, как собственным подпространством $S_0(\varphi)$; см. пример 16.2). Пусть l — показатель стабилизации, а $N^{(l)}$ — стабильное ядро для оператора φ.

Как установлено в п. 23.3 [см. формулу (23.16)], стабильное ядро разбивается в прямую сумму

$$N^{(l)} = C^{(1)} \oplus C^{(2)} \oplus C^{(3)} \oplus ... \oplus C^{(l-2)} \oplus C^{(l-1)} \oplus C^{(l)}, \qquad (25.3)$$

где $C^{(1)} = N^{(1)}$, а $C^{(k)}$ является (произвольным) прямым дополнением к итерированному ядру $N^{(k-1)}$ в следующем итерированном ядре $N^{(k)}$ $(k = 2, ..., l)$.

Равенство линейных подпространств (25.3) влечет равенство соответствующих размерностей:

$$d^{(l)} = p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} + ... + p^{(l-2)} + p^{(l-1)} + p^{(l)}, \qquad (25.4)$$

где $d^{(l)}$ есть стабильный дефект для φ, а числа $p^{(k)}$ $(k = 1, ..., l)$ являются приращениями итерированных дефектов [см. (24.2)], в частности, $p^{(1)}$ совпадает с первым дефектом $d^{(1)}$.

Согласно теореме 24.1, выбор прямых дополнений, образующих сумму (24.3), можно осуществить таким образом, чтобы под действием φ дополнение $C^{(k)}$ отображалось в предыдущее дополнение $C^{(k-1)}$ $(k = l, ..., 2$; в порядке убывания номеров). При этом важно, что имеют место изоморфизмы $\varphi(C^{(k)}) \cong C^{(k)}$.

Определение 25.2. Будем называть *столбчатой диаграммой* в стабильном ядре $N^{(l)}$ систему

$$\mathcal{G}_0 = [g_1, g_2, ..., g_{d^{(l)}}], \qquad (25.5)$$

состоящую из $d^{(l)}$ векторов, *организованных* в особую таблицу $\mathcal{D}_0$ (представленную на диагр. 25.1 в прил. 3), в которой

1) векторы изображаются точками в ячейках и размещаются в l строках; строки нумеруются снизу вверх и выравниваются по левому краю; количество точек-векторов в k-й строке $(k = 1, ..., l)$ равно $p^{(k)}$ [эти числа не возрастают в силу неравенства Фробениуса];

2) векторы, расположенные в k-й строке, составляют базис в подпространстве $C^{(k)}$;

3) стрелки изображают действие л.э. φ: векторы из нижней строки отображаются в нуль; векторы из k-й строки ($k = 2, ..., l$) переходят в располагающиеся под ними векторы $(k-1)$-й строки;

4) векторы в диаграмме нумеруются по принципу: в столбцах — снизу вверх, столбцы — слева направо (верхнему вектору первого столбца присваивается номер l; нижнему вектору второго — номер $l+1$; и т. д., вплоть до последнего номера, равного стабильному дефекту).

Прокомментируем определение 25.2. Читая эти пояснения, необходимо держать перед глазами упомянутую выше диагр. 25.1 из прил. 3.

Прежде всего констатируем, что с.в. (25.5), описанная в определении, является *базисом в стабильном ядре* $N^{(l)}$, *приспособленным* к прямой сумме (25.3).

Более подробно: векторы из первой строки диаграммы образуют базис в $N^{(1)}$; векторы из первых двух строк вместе составляют базис в $N^{(2)}$; три нижних строки дают базис в $N^{(3)}$ и т. д.

Охарактеризуем далее *параметры столбчатой диаграммы*. При этом будут использоваться некоторые "не очень математические" (но понятные и выразительные) слова: "зона", "этаж", "ступенька".

Высота (или число *этажей*) столбчатой диаграммы равняется показателю стабилизации l.

Количество столбцов в диаграмме равно длине нижней строки, т. е. равно первому дефекту $d^{(1)} = p^{(1)}$.

Высота k столбцов изменяется в пределах от 1 до l. Столбцы одинаковой высоты сгруппированы в *зоны*, что приводит к образованию *ступенек* в диаграмме.

Длина ступеньки на k-м этаже равняется абсолютному второму приращению итерированных дефектов $q^{(k)} = p^{(k)} - p^{(k+1)}$. Обращение этого числа в нуль свидетельствует о том, что на данном этаже ступенька отсутствует. (Обязательно присутствует ступенька длины $q^{(l)} = p^{(l)}$ на самом верхнем этаже.)

Число $q^{(k)}$ можно также охарактеризовать как *количество столбцов высоты* k, или же как *длину* k*-й зоны* (нумерация зон при этом идет справа налево; некоторые из них могут оказаться пустыми; зона самых высоких столбцов никогда не пуста).

Переходим к подробному описанию нумерации базисных векторов. Столбцы будем нумеровать слева направо (от самых высоких к самым низким) с помощью номера j, меняющегося в пределах от 1

до первого дефекта $d^{(1)}$ (равного длине первой строки). Эта длина складывается, очевидно, из длин всех имеющихся ступенек:

$$d^{(1)} = q^{(1)} + q^{(2)} + q^{(3)} + ... + q^{(l-2)} + q^{(l-1)} + q^{(l)}. \tag{25.6}$$

Высоту j-го столбца обозначим k_j; она совпадает с (отсчитываемым справа налево) номером зоны, в которую попадает данный столбец.

Если же рассматривать, как мы только что условились, нумерацию столбцов в противоположном направлении, то получится:

$$k_j = \begin{cases} l, & \text{если } 1 \leqslant j \leqslant q^{(l)}; \\ l-1, & \text{если } q^{(l)} + 1 \leqslant j \leqslant q^{(l)} + q^{(l-1)}; \\ ..... & ..... \\ 2, & \text{если } q^{(l)} + ... + q^{(3)} + 1 \leqslant j \leqslant q^{(l)} + ... + q^{(2)}; \\ 1, & \text{если } q^{(l)} + ... + q^{(2)} + 1 \leqslant j \leqslant d^{(1)}. \end{cases} \tag{25.7}$$

Теперь в j-м столбце номер нижнего вектора может быть вычислен как $k_1 + ... + k_{j-1} + 1$, а номер верхнего вектора — как $k_1 + ... + k_j$. Напомним, что изначально содержание столбчатой диаграммы описывалось построчно, в соответствии с прямой суммой (25.3). Здесь же мы перегруппируем базисные векторы по столбцам: j-я группа будет иметь вид

$$\mathcal{Y}_j = \left[g_{k_1+...+k_{j-1}+1}, \cdots, g_{k_1+...+k_j} \right] \tag{25.8}$$

и будет порождать k_j-мерное линейное подпространство

$$Z_j = \langle \mathcal{Y}_j \rangle \leqslant N^{(l)};\ j = 1, ..., d^{(1)}, \tag{25.9}$$

которое мы назовем *циклическим*.

Согласно предложению 9.2, получается другое разбиение стабильного ядра в прямую сумму:

$$N^{(l)} = Z_1 \oplus Z_2 \oplus ... \oplus Z_{d^{(l)}}. \tag{25.10}$$

Прямой сумме (25.10) соответствует разбиение базиса (25.5) в объединение базисов вида (25.8):

$$\mathcal{G}_0 = \left[\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, ..., \mathcal{Y}_{d^{(1)}} \right]. \tag{25.11}$$

Каждое из циклических подпространств Z_j является *φ-инвариантным*. Это следует из характера действия л.э. φ на векторы базиса (25.8), которое показано вертикальными стрелками на диаграмме 25.1. Применительно к первому столбцу можно записать:

$$g_l \overset{\varphi}{\mapsto} g_{l-1} \overset{\varphi}{\mapsto} g_{l-2} \overset{\varphi}{\mapsto} \dots \overset{\varphi}{\mapsto} g_3 \overset{\varphi}{\mapsto} g_2 \overset{\varphi}{\mapsto} g_1 \overset{\varphi}{\mapsto} 0. \tag{25.12}$$

В общем виде все выглядит совершенно аналогично, но необходимы сложные (двухэтажные, длинные и содержащие многоточия) индексы, типа тех, что фигурируют в (25.8).

25.3. Малая теорема Жордана. В этом пункте мы установим важнейший факт, являющийся ключом к знаменитой теореме о существовании жорданова базиса для л.э. Название теоремы не является общепринятым, но придумано автором настоящего пособия с тем, чтобы обозначить первый этап в доказательстве упомянутой теоремы. Второй этап (см. § 27) получит название "большой теоремы Жордана".

Теорема 25.1 (малая теорема Жордана, МТЖ). *Пусть φ — необратимый л.э., действующий в n-мерном линейном пространстве V, с показателем стабилизации l, стабильным ядром $U = N^{(l)}$ и стабильным дефектом $m = d^{(l)}$. Тогда*

1) в подпространстве U существует базис (25.5), организованный в столбчатую диаграмму;

2) этот базис является жордановым;

3) эндоморфизму $\varphi' = \varphi\big|_U$ отвечает в нем блочно-диагональная $(m \times m)$-матрица J_0 с нильпотентными жордановыми ящиками на диагонали (см. диагр. 25.2 в прил. 3);

4) общее количество н.ж.я. в матрице J_0 равняется первому дефекту $d^{(1)} = \operatorname{dfc}(\varphi)$; размеры ящиков заключены в пределах от 1 до l, причем имеется $q^{(k)}$ ящиков размера $k \times k$ (где $q^{(k)}$ — абсолютные вторые приращения итерированных дефектов; $k = 1, \dots, l$).

Доказательство. 1. Доказательство первого утверждения непосредственно усматривается из теоремы Фробениуса 24.1. (Снова прослеживайте каждый шаг по диагр. 25.1.)

Выбрав произвольный базис в подпространстве $C^{(l)}$ (содержащий $q^{(l)}$ векторов) и применив к нему л.э. φ, мы получим базис в образе $\varphi(C^{(l)})$. Это следует из факта мономорфности сужения φ на $C^{(l)}$.

Полученный образ независим с ядром $N^{(l-2)}$ и может быть включен в некоторое прямое дополнение $C^{(l-1)}$ к $N^{(l-2)}$ в ядре $N^{(l-1)}$.

Базис в $\varphi(C^{(l)})$ может быть продолжен до (содержащего $p^{(l-1)}$ векторов) базиса в $C^{(l-1)}$. При этом придется добавить $q^{(l-1)} = p^{(l-1)} - p^{(l)}$ векторов. (Если указанное число равно нулю, то ничего добавлять не нужно, — следует переход к очередному "шагу вниз".)

Вспоминая обозначения из предложения 24.1, заметим, что добавочные векторы будут составлять базис в некотором прямом дополнении $D^{(l-1)}$ к подпространству $\varphi(C^{(l)})$ в подпространстве $C^{(l-1)}$.

Точно так же мы рассуждаем, находясь на любом из этажей с номером $k \geqslant 2$. Переходя к этажу с номером $k-1$, мы

— либо сразу получаем базис в $C^{(k-1)}$ как образ базиса в $C^{(k)}$ (если $q^{(k-1)} = 0$);

— либо (если $q^{(k-1)} > 0$) должны будем добавить к указанному образу еще $q^{(k-1)}$ векторов, составляющих базис в некотором прямом дополнении $D^{(k-1)}$ к подпространству $\varphi(C^{(k)})$ в подпространстве $C^{(k-1)}$.

Некоторую особенность доставляет последний шаг (со второго этажа на первый), но мы о ней уже говорили в пятом пункте доказательства теоремы Фробениуса (и еще раз поговорим при рассмотрении *алгоритма* построения столбчатой диаграммы; см. ниже п. 25.4).

В итоге мы получим базис в U, приспособленный к прямому разложению (25.3) и организованный в столбчатую диаграмму.

2. С помощью перегруппировки базисных векторов, описанной в п. 25.2, перейдем к прямому разложению (25.10) подпространства U в сумму φ-инвариантных циклических подпространств Z_j ($j = 1, \dots, d^{(1)}$) и рассмотрим перенумерованный в согласии с новым разложением базис (25.11).

В силу предложения 20.4, в этом базисе эндоморфизму $\varphi' = \varphi\big|_U$ будет отвечать блочно-диагональная матрица, имеющая $d^{(1)}$ диагональных блоков, соответствующих сужениям

$$\varphi'_j = \varphi\big|_{Z_j} \in \mathcal{L}(Z_j);\ j = 1, \dots, d^{(1)}. \tag{25.13}$$

Эндоморфизм (25.13) переводит каждый вектор из j-го столбца диагр. 25.1 в вектор, расположенный под ним (самый нижний вектор переходит в нуль). Значит (см. объяснения в примере 23.2), сужению φ'_j отвечает в базисе $\mathcal{Y}_j$ матрица $\boxed{J_{k_j}(0)}$.

Таким образом, доказано, что каждому столбцу в столбчатой диаграмме 25.1 отвечает в матрице J_0 (см. диагр. 25.2 в прил. 3) н.ж.я., размер которого совпадает с высотой столбца.

В соответствии с определением 25.1, базис (25.11) будет жордановым базисом для φ'.

3. Третье и четвертое утверждения теоремы установленны попутно, при доказательстве второго. □

Следствие. *Характеристический многочлен для сужения φ' линейного эндоморфизма φ на его стабильное ядро определяется формулой:*

$$h_{\varphi'}(\lambda) = \lambda^m, \tag{25.14}$$

где $m = d^{(l)}$.

Доказательство. Как известно, $h_{\varphi'}(\lambda) = h_{A'}(\lambda) = \det(\lambda E - A')$, а последний определитель равен λ^m, поскольку $(m \times m)$-матрица $\lambda E - A'$ имеет верхний треугольный вид и ее главная диагональ сплошь заполнена скалярами λ. □

25.4. Стабильный дефект как алгебраическая кратность нулевого собственного значения. Рассмотрим л.э. φ, действующий в n-мерном линейном пространстве V. Если φ обратим, то как ядро, так и стабильное ядро для него тривиальны.

В первом же "спектральном" параграфе, в примере 16.2 было отмечено, что необходимым и достаточным условием необратимости φ является принадлежность нуля его спектру:

$$0 \in \sigma(\varphi). \tag{25.15}$$

При этом ядро эндоморфизма является не чем иным, как собственным подпространством, отвечающим нулевому собственному значению:

$$N^{(1)} = \mathrm{Ker}(\varphi) = S_0(\varphi), \tag{25.16}$$

а (первый) дефект — имеет смысл соответствующей *геометрической кратности*:

$$d^{(1)} = \mathrm{dfc}(\varphi) = \dim(S_0(\varphi)). \tag{25.17}$$

Следующее (очень важное для дальнейшего) предложение интерпретирует "в спектральных терминах" понятие стабильного дефекта для л.э.

Предложение 25.1. *Стабильный дефект $d^{(l)}$ для (необратимого) л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ равен алгебраической кратности нулевого собственного значения (25.15).*

Доказательство. Воспользуемся результатом предложения 23.2. Наличие прямого разложения (23.14), в котором оба слагаемых — φ-инвариантны, влечет (в силу второго утверждения предложения 22.1) следующее разложение для $h_\varphi(\lambda)$:

$$h_\varphi(\lambda) = h_{\varphi'}(\lambda) h_{\varphi''}(\lambda), \tag{25.18}$$

где $\varphi' = \varphi\big|_{N^{(l)}}$ и $\varphi'' = \varphi\big|_{M^{(l)}}$, причем оператор φ'' обратим, и, следовательно, его характеристический многочлен не делится на λ.

С другой стороны, согласно следствию из МТЖ, характеристический многочлен для φ' определяется формулой (25.14). Таким образом, мы приходим к разложению

$$h_\varphi(\lambda) = \lambda^m \overline{h}(\lambda), \tag{25.19}$$

в котором

$$m = d^{(l)}, \tag{25.20}$$

а многочлен $\overline{h}(\lambda) = h_{\varphi''}(\lambda)$ (в силу обратимости φ'') не имеет нуль своим корнем, т. е. $\overline{h}(0) \neq 0$.

Значит, показатель степени m есть не что иное, как кратность нулевого характеристического корня (или, равносильно: *алгебраическая кратность* нулевого собственного значения). □

25.5. Жорданов базис для нильпотентного л.э. В силу предложения 23.3, сужение л.э. на любое итерированное (в том числе и стабильное) ядро является нильпотентным л.э.; показатель нильпотентности равен номеру ядра. Так что рассмотренный в МТЖ л.э. φ' является нильпотентным (с показателем l). Тем же свойством обладает и его матрица (в любом базисе). В жордановом базисе это проявляется в том, что нильпотентны все ж.я. матрицы J_0.

Для нильпотентного во всем пространстве л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, показатель стабилизации равен показателю нильпотентности и стабильное ядро совпадает со всем V (см. предложение 23.4). Следовательно, справедливо

Предложение 25.2. *Нильпотентный л.э. φ, действующий в n-мерном линейном пространстве V обладает жордановым базисом (во всем пространстве V). Матрица, отвечающая в этом базисе данному эндоморфизму, является блочно диагональной, с нильпотентными жордановыми ящиками на диагонали. Характеристический многочлен определяется формулой:*

$$h_\varphi(\lambda) = \lambda^n. \ \square \tag{25.21}$$

Замечание 25.2. Условие (25.21) является не только необходимым, но и достаточным для нильпотентности л.э. В самом деле, из этого условия следует, что стабильный дефект равен n и, значит, стабильное ядро совпадает со всем V.

25.6. Алгоритм построения жорданова базиса в стабильном ядре л.э. Доказательство теоремы 25.1 (о существовании жорданова базиса в стабильном ядре $N^{(l)}$) было по сути алгоритмическим. Не были конкретизированы лишь выборы прямых дополнений $C^{(l)}$, $D^{(l-1)}, \dots, D^{(2)}$, $D^{(1)}$ (и базисов в них). Ясно, что для реализации указанных выборов потребуется применение *алгоритма продолжения базисов* 10.4. Но для запуска этого алгоритма необходимо, чтобы "было что продолжать": требуется предварительное построение каких-либо базисов (мы будем называть их "необработанными") во всех итерированных ядрах, вплоть до стабильного. Необработанные базисы $\mathcal{F}^{(k)}$ в ядрах $N^{(k)}$ $(k = 1, \dots, l)$ находятся (см. п. 14.3) с помощью приспособленной к операторным задачам версии алгоритма 10.1. В предложении 25.2 обосновано "правило останова": сигналом к прекращению итераций служит равенство очередного итерированного дефекта и алгебраической кратности нулевого собственного значения. В доказательстве теоремы 25.1 намечена схема "обработки" необработанных базисов, позволяющая получить организованный в столбчатую диаграмму базис в $N^{(l)}$, который и является искомым. (Корректность этой схемы на каждом шаге ее применения обеспечиватеся теоремой 24.1.)

А л г о р и т м 25. 1.
Построение жорданова базиса в стабильном ядре (необратимого) л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ и вычисление матрицы, отвечающей в этом базисе сужению л.э. на стабильное ядро

В n-мерном линейном пространстве V (над полем P) фиксируется

базис $\mathcal{B}$, в котором оператору φ соответствует $(n\times n)$-матрица A. Будем искать жорданов базис $\mathcal{G}_0$ в стабильном ядре эндоморфизма φ.

Как обычно, для записи и хранения всех выстраиваемых базисов используются матрицы, составленные из координатных столбцов вновь определяемых базисных векторов относительно "старого" базиса $\mathcal{B}$.

1. Составляем характеристический многочлен

$$h_\varphi(\lambda) = h_A(\lambda).$$

Если он не делится на λ, то оператор φ обратим; стабильное ядро тривиально; нечего строить.

Если $\lambda \mid h_\varphi(\lambda)$, то определяем кратность m нулевого характеристического корня.

2. *Построение необработанных базисов в итерированных ядрах.*

2.1. Находим базис в ядре $N^{(1)} = \mathrm{Ker}(\varphi) = L_A^0$, представленном как нуль-пространство матрицы A, т. е. находим фундаментальную матрицу $F^{(1)}$ для с.л.у. $A\cdot\overline{x} = \overline{0}$. Столбцы этой матрицы составляют базис в первом ядре; их количество равно первому дефекту $d^{(1)}$.

Если $d^{(1)} = m$, то стабилизация достигнута на первом шаге: $l = 1$; первое ядро является стабильным; базис в нем содержится в матрице $F^{(1)}$ и автоматически является жордановым (еще точнее: диагонализирующим); ничего обрабатывать не надо (столбчатая диаграмма имеет всего одну строку).

2.2. Если $d^{(1)} < m$, то вычисляем матрицу A^2 и повторяем с ней действия пункта 2.1: находим матрицу $F^{(2)}$, содержащую (необработанный) базис во втором ядре и вычисляем второй дефект $d^{(2)}$.

Если $d^{(2)} = m$, то — переход к этапу 3; в противном случае — продолжение: вычисляем A^3 и т. д.

На некотором шаге (с номером $l \leqslant n$) будет реализована первая альтернатива: итерированный дефект $d^{(l)}$ сравняется с m и окажется стабильным (номер l фиксируется как показатель стабилизации); матрица $F^{(l)}$ будет содержать (необработанный) базис в стабильном ядре $N^{(l)}$.

По завершению данного этапа мы получаем последовательность матриц (всё возрастающего размера):

$$\underset{n\times d^{(1)}}{F^{(1)}};\ \underset{n\times d^{(2)}}{F^{(2)}};\ \underset{n\times d^{(3)}}{F^{(3)}};\ \ldots;\ \underset{n\times d^{(l-2)}}{F^{(l-2)}};\ \underset{n\times d^{(l-1)}}{F^{(l-1)}};\ \underset{n\times d^{(l)}}{F^{(l)}}. \tag{25.22}$$

Предостережение. Не следует ожидать, что матрица с меньшим номером окажется подматрицей в матрице с бóльшим номером. (Это

возможно, но лишь — случайно.) Достижение такого состояния в цепочке содержащих базисы матриц как раз и является целью обработки базисов.

3. *Вычисление матрицы* J_0, отвечающей (в жордановом базисе) сужению φ' л.э. φ на стабильное ядро. (Подчеркнем, что матрица J_0 может быть определена по итерированным дефектам и их первым и вторым приращениям до построения самого жорданова базиса $\mathcal{G}_0$.)

3.1. Если $l = 1$, то матрица является нулевой: $J_0 = O$.

3.2. Если $l > 1$, то по последовательности

$$d^{(1)};\ d^{(2)};\ d^{(3)};\ \dots;\ d^{(l-2)};\ d^{(l-1)};\ d^{(l)} \tag{25.23}$$

итерированных дефектов построим последовательность

$$p^{(1)};\ p^{(2)};\ p^{(3)};\ \dots;\ p^{(l-2)};\ p^{(l-1)};\ p^{(l)} \tag{25.24}$$

приращений

$$p^{(1)} = d^{(1)};\ p^{(k)} = d^{(k)} - d^{(k-1)}\ (k = 2, \dots, l) \tag{25.25}$$

и последовательность

$$q^{(1)};\ q^{(2)};\ q^{(3)};\ \dots;\ q^{(l-2)};\ q^{(l-1)};\ q^{(l)} \tag{25.26}$$

абсолютных вторых приращений

$$q^{(k)} = p^{(k)} - p^{(k+1)}\ (k = 1, \dots, l-1);\ q^{(l)} = p^{(l)}. \tag{25.27}$$

3.3. По приращениям (25.24) строится (но пока не заполняется) столбчатая диаграмма $\mathcal{D}_0$ вида 25.1 (см. прил. 3): она должна содержать $d^{(l)}$ ячеек, сгруппированных в l строк (занумерованных снизу вверх и выровненных по левому краю); на k-м этаже должно располагаться $p^{(k)}$ ячеек $(k = 1, \dots, l)$.

3.4. Матрица J_0 размера $m \times m$ строится как блочно-диагональная: сначала идут $q^{(l)}$ блоков (н.ж.я.) $\boxed{J_l(0)}$ максимального размера $l \times l$, затем ящики идут в порядке убывания их размеров, причем количество $(k \times k)$-ящиков равняется $q^{(k)}$ (если это число равно нулю, то ящики соответствующего размера отсутствуют). Схема строения матрицы J_0 показана на диагр. 25.2 в прил. 3. (В пояснениях к этой диаграмме о жордановых ящиках говорится как о "малых" блоках;

малые блоки одинакового размера объединяются в "средние" блоки. О "больших" блоках пока не говорится: они появятся позже, в алгоритме 28.1.)

4. *Обработка базисов в итерированных ядрах* (заполнение столбчатой диаграммы $\mathcal{D}_0$; см. диагр. 25.1 в прил. 3).

4_l. *Расчет верхнего этажа.* С помощью алгоритма 10.4 находим базис в каком-либо прямом дополнении $C^{(l)}$ к предстабильному ядру в стабильном. Конкретнее: составляем матрицу-конкатенацию

$$M^{(l)} = \left(\underset{n\times d^{(l-1)}}{F^{(l-1)}} \;\middle|\; \underset{n\times d^{(l)}}{F^{(l)}} \right); \tag{25.28}$$

приводим ее к ступенчатому виду (с помощью элементарных преобразований над строками) и определяем номера "проходящих через ступеньки" векторов в "правой зоне". Эти векторы (в их исходном виде) заносим в $(n \times p^{(l)})$-матрицу $G^{(l)}$ и в самую верхнюю строку столбчатой диаграммы (см. диагр. 25.1 в прил. 3).

$4_l \to 4_{l-1}$. *Расчет предпоследнего этажа.*

4_{l-1}.1. Если $q^{(l-1)} = 0$ (нет ступеньки на предпоследнем уровне), то базис в $C^{(l-1)}$ составят образы векторов верхнего (последнего) этажа при действии оператора φ. Для их определения умножаем матрицу $G^{(l)}$ слева на матрицу A и получаем матрицу

$$\underset{n\times p^{(l-1)}}{G^{(l-1)}} = \underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times p^{(l)}}{G^{(l)}}, \tag{25.29a}$$

содержащую искомый (обработанный) базис в $C^{(l-1)}$.

4_{l-1}.2. Если $q^{(l-1)} > 0$ (есть ступенька на предпоследнем уровне), то $C^{(l-1)}$ не исчерпывается образом $\varphi(C^{(l)})$ и надо искать (с помощью алгоритма 10.4) базис в каком-либо прямом дополнении $D^{(l-1)}$ к этому образу. С этой целью составляется "трехзонная" конкатенация:

$$M^{(l-1)} = \left(\underset{n\times d^{(l-2)}}{F^{(l-2)}} \;\middle|\; \underset{n\times p^{(l)}}{A\cdot G^{(l)}} \;\middle|\; \underset{n\times d^{(l-1)}}{F^{(l-1)}} \right). \tag{25.30}$$

Матрица (23.30) приводится к ступенчатому виду; определяются номера "проходящих через ступеньки" векторов из третьей зоны; эти векторы (в их исходном виде) заносятся в матрицу $H^{(l-1)}$ размера $n \times q^{(l-1)}$; она будет содержать базис в искомом прямом дополнении $D^{(l-1)}$. Базис в $C^{(l-1)}$ фиксируем в матрице

$$\underset{n\times p^{(l-1)}}{G^{(l-1)}} = \left(\underset{n\times p^{(l)}}{A\cdot G^{(l)}} \;\middle|\; \underset{n\times q^{(l-1)}}{H^{(l-1)}} \right). \tag{25.29b}$$

Заметим, что при организации машинного счета приходится формировать матрицу $H^{(l-1)}$ и в том случае, когда $D^{(l-1)} = O$; естественно, она полагается *пустой* (ее размер считается равным $n \times 0$).

Векторы-столбцы из матрицы (25.29a) [или (25.29b)] заносятся в $(l-1)$-ю строку столбчатой диаграммы.

$4_k \to 4_{k-1}$. *Расчет промежуточных этажей* $(3 \leqslant k \leqslant l-1)$ осуществляется совершенно аналогично расчету предпоследнего этажа.

Имея $(n \times p^{(k)})$-матрицу $G^{(k)}$, содержащую базис в $C^{(k)}$, мы находим $(n \times p^{(k-1)})$-матрицу $G^{(k-1)}$, содержащую базис в $C^{(k-1)}$, как конкатенацию

$$\underset{n\times p^{(k-1)}}{G^{(k-1)}} = \left(\underset{n\times p^{(k)}}{A \cdot G^{(k)}} \;\middle|\; \underset{n\times q^{(k-1)}}{H^{(k-1)}} \right), \tag{25.31}$$

в которой правую зону занимает матрица $H^{(k-1)}$, являющаяся подматрицей в $F^{(k-1)}$ и содержащая базис в подпространстве $D^{(k-1)}$, таком, что

$$C^{(k-1)} = \varphi(C^{(k)}) \oplus D^{(k-1)}. \tag{25.32}$$

Для отыскания $H^{(k-1)}$ составляется и приводится к ступенчатому виду матрица

$$M^{(k-1)} = \left(\underset{n\times d^{(k-2)}}{F^{(k-2)}} \;\middle|\; \underset{n\times p^{(k)}}{A \cdot G^{(k)}} \;\middle|\; \underset{n\times d^{(k-1)}}{F^{(k-1)}} \right); \tag{25.33}$$

затем по ступенькам (в третьей зоне) определяются векторы из матрицы $F^{(k-1)}$, составляющие $H^{(k-1)}$.

В случае $q^{(k-1)} = 0$ эта матрица оказывается пустой.

$4_2 \to 4_1$. *Расчет первого этажа* несколько проще предыдущих этапов, вследствие тривиальности нулевого ядра. Изложенную выше общую схему можно сохранить, если считать матрицу $F^{(0)}$ пустой. Тогда конкатенация (25.33) приобретает вид:

$$M^{(1)} = \left(\underset{n\times p^{(2)}}{A \cdot G^{(2)}} \;\middle|\; \underset{n\times d^{(1)}}{F^{(1)}} \right); \tag{25.34}$$

добавочные векторы находятся по ступенькам во второй зоне этой матрицы (после ее приведения по Гауссу) и составляют $(n \times q^{(1)})$-матрицу $H^{(1)}$. Формула (25.31) для завершающего этапа выглядит следующим образом:

$$\underset{n\times p^{(1)}}{G^{(1)}} = \left(\underset{n\times p^{(2)}}{A \cdot G^{(2)}} \;\middle|\; \underset{n\times q^{(1)}}{H^{(1)}} \right). \tag{25.35}$$

Векторы-столбцы этой матрицы заносятся в первую строку столбчатой диаграммы, после чего ее заполнение завершается.

5. *Перенумерация векторов в столбчатой диаграмме.* Все $d^{(l)}$ векторов, составляющих столбчатую диаграмму, следует перенумеровать в соответствии с правилом: столбцы диаграммы нумеруются слева направо, векторы в столбцах — снизу вверх. Именно в таком порядке они заносятся в матрицу

$$\underset{n\times m}{G_0} = (\overline{g_1} \,|\, \overline{g_2} \,|\, \dots \,|\, \overline{g_m})\,. \tag{25.36}$$

Результатом работы алгоритма считаются две матрицы: матрица $\underset{n\times m}{G_0}$, содержащая жорданов базис в стабильном ядре л.э., и квадратная матрица $\underset{m\times m}{J_0}$, отвечающая в этом базисе сужению данного эндоморфизма на его стабильное ядро.

Замечание 25.3. Если данный л.э. нильпотентен, то алгоритм 25.1 автоматически приводит к построению жорданова базиса *во всем пространстве*. (В самом деле, в силу предложения 23.4, стабильное ядро для нильпотентного эндоморфизма совпадает со всем пространством.)

Замечание 25.4. Описанный выше алгоритм достаточно сложен, но не он представляет для нас практический интерес. Поэтому лишь после изучения БТЖ (большой теоремы Жордана; см. п. 27.2) и алгоритма 28.1 построения жорданова базиса во всем пространстве для *произвольного* л.э. будут приведены вычислительные примеры.

(Работа алгоритма 28.1 будет содержать неоднократные обращения к алгоритму 25.1, причем именно они являются наиболее трудоемкими в вычислительном отношении этапами.)

§ 26. Корневые подпространства для линейного эндоморфизма

26.1. Корневые подпространства и корневые векторы. Пусть V — линейное пространство размерности n над полем P, φ — л.э., действующий в пространстве V, $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ — его спектр (предполагаемый непустым).

Для каждого собственного значения $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$ $(i = 1, \dots, s)$ рассматривается л.э.

$$\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon. \tag{26.1}$$

В §§ 16 — 19 определялись и изучались *собственные подпространства* для л.э. φ, т. е. ядра операторов вида (26.1):

$$W_i = S_{\lambda_i}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\psi_i);\ i = 1, \dots, s. \tag{26.2}$$

Их исследование давало ценную (но не исчерпывающую) информацию о свойствах данного эндоморфизма. Благодаря §§ 23 — 25 мы готовы к использованию не только первого, но и последующих (вплоть до стабильного) итерированных ядер для эндоморфизмов ψ_i, рассчитанному на получение более глубокой и полной информации об эндоморфизме φ.

Для каждого из эндоморфизмов ψ_i $(i = 1, \dots, s)$ рассмотрим последовательность итерированных ядер

$$N_i^{(k)} = \operatorname{Ker}(\psi_i^k);\ k = 1, \dots, l_i, \tag{26.3}$$

где l_i — показатель стабилизации для ψ_i.

Обратите внимание на принцип нумерации ядер: нижний номер i — это номер собственного значения, а верхний номер k (в скобках) — это номер итерированного ядра (для оператора ψ_i). В правой части равенства (26.3) k фигурирует без скобок, поскольку здесь это не номер, а степень оператора ψ_i.

Определение 26.1. *Корневым подпространством* для л.э. φ, отвечающим собственному значению $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$, называется стабильное ядро л.э. (26.1):

$$U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi) = N_i^{(l_i)} = \operatorname{Ker}(\psi_i^{l_i});\ i = 1, \dots, s. \tag{26.4}$$

Ненулевые элементы корневого подпространства (26.4) называются *корневыми векторами* для л.э. φ, отвечающими собственному значению λ_i.

Замечание 26.1. Поясним различные *стили и уровни обозначений*, используемые как в уже знакомой формуле (26.2), так и в новой формуле (26.4).

Самые лаконичные обозначения, W_i (собственное подпространство) и U_i (корневое подпространство), ничего не говорят об обозначаемых объектах и используются исключительно из соображений краткости.

В более пространных обозначениях тех же объектов, $S_{\lambda_i}(\varphi)$ и $Q_{\lambda_i}(\varphi)$, указывается, какому оператору и какому собственному значению эти подпространства отвечают.

Далее в формуле (26.4) раскрывается определение корневого подпространства как ядра $N_i^{(l_i)}$, номер которого равен показателю стабилизации l_i, т. е. как стабильного ядра оператора ψ_i.

Формулу (26.2) также можно дополнить в аналогичном стиле. Собственное подпространство представляется как первое из итерированных ядер: $S_{\lambda_i}(\varphi) = N_i^{(1)}$.

Разумеется, собственное подпространство содержится в корневом; если $l_i = 1$, то они совпадают. Собственные векторы являются частным случаем корневых векторов.

26.2. Инвариантность корневых подпространств. В данном пункте устанавливается инвариантность корневых подпространств U_i $(i = 1, \dots, s)$ как относительно исходного л.э. φ, так и относительно всех л.э. ψ_j $(j = 1, \dots, s)$, и, кроме того, характеризуются сужения указанных эндоморфизмов на корневые подпространства.

Предложение 26.1. *Пусть л.э. φ действует в n-мерном линейном пространстве V и имеет непустой спектр $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$. Рассмотрим корневые подпространства (26.4) для этого эндоморфизма. Тогда*

1) каждое из U_i является инвариантным относительно соответствующего эндоморфизма ψ_i, причем сужение

$$\psi_i' = \psi_i\big|_{U_i} \tag{26.5}$$

является нильпотентным л.э., с показателем нильпотентности, равным показателю стабилизации l_i;

2) каждое из U_i является φ-инвариантным, причем сужение

$$\varphi_i' = \varphi\big|_{U_i} \tag{26.6}$$

представляется в виде суммы скалярного и нильпотентного эндоморфизмов, а именно:

$$\varphi_i' = \lambda_i \varepsilon_i + \psi_i', \tag{26.7}$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon_{U_i}$;

3) каждое из U_i является инвариантным относительно любого из эндоморфзимов ψ_j с номерами $j \neq i$, причем сужение $\psi_j\big|_{U_i}$ является обратимым л.э.

Доказательство. 1. Согласно предложению 23.1, все итерированные ядра, включая стабильное, инвариантны относительно "своего" оператора (по которому они строятся). Корневое подпространство U_i является стабильным ядром для оператора ψ_i, и поэтому ψ_i-инвариантно.

Далее, по предложению 23.3, сужение л.э. на свое стабильное ядро является нильпотентным л.э., с показателем нильпотентности, равным показателю стабилизации. Значит, эндоморфизм (26.5) нильпотентен с показателем l_i.

2. Как известно, любое подпространство инвариантно относительно скалярного л.э. Эндоморфизмы φ и ψ_i связаны соотношением (26.1), т. е. отличаются на скалярный эндоморфизм. Следовательно, ψ_i-инвариантность подпространства U_i влечет его φ-инвариантность.

Если соотношение (26.1) сузить на U_i, то получится соотношение $\psi_i' = \varphi_i' - \lambda_i\varepsilon_i$, из которого вытекает формула (26.7), являющаяся представлением оператора φ_i в виде "скалярный плюс нильпотентный".

3. То же рассуждение, что и в предыдущем пункте, приводит к выводу о ψ_j-инвариантности подпространства U_i не только при $j = i$ (это уже установлено), но и при любом $j \neq i$.

Для доказательства обратимости сужения $\psi_j\big|_{U_i}$ достаточно (в силу предложения 15.2) убедиться в независимости подпространства U_i и ядра $\operatorname{Ker}(\psi_j)$, т. е. доказать тривиальность пересечения:

$$U_i \cap \operatorname{Ker}(\psi_j) = O. \tag{26.8}$$

Пусть x — ненулевой элемент подпространства $\operatorname{Ker}(\psi_j)$, т. е. собственный вектор для л.э. φ, отвечающий собственному значению λ_j. Имеем равенство $\varphi(x) = \lambda_j x$, из которого, очевидно, следует

$$\psi_i(x) = (\varphi - \lambda_i\varepsilon)(x) = \varphi(x) - \lambda_i x = \lambda_j x - \lambda_i x = (\lambda_j - \lambda_i)x.$$

Результат этого вычисления можно итерировать. На втором шаге получается:

$$\psi_i^2(x) = \psi_i((\lambda_j - \lambda_i)x) = (\lambda_j - \lambda_i)\psi_i(x) = (\lambda_j - \lambda_i)^2 x.$$

С помощью очевидной индукции приходим к общей формуле:

$$\psi_i^k(x) = (\lambda_j - \lambda_i)^k x;\ k = 1, 2, \ldots \tag{26.9}$$

При любом натуральном k правая часть (26.9) является ненулевым вектором (т. к. $x \neq 0$ и $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$). Значит, вектор x не принадлежит никакому из итерированных ядер для оператора ψ_i, в том числе — и стабильному ядру U_i. Условие (26.8) доказано. □

26.3.* Композиция многочленов. Сдвиг аргумента у многочлена. Настоящий пункт является вспомогательным и относится к теории многочленов. Он найдет свое применение в следующем пункте, при вычислении размерности корневого пространства. Если ваши интересы (или уровень подготовки) позволяют вам ограничиться линейной алгеброй над бесконечными (например, числовыми) полями, то смело можно переходить п. 26.4. (Хотя "пробежать глазами" данный пукт, чтобы вспомнить некоторые определения, будет, разумеется, не вредно.)

В пособии [A_1] (см. п. 48.5) вводилось (причем сразу для случая многочленов от нескольких переменных) понятие *композиции* двух многочленов. Здесь мы более детально рассмотрим это понятие применительно к многочленам от одной переменной.

Рассмотрим два многочлена (с коэффициентами из поля P):

$$f(\lambda) = f_0 + f_1\lambda + f_2\lambda^2 + ... + f_n\lambda^n;\ f_n \neq 0 \tag{26.10}$$

и

$$p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + ... + p_l\lambda^l;\ p_l \neq 0. \tag{26.11}$$

Композиция $F = f \circ p$ этих многочленов определяется как *подстановка второго многочлена в первый*, вместо переменной λ:

$$F(\lambda) = f_0 + f_1 p(\lambda) + f_2(p(\lambda))^2 + ... + f_n(p(\lambda))^n, \tag{26.12}$$

с последующим раскрытием скобок и приведением подобных членов. Новый многочлен (26.12) будет иметь степень, равную произведению nl, а его старший коэффициент будет равняться $f_n(p_l)^n$.

Здесь нас будет интересовать так называемый *правый дистрибутивный закон для композиции, относительно умножения*, выражаемый следующей формулой:

$$(f \cdot g) \circ p = (f \circ p) \cdot (g \circ p), \tag{26.13}$$

где, кроме уже представленных выше многочленов f, p и их композиции F, фигурируют:

— многочлен

$$g(\lambda) = g_0 + g_1\lambda + g_2\lambda^2 + ... + g_m\lambda^m;\ g_m \neq 0, \tag{26.14}$$

— многочлен-произведение $h = f \cdot g$:

$$h(\lambda) = h_0 + h_1\lambda + ... + h_{n+m}\lambda^{n+m};\ h_s = \sum_{\substack{i,j\geqslant 0\\ i+j=s}} f_i g_j, \tag{26.15}$$

— многочлены-композиции $G = g \circ p$ и $H = h \circ p$, определяемые формулами, аналогичными (26.12).

В указанных выше обозначениях закон (26.13) принимает вид:

$$H = F \cdot G. \tag{26.13'}$$

Его справедливость практически очевидна "на уровне функций" (даже не обязательно полиномиальных):

$$\begin{aligned} H(\lambda) = (h \circ p)(\lambda) = h(p(\lambda)) = (f \cdot g)(p(\lambda)) = \\ = f(p(\lambda)) \cdot g(p(\lambda)) = (f \circ p)(\lambda) \cdot (g \circ p)(\lambda) = \\ = F(\lambda) \cdot G(\lambda) = (F \cdot G)(\lambda). \end{aligned} \tag{26.16}$$

Однако многочлены — это "больше, чем функции". Функциональная точка зрения на многочлены адекватна лишь над бесконеными полями. (Еще раз приходится отсылать читателей к § 39 пособия $[A_1]$. Для алгебраистов случай конечного поля коэффициентов является не менее существенным и интересным, нежели случай бесконечного поля.)

Чтобы доказать закон (26.13) "на уровне многочленов" надо реализовать следующий план:

1) проверить равенство (26.13') для одночленов $f(\lambda) = f_i\lambda^i$, $g(\lambda) = g_j\lambda^j$ и $p(\lambda) = p_k\lambda^k$;

2) убедиться в том, что если равенство (26.13) справедливо для одночленов $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ (таких, как выше) и для каждого из двух многочленов, $p_1(\lambda)$ и $p_2(\lambda)$, то оно останется справедливым для $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ и $p(\lambda) = p_1(\lambda) + p_2(\lambda)$; после этого можно будет сделать вывод о справедливости (26.13) для произвольных одночленов f и g и произвольного многочлена p;

3) провести аналогичное рассуждение применительно к g: если закон справедлив для одночлена f, двух многочленов, g_1 и g_2, и

многочлена p, то он остается справедливым для f, $g = g_1 + g_2$ и p, а значит, он выполняется для любого одночлена f и любых многочленов g и p;

4) провести аналогичное рассуждение применительно к f и добиться тем самым полной произвольности всех трех участвующих многочленов.

Как видите, план, хотя и кропотлив, и трудоемок, но — ясен. Разумеется, здесь не очень уместна его подробная реализация. Важно понять, чем отличается "техника многочленов" от "техники функций". Тем не менее, первый пункт плана мы раскроем:

$$f(\lambda) = f_i\lambda^i; \qquad g(\lambda) = g_j\lambda^j; \qquad h(\lambda) = f_ig_j\lambda^{i+j};$$

$$F(\lambda) = (f_ip_k^i)\lambda^{ki}; \qquad G(\lambda) = (g_jp_k^j)\lambda^{kj}; \qquad H(\lambda) = (f_ig_jp_k^{i+j})\lambda^{k(i+j)};$$

равенство (26.13′) справедливо.

Частным случаем композиции многочленов (именно он нам понадобится в дальнейшем) является *сдвиг аргумента* у многочлена:

$$F(\lambda) = f(\lambda + \lambda_0);\ \lambda_0 \in P; \tag{26.17}$$

он получается при $p(\lambda) = \lambda + \lambda_0$.

Согласно общему закону (26.13), сдвиг для произведения многочленов равен произведению сдвигов.

Имеют место некоторые специфические свойства *сдвинутых* многочленов:

1) элемент $\lambda_1 \in P$ является корнем исходного многочлена $f(\lambda)$ тогда и только тогда, когда элемент $\lambda_1 - \lambda_0$ является корнем сдвинутого многочлена (26.17);

2) исходный многочлен $f(\lambda)$ не имеет корней в поле P тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает $F(\lambda)$.

26.4. Размерность корневого подпространства. Вернемся к изучению спектральной теории для л.э. Следующим нашим шагом в исследовании корневых подпространств будет доказательство того, что размерность подпространства $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$, отвечающего собственному значению λ_i, равняется алгебраической кратности m_i этого собственного значения.

Данный факт будет следовать из ранее полученного частного результата — предложения 25.1, относящегося к случаю нулевого собственного значения. Сведение общего случая к частному опирается на полученные в предыдущем пункте свойства сдвинутых (по аргументу) многочленов.

Рассмотрим характеристический многочлен для л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$:

$$h_\varphi(\lambda) = h_A(\lambda) = \det(\lambda E - A), \tag{26.18}$$

где A — матрица, отвечающая φ в каком-либо базисе $\mathcal{B}$ пространства V. Разложим многочлен (26.18) на множители, по типу (17.31):

$$h_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}...(\lambda - \lambda_s)^{m_s} g(\lambda), \tag{26.19}$$

где λ_i, m_i — собственные значения и соответствующие алгебраические кратности ($i = 1, \dots, s$), а многочлен $g(\lambda)$ не имеет корней в поле P.

Выберем одно из собственных значений (скажем, λ_1) и рассмотрим соответствующий л.э. [вида (26.1)]: $\psi_1 = \varphi - \lambda_1\varepsilon$. В том же базисе $\mathcal{B}$ этому эндоморфизму будет отвечать матрица $B_1 = A - \lambda_1 E$.

Вычислим характеристический многочлен для оператора ψ_1:

$$\begin{aligned} h_{\psi_1}(\lambda) = h_{B_1}(\lambda) &= \det(\lambda E - B_1) = \\ &= \det(\lambda E - (A - \lambda_1 E)) = \det((\lambda + \lambda_1)E - A) = h_\varphi(\lambda + \lambda_1), \end{aligned}$$

или, окончательно:

$$h_{\psi_1}(\lambda) = h_\varphi(\lambda + \lambda_1). \tag{26.20}$$

Замечаем, что характеристический многочлен для ψ_1 получается из характеристического многочлена для φ сдвигом по аргументу (на λ_1).

В силу свойств, установленных в конце п. 26.3, операция сдвига многочленов согласована с их умножением. Стало быть, разложение на множители (26.19) для $h_\varphi(\lambda)$ приводит к аналогичному разложению

$$h_{\psi_1}(\lambda) = \lambda^{m_1}(\lambda - (\lambda_2 - \lambda_1))^{m_2} \dots (\lambda - (\lambda_s - \lambda_1))^{m_s} g(\lambda + \lambda_1), \tag{26.21}$$

причем сдвинутый многочлен $g(\lambda+\lambda_1)$, как и исходный $g(\lambda)$, не имеет корней в P.

Выходит, что *сдвиг оператора* φ (т. е. добавка скалярного оператора $-\lambda_1\varepsilon$) привел к *сдвигу по аргументу* (на λ_1) для характеристического многочлена и, затем, — к *сдвигу спектра* (на $-\lambda_1$):

$$\sigma(\psi_1) = \{\, 0,\ \lambda_2 - \lambda_1,\ \dots,\ \lambda_s - \lambda_1 \,\}, \tag{26.22}$$

с сохранением алгебраических кратностей ($m_1, m_2, \dots, m_s$ соответственно).

В частности, первое собственное значение для ψ_1 оказывается равным нулю, и его алгебраическая кратность равна алгебраической кратности собственного значения λ_1 для φ.

Разумеется, нумерация собственных значений не играет принципиальной роли и утверждения, аналогичные установленным выше, справедливы для всех эндоморфизмов ψ_i ($i = 1, \dots, s$).

Теперь мы готовы к тому, чтобы сформулировать основной результат пункта.

Предложение 26.2. *Размерность корневого подпространства $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$, отвечающего собственному значению $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$, равна алгебраической кратности этого собственного значения:*

$$\dim(Q_{\lambda_i}(\varphi)) = m_i;\ \ i = 1, \dots, s. \tag{26.23}$$

Доказательство. Корневое подпространство U_i определялось (в п. 26.1) как стабильное ядро для л.э. ψ_i. Согласно предложению 25.1, размерность стабильного ядра равна алгебраической кратности нулевого собственного значения. Но проведенный перед формулировкой предложения анализ показал, что алгебраическая кратность для элемента $0 \in \sigma(\psi_i)$ совпадает с алгебраической кратностью m_i для элемента $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$. □

Зная размерность корневого пространства, мы можем теперь вычислить характеристический многочлен для сужения φ_i' [см. (26.6)] данного л.э. φ на подпространство U_i.

Предложение 26.3. *Характеристический многочлен для сужения $\varphi_i' = \varphi\big|_{U_i}$ определяется формулой*

$$h_{\varphi_i'}(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_i}, \tag{26.24}$$

где m_i — алгебраическая кратность собственного значения λ_i.

Доказательство. По предложению 26.1, л.э. (26.6) представляется в виде [см. (26.7)]: $\varphi_i' = \lambda_i\varepsilon_i + \psi_i'$, с нильпотентным слагаемым ψ_i', для которого вид характеристического многочлена определяется предложением 25.2 (в показателе фигурирует размерность того пространства, на котором рассматривается нильпотентный эндоморфизм; в данном случае — размерность U_i):

$$h_{\psi_i'}(\lambda) = \lambda^{m_i}. \tag{26.25}$$

Произведя пересчет по типу (26.20), будем иметь:

$$h_{\varphi'_i}(\lambda + \lambda_i) = \lambda^{m_i}. \tag{26.26}$$

Делая в (26.26) *обратный сдвиг* по аргументу (т. е. заменяя переменную λ на $\lambda - \lambda_i$), мы приходим к (26.24). $\square$

26.5. Жорданов базис в корневом подпространстве л.э. В теореме 25.1 (МТЖ) утверждалось, что в стабильном ядре (необратимого) л.э. φ существует жорданов базис, в котором эндоморфизму φ соответствует блочно-диагональная матрица с н.ж.я. вида $\boxed{J_k(0)}$ на диагонали. Поскольку каждое из корневых подпространств $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ является стабильным ядром для линейного эндоморфизма ψ_i, то в нем существует жорданов базис для этого ("своего") эндоморфизма.

Следующая теорема утверждает, что указанный жорданов базис для ψ_i является жордановым и для исходного ("общего для всех") эндоморфизма φ. Только ящики уже будут иметь вид $\boxed{J_k(\lambda_i)}$.

Теорема 26.1. *Пусть φ — л.э., действующий в n-мерном линейном пространстве V, λ_i — собственное значение для φ, которое имеет алгебраическую кратность m_i и которому отвечает корневое подпространство $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$, являющееся стабильным (с показателем стабилизации l_i) ядром для л.э. $\psi_i = \varphi - \lambda_i\varepsilon$.*

Определим последовательности

— итерированных дефектов

$$d_i^{(k)} = \mathrm{dfc}(\psi_i^k);\ k = 1, \dots l_i; \tag{26.27}$$

— приращений итерированных дефектов

$$p_i^{(1)} = d^{(1)};\ p_i^{(k)} = d_i^{(k)} - d_i^{(k-1)}\ (k = 2, \dots, l_i); \tag{26.28}$$

— абсолютных вторых приращений итерированных дефектов

$$q_i^{(k)} = p_i^{(k)} - p_i^{(k+1)}\ (k = 1, \dots, l_i - 1);\ q_i^{(l_i)} = p_i^{(l_i)}. \tag{26.29}$$

Тогда

1) в подпространстве U_i существует базис, организованный в столбчатую диаграмму $\mathcal{D}_i$ (см. диагр. 26.1 в прил. 3);

2) этот базис является жордановым для л.э. φ;

3) эндоморфизму $\varphi'_i = \varphi\big|_{U_i}$ отвечает в нем блочно-диагональная $(m_i \times m_i)$-матрица J_i с жордановыми ящиками вида $\boxed{J_k(\lambda_i)}$ на диагонали (см. диагр. 26.2 в прил. 3);

4) общее количество ж.я. в матрице J_i равняется первому дефекту $d_i^{(1)} = \operatorname{dfc}(\psi_i)$ (или, что то же, геометрической кратности n_i собственного значения λ_i); размеры ящиков заключены в пределах от 1 до l_i, причем имеется $q_i^{(k)}$ ящиков размера $k \times k$.

Доказательство. Согласно МТЖ, в подпространстве U_i существует жорданов базис для л.э. ψ_i. Этот базис будет организован в столбчатую диаграмму вида 25.1 (см. прил. 3).

На диаграмме 26.1 (в том же приложении) произведены необходимые переобозначения, соответствующие рассматриваемому случаю; в частности стрелки в $\mathcal{D}_i$ соответствуют не φ, но ψ_i. Общее количество ячеек в диаграмме равно размерности подпространства U_i, т. е. алгебраической кратности m_i собственного значения λ_i. Общее количество столбцов равно первому итерированному дефекту $d_i^{(1)}$ для л.э. ψ_i, т. е. размерности ядра $\operatorname{Ker}(\psi_i)$. Для этой характеристики имеются другой термин и другое обозначение — геометрическая кратность n_i собственного значения λ_i.

В жордановом базисе суженному эндоморфизму ψ'_i будет соответствовать блочно-диагональная матрица B'_i, типа представленной на диагр. 25.2. Размеры ящиков описываются тем же правилом, но теперь все характеристики (дефекты, их первые и вторые приращения) имееют двойную индексацию: снизу — номер собственного значения, сверху (в скобках) — номер итерации.

В силу соотношения (26.7) между сужениями ψ'_i и φ'_i, имеется аналогичное соотношение между их матрицами:

$$A'_i = \lambda_i E_i + B'_i, \tag{26.30}$$

где все участвующие матрицы (в том числе и единичная E_i) имеют размеры $m_i \times m_i$.

Таким образом, для получения матрицы A'_i надо к матрице B'_i, представленной на диагр. 25.2, добавить скалярную матрицу с элементами λ_i на диагонали. Все жордановы ящики, которые были в матрице B'_i нильпотентными, превратятся в матрице A'_i в ящики вида $\boxed{J_k(\lambda_i)}$. В связи с этим мы произведем переобозначение: $A'_i = J_i$. Соответствующие изменения отражены на диагр. 26.2 (в прил. 3).

Приходим к выводу, что представленный столбчатой диаграммой $\mathcal{D}_i$ базис в корневом подпространстве U_i является жордановым базисом для л.э. φ и что сужению φ на U_i отвечает матрица J_i, вид которой определяется сформулированными в теореме правилами. □

26.6. Алгоритм построения жорданова базиса в корневом подпространстве. Кратко описываемый ниже алгоритм не является новым. Предыдущий алгоритм 25.1 реализуется применительно к вспомогательному эндоморфизму $\psi_i = \varphi - \lambda_i\varepsilon$, где λ_i — одно из собственных значений для л.э. φ, имеющее алгебраическую кратность m_i. Стабильным ядром эндоморфизма ψ_i является корневое подпространство $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$. В подпространстве U_i строится жорданов базис для ψ_i; он же будет жордановым для φ. На завершающем этапе формируется блочно-диагональная $(m_i \times m_i)$-матрица, отвечающая в найденном базисе сужению φ на U_i.

А л г о р и т м 26. 1.
Построение жорданова базиса $\mathcal{G}_i$ для л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ в корневом подпространстве $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ и вычисление матрицы, отвечающей в этом базисе сужению $\varphi\big|_{U_i}$

1. В n-мерном линейном пространстве V (над полем P) фиксируется базис $\mathcal{B}$, в котором оператору φ соответствует $(n\times n)$-матрица A. Считается уже известным некоторое собственное значение $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$. Рассматривается л.э. $\psi_i = \varphi - \lambda_i\varepsilon$, заданный в базисе $\mathcal{B}$ матрицей

$$B_i = A - \lambda_i E.$$

2. *Построение необработанных базисов в итерированных ядрах.*
Решая однородные с.л.у. $B_i^k\overline{x} = \overline{0}$, находим базисы и размерности для итерированных ядер

$$N_i^{(k)} = \operatorname{Ker}(\psi_i^k) = L^0_{B_i^k}. \tag{26.31}$$

Размерности (итерированные дефекты) обозначаются $d_i^{(k)}$; первый из них совпадает с геометрической кратностью собственного значения λ_i: $d_i^{(1)} = n_i$.

Базисы накапливаются в $(n \times d_i^{(k)})$-матрицах $F_i^{(k)}$. Так продолжается до достижения стабилизации, сигналом о чем служит равенство

очередного дефекта и алгебраической кратности m_i; соответствующее значение k обозначается l_i; оно является показателем стабилизации для ψ_i.

3. *Формирование* $(m_i \times m_i)$*-матрицы* J_i, отвечающей сужению φ_i' л.э. φ на корневое подпространство $U_i = N_i^{(l_i)}$.

Вычисляем первые и абсолютные вторые приращения итерированных дефектов по формулам (26.28) и (26.29) и строим столбчатую диаграмму $\mathcal{D}_i$ вида 26.1 (см. прил. 3): она должна содержать m_i ячеек, сгруппированных в l_i строк; на k-м этаже должно располагаться $p_i^{(k)}$ ячеек $(k = 1, \dots, l_i)$. В соответствующей матрице J_i должны присутствовать $q_i^{(k)}$ ж.я. вида $\boxed{J_k(\lambda_i)}$, которые располагаются по диагонали, в порядке убывания размеров: $k = l_i, \dots, 1$ (см. диагр. 26.2 в прил. 3).

4. *Обработка базисов в итерированных ядрах* (заполнение столбчатой диаграммы $\mathcal{D}_i$).

Верхняя строка $\mathcal{D}_i$ заполняется добавочными векторами, определяемыми после приведения к ступенчатому виду матрицы

$$M_i^{(l_i)} = \left(\begin{array}{c|c} F_i^{(l_i-1)} & F_i^{(l_i)} \\ {\scriptstyle n \times d_i^{(l_i-1)}} & {\scriptstyle n \times d_i^{(l_i)}} \end{array} \right); \tag{26.32}$$

эти векторы будут составлять базис в некотором прямом дополнении $C_i^{(l_i)}$ к предстабильному ядру в стабильном; они заносятся в $(n \times p_i^{(l_i)})$-матрицу $G_i^{(l_i)}$.

Далее, опускаясь с k-го этажа на $(k-1)$-й $(k = l_i, \dots, 2)$ и уже имея заполненной $(n \times p_i^{(k)})$-матрицу $G_i^{(k)}$, содержащую базис в прямом дополнении $C_i^{(k)}$ к ядру $N_i^{(k-1)}$ в ядре $N_i^{(k)}$, мы составляем и приводим к ступенчатому виду "трехзонную" матрицу-конкатенацию

$$M_i^{(k-1)} = \left(\begin{array}{c|c|c} F_i^{(k-2)} & B_i \cdot G_i^{(k)} & F_i^{(k-1)} \\ {\scriptstyle n \times d_i^{(k-2)}} & {\scriptstyle n \times p_i^{(k)}} & {\scriptstyle n \times d_i^{(k-1)}} \end{array} \right); \tag{26.33}$$

затем по ступенькам (в третьей зоне) определяются и заносятся в $(n \times q_i^{(k-1)})$-матрицу $H_i^{(k-1)}$ те векторы из матрицы $F_i^{(k-1)}$, которые составляют базис в некотором прямом дополнении $D_i^{(k-1)}$ к образу $\psi_i(C_i^{(k)})$ в подпространстве $C_i^{(k-1)}$.

Матрица $G_i^{(k-1)}$, содержащая базис в $C_i^{(k-1)}$, находится по формуле

$$\underset{n\times p_i^{(k-1)}}{G_i^{(k-1)}} = \left(\underset{n\times p_i^{(k)}}{B_i \cdot G_i^{(k)}} \;\middle|\; \underset{n\times q_i^{(k-1)}}{H_i^{(k-1)}} \right). \tag{26.34}$$

Если $q_i^{(k-1)} = 0$, то третья зона в матрице (26.33) и вторая зона в матрице (26.34) оказываются пустыми. При $k = 1$ оказывается пустой первая зона в матрице (26.33).

5. *Перенумерация векторов в столбчатой диаграмме.* Все m_i векторов, составляющих столбчатую диаграмму $\mathcal{D}_i$, следует перенумеровать по принципу "столбцы диаграммы — слева направо, векторы в столбцах — снизу вверх" и в таком порядке занести их в матрицу

$$\underset{n\times m_i}{G_i} = (\overline{g_1} \,|\, \overline{g_2} \,|\, \ldots \,|\, \overline{g_{m_i}}). \tag{26.35}$$

На выход выдаются: $(n \times m_i)$-матрица G_i, содержащая жорданов базис $\mathcal{G}_i$ для л.э. φ в корневом пространстве U_i и квадратная $(m_i \times m_i)$-матрица J_i, отвечающая в этом базисе сужению φ_i'.

§ 27. Корневая сумма. Большая теорема Жордана

27.1. Независимость в совокупности корневых подпространств для л.э. Содержание данного пункта перекликается с содержанием § 19. Свойства, аналогичные тем, что в пп. 19.2 и 19.3 были установлены применительно к *собственным подпространствам*, здесь будут доказаны для *корневых подпространств*. В частности, мы получим аналоги предложения 19.3 и теоремы 19.1. (Это будут предложение 27.1 и теорема 27.2.)

Предложение 27.1. *Конечная система*

$$\mathcal{A} = [\, a_1, a_2, \ldots, a_k \,], \tag{27.1}$$

составленная из корневых векторов a_i $(i = 1, \ldots, k)$ для линейного эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, отвечающих попарно различным собственным значениям $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$ $(i = 1, \ldots, k)$, линейно независима.

Доказательство (как и в случае системы собственных векторов) проводится индукцией по k.

Для $k = 1$ утверждение выполняется, поскольку любой корневой вектор (так же, как и любой собственный вектор) является, по определению, ненулевым.

Предположим теперь, что утверждение предложения справедливо для любой с.в., содержащей k корневых векторов, отвечающих k попарно различным собственным значениям, и докажем его для произвольной системы

$$\mathcal{A}' = [\, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1} \,];\ a_i \in S_{\lambda_i}(\varphi), \tag{27.2}$$

из $k+1$ корневого вектора, где снова все собственные значения $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$ $(i = 1, \dots, k+1)$ попарно различны.

Предположим, что система (27.2) линейно зависима, и учтем тот факт, что ее подсистема $\mathcal{A}$, составленная из первых k векторов и имеющая вид (27.1), будет, в силу предположения индукции, линейно независимой.

Из этого, при посредстве предложения 3.1, следует, что вектор a_{k+1}, последний из входящих в $\mathcal{A}'$, линейно выражается через $\mathcal{A}$, т. е. найдутся скаляры $\mu_i \in P$ $(i = 1, \dots, k)$ такие, что

$$a_{k+1} = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k. \tag{27.3}$$

Три предыдущих абзаца были скопированы (с небольшой правкой) из текста доказательства предложения 19.3. Ниже начинает проявляться специфика корневых векторов, понятия более общего, нежели собственные векторы.

Каждый из векторов a_i $(i = 1, \dots, k+1)$ отвечает одному из попарно различных собственных значений λ_i, т. е. принадлежит стабильному ядру

$$U_i = N_i^{(l_i)} = \operatorname{Ker}(\psi_i^{l_i}), \tag{27.4}$$

где $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$.

Каждый из л.э. ψ_i имеет свой показатель стабилизации l_i, совпадающий (см. первое утверждение предложения 26.1) с показателем нильпотентности для сужения этого эндоморфизма на U_i; так что для любого i выполняется $\psi_i^{l_i}(a_i) = 0$. Все эти показатели не превышают "своих" размерностей $m_i = \dim(U_i)$ и, подавно, не превышают размерности n всего пространства V. Поэтому можно утверждать, что

$$\psi_i^n(a_i) = 0 \tag{27.5}$$

для любого $i = 1, \dots, k+1$.

Применим к обеим частям равенства (27.3) л.э. ψ_{k+1}^n :

$$\psi_{k+1}^n(a_{k+1}) = \mu_1\psi_{k+1}^n(a_1) + \mu_2\psi_{k+1}^n(a_2) + ... + \mu_k\psi_{k+1}^n(a_k). \quad (27.6)$$

В левой части это применение, в силу (27.5), даст нулевой вектор. Иначе будет обстоять дело в правой части: там оператор ψ_{k+1}^n действует на векторы a_i из "чужих" корневых подпространств U_i (с номерами $i = 1, ..., k$). Каждое из этих подпространств является инвариантным относительно ψ_{k+1}, причем как указанный оператор, так и все его натуральные степени обратимы на U_i (см. третье утверждение предложения 26.1). Следовательно, при любом $i = 1, ..., k$ вектор-образ

$$b_i = \psi_{k+1}^n(a_i) \quad (27.7)$$

снова принадлежит подпространству U_i и, к тому же, отличен от нуля (поскольку под действием обратимого оператора ненулевые векторы переходят в ненулевые). Значит, векторы (27.7) образуют систему

$$\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, ..., b_k \,] \quad (27.8)$$

из k корневых векторов, отвечающих тем же (попарно различным) собственным значениям λ_i. По предположению индукции, с.в. (27.8) линейно независима.

В то же время имеет место соотношение (27.6), которое в обозначениях (27.7) приобретает вид

$$0 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + ... + \mu_k b_k \quad (27.9)$$

и, ввиду линейной независимости (27.8), влечет обращение в нуль всех коэффициентов μ_i $(i = 1, ..., k)$.

Возвращаясь к (27.3), получаем $a_{k+1} = 0$, что противоречит определению корневого вектора. Убеждаемся в ошибочности предположения о линейной зависимости с.в. $\mathcal{A}'$.

Следовательно, эта система линейно независима; шаг индукции успешно завершен; предложение доказано. □

Перенос свойства собственных векторов, выраженного предложением 19.3, на корневые векторы потребовал, хотя и не очень серьезного, но все же — усложнения доказательства. А вот очередной шаг никаких дополнительных ухищрений не потребует.

Следующая теорема выводится из предложения 27.1 посредством рассуждений, идентичных тем, с помощью которых теорема 19.1 выводилась из предложения 19.3. [Разве что обозначения будут слегка

отличаться: вместо собственных подпространств $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$ будут фигурировать корневые подпространства $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$, вместо геометрических кратностей n_i собственных значений — алгебраические кратности m_i.]

Это позволяет: автору — опустить доказательство, читателям — получить удовольствие от несложного упражнения по его восстановлению. Но прежде теоремы подлежит переносу определение.

Определение 27.1. Корневой суммой для л.э. φ называется сумма всех его корневых подпространств. Используются обозначения:

$$U' = \sum_{i=1}^{s} U_i. \tag{27.10}$$

и

$$U' = Q(\varphi). \tag{27.11}$$

(В случае пустоты спектра корневая сумма считается нулевым подпространством.)

Теперь — собственно теорема, описывающая важнейшие свойства корневых подпространств для линейного эндоморфизма.

Теорема 27.1. *Пусть φ — л.э., действующий в конечномерном линейном пространстве V. Тогда*

1) корневые подпространства $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ $[i = 1, ..., s]$ независимы в совокупности;

2) корневая сумма является прямой:

$$Q(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^{s} Q_{\lambda_i}(\varphi); \tag{27.12}$$

3) в подпространстве $U' = Q(\varphi)$ можно выбрать базис вида

$$\mathcal{B}' = [\,\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_s\,], \tag{27.13}$$

где все $\mathcal{B}_i$ $(i = 1, ..., s)$ являются базисами в соответствующих корневых подпространствах U_i;

4) размерность подпространства (27.12) равняется сумме m' алгебраических кратностей всех собственных значений:

$$\dim(U') = m' = \sum_{i=1}^{s} m_i. \ \square \tag{27.14}$$

27.2. Жорданов базис в корневой сумме. Большая теорема Жордана. Корневая сумма (27.10), будучи суммой φ-инвариантных подпространств, сама является φ-инвариантным подпространством (см. замечание 19.1). Далее, согласно теореме 27.1, эта сумма является прямой, так что к ней применима методика построения базисов, приспособленных к прямому разложению, изложенная в п. 20.5. Все это делает практически очевидным следующий результат, занимающий центральное место во всей спектральной теории линейных эндоморфизмов.

Теорема 27.2 (большая теорема Жордана, БТЖ). *Пусть φ — линейный эндоморфизм, действующий в n-мерном линейном пространстве V (над полем P); $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ — его спектр (в поле P, предполагаемый непустым), m_i — алгебраические кратности собственных значений λ_i, $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ — соответствующие корневые подпространства ($i = 1, \dots, s$), m' — сумма всех алгебраических кратностей, $U' = Q(\varphi)$ — корневая сумма для л.э. φ.*

Тогда в подпространстве U' существует жорданов базис $\mathcal{G}'$ для φ, в котором сужению $\varphi' = \varphi\big|_{U'}$ отвечает квадратная $(m' \times m')$-матрица J', являющаяся блочно-диагональной и содержащая s "больших" диагональных $(m_i \times m_i)$-блоков J_i, отвечающих сужениям $\varphi'_i = \varphi\big|_{U'_i}$, каждый из которых, в свою очередь, имеет блочно-диагональную структуру, описываемую теоремой 26.1.

Доказательство. Следуя теореме 26.1, выберем в каждом из корневых подпространств U_i жорданов базис $\mathcal{G}_i$ и объединим эти базисы в с.в.

$$\mathcal{G}' = [\,\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_s\,], \tag{27.15}$$

которая будет базисом в прямой сумме (27.12), причем — жордановым для φ.

Действительно, согласно предложению 20.4, сужению $\varphi' = \varphi\big|_{U'}$ оператора φ на корневую сумму U' будет соответствовать в базисе (27.15) блочно-диагональная матрица J', вид которой представлен на диагр. 27.1 в прил. 3. В этой матрице каждый диагональный блок J_i (называемый "большим"), в свою очередь, имеет блочно-диагональный вид, показанный на диагр. 26.2, содержащий "средние" и "малые" диагональные блоки (последние суть жордановы ящики).

Условие $m' = n$ обеспечивает совпадение корневой суммы со всем пространством V и, тем самым, — существование во всем V жорданова базиса для φ. (В этом случае мы будем опускать в обозначениях

штрихи: жорданов базис во всем пространстве будем обозначать $\mathcal{G}$, а ж.н.ф. матрицы — просто J.) $\square$

Ниже формулируется критерий существования жорданова базиса во всем пространстве.

Предложение 27.2. *1. Жорданов базис для л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ существует во всем пространстве V тогда и только тогда, когда сумма алгебраических кратностей всех собственных значений для φ равняется размерности $n = \dim(V)$.*

2. Если поле P алгебраически замкнуто, то жорданов базис во всем пространстве существует для произвольного линейного эндоморфизма.

Доказательство. 1. В одну сторону первое утверждение предложения немедленно следует из теоремы 27.2: если $m' = n$, то $U' = V$ и базис $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$ является жордановым для φ во всем V.

Докажем обратное утверждение. Пусть в некотором базисе $\mathcal{G}$ пространства V эндоморфизму φ соответствует матрица

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_{k_t}(\lambda_t)} \end{pmatrix} \tag{27.16}$$

блочно-диагонального вида, с ж.я. $\boxed{J_{k_i}(\lambda_i)}$ $(i = 1, \dots, t)$ на диагонали (среди скаляров λ_i могут быть повторяющиеся). Переставляя, если потребуется, базисные векторы, можно добиться того, чтобы блоки с одинаковыми λ_i располагались подряд и в порядке убывания их размеров. Тогда для каждого из попарно различных λ_i (пусть это будут, скажем, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$; $s \leqslant t$) сформируется "большой" блок J_i, размер которого мы обозначим m_i.

Полученная матрица (мы сохраним за ней обозначение J) является верхней треугольной; на ее главной диагонали расположены скаляры

$$\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ раз}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2 \text{ раз}}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{m_s \text{ раз}},$$

причем $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$; на первой наддиагонали стоят (вообще говоря, не сплошь) единицы; все остальные элементы равны нулю.

Характеристический многочлен для данного л.э. может быть определен по его матрице относительно произвольного базиса. Вычислим его по описанной выше матрице J. Для этого рассмотрим характеристическую матрицу $\lambda E - J$. Она тоже является верхней треугольной; ее главная диагональ имеет вид

$$\underbrace{\lambda-\lambda_1,\dots,\lambda-\lambda_1}_{m_1\text{ раз}},\ \underbrace{\lambda-\lambda_2,\dots,\lambda-\lambda_2}_{m_2\text{ раз}},\ \dots,\ \underbrace{\lambda-\lambda_s,\dots,\lambda-\lambda_s}_{m_s\text{ раз}},$$

а на первой наддиагонали расположены (может быть, не сплошь) элементы -1. Следовательно,

$$h_\varphi(\lambda)=\det(\lambda E-J)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}. \quad (27.17)$$

Формула (27.17) влечет следующие факты:

1) спектр φ исчерпывается скалярами λ_i,

2) каждое из этих собственных значений имеет алгебраическую кратность m_i,

3) сумма m' всех алгебраических кратностей совпадает с размерностью n.

Первое утверждение предложения доказано в обе стороны.

2. В предположении алгебраической замкнутости основного поля P всякий многочлен над этим полем разлагается на линейные множители и, следовательно (см. замечание 18.2), условие $m'=n$ выполняется автоматически, для произвольного л.э. φ.

Значит, для любого л.э. существует жорданов базис во всем пространстве. □

Замечание 27.1. Если для л.э. $\varphi\in\mathcal{L}(V)$ существует жорданов базис (во всем пространстве V), то φ представляется в виде суммы диагонализируемого и нильпотентного эндоморфизмов: $\varphi=\delta+\upsilon$.

В самом деле, в жордановом базисе данному оператору отвечает блочно-диагональная матрица J, причем каждый из ее "больших" блоков, в свою очередь, является блочно-диагональной матрицей, с "малыми" блоками — жордановыми ящиками. Всякий жорданов ящик можно представить как сумму скалярной матрицы и нильпотентного жорданова ящика. Проделав это для всех ящиков, мы разобьем матрицу J в сумму диагональной матрицы D (на ее диагонали стоят собственные значения λ_i, каждое из которых повторяется столько раз, какова его алгебраическая кратность) и нильпотентной матрицы Y (которая получается из J заменой всех ж.я. на нильпотентные). Сумме матриц $J=D+Y$ отвечает сумма операторов

$\varphi = \delta + \upsilon$, причем оператор δ, по построению, является диагонализируемым, а оператор υ, как и его матрица, нильпотентен.

27.3. Жорданова нормальная форма и критерий подобия для квадратных матриц. Выразим результат предложения 27.2 на "языке матриц".

Определение 27.2. Будем говорить, что квадратная матрица A *приводима* к *жордановой нормальной форме* (ж.н.ф.), если найдется ей *подобная* блочно-диагональная матрица J с блоками — жордановыми ящиками.

Предложение 27.3. *Квадратная $(n \times n)$-матрица A с элементами из поля P приводима к ж.н.ф. тогда и только тогда, когда ее характеристический многочлен разлагается на линейные множители, или, что равносильно, когда сумма кратностей характеристических корней равна n.*

Над алгебраически замкнутым полем P любая матрица приводима к ж.н.ф.

Доказательство. В п. 13.6 объяснялось, что две квадратные матрицы $A, A' \in L(n, P)$ подобны ($A \backsim A'$) тогда и только тогда, когда они соответствуют одному и тому же л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ в двух базисах $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ в пространстве V. (В качестве V можно взять арифметическое линейное пространство P^n.) Таким образом, вопрос о приводимости квадратной матрицы к ж.н.ф. равносилен вопросу о существовании жорданова базиса для соответствующего оператора и, следовательно, как первое, так и второе утверждения предложения 27.3 вытекают из предложения 27.2. □

Замечание 27.2. В том случае, когда ж.н.ф. существует, естественно задуматься о том, насколько однозначно она определена.

"Большие" блоки, каждый из которых соответствует одному из собственных значений, определяются однозначно, если договориться (как это и делалось выше) размещать "малые" блоки (ж.я.) внутри "большого" в порядке убывания их размеров.

В то же время, поскольку данное поле совсем не обязательно несет какой-либо порядок, то, вообще говоря, не существует естественного способа упорядочения собственных значений и, как следствие, не существует естественного порядка расположения "больших" блоков.

Так что ж.н.ф. матрицы определена неоднозначно.

Впрочем, можно считать, что блочно-диагональные матрицы, отличающиеся лишь порядком диагональных блоков, отличаются несущественно. Принято говорить, что ж.н.ф. определена *однозначно, с точностью до перестановки диагональных блоков.*

Гораздо большая неоднозначность имеет место при вычислении преобразующей матрицы (или, на другом языке, — при отыскании жорданова базиса). В самом деле, по ходу построения жорданова базиса приходится (и неоднократно) определять некоторые прямые дополнения к некоторым подпространствам в некоторых более широких подпространствах, а это (в нетривиальных случаях) — сугубо неоднозначная процедура.

Замечание 27.3. Развивая метафору А. А. Кириллова, мы выше не раз рассуждали о спектре, как о "душе" линейного оператора, которая видна по его "фотографии" (матрице), если оператор является диагонализируемым. Если для оператора существует жорданов базис (а над "хорошими" полями это всегда так), то спектр "визуально наблюдается" по ж.н.ф. матрицы этого оператора.

Следует однако отдавать себе отчет в том, что знания одних только собственных значений (т. е. спектра "в чистом виде") в общем случае не достаточно для описания всех свойств оператора. Надо иметь полные данные о структуре ж.н.ф. Напомним, что эта структура однозначно определяется по последовательностям итерированных дефектов.

Если мы знаем все характеристические корни λ_i и для каждого из них знаем последовательность $d_i^{(k)}$ итерированных дефектов, то мы знаем все о матрице и о соответствующем линейном операторе.

Рассуждения предыдущего замечания можно перевести из метафорической сферы в математическую. С этой целью ниже формулируется *критерий подобия квадратных матриц.*

Предложение 27.4. *Пусть поле P алгебраически замкнуто. Рассмотрим две квадратные матрицы A и B одинакового размера. Следующие три утверждения равносильны:*

(1) матрицы A и B подобны;

(2) матрицы A и B можно привести к одной и той же ж.н.ф.;

(3) матрицы A и B имеют одинаковые спектры, и для каждого из характеристических корней λ_i справедливы равенства:

$$\operatorname{dfc}((A-\lambda_i E)^k) = \operatorname{dfc}((B-\lambda_i E)^k);\ k = 1, 2, \dots . \tag{27.18}$$

Доказательство. 1. Если $B = T^{-1}AT$, то (см. предложение 17.1) совпадают характеристические многочлены и, следовательно, спектры матриц A и B:

$$\sigma(A) = \sigma(B) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\}.$$

Алгебраическая замкнутость поля P гарантирует их непустоту ($s > 0$). Кроме того, подобны характеристические матрицы для A и B, что, после перемены знака, можно представить в виде равенства полиномиальных матриц:

$$B - \lambda E = T^{-1}(A - \lambda E)T. \tag{27.19}$$

Подставляя в (27.19) вместо переменной λ каждое из собственных значений λ_i, мы придем к равенствам

$$B - \lambda_i E = T^{-1}(A - \lambda_i E)T;\ i = 1, \dots, s. \tag{27.20}$$

С помощью элементарной индукции легко убедиться в справедливости (при любом натуральном k) равенств

$$(B - \lambda_i E)^k = T^{-1}(A - \lambda_i E)^k T. \tag{27.21}$$

Но подобные матрицы эквивалентны [см. (13.16)] и, следовательно, имеют одинаковые ранги и дефекты. Значит, справедливы формулы (27.18), и импликация (1) $\Rightarrow$ (3) доказана.

2. Собственные значения (если их определенным образом упорядочить) и итерированные дефекты однозначно определяют (см. замечание 27.2) ж.н.ф. матрицы. Так что, благодаря условию (3), матрицы A и B могут быть приведены к одной и той же жордановой нормальной форме, т. е. (3) $\Rightarrow$ (2).

3. Две матрицы, приводимые к одной и той же ж.н.ф., оказываются подобными одной и той же матрице и, следовательно, — подобными между собой. Таким образом, (2) $\Rightarrow$ (1), и доказательство "по циклу" завершено. □

Замечание 27.4. Условие (27.18), выраженное в терминах итерированных дефектов, можно переформулировать, используя итерированные ранги (напомним, что сумма соответствующих итерированных дефекта и ранга равняется размерности пространства):

$$\operatorname{rank}((A - \lambda_i E)^k) = \operatorname{rank}((B - \lambda_i E)^k);\ k = 1, 2, \dots. \tag{27.18′}$$

27.4.* Комплексификация и овеществление. Обобщенная ж.н.ф. для действительных матриц. Поле действительных чисел не является алгебраически замкнутым, и, как следствие, в действительном линейном пространстве (размерности $n \geqslant 2$) существуют линейные эндоморфизмы, не имеющие жорданова базиса.

Это равносильно (на матричном языке) тому, что существуют квадратные матрицы с действительными элементами, не приводимые к ж.н.ф.

В связи с этим возникает необходимость перехода от линейного пространства над $\mathbb{R}$ к пространству над $\mathbb{C}$. Этот переход должен, прежде всего, сохранять размерность пространства. Кроме того, он должен быть таким, чтобы всякому л.э. в данном пространстве соответствовал определенный л.э. в новом пространстве, имеющий (при надлежащем выборе базисов) такую же матрицу, что и исходный.

При изучении вопроса о диагонализируемости л.э. мы уже сталкивались с описанной задачей (см. замечание 21.3 и пример 21.2). Здесь мы опишем конструкцию *комплексификации* в большей общности и более подробно, хотя некоторые, достаточно важные, детали по-прежнему останутся за рамками нашего изложения. Читателей, заинтересованных в прояснении всех тонкостей данной темы, мы отсылаем к учебникам [1] и [2].

