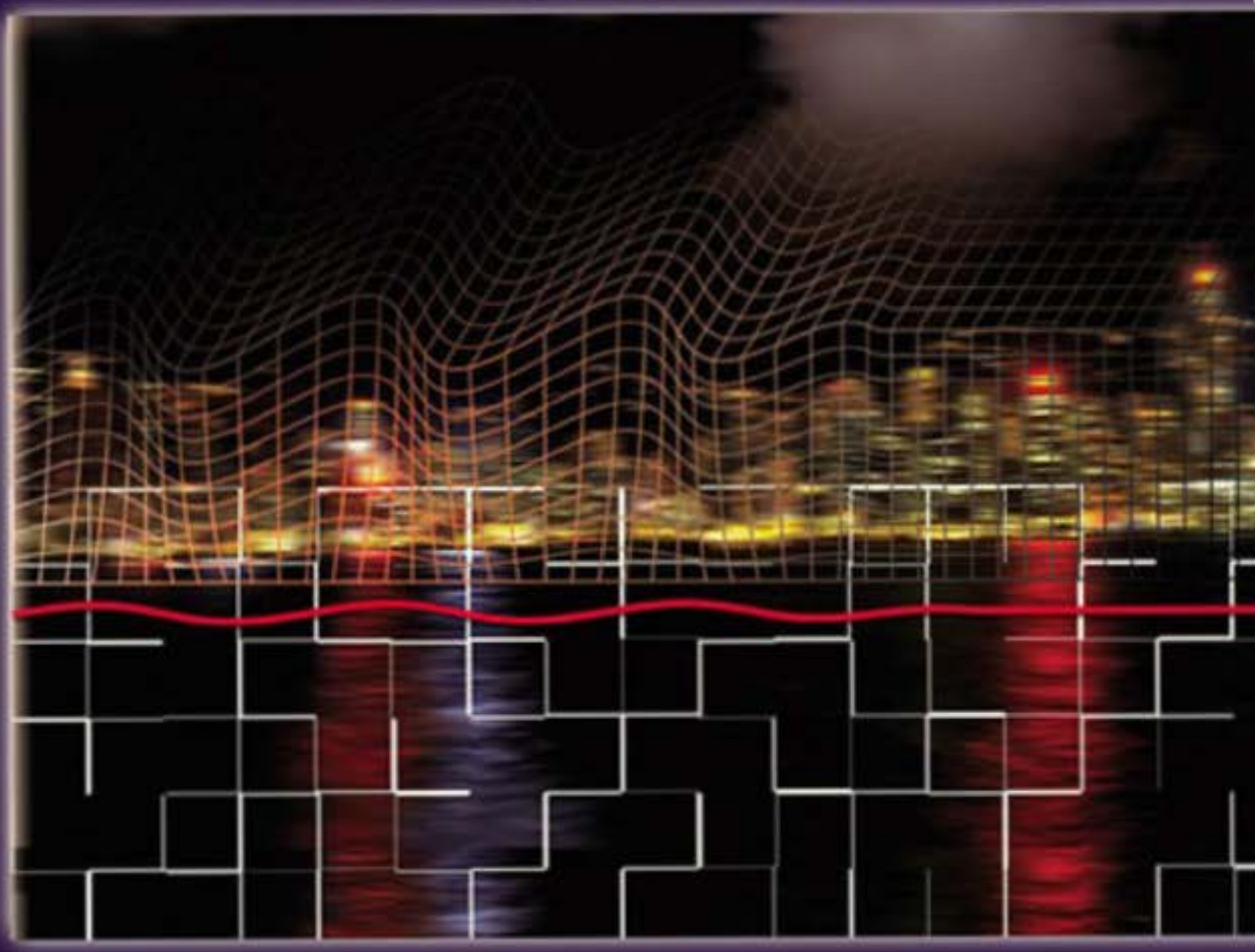
ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЕОФИЗИКЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЕОФИЗИКЕ

2-Е ИЗДАНИЕ (ЭЛЕКТРОННОЕ)

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2014

УДК 519.24
ББК 26.2
Я30

Серия основана в 2009 г.

Ягола А. Г.

Я30 Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике [Электронный ресурс] / А. Г. Ягола, Ван Янфей, И. Э. Степанова, В. Н. Титаренко. — 2-е изд. (эл.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 216 с. : ил. — (Математическое моделирование).

ISBN 978-5-9963-2343-2

Книга написана на основе курса лекций, читавшихся студентам физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. В качестве основных приложений рассматривались обратные задачи геофизики. Математический аппарат, описанный в первой главе, с успехом применялся для решения обратных задач астрофизики, обработки изображений, колебательной спектроскопии, электронной микроскопии, акустики и многих других.

Книга будет полезна студентам, аспирантам, научным сотрудникам, интересующимся современными методами решения обратных, в том числе некорректно поставленных, задач.

УДК 519.24
ББК 26.2

По вопросам приобретения обращаться:
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru,
http://www.Lbz.ru

ISBN 978-5-9963-2343-2 © БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. **Некорректно поставленные задачи** 7

§ 1. Введение 7

§ 2. Корректность постановки математической задачи 8

§ 3. Метрические, нормированные и евклидовы пространства 9

§ 4. Элементы теории линейных операторов 19

§ 5. Примеры некорректно поставленных задач 27

§ 6. Понятие регуляризирующего алгоритма 33

§ 7. Некорректные задачи на компактах 39

Литература 43

Глава 2. **Задачи минимизации** 45

§ 8. Постановка экстремальных задач 45

§ 9. Разрешимость задачи оптимизации 46

§ 10. Выпуклые множества 48

§ 11. Выпуклые функционалы 53

§ 12. Разрешимость задачи выпуклого программирования . . . 57

§ 13. Критерии выпуклости и сильной выпуклости 62

§ 14. Сведения о матрицах 67

§ 15. Метод наименьших квадратов. Метод псевдообращения 70

§ 16. Минимизирующие последовательности 74

§ 17. Некоторые методы решения одномерных экстремальных задач 76

§ 18. Метод скорейшего спуска 80

§ 19. Метод сопряженных градиентов 84

§ 20. Метод Ньютона 90

§ 21. Методы нулевого порядка 94

§ 22. Метод условного градиента 107

§ 23. Метод проекции сопряженных градиентов 108

Литература 111

Глава 3. **Численные методы решения некорректных задач** 113

§ 24. Компактные множества функций специального вида . . . 113

§ 25. Истокопредставимость решения 117

§ 26. Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова 119

§ 27. Обобщенный принцип невязки 122
§ 28. Несовместные некорректные задачи 126
§ 29. Интегральные уравнения Фредгольма I рода 128
§ 30. Ряд, интеграл и преобразование Фурье 130
§ 31. Вейвлеты 134
§ 32. Уравнение типа свертки 138
Литература 141

Глава 4. **Задачи гравиметрии** 143
§ 33. Введение 143
§ 34. Прямые задачи гравиметрии 145
§ 35. Обратные задачи гравиметрии 158
§ 36. Численные методы 161
§ 37. Примеры 164
Литература 169

Глава 5. **Задачи магниторазведки** 171
§ 38. Введение 171
§ 39. Теория магнитного потенциала 173
§ 40. Прямые задачи магниторазведки 174
§ 41. Обратные задачи магниторазведки 177
§ 42. Примеры 178
Литература 183

Глава 6. **Задачи сейсморазведки** 184
§ 43. Введение 184
§ 44. Отражение и преломление волн 190
§ 45. Сейсмокаротаж 197
Литература 200

Глава 7. **Спектральное распределение аэрозоля** 201
§ 46. Введение 201
§ 47. Функции спектрального распределения 202
§ 48. Рэлеевское рассеяние 205
§ 49. Рассеяние Ми 206
§ 50. Оптическая толщина 207
Литература 208

Предметный указатель 209

Именной указатель 215

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена методам решения так называемых обратных задач. Многочисленные обратные задачи можно найти в различных областях естествознания — физике, химии, биологии. Если экспериментатор не имеет возможности непосредственного измерения характеристик исследуемого объекта, ему приходится проводить обработку и интерпретацию всех доступных экспериментальных данных, решая при этом обратные задачи. Так, астрофизик не может активно воздействовать на процессы, происходящие на далеких звездах и галактиках, ему приходится делать заключения о физических характеристиках весьма удаленных объектов по их косвенным проявлениям, доступным измерениям на Земле или вблизи Земли (на космических станциях). Прекрасные примеры обратных задач можно найти в медицине, прежде всего нужно отметить вычислительную (или компьютерную) томографию. Хорошо известны приложения обратных задач в геофизике (на самом деле, легче и дешевле судить о том, что делается под поверхностью Земли, решая обратные задачи, чем заниматься бурением глубоких скважин), радиоастрономии, спектроскопии, ядерной физике и т. д., и т. п. В последнее время интенсивно развиваются методы исследования обратных задач в экономике.

Многие обратные задачи относятся к числу так называемых некорректно поставленных — при обработке приближенных данных, полученных, например, из эксперимента, малым изменениям входных данных могут соответствовать как угодно большие изменения решения. Современная теория решения некорректно поставленных задач, основанная на работах российских математиков — А. Н. Тихонова, В. К. Иванова, М. М. Лаврентьева и их научных школ, позволяет преодолеть возникающие трудности. Цель настоящей книги — познакомить читателей с основами этой теории.

Книга написана на основе курса лекций, читавшихся для студентов физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносо-

ва. В качестве основных приложений рассматривались обратные задачи геофизики. Математический аппарат, описанный в первой главе, с успехом применялся для решения обратных задач астрофизики, обработки изображений, колебательной спектроскопии, электронной микроскопии, акустики и многих других. Поэтому книга может быть полезна для студентов, аспирантов, научных сотрудников, интересующихся современными методами решения обратных, в том числе некорректно поставленных, задач.

Авторы благодарят Российский фонд фундаментальных исследований и Государственный фонд наук Китая за частичную поддержку их совместных научных исследований, результаты которых отражены в данной книге (грант 12-01-91153-ГФЕН_а).

Глава 1

НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой книге мы познакомимся с основными понятиями теории так называемых некорректных (или некорректно поставленных) задач и численными методами их решения. Основателем этой теории является выдающийся российский математик Андрей Николаевич Тихонов, столетие со дня рождения которого мы отметили в 2006 г. Андрей Николаевич в течение многих лет заведовал кафедрой математики физического факультета МГУ, а в 1970 г. стал создателем и первым деканом факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ. Важно знать, что значительная часть жизни Андрея Николаевича была связана с геофизикой.

В 1937 г. по инициативе Отто Юльевича Шмидта был организован Институт теоретической геофизики (ИТГ) АН СССР, директором которого он был до 1949 г. Институт создавался с целью объединения усилий физиков, математиков, геофизиков, механиков для исследования Земли современными физико-математическими методами. Сложность и практическая важность изучаемых геофизикой процессов всегда привлекали ученых разных специальностей. О. Ю. Шмидту удалось собрать в этом институте целый ряд крупных ученых: академиков А. Н. Крылова, А. Н. Колмогорова, П. П. Лазарева, Л. С. Лейбензона и в дальнейшем ставших академиками А. Н. Тихонова, Г. А. Гамбурцева, В. В. Шулейкина и др. По приглашению Отто Юльевича Андрей Николаевич с 1937 г., оставаясь в МГУ, начал работать в новом институте научным сотрудником, а затем заведующим отделом математической геофизики. После реорганизации ИТГ в 1946 г. Андрей Николаевич стал сотрудником Геофизического института АН СССР. В 1939 г. в возрасте 33 лет Андрей Николаевич был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР по отделению математических и естественных наук по специальности «геолого-

географические науки». (В послевоенные годы в справочниках указывалась специальность «геофизика».)