Построение комплексного линейного пространства (как расширения данного действительного пространства) производится по образу и подобию построения поля комплексных чисел (как расширения поля действительных чисел).

Поле $\mathbb{C}$ определялось (см. § 31 пособия $[A_1]$) как линейное пространство $\mathbb{R}^2$ со специальным образом введенным умножением. Его элементы (комплексные числа) представлялись двояко:

— как упорядоченные пары действительных чисел $\lambda = (\alpha, \beta)$;

— как выражения вида $\lambda = \alpha + \beta i$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Аналогично, имея действительное линейное пространство V, можно образовать *внешнюю прямую сумму* (см. п. 9.4) двух экземпляров этого пространства:

$$V^{\mathbb{C}} = V \oplus V = \{(x, y) \,:\, x, y \in V\}. \tag{27.22}$$

По построению, $V^{\mathbb{C}}$ является линейным пространством над $\mathbb{R}$; его элементы мы таже будем записывать в одной из двух форм:

— как упорядоченные пары вида (x, y), где x и y являются векторами из V [именно такая запись принята в (27.22)];

— как выражения вида $z = x + iy$, где i — мнимая единица.

Далее вводится умножение векторов из $z \in V^{\mathbb{C}}$ на комплексные числа $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Делается это по формуле

$$\lambda \cdot z = (\alpha + i\beta) \cdot (x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y), \tag{27.23}$$

ничем (по виду) не отличающейся от формулы (31.21) из первого пособия. По сути отличие все же есть: в новой формуле сомножители не равноправны (λ является скаляром, а z — вектором).

Для доказательства того, что умножение (27.23) превращает $V^{\mathbb{C}}$ в линейное пространство над $\mathbb{C}$, требуется проверить четыре последних из восьми аксиом линейного пространства (см. п. 1.2 настоящего пособия). Эта проверка совершенно элементарна и вполне аналогична проверке аксиом поля в [A_1, п. 31.3].

Пространство $V^{\mathbb{C}}$, рассматриваемое как комплексное, называется *комплексификацией действительного пространства* V.

Пространство V считается вложенным в $V^{\mathbb{C}}$ *в качестве первого слагаемого*, с помощью отождествления $x = (x, 0)$. Второе слагаемое, состоящее из пар вида $(0, y) = iy = i(y, 0)$, может быть обозначено iV.

В соответствии с общим принципом взаимосвязи внешних и внутренних прямых сумм (см. предложение 9.5) будем иметь (внутреннее) прямое разложение

$$V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV. \tag{27.24}$$

Формула (27.24) выражает очень важное свойство комплексификации $V^{\mathbb{C}}$, которая представляет из себя не просто комплексное пространство, но, как иногда говорят (см. [20]), — *вещественно-комплексное*. Последний термин характеризует комплексные пространства *с выделенным прямым разложением в прямую сумму двух изоморфных действительных подпространств*.

В вещественно-комплексном линейном пространстве можно определить операцию комплексного сопряжения векторов, обозначаемую здесь (в отличие от примера 21.2) не тильдой, а привычной чертой:

$$x + iy = z \longmapsto \overline{z} = x - iy, \tag{27.25}$$

свойства которой вполне аналогичны свойствам сопряжения в поле $\mathbb{C}$. Например, для $\lambda \in \mathbb{C}$ и $z \in V^{\mathbb{C}}$ справедлива формула:

$$\overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\overline{z}. \tag{27.26}$$

Предположим теперь, что пространство V является конечномерным и $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ (в обозначении уточнено, что размерность вычисляется над полем $\mathbb{R}$). Пусть, далее, в пространстве V выбран базис

$$\mathcal{B} = [b_1, b_2, \dots, b_n]. \tag{27.27}$$

Размерность прямой суммы (27.22) над полем $\mathbb{R}$ равняется $2n$, причем в качестве базиса в ней можно выбрать с.в.

$$\mathcal{C} = [b_1, b_2, \dots, b_n, ib_1, ib_2, \dots, ib_n] \tag{27.28}$$

(используются описанные выше отождествления).

Если ту же прямую сумму (27.22) рассматривать над полем $\mathbb{C}$, то с.в. (27.27) останется базисом после ее вложения $V^{\mathbb{C}}$. В самом деле, произвольный вектор $z = x + iy \in V^{\mathbb{C}}$ представляется в виде:

$$z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k + i \sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + i\beta_k) b_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k,$$

где коэффициенты $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$; $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \dots, n)$.

Получается, что пространство $V^{\mathbb{C}}$ имеет над полем $\mathbb{C}$ такую же размерность n, как исходное пространство V над $\mathbb{R}$:

$$\dim_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(V). \tag{27.29}$$

Базис вида (27.27) в комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ будем называть *действительным базисом* этого (вещественно-комплексного) пространства.

Переходим к описанию "встречной" конструкции превращения комплексного линейного пространства в действительное. Она значительно проще в идейном отношении: всякое линейное пространство над более широким полем P_2 $(P_2 \supset P_1)$ может, очевидно, рассматриваться над более узким полем P_1.

В частности, всякое комплексное пространство V можно рассматривать как действительное, и тогда для него используется обозначение $V_{\mathbb{R}}$ и вводится термин *овеществление комплексного пространства* V.

Размерность (над $\mathbb{R}$) пространства $V_{\mathbb{R}}$ вдвое больше размерности (над $\mathbb{C}$) пространства V, причем, имея базис $\mathcal{B} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ в исходном пространстве, мы можем в качестве базиса для овеществленного пространства взять с.в. $\mathcal{C} = [b_1, b_2, \dots, b_n, ib_1, ib_2, \dots, ib_n]$. (Любопытное обстоятельство: идентичные в записи формулы использовались выше, при описании комплексификации, но здесь логика их построения — в некотором смысле противоположная.)

"Встречные" операции комплексификации и овеществления отнюдь не являются взаимно обратными. Из изложенного выше достаточно ясно, что если после комплексификации произвести овеществление, то полученное действительное пространство будет изоморфно прямой сумме исходного действительного пространства с самим собой. Мы советуем заинтересованным читателям прочитать в (указанных выше) учебниках о том, что будет, если выполнить сначала овеществление комплексного пространства, а потом — комплексификацию того, что получится.

Здесь же мы займемся комлексификацией линейных отображений (гомоморфизмов).

Всякому $\mathbb{R}$-линейному гомоморфизму $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V, W)$ одного действительного пространства в другое можно сопоставить $\mathbb{C}$-линейный гомоморфизм комплексификаций

$$\chi = \varphi^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, W^{\mathbb{C}}), \tag{27.30}$$

задаваемый формулой

$$\chi(z) = \varphi(x) + i\varphi(y);\ z = x + iy \in V^{\mathbb{C}} \tag{27.31}$$

и именуемый *комплексификацией гомоморфизма* φ.

Проверка линейности (над $\mathbb{C}$) отображения (27.31) является элементарным упражнением [см. формулу (27.23)]. Не доставит вам больших хлопот также и доказательство свойства

$$\chi(\overline{z}) = \overline{\chi(z)}. \tag{27.32}$$

Из определения (27.31) очевидно, что сужение комплексифицированного гомоморфизма χ на вещественное подпространство $V \leqslant V^{\mathbb{C}}$ совпадает с исходным гомоморфизмом φ.

Интересным является вопрос: всякий ли комплексно-линейный гомоморфизм комплексификаций является комплексификацией вещественно-линейного гомоморфизма исходных пространств? (Исчерпывающий ответ можно найти в упомянутых в начале пункта учебниках.)

Пусть в действительных пространствах V и W выбраны произвольные базисы. Будучи вложенными в комплексификации, они станут действительными базисами в вещественно-комплесных пространствах $V^{\mathbb{C}}$ и $W^{\mathbb{C}}$.

Из общего правила составления матрицы линейного отображения (см. п. 12.2) вытекает тот факт, что *в действительных базисах матрица комплексифицированного гомоморфизма совпадает с матрицей исходного гомоморфизма.*

Ниже мы ограничимся изучением комплексификаций для *линейных эндоморфизмов.* Пусть л.э. φ действует в n-мерном действительном пространстве V, в котором выбран базис (27.27), позволяющий сопоставить данному эндоморфизму действительную $(n \times n)$-матрицу A. В комплексифицированном пространстве $V^{\mathbb{C}}$ будет действовать л.э. $\chi = \varphi^{\mathbb{C}}$; в действительном базисе, полученном вложением (27.27) в $V^{\mathbb{C}}$, оператору χ будет соответствовать та же самая матрица A.

Рассмотрим спектр л.э. φ (в поле $\mathbb{R}$):

$$\sigma(\varphi) = \sigma_{\mathbb{R}}(A), \tag{27.33}$$

состоящий из всех действительных характеристических корней для матрицы A.

Если количество этих корней (с учетом их кратностей) достаточно, т. е. равняется n, то для л.э. φ существует в пространстве V жорданов базис и матрица A приводима к ж.н.ф. (над полем $\mathbb{R}$). Никакая комплексификация в этом случае не требуется. (Но если ее все-таки произвести, то л.э. χ будет иметь *действительный* жорданов базис.)

Если же сумма кратностей действительных характеристических корней матрицы A меньше n, то понадобится переход к комплексифицированному эндоморфизму χ и изучение его спектра:

$$\sigma(\chi) = \sigma_{\mathbb{C}}(A). \tag{27.34}$$

Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел гарантирует наличие достаточного количества комплексных характеристических корней и, как следствие, существование (комплексного) жорданова базиса $\mathcal{G}$ в пространстве $V^{\mathbb{C}}$ для л.э. χ. В этом базисе оператору χ будет соответствовать (комплексная) матрица J, являющаяся ж.н.ф. матрицы A.

Известно (см. [A_1, п. 43.3]), что корни многочлена с действительными коэффициентами разбиваются на две категории:

— действительные корни λ_p, с кратностями m_p $(p = 1, \dots, s)$ [буква i занята "комплексными делами", поэтому пришлось здесь и далее заменить привычный индекс на p];

— недействительные комплексные корни $\lambda_p = \alpha_p + i\beta_p$, кратности m_p, каждый из которых встречается в паре с комплексно сопряженным корнем $\overline{\lambda_p} = \alpha_p - i\beta_p$, такой же кратности ($\beta_p \neq 0$; $p = s+1, \dots, s+t$).

Сумма всех кратностей равна степени многочлена (в данном случае — размерности n):

$$m_1 + \dots + m_s + 2(m_{s+1} + \dots + m_{s+t}) = n.$$

Каждому действительному λ_p отвечает в ж.н.ф. действительный "большой" блок J_p, с жордановыми ящиками вида $\boxed{J_k(\lambda_p)}$ на диагонали ($p = 1, \dots, s$).

Каждой паре комплексно сопряженных корней $\lambda_p, \overline{\lambda_p}$ в матрице J отвечает пара "больших" блоков, J_p и $\overline{J_p}$, где черта над матрицей указывает на то, что ко всем элементам этой матрицы применяется комплексное сопряжение. Ящики в первом блоке имеют вид $\boxed{J_k(\lambda_p)}$, а во втором — вид $\boxed{J_k(\overline{\lambda_p})}$, где $p = s+1, \dots, s+t$.

"Ящичное" строение блока J_p определяется итерированными рангами

$$r_p^{(k)} = \operatorname{rank}(B_p);\ B_p = A - \lambda_p E \tag{27.35}$$

(или, что равносильно, — соответствующими дефектами).

Сопряженному корню $\overline{\lambda_p}$ соответствует матрица

$$\overline{B_p} = A - \overline{\lambda_p} E, \tag{27.36}$$

имеющая, как легко доказать, те же итерированные ранги (27.35). Значит, "ящичное" строение блока $\overline{J_p}$ в точности совпадает со строением J_p.

Более того, вектор $z = x + iy \in V^{\mathbb{C}}$ принадлежит k-му итерированному ядру оператора $\chi - \lambda_p \varepsilon$, связанного с собственным значением $\lambda_p = \alpha_p + i\beta_p$, тогда и только тогда, когда комплексно сопряженный вектор $\overline{z} = x - iy$ принадлежит k-му ядру оператора $\chi - \overline{\lambda_p}\varepsilon$, связанного с $\overline{\lambda_p} = \alpha_p - i\beta_p$.

В самом деле, для $k = 1$ это доказывается следующей выкладкой:

$$\begin{aligned}(\chi - \overline{\lambda_p}\varepsilon)(\overline{z}) = \\ = \chi(\overline{z}) - \overline{\lambda_p}\overline{z} = \varphi(x) - i\varphi(y) - (\alpha_p - i\beta_p)(x - iy) = \\ = \overline{\varphi(x) + i\varphi(y) - (\alpha_p + i\beta_p)(x + iy)} = \overline{\chi(z) - \lambda_p z} = \\ = \overline{(\chi - \lambda_p\varepsilon)(z)};\end{aligned}$$

далее применяется очевидная индукция по k. В конце концов, мы доберемся до стабильных ядер, т. е. *корневых подпространств*, и придем к выводу, что

$$Q_{\overline{\lambda_p}}(\chi) = \overline{Q_{\lambda_p}(\chi)};\ p = s+1, \dots, s+t, \tag{27.37}$$

т. е. корневое подпространство, отвечающее собственному значению, комплексно сопряженному с данным, состоит из векторов, комплексно сопряженных векторам, принадлежащим корневому подпространству, отвечающему данному собственному значению.

Еще более внимательный анализ показывает, что на каждом шаге построения жордановых базисов в корневых подпространствах, работу алгоритма можно организовать так, чтобы жорданов базис в $Q_{\overline{\lambda_p}}(\chi)$ состоял из векторов, комплексно сопряженных векторам, входящим в жорданов базис в $Q_{\lambda_p}(\chi)$. *Циклические подпространства*, в прямую сумму которых разбивается каждое из двух комплексно сопряженных корневых подпространств, также оказываются (соответственно) комплексно сопряженными друг другу.

Рассмотрим далее два таких циклических подпространства:

$$Z = < g_1, g_2, ..., g_k >;\quad \overline{Z} = < \overline{g_1}, \overline{g_2}, ..., \overline{g_k} > .$$

Имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} &(\chi - \lambda_p\varepsilon)(g_1) = 0;\ (\chi - \lambda_p\varepsilon)(g_u) = g_{u-1}\ (u = 2, \dots, k);\\ &(\chi - \overline{\lambda_p}\varepsilon)(\overline{g_1}) = 0;\ (\chi - \overline{\lambda_p}\varepsilon)(\overline{g_u}) = \overline{g_{u-1}}\ (u = 2, \dots, k), \end{aligned} \tag{27.38}$$

или, что равносильно:

$$\begin{aligned} &\varphi(g_1) = \lambda_p g_1;\ \varphi(g_u) = \lambda_p g_u + g_{u-1}\ (u = 2, \dots, k);\\ &\varphi(\overline{g_1}) = \lambda_p \overline{g_1};\ \varphi(\overline{g_u}) = \overline{\lambda_p}\overline{g_u} + \overline{g_{u-1}}\ (u = 2, \dots, k). \end{aligned} \tag{27.39}$$

Сужениям φ на подпространства Z и $\overline{Z}$ отвечают в указанных (комплексно сопряженных друг другу) базисах жордановы ящики $\boxed{J_k(\lambda_p)}$ и $\boxed{J_k(\overline{\lambda_p})}$ соответственно, а сужению φ на прямую сумму $Z \oplus \overline{Z}$ — блочно-диагональная матрица

$$\underset{2k\times 2k}{C} = \begin{pmatrix} \boxed{J_k(\lambda_p)} & O \\ O & \boxed{J_k(\overline{\lambda_p})} \end{pmatrix}. \tag{27.40}$$

Перейдем к новому базису в этой сумме по следующим формулам пересчета:

$$h_1 = \frac{1}{2}(g_1 + \overline{g_1});\ h_2 = \frac{1}{2i}(g_1 - \overline{g_1});$$
$$h_3 = \frac{1}{2}(g_2 + \overline{g_2});\ h_4 = \frac{1}{2i}(g_2 - \overline{g_2}); \dots;$$
$$h_{2k-1} = \frac{1}{2}(g_k + \overline{g_k});\ h_{2k} = \frac{1}{2i}(g_k - \overline{g_k}). \quad (27.41)$$

Вектор h_1 есть не что иное, как *действительная часть* вектора g_1, а вектор h_2 — его *мнимая часть*: $h_1 = \mathrm{Re}(g_1);\ h_2 = \mathrm{Im}(g_1)$; и т. д. Можно выписать обратные выражения:

$$g_1 = h_1 + ih_2;\ g_2 + h_3 + h_4;\ \dots;\ g_k = h_{2k-1} + ih_{2k} \quad (27.42)$$

и сопряженные к ним.

Новые векторы $h_1, h_2, \dots, h_{2k}$ будут образовывать новый базис в прямой сумме $Z \oplus \overline{Z}$, причем — действительный, т. е. принадлежащий вещественному подпространству V. Вычислим $(2k \times 2k)$-блок R, отвечающий в этом базисе сужению оператора φ на $Z \oplus \overline{Z}$. Имеем:

$$\varphi(h_1) = \frac{1}{2}(\varphi(g_1) + \varphi(\overline{g_1})) =$$
$$= \frac{1}{2}(\lambda_p g_1 + \overline{\lambda_p}\overline{g_1}) = \frac{1}{2}(\lambda_p g_1 + \overline{\lambda_p g_1}) = \mathrm{Re}(\lambda_p g_1) =$$
$$= \mathrm{Re}\,((\alpha_p + i\beta_p)(h_1 + ih_2)) = \alpha_p h_1 - \beta_p h_2$$

и, аналогично,

$$\varphi(h_2) = \beta_p h_1 + \alpha_p h_2.$$

Далее,

$$\varphi(h_3) = \frac{1}{2}(\varphi(g_2) + \varphi(\overline{g_2})) =$$
$$= \frac{1}{2}(\lambda_p g_2 + g_1 + \overline{\lambda_p}\overline{g_2} + \overline{g_1}) = h_1 + \frac{1}{2}(\lambda_p g_2 + \overline{\lambda_p g_2}) =$$
$$= h_1 + \mathrm{Re}(\lambda_p g_2) = h_1 + \mathrm{Re}\,((\alpha_p + i\beta_p)(h_3 + ih_4)) =$$
$$= h_1 + \alpha_p h_3 - \beta_p h_4$$

и, аналогично,

$$\varphi(h_4) = h_2 + \beta_p h_3 + \alpha_p h_4.$$

Закономерность ясна: блок R является действительным и, в свою очередь, имеет следующий блочно-треугольный вид (нулевые блоки оставлены пустыми):

$$\underset{2k\times 2k}{R} = \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc|cc} \alpha_p & \beta_p & 1 & 0 & & & & & \\ -\beta_p & \alpha_p & 0 & 1 & & & & & \\ \hline & & \alpha_p & \beta_p & 1 & 0 & & & \\ & & -\beta_p & \alpha_p & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & & \ddots & & \ddots & & \\ \hline & & & & & & \alpha_p & \beta_p & 1 & 0 \\ & & & & & & -\beta_p & \alpha_p & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & & & \alpha_p & \beta_p \\ & & & & & & & & -\beta_p & \alpha_p \end{array}\right), \tag{27.43}$$

или, в краткой записи:

$$R = \begin{pmatrix} \Lambda_p & E_2 & & & \\ & \Lambda_p & E_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \Lambda_p & E_2 \\ & & & & \Lambda_p \end{pmatrix}, \tag{27.44}$$

где

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ -\beta_p & \alpha_p \end{pmatrix} \tag{27.45}$$

есть действительная (2×2)-матрица, элементы которой определяются по комплексному собственному значению $\lambda_p = \alpha_p + i\beta_p$, а E_2 — единичная матрица такого же размера.

Если проделать описанные выше манипуляции для каждой пары сопряженных собственных значений, в каждой паре соответствующих им циклических подпространств, то в пространстве $V^{\mathbb{C}}$ будет задан действительный базис $\mathcal{H}$, в котором оператору χ будет отвечать действительная матрица $J_{\mathbb{R}}$, вид которой описывается ниже.

Она является блочно-диагональной; среди ее диагональных блоков могут присутствовать как обычные жордановы ящики, отвечающие действительным собственным значениям, так и более сложные блоки вида (27.44), отвечающие парам комплексно сопряженных собственных значений.

Каждый из блоков последнего типа, в свою очередь, имеет блочно-треугольную структуру, причем диагональные блоки треугольными не являются: оказывается частично заполненной первая "поддиагональ".

Матрицы, все элементы которых, расположенные ниже первой поддиагонали, равны нулю, принято называть (см. например [26]) *верхними хессенберговыми*; они играют заметную роль в некоторых вопросах вычислительной линейной алгебры.

Вспомним теперь, что в действительном базисе матрицы эндоморфизмов φ и χ одинаковы, так что $J_{\mathbb{R}}$ отвечает в базисе $\mathcal{H}$ исходному л.э. φ. Эта хессенбергова матрица называется *обобщенной жордановой нормальной формой* для действительной матрицы A. Матрицы A и $J_{\mathbb{R}}$ *вещественно подобны*.

§ 28. Алгоритм построения жорданова базиса для линейного эндоморфизма

28.1. Обзор ранее изученных алгоритмов спектральной теории л.э. В текущей главе нами уже изучены четыре алгоритма (с номерами 18.1, 21.1, 25.1 и 26.1), каждый из которых можно рассматривать как определенное звено в структуре итогового сложного алгоритма, к рассмотрению которого мы приступаем здесь.

Напомним некоторые детали, связанные с описанием "входных данных" и постановкой задачи.

В n-мерном линейном пространстве V (над полем P) выбран базис $\mathcal{B}$, позволяющий арифметизировать V. Линейный эндоморфизм $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ задан своей $(n \times n)$-матрицей A относительно базиса $\mathcal{B}$.

Работа алгоритма 18.1 начинается с вычисления характеристического многочлена

$$h_\varphi(\lambda) = \det(\lambda E - A)$$

и его корней, т. е. собственных значений, или — элементов спектра

$$\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\},$$

вместе с соответствующими кратностями m_i $(i = 1, \dots, s)$.

(Спектр л.э. должен быть непустым, иначе этот и последующие алгоритмы ничего не дают.)

Далее для каждого из λ_i находится соответствующее собственное подпространство

$$W_i = S_{\lambda_i}(\varphi);$$

оно представляется как линейная оболочка столбцов фундаментальной матрицы F_i для с.л.у. $B_i\overline{x} = \overline{0}$, где

$$B_i = A - \lambda_i E.$$

Наряду со списком алгебраических кратностей m_i, рассматривается список размерностей $n_i = \dim(W_i)$, т. е. геометрических кратностей для собственных значений λ_i. Вычисляются суммы m' и n' тех и других кратностей.

Алгоритм 21.2 служит продолжением алгоритма 18.1.

В случае $n' = n$ он позволяет (объединив все фундаментальные матрицы F_i) получить в пространстве диагонализирующий базис для л.э. φ.

Если $n' < n$, то выдается некий "суррогат" — частично диагонализирующий базис в собственной сумме

$$S(\varphi) = W' = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i.$$

Алгоритм 25.1 позволяет построить в стабильном ядре (необратимого) л.э. φ так называемый жорданов базис $\mathcal{G}_0$, в котором сужение на стабильное ядро данного л.э. имеет блочно-диагональную матрицу J_0, с нильпотентными жордановыми ящиками на диагонали.

Дли описания жорданова базиса составляется столбчатая диаграмма $\mathcal{D}_0$, параметры которой однозначно определяются по итерированным дефектам $d^{(k)} = \mathrm{dfc}(A^k)$; $k = 1, 2, \dots l$, где l — показатель стабилизации для л.э. φ. В свою очередь, по диаграмме $\mathcal{D}_0$ определяется блочная структура $(d^{(l)} \times d^{(l)})$-матрицы J_0.

(Все это проиллюстрировано диаграммами 25.1 и 25.2 и подробно прокомментировано в приложении 3.)

Алгоритм 26.1 работает (при каждом фиксированном $i = 1, \dots, s$) как "специализация" алгоритма 25.1 применительно к л.э.

$$\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon,$$

действие которого в исходном базисе $\mathcal{B}$ определяется матрицей B_i. Показатель стабилизации l_i для ψ_i находится как наименьшее из натуральных чисел k таких, что итерированный дефект

$$d_i^{(k)} = \mathrm{dfc}(B_i^k)$$

равен алгебраической кратности m_i. Стабильный дефект

$$d_i^{(l_i)} = m_i$$

равен размерности стабильного ядра для ψ_i, т. е. — корневого подпространства

$$U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi).$$

На выходе алгоритма получается жорданов базис $\mathcal{G}_i$ в подпространстве U_i, представляемый столбцами $(n \times m_i)$-матрицы G_i, а также $(m_i \times m_i)$-матрица J_i, отвечающая в этом базисе сужению на U_i данного л.э. φ. Эта матрица является блочно-диагональной; на ее диагонали располагаются (в порядке, определяемом по столбчатой диаграмме $\mathcal{D}_i$) жордановы ящики вида $\boxed{J_k(\lambda_i)}$, где $1 \leqslant k \leqslant l_i$. Количество ящиков заданного размера определяется по так называемым абсолютным вторым приращениям итерированных дефектов. Общее количество ящиков (всех возможных размеров) оказывается равным геометрической кратности n_i.

(В приложении 3 приведены и прокомментированы диаграммы 26.1 и 26.2, иллюстрирующие многочисленные детали или особые ситуации, возникающие при работе алгоритма.)

Описываемый в следующем пункте алгоритм 28.1 является "сборкой" всех вспомогательных алгоритмов, обзор которых только что был дан. Основные понятия и обозначения, упоминавшиеся в этом обзоре, ниже используются без дополнительных комментариев.

28.2. Алгоритм построения (частично) жорданова базиса для л.э.

А л г о р и т м 28. 1.
Исследование вопроса о существовании жорданова базиса для л.э.
Отыскание (частично) жорданова базиса

1. С помощью алгоритма 18.1 вычисляем характеристический многочлен $h_\varphi(\lambda)$, спектр $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$, список алгебраических кратностей m_i $(i = 1, \dots, s)$ и их сумму m'.

1.1. Если $m' = n$, то констатируем, что *жорданов базис* $\mathcal{G}$ для эндоморфизма φ существует во всем пространстве V, совпадающем при указанном условии с корневой суммой

$$Q(\varphi) = U' = \bigoplus_{i=1}^{s} U_i. \tag{28.1}$$

1.2. Если $m' < n$, то жорданов базис $\mathcal{G}'$ существует лишь в m'-мерном подпространстве $U' < V$; он может быть продолжен до *частично жорданова базиса* в V.

2_i. Для каждого $i = 1, ..., s$ вычисляем матрицу B_i, отвечающую л.э. $\psi_i = \varphi - \lambda_i\varepsilon$, и, с помощью алгоритма 26.1, находим сначала "необработанные" базисы во всех итерированных ядрах для ψ_i, начиная с первого и кончая стабильным, а также — их размерности (итерированные дефекты); сигналом о наступлении стабилизации служит равенство очередного итерированного дефекта и алгебраической кратности m_i. Далее производится определение параметров *столбчатой диаграммы* $\mathcal{D}_i$, вычисление "большого" $(m_i \times m_i)$-блока J_i (блочно-диагонального, с жордановыми ящиками $\boxed{J_k(\lambda_i)}$ по диагонали), *обработка базисов* и представление искомого жорданова базиса $\mathcal{G}_i$ (в корневом пространстве U_i) $(n \times m_i)$-матрицей G_i.

3. Формируем $(n \times m')$-матрицу

$$G' = (G_1 \,|\, G_2 \,|\, ... \,|\, G_s)\,, \tag{28.2}$$

содержащую жорданов базис в корневой сумме U', а также $(m' \times m')$-матрицу

$$J' = \operatorname{diag}(J_1, J_2, ..., J_s) \tag{28.3}$$

(см. диагр. 27.1 в прил. 3), отвечающую сужению л.э. φ на U'.

4. Формируем *матрицу перехода* от исходного базиса к жорданову (или частично жорданову) базису, а также ж.н.ф. (или частичную ж.н.ф.) для л.э. φ.

4.1. Если $m' = n$, то $(n \times n)$-матрица $G = G'$ содержит жорданов базис для φ во всем пространстве V, а (такого же размера) матрица $J = J'$ является жордановой нормальной формой для матрицы A.

Матрицу G можно считать матрицей перехода от исходного (при арифметизации отождествленного с естественным) базиса в V к жорданову базису. Формула $G \cdot J = A \cdot J$ и условие $\det(G) \neq 0$ могут служить для проверки правильности вычислений.

4.2. Если $m' < n$, то матрица G' будет содержать базис в *корневой сумме* $U' = Q(\varphi)$. С помощью алгоритма 10.4 он продолжается до базиса во всем пространстве. При этом добавляются $m'' = n - m'$ векторов, составляющие базис в некотором прямом дополнении U'' к подпространству U'. Матрица K размера $n \times m''$, содержащая эти

векторы, приписывается справа к матрице G'. Квадратная $(n \times n)$-матрица

$$T = (G' \,|K) \tag{28.4}$$

содержит *частично жорданов* базис в V, в котором оператору φ будет соответствовать *частично жорданова* (блочно-треугольная с жордановым северо-западным блоком) матрица

$$A' = T^{-1}AT = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} J_1 & O & \dots & O & C'_1 \\ \hline O & J_2 & \dots & O & C'_2 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline O & O & \dots & J_s & C'_s \\ \hline O & O & \dots & O & C'' \end{array}\right), \tag{28.5}$$

с $(m_i \times m'')$-блоками C'_i $(i = 1, \dots, s)$ и $(m'' \times m'')$-блоком C''.

*Замечание 28.1.** Характерной особенностью описанного выше алгоритма (как и четырех предыдущих) является то, что он рассчитан на абсолютно *точные вычисления*.

Практически это означает, что если мы работаем с числами, то вынуждены оставаться в пределах поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Алгоритм будет работать и в других полях, если в них удается организовать точное вычисление характеристических корней, рангов матриц и т. д.

Это можно сделать, например,

— в некоторых *полях алгебраических чисел*, таких как *поле рациональных гауссовых чисел* $\mathbb{Q}[i]$, или (более общее) поле $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, которое состоит из комплексных чисел вида $z = a + b\sqrt{d}$; $a, b \in \mathbb{Q}$ (где d — фиксированное *бесквадратное* целое число);

— в *конечных полях* $\mathbb{F}_q$ ($q = p^n$ — *примарное* число, т. е. натуральная степень простого натурального числа), элементы которого допускают представление в виде многочленов над простым полем $\mathbb{F}_p$ (классов вычетов по модулю p), с выполнением алгебраических действий по модулю некоторого неприводимого многочлена степени n над $\mathbb{F}_p$.

Разумеется, все это требует применения достаточно сложной алгебраической техники и далеко выходит за рамки нашего курса. Ниже, во всех вычислительных примерах линейные пространства и линейные эндоморфизмы будут рассматриваться над $\mathbb{Q}$.

С нашими алгоритмами обречена на неудачу любая попытка рассмотрения приближенных значений для корней характристического многочлена. В самом деле, "приближенный корень" λ_0 многочлена $h_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ доставляет этому многочлену (хотя и малое, но — ненулевое) значение $h_A(\lambda_0) = \det(\lambda_0 E - A)$. При этом матрица $B_0 = A - \lambda_0 E$ оказывается невырожденной и, следовательно, ее ядро $\mathrm{Ker}(B_0)$ — тривиальным. Собственное подпространство не поддается определению.

Что же делать физикам, инженерам и другим людям, работающим с заведомо приближенными данными? Для их нужд применяется совсем другая, очень сложная наука — *методы вычислений*. В вычислительной линейной алгебре (и, в частности, в вычислительной спектральной теории линейных операторов) изобретаются принципиально иные (не алгебраические) алгоритмы, позволяющие приближенно (с достаточной точностью) описать "спектральные характеристики" операторов.

28.3. Типовой расчет по теме "Жорданов базис для линейного эндоморфизма". Приступаем к описанию индивидуального задания (ТР2 — *типовой расчет* № 2) на применение алгоритма 28.1 построения жорданова (или, по крайней мере, частично жорданова) базиса для линейного эндоморфизма.

Рассмотрим в n-мерном линейном пространстве V (над полем P) линейный эндоморфизм $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ Зафиксировав в пространстве V некоторый базис $\mathcal{B}$, отождествляем V с арифметическим линейным пространством P^n ($\mathcal{B}$ отождествляется с $\mathcal{E}_n$). При этом л.э. φ отождествляется со своей арифметизацией $\Phi \in \mathcal{L}(P^n)$; его действие определяется квадратной матрицей $A \in L(n, P)$.

Конкретизируем основное поле: в качестве P в типовом расчете будет фигурировать поле рациональных чисел $P = \mathbb{Q}$ (как уже отмечалось, алгоритм сохраняет практическую работоспособность и над некоторыми расширениями этого поля, и над конечными полями, однако в данном расчете эти версии не понадобятся).

Далее, вычислив наименьший общий знаменатель β всех элементов матрицы $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q})$, мы, с помощью вынесения за знак матрицы числа $1/\beta$, можем, очевидно, свести задачу к исследованию *целочисленной* матрицы βA. Поэтому достаточно отработать алгоритм на целочисленных матрицах.

Общее условие типового расчета по теме "Жорданов базис для линейного эндоморфизма"

В линейном пространстве $V = \mathbb{Q}^n$ задан линейный эндоморфизм

$$\varphi : V \longrightarrow V;\ \varphi(\overline{x}) = A \cdot \overline{x},$$

где A — (целочисленная) квадратная матрица размера $n \times n$.

Требуется

— вычислить спектр $\sigma(\varphi)$ и сумму m' алгебраических кратностей всех собственных значений для л.э. φ; в случае пустоты спектра ($m' = 0$) сделать заключение об отсутствии у φ (даже частично) жорданова базиса и остановить вычисления;

— в случае $0 < m' \leqslant n$ найти *корневую сумму* $U' = Q(\varphi)$ для данного л.э. (являющуюся m'-мерным линейным подпространством в V) и *жорданов базис* $\mathcal{G}'$ в ней; последний представить записанным в матрицу G' размера $m' \times n$;

— вычислить квадратную матрицу J' размера $m' \times m'$, отвечающую сужению

$$\varphi' = \varphi\big|_{U'} : U' \longrightarrow U'$$

в базисе $\mathcal{G}'$;

— если $m' = n$, то выдать заключение о том, что во всем пространстве V существует жорданов базис $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ [записанный в $(n \times n)$-матрицу $G = G'$], в котором л.э. φ соответствует матрица $J = J'$, имеющая ж.н.ф.; выполнить проверки: $G \cdot J = A \cdot G$ и $\det(G) \neq 0$;

— если $0 < m' < n$, то выдать заключение о том, что не существует жорданова базиса для φ в пространстве V; базис $\mathcal{G}'$ в U' продолжить до базиса $\mathcal{T}$ во всем пространстве (*частично жорданова* базиса для φ), записав его в $(n \times n)$-матрицу T; вычислить по формуле

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

матрицу, отвечающую φ в базисе $\mathcal{T}$ (частично жорданову форму матрицы A); выполнить проверку: $\det(T)$ должен быть ненулевым; северо-западный $(m' \times m')$-блок матрицы A' должен совпадать с J'.

И с х о д н ы е д а н н ы е
к д е м о н с т р а ц и о н н о м у в а р и а н т у:

$$n=8;\ A:=\begin{pmatrix} -9 & -5 & -3 & 0 & -8 & -3 & -7 & 13 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ -6 & -6 & -5 & 1 & -9 & -4 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -6 & -5 & -2 & 1 & -8 & -4 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е д е м о н с т р а ц и о н н о г о в а р и а н т а

1. Вычисляем характеристический многочлен:

$$h_\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda{+}9 & 5 & 3 & 0 & 8 & 3 & 7 & -13 \\ -1 & \lambda & -2 & -1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 6 & 6 & \lambda{+}5 & -1 & 9 & 4 & 5 & -12 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda{+}1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \lambda{+}3 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda{+}3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda{+}1 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & -1 & 8 & 4 & 5 & \lambda{-}9 \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^8+13\lambda^7+70\lambda^6+196\lambda^5+280\lambda^4+112\lambda^3-224\lambda^2-320\lambda-128.$$

Именно этот этап является наиболее трудоемким при ручных вычислениях. Для матриц порядка $n>6$ "ручное" вычисление характеристического многочлена может стать непосильной задачей. Но мы заинтересованы именно в таких размерностях, поэтому приходится рекомендовать студентам обязательное обращение к Maple (подробности см. в п. 28.4).

Далее, с помощью алгоритма из § 42 пособия [A_1], проводим отбор *целых* характеристических корней и определение их кратностей. Тот факт, что характеристический многочлен является *нормализованным* гарантирует целочисленность его рациональных корней. Искать их следует среди делителей свободного члена.

И этот этап может потребовать достаточно громоздких (но все же вполне преодолимых "вручную") вычислений. Вам предлагается

провести их подробно, с привлечением "многоступенчатой" схемы Горнера. (Разумеется, не повредит Maple-проверка.)

В демонстрационном варианте свободный член равен -2^6. Поэтому проверке подлежат числа ±1; ±2; ±4; ±8; ±16; ±32; ±64. Проверка не продлится долго: корни $\lambda_1 = 1$ (кратности $m_1 = 1$) и $\lambda_2 = -2$ (кратности $m_2 = 7$) обнаруживаются на первых же ее шагах.

Спектр л.э. состоит из двух точек $\sigma(\varphi) = \{1, -2\}$; сумма алгебраических кратностей собственных значений $m' = 8$ совпадает с размерностью пространства. Поэтому во всем пространстве $V = \mathbb{Q}^8$ существует жорданов базис для φ.

$2_1.1$. Первому (однократному) собственному значению отвечает одномерное собственное (оно же — корневое) подпространство U_1.

Для отыскания базиса в U_1 находим нуль-пространство матрицы $B_1 = A - \lambda_1 E = A - E$, т. е., решая однородную с.л.у. $B_1 \cdot \overline{x} = \overline{0}$, вычисляем фундаментальную матрицу $F_1^{(1)}$. Здесь "обработка базисов" не понадобится, так что $G_1 = F_1^{(1)}$, и мы получаем описание: $U_1 = R_{G_1}$, где $G_1 = (\overline{g_1})$ состоит из единственного столбца.

Результаты счета:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -10 & -5 & -3 & 0 & -8 & -3 & -7 & 13 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ -6 & -6 & -6 & 1 & -9 & -4 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ -6 & -5 & -2 & 1 & -8 & -4 & -5 & 8 \end{pmatrix} \to \ldots \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; G_1 = F_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$2_1.2$. С целью обеспечения единства оформления, нарисуем "одноклеточную" столбчатую диаграмму:

$$\mathcal{D}_1 : \quad \begin{array}{c} \boxed{g_1} \\ \downarrow \\ 0 \end{array},$$

где вертикальная стрелка обозначает л.э. $\psi_1 = \varphi - \lambda_1\varepsilon = \varphi - \varepsilon$; показатель стабилизации для него $l_1 = 1$.

$2_1.3$. Должен быть также зафиксирован (так называемый "большой") блок:

$$J_1 = \boxed{J_1(\lambda_1)} = \boxed{1}.$$

Теперь можно объяснить то упорство, с которым в предыдущих параграфах автор брал в кавычки слово "большой" (применительно к блокам ж.н.ф.). Дело в том, что "большие" блоки названы так не за свою величину (они могут быть совсем маленькими по размерам, и даже одноэлементными), но по причине возможного наличия более *тонкого строения* этих блоков: они сами, вообще говоря, имеют блочно-диагональный вид, с "мелкими" блоками (ж.я.) на диагонали (возможно, сгруппированными в "средние" блоки).

$2_2.1$. Вычисляем матрицу $B_2 = A - \lambda_2 E = A + 2E$ и ее степени B_2^k, следя за дефектами $d_2^{(k)}$ и "ловя момент", когда очередной дефект сравняется с алгебраической кратностью $m_2 = 7$.

Разумеется, умножать "вручную" матрицы восьмого порядка — удовольствие ниже среднего. То же самое можно сказать и о решении с.л.у., содержащих восемь неизвестных. Однако этот материал давно пройден и закреплен. Поэтому совершенно не возбраняется "автоматизировать" рутинные операции.

$$B_2 = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -3 & 0 & -8 & -3 & -7 & 13 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ -6 & -6 & -3 & 1 & -9 & -4 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -6 & -5 & -2 & 1 & -8 & -4 & -5 & 11 \end{pmatrix} \to \ldots \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$F_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ d_2^{(1)} = 3;$$

$$B_2^2 = \begin{pmatrix} -18 & -17 & -8 & 2 & -26 & -11 & -16 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -18 & -18 & -9 & 0 & -27 & -9 & -18 & 36 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -18 & -18 & -9 & 1 & -27 & -10 & -17 & 36 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$F_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ d_2^{(2)} = 5;$$

$$B_2^3 = \begin{pmatrix} -54 & -54 & -27 & 1 & -81 & -28 & -53 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -54 & -54 & -27 & 0 & -81 & -27 & -54 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -54 & -54 & -27 & 0 & -81 & -27 & -54 & 108 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$F_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -1/2 & -1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ d_2^{(3)} = 6;$$

$$B_2^4 = \begin{pmatrix} -162 & -162 & -81 & 0 & -243 & -81 & -162 & 324 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -162 & -162 & -81 & 0 & -243 & -81 & -162 & 324 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -162 & -162 & -81 & 0 & -243 & -81 & -162 & 324 \end{pmatrix} \to ... \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$F_2^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1/2 & -3/2 & 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ d_2^{(4)} = 7.$$

Констатируем достижение стабилизации: $d_2^{(4)} = m_2$; показатель стабилизации: $l_2 = 4$.

$2_2.2$. Определяем параметры столбчатой диаграммы $\mathcal{D}_2$, занося их в следующую таблицу, с нумерацией строк снизу вверх, что приспособлено к строению будущей диаграммы:

Таблица 28.1

$d_2^{(4)} = 7;$	$p_2^{(4)} = 1;$	$q_2^{(4)} = 1;$
$d_2^{(3)} = 6;$	$p_2^{(3)} = 1;$	$q_2^{(3)} = 0;$
$d_2^{(2)} = 5;$	$p_2^{(2)} = 2;$	$q_2^{(2)} = 1;$
$d_2^{(1)} = 3;$	$p_2^{(1)} = 3;$	$q_2^{(1)} = 1.$

Во втором столбце таблицы приведены *приращения итерированных дефектов*, равные длинам строк диаграммы $\mathcal{D}_2$. Сама эта диаграмма приведена в приложении 3 (диагр. 28.1).

2_2.3. Вычисляем "большой" блок J_2, отвечающий второму собственному значению, общий размер которого равен алгебраической кратности $m_2 = 7$. Количество "малых" блоков (ж.я.) на диагонали "большого" равняется геометрической кратности $n_2 = d_2^{(1)} = 3$.

Распределение ящиков по размерам определяется по *абсолютным вторым приращениям* (см. третий столбец табл. 28.1) :

— имеется $q_2^{(4)} = 1$ ящик четвертого порядка $\boxed{J_4(-2)}$;

— ящиков третьего порядка $\boxed{J_3(-2)}$ нет, поскольку $q_2^{(3)} = 0$;

— имеется $q_2^{(2)} = 1$ ящик второго порядка $\boxed{J_2(-2)}$;

— имеется $q_2^{(1)} = 1$ ящик первого порядка $\boxed{J_1(-2)}$.

Иначе говоря, каждому столбцу в $\mathcal{D}_2$ соответствует один ж.я., размер которого равняется высоте столбца.

Обратим внимание на то, что в рассматриваемом примере фактически отсутствует группировка ж.я. одинакового размера в так называемые "средние" блоки. Это усматривается как по значениям вторых приращений, так и по столбчатой диаграмме: *зоны*, объединяющиее столбцы одинаковой высоты, имеют длины, не превышающие единицы.

Окончательно:

$$J_2 = \operatorname{diag}\left(\boxed{J_4(-2)}, \boxed{J_2(-2)}, \boxed{J_1(-2)}\right).$$

2_2.4. Благодаря вычислениям п. 2_2.1, мы располагаем базисами в итерированных ядрах $N_2^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ для л.э. ψ_2. Эти базисы заключены в (фундаментальных) матрицах $F_2^{(k)}$. Первая из них

содержит базис в первом ядре, совпадающем с собственным подпространством $W_2 = S_{\lambda_2}(\varphi)$; последняя — базис в корневом подпространстве U_2. Но это — не те базисы, векторы которых заносятся в ячейки столбчатой диаграммы $\mathcal{D}_2$.

Найденные базисы подлежат довольно кропотливой *обработке*.

[Данный этап является по-настоящему сложным. Причем если предыдущие "сложности" привносились другими (внешними) алгоритмами (такими как алгоритм вычисления определителей или алгоритм отыскания рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами), то здесь проявляется "собственная сложность" алгоритма построения жорданова базиса.]

На диагр. 28.1 (прил. 3) векторы жорданова базиса $\mathcal{G}_2$ уже занумерованы как полагается: столбцы — слева направо, векторы в столбцах — снизу вверх. Однако эти векторы и составленная из них (8×7)-матрица

$$G_2 = (\overline{g_1} \,|\, \overline{g_2} \,|\, \overline{g_3} \,|\, \overline{g_4} \,|\, \overline{g_5} \,|\, \overline{g_6} \,|\, \overline{g_7})$$

пока неизвестны. И определяться они будут начиная с самых верхних, с продвижением вниз "по стрелкам". По очереди подлежат вычислению следующие матрицы:

$$G_2^{(4)} = (\overline{g_4})\,;\; G_2^{(3)} = (\overline{g_3})\,;\; G_2^{(2)} = (\overline{g_2} \,|\, \overline{g_6})\,;\; G_2^{(1)} = (\overline{g_1} \,|\, \overline{g_5} \,|\, \overline{g_7})\,.$$

Каждая из матриц $G_2^{(k)}$ содержит базис в некотором прямом дополнении к ядру $N_2^{(k-1)}$ в ядре $N_2^{(k)}$; выбор дополнений не однозначен, но должен быть *согласованным*. Вертикальные стрелки на диаграмме предназначены для "визуализации" принципа согласования.

2_2.4.1. Начинаем процесс с определения самого верхнего вектора $\overline{g_4}$. Составляем и приводим к ступенчатому виду следующую матрицу-кокатенацию:

$$M_2^{(4)} = \left(F_2^{(3)} \,\middle|\, F_2^{(4)}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -1/2 & -1 & -1 & -1/2 & 2 & -1 & -1/2 & -3/2 & 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -1/2 & -1 & -1 & -1/2 & 2 & -1 & -1/2 & -3/2 & 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По тем ступенькам, которые приходятся на правую зону, мы должны определить добавочные векторы, дополняющие базис в третьем ядре (представленный левой зоной матрицы), до базиса в четвертом ядре. Зная параметры диаграммы, мы заранее уверены в том, что такой вектор окажется единственным. И действительно, на правую зону пришлась всего одна ступенька. Добавочным будет второй слева столбец из матрицы $F_2^{(4)}$; именно этот вектор (в его исходном виде) мы принимаем за $\overline{g_4}$:

$$G_2^{(4)} = (\overline{g_4}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$2_2.4.2$. Теперь мы совершим первый шаг вниз. На третьем уровне отстутствует ступенька ($q_2^{(3)} = 0$), поэтому матрица $G_2^{(3)}$ находится простым умножением:

$$G_2^{(3)} = B_2 \cdot G_2^{(4)}.$$

(Напомним, что матрица B_2 задает действие л.э. ψ_2.)

В данном случае обе матрицы являются одностолбцовыми и фактически мы вычисляем вектор $\overline{g_3} = B_2 \cdot \overline{g_4}$:

$$G_2^{(3)} = (\overline{g_3}) = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -3 & 0 & -8 & -3 & -7 & 13 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ -6 & -6 & -3 & 1 & -9 & -4 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -6 & -5 & -2 & 1 & -8 & -4 & -5 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2_2.4.3. Следующий шаг вниз осуществляется "в три приема":

— сначала "по стрелке" определяется вектор $\overline{g_2}$, который должен входить первым в матрицу $G_2^{(2)}$:

$$\overline{g_2} = B_2 \cdot \overline{g_3} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -3 & 0 & -8 & -3 & -7 & 13 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ -6 & -6 & -3 & 1 & -9 & -4 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -6 & -5 & -2 & 1 & -8 & -4 & -5 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

— затем составляется и приводится к ступенчатому виду следующая тройная конкатенация

$$M_2^{(2)} = \left(F_2^{(1)} \,\middle|\, B_2 \cdot G_2^{(3)} \,\middle|\, F_2^{(2)} \right),$$

где левая и правая зоны содержат необработанные базисы в первом и втором ядрах соответственно, а центральная зона (в данном случае) является одностолбцовой (сводится к уже найденному вектору $\overline{g_2}$); вычисления дают:

$$M_2^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccccc} 0 & -1 & 1 & 2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|c|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1/2 & 3/2 & 3/2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-3/4} & 3/4 & 3/4 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

— и, наконец, мы определим вектор $\overline{g_6}$ как добавочный (из правой зоны), где, в согласии с параметрами столбчатой диаграммы, он обнаруживается в единственном числе (на третью зону приходится одна ступенька): можно взять первый столбец матрицы $F_2^{(2)}$, в его исходном виде (кстати, можно взять не обязательно первый, а, например, второй или третий, но никак нельзя — пятый или четвертый; при алгоритмической организации вычислений естественно выбирать "первый попавшийся" из подходящих векторов); итак, выбираем $\overline{g_6}$ и формируем $G_2^{(2)}$:

$$\overline{g_6} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; G_2^{(2)} = (\overline{g_2} \,|\overline{g_6}) = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2_2.4.4. Последний шаг вниз (на первый уровень) имеет особенность, связанную с тем, что ниже этого уровня уже ничего нет. Поэтому, вместо тройной конкатенации, фигурировавшей на предыдущем шаге, будет использоваться двойная:

$$M_2^{(1)} = \left(B_2 \cdot G_2^{(2)} \,\middle|\, F_2^{(1)}\right),$$

в которой левая зона, вычисляемая умножением, дает векторы $\overline{g_1}$ и $\overline{g_5}$, а из правой зоны мы должны будем извлечь последний из искомых векторов $\overline{g_7}$.

Результаты вычисленияй:

$$B_2 \cdot G_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -3 & 0 & -8 & -3 & -7 & 13 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ -6 & -6 & -3 & 1 & -9 & -4 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -6 & -5 & -2 & 1 & -8 & -4 & -5 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \\ -1 & 3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ \overline{g_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \overline{g_5} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$M_2^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -3/2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -3/2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right);$$

$$\overline{g_7} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \ G_2^{(1)} = (\overline{g_1} \ |\overline{g_5} \ |\overline{g_7}) = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2_2.4.5. И вот, наконец, мы можем предъявить матрицу, содержа-

щую жорданов базис во втором корневом подпространстве:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 — 4. Остаются завершающие этапы работы. В данном примере они могут быть объединены, поскольку корневая сума совпадает со всем пространством и, следовательно, совпадают матрицы $G = G'$ и матрица перехода T (от исходного базиса к жорданову):

$$T = G = (G_1 \,|G_2)\,.$$

Также уже готова жорданова нормальная форма исходной матрицы A:

$$J = \operatorname{diag}(J_1, J_2) = \operatorname{diag}\left(\boxed{J_1(1)}, \boxed{J_4(-2)}, \boxed{J_2(-2)}, \boxed{J_1(-2)}\right).$$

О т в е т:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$J = \left(\begin{array}{c|cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

П р о в е р к а подтверждает корректность вычислений. В справедливости равенства $G\cdot J = A\cdot G$ убедитесь самостоятельно (разумеется, лучше — не вручную). Определитель тоже можно вычислить с привлечением компьютера; получится:

$$\det(G) = -\frac{1}{4}.$$

28.4. Особые случаи в задаче о построении жордановых базисов

1. Как уже отмечалось (см. замечание 25.1), *диагонализирущий* базис для л.э. является частным случаем жорданова. На языке столбчатых диаграмм этот случай характеризуется тем, что для любого собственного значения λ_i соответствующая диаграмма $\mathcal{D}_i$ является "одноэтажной". (В демонстрационном примере предыдущего пункта такой была только одна из двух столбчатых диаграмм.)

Другую крайность представляют л.э. с одноэлементным спектром. Если единственное собственное значение для такого эндоморфизма имеет алгебраическую кратность, равную размерности пространства, то во всем этом пространстве существует жорданов базис, описываемый единственной столбчатой диаграммой.

В этом случае ж.н.ф. для матрицы л.э. содержит всего один "большой" диагональный блок (о такой матрице можно сказать, что она имеет "скалярную" диагональ, или, иначе: представляется в виде суммы скалярной матрицы и нильпотентной).

Чисто *нильпотентная* матрица характеризуется тем, что единственным ее характеристическим корнем является нуль (максимально возможной кратности).

Особенно простым (и важным) является случай, когда единственная столбчатая диаграмма для л.э. имеет всего один столбец. Такой эндоморфизм называется *одноклеточным*, поскольку ж.н.ф. для его матрицы сводится к единственной жордановой клетке (ж.я.).

2. В пп. 21.6 и 27.4 мы уже встречались с примерами, когда разумное *расширение поля* существенно меняет ситуцию в задаче о существовании диагонализирующего базиса. Аналогичные явления могут иметь место и применительно к задаче построения жорданова базиса.

Пример 28.1. Рассмотрим л.э. в пространстве $V = \mathbb{Q}^5$, заданный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -17 & -19 & 4 & -17 \\ 6 & -4 & -6 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & -4 & 1 & -4 \\ -32 & 26 & 29 & -5 & 26 \\ 6 & -6 & -5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Вычисление характеристического многочлена и его корней дает:

$$h_A(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 12\lambda^3 - 16\lambda^2 + 12\lambda - 4 = \\ = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = (\lambda - 1)(\lambda - (1 - i))^2 (\lambda - (1 + i))^2.$$

Если рассматривать эндоморфизм так, как он задан (т. е. над полем рациональных чисел), то будет существовать лишь одно однократное собственное значение $\lambda_1 = 1$. Корневая сумма будет сводиться к (одномерному) собственному подпространству, отвечающему этому собственному значению. Вычисления приводят к следующей частично жордановой форме:

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 6 & -6 & -5 & 1 \\ 0 & 16 & -11 & -14 & 3 \\ 0 & 6 & -4 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -26 & 20 & 24 & -4 \end{pmatrix},$$

с единственным (одномерным) ж.я. $\boxed{J_1(1)} = \boxed{1}$ в северо-западном углу. Матрица перехода (содержащая частично жорданов базис) получается такой:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Расширяя (комплексифицируя) поле $\mathbb{Q}$, мы выходим в поле $\mathbb{Q}[i]$ *рациональных гауссовых чисел.* Над этим полем л.э., заданный той же самой матрицей A, обладает, помимо однократного собственного значения $\lambda_1 = 1$, еще двумя (двукратными) собственными значениями $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$, комплексно сопряженными друг другу.

Теперь сумма алгебраических кратностей всех собственных значений совпадает с размерностью пространства. Следовательно, во

всем пространстве $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{Q}[i]^5$ существует жорданов базис (для комплексифицированного эндоморфизма).

Ж.н.ф. матрицы A будет иметь вид:

$$J = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i \end{array}\right).$$

Матрица перехода будет теперь комплексной (заметьте, однако, что базисные корневые векторы, отвечающие комплексно сопряженным собственным значениям, попарно комплексно сопряжены):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{6}+\frac{26}{9}i & -\frac{1}{9}-\frac{1}{6}i & \frac{7}{6}-\frac{26}{9}i & -\frac{1}{9}+\frac{1}{6}i \\ 0 & \frac{2}{9}+i & -\frac{2}{9}-\frac{5}{9}i & \frac{2}{9}-i & -\frac{2}{9}+\frac{5}{9}i \\ 0 & \frac{13}{18}+\frac{8}{9}i & -\frac{8}{9}+\frac{1}{6}i & \frac{13}{18}-\frac{8}{9}i & -\frac{8}{9}-\frac{1}{6}i \\ -1 & -2-\frac{77}{18}i & 0 & -2+\frac{77}{18}i & 0 \\ 1 & \frac{1}{9}+\frac{1}{2}i & 1 & \frac{1}{9}-\frac{1}{2}i & 1 \end{pmatrix}.$$

Подробно разобравшись в содержании (помеченного звездочкой) пункта 27.4, вы сможете определить действительный базис (но не жорданов, а *обобщенный жорданов*), в котором комплексифицированный л.э. имеет (действительную) *обобщенную* ж.н.ф.

28.5. Отыскание ж.н.ф. матрицы с помощью системы Maple. Пакет LinearAlgebra располагает исчерпывающими средствами вычисления по данной квадратной матрице A ее ж.н.ф. J, а также — матрицы перехода T, осуществляющей подобие: $J = T^{-1}AT$.

Достаточно применить команду

```
> JQ := JordanForm( A, output = [ 'J', 'Q' ] );
```

с "резервированием имен" для ж.н.ф. и матрицы перехода (по умолчанию они именно таковы, как показано выше). На выходе мы получим последовательность из двух матриц; элементы этой последовательности можно запросить по отдельности и присвоить их значения тем переменным, которые использовались в нашем изложении:

```
> J := JQ[ 1 ]; T := JQ[ 2 ];
```

Однако для учебных целей такое "окончательное" решение вопроса, разумеется, мало полезно. Мы ведь изучаем алгоритм! Так что приведенную выше функцию договоримся (в данной теме) использовать лишь для проверки результатов собственных подробных вычислений.

Пример 28.2. Введем матрицу:

```
> A := Matrix([ [5, −4, −3, 5, −1, 1, 5, 1, −1, 3, 1],
                [12, 30, 14, 4, 5, −8, 0, −4, 12, −8, −4],
                [12, 8, 3, 5, −1, −1, 1, −4, 5, −2, −3],
                [1, −14, −7, −1, −4, 7, −3, −3, −4, 2, −1],
                [−12, −8, −1, −5, 3, 1, −1, 4, −5, 2, 3],
                [13, 28, 12, 5, 4, −8, 1, −4, 11, −7, −4],
                [−6, 18, 10, −5, 5, −8, −3, 1, 5, −5, 0],
                [6, −4, −3, 5, −1, 1, 5, 0, −1, 3, 1],
                [−12, −34, −16, −4, −6, 9, 0, 4, −14, 9, 4],
                [23, 39, 21, 8, 7, −9, 0, −8, 17, −11, −7],
                [13, −22, −16, 10, −9, 9, 7, −1, −6, 8, 0] ]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 12 & 30 & 14 & 4 & 5 & -8 & 0 & -4 & 12 & -8 & -4 \\ 12 & 8 & 3 & 5 & -1 & -1 & 1 & -4 & 5 & -2 & -3 \\ 1 & -14 & -7 & -1 & -4 & 7 & -3 & -3 & -4 & 2 & -1 \\ -12 & -8 & -1 & -5 & 3 & 1 & -1 & 4 & -5 & 2 & 3 \\ 13 & 28 & 12 & 5 & 4 & -8 & 1 & -4 & 11 & -7 & -4 \\ -6 & 18 & 10 & -5 & 5 & -8 & -3 & 1 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ -12 & -34 & -16 & -4 & -6 & 9 & 0 & 4 & -14 & 9 & 4 \\ 23 & 39 & 21 & 8 & 7 & -9 & 0 & -8 & 17 & -11 & -7 \\ 13 & -22 & -16 & 10 & -9 & 9 & 7 & -1 & -6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Дадим команду вычисления ж.н.ф. с несколько видоизмененным синтаксисом:

```
> J := JordanForm( A, output = 'J' );
  T := JordanForm( A, output = 'Q' );
```

Получим:

$$J := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T := \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{-208}{27} & 3 & 6 & 9 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{-262}{27} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & \frac{-20}{3} & \frac{263}{27} & -3 & -6 & -9 & \frac{10}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-14}{3} & \frac{371}{27} & \frac{-17}{3} \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{13}{3} & \frac{-226}{27} & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{-145}{27} & \frac{13}{3} \\ 1 & \frac{16}{3} & \frac{62}{27} & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{-19}{27} & \frac{10}{3} \\ 1 & \frac{7}{3} & \frac{-235}{27} & 3 & 6 & 9 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{-262}{27} & \frac{7}{3} \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -3 & -3 & -3 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{-7}{3} & \frac{-17}{27} & 0 & 3 & 6 & 6 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{145}{27} & \frac{-4}{3} \\ 0 & -2 & \frac{-17}{3} & 3 & 6 & 9 & \frac{5}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-11}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Обратите внимание на то, что Maple не "считает своим долгом" группировать вместе жордановы ящики с одинаковыми собственными значениями и располагать их в порядке убывания размеров. (Косвенно это свидетельствует о том, что в системе "зашит" совсем другой алгоритм.)

Кроме того, при работе с некоторыми Maple-командами надо быть готовым к тому, что при повторном выполнении команды может получиться ответ, отличный от полученного при первом применении (хотя и равносильный ему, или — "равноправный" с ним — в случае, когда решение не является единственным и процедура каким-либо образом выбирает одно из множества решений).

28.6. "Процедура-сценарий" jrd для решения задач ТР2. Для учебных целей автором разработана представляемая ниже процедура jrd, которая для произвольной квадратной матрицы A с непустым спектром (над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$) возвращает ее (частично) жорданову нормальную форму J, а также — матрицу перехода T, содержащую (частично) жорданов базис.

Процедура jrd работает совершенно прямолинейно, в строгом соответствии с описанием алгоритма 28.1, и может служить некоторой "имитацией ручных вычислений" типового расчета ТР2 (см. п. 28.2). Она, с некоторой натяжкой, может быть названа "сценарием", поскольку, помимо итоговой выдачи матриц J и T, по ходу работы выводятся на печать все существенные промежуточные результаты (матрицы, содержащие необработанные базисы в итерированных ядрах, параметры столбчатых диаграмм, сами эти диаграммы, этапы обработки базисов и многое другое).

Автору показалось неуместным прибегать к организации *диалога* (например, с помощью Maplets), что превратило бы процедуру в настоящий сценарий, но было бы определенным отвлечением от наших — математических! — целей. (Будущим программистам будет совсем не трудно самостоятельно разобраться в Maplet-технологии.)

Далее, чтобы как-то оправдаться перед ревнителями *оптимизации* программ, придется признать, что наша процедура ни в коем случае не оптимальна. (Скажем, количество локальных переменных легко можно было бы сократить "в разы".) Но именно обучающий (и имитационный) характер процедуры обуславливает отказ от непременного стремления к лаконичности и экономии памяти.

Обращение к Maple как языку программирования потребовало некоторой коррекции обозначений (отказа от верхней индексации). Скажем, фундаментальная матрица, содержащая необработанный базис в четвертом итерированном ядре $N_2^{(4)}$ (т. е. в нуль-пространстве матрицы B_2^4), в пунктах 28.1 — 28.4 обозначалась $F_2^{(4)}$, тогда как в тексте процедуры jrd пришлось применить обзначение с двойным индексированием: $F[2][4]$. Заметим, что будучи представленным в

стандартной математической записи, например, при печати промежуточных результатов, это обозначение выглядит следующим образом: F_{2_4} (т. е. наш верхний индекс выглядит как нижний подындекс).

Текст процедуры (с очень подробными комментариями) приведен в прил. 1 (см. п. 2). В нем предусмотрена простая модификация (замена одной командной строки на рядом расположенную и "закомментированную"), позволяющая перейти от вычислений над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел к вычислениям над полем рациональных гауссовых чисел $\mathbb{Q}[i]$.

Пользователи, умеющие работать в других полях алгебраических чисел (скажем, в $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$) и владеющие соответствующими разделами Maple, смогут произвести более глубокие модификации.

В качестве образца применения процедуры jrd мы еще раз рассматриваем матрицу одиннадцатого порядка из примера 28.1. Результаты счета приводятся в том же прил. 1 (см. п. 2а).

§ 29. Многочлены от линейных эндоморфизмов и квадратных матриц. Аннулирующие многочлены

29.1. Значение многочлена от линейного эндоморфизма (от квадратной матрицы). Два самых "рабочих" раздела алгебры — алгебра матриц и алгебра многочленов — активно взаимодействуют, всячески помогая друг другу.

Мы уже не раз встречались с линейными пространствами многочленов и действующими в них линейными операторами. Здесь линейная алгебра помогает полиномиальной.

С другой стороны, вы наверняка обратили внимание на то, насколько важную роль играет в *спектральной теории линейных эндоморфизмов* понятие *характеристического многочлена.* Именно эта проблематика получит развитие в настоящем параграфе и приведет нас к весьма содержательным и важным результатам (обогащающим обе взаимодействующие теории).

Пусть P — произвольное поле, V — линейное пространство над полем P, $\mathcal{L}(V)$ — алгебра линейных эндоморфизмов (операторов), действующих в пространстве V. В этой алгебре заданы алгебраические действия сложения, композиции и умножения на скаляр, для

которых справедливы обычные законы (см. п. 12.1).

Композиция в алгебре $\mathcal{L}(V)$ играет роль умножения и позволяет определить неотрицательные степени (итерации) φ^k для любого л.э. φ (причем нулевая степень считается равной тождественному эндоморфизму: $\varphi^0 = \varepsilon$).

Действие умножения л.э. φ на скаляр $\lambda \in P$ может быть сведено к умножению (композиции) эндоморфизма φ и так называемого скалярного эндоморфизма $\lambda\varepsilon$:

$$\lambda\varphi = \lambda\varepsilon \circ \varphi = \varphi \circ \lambda\varepsilon, \tag{29.1}$$

причем не важно, с какой стороны располагать скалярный множитель. (Последнее обстоятельство связано с тем, что, хотя алгебра $\mathcal{L}(V)$ не коммутативна, т. е. сомножители в произведении $\varphi \circ \psi$ переставлять, вообще говоря, нельзя, скалярные эндоморфизмы перестановочны со всеми л.э.)

Нам понадобится также следующий факт (справедивый для элементов произвольных колец): степени одного и того же элемента коммутируют между собой. Применительно к алгебре л.э. можем записать:

$$\varphi^k \circ \varphi^l = \varphi^l \circ \varphi^k (= \varphi^{k+l}). \tag{29.2}$$

Впредь мы условимся опускать "слишком громоздкий" знак умножения $\circ$ (подобно тому, как это делалось в теории перестановок; см. [A_1, гл. 3]).

Рассмотрим теперь произвольный *многочлен*

$$f(\lambda) = a_0\lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + ... + a_{r-1}\lambda + a_r \tag{29.3}$$

степени r, от переменной λ, с коэффициентами $a_i \in P$ $(i = 1, ..., r)$; $a_0 \neq 0$.

Определение 29.1. *Значением многочлена* (29.3) *от* линейного эндоморфизма (или: *на* линейном эндоморфизме) $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ называется л.э.

$$f(\varphi) = \mathrm{c}_0\varphi^r + \mathrm{c}_1\varphi^{r-1} + ... + \mathrm{c}_{r-1}\varphi + \mathrm{c}_r\varepsilon. \tag{29.4}$$

Для нулевого многочлена его значением от любого л.э. считается нулевой эндоморфизм o.

Так возникает *отображение вычисления*:

$$\nu_\varphi : P[\lambda] \longrightarrow \mathcal{L}(V);\ f(\lambda) \mapsto f(\varphi);\ f(\lambda) \in P[\lambda], \tag{29.5}$$

сопоставляющее каждому многочлену его значение на (фиксированном) л.э. φ. Формула (29.5) является обобщением формулы (39.2) из пособия $[A_1]$, определявшей значение $f(c)$ многочлена (29.3) на произвольном *скаляре* c из поля коэффициентов.

Отображение (29.5) является *гомоморфизмом колец*, т. е. согласовано с алгебраическими действиями сложения и умножения:

$$(f+g)(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi); \tag{29.6a}$$

$$(fg)(\varphi) = f(\varphi)g(\varphi), \tag{29.6b}$$

где $g(\lambda)$ также является многочленом над P.

Формула (29.6a) совершенно очевидна; (29.6b), в принципе, — тоже, но здесь имеются (уже неоднократно встречавшиеся нам) "подводные камни", связанные с тонким различием между многочленами и соответствующими полиномиальными функциями.

Просмотрите еще раз выкладку (39.7) в пособии $[A_1]$, с помощью которой мы доказывали аналогичное свойство для полиномиальных функций $f(c)$ и $g(c)$ скалярного аргумента $c \in P$. В ней ничего не придется менять и в рассматриваемом здесь случае многочленов $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ от "операторного аргумента" $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. В обоих случаях решающим звеном в рассуждении является правило перемножения функций, отвечающих одночленам. В случае многочленов от φ это правило имеет вид

$$(f_k\varphi^k)(g_l\varphi^l) = (f_k g_l)\varphi^{k+l}$$

и вытекает из соотношений (29.2) [и других законов алгебры л.э.].

Важным следствием соотношения (29.6b) является следующее заключение: если многочлен $f(\lambda)$ разлагается на линейные множители:

$$f(\lambda) = a_0(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}, \tag{29.7}$$

где $\lambda_i \in P$; $m_i \in \mathbb{N}$ $(i=1,\dots,s)$; $\sum_{i=1}^{s} m_i = r$, то и после подстановки вместо переменной λ эндоморфизма φ равенство сохраняет силу:

$$f(\varphi) = a_0(\varphi-\lambda_1\varepsilon)^{m_1}(\varphi-\lambda_2\varepsilon)^{m_2}\dots(\varphi-\lambda_s\varepsilon)^{m_s}. \tag{29.8}$$

Имеет место еще одно, очень существенное, свойство многочленов от л.э. Для любых двух многочленов $f(\lambda), g(\lambda) \in P[\lambda]$ и любого эндоморфизма $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ значения $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ являются коммутирующими л.э.:

$$f(\varphi)g(\varphi) = g(\varphi)f(\varphi). \tag{29.9}$$

Доказательство коммутирования (29.9) немедленно следует из коммутирования (29.2) степеней л.э. φ (и все тех же законов операторной алгебры).

Предположим теперь, что данное линейное пространство V является конечномерным и $\dim(V) = n$. Фиксация произвольного базиса $\mathcal{B}$ в пространстве V позволяет установить изоморфизм между алгеброй $\mathcal{L}(V)$ л.э., действующих в V, и алгеброй квадратных $(n \times n)$-матриц $L(n, P)$.

Многочлены от квадратных матриц определяются точно так же, как многочлены от л.э.

Определение 29.1′. *Значением многочлена* (29.3) *от* матрицы $A \in L(n, P)$ называется матрица

$$f(A) = a_0 A^r + a_1 A^{r-1} + ... + a_{r-1} A + a_r E. \qquad (29.4')$$

Разумеется (в силу общей теоремы 12.1), если матрица A отвечает оператору φ в базисе $\mathcal{B}$, то (в том же базисе) матрица $f(A)$ отвечает оператору $f(\varphi)$, и, как следствие, для многочленов от квадратных матриц справедливы все свойства, установленные выше для многочленов от л.э.

Во многих (но не во всех) отношениях работа с матрицами дает больше, чем работа с операторами, поскольку она "охотнее поддается компьютеризации". В связи с этим мы отметим два свойства многочленов от квадратных матриц (которые допускают и операторную формулировку, но все-таки легче представляются на матричном языке).

1. Если квадратная матрица A является блочно-диагональной:

$$A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, ..., A_s), \qquad (29.10)$$

то и значение многочлена $f(\lambda) \in P[\lambda]$ на этой матрице вычисляется поблочно:

$$f(A) = \operatorname{diag}(f(A_1), f(A_2), ..., f(A_s)). \qquad (29.11)$$

Это утверждение непосредственно вытекает из замечания 20.4.

2. Если две квадратные матрицы A и B *подобны*, т. е.

$$B = T^{-1} A T \qquad (29.12)$$

для некоторой обратимой матрицы T, то для любого многочлена $f(\lambda) \in P[\lambda]$:

$$f(B) = T^{-1} f(A) T, \tag{29.13}$$

т. е. матрицы $f(A)$ и $f(B)$ также подобны (с той же *сопрягающей* матрицей T).

В самом деле, по индукции легко доказываются соотношения

$$B^k = T^{-1} A^k T;\ k = 0, 1, 2, \dots, \tag{29.14}$$

а формула (29.13) из них с очевидностью следует.

Пример 29.1. Вычислим значение многочлена (29.3) от жорданова ящика

$$A = \boxed{J_n(\lambda_0)} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \tag{29.15}$$

который можно представить в виде

$$A = \lambda_0 E + I_1, \tag{29.16}$$

где $E = E_n$ — единичная матрица, а

$$I_1 = \boxed{J_n(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{29.17}$$

— нильпотентный жорданов ящик.

Про *скалярную* матрицу $\lambda_0 E$ мы знаем, что она *коммутирует с любой матрицей*, и легко можем возвести ее в любую неотрицательную целую степень: $(\lambda_0 E)^k = \lambda_0^k E$.

Матрицу I_1 также легко возвести в неотрицательную степень k:

$$(I_1)^k = I_k, \tag{29.18}$$

где 1) $I_0 = E$; 2) для любого $k \in \{1, ..., n-1\}$ все элементы матрицы I_k равны нулю, кроме равных единице элементов k-й верхней наддиагонали; 3) для $k > n$: $I_k = O$.

Последний факт нам давно известен: он выражает нильпотентность (с показателем, равным n) матрицы I_1. Автор надеется, что в свое время (при изучении примера 13.4) читатели не уклонились от упражнения по возведению в степень н.ж.я. Если же вы все-таки пропустили это упражнение, то не поленитесь доказать указанный факт сейчас, причем — в полной общности (используя, например, индукцию по k, или же, что проще, — обращаясь к л.э., отвечающему I_1).

Для примера выпишем матрицу I_1^4 при $n = 7$:

$$I_1^4 = I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее заметим, что формула бинома Ньютона, позволяющая возводить в произвольную целую неотрицательную степень сумму двух чисел, остается справедливой в любом кольце при условии, что слагаемые коммутируют. (В самом деле, ничем, кроме аксиом кольца и свойства степеней $(ab)^k = a^k b^k$, справедливого в предположении $ab = ba$, мы при доказательстве этой формулы не пользуемся.)

Так что, если матрицы $A, B \in L(n, P)$ коммутируют (т. е. перестановочны: $AB = BA$), то для любого целого $k \geqslant 0$ справедливо равенство:

$$(A + B)^k = \sum_{s=0}^{k} C_k^s A^{k-s} B^s, \tag{29.19}$$

где, напомним, биномиальные коэффициенты (числа сочетаний) находятся по формулам:

$$C_k^s = \frac{s(s-1)...(s-k+1)}{s!}. \tag{29.20}$$

Применим (29.19) к матрице (29.16):

$$A^k = (\lambda_0 E + I_1)^k = \sum_{s=0}^{k} C_k^s (\lambda_0 E)^{k-s} I_1^s = \sum_{s=0}^{k} C_k^s \lambda_0^{k-s} I_s. \qquad (29.21)$$

Важно заметить, что если номер $s \geqslant n$, то соответствующее слагаемое в (29.21) обращается в нуль, т. е. фактически суммирование в этой формуле происходит лишь до $\min(k, n-1)$.

Скажем, при $n = 7,\ k = 4$ мы будем иметь:

$$A^4 = (\lambda_0 E + I_1)^4 = \sum_{s=0}^{4} C_k^s \lambda_0^{k-s} I_s = \lambda_0^4 E + 4\lambda_0^3 I_1 + 6\lambda_0^2 I_2 + 4\lambda_0 I_3 + I_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_0^4 & 4\lambda_0^3 & 6\lambda_0^2 & 4\lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0^4 & 4\lambda_0^3 & 6\lambda_0^2 & 4\lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0^4 & 4\lambda_0^3 & 6\lambda_0^2 & 4\lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^4 & 4\lambda_0^3 & 6\lambda_0^2 & 4\lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0^4 & 4\lambda_0^3 & 6\lambda_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0^4 & 4\lambda_0^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0^4 \end{pmatrix},$$

а при $n = 7,\ k = 8$ — соответственно:

$$A^8 = \lambda_0^8 E + 8\lambda_0^7 I_1 + C_8^2 \lambda_0^6 I_2 + C_8^3 \lambda_0^5 I_3 + C_8^4 \lambda_0^4 I_4 + C_8^5 \lambda_0^3 I_5 + C_8^6 \lambda_0^2 I_6 =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_0^8 & 8\lambda_0^7 & C_8^2\lambda_0^6 & C_8^3\lambda_0^5 & C_8^4\lambda_0^4 & C_8^5\lambda_0^3 & C_8^6\lambda_0^2 \\ 0 & \lambda_0^8 & 8\lambda_0^7 & C_8^2\lambda_0^6 & C_8^3\lambda_0^5 & C_8^4\lambda_0^4 & C_8^5\lambda_0^3 \\ 0 & 0 & \lambda_0^8 & 8\lambda_0^7 & C_8^2\lambda_0^6 & C_8^3\lambda_0^5 & C_8^4\lambda_0^4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^8 & 8\lambda_0^7 & C_8^2\lambda_0^6 & C_8^3\lambda_0^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0^8 & 8\lambda_0^7 & C_8^2\lambda_0^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0^8 & 8\lambda_0^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0^8 \end{pmatrix}.$$

Вычислим теперь на матрице (29.15) значение многочлена (29.3), который удобнее будет переписать по возрастанию степеней:

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{r} f_k\lambda^k = f_0+f_1\lambda+f_2\lambda^2+\ldots+f_r\lambda^r. \qquad (29.3')$$

В преобразованиях нам встретится знакомое правило *перемены порядка суммирования в двойной сумме*, однако — в несколько более сложной ситуации. Двойную сумму по паре индексов (k,s), которая удовлетворяет системе неравенств

$$\{0\leqslant k\leqslant r;\ 0\leqslant s\leqslant k\},$$

мы заменим на двойную сумму по паре индексов (s,k), удовлетворяющей равносильной системе неравенств

$$\{0\leqslant s\leqslant r;\ s\leqslant k\leqslant r\}.$$

Начинаем выкладку:

$$f(A)=\sum_{k=0}^{r} f_kA^k=\sum_{k=0}^{r} f_k\sum_{s=0}^{k} C_k^s\lambda_0^{k-s}I_s=\sum_{\substack{(k,s):\\ 0\leqslant k\leqslant r;\\ 0\leqslant s\leqslant k}} C_k^s f_k\lambda_0^{k-s}I_s=$$

$$=\sum_{\substack{(s,k):\\ 0\leqslant s\leqslant r;\\ s\leqslant k\leqslant r}} C_k^s f_k\lambda_0^{k-s}I_s=\sum_{s=0}^{r}\left(\sum_{k=s}^{r} C_k^s f_k\lambda_0^{k-s}\right)I_s=\sum_{s=0}^{r}\mu_s I_s,$$

где символом μ_s обозначен скалярный множитель, сформировавшийся в круглых скобках на последнем шаге преобразований. Проясним смысл этого скаляра:

$$\mu_s=f_s+C_{s+1}^s f_{s+1}\lambda_0+C_{s+2}^s f_{s+2}\lambda_0^2+\ldots+C_r^s f_r\lambda_0^{r-s}\ \overset{(29.20)}{=\!=\!=}$$
$$=f_s+\tfrac{(s+1)s\ldots2}{s!}f_{s+1}\lambda_0+\tfrac{(s+2)(s+1)\ldots3}{s!}\lambda_0^2+\ldots+\tfrac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{s!}f_r\lambda_0^{r-s}=$$
$$=\frac{1}{s!}\bigl(s!f_s+(s+1)s\ldots2\,f_{s+1}\lambda_0+\ldots+r(r-1)\ldots(r-s+1)\,f_r\lambda_0^{r-s}\bigr).$$

В последнем выражении нетрудно усмотреть деленное на $s!$ значение s-й производной $f^{(s)}(\lambda)$, взятое в точке $\lambda=\lambda_0$. Окончательно получается:

$$f(A)=\sum_{s=0}^{r} f^{(s)}(\lambda_0)\,I_s, \qquad (29.22)$$

где снова надо иметь в виду, что при $s \geqslant n$ матрицы I_s являются нулевыми, т. е. фактически суммирование в (29.22) заканчивается при $s = \min(r, n-1)$.

К примеру, при $n = 6$, $r = 8$ мы будем иметь:

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(\lambda_0) & f'(\lambda_0) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_0) & \frac{1}{3!}f^{(3)}(\lambda_0) & \frac{1}{4!}f^{(4)}(\lambda_0) & \frac{1}{5!}f^{(5)}(\lambda_0) \\ 0 & f(\lambda_0) & f'(\lambda_0) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_0) & \frac{1}{3!}f^{(3)}(\lambda_0) & \frac{1}{4!}f^{(4)}(\lambda_0) \\ 0 & 0 & f(\lambda_0) & f'(\lambda_0) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_0) & \frac{1}{3!}f^{(3)}(\lambda_0) \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda_0) & f'(\lambda_0) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda_0) & f'(\lambda_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

Замечание 29.1. Расмотренный выше пример, а также установленные ранее свойства функций от матриц, позволяют, в принципе, вычислять значения многочленов от произвольных матриц, приводя их предварительно к ж.н.ф. В самом деле, если $J = T^{-1}AT$ — жорданова форма матрицы A, то применяя к обратному выражению $A = TJT^{-1}$ многочлен (29.3), мы получим $f(A) = Tf(J)T^{-1}$. А значение $f(J)$ вычисляется поблочно, с применением к каждому блоку формулы (29.22).

Подчеркнем, что непосредственное (без перехода к ж.н.ф.) вычисление $f(A)$ может оказаться значительно более сложной задачей. (Причина этого — в высокой вычислительной трудоемкости задачи непосредственного возведения матрицы большого порядка в высокую степень.)

Пример 29.2. Попробуйте непосредственно возвести в двадцатую степень матрицу

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если у вас хватит терпения, то получится:

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 160956416 & -49807360 & -60293120 \\ 351272960 & -109051904 & -131072000 \\ 128450560 & -39321600 & -48758784 \end{pmatrix}.$$

Тот же результат можно получить "более культурным" (хотя тоже не совсем простым) вычислением. Ж.н.ф. здесь найти довольно легко:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Можно сразу же возвести эту матрицу в двадцатую степень:

$$J^{20} = \begin{pmatrix} 2^{20} & 20 \cdot 2^{19} & 190 \cdot 2^{18} \\ 0 & 2^{20} & 20 \cdot 2^{19} \\ 0 & 0 & 2^{20} \end{pmatrix} = 2^{19} \begin{pmatrix} 2 & 20 & 95 \\ 0 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Как обычно, более кропотливым является отыскание матрицы перехода T (и обратной к ней):

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix};\ T^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -6 \\ 27 & -9 & -9 \end{pmatrix}.$$

Теперь остается перемножить матрицы $T \cdot J \cdot T^{-1}$.

Отметим, что порядок величины элементов искомой матрицы A^{20} можно оценить уже по виду J^{20}.

29.2. Аннулирующие многочлены для л.э. и для квадратных матриц. Для математиков характерен особый взгляд на "вещи" (как реальные, так и "идеальные", т. е. те объекты, которые входят в сферу изучения нашей своеобразной науки). Вот, скажем, естественная ("возникшая из жизни", знакомая с самых ранних школьных классов) задача отыскания всех корней многочлена, т. е. таких элементов (чисел), на которых данный многочлен обращается в нуль. Всякий обыватель готов поверить, что это — важная задача. Но надо быть математиком, чтобы осознать законность и важность иного взгляда на тему: а что если элемент дан и надо определить все многочлены, корнем которых он является?

Тот вопрос, который выше сформулирован, — совершенно тривиален (и всякий, кто учился в первом семестре, должен сейчас с необходимостью выдать на него ответ). Но тривиальные вопросы в одной области часто перерастают в нетривиальные и важные проблемы в соседней.

В предыдущем пункте мы определили понятие значения обычного (скалярного) многочлена на "нескалярном" объекте — линейном эндоморфизме или квадратной матрице. В этой области задача

отыскания всех многочленов, обращающихся в нуль на заданном элементе (л.э. или квадратной матрице), представляет уже серьезный интерес.

Определение 29.2. Многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ называется *аннулирующим многочленом* (*а.м.*) для л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ (для квадратной матрицы A), если $f(\varphi) = o$ (соответственно $f(A) = O$).

В силу теоремы 12.1, если в некотором базисе $\mathcal{B}$ пространства V эндоморфизму φ отвечает матрица A, то многочлен $f(\lambda)$ является аннулирующим для φ в том и только том случае, когда он является аннулирующим для матрицы A.

Нулевой многочлен, разумеется, является аннулирующим для любого л.э. (любой квадратной матрицы). Но и ненулевые аннулирующие многочлены всегда существуют. Действительно, если A — матрица размера $n \times n$, то ее неотрицательные степени A^k $(k = 0, ..., n^2)$ образуют систему, содержащую $n^2 + 1$ векторов в n^2-мерном линейном пространстве $L(n, P)$. Такая с.в. обязательно линейно зависима, т. е. найдутся скаляры $\alpha_k \in P$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k A^k = O.$$

Тем самым доказано существование многочлена

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k \lambda^k,$$

степени, не превышающей n^2, аннулирующегося на матрице A.

Вскоре мы убедимся, что эта оценка степени а.м. слишком груба: для матрицы A всегда найдется а.м. степени, не превышающей n. Но пока нам достаточно того, что для $A \in L(n, P)$ всегда существует ненулевой аннулирующий многочлен.

Всякий многочлен, делящийся на аннулирующий, сам является таковым.

Среди ненулевых а.м. для A можно выбрать многочлен наименьшей возможной степени. Обозначим любой из таких многочленов символом $g(\lambda)$ и убедимся в том, что любой анулирующий A многочлен $f(\lambda)$ делится на $g(\lambda)$.

В самом деле, поделим с остатком $f(\lambda)$ на $g(\lambda)$:

$$f(\lambda) = g(\lambda)q(\lambda) + p(\lambda), \tag{29.23}$$

где $p(\lambda) = 0$ или $\deg(p(\lambda)) < \deg(g(\lambda)$.

Остаток $p(\lambda)$ является а.м. для A. Действительно,

$$p(A) = (f - gq)(A) \xrightarrow{(29.6\,\text{a},\text{b})} f(A) - g(A)q(A) = O,$$

и теперь, если $p(\lambda) \neq 0$, то получается противоречие с определением $g(\lambda)$. Так что $p(\lambda) = 0$ и $g(\lambda)|f(\lambda)$.

Доказанное свойство влечет единственность с точностью до пропорциональности аннулирующего для A многочлена минимальной степени. Действительно, если как $g(\lambda)$, так и $g_1(\lambda)$ являются аннулирующими многочленами для A, причем оба они имеют наименьшую возможную степень, то эти многочлены взаимно делят друг друга и, следовательно, пропорциональны. Значит, однозначно определен *нормализованный* а.м. для матрицы A наименьшей возможной степени.

Подведем итоги.

Предложение 29.1. *Для любого л.э. φ, действующего в конечномерном линейном пространстве V (для любой квадратной матрицы A), существует и однозначно определен нормализованный аннулирующий многочлен $g(\lambda)$ наименьшей возможной степени.*

Этот многочлен делит любой аннулирующий многочлен для φ (для A).

Доказательство см. выше. □

Аннулирующему многочлену, существование и единственность которого гарантируется предложением 29.1, присваивается собственное имя.

Определение 29.2. Нормализованный а.м. наименьшей возможной степени для л.э. φ (для квадратной матрицы A) называется *минимальным аннулирущим многочленом* (*м.а.м.*) для φ (для A) и обозначается $g_\varphi(\lambda)$ [соответственно $g_A(\lambda)$].

Ясно, что если матрица A отвечает л.э. φ в некотором базисе, то м.а.м. для φ и м.а.м. для A совпадают.

Определение м.а.м. можно, очевидно, пересказать в терминах делимости: *минимальный аннулирующий многочлен $g_A(\lambda)$ — это такой (нормализованный) многочлен, что все кратные ему многочлены (и только они) являются аннулирующими для A.*

Следующее предложение представляет основные свойства м.а.м. для матриц (которые, разумеется, допускают переформулировку применительно к случаю л.э.).

Предложение 29.2. *1. М.а.м. для блочно диагональной матрицы (29.10) равен наименьшему общему кратному м.а.м. для диагональных блоков:*

$$g_A(\lambda) = [g_{A_1}(\lambda), g_{A_2}(\lambda), \dots, g_{A_s}(\lambda)]. \tag{29.24}$$

2. Подобные матрицы имеют одинаковые м.а.м.:

$$(B \backsim A) \Longrightarrow (\, g_B(\lambda) = g_A(\lambda)\,). \tag{29.25}$$

Доказательство. 1. Согласно формуле (29.11), значение многочлена $f(\lambda)$ от блочно-диагональной матрицы (29.10) находится поблочно и, следовательно, может обращаться в нуль в том и только том случае, когда $f(A_i) = O$ (для любого $i = 1, \dots, s$). Каждое из этих равенств равносильно делимости $g_{A_i}(\lambda) | f(\lambda)$; их совместное выполнение (по определению НОК) равносильно делимости

$$[g_{A_1}(\lambda), g_{A_2}(\lambda), \dots, g_{A_s}(\lambda)] \mid f(\lambda). \tag{29.26}$$

Итак, многочлен является аннулирующим для A тогда и только тогда, когда он делится на НОК минимальных многочленов для диагональных блоков. Значит, минимальный многочлен для A совпадает с этим НОК.

2. Согласно п. 29.1, $B = T^{-1}AT$ влечет $f(B) = T^{-1}f(A)T$. Следовательно, значения $f(A)$ и $f(B)$ могут обращаться в нуль лишь одновременно, т. е. совокупности аннулирующих многочленов для A и для B одинаковы. Из последнего обстоятельства вытекает совпадение соответствующих м.а.м. $\square$

Основным результатом о минимальных аннулирующих многочленах является следующая

Теорема 29.1. *1. Минимальный аннулирующий многочлен для жорданова ящика* $A = \boxed{J_n(\lambda_0)}$ *может быть определен по формуле*

$$g_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n. \tag{29.27}$$

2. Пусть $(n \times n)$-матрица A приводима к жордановой нормальной форме, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ — ее спектр. Для каждого характеристического корня λ_i определим максимальный размер l_i среди соответствующих ему жордановых ящиков.

Тогда минимальный аннулирующий многочлен для матрицы A задается формулой:

$$g_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}. \qquad (29.28)$$

Доказательство. 1. Докажем, что многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n$ является аннулирующим для матрицы $A = \boxed{J_n(\lambda_0)}$.

[Лишний раз подчеркнем, что обращение с многочленами от нескалярного аргумента требует внимания и осторожности.

Как подставить A в $f(\lambda)$? Можно ли делать это, "не раскрывая скобки" (т. е. не возводя в степень)?

Да, но надо четко понимать, что эта возможность опирается на правило "*значение произведения многочленов на квадратной матрице равно произведению значений*".

В данном случае это правило применяется к степени: значение для степени многочлена равняется степени значения исходного многочлена; см. п. 29.1 и, в частности, формулу (29.8).

Напомним также, что в этой и других аналогичных формулах аргумент может быть как операторным, так и матричным.

Уже в следующем параграфе, при изучении многочленов с матричными коэффициентами, мы столкнемся с более сложной ситуацией, когда правило о значении произведения перестанет быть справедливым.]

Итак,

$$f(A) = (A - \lambda_0 E)^n = (\lambda_0 E + I_1 - \lambda_0 E)^n = I_1^n = O,$$

где $I_1 = \boxed{J_n(0)}$ — нильпотентная (с показателем n) матрица, представленная в примере 29.1 в развернутой записи (29.17).

Значит, $f(\lambda)$ является а.м. для A. М.а.м. для A обязан делить $f(\lambda)$. Однако все нетривиальные (нормализованные) делители $f(\lambda)$ имеют вид $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k$, где $1 \leqslant k < n$.

Ни один из этих многочленов не является аннулирующим для A, поскольку n есть *показатель нильпотентности* для I_1 (никакая меньшая степень этой матрицы не является нулевой).

Следовательно, $f(\lambda) = g_A(\lambda)$ — м.а.м. для ж.я. A.

2. Пусть теперь A — произвольная матрица, приводимая к ж.н.ф., которую мы обозначим J. Согласно второму утверждению предложения 29.2, матрица A имеет такой же м.а.м., что и блочно-диагональная матрица J.

Согласно первому утверждению предложения 29.2, $g_J(\lambda)$ равняется НОК минимальных аннулирующих многочленов для диагональных блоков матрицы J, являющихся ж.я. вида $\boxed{J_k(\lambda_i)}$.

Среди ж.я., отвечающих одному и тому же характеристическому корню λ_i, всегда имеется *ящик наибольшего размера* l_i.

(Напомним "операторный смысл" числовой характеристики l_i. Это — *показатель стабилизации* для л.э. $\psi_i = \varphi - \lambda_i\varepsilon$, связанного с матрицей $B_i = A - \lambda_i E$.

Есть еще и "диаграммный смысл": l_i равняется высоте наивысшего столбца в *столбчатой диаграмме* $\mathcal{D}_i$, отвечающей λ_i.)

В силу первого утверждения настоящей теоремы, многочлен $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$ будет аннулирующим для каждого из ж.я., отвечающих λ_i, и, следовательно, — для всего *большого блока* J_i (см. диагр. 26.2 и 27.1 в прил. 3).

Многочлены $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$, отвечающие всевозможным λ_i $(i = 1, ..., s)$, являются взаимно простыми, и, следовательно, их НОК равняется их произведению (материал о НОД, НОК и взаимной простоте многочленов см. в [A_1, § 38]).

Согласно второму утвереждению предложения 29.2, получим

$$\begin{aligned} g_J(\lambda) &= \text{НОК}(g_{J_1}(\lambda), g_{J_2}(\lambda), \dots, g_{J_s}(\lambda)) = \\ &= \text{НОК}((\lambda-\lambda_1)^{l_1}, (\lambda-\lambda_2)^{l_2}, \dots, (\lambda-\lambda_s)^{l_s}) = \\ &= (\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}, \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (29.28). □

29.3. Теорема Гамильтона — Кэли. Доказанная выше теорема 29.1 не только дает способ вычисления минимального многочлена для квадратной матрицы (примеры будут даны ниже), но и позволяет совсем просто доказать одну из самых знаменитых теорем линейной алгебры.

Теорема 29.2 (теорема Гамильтона — Кэли). *Пусть A — $(n \times n)$-матрица с элементами из поля P. Характеристический многочлен $h_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ для матрицы A является аннулирующим для нее, т. е.*

$$h_A(A) = O. \tag{29.29}$$

Доказательство. Приведенное в начале пункта высказывание о "простоте" доказательства (к изложению которого мы приступаем) нуждается, к сожалению, в некотором уточнении.

Простое и строгое доказательство будет предъявлено лишь *в частном случае*: мы будем предполагать, что матрица A приводима к ж.н.ф. (Если поле P алгебраически замкнуто, то к ж.н.ф. приводима любая матрица.)

Наше рассуждение *в общем случае* будет опираться на (не доказывавшийся в нашем курсе, но уже неоднократно использыванный) факт существования *алгебраического замыкания* для произвольного поля.

Итак, пусть A приводима к ж.н.ф. Согласно предложению 27.2, это равносильно разложимости на линейные множители характеристического многочлена:

$$h_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}. \tag{29.30}$$

В формуле (29.30) показатели степени m_i суть не что иное как алгебраические кратности для собственных значений λ_i; их сумма обязана равняться n.

Согласно теореме 29.1, в разложении на множители м.а.м. $g_A(\lambda)$ в качестве показателей фигурируют размеры наибольших жордановых ящиков (они же — показатели стабилизации) l_i, которые, как известно (см. § 26), не превышают m_i.

Следовательно,

1) минимальный аннулирующий многочлен делит характеристический многочлен:

$$g_A(\lambda) \,|\, h_A(\lambda); \tag{29.31}$$

2) характеристический многочлен является аннулирующим, т. е. имеет место равенство (29.29).

В частном случае теорема доказана.

Общий случай сводится к частному с помощью расширения основного поля P: мы переходим к алгебраическому замыканию $\overline{P} \supset P$ (см. [A_1, § 40]). Матрицу A можно рассматривать над этим, более широким полем. То же самое относится и к характеристическому многочлену $h_A(\lambda)$: его можно считать заданным над $\overline{P}$.

В силу алгебраической замкнутости $\overline{P}$, матрицу A можно над этим полем привести к ж.н.ф. J. (Матрица J будет задана уже не над P, но над $\overline{P}$, однако это нас сейчас не интересует.)

В силу первой части доказательства, будет справедливо равенство (29.9). И хотя получено оно над более широким полем $\overline{P}$, но все элементы матрицы и все коэффициенты ее характеристического многочлена принадлежат P, так что доказываемое равенство справедливо именно над P. $\square$

Замечание 29.2. В разных учебниках по линейной алгебре реализуются различные подходы к построению спектральной теории. Наиболее употребительными являются следующие две методики:

— первая, условно называемая "геометрической", в качестве основного объекта рассматривает линейные операторы (эндоморфизмы), для которых строятся (из собственных и корневых векторов) жордановы базисы; именно она принята в наших основных учебниках [1] и [2] и представлена в настоящем учебном пособии;

— вторая, условно называемая "алгебраической", имеет дело преимущественно с матрицами, причем активно используются матрицы над кольцом многочленов (называемые полиномиальными), для которых строится так называемая *теория Смита*, основанная на взаимодействии алгоритма Гаусса приведения матриц к ступенчатому виду и алгоритма Евклида вычисления НОД для многочленов; ее мы сможим коснуться лишь обзорно (см. следующий параграф).

В зависимости от подхода меняются роль и значение теоремы Гамильтона — Кэли. У нас она доказывается уже после того, как основные результаты (такие, например, как большая теорема Жордана) установлены.

При втором подходе эта теорема является ключевой, с нее начинается развитие теории.

Скажем, в учебнике А. И. Мальцева [17] теорема Гамильтона — Кэли появляется уже в третьем параграфе первой главы, сразу после изучения определителей. Мы настоятельно советуем любознательным читателям ознакомиться с совершенно элементарным доказательством, приведенным в указанной книге. Отметим также, что абсолютной классикой в изложении теории Смита является фундаментальная монография Ф. Р. Гантмахера [11]. Ни один математик, работающий с матрицами, не может обойтись без обращения к этому обстоятельному и мастерски написанному труду.

Ниже, в § 30 (помеченном звездочкой) будет эскизно намечен один из вариантов второго подхода. В частности , мы "передокажем" теорему Гамильтона — Кэли с помощью очень интересного направления в линейной алгебре — теории многочленов с матричными коэффициентами.

Замечание 29.3. Чтобы развлечь и озадачить читателей, в некоторых учебниках (см., например, [26, с. 110]) приводится следующее "глупое доказательство" теоремы 29.2: подставим в характеристический многочлен $h_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ вместо переменной λ матрицу A; получим: $h_A(A) = \det(A \cdot E - A) = \det(A - A) = \det(O) = 0$.

В чем именно состоит глупость этого "доказательства"?

Замечание 29.4. Трудно удержаться от хотя бы краткого рассказа о счастливом детстве маленького Уильяма Гамильтона.

"ГАМИЛЬТОН Уильям Роуан (4.8.1805 — 2.9.1865) — *ирландский математик, чл. Ирландской АН, чл.-кор. Петербургской АН. Родился в Дублине. В три года Г. умел читать, неплохо знал арифметику и географию, в 10 лет стал студентом, к 12 годам он изучил 12 языков. Достав латинский перевод "Начал" Евклида, он изучил это сочинение; с 13 до 17 лет изучал И. Ньютона и П. Лапласа, в 22 года стал профессором астрономии в Дублинском ун-те и директором университетской астрономической обсерватории.*" (А. И. Бородин, А. С. Бугай. "Биографический словарь деятелей в области математики". Киев, Радянська школа, 1979)

Кто-то еще будет говорить о нынешней "акселерации"...

Замечание 29.5. Несколько слов о "присвоении имен теоремам и формулам". Процесс этот ничем и никем не регламентирован, совершенно не предсказуем и противоречив. Бывает (хотя и редко) так, что традиция упорно связывает ту или иную теорему (формулу) с именем ученого, который никогда ее не доказывал.

Гораздо чаще, однако, она закрепляет имена "по справедливости", превыше всего оценивая первый шаг, т. е. "пионерские" работы.

Судите сами: У. Гамильтон опубликовал (в 1853 г) теорему 29.2 для случая (2×2)-матриц; вскоре другой известный (английский) математик (и адвокат) А. Кэли сформулировал (но не доказал) ее в полной общности. Доказательство же было получено немецким математиком Ф. Г. Фробениусом лишь в 1878 г.

Права ли традиция, присваивая этой теореме имя Гамильтона? Наверное, да.

Замечание 29.6. Обсудим вопрос о возможном совпадении минимального и характеристического многочленов для квадратной матрицы A (в предположении, что она приводима к ж.н.ф.).

Характеристический многочлен $h_A(\lambda)$ имеет степень n (совпадающую с размером матрицы). Предположение о приводимости A к

ж.н.ф. равносильно равенству $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$ для суммы алгебраических кратностей собственных значений.

Минимальный многочлен $g_A(\lambda)$ имеет, согласно формуле (29.28), степень, равную сумме

$$l = \sum_{i=1}^{s} l_i \tag{29.32}$$

соответствующих показателей стабилизации.

В силу неравенств $l_i \leqslant m_i$ [или, что равносильно, — факта делимости (29.31)], можно заключить что равенство

$$g_A(\lambda) = h_A(\lambda) \tag{29.33}$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих условий:

— $l_i = m_i$ для всех $i = 1, ..., s$;

— каждая из столбчатых диаграмм $\mathcal{D}_i$ имеет только один столбец;

— в ж.н.ф. J матрицы A каждому собственному значению λ_i отвечает лишь один ж.я.

В частности, если A имеет *простой спектр* (т. е. n попарно различных собственных значений), то равенство (29.33) справедливо.

В заключение пункта разберем два простых примера вычисления минимальных аннулирующих многочленов (которые будут служить продолжениями для ранее рассмотренных примеров на приведение матриц к ж.н.ф.).

Пример 29.3. Снова обратимся к матрице A из демонстрационного примера к ТР2 (см. п. 28.3). Характеристическими корнями для этой матрицы, как мы уже знаем, являются $\lambda_1 = 1$ (кратности $m_1 = 1$) и $\lambda_2 = -2$ (кратности $m_2 = 7$). Найдены уже и показатели стабилизации: $l_1 = 1$ и $l_2 = 4$.

Этого достаточно для представления характеристического и минимального аннулирующего многочленов (в виде разложений на линейные множители):

$$h_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^7;$$

$$g_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^4.$$

Пример 29.4. Рассмотрим теперь матрицу A из п. 2 прил. 1, на которой мы опробовали процедуру-сценарий jord. Характеристический многочлен для нее найден:

$$h_A(\lambda) = (\lambda - 2)^5(\lambda + 1)^6.$$

Вычислены и показатели стабилизации: $l_1 = 4$; $l_2 = 3$. Следовательно,

$$g_A(\lambda) = (\lambda - 2)^4(\lambda + 1)^3.$$

Добавим, что в пакете LinearAlgebra системы Maple предусмотрена специальная команда для вычисления м.а.м.:

> MinimalPolinomial(A, lambda);

29.4.* Функции от матриц. В пункте 29.1 мы определили значения многочленов от квадратных матриц (а также — от л.э.). Введенное в п. 29.2 понятие минимального аннулирующего многочлена позволяет (в случае, если м.а.м. $g_A(\lambda)$ известен) существенно упростить вычисление значения $f(A)$ для многочлена $f \in P[\lambda]$.

В самом деле, можно произвести деление

$$f(\lambda) = g_A(\lambda)q(\lambda) + \widetilde{f}(\lambda), \tag{29.34}$$

где остаток $\widetilde{f}(\lambda)$ — либо нулевой, либо имеет степень, меньшую l [см. (29.32)], и тогда, в соответствии с матричной версией свойств (29.6a) и (29.6b), окажется, что

$$f(A) = (g_A q + \widetilde{f})(A) = g_A(A) \cdot q(A) + \widetilde{f}(A) = O \cdot q(A) + \widetilde{f}(A) = \widetilde{f}(A),$$

т. е.

$$f(A) = \widetilde{f}(A). \tag{29.35}$$

Таким образом, дело сводится к вычислению значения на A многочлена, степень которого меньше, чем сумма всех показателей стабилизации (для A).

Если в качестве поля P фигурирует числовое поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то к матрицам могут буть применены не только полиномиальные функции, но и многие другие, лишь бы они удовлетворяли некоторым простым аналитическим условиям.

А именно, чтобы быть применимой к матрице A, функция $f(\lambda)$ должна быть определена, непрерывна и иметь производные до порядка $l_i - 1$ в каждой точке спектра $\lambda_i \in \sigma(A)$.

По такой функции однозначно определяется многочлен $p(\lambda)$ (называемый *интерполяционным полиномом Эрмита*), степени, не превышающей $l-1$, такой, что в каждой точке λ_i совпадают значения этого многочлена и данной функции, а также — значения всех их (соответствующих) производных, вплоть до порядка $l_i - 1$:

$$p^{(k)}(\lambda_i) = f^{(k)}(\lambda_i);\ k = 0, 1, \dots, l_i - 1;\ i = 1, \dots, s. \tag{29.36}$$

К сожалению, объяснить способ отыскания полинома Эрмита в общем случае (для произвольной функции $f(\lambda)$ описанного класса, по произвольным попарно различным точкам λ_i и произвольным натуральным показателям l_i) здесь было бы затруднительным (ввиду того, что наши читатели-первокурсники пока не обладают соответствующей аналитической подготовкой).

В то же время, в частном случае простого спектра, когда имеется n попарно различных точек и все показатели $l_i = 1$, соответствующий многочлен выписать очень легко. В этой ситуации он именуется *интерполяционным полиномом Лагранжа*, имеет степень не выше $n-1$ и совпадает с данной функцией в точках λ_i. (Вообще: *интерполяция* — это замена какой-либо функции на некоторую более простую функцию, связанную с данной некоторыми соотношениями в некоторых точках.)

Чтобы не "затемнять суть дела многоточиями", мы покажем многочлен Лагранжа для $n = 4$:

$$p(\lambda) = f(\lambda_1)\frac{(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} + f(\lambda_2)\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)} +$$
$$+ f(\lambda_3)\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_4)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)} + f(\lambda_4)\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_4)}.$$

После интерполирования данной функции $f(\lambda)$ полиномом Эрмита $p(\lambda)$ реализуется основная идея: по определению полагается, что

$$f(A) = p(A), \tag{29.37}$$

т. е. фактически вычисление функции от матрицы A заменяется вычислением подходящего многочлена от A. (Обратите внимание на то, что этот многочлен зависит не только от данной функции, но и от данной матрицы.)

Замечание 29.7. Возможен и другой (тоже аналитический) подход к введению функций от матрицы. Он использует понятие сходящегося степенного ряда и поэтому также не может быть строго

изложен в учебнике для первокурсников. Но идея его совсем проста. Продемонстрируем ее на примере *матричной экспоненты*.

Обычная (числовая) экспонента (показательная функция) может быть задана как сумма (сходящегося для всех значений аргумента) степенного ряда

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{k!}x^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(Подробности см. в учебниках по математическому анализу; мы приводили этот ряд — без какого-либо обоснования — в [A_1, п. 34.3].)

Матричная экспонента определяется как сумма матричного степенного ряда

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{k!}A^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \tag{29.38}$$

про который доказывается, что он также сходится для любой матрицы A.

Детальнее познакомиться с двумя упомянутыми (и другими) методами построения теории функций от матриц можно по более подробным учебникам (см., например, [7, 11, 16, 17]).

§ 30.* Каноническая форма Смита для полиномиальной матрицы и ее применения

30.1. Матрицы над кольцом многочленов и алгебраические действия над ними. Бóльшая часть материала данного параграфа сохраняет свою силу над любым *евклидовым кольцом* (чтобы вспомнить, что это такое, обратитесь к п. 38.8 пособия [A_1]). Однако здесь мы не сможем рассматривать линейную алгебру в столь общей и абстрактной ситуации. Это — задача более "продвинутых" (специальных) курсов.

В классе евклидовых колец простейшим является кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, причем линейная алгебра над $\mathbb{Z}$ (или, как еще говорят, *целочисленная линейная алгебра*) является интересной и богатой приложениями наукой. В некоторых учебниках и монографиях, с тем

чтобы охватить два важнейших примера евклидовых колец (кольцо целых чисел и кольцо многочленов над полем), изложение для этих колец ведется параллельно.

В нашем обзоре такой подход также вряд ли приемлем. Стремясь к лаконичности и информативности, мы ограничимся рассмотрением матричной алгебры над кольцом $P[\lambda]$ многочленов (с коэффициентами из поля P). Но читатель должен иметь в виду, что излагаемая теория является важнейшим, но все-таки лишь частным разделом более разветвленной и многообразной науки — *линейной алгебры над коммутативными кольцами.*

Полные доказательства приводимых фактов можно будет прочитать в уже упоминавшихся курсах [11, 16, 17].

Будем рассматривать прямоугольные матрицы вида

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & ... & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & ... & a_{2n}(\lambda) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & ... & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad (30.1)$$

где a_{ij} $(i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n)$ — многочлены над полем P (от переменной λ).

Над такими матрицами (при обычных предположениях об их размерах) выполнимы обычные алгебраические действия: сложение, умножение на скаляр (многочлен), умножение, транспонирование; с сохранением всех законов матричной алгебры (i) — (xvii); см. п. 2.3 в пособии $[A_1]$.

Для квадратных матриц обычным образом (см. п. 23.1 в $[A_1]$) вводится понятие определителя, причем остаются справедливыми почти все основные свойства определителей: полилинейность, антисимметричность, теорема Лапласа, теорема об определителе блочно-треугольной матрицы, мультипликативное свойство и др. (Фактически мы уже неоднократно пользовались "полиномиальными обобщениями" свойств определителя; см., например, пп. 17.1 и 22.1 настоящего пособия.)

"Кольцевая" (в отличие от "полевой") специфика полиномиальной алгебры начинает проявляться при изучении вопроса об *обратимости* квадратной матрицы с полиномиальными элементами.

Для обратимости $(n \times n)$-матрицы $A(\lambda)$ отнюдь не достаточно того, чтобы ее определитель был отличен от нуля. Матрица $A(\lambda)$ обратима тогда и только тогда, когда ее определитель $\det(A(\lambda))$ является

обратимым элементом в кольце $P[\lambda]$, т. е. является ненулевой константой.

Обычным образом определяется *присоединенная* матрица $A^{\vee}(\lambda)$ (как транспонированная к матрице из алгебраических дополнений к элементам данной матрицы). Сохраняет силу основное свойство присоединенной матрицы (см. п. 28.3 в $[A_1]$):

$$A(\lambda) \cdot A^{\vee}(\lambda) = A^{\vee}(\lambda) \cdot A(\lambda) = \det(A(\lambda)) \cdot E, \tag{30.2}$$

а также вытекающий из него способ вычисления *обратной* матрицы (в предположении, что она существует):

$$A^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\det(A(\lambda))} A^{\vee}(\lambda);\ \det(A(\lambda)) = a \in P \setminus \{0\}. \tag{30.2a}$$

Для определения *ранга* полиномиальной матрицы пригодным оказывается "четвертый способ" (через *миноры*; см. п. 30.2 в $[A_1]$). Однако *невырожденность* квадратной матрицы (т. е. максимальность ее ранга) уже не влечет теперь ее обратимость.

Вообще вычисления с минорами приобретают особое значение, как важнейший метод в линейной алгебре над кольцами. Удобно бывает обобщить понятие минора следующим образом.

Выберем в матрице (30.1) какие-либо s строк с номерами, составляющими *мультииндекс* (термин см. в п. 48.1 пособия $[A_1]$)

$$I = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_s);\ i_\alpha \in \{1, \ldots, m\}\ (1 \leqslant \alpha \leqslant s), \tag{30.3}$$

где номера i_α не обязательно различны и не обязательно идут по порядку; аналогичным образом выберем s столбцов:

$$J = (j_1\ j_2\ \ldots\ j_s);\ j_\beta \in \{1, \ldots, n\}\ (1 \leqslant \beta \leqslant s). \tag{30.4}$$

Рассмотрим $(s \times s)$-матрицу, составленную из элементов

$$a_{i_\alpha j_\beta}(\lambda);\ 1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant s.$$

Определитель этой матрицы называется обобщенным минором порядка s для матрицы A и обозначается

$$A\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_s \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_s \end{pmatrix}. \tag{30.5}$$

(Для краткости зависимость от λ не показывается.)

"Настоящие" миноры выделяются тем, что мультииндексы I и J являются строго возрастающими. В силу свойств определителей очевидны следующие свойства обобщенных миноров:

— в случае наличия (в числе выбранных) повторящихся строк или столбцов обобщенный минор будет нулевым;

— если элементы любого из задействованных мультииндексов подвергнуть некоторой перестановке σ, то это повлечет умножение значения минора на $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Незаменимым инструментом в полиномиальной линейной алгебре оказывается так называемая *формула Бине — Коши* (справедливая, конечно, и в обычной ситуации, над полем), которая выражает миноры для произведения матриц через миноры матриц-сомножителей.

Если

$$\underset{m\times p}{C} = \underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B},$$

то для любого натурального s, не превышающего $\min(m,p)$, и для любых двух строго упорядоченных мультииндексов, I [см. (30.3)] и

$$K = (k_1\ k_2\ \ldots\ k_s);\ k_\gamma \in \{1,\ldots,p\}\ (1 \leqslant \gamma \leqslant p), \tag{30.7}$$

справедливо равенство

$$C\begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} = \sum_J A\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \cdot B\begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix}, \tag{30.8}$$

где суммирование ведется по всем строго упорядоченным мультииндексам вида (30.4).

(При $s > n$ таких мультииндексов J нет. Тогда оказывается, что все миноры порядка s в матрице C являются нулевыми.)

Далее вводится (уже специфически кольцевое) понятие *НОДМ*'ов (*наибольших общих делителей всех миноров заданного порядка* в полиномиальной матрице A):

$$d_s^{(A)}(\lambda) = \\ = \text{НОД}\left\{A\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}(\lambda)\ :\ I,\ J\ -\ \text{мультииндексы длины } s\right\}, \tag{30.9}$$

где $s \leqslant \min(m,n)$ и все НОД берутся в кольце многочленов $P[\lambda]$, причем — *нормализованными* (напомним, что благодаря последнему условию они определены однозначно).

Обратим внимание на то, что первый из НОДМ'ов, $d_1^{(A)}(\lambda)$, есть не что иное, как НОД всех элементов матрицы A, и введем (по определению, с целью достижения единообразия в записи последующих формул) нулевой НОДМ: $d_0^{(A)}(\lambda) = 1$.

С помощью теоремы Лапласа о представлении определителя разложением по строке (столбцу) легко доказывается следующее свойство НОДМ'ов:

$$d_{s-1}^{(A)}(\lambda) \,|\, d_s^{(A)}(\lambda);\ s = 1, \dots, r, \tag{30.10}$$

где $r = \operatorname{rank}(A(\lambda))$.

При $r+1 \leqslant s \leqslant \min(m, n)$ все НОДМ'ы обращаются в нуль. Таким образом, *ранг* матрицы (над кольцом многочленов) можно охарактеризовать, как *номер последнего ненулевого НОДМ'а*.

30.2. Каноническая форма Смита и эквивалентность полиномиальных матриц. *Элементарные преобразования* над строками и столбцами полиномиальной $(m \times n)$-матрицы $A = A(\lambda)$ типов I — III определяются вполне аналогично случаю матриц над полем (см. пп. 4.3 и 14.3 в пособии $[A_1]$).

Опишем преобразования над строками:

I: $i^{\text{стр}} \leftrightarrow j^{\text{стр}}$; $i, j \in \{1, ..., m\}$; $i \neq j$;

II: $i^{\text{стр}} + j^{\text{стр}} \cdot c(\lambda)$; $i, j \in \{1, ..., m\}$; $i \neq j$; $c(\lambda) \in P[\lambda]$;

III: $i^{\text{стр}} \cdot c$; $i \in \{1, ..., m\}$; $c \in P \setminus \{0\}$.

Для столбцов все точно так же. "Кольцевая специфика" просматривается в преобразованиях третьего типа: любую строку (любой столбец) полиномиальной матрицы можно домножить на *обратимый многочлен*, т. е. — на ненулевую константу.

Две полиномиальные матрицы, $A = A(\lambda)$ и $B = B(\lambda)$, одинаковых размеров, называются *эквивалентными* [используется знакомое обозначение: $A(\lambda) \sim B(\lambda)$], если от одной из них можно перейти к другой за конечное число шагов, каждый из которых является элементарным преобразованием над строками или столбцами одного из трех описанных выше типов.

Элементарные преобразования над строками (столбцами) $(m \times n)$-матрицы $A(\lambda)$ могут быть реализованы как умножение этой матрицы слева (справа) на соответствующие *элементарные матрицы*, описание которых ничем (кроме того, что скалярами теперь служат многочлены) не отличается от приведенного в пп. 14.3, 14.4 первого пособия.

По-прежнему элементарные матрицы оказываются обратимыми (их определители являются ненулевыми константами). Чтобы "отследить" всю цепочку элементарных преобразований над строками, формируется обратимая полиномиальная матрица $U(\lambda)$ размера $m \times m$, которую можно получить, дублируя каждое из преобразований над строками $A(\lambda)$ точно таким же преобразованием над строками единичной матрицы E_m. Аналогично, элементарные преобразования над столбцами "накапливаются" в обратимой $(n \times n)$-матрице $V(\lambda)$.

В результате эквивалентность матриц

$$A(\lambda) \sim B(\lambda) \tag{30.11}$$

оказывается выраженной соотношением

$$\underset{m\times n}{B}(\lambda) = \underset{m\times m}{U}(\lambda) \cdot \underset{m\times n}{A}(\lambda) \cdot \underset{n\times n}{V}(\lambda), \tag{30.12}$$

с обратимыми полиномиальными матрицами $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$.

[Из формулируемой ниже теоремы 30.2 будет следовать тот факт, что (30.12), в свою очередь, влечет (30.11). С учетом этого, вы можете сравнить исследуемое здесь понятие эквивалентности матриц *над кольцом многочленов* с ранее изученным (см. п. 13.3 настоящего пособия) понятием эквивалентности матриц *над полем*. Особое внимание обратите на предложение 13.3; в теореме 30.2 оно получит очень интересное и нетривиальное обобщение.]

Далее, с помощью формулы Бине — Коши (30.8), легко устанавливается, что эквивалентные полиномиальные матрицы имеют равные ранги и их соответствующие НОДМ'ы одинаковы, т. е. (30.11) влечет

$$\operatorname{rank}(A(\lambda)) = \operatorname{rank}(B(\lambda)) \,(= r) \tag{30.13}$$

и

$$(\forall s = 1, \dots, r)\ \left[d_s^{(A)}(\lambda) = d_s^{(B)}(\lambda)\right]. \tag{30.14}$$

Справедливость обратного утверждения также будет зафиксирована ниже, в теореме 30.2.

А пока мы обратимся к формулировке еще одной из наиболее принципиальных и важных теорем линейной алгебры.

Теорема 30.1 (теорема Смита). *Всякая полиномиальная матрица* $A(\lambda) \in \mathrm{Mat}(m, n, P[\lambda])$ *эквивалентна однозначно определенной матрице вида*

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & & & \\ & \mu_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_r(\lambda) \\ & & & \end{pmatrix}, \tag{30.15}$$

где $r = \mathrm{rank}(A(\lambda))$, *а многочлены* $\mu_s(\lambda) = \mu_s^{(A)}(\lambda)$ *(где* $s = 1, \dots, r$*) являются нормализованными, связаны соотношениями делимости*

$$\mu_s(\lambda) \,|\, \mu_{s+1}(\lambda);\ s = 1, \dots, r-1 \tag{30.16}$$

и могут быть выражены через НОДМ'ы:

$$\mu_s^{(A)}(\lambda) = \frac{d_s^{(A)}(\lambda)}{d_{s-1}^{(A)}(\lambda)};\ s = 1, \dots, r. \tag{30.17}$$

Доказательство (набросок). Сразу введем терминологию, принятую в теории полиномиальных матриц. Матрица (30.15) называется *канонической формой Смита* для данной матрицы $A = A(\lambda)$. Элементы, стоящие на ее диагонали, называются *инвариантными многочленами* (или *инвариантными множителями*) (*и.м.*) для A.

Важнейшую часть доказательства теоремы составляет описание *алгоритма Смита*, основанного на взаимодействии двух других алгоритмов (которые мы уже изучили и которые по праву считаются основой всей алгебраической алгоритмики). Речь идет об *алгоритме Гаусса* приведения матрицы к ступенчатому (и далее — скелетному) виду и *алгоритме Евклида* вычисления наибольшего общего делителя двух многочленов.

Подробно ознакомиться с алгоритмом Смита можно по уже упомянутой в начале параграфа учебной литературе. К этому перечню мы добавим здесь небольшую (но чрезвычайно насыщенную информацией) книгу [18], содержащую весьма лаконичное доказательство теоремы Смита. (Именно его — еще более краткий — пересказ приводится ниже.)

А л г о р и т м 30. 1.
Приведение полиномиальной матрицы к канонической форме Смита

Дана полиномиальная $(m \times n)$-матрица $A = A(\lambda)$. Образуем две единичные матрицы $U = U_0 = E_m$ и $V = V_0 = E_n$. Каждое последующее элементарное преобразование над строками (столбцами) матрицы A дублируется на строках (столбцах) матрицы U (матрицы V).

1. В матрице A выбирается ненулевой многочлен наименьшей степени и перемещается в северо-западный угол.

2. Все остальные элементы первой строки и первого столбца, с помощью приема Гаусса, заменяются на остатки от деления этих элементов на угловой.

2.1. Если все полученные остатки равны нулю, то переходим к этапу 4.

2.2. Если среди остатков есть ненулевые, то тот из них, степень которого минимальна, отправляем в северо-западный угол и возвращаемся к этапу 2.

3. После конечного числа шагов типа 2 мы получаем *нулевое окаймление* для подматрицы $A' = A'(\lambda)$, расположенной в строках и столбцах с номерами, начинающимися с двойки.

3.1. Если все элементы подматрицы A' делятся (без остатка) на угловой элемент (для всей матрицы), то можно констатировать, что первый и.м. $\mu_1(\lambda)$ отщеплен.

3.2. Если же это пока не так, то приходится "портить" окаймление. Делим с остатком все элементы A' на угловой элемент и прибавляем к первой строке строку, содержащую наименьший по степени остаток, после чего снова пытаемся обнулить окаймление (этап 2).

Поскольку степень углового элемента при каждом его *замещении* строго убывает, то рано или поздно будет достигнут первый успех — отщепление $\mu_1(\lambda)$, после чего мы переходим к этапу 4.

4. Приступаем к обработке блока A', повторяя все этапы, начиная с первого.

5. Работа алгоритма завершается, если

— либо будет получен очередной и.м., расположенный в последней строке (или в последнем столбце) матрицы; тогда останется обнулить элементы справа от него (ниже его);

— либо, после получения очередного и.м. (и, с его помощью, нулевого окаймления), следующий юго-восточный блок окажется нулевым.

6. Алгоритм должен возвращать $(m \times n)$-матрицу $S = S(\lambda)$ — каноническую форму Смита для A и две (сформировавшиеся по ходу преобразований) обратимые квадратные полиномиальные матрицы: $(m \times m)$-матрицу $U = U(\lambda)$ и $(n \times n)$-матрицу $V = V(\lambda)$.

Соотношение $S = UAV$, а также требование постоянства и необращения в нуль определителей $\det(U)$ и $\det(V)$, — могут быть использованы для проверки адекватности результатов.

Описание алгоритма закончено. Для завершения доказательства теоремы остается пояснить, что формулы (30.17) выводятся с использованием *инвариантности НОДМ'ов* при элементарных преобразованиях [см. (30.14)].

Эти формулы, в свою очередь, влекут *инвариантность инвариантных многочленов* (чем и оправдывается их название). □

Замечание 30.1. Случай матриц над полем P можно рассмотреть в рамках теории для матриц над кольцом многочленов $P[\lambda]$, считая такие матрицы составленными из многочленов нулевой степени (и нулей). Тогда теорема Смита сводится к теореме о приведении к *скелетному* виду (см. четвертое утверждение теоремы 5.1 в первом пособии): все и.м. в этом случае являются единичными и их количество равно рангу матрицы.

Замечание 30.2. Английский математик Генри Смит доказал (в 1861 г) теорему о приведении к канонической форме для матриц *над кольцом целых чисел.* Теорема 30.1 для полиномиальных матриц доказана лишь в 1878 г, все тем же (см. замечание 29.5) Ф. Г. Фробениусом.

В отечественной учебной литературе имя Г. Смита долгое время практически не упоминалось (нет его, в частности, и в трактате [11]). В британской же традиции роль этого ученого в развитии математики оценивается довольно высоко. Оказывается, именно Г. Смит построил первый в истории пример *фрактала* — канторово совершенное множество, в 1875 г, за восемь лет до Кантора. (Вы пока ничего не слышали об этом замечательном множестве? Не беда, всему свое время.)

Замечание 30.3. В системе Maple предусмотрено несколько вариантов функций, возвращающих для целочисленной или полино-

миальной матрицы A каноническую форму Смита S (над соответствующим кольцом), а также — обратимые матрицы U и V, такие, что $S = UAV$. Одна из возможных версий — команда SmithForm входит в пакет LinearAlgebra. Нет сомнений, что (уже привыкшие к синтаксису Maple-команд) читатели самостоятельно разберутся в соответствующей help-странице.

Вернемся к изучению отношения эквивалентности полиномиальных матриц. Мы уже имеем два набора инвариантов для описания классов эквивалентности:

— ранг r и список НОДМ'ов

$$d(A) = [d_1^{(A)}(\lambda), d_2^{(A)}(\lambda), \dots, d_r^{(A)}(\lambda)]; \tag{30.18}$$

— ранг r и список инвариантных многочленов

$$\mu(A) = [\mu_1^{(A)}(\lambda), \mu_2^{(A)}(\lambda), \dots, \mu_r^{(A)}(\lambda)]. \tag{30.19}$$

Понадобится еще один, во многих отношениях более удобный набор, составленный из так называемых *элементарных делителей* для полиномиальной матрицы.

Получаются они следующим образом: каждый из (отличных от единицы) и.м. разлагается на (нормализованные) *неприводимые* множители (см. [A_1, п. 45.5]).

В сгруппированном разложении (попарно различные) неприводимые множители будут фигурировать в некоторых степенях.

Примарными или *элементарными делителями* (*э.д.*) для инвариантного многочлена $\mu_s^{(A)}(\lambda)$ называются выражения вида $(f(\lambda))^k$, где $f(\lambda)$ — какой-либо из неприводимых множителей для $\mu_s^{(A)}(\lambda)$, k — натуральное число, такое, что $(f(\lambda))^k$ есть *наивысшая степень* указанного неприводимого многочлена, делящая указанный инвариантный многочлен.

В силу соотношений (30.16), всякий неприводимый многочлен, входящий (в какой-то степени) в разложение для некоторого и.м., будет входить (в такой же или в более высокой степени) в разложение для следующего по номеру инвариантного многочлена (если таковой имеется).

Далее формируется список *всех* э.д. (для всех и.м.).

С этой целью как-либо упорядочиваются (нумеруются) все неприводимые многочлены, участвующие в разложении *последнего по счету* и.м.; затем, по группам (каждая из которых отвечает одному

из занумерованных неприводимых многочленов), в порядке невозрастания степеней записываются все э.д. (с данным неприводимым многочленом в основании).

В полученном списке могут быть повторения: каждый из э.д. повторяется столько раз, в скольких разложениях он участвует.

Итоговый список будем обозначать $\delta(A)$ и называть списком э.д. для полиномиальной матрицы A.

В случае *алгебраической замкнутости* поля P неприводимыми являются лишь линейные многочлены, а неприводимые и нормализованные многочлены имеют вид $\lambda - \lambda_0$ и отвечают корням инвариантных многочленов. Элементарные делители в этом случае будут иметь вид $(\lambda - \lambda_0)^k$, где k — кратность λ_0 как корня соответствующего и.м.

Пример 30.1. Продемострируем переход от списка $\mu(A)$ к списку $\delta(A)$. Пусть и.м. уже разложены на неприводимые (линейные) множители:

$$\mu(A) = [\,1,\ \lambda{-}1,\ (\lambda{+}1)^2(\lambda{-}1),\ (\lambda{+}1)^2(\lambda{-}1)^3,\ (\lambda{+}1)^3(\lambda{-}1)^3(\lambda{-}2)^2\,].$$

Прежде всего заметим, что ранг $r = 5$. Затем, группируя по невозрастанию степеней примарные множители, выпишем список э.д.:

$$\begin{aligned}\delta(A) = [\,&(\lambda{+}1)^3,\ (\lambda{+}1)^2,\ (\lambda{+}1)^2;\\ &(\lambda{-}1)^3,\ (\lambda{-}1)^3,\ (\lambda{-}1),\ (\lambda{-}1);\\ &(\lambda{+}2)^2\,].\end{aligned}$$

Обратный переход осуществим, если заранее задан ранг, который не должен быть ниже наибольшей из длин групп (в данном примере самая длинная из групп содержит четыре э.д.).

Если, дополнительно к списку $\delta(A)$, задан ранг $r = 5$, то список и.м. восстанавливается, начиная с последнего:

— $\mu_5^{(A)}(\lambda)$ должно равняться произведению всех начальных элементов во всех группах э.д.;

— $\mu_4^{(A)}(\lambda)$ найдется как произведение всех вторых элементов;

— $\mu_3^{(A)}(\lambda)$ — всех третьих;

— $\mu_2^{(A)}(\lambda)$ — всех четвертых (в данном примере такой элемент всего один);

— $\mu_1^{(A)}(\lambda)$ мы должны взять равным единице, поскольку все э.д. кончились.

Уточним еще одно обстоятельство: матрица $S(\lambda)$ восстанавливается по и.м. или э.д., если, помимо фиксации ранга r, заданы размеры (m и n) этой матрицы (каждый из которых, естественно, не должен быть меньше r).

И, наконец, сформулируем теорему, объединяющую условия, равносильные эквивалентности полиномиальных матриц.

Теорема 30.2. *Пусть $A = A(\lambda)$ и $B = B(\lambda)$ являются полиномиальными матрицами одного и того же размера $m \times n$.*

Следующие шесть утверждений равносильны:

(1) матрицы A и B эквивалентны, т. е. могут быть связаны цепочкой элементарных преобразований;

(2) найдутся обратимые полиномиальные матрицы $U = U(\lambda)$ и $V(\lambda)$, размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, такие, что выполнено соотношение (30.12);

(3) матрицы A и B могут быть приведены к одной и той же канонической форме Смита;

(4) матрицы A и B имеют одинаковые ранги и одинаковые списки НОДМ'ов;

(5) матрицы A и B имеют одинаковые ранги и одинаковые списки и.м.;

(6) матрицы A и B имеют одинаковые ранги и одинаковые (с точностью до порядка групп) списки э.д.

Доказательство. Многие импликации, необходимые для установления равносильности утверждений (1) — (6), уже доказаны выше. За подробностями мы отсылаем читателя к ранее указанным учебникам. Отметим также, что в (простейшем) случае матриц над полем данная теорема сводится к предложению 14.3 из [A_1]. □

30.3. Квадратные матрицы над кольцом многочленов и их представление в виде многочленов с матричными коэффициентами. Обратимся теперь к алгебре квадратных матриц

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{30.20}$$

фиксированного размера $n \times n$, с элементами из кольца многочленов $P[\lambda]$. Обозначим

$$m = \max\{\deg(a_{ij}(\lambda)) \,|\, 1 \leqslant i,\, j \leqslant n\} \tag{30.21}$$

и рассмотрим $A(\lambda)$ как *многочлен* степени m от переменной λ *с матричными коэффициентами* (или, выражаясь короче, *матричный многочлен*):

$$A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\lambda + A_m, \tag{30.22}$$

где матрица $A_k \in L(n, P)$ $(k = 0, \ldots, m)$ составляется из коэффициентов при λ^{m-k} во всех многочленах — элементах матрицы $A(\lambda)$; старший коэффициент A_0, как и полагается, отличен от нуля $(A_0 \neq O)$.

Пример 30.2. Полиномиальную матрицу

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 - \lambda & 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ \lambda - 2 & -3\lambda \end{pmatrix}$$

можно представить как матричный многочлен (степени 2):

$$A(\lambda) = A_0\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = \\ = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Раньше мы рассматривали многочлены над полями или над коммутативными кольцами; множество $L(n, P)$ всех $(n\times n)$-матриц (с алгебраическими действиями сложения и умножения) также является кольцом, но уже (при $n \geqslant 2$) — некоммутативным. Теория многочленов с такими коэффициентами на начальных этапах развивается вполне аналогично теории обычных многочленов, с единственным запретом: при вычислении произведения многочленов

$$\left(\sum_{i=0}^{m} A_i\lambda^{m-i}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{l} B_j\lambda^{l-j}\right) = \sum_{k=0}^{m+l} C_k\lambda^{m+l-k}, \tag{30.23}$$

где

$$C_k = \sum_{\substack{i,j\geqslant 0 \\ i+j=k}} A_iB_j, \tag{30.24}$$

нельзя переставлять матрицы-сомножители в произведениях A_iB_j.

Кроме того, проявляется еще одна особенность (встречающаяся и в коммутативном случае): при умножении многочленов возможно

"падение степени". Действительно, произведение $C_{m+l} = A_m B_l$ двух ненулевых матриц вполне может оказаться нулевым.

Ситуация исправляется, если хотя бы один из двух сомножителей имеет *обратимый старший коэффициент* (такие матричные многочлены называются *регулярными*). В этом случае действует привычное правило: "степень произведения равна сумме степеней".

(Взгляните еще раз на матричный многочлен из примера 30.2. Регулярным он, очевидно, не является.)

Частным случаем регулярных матричных многочленов являются *нормализованные* матричные многочлены, старшим коэффициентом у которых служит единичная матрица.

Два облика, (30.20) и (30.22), одного и того же объекта $A(\lambda)$ оказываются идеально согласованными. Произведение $A(\lambda)B(\lambda)$ можно вычислять

— либо как матричное произведение, в предположении, что матричные элементы перемножаются как многочлены;

— либо как произведение многочленов, в предположении, что коэффициенты многочленов перемножаются как матрицы.

Результат будет один и тот же.

Оговорим еще одну условность, связанную с матричными многочленами. Переменная λ в формуле (30.22) располагается справа от матричных коэффицинтов. Договоримся, что ее можно располагать и слева от них, считая запись

$$A(\lambda) = \lambda^m A_0 + \lambda^{m-1} A_1 + ... + \lambda A_{m-1} + A_m, \qquad (30.22')$$

равносильной записи (30.22).

У такой договоренности есть косвенная мотивировка: скалярная переменная λ трактуется как матричная переменная λE. Напомним, что матрицы такого типа как раз принято именовать *скалярными матрицами* и что они *коммутируют* с любыми матрицами.

Обычному (скалярному) многочлену

$$a(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + ... + a_{m-1}\lambda + a_m \qquad (30.25)$$

можно сопоставить матричный многочлен

$$A(\lambda) = a(\lambda)E = \\ = (a_0 E)\lambda^m + (a_1 E)\lambda^{m-1} + ... + (a_{m-1}E)\lambda + (a_m E), \qquad (30.25\text{m})$$

все коэффициенты которого являются скалярными матрицами.

Переход от полиномиальных квадратных матриц к матричным многочленам дает возможность определения *значений полиномиальной матрицы на матрицах* (т. е. подстановки квадратной матрицы вместо переменной λ в матричный многочлен), подобно тому, как это делалось в п. 29.1 для скалярных многочленов.

Здесь однако приходится рассматривать два (вообще говоря, различных) значения матричного многочлена $\underset{n\times n}{A}(\lambda)$ на (постоянной) матрице $\underset{n\times n}{C}$:

— *правое значение*, соответствующее записи матричного многочлена в виде (30.22):

$$A(\overrightarrow{C}) = A_0C^m + A_1C^{m-1} + ... + A_{m-1}C + A_m; \tag{30.26}$$

— *левое значение*, соответствующее записи (30.22′):

$$A(\overleftarrow{C}) = C^mA_0 + C^{m-1}A_1 + ... + CA_{m-1} + A_m. \tag{30.26′}$$

В простейшем случае, когда все коэффициенты многочлена $A(\lambda)$ являются скалярными матрицами [или, что равносильно, когда этот многочлен происходит от некоторого скалярного многочлена $a(\lambda)$; см. формулу (30.25m)], правое и левое значения (на любой матрице C) не отличаются.

Без труда, как и в скалярном случае, доказывается, что правое (левое) значение суммы $A(\lambda) + B(\lambda)$ двух матричных многочленов на произвольной матрице C равно сумме значений этих многочленов на C. А вот аналогичное свойство

$$(A \cdot B)(\overrightarrow{C}) = A(\overrightarrow{C}) \cdot B(\overrightarrow{C}) \tag{30.27}$$

для правого (и аналогично — левого) значения произведения матричных многочленов оказывается, вообще говоря, ложным.

Пример 30.3. Достаточно рассмотреть два линейных многочлена $A(\lambda) = A_0\lambda$ и $B(\lambda) = B_0\lambda$. Их произведение будет многочленом

$$(A \cdot B)(\lambda) = A_0B_0\lambda^2.$$

Правые значения этих трех многочленов на матрице C равны соответственно:

$$A(\overrightarrow{C}) = A_0C;\ B(\overrightarrow{C}) = B_0C;\ (A \cdot B)(\overrightarrow{C}) = A_0B_0C^2.$$

Легко подобрать матрицы-коэффициенты так, чтобы равенство $A_0B_0C^2 = A_0CB_0C$ оказалось ложным.

Ясно, однако, что для многочленов вида (30.25m) соотношение (30.27) справедливо (и, как уже объяснялось, стрелочки в нем не нужны).

Из материала первого семестра (см. [A_1, §§ 37, 38, 45]) нам известно, какую большую роль в теории многочленов играет деление с остатком. В случае многочленов над полем любой многочлен можно (однозначно) поделить с остатком на любой ненулевой многочлен; в случае многочленов над кольцом добавляется (см. замечание 37.2 в [A_1]) условие: старший коэффициент делителя должен быть обратимым.

Примерно так же обстоит дело для матричных многочленов: надо требовать, чтобы делитель был *регулярным* многочленом. Однако некоммутативность матричного умножения приводит к тому, что определены два различных деления с остатком: правое и левое.

Переходим к точным формулировкам. Для любых двух матричных многочленов, $A(\lambda)$ (степени m) и $B(\lambda)$ (степени l), в предположении, что $A(\lambda)$ регулярен (т. е. его старший коэффициент A_0 является обратимой матрицей), существуют и однозначно определены матричные многочлены:

— $\overrightarrow{Q}(\lambda)$ (называемый правым неполным частным);

— $\overrightarrow{R}(\lambda)$ (называемый правым остатком и — либо нулевой, либо имеющий степень, меньшую m);

— $\overleftarrow{Q}(\lambda)$ (называемый левым неполным частным);

— $\overleftarrow{R}(\lambda)$ (называемый левым остатком и — либо нулевой, либо имеющий степень, меньшую m),

такие, что справедливы (соответственно) равенства:

$$B(\lambda) = \overrightarrow{Q}(\lambda)A(\lambda) + \overrightarrow{R}(\lambda); \tag{30.28}$$

$$B(\lambda) = A(\lambda)\overleftarrow{Q}(\lambda) + \overleftarrow{R}(\lambda). \tag{30.28$'$}$$

Обратите внимание на то, что *правое частное пишется слева.* В этом нет ничего удивительного, поскольку справа пишется *правый делитель.* (Со второй формулой — все "с точностью до наоборот".)

Доказательство сформулированных выше фактов ничем существенным (кроме непременного слежения за порядком сомножителей) не отличается от доказательства в скалярном случае.

Если правый (левый) остаток обращается в нуль, то говорят, что $A(\lambda)$ является *правым* (*левым*) *делителем* для $B(\lambda)$. Это фиксируется с помощью следующих обозначений:

$$[\,A(\lambda)\ \overrightarrow{|}\ B(\lambda)\,] \Leftrightarrow [\,\exists\,\overrightarrow{Q}(\lambda)\,]\,[\,B(\lambda) = \overrightarrow{Q}(\lambda)A(\lambda)\,]; \tag{30.29}$$

$$[\,A(\lambda)\ \overleftarrow{|}\ B(\lambda)\,] \Leftrightarrow [\,\exists\,\overleftarrow{Q}(\lambda)\,]\,[\,B(\lambda) = A(\lambda)\overleftarrow{Q}(\lambda)\,]. \tag{30.29'}$$

[В принципе, определения (30.29) и (30.29′) имеют смысл и без предположения о регулярности $A(\lambda)$.]

Могут быть определены и изучены два понятия НОД: *наибольший общий левый делитель* (*НОлД*) и *наибольший общий правый делитель* (*НОпД*) для двух матричных многочленов, но мы не будем останавливаться на этих вопросах.

Переходим к изложению материала, связанного с так называемой *матричной теоремой Безу*.

Здесь нам вновь понадобится понятие *характеристической матрицы* (см. п. 17.1 в настоящем пособии)

$$C(\lambda) = E\lambda - A, \tag{30.30}$$

соответствующей квадратной матрице A (с элементами из поля P). Полиномиальная матрица (30.30) является нормализованным и, следовательно, регулярным матричным двучленом первой степени.

Значит, на нее можно поделить с остатком (как слева, так и справа) любой матричный многочлен

$$F(\lambda) = F_0\lambda^m + F_1\lambda^{m-1} + \ldots + F_{m-1}\lambda + F_m. \tag{30.31}$$

Справедлива следующая

Теорема 30.3 (матричная теорема Безу). *1. Правым (левым) остатком от деления матричного многочлена $F(\lambda)$ на двучлен $E\lambda - A$ служит правое (левое) значение $F(\lambda)$ на матрице A, т. е. справедливы формулы:*

$$F(\lambda) = \overrightarrow{Q}(\lambda)(E\lambda - A) + F(\overrightarrow{A}); \tag{30.32}$$

$$F(\lambda) = (E\lambda - A)\overleftarrow{Q}(\lambda) + F(\overleftarrow{A}). \tag{30.32'}$$

2. Двучлен $E\lambda - A$ является правым (левым) делителем матричного многочлена $F(\lambda)$ тогда и только тогда, когда правое значение $F(\overrightarrow{A})$ (левое значение $F(\overleftarrow{A})$) данного многочлена на матрице A является нулевой матрицей. В формульной записи:

$$[\,E\lambda - A \overrightarrow{\ |\ } F(\lambda)\,] \Leftrightarrow [\,F(\overrightarrow{A}) = O\,]; \tag{30.33}$$

$$[\,E\lambda - A \overleftarrow{\ |\ } F(\lambda)\,] \Leftrightarrow [\,F(\overleftarrow{A}) = O\,]. \tag{30.33'}$$

Доказательство данной теоремы довольно поучительно ввиду наличия некоторых "ложных следов". Начало рассуждения совершенно очевидно: согласно общим результатам о делении матричных многочленов, при правом делении $F(\lambda)$ на $E\lambda - A$ получится (правый) остаток, являющийся постоянной матрицей:

$$F(\lambda) = \overrightarrow{Q}(\lambda)(E\lambda - A) + R_0. \tag{30.34}$$

Теперь, как и в скалярном случае (см. п. 39.2 в первом пособии), в формулу (30.34) следует вместо переменной λ подставить матрицу A и учесть при этом, что значение на A двучлена $E\lambda - A$ равно нулевой матрице.

Однако, в отличие от скалярной ситуации, для правого (или левого) значения матричных многочленов перестает быть справедливым правило "значение произведения равно произведению значений". Значит, скалярное рассуждение не пройдет. Что делать?

Надо "честно" перемножить правое частное $\overrightarrow{Q}(\lambda)$, являющееся матричным многочленом степени $m-1$, и линейный двучлен $E\lambda - A$:

$$\overrightarrow{Q}(\lambda)\,(E\lambda - A) = (Q_0\lambda^{m-1} + Q_1\lambda^{m-2} + \ldots + Q_{m-2}\lambda + Q_{m-1})(E\lambda - A) =$$
$$= Q_0\lambda^m + (Q_1 - Q_0A)\lambda^{m-1} + \ldots + (Q_{m-1} - Q_{m-2}A)\lambda - Q_{m-1}A,$$

а затем вычислить правое значение произведения на матрице A и убедиться, что оно равно нулевой матрице. Отсюда можно будет заключить, что правое значение левой части равенства (30.34) на матрице A совпадает с постоянной матрицей R_0.

Остальное все — как в скалярном случае. □

Между прочим, из матричной теоремы Безу легко вывести теорему Гамильтона — Кэли (см. теорему 29.2 выше).

Рассмотрим (скалярный) характеристический многочлен

$$h_A(\lambda) = \det(E\lambda - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n \qquad (30.35)$$

для $(n \times n)$-матрицы A и превратим его в матричный многочлен

$$H(\lambda) = h_A(\lambda)E. \qquad (30.35\text{m})$$

Далее рассмотрим матрицу $(E\lambda - A)^\vee$, присоединенную к характеристической; она также будет полиномиальной, степени $n-1$ по λ (поскольку составлена из алгебраических дополнений к элементам полиномиальной матрицы). Воспользуемся свойством (30.2):

$$(E\lambda - A)^\vee \cdot (E\lambda - A) = \det(E\lambda - A) \cdot E = h(\lambda)E = H(\lambda). \qquad (30.36)$$

Из (30.36) следует, что двучлен $E\lambda - A$ является правым (а можно заметить, что и левым) делителем матричного многочлена (30.35m). По теореме Безу, правое значение этого многочлена на матрице A должно равняться нулю. Но многочлен (30.35m) произошел от скалярного многочлена (30.35) и его значение (все равно: правое или левое) на матрице A совпадает со значением на A скалярного многочлена (30.35).

Тем самым доказано равенство $h_A(A) = O$, составляющее содержание теоремы Гамильтона — Кэли.

Замечание 30.4. Maple оперативно реагирует на вновь возникающие потребности вычислительной алгебры. Так, в последних версиях системы появился новый пакет MatrixPolynomialAlgebra, который умеет выполнять с матричными многочленами все, что описано (или упомянуто) выше (например, вычислять НОлД'ы и НОпД'ы.)

30.4. Подобие квадратных матриц (над полем) и эквивалентность их характеристических матриц (над кольцом многочленов). В предыдущем пункте на арене матричной полиномиальной алгебры уже появились линейные матричные двучлены вида $E\lambda - A$. Каждый такой двучлен связан с некоторой квадратной матрицей $A \in L(n, P)$, и, как мы покажем в данном пункте, эта связь весьма интересна с точки зрения спектральной теории.

Следующая теорема служит своего рода "мостом" между алгеброй квадратных матриц над полем, в которой наибольший интерес представляет выявление критериев *подобия*, и алгеброй полиномиальных квадратных матриц, где основным рабочим инструментом служат *эквивалентные* преобразования матриц, т. е. элементарные преобразования над их строками и столбцами.

Теорема 30.4. *Квадратные матрицы A, $B \in L(n, P)$ подобны тогда и только тогда, когда их характеристические матрицы $E\lambda - A$ и $E\lambda - B$ эквивалентны.*

Доказательство. 1. В одну сторону утверждение теоремы совершенно очевидно: если $A \backsim B$, т. е.

$$B = T^{-1}AT \tag{30.37}$$

для некоторой обратимой матрицы T, то, как мы уже знаем из предложения 17.1, их характеристические матрицы также будут подобны:

$$E\lambda - B = T^{-1}(E\lambda - A)T. \tag{30.38}$$

Формуле (30.37) можно придать вид

$$E\lambda - B = U(\lambda)(E\lambda - A)V(\lambda), \tag{30.39}$$

с постоянными (в данном случае) обратимыми $(n \times n)$-матрицами $U(\lambda) = T^{-1}$ и $V(\lambda) = T$.

2. Доказательство обратного утверждения гораздо менее тривиально. Пусть выполнено (30.39) с некоторыми (обратимыми над кольцом многочленов) матрицами $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$. Докажем [с явным указанием обратимой матрицы $T \in GL(n, P)$], что матрицы A и B связаны соотношением типа (30.37).

С этой целью перепишем соотношение (30.39) в виде

$$W(\lambda)(E\lambda - B) = (E\lambda - A)V(\lambda), \tag{30.40}$$

где $W(\lambda) = (U(\lambda))^{-1}$ также [в силу постоянства $\det(U(\lambda))$] является полиномиальной матрицей.

Затем поделим с остатком (как матричные многочлены)

— $W(\lambda)$ слева на $E\lambda - A$:

$$W(\lambda) = (E\lambda - A)W_1(\lambda) + M_0; \tag{30.41}$$

— $V(\lambda)$ справа на $E\lambda - B$:

$$V(\lambda) = V_1(\lambda)(E\lambda - B) + N_0, \tag{30.42}$$

где, согласно матричной теореме Безу,

$$M_0 = W(\overleftarrow{A}) \tag{30.43}$$

является левым значением матричного многочлена $W(\lambda)$ на матрице A, а

$$N_0 = V(\overrightarrow{B}) \tag{30.44}$$

— правым значением $V(\lambda)$ на B.

Подставляя выражения (30.41) и (30.42) в равенство (30.40) и перераспределяя члены по разным стронам этого равенства, мы придем к соотношению

$$(E\lambda - A)(W_1(\lambda) - V_1(\lambda))(E\lambda - B) = \\ = -M_0(E\lambda - A) + (E\lambda - A)N_0. \tag{30.45}$$

В правой части (30.45) стоит матричный многочлен степени, не превышающей единицы; в левой — произведение трех матричных многочленов, два из которых (крайние) являются регулярными линейными двучленами. Если бы средний сомножитель в левой части был отличен от нуля, то вся левая часть имела бы степень не ниже двух, и равенство было бы невозможным.

Выходит, что

$$W_1(\lambda) = V_1(\lambda), \tag{30.47}$$

и равенство (30.45) сводится к

$$M_0(E\lambda - A) = (E\lambda - A)N_0. \tag{30.48}$$

Раскрывая скобки в (30.48) и приравнивая члены при первой и нулевой степенях λ, мы получим соотношения:

$$M_0 = N_0; \tag{30.49}$$

$$M_0 B = AN_0. \tag{30.50}$$

Будь нам известно, что матрица M_0 обратима, мы немедленно получили бы из (30.49) и (30.50) соотношение подобия (30.37), с сопрягающей матрицей

$$T = M_0 = N_0 = V(\overrightarrow{B}). \tag{30.51}$$

Значит, нам следует заняться доказательством обратимости M_0.

В силу определения $W(\lambda)$, имеет место равенство

$$E = W(\lambda)U(\lambda). \tag{30.52}$$

Снова применяя матричную теорему Безу, поделим $U(\lambda)$ слева на $E\lambda - B$:

$$U(\lambda) = (E\lambda - B)U_1(\lambda) + K_0, \tag{30.53}$$

где

$$K_0 = U(\overleftarrow{B}). \tag{30.54}$$

Подставляя выражения (30.41) и (30.53) в (30.52), раскрывая скобки и пользуясь равенствами (30.48), (30.49), (30.42) и (30.47) [именно в таком порядке], мы получим следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} E &= \big((E\lambda - A)W_1(\lambda) + M_0\big) \cdot \big((E\lambda - B)U_1(\lambda) + K_0\big) = \\ &= (E\lambda - A)W_1(\lambda)(E\lambda - B)U_1(\lambda) + \\ &+ (E\lambda - A)W_1(\lambda)K_0 + M_0(E\lambda - B)U_1(\lambda) + M_0K_0 = \\ &= M_0K_0 + (E\lambda - A)W_1(\lambda)(E\lambda - B)U_1(\lambda) + \\ &+ (E\lambda - A)W_1(\lambda)K_0 + (E\lambda - A)M_0U_1(\lambda) = \\ &= M_0K_0 + (E\lambda - A)F(\lambda), \end{aligned} \tag{30.55}$$

где

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= W_1(\lambda)(E\lambda - B)U_1(\lambda) + W_1(\lambda)K_0 + M_0U_1(\lambda) = \\ &= \big(W_1(\lambda)(E\lambda - B) + M_0\big)\,U_1(\lambda) + W_1(\lambda)K_0 = \\ &= W(\lambda)U_1(\lambda) + W_1(\lambda)K_0. \end{aligned} \tag{30.56}$$

Замечаем, что равенство (30.55) было бы невозможным в случае ненулевого матричного многочлена (30.56), ибо тогда его правая часть имела бы степень не ниже первой, в то время как левая — имеет нулевую степень.

Значит, $F(\lambda) = O$ и (30.55) сводится к

$$E = M_0K_0. \tag{30.57}$$

Обратимость матрицы M_0 доказана.

Окончательный вывод: эквивалентность (30.39) характеристических матриц для матриц A и B влечет подобие (30.37) для самих этих матриц; в качестве сопрягающей матрицы T можно выбрать правое значение (30.51). □

30.5. Инвариантные многочлены и элементарные делители для квадратных матриц над полем. Критерий подобия. Как следует из теоремы 30.4, задача о подобии квадратных матриц над полем сводится к задаче об эквивалентности соответствующих характеристических матриц над кольцом многочленов, которая, в свою очередь, в силу теоремы 30.2, сводится к сравнению либо инвариантных многочленов, либо элементарных делителей для характеристических матриц. В связи с этим нам предстоит применить материал п. 30.2 в специальном случае, когда полиномиальные матрицы имеют вид нормализованных линейных двучленов $C(\lambda) = E\lambda - A$.

Прежде всего отметим, что характеристическая матрица всегда *невырожденна*, т. е. $\operatorname{rank}(C(\lambda)) = n$ (над кольцом многочленов $P[\lambda]$). В самом деле, *старший НОДМ* для $C(\lambda)$ есть не что иное, как характеристический многочлен для A:

$$d_n^{(C)}(\lambda) = h_A(\lambda). \tag{30.58}$$

(Имеется лишь один минор n-го порядка, совпадающий с определителем матрицы $C(\lambda)$. Определитель этот имеет степень n по λ и, разумеется, отличен от нуля. Напомним, что в случае матриц над кольцом невырожденность отнюдь не влечет обратимость. Для обратимости матрицы нужно, чтобы ее определитель являлся ненулевой константой.)

Далее, условимся о сопоставлении (постоянной) матрице A полиномиальных характеристик (таких как и.м. и э.д.), вычисляемых по соответствующей характеристической матрице. Другим словами, мы будем говорить об инвариантных многочленах (элементарных делителях) для A, понимая под этим и.м. (э.д.) для $C = C(\lambda)$. Например, "список и.м. $\mu(A)$" надо понимать (и вычислять) как "список и.м. $\mu(C)$".

Перемножив все n и.м. для A, с учетом формул (30.17), получим:

$$\begin{aligned}\mu_1^{(A)}(\lambda) \cdot \mu_2^{(A)}(\lambda) \cdot \ldots \cdot \mu_{n-1}^{(A)}(\lambda) \cdot \mu_n^{(A)}(\lambda) = \\ = d_1^{(A)}(\lambda) \cdot \frac{d_2^{(A)}(\lambda)}{d_1^{(A)}(\lambda)} \cdot \ldots \cdot \frac{d_{n-1}^{(A)}(\lambda)}{d_{n-2}^{(A)}(\lambda)} \cdot \frac{d_n^{(A)}(\lambda)}{d_{n-1}^{(A)}(\lambda)} = \\ = d_n^{(A)}(\lambda) = h_A(\lambda),\end{aligned} \tag{30.59}$$

т. е. произведение всех и.м. равно характеристическому многочлену.

То же самое можно сказать и об элементарных делителях (являющихся примарными множителями в разложениях инвариантных многочленов): произведение их всех также равно $h_A(\lambda)$.

С помощью несложного вычисления (см. любой из указанных в начале параграфа учебников) проясняется смысл старшего инвариантного многочлена. Он совпадает с минимальным аннулирующим многочленом (см. п. 29.2):

$$\mu_n^{(A)}(\lambda) = g_A(\lambda). \tag{30.60}$$

(Это дает удобный способ вычисления м.а.м.: следует привести к канонической форме Смита характеристическую матрицу и взять последний из диагональных элементов.)

Из теоремы 30.2, с учетом теоремы 30.4, получается следующий критерий подобия квадратных матриц.

Теорема 30.5. *Две квадратных матрицы $A, B \in L(n, P)$ подобны тогда и только тогда, когда совпадают списки их инвариантных многочленов (элементарных делителей):*

$$[\, A \backsim B \,] \Leftrightarrow [\, \mu(A) = \mu(B) \,] \Leftrightarrow [\, \delta(A) = \delta(B) \,]. \ \square \tag{30.61}$$

[Ранее был получен и представлен в предложении 27.4 другой критерий подобия матриц (в терминах итерированных дефектов).]

30.6. Второй способ приведения квадратной матрицы к ж.н.ф. Предположим теперь, что характеристический многочлен $h_A(\lambda)$ разлагается на линейные множители. Тогда тем же свойством будут обладать все и.м. [поскольку они делят $h_A(\lambda)$].