После начала Великой Отечественной войны Институт теоретической геофизики, вместе с другими учреждениями Академии наук, был эвакуирован в Казань, а затем частично в Уфу. Часть эксплуатируемых нефтяных месторождений оказалась на территории, занятой немцами или под угрозой их захвата. Поэтому был развернут поиск нефти между Волгой и Уралом. Андрей Николаевич был привлечен к работам по сейсморазведке и электроразведке. Он работал в составе группы, занимавшейся расшифровкой результатов электрозондирования земной коры в районе г. Ишимбай в Башкирии. Иногда ему удавалось быть в Казани с семьей, но большую часть времени он проводил в разъездах. Именно в это время (1943 г.) им была опубликована в Докладах АН СССР знаменитая работа «Об устойчивости обратных задач», положившая начало современной теории некорректных задач. Андрей Николаевич всегда считал, что эта теория и возникла из-за необходимости решать важные прикладные (в том числе геофизические) задачи, и развитие теории теснейшим образом связано с приложениями.

§ 2. КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В качестве основного объекта наших исследований в этой книге мы будем рассматривать операторное уравнение вида:

$$Az = u, \tag{2.1}$$

где A — линейный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U.

Жак Адамар (Jacques Hadamard), 1865–1963

Французским математиком Адамаром были сформулированы следующие условия корректности постановки математических задач, которые мы рассмотрим на примере записанного операторного уравнения. Задача решения операторного уравнения называется **корректно поставленной** (по Адамару), если выполнены следующие три условия:

1) решение существует $\forall u \in U$;
2) решение единственно;
3) если $u_n \to u$, $Az_n = u_n$, $Az = u$, то $z_n \to z$.

Условие 2) обеспечивается тогда и только тогда, когда оператор A является взаимно однозначным. Условия 1) и 2) означают, что существует обратный оператор A^{-1}, причем его **область определения** $D(A^{-1})$ (или **область значений** оператора $R(A)$) совпадает с U. В этом случае говорят, что оператор A есть биекция Z на U. Условие 3) означает, что обратный оператор является непрерывным, т. е. «малым» изменениям правой части u соответствуют «малые» изменения решения z. Более того, Адамар считал, что только корректные задачи должны рассматриваться при решении прикладных задач. Однако хорошо известны примеры некорректно поставленных задач, к рассмотрению и численному решению которых приходится прибегать при рассмотрении многочисленных прикладных задач. Хочется сразу отметить, что в дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда не выполняется условие 3). Ниже мы увидим, что в некоторых случаях удается добиться выполнения условий 1) и 2) с помощью уточнения понятия решения и введения различных обобщенных решений. Нужно отметить, что устойчивость и неустойчивость решения связаны с тем, как определяется пространство решений Z. Выбор пространства решений (в том числе и нормы в нем) обычно определяется требованиями прикладной задачи.

Поэтому сначала мы должны определить пространства, с которыми мы будем встречаться в дальнейшем. Напомним также некоторые основные определения.

§ 3. МЕТРИЧЕСКИЕ, НОРМИРОВАННЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Множество L называется (вещественным) **линейным пространством**, если для любых двух его элементов x, y определен элемент $x+y \in L$ (называемый **суммой** элементов x и y), и для любого элемента $x \in L$ и любого (вещественного) числа α определен элемент $\alpha x \in L$ (называемый **произведением** элемента x на число α), причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y \in L$: $x + y = y + x$ (**коммутативность сложения**);
2) для любых элементов $x, y, z \in L$: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (**ассоциативность сложения**);

3) существует элемент $0 \in L$ (называемый **нулевым элементом**, или **нулем** пространства L), такой, что для любого элемента $x \in L$: $x + 0 = x$ (существование нулевого элемента);
4) для любого элемента $x \in L$ существует элемент $-x \in L$ (называемый **обратным** к x), такой, что $x + (-x) = 0$ (существование обратного элемента);
5) для любых элементов $x, y \in L$ и любого (вещественного) числа α: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (**дистрибутивность умножения** суммы элементов на число);
6) для любых (вещественных) чисел α и β и любого элемента $x \in L$: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (**дистрибутивность умножения** суммы чисел на элемент);
7) для любых (вещественных) чисел α, β и любого элемента $x \in L$: $(\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta x)$ (**ассоциативность умножения** на число);
8) для любого элемента $x \in L$: $1 \cdot x = x$ (свойство **единицы**).

Элементы линейного пространства называются **векторами**, поэтому линейное пространство иногда называется **векторным**.

Пусть даны элементы $x_1, \ldots, x_n \in L$. Всякая сумма вида $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — числа, называется **линейной комбинацией** элементов $x_1, \ldots, x_n$. Элементы $x_1, \ldots, x_n$ называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулевому элементу, где не все числа α_k равны нулю. Если же равенство $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ возможно только при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, то элементы $x_1, \ldots, x_n$ называются **линейно независимыми**. Линейное пространство называется **n-мерным**, если в нем существует n линейно независимых векторов, а всякий $n + 1$ вектор линейно зависим. Набор любых n линейно независимых векторов в n-мерном пространстве называется **базисом**.

Пример 3.1 (*линейные пространства*).

1) Конечномерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, изучаемое в курсе линейной алгебры.
2) Пространство (вещественных) функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Это пространство можно рассматривать как линейное, если определить сумму элементов и умножение на вещественное число обычным образом. Нулевым элементом

этого пространства является функция, тождественно равная нулю. Заметим, что это пространство бесконечномерное.

Множество M называется **метрическим пространством**, если для любых двух его элементов $x, y \in M$ определено вещественное число $\rho(x, y)$ (называемое **метрикой**, или **расстоянием**), причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y \in M$: $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда элементы x и y совпадают ($x = y$) (**неотрицательность метрики**);
2) для любых элементов $x, y \in M$: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (**симметричность метрики**);
3) для любых элементов $x, y, z \in M$: $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z)$ (**неравенство треугольника**).

Можно дать определение открытого и замкнутого множества. Для этого введем понятие открытого (замкнутого) шара. **Открытым шаром с центром** в точке $x_0 \in M$ и **радиусом** $r > 0$ называется множество $S_r(x_0) = \{x \in M : \rho(x, x_0) < r\}$. **Замкнутым шаром** с центром в точке $x_0 \in M$ и радиусом $r > 0$ называется множество $\bar{S}_r(x_0) = \{x \in M : \rho(x, x_0) \leqslant r\}$.

Множество $A \subset M$ называется **ограниченным**, если оно содержится целиком в некотором шаре. Множество $A \subset M$ называется **открытым**, если для любой точки $x_0 \in M$ существует радиус $r > 0$, такой, что $S_r(x_0) \subset A$.

Точка $x_0 \in M$ называется **точкой прикосновения** множества $A \subset M$, если любой шар $S_r(x_0)$ содержит хотя бы одну точку $x \in A$. Совокупность всех точек прикосновения множества A называется **замыканием** этого множества и обозначается как $\overline{A}$. Множество $A \subset M$ называется **замкнутым**, если $\overline{A} = A$.

Заметим, что метрическое пространство не обязательно является линейным. Дадим определение нормированного пространства.

Определение 3.1. Линейное пространство N называется **нормированным**, если для любого элемента $x \in N$ определено вещественное число $\|x\|$ (называемое **нормой**), причем выполнены следующие условия:

1) для любого элемента $x \in N$: $\|x\| \geqslant 0$, а $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) для любого элемента $x \in N$ любого (вещественного) числа α: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (неотрицательная однородность нормы);
3) для любых элементов $x, y \in N$: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (**неравенство треугольника**).

Нормированное пространство является метрическим, если определить расстояние как $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Пусть имеется некоторое нормированное пространство N, в котором двумя способами введены нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. Норма $\|x\|_1$ **подчинена** норме $\|x\|_2$, если существует постоянная $\beta > 0$, такая, что для любого элемента $x \in N$:

$$\|x\|_1 \leqslant \beta\|x\|_2. \tag{3.1}$$

Нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ называются **эквивалентными**, если существуют числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, такие, что для любых $x \in N$:

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1. \tag{3.2}$$

Эквивалентность норм является **отношением эквивалентности**, т. е. обладает следующими свойствами:
1) **рефлексивность**: $\|x\| \sim \|x\|$,
2) **симметричность**: если $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$, то $\|x\|_2 \sim \|x\|_1$,
3) **транзитивность**: если $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$ и $\|x\|_2 \sim \|x\|_3$, то $\|x\|_1 \sim \|x\|_3$.

Знак «$\sim$» означает эквивалентность норм.

Теорема 3.1. *Во всяком конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

В нормированном пространстве легко определить понятие сходимости последовательностей.

Определение 3.2. Последовательность элементов $x_n \in N$, $n = 1, 2, \ldots$, **сходится по норме пространства** N к элементу $x \in N$ (обозначается $x_n \to x$ при $n \to \infty$, x называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$), если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Докажем теперь, что из сходимости по норме следует сходимость норм элементов последовательности к норме предельного элемента. Обратное, очевидно, неверно.

Лемма 3.1. *Если $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то $\|x_n\| \to \|x\|$.*

□ Докажем сначала неравенство, тривиально следующее из неравенства треугольника: для любых элементов $x, y \in N$:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|. \tag{3.3}$$

На самом деле, из неравенства треугольника следует $\|x\| = \|x-y+y\| \leqslant \|x-y\|+\|y\|$. Отсюда $\|x\|-\|y\| \leqslant \|x-y\|$. Меняя x и y местами, получаем $\|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|x - y\| + \|x\|$, или $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|$. Из этих двух неравенств следует написанное выше. Пусть теперь $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leqslant \|x_n - x\| \to 0$, из чего и следует утверждение леммы. ■

Определение 3.3. Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, элементов нормированного пространства N называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K, такой, что для любого $n \geqslant K$ и любого натурального p: $\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \varepsilon$.

Утверждение 3.1. *Любая последовательность, сходящаяся в нормированном пространстве N, является фундаментальной.*

Пример 3.2 (***нормированное пространство***).

1) Конечномерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.
2) Пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Норма в пространстве $C[a, b]$ определяется как

$$\|y\|_{C[a,b]} = \max\{|y(s)|, s \in [a, b]\}. \tag{3.4}$$

Сходимость по норме пространства $C[a, b]$ называется **равномерной сходимостью**.

Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy), 1789–1857

Свойства равномерно сходящихся последовательностей непрерывных функций изучались в курсе математического анализа. В частности, был доказан критерий Коши для равномерной сходимости, а именно, необходимым и достаточным условием равномерной сходимости функциональной последовательности является ее фундаментальность.

Стефан Банах (Stefan Banach), 1892–1945

Нормированное пространство называется **полным**, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится. Полное нормированное пространство называется **банаховым**.

В курсе математического анализа было доказано, что критерий Коши является не только необходимым, но и достаточным условием равномерной сходимости. Поэтому пространство $C[a,b]$ является банаховым. Очевидно, свойством полноты обладает и пространство $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем нам потребуется и пространство функций, непрерывных с производными до p-го порядка включительно на интервале $[a,b]$, сходимость в котором является равномерной со всеми производными до p-го порядка ($p \geqslant 0$ — целое). Такое пространство обозначается $C^{(p)}[a,b]$ ($C^{(0)}[a,b] = C[a,b]$). Можно ввести много различных норм в этом пространстве, порождающих указанный выше тип сходимости. Из всех таких (эквивалентных) норм для нас удобнее всего будет следующая:

$$\|y\|_{C^{(p)}[a,b]} = \sum_{k=0}^{p} \max\left\{|y^{(k)}(s)|, s \in [a,b]\right\}. \tag{3.5}$$

Евклид (*Ευκλίδης*), около 300 г. до н. э.

Линейное пространство E называется **евклидовым**, если для любых двух элементов $x, y \in E$ определено вещественное число (x,y), называемое **скалярным произведением**, причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y \in E$: $(x,y) = (y,x)$ (**симметричность**);
2) для любых элементов $x_1, x_2, y \in E$: $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (**аддитивность** по первому аргументу);
3) для любых элементов $x, y \in E$ и любого вещественного числа α: $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ (**однородность** по первому аргументу) (в силу условий 2) и 3) и симметричности скалярное произведение является линейным как по первому, так и по второму аргументу);
4) для любого $x \in E$: $(x,x) \geqslant 0$, причем $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ (**свойство скалярного квадрата**).