Элементарные делители в этом случае будут имет вид $(\lambda - \lambda_i)^k$, где λ_i $(i = 1, ..., s)$ являются характеристическими корнями для матрицы A. Сумма всех показателей k (по всем э.д.) обязана равняться n. Для фиксированного корня λ_i при переходе от какого-либо и.м. к следующему значение показателя неубывает.

Сконструируем блочно-диагональную $(n \times n)$-матрицу J (с диагональными блоками — жордановыми ящиками) по следующему принципу:

— каждому э.д. $(\lambda - \lambda_i)^k$ соответствует ж.я. $\boxed{J_k(\lambda_i)}$;

— ящики, отвечающие одному и тому же характеристическому корню, группируются (в порядке невозрастания размеров) в большие блоки A_i.

Для обоснования того факта, что матрица J служит ж.н.ф. для A, досточно найти э.д. для J и убедиться в том, что они такие же, как у данной матрицы.

Делается это в два этапа.

1. Сначала доказывается вспомогательный результат: список э.д. для блочно-диагональной матрицы может быть получен объединением соответствующих списков для диагональных блоков.

2. Затем, рассмотрев НОДМ'ы для характеристической матрицы

$$E\lambda - H = \begin{pmatrix} \lambda-\lambda_i & -1 & & & \\ & \lambda-\lambda_i & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda-\lambda_i & -1 \\ & & & & \lambda-\lambda_i \end{pmatrix}, \qquad (30.62)$$

отвечающей одному жорданову ящику $H = \boxed{J_k(\lambda_i)}$, мы обнаруживаем, что все они равны единице, кроме последнего, равного $(\lambda-\lambda_i)^k$. (Дело в том, что для любого порядка, меньшего k, можно указать минор, по модулю равный единице.)

Следовательно, все и.м. для H также равны единице, кроме старшего: $\mu_n^{(H)}(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^k$. А значит, $(\lambda-\lambda_i)^k$ будет единственным э.д. для H.

Реализация намеченного выше плана приводит нас к новой версии теоремы Жордана [ср. с теоремой 27.2 (БТЖ)].

Теорема 30.6 (теорема Жордана). *Квадратная матрица приводима к ж.н.ф. тогда и только тогда, когда ее характеристический многочлен разлагается на линейные множители; при этом каждому* э.д. $(\lambda-\lambda_i)^k$ *отвечает ж.я.* $\boxed{J_k(\lambda_i)}$. □

Кратко опишем второй (напомним, что его иногда называют "алгебраическим") алгоритм приведения матрицы к ж.н.ф.

А л г о р и т м 30. 2.
Приведение квадратной матрицы к жордановой нормальной форме

Дана $(n \times n)$-матрица A с элементами из поля P. Требуется определить ж.н.ф. J для матрицы A (если она существует), а также вычислить матрицу перехода T, такую, что $J = T^{-1}AT$.

1. Составляем *характеристическую матрицу* $C(\lambda) = E\lambda - A$ и (с помощью алгоритма 30.1) приводим ее к *канонической форме Смита* $S = S(\lambda)$; при этом также вычисляются (путем попутного преобразования единичных матриц $U_0 = V_0 = E_n$) обратимые квадратные матрицы $U = U(\lambda)$ и $V = V(\lambda)$, отвечающие за действия над строками и столбцами соответственно и такие, что $S = UCV$. (Для нужд настоящего алгоритма достаточно точно отслеживать *преобразования над столбцами*, поскольку далее используется лишь матрица V.)

2. Считываем из матрицы S диагональные элементы — *инвариантные многочлены*: $\mu_1(\lambda), \mu_2(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)$; каждый из них разлагаем на *неприводимые* множители. Если все они окажутся *линейными*, т. е. будут иметь вид $\lambda - \lambda_i$, то ж.н.ф. существует.

3. Определяем список *характеристических корней* (спектр) для матрицы A, выявляя — по разложению *старшего и.м.* $\mu_n(\lambda)$ — все встречающиеся в (этом и предыдущих) разложениях элементы λ_i $(i = 1, \dots, s)$. Элементы спектра должны быть упорядочены (занумерованы), произвольным (но неизменным в дальнейшем) образом.

4. Выявляем — по разложениям всех и.м. — все *элементарные делители*, т. е. *примарные* множители вида $(\lambda - \lambda_i)^k$ в разложениях и.м., и образуем из них список $\delta(A)$, руководствуясь следующим принципом: характеристические корни идут в том порядке, который установлен на предыдущем этапе; отвечающие каждому из них э.д. упорядочены по невозрастанию степеней.

5. Составляем блочно-диагональную матрицу J, в которой каждому э.д. $(\lambda - \lambda_i)^k$ из списка $\delta(A)$ соответствует ж.я. $\boxed{J_k(\lambda_i)}$. Порядок размещения ящиков должен быть строго согласован с порядком, в котором занумерованы э.д. Это и будет искомая ж.н.ф. для матрицы A.

6. Составляем характеристическую матрицу $G(\lambda) = E\lambda - J$ и (точно так же, как это делалось на этапе 1) приводим ее к канонической форме Смита, которая должна в точности совпасть с (полученой на первом этапе) матрицей S. Попутно будут вычислены обратимые матрицы $W = W(\lambda)$ и $Y = Y(\lambda)$, такие, что $S = WGY$. (Для дальнейшего достаточно регистрировать лишь *преобразования над столбцами* и предъявить в итоге матрицу Y.)

7. Из соотношения $UCV = WGY$ выражаем матрицу G:

$$G(\lambda) = P(\lambda)C(\lambda)Q(\lambda), \tag{30.63}$$

где

$$P = W^{-1}U;\ Q = VY^{-1}. \tag{30.64}$$

И снова, для дальнейшего достаточно знать только матрицу Q, и определить ее можно иначе, минуя формулы (30.64). С этой целью надо взять матрицу V и применить к ней элементарные *преобразования над столбцами*, обратные к тем, что были зарегистрированы на этапе 6, причем — в обратном порядке (противоположном порядку регистрации).

8. Полученную на предыдущем этапе полиномиальную матрицу $Q = Q(\lambda)$ представляем как *многочлен с матричными коэффициентами* (разлагаем по степеням λ). Затем вычисляем *правое значение* этого матричного многочлена на матрице J:

$$T = Q(\overrightarrow{J}). \tag{30.65}$$

Матрица (30.65) будет искомой *матрицей перехода*.

Выполнение соотношения $J = T^{-1}AT$ подлежит проверке, которую проще осуществлять в форме $TJ = AT$, но — с обязательным контролем необращения в нуль $\det(T)$.

Пример 30.4. Второй алгоритм приведения квадратной матрицы к ж.н.ф. является заметно более трудоемким по сравнению с первым. В основном это происходит за счет трудоемкости алгоритма Смита. Скажем, даже простейшие "гауссовы" действия при получении нулевого окаймления требуют значительно больше усилий, поскольку должны производиться над многочленами. Кроме того, этим преобразованиям должны предшествовать "евклидовы" действия: деление с остатком многочленов исходного окаймления на угловой многочлен. Вручную вряд ли стоит браться за матрицы порядка выше пятого. Однако, если разрешено выполнение упомянутых рутинных операций с помощью компьютерных алгебраических систем, то можно преуспеть в решении достаточно содержательных примеров.

Исследуем вопрос о приводимости к ж.н.ф. (6×6)-матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -10 & 0 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Составляем характеристическую матрицу:

$$C_0 = C = E\lambda - A = \begin{pmatrix} \lambda{-}4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & \lambda{+}1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & \lambda{-}2 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & \lambda{+}1 & 0 & -2 \\ 10 & 0 & -2 & 0 & \lambda{+}1 & -4 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda{+}3 \end{pmatrix}$$

и вводим "затравочные" (единичные) матрицы: $U_0 = V_0 = E_6$.

1.1. Начинаем преобразования алгоритма 30.1. Матрица C_0 имеет степень 1 по λ. В северо-западный угол следует переставить многочлен нулевой степени, будет лучше — если единичный. Выберем с этой целью третий элемент первой строки, сделаем его угловым, а затем получим нулевое окаймление в первой строке и первом столбце. (С единицей в углу это делать совсем просто: например, новый третий элемент обнуляется элементарным преобразованием $3^{\text{стб}} + 1^{\text{стб}} \cdot (-\lambda + 4)$.)

Каждое действие над строками (столбцами) матрицы C_0 дублируется точно таким же действием над строками матрицы U_0 (столбцами матрицы V_0). Так осуществляется первый "большой" шаг. На самом деле, конечно, производится столько элементарных ("малых") шагов, сколько нужно для перемещения выбранного элемента в угол и последующего обнуления тех из окаймляющих элементов, которые были ненулевыми. В итоге получаем матрицы:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda{+}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2{+}6\lambda{-}11 & 0 & 0 & -2\lambda{+}7 \\ 0 & 0 & \lambda{+}1 & \lambda{+}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda{+}2 & 0 & \lambda{+}1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda{-}1 & 0 & 0 & \lambda{+}1 \end{pmatrix};$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda{+}2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda{+}4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все элементы юго-восточного (5×5)-блока, дополнительного к угловому элементу, должны делиться на этот элемент.

В данном случае это выполнено автоматически, поскольку угловой элемент равен единице. Так что, первый "большой" шаг можно считать завершенным. (Первый инвариантный многочлен "отщеплен" и оказался единичным.)

1.2. Переходя ко второму диагональному элементу, мы можем преждевременно обрадоваться: второе окаймление уже готово! Увы, это не так. Не все элементы юго-восточного (4×4)-блока, дополнительного к северо-западному диагональному (2×2)-блоку, делятся без остатка на $\lambda + 1$: ненулевые элементы в третьей строке дают при делении на $\lambda + 1$ остатки -18 и 9.

Далее понадобятся не только остатки, но и неполные частные. Поэтому должны быть выписаны все формулы типа:

$$-\lambda^2 + 6\lambda - 11 = (\lambda + 1)(-\lambda + 7) - 18.$$

Из остатков следует выбрать минимальный по степени и прибавить соответствующую строку к рассматриваемой в текущий момент (в данном случае — ко второй). У нас оба ненулевых остатка в третьей строке имеют нулевую степень.

Портим окаймление: $2^{\text{стр}} + 3^{\text{стр}}$, после чего снова попытаемся его восстановить [уже с другим угловым элементом в позиции $(2, 2)$]. При этом, помимо "гауссовых", уже потребуются "евклидовы" действия. А именно, появившиеся в третьем и шестом столбцах второй строки многочлены $-\lambda^2 + 6\lambda - 11$ и $-2\lambda + 7$ необходимо заменить на остатки при их делении на $\lambda + 1$.

Делается это по Гауссу, с использованием ранее найденных неполных частных.

Например: $3^{\text{стб}} + 2^{\text{стб}} \cdot (\lambda - 7)$, второй столбец перед прибавлением к третьему домножается на многочлен, противоположный к соответствующему неполному частному.

Не забудем про дублирование преобразований на следящих матрицах U и V. Перед повторным обнулением второго окаймления будем иметь:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda{+}1 & -18 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -\lambda^2{+}6\lambda{-}11 & 0 & 0 & -2\lambda{+}7 \\ 0 & 0 & \lambda{+}1 & \lambda{+}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda{+}2 & 0 & \lambda{+}1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda{-}1 & 0 & 0 & \lambda{+}1 \end{pmatrix};$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda{+}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda{+}2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda{-}6 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda{+}4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После перестановки девятки в угловую позицию, умножения второй строки на $1/9$ (с целью нормализации) и последующего обнуления второго окаймления получатся матрицы:

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2{+}2\lambda{+}3 & 0 & 0 & (2\lambda^2{-}5\lambda{-}7)/9 \\ 0 & 0 & \lambda{+}1 & \lambda{+}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda{+}2 & 0 & \lambda{+}1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda{+}1 & 0 & 0 & (-\lambda^2{-}2\lambda{-}1)/9 \end{pmatrix};$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-\lambda{+}1)/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ (-2\lambda^2{+}11)/9 & (2\lambda{-}7)/9 & (2\lambda{+}2)/9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\lambda^2{-}10)/9 & (-\lambda{-}1)/9 & (-\lambda{-}1)/9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda{-}2 & 0 & 0 & (-2\lambda{+}7)/9 \\ 1 & -2 & -\lambda & 0 & 0 & (2\lambda{+}2)/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & (-\lambda{-}1)/9 \end{pmatrix}.$$

Только после этого мы можем констатировать, что второй "большой" шаг завершен; второй и.м. также оказался единичным [юго-восточный (4×4)-блок матрицы C_3 делится на единицу автоматически].

1.3. Выбираем в этом блоке многочлен наименьшей степени $\lambda+1$ [например, в позиции (4,3)] и перемещаем его в позицию (3,3), после чего проводим по Гауссу — Евклиду замену элементов третьего окаймления на остатки. Здесь нам повезет больше: все эти остатки

окажутся нулевыми, т. е. третье окаймление сразу обнулится. Более того, все элементы юго-восточного (3×3)-блока будут делиться без остатка на третий диагональный элемент $\lambda + 1$, который, таким образом, окажется третьим и.м. Результаты вычислений на третьем шаге:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda{+}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2{-}2\lambda{-}3 & 0 & (2\lambda^2{-}5\lambda{-}7)/9 \\ 0 & 0 & 0 & -2\lambda{-}2 & \lambda{+}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda{-}1 & 0 & (-\lambda^2{-}2\lambda{-}1)/9 \end{pmatrix};$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-\lambda{+}1)/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (-2\lambda^2{+}9\lambda{-}16)/9 & (2\lambda{-}7)/9 & (2\lambda{+}2)/9 & \lambda{-}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ (\lambda^2{-}19)/9 & (-\lambda{-}1)/9 & (-\lambda{-}1)/9 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda{-}2 & -\lambda{+}2 & 0 & (-2\lambda{+}7)/9 \\ 1 & -2 & -\lambda & \lambda & 0 & (2\lambda{+}2)/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & (-\lambda{-}1)/9 \end{pmatrix}.$$

1.4. Наше "везение" продолжается: обнаружив в очередном юго-восточном блоке, в позиции (5,5), многочлен $\lambda + 1$, мы перемещаем его в позицию (4,4) и можем быть уверенными, в том, что сразу же обнулится четвертое окаймление и что в следующем юго-восточном блоке (размера 3×3) все многочлены будут делиться без остатка на $\lambda + 1$. Результаты счета:

$$C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda{+}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda{+}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2{-}2\lambda{-}3 & (2\lambda^2{-}5\lambda{-}7)/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda{-}1 & (-\lambda^2{-}2\lambda{-}1)/9 \end{pmatrix};$$

$$U_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-\lambda+1)/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ (-2\lambda^2+9\lambda-16)/9 & (2\lambda-7)/9 & (2\lambda+2)/9 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ (\lambda^2-19)/9 & (-\lambda-1)/9 & (-\lambda-1)/9 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$V_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda-2 & 0 & -\lambda+2 & (-2\lambda+7)/9 \\ 1 & -2 & -\lambda & 0 & \lambda & (2\lambda+2)/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & (-\lambda-1)/9 \end{pmatrix}.$$

1.5. Дальше все просто: перемещаем в матрице C_5 многочлен $-\lambda-1$ в позицию (5,5), домножаем пятую строку на -1 и осуществляем обнуление пятого окаймления. Фактически подлежат обнулению всего два элемента, и сделать это можно сразу, поскольку они делятся без остатка на $\lambda+1$. Юго-восточный блок теперь "ужался" до размера 1×1, и единственный его элемент также делится на (пятый и.м.) $\lambda+1$. После нормализации (путем домножения последней строки на -9) этот (шестой инвариантный) многочлен приобретает вид: $\lambda^3-3\lambda^2+4$.

Значит, каноническая форма Смита достигнута:

$$S = C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3-3\lambda^2+4 \end{pmatrix};$$

$$U = U_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-\lambda+1)/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ (-\lambda^2+19)/9 & (\lambda+1)/9 & (\lambda+1)/9 & 1 & 0 & -1 \\ -\lambda^3+5\lambda^2+10\lambda-41 & \lambda^2-4\lambda+4 & \lambda^2-4\lambda-5 & 0 & 0 & -9\lambda+27 \end{pmatrix};$$

$$V = V_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & (\lambda+1)/9 \\ 0 & 2 & \lambda-2 & 0 & -\lambda+2 & (\lambda^2-3\lambda+5)/9 \\ 1 & -2 & -\lambda & 0 & \lambda & (-\lambda^2+\lambda+2)/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (-\lambda-1)/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & (-2\lambda-2)/9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & (\lambda+1)/9 \end{pmatrix}.$$

Не повредит (хотя и доставит немало хлопот) промежуточная проверка; должно выполняться равенство: $S = UCV$; определители матриц U и V должны быть ненулевыми константами. Проделав (хотя бы с помощью компьютера) указанные контрольные вычисления, убеждаемся в том, что мы пока не ошиблись в счете (в частности, оба интересующих нас определителя оказались равными -1).

2. Выписываем все инвариантные многочлены, а также (для неединичных и.м.) — их разложения на неприводимые:

$$\begin{aligned}
&\mu_1^{(A)}(\lambda) = 1;\\
&\mu_2^{(A)}(\lambda) = 1;\\
&\mu_3^{(A)}(\lambda) = \lambda + 1;\\
&\mu_4^{(A)}(\lambda) = \lambda + 1;\\
&\mu_5^{(A)}(\lambda) = \lambda + 1;\\
&\mu_6^{(A)}(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2.
\end{aligned}$$

Замечаем, что все неприводимые множители линейны и, следовательно, данная матрица приводима к ж.н.ф.

3. По разложению старшего и.м. $\mu_6^{(A)}(\lambda)$ определяем список характеристических корней.

Примем для них следующий порядок: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

4. Выявляем (по разложениям всех и.м.) элементарные делители (примарные множители) и располагаем их в список в соответствии с принятым порядком характеристических корней, а в группах, отвечающих одному и тому же корню, — по невозрастанию степеней:

$$\begin{aligned}
\delta(A) = [\,&(\lambda - 2)^2;\\
&\lambda + 1,\ \lambda + 1,\ \lambda + 1,\ \lambda + 1\,].
\end{aligned}$$

5. По э.д. определяем жордановы ящики (один — второго порядка и четыре — одноэлементных):

$$\boxed{J_2(2)};\ \boxed{J_1(-1)};\ \boxed{J_1(-1)};\ \boxed{J_1(-1)};\ \boxed{J_1(-1)},$$

которые будут располагаться (в указанном порядке) по диагонали блочно-диагональной матрицы

$$J = \operatorname{diag}(\boxed{J_2(2)},\ -1,\ -1,\ -1,\ -1),$$

являющейся нашим первым ответом (ниже она будет дана в подробной записи).

6. Составляем характеристическую матрицу

$$G_0 = G = E\lambda - J = \begin{pmatrix} \lambda{-}2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda{-}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda{+}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda{+}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda{+}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda{+}1 \end{pmatrix}$$

и повторяем в отношении нее всю процедуру первого этапа; в частности, опять понадобятся начальные значения следящих матриц: $W_0 = Y_0 = E_6$.

Форма Смита для G, из теоретических соображений, обязана быть в точности такой же, какова ранее полученная форма Смита для C. Но нам нужны матрицы W и Y, аккумулирующие элементарные преобразования над строками и столбцами и такие, что $S = WGY$.

Хотелось бы дальнейшее описание работы алгоритма минимизировать, чтобы не останавливаться еще раз на деталях, уже объясненных на первом этапе. Однако алгоритм Смита отличается особым "коварством": обманчиво близкая цель может спровоцировать неосторожные шаги (которые не будут, в принципе, ошибочными, но могут привести к неоправданному удлинению цепочки преобразований). Поэтому кое-что придется повторить.

6.1. Переставляем в матрице G_0 первые два столбца, домножаем первую строку на -1 и обнуляем первое окаймление; получим:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2{-}4\lambda{+}4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda{+}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda{+}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda{+}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda{+}1 \end{pmatrix};$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda{-}2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица G_1 "сходу" оказалась диагональной. Но это отнюдь не есть форма Смита, поскольку нарушаются условия делимости: следующий диагональный элемент должен делиться на предыдущий. Это обстоятельство не исправляется и после того, как мы ("в два приема") поменяем местами многочлены, занимающие в G_1 позиции (2,2) и (6,6). Все равно надо проверять делимость на второй диагональный элемент всех элементов юго-восточного (4×4)-блока, а многочлен $\lambda^2-4\lambda+4$ при делении на $\lambda+1$ дает остаток 9 (и неполное частное $\lambda - 5$).

После

— прибавления шестой строки ко второй,

— замены указанного многочлена на указанный остаток (с помощью прибавления к новому шестому столбцу второго, с домножением на $-\lambda + 5$),

— перестановки девятки в позицию (2,2), с последующим умножением второй строки на $1/9$,

— обнуления второго окаймления,

— умножения шестой строки на -9,

мы получим: $G_2 = S$ и

$$W = W_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda-2)/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+10 & \lambda^2-4\lambda-5 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2-4\lambda+4 \end{pmatrix};$$

$$Y = Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (-\lambda-1)/9 \\ 1 & \lambda-2 & 0 & 0 & 0 & (-\lambda^2+\lambda+2)/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda+5 & 0 & 0 & 0 & (\lambda^2-4\lambda+4)/9 \end{pmatrix}.$$

Как и по завершению первого этапа, здесь возможна (и полезна) промежуточная проверка.

7. Матрица U отслеживала строчные преобразования при переходе от C к S, матрица W — строчные преобразования при переходе от G к S. Матрица $P = W^{-1}U$ аккумулирует в себе все строчные преобразования, обеспечивающие "сквозной" переход от C к G. Аналогично, в матрице $Q = VY^{-1}$ будут накоплены обеспечивающие этот переход столбцовые преобразования.

Вычисление матриц P и Q является весьма неприятным этапом при ручной работе (каким бы способом вы не вычисляли обратные к полиномиальным матрицам — это трудоемкая процедура).

Обращения полиномиальных матриц можно, однако, избежать, если тщательно *протоколировать все элементарные преобразования над столбцами.* Тогда, зная матрицу V и применяя к ней элементарные преобразования над столбцами, *обратные* к тем, что были запротоколированы на шестом этапе, с заменой запротоколированного порядка применения на *противоположный*, мы получим матрицу Q. А матрица P нам вообще не понадобится.

Здесь мы не сможем так поступить, поскольку двигались "большими" шагами, не фиксируя отдельные столбцовые преобразования.

Так что придется (честно или с помошью компьютерных процедур) вычислять P и Q. Результаты (получены с помощью Maple):

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda+3 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda-3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ (-\lambda^2+19)/9 & (\lambda+1)/9 & (\lambda+1)/9 & 1 & 0 & -1 \\ \lambda-4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda+3 \end{pmatrix};$$

$$Q = \begin{pmatrix} (\lambda^2-4\lambda-5)/9 & 0 & 1 & 0 & -1 & (\lambda+1)/9 \\ (\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-17)/9 & 0 & \lambda-2 & 0 & -\lambda+2 & (\lambda^2-\lambda+7)/9 \\ (-\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda)/9 & 1 & -\lambda & 0 & \lambda & (-\lambda^2-\lambda)/9 \\ (-\lambda^2+4\lambda+5)/9 & 0 & 0 & 0 & 1 & (-\lambda-1)/9 \\ (-2\lambda^2+8\lambda+10)/9 & 0 & 0 & 1 & 2 & (-2\lambda-2)/9 \\ (2\lambda^2-8\lambda-1)/9 & 0 & 2 & 0 & -2 & (2\lambda+2)/9 \end{pmatrix}.$$

Maple-проверка убеждает нас в том, что соотношение $G = PCQ$ выполняется, и дает значения определителей $\det(P) = \det(Q) = 1$.

8. Полиномиальную матрицу $Q = Q(\lambda)$ представим как матричный многочлен степени 3 (поскольку такова наибольшая из степеней

многочленов — элементов этой матрицы):

$$Q(\lambda) = Q_0 + Q_1\lambda + Q_2\lambda^2 + Q_3\lambda^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} -5/9 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1/9 \\ -17/9 & 0 & -2 & 0 & 2 & 7/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/9 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/9 \\ 10/9 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2/9 \\ -1/9 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 \\ 4/3 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1/9 \\ -4/9 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1/9 \\ 4/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/9 \\ 8/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2/9 \\ -8/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \lambda +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 \\ 4/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/9 \\ -1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^3.$$

Вычислив правое значение выписанного выше матричного многочлена на матрице J, мы получим искомую сопрягающую матрицу

$$T = Q(\overrightarrow{J}) = Q_0 + Q_1 J + Q_2 J^2 + Q_3 J^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

такую, что $J = T^{-1}AT$.

"Решающая" проверка: убеждаемся в справедливости равенства $TJ = AT$ и вычисляем определитель $\det(T) = 1$.

О т в е т:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \; T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Глава 4

ЛИНЕЙНЫЕ, БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 31. Линейные формы на конечномерном линейном пространстве. Двойственное линейное пространство

31.1. Понятие линейной формы. Линейные формы не раз уже "всплывали" (на ознакомительном уровне; см. примеры 1.11 и 12.2, определение 13.3). Более того, в пособии $[A_1]$ (см. п. 48.4) рассматривались формы (однородные многочлены) произвольной степени, а линейные формы понимались как *однородные многочлены* (от нескольких переменных) степени единица. Ниже дается общее (абстрактное)

Определение 31.1. *Линейной формой* на линейном пространстве V (над полем P) называется линейное отображение из пространства V в поле P, рассматриваемое как линейное пространство над самим собой.

Замечание 31.1. В математике трудно отыскать объект, обладающий единственным, общепринятым наименованием. Вот и линейные формы называются (в различных разделах математики):

— линейными функциями,

— линейными функционалами,

— ковекторами.

Термин *форма* является специфическим для алгебры, он явно подчеркивает свойство *однородности*. Ниже мы убедимся в том, что *в координатах* линейные формы (в смысле определения 31.1) на конечномерных линейных пространствах задаются однородными линейными многочленами (в смысле определения 48.6 из $[A_1]$).

Термин *функция* является скорее аналитическим, и даже — общематематическим, знакомым "с детства" и — несколько обманчивым. "Школьная" линейная функция $f(x) = ax + b$ заслуживает такое название (в строгом смысле линейной алгебры) только при $b = 0$. В противном случае (в рамках линейной алгебры) ее правильнее называть *аффинной* (или линейной неоднородной) функцией.

Термин *функционал* является более "солидным" и "уважительным", характерным для *функционального анализа*, "бесконечномерной" науки, о предмете и задачах которой мы (вскользь) упоминали неоднократно. В старых учебниках по функциональному анализу функционал определяли как "функцию на функциях", имея в виду, что значения этой функции суть скаляры, тогда как аргумент может сам быть функцией (или даже каким-то иным, нескалярным объектом).

Термин *ковектор* специфичен для геометрии, а префикс 'ко-' является сигналом о рассмотрении объектов двух типов, *двойственных* друг другу. (Кое-что на эту тему будет рассказано ниже. Однако все богатство понятия двойственности может раскрыться вам лишь в дальнейших, "продвинутых" разделах алгебры и геометрии.)

Пример 31.1. Выбор произвольного базиса

$$\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, \dots, b_n] \tag{31.1}$$

в n-мерном линейном пространстве V (над полем P) определяет на V набор из n линейных форм

$$\beta_i : V \longrightarrow P;\ \beta_i(x) = x_i,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in V. \tag{31.2}$$

Форма β_i $(i = 1, \dots, n)$ сопоставляет произвольному вектору $x \in V$ его i-ю координату относительно базиса $\mathcal{B}$.

Полный набор таких форм составляет известный (см. п. 6.4) *координатный изоморфизм*:

$$\beta : V \longrightarrow P^n;\ \beta(x) = \overline{x};\ x \in V. \tag{31.3}$$

Пример 31.2. В названных в начале данного пункта примерах рассматривалась линейная форма $\mathrm{int}_{[a,b]}$, заданная в примере 1.11 на (бесконечномерном) пространстве непрерывных функций $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$,

а в примере 12.2 — на (также бесконечномерном) пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ или на его (конечномерном) подпространстве $\mathbb{R}_n[x]$, и сопоставляющая функции (многочлену) $f(x)$ определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

В определении 13.3 вводилось понятие *следа* квадратной матрицы, после чего устанавливалось, что функция $\mathrm{tr} : L(n, P) \to P$ является линейной формой на пространстве квадратных матриц $L(n, P)$.

31.2. Матрица-строка и координатное выражение для линейной формы. Предположим, что линейное пространство V является конечномерным (размерности n), и зафиксируем в нем какой-либо базис (31.1). В поле P, рассматриваемом как одномерное пространство над самим собой, в качестве базисного можно выбрать любой ненулевой вектор, однако естественным считается выбор базисного вектора (фактически — скаляра), совпадающего с полевой единицей: $\mathcal{E}_1 = [1]$.

В п. 12.2 мы изучали понятие матрицы A [см. (12.9)] для линейного отображения $\varphi : V \to W$ относительно некоторых базисов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в к.л.п. V и W соответственно. В частном случае, когда второе пространство $W = P$, матрица для линейной формы

$$f : V \to P \tag{31.4}$$

имеет всего одну строку, которую мы переобозначим следующим образом:

$$A = \overline{a}^t = (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n), \tag{31.5}$$

где

$$\alpha_j = f(b_j);\ j = 1, \ldots, n. \tag{31.6}$$

[В отличие от формулы (12.9), здесь не нужны черты, поскольку одномерные арифметические векторы естественно отождествляются со скалярами.]

Определение 31.2. Строка (31.5) называется *матрицей-строкой*, отвечающей линейной форме $f \in \mathcal{L}(V, P)$ в базисе (31.1) пространства V.

Вспомним далее, что в общем случае действие линейного отображения $y = \varphi(x)$ может быть выражено [см. (12.28) и (12.32)] координатной формулой $\overline{y} = A \cdot \overline{x}$. В случае линейной формы (31.4) эта

формула приобретает вид:

$$f(x) = \overline{a}^t \cdot \overline{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n, \tag{31.7}$$

с коэффициентами, определяемыми формулами (31.6).

Выражение (31.7) как раз и демонстрирует тот факт, что линейные формы "заслуживают свое название", т. е. представляются в координатах однородными многочленами первой степени.

Пример 31.3. Координатным формам (31.2) [см. пример 31.1] соответствуют единичные векторы-строки $\overline{e_i}^t$.

В примере 12.2 (см. также пример 31.2) фактически была вычислена матрица-строка для линейной формы $\mathrm{int}_{[a,b]}$ на пространстве многочленов $\mathbb{R}_n[x]$.

Попробуйте описать матрицу-строку для формы tr [см. (13.33)]. (Для этого вам придется подвергнуть векторизации квадратную матрицу — аргумент этой формы.)

31.3. Понятие двойственного (сопряженного) линейного пространства. Двойственный (сопряженный) базис

Определение 31.3. Линейное пространство $\mathcal{L}(V, P)$ всех линейных форм, заданных на линейном пространстве V, называется *двойственным* (или *сопряженным*) для пространства V. Используется обозначение:

$$V^* = \mathcal{L}(V, P). \tag{31.8}$$

Замечание 31.2 (для служебного пользования). В отечественной учебной литературе второй вариант названия употребляется более широко, нежели первый, который автору представляется предпочтительным (благодаря его большей выразительности, а также — с учетом чрезмерной перегрузки термина "сопряженный").

Согласно общему результату о пространствах линейных отображений (см. предложения 12.2), размерность двойственного пространства (31.8) равна размерности исходного пространства:

$$\dim(V^*) = \dim(\mathcal{L}(V, P)) = 1 \cdot n = n. \tag{31.9}$$

Следовательно, в силу теоремы 6.2 (об изоморфизме к.л.п.), двойственное пространство изоморфно исходному:

$$V^* \cong V. \tag{31.10}$$

Для конкретизации изоморфизма (31.10) в пространствах V и V^* должны быть выбраны какие-либо базисы.

В исходном пространстве базис (31.1) выбирается произвольно.

Для двойственного пространства применяется общая конструкция базиса в пространстве линейных операторов $\mathcal{L}(V, W)$, описанная в упомянутом выше предложении 12.2: базис составляют линейные операторы ε_{ij} $(i = 1, ... m;\ j = 1, ..., n)$, которые на векторы базиса $\mathcal{B}$ действуют по формулам [см. (12.12)]:

$$\varepsilon_{ij}(b_k) = \delta_{jk} c_i;\ \ k = 1, ..., n, \tag{31.11}$$

где $\mathcal{C} = [c_1, ..., c_m]$ — базис, фиксированный в W, а δ_{jk} — символы Кронекера.

В данном случае: $W = P$, $m = 1$, и в качестве базиса $\mathcal{C}$ мы всегда будем выбирать естественный базис $\mathcal{E}_1 = [1]$. Так что в соотношениях (31.11) первый индекс принимает лишь одно значение $(i = 1)$ и $c_1 = 1$; следовательно, этот индекс фактически не нужен. Вводится специальное обозначение b_j^* для линейной формы ε_{1j} $(j = 1, ..., n)$, после чего указанные соотношения приобретают вид:

$$b_j^*(b_k) = \delta_{jk};\ \ j, k = 1, ..., n. \tag{31.12}$$

Подчеркнем, что, в силу ОТЛО, линейные формы (как и всякие линейные отображения) однозначно определяются своими значениями на базисных векторах. Следовательно, формулы (31.12) однозначно определяют $b_j^* \in V^*$.

Рассмотрим систему векторов в двойственном пространстве (т. е. систему линейных форм)

$$\mathcal{B}^* = [\, b_1^*, b_2^*, ..., b_n^* \,], \tag{31.13}$$

являющуюся, по построению, базисом в V^*.

Определение 31.3. Базис (31.13) в пространстве V^* называется *двойственным* (*сопряженным*) к базису $\mathcal{B}$ в пространстве V.

Замечание 31.3. Тот факт, что система форм (31.13), связанная с базисом (31.1) сотношениями (31.12), является базисом в V^*, мы доказали с использованием ранее установленного общего факта. Можно провести *независимое* доказательство, использующее лишь формулы (31.12). Автор обращается к читателям с рекомендацией проделать это. Тогда вы гораздо более живо и осязаемо представите себе линейные формы и их действие на векторы.

Базисные формы b_j^* действуют на произвольный вектор $x \in V$ следующим образом:

$$b_j^*(x) = b_j^*(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i b_j^*(b_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij} = x_j,$$

или, в окончательном виде:

$$b_j^*(x) = x_j;\ j = 1, \dots, n. \tag{31.14}$$

(Можно заметить, что предварительное знакомство с формами b_j^* у нас состоялось в примере 31.1; там они имели "временное" обозначение β_j.)

Теперь мы располагаем базисами как в V, так и в V^*, и, возвращаясь к (31.10), можем задать конкретный изоморфизм

$$\iota_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow V^*, \tag{31.15}$$

по *принципу равенства координат*:

$$\iota_{\mathcal{B}}(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i^*; \tag{31.16}$$

вектору $x \in V$ сопоставляется форма $\iota_{\mathcal{B}}(x) \in V^*$, имеющая в двойственном базисе $\mathcal{B}^*$ такие же координаты, какие данный вектор имеет в базисе $\mathcal{B}$.

*Замечание 31.4.** Будучи "конкретным", изоморфизм (31.15) зависит, тем не менее, от выбора базиса $\mathcal{B}$. Как мы убедимся в следующем пункте, при переходе к новому базису $\mathcal{B}'$ новый изоморфизм $\iota_{\mathcal{B}'}$ будет, вообще говоря, иным.

Напомним вам в связи с этим замечание 6.1 о "случайных" и *канонических* изоморфизмах. Изоморфизмы типа (31.15) не являются каноническими, поскольку зависят от случайного выбора базиса.

Рассмотрим теперь произвольную линейную форму (31.4) и соответствующую ей в базисе (31.1) матрицу-строку (31.5). Убедимся в том, что элементы (31.6) этой строки совпадают с соответствующими координатами данной формы относительно двойственного базиса (31.13). Последнее утверждение требует некоторого уточнения. Дело в том, что, согласно нашим договоренностям, координаты векторов записываются в столбец. Так вот, координатный столбец для

формы $f \in V^*$ в базисе $\mathcal{B}^*$ будет равен $\overline{a}$, где $\overline{a}^t$ есть ее матрица-строка. Или, другими словами, будет справедлива формула:

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j^*, \tag{31.17}$$

которую очень легко проверить, вычисляя значения левой и правой частей на произвольном векторе $x \in V$ и пользуясь формулами (31.6) и (31.14):

$$f(x) \overset{(31.7)}{=\!=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \overset{(31.14)}{=\!=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j^*(x) = (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j^*)(x).$$

Пришла пора подвести первые итоги иучения двойственного пространства.

Предложение 31.1. *Пусть V — n-мерное линейное пространство над полем P. Двойственное пространство $V^* = \mathcal{L}(V, P)$ также имеет размерность n и, следовательно, изоморфно V.*

Всякому базису (31.1) в пространстве V однозначно соответствует двойственный базис (31.13) в V^*; эти базисы связаны соотношениями (31.12).

Любая линейная форма $f \in V^*$ может быть представлена своим разложением (31.17) по базису (31.13); коэффициенты этого разложения определяются формулами (31.6).

Доказательство см. выше. □

Пример 31.4. Рассмотрим арифметическое линейное пространство P^n, составленное, как мы хорошо помним (с первой лекции первого семестра), из векторов-столбцов вида

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};\ x_i \in P\ (i = 1, \dots, n)$$

и наделенное естественным базисом

$$\mathcal{E} = [\,\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\,].$$

Что из себя представляет двойственное пространство $\overset{*}{P}{}^n$? (Звездочку мы поместили *над* обозначением пространства, чтобы она не мешала верхнему индексу.)

Всякая линейная форма $f : P^n \to P$ задается (в базисе $\mathcal{E}$) формулой [см. (31.7)]

$$f(\overline{x}) = \overline{a}^t \cdot \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

т. е. однозначно определяется вектором-строкой

$$\overline{a}^t = (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n).$$

Следовательно, именно из таких строк можно считать составленным двойственное пространство $\overset{*}{P}{}^n$. (Этим, кстати, объясняется и наше обозначение для арифметического линейного пространства векторов-строк, введенное еще в самом начале курса; см. формулу (2.3) в $[A_1]$, а также формулу (1.3) в настоящем пособии.)

Итак, двойственным к арифметическому линейному пространству векторов-столбцов является арифметическое линейное пространство векторов-строк (такой же размерности). Базисом, двойственным к естественному базису $\mathcal{E}$, является, очевидно, аналогичный (тоже — естественный) базис

$$\mathcal{E}^* = [\,\overline{e_1}^{\,t}, \overline{e_2}^{\,t}, \ldots, \overline{e_n}^{\,t}\,],$$

составленный из единичных векторов-строк.

31.4. Влияние замены базиса на линейные формы. Пусть, помимо базиса (31.1), в пространстве V задан еще один базис:

$$\mathcal{B}' = [\,b'_1, b'_2, \ldots, b'_n] \tag{31.1′}$$

и матрицей перехода от старого базиса к новому служит матрица T.

Для каждого из этих базисов однозначно определен двойственный базис: $\mathcal{B}^*$ и $(\mathcal{B}')^*$ соответственно. Выясним, какова матрица перехода от старого двойственного базиса к новому двойственному.

Предварительно мы выпишем формулы пересчета для матриц-строк, соответствующих произвольной линейной форме в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$. (Любопытно, что раньше мы действовали в противоположном порядке: сначала определялась матрица перехода, а затем производился пересчет координат.)

Предложение 31.2. *Матрицы-строки $\overline{a}^t$ и $(\overline{a}')^t$, отвечающие линейной форме $f \in V^*$ в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$, связаны соотношениями:*

$$\overline{a}^t = (\overline{a}')^t \cdot T^{-1}; \quad (\overline{a}')^t = \overline{a}^t \cdot T. \tag{31.18}$$

Доказательство. Второе из соотношений (31.18) немедленно следует из общей формулы $A' = Q^{-1}AT$ для пересчета матрицы линейного отображения [см. (13.2а)]. В данном случае рассматриваются линейные отображения из пространства V в поле (одномерное пространство) P, базис в котором остается неизменным (естественным); так что $Q = E_1 = (1)$. Первое соотношение получается из второго домножением обеих частей справа на T^{-1}. □

Транспонируя соотношения (31.18), мы получаем правила пересчета для координатных столбцов, которые, как мы знаем из предложения 31.2, отвечают форме f в двойственных базисах $\mathcal{B}^*$ и $(\mathcal{B}')^*$:

$$\overline{a} = (T^{-1})^t \cdot \overline{a}'; \quad \overline{a}' = T^t \cdot \overline{a}. \tag{31.19}$$

Обозначив буквой R искомую матрицу перехода от $\mathcal{B}^*$ к $(\mathcal{B}')^*$, мы (по предложению 7.3) будем иметь аналогичные формулы:

$$\overline{a} = R \cdot \overline{a}'; \quad \overline{a}' = R^{-1} \cdot \overline{a}. \tag{31.20}$$

Как формулы (31.19), так и формулы (31.20) должны выполняться для любой формы $f \in V^*$, или, что равносильно, для любого координатного столбца $\overline{a}' \in P^n$ (изображающего f в базисе $(\mathcal{B}')^*$).

Рассуждая точно так же, как при доказательстве теоремы 13.1, мы можем заключить, что матрицы R и $(T^{-1})^t$ равны.

Значит, справедливо следующее

Предложение 31.3. *Если в к.л.п. V матрицей перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$ служит матрица T, то в двойственном пространстве V^* матрицей перехода от базиса $\mathcal{B}^*$ к базису $(\mathcal{B}')^*$ служит матрица $(T^{-1})^t$.* □

А теперь мы выполним обещание, данное в замечании 31.4, — докажем "неканоничность" изоморфизмов (31.15).

*Замечание 31.5.** Рассмотрим два базиса, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$, в пространстве V, а также матрицы T и $S = T^{-1}$, отвечающие переходам от первого базиса ко второму и обратно. Нам понадобится одна из

формул пересчета координатных столбцов (7.12): $\overline{x} = T\overline{x}'$, или, в подробной записи:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j. \tag{31.21}$$

Рассмотрим двойственные базисы $\mathcal{B}^*$ и $(\mathcal{B}')^*$ в пространстве V^*. Согласно предложению 31.3, матрицей перехода от первого из них ко второму будет служить матрица $R = (T^{-1})^t = S^t$, элементы которой могут быть выражены соотношениями

$$r_{ij} = s_{ji};\ i, j = 1, \ldots, n. \tag{31.22}$$

По определению матрицы перехода (см. п. 7.1), эти элементы будут фигурировать в разложениях

$$(b'_j)^* = \sum_{i=1}^{n} r_{ij} b_i^* \overset{(31.22)}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} s_{ji} b_i^*. \tag{31.23}$$

Рассмотрим теперь изоморфизм (31.15), действующий по формуле (31.16), и аналогичный изоморфизм

$$\iota_{\mathcal{B}'} : V \longrightarrow V^*, \tag{31.15$'$}$$

заданный формулой

$$\iota_{\mathcal{B}'}(x) = \iota_{\mathcal{B}'}(\sum_{j=1}^{n} x'_j b'_j) = \sum_{j=1}^{n} x'_j (b'_j)^*. \tag{31.16$'$}$$

(Лишний раз подчеркнем, что в формулах (31.16) и (31.16′) участвует *один и тот же вектор* $x \in V$, но используются его *разложения по двум различным базисам.*)

Изоморфизмы (31.15) и (31.15′) равны тогда и только тогда, когда они принимают одинаковые значения на *произвольном* x, т. е. когда для любого $x \in V$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i b_i^* = \sum_{j=1}^{n} x'_j (b'_j)^*. \tag{31.24}$$

В левую часть (31.24) подставим выражения для x_i из (31.21), а в правую — выражения для $(b'_j)^*$ из (31.23). Произведя стандартные

манипуляции с двойными суммами (в частности, изменив порядок суммирования в правой части), мы придем к равенству

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j\right) b^*_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} s_{ji}x'_j\right) b^*_i, \tag{31.25}$$

которое (в силу того факта, что $\mathcal{B}^*$ есть базис) равносильно системе соотношений

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}x'_j;\ i = 1, \dots, n. \tag{31.26}$$

Представим (31.26) в векторном виде:

$$T \cdot \overline{x}' = S^t \cdot \overline{x}'. \tag{31.27}$$

Равенство (31.27) должно выполняться тождественно по $\overline{x}' \in P^n$ (поскольку если x пробегает всё V, то соответствующий координатный столбец пробегает всё P^n). Значит, должны совпадать матрицы T и $S^t = (T^{-1})^t$, или, что равносильно, для матрицы T должны *совпадать обратная и транспонированная* матрицы:

$$T^{-1} = T^t. \tag{31.28}$$

Условие (31.28) выполняется далеко не всегда. (Сами придумайте простой (2×2)-контрпример.) Однако случай, когда оно все-таки выполняется, весьма интересен. Забегая вперед (см. п. 40.2), мы укажем название для обратимых квадратных матриц, удовлетворяющих (31.28), — *ортогональные матрицы*. Матрицы такого типа (и соответствующие операторы) будут играть исключительно важную роль в *линейной геометрии* (точнее, в той ее главе, которую принято именовать *евклидовой* геометрией).

§ 32. Теория двойственности

32.1. Второе двойственное пространство. Канонический изоморфизм к.л.п. на его второе двойственное. Конструкция двойственного пространства (как и многие другие математические

конструкции) может быть *итерирована*. Второе двойственное пространство определяется как пространство, двойственное к (первому) двойственному пространству:

$$V^{**} = (V^*)^*; \tag{32.1}$$

можно определить третье, четвертое и т. д. двойственные пространства. В конечномерном случае, в силу предложения 31.1, все они изоморфны между собой (хотя и не канонически). Однако при более детальном рассмотрении второго двойственного пространства (32.1) обнаруживается канонический (не зависящий от выбора базисов) изоморфизм между пространствами V и V^{**}.

Точнее, справедлива следующая

Теорема 32.1. *Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем P. Существует канонический изоморфизм*

$$\varkappa : V \xrightarrow{\cong} V^{**} \tag{32.2}$$

пространства V на его второе сопряженное пространство V^{**}, сопоставляющий всякому вектору $x \in V$ линейную форму $\varkappa(x) \in V^{**}$, действующую на линейные формы $f \in V^*$ по принципу: значение $\varkappa(x)$ на f равно значению f на x:

$$\varkappa(x)\,(f) = f(x) \tag{32.3}$$

для любых $x \in V$; $f \in V^*$.

Замечание 32.1. Прежде чем приступать к доказательству теоремы, автору хотелось бы заострить внимание читетелей на некоторых особенностях *математического мышления* (математического подхода к жизни).

Посмотрите на правую часть $f(x)$ формулы (32.3). Ее смысл ясен не только математикам, но и всем людям, способным к восприятию (школьного) понятия функции. (А ученые-педагоги утверждают, что школьная математика доступна для 100% здоровых молодых людей, вне зависимости от пола и расы.)

Итак, при обычной трактовке, в правой части мы имеем переменную x, пробегающую какое-то множество, и (фиксированную) функцию f от этой переменной, которая при каждом конкретном значении x принимает определенное значение $f(x)$, принадлежащее какому-либо другому множеству.

Но надо быть математиком, чтобы совершив логическое salto mortale, перейти к рассмотрению выражения $f(x)$ как *функции от функции* f. При этом аргумент x считается фиксированным, а функция f является произвольной (в каком-то классе).

Другими словами, фиксация значения аргумента x задает функцию, сопоставляющую функции f ее значение $f(x)$.

Именно это выражает левая часть формулы (32.3).

Доказательство. 1. Убедимся в том, что $\varkappa(x)$ действительно является *линейной формой на линейных формах*, т. е. докажем *линейность по* f для выражения $f(x)$ в правой части (32.3).

В самом деле, по определению $\varkappa$, для любых скаляров $\lambda, \mu \in P$ и любых линейных форм $f, g \in V^*$ справедливо:

$$\begin{aligned}\varkappa(x)\,(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \\ = \lambda\,\varkappa(x)\,(f) + \mu\,\varkappa(x)\,(f) = \lambda\,\varkappa(x)\,(f) + \mu\,\varkappa(x)\,(f),\end{aligned}$$

и, таким образом, оказывается, что для любого $x \in V$ формула (32.3) определяет элемент $\varkappa(x) \in V^{**}$.

2. Докажем теперь линейность отображения (32.2), т. е. свойство

$$\varkappa(\alpha x + \beta y) = \alpha\varkappa(x) + \beta\varkappa(y), \tag{32.4}$$

для любых скаляров $\alpha, \beta \in P$ и любых векторов $x, y \in V$.

Равенство (32.4) есть равенство в пространстве V^{**}, т. е. равенство линейных форм на линейных формах, и проверять его надо на произвольной линейной форме $f \in V^*$:

$$\varkappa(\alpha x + \beta y)\,(f) = (\alpha\varkappa(x) + \beta\varkappa(y))\,(f). \tag{32.5}$$

Используя определение (32.2), а также определения алгебраических действий над линейными формами, мы можем привести (32.5) к равносильному виду:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y). \tag{32.6}$$

Равенство (32.6) выражает не что иное, как линейность формы f и, по условию, справедливо. Значит, справедливо и (32.4). Наш второй результат можно выразить в том же ключе, что и первый: правая часть (32.3) *линейна по* x.

3. Остается доказать, что отображение (32.2) является *изоморфизмом*. Согласно теореме 6.1 (ОТЛО), для этого достаточно убедиться в том, что $\varkappa$ переводит некоторый базис в пространстве V в некоторый базис в V^{**}.

(Подчеркнем следующее обстоятельство: определение $\varkappa$ является *инвариантным*, не зависит от "случайных факторов", типа выбора базисов. Однако это совершенно не исключает использования базисов при изучении его свойств. Более того, без привлечения базисов невозможны какие-либо *практические* вычисления.)

Возьмем в пространстве V произвольный базис $\mathcal{B}$ [см. (31.1)], в пространстве V^* — двойственный базис $\mathcal{B}^*$ [см. (31.13)], связанный с $\mathcal{B}$ соотношениями (31.12), а в пространстве V^{**} — базис

$$\mathcal{B}^{**} = [\, b_1^{**}, b_2^{**}, \dots, b_n^{**} \,], \tag{32.7}$$

двойственный к базису $\mathcal{B}^*$ и связанный с ним [аналогичными (31.12)] соотношениями

$$b_j^{**}(b_k^*) = \delta_{jk};\ \ j,k = 1, \dots, n. \tag{32.8}$$

Докажем, что

$$\varkappa(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{**}, \tag{32.9}$$

т. е.

$$\varkappa(b_j) = b_j^{**} \tag{32.10}$$

для любого $j = 1, \dots, n$.

Равенство (32.10) подлежит проверке на любой форме $f \in V^*$:

$$\varkappa(b_j)\,(f) = b_j^{**}(f). \tag{32.11}$$

Достаточно, однако, проверить выполнение (32.11) на базисных формах, т. е. взять $f = b_k^*$, с произвольным $k = 1, \dots, n$:

$$\varkappa(b_j)\,(b_k^*) = b_j^{**}(b_k^*). \tag{32.12}$$

Левая часть (32.11) вычисляется по определению 32.3:

$$\varkappa(b_j)\,(b_k^*) = b_k^*(b_j) \overset{(31.12)}{=\!=} \delta_{kj},$$

что, очевидно, совпадает со значением δ_{jk}, принимаемым [в соответствии с (32.8)] правой частью.

Итак, соотношение (32.12) доказано и этим завершается доказательство всей теоремы. □

Непосредственным следствием теоремы 32.1 является

Предложение 32.1. *Всякий базис в двойственном пространстве является двойственным для некоторого базиса в исходном пространстве.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный базис

$$\mathcal{F} = [\, f_1, f_2, \dots, f_n \,] \tag{32.13}$$

в пространстве V^*. Требуется доказать, что найдется такой базис $\mathcal{B}$ [см. (31.1)] в пространстве V, что

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{F}. \tag{32.14}$$

Возьмем в пространстве V^{**} базис

$$\mathcal{F}^* = [\, f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^* \,], \tag{32.15}$$

двойственный к $\mathcal{F}$, т. е. связанный с ним соотношениями

$$f_j^*(f_k) = \delta_{jk};\ j,k = 1, \dots, n. \tag{32.16}$$

Далее, пользуясь теоремой 31.1, применим к векторам базиса (32.15) изоморфизм $\varkappa^{-1}$, обратный к изоморфизму (32.3). В результате этого, по свойствам линейных изоморфизмов (см. предложение 6.1), будет получен некоторый базис

$$\mathcal{B} = \varkappa^{-1}(\mathcal{F}^*) \tag{32.17}$$

в пространстве V.

Базис (32.17) состоит из таких векторов b_k $(k = 1, \dots, n)$, что

$$\varkappa(b_k) = f_k^*. \tag{32.18}$$

Докажем, что именно он будет искомым базисом, удовлетворяющим условию (32.14), которое переписывается в виде:

$$b_j^* = f_j;\ j = 1, \dots, n. \tag{32.19}$$

Соотношения (32.19) являются равенствами в V^*, т. е. равенствами линейных форм, и проверять их следует на произвольном векторе $x \in V$, причем достаточно проверки на базисных векторах b_k $(k = 1, \dots, n)$:

$$b_j^*(b_k) = f_j(b_k);\ j,k = 1, \dots, n. \tag{32.20}$$

Левая часть (32.20), по определению двойственного базиса, равна δ_{jk}. Чтобы вычислить правую часть, воспользуемся определением изоморфизма $\varkappa$ [см. (32.3)]:

$$f_j(b_k) \overset{(32.3)}{=\!=} \varkappa(b_k)\,(f_j) \overset{(32.18)}{=\!=} f_k^*(f_j) \overset{(32.16)}{=\!=} \delta_{kj}.$$

Соотношения (32.20), а значит и предложение в целом, доказаны. $\square$

32.2. Аннуляторы подмножеств и их свойства. Рассмотрим конечномерное линейное пространство V над полем P и двойственное к нему пространство V^*, а также произвольные подмножества $M \subseteq V$ и $N \subseteq V^*$.

Определение 32.1. Аннулятором подмножества $M \subseteq V$ называется подмножество $M^\circ \subseteq V^*$, состоящее из таких линейных форм, которые обращаются в нуль на любом элементе множества M, т. е.

$$M^\circ = \{f \in V^* : (\forall\, x \in M)\,[\, f(x) = 0\,]\}. \tag{32.21}$$

Заметим, что в определении 32.1 не исключается случай пустого M. Поскольку об элементах пустого множества (в силу их отсутствия) можно сказать что угодно, то "вполне логично" считать, что на пустом множестве аннулируется любая форма; так что аннулятор пустого множества оказывается равным всему пространству V^*.

В случае $M \neq \varnothing$ можно определить сужение на M для любой функции (в частности, любой линейной формы), заданной на V. Тогда описанию (32.21) можно придать более лаконичную форму:

$$M^\circ = \{f \in V^* : f\big|_M = 0\}. \tag{32.21a}$$

Теперь рассмотрим произвольное подмножество $N \subseteq V^*$ и определим для него аннулятор $N^\circ \subseteq V$. Сделано это будет в два этапа:

1) сначала, в полном соответствии с (32.1), мы определим, так сказать, "полуфабрикат" аннулятора

$$N^\bullet = \{\alpha \in V^{**} : (\forall\, f \in N)\,[\,\alpha(f) = 0\,]\}, \tag{32.22}$$

являющийся подмножеством во втором двойственном пространстве V^{**};

2) затем, с помощью изоморфизма $\varkappa^{-1} : V^{**} \to V$, обратного каноническому изоморфизму (32.2), мы переведем подмножество $N^\bullet$ в пространство V:

$$\begin{aligned} N^\circ = \varkappa^{-1}(N^\bullet) &= \{x \in V : \varkappa(x) \in N^\bullet\} = \\ &= \{x \in V : (\forall\, f \in N)\,[\,\varkappa(x)\,(f) = 0\,]\} = \\ &\overset{(32.3)}{=\!=} \{x \in V : (\forall\, f \in N)\,[\, f(x) = 0\,]\}. \end{aligned} \tag{32.23}$$

Окончательно, уже без привлечения второго двойственного пространства, дается следующее

Определение 32.2. Аннулятором подмножества $N \subseteq V$ называется подмножество $N^\circ \subseteq V$, состоящее из таких векторов, на которых обращаются в нуль все линейные формы из множества N, т. е.

$$N^\circ = \{x \in V : (\forall\, f \in N)\,[\, f(x) = 0\,]\}. \tag{32.24}$$

Внимательно сопоставьте описания (32.21) и (32.24): в каждом из них фигурирует (в квадратных скобках) одно и то же определяющее условие $[\, f(x) = 0\,]$; отличаются они по тому, какая из переменных, x или f, связывается квантором $\forall$.

Заметим далее, что аннуляторы можно брать повторно. Скажем, начав с подмножества $M \subseteq V$, мы получим, в соответствии с (32.21), аннулятор $M^\circ \subset V^*$, которому, в соответствии с (32.24), будет соответствовать второй аннулятор

$$M^{\circ\circ} = (M^\circ)^\circ, \tag{32.25}$$

снова содержащийся в пространстве V.

Подобным же образом можно действовать, начиная с подмножества $N \subseteq V^*$.

Важнейшим свойством аннуляторов является то, что для любого *подмножества* его аннулятор является уже *подпространством*. Более точно мы сформулируем это свойство (и ряд других) в предложении 32.2 ниже. Обратите внимание на группировку материала в два столбца. Здесь наблюдается одно из замечательных математических явлений — *двойственность*. Подробнее о нем будет сказано в следующем параграфе (см. п. 33.5).

Предложение 32.2. *Операция взятия аннулятора подмножества обладает (для любых M, M_1, $M_2 \subseteq V$; N, N_1, $N_2 \subseteq V^*$) следующими свойствами:*

(1a) $M^\circ \leqslant V^*$;	(1b) $N^\circ \leqslant V$;
(2a) $(M_1 \subseteq M_2) \Rightarrow (M_1^\circ \geqslant M_2^\circ)$;	(2b) $(N_1 \subseteq N_2) \Rightarrow (N_1^\circ \geqslant N_2^\circ)$;
(3a) $M^\circ = \langle M \rangle^\circ$;	(3b) $N^\circ = \langle N \rangle^\circ$;
(4a) $M \subseteq M^{\circ\circ}$;	(4b) $N \subseteq N^{\circ\circ}$.

Доказательство. 1a. Докажем, что аннулятор любого подмножества в V является линейным подпространством в V^*. В самом деле, если $f, g \in M^\circ$, т. е. $f(x) = g(x) = 0$ для любого $x \in M$, то для любых скаляров $\lambda, \mu \in P$ форма $\lambda f + \mu g$ также аннулируется на любом векторе $x \in M$, и, следовательно, принадлежит M°.

1b. Аналогично доказывается, что аннулятор любого подмножества в V^* является линейным подпространством в V: если $x, y \in N^\circ$, т. е. $f(x) = f(y) = 0$ для любого $f \in N$, то (при любых $\lambda, \mu \in P$) вектор $\lambda x + \mu y$ также принадлежит N°.

2a. Если линейная форма аннулируется на подмножестве M_2, то она аннулируется и на подмножестве $M_1 \subseteq M_2$. Значит, аннулятор M_2° содержится (и, следовательно, является подпространством) в аннуляторе M_1°.

2b. Проведите самостоятельно столь же короткое доказательное рассуждение.

3a. Доказательство утверждения 3a также останется читателям в качестве упражнения; образец будет дан в пункте 3b.

3b. Прежде всего уточним смысл угловых скобок: в данном случае они обозначают *линейную оболочку для подмножества* (см. п. 2.2). Подмножество N содержится в своей линейной оболочке $\langle N \rangle$, и, следовательно, в силу утверждения 2b, имеет место включение $N^\circ \supseteq \langle N \rangle^\circ$. Противоположное включение обосновывается так: если на векторе x аннулируется любая линейная форма, принадлежащая подмножеству N, то на этом векторе аннулируется также и произвольная (конечная) линейная комбинация таких форм, т. е. произвольная линейная форма, принадлежащая $\langle N \rangle$.

4a. Возьмем произвольный вектор $x \in M$. Докажем, что x принадлежит *второму аннулятору* $M^{\circ\circ}$. Для любой формы $f \in M^\circ$ (по определению 32.1) имеем: $f(x) = 0$, а значит (на этот раз — по определению 32.2), вектор x принадлежит аннулятору аннулятора M°, что и требовалось.

4b. Упражнение. □

32.3. Аннуляторы линейных подпространств. В предыдущем пункте мы изучали аннуляторы для произвольных подмножеств в к.л.п. V и в двойственном пространстве V^*. В данном пункте мы займемся аннуляторами линейных подпространств. Двухстолбцовый стиль оформления будет сохранен.

Предложение 32.3. *Пусть V — к.л.п. над полем P, V^* — соответствующее двойственное пространство. Для любых линейных подпространств $M \leqslant V$; $N \leqslant V^*$ справедливы следующие утверждения:*

(1a) $\dim(M^\circ) = \operatorname{codim}(M)$; (1b) $\dim(N^\circ) = \operatorname{codim}(N)$;
(2a) $M^{\circ\circ} = M$; (2b) $N^{\circ\circ} = N$.

Доказательство. 1a. Пусть $\dim(V) = n$ и $\dim(M) = k$. Докажем, что

$$\dim(M^\circ) = \operatorname{codim}(M) = n - k. \tag{32.26}$$

Выберем произвольный базис

$$\mathcal{B}' = [\, b_1, \dots, b_k \,] \tag{32.27}$$

в подпространстве M и продолжим его (см. п. 5.4) до базиса

$$\mathcal{B} = [\, b_1, \dots, b_k;\ b_{k+1}, \dots, b_n \,] \tag{32.28}$$

во всем пространстве V, а затем рассмотрим двойственный базис

$$\mathcal{B}^* = [\, b_1^*, \dots, b_k^*;\ b_{k+1}^*, \dots, b_n^* \,] \tag{32.29}$$

в пространстве V^*. Утверждение (32.26) будет доказано, если мы убедимся, что система векторов (или, точнее, *ковекторов*)

$$\mathcal{C} = [\, b_{k+1}^*, \dots, b_n^* \,] \tag{32.30}$$

является базисом в аннуляторе M°.

Тот факт, что линейные формы b_j^* $(j = k+1, \dots, n)$ принадлежат M° вытекает из соотношений (31.12): при $i = 1, \dots, k$ форма b_j^* аннулируется на векторах b_i и, следовательно, на всех векторах подпространства $M = \langle \mathcal{B}' \rangle$.

Далее, с.в. (32.30) линейно независима, т.к. является подсистемой в базисе (32.29). Остается убедиться в том, что она порождает M°. Это усматривается из представления [см. (31.17)]:

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j^*;\ \ f \in V^*;\ \ \alpha_j = f(b_j), \tag{32.31}$$

которое для $f \in M^\circ$ сокращается до представления

$$f = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j b_j^*, \tag{32.32}$$

свидетельствующего о том, что f линейно выражается через $\mathcal{C}$.

1b. Наметим основные этапы доказательства. (Восстановление подробностей поручается читателям.)

В пространстве V^* строится базис

$$\mathcal{F} = [\, f_1, \dots, f_l;\ f_{l+1}, \dots, f_n \,], \tag{32.33}$$

первые l элементов (т. е. форм, или ковекторов) в котором составляют базис в подпространстве N.

Согласно предложению 32.1, базис $\mathcal{F}$ является двойственным для некоторого базиса

$$\mathcal{B} = [\, b_1, \dots, b_l;\ b_{l+1}, \dots, b_n \,] \tag{32.34}$$

в пространстве V, т. е. $\mathcal{F} = \mathcal{B}^*$, или $f_j = b_j^*$ $(j = 1, ..., n)$.

Последние $n - l$ векторов в (32.34) будут составлять базис в аннуляторе N°.

2a. Согласно утверждению (4a) из предложения 32.2, имеет место включение (в данном случае — подпространств): $M \leqslant M^{\circ\circ}$. Убедиться в том, что на самом деле подпространства равны, можно, вычислив, с помощью утверждений (1a) и (1b), размерность второго аннулятора: если $\dim(M) = k$, то

$$\dim(M^{\circ\circ}) \overset{(1b)}{=\!=} n - \dim(M^\circ) \overset{(1a)}{=\!=} n - (n - k) = k = \dim(M).$$

2b. Упражнение. □

Вооружившись предложением 32.3 об аннуляторах линейных подпространств, мы вернемся к вопросу об аннуляторах произвольных подмножеств и выясним, какой смысл имеет (в общем случае) второй аннулятор.

Предложение 32.4. *Пусть V — к.л.п. над полем P, V^* — соответствующее двойственное пространство. Для любых подмножеств $M \subseteq V$; $N \subseteq V^*$ вторые аннуляторы совпадают с линейными оболочками:*

(a) $M^{\circ\circ} = \langle M \rangle$; (b) $N^{\circ\circ} = \langle N \rangle$.

Доказательство проведем лишь для утверждения (a); проверка (b) производится аналогично.

Согласно утверждению (3a) предложения 32.2, аннулятор подмножества совпадает с аннулятором линейной оболочки этого подмножества: $M^\circ = \langle M \rangle^\circ$, а значит и вторые аннуляторы для подмножества и его линейной оболочки одинаковы: $M^{\circ\circ} = \langle M \rangle^{\circ\circ}$. Но $\langle M \rangle$,

будучи линейным подпространством совпадает со своим вторым аннулятором, что и доказывает формулу (a). □

Замечание 32.2. Равенства (a) и (b) приводят к тому, что для любого подмножества (в V или в V^*) его *третий аннулятор* совпадает с первым. Для подпространств же имеет место более сильное свойство: второй аннулятор равен исходному подпространству.

32.4. Соотношения двойственности. Рассмотрим соответствие между подпространствами в к.л.п. V и подпространствами в двойственном подпространстве V^*, заданное сопоставлением произвольному подпространству его аннулятора:

$$\begin{aligned} V \geqslant M \ &\overset{\circ}{\longmapsto} M^\circ \leqslant V^*; \\ V \geqslant N^\circ &\overset{\circ}{\longmapsfrom} \ N \ \leqslant V^*. \end{aligned} \tag{32.35}$$

Это соответствие можно назвать

— *антиизотонным* (за то, что оно *обращает знаки включений* между подпространствами);

— *инволютивным* (под этим понимается его *самообратность*: повторное взятие аннулятора возвращает нас к исходному подпространству).

Перечесленные выше и некоторые другие свойства соответствия $^\circ$ мы соберем в следующее

Предложение 32.5. *Соответствие (32.35) является биективным, антиизотонным, инволютивным и переводит суммы подпространств в пересечения и обратно. Точнее, для любых M, M_1, $M_2 \leqslant V$ и N, N_1, $N_2 \leqslant V^*$ справедливы следующие утверждения:*

(1a) $(M = O) \Rightarrow (M^\circ = V^*)$; (1b) $(N = O) \Rightarrow (N^\circ = V)$;
(2a) $(M = V) \Rightarrow (M^\circ = O)$; (2b) $(N = V^*) \Rightarrow (N^\circ = O)$;
(3a) $(M_1 \leqslant M_2) \Rightarrow (M_1^\circ \geqslant M_2^\circ)$; (3b) $(N_1 \leqslant N_2) \Rightarrow (N_1^\circ \geqslant N_2^\circ)$;
(4a) $M^{\circ\circ} = M$; (4b) $N^{\circ\circ} = N$;
(5a) $(M_1 + M_2)^\circ = M_1^\circ \cap M_2^\circ$; (5b) $(N_1 + N_2)^\circ = N_1^\circ \cap N_2^\circ$;
(6a) $(M_1 \cap M_2)^\circ = M_1^\circ + M_2^\circ$; (6b) $(N_1 \cap N_2)^\circ = N_1^\circ + N_2^\circ$.

Доказательство. Утверждения (1a) — (2b) совершенно очевидны: на нулевом подпространстве (и только на нем) аннулируются все формы; нулевая форма (и только она) аннулируется везде.

Свойства (3a) — (4b) установлены ранее (см. утверждения (2a) и (2b) предложения 32.2, а таже утверждения предложения 32.2, с теми же номерами). Поясним только, что биективность соответствия $^\circ$ вытекает из его обратимости (самообратности).

Докажем соотношение (5a). Каждое из подпространств, M_1 и M_2, содержится в сумме $M_1 + M_2$. Значит, в силу (3a), аннулятор $(M_1 + M_2)^\circ$ содержится в каждом из аннуляторов, M_1° и M_2°, и, следовательно, — в их пересечении.

Тем самым доказано включение $(M_1 + M_2)^\circ \subseteq M_1^\circ \cap M_2^\circ$.

Для доказательства противоположного включения возьмем произвольную форму $f \in M_1^\circ \cap M_2^\circ$. Форма f аннулируется как на M_1, так и на M_2. Значит, она аннулируется на $M_1 + M_2$ (в самом деле, всякий элемент $x \in M_1 + M_2$ представляется в виде $x = y + z$, где $y \in M_1$ и $z \in M_2$; поэтому $f(x) = f(y + z) = f(y) + f(z) = 0$). Следовательно, $f \in (M_1 + M_2)^\circ$.

Наметим доказательство (5b). Первое включение получаем, руководствуясь теми же соображениями, что и при доказательстве (5a). Второе включение, $(N_1 + N_2)^\circ \supseteq N_1^\circ \cap N_2^\circ$, обосновывается так: если вектор x принадлежит обоим аннуляторам, N_1° и N_2°, то на нем аннулируются любая форма $f \in N_1$ и любая форма $g \in N_2$, а значит, — и любая форма $h = f + g \in N_1 + N_2$, т. е. x принадлежит аннулятору суммы.

Переходим к доказательству утверждения (6a). Представим данные подпространства $M_1, M_2 \leqslant V$ как аннуляторы, $M_1 = N_1^\circ$ и $M_2 = N_2^\circ$, некоторых подпространств $N_1, N_2 \leqslant V^*$ и воспользуемся ранее доказанными утверждениями:

$$(M_1 \cap M_2)^\circ = (N_1^\circ \cap N_2^\circ)^\circ \overset{(5b)}{=\!=} (N_1 + N_2)^{\circ\circ} \overset{(4b)}{=\!=} N_1 + N_2 = M_1^\circ + M_2^\circ.$$

Доказательство (6b) совершенно аналогично. □

§ 33. Двойственный линейный оператор. Теорема Фредгольма

33.1. Понятие двойственного линейного оператора. Мы уже не раз подчеркивали характерную особенность математических теорий: наряду с объектами подлежат изучению их морфизмы. Теория двойственности не является исключением. Объектами в линейной алгебре служат конечномерные линейные пространства. Каждому из к.л.п. мы сопоставили двойственное к.л.п. Морфизмы линейных пространств — это линейные отображения (или, как они еще называются: линейные гомоморфизмы, линейные операторы). Ниже каждому линейному оператору будет сопоставлен двойственный

линейный оператор, будут изучены свойства двойственных операторов, исследованы связи между различными алгебраическими характеристиками для исходного оператора и для двойственного к нему.

Пусть V и W — два линейных пространства (над одним и тем же полем P). Рассмотрим некоторый линейный оператор

$$\varphi : V \longrightarrow W. \tag{33.1}$$

Для любой линейной формы

$$g : W \longrightarrow P \tag{33.2}$$

можно, взяв ее композицию с оператором φ, получить линейную форму

$$f = g \circ \varphi : V \longrightarrow P. \tag{33.3}$$

Следующая диаграмма иллюстрирует описаннное выше построение формы $f \in V^*$ по форме $g \in W^*$.

Диагр. 33.1

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \nearrow f & & g \nwarrow \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

Так возникает отображение двойственных пространств:

$$\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*;\ g \mapsto g \circ \varphi;\ g \in W^*. \tag{33.4}$$

Легко убедиться в том, что (33.4) является линейным оператором. В самом деле, для любых форм $g_1, g_2 \in W^*$ и любых скаляров $\lambda_1, \lambda_2 \in P$ получается (с использованием законов (i) — $(xiii)$ алгебры линейных операторов; см. предложение 12.1):

$$\begin{aligned} \varphi^*(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \\ = (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ \varphi = \lambda_1 (g_1 \circ \varphi) + \lambda_2 (g_2 \circ \varphi) = \\ = \lambda_1 \varphi^*(g_1) + \lambda_2 \varphi^*(g_2). \end{aligned}$$

Определение 33.3. Линейный оператор (33.4) называется *двойственным* (*сопряженным*) к линейному оператору (33.1).

Действие оператора φ^* на линейные формы можно описать подробнее, с указанием аргумента форм (вектора $x \in V$):

$$\varphi^*(g)\,(x) = (g \circ \varphi)(x) = g(\varphi(x));\ g \in W^*;\ x \in V. \tag{33.5}$$

Переход от линейного оператора к двойственному определяет отображение

$$^* : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow \mathcal{L}(W^*, V^*);\ \varphi \mapsto \varphi^*;\ \varphi \in \mathcal{L}(V, W). \tag{33.6}$$

Алгебраические свойства отображения (33.6) составляют содержание следующего предложения.

Предложение 33.1. *Операция перехода к двойственному линейному оператору*

1) сохраняет тождественые операторы, т. е.

$$\varepsilon_V^* = \varepsilon_{V^*}; \tag{33.7}$$

2) является линейным отображением линейных пространств линейных операторов, т. е.

$$(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)^* = \lambda_1\varphi_1^* + \lambda_2\varphi_2^* \tag{33.8}$$

для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ и любых скаляров $\lambda_1, \lambda_2 \in P$;

3) переводит композицию операторов в композицию двойственных операторов, взятых в противоположном порядке, т. е.

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \tag{33.9}$$

для любых $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\psi \in \mathcal{L}(W, U)$.

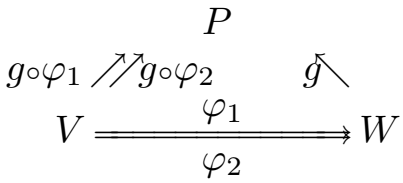
Доказательство. 1. Первое утверждение совершенно очевидно:

$$\varepsilon_V^*(g) = g \circ \varepsilon_V = g$$

для любого $g \in V^*$.

2. Доказательству второго утверждения мы предпошлем следующую диаграмму.

Диагр. 33.2



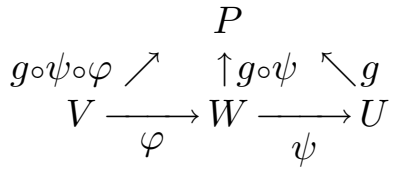
Собственно доказательство состоит в проверке выполнения равенства (33.8) на произвольной форме $g \in W^*$:

$$(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)^*(g) =$$
$$= (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) \circ g = \lambda_1(\varphi_1 \circ g) + \lambda_2(\varphi_2 \circ g) = \lambda_1\varphi_1^*(g) + \lambda_2\varphi_2^*(g) =$$
$$= (\lambda_1\varphi_1^* + \lambda_2\varphi_2^*)(g),$$

где снова сработали законы (i) — $(xiii)$ для алгебраических действий над линейными операторами.

3. Доказательство третьего утверждения также начнем с диаграммной иллюстрации.

Диагр. 33.3



Проверка (33.9) на произвольной форме $g \in W^*$:

$$(\psi \circ \varphi)^*(g) =$$
$$= g \circ (\psi \circ \varphi) = (g \circ \psi) \circ \varphi = \psi^*(g) \circ \varphi = \varphi^*(\psi^*(g)) =$$
$$= (\varphi^* \circ \psi^*)(g). \square$$

*Замечание 33.1.** К неудовольствию автора в данном замечании сошлись:

— звездочка как знак необязательности (или повышенной сложности) материала и

— звездочка как математический символ, обозначающий переход к двойственному объекту.

Второй двойственный к оператору (33.1) определяется как двойственный к первому двойственному:

$$\varphi^{**} = (\varphi^*)^* : V^{**} \longrightarrow W^{**}. \tag{33.10}$$

Действие оператора (33.10) на произвольном элементе $\alpha \in V^{**}$ представляется [вытекающей из общего определения (33.4)] формулой

$$\varphi^{**}(\alpha) = \alpha \circ \varphi^*, \tag{33.11}$$

которая, будучи равенством в пространстве W^{**}, может быть расписана подробнее, на любой линейной форме $g \in W^*$:

$$\varphi^{**}(\alpha)\,(g) = (\alpha \circ \varphi^*)(g) = \alpha(\varphi^*(g)) = \alpha(g \circ \varphi). \tag{33.12}$$

Если (конечномерные) линейные пространства V и W с помощью канонических изоморфизмов $\varkappa$ [см. (32.3)] отождествить с их вторыми двойственными пространствами V^{**} и W^{**}, то оператор φ^{**} отождествится φ.

Точный смысл последнему высказыванию можно придать с помощью еще одной диаграммы.

Диагр. 33.4

$$\begin{array}{ccc} V^{**} & \xrightarrow{\quad\varphi^{**}\quad} & W^{**} \\ \cong\uparrow\varkappa & & \varkappa\uparrow\cong \\ V & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & W \end{array}$$

Докажем, что отображения, представленные на дигр. 33.4, связаны условием:

$$\varphi^{**} \circ \varkappa = \varkappa \circ \varphi. \tag{33.13}$$

Заметьте, что (и в диаграмме, и в формуле) одна и та же буква $\varkappa$ обозначает два разных изоморфизма (для разных пространств).

Формула (33.13) есть равенство операторов, оно подлежит проверке на произвольном векторе $x \in V$:

$$(\varphi^{**} \circ \varkappa)(x) = (\varkappa \circ \varphi)(x). \tag{33.14}$$

Обе части равенства (33.14) представляют из себя элементы второго двойственного пространства W^{**}, т. е. линейные формы на линейных формах. Следовательно, это равенство подлежит проверке на произвольном элементе (форме) $g \in V^*$:

$$(\varphi^{**} \circ \varkappa)(x)\,(g) = (\varkappa \circ \varphi)(x)\,(g). \tag{33.15}$$

Далее следует выкладка, доказывающая (33.15):

$$(\varphi^{**} \circ \varkappa)(x)\,(g) = \varphi^{**}(\varkappa(x))\,(g) \overset{(33.12)}{=\!=} \varkappa(x)\,(g \circ \varphi) =$$

$$\overset{(32.3)}{=\!=} (g \circ \varphi)(x) = g(\varphi(x)) \overset{(32.3)}{=\!=} \varkappa(\varphi(x))\,(g) = (\varkappa \circ \varphi)(x)\,(g).$$

33.2. Матрица двойственного оператора. Пусть V и W являются конечномерными линейными пространствами (размерностей n и m соответственно, над полем P); пусть в них зафиксированы базисы

$$\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, \dots, b_n] \tag{33.16}$$

и

$$\mathcal{C} = [\, c_1, c_2, \dots, c_m]. \tag{33.17}$$

В двойственных пространствах рассмотрим двойственные базисы

$$\mathcal{B}^* = [\, b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*] \tag{33.16*}$$

и

$$\mathcal{C}^* = [\, c_1^*, c_2^*, \dots, c_m^*]. \tag{33.17*}$$

Рассмотрим далее линейный оператор $\varphi : V \to W$ и двойственный оператор $\varphi^* : W^* \to V^*$.

Предложение 33.2. *Если оператору φ в базисах (33.16) и (33.17) отвечает матрица $\underset{m\times n}{A}$, то оператору φ^* отвечает в базисах (33.16*) и (33.17*) транспонированная матрица $\underset{n\times m}{A^t}$.*

Доказательство. Введем временное обозначение S для матрицы двойственного оператора. Нам надо доказать равенство $S = A^t$. Очевидно, что матрица S должна иметь именно такие размеры, какие имеет транспонированная матрица; так что остается проверить поэлементное совпадение:

$$s_{ji} = a_{ij};\ i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n. \tag{33.18}$$

Согласно правилу составления матрицы линейного отображения [см. (12.7)], имеем:

$$\varphi(b_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} c_k, \tag{33.19}$$

где

$$a_{kj} = [\varphi(b_j)]_k, \tag{33.20}$$

и, аналогично,

$$\varphi^*(c_i^*) = \sum_{j=1}^{n} s_{ji} b_j^*, \tag{33.21}$$

где

$$s_{ji} = [\varphi^*(c_i^*)]_j. \tag{33.22}$$

Формула (33.21) является равенством линейных форм (элементов V^*); их координаты относительно базиса (33.16*) могут быть вычислены с помощью соотношений (31.6); далее используется описание (33.5) действия двойственного оператора, а также определение двойственного базиса:

$$s_{ji} = [\varphi^*(c_i^*)]_j \overset{(31.6)}{=\!=} \varphi^*(c_i^*)\,(b_j) \overset{(33.5)}{=\!=} c_i^*(\varphi(b_j)) \overset{(33.19)}{=\!=}$$
$$= c_i^*(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} c_k) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} c_i^*(c_k) \overset{(31.14)}{=\!=} \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\delta_{ik} = a_{ij}.$$

Соотношение (33.18) доказано. □

Замечание 33.2. Как известно (см. п. 12.4), действие $y = \varphi(x)$; $(x \in V;\ y \in W)$ линейного оператора может быть арифметизовано (выражено в координатах) с помощью матрицы этого оператора:

$$\overline{y} = A\overline{x};\ \overline{x} \in P^n;\ \overline{y} \in P^m. \tag{33.23}$$

Для действия $f = \varphi^*(g)$ $(g \in W^*;\ f \in V^*)$ двойственного оператора также может быть произведена арифметизация:

$$\overline{a} = A^t \cdot \overline{b}, \tag{33.24}$$

где

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in P^m;\ \overline{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in P^n \tag{33.25}$$

— координатные столбцы, отвечающие формам f и g в соответствующих двойственных базисах.

Однако для форм более естественной является запись координат в строку (см. п. 31.2), в связи с чем можно транспонировать соотношение (33.24):

$$\overline{a}^t = \overline{b}^t \cdot A, \tag{33.24^t}$$

где $\overline{b}^t \in \overset{*}{P}{}^m$, $\overline{a}^t \in \overset{*}{P}{}^n$.

Такой подход позволяет видоизменить утверждение предложения 33.2 о матрице двойственного линейного оператора: если координаты линейных форм записывать в строку и так же, по строкам, заполнять матрицу для двойственного оператора, то последняя окажется тождественной с матрицей исходного оператора.

Замечание 33.3. Ранг линейного оператора совпадает с рангом его матрицы, поэтому предложение 33.2 влечет равенство рангов данного оператора и двойственного к нему:

$$\operatorname{rank}(\varphi^*) = \operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\varphi). \tag{33.25}$$

В то же время дефекты операторов φ и φ^*, вообще говоря, различны, поскольку

$$\operatorname{dfc}(\varphi) = n - r, \tag{33.26}$$

а

$$\operatorname{dfc}(\varphi^*) = m - r, \tag{33.27}$$

где $r = \operatorname{rank}(\varphi)$.

Замечание 33.4 (продолжение замечания 12.2). Во второй главе, в предложении 12.1 приводился список из 13 законов алгебры линейных операторов, в то время как для алгебры матриц (см. [A_1, п. 2.2]) рассматривалось 17 законов. Последние четыре из них относились к алгебраической операции транспонирования матриц.

В начальных параграфах настоящей главы мы познакомились с новым алгебраическим действием в алгебре линейных операторов — переходом к двойственному оператору $\varphi \mapsto \varphi^*$. Далее это действие было увязано с переходом $A \mapsto A^t$ к транспонированной матрице.

В предложении 33.1 и в замечании 33.1 были фактически сформулированы "недостающие законы" алгебры операторов, соответствующие законам (xiv) — (xvii) алгебры матриц.

Ниже они приводятся повторно, в форме, аналогичной соотношениям (i) — $(xiii)$:

(xiv) $(\forall\, V \xrightarrow{\varphi} W)$ $[\,\varphi^{**} = \varphi\,]$ (при отождествлении $V^{**} \equiv V$);
(xv) $(\forall\, V \overset{\varphi,\psi}{\rightrightarrows} W)$ $[\,(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*\,]$;
(xvi) $(\forall\, \lambda \in P;\ V \xrightarrow{\varphi} W)$ $[\,(\lambda\varphi)^* = \lambda\,\varphi^*\,]$;
$(xvii)$ $(\forall\, V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U)$ $[\,(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*\,]$.

33.3. Теорема Фредгольма. Еще одна встреча со шведским математиком Эриком Иваром Фредгольмом (1866 — 1927). Первая состоялась в первом семестре; см. [A_1, п. 6.3]. Основным достижением Фредгольма считается развитие теории интегральных уравнений. Нам до этого еще учиться и учиться. То, что излагалось в первом пособии и касалось альтернативы Фредгольма, и то, что будет изложени ниже, в данном пункте, является конечномерным аналогом бесконечномерной теории. Однако, по мнению автора, предварительное знакомство со сложной наукой в простейшей (элементарной) ситуации весьма полезно.

Итак, рассмотрим линейный оператор φ, действующий из n-мерного линейного пространства V в m-мерное пространство W, а также — двойственный линейный оператор φ^*, действующий из W^* в V^*. Образы и ядра этих операторов оказываютя двойственными друг другу.

Теорема 33.1 (теорема Фредгольма). *Являются аннуляторами друг друга:*

— *образ оператора φ и ядро двойственного оператора φ^*;*

— *ядро φ и образ φ^*.*

Доказательство. Нам предстоит доказать две формулы:

$$\operatorname{Im}(\varphi) = (\operatorname{Ker}(\varphi^*))^\circ \tag{33.28}$$

и

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = (\operatorname{Im}(\varphi^*))^\circ. \tag{33.29}$$

1. Пусть $y \in \operatorname{Im}(\varphi)$, т. е. $y = \varphi(x)$ для некоторого $x \in V$. Тогда для любого $g \in \operatorname{Ker}(\varphi^*)$ справедливо:

$$g(y) = g(\varphi(x)) \overset{(33.5)}{=\!=} \varphi^*(g)\,(x) = 0,$$

т. е. y принадлежит аннулятору $(\operatorname{Ker}(\varphi^*))^\circ$.

Тем самым доказано включение $\operatorname{Im}(\varphi) \leqslant (\operatorname{Ker}(\varphi^*))^\circ$, которое на самом деле яляется равенством, поскольку $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = r$ и

$$\dim((\operatorname{Ker}(\varphi^*))^\circ) = m - \dim((\operatorname{Ker}(\varphi^*)) =$$

$$= m - \operatorname{dfc}(\varphi^*) \overset{(33.27)}{=\!=} m - (m - r) = r.$$

2. Пусть $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, т. е. $\varphi(x) = 0$. Возьмем любую форму $f \in \mathrm{Im}(\varphi^*)$, т. е. такую, которая представляется в виде $f = \varphi^*(g)$ для некоторой формы $g \in W^*$. Будем иметь:

$$f(x) = \varphi^*(g)\,(x) \overset{(33.5)}{=\!=} g(\varphi(x)) = g(0) = 0.$$

Это означает, что вектор x принадлежит аннулятору $\mathrm{Im}(\varphi^*)$.

Включение $\mathrm{Ker}(\varphi) \leqslant (\mathrm{Im}(\varphi^*))^\circ$ доказано. На самом деле оно является равенством в силу совпадения размерностей:

$$\dim((\mathrm{Im}(\varphi^*))^\circ) = n - \dim(\mathrm{Im}(\varphi^*)) = n - \mathrm{rank}(\varphi^*) =$$
$$= n - \mathrm{rank}(\varphi) = n - r \overset{(33.26)}{=\!=} \mathrm{dfc}(\varphi) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)).$$

Оба утверждения, провозглашенные в теореме, доказаны. □

*Замечание 33.5.** "Рабочие" приложения теоремы Фредгольма основаны на следующей идее: для того, чтобы выяснить, принадлежит ли вектор $b \in W$ образу оператора φ, достаточно убедиться в том, что на этом векторе аннулируются базисные (и, следовательно, все) элементы ядра $\mathrm{Ker}(\varphi^*)$.

В координатной записи речь идет о разрешимости неоднородной с.л.у. $A\overline{x} = \overline{b}$, и критерием этого является обращение в нуль всех произведений $\overline{g_k}^{\,t} \cdot \overline{b}$, для всех базисных решений $\overline{g_k}^{\,t}$ $(k = r+1, \dots, m)$ двойственной однородной с.л.у. $\overline{g}^t A = \overline{0}^t$, или, что равносильно, — обращение в нуль произведения матриц:

$$\underset{(m-r)\times m}{G^t} \cdot \underset{m\times n}{A} = \underset{(m-r)\times n}{O},$$

где $r = \mathrm{rank}(A)$, а G — фундаментальная матрица для однородной с.л.у. $A^t\overline{g} = \overline{0}$.

33.4.* Неформальные рассуждения о природе двойственности. Строгого и всеобъемлющего определения понятия двойственности дать, по-видимому, нельзя. Однако, природу этого явления можно почувствовать на отдельных примерах, с некоторыми из которых мы уже сталкивались.

Важнейшим атрибутом двойственности, как правило, выступает некоторое *инволютивное соответствие*, сопоставляющее объектам некоторого класса *двойственные объекты* (в этом же или в другом классе).

Скажем, в *булевой алгебре* 2^I подмножеств некоторого множества I (см. п. 1.7) всякому подмножеству $A \subseteq I$ сопоставляется его *дополнение* $\overline{A} = X \setminus A$. Инволютивность этого соответствия выражается законом: $\overline{\overline{A}} = A$.

Только что мы познакомились с двойственностью для конечномерных линейных пространств: всякому объекту (к.л.п.) V сопоставляется двойственный объект (двойственное к.л.п.) V^*. Инволютивность здесь имеет несколько более сложный характер: второе двойственное пространство V^{**} не равно, но *канонически изоморфно* исходному пространству.

Еще одним типичным свойством двойственности является *обращение включений* для подобъектов. В простейшем (булевом) примере включение $A \subseteq B$ влечет противоположное включение $\overline{A} \supseteq \overline{B}$ для дополнений.

В линейной алгебре подобъекты суть линейные подпространства $W \leqslant V$. Каждому из них отвечает двойственный подобъект — аннулятор $W^\circ \leqslant V^*$, причем включения между подпространствами снова "переворачиваются": более широкому подпространству отвечает более узкий аннулятор (см. утверждения (3a) и (3b) в предложении 32.5), второй аннулятор совпадает с исходным подпространством.

Законы де Моргана (b.9) и (b.18) в булевой алгебре (см. пример 1.7) можно трактовать следующим образом: объединению (пересечению) множеств соответствует пересечение (объединение) их дополнений. Можно говорить о взаимной двойственности алгебраических действий объединения и пересечения.

Сходное явление мы наблюдали в линейной алгебре, только операция объединения здесь замещается на операцию сложения (подпространств). Утверждения (5a) — (6b) предложения 32.5 следует трактовать как установление взаимной двойственности алгебраических операций сложения и пересечения для линейных подпространств.

Принято также говорить о "надматематическом" *принципе двойственности* для утверждений (аксиом, теорем, предложений), понимая под этим следующее правило: каждому истинному утверждению об объектах отвечает (также истинное) утверждение о двойственных объектах, в котором все включения обращены, все алгебраические действия заменены двойственными, наименьший (нулевой) объект заменен на наибольший и т. д.

В сводке законов булевой алгебры (b.1) — (b.19) они были специально расположены в два столбца так, чтобы в каждой строке

содержались взаимно двойственные утверждения; последнее оказалось "самодвойственным".

В предложении 32.5 группировка материала была несколько иной. Проанализировав, например, доказательство утверждения (6a), вы можете заметить, что оно (с помощью замены подпространств на их аннуляторы) сводилось к ранее доказанному утверждению (5b); именно его можно считать двойственным к (6a).

В текущем параграфе теория двойственности для к.л.п. была распространена с объектов на *морфизмы* (линейные отображения), и мы столкнулись с еще одним ее характерным проявлением — *обращением стрелок*:

$$V \xrightarrow{\varphi} W \ ;$$

$$V^* \xleftarrow{\varphi^*} W^*,$$

которое естественно приводит к правилу

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

изменения (при переходе к двойственным) порядка морфизмов в композиции.

В связи с этим припомним студенческую прибаутку. Факту

	снесла	
курица	$- - - - - \rightarrow$	яйцо

отвечает двойственный факт:

	коснесло	
кокурицу	$\leftarrow - - - - -$	кояйцо

.

Вам еще не раз предстоит встретиться с различными теориями, эксплуатирующими идею двойственности. Например, настоящим "царством двойственности" является *проективная геометрия* — наука, удивительная и красивая сама по себе, но, помимо этого, — абсолютно необходимая при разработке программных средств компьютерной графики.

§ 34. Билинейные формы и их матрицы

34.1. Понятие билинейной формы на линейном пространстве. Рассмотрим линейное пространство V над полем P.

Определение 34.1. *Билинейной формой* (или *функцией*) на линейном пространстве V называется отображение

$$f : V \times V \longrightarrow P;\ x \mapsto f(x, y);\ x, y \in V \tag{34.1}$$

декартова квадрата пространства V в поле P, линейное по каждому из аргументов, т. е. удовлетворяющее условиям

(1) $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$;
(2) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$;
(3) $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$;
(4) $f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$,

для любых $\lambda \in P;\ x, x', y, y' \in V$.

Замечание 34.1. Эти условия не являются для нас принципиально новыми. Уже в первом пособии [A_1] говорилось (см. доказательство теоремы 2.1) о свойстве билинейности для произведения матриц и даже — о свойстве полилинейности (при изучении определителей; см. §§ 24, 26).

Отметим следствия из определения билинейных форм:

1) обычная линейность функции одной переменной $x \mapsto f(x)$ влечет "сохранение нуля": $f(0) = 0$; наличие двух аргументов и линейности по каждому из них приводит к свойствам:

$$f(0, y) = 0 = f(x, 0) \tag{34.2}$$

для любых $x, y \in V$;

2) линейные функции от одного переменного сохраняют линейные комбинации [см. (1.11)]; для билинейных функций (форм), при наличии линейных комбинаций по каждому из аргументов, значение формы раскрывается как двойная сумма:

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \sum_{j=1}^{l} \mu_j b_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \lambda_i \mu_j f(a_i, b_j), \tag{34.3}$$

где $\lambda_i, \mu_j \in P$; $a_i, b_j \in V$ $(i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, l)$.

Пополним наш, уже достаточно длинный, список аббревиатур еще одной — *б.ф.* (= билинейная форма).

Равенство б.ф. понимается как равенство функций, т. е. поточечно. Примем обозначение $\mathcal{L}^2(V)$ для множества всех б.ф., заданных на линейном пространстве V, и введем на этом множестве поточечные алгебраические действия;

— сложение б.ф.:

$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y);\ f,g \in \mathcal{L}^2(V);\ x,y \in V; \tag{34.4}$$

— умножение б.ф. на скаляр:

$$(\lambda \cdot f)(x,y) = \lambda \cdot f(x,y);\ \lambda \in P;\ f \in \mathcal{L}^2(V);\ x,y \in V. \tag{34.5}$$

Сравните определения (34.4) — (34.5) с аналогичными определениями (12.1) — (12.1) для линейных операторов и убедитесь в том, что сумма $f+g$ и произведение $\lambda \cdot f$ снова являются б.ф.

(Напомним, что в § 12, при изучении линейных операторов, проверка указанных фактов также оставлялась читателям. Зато в § 15 пособия [A_1], при предварительном знакомстве с линейными отображениями арифметических линейных пространств, этот вопрос рассматривался подробнее.)

Далее нам необходимо убедиться, что алгебраические действия (34.4) и (34.5) в множестве $\mathcal{L}^2(V)$ удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства (V_1) — (V_8). Однако уже в первом параграфе, при разборе примеров линейных пространств, было объяснено, что линейным пространством над полем P является множество $\mathcal{F}(M,P)$ *всех* функций, заданных на (произвольном) множестве M и принимающих значения в поле P. Замечая, что множество б.ф. содержится в линейном пространстве $\mathcal{F}(V \times V, P)$ и, более того, является в нем линейным подпространством, мы приходим к выводу, что $\mathcal{L}^2(V)$ также является *линейным пространством* (над полем P).

Приведем несколько примеров билинейных форм.

Пример 34.1. Рассмотрим арифметическое линейное пространство $V = P^n$ и произвольную $(n \times n)$-матрицу A с элементами из поля P. Из законов алгебры матриц (см. [A_1, п. 2.3]) легко выводится, что функция

$$f : P^n \times P^n \longrightarrow P;\ f(\overline{x},\overline{y}) = \overline{x}^t \cdot A \cdot \overline{y};\quad \overline{x},\overline{y} \in P^n \tag{34.6}$$

является б.ф. на V. (Прежде всего, проследите за тем, как произведение $(1 \times n)$-строки, $(n \times n)$-матрицы и $(n \times 1)$-столбца дает (1×1)-матрицу, отождествляемую со скаляром из P. Затем примените дистрибутивные законы и законы вынесения скаляров из сомножителей матричного произведения.)