Виктор Яковлевич Буняковский, 1804–1889

Скалярное произведение порождает норму: $\|x\|_E = \sqrt{(x,x)}$. Справедливо **неравенство Коши—Буняковского**:

Теорема 3.2. *В евклидовом пространстве выполняется неравенство:*

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{3.6}$$

□ Рассмотрим функцию $f(\alpha) = (\alpha x+y, \alpha x+y)$. В силу свойства скалярного квадрата получаем, что $f(\alpha) \geqslant 0$. В то же время

$$f(\alpha) = \alpha^2(x,x) + 2\alpha(x,y) + (y,y), \tag{3.7}$$

т. е. функция является квадратным трехчленом относительно переменной α. Для того чтобы $f(\alpha) \geqslant 0$ при любом α, дискриминант должен быть меньше или равен нулю. Поэтому $4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \leqslant 0$, откуда и следует неравенство (3.6). ■

Равенство в (3.6) выполняется тогда и только тогда, когда элементы x и y линейно зависимы. Векторы x и y называются **ортогональными**, если $(x,y) = 0$, и обозначаются как $x \perp y$.

Пример 3.3 (***конечномерное евклидово пространство***). Пространство n-мерных векторов $\mathbb{R}^n$, изучавшееся в курсе линейной алгебры. Это пространство состоит из векторов-столбцов, а скалярное произведение в этом пространстве определяется как $(x,y) = x^{(1)}y^{(1)} + \ldots + x^{(n)}y^{(n)}$, где $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ и $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ — компоненты векторов x и y соответственно. Отметим, что пространство $\mathbb{R}^n$ является полным.

Пример 3.4 (***бесконечномерное евклидово пространство***). Пространство функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, где для любых непрерывных на $[a,b]$ функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ положим

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1(x)y_2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.8}$$

Пространство непрерывных функций с нормой, порожденной скалярным произведением (3.8), обозначим $\tilde{L}_2[a,b]$. Тем самым,

$$\|y\| = \left\{\int_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{1/2}. \tag{3.9}$$

Сходимость по норме $\tilde{L}_2[a,b]$ называется **сходимостью в среднем**. В курсе математического анализа было доказано следующее утверждение:

Утверждение 3.2. *Из равномерной сходимости следует сходимость в среднем.*

Из сходимости же в среднем не следует не только равномерная, но даже поточечная сходимость.

Утверждение 3.3. *Евклидово пространство $\tilde{L}_2[a,b]$ является бесконечномерным.*

К сожалению, это пространство не является полным. На самом деле, рассмотрим отрезок $[-1,1]$, на котором определим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right], \\ nt & \text{при } t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ 1 & \text{при } t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right], \end{cases} \tag{3.10}$$

непрерывных на отрезке $[-1,1]$, которая сходится в среднем к разрывной функции:

$$x(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \in [-1,0), \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ 1 & \text{при } t \in (0,1]. \end{cases} \tag{3.11}$$

Такая функциональная последовательность является фундаментальной в $\tilde{L}_2[-1,1]$, но не имеет в $\tilde{L}_2[-1,1]$ предела.

В курсе функционального анализа доказывается, что любое неполное нормированное пространство можно пополнить. Полное бесконечномерное евклидово пространство называется **гильбертовым**. Если пополнить пространство $\tilde{L}_2[a,b]$, то мы получим гильбертово пространство $L_2[a,b]$. Однако для того, чтобы описать, из каких элементов состоит это пространство, нужно знать не только интеграл Римана, который изучался в курсе математического анализа, но и интеграл Лебега.

Давид Гильберт (David Hilbert), 1862–1943

Георг Фридрих Бернхард Риман (Georg–Friedrich–Bernhard Riemann), 1826–1866

Анри Леон Лебег (Henri Leon Lebesgue), 1875–1941

Нам потребуется еще пространство $W_2^1[a,b]$. Скалярное произведение в этом пространстве определяется

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1(x) y_2(x)\, dx + \int_a^b y_1'(x) y_2'(x)\, dx, \tag{3.12}$$

а норма равна

$$\|y\| = \left\{ \int_a^b y^2(x)\, dx + \int_a^b (y'(x))^2\, dx \right\}^{1/2}. \tag{3.13}$$

Если производные рассматривать как обобщенные (совпадающие с классическими, если последние существуют), а интеграл

как интеграл Лебега, то пространство $W_2^1[a, b]$ является гильбертовым. Если же ограничиться кусочно-гладкими функциями, то такое пространство будет бесконечномерным евклидовым.

Вопросы и задачи

1) Докажите, что в произвольном метрическом пространстве (X, ρ):
   а) $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leqslant \rho(x, y)$, $\forall x, y, z \in X$ (второе неравенство треугольника);
   б) $|\rho(x, z) - \rho(y, u)| \leqslant \rho(x, y) + \rho(z, u)$, $\forall x, y, z, u \in X$ (неравенство четырехугольника).
2) Покажите, что на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел функции определяют метрику.

   а) $\rho(m, n) = \dfrac{|m - n|}{mn}$; б) $\rho(m, n) = \begin{cases} 0, & m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{m + n}, & m \neq n, \end{cases}$
3) Пусть на прямой $\mathbb{R}$ расстояние определяется формулой $\rho(x, y) = \dfrac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Проверьте, что ρ действительно является метрикой.
4) Пусть $\rho(x, y)$ — метрика на множестве X. Докажите, что функции $\rho_1(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$, $\rho_2(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$, $\rho_3(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$, $\rho_4(x, y) = \rho^{\alpha}(x, y)$, $\alpha \in (0, 1)$, также являются метриками.
5) Являются ли метриками на прямой $\mathbb{R}$ следующие функции:
   а) $\rho(x, y) = |x - y|$, б) $\rho(x, y) = x^3 - y^3$,
   в) $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$, г) $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$,
   д) $\rho(x, y) = |\sin(x - y)|$?
6) Пусть функция $f(t)$ определена для $t \in [0, +\infty)$ и обладает следующими свойствами:
   а) $f(0) = 0$, б) $f(t)$ возрастает на $[0, +\infty)$,
   в) $f(t + s) \leqslant f(t) + f(s)$.

   Покажите, что если $\rho(x, y)$ — метрика в каком-то пространстве M, то $\rho_1(x, y) = f(\rho(x, y))$ также является метрикой в этом пространстве.

7) Можно ли на множестве отрезков на прямой ввести расстояние по формуле $\rho([a,b],[c,d]) = |a-c| + |b-d|$?
8) Какие из следующих функций задают норму на прямой $\mathbb{R}$:
   а) $\sqrt{x}$, б) $\sqrt{|x|}$, в) $|x-1|$, г) x^2?
9) Какие из следующих функций задают норму на плоскости $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
   а) $\sqrt{|xy|}$, $|x|+|y|$, б) $\max\{|x|,|y|\}$,
   в) $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{|xy|}$?
10) Для линейного пространства непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$ определите, какие из перечисленных ниже функций являются нормами, и упорядочите эти нормы:
   а) $\|x\|_1 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$,
   б) $\|x\|_2 = \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|$,
   в) $\|x\|_3 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|$,
   г) $\|x\|_4 = \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| + \int_0^1 |x(t)|\,dx$.
11) Проверьте, является функция

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x^{(k)}|^p\right)^{1/p} \tag{3.14}$$

нормой при $p \in (0,1)$ в n-мерном линейном пространстве.
12) Пусть $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y)$ — два вектора на плоскости $\mathbb{R}^2$. Можно ли задать скалярное произведение (a,b) по формулам:
   а) $a_x b_x$, б) $a_x b_x - a_y b_y$, в) $a_x b_x + 2a_y b_y$,
   г) $a_x b_x + 2a_y b_y - a_x b_y - a_y b_x$, д) $\sqrt{(a_x^2+a_y^2)(b_x^2+b_y^2)}$?
13) Пусть заданы два замкнутых шара $\overline{S}_{r_1}(x_1)$ и $\overline{S}_{r_2}(x_2)$ в линейном нормированном пространстве N. Докажите, что если $\overline{S}_{r_1}(x_1) \subset \overline{S}_{r_2}(x_2)$, то $r_1 \leqslant r_2$.
14) Дайте определение открытого и замкнутого множества.
15) Может ли некоторое множество A метрического пространства M быть и открытым, и замкнутым одновременно?
16) Докажите, что формула (3.4) действительно определяет норму в пространстве $C[a,b]$.

17) Докажите, что в евклидовом пространстве норма может быть введена по формуле $\|x\|_E = \sqrt{(x,x)}$.
18) Постройте пример, когда из сходимости в среднем не следует не только равномерная, но даже поточечная сходимость.
19) Докажите, что в евклидовом пространстве для любых элементов x, y, z имеет место **тождество Аполлония**
$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2. \quad (3.15)$$
20) Докажите, что в евклидовом пространстве для любых элементов x, y, z, v имеет место **неравенство Птолемея**
$$\|x-z\|\cdot\|y-v\| \leqslant \|x-y\|\cdot\|z-v\| + \|y-z\|\cdot\|x-v\|. \quad (3.16)$$
21) Докажите теорему Пифагора в евклидовом пространстве E: $x \perp y$ тогда и только тогда, когда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
22) Докажите, что множество функций из $C[a,b]$, удовлетворяющих на отрезке $[a,b]$ неравенству $v < f(x) < u$, где v и u — некоторые фиксированные числа, открыто.
23) Проверьте, сходится ли последовательность функций $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ к функции $f(x) = 0$ в пространствах $C[0,1]$, $L_1[0,1]$.
24) Докажите утверждение 3.1.
25) Докажите полноту пространства $\mathbb{R}^n$.
26) Докажите, что (3.5) определяет норму, а пространство $C^{(p)}[a,b]$ является банаховым.

§ 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть имеются два множества X и Y произвольной природы. Тогда **оператором** A, действующим из множества X в множество Y, называется соответствие, ставящее каждому элементу множества X некий элемент множества Y. Обозначается это соответствие как $A\colon X \to Y$. Элемент $y \in Y$, соответствующий заданному элементу $x \in X$, называется **образом** x, в то время как x является **прообразом** y.

Оператор A называется **инъективным**, если для любого $y \in Y$ его прообраз есть или пустое множество, или единственный элемент $x \in X$. Оператор A называется **сюръективным**,

если для любого $y \in Y$ его прообраз есть непустое множество. В случае, когда оператор A является и инъективным, и сюръективным одновременно, он называется **биективным**. Таким образом, биективный оператор A осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами множеств X и Y.

Оператор A, действующий из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2, называется **линейным**, если для любых элементов y_1 и y_2 из L_1 и любых вещественных чисел α_1 и α_2 выполнено равенство

$$A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A y_1 + \alpha_2 A y_2. \tag{4.1}$$

Будем обозначать область определения оператора A как $D(A)$. Для простоты будем считать $D(A) = L_1$. Множество значений оператора A обозначим $R(A)$. В данном случае $R(A) \subset L_2$ — линейное подпространство L_2.

Если оператор A взаимно однозначный, то можно ввести **обратный** оператор A^{-1} с областью определения $D(A^{-1}) = R(A)$ и множеством значений $R(A^{-1}) = D(A) = L_1$. Для линейного оператора вопрос о существовании обратного решается следующим образом: будем называть **нуль-пространством** оператора A множество

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in L_1 : Ax = 0\}. \tag{4.2}$$

Очевидно, что $\operatorname{Ker} A$ — линейное подпространство L_1, причем $0 \in \operatorname{Ker} A$. Если $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$ (в этом случае говорят, что нуль-пространство нетривиально), то оператор A называется **вырожденным**.