В п. 34.3 мы убедимся в том, что (34.6) является *общим видом* б.ф. на арифметическом линейном пространстве и, более того, всякая б.ф. на к.л.п. в координатах выражается формулой типа (34.6).

Особо отметим случай единичной матрицы: $A = E_n$. Билинейная форма

$$f : P^n \times P^n \longrightarrow P;\ f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}^t \cdot \overline{y};\ \overline{x}, \overline{y} \in P^n \tag{34.7}$$

называется *стандартным скалярным произведением* в пространстве P^n. (Однако это понятие относится уже не к собственно линейной алгебре, но является исходным пунктом построения *линейной геометрии*.)

Пример 34.2 (продолжение примера 11.1). Рассмотрим (бесконечномерное) линейное пространство $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$ числовой оси $\mathbb{R}$. Из свойств определенного интеграла легко выводится, что функция от двух функций

$$f(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt;\ x, y \in V \tag{34.8}$$

является билинейной формой, которую можно рассматривать как бесконечномерное обобщение скалярного произведения (34.7).

(Начальный, "героический" период развития *функционального анализа* характеризовался очень высоким эмоциональным напряжением. Попытайтесь разделить "эйфорию первооткрывателей", представив себе, как дискретная переменная (индекс) i, принимающая целые значения от 1 до n, "перерождается" в непрерывную переменную (аргумент) t, пробегающую отрезок $[a, b]$, а конечная сумма $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ превращается в бесконечную (континуальную) сумму — определенный интеграл $\int_a^b x(t)y(t)\,dt$.)

Пример 34.3. На линейном пространстве $V = L(n, P)$ квадратных матриц задана линейная форма *след* [см. (13.34)]:

$$\mathrm{tr} : L(n, P) \longrightarrow P;\ X \mapsto \mathrm{tr}(X);\ X \in L(n, P), \tag{34.9}$$

с помощью которой можно определить на V б.ф.

$$f(X, Y) = \mathrm{tr}(X^t \cdot Y);\ X, Y \in V. \tag{34.10}$$

Свойства (1) — (4) из определения 34.1 следуют из:
— билинейности матричного умножения;
— линейности операции транспонирования;
— линейности формы (34.9).
(Вам поручается восстановление всех подробностей. Заметьте попутно, что в формуле (34.10) можно обойтись без транспонирования, и тоже получится б.ф. Ниже, в примере 34.6, станет ясно, чем интереснее вариант с транспонированием.)

Пример 34.4. Пусть $V = \mathbb{C}$, рассматриваемое как двумерное линейное пространство над $P = \mathbb{R}$. Функция

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R};\ f(z, w) = \mathrm{Re}(\overline{z} \cdot w);\ z, w \in \mathbb{C}, \tag{34.11}$$

где на этот раз черта обозначает комплексное сопряжение, является б.ф. (Убедитесь в этом и получите заодно координатную формулу: $f(z, w) = xu + yv$, для $z = x + yi$ и $w = u + vi$.)

Если в формуле (34.11) убрать сопряжение, то получится другая б.ф.:

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R};\ g(z, w) = \mathrm{Re}(z \cdot w);\ z, w \in \mathbb{C}, \tag{34.11$'$}$$

с координатным выражением $g(z, w) = xu - yv$.

Еще один пример б.ф. в этом пространстве:

$$h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R};\ h(z, w) = \mathrm{Im}(\overline{z} \cdot w);\ z, w \in \mathbb{C}; \tag{34.11$''$}$$

координатное представление найдете сами.

34.2. Матрица билинейной формы. Предположим теперь, что линейное пространство V является конечномерным (размерности n) и выберем в нем какой-либо базис

$$\mathcal{B} = [\, b_1, b_2, \dots, b_n]. \tag{34.12}$$

Рассмотрим б.ф. $f \in \mathcal{L}^2(V)$ и распишем ее значение $f(x, y)$ на произвольной паре векторов $(x, y) \in V \times V$, предварительно разложив эти векторы по базису (34.12):

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i;\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j. \tag{34.13}$$

Получим, как следствие общего правила (34.3), представление искомого значения в виде двойной суммы:

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jf(b_i,b_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j, \tag{34.14}$$

или, окончательно:

$$f(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j, \tag{34.14$'$}$$

где введены обозначения

$$a_{ij}=f(b_i,b_j);\ i,j=1,\dots,n \tag{34.15}$$

для значений формы f на парах базисных векторов.

Скаляры (34.15) составляют квадратную матрицу:

$$A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}. \tag{34.16}$$

Определение 34.2. Говорят, что матрица (34.16) *соответствует* (или *отвечает*) билинейной форме (34.1) в базисе (34.12).

С помощью матрицы (34.16) выражение (34.14) для значения билинейной формы можно представить в следующем виде:

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot[A\cdot\overline{y}\,]_i=\underset{1\times n}{\overline{x}^t}\cdot(\underset{n\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{\overline{y}})=\overline{x}^tA\,\overline{y},$$

где введены координатные столбцы $\overline{x},\overline{y}\in P^n$, отвечающие векторам $x,y\in V$ в базисе $\mathcal{B}$, и использовано определение матричного умножения.

Приведем для последующих ссылок координатное выражение билинейной формы в окончательном виде:

$$f(x,y)=\overline{x}^tA\,\overline{y}. \tag{34.17}$$

Предложение 34.1. *Пусть V — к.л.п. размерности n над полем P. Отображение*

$$m : \mathcal{L}^2(V) \longrightarrow L(n, P);\ f \mapsto A;\ f \in \mathcal{L}^2(V), \tag{34.18}$$

сопоставляющее билинейной форме (34.1) ее матрицу (34.16), является изморфизмом линейных пространств; в частности, пространство билинейных форм также является к.л.п. и $\dim(\mathcal{L}^2(V)) = n^2$.

Доказательство. Линейность отображения (34.18) очевидна в силу формул (34.15): сумме билинейных форм отвечает сумма соответствующих матриц; при умножении формы на скаляр ее матрица умножается на тот же скаляр.

Мономорфность отображения (34.18) вытекает из того факта, что б.ф. однозначно [по формуле (34.17)] восстанавливается по своей матрице.

Эпиморфность следует из того, что (в силу линейности координатного изоморфизма $x \mapsto \overline{x}$) по заданной квадратной $(n \times n)$-матрице A формула (34.17) определяет билинейную форму f на V, причем такую, что $m(f) = A$. В самом деле, подставляя в (34.17) вместо x и y базисные векторы b_i и b_j соответственно, мы получим сначала: $\overline{x} = \overline{e_i}$, $\overline{y} = \overline{e_j}$ и $A\overline{e_j} = \overline{a_j}$ (j-й столбец матрицы A), а затем:

$$f(b_i, b_j) = \overline{e_i}^t A \overline{e_j} = \overline{e_i}^t \overline{a_j} = a_{ij};\ i, j = 1, \dots, n. \ \square \tag{34.19}$$

Пример 34.5 (продолжение примера 34.1). Билинейной форме (34.6) в естественном базисе $\mathcal{E}_n$ арифметического линейного пространства P^n отвечает, очевидно, та самая матрица A, с помощью которой эта форма была задана. Действительно,

$$f(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = \overline{e_i}^t \cdot A \cdot \overline{e_j} = a_{ij}.$$

В частности, скалярному произведению (34.7) отвечает единичная матрица $A = E_n$.

Пример 34.6 (продолжение примера 34.3). Ситуция, аналогичная случаю скалярного произведения (34.7), имеет место и применительно к б.ф. (34.10): эта форма фактически тоже является *стандартным скалярным произведением* на n^2-мерном линейном пространстве $V = L(n, P)$.

В самом деле, диагональные элементы произведения матриц $X^t \cdot Y$ вычисляются по формуле:

$$[X^t \cdot Y]_{jj} = \overline{x_j}^t \cdot \overline{y_j} = (\, x_{1j}\, x_{2j}\, \ldots\, x_{nj}\,) \cdot \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \ldots \\ y_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} y_{ij},$$

а их сумма (след указанной матрицы) — по формуле:

$$f(X, Y) = \operatorname{tr}(X^t \cdot Y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} y_{ij}, \qquad (34.10')$$

т. е. значение $f(X, Y)$ получается как сумма произведений всех соответствующих элементов матриц X и Y.

Следовательно, в естественном базисе, составленном из матриц E_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, форме (34.10) отвечает единичная матрица порядка n^2.

Пример 34.7 (продолжение примера 34.4). Убедитесь самостоятельно в том, что если в поле $\mathbb{C}$ рассмотреть естественный базис $\mathcal{B} = [1, i]$, то б.ф. (34.11) будет соответствовать единичная матрица второго порядка, б.ф. (34.11′) — диагональная матрица $\operatorname{diag}(1, -1)$; матрицу для б.ф. (34.11″) определите сами.

34.3. Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса. Конгруэнтные матрицы. Изучение данного пункта полезно предварить просмотром п. 13.5, где рассматривался вопрос о пересчете матрицы *линейного эндоморфизма*, действующего в к.л.п., при замене базиса в этом пространстве.

Напомним, что л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ в каждом базисе $\mathcal{B}$ сопоставляется квадратная матрица A, которая при замене базиса, с матрицей перехода T, преобразуется [см. формулу (13.4)] в *подобную* матрицу $A' = T^{-1} A T$.

Рассмотрим в n-мерном пространстве V, помимо "старого" базиса (34.12), "новый" базис

$$\mathcal{B}' = [\, b'_1, b'_2, \ldots, b'_n], \qquad (34.12')$$

и пусть матрица T описывает переход от старого базиса к новому, а обратная матрица $S = T^{-1}$ — обратный переход.

Обозначим A и A' матрицы, отвечающие б.ф. $f \in \mathcal{L}^2(V)$ в старом и новом базисах соответственно.

Предложение 34.2. *При замене базиса матрица б.ф. пересчитывается по формулам:*

$$A' = T^t A T; \quad A = S^t A' S. \tag{34.20}$$

Доказательство. Достаточно доказать первую из формул (34.2), после чего, домножением ее обеих частей, справа на $S = T^{-1}$, а слева — на $S^t = (T^t)^{-1}$, мы получим вторую формулу.

Пусть x и y — произвольные векторы из пространства V. В старом базисе $\mathcal{B}$ (в новом базисе $\mathcal{B}'$) им соответствуют координатные столбцы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ (соответственно $\overline{x}'$ и $\overline{y}'$). Согласно формулам пересчета (7.12), имеют место выражения старых столбцов через новые:

$$\overline{x} = T\overline{x}'; \quad \overline{y} = T\overline{y}'. \tag{34.21}$$

Значение $f(x, y)$ по формулам типа (34.17) может быть вычислено в координатах относительно любого базиса. В данном случае мы приходим к двум выражениям:

$$f(x, y) = (\overline{x}')^t A' \overline{y}'$$

и

$$f(x, y) = \overline{x}^t A \overline{y} \overset{(34.21)}{=\!=} (T\overline{x}')^t A (T\overline{y}') = (\overline{x}')^t \left(T^t A T\right) \overline{y}'.$$

Приравнивая их, мы получим равенство

$$(\overline{x}')^t A' \overline{y}' = (\overline{x}')^t \left(T^t A T\right) \overline{y}', \tag{34.22}$$

которое (в силу произвольности $x, y \in V$) должно быть справедливо для любых векторов-столбцов $\overline{x}', \overline{y}' \in P^n$. Подставляя столбцы из естественного базиса, $\overline{x}' = \overline{e_i}$ и $\overline{y}' = \overline{e_j}$, и пользуясь выкладками, аналогичными (34.19), мы приходим к выводу о равенстве соответствующих элементов

$$[A']_{ij} = [T^t A T]_{ij}; \ i, j = 1, \dots, n,$$

что и убеждает нас в справедливости равенства матриц, выражаемого первой из формул (34.20). □

Формулы (34.20) мотивируют следующее

Определение 34.3. Две квадратные матрицы $A, B \in L(n, P)$ называются *конгруэнтными* (и это обозначается $A \backsimeq B$), если существует обратимая матрица $T \in GL(n, P)$ такая, что

$$B = T^t A T. \tag{34.23}$$

Данное выше определение следует сравнить с определением 13.2 *подобных* квадратных матриц.

Отношение конгруэнтности $\backsimeq$, как и отношение подобия $\backsim$, является отношением эквивалентности. [Рефлексивность и симметричность, как обычно, очевидны. Транзитивность доказывается так: соотношения $B = T_1^t A T_1$ и $C = T_2^t B T_2$, с обратимыми T_1 и T_2, влекут $C = T_3^t A T_3$, где $T_3 = T_1 T_2 \in GL(n, P)$.]

И обозначение конгруэнтности является еще одной "самоделкой". В дальнейшем вашем математическом развитии вы, перелистывая многочисленные учебники и монографии, научитесь понимать, что одному и тому же символу (и даже — на одной и той же странице) иногда могут приписываться различные значения. А пока автор пытается помочь вашей интуиции, изобретая нестандартные символы.

34.4. Ранг билинейной формы. Невырожденные б.ф. Всякий раз, когда изучение какого-либо математического объекта приводит к его описанию с помощью матрицы, возникает идея приписать этому объекту *ранг* (определяемый по соответствующей матрице). Однако чаще всего матрица, сопоставляемая объекту, зависит не только от него самого, но и от некоторых "случайных факторов" (типа выбора базисов). Вследствие этого, при определении ранга требуется обоснование *корректности* (проверка независимости от случайных обстоятельств). Вспомните в связи с изложенными выше общими соображениями тот факт, что ранг линейного отображения равен рангу соответствующей матрицы (и этот последний не зависит от выбора базисов).

Ниже аналогичная идея реализуется применительно к билинейным формам. Конгруэнтные матрицы отличаются обратимыми матричными множителями (слева и справа) и поэтому (см. п. 13.3) имеют одинаковые ранги:

$$[\, A \backsimeq B \,] \Rightarrow [\, \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) \,], \tag{34.24}$$

что обеспечивает корректность следующего определения.

Определение 34.4. *Рангом б.ф.* $f \in \mathcal{L}^2(V)$ называется ранг матрицы A, отвечающей f в некотором базисе $\mathcal{B}$ пространства V:

$$\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(A). \tag{34.25}$$

Б.ф. f называется *невырожденной*, если ее ранг является максимальным, т. е.

$$\operatorname{rank}(f) = n, \tag{34.26}$$

где $n = \dim(V)$.

Пример 34.8. Билинейная форма (34.6) [см. примеры 34.1 и 34.5] имеет ранг, совпадающий с рангом задающей эту форму матрицы. В частности, скалярное произведение (34.7) является невырожденной формой. Также невырожденны б.ф. (34.10) [см. примеры 34.3 и 34.6] и формы (34.11), (34.11′), (34.11″) [см. примеры 34.4 и 34.7].

34.5. Симметрические и антисимметрические б.ф. Наряду с билинейной формой $f \in \mathcal{L}^2(V)$ [см. (34.1)], рассмотрим функцию

$$\widetilde{f} : V \times V \longrightarrow P;\ x \mapsto \widetilde{f}(x, y) = f(y, x);\ x, y \in V, \tag{34.27}$$

которая, очевидно, также является б.ф.

Определение 34.5. Билинейная форма (34.1) называется *симметрической* (*антисимметрической*), если $\widetilde{f} = f$ (соответственно $\widetilde{f} = -f$).

Будем использовать сокращения: *с.б.ф.* и *а.б.ф.*

Условиям симметричности (антисимметричности) можно придать следующий вид (соответственно):

$$(\forall\, x, y \in V)\ [\, f(y, x) = f(x, y)\,]; \tag{34.28s}$$

$$(\forall\, x, y \in V)\ [\, f(y, x) = -f(x, y)\,]. \tag{34.28a}$$

В линейном пространстве б.ф. $\mathcal{L}^2(V)$ рассматриваются подмножество с.б.ф. $\mathcal{L}^2_s(V)$ и подмножество а.б.ф. $\mathcal{L}^2_a(V)$.

Если для вас *не* очевидно то, что оба этих подмножества являются *подпространствами*, то берите ручку — и проверяйте.

Замечание 34.2. Тем же, кто прочитал предыдущие главы и, в какой-то степени, осознал их содержание, должно быть ясно даже

большее: отображение $f \mapsto \widetilde{f}$ является *линейным оператором* (л.э.) в пространстве $\mathcal{L}^2(V)$; подмножество $\mathcal{L}^2_s(V)$ является *собственным подпространством* для этого оператора, отвечающим *собственному значению* 1, а подмножество $\mathcal{L}^2_a(V)$ — собственным подпространством, отвечающим -1.

В конечномерном пространстве свойство (анти-)симметричности б.ф. оказывается естественно связанным с аналогичным свойством матрицы, отвечающей этой форме (в произвольном базисе). Точнее, справедливо следующее

Предложение 34.3. *Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем P; $\mathcal{B}$ — какой-либо базис в V. Билинейная форма $f \in \mathcal{L}^2(V)$ является симметрической (антисимметрической) тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает матрица A, отвечающая f в базисе $\mathcal{B}$.*

Доказательство проведем только для одного из типов форм, для другого все совершенно аналогично.

Условие симметричности (34.28s) влечет равенства $a_{ji} = a_{ij}$ (где $i, j = 1, \dots, n$) для элементов матрицы A [см. (34.15)], или, что равносильно, — симметричность этой матрицы: $A^t = A$.

Обратно, пусть матрица A является симметрической, т. е. $A^t = A$. Координатную запись (34.17) для значения $f(x, y)$ данной б.ф. мы рассмотрим как матричное равенство, считая, что в левой его части стоит матрица размера 1×1. Транспонируем обе части этого равенства (левая часть при этом не изменится). В следующей выкладке, с использованием свойств операции транспонирования, доказывается условие (34.28s):

$$f(x, y) = \overline{x}^t A\, \overline{y} = \left(\overline{x}^t A\, \overline{y}\right)^t = \overline{y}^t A^t\, \overline{x} = \overline{y}^t A\, \overline{x} = f(y, x). \ \square$$

Замечание 34.3. Поскольку свойство (анти-)симметричности матрицы для (анти-)симметрической б.ф. имеет место в *произвольном* базисе, то косвенным следствием последнего предложения является такой вывод: матрица, конгруэнтная (анти-)симметрической, сама является таковой.

Это утверждение легко доказать и непосредственно:

$$[\, A^t = A \,] \Rightarrow [\, (T^t A\, T)^t = T^t A^t\, T = T^t A\, T \,],$$

для антисимметричности — аналогично.

Замечание 34.4. Произвольная б.ф. f в произвольном базисе $\mathcal{B}$ может быть представлена координатной записью, в виде двойной суммы (34.14′). Для с.б.ф. эту запись удобно перегруппировать следующим образом: сначала выписать n слагаемых, отвечающих диагональным элементам a_{ii} $(i = 1, \dots, n)$ матрицы A, а затем — оставшиеся $n^2 - n$ слагаемых сгруппировать попарно так, чтобы каждая из $C_n^2 = n(n-1)/2$ пар обединяла слагаемое, содержащее элемент a_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, и слагаемое, содержащее симметричный элемент $a_{ji} = a_{ij}$. Так мы придем к выражению:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i). \tag{34.14s}$$

В случае антисимметричной формы диагональные коэффициенты обращаются в нуль, а оставшиеся снова группируются попарно, с учетом соотношений $a_{ji} = -a_{ij}$, что приводит к представлению:

$$f(x, y) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}(x_i y_j - x_j y_i). \tag{34.14a}$$

В настоящей главе основным предметом нашего изучения будут симметрические билинейные формы. Но это отнюдь не значит, что антисимметрические менее важны. Скорее — наоборот. На теории а.б.ф. основаны самые интересные разделы геометрии, механики, физики. Однако все это пока останется за рамками нашего курса. Заинтересованные читатели могут обратиться к указанным в списке литературы (основным и дополнительным) учебникам. Для особенно заинтересованных дадим добавочную ссылку. Имеется многотомный курс М. М. Постникова "Лекции по геометрии" (8 книг), в котором, в частности, представляется "с геометрическим акцентом" изучаемая нами линейная алгебра (см. две версии лекций второго семестра: "Линейная алгебра и дифференциальная геометрия", М.: Наука, 1979 и "Линейная алгебра", М.: Наука, 1986).

Вспомним теперь содержание примера 9.2, где мы рассматривали линейные пространства симметрических и антисимметрических матриц (обозначавшиеся $L_s(n, P)$ и $L_a(n, P)$ соответственно). Из предложений 34.2 и 34.3 следует, что имеют место изоморфизмы

$$\mathcal{L}_s^2(V) \cong L_s(n, P); \quad \mathcal{L}_a^2(V) \cong L_a(n, P), \tag{34.29}$$

каждый из которых является сужением изоморфизма (34.18).

В частности, это дает информацию о рамерностях подпространств с.б.ф. и а.б.ф.: они равны соответственно $n(n+1)/2$ и $n(n-1)/2$.

Кроме того, в указанном примере, при дополнительном ограничении на основное поле ($\mathrm{char}(P) \neq 2$), была доказана взаимная дополнительность подпространств симметрических и антисимметрических матриц. Аналогичный результат справедлив и для пространств билинейных форм, причем без предположения конечномерности пространства V.

Предложение 34.4. *Пусть V — линейное пространство над полем P, характеристика которого отлична от двух. Тогда линейные подпространства с.б.ф. и а.б.ф. являются взаимно дополнительными в линейном пространстве всех б.ф., т. е.*

$$\mathcal{L}^2(V) = \mathcal{L}^2_s(V) \oplus \mathcal{L}^2_a(V). \tag{34.30}$$

Доказательство. 1. Во-первых, рассматриваемые подпространства независимы, т. е. их пересечение тривиально. В самом деле, если форма f является как симметрической, так и антисимметрической, то для нее справедливо равенство $-f = f$, или $2 \cdot f = 0$, что, в предположении $2 \neq 0$, влечет $f = 0$. (Напомним, что условная запись $2 \neq 0$ является выражением следующего свойства поля: $1 + 1 \neq 0$.)

2. Во-вторых, используя тот факт, что в поле P существует элемент 2^{-1}, мы можем записать равенство:

$$f = \frac{1}{2}(f + \widetilde{f}) + \frac{1}{2}(f - \widetilde{f}), \tag{34.31}$$

где б.ф. $\widetilde{f}$ определена формулой (34.27).

Легко убедиться в том, что первое слагаемое в (34.31) является с.б.ф., а второе — а.б.ф. Следовательно, всякая б.ф. представляется в виде суммы симметрической и антисимметрической форм.

Наличие прямого разложения (34.30) вытекает теперь из предложения 9.1. □

Замечание 34.5. А что будет, если $\mathrm{char}(P) = 2$? Ответ совершенно ясен: элементы поля характеристики два, а также элементы векторных пространств над таким полем совпадают с противоположными к ним элементами. Значит, б.ф. (или квадратная матрица) будет симметрической тогда и только тогда, когда она будет антисимметической. (Два подпространства-слагаемых "сливаются" в одно.)

34.6.* Два линейных гомоморфизма линейного пространства в двойственное, связанные с б.ф. Если в билинейной форме зафиксировать один из аргументов, то по другому аргументу получится линейная форма, сопоставление которой значению ранее зафиксированного аргумента определит линейное отображение из данного линейного пространства в двойственное. Точнее, справедливо следующее

Предложение 34.5. *Пусть V — линейное пространство над полем P, f — билинейная форма на V.*

(1) Фиксация значения y для второго аргумента формы f, либо фиксация значения x для первого аргумента — определяют на V пару линейных форм:

$$f_y^{(1)} : V \longrightarrow P;\ f_y^{(1)}(x) = f(x,y);\ x \in V \tag{34.32a}$$

и

$$f_x^{(2)} : V \longrightarrow P;\ f_x^{(2)}(y) = f(x,y);\ y \in V. \tag{34.32b}$$

(2) Отображения

$$f^{(1)} : V \longrightarrow V^*;\ y \mapsto f^{(1)}(y) = f_y^{(1)};\ y \in V \tag{34.33a}$$

и

$$f^{(2)} : V \longrightarrow V^*;\ x \mapsto f^{(2)}(x) = f_x^{(2)};\ x \in V. \tag{34.33b}$$

являются линейными гомоморфизмами из данного пространства V в двойственное пространство V^*.

Доказательство. Как линейность форм (34.32), так и линейность отображений (34.33) непосредственно следуют из тождеств (1) — (4) определения 34.1. □

Придадим формулам (24.33) несколько иной вид, расписывая значения линейных форм на векторах:

$$f^{(1)}(y)(x) = f(x,y); \tag{34.34a}$$

$$f^{(2)}(x)(y) = f(x,y), \tag{34.34b}$$

где $x, y \in V$.

(Уже не в первый раз мы сталкиваемся с необходимостью употребления довольно сложных обозначений при изучении функций,

значениями которых снова служат функции. Так, в левой части формулы (34.34a) мы имеем значение $f^{(1)}(y)$ линейного оператора $f^{(1)} : V \to V^*$ на векторе $y \in V$, но это значение, будучи элементом V^*, само является линейной формой, в связи с чем приходится рассматривать значение этой формы на векторе $x \in V$, которое уже является скаляром из поля P.)

Для того, чтобы можно было сравнивать действие линейных гомоморфизмов (операторов) $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathcal{L}(V, V^*)$, требуется во второй формуле переобозначить аргумент для оператора и аргумент для линейной формы (являющейся значением этого оператора), т. е., короче говоря, поменять ролями x и y:

$$f^{(2)}(y)\,(x) = f(y, x). \tag{34.34b$'$}$$

Сопоставление формул (34.34a) и (34.34b$'$) убеждает нас в том, что операторы (34.33a) и (34.33b), вообще говоря, различны. Совпадают же они тогда и только тогда, когда для любых векторов $x, y \in V$ выполняется равенство $f(x, y) = f(y, x)$, являющееся условием симметричности формы f [см. (34.28s)]. Тем самым доказано

Предложение 34.6. *Гомоморфизмы (34.33a) и (34.33b) совпадают тогда и только тогда, когда б.ф. f является симметрической.* □

Замечание 34.6. Различающие верхние индексы $^{(1)}$ и $^{(2)}$ становятся в случае симметрической формы ненужными. Однако какая-то метка все-таки нужна (чтобы отличить с.б.ф. $f \in \mathcal{L}^2_s(V)$ от соответствующего линейного гомоморфизма), и мы будем использовать "музыкальный" знак повышения:

$$f^\sharp : V \longrightarrow V^*;\ y \mapsto f^\sharp(y);\ f^\sharp(y)\,(x) = f(x, y);\ x, y \in V. \tag{34.35}$$

Обратимся теперь к случаю конечномерного пространства V.

Пусть $\dim(V) = n$, в V зафиксирован базис $\mathcal{B}$ [см. (34.12)], а двойственное пространство V^* снабжено двойственным базисом $\mathcal{B}^*$, который [см. (31.12)] связан с $\mathcal{B}$ соотношениями $b^*_i(b_j) = \delta_{ij}$ (где $i, j = 1, \dots, n$).

Предложение 34.7. *Пусть билинейной форме $f \in \mathcal{L}^2(V)$ отвечает в базисе $\mathcal{B}$ матрица A.*

Тогда в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^*$ линейному оператору $f^{(1)}$ соответствует та же самая матрица A, а оператору $f^{(2)}$ — транспонированная матрица A^t.

Доказательство. Обозначим $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ матрицы, отвечающие (в рассматриваемых базисах) операторам $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ соответственно. По общему правилу составления матрицы линейного оператора [см. (12.7)], элементы первой матрицы находятся по формулам:

$$m_{ij}^{(1)} = [f^{(1)}(b_j)]_i;\ i,j = 1,\dots,n. \tag{34.36}$$

В правой части (34.36) фигурирует i-я координата (в базисе $\mathcal{B}^*$) для линейной формы, указаннной в квадратных скобках, которая может быть определена по формуле (31.6), после чего срабатывает (34.34а):

$$m_{ij}^{(1)} = f^{(1)}(b_j)\,(b_i) = f(b_i, b_j). \tag{34.37}$$

Окончательно, применяя определение (34.15) элементов матрицы б.ф., получаем:

$$m_{ij}^{(1)} = a_{ij}. \tag{34.38}$$

Равенство $M^{(1)} = A$, т. е. первое утверждение предложения, доказано. Приведем (без подробных комментариев) аналогичную выкладку для оператора $f^{(2)}$:

$$m_{ij}^{(2)} \overset{(12.7)}{=\!=} [f^{(2)}(b_j)]_i \overset{(31.6)}{=\!=} f^{(2)}(b_j)\,(b_i) \overset{(34.34\text{b}')}{=\!=\!=} f(b_j, b_i) \overset{(34.15)}{=\!=} a_{ji};$$

и далее: $M^{(2)} = A^t$. $\square$

Замечание 34.7. Из предложения 34.7 вытекает несколько важных выводов и наблюдений.

1. Б.ф. f и соответствующие линейные гомоморфизмы $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ имеют одинаковые *ранги*. Значит, и *дефекты* операторов $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ одинаковы, что, однако, не означает совпадения *ядер*.

Ядра $\operatorname{Ker}(f^{(1)})$ и $\operatorname{Ker}(f^{(2)})$ называются соответственно *правым* и *левым* ядрами *для б.ф.* f; они имеют равные размерности, но, вообще говоря, различны. (Это связано с возможным несовпадением нуль-пространств L_A^0 и $L_{A^t}^0$ для матрицы A и для транспонированной матрицы A^t; конкретный (2×2)-пример можете придумать сами.)

Для *невырожденной* б.ф. f указанные гомоморфизмы являются (вообще говоря, различными) линейными *изоморфизмами* пространства V на двойственное пространство V^*.

2. В случае с.б.ф. f левое ядро формы равно правому и, по определению, совпадает с ядром гомоморфизма $f^\sharp$; оно состоит из таких векторов $x \in V$, что $f(x,y) = 0$ для любого $y \in V$.

Для невырожденной с.б.ф. мы получаем изоморфизм

$$f^\sharp : V \xrightarrow{\cong} V^*, \tag{34.39}$$

сопоставляющий вектору $x \in V$ линейную форму $y \mapsto f(x, y)$; $y \in V$.

Замечание 34.8. Линейный изоморфизм (34.39), возникающий между данным линейным пространством V и двойственным пространством V^* в случае задания на V невырожденной с.б.ф., позволяет переосмыслить *теорию двойственности* (см. §§ 32, 33), переформулировать ее *в рамках исходного пространства, без привлечения двойственного.*

В частности, для любого подмножества $M \subseteq V$ его аннулятор M°, являющийся линейным подпространством в V^*, переводится в V изоморфизмом

$$f^\flat : V^* \xrightarrow{\cong} V, \tag{34.39$'$}$$

обратным к (34.39). Так получается линейное подпространство

$$\begin{aligned} M^\perp = f^\flat(M^\circ) = \{y \in V : f^\sharp(y) \in M^\circ\} &\overset{(32.21)}{=\!=} \\ = \{y \in V : (\forall x \in M)\,[\, f^\sharp(y)\,(x) = 0\,]\} &\overset{(34.35)}{=\!=} \\ = \{y \in V : (\forall x \in M)\,[\, f(x, y) = 0\,]\} &\leqslant V, \end{aligned} \tag{34.40}$$

называемое *f-ортогональным дополнением* подмножества M.

Здесь терминология находится под мощным влиянием геометрии. Векторы $x, y \in V$ называются *f-ортогональными*, если $f(x, y) = 0$; f-ортогональное дополнение к M состоит из таких векторов, которые f-ортогональны ко всем векторам из M. "Настоящая" ортогональность получается, если в качестве с.б.ф. f фигурирует *скалярное произведение* [см. (34.7) и, ниже, § 40].

Поскольку линейный изоморфизм сохраняет размерности подпространств, то мы можем заключить, что если M является линейным подпространством размерности k в n-мерном пространстве V, то подпространство $M^\perp$ (как и аннулятор M°) имеет размерность $n - k$; при этом сохраняет силу свойство инволютиности: $(M^\perp)^\perp = M$.

(Не следует, однако, думать, что подпространства M и $M^\perp$ взаимно дополнительны. Вообще говоря, это не так, а о тех случаях, когда свойство дополнительности все же имеет место, будет сказано ниже; см. замечание 38.5.)

Далее, всякое биективное отображение согласовано с алгебраическим действиями объединения и пересечения (образ пересечения подмножеств равен пересечению образов и т. п.). Любой линейный изоморфизм, будучи согласованным со сложением векторов, согласован также и со сложением линейных подпространств: образ суммы подпространств равен сумме образов.

Это позволяет перенести в V *соотношения двойственности.* Скажем, формулы (5a) и (6a) предложения 32.5 обретают новый облик:

$$(M_1 + M_2)^\perp = M_1^\perp \cap M_2^\perp;\ (M_1 \cap M_2)^\perp = M_1^\perp + M_2^\perp;\ M_1, M_2 \leqslant V.$$

Как объяснялось в § 33, всякому линейному оператору $\varphi : V \to W$ соответствует двойственный оператор

$$\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*; \tag{34.41}$$

связь между ними выражается формулой (33.5). И это понятие, с помощью двух невырожденных с.б.ф. $f \in \mathcal{L}_s^2(V)$ и $g \in \mathcal{L}_s^2(W)$, с привличением соответствующих изоморфизмов $f^\sharp$ и $g^\sharp$, переносится в исходные пространства.

Новым "воплощением" двойственного оператора (34.41) будет так называемый (f, g)-*сопряженный* оператор

$$\varphi^\star : W \longrightarrow V, \tag{34.42}$$

взаимодействие которого с исходным оператором φ может быть описано следующим аналогом формулы (33.5):

$$f(x, \varphi^\star(y)) = g(\varphi(x), y) \quad (\forall\, x \in V,\, y \in W). \tag{34.43}$$

(Обратите внимание на смену обозначений. То, что обычно именуется "звездочкой", некоторые предпочитают называть "снежинкой". В формуле (34.43) мы используем "настоящую", пятиконечную звездочку, чтобы различить близкие, но не совпадающие понятия двойственного и сопряженного операторов.)

В данном замечании были (очень бегло) очерчены контуры важнейшей главы линейной алгебры, которая находится на стыке с геометрией и активно применяется во многих прикладных дисциплинах. Автор надеется уделить этой тематике серьезное внимание в третьем томе пособия.

Упомянем также о *бесконечномерном* варианте теории, развиваемом в *функциональном анализе*. В этой науке изоморфизм типа (34.39) является "именным" — называется *изоморфизмом Рисса* (в честь венгерского математика, одного из основателей функционального анализа).

§ 35. Симметрические билинейные и квадратичные формы. Формула поляризации

35.1. Понятие квадратичной формы. Формула поляризации. Начиная с данного параграфа, основным объектом нашего изучения становятся симметрические билинейные формы на конечномерных линейных пространствах. Практически всегда будет сохраняться предположение о том, что характеристика основного поля отлична от двух. Ниже дается определение еще одного класса функций, который естественно связан с классом с.б.ф.

Определение 35.1. Пусть V — линейное пространство над полем P. *Квадратичной формой* (*кв.ф.*) на пространстве V называется функция

$$h : V \longrightarrow P, \tag{35.1}$$

которая выражается с помощью формулы

$$h(x) = f(x, x);\ x \in V \tag{35.2}$$

через некоторую с.б.ф. $f \in \mathcal{L}^2(V)$.

Говорят, что кв.ф. h *соответствует* с.б.ф. f. Множество всех квадратичных форм на пространстве V обозначается $\mathcal{K}(V)$.

Определению 35.1 можно придать более "культурный" (в математическом смысле) вид. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{F}(V)$ всех P-значных функций на линейном пространстве V (см. пример 1.2). Определим отображение (которое, очевидно, является линейным):

$$q : \mathcal{L}_s^2(V) \longrightarrow \mathcal{F}(V);\ f \mapsto h;\ h(x) = f(x, x);\ f \in \mathcal{L}_s^2(V);\ x \in V. \tag{35.3}$$

Множество $\mathcal{K}(V)$ есть не что иное, как *образ* отображения (35.3):

$$\mathcal{K}(V) = \mathrm{Im}(q). \tag{35.4}$$

Отсюда, в частности, усматривается, что множество квадратичных форм является линейным подпространством в пространстве всех функций и, следовательно, само является линейным пространством над полем P.

Любое отображение можно подвергнуть, как говорят, *сокращению*, рассматривая его действующим на свой образ; при этом получится (вообще говоря, другое, но зачастую обозначаемое так же, как и данное) *сюръективное* отображение.

Мы будем рассматривать сокращение линейного гомоморфизма (35.3) до линейного эпиморфизма

$$q : \mathcal{L}_s^2(V) \longrightarrow \mathcal{K}(V);\ f \mapsto h;\ h(x) = f(x,x). \tag{35.5}$$

Предложение 35.1. *Если поле P имеет характеристику, отличную от двух, то линейный эпиморфизм (35.5) является изоморфизмом, т. е. для любой кв.ф. найдется одна и только одна с.б.ф. такая, что $q(f) = h$.*

Доказательство. Пусть $h \in \mathcal{K}(V)$. По определению 35.1, для нее найдется с.б.ф. $f \in \mathcal{L}_s^2(V)$ такая, что $q(f) = h$, т. е. $h(x) = f(x,x)$ для любого вектора $x \in V$. Докажем, что форма f однозначно восстанавливается по форме h.

Рассмотрим значение h на сумме $x + y$ двух произвольных векторов из V и проведем короткую выкладку, использующую свойства (1) — (4) из определения 34.1, а также свойство симметричности $f(y,x) = f(x,y)$:

$$\begin{aligned} h(x+y) = \\ = f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = \\ = h(x) + h(y) + 2f(x,y), \end{aligned}$$

или

$$2f(x,y) = h(x+y) - h(x) - h(y). \tag{35.6}$$

Поскольку элемент $2 = 1 + 1 \in P$, по предположению, отличен от нуля, то существует обратный к нему элемент $1/2 \in P$, и из соотношения (35.6) можно выразить значения билинейной формы через значения соответствующей кв.ф.:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\big(h(x+y) - h(x) - h(y)\big), \tag{35.7}$$

что и доказывает однозначность определения f по h. $\square$

Замечание 35.1. Часто используется специфическая (пришедшая из геометрии) терминология: с.б.ф. f называется *полярной* по отношению к соответствующей ей квадратичной форме h, в связи с чем формула (35.7) именуется *формулой поляризации*.

Вообще во всех темах данной главы "брезжит геометрия". Автор надеется в третьем (заключительном) томе пособия, по возможности убедительно, продемонстрировать геометрические приложения (и геометрические корни) линейной алгебры. А пока мы будем накапливать алгебраический (и алгоритмический) материал.

Замечание 35.2. Без предположения о симметричности билинейной формы понятие квадратичной формы мало полезно, а в случае антисимметрических форм — тривиально: если $f \in \mathcal{L}^2_a(V)$, то $f(x,x) = 0$ для любого $x \in V$.

Пример 35.1 (продолжение примеров 34.3 и 34.6). Билинейная форма [см. (34.10)]

$$f(X,Y) = \operatorname{tr}(X^t \cdot Y)$$

на пространстве квадратных матриц $V = L(n,P)$ является симметрической. В самом деле,

$$f(Y,X) = \operatorname{tr}(Y^t \cdot X) = \operatorname{tr}((X^t \cdot Y)^t) = \operatorname{tr}(X^t \cdot Y) = f(X,Y).$$

Соответствующая квадратичная форма имеет вид:

$$h(X) = f(X,X) = \operatorname{tr}(X^t \cdot X),$$

или, с учетом (34.10′):

$$h(X) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2.$$

35.2. Матрица и координатная запись для квадратичной формы. Пусть V — n-мерное линейное пространство над полем P. (Теперь и навсегда мы ограничимся полями характеристики, отличной от двух.) Фиксация базиса $\mathcal{B} = [\,b_1, \ldots, b_n\,]$ в пространстве V задает [см. (34.29)] линейный изоморфизм

$$m : \mathcal{L}^2_s(V) \xrightarrow{\cong} L_s(n,P) \tag{35.8}$$

линейного пространства с.б.ф. на линейное пространство симметрических квадратных матриц. Сочетая его с рассмотренным в предыдущем пункте (и определенным *инвариантно*, вне зависимости от базиса) изоморфизмом (35.5) пространства с.б.ф. на пространство кв.ф., мы приходим к выводу о том, что имеются три попарно изоморфных линейных пространства: $\mathcal{L}_s^2(V)$, $\mathcal{K}(V)$ и $L_s(n,P)$; каждое из них имеет размерность $n(n+1)/2$; друг другу соответствуют:

— (при изоморфизме q) с.б.ф. f и кв.ф. h, связанные взаимно обратными соотношениями

$$h(x) = f(x,x); \quad f(x,y) = \frac{1}{2}(h(x+y) - h(x) - h(y));$$

— (при изоморфизме m, зависящем от базиса $\mathcal{B}$) с.б.ф. f и $(n\times n)$-матрица A, связанные взаимно обратными соотношениями

$$[A]_{ij} = a_{ij} = f(b_i, b_j); \quad f(x,y) = \overline{x}^t A\, \overline{y};$$

— (косвенно, через посредство с.б.ф. f) кв.ф. h и матрица A; подчеркнем, что квадратичной форме h считается соответствующей (в заданном базисе) та же самая матрица, которая соответствует (в этом базисе) симметрической билинейной форме f, полярной h; такие характеристики с.б.ф. как ранг или (не-)вырожденность также могут быть отнесены к соответствующей кв.ф.

Координатное представление в базисе $\mathcal{B}$ для с.б.ф. f путем простой подстановки $y = x$ приводит к координатному представлению для кв.ф. h, причем возможны как векторная, так и развернутая записи:

$$h(x) = \overline{x}^t A\, \overline{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j; \tag{35.9}$$

последнюю можно перегруппировать [ср. с (34.14s)], выделив слагаемые, содержащие квадраты координат, и слагаемые, содержащие удвоенные произведения координат:

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} x_i x_j. \tag{35.10}$$

Развернутые выражения демонстрируют то обстоятельство, что квадратичная форма (в смысле линейной алгебры) выражается в координатах как однородный многочлен степени 2 от n переменных

(т. е. как квадратичная форма в смысле теории многочленов; см. [A_1, п. 48.4]).

Замечание 35.3. Между прочим, в характеристике два удвоенных произведений "не бывает" ($2 = 0$) и поэтому в (35.10) присутствуют лишь члены с квадратами.

35.3. Диагонализирующие базисы для симметрических билинейных (квадратичных) форм. Пусть V — n-мерное пространство над полем P.

Определение 35.2. Базис $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ в пространстве V называется *диагонализирующим* для (соответствующих друг другу) с.б.ф. $f \in \mathcal{L}_s^2(V)$ и кв.ф. $h \in \mathcal{K}(V)$, если в этом базисе им соответствует диагональная матрица, т. е. если

$$a_{ij} = f(b_i, b_j) = 0 \tag{35.11}$$

при $i \neq j$.

Сразу заметим, что поскольку матрица с.б.ф. (кв.ф.) в любом базисе имеет один и тот же ранг, а ранг диагональной матрицы равен числу ненулевых элементов на диагонали, то диагонализирующий базис (если он существует) всегда можно (за счет перстановки базисных векторов) выбрать так, чтобы диагональная матрица, отвечающая названным формам в этом базисе, имела следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & & \\ & \mu_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mu_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{35.12}$$

где $\mu_i \in P$ [$\mu_i \neq 0$; $i = 1, \dots r$; $r = \operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(h)$].

В диагонализирующем базисе развернутая запись вида (34.14s) для с.б.ф. f содержит только диагональные члены:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i x_i y_i; \tag{35.13a}$$

соответственно, развернутая запись вида (35.10) для кв.ф. h содержит лишь слагаемые с квадратами координат:

$$h(x) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i x_i^2. \tag{35.13b}$$

Задача диагонализации для с.б.ф. (кв.ф.) формулируется как исследование вопроса о существовании диагонализирующего базиса, с последующим его отысканием (если он существует). В плане постановки эта задача вполне аналогична рассмотренной в § 21 задаче о диагонализации линейных эндоморфизмов. Напомним, что для л.э. диагонализирующий базис существует далеко не всегда (критерий см. в п. 21.3).

Напротив, в следующем параграфе будет показано, что для с.б.ф. (кв.ф.) *задача диагонализации разрешима всегда* (если ограничиться формами над полями характеристики, отличной от двух).

Здесь же мы переведем исследуемую задачу на матричный язык.

Пусть с.б.ф. f (кв.ф. h) имеют в базисе $\mathcal{B}$ некоторую (по обязанности — симметрическую) матрицу A. Требуется найти новый базис $\mathcal{B}'$, в котором нашим формам соответствовала бы диагональная матрица (35.11). Переход от старого базиса к новому описывается матрицей перехода T (см. п. 7.1); именно эта матрица является искомой: вычислив ее, мы фактически определяем $\mathcal{B}'$.

Далее, должна быть предъявлена диагональная матрица D (отвечающая f и h в базисе $\mathcal{B}'$). Согласно правилу пересчета матрицы билинейной формы при замене базиса [см. формулы (34.20)], должно иметь место соотношение:

$$D = T^t A\, T. \tag{35.14}$$

Другими словами, для симметрической матрицы надо найти *конгруэнтную* ей диагональную матрицу.

(Снова возвращаясь — для сравнения — к задаче о диагонализации л.э., напомним, что в ней фигурировало другое отношение эквивалентности: не конгруэнтность, а подобие; подробнее см. об этом выше, в п. 34.3.)

Замечание 35.4. Отношение конгруэнтности квадратных матриц, как и отношение эквивалентности (прямоугольных) матриц (см. п. 13.3), связано с *элементарными преобразованиями* над строками и столбцами.

Обратимую матрицу T, на которую данная матрица A умножается справа, можно, в соответствии с предложением 14.5 пособия [A_1], представить в виде произведения $T = Q_1 Q_2 \dots Q_s$ *элементарных матриц* (трех типов: $T_{i,j}$, $S_{j,i,\lambda}$ и $M_{i,\lambda}$; см. п. 14.3 первого пособия). Умножение A *справа* на элементарные матрицы равносильно выполнению *элементарных преобразований над столбцами* A. Однако одновременно с этим матрица A умножается *слева* на матрицу $T^t = Q_s^t \dots Q_2^t Q_1^t$. Следовательно, каждое из применямых элементарных преобразований над столбцами сопровождается однотипным элементарным преобразованием над строками.

Как объяснялось в упомянутом выше пункте первого пособия, элементарные матрицы типов I и III симметричны, так что (в данном случае) если над столбцами производится преобразование типов I или III, то и над строками производится точно такое же преобразование.

С преобразованиями типа II ситуация несколько иная, однако результат получается тот же. В самом деле, если (квадратную) матрицу A умножить справа на элементарную матрицу $S_{j,i,\lambda}$, то над столбцами A будет произведено элементарное преобразование $i^{\text{стб}} + j^{\text{стб}} \cdot \lambda$ (внимание: именно так, а не наоборот, должны стоять индексы i и j). Одновременно мы должны умножить A слева на $S^t_{j,i,\lambda} = S_{i,j,\lambda}$, т. е. произвести над строками элементарное преобразование $i^{\text{стр}} + j^{\text{стр}} \cdot \lambda$.

Итак, при переходе к конгруэнтной матрице всякое элементарное преобразование над столбцами сопровождается *точно таким же* элементарным преобразованием над строками.

Замечание 35.5. В терминах замечания 34.8 диагонализирующий базис для с.б.ф. можно назвать *f-ортогональным*. Подробнее о геометрической трактовке понятия диагонализируемости см. ниже, в § 40.

§ 36. Диагонализация по Лагранжу симметрических билинейных (квадратичных) форм

36.1. Алгоритм Лагранжа диагонализации с.б.ф. (кв.ф.). В данном пункте мы сформулируем и докажем теорему Лагранжа о диагонализируемости произвольной с.б.ф. (кв.ф.), заданной над

полем, характеристика которого отлична от двух, причем будет дано *алгоритмическое* доказательство.

До сих пор мы изучили не так много "великих" алгоритмов:

— алгоритм Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду (и его модификацию — алгоритм Жордана — Гаусса);

— алгоритм Евклида отыскания НОД в кольце целых чисел и в кольце многочленов;

— алгоритм Жордана приведения квадратной матрицы к жордановой нормальной форме;

— алгоритм Смита приведения к канонической диагональной форме полиномиальных матриц (и его применение к задаче о приведении квадратной матрицы к ж.н.ф.).

Теперь к этому перечню будет добавлен еще один знаменитый алгоритм, изобретенный выдающимся французским математиком Жозефом Луи Лагранжем (1736 — 1813), добившимся результатов первостепенной важности, наверное, во всех разделах математики, а также в аналитической механике. По своей идее этот алгоритм очень прост: он сводится к многократному *выделению полного квадрата* в однородном многочлене второй степени (от нескольких переменных).

Замечание 36.1. В классической средней общеобразовательной школе навык выделения полного квадрата (в простейшем случае квадратного трехчлена от одной переменной) считался важнейшим и первоочередным для освоения. Сколько красивейших задач решалось этим элементарным приемом (без привлечения позднее введенных в программу — на весьма убогом уровне — производных)! К сожалению, и здесь современная ситуация оставляет желать лучшего. Поэтому и в курсе математического анализа, и в алгебре приходится предварять решение задач университетского уровня упражнениями из школьно-ученического минимума. (В пособии $[A_1]$ мы встречались с различными версиями процедуры выделения полного квадрата, например, в пп. 43.4 и 50.3.)

В данном парграфе будет применяться формула для квадрата суммы нескольких слагаемых:

$$(c_1 + c_2 + ... + c_n)^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + ... + c_n^2 + \\ + 2(c_1c_2 + c_1c_3 + ... + c_1c_n + c_2c_3 + ... + c_2c_n + c_3c_4 + ... + c_{n-1}c_n),$$

а под дополнением до полного квадрата будет подразумеваться следующая выкладка:

$$c_1^2 + 2(c_1c_2 + c_1c_3 + ... + c_1c_n) = (c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n)^2 - \\ - \left(c_2^2 + c_3^2 + ... + c_n^2 + 2(c_2c_3 + ... + c_2c_n + c_3c_4 + ... + c_{n-1}c_n)\right).$$

Обратите внимание на то, что выражение, фигурирующее во второй строке этой выкладки, не содержит c_1.

Теорема 36.1 (теорема Лагранжа). *Над полем P характеристики, отличной от двух, для любой с.б.ф. $f \in \mathcal{L}_s^2(V)$ [для любой кв.ф. $h \in \mathcal{K}(V)$] существует диагонализирующий базис, в котором форме f (форме h) отвечает матрица $D = \operatorname{diag}(\mu_1, ..., \mu_r, 0, ..., 0)$, где $\mu_i \in P$ [$\mu_i \neq 0$; $i = 1, ... r$; $r = \operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(h)$].*

Доказательство представим в виде описания работы алгоритма, причем исходным объектом мы будем считать *квадратичную* форму в координатной записи [см. формулу (35.10)]:

$$h(x) = \overline{x}^t A\, \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}x_ix_j, \tag{36.1}$$

т. е. фактически задача *арифметизируется* посредством фиксации некоторого исходного базиса.

Будем искать замену переменных

$$\overline{x} = T\overline{u}, \tag{36.2}$$

такую, что в новых координатах $(u_1, u_2, ..., u_n)$ форма (36.1) записывается в виде

$$h(x) = \overline{u}^t D\, \overline{u} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i u_i^2, \tag{36.3}$$

где $r = \operatorname{rank}(h)$.

Важная техническая деталь: замену координат придется производить многократно, так что "штрихов не напасешься"; поэтому новые координаты (в новом базисе) мы будем обозначать не штрихованием старых координат, а новыми буквами. В частности, вектор-столбец $\overline{u}$, фигурирующий в (36.3), относится к тому же абстрактному вектору $x \in V$, к которому относился вектор-столбец $\overline{x}$ (но в другом базисе).

Матрица T является матрицей перехода от исходного базиса к диагонализирующему; она будет накапливаться постепенно, как произведение $T = Q_1 Q_2 \dots Q_s$, где каждый из сомножителей отвечает одному или нескольким (столбцовым) элементарным преобразованиям (см. замечание 35.4).

А л г о р и т м 36. 1.
Приведение симметрической билинейной (квадратичной) формы к диагональному виду методом Лагранжа

1. Если $h = 0$, то работать незачем, исходная матрица $A = O$ уже является диагональной ($r = 0$).

2. Если $h \neq 0$, то возможны две ситуации:

— либо форма (36.1) содержит хотя бы один член с квадратом (т. е. в матрице A имеется хотя бы один ненулевой диагональный элемент a_{ii}),

— либо диагональ A является чисто нулевой, т. е. (36.1) не содержит квадратов; однако тогда отличен от нуля хотя бы один из коффициентов a_{ij} $(i < j)$.

2.1. В первом случае, при выполнении условия $a_{11} \neq 0$, мы сразу переходим к этапу 2.1.2. Если же $a_{11} = 0$, то необходим следующий предварительный этап.

2.1.1. Перенумеруем (а точнее — переименуем) переменные так, чтобы первый диагональный элемент стал отличен от нуля. Если, скажем, $a_{ii} \neq 0$, то производим замену координат, сводящуюся к перестановке базисных векторов:

$$x_1 = y_i; \quad x_i = y_1; \quad x_k = y_k \, (k \neq 1, i). \tag{36.4}$$

Формулы замены можно представить в матричном виде:

$$\overline{x} = Q_1 \overline{y}, \tag{36.5}$$

где $Q_1 = T_{1,i}$ есть элементарная матрица типа I (см. формулу (14.3) в $[A_1]$); она служит матрицей перехода от исходного базиса к новому базису, отличающемуся от старого лишь тем, что первый и i-й базисные векторы переставлены. (Можно добавить, что эта матрица относится к числу *матриц перестановочного перехода*; см. замечание 13.5.)

Предположим, что предварительная перестановка (если она понадобилась) уже произведена, т. е. будем далее считать, что изначально в формуле (36.1) коэффициент $a_{11} \neq 0$. В такой ситуации может быть реализован так называемый

2.1.2. Первый прием Лагранжа

В формуле (36.1) выделим в отдельную группу все слагаемые, содержащие x_1, и вынесем из этой группы за скобку множитель a_{11}; остальные слагаемые будут представлять квадратичную форму h_1 от переменных $x_2, \dots, x_n$ (ее, если угодно, можно считать определенной на подпространстве размерности $n-1$, которое задается в V линейным уравнением $x_1 = 0$):

$$h(x) = h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + 2x_1 \cdot \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + h_1(x_2, \dots, x_n). \quad (36.6)$$

Теперь применим к выражению в большой скобке формулу выделения полного квадрата, приведенную выше, в замечании 36.1 [члены, не содержащие x_1, подробно не расписываем; это будет квадратичная форма $h_2(x_2, \dots, x_n)$, на следующем шаге она присоединяется к форме $h_1(x_2, \dots, x_n)$]:

$$h(x) = \\ = a_{11}\left((x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 + h_2(x_2, \dots, x_n)\right) + h_1(x_2, \dots, x_n) = \\ = a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 + \widetilde{h}(x_2, \dots, x_n), \quad (36.7)$$

где $\widetilde{h} = a_{11}h_2 + h_1$.

Произведем замену переменных по формулам

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n; \\ y_2 = x_2; \\ y_3 = x_3; \\ \dots \\ y_n = x_n. \end{cases} \quad (36.8)$$

Формулы (36.8) выражают новые переменные через старые. Для того, чтобы увидеть матрицу перехода, надо выразить старые переменные через новые. В данном случае это сделать легко:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} y_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} y_2 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} y_n; \\ x_2 = y_2; \\ x_3 = y_3; \\ \ldots \\ x_n = y_n. \end{cases} \tag{36.9}$$

В векторной записи формулы (36.9) приобретают вид:

$$\overline{x} = Q_2\, \overline{y}, \tag{36.10}$$

где матрица перехода (показаны только ненулевые элементы)

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \ldots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{36.11}$$

является *верхней унитреугольной* (подслово "уни" означает, что диагональ заполнена единицами).

Нетрудно убедиться в том (хотя здесь это не очень нужно и становится важным лишь в *программной реализации* алгоритма), что матрица (36.11) является произведением элементарных матриц типа II (см. формулу (14.4) в [A_1]):

$$Q_2 = S_{1,2,\lambda_2} \cdot S_{1,3,\lambda_3} \cdot \ldots \cdot S_{1,n,\lambda_n}, \tag{36.12}$$

где $\lambda_j = -a_{1j}/a_{11}$ $(j = 2, \ldots, n)$.

Описанная выше замена приводит кв.ф. к виду:

$$h(x) = \mu_1 y_1^2 + \widetilde{h}(y_2, \ldots, y_n), \tag{36.13}$$

где $\mu_1 = a_{11}$.

(Вас не должно смущать то, что в левой части (36.13) фигурирует вектор $x \in V$, а в правой части — переменные $y_1, y_2, \dots, y_n$: они, как и старые переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, являются координатами для того же вектора x, но — в другом базисе.)

Матрица A', отвечающая представлению (36.13), имеет блочно-диагональный вид:

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \widetilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right). \tag{36.14}$$

Поскольку матрица, конгруэнтная симметрической, сама симметрична (см. замечание 34.3), то симметричным будет и юго-восточный блок $\widetilde{A}$.

Формулы (36.13) и (36.14) свидетельствуют о том, что (в первом случае) реализован первый шаг к достижению диагонального вида. Теперь о первой переменной можно практически "забыть" и, возвратившись к этапу 2, работать с "остаточной" кв.ф. $\widetilde{h}(y_2, \dots, y_n)$ и ее матрицей $\widetilde{A}$. (Но все-таки забыть не совсем: заменяя новые переменные $y_2, \dots, y_n$ на "еще более новые" $z_2, \dots, z_n$, мы должны как бы "перерегистрировать" первую переменную: $y_1 = z_1$.)

2.2. Во втором случае кв.ф. не готова к применению первого приема Лагранжа, т. к. не содержит ни одного квадрата. Приходится их искусственным образом получать. Идея соответствующей замены должна быть вам знакома, например, из аналитической геометрии: произведение переменных xy с помощью введения новых переменных u и v, которые связаны со старыми формулами перехода $x = u - v$ и $y = u + v$, преобразуется в разность квадратов: $xy = u^2 - v^2$.

Как и в первом случае, здесь могут представиться две возможности.

2.2.1. Если отличен от нуля "ближайший к северо-западному углу" элемент a_{12}, то можно сразу переходить к этапу 2.2.2. Если же $a_{12} = 0$, то требуется перенумерация (переименование) переменных. Будем перебирать построчно элементы A, расположенные выше главной диагонали, пока не обнаружим ненулевой.

Если он будет обнаружен в первой строке, в позиции $(1, j)$, где $j = 3, \dots, n$, то достаточно одной перестановки столбцов, производимой правым умножением на матрицу $Q_3 = T_{2,j}$ (ср. с действиями в

п. 2.2.1; напомним, что каждая операция над столбцами дублируется в точности таким же действием над строками).

Если первым найденным ненулевым окажется элемент a_{2j} из второй строки, то в качестве матрицы перестановочного перехода можно взять $Q_4 = T_{1,2}T_{2,j}$, что соответствует циклической замене переменных

$$x_1 = y_j;\ \ x_2 = y_1;\ \ x_j = y_2;\ \ \ x_k = y_k\ (k \neq 1, 2, j). \tag{36.15}$$

Во всех остальных случаях в перестановке будут участвовать четыре столбца: два первых и столбцы с номерами i, j, где (i, j) — позиция первого обнаруженного ненулевого элемента $(3 \leqslant i < j \leqslant n)$. Матрицей перехода будет $Q_5 = T_{1,i}T_{2,j}$; замена переменных запишется в виде:

$$x_1 = y_i;\ \ x_2 = y_j;\ \ x_i = y_1;\ \ x_j = y_2;\ \ x_k = y_k\,(k \neq 1, 2, i, j). \tag{36.16}$$

Предположим, что описанные в данном пункте предварительные перестановки уже произведены, т. е. будем считать, что в формуле (36.1) изначально коэффициент $a_{12} \neq 0$.

В такой ситуации может быть реализован так называемый

2.2.2. В т о р о й п р и е м Л а г р а н ж а

В "бесквадратной" квадратичной форме

$$h(x) = 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}x_ix_j \tag{36.17}$$

выделим члены, содержащие x_1 или x_2:

$$\begin{aligned} h(x) = 2\big(&a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ &+ a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n\big) + \widetilde{h}(x_3, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{36.18}$$

где $\widetilde{h}(x_3, \ldots, x_n)$ — кв.ф. от указанных $n - 2$ переменных.

Произведем в (36.18) замену (преобразующую произведение первых двух переменных в разность квадратов):

$$x_1 = y_1 - y_2;\ \ \ x_2 = y_1 + y_2;\ \ \ x_k = y_k\ (k = 3, \ldots, n). \tag{36.19}$$

Матрицей перехода, соответствующей (36.19), будет

$$Q_6 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \dots & \dots & & E_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right); \tag{36.20}$$

она обратима, поскольку $\det(Q_6) = 2 \neq 0$ в силу предположения о характеристике поля. (Для доказательства это не нужно, но из любопытства попробуйте представить матрицу Q_6 как произведение элементарных матриц типов I — III.)

В новых переменных кв.ф. (36.18) предстанет в виде:

$$\begin{aligned} h(x) = 2a_{12}(y_1^2 - y_2^2) + \\ +2\big(a_{13}(y_1 - y_2)y_3 + ... + a_{1n}(y_1 - y_2)y_n + \\ + a_{23}(y_1 + y_2)y_3 + ... + a_{2n}(y_1 + y_2)y_n\big) + \\ + \widetilde{h}(y_3, ..., y_n). \end{aligned} \tag{36.21}$$

В формуле (36.21) лишь в первой строке присутствует y_1^2, причем — с коэффициентом $2a_{12} \neq 0$, что позволяет перейти к этапу 2.1.2 и применить первый прием Лагранжа.

3. Цикл этапа 2 повторяется не более $n-1$ раз. Останов наступает
— либо если, после очередного прохождения цикла, "остаточная" кв.ф. окажется нулевой,
— либо по достижении юго-восточного угла.

Работа алгоритма завершена; квадратичная форма приведена к диагональному виду; теорема доказана. □

Замечание 36.1 (для служебного пользования). Наше (алгоритмическое) доказательство теоремы Лагранжа является значительно более подробным, по сравнению с изложением этого вопроса в стандартных учебниках (см., например, [1]). Однако и оно не является "настоящим" представлением алгоритма, соответствующим канонам компьютерных дисциплин. Некоторым приближением к "каноническому" описанию может служить комментированный текст Maple-процедуры Lagr (см. прил. 1).

Пример 36.1. Приведем к диагональному виду следующую квадратичную форму (основным полем можно считать $\mathbb{Q}$):

$$h(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

В данном примере $n = 3$ и матрицей для h служит

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1. \end{pmatrix}.$$

(Обратите внимание на "располовинивание" коэффициентов при произведениях переменных. Скажем, коэффициент -4 при x_1x_2 в форме h — это сумма двух равных друг другу элементов симметрической матрицы A: $-4 = a_{12}+a_{21} = 2a_{12}$, и поэтому: $a_{12} = a_{21} = -2$.)

В методе Лагранжа приходится параллельно вести

Преобразование квадратичной формы:	*Протокол замен переменных:*
первый прием Лагранжа:	вводим новые переменные и выражаем через них старые:
$h(x)=\big(x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3\big)+4x_2^2+x_3^2=$	$y_1=x_1-2x_2+x_3;$ $\quad x_1=y_1+2y_2-y_3;$
$=(x_1-2x_2+x_3)^2-$	$y_2=\quad x_2\quad;$ $\quad x_2=\quad y_2\quad;$
$-(4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2)+4x_2^2+x_3^2=$	$y_3=\quad\quad x_3;$ $\quad x_3=\quad\quad y_3;$
$=(x_1-2x_2+x_3)^2+4x_2x_3=$	
$=y_1^2+4y_2y_3=\ldots$	
второй прием Лагранжа:	вводим новые переменные и выражаем через них самые старые:
	$y_1=z_1\quad\quad;$ $\quad x_1=z_1+z_2-3z_3;$
	$y_2=\quad z_2-z_3;$ $\quad x_2=\quad z_2-\ z_3;$
$\ldots=z_1^2+4z_2^2-4z_3^2.$	$y_3=\quad z_2+z_3;$ $\quad x_3=\quad z_2+\ z_3;$
результирующая диагональная матрица:	матрица перехода:
$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix};$	$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

П р о в е р к а:

$$T^t \cdot A \cdot T = D.$$

После отыскания диагонализирующего базиса $\mathcal{D}$ (который связан с исходным базисом $\mathcal{B}$ вычисленной выше матрицей перехода T) может понадобиться записать в координатах диагональный вид не только для кв.ф. [см. (35.13b)]:

$$h(x) = \overline{z}^t D \overline{z} = z_1^2 + 4z_2^2 - 4z_3^2,$$

где $\overline{z}$ — координатный столбец, отвечающий вектору x в базисе $\mathcal{D}$, но и для (полярной h) с.б.ф. [см. (35.13a)]:

$$f(x, y) = \overline{z}^t D \overline{w} = z_1 w_1 + 4z_2 w_2 - 4z_3 w_3,$$

где $\overline{w}$ — координатный столбец, отвечающий в базисе $\mathcal{D}$ вектору y.

Более серьезные примеры будут рассмотрены в § 39, при постановке задач и решении демонстрационного варианта типового расчета ТР3.

Замечание 36.2. Диагональный вид для симметрической билинейной формы f (квадратичной формы h) определен отнюдь не однозначно. Уже имея диагонализирующий базис $\mathcal{D}$ и диагональную матрицу D [см. (35.12)], отвечающую в этом базисе формам f и h), мы можем, например, применить замену с диагональной (и, следовательно, симметрической: $T^t = T$) матрицей перехода

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1 & & & \\ & \tau_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tau_n \end{pmatrix};\ \tau_i \in P;\ \tau_i \neq 0\ (i = 1, \dots, n) \qquad (36.22)$$

и получить новый диагонализирующий базис $\mathcal{D}'$, в котором рассматриваемым формам соответствует новая диагональная матрица:

$$D' = T^t D T = \begin{pmatrix} \mu_1\tau_1^2 & & & & & & \\ & \mu_2\tau_2^2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mu_r\tau_r^2 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad (36.23)$$

где, напомним, $r = \operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(h)$.

36.2. Скелетный вид для с.б.ф. (кв.ф.) над алгебраически замкнутым полем. Получив диагональный вид для симметрической билинейной (квадратичной) формы, мы не обязаны успокаиваться на достигнутом. Поскольку такой вид определен не однозначно (см. замечание 36.2), то естественно попытаться его, насколько возможно, упростить. Логично для этого использовать *замены с диагональными матрицами перехода* (именно так мы и поступали в указанном замечании).

Если поле P, над которым заданы формы, является алгебраически замкнутым, то можно достичь "весьма радикального" упрощения диагонали, а именно — привести матрицу к *скелетному* виду.

(Здесь есть, однако, существенные отличия от ситуации, изучавшейся в §§ 6, 14 пособия $[A_1]$ и в § 13 настоящего пособия. Во-первых, рассматриваются лишь *симметрические квадратные* матрицы, а во-вторых, применяется другой класс преобразований: матрицы заменяются не на *эквивалентные*, но на *конгруэнтные*. Конгруэнтность же отличается от эквивалентности тем, что всякое элементарное преобразование над столбцами квадратной матрицы дублируется точно таким же преобразованием над ее строками, и наоборот. Иначе не обеспечить сохранение свойства симметричности матрицы.)

Предложение 36.1. *Пусть P — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого отлична от двух, V — n-мерное линейное пространство над полем P, f и h — соответствующие друг другу с.б.ф. и кв.ф., заданные на пространстве V, r — их ранг. Тогда в пространстве V существует такой диагонализирующий базис, в котором формам f и h отвечает матрица скелетного вида, единственными ненулевыми элементами которой являются r единиц в начале главной диагонали.*

Доказательство. Сразу оговоримся: требование алгебраической замкнутости поля P является в данном случае чрезмерным. На самом деле нам достоточного того, чтобы из любого элемента поля можно было извлечь квадратный корень, или, другими словами, в P должны быть разрешимы все уравнения вида $x^2 = a$ $(a \in P)$.

Приступаем к доказательству. Существование хотя бы какого-нибудь диагонализирующего базиса $\mathcal{B}$ гарантируется теоремой Лагранжа. Будем считать, что формам f и h в базисе $\mathcal{B}$ отвечает матрица (35.12). Подберем обратимую диагональную матрицу (36.22) так,

чтобы матрица (36.23) стала скелетной. Для этого нужно взять:

$$\tau_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu_i}}, & \text{при } i = 1, \dots, r; \\ 1, & \text{при } i = r+1, \dots, n, \end{cases} \tag{36.24}$$

где $\sqrt{\mu_i}$ обозначает любое (из двух возможных) решение уравнения $x^2 = \mu_i$ в поле P.

В новом базисе данные формы будут иметь матрицу вида

$$A' = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0), \tag{36.25}$$

где количество единиц на диагонали равно r. □

Непосредственным следствием предложения 36.1 является следующий критерий конгруэнтности для симметрических матриц над алгебраически замкнутым полем.

Предложение 36.2. *Две симметрические квадратные матрицы с элементами из алгебраически замкнутого поля P ($\operatorname{char}(P) \neq 2$) конгруэнтны тогда и только тогда, когда их ранги одинаковы.* □

§ 37. Диагонализация по Якоби симметрических билинейных (квадратичных) форм. Метод Грама — Шмидта

37.1. Метод Якоби диагонализации с.б.ф. (кв.ф.). Второй основной метод диагонализации симметрических билинейных (квадратичных) форм, к изучению которого мы приступаем, обладает рядом важных преимуществ:

— диагональные элементы μ_i ($i = 1, \dots, n$) искомой матрицы D вычисляются по данной (симметрической) матрице A с помощью *явных формул*;

— матрица перехода T (от данного базиса к диагонализирующему) имеет специальный (*унитреугольный*, т. е. треугольный с единичной диагональю) вид.

Как чаще всего бывает, за преимущества приходится платить — потерей *универсальности*: метод Якоби применим не всегда. Переходим к подробному изложению.

Рассмотрим симметрическую $(n \times n)$-матрицу $A \in L_s(n, P)$ с элементами из поля P (как всегда в этой главе, характеристики, отличной от двух).

Рассмотрим далее последовательность квадратных *подматриц северо-западного угла*:

$$\underset{k\times k}{A^{(k)}} = (a_{ij})_{i,j=1}^{k}; \quad k = 1, \dots, n; \tag{37.1}$$

все они также являются симметрическими, первая из них является одноэлементной: $A^{(1)} = (a_{11})$, последняя совпадает с исходной матрицей: $A^{(n)} = A$.

Определители подматриц (37.1)

$$\Delta_k = \det(A^{(k)}); \quad k = 1, \dots, n \tag{37.2}$$

принято называть *угловыми минорами* для матрицы A. Для единообразия записи последующих формул к скалярам (37.2) добавляется еще один: $\Delta_0 = 1$.

Определение 37.1. Говорят, что матрица $A \in L_s(n, P)$ удовлетворяет *условию Якоби*, если все угловые миноры (37.2), кроме, может быть, последнего, $\Delta_n = \det(A)$, отличны от нуля:

$$\Delta_k \neq 0; \ k = 1, 2, \dots, n-1. \tag{37.3}$$

Замечание 37.1. Из определения 37.1 следует, что $(n\times n)$-матрица, удовлетворяющая условию Якоби, либо невырожденна, либо имеет ранг $n-1$. Ясно, что этого не достаточно. Скажем, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

симметрична, имеет ранг 2, но условию Якоби не удовлетворяет по очевидной причине: $\Delta_1 = a_{11} = 0$.

Однако в этом примере (и в некоторых других простых случаях) удается заменить данную матрицу, не удовлетворяющую условию Якоби, на *конгруэнтную* матрицу, удовлетворяющую ему. Обычно это делается с помощью *перестановочного перехода*. Переставив в A первый и второй столбцы, и, одновременно, — первую и вторую строки, мы придем к матрице

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для которой $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = 0$.

Теорема 37.1 (теорема Якоби). *Пусть V — n-мерное линейное пространство над полем P, характеристики, отличной от двух; f и h — соответствующие друг другу симметрическая билинейная и квадратичная формы на пространстве V; $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ — некоторый базис в V.*

Если формам f и h отвечает в базисе $\mathcal{B}$ матрица A, удовлетворяющая условию Якоби, то в пространстве V существует базис $\mathcal{D}$, связанный с исходным базисом $\mathcal{B}$ верхней унитреугольной матрицей перехода T и являющийся диагонализирующим для данных форм, причем диагональные элементы диагональной матрицы D, отвечающей в базисе $\mathcal{D}$ формам f и h, могут быть выражены через угловые миноры (37.2) по формулам

$$\mu_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}};\ i = 1, \dots n. \tag{37.4}$$

Доказательство. Рассмотрим симметрическую матрицу A с "выгороженными" угловыми минорами:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array}\right]. \tag{37.5}$$

(Здесь и далее в доказательстве нам показалось уместным представление матриц не в обычной записи, но — обрамленными таблицами. Когда в качестве элементов матриц служат достаточно длинные выражения, табличная форма более наглядна.)

Матрицу перехода T такую, чтобы матрица

$$D = T^t A T \tag{37.6}$$

была диагональной, будем искать в предопределенном теоремой виде — как верхнюю унитреугольную:

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ \hline 0 & 1 & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & t_{3n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right], \tag{37.7}$$

с $C_n^2 = n(n-1)/2$ неизвестными наддиагональными элементами t_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$. Для однозначного определения этих элементов достаточно получить "крамеровскую" систему с таким же количеством линейных уравнений, т. е. квадратную с.л.у., главный определитель которой отличен от нуля (см. [A_1, п. 29.2]).

Выполним матричное умножение AT, точно вычисляя лишь диагональные и наддиагональные элементы (поддиагональные клетки заполним звездочками; их содержимое будет нам безразлично):

$$AT = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{11}t_{12} + a_{12} & a_{11}t_{13} + a_{12}t_{23} + a_{13} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}t_{jn} + a_{1n} \\ \hline * & a_{21}t_{12} + a_{22} & a_{21}t_{13} + a_{22}t_{23} + a_{23} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} a_{2j}t_{jn} + a_{2n} \\ \hline * & * & a_{31}t_{13} + a_{32}t_{23} + a_{33} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} a_{3j}t_{jn} + a_{3n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline * & * & * & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}t_{jn} + a_{nn} \\ \hline \end{array}.$$

Потребуем, чтобы C_n^2 наддиагональных элементов в последней матрице обращались в нуль:

$$[AT]_{ij} = 0; \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n). \tag{37.8}$$

Если мы этого добьемся, то вычисление произведения $T^t(AT)$ даст (поскольку при умножении нули как раз придутся на звездочки) следующий результат:

$$T^t AT = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline t_{12} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline t_{13} & t_{23} & 1 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \dots & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & * & \mu_3 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline * & * & * & \dots & \mu_n \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu_3 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_n \\ \hline \end{array},$$

где

$$\begin{cases} \mu_1 = a_{11}; \\ \mu_2 = a_{21}t_{12} + a_{22}; \\ \mu_3 = a_{31}t_{13} + a_{32}t_{23} + a_{33}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_n = a_{n1}t_{1n} + a_{n2}t_{2n} + a_{n3}t_{3n} + \ldots + a_{(n-1)1}t_{1(n-1)} + a_{nn}, \end{cases} \tag{37.9}$$

т. е. будет достигнут диагональный вид.

Условия (37.8) представляют из себя систему из C_n^2 линейных уравнений с C_n^2 неизвестными. Автор полагает, что читатели будут только благодарны, если мы эту систему распишем "без многоточий", для случая конкретного небольшого размера ($n = 4$), и при этом особо подчеркнем в обозначениях тот факт, что она распадается на $n - 1 = 3$ независимые между собой с.л.у. (заодно, свободные члены будут перенесены в правые части):

$$\begin{cases} \{a_{11}t_{12} = -a_{12}; \\ \begin{cases} a_{11}t_{13} + a_{12}t_{23} = -a_{13}; \\ a_{21}t_{13} + a_{22}t_{23} = -a_{23}; \end{cases} \\ \begin{cases} a_{11}t_{14} + a_{12}t_{24} + a_{13}t_{34} = -a_{14}; \\ a_{21}t_{14} + a_{22}t_{24} + a_{23}t_{34} = -a_{24}; \\ a_{31}t_{14} + a_{32}t_{24} + a_{33}t_{34} = -a_{34}. \end{cases} \end{cases} \tag{37.10}$$

При желании (37.10) можно представить как крамеровскую с.л.у. с блочно-диагональной матрицей $\mathrm{diag}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ и главным определителем, равным произведению $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$. Но все равно решение ищется для каждого из блоков по отдельности.

Разрешив очередной блок системы (37.10), мы будем возвращаться к диагональным элементам (37.9), первый из которых уже известен ($\mu_1 = \Delta_1$), а каждый из остальных выражается через (расположенные над ним и к этому моменту уже определенные) элементы t_{ij}.

Первое из уравнений (37.10) дает:

$$t_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}} = \frac{A_{21}^{(2)}}{\Delta_1}, \tag{37.11a}$$

где, в качестве подгонки под будущую общую формулу, числитель $-a_{12}$ представлен как *алгебраическое дополнение* к (симметричному) элементу a_{21} в блоке $A^{(2)}$.

Вычисляем второй диагональный элемент:

$$\mu_2 = a_{21}t_{12} + a_{22} = a_{21}\left(\frac{-a_{12}}{a_{11}}\right) + a_{22} = \\ = \frac{-a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22}}{a_{11}} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}. \quad (37.11b)$$

Решая вторую подсистему в (37.10) по формулам Крамера, получим:

$$t_{13} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_2} = \frac{A_{31}^{(3)}}{\Delta_2}, \quad (37.12a)$$

и, аналогично:

$$t_{23} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_2} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_2} = \frac{A_{32}^{(3)}}{\Delta_2}, \quad (37.12b)$$

где снова числители представлены как алгебраические дополнения (к элементам a_{31} и a_{32}) в очередном блоке $A^{(3)}$. Между прочим, и знаменатель в формулах (37.12a,b), т. е. второй угловой минор, выражается как алгебраическое дополнение:

$$\Delta_2 = A_{33}^{(3)}, \quad (37.12c)$$

что позволяет нам получить (с использованием теоеремы Лапласа о вычислении определителей разложением по строке) следующее выражение для третьего диагонального элемента:

$$\mu_3 = a_{31}t_{13} + a_{32}t_{23} + a_{33} = a_{31}\frac{A_{31}^{(3)}}{\Delta_2} + a_{32}\frac{A_{32}^{(3)}}{\Delta_2} + a_{33} = \\ = \frac{1}{\Delta_2}\left(a_{31}A_{31}^{(3)} + a_{32}A_{32}^{(3)} + a_{33}A_{33}^{(3)}\right) = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}. \quad (37.12d)$$

Процесс пошел. При решении третьей подсистемы мы получим;

$$t_{14} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_3} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}}{\Delta_3} = \frac{A_{41}^{(4)}}{\Delta_3}, \quad (37.13a)$$

и, аналогично:

$$t_{24}\frac{A_{42}^{(4)}}{\Delta_3};\ t_{34}=\frac{A_{43}^{(4)}}{\Delta_3};\ \Delta_3=A_{44}^{(4)};\ \mu_4=\frac{\Delta_4}{\Delta_3}. \tag{37.13b}$$

Наше рассмотрение случая $n=4$ было даже избыточно подробным. В общем случае ("с многоточиями") все — точно так же, надо только (пользуясь свойствами определителей) внимательно следить за сменами знака (при вынесеннии -1 из столбца и при транспортировке этого столбца на "свое место").

Доказательство завершено. □

Переоформим проведенное выше доказательное рассуждение в описание алгоритма.

А л г о р и т м 37. 1.
Приведение симметрической билинейной (квадратичной) формы к диагональному виду методом Якоби

Пусть с.б.ф. $f\in\mathcal{L}_s(V)$ [кв.ф. $h\in\mathcal{K}(V)$] задана в некотором базисе $\mathcal{B}$ n-мерного пространства V симметрической $(n\times n)$-матрицей A.

1. Вычисляем для A угловые миноры Δ_i $(i=1,\dots,n)$. Если все они, кроме, может быть, Δ_n, отличны от нуля, то метод Якоби применим, причем диагональный вид заданных форм можно записать сразу; для h он таков:

$$h(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta_0}y_1^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2+\dots+\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2;\ x\in V, \tag{37.14}$$

где $\Delta_0=1$, а новые переменные y_i $(i=1,\dots,n)$ являются координатами вектора x в новом (диагонализирующем) базисе $\mathcal{D}$, который связан с $\mathcal{B}$ матрицей перехода T, подлежащей определению далее.

2. Матрицу перехода ищем в виде (37.7) с неопределенными наддиагональными элементами t_{ij} $(1\leqslant i<j\leqslant n)$. Для определения этих элементов вычисляем и приравниваем нулю наддиагональные элементы в матричном произведении AT. Остается решить полученную с.л.у.

О т в е т должен содержать:

— диагональный вид данной формы (или диагональную матрицу, составленную из ее коэффициентов);

— унитреугольную матрицу перехода T (или — выписанные в развернутом виде — формулы перехода $\overline{x} = T\overline{y}$, выражающие старые переменные через новые).

Замечание 37.2 (для служебного использования). Трудно объяснить почему, но в большинстве учебников по линейной алгебре излагается несколько иная версия метода Якоби, приводящая к "перевернутым" [по сравнению с (37.14)] диагональным элементам Δ_{i-1}/Δ_i, что приводит к усилению условий, необходимых для применимости метода: приходится требовать, чтобы старший угловой минор $\Delta_n = \det(A)$ также был отличен от нуля.

Замечание 37.3. Процесс диагонализации по Якоби обладает важной особенностью, проистекающей из унитреугольного характера матрицы перехода T [см. (37.7)] от исходного базиса $\mathcal{B} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ к диагонализирующему базису $\mathcal{D} = [d_1, d_2, \dots, d_n]$.

Заметим, что обратная матрица $S = T^{-1}$ также является унитреугольной:

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ \hline 0 & 1 & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & s_{3n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline \end{array}; \tag{37.15}$$

чтобы в этом убедиться, достаточно представить себе последовательность действий $(T|E) \to (E|S)$ при отыскании обратной матрицы методом Жордана — Гаусса.

Из формул прямого (от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{D}$) и обратного (от $\mathcal{D}$ к $\mathcal{B}$) переходов, которые можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} d_1 = \quad b_1; \\ d_2 = t_{12}b_1 + \quad b_2; \\ d_3 = t_{13}b_1 + t_{23}b_2 + \quad b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_n = t_{1n}b_1 + t_{2n}b_2 + t_{3n}b_3 + \dots + t_{(n-1)n}b_{n-1} + \quad b_n; \end{cases} \tag{37.16}$$

$$\begin{cases} b_1 = \quad d_1; \\ b_2 = s_{12}d_1 + \quad d_2; \\ b_3 = s_{13}d_1 + s_{23}d_2 + \quad d_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n = s_{1n}d_1 + s_{2n}d_2 + s_{3n}d_3 + \dots + s_{(n-1)n}d_{n-1} + \quad d_n, \end{cases} \tag{37.17}$$

немедленно следует (для любого $k = 1, ..., n$) совпадение линейных оболочек для первых k векторов старого и нового базисов:

$$\langle b_1, b_2, \dots, b_k \rangle = \langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle . \tag{37.18}$$

Пример 37.1. Попытаемся применить метод Якоби к задаче о диагонализации кв.ф.

$$h(x) = x_1^2 - 14x_2^2 - 18x_3^2 + 5x_4^2 + \\ + 2(-6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 5x_1x_4 - 14x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4) = \overline{x}^t A \overline{x},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -6 & -5 \\ -6 & -14 & -14 & -2 \\ -6 & -14 & -18 & -2 \\ -5 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислив угловые миноры

$$\Delta_1 = 1;\ \Delta_2 = -50;\ \Delta_3 = 200;\ \Delta_4 = 96,$$

убеждаемся в том, что метод Якоби применим и приводит к диагональному виду

$$h(x) = y_1^2 - 50y_2^2 - 4y_3^2 + \frac{12}{25}y_4^2.$$

Матрицу T ищем в унитреугольном виде (37.7):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} \\ 0 & 0 & 1 & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим наддиагональные элементы матричного произведения AT (элементы, расположенные на диагонали и ниже игнорируются):

$$AT = \begin{pmatrix} * & t_{12} - 6 & t_{13} & -6 & t_{14} - 6t_{24} - 6t_{34} - 5 \\ * & * & -6t_{13} - 14t_{23} - 14 & & -6t_{14} - 14t_{24} - 14t_{34} - 2 \\ * & * & * & & -6t_{14} - 14t_{24} - 18t_{34} - 2 \\ * & * & * & & * \end{pmatrix}.$$

Приравнивая найденные элементы к нулю и решая полученную с.л.у., находим:

$$t_{12}=6;\ t_{13}=0;\ t_{14}=\frac{29}{25};\ t_{23}=-1;\ t_{24}=-\frac{16}{25};\ t_{34}=0.$$

Заполняем матрицу T и выписываем выражения для старых переменных через новые:

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 &+6\,y_2 & & &+\frac{29}{25}\,y_4;\\ x_2 &= & y_2 &-y_3 &&-\frac{16}{25}\,y_4;\\ x_3 &= & & y_3 & &;\\ x_4 &= & & & & y_4. \end{cases}$$

Как и после разбора примера 36.1, мы сообщим о том, что диагонализация квадратичных форм по Якоби также будет входить в ТРЗ (см. § 39).

37.2. Алгоритм Грама — Шмидта диагонализации с.б.ф. Если матрица A, отвечающая с.б.ф. $f\in\mathcal{L}_s^2(V)$ в некотором базисе $\mathcal{B}$, удовлетворяет условиям Якоби (37.3), то, согласно теореме 37.1, для формы f существует диагонализирующий базис $\mathcal{D}$, связанный с $\mathcal{B}$ взаимно обратными унитреугольными матрицами (37.7) и (37.15), причем можно выписать в явном виде диагональные элементы [см. (37.4)] диагональной матрицы D, отвечающей данной с.б.ф. в базисе $\mathcal{D}$:

$$f(d_i,d_i)=\mu_i=\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}};\ i=1,...,n. \tag{37.19}$$

Важно, что первые $n-1$ из элементов (37.19) гарантированно отличны от нуля.

Алгоритм 37.1 дает возможность прямого вычисления матрицы перехода T. Однако в вычислительном отношении значительно более выгодна *рекуррентная процедура* построения диагонализирующего базиса, известная как *метод Грама — Шмидта*, к изложению которой мы приступаем.

Вернемся к формулам *обратного* перехода (37.17) и придадим им рекуррентный характер, выражая (для любого $k=2,...,n$) из k-й формулы новый вектор d_k через старый вектор b_k и ранее найденные

новые веторы $d_1, \dots, d_{k-1}$:

$$\begin{cases} d_1 = b_1; \\ d_2 = b_2 - s_{12}d_1; \\ d_3 = b_3 - s_{13}d_1 - s_{23}d_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_n = b_n - s_{1n}d_1 - s_{2n}d_2 - \dots - s_{(n-1)n}d_{n-1}. \end{cases} \tag{37.20}$$

Тот факт, что новый базис $\mathcal{D}$ является диагонализирующим, может быть выражен [см. (35.11)] C_n^2 соотношениями:

$$f(d_i, d_j) = 0; \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, \tag{37.21}$$

с помощью которых можно выразить неизвестные пока C_n^2 коэффициенты s_{ij} в формулах (37.20).

Делается это так. Рассмотрим j-е соотношение ($j = 2, \dots, n$) из системы (37.20):

$$d_j = b_j - \sum_{k=1}^{j-1} s_{kj} d_k, \tag{37.22}$$

и распишем для произвольного $i < j$ значение с.б.ф. $f(b_i, b_j)$, пользуясь билинейностью и симметричностью f, а также условиями (37.21):

$$0 = f(d_i, d_j) = f(d_i, b_j) - \sum_{k=1}^{j-1} s_{kj} f(d_i, d_k) = f(d_i, b_j) - s_{ij} f(d_i, d_i),$$

или, что равносильно:

$$s_{ij} f(d_i, d_i) = f(d_i, b_j). \tag{37.23}$$

В формуле (37.23) скаляр $f(d_i, d_i) = \mu_i \neq 0$ (т. к. $i < j \leqslant n$). Следовательно, можно выразить неизвестный коэффициент:

$$s_{ij} = \frac{f(d_i, b_j)}{f(d_i, d_i)}; \ 1 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{37.24}$$

Тем самым полностью определена матрица S и, что важнее, векторы базиса $\mathcal{D}$ могут быть рекуррентно определены по следующим формулам (с уже известными коэффициентами):

$$\begin{cases} d_1 = b_1; \\ d_2 = b_2 - \frac{f(d_1,b_2)}{f(d_1,d_1)} d_1; \\ d_3 = b_3 - \frac{f(d_1,b_3)}{f(d_1,d_1)} d_1 - \frac{f(d_2,b_3)}{f(d_2,d_2)} d_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_n = b_n - \frac{f(d_1,b_n)}{f(d_1,d_1)} d_1 - \frac{f(d_2,b_n)}{f(d_2,d_2)} d_2 - \ldots - \frac{f(d_{n-1},b_n)}{f(d_{n-1},d_{n-1})} d_{n-1}. \end{cases} \tag{37.25}$$

Подведем итог нашим вычислениям. Справедлива следующая

Теорема 37.2 (теорема Грама — Шмидта). *Пусть на n-мерном линейном пространстве V задана с.б.ф. f, матрица которой в некотором базисе $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям Якоби. Тогда рекуррентные соотношения (37.25) определяют в пространстве V диагонализирующий базис $\mathcal{D}$, связанный с исходным базисом свойством (37.18) равенства линейных оболочек для соответствующих подбазисов.*

Доказательство см. выше. □

Замечание 37.4. Метод Грама — Шмидта будет играть ключевую роль в *геометрических* главах нашего курса. Там он будет фигурировать в соответствующей (геометрической) формулировке и — под другим именем: *процесс f-ортогонализации* базиса.

Напомним (см. замечания 34.8 и 35.5), что векторы $x, y \in V$ называются f-ортогональными, если $f(x, y) = 0$. Базис называют f-ортогональным, если попарно f-ортогональны входящие в него векторы; это понятие равносильно понятию диагонализирующего базиса (для f).

Ниже приводится версия Грама — Шмидта для алгоритма 37.1.

А л г о р и т м 37. 2.
Приведение симметрической билинейной (квадратичной) формы к диагональному виду методом Грама — Шмидта

Постановку задачи, а также подробное содержание первого этапа, — см. в описании алгоритма 37.1.

1. Проверка выполнения условий Якоби и возвращение диагонального вида с.б.ф. (кв.ф.).

2. Заполнение унитреугольной матрицы перехода S по формулам (37.24), выражающим элементы s_{ij} через значения с.б.ф. f, или же — возращение диагонализирующего базиса, определяемого рекуррентными соотношениями (37.25).

Пример 37.2. Перерешаем с помощью алгоритма 37.2 задачу из примера 37.1. Задана своим координатным выражением в некотором базисе квадратичная форма

$$h(x) = x_1^2 - 14x_2^2 - 18x_3^2 + 5x_4^2 + \\ + 2(-6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 5x_1x_4 - 14x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4).$$

Как обычно, можно считать осуществленной *арифметизацию* задачи, относя приведенную выше формулу к естественному базису $\mathcal{B} = \mathcal{E}_4$ в пространстве V, отождествленном с арифметическим линейным пространством $\mathbb{Q}^4$.

Для реализации алгоритма 37.2 необходима формула для с.б.ф. f, полярной квадратичной форме h [вспомните представление (34.14s)]:

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 - 14x_2y_2 - 18x_3y_3 + 5x_4y_4 - \\ - 6(x_1y_2 + x_2y_1) - 6(x_1y_3 + x_3y_1) - 5(x_1y_4 + x_4y_1) - \\ - 14(x_2y_3 + x_3y_2) - 2(x_2y_4 + x_4y_2) - 2(x_3y_4 + x_4y_3).$$

Начинаем процесс ортогонализации. Векторы искомого диагонализирующего (f-ортогонального) базиса

$$\mathcal{D} = [\overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}]$$

определяются последовательно:

$$\overline{d_1} = \overline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{d_2} = \overline{e_2} - \frac{f(\overline{d_1}, \overline{e_2})}{f(\overline{d_1}, \overline{d_1})}\,\overline{d_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-6)}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{d_3} = \overline{e_3} - \frac{f(\overline{d_1},\overline{e_3})}{f(\overline{d_1},\overline{d_1})}\,\overline{d_1} - \frac{f(\overline{d_2},\overline{e_3})}{f(\overline{d_2},\overline{d_2})}\,\overline{d_2} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \tfrac{(-6)}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \tfrac{(-50)}{(-50)}\begin{pmatrix}6\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix};$$

$$\overline{d_4} = \overline{e_4} - \frac{f(\overline{d_1},\overline{e_4})}{f(\overline{d_1},\overline{d_1})}\,\overline{d_1} - \frac{f(\overline{d_2},\overline{e_4})}{f(\overline{d_2},\overline{d_2})}\,\overline{d_2} - \frac{f(\overline{d_3},\overline{e_4})}{f(\overline{d_3},\overline{d_3})}\,\overline{d_3} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \tfrac{(-5)}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \tfrac{(-32)}{(-50)}\begin{pmatrix}6\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \tfrac{0}{(-4)}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}29/25\\-16/25\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Вновь найденные базисные векторы составляют матрицу перехода

$$T = \left(\overline{d_1}\middle|\overline{d_2}\middle|\overline{d_3}\middle|\overline{d_4}\right) = \begin{pmatrix}1 & 6 & 0 & 29/25\\ 0 & 1 & -1 & -16/25\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Результат сошелся с полученным в примере 37.1.

§ 38. Симметрические билинейные (квадратичные) формы над полем действительных чисел. Сигнатура. Теорема инерции

38.1. Нормальный вид для с.б.ф. (кв.ф.) над полем $\mathbb{R}$. Поле действительных чисел не является алгебраически замкнутым. Более того, не из любого действительного числа можно извлечь квадратный корень. В связи с этим, над полем $\mathbb{R}$ теряют силу предложения 36.1 и 36.2, что приводит к некоторому усложнению теории симметрических билинейных (квадратичных) форм, по сравнению, скажем, со случаем поля $\mathbb{C}$.

Однако в $\mathbb{R}$ есть то, чего нет в $\mathbb{C}$, — *естественный порядок*, возможность *сравнивать* числа: для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ имеет место одно

и только одно из соотношений: $\lambda < \mu$, $\lambda = \mu$ или $\lambda > \mu$, причем отношение порядка *согласовано с алгебраическими действиями*, что выражается несколькими законами, типа $[\lambda < \mu] \Rightarrow [\lambda + \nu < \mu + \nu]$ (для любых $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$) и т. п.

Благодаря этому, поле $\mathbb{R}$ относят к так называемым *упорядоченным полям*, для которых развивается особая, интересная и важная теория.

Сравнение с числом нуль разбивает упорядоченное поле $\mathbb{R}$ на три подмножества: множество положительных чисел $\mathbb{R}_+$, одноэлементное множество $\{0\}$ и множество отрицательных чисел $\mathbb{R}_-$. Как всем вам хорошо и давно известно, это разбиение связано с разрешимостью задачи об извлечении в $\mathbb{R}$ квадратного корня: действительный квадратный корень можно извлечь только из неотрицательных чисел. Этот факт допускает иное выражение: каким бы ни было ненулевое действительное число λ, квадратный корень можно извлечь либо из него, либо из противоположного числа $-\lambda$.

Для теории квадратичных форм особенно существенным является следующее свойство поля $\mathbb{R}$: -1 *не может быть представлена в виде суммы квадратов*. Последнее свойство берется в качестве одного из определяющих для класса так называемых *вещественно замкнутых* полей. Многое из того, что в данном и последующих параграфах будет установлено над $\mathbb{R}$, остается справедливым над любым вещественно замкнутым полем. Подробнее об этом см., например, во всемирно знаменитом учебнике Б. Л. ван дер Вардена "Алгебра" (М.: Наука, 1976).

Итак, пусть V — к.л.п. размерности n над полем $\mathbb{R}$, f и h — заданные на V и соответствующие друг другу с.б.ф. и кв.ф. Согласно теореме Лагранжа, в пространстве V существует диагонализирующий базис $\mathcal{B}$, в котором данным формам отвечает матрица

$$A = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0), \tag{38.1}$$

где $r = \operatorname{rank}(f)$; $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\mu_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, r)$.

В этом базисе координатная запись кв.ф. h будет иметь следующий вид:

$$h(x) = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \dots + \mu_r x_r^2. \tag{38.2}$$

Предположим, что среди r ненулевых диагональных элементов в матрице A имеется s положительных и t отрицательных чисел $(0 \leqslant s, t \leqslant r;\ s + t = r)$.

Меняя, в случае необходимости, нумерацию базисных векторов, мы всегда можем добиться такого расположения диагональных элементов, чтобы в начале диагонали находились s положительных чисел: $\mu_1, \dots, \mu_s$, а за ними следовали t отрицательных: $\mu_{s+1}, \dots, \mu_r$ (если $r < n$, то далее на диагонали будут еще располагаться $n - r$ нулей).