Утверждение 4.1. *Обратный оператор существует тогда и только тогда, когда оператор A не является вырожденным.*

Эрик Ивар Фредгольм
(Erik Ivar Fredholm), 1866–1927

В качестве одного из примеров линейных операторов мы будем рассматривать интегральный **оператор Фредгольма**

$$Ay \equiv \int_a^b K(x,s)y(s)\,\mathrm{d}s, \qquad x, s \in [a,b]. \tag{4.3}$$

Если ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности аргументов, то в соответствии с теоремой о непрерывной зависимости от параметра собственного интеграла, доказанной в курсе математического анализа, оператор A действует в линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, и, очевидно, является линейным.

Мы будем рассматривать линейные операторы, действующие в нормированных пространствах. Пусть оператор A отображает нормированное пространство N_1 в нормированное пространство N_2 (для простоты будем считать, что $D(A) = N_1$).

Определение 4.1. Оператор A называется **непрерывным в точке** $y_0 \in D(A)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $y \in D(A)$ и удовлетворяющих неравенству $\|y - y_0\| \leqslant \delta$ выполняется неравенство $\|Ay - Ay_0\| \leqslant \varepsilon$.

Как и в курсе математического анализа, можно дать эквивалентное определение непрерывности оператора в точке.

Определение 4.2. Оператор A называется **непрерывным в точке** $y_0 \in D(A)$, если для любой последовательности y_n, $n = 1, 2, \ldots$, $y_n \in D(A)$, $y_n \to y_0$, последовательность Ay_n сходится к Ay_0.

Оператор A называется непрерывным на $D(A)$ (на N_1), если он непрерывен в каждой точке.

Теорема 4.1. *Линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле.*

□ На самом деле, если $y_n \to y_0$, то $y_n - y_0 \to 0$, а из линейности оператора вытекает, что $Ay_n \to Ay_0$ тогда и только тогда, когда $A(y_n - y_0) \to 0$ (завершите доказательство!). ■

Нормой оператора A называется

$$\|A\|_{N_1 \to N_2} = \sup_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2}. \tag{4.4}$$

Если это не будет вызывать разночтений, то для сокращения записи будем обозначать $\|A\|_{N_1 \to N_2} = \|A\|$. Если $\|A\| < +\infty$, то оператор A называется **ограниченным**.

Утверждение 4.2. *В конечномерных пространствах любой линейный оператор является ограниченным.*

Пример 4.1 (***линейный неограниченный оператор***). Пространство $C[0, 1]$ является бесконечномерным пространством. Рассмотрим оператор дифференцирования $A = \frac{d}{ds}$, определенный на линейном подпространстве непрерывно дифференцируемых функций из $C[0, 1]$. Покажем, что A — неограниченный линейный оператор. Возьмем последовательность функций $y_n = \cos ns$. Тогда: $\|y_n\| = \max_{s\in[0,1]} |\cos ns| = 1$, но $\|Ay_n(s)\| = \|n \cdot \sin ns\| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Теорема 4.2. *Для любого $y \in N_1$ выполнено неравенство $\|Ay\| \leqslant \|A\| \cdot \|y\|$, где A — линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.*

□ Для $y = 0$ теорема верна: $0 = 0$.

Рассмотрим теперь случай $y \neq 0$. Возьмем элемент $z = \frac{y}{\|y\|}$ — единичный вектор: $\|z\| = 1$. Тогда $\|Az\| = \left\|A \frac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant \|A\|$, из чего и следует утверждение теоремы. ■

Теорема 4.3. *Линейный оператор $A\colon N_1 \to N_2$ является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен.*

□ Поскольку оператор A линейный, мы будем исследовать непрерывность только в точке 0.

Докажем, что из ограниченности следует непрерывность. Возьмем последовательность $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\|Ay_n\| \leqslant \|A\|\|y_n\| \to 0$, а следовательно, оператор A непрерывный.

Докажем, что из непрерывности следует ограниченность. Предположим, что оператор A неограниченный. Тогда существует последовательность y_n, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $\|y_n\| = 1$, $\|Ay_n\| \geqslant n$. Но при $n \to \infty$ $\|Ay_n/n\| \geqslant 1$, а $y_n/n \to 0$, что противоречит непрерывности оператора A. ■

Последовательность y_n, $n = 1, 2, \ldots$, элементов нормированного пространства N называется **ограниченной**, если существует константа C, такая, что $\|y_n\| \leqslant C$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Утверждение 4.3. *Любая сходящаяся последовательность является ограниченной.*

Утверждение 4.4. *Любая фундаментальная последовательность является ограниченной.*

Последовательность y_n, $n = 1, 2, \ldots$, элементов нормированного пространства N, обладающая тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся, называется **компактной**. Множество M линейного нормированного пространства N называется **компактным**, если из каждой последовательности $y_n \in M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Утверждение 4.5. *Любая компактная последовательность является ограниченной.*

□ Легко доказать, что компактная последовательность является ограниченной. На самом деле, если последовательность y_n, $n = 1, 2, \ldots$, не является ограниченной, то найдется подпоследовательность y_{n_k} такая, что $\|y_{n_k}\| \geqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$, из которой нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. ■

В пространстве $\mathbb{R}^1$ критерий компактности последовательности определяется теоремой Больцано—Вейерштрасса.

Бернард Больцано (Bernard Bolzano), 1781–1848

Карл Вейерштрасс (Karl Weierstraß), 1815–1897

Теорема 4.4 (***Больцано—Вейерштрасс***). *Из любой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Аналогичное утверждение имеет место и в $\mathbb{R}^n$. Для бесконечномерных пространств это не так.

Пример 4.2. Приведем пример некомпактной последовательности вещественных чисел: $1, 2, 3, \ldots$. Очевидно, что из этой последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Рассмотрим теперь следующую последовательность: $1, 1, 2, 1, 3, 1, \ldots$. Эта последовательность также некомпактна — из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, но нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность из любой ее подпоследовательности.

Пример 4.3. Рассмотрим пространство $\tilde{L}_2[a, b]$. В курсе математического анализа доказывалось существование в $\tilde{L}_2[a, b]$ ортонормированной системы, состоящей из бесконечного числа элементов (например, с помощью тригонометрической системы функций):

$$e_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \|e_j\| = 1, \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{4.5}$$

Покажем, что из последовательности членов ортонормированной системы (эта последовательность, очевидно, является ограниченной) нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. На самом деле: $\|e_i - e_j\|^2 = (e_i - e_j, e_i - e_j) = 2, i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$, если $i \neq j$. Поэтому никакая подпоследовательность этой последовательности не может быть фундаментальной, а следовательно, сходящейся. Рассмотрим теперь последовательность $e_1, c, e_2, c, e_3, c, \ldots$ (c — фиксированный вектор из $\tilde{L}_2[a, b]$). Эта последовательность также некомпактна — из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, но нельзя выделить сходя-

щуюся подпоследовательность из любой ее подпоследовательности.

Дадим теперь определение вполне непрерывности линейного оператора, действующего из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.

Определение 4.3. Линейный оператор A называется **вполне непрерывным (компактным)**, если для любой ограниченной последовательности элементов y_n из N_1 последовательность $z_n = Ay_n$ элементов N_2 такова, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Таким образом, вполне непрерывный оператор преобразует любую ограниченную последовательность в компактную.

Теорема 4.5. *Вполне непрерывный оператор является ограниченным (а следовательно, непрерывным).*

□ Предположим, что вполне непрерывный оператор A не является ограниченным. Тогда найдется последовательность y_n, $n = 1, 2, \ldots$, $y_n \in N_1$, $\|y_n\| = 1$, такая, что $\|Ay_n\| \geqslant n$. Но тогда из последовательности $z_n = Ay_n$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, что противоречит тому, что A — вполне непрерывный оператор. ■

Теорема 4.6. *Если оператор $A\colon N_1 \to N_2$ вполне непрерывен, то любое ограниченное множество $X \subset N_1$ он переводит в компактное множество в N_2.*

Заметим, что не любой непрерывный линейный оператор является вполне непрерывным.

Пример 4.4. Рассмотрим единичный оператор $I\colon \tilde{L}_2[a,b] \to \tilde{L}_2[a,b]$, $Iy = y$ для любого y. Он, очевидно, является ограниченным, но не является вполне непрерывным. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть последовательность членов ортонормированной системы из предыдущего примера и заметить, что $Ie_n = e_n$.

В курсе интегральных уравнений или курсе функционального анализа доказывается следующая теорема.

Теорема 4.7. *Пусть A — оператор Фредгольма, действующий из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Тогда A — вполне непрерывный оператор.*

Здесь предполагается, что ядро интегрального оператора $K(x,s)$ либо непрерывно по совокупности аргументов на

$[a, b] \times [a, b]$, либо, по крайней мере, интегрируемо с квадратом на $[a, b] \times [a, b]$.

Нам потребуется понятие самосопряженного (или симметрического) оператора. Пусть оператор $A\colon E \to E$ (E — бесконечномерное евклидово пространство).

Оператор $A^*\colon E \to E$ будем называть **сопряженным** к оператору A, если $\forall y_1, y_2 \in E$: $(Ay_1, y_2) = (y_1, A^* y_2)$. Если $A = A^*$, то оператор A называется **самосопряженным**.

Вопросы и задачи

1) Пусть $A\colon X \to Y$ и $X = Y = \mathbb{R}$. Являются ли следующие отображения инъективными, сюръективными, биективными:
   а) $y = \sin(x)$, б) $y = 2^x$, в) $y = x^3 - 3x$?
2) Пусть X — множество всех квадратов, Y — множество всех окружностей на плоскости, а $A\colon X \to Y$ сопоставляет каждому квадрату вписанную в него окружность. Является ли данное отображение инъективным, сюръективным, биективным?
3) Пусть $X = Y$ — множество функций, бесконечно дифференцируемых на $[-1, 1]$, а $A\colon X \to Y$ каждой функции $x(t)$ сопоставляет ее производную $x'(t)$. Является ли данное отображение инъективным, сюръективным, биективным?
4) Сформулируйте аналог теоремы 4.4 для пространства $\mathbb{R}^n$.
5) Постройте пример ограниченной, но некомпактной последовательности элементов $C[a, b]$.
6) Пусть E — бесконечномерное евклидово пространство, а $A\colon E \to E$. Докажите, что оператор A^*, сопряженный к A, является линейным.
7) Задано отображение $F(y) = \int_0^1 |y'(x)|\, dx$ подпространства A непрерывно-дифференцируемых функций пространства $C[0, 1]$ в пространство $\mathbb{R}$. Является ли это отображение непрерывным на A?
8) Задано отображение $F(y) = y(1)$ пространства некоторого пространства P в $\mathbb{R}$. Является ли это отображение непрерывным, если
   а) $P = C[0,1]$, б) $P = C^{(1)}[0,1]$, в) $P = L_1[0,1]$?

9) Верно ли, что при непрерывном отображении образ открытого (замкнутого) множества является открытым (замкнутым) множеством?

10) Докажите, что отображения непрерывны.
а) $Ax = \|x\|$, б) $Ax = (a, x)$.

11) Докажите, что оператор $Ax(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ непрерывен при отображении $C^{(1)}[a, b] \to C[a, b]$.

12) Является ли фундаментальной последовательность функций
а) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$ пространства $C[0, 1]$,
б) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ пространства $C^{(1)}[0, 1]$?

13) Докажите, что указанные функционалы являются линейными и непрерывными на заданных множествах:
а) $f(x) = x(1) - x(-1)$ на $C[-1, 1]$,
б) $f(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t$ на $L_1[-1, 1]$,
в) $f(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t - x(0)$ на $C[-1, 1]$.

14) Найдите оператор, сопряженный к оператору $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0, 1]$, если
а) $(Ax)(t) = \int_0^1 tx(s)\,\mathrm{d}s$, б) $(Ax)(t) = \int_0^1 sx(s)\,\mathrm{d}s$.

15) Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Докажите, что
а) $\|A\| = \sup\{|(Ax, x)|\colon \|x\| \leqslant 1\}$,
б) $\|A\| = \sup\{|(Ax, y)|\colon \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\}$.

16) Является ли вполне непрерывным оператор $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$, если
а) $(Ax)(t) = \int_0^1 \dfrac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}}\,\mathrm{d}s$, б) $(Ax)(t) = x(\sqrt{(t)})$,
в) $(Ax)(t) = \int_0^1 \dfrac{x(s)}{\sin(t-s)}\,\mathrm{d}s$, г) $(Ax)(t) = \int_0^1 \dfrac{x(\sqrt{s})}{s^{5/4}}\,\mathrm{d}s$,
д) $(Ax)(t) = \int_0^1 x(s^2)\,\mathrm{d}s$?
Будет ли этот же оператор вполне непрерывным, если $A\colon L_2[0, 1] \to L_2[0,1]$?

§ 5. ПРИМЕРЫ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Хорошо известным примером некорректно поставленной задачи является интегральное уравнение Фредгольма I рода, если пространства, в которых действует оператор, выбраны так, как указано ниже. Напомним классификацию интегральных уравнений, изучаемых на предыдущих курсах. Пусть функция $z(s)$ задана на отрезке $[a, b]$, функция $u(x)$ — на отрезке $[c, d]$, ядро $K(x, s)$ — на прямоугольнике $[c, d] \times [a, b]$, а λ — некоторое число. Тогда

- интегральное **уравнение Фредгольма II рода** имеет вид

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) z(s)\, \mathrm{d}s + u(x), \tag{5.1}$$

- **уравнение Фредгольма I рода**

$$\int_a^b K(x, s) z(s)\, \mathrm{d}s = u(x), \tag{5.2}$$

- **уравнение Вольтерра II рода**

$$z(x) = \lambda \int_a^x K(x, s) z(s)\, \mathrm{d}s + u(x), \tag{5.3}$$

- **уравнение Вольтерра I рода**

$$\int_a^x K(x, s) z(s)\, \mathrm{d}s = u(x). \tag{5.4}$$

Вито Вольтерра (Vito Volterra), 1860–1940

Понятно, что уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма, ядро которого можно определить как

$$K_{\text{Фред}}(x, s) = \begin{cases} K_{\text{Вол}}(x, s), & s \leqslant x, \\ 0, & s > x. \end{cases} \tag{5.5}$$

Но свойства этих уравнений разные, в том числе корректность постановок задач на основе этих уравнений.

Ядро $K(x, s)$ называется **замкнутым**, если из равенства

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s) z(s)\, \mathrm{d}s = 0 \tag{5.6}$$

следует, что $z(s) = 0$.

Рассмотрим теперь уравнение Фредгольма I рода

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s)z(s)\,\mathrm{d}s = u(x), \tag{5.7}$$

где ядро $K(x,s)$ — функция, непрерывная по совокупности аргументов $(x,s) \in [c,d] \times [a,b]$, а решение $z(s)$ — непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Таким образом, мы рассматриваем оператор A как действующий в следующих пространствах: $A\colon C[a,b] \to C[c,d]$. Покажем, что эта задача является некорректно поставленной. Напомним условия корректной постановки задачи:

1) **Существование решения.** Это означает, что решение должно существовать для любой непрерывной на $[c,d]$ функции $u(x)$.
2) **Единственность решения.** Данное условие эквивалентно требованию замкнутости ядра. В этом случае если решение есть, то оно единственно.
3) **Устойчивость решения.** Это означает, что для любой последовательности $u_n \to \bar{u}$, $Az_n = u_n$, $A\bar{z} = \bar{u}$, последовательность $z_n \to \bar{z}$.

Первые два условия корректности эквивалентны условию существования обратного оператора A^{-1} с областью определения $D(A^{-1}) = C[c,d]$. Условие устойчивости эквивалентно непрерывности обратного оператора A^{-1} при условии, что обратный оператор существует.

Посмотрим, в каких случаях нарушается каждое из трех условий корректности. Пусть ядро $K(x,s)$ такое, что для любого $s \in [a,b]$ существует непрерывная первая производная $K_x(x,s)$ в точке $x_0 \in (c,d)$. Тогда для любой непрерывной функции $z(s)$ существует и непрерывная производная уравнения (5.7) в точке x_0:

$$\left(\int_a^b K(x,s)z(s)\,\mathrm{d}s\right)'\Bigg|_{x=x_0} = \int_a^b K_x(x_0,s)z(s)\,\mathrm{d}s = u'(x_0). \tag{5.8}$$

Поэтому если производная $u'(x)$ терпит разрыв в точке x_0, то решения уравнения (5.7) не существует.

Понятно, что единственность решения нарушается, если ядро $K(x,s)$ не является замкнутым.

Пример 5.1. Пусть $K(x,s) = \sin x \cdot \sin s$ и $x, s \in [0,\pi]$. Если $u(x) = \sin x$, то в качестве решения подходит функция $z(s) = \frac{2}{\pi}\sin s + \sum_{m=1}^{\infty} G_m \cos(ms)$, т. е. решение не единственно. Если же положить $u(x) = \cos x$, то решения уравнения (5.7) не существует, так как

$$\int_0^{\pi} K(x,s)z(s)\,\mathrm{d}s = B\sin x, \tag{5.9}$$

где $B = \int_0^{\pi} \sin s z(s)\mathrm{d}s$ — некоторая константа, и нельзя подобрать B таким образом, чтобы $B\sin x = \cos x$ на всем отрезке $[0,\pi]$.

Отметим, что если ядро $K(x,s)$ интегрального оператора замкнуто, то обратный оператор существует, однако область его определения не совпадает с $C[c,d]$. Перейдем теперь к вопросу устойчивости решения.

Пример 5.2. Пусть имеется последовательность непрерывных функций $z_n(s)$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $z_n(s) \neq 0$ на промежутке $\left[\frac{a+b}{2} - \delta_n, \frac{a+b}{2} + \delta_n\right]$, $\delta_n > 0$, и обращается в нуль вне данного интервала, $\max|z_n(s)| = 1$, $s \in [a,b]$, а последовательность чисел $\delta_n \to 0$. В качестве таких функций можно взять, например, функции

$$z_n(s) = 1 - \min\left(1, \frac{1}{\delta_n}\left|s - \frac{a+b}{2}\right|\right). \tag{5.10}$$

Тогда для любого $x \in [c,d]$

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &= \left|\int_a^b K(x,s)z_n(s)\,\mathrm{d}s\right| = \\ &= \left|\int_{\frac{a+b}{2}-\delta_n}^{\frac{a+b}{2}+\delta_n} K(x,s)z_n(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant K_0 \cdot 1 \cdot 2\delta_n \to 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

при $n \to \infty$, где $K_0 = \max\{|K(x,s)|: x \in [c,d], s \in [a,b]\}$. Последовательность функций $u_n(x)$ равномерно, т. е. по норме $C[c,d]$, сходится к $\bar{u}(x) = 0$. Хотя решение уравнения $A\bar{z} = \bar{u}$ в этом случае $\bar{z}(s) = 0$, последовательность $z_n(s)$ не стремится к $\bar{z}(s)$, так как $\|z_n(s) - \bar{z}(s)\|_{C[a,b]} = 1$. Таким образом, решение задачи не устойчиво.

Интегральный оператор A является вполне непрерывным при действии из $L_2[a,b]$ в $L_2[c,d]$, при действии из $C[a,b]$ в $L_2[c,d]$ и при действии из $C[a,b]$ в $C[c,d]$. Это означает, что

любую ограниченную последовательность этот оператор преобразует в компактную. Компактная последовательность по определению обладает тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся.

Пример 5.3. Рассмотрим последовательность $z_n(s)$, $\|z_n\|_{L_2[a,b]} = 1$, из которой нельзя выделить сходящуюся в $C[a,b]$ подпоследовательность. В качестве такой последовательности можно выбрать, например,

$$z_n(s) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{1/2} \sin\frac{\pi n(s-a)}{b-a}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{5.12}$$

Нормы всех членов этой последовательности равны 1 в $L_2[a,b]$, но из любой подпоследовательности этой последовательности нельзя выделить сходящуюся, поскольку $\|z_i(s) - z_j(s)\| = \sqrt{2}$, $i \neq j$. Последовательность $z_n(s)$ состоит из непрерывных на $[a,b]$ функций, равномерно (по норме $C[a,b]$) ограничена, но из этой последовательности нельзя выделить сходящуюся в $C[a,b]$ подпоследовательность.

Лемма 5.1. *Тождественный линейный оператор $I\colon N \to N$, где N — нормированное пространство не является вполне непрерывным, если N не конечномерное.*

□ Замкнутый единичный шар не является компактом в бесконечномерном пространстве. ■

Лемма 5.2. *Пусть $A\colon N_1 \to N_2$, $B\colon N_2 \to N_3$ — линейные непрерывные операторы, N_1, N_2, N_3 — нормированные пространства. Если A или B является вполне непрерывным, то оператор $BA\colon N_1 \to N_3$ тоже является вполне непрерывным.*

□ Рассмотрим замкнутый единичный шар $\bar{S}_1(0)$. Пусть A вполне непрерывен, тогда множество $A\bar{S}_1(0)$ — компактное. А если есть некоторая компактная последовательность $x_n \in N_2$, то в силу непрерывности B последовательность Bx_n тоже будет компактной в N_3. Поэтому множество $BA\bar{S}_1(0)$ компактное.

Пусть теперь B вполне непрерывен. Множество $A\bar{S}_1(0)$ — ограниченное, тогда в силу теоремы 4.6, множество $BA\bar{S}_1(0)$ компактное. ■

Теорема 5.1. *Пусть вполне непрерывный оператор A действует из бесконечномерного нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2 и на области его значений $R(A)$ суще-*

ствует обратный оператор A^{-1}. Тогда оператор A^{-1} неограничен на $R(A)$.

□ Предположим, что A^{-1} ограничен, тогда тождественный оператор $I = A^{-1}A$ является вполне непрерывным как произведение вполне непрерывного A и ограниченного A^{-1} операторов. Но это возможно, только если X — конечномерное пространство. Противоречие. ■

Итак, поскольку задача решения интегрального уравнения Фредгольма I рода некорректно поставлена, то даже при очень малых ошибках в задании $u(x)$ решение может либо отсутствовать, либо очень сильно отличаться от искомого точного решения.

Некорректно поставленные задачи очень часто встречаются при обработке результатов физического эксперимента, в частности при решении так называемых **обратных задач** в астрофизике, геофизике, ядерной физике, компьютерной томографии и т. д. Функция $u(x)$ находится в результате эксперимента, поэтому неизбежно содержит ошибки. К обратным задачам приводит необходимость изучать характеристики исследуемого объекта z, которые недоступны непосредственным измерениям, по их косвенным проявлениям u, связанным посредством операторного уравнения

$$Az = u. \tag{5.13}$$

Некорректность постановки математической задачи может быть связана с ошибкой в задании оператора. Простейший пример отыскания нормального псевдорешения системы линейных алгебраических уравнений и возникающая при этом неустойчивость, связанная с ошибками задания матрицы, рассмотрены подробно в дальнейшем, см. псевдорешение системы ((15.1)).

Задачу решения операторного уравнения (5.13) иногда удобно рассматривать как задачу вычисления значений неограниченного и не всюду определенного оператора A^{-1}: $z = A^{-1}u$. В таком виде обычно рассматривается задача дифференцирования.

Пример 5.4. Пусть надо найти первую производную $z(x) = \dfrac{du}{dx}$.