Далее применяется такой прием: если в одночлене второй степени ax^2 коэффициент a является положительным действительным числом, то этот одночлен можно представить как квадрат линейного одночлена:

$$ax^2 = (\sqrt{a}\, x)^2;$$

если же $a < 0$, то надо записать $a = (-1)(-a)$ и, оставив -1 перед скобкой, "подвести под общий квадрат" корень квадратный из положительного числа $-a$:

$$ax^2 = -(\sqrt{-a}\, x)^2.$$

Применяя описанный прием ко всем слагаемым в (38.2), мы получим:

$$h(x) = (\sqrt{\mu_1}\, x_1)^2 + \dots + (\sqrt{\mu_s}\, x_s)^2 - \\ - (\sqrt{-\mu_{s+1}}\, x_{s+1})^2 - \dots - (\sqrt{-\mu_r}\, x_r)^2. \quad (38.3)$$

Теперь ясно, какую замену переменных надо произвести, чтобы в новом диагональном виде, в качестве коэффициентов при квадратах фигурировали только единицы, минус единицы и нули:

$$x_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu_i}}\, y_i, & \text{при } i = 1, \dots, s; \\ \dfrac{1}{\sqrt{-\mu_i}}\, y_i, & \text{при } i = s+1, \dots, r; \\ y_i, & \text{при } i = r+1, \dots, n. \end{cases} \quad (38.4)$$

(Обратите внимание на третью строку в последней формуле: замена должна распространяться на *все* переменные, в том числе и на те, которые в явном виде в квадратичной форме отстутствуют. Фактически, "замена" $x_i = y_i$ ничего не меняет, просто происходит *переименование* "незадействованных" переменных, связанное с общим переходом "к новой букве".)

В результате замены (38.4) кв.ф. (38.3) приобретет вид:

$$h(x) = y_1^2 + ... + y_s^2 - y_{s+1}^2 - ... - y_r^2 = \overline{y}^t G \overline{y}, \tag{38.5}$$

где

$$\underset{n\times n}{G} = \left(\begin{array}{c|c|c} \underset{s\times s}{E_s} & \underset{s\times t}{O} & \underset{s\times(n-r)}{O} \\ \hline \underset{t\times s}{O} & \underset{t\times t}{-E_t} & \underset{t\times(n-r)}{O} \\ \hline \underset{(n-r)\times s}{O} & \underset{(n-r)\times t}{O} & \underset{(n-r)\times(n-r)}{O} \end{array}\right). \tag{38.6}$$

Основной результат данного пункта получен. Остается ввести новый *термин* для полученного выше вида (38.5) — самого простого из возможных диагональных видов для матриц, отвечающих симметрическим билинейным (квадратичным) формам над $\mathbb{R}$, и сформулировать (уже установленный) *результат*.

Определение 38.1. *Нормализирующим базисом* для симметрической билинейной (квадратичной) формы над полем $\mathbb{R}$ называется такой диагонализирующий базис, в котором этим формам отвечает матрица вида (38.6). Запись (38.5) называется *нормальным видом* для кв.ф. h.

Подчеркнем, что в нормальном виде диагональными коэффициентами могут быть только плюс или минус единицы и нули, причем располагаются они именно в таком порядке: сначала s единиц, потом t минус единиц, потом $n-(s+t)$ нулей. (Разумеется, не исключаются случаи обращения в нуль каких-либо из указанных количеств.)

Предложение 38.1. *Для любой с.б.ф. (кв.ф.) над полем $\mathbb{R}$ существует нормализирующий базис.*

Доказательство см. выше. □

38.2. Индексы инерции для с.б.ф. (кв.ф.) над полем $\mathbb{R}$. Теорема инерции. В определение нормального вида для симметрической билинейной формы $f \in \mathcal{L}_s^2(V)$ (квадратичной формы $h \in \mathcal{K}(V)$) входят две количественные характеристики: s и t, являющиеся неотрицательными целыми числами, сумма которых равняется рангу $r = \operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(h)$.

Определение 38.2. Список $[s, t]$ неотрицательных целых чисел, характеризующих нормальный вид (38.5), называется *сигнатурой* для (соответствующих друг другу) с.б.ф. f и кв.ф. h.

Сами эти числа называются (соответственно) *положительным* и *отрицательным индексами инерции* для f и h.

Замечание 38.1. А теперь сознаемся: только что данное определение — по крайней мере пока — совершенно некорректно. Дело в том, что мы отнесли характеристики s и t к заданным формам, хотя, по построению, они зависят не только от f и h, но и *от выбора нормализуещего базиса.* Мы уже говорили о неоднозначности определения диагонального вида, еще бóльшая неоднозначность имеет место при выборе диагонализирующего базиса. *Нормализирующий базис* определяется по диагонализирующему и, следует ожидать, что он также определяется неоднозначно.

А вот нормальный вид, как будет показано ниже, определен совершенно однозначно, т. е. числа s и t не зависят от выбора диагонализирующего базиса (иначе говоря: от способа приведения формы к нормальному виду).

Кому-то из математиков показалось, что это свойство чем-то напоминает (физическое) явление инерции. Так родилось название "индексы инерции" и имя "теорема инерции". (Любителям истории — задание: выяснить, кто первым предложил такую "образную" терминологию?)

Кого-то (из любителей филологии) может смутить словоупотребление "отрицательный индекс" применительно к *неотрицательному* числу t. Но таковы математики: иногда очень щепетильны в терминологии, а иногда — небрежны.

Итак, для того чтобы обеспечить корректность определения 38.2, должна быть доказана следующая

Теорема 38.1. *Нормальный вид для симметрической билинейной (квадратичной) формы над полем $\mathbb{R}$ определен однозначно, т. е. сигнатура формы не зависит от выбора диагонализирующего базиса (способа приведения формы к нормальному виду).*

Доказательство. Рассуждения будем вести для квадратичной формы $h \in \mathcal{K}(V)$. Как известно (см. п. 35.3), понятие ранга определено инвариантно: в любом базисе матрица кв.ф. имеет один и тот же ранг. В частности, в любом диагонализирующем базисе ко-

личество ненулевых элементов на диагонали матрицы одно и то же и равняется рангу $r = \operatorname{rank}(h)$.

Рассмотрим для кв.ф. h два любых нормализирующих базиса, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Пусть вектору $x \in V$ отвечают в указанных базисах координатные столбцы $\beta(x) = \overline{x}$ и $\gamma(x) = \overline{y}$ соответственно. (В их определении участвуют координатные изоморфизмы $\beta, \gamma : V \to P^n$; см. п. 6.4.)

Выпишем и приравняем два координатных выражения для значения $h(x)$ формы h на произвольном векторе $x \in V$ (т.е. два нормальных вида):

$$x_1^2 + ... + x_s^2 - (x_{s+1}^2 + ... + x_r^2) = \\ = y_1^2 + ... + y_{s'}^2 - (y_{s'+1}^2 + ... + y_r^2), \quad (38.7)$$

где s и s' — положительные индексы инерции в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ соответственно (уже учтена инвариантность ранга, так что для отрицательных индексов получаются значения $t = r - s$ и $t' = r - s'$).

Надо доказать, что $s = s'$, тогда равенство $t = t'$ окажется справедливым автоматически и инвариантность сигнатуры будет доказана. Предположим противное: $s \neq s'$, и пусть, для определенности, $s > s'$.

Равенство (38.7) справедливо для любого вектора x (который пробегает всё пространство V); вектор-столбец $\overline{x}$ связан с x координатным изоморфизмом β, и, следовательно, пробегает — также всё — арифметическое линейное пространство P^n; то же самое можно сказать и про вектор-столбец $\overline{y}$.

Кроме того, мы помним, что при линейных изоморфизмах линейные подпространства переходят в линейные подпространства, причем — с сохранением размерности.

Рассмотрим далее s-мерное *координатное* линейное подпространство

$$U_1 = \{\overline{x} \in P^n : x_{s+1} = ... = x_n = 0\} \leqslant P^n \quad (38.8)$$

в арифметическом линейном пространстве (заданное $n - s$ линейными уравнениями простейшего возможного типа).

Такую же размерность будет иметь прообраз W_1 подпространства U_1 при изоморфизме β:

$$W_1 = \overset{-1}{\beta}(U_1) = \{x \in V : \beta(x) \in U_1\} = \\ = \{x \in V : x_{s+1} = ... = x_n = 0\} \leqslant V. \quad (38.9)$$

Выполним еще одно, совершенно аналогичное, построение:

$$U_2 = \{\overline{y} \in P^n : y_1 = ... = y_{s'} = 0\} \leqslant P^n;\ \dim(U_2) = n - s'; \quad (38.10)$$

$$W_2 = \overset{-1}{\gamma}(U_2) = \{x \in V : \gamma(x) \in U_2\} =$$
$$= \{x \in V : y_1 = ... = y_{s'} = 0\} \leqslant V;\ \dim(W_2) = n - s'. \quad (38.11)$$

Вычисление значения $h(x)$ на произвольном *ненулевом* векторе $x \in W_1$ дает [в соответствии с левой частью (38.7)]:

$$h(x) = x_1^2 + ... + x_s^2 > 0. \quad (38.12)$$

(Строгость последнего неравенства обусловливается тем, что, в силу предположения $s > s'$, положительный индекс инерции $s > 0$.)

Аналогично, на любом $x \in W_2$ имеем:

$$h(x) = -(y_{s'+1}^2 + ... + y_r^2) \leqslant 0. \quad (38.13)$$

Неравенства (38.12) и (38.13) приведут к противоречию, если пересечение $W_1 \cap W_2$ нетривиально, т. е. существует вектор $x \neq 0$, принадлежащий обоим этим подпространствам.

Убедимся, что это на самом деле так.

Формула Грассмана (см. п. 8.2) дает:

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) =$$
$$= s + (n - s') - \dim(W_1 + W_2) = (s - s') + (n - \dim(W_1 + W_2)) > 0,$$

поскольку $s > s'$ и $\dim(W_1 + W_2) \leqslant n$.

Значит, $W_1 \cap W_2 \neq O$; противоречие получено; теорема доказана. $\square$

Замечание 38.2. Итак, корректность сопоставления сигнатуры (индексов инерции) симметрической билинейной (квадратичной) форме над полем $\mathbb{R}$ обоснована. Те же характеристики принято сопоставлять симметрическим матрицам над $\mathbb{R}$, говоря, например, о *сигнатуре симметрической матрицы*. Согласно доказанному в теореме 38.1, сигнатура не изменяется при замене матрицы на конгруэнтную.

Подобно тому, как после выяснения (в предложении 36.1) простейшего возможного (скелетного) диагонального вида для с.б.ф. (кв.ф.) над алгебраически замкнутым полем P, мы немедленно получили (в предложении 36.2) критерий когруэнтности для симметрических квадратных матриц с элементами из P, здесь, после доказательства теоремы инерции, мы можем сформулировать аналогичный критерий над полем $P = \mathbb{R}$.

Предложение 38.1. *Две симметрические матрицы A и B с действительными элементами конгруэнтны тогда и только тогда, когда их сигнатуры одинаковы.* □

38.3. Знакоопределенные и знакопеременные симметрические билинейные (квадратичные) формы над полем $\mathbb{R}$. Вводимые ниже понятия, связанные со знакоопределенностью (знакопеременностью), по своей природе относятся к *квадратичным* формам над $\mathbb{R}$. Однако, ввиду наличия изоморфизма между пространствами квадратичных и симметрических билинейных форм, к последним их также принято относить. (Например, с.б.ф. считается знакоопределенной, если таковой является соответствующая ей кв.ф.; точные определения — ниже.)

Определение 38.1. Кв.ф. $h \in \mathcal{K}(V)$ [а также полярная ей с.б.ф. $f \in \mathcal{L}_s^2(V)$] называется

— *положительно определенной* (*п.о.*), если на любом *ненулевом* векторе $x \in V$ значение $h(x) > 0$;

— *отрицательно определенной* (*о.о.*), если на любом *ненулевом* векторе $x \in V$ значение $h(x) < 0$;

— *положительно полуопределенной* (*п.п.о.*), если на любом векторе $x \in V$ значение $h(x) \geqslant 0$;

— *отрицательно полуопределенной* (*о.п.о.*), если на любом векторе $x \in V$ значение $h(x) \leqslant 0$;

— *знакопеременной*, если h может принимать значения различных знаков, т. е. существуют векторы $x, y \in V$, такие, что $h(x) > 0$ и $h(y) < 0$.

Ясно, что положительно (отрицательно) определенные формы являются частным случаем положительно (отрицательно) полуопределенных. Единственной квадратичной формой, являющейся одновременно и положительно, и отрицательно полуопределенной, является нулевая форма.

Положительная (полу)определенность формы h влечет отрицательную (полу)определенность формы $-h$, и наоборот. Форма, противоположная знакопеременной, сама является таковой.

Характер квадратичной формы (в плане ее знакоопределенности, полуопределенности или переменности) определяется ее сигнатурой.

Предложение 38.2. *Пусть h — квадратичная форма сигнатуры $[s,t]$ на n-мерном действительном линейном пространстве V. Тогда*

(1) $\boxed{h \text{ является п.о.}} \iff \boxed{s=n}$;

(2) $\boxed{h \text{ является о.о.}} \iff \boxed{t=n}$;

(3) $\boxed{h \text{ является п.п.о.}} \iff \boxed{t=0}$;

(4) $\boxed{h \text{ является о.п.о.}} \iff \boxed{s=0}$;

(5) $\boxed{h \text{ является знакопеременной}} \iff \boxed{s>0 \wedge t>0}$.

Доказательство. 1.1. Если $s=n$ (и, следовательно, $t=0$ и $r=s=n$), то в нормализирующем базисе форма h выражается формулой

$$h(x)=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2, \tag{38.14}$$

из которой немедленно следует, что $h(x)\geqslant 0$ для любого $x\in V$, а если $x\neq 0$, то $h(x)>0$. Значит форма h является п.о.

1.2. Обратно, пусть h положительно определена. Докажем, что $s=n$. Предположим противное. Тогда

— либо $t>0$,

— либо $t=0$, но $r=s<n$.

1.2.1. В первом случае нормальный вид формы h содержит хотя бы один член с минусом: $-x_{s+1}^2$. Рассмотрев произвольный вектор $x\in V$, все координаты которого (в нормализирующем базисе) равны нулю, кроме одной: $x_{s+1}=1$, мы получим значение $h(x)=-1$, что противоречит положительной определенности h.

1.2.2. Во втором случае годится то же самое рассуждение: значение $h(x)$ окажется не отрицательным, а нулевым, но и это противоречит положительной определенности.

2. Второе утверждение немедленно следует из первого, поскольку, как отмечалось выше, переменой знака случай положительной определенности сводится к случаю отрицательной определенности, и обратно.

3.1. Если $t=0$, то в нормализирующем базисе выражение для формы h имеет слеедующий [более общий, чем (38.14)] вид:

$$h(x)=x_1^2+x_2^2+...+x_r^2; \tag{38.15}$$

неотрицательность всех ее значений очевидна.

3.2. Обратно, предположим, что h является п.п.о. Докажем, что $t=0$. Предположив противное, мы тут же приходим к противоречию, рассуждая точно так же, как в 1.2.1.

4. Это утверждение переменой знака сводится к предыдущему.

5.1. Если оба индекса инерции отличны от нуля, то в нормальном виде для формы h присутствуют как квадраты с плюсом, так и квадраты с минусом:

$$h(x) = (x_1^2 + ... + x_s^2) - (x_{s+1}^2 + ... + x_r^2). \tag{38.16}$$

Взяв вектор x, все координаты которого, кроме первой, равны нулю, а $x_1 = 1$, мы получим полжительное значение: $h(x) = 1$. Если же выбрать вектор y, все координаты которого равны нулю, кроме $y_{s+1} = 1$, то получится отрицательное значение $h(y) = -1$.

5.2. Обратно, если форма h знакопеременна, то невозможны ни случай $t = 0$, ни случай $s = 0$. Действительно, согласно третьему утверждению, обращение в нуль индекса t влечет положительную полуопределенность и, следовательно, исключает знакопеременность. (Возможность $s = 0$ отвергается аналогично.) □

Замечание 38.3. Очень важное обстоятельство: положительная (отрицательная) определенность влечет *невырожденность*. Полуопределенные (но не определенные) формы вырождены. Знакопеременные могут быть как невырожденными, так и вырожденными.

Замечание 38.4. Для вычисления сигнатуры и определения характера квадратичной формы (над полем $\mathbb{R}$) вовсе не обязательно приводить ее к нормальному виду; достаточно достичь диагонального (и подсчитать количество s положительных диагональных элементов и количество t отрицательных).

Пример 38.1. Квадратичная форма из примера 36.1 имеет сигнатуру $[2, 1]$, является знакопеременной и невырожденной. Переход от полученного в примере 36.1 диагонального вида к нормальному виду

$$h(x) = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$$

осуществляется с помощью замены:

$$z_1 = u_1; \quad z_2 = \frac{1}{2}u_2; \quad z_3 = \frac{1}{2}u_3.$$

Форма из примера 36.2 также знакопеременна и невырожденна; ее сигнатура равна $[2, 2]$. Диагональный вид, полученный в этом примере, нормализируется заменой:

$$y_1 = z_1; \quad y_2 = 2\sqrt{5}\, z_3; \quad y_3 = 2z_4; \quad y_4 = \frac{2}{5}\sqrt{3}\, z_2.$$

(Обратите внимание на то, что здесь потребовалась перенумерация переменных.)

Приведение квадратичной формы к нормальному виду, вычисление сигнатуры и определение характера формы (в плане знакоопределенности или переменности) предусмотрено в качестве завершающего этапа в типовом расчете ТР3 (см. § 39).

Пример 38.2 (продолжение примеров 34.1 и 34.2). *Скалярное произведение* [см. (34.7)]

$$f(\overline{x},\overline{y}) = \overline{x}^t\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{38.17a}$$

заданное на действительном арифметическом линейном пространстве $V = \mathbb{R}^n$, является п.о. с.б.ф. Соответствующая кв.ф.

$$h(\overline{x}) = \overline{x}^t\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{38.17b}$$

интерпретируется как *квадрат длины вектора*.

Аналогичным образом (но уже в бесконечномерном пространстве) можно трактовать *скалярное произведение функций*, определяемое как интеграл (34.8) от произведения функций.

В качестве замены термину "длина" здесь чаще употребляется термин "норма функции". Квадрат нормы выражается как кв.ф.

$$h(x(t)) = \int_a^b x^2(t)\,dt,$$

положительная определенность которой должна обосновываться с помощью свойств интегралов.

Пример 38.3 (продолжение примеров 34.3 и 35.1). Рассмотрим на n^2-мерном действительном линейном пространстве $V = L(n,\mathbb{R})$ с.б.ф.

$$f(X,Y) = \operatorname{tr}(X^t \cdot Y);\ X, Y \in V. \tag{38.18a}$$

Из формулы

$$h(X) = \operatorname{tr}(X^t \cdot X) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2 \tag{38.18b}$$

для соответствующей кв.ф. следует положительная определенность форм f и h.

38.4. Критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности с.б.ф. (кв.ф.). Пользуясь предложением 38.1, можно выяснить характер симметрической билинейной (квадратичной) формы по ее нормальному (или хотя бы — диагональному) виду. Доказываемая ниже теорема (критерий Сильвестра) позволяет установить, является ли форма положительно (отрицательно) определенной по *угловым минорам* матрицы, соответствующей данной форме в некотором базисе. Естественно, этот метод напрямую связан с *методом Якоби* диагонализации с.б.ф. (кв.ф.), рассмотренным в п. 37.1.

Теорема 38.1 (критерий Сильвестра). *Пусть V — к.л.п. размерности n над полем $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ — какой-либо базис в V, f и h — соответствующие друг другу с.б.ф. и кв.ф., заданные на V, A — симметрическая матрица, отвечающая этим формам в базисе $\mathcal{B}$, Δ_i $(i = 1, \dots, n)$ — угловые миноры матрицы A. Тогда*

(1) формы f и h являются п.о. тогда и только тогда, когда все угловые миноры положительны:

$$\Delta_i > 0;\ i = 1, \dots, n; \tag{38.19}$$

(2) формы f и h являются о.о. тогда и только тогда, когда все гловые миноры отличны от нуля и их знаки чередуются, начиная с минуса:

$$\Delta_1 < 0;\ \Delta_2 > 0;\ \Delta_3 < 0; \dots \tag{38.20}$$

Доказательство. 1.1. Если выполнено условие (38.19), то диагонализация кв.ф. h по Якоби приводит (в новом базисе) к виду [см. (37.14)]:

$$h(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2, \tag{38.21}$$

со всеми положительными коэффициентами при квадратах. Значит, $s = n$ и форма h положительно определена.

1.2. Докажем обратное утверждение. Пусть кв.ф. h является п.о., т. е. $h(x) > 0$ для любого ненулевого вектора $x \in V$.

1.2.1. Согласно предложению 38.1, положительный индекс инерции равен размерности: $s = n$, и, следовательно, в нормализирующем базисе $\mathcal{B}'$ форма h будет записываться в виде (38.14). Другими словами, в базисе $\mathcal{B}'$ ей будет соответствовать единичная матрица: $A' = E$.

Согласно правилам пересчета (34.20), матрицы A и A' связаны формулой

$$A = S^t A' S, \tag{38.22}$$

где $S = T^{-1}$ является матрицей обратного перехода, от $\mathcal{B}'$ к $\mathcal{B}$.

В данном случае получается: $A = S^t S$. Пользуясь свойствами определителей, находим, что

$$\det(A) = (\det(S))^2 > 0, \tag{38.23}$$

а это и есть требуемое неравенство для *старшего углового минора* Δ_n.

1.2.2. Попробуем теперь получить неравенство $\Delta_k > 0$ для произвольного $k = 1, \dots, n-1$. С этой целью рассмотрим линейное k-мерное подпространство $W_k \leqslant V$, являющееся линейной оболочкой первых k базисных векторов:

$$W_k = \langle \mathcal{B}_k \rangle\,;\ \mathcal{B}_k = [b_1, \dots, b_k], \tag{38.24}$$

и *сузим* (ограничим) на это подпространство с.б.ф. f и кв.ф. h, т. е. рассмотрим функции

$$f_k = f\big|_{W_k \times W_k} : W_k \times W_k \longrightarrow \mathbb{R};\ f_k(x,y) = f(x,y);\ x, y \in W_k \tag{38.25a}$$

и

$$h_k = h\big|_{W_k} : W_k \longrightarrow \mathbb{R};\ h_k(x) = h(x);\ x \in W_k, \tag{38.25b}$$

которые, очевидно, также являются соответствующими друг другу симметрической билинейной и квадратичной формами, причем — наследующими свойство положительной определенности.

В базисе $\mathcal{B}_k$ этим формам соответствует подматрица северо-западного угла $A^{(k)}$ [см. (37.1)]. Применяя к суженным формам результат подпункта 1.2.1, получим:

$$\Delta_k = \det(A^{(k)}) > 0. \tag{38.26}$$

2. Как уже отмечалось, отрицательная определенность для кв.ф. равносильна положительной определенности для противоположной формы. Если форме h отвечает (в базисе $\mathcal{B}$) матрица A, то форме $-h$ будет отвечать (в том же базисе) матрица $-A$. В силу свойства антисимметричности определителей, для любого $k = 1, \dots, n$, угловой

$(k \times k)$-минор матрицы $-A$ будет отличаться от соответствующего минора Δ_k (построенного по A) наличием знакового множителя $(-1)^k$.

По уже доказанному первому утверждению настоящей теоремы, все угловые миноры матрицы $-A$ положительны. Значит, угловые миноры данной матрицы чередуются по знаку, причем первый из них $\Delta_1 < 0$. $\square$

Пример 38.4. Предлагается следующая типовая з а д а ч а из типового задачника. Квадратичная форма задана своей координатной записью (в некотором базисе), содержащей параметр $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Найти все значения параметра, при которых форма h является знакоопределенной.

Р е ш е н и е. Составим матрицу кв.ф. h:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим угловые миноры $\Delta_1 = \lambda$; $\Delta_2 = -2\lambda - 1$; $\Delta_3 = 5\lambda + 3$ и применим критерий Сильвестра.

Следующие две системы неравенств выражают условия положительной (отрицательной) определенности соответственно:

$$(1)\ \begin{cases} \lambda > 0; \\ -2\lambda - 1 > 0; \\ 5\lambda + 3 > 0; \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} \lambda < 0; \\ -2\lambda - 1 > 0; \\ 5\lambda + 3 < 0. \end{cases}$$

Система (1) имеет пустое множество решений; множеством решений (2) является полуось $(-\infty, -3/5)$.

О т в е т: форма h является о.о. при $\lambda < -3/5$; ни при каких значениях λ она не может быть п.о.

Но "типовое" решение и "типовой" ответ, скорее всего, должны вызвать у читателей настоящего пособия чувство неудоволетворения. (По крайней мере, автор пытался его "воспитать"; см., например, советы и "назидательные рекомендации" в п. 41.3 пособия $[A_1]$.)

В самом деле, что будет при остальных значениях λ? Надо начинать дополнительное и с с л е д о в а н и е.

Нули угловых миноров как функций от λ разбивают числовую ось, которую пробегает этот параметр, на четыре промежутка и три особые точки:

$$\mathbb{R} = (-\infty, -\tfrac{3}{5}) \cup \{-\tfrac{3}{5}\} \cup (-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{1}{2}) \cup \{-\tfrac{1}{2}\} \cup (-\tfrac{1}{2}, 0) \cup \{0\} \cup (0, \infty).$$

Если исключить две особые точки ($-1/2$ и 0), то допустимо применение метода диагонализации по Якоби и получается следующий диагональный вид:

$$h(x) = \Delta_1 y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2 = \lambda y_1^2 - \frac{2\lambda+1}{\lambda} y_2^2 - \frac{5\lambda+3}{2\lambda+1} y_3^2.$$

В третьей особой точке ($\lambda = -3/5$) эта формула сохраняет силу и, превратившись в

$$h(x) = -\frac{3}{5} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2,$$

позволяет заключить, что при этом значении параметра форма h вырождена, имеет ранг 2 и сигнатуру $[0, 2]$, т. е. является о.п.о.

Далее, применяя хорошо знакомый "школьный" метод интервалов, мы выясним распределение знаков функций

$$\mu_1 = \lambda;\ \mu_2 = -\frac{2\lambda+1}{\lambda};\ \mu_3 = -\frac{5\lambda+3}{2\lambda+1}$$

на четырех рассматриваемых интервалах; результаты сводим в таблицу:

Интервал	Знак μ_1	Знак μ_2	Знак μ_3	Сигнатура h
$(-\infty, -\frac{3}{5})$	$-$	$-$	$-$	[0, 3]
$(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2})$	$-$	$-$	$+$	[1, 2]
$(-\frac{1}{2}, 0)$	$-$	$+$	$-$	[1, 2]
$(0, \infty)$	$+$	$-$	$-$	[1, 2]

Получается, что на всех промежутках кв.ф. h невырожденна, на первом — отрицательно определена, на остальных — знакопеременна, с сигнатурой $[1, 2]$.

Остались не рассмотренными два особых значения параметра: $\lambda = 0$ и $\lambda = -1/2$, при которых метод Якоби неприменим. Всегда может выручить метод Лагранжа, однако здесь проще добиться применимости метода Якоби, произведя подходящую *перестановку переменных*.

При $\lambda = 0$ матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

замена переменных $x_1 = z_2$; $x_2 = z_1$; $x_3 = z_3$ равносильна одновременной перестановке в матрице A первого и второго столбцов, а также — первой и второй строк, после чего получается новая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

с новыми угловыми минорами ($\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = -1$ и $\Delta_3 = 3$) и диагональными коэффициентами ($\mu_1 = -2$, $\mu_2 = \frac{1}{2}$ и $\mu_3 = -3$) в записи формы:

$$h(x) = -2z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 - 3z_3^2,$$

что опять-таки дает сигнатуру $[1, 2]$.

Совершенно аналогично рассматривается случай $\lambda = -\frac{1}{2}$, только здесь, чтобы "исправить" второй угловой минор, приходится переставлять первый и третий столбцы, а также — первую и третью строки. Проделайте это самостоятельно, и вы убедитесь, что вновь сигнатура окажется равной $[1, 2]$.

О к о н ч а т е л ь н ы й р е з у л ь т а т исследования: при $\lambda < -3/5$ форма *отрицательно определена*, при $\lambda = -3/5$ *отрицательно полуопределена* (имеет сигнатуру $[0, 2]$), при всех остальных значениях параметра — является *невырожденной и знакопеременной* (сигнатуры $[1, 2]$).

*Замечание 38.5.** Из критерия Сильвестра вытекает, что положительно определенная с.б.ф. $f \in \mathcal{L}_s^2(V)$ удовлетворяет условиям Якоби, в связи с чем для отыскания диагонализирующего (или: f-ортогонального; см. п. 37.3) базиса в пространстве V можно применять алгоритм 37.2 (процесс ортогонализации Грама — Шмидта);

при этом все знаменатели в рекуррентных формулах (37.25) будут положительны.

Всякую п.о. с.б.ф. f можно рассматривать как *скалярное произведение* на V. В этом случае понятие f-ортогональности обладает всеми привычными свойствами геометрической ортогональности. В частности (ср. с замечанием 34.8), *ортогональное дополнение* $W^\perp$ к линейному подпространству $W \leqslant V$ является *прямым дополнением* к W:

$$V = W \oplus W^\perp. \tag{38.27}$$

38.5.* Исследование функций на экстремум и квадратичные формы. В настоящем пункте нам предстоит небольшая экскурсия в область математического анализа. Хотелось бы, прежде всего, чтобы читатели прочувствовали первичную идею дифференциального исчисления. Имя ей — *линеаризация*. Производная изобретена для того, чтобы можно было приближенно заменять функцию на линейную функцию.

Несколько конкретнее: пусть $y = f(x)$ является функцией действительной переменной x, определенной и *достаточно гладкой* в окрестности точки x_0. ("С запасом" будем считать, что $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируема.) Для точек x, близких к x_0 (т. е. таких, что разность $\Delta x = x - x_0$ мала) имеет место представление:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \alpha_1(x_0, \Delta x), \tag{38.28}$$

где функция α_1 является *бесконечно малой более высокого порядка малости*, чем Δx; отбрасывая ее, мы производим линеаризацию: функция $f(x_0 + \Delta x)$ (от переменной Δx; значение x_0 фиксировано, в формулы входит как параметр) приближенно заменяется на линейную (по Δx) функцию.

Формула линеаризации (38.28) может быть уточнена (путем линеаризации своей погрешности); так мы приходим к *формуле Тейлора второго порядка*:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + \alpha_2(x_0, \Delta x), \tag{38.28}$$

где уже α_2 является *бесконечно малой более высокого порядка малости*, чем Δx^2.

Если x_0 является точкой *локального экстремума* для функции $f(x)$, то (согласно *необходимому условию экстремума*) производная

$f'(x_0) = 0$, т. е. точка x_0 является, как говорят, *критической точкой* для функции $f(x)$.

Исследование того, имеется ли на самом деле в критической точке x_0 экстремум, может быть проведено с помощью второй производной, если только она отлична от нуля.

В случае $f''(x_0) > 0$ критическая точка оказывается точкой *минимума*, а в случае $f''(x_0) < 0$ — точкой *максимума*. Это объясняется тем, что в *невырожденной* критической точке ($f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) \neq 0$) поведение правой части формулы

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\Delta x^2 + \alpha_2(x_0, \Delta x), \tag{38.29}$$

при малых Δx, полностью определяется квадратичным по Δx членом (вне зависимости от α_2). Скажем, если $f''(x_0) > 0$, то вблизи x_0 будет выполняться неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Иначе обстоит дело в вырожденном случае ($f''(x_0) = 0$): здесь требуется учет членов третьего и более высоких порядков малости.

В том, наверняка известном вам, аналитическом материале, который бегло (и не очень строго) был изложен выше, линейная алгебра присутствует лишь в зародыше. Скажем, член с первой производной (дифференциал) $f'(x_0)\Delta x$ является *линейной формой*, а второй дифференциал $f''(x_0)\Delta x^2$ — *квадратичной формой*; и все это — в *одномерном* случае (с единственной переменной Δx).

Всё по-настоящему интересное происходит в многомерных пространствах. Рассмотрим достаточно гладкую (скажем, трижды непрерывно дифференцируемую) функцию $y = f(x)$ от n действительных переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенную в окрестности точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Рассматриваются (малые) приращения $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ $(i = 1, \dots, n)$, составляющие вектор $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$, вычисляются все первые и вторые *частные производные* от данной функции в точке x^0:

1) $a_i = f'_{x_i}(x^0)$ $(i = 1, \dots, n)$;

2) $a_{ij} = f''_{x_i x_j}(x^0)$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

Про вторые *смешанные* производные известно, что они (при сделанных предположениях) совпадают:

$$a_{ij} = f''_{x_i x_j}(x^0) = f''_{x_j x_i}(x^0) = a_{ji}. \tag{38.30}$$

Далее записывается *формула Тейлора второго порядка*:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x^0)\Delta x_i + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x^0)\Delta x_i \Delta x_j + \alpha_2(x^0, \Delta x) = \\ = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Delta x_i \Delta x_j + \alpha_2(x^0, \Delta x), \quad (38.31)$$

где фигурируют:

— *линейная форма*

$$L(x^0, \Delta x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta x_i \quad (38.32)$$

от переменных Δx_i, кооэффициентами которой служат первые частные производные данной функции в данной точке (она называется *дифференциалом*, а также *градиентом* функции $f(x)$ в точке x^0);

— *квадратичная форма*

$$H(x^0, \Delta x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Delta x_i \Delta x_j \quad (38.33)$$

от переменных Δx_i, кооэффициентами которой служат вторые частные производные данной функции в данной точке; она определяется *симметрической* [в силу (38.30)] матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, называемой *матрицей Гессе* функции $f(x)$ в точке x^0);

— *остаточный член* α_2, *более высокого порядка малости*, нежели квадраты приращений; его влияние является пренебрежимым, если квадратичная форма (матрица Гессе) *невырожденна*.

Необходимым условием экстремума для функции нескольких переменных является обращение в нуль всех частных производных первого порядка, или, что равносильно, тривиальность линейной формы $L(x^0, \Delta x)$ — градиента. (Точки, в которых обращается в нуль градиент функции, называются *критическими*.)

В критической точке x^0 формула (38.31) приобретает вид:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2}H(x^0, \Delta x) + \alpha_2(x^0, \Delta x). \quad (38.34)$$

Характер *невырожденной* критической точки x^0 (т. е. такой критической точки, в которой ранг матрицы Гессе равен n) полностью определяется *сигнатурой* квадратичной формы $H(x^0, \Delta x)$:

— если форма H *положительно определена*, т. е. для любого вектора Δx значение $H(x^0, \Delta x) > 0$, то при достаточно малых Δx имеет место неравенство $f(x) > f(x^0)$ и, следовательно, x^0 является точкой локального *минимума*;

— если форма H *отрицательно определена*, т. е. для любого вектора Δx значение $H(x^0, \Delta x) < 0$, то при достаточно малых Δx имеет место неравенство $f(x) < f(x^0)$ и, следовательно, x^0 является точкой локального *максимума*;

— если форма H *знакопеременна*, т. е. найдутся такие векторы Δx и $\Delta x'$, что $H(x^0, \Delta x) > 0$, а $H(x^0, \Delta x') < 0$, то в любой окрестности точки x^0 найдутся такие точки x, x', в которых значения функции $f(x) > f(x^0)$ и $f(x') < f(x^0)$, и, следовательно, x^0 *не является точкой экстремума.*

Для различения трех указанных случаев вполне достаточным оказывается *критерий Сильвестра*:

— если все *угловые миноры* матрицы Гессе положительны, то x^0 — точка максимума;

— если их знаки чередуются, начиная с минуса, то x^0 — точка минимума;

— если определитель матрицы Гессе (старший из угловых миноров, называемый еще *гессианом*) отличен от нуля, но распределение знаков угловых миноров не таково, как в двух предыдущих случаях, или некоторые из них равны нулю, то в точке x^0 нет экстремума.

Во всех трех описанных выше случаях влияние α_2 пренебрежимо.

Это перестает быть справедливым в случае *вырожденной* критической точки. Тогда требуются гораздо более тонкие и кропотливые исследования.

§ 39. Примеры решения задач на исследование симметрических билинейных (квадратичных) форм

39.1. Типовой расчет по теме "Диагонализация симметрических билинейных (квадратичных) форм". Ниже будет описано индивидуальное задание (ТР3 — *типовой расчет* № 3) на

применение алгоритмов 36.1, 37.1, 38.1 и будет приведено подробное решение демонстрационного варианта.

В качестве основного поля в данном типовом расчете будет фигурировать поле действительных чисел $P = \mathbb{R}$, хотя первые два этапа вычислений, использующие алгоритмы диагонализации Лагранжа и Якоби, фактически реализуются над $\mathbb{Q}$ и лишь на третьем этапе, свзанном с нормализацией, используется специфика поля $\mathbb{R}$.

Общее условие типового расчета по теме "Диагонализация симметрических билинейных (квадратичных) форм"

В n-мерном линейном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ заданы (своими выражениями в некотором базисе $\mathcal{B}$) соответствующие друг другу симметрическая билинейная и квадратичная формы:

$$f(x, y) = \overline{x}^t A\overline{y};\ \ h(x) = \overline{x}^t A\overline{x}, \tag{39.1}$$

где A — симметрическая $(n \times n)$-матрица.

Требуется:

(1) определить с помощью *алгоритма Лагранжа* 36.1 *диагонализирующий базис* $\mathcal{D}$ для указанных форм и *диагональный вид* (для квадратичной формы):

$$h(x) = \overline{\xi}^t D\overline{\xi}; \tag{39.2}$$

искомый базис $\mathcal{D}$ должен быть задан *матрицей перехода* T от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{D}$, или же — с помощью *формул пересчета координат*:

$$\overline{x} = T\overline{\xi}, \tag{39.3}$$

выражающих старый координатный столбец $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ через новый $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^n$; вычисления следует завершить проверкой:

$$D = T^t AT; \tag{39.4}$$

(2) если в условиях задачи применим *метод Якоби*, то — повторить работу, используя алгоритм 37.1:

$$h(x) = \overline{\chi}^t D'\overline{\chi};\ \ \overline{x} = T'\overline{\chi}; \tag{39.5}$$

сравнить полученные двумя методами диагональные матрицы D и D', а также матрицы перехода T и T';

(3) продолжить вычисления пункта (1) до определения *нормализирующего базиса* $\mathcal{N}$ и *нормального вида* квадратичной формы (см. п. 38.1):

$$h(x) = \overline{\eta}^t N \overline{\eta}; \quad \overline{\xi} = T_1 \overline{\eta}, \tag{39.6}$$

где T_1 — матрица перехода от диагонализирующего базиса к нормализирующему, а $\overline{\eta}$ — координатный столбец, отвечающий вектору x в базисе $\mathcal{N}$; вычислить также матрицу "сквозного" перехода от исходного вида к нормальному, или же предъявить формулы пересчета координат:

$$T_2 = TT_1; \quad \overline{x} = T_2 \overline{\eta}; \tag{39.7}$$

(4) определить *ранг* r, *сигнатуру* $[s, t]$ и *характер* (в плане знакоопределенности) данных форм f и h (см. пп. 38.1 и 38.3).

И с х о д н ы е д а н н ы е
к д е м о н с т р а ц и о н н о м у в а р и а н т у:

$$n = 6;$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е д е м о н с т р а ц и о н н о г о в а р и а н т а

Прежде всего укажем на то, что исходные данные могут быть представлены иначе: в виде координатных формул (39.1). В силу своей компактности, чаще используется вторая из этих записей, имеющая в данном случае вид:

$$h(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_5^2 - \\ - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 4x_1x_5 - 2x_2x_4 + 4x_2x_5 + 4x_3x_4 + 2x_3x_5.$$

Разумеется, надо уметь восстанавливать запись с.б.ф., полярной заданной кв.ф.:

$$f(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_4y_4 + 2x_5y_5 - \\ - 3(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1) + (x_1y_4 + x_4y_1) - 2(x_1y_5 + x_5y_1) - \\ - (x_2y_4 + x_4y_2) + 2(x_2y_5 + x_5y_2) + 2(x_3y_4 + x_4y_3) + (x_3y_5 + x_5y_3).$$

1. Приступаем к диагонализации кв.ф. $h(x)$ методом Лагранжа. В примере 36.1 мы рекомендовали табличный стиль оформления с параллельным показом преобразований квадратичной формы и протоколированием замен переменных, что очень удобно и наглядно. Здесь, однако, мы не сможем последовать своей рекомендации, ввиду недостаточности книжного (и даже альбомного) формата для размещения необходимой в рассматриваемом примере таблицы.

Первое применение первого приема Лагранжа: производим группировку членов, содержащих x_1, выносим за скобку коэффициент при x_1^2, в скобке выделяем полный квадрат, приводим подобные члены и выполняем первую замену переменных:

$$\begin{aligned}
&h(x) = \\
&= 4(x_1^2 - \tfrac{3}{2}x_1x_2 + \tfrac{1}{2}x_1x_3 + \tfrac{1}{2}x_1x_4 - x_1x_5) + \\
&\quad + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_5^2 - 2x_2x_4 + 4x_2x_5 + 4x_3x_4 + 2x_3x_5 = \\
&= 4\big((x_1 - \tfrac{3}{4}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 - \tfrac{1}{2}x_5)^2 - \tfrac{9}{16}x_2^2 - \tfrac{1}{16}x_3^2 - \tfrac{1}{16}x_4^2 - \tfrac{1}{4}x_5^2 + \\
&\quad + \tfrac{3}{8}x_2x_3 + \tfrac{3}{8}x_2x_4 - \tfrac{3}{4}x_2x_5 - \tfrac{1}{8}x_3x_4 + \tfrac{1}{4}x_3x_5 + \tfrac{1}{4}x_4x_5\big) + \\
&\quad + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_5^2 - 2x_2x_4 + 4x_2x_5 + 4x_3x_4 + 2x_3x_5 = \\
&= 4y_1^2 - \tfrac{1}{4}y_2^2 + \tfrac{11}{4}y_3^2 + \tfrac{7}{4}y_4^2 + y_5^2 + \\
&\quad + \tfrac{3}{2}y_2y_3 - \tfrac{1}{2}y_2y_4 + y_2y_5 + \tfrac{7}{2}y_3y_4 + 3y_3y_5 + y_4y_5,
\end{aligned}$$

где

$$y_1 = x_1 - \tfrac{3}{4}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 - \tfrac{1}{2}x_5;\ y_i = x_i\ (i = 2,3,4,5),$$

или, в обратную сторону:

$$x_1 = y_1 + \tfrac{3}{4}y_2 - \tfrac{1}{4}y_3 - \tfrac{1}{4}y_4 + \tfrac{1}{2}y_5;\ x_i = y_i\ (i = 2,3,4,5).$$

Продолжим преобразования, повторно применяя первый прием Лагранжа, на этот раз — к кв.ф. от переменных y_i $(i = 2,3,4,5)$:

$$\begin{aligned}
&h(x) = \\
&= 4y_1^2 - \tfrac{1}{4}(y_2^2 - 6y_2y_3 + 2y_2y_4 - 4y_2y_5) + \\
&\quad + \tfrac{11}{4}y_3^2 + \tfrac{7}{4}y_4^2 + y_5^2 + \tfrac{7}{2}y_3y_4 + 3y_3y_5 + y_4y_5 = \\
&= 4y_1^2 - \tfrac{1}{4}\big((y_2 - 3y_3 + y_4 - 2y_5)^2 - 9y_3^2 - y_4^2 - 4y_5^2 + 6y_3y_4 - \\
&\quad - 12y_3y_5 + 4y_4y_5\big) + \tfrac{11}{4}y_3^2 + \tfrac{7}{4}y_4^2 + y_5^2 + \tfrac{7}{2}y_3y_4 + 3y_3y_5 + y_4y_5 = \\
&= 4z_1^2 - \tfrac{1}{4}z_2^2 + 5z_3^2 + 2z_4^2 + 2z_5^2 + 2z_3z_4 + 6z_3z_5,
\end{aligned}$$

где

$$z_2 = y_2 - 3y_2 + y_4 - 2y_5;\ z_i = y_i\ (i = 1, 3, 4, 5),$$

или, в обратную сторону:

$$y_2 = z_2 + 3z_3 - z_4 + 2z_5;\ y_i = z_i\ (i = 1, 3, 4, 5).$$

На третьем шаге первый прием Лагранжа применяется к кв.ф. от переменных z_i $(i = 3, 4, 5)$:

$$\begin{aligned} &h(x) = \\ &= 4z_1^2 - \tfrac{1}{4}z_2^2 + 5(z_3^2 + \tfrac{2}{5}z_3z_4 + \tfrac{6}{5}z_3z_5) + 2z_4^2 + 2z_5^2 = 4z_1^2 - \tfrac{1}{4}z_2^2 + \\ &\quad + 5\big((z_3 + \tfrac{1}{5}z_4 + \tfrac{3}{5}z_5)^2 - \tfrac{1}{25}z_4^2 - \tfrac{9}{25}z_5^2 - \tfrac{6}{25}z_4z_5\big) + 2z_4^2 + 2z_5^2 = \\ &= 4w_1^2 - \tfrac{1}{4}w_2^2 + 5w_3^2 + \tfrac{9}{5}w_4^2 + \tfrac{1}{5}w_5^2 - \tfrac{6}{5}w_4w_5, \end{aligned}$$

где

$$w_3 = z_3 + \tfrac{1}{5}z_4 + \tfrac{3}{5}z_5;\ w_i = z_i\ (i = 1, 2, 4, 5),$$

или:

$$z_3 = w_3 - \tfrac{1}{5}w_4 - \tfrac{3}{5}w_5;\ z_i = w_i\ (i = 1, 2, 4, 5).$$

Четвертое применение того же приема приведет к окончательному результату:

$$\begin{aligned} &h(x) = \\ &= 4w_1^2 - \tfrac{1}{4}w_2^2 + 5w_3^2 + \tfrac{9}{5}(w_4^2 - \tfrac{2}{3}w_4w_5 + \tfrac{1}{9}w_5^2) = \\ &= 4w_1^2 - \tfrac{1}{4}w_2^2 + 5w_3^2 + \tfrac{9}{5}(w_4 - \tfrac{1}{3}w_5)^2 = 4\xi_1^2 - \tfrac{1}{4}\xi_2^2 + 5\xi_3^2 + \tfrac{9}{5}\xi_4^2, \end{aligned}$$

где

$$\xi_4 = w_3 - \tfrac{1}{3}w_5;\ \xi_i = w_i\ (i = 1, 2, 3, 5),$$

или:

$$w_4 = \xi_4 + \tfrac{1}{3}\xi_5;\ w_i = \xi_i\ (i = 1, 2, 3, 5).$$

Диагональный вид формы h получен:

$$h(x) = 4\xi_1^2 - \tfrac{1}{4}\xi_2^2 + 5\xi_3^2 + \tfrac{9}{5}\xi_4^2;$$

искомая диагональная матрица D такова:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & & & & \\ & -1/4 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & 9/5 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражая "самые старые" переменные x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ через "самые новые", фигурирующие в диагональном виде, получим:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 - \frac{3}{4}\xi_2 + 2\xi_2 - \frac{7}{5}\xi_4 + \frac{1}{3}\xi_5; \\ x_2 = \xi_2 + 3\xi_3 - \frac{8}{5}\xi_4 - \frac{1}{3}\xi_5; \\ x_3 = \xi_3 - \frac{1}{5}\xi_4 - \frac{2}{3}\xi_5; \\ x_4 = \xi_4 + \frac{1}{3}\xi_5; \\ x_5 = \xi_5, \end{cases}$$

или, в матричной записи:

$$\overline{x} = T\overline{\xi},$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 2 & -7/5 & 1/3 \\ 0 & 1 & 3 & -8/5 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является искомой матрицей перехода к диагонализирующему базису $\mathcal{D}$. Обратите внимание на то обстоятельство, что в данной задаче мы обошлись исключительно первым приемом Лагранжа, в связи с чем матрица T оказалась *унитреугольной*.

Выполните также п р о в е р к у: $T^t \cdot A \cdot T = D$.

2. Переходим ко второму пункту расчета. Выясним, применим ли в рассматриваемой задаче метод Якоби. С этой целью вичислим угловые миноры матрицы данной A:

$$\Delta_1 = 4;\ \Delta_2 = -1;\ \Delta_3 = -5;\ \Delta_4 = -9;\ \Delta_5 = 0.$$

В нуль обращается только самый старший из них; стало быть условия Якоби выполнены. Диагональные элементы искомой диагональной матрицы D' определяются по формулам

$$\mu_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 4;\ \mu_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -\frac{1}{4};\ \mu_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 5;\ \mu_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = \frac{9}{5};\ \mu_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta_4} = 0,$$

и, как выясняется, матрица D' совпадает с найденной по методу Лагранжа матрицей D.

Ищем теперь унитреугольную матрицу перехода

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} & t_{25} \\ 0 & 0 & 1 & t_{34} & t_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим и приравняем к нулю все наддиагональные элементы в произведении матриц $A \cdot T'$; придем к следующей с.л.у.:

$$\begin{cases} 4t_{12} = 3; \\ \\ 4t_{13} - 3t_{23} = -1; \\ -3t_{13} + 2t_{23} = 0; \\ \\ 4t_{14} - 3t_{24} + t_{34} = -1; \\ -3t_{14} + 2t_{24} = 1; \\ t_{14} + 3t_{34} = -2; \\ \\ 4t_{15} - 3t_{25} + t_{35} + t_{45} = 2; \\ -3t_{15} + 2t_{25} - t_{45} = -2; \\ t_{15} + 3t_{35} + 2t_{45} = -1; \\ t_{15} - t_{25} + 2t_{35} + 2t_{45} = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему (например, по формулам Крамера, поблочно), приходим к выводу, что матрица перехода T', определяемая по методу Якоби, в точности совпадает с матрицей перхода T, полученной ранее по методу Лагранжа.

(Разумеется, это не случайно: если по Лагранжу получается унитреугольная матрица перехода и при этом выполнены условия Якоби, то алгоритм Якоби выдает тот же диагональный вид и ту же матрицу перехода, что и алгоритм Лагранжа.)

3. Переделаем диагонализирующий базис в нормализирующий. Для этого достаточно:

— "подвести под квадраты" положительные множители, стоящие перед ними в диагональном виде;

— сгруппировать слагаемые по принципу: положительные, затем отрицательные, затем нулевые;

— ввести новые переменные так, чтобы коэффициенты при квадратах равнялись ± 1 или нулю.

Вычисления дают:

$$\begin{aligned} h(x) &= 4\xi_1^2 - \frac{1}{4}\xi_2^2 + 5\xi_3^2 + \frac{9}{5}\xi_4^2 = \\ &= (2\xi_1)^2 + (\sqrt{5}\,\xi_3)^2 + (\frac{3}{\sqrt{5}}\,\xi_4)^2 - (\frac{1}{2}\,\xi_2)^2 = \\ &= \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 - \eta_4^2, \end{aligned}$$

где

$$\eta_1 = 2\xi_1;\ \eta_2 = \sqrt{5}\,\xi_3;\ \eta_3 = \frac{3}{\sqrt{5}}\,\xi_4;\ \eta_4 = \frac{1}{2}\,\xi_2;\ \eta_5 = \xi_5,$$

или, в обратную сторону:

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\eta_1;\ \xi_2 = 2\eta_4;\ \xi_3 = \frac{\sqrt{5}}{5}\,\eta_2;\ \xi_4 = \frac{\sqrt{5}}{3}\,\eta_3;\ \xi_5 = \eta_5.$$

(Еще раз обратим ваше внимание на необходимость "перерегистрации незадействованных переменных".)

Матрица, отвечающая нормальному виду, такова:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можем выписать матрицу перехода от диагонализирующего базиса $\mathcal{D}$ к нормализирующему $\mathcal{N}$:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5}/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а также — матрицу "сквозного" перехода от исходного базиса $\mathcal{B}$ к $\mathcal{N}$:

$$T_2 = T \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 2\sqrt{5}/5 & -7\sqrt{5}/15 & 3/2 & 1/3 \\ 0 & 3\sqrt{5}/5 & -8\sqrt{5}/15 & 2 & -1/3 \\ 0 & \sqrt{5}/5 & -\sqrt{5}/15 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{5}/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Ранг, сигнатура и характер заданных форм могут быть названы сразу после завершения первого этапа (диагонализации):

— ранг с.б.ф. f (кв.ф. h) равен 4, и, следовательно, эти формы вырождены;

— сигнатура равна $[3, 1]$, и, следовательно, формы являются знакопеременными.

В о т в е т можно включить:

— диагональный вид для кв.ф. h и соответствующую ему матрицу D;

— нормальный вид для h и соответствующую матрицу N;

— матрицы перехода T, T_1 и T_2, связывающие исходный базис с диагонализирующим и нормализирующим, а также (в развернутой записи) формулы пересчета координатных столбцов:

$$\overline{x} = T\overline{\xi}; \quad \overline{\xi} = T_1\overline{\eta}; \quad \overline{x} = T_2\overline{\eta};$$

— ранг, индексы инерции (сигнатуру) и заключение о характере форм.

39.2. Пакет Maple-процедур для решения ТР3. В пакете LinearAlgebra не предусмотрено команд, специально ориентированных на работу с симметрическими билинейными (квадратичными) формами. Диагонализация по Лагранжу (Якоби) даже не упоминается. Разумеется, пользователями системы сочинены (и могут быть найдены в сети) недостающие процедуры. Автор настоящего пособия остается верен "сценарной" методике.

Цель не в том, чтобы написать Maple-процедуру приведения с.б.ф. (кв.ф.) к диагональному виду, а в том, чтобы представить пользователям системы алгоритм (открытый для программного совершенствования).

В прил. 1 (п. 3) вашему вниманию предлагается небольшой Maple-пакет Quadro, содержащий три процедуры:

— процедуру Lagr, позволяющую привести любую квадратичную форму к диагональному виду, или, что равносильно, вычислить диагональную матрицу, конгруэнтную данной симметрической квадратной матрице;

— процедуру Jacob, решающую аналогичную задачу в том специальном случае, когда матрица квадратичной формы удовлетворяет условиям Якоби;

— процедуру Signatura, нормализирующую диагональный вид квадратичной формы (над полем $\mathbb{R}$), вычисляющую сигнатуру этой

формы и определяющую ее тип (в плане знакоопределенности/переменности).

Все эти процедуры подробно прокомментированы, носят "сценарный характер", т. е. , помимо возвращаемого окончательного результата, выдают на печать много промежуточных данных, позволяющих отслеживать ход работы алгоритма. (Особенно это важно при изучении метода Лагранжа; процедура Lagr значительно превосходит по сложности две другие.)

В п. 3а указанного приложения приводится пример применения пакета, причем, в отличие от задач ТР3, здесь в методе Лагранжа оказывается необходимым не только первый, но и второй прием (а метод Якоби не срабатывает).

Чтобы полнее продемонстрировать работу процедуры Jacob, мы изменяем один элемент в исходной матрице, после чего условия Якоби оказываются выполненными и процедура вычисляет искомую диагональную матрицу, а также составляет и решает систему линейных уравнений для определения неизвестных элементов унитреугольной матрицы перехода.

§ 40.* Одновременная диагонализация двух симметрических билинейных (квадратичных) форм

40.1. К.л.п. с фиксированной положительно определенной с.б.ф.; ортогональные и ортонормированные базисы. Во многих математических задачах оказывается важным найти *общий* диагонализирующий базис для двух с.б.ф., f и g, заданных на действительном к.л.п. V. Такая задача не всегда разрешима, однако если одна из форм является *положительно определенной*, одновременная диагонализация двух форм оказывается возможной.

Данный материал по своей природе является пограничным между линейной алгеброй и геометрией, и мы к нему обязательно вернемся в геометрических главах курса. В данном параграфе планируется предварительное знакомство с темой, привлекающее лишь необходимый минимум геометрической терминологии.

Прежде всего договоримся считать фиксированной одну из форм, а именно — положительно определенную с.б.ф. $g \in \mathcal{L}_s^2(V)$. Как известно (см. предложение 38.2), п.о. форме соответствует в нормализирующем базисе $\mathcal{B}$ (который всегда существует) *единичная матри-*

ца и следующая координатная запись:

$$g(x,y) = \overline{x}^t \cdot \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n;\ x,y \in V;\ n = \dim(V). \quad (40.1)$$

Мы уже встречались с такого вида с.б.ф. в нескольких примерах, начиная с 34.1 [см. формулу (34.7)]. Форма (40.1) обладает всеми свойствами скалярного произведения (и — в геометрии — так и называется).

Пространство (над полем $\mathbb{R}$) с фиксированной в нем п.о. с.б.ф. (*скалярным произведением*) принято называть *евклидовым*. Обычно у фиксированной формы "отбрасывают имя", т. е. исключают из записи букву g, оставляя для скалярного произведения "скобочное" обозначение (x,y).

Соответствующая квадратичная форма $q(x) = g(x,x)$ (или — просто (x,x), если отбрасывается имя) имеет в нормализирующем базисе координатную запись

$$q(x) = \overline{x}^t \cdot \overline{x} = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2;\ x \in V \quad (40.2)$$

и интерпретируется как квадрат длины (нормы) вектора x (мы уже упоминали об этом в примере 38.2). Длина вектора определяется формулой $|x| = \sqrt{(x,x)}$; она строго положительна для всякого ненулевого x.

В евклидовом пространстве два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Точнее было бы говорить о g-ортогональности (см. замечаниие 34.8), явно указывая ту с.б.ф., которая задает *евклидову геометрию* пространства. Но в ситуации, когда эта форма раз и навсегда зафиксирована, надобность в подобных уточнениях отпадает.

Ортогональное дополнение $W^\perp$ (см. замечания 34.8 и 38.5) к линейному подпространству W в евклидовом пространстве V состоит из векторов, ортогональных всем векторам из W. В силу невырожденности g, ортогональным ко всему пространству V является только нулевой вектор: $V^\perp = O$.

Для любого $W \leqslant V$ имеет место *ортогональное прямое разложение* [см. (38.27)]: $V = W \oplus W^\perp$.

(Независимость подпространств W и $W^\perp$ обосновывается так: если вектор x принадлежит пересечению $W \cap W^\perp$, то он сам себе ортогонален, $g(x,x) = 0$, что, в силу положительной определенности формы g, влечет равенство $x = 0$.)

Базис $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ в евклидовом пространстве называется *ортогональным* базисом (*о.б.*), если

$$(b_i, b_j) = 0;\ 1 \leqslant i < j \leqslant n; \tag{40.3}$$

ср. с замечанием 35.5, согласно которому ортогональность (или, если уточнять имя формы, — g-ортогональность) базиса $\mathcal{B}$ равносильна тому факту, что $\mathcal{B}$ *диагонализирует* форму g.

Нормализирующий базис является частным случаем диагонализирующего, его определение получается, если к соотношениям (40.3) добавить условия

$$(b_i, b_i) = 1;\ i = 1, \dots, n \tag{40.4}$$

нормированности базисных векторов, геометрический смысл которых состоит в следующем: все базисные векторы имеют единичную длину (норму). Используется геометрический термин *ортонормированный* базис (*о.н.б.*), синонимичный (в рассматриваемой ситуации) алгебраическому термину "нормализирующий базис".

Произвольный базис в евклидовом пространстве можно "перестроить" в ортогональный, следуя алгоритму Грама — Шмидта (см. п. 37.2). Затем полученный о.б. можно "пронормировать" (т. е. поделить каждый из базисных векторов на его длину, в результате чего длина нового вектора станет единичной). В итоге мы придем к о.н.б.

Координаты произвольного вектора $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ евклидовова пространства V в *ортогональном* базисе $\mathcal{B}$ могут быть найдены по замечательно простым формулам, называемым *формулами Фурье*:

$$x_j = \frac{(x, b_j)}{(b_j, b_j)};\ j = 1, \dots, n. \tag{40.5}$$

В самом деле, умножая скалярно обе части координатного выражения для вектора x на базисный вектор b_j и пользуясь (40.3), мы приходим к равенству $(x, b_j) = x_j(b_j, b_j)$, в котором $(b_j, b_j) > 0$ (в силу положительной определенности скалярного произведения). В случае ортонормированности $\mathcal{B}$ формулы (40.5) еще упрощаются:

$$x_j = (x, b_j);\ j = 1, \dots, n. \tag{40.5$'$}$$

40.2. Ортогональные матрицы. Любые два базиса в к.л.п. связаны (обратимой) матрицей перехода. Исследуем вопрос о том, как характеризуются матрицы перехода от одного о.н.б. в евклидовом пространстве к другому о.н.б.

Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ — два о.н.б. в n-мерном евклидовом пространстве V, геометрия которого задается п.о. с.б.ф. $g(x,y)=(x,y)$. В каждом из о.н.б. этой форме отвечает единичная матрица; так что, по правилу (34.20) пересчета матриц для билинейных форм, мы будем иметь: $E=U^tEU$, где U — матрица перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}'$. Полученное условие равносильно соотношению

$$U^{-1}=U^t. \tag{40.6}$$

Матрицы, удовлетворяющие (40.6), называются *ортогональными*; их множество обозначается $O(n,\mathbb{R})$; оно, как легко доказать (займитесь этим), представляет собой *подгруппу* в группе $GL(n,\mathbb{R})$ всех обратимых матриц.

Вывод, к которому привело наше исследование, таков:

Предложение 40.1. *Ортогональные матрицы, и только они, являются матрицами перехода между ортонормированными базисами в евклидовом пространстве.* □

Если расписать условие ортогональности $U^tU=E$ как соотношение для столбцов матрицы U, то станет очевидной его равносильность следующему факту: столбцы ортогональной матрицы образуют о.н.б. в арифметическом линейном пространстве $\mathbb{R}^n$, снабженном стандартным скалярным произведением.

Существует только две ортогональных матрицы первого порядка, а именно: (± 1).

Элементарные вычисления показывают, что всякая ортогональная матрица второго порядка $U\in O(2,\mathbb{R})$ имеет один из двух возможных видов:

$$(1)\ U=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\quad (2)\ U=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix};$$

первый вид отвечает оператору поворота евклидовой плоскости на угол α, а второй — зеркальному отражению (относительно первой оси) с последующим поворотом на α.

(С сожалением приходится напоминать читателям, что подробное знакомство с геометрическими приложениями у нас пока откладывается. Может быть, некоторым из вас не терпится окунуться в мир

геометрии уже сейчас? Тогда, помимо наших стандартных учебников (см. список литературы), вам можно порекомендовать заглянуть в захватывающие геометрические сочинения, такие, например, как книга В. В. Прасолова и В. М. Тихомирова "Геометрия" (М.: МЦНМО, 1997), написанная для первокурсников уникального учебного заведения — Независимого Московского университета.)

40.3. Линейный изоморфизм между пространствами л.э. и б.ф., определяемый с помощью невырожденной с.б.ф. Если g есть билинейная форма, заданная на линейном пространстве V, а φ является линейным эндоморфизмом, действующим в V, то формула

$$f_\varphi(x,y) = g(x,\varphi(y));\ x,y \in V \tag{40.7}$$

снова определяет билинейную форму на V (проверка билинейности f_φ — простейшее упражнение).

Так возникает отображение

$$\xi_g : \mathcal{L}(V) \longrightarrow \mathcal{L}^2(V);\ \varphi \mapsto f_\varphi;\ \varphi \in \mathcal{L}(V); \tag{40.8}$$

доказательство его линейности — еще один повод проверить, насколько вы владеете основным понятием нашего курса.

Предложение 40.2. *Если g является невырожденной с.б.ф., то линейный гомоморфизм (40.8) является линейным изоморфизмом.*

Доказательство. Докажем, что ядро $\mathrm{Ker}(\xi_g)$ тривиально. Пусть $\varphi \in \mathrm{Ker}(\xi_g)$, т. е. $f_\varphi = \xi_g(\varphi) = 0$, что равносильно обращению в нуль всех значений $f_\varphi(x,y)$, для любых векторов $x, y \in V$. В соответствии с (40.7), это равносильно утверждению:

$$g(x,\varphi(y)) = 0\ \ (\forall\, x,y \in V), \tag{40.9}$$

или, по определению ортогонального дополнения:

$$\varphi(y) \in V^\perp\ \ (\forall\, y \in V). \tag{40.10}$$

Однако, в силу невырожденности g, имеем: $V^\perp = O$; так что $\varphi(y) = 0$ (для любого y) и, следовательно, $\varphi = o$.

Тривиальность ядра доказана. Значит, ξ_g — мономорфизм, а с учетом равенства размерностей

$$\dim(\mathcal{L}(V)) = \dim(\mathcal{L}^2(V)) = n^2, \tag{40.11}$$

— изоморфизм. $\square$

Выберем произвольный базис $\mathcal{B} = [b_1, \dots, b_n]$ в пространстве V.

Предложение 40.3. *Пусть в базисе $\mathcal{B}$ билинейной форме g отвечает матрица G, а линейному эндоморфизму φ — матрица A. Тогда билинейной форме $f_\varphi = \xi_g(\varphi)$ будет отвечать матрица*

$$F_\varphi = G \cdot A. \tag{40.12}$$

Доказательство сводится к следующей выкладке:

$$[F_\varphi]_{ij} = f_\varphi(b_i, b_j) = g(b_i, \varphi(b_j)) =$$
$$= g(b_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} g(b_i, b_k) = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} a_{kj} = [G \cdot A]_{ij}. \ \square$$

40.4. Самосопряженные л.э. и их матрицы. Выясним, какие линейные эндоморфизмы отвечают при изоморфном соответствии ξ_g симметрическим билинейным формам.

Предложение 40.4. *Если g является невырожденной с.б.ф. на линейном пространстве V, то билинейная форма f_φ является симметрической тогда и только тогда, когда л.э. φ удовлетворяет условию:*

$$g(\varphi(x), y) = g(x, \varphi(y)) \ \ (\forall\, x, y \in V). \tag{40.13}$$

Доказательство практически очевидно: если расписать условие симметричности б.ф. (40.7), то, с учетом предполагаемой симметричности формы g, оно приобретет вид (40.13). $\square$

Проанализируем смысл соотношения (40.13). Обращаясь еще раз к замечанию 34.8, напомним, что задание на линейных пространствах V и W невырожденных симметрических билинейных форм, f и g соответственно, позволяет сопоставить всякому линейному оператору $\varphi : V \to W$ линейный оператор $\varphi^\star : W \to V$, называемый (f, g)-*сопряженным* к φ и связанный с φ соотношением:

$$g(\varphi(x), y) = f(x, \varphi^\star(y)) \ \ (\forall\, x \in V,\, y \in W). \tag{40.14}$$

В данном случае: $W = V$, $g = f$ и рассматривается линейный эндоморфизм $\varphi : V \to V$. Формула (40.14) приобретает вид

$$g(\varphi(x), y) = g(x, \varphi^\star(y)) \ \ (\forall\, x, y \in V) \tag{40.15}$$

и однозначно определяет *g-сопряженный* л.э.

$$\varphi^\star : V \longrightarrow V. \tag{40.16}$$

Это определение можно пересказать несколько подробнее, со ссылкой на известный *изоморфизм Рица* [см. (34.39)] $g^\sharp : V \to V^*$: при любом $y \in V$ левая часть (40.15) является линейной формой на V, для которой, ввиду наличия указанного изоморфизма, существует однозначно определенный вектор, обозначаемый $\varphi^\star(y)$, такой, что (для любого $x \in V$) справедливо равенство (40.15).

Используя понятие g-сопряженного л.э., можно истолковать условие (40.13) как равенство

$$\varphi^\star = \varphi. \tag{40.17}$$

Линейные эндоморфизмы, удовлетворяющие (40.17), можно назвать *g-самосопряженными*. Пересказ в этих терминах предложения 40.4 выглядит следующим образом.

Предложение 40.4′. *Если с.б.ф. g невырожденна, то симметричность билинейной формы f_φ равносильна g-самосопряженности л.э. φ.* □

Таким образом, линейный изморфизм (40.8) сужается до (так же обозначаемого) линейного изоморфизма

$$\xi_g : \mathcal{L}_s(V) \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}^2_s(V) \tag{40.8′}$$

линейного пространства g-самосопряженных линейных эндоморфизмов (мы обозначили его $\mathcal{L}_s(V)$) на линейное пространство симметрических билинейных форм. В частности, оба этих пространства имеют размерность, равную $n(n+1)/2$.

В данном и предыдущем пунктах мы несколько уклонились (в сторону большей общности) от обрисованной в пп. 40.1 и 40.2 "евклидовой" ситуции. Сейчас мы снова возвращаемся к ней, т. е. предполагаем, что с.б.ф. g не только невырожденна, но и положительно определена, причем — зафиксирована. Так что можно отказаться от ее постоянного упоминания в тексте и в обозначениях. Префикс 'g-' будет далее опускаться; так, например, условие самосопряженности (40.13) будет представляться в виде:

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \ \ (\forall\, x, y \in V). \tag{40.13′}$$

Предложение 40.5. *В произвольном о.н.б. евклидова пространства V самосопряженный л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ имеет симметрическую матрицу, совпадающую с матрицей симметрической билинейной формы f_φ, сооответствующей φ.*

Доказательство можно провести с помощью предложений 40.3 и 40.4′: в о.н.б. скалярное произведение (п.о. с.б.ф. g) имеет матрицу $G = E$. Следовательно, формула (40.12) приобретает вид: $F_\varphi = A$, т. е. л.э. φ и соответсвующая б.ф.

$$f_\varphi(x, y) = (x, \varphi(y)) \tag{40.18}$$

имеют одинаковые матрицы. Но самосопряженный л.э. φ соответствует симметрической б.ф. f_φ; так что матрица F_φ и, с ней вместе, матрица A — обязаны быть симметрическими.

Есть, однако, более прямой путь доказательства симметричности матрицы A, с использованием формул Фурье (40.5′):

$$a_{ij} = [\varphi(b_j)]_i \overset{(40.5')}{=\!=} (\varphi(b_j), b_i) \overset{(40.13')}{=\!=}$$
$$= (b_j, \varphi(b_i)) = (\varphi(b_i), b_j) \overset{(40.5')}{=\!=} [\varphi(b_i)]_j = a_{ji}. \ \square$$

Замечание 40.1. Легко убедиться в том, что верно и обратное: если л.э. имеет симметрическую матрицу в *некотором* о.н.б., то он является самосопряженным (и, следовательно, уже в *любом* о.н.б. ему соответствует симметрическая матрица). В других (не ортонормированных) базисах свойство симметричности матрицы самосопряженного оператора, вообще говоря, теряется.

Любопытно проследить за изменением матриц (для с.б.ф. и для соответствующего самосопряженного л.э.) при переходе от одного о.н.б. к другому. Как мы помним из пункта 34.3, при замене базиса (с матрицей перехода T) матрицы для линейных эндоморфизмов и для билинейных форм преобразуются по различным законам: для л.э. матрица A заменяется на *подобную* матрицу $T^{-1}AT$, для б.ф. — на *конгруэнтную матрицу* T^tAT.

Однако эти преобразования будут давать один и тот же результат, если матрица перехода удовлетворяет условию $T^{-1} = T^t$, которое есть не что иное, как условие ортогональности (40.6). В рассматриваемом случае оно выполняется (в силу предложения 40.1), поскольку мы осуществляем переход от одного о.н.б. к другому о.н.б.

40.5. Спектральные свойства самососопряженных линейных эндоморфизмов. Прежде всего отметим важное свойство инвариантных подпространств.

Предложение 40.6. *Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству для самосопряженного л.э. само является инвариантным подпространством.*

Доказательство легко выводится из формулы (40.13′). Пусть линейное подпространство $W \leqslant V$ инвариантно относительно самосопряженного л.э. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, т. е. $\varphi(y) \in W$ для любого $y \in W$. Возьмем любой вектор $x \in W^{\perp}$. Имеем: $(x, y) = 0$ для любого $y \in W$. Следовательно, $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) = 0$, т. е. $\varphi(x) \in W^{\perp}$. $\square$

Рассмотрим теперь собственную сумму для φ, т. е. (см. п. 19.2) — прямую сумму всех собственных подпространств:

$$W' = S(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i, \tag{40.19}$$

где $W_i = S_{\lambda_i}(\varphi)$ — собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_i; собственные значения составляют спектр

$$\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}, \tag{40.20}$$

являющийся подмножеством в поле $\mathbb{R}$. (В принципе, не исключается, что спектр является пустым; тогда подпространство W' считается тривиальным: $W' = O$.)

Как известно, (40.19) является φ-инвариантным подпространством, содержащим все собственные векторы для φ. В случае самосопряженности л.э. собственная сумма оказывается не только прямой, но и *ортогональной*; точнее, справедливо следующее

Предложение 40.7. *Любые два различных собственных подпространства для самосопряженного л.э. ортогональны между собой.*

Доказательство. Пусть векторы x и y принадлежат двум различным собственным подпространствам: $x \in S_{\lambda_i}(\varphi)$, т. е. $\varphi(x) = \lambda_i x$, а $y \in S_{\lambda_j}(\varphi)$, т. е. $\varphi(y) = \lambda_j y$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$. В следующей выкладке используются лишь свойства скалярного произведения и условие самосопряженности (40.13′):

$$\lambda_i(x, y) = (\lambda_i x, , y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) = (x, \lambda_j y) = \lambda_j(x, y).$$

Приходим к равенству $(\lambda_i - \lambda_j)(x, y) = 0$, в котором первый множитель отличен от нуля и, следовательно, второй — равен нулю: $(x, y) = 0$. Значит, векторы x и y ортогональны, что и требовалось. □

Теперь мы подступаем к самому главному. Все утверждения о структуре и свойствах собственной суммы могут оказаться совершенно бесполезными, если не гарантирована ее нетривиальность. Спектр л.э. φ, действующего в действительном линейном пространстве V, может оказаться пустым, что как раз и приводит к тривиальности подпространства $S(\varphi)$.

В случае самосопряженного л.э. непустоту спектра и нетривиальность собственной суммы гарантировать можно. Залогом этого служит следующая

Теорема 40.1. *Самосопряженный л.э. φ, действующий в n-мерном евклидовом пространстве V, имеет непустой спектр. Более того, его характеристический многочлен $h_\varphi(\lambda)$ имеет (с учетом кратностей) ровно n действительных корней.*

Доказательство. Во многих случаях доказательство "действительных" (справедливых над $\mathbb{R}$) фактов требует "выхода в комплексную область", с последующим возвратом в действительную.

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве V действует самосопряженный л.э. φ. Выбрав в V какой-либо о.н.б. $\mathcal{B}$, сопоставим этому эндоморфизму симметрическую (согласно предложению 40.5) матрицу A. Спектр $\sigma(\varphi)$, т. е. множество собственных значений для φ, совпадает (см. предложение 17.3) со спектром $\sigma(A) = \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ матрицы A, состоящим из всех действительных корней характеристического многочлена $h_A(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$.

Согласно общей теории многочленов над $\mathbb{R}$ (см. [A_1, § 43]), этот многочлен имеет (с учетом кратностей) ровно n корней в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, причем *недействительные* корни встречаются попарно: вместе с корнем $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ имеется сопряженный корень $\widetilde{\lambda_0} = \alpha - i\beta$, такой же кратности. (В очередной раз нам приходится прибегать к обозначению *тильдой* операции комплексного сопряжения, поскольку *черта* используется в обозначениях арифметических векторов.)

Докажем, что в данном случае недействительных корней не будет. Множество $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$ всех комплексных характеристических корней для матрицы A непусто (ввиду алгебраической замкнутости поля $\mathbb{C}$) и может рассматриваться как спектр *комплексифицированного* линей-

ного эндоморфизма $\chi = \varphi^{\mathbb{C}}$, действующего в комплексифицированном линейном пространстве $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ [см. п. 27.4; напомним, что это пространство состоит из "комплексных векторов" $z = x + iy$, где $x, y \in V$, на которые комплексифицированный оператор действует по формуле $\chi(z) = \varphi(x) + i\varphi(y)$]. Исходное пространство V вкладывается в свою комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$ в качестве вещественного подпространства; произвольный базис $\mathcal{B}$ пространства V также можно считать расположенным в комплексификации и рассматривать как ее базис над $\mathbb{C}$; в этом (вложенном) базисе оператору χ отвечает та же самая матрица A, которая соответствовала оператору φ в исходном базисе; действие χ на вещественные векторы совпадает с действием φ.

Мы хотим доказать, что $\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \sigma_{\mathbb{R}}(A)$. Предположим противное и рассмотрим произвольный *невещественный элемент*

$$\lambda_0 = \alpha + i\beta \in \sigma_{\mathbb{C}}(\chi) = \sigma_{\mathbb{C}}(A), \tag{40.21}$$

а также произвольный собственный вектор $z \in V^{\mathbb{C}}$, отвечающий собственному значению λ_0. В вещественном базисе $\mathcal{B}$ вектор z изображается арифметическим вектором $\overline{z} \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющим условиям

$$A\,\overline{z} = \lambda_0\,\overline{z}; \quad \overline{z} \neq \overline{0}. \tag{40.22}$$

Собственное подпространство для χ, отвечающее сопряженному собственному значению $\widetilde{\lambda_0}$, состоит из векторов $\widetilde{z} = x - iy$, сопряженных собственным векторам, отвечающим λ_0. (Это объяснялось в п. 27.4, причем даже в большей общности — применительно к корневым векторам.) Применяя операцию комплексного сопряжения (которая, как известно, согласована со всеми алгебраическими действиями) к матричному равенству (40.22) и пользуясь тем, что, в силу вещественности, $\widetilde{A} = A$, мы получим соотношение

$$A\,\widetilde{\overline{z}} = \widetilde{\lambda_0}\,\widetilde{\overline{z}}. \tag{40.23}$$

Транспонируя (40.23) и пользуясь симметричностью A, получаем:

$$\widetilde{\overline{z}}^{\,t} A = \widetilde{\lambda_0}\,\widetilde{\overline{z}}^{\,t}. \tag{40.24}$$

Комплексное сопряжение векторов-столбцов (-строк) осуществляется покомпонентно; в дальнейших рассуждениях нам понадобятся

следующие формулы:

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}; \quad \widetilde{\overline{z}} = \begin{pmatrix} \widetilde{z_1} \\ \widetilde{z_2} \\ \dots \\ \widetilde{z_n} \end{pmatrix}; \quad \widetilde{\overline{z}}^{\,t} = (\,\widetilde{z_1} \quad \widetilde{z_2} \quad \dots \quad \widetilde{z_n}\,);$$

$$\widetilde{\overline{z}}^{\,t} \cdot \overline{z} = \widetilde{z_1} z_1 + \widetilde{z_2} z_2 + \dots + \widetilde{z_n} z_n = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2,$$

последняя сумма является (в силу того, что $\overline{z} \neq \overline{0}$) положительным действительным числом.

В следующей цепочке преобразований, помимо ассоциативного закона для матричного умножения, используются лишь соотношения (40.22) и (40.24):

$$\widetilde{\lambda_0}(\widetilde{\overline{z}}^{\,t} \cdot \overline{z}) = (\widetilde{\lambda_0}\,\widetilde{\overline{z}}^{\,t}) \cdot \overline{z} = (\widetilde{\overline{z}}^{\,t} \cdot A)\overline{z} = \widetilde{\overline{z}}^{\,t}(A \cdot \overline{z}) = \widetilde{\overline{z}}^{\,t} \cdot (\lambda_0\,\overline{z}) = \lambda_0(\widetilde{\overline{z}}^{\,t} \cdot \overline{z}).$$

В итоге получается равенство:

$$(\widetilde{\lambda_0} - \lambda_0) \cdot (\widetilde{\overline{z}}^{\,t} \cdot \overline{z}) = 0. \tag{40.25}$$

Второй сомножитель в левой части (40.25) отличен от нуля (является положительным действительным числом); следовательно, первый сомножитель является нулевым, т. е. $\widetilde{\lambda_0} = \lambda_0$, что противоречит предположению о невещественности λ_0.

Итак, для самосопряженного л.э., действующего в евклидовом пространстве, доказана непустота спектра (и даже более сильное свойство, которое можно выразить следующим образом: сумма m' *алгебраических кратностей* всех собственных значений равна размерности n данного пространства). □

Следующим нашим шагом будет доказательство того, что n' (сумма *геометрических* кратностей) также равняется n.

40.6. Ортогональная диагонализируемость самосопряженного л.э. В данном пункте мы установим, что любой самосопряженный л.э. является диагонализируемым, причем будет получена важнейшая дополнительная информация о возможности специального выбора диагонализирующего базиса, с использованием евклидовой структуры пространства.

Теорема 40.2. *Для любого самосопряженного л.э., действующего в конечномерном евклидовом пространстве, существует ортонормированный диагонализирующий базис.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 40.1, собственная сумма $W' = S(\varphi)$ для самосопряженного л.э. $\varphi \in \mathcal{L}_s(V)$ является нетривиальным линейным подпространством в евклидовом пространстве V.

Докажем равенство $S(\varphi) = V$, что является (см. теорему 21.1) одним из критериев диагонализируемости л.э. Предположив противное (т. е. наличие строгого включения $W' < V$), мы рассмотрим (нетривиальное, в силу сделанного предположения) ортогональное дополнение $W'' = (W')^{\perp} < V$.

Инвариантность относительно φ собственной суммы W' влечет, согласно предложению 40.6, φ-инвариантность W''. Эндоморфизм φ, будучи суженным на W'', остается самомосопряженным. (В самом деле, на векторы из W'' оператор φ'' действует так же, как оператор φ, и, значит, условие самосопряженности (40.13) для φ влечет условие самосопряженности для φ''.)

Вновь применяя теорему 40.1, мы можем утверждать, что собственная сумма для л.э. φ'' опять-таки нетривиальна, т. е. в W'' существует хотя бы один собственный вектор для φ''; он будет собственным и для φ, поскольку, как уже отмечалось, эти два оператора одинаково действуют на W''. Но все собственные для φ векторы содержатся в W', что приводит к противоречию, поскольку $W' \cap W'' = O$.

Итак, $S(\varphi) = V$ и диагонализируемость φ доказана. Диагонализирующий базис может быть построен как объединение

$$\mathcal{B} = [\,\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_s\,] \tag{40.26}$$

произвольных базисов $\mathcal{B}_i$ в собственных подпространствах

$$W_i = S_{\lambda_i}(\varphi); \quad i = 1, \dots s. \tag{40.27}$$

Согласно предложению 40.7, подпространства (40.27) *попарно ортогональны*. Если в каждом из них выбрать о.н.б. $\mathcal{B}'_i$ (например, ортогонализовав $\mathcal{B}_i$ с помощью алгоритма Грама — Шмидта, а затем пронормировав полученные базисные векторы), то, очевидно, во всем пространстве V сформируется ортонормированный диагонализирующий базис

$$\mathcal{B}' = [\,\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2, \dots, \mathcal{B}'_s\,]. \ \square \tag{40.26$'$}$$

40.7. Ортогональная диагонализация (приведение к главным осям) с.б.ф. в евклидовом пространстве. Начав в п. 40.1 с задачи об одновременной диагонализации двух с.б.ф., мы перешли в п. 40.3 к рассмотрению самосопряженных л.э. и доказали в п. 40.6 их диагонализируемость в ортонормированных базисах. Теперь мы возвращаемся к формам.

Теорема 40.3. *Для любой симметрической билинейной формы в конечномерном евклидовом пространстве, существует ортонормированный диагонализирующий базис.*

Доказательство. Пусть $f(x, y)$ является симметрической билинейной формой на конечномерном евклидовом пространстве V.

В соответствии с предложениями 40.2 и 40.4′, с помощью положительно определенной с.б.ф. $g(x, y) = (x, y)$, задающей скалярное произведение на V, форме f однозначно сопоставляется самосопряженный л.э. φ, такой, что $f = f_\varphi = \xi_g(\varphi)$, т. е.

$$f(x, y) = (x, \varphi(y)) \tag{40.29}$$

для любых $x, y \in V$.

По теореме 40.2, для φ существует диагонализирующий о.н.б. $\mathcal{B}$. По предложению 40.5, в любом о.н.б. матрицы с.б.ф. f и соответствующего л.э. φ совпадают. Так что $\mathcal{B}$ будет диагонализирующим базисом и для f. □

Вспоминая о том, что ортонормированный базис в евклидовом пространстве является нормализирующим (и, в частности, диагонализирующим) для п.о. с.б.ф., задающей евклидову структуру, мы можем переформулировать теорему 40.3 так, чтобы геометрия в ней "не звучала".

Теорема 40.3′. *Любые две симметрические билинейные формы на действительном к.л.п., одна из которых положительно определена, имеют общий диагонализирующий базис.* □

По традиции продолжает использоваться несколько иная, пришедшая из классических геометрических трактатов, терминология: ортогональная диагонализация именуется *приведением к главным осям*. Задача о приведении к главным осям симметрической билинейной (квадратичной) формы на евклидовом пространстве может быть описана на матричном языке. Считается заданным исходный

ортонормированный базис $\mathcal{B}$, в котором с.б.ф. f (кв.ф. h) соответствует симметрическая квадратная матрица A. Требуется найти такой о.н.б. $\mathcal{D}$, в котором указанным формам соответствовала бы диагональная матрица D (также подлежащая определению).

Искомый о.н.б. $\mathcal{D}$ однозначно определяется матрицей перехода U от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{D}$. В силу предложения 40.1, эта матрица обязана быть *ортогональной* ($U^{-1} = U^t$).

Таким образом, по симметрической матрице A подлежат определению диагональная матрица D и ортогональная матрица U, такие, что

$$D = U^t A U. \tag{40.30}$$

Ниже будет (схематически) описан алгоритм, решающий поставленную задачу. Как обычно, алгоритм работает в *арифметизированной* (оцифрованной) ситуации, причем оцифровка *евклидова* пространства предполагает и *стандартизацию* скалярного произведения. Последнее означает, что исходный базис должен выбираться ортонормированным; тогда, после отождествлениия V и $\mathbb{R}^n$, скалярное произведение будет определяться стандартной формулой:

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{40.31}$$

А л г о р и т м 40. 1.
Приведение симметрической билинейной (квадратичной) формы в евклидовом пространстве к главным осям

Данная с.б.ф. (или кв.ф.) задается с помощью симметрической $(n \times n)$-матрицы A:

$$f(x, y) = \overline{x}^t A \, \overline{y}; \quad h(x) = \overline{x}^t A \, \overline{x}. \tag{40.32}$$

Подлежат определению:

— ортогональная $(n \times n)$-матрица U, являющаяся матрицей перехода к искомому диагонализирующему о.н.б.,

— диагональная $(n \times n)$-матрица D,

такие, что выполнено соотношение (40.30).

1. С помощью алгоритма 21.1 убеждаемся в (обязательно имеющей место) диагонализируемости матрицы A, при этом уже получается в окончательном виде диагональная матрица D, а также обратимая матрица

$$T = (F_1|F_2|...|F_s), \tag{40.33}$$

содержащая диагонализирующий базис для данной формы; каждая из зон матрицы T представляет базис в соответствующем собственном подпространстве (для л.э., отвечающего A).

2. Каждый из блоков F_i, содержащих более одного столбца, должен быть подвергнут "переработке" с помощью алгоритма Грама — Шмидта 37.2; новые блоки G_i будут иметь попарно ортогональные [в смысле скалярного произведения (40.31)] столбцы (столбцы из разных блоков ортогональны автоматически).

3. Каждый столбец матрицы

$$G = (G_1|G_2|...|G_s) \tag{40.34}$$

должен быть пронормирован, т. е. подвергнут покомпонентному делению на свою длину (норму). В результате будет получена искомая ортогональная матрица U.

4. В ответе может быть представлен диагональный вид данных форм:

$$f(x, y) = \overline{u}^t D\,\overline{v}; \quad h(x) = \overline{u}^t D\,\overline{u}, \tag{40.35}$$

а также выражения старых координат векторов через новые:

$$\overline{x} = U\overline{u}; \quad \overline{y} = U\overline{v}. \tag{40.36}$$

Пример 40.1. В связи с тем, что наше знакомство с евклидовой геометрией является здесь лишь предварительным, мы рассмотрим самый простой пример, не содержащий вычислительных трудностей. Приведем к главным осям квадратичную форму

$$h(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Р е ш е н и е. Форму можно считать заданной на $V = \mathbb{R}^3$; в естественном (ортонормированном) базисе ей соответствует симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

имеющая характеристический многочлен

$$h_A(\lambda) = \lambda^3 - 27\lambda - 54$$

и характеристические корни $\lambda_1 = -3$ (кратности $m_1 = 2$) и $\lambda_2 = 6$ (кратности $m_2 = 1$).

Первое собственное подпространство W_1 двумерно; вычисления приводят к фундаментальной матрице

$$F_1 = (\overline{f_1} \,|\overline{f_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

содержащей некоторый базис в W_1.

Второе собственное подпространство W_2 одномерно; фундаментальная матрица

$$F_2 = (\overline{f_3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

содержит единственный базисный вектор.

Матрица

$$T = (F_1|F_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

содержит диагонализирующий базис для формы h. В этом базисе ей отвечает диагональная матрица

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться в том, что вектор $\overline{f_3}$ ортогонален двум предыдущим, которые между собой не ортогональны:

$$(\overline{f_1}, \overline{f_3}) = (\overline{f_2}, \overline{f_3}) = 0;\ (\overline{f_1}, \overline{f_2}) = -4.$$

Поэтому первые два вектора должны быть ортогонализированы по Граму — Шмидту (см. алгоритм 37.2); третий вектор остается пока неизменным:

$$\overline{g_1} = \overline{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{g_2} = \overline{f_2} - \frac{(\overline{f_2}, \overline{g_1})}{(\overline{g_1}, \overline{g_1})}\,\overline{g_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\overline{g_3} = \overline{f_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$G = (\overline{g_1}\ |\overline{g_2}\ |\overline{g_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & 2 \\ -2 & 2/5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

содержит ортогональный диагонализирующий базис для h (матрица D, здесь и на следующем этапе, не меняется).

Вычислим длины (нормы) векторов-столбцов матрицы G:

$$|\overline{g_1}| = \sqrt{(\overline{g_1}, \overline{g_1})} = \sqrt{5};\ |\overline{g_2}| = \sqrt{(\overline{g_2}, \overline{g_2})} = \frac{3}{\sqrt{5}};\ |\overline{g_3}| = \sqrt{(\overline{g_3}, \overline{g_3})} = 3.$$

Поделив каждй столбец матрицы G на его норму, мы получим ортогональную матрицу

$$U = (\overline{u_1}\ |\overline{u_2}\ |\overline{u_3}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & \dfrac{5}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix},$$

содержащую ортонормированный базис, диагонализирующий форму h.

Для страховки можно проверить выполнение условия ортогональности: $U^tU = E$. Решающей будет проверка справедливости соотношения $D = U^tAU$.

В о т в е т включаем диагональный вид данной формы и формулы пересчета координат:

$$h(x) = -3y_1^2 - 3y_2^2 + 6y_3^2;$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{4}{3\sqrt{5}}y_2 + \frac{2}{3}y_3; \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{3\sqrt{5}}y_2 + \frac{1}{3}y_3; \\ x_3 = \frac{5}{3\sqrt{5}}y_2 + -\frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

40.8. Полулинейные, полуторалинейные и эрмитовы формы. За рамками нашего пособия остается ряд очень интересных разделов линейной алгебры. Один из них нельзя не упомянуть, ввиду его исключительного богатства и первостепенной важности в приложениях. Речь идет о теории форм на комплексных линейных пространствах.

В приближающейся к завершению четвертой главе нашего курса бóльшая часть материала относилась к теории линейных и билинейных форм над полем действительных чисел. И это естественно: линейная алгебра над полем $\mathbb{R}$ является наиболее элементарным и близким к жизни разделом этой науки. Вторым по важности случаем является комплексная линейная алгебра, которая в чем-то даже проще действительной, но, в некоторых отношениях — значительно богаче.

Существенной особенностью поля $\mathbb{C}$ является наличие *автоморфизма сопряжения*: $a + bi = z \mapsto \overline{z} = a - bi$. Эта операция фигурирует в определениях многих "специфически комплексных" понятий и конструкций. Так, наряду с линейными формами $f : V \to \mathbb{C}$, на комплексных пространствах рассматриваются *полулинейные*; отличаются они тем, что второе из условий линейности заменяется на требование $f(\lambda x) = \overline{\lambda}\, x$ (иначе говоря, скалярный множитель из-под знака формы выносится с сопряжением).

Далее, наряду с билинейными, рассматриваются *полуторалинейные* формы $f(x, y)$, являющиеся полулинейными по первому аргументу и линейными по второму. Аналогом свойства симметричности для таких форм служит свойство *эрмитовости*: $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$.

Обычные квадратичные формы, связанные с обычными симметрическими билинейными, в комплексном случае представляют меньший интерес, чем в действительном. (Вспомните, что они приводятся к скелетному виду и единственным их инвариантом служит ранг.)

А вот *эрмитовы* формы, получаемые из эрмитово симметричных полуторалинейных по правилу $h(x) = f(x, x)$, значительно более интересны и, к тому же, "действительнозначны". Для них вводит-

ся понятие сигнутуры, рассматриваются классы знакоопределенных форм.

Комплексные линейные пространства, наделенные *эрмитовыми скалярными произведениями*, т. е. положительно определенными эрмитово симметричными полуторалинейными формами, называются *унитарными пространствами*. (Они является аналогом *евклидовых пространств*, которые, как вы помните, наделяются положительно определенными симметрическими билинейными формами.)

Во всяком конечномерном унитарном пространстве существуют *ортонормированные базисы*, в которых эрмитово скалярное произведение двух векторов задается формулой:

$$(z, w) = \overline{z_1}\, w_1 + \overline{z_2}\, w_2 + ... + \overline{z_n}\, w_n,$$

а квадрат нормы вектора — формулой:

$$|z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2.$$

На этом мы остановимся, переадресовав заинтересованных читателей к более подробным учебникам и богатой специальной литературе. Особо упомянем лишь одну книгу, без преувеличения, составившую эпоху в формировании отечественной школы линейной алгебры и функционального анализа. Она относится к жанру "пособий в задачах". Подобных руководств написано по разным математическим дисциплинам уже довольно много, но та книга, о которой идет речь, была в числе первых: И. М. Глазман, Ю. И. Любич. Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969.

Обратите внимание на аналитическую ориентацию указанного пособия. Сущность линейной алгебры — в ее вездесущности. Она — не для алгебраистов, а — для всех.

Список рекомендуемой литературы

Основной

1. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2000.
2. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.
3. *Проскуряков А. И.* Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984.
4. Сборник задач по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. М.: Физматлит, 2000.

Дополнительный

5. *Аладьев В. З., Богдявичус М. А.* Maple 6: Решение математических, статистических и физико-технических задач. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
6. *Архангельский А. В.* Конечномерные векторные пространства. М.: Изд-во МГУ, 1982.
7. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983.
8. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2001.
9. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
10. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. (Справочная математическая б-ка.) М.: Наука, 1984.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
12. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1998.
13. *Говорухин В., Цибулин В.* Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB, LaTeX: Учеб. курс. СПб.: Питер, 2001.
14. *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.
15. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 1979.
16. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
17. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975.
18. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
19. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра: Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. (Справочная математическая б-ка.) М.: ГИФМЛ, 1962.
20. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.
21. *Самсонов Б. Б., Плохов Е. М., Филоненков А. И.* Компьютерная математика (основание информатики). Ростов-на-Дону: Феникс, 2002.

22. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
23. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
24. *Федорчук В. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд-во МГУ, 1990.
25. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.: Мир, 1970.
26. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
27. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969.
28. *Шеперман Л. Б.* Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. Ч. 1,2. Минск: Вышэйшая школа, 1987.

Список используемых сокращений

а.б.ф. — антисимметрическая б.ф.;
а.м. — аннулирующий многочлен;
БТЖ — большая теорема Жордана;
б.ф. — билинейная форма;
ж.н.ф. — жорданова нормальная форма (квадратной матрицы);
ж.я. — жорданов ящик;
и.м. — инвариантный многочлен;
к.л.п. — конечномерное линейное пространство;
к.н. — канонический неразложимый (элемент в факториальном кольце);
л.э. — линейный эндоморфизм;
м.а.м. — минимальный а.м.;
МТЖ — малая теорема Жордана;
н.жс.я. — нильпотентный ж.я.;
НОД — наибольший общий делитель;
НОДМ — НОД миноров (матрицы);
НОК — наименьшее общее кратное;
НОлД — наибольший общий левый делитель;
НОпД — наибольший общий правый делитель;
о.б. — ортогональный базис;
о.н.о. — ортонормированный базис;
о.о. — отрицательно определенная (с.б.ф.);
о.п.о. — отрицательно полуопределенная (с.б.ф.);
ОТА — основная теорема алгебры;
ОТЛО — основная теорема о линейных отображениях;
п.о. — положительно определенная (с.б.ф.);
п.п.о. — положительно полуопределенная (с.б.ф.);
с.б.ф. — симметрическая б.ф.;
с.в. — система векторов;
с.л.у. — система линейных уравнений;
э.д. — элементарный делитель.

Приложение 1

Коды Maple-процедур

1. Пакет процедур BiS

(к ТР1 "Базисы в подпространствах"; п. 11.3)