Если оператор дифференцирования рассматривать как действующий из пространства $C[0,1]$ в $C[0,1]$, то задача вычисления значений этого оператора является некорректно поставленной,

поскольку не выполняются первое и третье условия корректности. Действительно, оператор можно рассматривать только на множестве непрерывно дифференцируемых функций, а не на всем пространстве непрерывных функций. Поэтому не выполняется условие корректности 1). Но и на своей области определения этот оператор не ограничен, а следовательно, не является непрерывным (теорема 4.3). Возьмем последовательность функций $u_n(x) = \cos nx$. Тогда: $\|u_n\| = \max_{x\in[0,1]} |\cos nx| = 1$, но $\|Au_n\| = \|n \cdot \sin nx\| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Заметим, что корректность задачи зависит от выбора пространств U и Z. Так, если рассмотренный выше оператор A рассматривать как действующий из пространства $C^{(1)}[0,1]$ в $C[0,1]$, то задача становится корректно поставленной.

Если оператор A является инъективным, элемент u принадлежит $R(A)$, а норму $\|z\|$ в пространстве Z ввести как

$$\|z\|_Z = \|Az\|_U, \tag{5.14}$$

то задача (5.13) становится корректно поставленной. К сожалению, при решении практических задач выбор пространств Z и U жестко привязан к самой задаче и не может быть изменен произвольным образом. Главной же задачей исследователя является не создание «искусственных» пространств Z и U, в которых будет удобно решать задачу, а нахождение дополнительных ограничений на элементы этих пространств, которые бы позволили сделать данную задачу корректной. Большинство этих дополнительных (так называемых **априорных**) ограничений являются прямым следствием прямой постановки задачи или дополнительных (вспомогательных) задач, которые могут решаться совместно с основной задачей.

Часто при решении задач геофизики или томографии требуется найти распределение плотности (или какого-то другого параметра, имеющего смысл плотности, например коэффициента поглощения оптических, звуковых волн). При этом задача записывается в виде интегрального уравнения, формально допускающего математическое решение, имеющее в том числе отрицательные или очень большие положительные величины. Но это противоречит требованиям об ограниченности и неотрицательности физической, химической или биологической величины, которую требуется найти. В других задачах исследуемый процесс проходит с какой-то известной ско-

ростью, что дает нам оценить значение первой производной какой-то величины. Вся эта информация для определенных задач может позволить улучшить постановку задачи, например задача становится корректной или появляется возможность оценить скорость сходимости приближенного решения к точному.

§ 6. ПОНЯТИЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕГО АЛГОРИТМА

Вернемся к рассмотрению операторного уравнения:

$$Az = u, \tag{6.1}$$

где A — взаимно однозначный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U. В 1963 г. А. Н. Тихонов дал знаменитое определение регуляризирующего алгоритма (РА), которое лежит в основе современной теории некорректно поставленных задач.

Определение 6.1. Регуляризирующим алгоритмом (регуляризирующим оператором) $R(\delta, u_\delta) \equiv R_\delta(u_\delta)$ называется оператор, обладающий двумя следующими свойствами:

1) $R_\delta(u_\delta)$ определен для любых $u_\delta \in U$, $\delta > 0$, и отображает $(0, +\infty) \times U$ в Z;
2) для любых $z \in Z$ и $u_\delta \in U$, таких, что $u = Az$, $\|u - u_\delta\| \leqslant \delta$, $\delta > 0$, элемент $z_\delta \equiv R_\delta(u_\delta) \to z$ при $\delta \to 0$.

Задача решения уравнения первого рода называется **регуляризируемой**, если существует хотя бы один регуляризирующий алгоритм. Непосредственно из определения следует, что если существует хотя бы один РА, то их существует бесконечное множество.

В настоящее время все математические задачи можно разделить на следующие классы:

1) **корректно поставленные** задачи;
2) некорректно поставленные **регуляризируемые** задачи;
3) некорректно поставленные **нерегуляризируемые** задачи.

Понятно, что корректно поставленные задачи являются регуляризируемыми, поскольку можно положить $R_\delta(u_\delta) = A^{-1}u_\delta$. Отметим, что знание $\delta > 0$ в этом случае необязательно.

Далеко не все некорректно поставленные задачи можно регуляризовать, причем это часто зависит от выбора пространств Z, U. Л. Д. Менихес построил пример интегрального оператора с непрерывным замкнутым ядром, действующего из пространства $C[0,1]$ в $L_2[0,1]$, обратная задача для которого (т. е. решение интегрального уравнения Фредгольма I рода) является нерегуляризируемой. Это связано со свойствами пространства $C[0,1]$. Ниже мы покажем, что если пространство Z гильбертово, а оператор A ограниченный и инъективный, то задача решения уравнения Фредгольма I рода является регуляризируемой. К сожалению, пространство $C[0,1]$ не обладает рядом свойств, которыми обладает гильбертово пространство.

Можно дать эквивалентное определение регуляризирующего алгоритма и регуляризируемости операторного уравнения. Пусть задан оператор (отображение) $R_\delta(u_\delta)$, причем $R_\delta(u_\delta)$ определен для любых $u_\delta \in U$, $\delta > 0$, и отображает $(0, +\infty) \times U$ в Z. Определим погрешность решения операторного уравнения первого рода в точке $z \in Z$ с помощью оператора $R_\delta(u_\delta)$ при условии, что правая часть u задана с погрешностью $\delta > 0$ как

$$\triangle(R_\delta, \delta, z) = \sup\{\|R_\delta(u_\delta) - z\| : u_\delta \in U, \|u_\delta - u\| \leqslant \delta, Az = u\}. \tag{6.2}$$

Определение 6.2. Оператор $R_\delta(u_\delta)$ называется **регуляризирующим оператором,** если для любого $z \in Z$ погрешность решения $\triangle(R_\delta, \delta, z) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Легко видеть, что данное определение эквивалентно определению в начале параграфа.

Сформулируем теперь определение регуляризирующего алгоритма для задачи вычисления значений оператора, т. е. для задачи вычисления значений отображения $G\colon D(G) \to Z$, $D(G) \subset U$ при условии, что аргумент задан с погрешностью. Здесь будем считать, что Z и U — метрические пространства. Разумеется, задача решения операторного уравнения при условии, что A — инъективный оператор, может рассматриваться как задача вычисления значений оператора $G = A^{-1}$.

Итак, рассмотрим задачу: найти значение оператора G на элементе u: $Gu = z$, $u \in D(G) \subset U$, $z \in Z$, при условии что вместо u мы знаем его приближенное значение $u_\delta \in U$, такое, что $\rho_U(u_\delta, u) \leqslant \delta$, $\delta > 0$. Здесь ρ_U — метрика в пространстве U.

Определение 6.3. Оператор R_δ: $(0,+\infty) \times U \to Z$ называется **регуляризирующим алгоритмом** вычисления значений оператора G на множестве $D(G) \subset U$, если

1) $R_\delta(u_\delta)$ определен для любых $u_\delta \in U$, $\delta > 0$, т. е. $D(R_\delta) = (0,+\infty) \times U$;
2) для любого $u \in D(G)$ и любого $u_\delta \in U$, такого, что $\rho_U(u_\delta,u) \leqslant \delta$, $\delta > 0$, $z_\delta = R_\delta(u_\delta) \to z = Gu$ при $\delta \to 0$.

Дадим теперь эквивалентное определение регуляризирующего алгоритма с использованием понятия погрешности.

Определение 6.4. Оператор R_δ: $(0,+\infty) \times U \to Z$ называется **регуляризирующим алгоритмом** вычисления значений оператора G на множестве $D(G) \subset U$, если для любых $u \in D(G)$, $\delta > 0$ и $u_\delta \in U$, такого, что $\rho_U(u_\delta, u) \leqslant \delta$, погрешность приближенного вычисления значения оператора G в точке u по приближенным данным u_δ

$$\Delta(R_\delta, \delta, z) = \sup\{\rho_Z(R_\delta(u_\delta), z) : u_\delta \in U, \rho_U(u_\delta, u) \leqslant \delta, z = Gu\} \tag{6.3}$$

стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Если хотя бы один регуляризирующий оператор существует, то задача вычисления значений оператора называется **регуляризируемой**.

Ответим теперь на очень важный вопрос: можно ли решить некорректную задачу, т. е. построить регуляризирующий алгоритм, не зная погрешности δ?

Если задача корректна, то устойчивый метод, очевидно, можно построить и без знания δ. Так будет в случае решения операторного уравнения $z_\delta = A^{-1}u_\delta \to z = A^{-1}u$ при $\delta \to 0$. В случае некорректных задач это невозможно. Приведем доказательство соответствующей теоремы в том виде, как она была доказана ее автором А. Б. Бакушинским, т. е. для вычисления значений оператора G. Формулировка и доказательство аналогичной теоремы для решения операторного уравнения предоставляются читателю.

Теорема 6.1. *Если для вычислений значений оператора G на множестве $D(G) \subset U$ существует регуляризирующий оператор R_δ, не зависящий явно от δ, то существует продолжение G на U, которое непрерывно на $D(G) \subset U$.*

□ Пусть существует регуляризирующий алгоритм $R_\delta(u) = R(u)$, т. е. не зависящий явно от δ. Фиксируем про-

извольный элемент $u \in D(G)$ и выберем $u_\delta = u$. Тогда $\rho_U(u_\delta, u) \leqslant \delta$ для любого $\delta > 0$. Из определения регуляризирующего алгоритма имеем $R(z_\delta) \to Gu$ при $\delta \to 0$, или, поскольку регуляризирующий алгоритм явно не зависит от δ, то $R(u_\delta) = Gu$ для любого $u \in D(G)$. Возьмем теперь $u_\delta \in D(G)$: $\rho_U(u_\delta, u) \leqslant \delta$. Тогда по определению регуляризирующего алгоритма $R(u_\delta) = Gu_\delta \to Gu$ при $\delta \to 0$, т. е. оператор G непрерывен на множестве $D(G) \subset U$. Пусть теперь $u_\delta \in U$: $\rho_U(u_\delta, u) \leqslant \delta$. Тогда по определению регуляризирующего алгоритма $R(u)$ определен в точке u_δ, и $R(u_\delta) \to Gu$ при $\delta \to 0$. Итак, R есть искомое продолжение G на все U, непрерывное на $D(G)$. ■

Следующим свойством некорректно поставленных задач является невозможность оценить погрешность решения, даже если известна погрешность задания правой части операторного уравнения или погрешность задания аргумента в задаче вычисления значений оператора. Следующая теорема была впервые доказана А. Б. Бакушинским. Приводим ее для решения операторного уравнения.

Теорема 6.2. *Пусть*

$$\Delta(R_\delta, \delta, z) = \\ = \sup\{\|R_\delta(u_\delta) - z\|\colon u_\delta \in U, \|u_\delta - u\| \leqslant \delta, Az = u\} \leqslant \varepsilon(\delta) \to 0 \tag{6.4}$$

при $\delta \to 0$ для любого $z \in W \subset Z$. Тогда сужение $A^{-1}\big|_{AW \subset U}$ обратного оператора A^{-1} на множество AW непрерывно на AW.

□ Возьмем произвольные два элемента $z_1, z_2 \in W$, такие, что $\|Az_1 - Az_2\| \leqslant \delta$. Тогда по определению регуляризирующего алгоритма $\|z_1 - z_2\| \leqslant \|z_1 - R_\delta(Az_1)\| + \|z_2 - R_\delta(Az_1)\| \leqslant \varepsilon(\delta) + \varepsilon(\delta) = 2\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. ■

Таким образом, равномерная оценка погрешности решения операторного уравнения (6.1) на множестве $W \subset Z$ возможна только в том случае, когда обратный оператор непрерывен на AW. Данная теорема справедлива и для нелинейных операторных уравнений, причем в метрических пространствах. Именно в таком виде она и была доказана А. Б. Бакушинским.

Из определения регуляризирующего алгоритма легко следует, что если есть хотя бы один регуляризирующий алгоритм, то их может быть сколько угодно. Выбрать же тот, который

дает наименьшую ошибку, или сравнивать алгоритмы, сравнивая ошибки полученных приближенных решений, при решении некорректных задач, невозможно при отсутствии априорной информации, которая фактически преобразует такие задачи в корректные. Примеры будут рассмотрены ниже.