```
> restart;with(LinearAlgebra):

> # Задание шести процедур,
# составляющих пакет BiS (Bases in Subspaces).


> BiS[algorithm_1]:=proc(A::Matrix)
# Построение базиса в линейном подпространстве W
# (в арифметическом линейном пространстве V);
# подпространство W задано первым способом
# (как совокупность решений однородной с.л.у. Ax=0).

  local m,n,i,j,k,h,GA,JA,rA,pr,fr,ZA,FA,sys;

m:=RowDimension(A);n:=ColumnDimension(A);
# Размеры данной матрицы; n=dim(V).

ZA:=ZeroMatrix(m,n);
# Нулевая матрица.

if Equal(A,ZA) then
  # Особый случай: A=O и, следовательно, W=V.
  # Выдается естественный базис в виде
  # единичной матрицы.
  FA:=IdentityMatrix(n);

  JA:=Matrix(0,n);rA:=0;
  # Пустая матрица.

  pr:=[];
  # Список номеров главных неизвестных пуст.

  fr:=[seq(k,k=1..n)];
  # Все неизвестные свободны.

else
  GA:=ReducedRowEchelonForm(A);rA:=Rank(GA);
  # Вид Жордана-Гаусса и ранг.

  JA:=SubMatrix(GA,1..rA,1..n);
  # Вид Жордана-Гаусса (с удаленными
  # нулевыми строками) для матрицы A.
```

```
  pr:=[seq(0,k=1..rA)];
  # Заготовка для списка номеров главных неизвестных.

  for i from 1 to rA do
    j:=1;
    while JA[i,j]=0 do
      j:=j+1;
    od;
    pr[i]:=j;
  od;
  # Сформирован список номеров главных неизвестных.

  fr:=[];
  for k from 1 to n do
    if not member(k,pr) then
      fr:=[fr[],k];
    fi;
  od;
  # Сформирован список номеров свободных неизвестных.

  FA:=Matrix(n,n-rA);
  # Заготовка для фундаментальной матрицы,
  # соответствующей с.л.у. Ax=0.
  # Если rA=n, то W=O, и матрица FA пуста.
  # (Выводятся пустой базис и пустой список
  # номеров свободных неизвестных.)

  if rA<n then
    # Неособый случай. Подпространство W решений
    # однородной с.л.у. Ax=0 нетривиально.

    for h from 1 to n-rA do
      FA[ fr[h], h ]:=1;
      for i from 1 to rA do
        FA[ pr[i], h ]:=-GA[ i, fr[h] ];
      od;
    od;
    # Каждой свободной неизвестной
    # соответствует столбец
    # в фундаментальной матрице FA -
    # базисное частное решение
    # однородной с.л.у. Ax=0,
    # получающееся, если эта неизвестная равна 1.

  fi;

fi;

sys:=GenerateEquations(JA,[seq(x[k],k=1..n)]);
# Генерация однородной с.л.у. по матрице JA.
```

```
RETURN(FA,n-rA,JA,sys,fr);
# Возвращаются:
# 1) базис подпространства W, заключенный в
#    фундаментальной матрице FA
#    для однородной с.л.у. Ax=0;
# 2) размерность dim(W)=n-rA,
#    где rA - ранг данной матрицы;
# 3) вид Жордана-Гаусса JA для A
#    (с удаленными нулевыми строками);
# 4) однородная с.л.у. sys, соответствующая JA
#    ("экономно" задающая W);
# 5) список fr номеров свободных неизвестных.

end proc;



> BiS[algorithm_2]:=proc(G::Matrix)
# Построение базиса в линейном подпространстве W,
# заданном вторым способом
# (как линейная оболочка
# столбцов матрицы G).

  local n,s,i,j,k,GG,rG,pr,ZG,BG;

n:=RowDimension(G);s:=ColumnDimension(G);
# Размеры данной матрицы; n=dim(V).

ZG:=ZeroMatrix(n,s);
# Нулевая матрица.

if Equal(G,ZG) then
  # Особый случай: G=O и, следовательно, W=O.
  # Выдается пустой базис.
  BG:=Matrix(n,0);GG:=ZG;rG:=0;pr:=[];

else
  GG:=GaussianElimination(G);rG:=Rank(GG);
  # Ступенчатый вид и ранг для матрицы G.

  pr:=[seq(0,k=1..rG)];
  # Заготовка для списка номеров главных столбцов.

  for i from 1 to rG do
    j:=1;
    while GG[i,j]=0 do
      j:=j+1;
    od;
    pr[i]:=j;
  od;
  # Сформирован список номеров главных столбцов.
```

```
  BG:=SubMatrix(G,1..n,pr);
  # Подматрица матрицы G,
  # составленная из базисных (главных) столбцов.

fi;

RETURN(BG,rG,GG,pr);
# Возвращаются:
# 1) базис подпространства W
#    в виде подматрицы BG из базисных столбцов;
# 2) размерность dim(W), равная
#    рангу rG данной матрицы;
# 3) ступенчатый вид GG данной матрицы;
# 4) список pr номеров главных столбцов.

end proc;



> BiS[algorithm_3]:=proc(G::Matrix)
# Переход от второго способа
# задания линейного подпространства W
# (в виде линейной оболочки столбцов матрицы G)
# к первому (в виде подпространства решений
# однородной с.л.у. Ax=0).

  local n,s,k,A,ZG,sys;

n:=RowDimension(G);s:=ColumnDimension(G);
# Размеры данной матрицы; n=dim(V).

ZG:=ZeroMatrix(n,s);
# Нулевая матрица.

if Equal(G,ZG) then
  # Особый случай: G=O. Выдается единичная матрица,
  # A=E и с.л.у. [x[j]=0; j=1..n]
  # (все неизвестные равны нулю).
  A:=IdentityMatrix(n);

else

  A:=Transpose(algorithm_1(Transpose(G))[1]);
  # Данная матрица G транспонируется,
  # затем, с помощью процедуры algorithm_1,
  # решается соответствующая однородная с.л.у.,
  # причем из возвращаемых данных берется только
  # первый член последовательности -
  # фундаментальная матрица,
  # которая затем транспонируется.

fi;
```

```
sys:=GenerateEquations(A,[seq(x[k],k=1..n)]);
# Однородная с.л.у., задающая данное подпространство.

RETURN(A,sys);
# Возвращаются:
# 1) матрица A, задающая данное подпространство
#    первым способом (как множество решений
#    однородной с.л.у. Ax=0);
# 2) сама эта система (в виде списка уравнений).

end proc;



> BiS[algorithm_4]:=proc(G1::Matrix,G2::Matrix)
# Продолжение базиса в линейном подпространстве W1
# (в пространстве V)
# до базиса в (более широком) подпространстве W2;
# отыскание базиса в некотором
# прямом дополнении к W1 в W2.
# Подпространства W1 и W2 заданы вторым способом
# (как линейные оболочки
# столбцов матриц G1 и G2).

  local n,n1,n2,B1,B2,B3,C1,d1,d2,d3;

n1:=RowDimension(G1);
n2:=RowDimension(G2);

if n1<>n2 then
  ERROR(`Вводимые матрицы должны иметь
         равное количество строк!`);
else
  n:=n1;
fi;
# Контроль совпадения размерностей по строкам
# для данных матриц G1 и G2.
# Размерность всего пространства: dim(V)=n.

B1:=algorithm_2(G1)[1];d1:=ColumnDimension(B1);
B2:=algorithm_2(G2)[1];d2:=ColumnDimension(B2);
B3:=algorithm_2(<<B1|B2>>)[1];d3:=ColumnDimension(B3);
# Процедура algorithm_2 применяется
# к данным матрицам и к их конкатенации.

if d2<>d3 then
  ERROR(`W1 не является подпространством в W2!`);
  # Отработка особого случая,
  # когда подпространство W1, заданное матрицей G1,
  # не содержится в подпространстве W2,
  # заданном матрицей G2.
```

```
elif d1=d2 then
  C1:=Matrix(n,0);
  # Отработка особого случая, когда W1=W2.
  # Прямое дополнение в этом случае является нулевым,
  # базис в нем, содержащийся
  # в матрице C1, - пустым.

else
  C1:=SubMatrix(B3,1..n,d1+1..d3);
  # Основной случай: W1 является
  # подпространством в W2, отличным от W2;
  # базис в прямом дополнении составляется
  # из добавочных векторов, расположенных
  # в "правой зоне" матрицы B3.

fi;

RETURN(C1,d2-d1,B3,[B1,d1],[B2,d2]);
# Возвращаются:
# 1) матрица C1, содержащая "добавочные" векторы
#    (базис в некотором прямом дополнении к W1 в W2);
# 2) размерность d2-d1 этого прямого дополнения;
# 3) матрица B3, содержащая базис в W2,
#    продолжающий некоторый базис в W1;
# 4) список [B1,d1], содержащий матрицу B1,
#    столбцы которой образуют исходный базис в W1
#    и размерность d1=dim(W1).
# 5) список [B2,d2], содержащий матрицу B2,
#    столбцы которой образуют исходный базис в W2
#    и размерность d2=dim(W2).

end proc;



> BiS[algorithm_5]:=proc(G1::Matrix,G2::Matrix)
# Построение базиса в сумме W3=W1+W2
# линейных подпространств W1,W2 в пространстве V.
# Подпространства W1,W2 заданы вторым способом
# (как линейные оболочки столбцов матриц G1 и G2).
# В подпространстве W3 находятся два базиса:
# базис, записанный в матрице B3[1],
# продолжает базис B1 в W1;
# базис, записанный в матрице B3[2],
# продолжает базис B2 в W2.
# Находятся также некоторые прямые дополнения
# к каждому из подпространств-слагаемых в их сумме
# (базисы для прямых дополнений
# записываются в матрицы C1,C2).
# Дополнительно определяется размерность d0
# пересечения W0 данных подпространств.
```

```
  local n,n1,n2,B1,B2,B3,C1,C2,d1,d2,d3,d0;

n1:=RowDimension(G1); n2:=RowDimension(G2);

if n1<>n2 then
  ERROR(`Вводимые матрицы должны иметь
         равное количество строк!`);
else
  n:=n1;
fi;
# Контроль совпадения размерностей по строкам
# для данных матриц G1 и G2.
# Размерность всего пространства: dim(V)=n.

B1:=algorithm_2(G1)[1];d1:=ColumnDimension(B1);
B2:=algorithm_2(G2)[1];d2:=ColumnDimension(B2);
# Процедура algorithm_2 применяется
# к каждой из данных матриц.
# Определены (и записаны в матрицы B1 и B2)
# базисы в W1 и W2;
# вычислены размерности d1 и d2.

B3[1]:=algorithm_2(<<B1|B2>>)[1];
d3:=ColumnDimension(B3[1]);
# Процедура algorithm_2 применяется
# к конкатенации матриц B1 и B2.
# Определен (и записан в матрицу B3[1]),
# базис в сумме W3, продолжающий базис в W1,
# содержащийся в матрице B1.

d0:=d1+d2-d3;
# Размерность пересечения данных подпространств.

B3[2]:=algorithm_2(<<B2|B1>>)[1];
# Процедура algorithm_2 применяется
# к конкатенации матриц B2 и B1
# (в противоположном порядке).
# Определен (и записан в матрицу B3[2]),
# другой базис в сумме W3,
# продолжающий базис в W2,
# содержащийся в матрице B2.

if d1=d3 then

  C1:=Matrix(n,0);
  # Отработка особого случая: d1=d3
  # (и, следовательно, W1=W3; W2<=W1;
  # прямое дополнение к W1 в W3 тривиально;
  # матрица C1 пуста).

else
```

```
  C1:=SubMatrix(B3[1],1..n,d1+1..d3);
  # Неособый случай: d1<d3.
  # Определяется прямое дополнение к W1 в W3
  # (как линейная оболочка некоторого
  # базиса, записанного в матрицу C1).

fi;

if d2=d3 then

  C2:=Matrix(n,0);
  # Отработка особого случая: d2=d3
  # (и, следовательно, W2=W3; W1<=W2;
  # прямое дополнение к W2 в W3 тривиально;
  # матрица C2 пуста).

else

  C2:=SubMatrix(B3[2],1..n,d2+1..d3);
  # Неособый случай: d2<d3.
  # Определяется прямое дополнение к W2 в W3
  # (как линейная оболочка некоторого
  # базиса, записанного в матрицу C2).

fi;

RETURN(B3[1],d3,[B1,d1,C1],[B2,d2,C2],d0);
# Возвращаются:
# 1) матрица B3[1], содержащая базис
#    в сумме W3 данных подпространств,
#    продолжающий (ранее определенный) базис в W1;
# 2) размерность d3=dim(W3) суммы данных подпространств;
# 3) список, содержащий матрицу B1,
#    столбцы которой составляют базис в W1,
#    размерность d1=dim(W1)
#    и матрицу C1, содержащую базис
#    в некотором прямом дополнении к W1 в W3;
# 4) аналогичный список [B2,d2,C2]
#    для второго слагаемого;
# 5) размерность d0 пересечения W0 данных подпространств.

end proc;



> BiS[algorithm_6]:=proc(A1::Matrix,A2::Matrix)
# Построение базиса в пересечении W0
# линейных подпространств W1 и W2 в пространстве V.
# Подпространства W1 и W2 заданы первым способом
# (как нуль-пространства матриц A1 и A2).
# Базис в подпространстве W0 записывается в матрицу B0.
# Кроме того, для каждого из подпространств W1, W2, W0
```

```
# находится его размерность и
# "экономное" представление первым способом
# (с помощью матриц JA1,JA2, JA0 соответственно).
# Дополнительно определяется размерность d3
# суммы W3=W1+W2.

  local n,n1,n2,alg,JA1,JA2,A0,JA0,B0,d1,d2,d3,d0,sys0;

n1:=ColumnDimension(A1); n2:=ColumnDimension(A2);

if n1<>n2 then
  ERROR(`Вводимые матрицы должны иметь
         равное количество столбцов!`);
else
  n:=n1;
fi;
# Контроль совпадения размерностей по столбцам
# для данных матриц A1 и A2.
# Размерность всего пространства: dim(V)=n.

JA1:=algorithm_1(A1)[3];d1:=n-RowDimension(JA1);
JA2:=algorithm_1(A2)[3];d2:=n-RowDimension(JA2);
# Процедура algorithm_1 применяется
# к каждой из данных матриц.
# Определены (и записаны в матрицы JA1 и JA2)
# виды Жордана – Гаусса для матриц A1 и A2.
# Определены "экономные" задания первым способом
# (с помощью матриц JA1 и JA2)
# для данных подпространств W1 и W2,
# а также размерности d1=dim(W1) и d2=dim(W2).

A0:=<JA1,JA2>;
# Вертикальная конкатенация матриц, задающих W1 и W2.
# Пересечение W0 задается (первым способом)
# как нуль-пространство матрицы A0.

alg:=algorithm_1(A0);
B0:=alg[1];d0:=alg[2];JA0:=alg[3];sys0:=alg[4];
# Процедура algorithm_1 применяется
# к матрице A0.
# Определяется (и заносится в матрицу B0),
# некоторый базис в пересечении W0;
# вычисляется размерность d0=dim(W0);
# находится матрица JA0, с помощью которой
# осуществляется "экономное" задание
# для W0 (первым способом).
# Это задание представляется также
# в виде однородной с.л.у. sys0.

d3:=d1+d2-d0;
# Размерность суммы W3=W1+W2.
```

```
RETURN(B0,d0,JA0,sys0,[JA1,d1],[JA2,d2],d3);
# Возвращаются:
# 1) матрица B0, содержащая базис в пересечении W0
#    данных подпространств W1 и W2;
# 2) размерность d0=dim(W0);
# 3) матрица JA0 полного ранга по строкам,
#     нуль-пространством которой является W0;
# 4) соответствующая однородная с.л.у. sys0
#    вида JA0 x= 0;
# 5) список, содержащий матрицу JA1
#    полного ранга по строкам,
#    нуль-пространством которой является W1,
#    и размерность d1=dim(W1);
# 6) аналогичный список [JA2,d2] для W2;
# 7) размерность суммы d3=dim(W3).

end proc;



> save BiS,"F:/MaplePackages/BiS.m";
# Сохранение пакета BiS.
```

2. Процедура-сценарий jrd

(к ТР2 "Жорданов базис для линейного эндоморфизма"; п. 28.5)

```
> restart;with(LinearAlgebra):
interface(rtablesize=infinity):
# Выбран интерфейс с возможностью вывода
# матриц произвольного размера.

> # MAPLE-сценарий:
 # ПРИВЕДЕНИЕ К (ЧАСТИЧНОЙ) ЖОРДАНОВОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ
 # МАТРИЦЫ НАД ПОЛЕМ Q (ИЛИ НАД ПОЛЕМ Q[i])

> jrd:=proc(A::'Matrix'(square))

# Процедура применяется к квадратной матрице A.
# Работоспособна в случае рациональности ее элементов.
# (Отредактировав одну строку, можно получить версию,
# работающую над полем Q[i] гауссовых рациональных чисел.)

  local n,E,i,j,k,u,v,
        h,hf,hroots,s,lambda,m,ms,
        exist_jbas,
        B,BGJ,d,Nbas,F,l,
        p,q,DIAGR,RIS,
        jlist,num,
        JS,J,
        M,MG,blist,H,G,
        GS,GSE,GSEG,
        T,dt,str;

str:=`------------------------------------------------------------
----------------------`;

# Процедура названа "сценарием",
# поскольку по ходу работы
# на печать выводятся все существенные
# промежуточные результаты.

# В качестве "логического разделителя" этапов
# используется строка из дефисов.

# Размер матрицы.
n:=RowDimension(A);
print('n'=n);

# Единичная матрица.
E:=IdentityMatrix(n);
```

```
# Булевозначная переменная - индикатор
# наличия/отсутствия полного жорданова базиса.
exist_jbas:=true;

# Характеристический многочлен.
h:=CharacteristicPolynomial(A,lambda);

print('h(lambda)'=h);

# Характеристические корни (собственные значения)
# и их алгебраические кратности;
# разложение характеристического многочлена
# на неприводимые множители.
hroots:=roots(h);hf:=factor(h);

# ВНИМАНИЕ! Для перехода к работе в поле Q[i]
# строку выше можно "закомментировать"
# и заменить на "раскомментированную" строку ниже:

# hroots:=roots(h,I);hf:=factor(h,I));

print('h(lambda)'=hf);

# Отработка исключительной ситуации:
# в случае пустоты спектра выдается сообщение об ошибке.

if hroots=[] then
  ERROR(`Матрица имеет пустой спектр!`);
fi;

# Мощность спектра.
s:=nops(hroots);

print('s'=s);

# Формирование массивов собственных значений
# и соответствующих алгебраических кратностей.
lambda:=array(1..s);m:=array(1..s);
for i from 1 to s do
  lambda[i]:=hroots[i][1];m[i]:=hroots[i][2];
  print(evaln(lambda[i])=lambda[i],evaln(m[i])=m[i]);
od;

print(str);

# Сумма алгебраических кратностей собственных значений.
ms:=sum('m[j]',j=1..s);

print(evaln(ms)=ms);

# Тест на существование полного жорданова базиса.
```

```
if ms<n then
  exist_jbas:=false;
  print(`Не существует полного жорданова базиса,
         только - частичный.`);
else
  print(`Полный жорданов базис существует.`);
fi;

print(str);

# Заготовки для рабочих массивов B,BGJ,d,Nbas,F,l.
# Элементы всех этих массивов (кроме последнего)
# сами являются индексированными переменными.

# Массив степеней матриц B[i]=A-lambda[i]*E:
# B[i][k]=(A-lambda[i]*E)^k,
# где i - номер собственного значения (i=1,...,s),
# k - номер итерации (0<=k<=m[i]).
B:=array(1..s);

# Те же матрицы, приведенные к виду Жордана-Гаусса.
BGJ:=array(1..s);

# Массив итерированных дефектов: d[i][k]=dfc(B[i][k]);
d:=array(1..s);

# Массив базисов в итерированных ядрах:
# множество Nbas[i][k] должно содержать
# необработанный базис
# в итерированном ядре N[i][k]=Ker(B[i][k]).
Nbas:=array(1..s);

# Массив фундаментальных матриц:
# матрица F[i][k] формируется
# из векторов множества Nbas[i][k].
F:=array(1..s);

# Массив показателей стабилизации:
# l[i] - показатель стабилизации для матрицы B[i].
l:=array(1..s);

# Заполнение массивов B,BGJ,d,Nbas,F,l.

for i from 1 to s do
  # Начальные значения для
  # индексированных переменных - элементов массивов B,d.
  B[i][0]:=E:d[i][0]:=0:

  # Начало вычисления показателей стабилизации.
  l[i]:=1:
```

```
  for k from 1 to m[i] do
    # Число итераций не превышает
    # алгебраической кратности m[i].

    # Вычисление итераций (степеней)
    # матрицы B[i]=B[i][1]=A-lambda[i]*E.
    B[i][k]:=B[i][k-1].(A-lambda[i]*E):

    # Приведение матриц B[i][k] к виду Жордана-Гаусса.
    BGJ[i][k]:=ReducedRowEchelonForm(B[i][k]):

    # Отыскание базиса в ядре N[i][k].
    # (Функция NullSpace возвращает
    # базис в этом ядре - как множество,
    # которое в два этапа конвертируется
    # сначала - в список,
    # затем - в фундаментальную матрицу.)

    Nbas[i][k]:=NullSpace(BGJ[i][k]):
    F[i][k]:=convert(convert(Nbas[i][k],list),Matrix):

    # Вычисление итерированных дефектов.
    d[i][k]:=n-Rank(B[i][k]);

    if d[i][k]<m[i] then
      # Итерации продолжаются до тех пор, пока
      # итерированный дефект остается меньшим,
      # чем алгебраическая кратность собственного значения.
      l[i]:=l[i]+1:

    else
      break;
      # Выход из цикла по достижении стабилизации.

    fi;

  od:

  # Показатель стабилизации определен
  # и выдается на печать.
  print(evaln(l[i])=l[i]);

  # Печать промежуточных результатов
  # и, в частности, - необработанных базисов
  # в итерированных ядрах (в виде матриц F[i][k]).
  for k from 1 to l[i] do
    print(evaln(B[i][k])=B[i][k],evaln(BGJ[i][k])=BGJ[i][k]);
    print(evaln(F[i][k])=F[i][k],evaln(d[i][k])=d[i][k]);
    print(str);
  od;
  print(str);
od:
```

```
# Заготовка для массива
# приращений итерированных дефектов
# (длин строк в столбчатой диаграмме).

# Натуральное число p[i][k]
# имеет смысл размерности
# прямого дополнения C[i][k]
# к (k-1)-му ядру N[i][k-1]
# в k-м ядре N[i][k].
p:=array(1..s):

# Заполнение и печать массива p.

for i from 1 to s do
  for k from 1 to l[i] do
    p[i][k]:=d[i][k]-d[i][k-1]:
    print(evaln(p[i][k])=p[i][k]);
  od:
  print(str);
od:

print(str);

# Заготовка для массива
# абсолютных вторых приращений
# итерированных дефектов
# (длин ступенек в столбчатой диаграмме).

# Неотрицательное целое число q[i][k]
# имеет смысл размерности
# прямого дополнения D[i][k]
# в подпространстве C[i][k]
# к образу B[i](C[i][k+1])
# подпространства C[i][k+1]
# при отображении, заданном матрицей B[i].
q:=array(1..s):

# Заполнение массива q.

for i from 1 to s do
  # Длина верхней ступеньки,
  # т. е. dim(D[i][l[i]]).
  q[i][l[i]]:=p[i][l[i]]:

  # Длины остальных ступенек.
  # т. е. dim(D[i][k]), где 1<=k<l[i].
  for k from 1 to l[i]-1 do
    q[i][k]:=p[i][k]-p[i][k+1]:
  od:

od:
```

```
# Печать массива q.
for i from 1 to s do
  for k from 1 to l[i] do
    print(evaln(q[i][k])=q[i][k]);
  od;

  print(str);
od;

print(str);

# Задание массива DIAGR столбчатых диаграмм
# для матриц B[i].
# Элементами этого массива являются
# матрицы DIAGR[i] {i=1,...,s).

# Для их визуализации используются
# матрицы RIS[i] с противоположным порядком строк.
# (Это связано с тем, что строки в матрице
# нумеруются сверху вниз,
# а в столбчатой диаграмме - наоборот.)

# Сначала диаграммы даются без нумерации векторов
# (заполняются звездочками),
# а затем - с нумерацией по принципу:
# столбцы нумеруются слева направо,
# векторы в столбцах - снизу вверх.
DIAGR:=array(1..s):RIS:=array(1..s);

# Цикл по номеру собственного значения.
for i from 1 to s do

  # Задание (заполненных "пустыми словами" ``)
  # матриц DIAGR[i],
  # каждая из которых содержит
  # l[i] (= показатель стабилизации) строк
  # и d[i][1] (= первый дефект) столбцов.
  DIAGR[i]:=Matrix(l[i],d[i][1],fill=``):

  # Заполнение звездочками тех позиций в DIAGR[i],
  # которые относятся к столбчатой диаграмме.

  # Цикл по номеру строки в матрице DIAGR[i].
  for k from 1 to l[i] do

    # Цикл по номеру столбца в DIAGR[i].
    for j from 1 to p[i][k] do
      # Звездочка в j-м столбце k-й строки матрицы
      # проставляется, если 1<=j<=p[i][k].
      DIAGR[i][k,j]:=`*`;
    od:
  od:
```

```
  # Задание матриц RIS[i]
  # (имеющих лишь иллюстративное назначение).
  # ВНИМАНИЕ! Строки в матрицах RIS[i] и DIAGR[i]
  # нумеруются в противоположном направлении:
  # k-я строка в матрице RIS[i] соответствует
  # (l[i]-k+1)-й строке в матрице DIAGR[i].
  RIS[i]:=Matrix(l[i],d[i][1]):
  for j from 1 to d[i][1] do
    for k from 1 to l[i] do
      RIS[i][k,j]:=DIAGR[i][l[i]-k+1,j];
    od;
  od;

od:

# Печать "полуфабрикатов" столбчатых диаграмм.
for i from 1 to s do
  print(evaln(DIAGR[i])=RIS[i]);
od;
print(str);

# Сквозная нумерация ячеек столбчатых диаграмм.
num:=0:

# Цикл по номеру собственного значения.
for i from 1 to s do

  # Обновление матрицы DIAGR[i].

  # Цикл по номеру столбца в DIAGR[i].
  for j from 1 to d[i][1] do

    # Цикл по номеру строки в DIAGR[i].
    for k from 1 to l[i] do #to 1 by -1 do

      if DIAGR[i][k,j]=`*` then
        # Каждая позиция, занятая *,
        # увеличивает номер num на единицу.
        # (Именно в эту позицию проставляется
        # полученное значение num.)
        num:=num+1:
        DIAGR[i][k,j]:=num:

      else
        break:
      fi:

    od:

  od:
```

```
  # Обновление матрицы RIS[i].
  for j from 1 to d[i][1] do
    for k from 1 to l[i] do
      RIS[i][k,j]:=DIAGR[i][l[i]-k+1,j];
    od;
  od;
od:

# Печать обновленных вариантов столбчатых диаграмм
# (со сквозной нумерацией ячеек).
for i from 1 to s do
  print(evaln(DIAGR[i])=RIS[i]);
od;
print(str);print(str);

# Формирование списка jlist
# пар вида [lambda[i],k],
# где lambda[i] - собственное значение,
# k - высота столбца
# в соответствующей столбчатой диаграмме,
# в порядке убывания высот
# (т. е. продвигаясь слева направо по диаграмме).

# Изначально список jlist пуст.
jlist:=[];

# Цикл по номеру собственного значения.
for i from 1 to s do

  # Цикл по номеру столбца в DIAGR[i].
  for k from l[i] to 1 by -1 do

    # Если зона столбцов высоты k не пуста,
    # то к списку jlist добавляется
    # q[i][k] одинаковых пар [lambda[i],k].
    if q[i][k]<>0 then
      for j from 1 to q[i][k] do
        jlist:=[jlist[],[lambda[i],k]];
      od:
    fi:
  od:

od:

# Формирование матрицы JS -
# жордановой нормальной формы матрицы A (порядка n)
# или - частичного жорданова блока (порядка ms) -
# как блочно-диагональной матрицы,
# с блоками - жордановыми ящиками,
# причем каждой паре [lambda[i],k]
# отвечает жорданов ящик J[k](lambda[i])
# k-го порядка с lambda[i] на диагонали.
```

```
JS:=JordanBlockMatrix(jlist);
print(evaln(JS)=JS);
print(str);print(str);

# Задание рабочих массивов H,G,M.
# Каждый элемент каждого из этих массивов
# сам является индексированной переменной,
# причем при каждом значении индекса k
# эта переменная является матрицей.

# Заготовка для массива матриц H[i][k], содержащих
# базисы в подпространствах D[i][k],
# отвечающих ступенькам столбчатой диаграммы.
H:=array(1..s);

# Заготовка для массива матриц G[i][k], содержащих
# базисы в подпространствах C[i][k],
# отвечающих строкам столбчатой диаграммы.
G:=array(1..s);

# Заготовка для массива вспомогательных
# матриц-конкатенаций M[i][k].
M:=array(1..s);

# Те же матрицы, приведенные к ступенчатому виду.
MG:=array(1..s);

# Цикл по номеру собственного значения.
for i from 1 to s do

  if l[i]=1 then
    # Отработка случая, когда
    # показатель стабилизации l[i]=1
    # (т. е. столбчатая диаграмма является "одноэтажной"
    # и, следовательно, соответствующее
    # корневое подпространство
    # совпадает с собственным).

    # Здесь обработка базиса, содержащегося
    # в фундаментальной матрице F[i][1], не требуется.
    H[i][1]:=F[i][1];
    G[i][1]:=H[i][1];

    print(evaln(H[i][1])=H[i][l[i]],evaln(G[i][1])=G[i][l[i]]);
    print(str);

  else
    # Случай, когда число этажей l[i]>1.

    for k from l[i] to 1 by -1 do
    # Спуск по этажам столбчатой диаграммы.
```

```
# Рассматриваются три случая расположения этажа:
# 1) верхний этаж;
# 2) промежуточные этажи;
# 3) нижний этаж.

if k:=l[i] then
  # Определение векторов верхнего этажа
  # столбчатой диаграммы.

  # Формирование матрицы-конкатенации,
  # содержащей базисы
  # в предстабильном и в стабильном ядрах,
  # приведение этой матрицы
  # к ступенчатому виду
  # и печать результатов.
  M[i][k]:=<F[i][k-1]|F[i][k]>;
  MG[i][k]:=GaussianElimination(M[i][k]);

  print(evaln(M[i][k])=M[i][k],evaln(MG[i][k])=MG[i][k]);

  # Формирование списка blist
  # номеров добавочных базисных векторов,
  # из правой зоны матрицы M[i][k],
  # дополняющих базис в предстабильном ядре N[i][l[i]-1]
  # до базиса в стабильном ядре N[i][l[i]]
  # (корневом подпространстве, отвечающем lambda[i]).

  # Изначально этот список пуст.
  blist:=[];

  # Номер первого столбца во второй зоне
  # матрицы-конкатенации M[i][k] (где k=l[i]).
  v:=d[i][k-1]+1;

  # Цикл по номеру строки в ступенчатой матрице MG[i][k],
  # начиная с первой строки, являющейся
  # чисто нулевой в первой (левой) зоне конкатенации,
  # и заканчивая последней ненулевой строкой
  # во всей матрице.
  for u from d[i][k-1]+1 to d[i][k] do

    # Просматриваем (слева направо) строку с номером u,
    # пока не встретим первый ненулевой элемент.
    # (При этом работает счетчик столбцов.)
    while MG[i][k][u,v]=0 do
      v:=v+1;
    od;
    # Встретив в строке с номером u,
    # в столбце с номером v
    # первый ненулевой элемент,
    # мы добавляем номер v к списку blist
    # и переходим к следующей строке.
```

```
      blist:=[blist[],v];
    od;

    # Формируем матрицу H[i][k], отвечающую
    # ступеньке уровня k=l[i]
    # (т. е. содержащую базис в D[i][k])
    # как подматрицу в исходной конкатенации M[i][k],
    # содержащую столбцы, номера которых
    # входят в список blist.
    # Формируем также матрицу G[i][k], отвечающую
    # всему рассматриваемому уровню
    # (т. е. содержащую базис в C[i][k]).

    # (Для верхнего уровня эти матрицы совпадают.)
    H[i][k]:=SubMatrix(M[i][k],1..n,blist);
    G[i][k]:=H[i][k];

    # Выдаем на печать полученные результаты.
    print(evaln(H[i][k])=H[i][k],evaln(G[i][k])=G[i][k]);
    print(str);

  elif k<l[i] and k>1 then
    # Определение векторов на этажах,
    # начиная с предпоследнего и заканчивая вторым.

    if q[i][k]=0 then
      # Отработка случая, когда на k-м уровне
      # отсутствует ступенька.
      # В этом случае матрица H[i][k],
      # отвечающая ступеньке, - пуста,
      # а матрица G[i][k], отвечающая всему уровню,
      # находится умножением слева на матрицу B[i]
      # матрицы G[i][k+1], отвечающей
      # предыдущему (расположенному выше) уровню.
      G[i][k]:=B[i][1].G[i][k+1];

      # Выдаем на печать полученные результаты.
      print(evaln(H[i][k])=[],evaln(G[i][k])=G[i][k]);
      print(str);

    else
      # Случай, когда на k-м уровне есть ступенька.
      # Формирование "тройной" конкатенации M[i][k]:
      # в левой зоне - матрица, содержащая
      # (необработанный) базис в ядре N[i][k-1],
      # в центральной зоне - матрица, содержащая
      # образ B[i].G[i][k+1] базиса
      # в подпространстве C[i][k+1]
      # при отображении, заданном матрицей B[i],
      # в правой зоне - матрица, содержащая
      # (необработанный) базис в ядре N[i]{k].
      M[i][k]:=<F[i][k-1]|B[i][1].G[i][k+1]|F[i][k]>;
```

```
# Приведение к ступенчатому виду матрицы M[i][k]
# и печать полученных результатов.
MG[i][k]:=GaussianElimination(M[i][k]);
print(evaln(M[i][k])=M[i][k],
                        evaln(MG[i][k])=MG[i][k]);
# Формирование списка blist
# номеров добавочных базисных векторов,
# из третьей (правой) зоны матрицы M[i][k],
# дополняющих до базиса в k-м ядре N[i][k]
# базис в прямой сумме
# (k-1)-го ядра N[i][k-1]
# и образа B[i](C[i][k+1]).

# Изначально этот список пуст.
blist:=[];

# Номер первого столбца в третьей зоне
# матрицы-конкатенации M[i][k].
v:=d[i][k-1]+p[i][k+1]+1;

# Цикл по номеру строки
# в ступенчатой матрице MG[i][k],
# начиная с первой строки, являющейся
# чисто нулевой в первых двух зонах конкатенации,
# и заканчивая последней ненулевой строкой
# во всей матрице.
for u from d[i][k-1]+p[i][k+1]+1 to d[i][k] do

  # Просматриваем (слева направо) строку с номером u,
  # пока не встретим первый ненулевой элемент.
  # (При этом работает счетчик столбцов.)
  while MG[i][k][u,v]=0 do
    v:=v+1;
  od;
  # Встретив в строке с номером u,
  # в столбце с номером v
  # первый ненулевой элемент,
  # мы добавляем номер v к списку blist
  # и переходим к следующей строке.
  blist:=[blist[],v];
od;

# Формируем матрицу H[i][k], отвечающую
# ступеньке уровня k
# (т. е. содержащую базис в D[i][k])
# как подматрицу в исходной конкатенации M[i][k],
# содержащую столбцы, номера которых
# входят в список blist.
H[i][k]:=SubMatrix(M[i][k],1..n,blist);

# Формируем матрицу G[i][k], отвечающую
# всему k-му уровню
```

```
      # (т. е. содержащую базис в C[i][k]).
      G[i][k]:=<B[i][1].G[i][k+1]|H[i][k]>;

      # Выдаем на печать полученные результаты.
      print(evaln(H[i][k])=H[i][k],evaln(G[i][k])=G[i][k]);
      print(str);

    fi;

  else;
    # Определение векторов первого этажа
    # столбчатой диаграммы.

    if q[i][k]=0 then
      # Отработка случая, когда на первом уровне
      # отсутствует ступенька.

      # В этом случае матрица H[i][1],
      # отвечающая ступеньке, - пуста,
      # а матрица G[i][1], отвечающая всему первому уровню,
      # находится умножением слева на матрицу B[i]
      # матрицы G[i][2], отвечающей
      # второму уровню.
      G[i][k]:=B[i][1].G[i][k+1];

      # Выводим на печать полученные результаты.
      print(evaln(H[i][k])=[],evaln(G[i][k])=G[i][k]);
      print(str);

    else
      # Случай, когда на первом уровне есть ступенька.

      # Формирование матрицы-конкатенации M[i][1]:
      # в левой зоне - матрица, содержащая
      # образ B[i].G[i][2] базиса
      # в подпространстве C[i][2]
      # при отображении, заданном матрицей B[i],
      # в правой зоне - матрица, содержащая
      # (необработанный) базис в первом ядре N[i][1].
      M[i][k]:=<B[i][1].G[i][k+1]|F[i][k]>;

      # Приведение к ступенчатому виду матрицы M[i][1]
      # и печать полученных результатов.
      MG[i][k]:=GaussianElimination(M[i][k]);
      print(evaln(M[i][k])=M[i][k],
                          evaln(MG[i][k])=MG[i][k]);

      # Формирование списка blist
      # номеров добавочных базисных векторов,
      # из второй (правой) зоны матрицы M[i][1],
      # дополняющих до базиса в первом ядре N[i][1]
      # базис в образе B[i](C[i][2]).
```

```
    # Изначально этот список пуст.
    blist:=[];

    # Номер первого столбца во второй зоне
    # матрицы-конкатенации M[i][1].
    v:=p[i][k+1]+1;

    # Цикл по номеру строки
    # в ступенчатой матрице MG[i][1],
    # начиная с первой строки, являющейся
    # чисто нулевой в первой зоне конкатенации,
    # и заканчивая последней ненулевой строкой
    # во всей матрице.
    for u from p[i][k+1]+1 to d[i][k] do

      # Просматриваем (слева направо) строку с номером u,
      # пока не встретим первый ненулевой элемент.
      # (При этом работает счетчик столбцов.)
      while MG[i][k][u,v]=0 do
        v:=v+1;
      od;

      # Встретив в строке с номером u,
      # в столбце с номером v
      # первый ненулевой элемент,
      # мы добавляем номер v к списку blist
      # и переходим к следующей строке.
      blist:=[blist[],v];
    od;

    # Формируем матрицу H[i][1], отвечающую
    # ступеньке уровня k=1
    # (т. е. содержащую базис в D[i][1])
    # как подматрицу в исходной конкатенации M[i][1],
    # содержащую столбцы, номера которых
    # входят в список blist.
    H[i][k]:=SubMatrix(M[i][k],1..n,blist);

    # Формируем матрицу G[i][1], отвечающую
    # всему первому уровню
    # (т. е. содержащую базис в C[i][1]).
    G[i][k]:=<B[i][1].G[i][k+1]|H[i][k]>;

    # Выдаем на печать полученные результаты.
    print(evaln(H[i][k])=H[i][k],evaln(G[i][k])=G[i][k]);
    print(str);
  fi;

fi;
# Завершение рассмотрения случаев 1) - 3)
# по расположению этажа.
```

```
      print(str);

    od;
    # Завершение спуска по этажам диаграммы.

  fi;
  # Завершение рассмотрения случаев по одно-
  # (или много-) этажности диаграммы.

od;
# Завершение цикла по номеру собственного значения.

# Подготовка окончательных ответов.

# Формирование матрицы GS, содержащей
# (полный или частичный) жорданов базис.
# (Число столбцов в GS равняется сумме ms
# всех алгебраических кратностей.)
GS:=Matrix(n,ms);

# Цикл по номеру собственного значения.

for i from 1 to s do

  # Цикл по номеру строки в матрице DIAGR[i].
  for k from 1 to l[i] do

    # При всяком u от 1 до p[i][k]
    # в позиции [k,u] в матрице DIAGR[i]
    # стоит натуральное число DIAGR[i][k,u] -
    # номер, под которым в матрице GS
    # должен стоять вектор,
    # извлеченный из матрицы G[i][k],
    # где он имел номер u.
    # Поэтому мы извлекаем из G[i][k]
    # (как подматрицу) вектор-столбец с номером u
    # и вписываем его в матрицу GS
    # как вектор-столбец с номером DIAGR[i][k,u].
    for u from 1 to p[i][k] do
      GS[1..n,DIAGR[i][k,u]..DIAGR[i][k,u]]:=
      SubMatrix(G[i][k],1..n,u..u);
    od;

  od;

od;

# Печать матрицы GS, представляющей базис в корневой сумме.
print(evaln(GS)=GS);
print(str);print(str);
```

```
# Формирование матрицы перехода T
# от исходного (естественного) базиса
# к жорданову (или частично жорданову) базису,
# а также формирование (частичной или полной)
# жодановой нормальной формы J для матрицы A.

if exist_jbas then
  # Если существует полный жорданов базис
  # (во всем пространстве),
  # то матрица GS является квадратной,
  # содержит полный жорданов базис
  # и совпадает с искомой матрицей перехода T.

  # Полная ж.н.ф. матрицы A совпадает
  # с (ранее вычисленной) матрицей JS.

  T:=GS;J:=JS;

  # Выводим на печать матрицы J и T.
  print(evaln(J)=J);
  print(evaln(T)=T);
  print(str);print(str);

  # Организуем "избыточную" проверку
  # (логически она является излишней,
  # но при отладке программы
  # или при ручной работе - полезна).

  # Вычисляем и выдаем на печать
  # определитель det(T);
  # он должен быть ненулевым.
  # Если это не так, то
  # выдается сообщение об ошибке.

  dt:=Determinant(T);
  print(evaln(det('T'))=dt);
  if dt=0 then
    ERROR(`Матрица T необратима!`);
  fi;

  # Еще одна избыточная проверка:
  # контролируем выполнение равенства
  # T.J=A.T
  # и генерируем сообщение об ошибке,
  # если оно нарушается.

  if not Equal(T.J,A.T) then
    ERROR(`Равенство T*J=A*T не выполняется!`);
  fi;

  print(str);print(str);
```

```
else

  # Если полного жорданова базиса
  # не существует,
  # то мы дополняем жорданов базис в корневой сумме,
  # содержащийся в матрице GS,
  # до (частично жорданова) базиса
  # во всем пространстве.

  # Составляем и приводим к ступенчатому виду
  # матрицу GSE, являющуюся конкатенацией
  # матрицы GS и единичной матрицы E.
  GSE:=<GS|E>;
  GSEG:=GaussianElimination(GSE);

  print(evaln(GSE)=GSE);
  print(evaln(GSEG)=GSEG);

  # Выбираем (по ступенькам в правой зоне
  # матрицы GSEG) добавочные векторы
  # из правой зоны матрицы GSE
  # и приписываем их к GS.

  for i from ms+1 to n do
    for j from ms+1 to n do
      if GSEG[i,j]<>0 then
        T:=<T|SubMatrix(GSE,1..n,j..j)>;
        break;
      fi;
    od;
  od;

  # В итоге формируется квадратная
  # матрица T размера n на n,
  # содержащая частично жорданов базис.

  # Избыточная проверка:
  # контролируем отличие от нуля
  # определителя det(T).

  dt:=Determinant(T);
  if dt=0 then
    ERROR(`Матрица T необратима!`);
  fi;

  # Вычисляем частично жорданову форму J
  # для матрицы A,
  # пользуясь T как матрицей перехода.
  J:=MatrixInverse(T).A.T;

  # Еще одна избыточная проверка:
```

```
  # севере-западный блок размера ms на ms
  # в полученной матрице J
  # должен совпадать с матрицей JS.
  if not Equal(JS,SubMatrix(J,1..ms,1..ms)) then
    ERROR(`Равенство JS=SubMatrix(G,1..ms,1..ms)
           не выполняется!`);
  fi;

  print(str);print(str);

  # Печать окончательных результатов.
  print(evaln(J)=J);
  print(evaln(T)=T);
  print(evaln(det('T'))=dt);
  print(str);print(str);

fi;

# "Сценарная часть" работы процедуры завершена.
# Далее следует завершение работы всей процедуры
# с возвращением (в виде, допускающем дальнейшее использование)
# 1) матрицы J - (частичной) ж.н.ф. для A;
# 2) матрицы T - перехода от исходного базиса
#    к (частично) жорданову.