Отметим, что термин «априорное знание» произошел от латинского **«a priori»** («от предшествующего») и означает знание, полученное до или вне зависимости от опыта. Противоположный смысл имеет термин «апостериорное знание», происшедший от латинского **«a posteriori»** («от последующего») и подразумевающий знание, полученное из опыта. Таким образом, априорная информация или выбор какого-то параметра не зависят от конкретных входных данных, а апостериорный выбор уже подразумевает явное использование имеющихся входных данных.

Оказывается, что регуляризирующие алгоритмы нельзя сравнивать и по скорости сходимости приближенного решения к точному при стремлении погрешности входных данных к нулю. Имеет место следующая очень важная теорема, доказанная В. А. Винокуровым, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 6.3. *Пусть A — ограниченный инъективный оператор, $A\colon Z \to U$, Z — бесконечномерное банахово, а U — нормированное пространства, причем $\|A^{-1}\| = +\infty$. Считаем, что оператор $R_\delta\colon (0, \delta_0] \times U \to Z$, а функция $\varphi(\delta) > 0$ для любого $\delta \in (0, \delta_0]$, причем $\lim\limits_{\delta\to+0} \varphi(\delta) = 0$. Тогда*

$$\overline{\lim_{\delta\to+0}} \frac{\Delta(R_\delta, \delta, z)}{\varphi(\delta)} = +\infty \tag{6.5}$$

для любого $z \in Z$, кроме, быть может, множества первой категории, т. е. неравенство $\Delta(R_\delta, \delta, z) \leqslant C(z) \cdot \varphi(\delta)$ для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ может выполняться только на множестве первой категории.

Напомним, что такое множество первой категории в банаховом пространстве B. Множество W называется **счетным**, элементы которого можно биективно сопоставить множеству натуральных чисел (или, все элементы которого можно занумеровать в бесконечную последовательность). Множество $W \subset B$ называется **нигде не плотным**, если его замыкание не содержит ни одного шара. Множество $W \subset B$ называется **множеством первой категории**, если оно представимо в виде объ-

единения не больше, чем счетного числа нигде не плотных множеств. Множество $W \subset B$ называется **множеством второй категории**, если его дополнение в банаховом пространстве есть множество первой категории. Само банахово пространство является множеством второй категории.

Если рассматривать функцию $\varphi(\delta)$ как скорость сходимости регуляризованных приближений к точному решению при стремлении погрешности правой части к нулю, то из теоремы следует, что оценка скорости сходимости $C(z)\cdot\varphi(\delta)$ может быть осуществлена только на множестве первой категории. Тем самым, нельзя сравнивать регуляризирующие алгоритмы по скорости сходимости на всем банаховом пространстве. Приведем типичные примеры множеств первой категории.

Пример 6.1. Компакт в бесконечномерном банаховом пространстве является примером нигде не плотного множества (тем самым, множества первой категории). Счетное объединение компактов W_i, $\cup_{i=1}^{\infty} W_i$, есть множество первой категории.

Пример 6.2. Пусть $A\colon Z \to U$, A — вполне непрерывный оператор, Z — бесконечномерное гильбертово, U — бесконечномерное банахово пространство, $\bar{S}_n(0) = \{z\colon \|z\| \leqslant n\}$ — шар радиуса n в пространстве Z, $n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим образ шара при действии на него оператором A. Получим компакт $A\bar{S}_n(0)$. Поскольку множество значений вполне непрерывного оператора $R(A) = \cup_{n=1}^{\infty} A\bar{S}_n(0)$, оно является множеством первой категории в пространстве U. Если рассматривать $R(A)$ как нормированное пространство с нормой пространства U, то это пространство является счетным объединением компактов и называется **σ-компактным**.

Из последних результатов следует, что регуляризирующие алгоритмы без дополнительных априорных ограничений на решение некорректно поставленной задачи не могут сравниваться по уровням погрешности решения и даже по скорости сходимости регуляризованных приближений к точному решению.

В заключение параграфа вернемся к рассмотрению операторного уравнения первого рода и дадим определение регуляризирующего алгоритма в случае, если и оператор может быть задан с ошибкой, т. е. вместо оператора A нам задан линейный ограниченный оператор A_h: $A_h\colon Z \to U$, такой, что $\|A_h - A\| \leqslant h$, $h \geqslant 0$. Обозначим пару погрешностей δ, h как $\eta = (\delta, h)$.

Определение 6.5. Регуляризирующим алгоритмом (регуляризирующим оператором) $R(\eta, u_\delta, A_h) \equiv R_\eta(u_\delta, A_h)$ называется оператор, обладающий двумя следующими свойствами:

1) $R_\eta(u_\delta, A_h)$ определен для любых $u_\delta \in U$, $\delta > 0$, $A_h \in L(Z, U)$, $h \geqslant 0$, и отображает $(0, +\infty) \times [0, +\infty) \times \times U \times L(Z, U)$ в Z;
2) для любого $z \in Z$, для любого $u_\delta \in U$, такого, что $Az = u$, $\|u - u_\delta\| \leqslant \delta$, $\delta > 0$, и для любого $A_h \in L(Z, U)$, такого, что $\|A_h - A\| \leqslant h$, $h \geqslant 0$, справедливо $z_\eta = R_\eta(u_\delta, A_h) \to z$ при $\eta \to 0$.

Здесь $L(Z, U)$ — **пространство линейных ограниченных операторов**, действующих из Z в U, с нормой, определяемой обычным образом.

Нетрудно дать определение регуляризирующего алгоритма и в случае, когда операторное уравнение рассматривается только на множестве $W \subset Z$, т. е. имеется априорная информация о том, что точное решение $z \in W \subset Z$.

Вопросы и задачи

Проверьте, являются ли следующие множества счетными: а) множество всех целых чисел, б) множество простых чисел, не превышающих 1000 (**простое число** — это натуральное число, которое имеет ровно два различных натуральных делителя: единицу и самого себя), в) множество всех рациональных чисел.

§ 7. НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ НА КОМПАКТАХ

Выше было показано, что если даже некорректная задача регуляризируема, т. е. существует устойчивый метод решения такой задачи, то, тем не менее, многие ее свойства вынуждают исследователя перед решением подумать, нельзя ли использовать априорную физическую информацию, все знания об искомом решении для того, чтобы задачу переформулировать и преобразовать в корректную.

Вернемся к рассмотрению операторного уравнения

$$Az = u, \tag{7.1}$$

где A — линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U. Пусть $\bar{z}$ — точное решение операторного уравнения (7.1), $A\bar{z} = \bar{u}$ — точная правая часть, и задана приближенная правая часть u_δ, такая, что $\|\bar{u} - u_\delta\| \leqslant \delta$, $\delta > 0$.

Пусть оператор A инъективен. Рассмотрим множество приближенных решений

$$Z_\delta = \{z_\delta \colon \|Az_\delta - u_\delta\| \leqslant \delta\}. \tag{7.2}$$

Заметим, что для линейных некорректных задач диаметр этого множества

$$\operatorname{diam} Z_\delta = \sup\{\|z_1 - z_2\| \colon z_1, z_2 \in Z_\delta\} = \infty \tag{7.3}$$

для любого $\delta > 0$, поскольку обратный оператор A^{-1} не ограничен.

Мы уже отмечали ранее (теорема 5.1), что оператор, обратный к вполне непрерывному оператору, действующему в бесконечномерных гильбертовых пространствах, не является ограниченным.

Возникает вопрос: нельзя ли использовать дополнительную (априорную) информацию для того, чтобы сузить множество приближенных решений, а еще лучше получить корректную задачу? А. Н. Тихонову принадлежит следующая идея: если нам известно, что множество решений является компактом, то задача решения операторного уравнения корректна при условии, что приближенная правая часть операторного уравнения также принадлежит образу компакта. В статье «Об устойчивости обратных задач», опубликованной в Докладах АН СССР в 1943 г., А. Н. Тихонов для исследования обратной задачи теории потенциала в геофизике применил следующую теорему.

Теорема 7.1. *Пусть инъективный непрерывный оператор A действует $A\colon W \subset Z \to AW \subset U$, где Z, U — нормированные пространства, W — компакт. Тогда обратный оператор A^{-1} непрерывен на AW.*

Теорема верна и для нелинейных операторов. Таким образом, решение операторного уравнения на компакте является корректной задачей при условии, что приближенная правая часть принадлежит AW. Эта идея позволила М. М. Лаврентьеву ввести понятие задачи, **корректной по Тихонову** (предполагается существование множества корректности, на котором

задача становится корректной), а В. К. Иванову дать определение квазирешения некорректной задачи.

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы, поскольку ниже мы рассмотрим более сложный случай, когда приближенная правая часть может и не принадлежать AW. На самом деле, приведенная выше теорема неприменима, если $u_\delta \notin R(A)$. Поэтому необходимо ее обобщить.

Элемент $z_\delta \in W$, такой, что

$$z_\delta = \arg\min\{\|Az - u_\delta\|: z \in W\} \tag{7.4}$$

(т. е. элемент, на котором достигается минимум $\|Az - u_\delta\|$ на множестве W), называется **квазирешением** операторного уравнения на компакте W.

Квазирешение существует, но, возможно, не единственно. Тем не менее для любого квазирешения имеет место сходимость к точному решению: $z_\delta \to \bar{z}$ при $\delta \to 0$. При этом знание погрешности δ не обязательно.

Теорема 7.2 (*В. К. Иванов*). *Пусть A — инъективный непрерывный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U. Пусть $\bar{z} \in W$ — точное решение операторного уравнения, $W \subset Z$ — компакт, $A\bar{z} = \bar{u}$ — точная правая часть, и задана приближенная правая часть u_δ, такая, что $\|\bar{u} - u_\delta\| \leqslant \delta$, $\delta > 0$. Тогда квазирешение $z_\delta \to \bar{z}$ при $\delta \to 0$.*

□ Заметим прежде всего, что квазирешение существует, поскольку функционал $\|Az - u_\delta\|$ непрерывен по z, и по теореме Вейерштрасса (см. теорему 9.1) достигает своей точной нижней грани на компакте W. Далее $\|Az_\delta - u_\delta\| \leqslant \|A\bar{z} - u_\delta\| \leqslant \delta$, поскольку $\bar{z} \in W$. Поэтому $\|Az_\delta - A\bar{z}\| = \|Az_\delta - u_\delta + u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \|Az_\delta - u_\delta\| + \delta \leqslant 2\delta$. Далее проведем доказательство теоремы от противного.

Пусть утверждение теоремы неверно, тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $\delta_k \to 0$, такие, что $\|z_{\delta_k} - \bar{z}\| \geqslant \varepsilon > 0$, где $z_{\delta_k} \in W$ — последовательность квазирешений. В силу компактности W найдутся подпоследовательность последовательности квазирешений и элемент $z^* \in W$, к которому эта подпоследовательность сходится. Не ограничивая общности (исключив лишние члены последовательности квазирешений и перенумеровав оставшиеся), будем считать, что $z_{\delta_k} \to z^*$. Но тогда, переходя к пределу в неравенстве $\|Az_{\delta_k} - A\bar{z}\| \leqslant 2\delta_k$, получим

$\|Az^* - A\bar{z}\| = 0$. В силу инъективности оператора A получаем, что $z^* = \bar{z}$, но это равенство противоречит неравенству $\|z_{\delta_k} - \bar{z}\| \geqslant \varepsilon > 0$, что и требовалось доказать. ■

Если же погрешность δ известна, то

1) в качестве приближенного решения может быть взят любой элемент $z_\delta \in D$, удовлетворяющий неравенству: $\|Az_\delta - u_\delta\| \leqslant \delta$ (**δ-квазирешение**). Предыдущая теорема, очевидно, остается справедливой и в этом случае;
2) можно найти погрешность приближенного решения, решив экстремальную задачу: найти $\max \|z - z_\delta\|$ по всем $z \in D$, удовлетворяющим неравенству: $\|Az - u_\delta\| \leqslant \delta$ (очевидно, что точное решение удовлетворяет данному неравенству, а задача разрешима по теореме Вейерштрасса);
3) теорема доказана для нелинейных непрерывных операторов. Естественно, она справедлива для линейных ограниченных операторов.