RETURN(J,T);

end proc;
```

2a. Пример применения процедуры jrd

(к ТР2 "Жорданов базис для линейного эндоморфизма"; п. 28.5)

```
> A:=Matrix([[5, -4, -3, 5, -1, 1, 5, 1, -1, 3, 1],
             [12, 30, 14, 4, 5, -8, 0, -4, 12, -8, -4],
             [12, 8, 3, 5, -1, -1, 1, -4, 5, -2, -3],
             [1, -14, -7, -1, -4, 7, -3, -3, -4, 2, -1],
             [-12, -8, -1, -5, 3, 1, -1, 4, -5, 2, 3],
             [13, 28, 12, 5, 4, -8, 1, -4, 11, -7, -4],
             [-6, 18, 10, -5, 5, -8, -3, 1, 5, -5, 0],
             [6, -4, -3, 5, -1, 1, 5, 0, -1, 3, 1],
             [-12, -34, -16, -4, -6, 9, 0, 4, -14, 9, 4],
             [23, 39, 21, 8, 7, -9, 0, -8, 17, -11, -7],
             [13, -22, -16, 10, -9, 9, 7, -1, -6, 8, 0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 12 & 30 & 14 & 4 & 5 & -8 & 0 & -4 & 12 & -8 & -4 \\ 12 & 8 & 3 & 5 & -1 & -1 & 1 & -4 & 5 & -2 & -3 \\ 1 & -14 & -7 & -1 & -4 & 7 & -3 & -3 & -4 & 2 & -1 \\ -12 & -8 & -1 & -5 & 3 & 1 & -1 & 4 & -5 & 2 & 3 \\ 13 & 28 & 12 & 5 & 4 & -8 & 1 & -4 & 11 & -7 & -4 \\ -6 & 18 & 10 & -5 & 5 & -8 & -3 & 1 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ -12 & -34 & -16 & -4 & -6 & 9 & 0 & 4 & -14 & 9 & 4 \\ 23 & 39 & 21 & 8 & 7 & -9 & 0 & -8 & 17 & -11 & -7 \\ 13 & -22 & -16 & 10 & -9 & 9 & 7 & -1 & -6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> jrd(A);
```

$$n = 11$$

$$h(\lambda) = \lambda^{11} - 4\lambda^{10} - 5\lambda^9 + 30\lambda^8 + 15\lambda^7 - 96\lambda^6 - 51\lambda^5 + 150\lambda^4 + 120\lambda^3 - 80\lambda^2 - 112\lambda - 32$$

$$h(\lambda) = (\lambda - 2)^5 (\lambda + 1)^6$$

$$s = 2$$

$$\lambda_1 = 2, m_1 = 5$$

$$\lambda_2 = -1, m_2 = 6$$

$$ms = 11$$

Полный жорданов базис существует.

$$l_1 = 4$$

$$B_{1_1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 12 & 28 & 14 & 4 & 5 & -8 & 0 & -4 & 12 & -8 & -4 \\ 12 & 8 & 1 & 5 & -1 & -1 & 1 & -4 & 5 & -2 & -3 \\ 1 & -14 & -7 & -3 & -4 & 7 & -3 & -3 & -4 & 2 & -1 \\ -12 & -8 & -1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 4 & -5 & 2 & 3 \\ 13 & 28 & 12 & 5 & 4 & -10 & 1 & -4 & 11 & -7 & -4 \\ -6 & 18 & 10 & -5 & 5 & -8 & -5 & 1 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -12 & -34 & -16 & -4 & -6 & 9 & 0 & 4 & -16 & 9 & 4 \\ 23 & 39 & 21 & 8 & 7 & -9 & 0 & -8 & 17 & -13 & -7 \\ 13 & -22 & -16 & 10 & -9 & 9 & 7 & -1 & -6 & 8 & -2 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{1_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{1_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, d_{1_1} = 2$$

$$B_{1_2} = \begin{bmatrix} 25 & 33 & 20 & -3 & 5 & -4 & -14 & -18 & 15 & -14 & -10 \\ -24 & -88 & -43 & -7 & -17 & 27 & 1 & 8 & -35 & 26 & 9 \\ -27 & -54 & -21 & -9 & -6 & 15 & 0 & 9 & -24 & 15 & 9 \\ -32 & 12 & 4 & 0 & 7 & -17 & 11 & 22 & -3 & 2 & 10 \\ 27 & 54 & 21 & 9 & 6 & -15 & 0 & -9 & 24 & -15 & -9 \\ -29 & -79 & -31 & -13 & -11 & 30 & -5 & 7 & -29 & 20 & 9 \\ 10 & -45 & -24 & 12 & -12 & 21 & 12 & 2 & -12 & 12 & 0 \\ 16 & 33 & 20 & -3 & 5 & -4 & -14 & -9 & 15 & -14 & -10 \\ 24 & 115 & 55 & 7 & 23 & -33 & -1 & -8 & 50 & -32 & -9 \\ -46 & -151 & -82 & -10 & -32 & 42 & 7 & 18 & -59 & 50 & 18 \\ 0 & 78 & 53 & -15 & 26 & -25 & -17 & -14 & 27 & -26 & -1 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{1_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{1_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d_{1_2} = 3$$

$$B_{1_3} = \begin{bmatrix} -60 & -142 & -85 & 29 & -29 & 30 & 55 & 62 & -56 & 56 & 27 \\ 81 & 270 & 135 & 27 & 54 & -81 & 0 & -27 & 108 & -81 & -27 \\ 81 & 189 & 81 & 27 & 27 & -54 & 0 & -27 & 81 & -54 & -27 \\ 69 & 34 & 31 & -29 & 2 & 24 & -55 & -71 & 29 & -29 & -27 \\ -81 & -189 & -81 & -27 & -27 & 54 & 0 & 27 & -81 & 54 & 27 \\ 99 & 216 & 81 & 54 & 27 & -81 & 27 & -18 & 81 & -54 & -27 \\ -9 & 108 & 54 & -27 & 27 & -54 & -27 & -18 & 27 & -27 & 0 \\ -33 & -142 & -85 & 29 & -29 & 30 & 55 & 35 & -56 & 56 & 27 \\ -81 & -378 & -189 & -27 & -81 & 108 & 0 & 27 & -162 & 108 & 27 \\ 144 & 486 & 270 & 27 & 108 & -135 & -27 & -63 & 189 & -162 & -54 \\ 3 & -250 & -166 & 56 & -83 & 84 & 55 & 53 & -83 & 83 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{1_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{1_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d_{1_3} = 4$$

$$B_{1_4} = \begin{bmatrix} 216 & 486 & 297 & -108 & 108 & -108 & -189 & -243 & 189 & -189 & -81 \\ -243 & -891 & -459 & -81 & -189 & 270 & 0 & 81 & -351 & 270 & 81 \\ -243 & -648 & -297 & -81 & -108 & 189 & 0 & 81 & -270 & 189 & 81 \\ -216 & -243 & -189 & 135 & -54 & -27 & 216 & 270 & -135 & 135 & 81 \\ 243 & 648 & 297 & 81 & 108 & -189 & 0 & -81 & 270 & -189 & -81 \\ -297 & -648 & -243 & -189 & -81 & 243 & -108 & 27 & -243 & 162 & 81 \\ -27 & -243 & -108 & 54 & -54 & 135 & 54 & 81 & -54 & 54 & 0 \\ 135 & 486 & 297 & -108 & 108 & -108 & -189 & -162 & 189 & -189 & -81 \\ 243 & 1296 & 675 & 81 & 297 & -378 & 0 & -81 & 540 & -378 & -81 \\ -432 & -1620 & -918 & -54 & -378 & 459 & 108 & 216 & -621 & 540 & 162 \\ 54 & 729 & 486 & -162 & 243 & -243 & -162 & -216 & 243 & -243 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{1_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{1_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d_{1_4} = 5$$

$$l_2 = 3$$

$$B_{2_1} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 12 & 31 & 14 & 4 & 5 & -8 & 0 & -4 & 12 & -8 & -4 \\ 12 & 8 & 4 & 5 & -1 & -1 & 1 & -4 & 5 & -2 & -3 \\ 1 & -14 & -7 & 0 & -4 & 7 & -3 & -3 & -4 & 2 & -1 \\ -12 & -8 & -1 & -5 & 4 & 1 & -1 & 4 & -5 & 2 & 3 \\ 13 & 28 & 12 & 5 & 4 & -7 & 1 & -4 & 11 & -7 & -4 \\ -6 & 18 & 10 & -5 & 5 & -8 & -2 & 1 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & -4 & -3 & 5 & -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -12 & -34 & -16 & -4 & -6 & 9 & 0 & 4 & -13 & 9 & 4 \\ 23 & 39 & 21 & 8 & 7 & -9 & 0 & -8 & 17 & -10 & -7 \\ 13 & -22 & -16 & 10 & -9 & 9 & 7 & -1 & -6 & 8 & 1 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{2_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{2_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d_{2_1} = 3$$

$$B_{2_2} = \begin{bmatrix} 52 & 9 & 2 & 27 & -1 & 2 & 16 & -12 & 9 & 4 & -4 \\ 48 & 89 & 41 & 17 & 13 & -21 & 1 & -16 & 37 & -22 & -15 \\ 45 & -6 & -6 & 21 & -12 & 9 & 6 & -15 & 6 & 3 & -9 \\ -26 & -72 & -38 & -9 & -17 & 25 & -7 & 4 & -27 & 14 & 4 \\ -45 & 6 & 15 & -21 & 21 & -9 & -6 & 15 & -6 & -3 & 9 \\ 49 & 89 & 41 & 17 & 13 & -21 & 1 & -17 & 37 & -22 & -15 \\ -26 & 63 & 36 & -18 & 18 & -27 & -9 & 8 & 18 & -18 & 0 \\ 52 & 9 & 2 & 27 & -1 & 2 & 16 & -12 & 9 & 4 & -4 \\ -48 & -89 & -41 & -17 & -13 & 21 & -1 & 16 & -37 & 22 & 15 \\ 92 & 83 & 44 & 38 & 10 & -12 & 7 & -30 & 43 & -19 & -24 \\ 78 & -54 & -43 & 45 & -28 & 29 & 25 & -20 & -9 & 22 & -4 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{2_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{5}{17} & \frac{-7}{17} & \frac{-4}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{-9}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{14}{17} & \frac{26}{17} & \frac{3}{17} & \frac{6}{17} & \frac{1}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{17} & \frac{-4}{17} & \frac{-7}{17} & \frac{3}{17} & \frac{9}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-20}{17} & \frac{-8}{17} & \frac{3}{17} & \frac{-11}{17} & \frac{-16}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{2_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{9}{17} & \frac{3}{17} & \frac{-4}{17} & \frac{-7}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{-1}{17} & \frac{-6}{17} & \frac{-26}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{-14}{17} \\ \frac{-9}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{-7}{17} \\ \frac{16}{17} & \frac{11}{17} & \frac{8}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d_{2_2} = 5$$

$$B_{2_3} = \begin{bmatrix} 273 & 47 & 14 & 137 & -11 & 21 & 64 & -73 & 52 & 11 & -36 \\ 189 & 261 & 126 & 72 & 36 & -54 & 9 & -63 & 117 & -63 & -54 \\ 162 & -81 & -54 & 81 & -54 & 54 & 27 & -54 & 0 & 27 & -27 \\ -192 & -236 & -122 & -83 & -43 & 60 & -37 & 46 & -106 & 43 & 36 \\ -162 & 81 & 81 & -81 & 81 & -54 & -27 & 54 & 0 & -27 & 27 \\ 189 & 261 & 126 & 72 & 36 & -54 & 9 & -63 & 117 & -63 & -54 \\ -81 & 189 & 108 & -54 & 54 & -81 & -27 & 27 & 54 & -54 & 0 \\ 273 & 47 & 14 & 137 & -11 & 21 & 64 & -73 & 52 & 11 & -36 \\ -189 & -261 & -126 & -72 & -36 & 54 & -9 & 63 & -117 & 63 & 54 \\ 351 & 180 & 99 & 153 & 9 & 0 & 36 & -117 & 117 & -36 & -81 \\ 354 & -142 & -121 & 191 & -92 & 102 & 91 & -100 & -2 & 65 & -36 \end{bmatrix},$$

$$BGJ_{2_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{12} & \frac{-5}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{1}{4} & \frac{-11}{12} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-11}{12} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-29}{12} & \frac{11}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{23}{12} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{2_3} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{11}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-17}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{11}{12} \\ \frac{-7}{3} & \frac{-23}{12} & \frac{1}{4} & \frac{-8}{3} & \frac{-11}{3} & \frac{29}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-11}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d_{2_3} = 6$$

$$p_{1_1} = 2$$

$$p_{1_2} = 1$$

$$p_{1_3} = 1$$

$$p_{1_4} = 1$$

$$p_{2_1} = 3$$

$$p_{2_2} = 2$$

$$p_{2_3} = 1$$

$$q_{1_1} = 1$$

$$q_{1_2} = 0$$

$$q_{1_3} = 0$$

$$q_{1_4} = 1$$

$$q_{2_1} = 1$$

$$q_{2_2} = 1$$

$$q_{2_3} = 1$$

$$DIAGR_1 = \begin{bmatrix} * & \\ * & \\ * & \\ * & * \end{bmatrix}$$

$$DIAGR_2 = \begin{bmatrix} * & & \\ * & * & \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$DIAGR_1 = \begin{bmatrix} 4 & \\ 3 & \\ 2 & \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$DIAGR_2 = \begin{bmatrix} 8 & & \\ 7 & 10 & \\ 6 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

$$JS = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{1_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$MG_{1_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{1_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{1_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{1_3} = [\ ], G_{1_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{1_2} = [\ ],\ G_{1_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{1_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ MG_{1_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{1_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ G_{1_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{2_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-17}{12} \\ \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{5}{17} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{17} & \frac{3}{17} & \frac{-4}{17} & \frac{-7}{17} & \frac{7}{17} & \frac{-1}{3} & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{11}{12} \\ \frac{-1}{17} & \frac{-6}{17} & \frac{-26}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{-14}{17} & \frac{-7}{3} & \frac{-23}{12} & \frac{1}{4} & \frac{-8}{3} & \frac{-11}{3} & \frac{29}{12} \\ \frac{-9}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{-7}{17} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-11}{12} \\ \frac{16}{17} & \frac{11}{17} & \frac{8}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{20}{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$MG_{2_3} = \begin{bmatrix} \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{5}{17} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{3} & \frac{-47}{48} & \frac{5}{16} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{17}{48} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-17}{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{9} & \frac{-11}{36} & \frac{-1}{4} & \frac{-2}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{17}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{-4}{3} & \frac{-11}{12} & \frac{1}{4} & \frac{-2}{3} & \frac{-8}{3} & \frac{17}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-11}{12} & \frac{1}{4} & \frac{-2}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{17}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$H_{2_3} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-7}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, G_{2_3} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-7}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{2_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{5}{17} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{9}{17} & \frac{3}{17} & \frac{-4}{17} & \frac{-7}{17} & \frac{7}{17} \\ -2 & -1 & -4 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{17} & \frac{-6}{17} & \frac{-26}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{-14}{17} \\ -1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{-9}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{-7}{17} \\ 3 & 1 & 4 & -1 & \frac{16}{17} & \frac{11}{17} & \frac{8}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{20}{17} \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-8}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$MG_{2_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{5}{17} \\ 0 & -1 & -2 & \frac{2}{3} & \frac{7}{17} & \frac{8}{17} & \frac{-22}{17} & \frac{-13}{17} & \frac{-4}{17} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{11}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{-1}{17} & \frac{1}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{17} & \frac{4}{17} & \frac{6}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-2}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{2_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{17} \\ \frac{9}{17} \\ \frac{-1}{17} \\ \frac{-9}{17} \\ \frac{16}{17} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, G_{2_2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{4}{17} \\ \frac{-1}{3} & \frac{9}{17} \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{17} \\ \frac{1}{3} & \frac{-9}{17} \\ -1 & \frac{16}{17} \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-8}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{2_1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-6}{17} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{17} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{17} & 1 & 0 & 1 \\ \frac{-8}{3} & \frac{12}{17} & -2 & -1 & -4 \\ 0 & \frac{-5}{17} & -1 & 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{17} & 3 & 1 & 4 \\ \frac{4}{3} & \frac{-6}{17} & 2 & 1 & 3 \\ \frac{4}{3} & \frac{-6}{17} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-10}{17} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & \frac{11}{17} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, MG_{2_1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-6}{17} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{17} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{2_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{2_1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-6}{17} & 0 \\ 0 & \frac{5}{17} & 1 \\ 0 & \frac{5}{17} & 1 \\ \frac{-8}{3} & \frac{12}{17} & -2 \\ 0 & \frac{-5}{17} & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{17} & 3 \\ \frac{4}{3} & \frac{-6}{17} & 2 \\ \frac{4}{3} & \frac{-6}{17} & 0 \\ 0 & \frac{-10}{17} & 0 \\ \frac{-4}{3} & \frac{11}{17} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$GS = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -2 & \frac{4}{3} & \frac{-6}{17} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{5}{17} & \frac{4}{17} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{17} & \frac{9}{17} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{-8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{12}{17} & \frac{-1}{17} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-5}{17} & \frac{-9}{17} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 & \frac{-1}{17} & \frac{16}{17} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 2 & 0 & \frac{-6}{17} & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -2 & 0 & \frac{-6}{17} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-10}{17} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{11}{17} & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{3} & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -2 & \frac{4}{3} & \frac{-6}{17} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{5}{17} & \frac{4}{17} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{17} & \frac{9}{17} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & \frac{-8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{12}{17} & \frac{-1}{17} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-5}{17} & \frac{-9}{17} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 & \frac{-1}{17} & \frac{16}{17} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 2 & 0 & \frac{-6}{17} & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -2 & 0 & \frac{-6}{17} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-10}{17} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{11}{17} & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{3} & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(T) = \frac{3200}{7803}$$

---

3. Пакет процедур Quadro

(к ТР3 "Диагонализация
симметрических билинейных (квадратичных)
форм "; п. 39.1)

```
> restart;with(LinearAlgebra):

> # Пакет Quadro содержит три процедуры
# Lagr, Jacob, Signatura;
# обеспечивает работу с симметрическими билинейными
# (квадратичными) формами, заданными
# симметрическими квадратными матрицами.
# Реализованы алгоритмы диагонализации Лагранжа и Якоби
# (над любым числовым полем),
# а также алгоритм нормализации (над полем R).

> Quadro[Lagr]:=proc(A::'Matrix'(symmetric))
  local B,T,E,n,i,j,k,signal,U,U1,V;

# Процедура Lagr, сценарного типа:
# симметрическая квадратная матрица
# (отвечающая квадратичной форме)
# приводится к конгруэнтному диагональному виду
# с помощью метода Лагранжа.


n:=RowDimension(A);
# Размер матрицы.

B:=Matrix(n,A);
# Рабочая копия матрицы.

E:=IdentityMatrix(n);
# Единичная матрица.

T:=Matrix(n,E);
# Заготовка для матрицы перехода
# к диагонализирующему базису.

V:=<<1,1>|<-1,1>>;
# Вспомогательная матрица (блок);
# используется при применении
# второго приема Лагранжа.

for k from 1 to n-1 do
# Цикл по номеру диагонального элемента.

  print(`k=`||k);
```

```
if not Equal(SubMatrix(B,k..n,k..n),ZeroMatrix(n-k+1)) then
# Если юго-восточный блок
# (по отношению к данной диагональной позиции)
# ненулевой, то - работаем...

  if Equal(Diagonal(SubMatrix(B,k..n,k..n)),ZeroVector(n-k+1))
    then
  # Если диагональ юго-восточного блока нулевая,
  # то применяем второй прием Лагранжа.

    if B[k,k+1]=0 then
    # Если в позиции (k,k+1) находится нуль,
    # то предварительно переставляем в эту позицию
    # ненулевой (внедиагональный) элемент.

      signal:=false;
      # Сигнал для фиксации обнаружения ненулевого элемента,
      # с выходом из цикла поиска.

      for j from k+2 to n do
        if B[k,j]<>0 then
        # Ненулевой элемент обнаружен
        # в текущей строке.
          signal:=true;
          break;
        fi;
      od;

      if signal then
        U:=ColumnOperation(E,[k+1,j],inplace=false);
        # Перестановка ненулевого элемента
        # в нужную позицию.

        print(`U=`,U);
        T:=T.U;
        # Накопление элементарных преобразований
        # в матрице перехода.
        B:=Transpose(U).B.U;
        # Пересчет матрицы квадратичной формы.
        print(`B=`,B);

      else

        for j from k+2 to n do
          if B[k+1,j]<>0 then
          # Ненулевой элемент обнаружен
          # в строке, следующей за текущей.
            signal:=true;
            break:
          fi;
        od;
```

```
if signal then

  U:=ColumnOperation(E,[k,k+1],inplace=false);
  # Перестановка ненулевого элемента
  # в нужную позицию (первый этап).
  print(`U=`,U);
  T:=T.U;
  # Накопление элементарных преобразований
  # в матрице перехода.
  B:=Transpose(U).B.U;
  # Пересчет матрицы квадратичной формы.
  print(`B=`,B);

  U:=ColumnOperation(E,[k+1,j],inplace=false);
  # Перестановка ненулевого элемента
  # в нужную позицию (второй этап).
  print(`U=`,U);
  T:=T.U;
  # Накопление элементарных преобразований
  # в матрице перехода.
  B:=Transpose(U).B.U;
  # Пересчет матрицы квадратичной формы.
  print(`B=`,B);

else

  for i from k+2 to n-1 do
    for j from i+1 to n do
      if B[i,j]<>0 then
      # Ненулевой элемент обнаружен
      # ниже строки, следующей за текущей.
        signal:=true;
        break;
      fi;
    od;
    if signal then
      break;
    fi;
  od;

  U:=ColumnOperation(E,[k+1,j],inplace=false);
  # Перестановка ненулевого элемента
  # в нужную позицию (первый этап).

  print(`U=`,U);
  T:=T.U;
  # Накопление элементарных преобразований
  # в матрице перехода.
  B:=Transpose(U).B.U;
  # Пересчет матрицы квадратичной формы.
  print(`B=`,B);
```

```
          U:=ColumnOperation(E,[k,i],inplace=false);
          # Перестановка ненулевого элемента
          # в нужную позицию (второй этап).

          print(`U=`,U);
          T:=T.U;
          # Накопление элементарных преобразований
          # в матрице перехода.
          B:=Transpose(U).B.U;
          # Пересчет матрицы квадратичной формы.
          print(`B=`,B);

        fi;
      fi;
    fi;

    U:=Matrix(n,E);U[k..k+1,k..k+1]:=V;
    # Матрица преобразования,
    # реализующего второй прием Лагранжа.

    print(`U=`,U);
    T:=T.U;
    # Накопление элементарных преобразований
    # в матрице перехода.
    B:=Transpose(U).B.U;
    # Пересчет матрицы квадратичной формы.
    print(`B=`,B);

  elif B[k,k]=0 then
  # Если диагональ юго-восточного блока ненулевая,
  # но начальный ее элемент - нулевой,
  # то проводим подготовку к применению
  # первого приема Лагранжа.

    for i from k+1 to n do
      if B[i,i]<>0 then
      # Обнаружен ненулевой диагональный элемент.
        break;
      fi;
    od;

    U:=ColumnOperation(E,[k,i],inplace=false);
    # Перестановка ненулевого диагонального
    # элемента в нужную позицию.
    print(`U=`,U);
    T:=T.U;
    # Накопление элементарных преобразований
    # в матрице перехода.
    B:=Transpose(U).B.U;
    # Пересчет матрицы квадратичной формы.
    print(`B=`,B);
  fi;
```

```
    U:=Matrix(n,E);
    # Заготовка для матрицы преобразования,
    # реализующего первый прием Лагранжа;
    # далее она заполняется.

    for j from k+1 to n do
      U[k,j]:=-B[k,j]/B[k,k];
    od;

    if not Equal(U,E) then
    # Если преобразование не тождественное,
    # то применяем его к матрице квадратичной формы,
    # производим "накопление"
    # в результирующей матрице перехода
    # и выдаем промежуточные результаты на печать.

      print(`U=`,U);
      T:=T.U;
      # Накопление элементарных преобразований
      # в матрице перехода.
      B:=Transpose(U).B.U;
      # Пересчет матрицы квадратичной формы.
      print(`B=`,B);

    fi;
  fi;
od;

RETURN(B,T);
# Возвращаются: диагональная матрица,
# задающая диагональный вид данной квадратичной формы,
# и матрица перехода к диагональному виду.

end proc;



> Quadro[Jacob]:=proc(A::'Matrix'(symmetric))
  local B,n,i,j,k,Delta,mu,T,AT,sys,sol;

# Процедура Jacob приведения
# к конгруэнтному диагональному виду
# симметрической квадратной матрицы
# (отвечающей квадратичной форме),
# в предположении выполнения условия Якоби.

n:=RowDimension(A);
# Размер матрицы.

Delta[0]:=1;
# Угловой минор нулевого порядка.
```

```
for i from 1 to n do
  Delta[i]:=Determinant(SubMatrix(A,1..i,1..i));
  # Вычисление угловых миноров.

  print(evaln(Delta[i])=Delta[i]);

  if i<n and Delta[i]=0 then
  # Если очередной (не последний) угловой минор
  # оказывается нулевым, то
  # выдается сообщение об ошибке.

    ERROR("Условия Якоби не выполнены!");
  else
  # В противном случае вычисляются
  # диагональные элементы диагональной матрицы,
  # задающей диагональный вид
  # данной квадратичной формы.

    mu[i]:=Delta[i]/Delta[i-1];
  fi;
od;

for i from 1 to n do
  print(evaln(mu[i])=mu[i]);
od;

B:=Matrix(n):
# Заготовка для диагональной матрицы.

# Далее следует ее заполнение.
for i from 1 to n do
  B[i,i]:=mu[i]:
od:

T:=Matrix(n,symbol=`t`):
# Заготовка для унитреугольной
# матрицы перехода к диагональному виду.

# Далее следует ее заполнение
# (элементы выше главной диагонали
# остаются неопределенными).

for i from 1 to n do
  T[i,i]:=1;
od:

for i from 2 to n do
  for j from 1 to i-1 do
    T[i,j]:=0;
  od;
od;
```

```
print(`T=`,T);

AT:=A.T;
# Вычисление произведения
# матрицы квадратичной формы
# на матрицу перехода.

print(map(simplify,AT));

sys:={}:
# Начало формирования
# системы (множества) линейных уравнений
# для отыскания неопределенных элементов
# матрицы перехода.
for i from 1 to n do
  for j from i+1 to n do
    sys:=sys union {AT[i,j]=0};
    # К (изначально пустому)
    # множеству уравнений добавляется
    # очередное, отвечающее
    # наддиагональному элементу
    # ранее вычисленного произведения матриц.
  od;
od;

print(sys);

sol:=solve(sys);
# Вычисляется решение указанной системы.
print(sol);

# Далее в матрицу перехода
# заносятся вычисленные значения
# наддиагональных элементов.
for i from 1 to n do
  for j from i+1 to n do
    for k from 1 to nops(sol) do
      if T[i,j]=lhs(sol[k]) then
        T[i,j]:=rhs(sol[k]);
        break;
      fi;
    od;
  od;
od;

RETURN(B,T);
# Возвращаются: диагональная матрица,
# задающая диагональный вид данной
# квадратичной формы,
# и матрица перехода к диагональному виду.

end proc;
```

```
> Quadro[Signature]:=proc(A::'Matrix'(diagonal))
  local n,B1,B2,E,T1,T2,T,i,j,s,t,r,pos,neg,zer,str,new_ord;

# Процедура Signature (сценарного типа)
# приведения диагональной матрицы
# (отвечающей квадратичной форме)
# к конгруэнтному нормальному виду
# (над полем действительных чисел).

n:=RowDimension(A);
# Размер матрицы.

E:=IdentityMatrix(n);
# Единичная матрица.

s:=0;t:=0;
# Заготовки для накопления
# индексов инерции.

pos:=[];neg:=[];zer:=[];
# Заготовки списков номеров переменных,
# которым отвечают
# положительные (отрицательные, нулевые)
# диагональные коэффициенты.

# Далее следует просмотр диагонали
# и заполнение указанных списков.

for i from 1 to n do
  if A[i,i]>0 then
    s:=s+1;
    pos:=[pos[],i];
  elif A[i,i]<0 then
    t:=t+1;
    neg:=[neg[],i];
  else
    zer:=[zer[],i];
  fi;
od:

r:=s+t;
# Вычисление ранга матрицы.

print(`s=`||s,`t=`||t,`r=`||r);
print(`pos=`,pos,`neg=`,neg,`zer=`,zer);

# Далее определяется
# тип квадратичной формы
# (в плане знакоопределенности).
```

```
if s=n then
  str:=`Форма положительно определена.`;
elif s<n and s>0 and t=0 then
  str:=`Форма положительно полуопределена.`;
elif s<n and s>0 and t>0 then
  if r=n then
    str:=`Форма невырожденна и знакопеременна.`;
  else
    str:=`Форма вырождена и знакопеременна.`;
  fi;
elif s=0 and t=0 then
  str:=`Форма нулевая.`;
elif s=o and t<n then
  str:=`Форма отрицательно полуопределена.`;
else
  str:=`Форма отрицательно определена.`;
fi;
print(str);

new_ord:=[pos[],neg[],zer[]];
# Переупорядочивание переменных:
# сначала должны идти переменные,
# которым отвечают положительные
# диагональные элементы,
# потом - те, которым отвечают отрицательные,
# и, наконец, - те, которым отвечают нулевые
# диагональные элементы.

T1:=Matrix(n,E);
# Заготовка для матрицы
# перестановочного перехода.

# Далее следует ее заполнение:
# столбцы единичной матрицы
# располагаются в соответствии
# с новым порядком.

for j from 1 to n do
  T1[1..n,j..j]:=E[1..n,new_ord[j]..new_ord[j]];
od;

B1:=Transpose(T1).A.T1;
# Вычисление матрицы,
# отвечающей диагональному виду,
# с правильно упорядочненными по знаку
# диагональными элементами.

print(`T1=`,T1,`B1=`,B1);

T2:=Matrix(n,E):
# Заготовка для матрицы
# перехода к нормальному виду.
```

```
# Далее следует ее заполнение.
for i from 1 to n do
  if i<=s then
    T2[i,i]:=1/sqrt(B1[i,i]);
  elif i>s and i<=r then
    T2[i,i]:=1/sqrt(-B1[i,i]);
  else
    T2[i,i]:=1;
  fi;
od:

B2:=Transpose(T2).B1.T2;
# Вычисление матрицы,
# отвечающей нормальному виду
# квадратичной формы.

print(`T2=`,T2,`B2=`,B2);


RETURN(B2,T1.T2,[s,t]);
# Возвращаются: матрица нормального вида,
# матрица перехода
# от диагонального вида к нормальному,
# сигнатура (индексы инерции)
# данной квадратичной формы.

end proc;


> save Quadro,"F:/MaplePackages/Quadro.m";
# Сохранение пакета.
```

3а. Пример применения процедур пакета Quadro

(к ТР3 "Диагонализация
симметрических билинейных (квадратичных)
форм "; п. 39.1)

```
> restart;with(LinearAlgebra):
> read "F:/MaplePackages/Quadro.m"; with(Quadro);
```

[*Jacob*, *Lagr*, *Signature*]

```
>
A:=Matrix([[0,1,0,1,0,1,0],[1,0,1,1,1,1,1],[0,1,0,0,1,0,1],
           [1,1,0,0,1,1,1],[0,1,1,1,0,1,0],[1,1,0,1,1,0,1],
           [0,1,1,1,0,1,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> (DL,TL):=Lagr(A);
# Запуск программы диагонализации по Лагранжу.
# Переменным DL и TL будут присвоены значения
# диагональной матрицы, конгруэнтной введенной,
# и матрицы перехода к диагонализирующему базису.
# Следите за заменами переменных
# (они регистрируются в матрицах U)
# и за преобразованиями данной матрицы
# (регистрируются в матрицах B).
# Так, на первом шаге применяется
# второй прием Лагранжа,
# в результате чего на диагонали,
# которая была в исходной матрице нулевой,
# появляются ненулевые элементы.
```

k=1

$$U=, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=,\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$U=,\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=,\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2}\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

k=2

$$U=,\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=,\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

k=3

$$U=,\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$B=,\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0&0\\0&-2&0&0&0&0&0\\0&0&-2&-1&0&-1&0\\0&0&-1&0&1&-1&1\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&-1&-1&0&-2&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$U=,\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&\frac{-1}{2}&0&\frac{-1}{2}&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$B=,\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0&0\\0&-2&0&0&0&0&0\\0&0&-2&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&1&\frac{-1}{2}&1\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&\frac{-1}{2}&0&\frac{-3}{2}&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

k=4

$$U=,\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&-2&1&-2\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$B=,\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

k=5

$$U=,\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=,\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k=6

$$DL, TL := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \frac{-1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> (DJ,TJ):=Jacob(A);
```

$$\Delta_1 = 0$$

```
Error, (in Jacob) Условия Якоби не выполнены!
```

```
> (DS,TS,sg):=Signature(DL);
# Нормализация и вычисление сигнатуры.
```

$$s=2,\ t=4,\ r=6$$

$$pos=,\ [1,4],\ neg=,\ [2,3,5,6],\ zer=,\ [7]$$

Форма вырождена и знакопеременна

$$T1=,\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\ B1=,\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0\\0&0&-2&0&0&0&0\\0&0&0&-2&0&0&0\\0&0&0&0&-2&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{-3}{2}&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$T2=,\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0&0\\0&0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{6}}{3}&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\ B2=,\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$DS, TS, sg :=$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [2, 4]$$

```
> T:=TL.TS;
# Вычисление матрицы "сквозного" перехода
# к нормализирующему базису.
```

$$T := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> DS-Transpose(T).A.T;
# Проверка.
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A1:=A: A1[1,1]:=1: evaln(A1)=A1;
# Изменим один элемент в матрице A
# и снова попытаемся применить процедуру Jacob.
```

$$A1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Jacob(A1);
```

$$\Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = -1 \quad \Delta_3 = -1 \quad \Delta_4 = 1 \quad \Delta_5 = -2 \quad \Delta_6 = 1 \quad \Delta_7 = 0$$

$$\mu_1 = 1 \quad \mu_2 = -1 \quad \mu_3 = 1 \quad \mu_4 = -1 \quad \mu_5 = -2 \quad \mu_6 = \frac{-1}{2} \quad \mu_7 = 0$$

$$T=, \begin{bmatrix} 1 & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} & t_{1,7} \\ 0 & 1 & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} & t_{2,7} \\ 0 & 0 & 1 & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} & t_{3,7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_{4,5} & t_{4,6} & t_{4,7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_{5,6} & t_{5,7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_{6,7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[1, t_{1,2}+1, t_{1,3}+t_{2,3}, t_{1,4}+t_{2,4}+1, t_{1,5}+t_{2,5}+t_{4,5}, t_{1,6}+t_{2,6}+1+t_{4,6},$$
$$t_{1,7}+t_{2,7}+t_{4,7}+t_{6,7}]$$
$$[1, t_{1,2}, t_{1,3}+1, t_{1,4}+1+t_{3,4}, t_{1,5}+1+t_{3,5}+t_{4,5}, t_{1,6}+1+t_{3,6}+t_{4,6}+t_{5,6},$$
$$t_{1,7}+1+t_{3,7}+t_{4,7}+t_{5,7}+t_{6,7}]$$
$$[0, 1, t_{2,3}, t_{2,4}, 1+t_{2,5}, t_{2,6}+t_{5,6}, 1+t_{2,7}+t_{5,7}]$$
$$[1, t_{1,2}+1, t_{1,3}+t_{2,3}, t_{1,4}+t_{2,4}, t_{1,5}+t_{2,5}+1, t_{1,6}+t_{2,6}+1+t_{5,6},$$
$$t_{1,7}+t_{2,7}+1+t_{5,7}+t_{6,7}]$$
$$[0, 1, 1+t_{2,3}, 1+t_{2,4}+t_{3,4}, t_{2,5}+t_{3,5}+t_{4,5}, 1+t_{2,6}+t_{3,6}+t_{4,6},$$
$$t_{2,7}+t_{3,7}+t_{4,7}+t_{6,7}]$$
$$[1, t_{1,2}+1, t_{1,3}+t_{2,3}, t_{1,4}+t_{2,4}+1, t_{1,5}+t_{2,5}+1+t_{4,5}, t_{1,6}+t_{2,6}+t_{4,6}+t_{5,6}$$
$$, t_{1,7}+t_{2,7}+1+t_{4,7}+t_{5,7}]$$
$$[0, 1, 1+t_{2,3}, 1+t_{2,4}+t_{3,4}, t_{2,5}+t_{3,5}+t_{4,5}, 1+t_{2,6}+t_{3,6}+t_{4,6},$$
$$t_{2,7}+t_{3,7}+t_{4,7}+t_{6,7}]$$

$$\{t_{1,2}+1=0, t_{1,3}+t_{2,3}=0, t_{1,4}+t_{2,4}+1=0, t_{1,5}+t_{2,5}+t_{4,5}=0,$$
$$t_{1,6}+t_{2,6}+1+t_{4,6}=0, t_{1,7}+t_{2,7}+t_{4,7}+t_{6,7}=0, t_{1,3}+1=0, t_{1,4}+1+t_{3,4}=0,$$
$$t_{1,5}+1+t_{3,5}+t_{4,5}=0, t_{1,6}+1+t_{3,6}+t_{4,6}+t_{5,6}=0,$$
$$t_{1,7}+1+t_{3,7}+t_{4,7}+t_{5,7}+t_{6,7}=0, t_{2,4}=0, 1+t_{2,5}=0, t_{2,6}+t_{5,6}=0,$$
$$1+t_{2,7}+t_{5,7}=0, t_{1,5}+t_{2,5}+1=0, t_{1,6}+t_{2,6}+1+t_{5,6}=0,$$
$$t_{1,7}+t_{2,7}+1+t_{5,7}+t_{6,7}=0, 1+t_{2,6}+t_{3,6}+t_{4,6}=0, t_{2,7}+t_{3,7}+t_{4,7}+t_{6,7}=0,$$
$$t_{1,7}+t_{2,7}+1+t_{4,7}+t_{5,7}=0\}$$

$$\{t_{2,4}=0, t_{6,7}=0, t_{5,7}=-1, t_{5,6}=\frac{1}{2}, t_{4,7}=0, t_{4,6}=\frac{1}{2}, t_{4,5}=1, t_{3,7}=0, t_{3,4}=0, t_{2,7}=0,$$
$$t_{2,6}=\frac{-1}{2}, t_{2,5}=-1, t_{2,3}=1, t_{1,7}=0, t_{1,6}=-1, t_{1,4}=-1, t_{1,3}=-1, t_{1,2}=-1, t_{1,5}=0,$$
$$t_{3,5}=-2, t_{3,6}=-1\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> # Для матрицы A1 с помощью алгоритма Якоби
# получен диагональный вид
# и вычислена матрица перехода.
```

Приложение 2

Иллюстрации

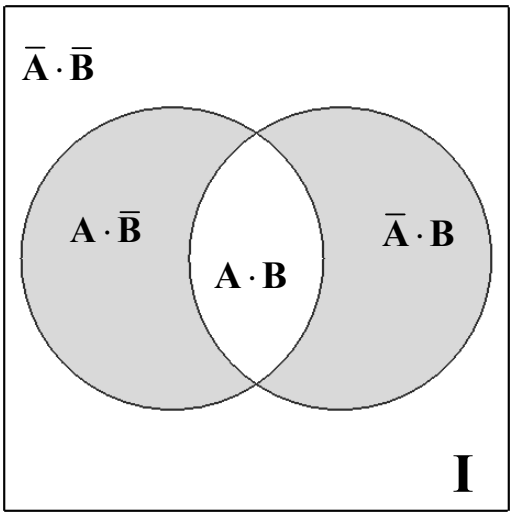


Рис. 1.1 (к п. 1.7). **Разделительная сумма двух множеств:**
$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$.

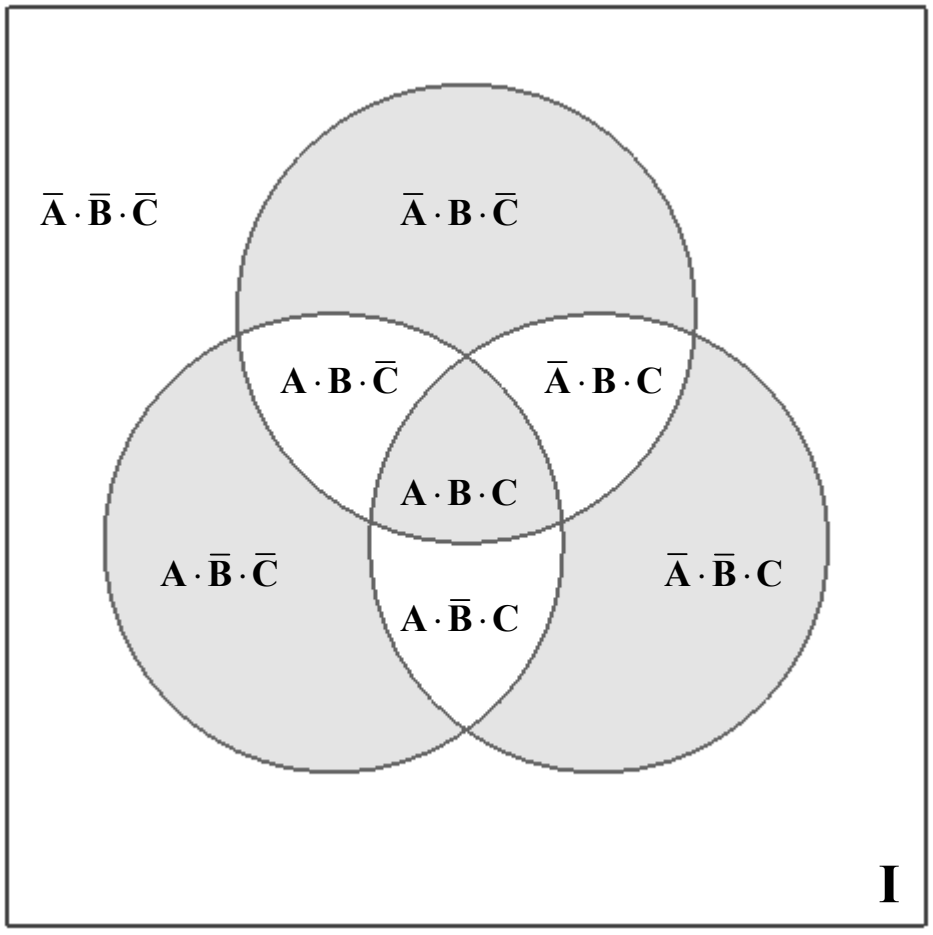


Рис. 1.2 (к п. 1.7). **Разделительная сумма трех множеств:**
$A \oplus B \oplus C = A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$.

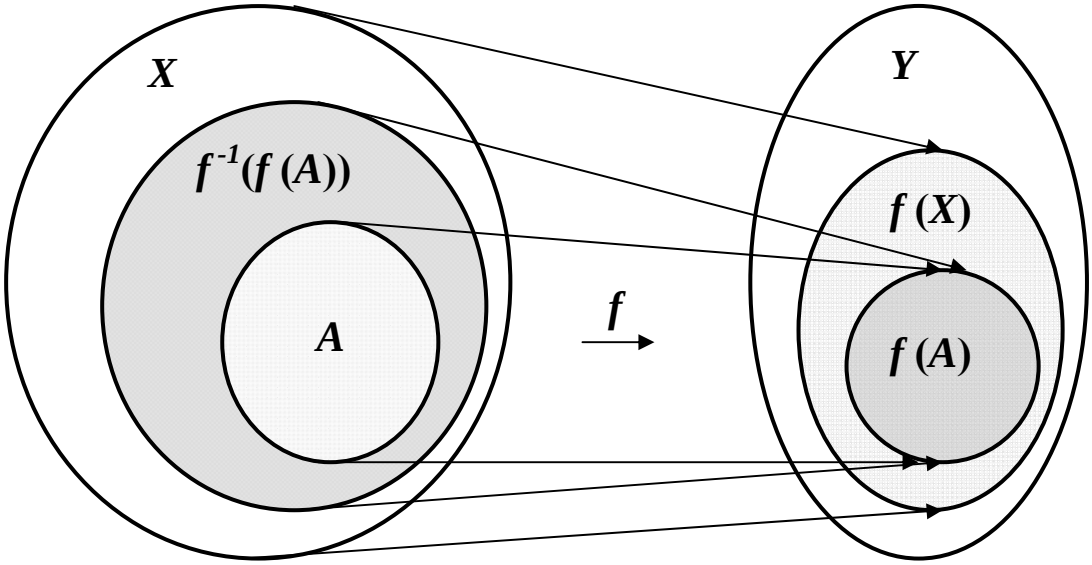


Рис. 14.1 (к замечанию 14.1). **Прообраз образа подмножества:** $f^{-1}(f(A)) \supseteq A;\ A \subseteq X$.

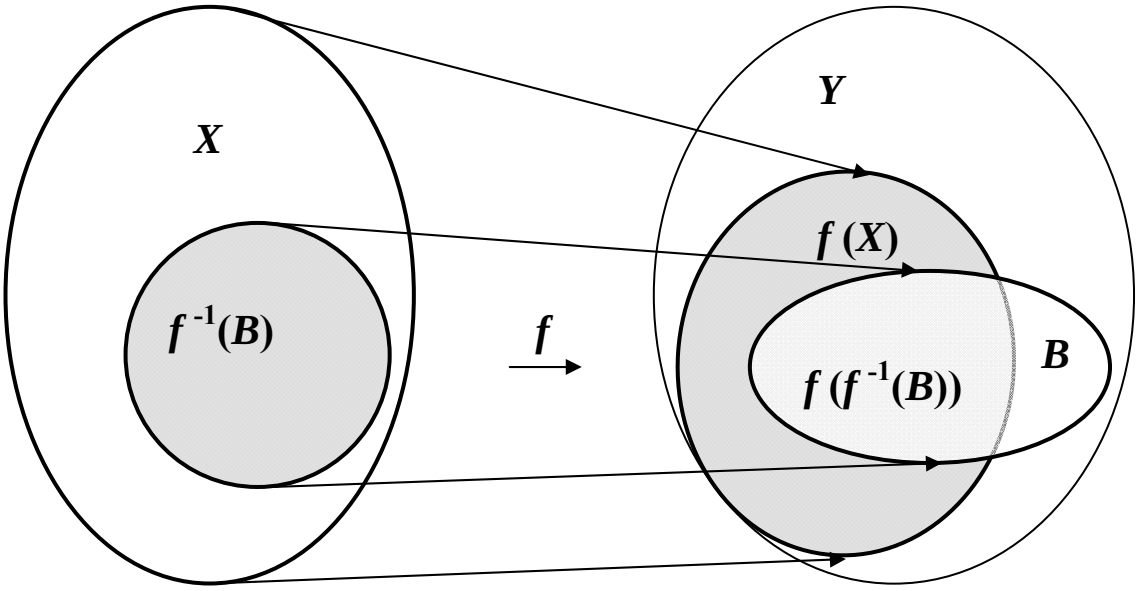


Рис. 14.2 (к замечанию 14.1). **Образ прообраза подмножества:** $f(f^{-1}(B)) \subseteq B;\ B \subseteq Y$.

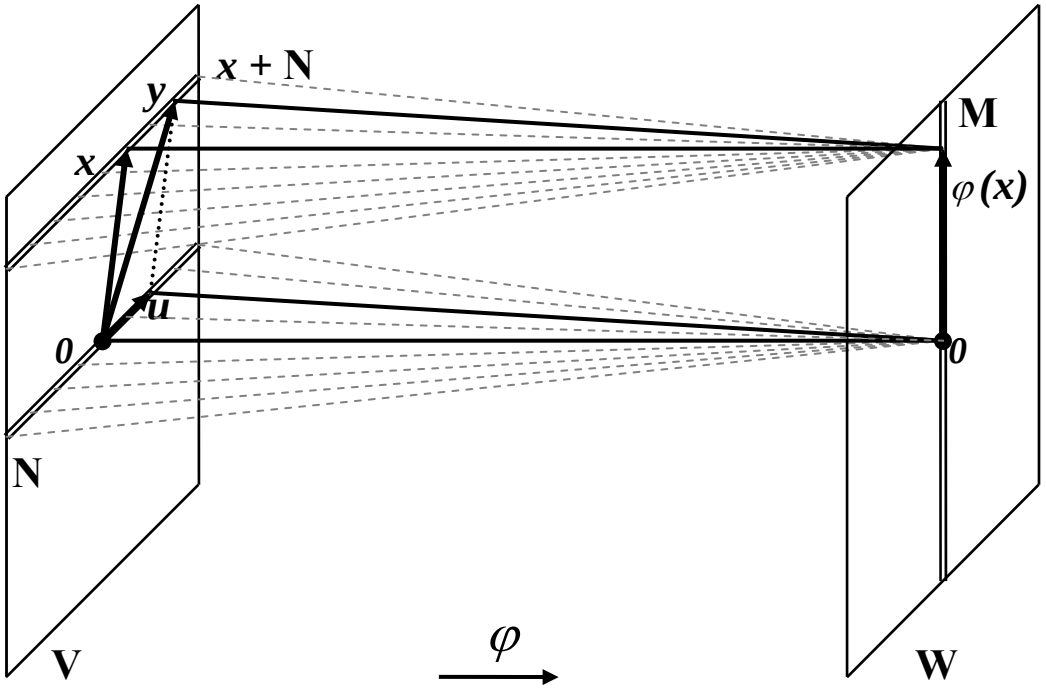


Рис. 15.1 (к теореме 15.1). **Послойное действие линейного оператора:**
$\varphi : V \to W;\ N = \mathrm{Ker}(\varphi);\ M = \mathrm{Im}(\varphi)$.

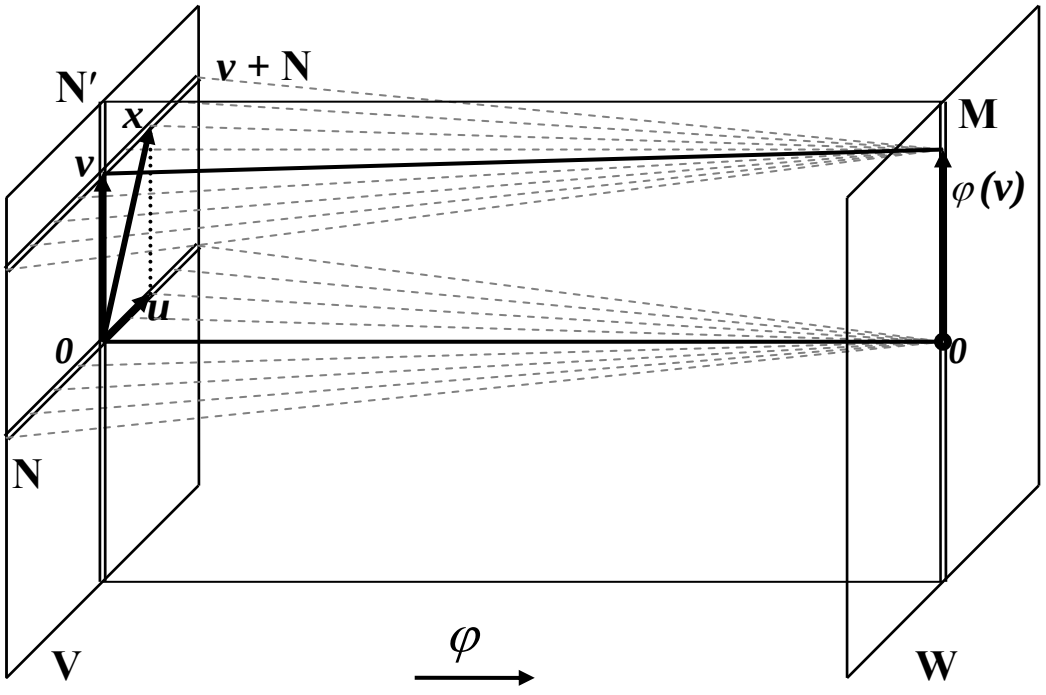


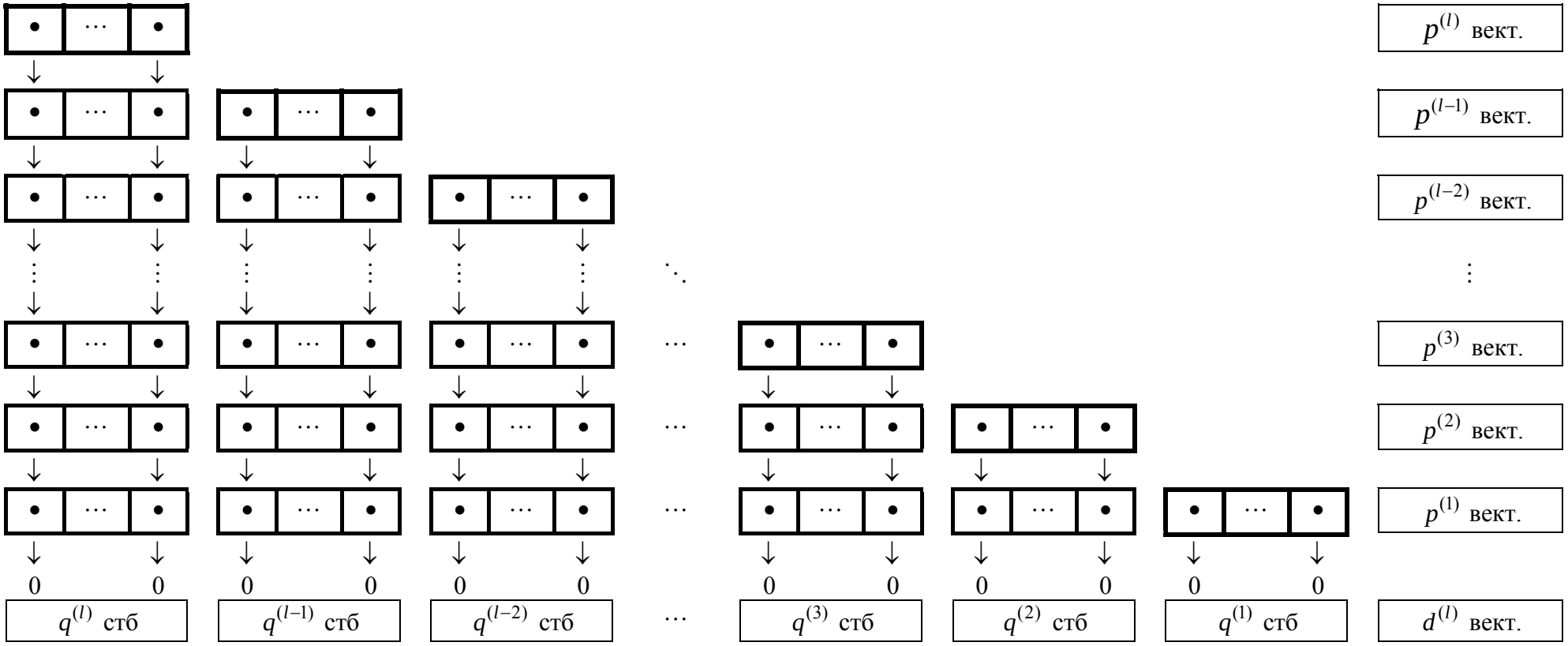
Рис. 15.2 (к теореме 15.2). **Сужение линейного оператора на прямое дополнение к ядру:**

$$\varphi : V \to W;\ N = \mathrm{Ker}(\varphi);\ N' \le V;\ V = N \oplus N';$$
$$M = \mathrm{Im}(\varphi);\ \varphi' = \varphi|_{N'} : N' \xrightarrow{\cong} M.$$

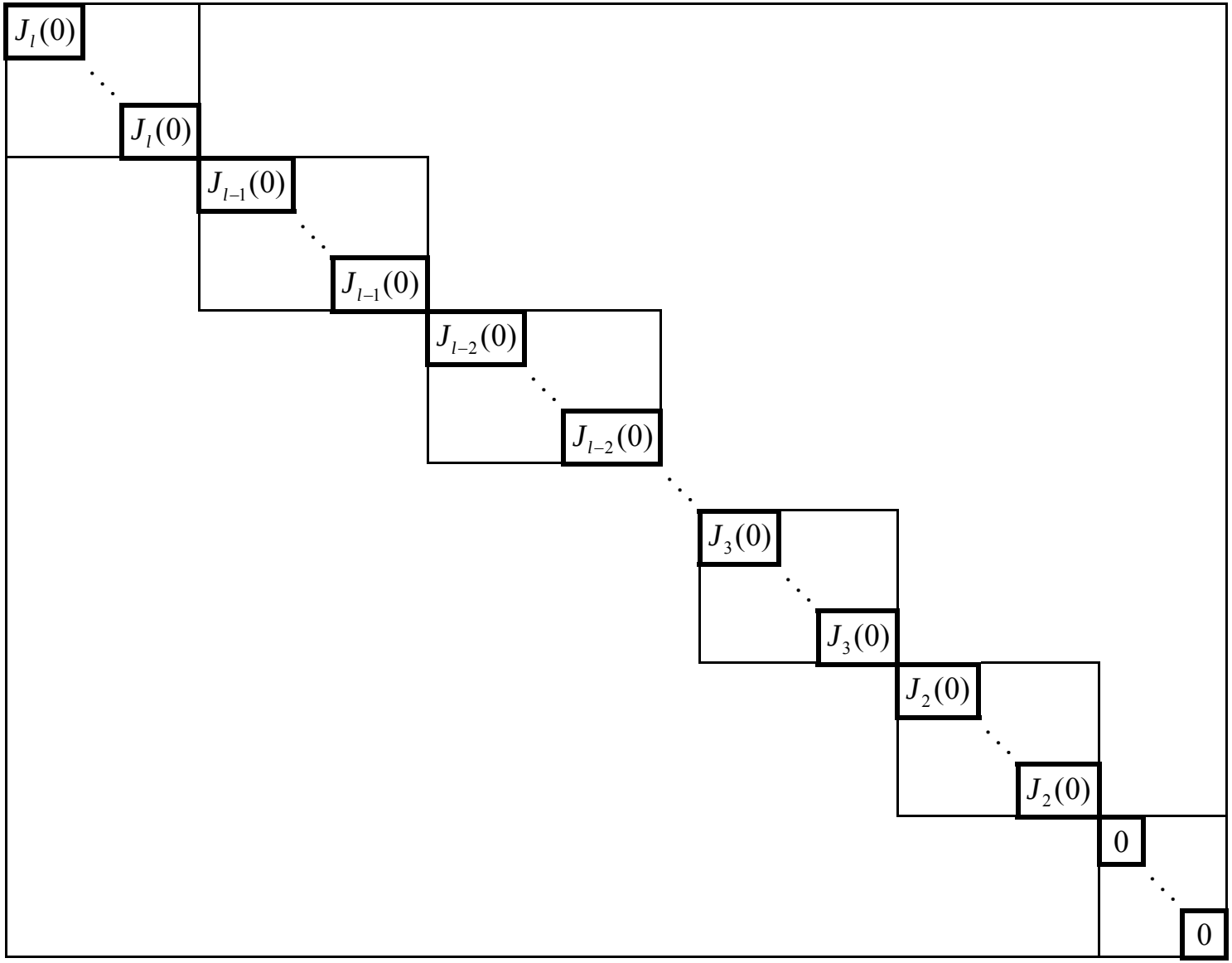
Приложение 3

Столбчатые диаграммы

Диагр. 25.1. Жорданов базис в стабильном ядре линейного эндоморфизма (столбчатая диаграмма $\mathcal{D}_{\text{о}}$)



Диагр. 25.2. Нильпотентная жорданова матрица J_0



Пояснения к диагр. 25.1 и 25.2

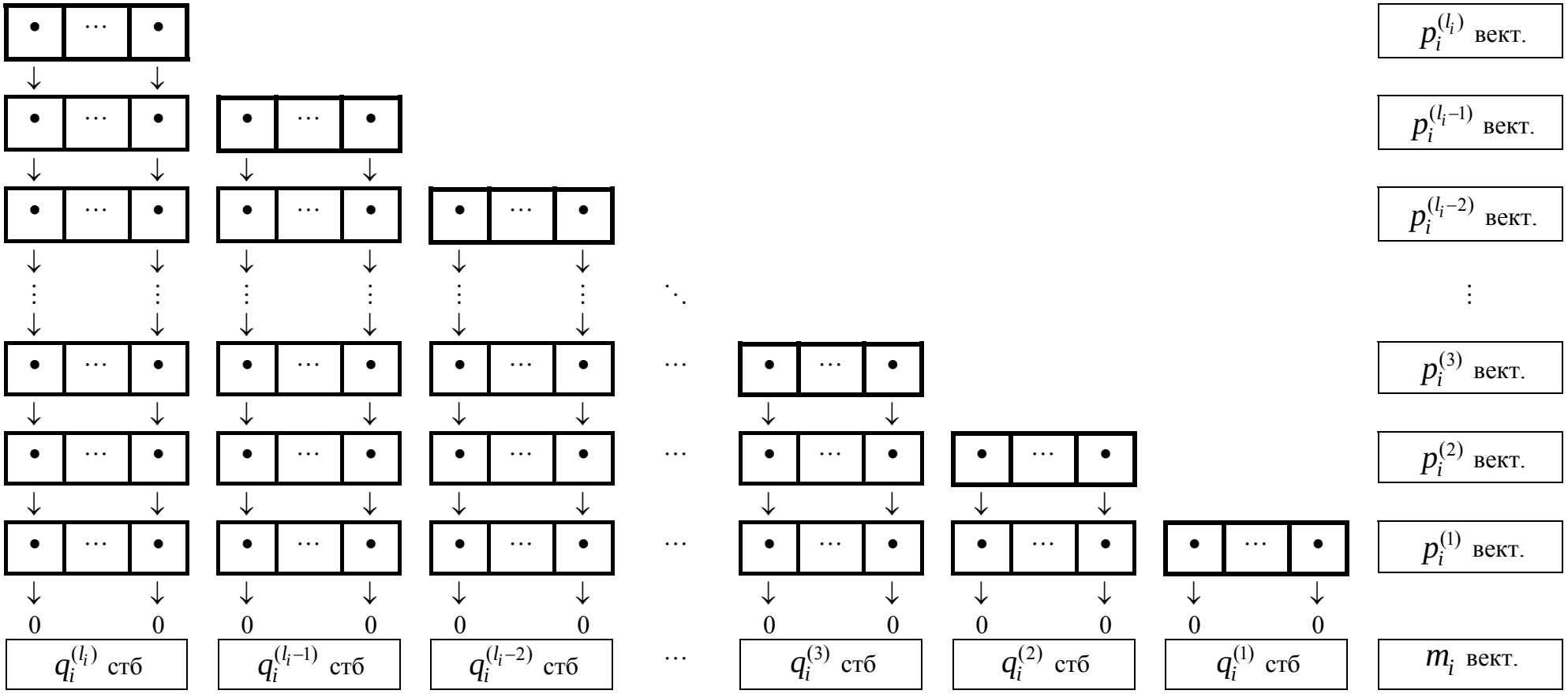
Точки в ячейках диагр. 25.1 изображают базисные векторы в стабильном ядре $N^{(l)}$ линейного эндоморфизма φ (l – показатель стабилизации). Стрелки изображают действие φ. Общее количество векторов равно стабильному дефекту $d^{(l)}$**.** Общее число строк диаграммы 25.1 равно l. Каждая строка (с номером $k = 1,...,l$; нумерация – снизу вверх) изображает базис в прямом дополнении $C^{(k)}$ к предыдущему итерированному ядру $N^{(k-1)}$ в итерированном ядре $N^{(k)}$; размерность этого прямого дополнения равна приращению $p^{(k)}$ итерированных дефектов.

Общее число столбцов равно первому дефекту $d^{(1)} = p^{(1)}$**.** Зоны диагр. 25.1 содержат столбцы одинаковой высоты; длина k-й зоны (нумерация – справа налево) равна абсолютному второму приращению $q^{(k)}$ итерированных дефектов (любая из этих длин, кроме $q^{(l)}$**,** может обращаться в нуль). Сквозная нумерация столбцов производится слева направо; длина столбца с номером j обозначается k_j. Каждый такой столбец изображает базис в некотором (k_j-мерном) циклическом подпространстве Z_j. В этом базисе сужению л.э. φ на Z_j отвечает матрица $\boxed{J_{k_j}(0)}$ – нильпотентный жорданов ящик размера $k_j \times k_j$.

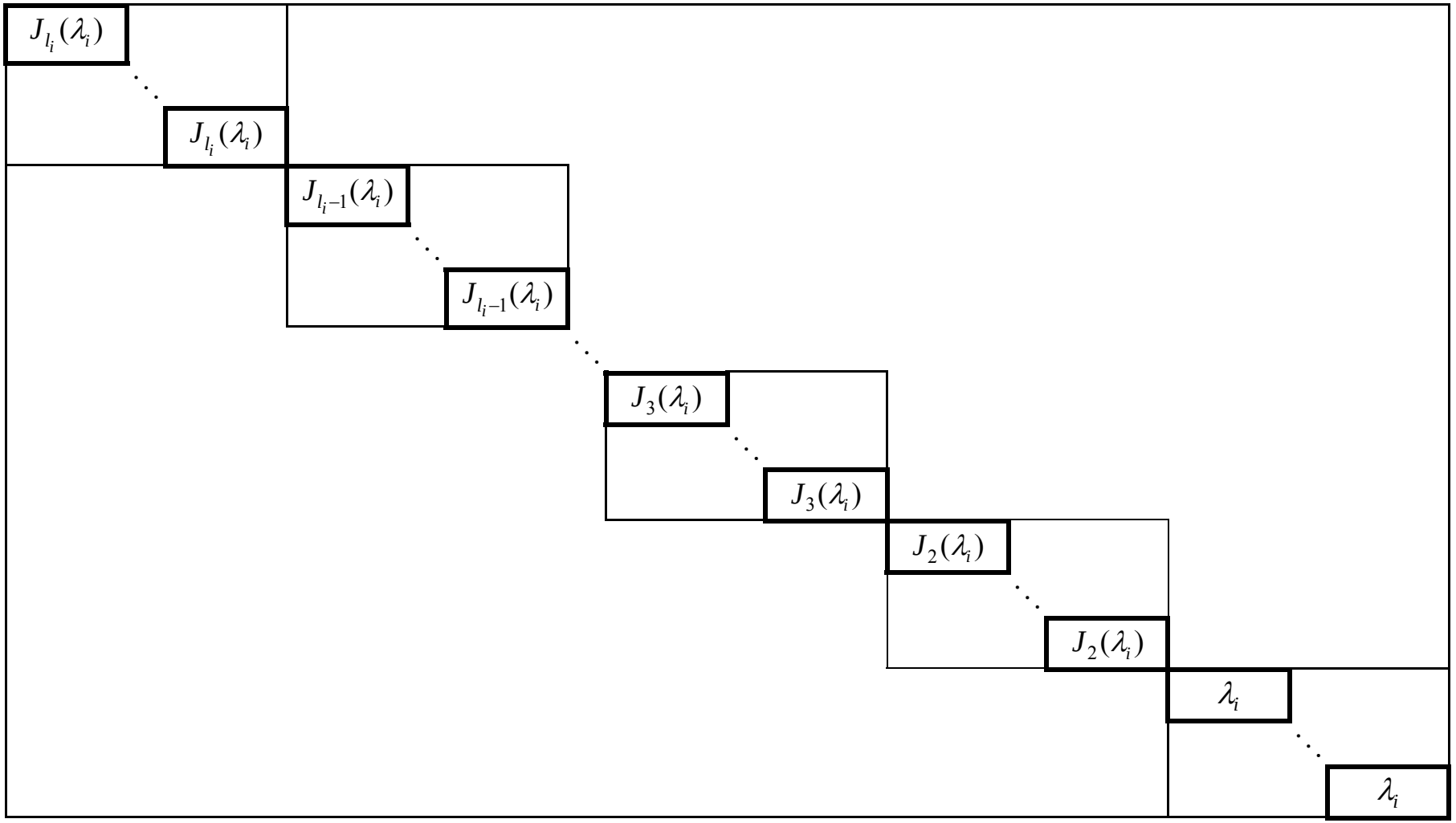
Диагр. 25.2 представляет собой схему строения блочно-диагональной матрицы J_0, отвечающей сужению φ на $N^{(l)}$ (в жордановом базисе, представленном на диагр. 25.1). Общий размер этой матрицы равен $d^{(l)} \times d^{(l)}$.

"Малые" блоки являются нильпотентными жордановыми ящиками, отвечающими столбцам диагр. 25.1. Общее количество "малых" блоков (ящиков) равно первому дефекту $d^{(1)} = p^{(1)}$**.** Максимальный размер ящиков равен $l \times l$; количество ящиков такого размера равно $q^{(l)} > 0$; при $k = 1,...,l-1$ количество ящиков размера $k \times k$ равно $q^{(k)} \geq 0$**.** "Малые" блоки одинакового размера сгруппированы в "средние" блоки, отвечающие зонам диагр. 25.1. Размеры "средних" блоков равны $(k \cdot q^{(k)}) \times (k \cdot q^{(k)})$ ($k = l,...,1$, вниз по диагонали); при $k \leq l-1$ некоторые из них могут отсутствовать. Каждый "средний" блок содержит $q^{(k)}$ "малых" блоков размера $k \times k$. Если $q^{(1)} > 0$**,** то в правом нижнем углу присутствует чисто нулевой "средний" блок размера $q^{(1)} \times q^{(1)}$.

Диагр. 26.1. Жорданов базис в корневом подпространстве $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ (столбчатая диаграмма $\mathcal{D}_i$)



Диагр. 26.2. "Большой" жорданов блок J_i, отвечающий сужению л.э. на корневое подпространство $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$



Пояснения к диагр. 26.1 и 26.2

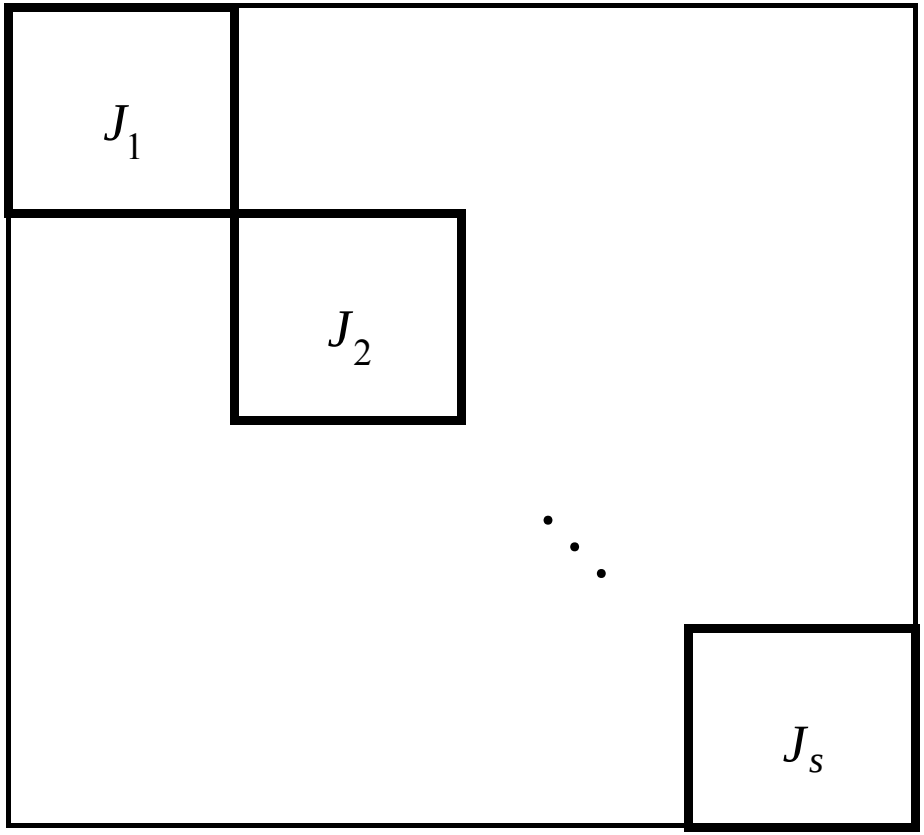
Точки в ячейках диагр. 26.1 изображают базисные векторы в корневом подпространстве $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$ л.э. φ, т.е. в стабильном ядре $N_i^{l_i}$ л.э. $\psi_i = \varphi - \lambda_i \varepsilon$ (l_i – показатель стабилизации для ψ_i; стрелки изображают действие ψ_i). Общее количество векторов равно алгебраической кратности m_i собственного значения λ_i. Общее число строк диаграммы 26.1 равно l_i. Каждая строка (с номером $k = 1,...,l_i$; нумерация – снизу вверх) изображает базис в прямом дополнении $C_i^{(k)}$ к предыдущему итерированному ядру $N_i^{(k-1)}$ в итерированном ядре $N_i^{(k)}$; размерность этого прямого дополнения равна приращению $p_i^{(k)}$ итерированных дефектов.

Общее число столбцов равно первому дефекту $d_i^{(1)} = p_i^{(1)}$, или, что то же, – геометрической кратности n_i собственного значения λ_i**.** Зоны диагр. 26.1 содержат столбцы одинаковой высоты; длина k-й зоны (нумерация – справа налево) равна абсолютному второму приращению $q_i^{(k)}$ итерированных дефектов (любая из этих длин, кроме $q_i^{(l_i)}$**,** может обращаться в нуль). Каждый столбец (высоты k) диаграммы изображает базис в некотором циклическом подпространстве (для л.э. ψ_i). В этом базисе сужению л.э. φ отвечает матрица $\boxed{J_k(\lambda_i)}$ – жорданов ящик размера $k \times k$.

Диагр. 26.2 представляет собой схему строения блочно-диагональной матрицы J_i, отвечающей сужению φ на U_i (в жордановом базисе, представленном на диагр. 26.1). Общий размер этой матрицы равен $m_i \times m_i$.

"Малые" блоки являются жордановыми ящиками, отвечающими столбцам диагр. 26.1. Общее количество "малых" блоков (ящиков) равно геометрической кратности n_i**.** Максимальный размер ящиков равен $l_i \times l_i$; количество ящиков такого размера равно $q_i^{(l_i)} > 0$; при $k = 1,...,l_i - 1$ количество ящиков размера $k \times k$ равно $q_i^{(k)} \geq 0$**.** "Малые" блоки одинакового размера сгруппированы в "средние" блоки, отвечающие зонам диагр. 26.1. Размеры "средних" блоков равны $(k \cdot q_i^{(k)}) \times (k \cdot q_i^{(k)})$ ($k = l_i,...,1$, вниз по диагонали); при $k \leq l_i - 1$ некоторые из них могут отсутствовать. Каждый "средний" блок содержит $q_i^{(k)}$ "малых" блоков размера $k \times k$. Если $q_i^{(1)} > 0$**,** то в правом нижнем углу присутствует диагональный "средний" блок размера $q_i^{(1)} \times q_i^{(1)}$.

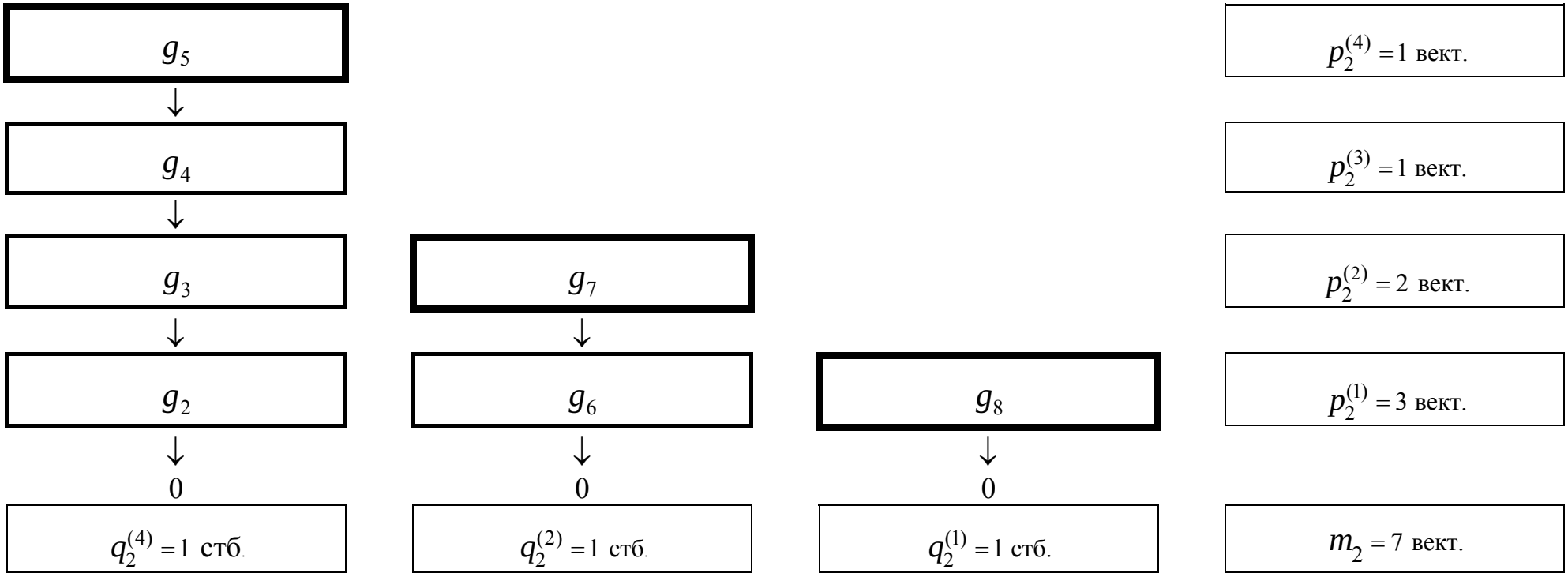
Диагр. 27.1. Жорданова матрица J', отвечающая сужению л.э. φ на корневую сумму $U' = Q(\varphi)$



Пояснения к диагр. 27.1

Матрица J' размера $m' \times m'$, где m' – сумма алгебраических кратностей собственных значений; отвечает сужению л.э. φ на корневую сумму $U' = Q(\varphi)$, т. е. (прямую) сумму всех корневых подпространств $U_i = Q_{\lambda_i}(\varphi)$. Диагональные $(m_i \times m_i)$-блоки J_i, соответствующие сужениям φ на U_i, представлены на диагр. 26.2.

Диагр. 28.1 (к демонстрационному примеру п. 28.3)**.** Жорданов базис в корневом подпространстве $U_2 = Q_{\lambda_2}(\varphi)$ (столбчатая диаграмма $\mathcal{D}_2$)



Пояснения к диагр. 28.1

Столбчатая диаграмма содержит $m_2 = 7$ векторов, составляющих базис в корневом подпространстве $U_2 = Q_{-2}(\varphi)$; три вектора нижней строки составляют базис в собственном подпространстве $W_2 = S_{-2}(\varphi)$. Стрелки изображают действие л.э. $\psi_2 = \varphi - \lambda_2\varepsilon = \varphi + 2\varepsilon$. Показатель стабилизации $l_2 = 4$ задает высоту наивысшего столбца. В наличии четыре зоны по высоте столбцов: одна из них (третья справа) пуста, остальные имеют единичную длину.

Приложение 4

Содержание [$\mathbf{A_1}$] — первой части курса

Предисловие

Глава 1. Системы линейных уравнений и алгебра матриц

§ 1. Системы линейных уравнений и их решения. Матрицы и действия над ними
§ 2. Законы матричной алгебры
§ 3. Свойства решений систем линейных уравнений
§ 4. Равносильные системы линейных уравнений. Элементарные преобразования. Понятие о методе Гаусса
§ 5. Метод Жордана — Гаусса для матриц
§ 6. Метод Жордана — Гаусса для систем линейных уравнений
§ 7. Некоторые типовые задачи: системы линейных уравнений с параметром, линейные матричные уравнения

Глава 2. Арифметические линейные пространства. Базисы и размерности

§ 8. Системы векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ и их линейные оболочки
§ 9. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов
§ 10. Базисы в линейных подпространствах пространства $\mathbb{R}^n$
§ 11. Равномощность базисов в подпространстве. Понятие размерности подпространства. Ступенчатый ранг матрицы
§ 12. Столбцовый и строчный ранги матрицы
§ 13. Алгоритмы построения базисов и вычисления размерностей и рангов
§ 14. Обратимые квадратные матрицы
§ 15. Линейные операторы в арифметических линейных пространствах

Глава 3. Теория перестановок

§ 16. Перестановки и алгебраические действия над ними
§ 17. Циклические перестановки. Разложение перестановки в произведение независимых циклов
§ 18. Степени перестановки. Порядок перестановки
§ 19. Разложение перестановки в произведение транспозиций
§ 20. Знак и четность перестановки
§ 21. Число инверсий в перестановке. Второй способ определения знака перестановки
§ 22. Вычисления с перестановками в системе Maple

Глава 4. Теория определителей

§ 23. Определение определителя квадратной матрицы. Определитель треугольной матрицы. Определитель транспонированной матрицы
§ 24. Определитель квадратной матрицы как полилинейная и антисимметрическая функция ее столбцов (строк)
§ 25. Вычисление определителя с помощью разложения по столбцу (строке)
§ 26. Описание всех полилинейных и антисимметрических функций от столбцов (строк) квадратной матрицы

§ 27. Определитель блочно-треугольной матрицы. Определитель произведения матриц
§ 28. Присоединенная матрица. Выражение обратной матрицы через присоединенную
§ 29. Решение квадратных систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера
§ 30. Минорный ранг матрицы. Вторая теорема о ранге матрицы
§ 30а. Рекуррентности и определители

Глава 5. Поле комплексных чисел
§ 31. Векторная модель поля комплексных чисел
§ 32. Комплексные числа в тригонометрической форме
§ 33. Корни из единицы. Первообразные корни
§ 34. Показательная функция комплексного аргумента. Показательная форма комплексного числа
§ 35. Основная теорема алгебры

Глава 6. Алгебра многочленов
§ 36. Векторная модель кольца многочленов (над полем)
§ 37. Деление с остатком и отношение делимости в кольце многочленов (над полем)
§ 38. Алгоритм Евклида отыскания наибольшего общего делителя в кольце многочленов над полем
§ 39. Многочлены и полиномиальные функции. Корни многочленов. Теорема Безу
§ 40. Кратность корня. Оценка суммы кратностей корней. Алгебраически замкнутые поля. Разложимость многочленов на линейные множители. Теорема Виета
§ 41. Схема Горнера
§ 42. Рациональные корни многочленов с рациональными коэффициентами
§ 43. Многочлены с действительными коэффициентами и их разложение на линейные и квадратичные множители
§ 44. Неразложимые элементы в целостном кольце. Простые элементы. Неприводимые многочлены
§ 45. Факториальные кольца. Факториальность кольца целых чисел (основная теорема арифметики) и факториальность кольца многочленов (над полем)
§ 46. Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Неприводимые многочлены над полем $\mathbb{Q}$ и над кольцом $\mathbb{Z}$
§ 47. Дифференцирование в кольце многочленов. Отделение кратных множителей
§ 48. Первоначальные понятия теории многочленов от нескольких переменных
§ 49. Симметрические многочлены
§ 50. Ферро, Тарталья, Кардано, Феррари и другие

Приложение 1. Рисунки к главе 5

Приложение 2. Таблицы к главе 6

Список рекомендуемой литературы

ЯЦКИН Николай Иванович

Л И Н Е Й Н А Я А Л Г Е Б Р А

ТЕОРЕМЫ И АЛГОРИТМЫ

Учебное пособие

Директор издательства *Л. В. Михеева*
Технический редактор *И. С. Сибирева*

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 28.02.2008 г.
Формат 60 × 84$^{1}/_{16}$. Бумага писчая. Печать плоская.
Усл. печ. л. 35,34. Уч.-изд. л. 32,0. Тираж 150 экз.

Издательство «Ивановский государственный университет»
✉ 153025 Иваново, ул. Ермака, 39
☎ (4932) 35-63-81 E-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

Типография ГОУ СПО «Ивановский энергетический колледж»
153025 Иваново, ул. Ермака, 41 ☎ (4932) 37-52-44, 32-50-89
Адрес в Интернете: www.tip1.ru