Таким образом, задача отыскания квазирешения практически не отличается от корректной. Не выполняется, вообще говоря, только условие единственности квазирешения.

Если же и оператор A — линейный ограниченный и задан с погрешностью, то понятие квазирешения вводится, как и выше, заменой оператора A на оператор A_h. Пусть вместо оператора A нам задан линейный ограниченный оператор $A_h\colon Z \to U$, такой, что $\|A_h - A\| \leqslant h$, $h \geqslant 0$. Обозначим пару погрешностей δ, h как $\eta = (\delta, h)$.

Определение 7.1. Элемент $z_\eta \in W$, такой, что $z_\eta = \operatorname{argmin}_{z \in D} \|A_h z - u_\delta\|$, называется **квазирешением** операторного уравнения на компакте W.

В качестве же приближенного решения может быть выбран любой элемент $z_\eta \in W$, удовлетворяющий неравенству: $\|A_h z_\eta - u_\delta\| \leqslant \delta + h\|z_\eta\|$ (**η-квазирешение**).

Теорема о сходимости к точному решению может быть доказана, как и выше.

Хорошо известны множества корректности, которые часто встречаются в прикладных задачах. Прежде всего, если известно, что точное решение принадлежит конечно-параметрическому семейству функций, то ставится задача отыскания параметров, которая может быть корректной и в том случае, если задача без этой априорной информации является некорректной.

Если Z и U — гильбертовы пространства, то многие численные методы отыскания квазирешений для линейных операторных уравнений основаны на том, что функционал невязки $\|A_h z - u_\delta\|^2$ является выпуклым и дифференцируемым. Если W — выпуклый компакт, то нахождение квазирешения — задача выпуклого программирования. Записанные выше неравенства, определяющие приближенные решения на компактах, могут быть использованы в качестве критериев остановки минимизации функционала невязки. Задача отыскания погрешности найденного приближенного решения является нестандартной задачей выпуклого программирования, поскольку при решении этой задачи требуется найти максимум, а не минимум выпуклого функционала. Для понимания сказанного в данном абзаце необходимо познакомиться с основными понятиями и численными методами решения экстремальных задач, к чему мы и приступаем, временно прервав рассмотрение теории некорректных задач.

Литература

1. **Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.** *Численные методы решения некорректных задач.* — М.: Наука, 1990. — 230 с.
2. **Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.** *Нелинейные некорректные задачи.* — М.: Наука, 1995. — 311 с.
3. **Леонов А. С.** *Решение некорректно поставленных обратных задач: очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ.* — М.: Либроком, 2009. — 326 с.
4. **Бакушинский А. В., Гончарский А. В.** *Некорректные задачи. Численные методы и приложения.* — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 197 с.
5. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* — М.: Наука, 1978. — 206 с.
6. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.** *Некорректные задачи математической физики и анализа.* — М.: Наука, 1980. — 286 с.
7. **Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г.** *Некорректные задачи астрофизики.* — М.: Наука, 1985. — 350 с.
8. **Кочиков И. В., Курамшина Г. М., Пентин Ю. А., Ягола А. Г.** *Обратные задачи колебательной спектроскопии.* — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 240 с.

9. **Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.** *Итеративные методы решения некорректных задач.* — М.: Наука, 1989. — 126 с.
10. **Кабанихин С. И.** *Обратные и некорректные задачи.* — Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. — 458 с.
11. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** *Элементы теории функций и функционального анализа.* — М.: Физматлит, 2004. — 572 с.
12. **Треногин В. А.** *Функциональный анализ.* — М.: Физматлит, 2002. — 488 с.
13. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** *Функциональный анализ.* — М.: Наука, 1984. — 752 с.
14. **Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П.** *Методы решения задач по функциональному анализу.* — К.: Выща школа, 1990. —479 с.
15. **Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.** *Задачи и упражнения по функциональному анализу.* — М.: Наука, 1984. — 256 с.
16. **Петров В. А., Виленкин Н. Я., Граев М. И.** *Элементы функционального анализа в задачах.* — М.: Просвещение, 1978. — 128 с.
17. **Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.** *Теоремы и задачи функционального анализа.* — М.: Наука, 1988. —400 с.
18. **Бородин П. А., Савчук А. М., Шейпак И. А.** *Задачи по функциональному анализу. Часть I.* — М.: Изд-во ЦПИ, 2009. — 176 с.

Глава 2

ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ

§ 8. ПОСТАНОВКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

В качестве основной задачи в следующих параграфах будет рассматриваться следующая задача:

Требуется найти $\min f(x)$ при условии, что $x \in X \subset H$, а также элемент $x^* \in X$, на котором минимум достигается. (8.1)

Здесь H — гильбертово пространство (возможно, конечномерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$), X — его подмножество, а $f(x)$ — определенный на X вещественный функционал. Обычно $f(x)$ называется **целевым функционалом**, а задача (8.1) — **экстремальной задачей**, или **задачей оптимизации**. Очевидно, что достаточно рассматривать только задачи минимизации, поскольку задача отыскания $\max f(x)$ при условии, что $x \in X \subset H$, эквивалентна задаче отыскания $\min(-f(x))$ на том же множестве. Заметим, что, в отличие от термина «функция», являющегося синонимом терминам «отображение» и «оператор», **функционал** — это числовая функция, т. е. зачастую множество его значений принадлежит пространству $\mathbb{R}$. Хотя если область значений некоторой функции принадлежит $\mathbb{R}$, то мы будем применять оба этих термина.

Множество X называется **допустимым множеством**, или **множеством ограничений**. Любой элемент $x \in X$ называется **допустимой точкой**. Если $X = H$, то задача (8.1) называется **задачей без ограничений**, в противном случае — **задачей с ограничениями**.

Введем следующие обозначения:

$$x^* = \arg\min\{f(x) : x \in X\}, \qquad f(x^*) = f^* = \min\{f(x) : x \in X\}. \tag{8.2}$$

Если точка минимума не единственна, то множество точек минимума обозначим как

$$X^* = \operatorname{Arg}\min\{f(x) : x \in X\}. \tag{8.3}$$

Хочется обратить внимание на то, что мы считаем пространство H гильбертовым, даже если пространство конечномерно. Дело в том, что многие результаты, которые мы получим ниже, не отличаются для конечномерных и бесконечномерных пространств. Если же мы будем использовать конечномерность (или бесконечномерность) пространства, то это будет специально оговариваться. В конечномерном случае вектор $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$.

Напомним, что точка x^* называется **точкой глобального минимума** функционала $f(x)$ на множестве X, если для любого $x \in X$ выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(x^*)$, и **точкой строгого глобального минимума**, если для любого $x \in X$, $x \neq x^*$, выполнено неравенство $f(x) > f(x^*)$.

Точка x^* называется **точкой локального минимума** функционала $f(x)$ на множестве X, если существует $r > 0$, такое, что для любого $x \in X \cap \overline{S}_r(x^*)$ выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(x^*)$, и **точкой строгого локального минимума**, если существует $r > 0$, такое, что для любого $x \in X \cap S_r(x^*)$, $x \neq x^*$, выполнено неравенство $f(x) > f(x^*)$.

§ 9. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Фундаментальное значение для исследования разрешимости экстремальных задач имеет следующая теорема.

Теорема 9.1 (*Вейерштрасс*). *Пусть X — компакт в H, $f(x)$ — непрерывный на X функционал. Тогда существует точка глобального минимума $f(x)$ на X.*

□ Докажем, что функционал $f(x)$ ограничен снизу на X. Предположим, что это не так. Тогда найдется последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $f(x_n) \leqslant -n$. Поскольку X — компакт, из последовательности x_n можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $x^* \in X$. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_n \to x^*$. В силу непрерывности $f(x)$: $f(x_n) \to f(x^*)$, что противоречит предположению о неограниченности снизу $f(x)$. Итак, $f^* = \inf\{f(x)\colon x \in X\} > -\infty$.

По определению точной нижней грани найдется последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $f^* \leqslant f(x_n) \leqslant f^* + \dfrac{1}{n}$. Поскольку X — компакт, из последовательности x_n можно вы-

делить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $x^* \in X$. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_n \to x^*$. В силу непрерывности $f(x)$ и записанного выше неравенства: $f(x_n) \to f(x^*) = f^* = \min\{f(x)\colon x \in X\}$. Итак, задача (8.1) разрешима. ■

Пусть функционал $f(x)$ **полунепрерывен снизу** на множестве X, т. е. $\forall x_0 \in X$, $\forall x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$: $x_n \to x_0, \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x_0)$.

Следствие 9.1. *Теорема 9.1 справедлива и в случае полунепрерывного снизу функционала.*

Рассмотрим теперь экстремальную задачу без ограничений: $X = H$. Напомним следующие определения.

Функционал $f(x)$ называется **дифференцируемым в точке** x_0 гильбертова пространства H, если для любого $x \in H$

$$f(x) = f(x_0) + (f'(x_0), x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \tag{9.1}$$

где $f'(x_0) \in X$ называется **производной Фреше, сильной производной,** или **градиентом функционала** $f(x)$ в точке x_0. Мы будем использовать ниже последнее название.

Морис Рене Фреше
(Maurice Rene Frechet),
1878–1973

Как хорошо известно из курса математического анализа, в конечномерном случае ($H = \mathbb{R}^n$) градиент — это вектор, компонентами которого являются частные производные функционала (функции n переменных).

Функционал $f(x)$ называется **дважды дифференцируемым** в точке x_0 гильбертова пространства H, если для любого $x \in X$

$$f(x) = f(x_0) + (f'(x_0), x - x_0) + \frac{1}{2}(f''(x_0)(x - x_0), x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2), \tag{9.2}$$

где линейный ограниченный оператор $f''(x_0)\colon H \to H$ называется **второй производной Фреше** функционала $f(x)$ в точке x_0. В конечномерном случае $f''(x_0)$ задается **матрицей Гесса** (матрицей, которая состоит из вторых смешанных производных $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ в точке x_0).

Людвиг Отто Гессе
(Ludwig Otto Hesse),
1811–1874

Линейный ограниченный оператор $A\colon H \to H$ называется **неотрицательно определенным**, если для любого $h \in H$: $(Ah, h) \geqslant 0$, **положительно определенным**, если для любого $h \in H$: $h \neq 0$, $(Ah, h) > 0$.

Напомним следующие тривиальные результаты, которые доказываются в курсе математического анализа.

Теорема 9.2 (***необходимое условие экстремума***). *Пусть функционал $f(x)$ дифференцируем в $x^* \in H$. Если x^* — точка локального минимума, то $f'(x^*) = 0$.*

Теорема 9.3. *Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируем в точке $x^* \in H$. Если x^* — точка локального минимума, то оператор $f''(x^*) \geqslant 0$ (неотрицательно определен).*

Теорема 9.4 (***достаточное условие локального минимума***). *Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируем в точке x^*. Если градиент $f'(x^*) = 0$, оператор $f''(x^*) > 0$ (положительно определен), то x^* — точка локального минимума.*

Эти результаты могут быть обобщены и на бесконечномерный случай — необходимые условия сохраняются, а достаточное условие требуется усилить.

Теоремы имеют место и в случае экстремальной задачи с ограничениями, если x^* — внутренняя точка X.

§ 10. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

В данном параграфе будем рассматривать n-мерное линейное пространство $\mathbb{R}^n$ векторов $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$, n — конечное натуральное число. Как известно, скалярное произведение двух векторов x и y задается формулой

$$(x, y) = x^{(1)}y^{(1)} + x^{(2)}y^{(2)} + \ldots + x^{(n)}y^{(n)}. \tag{10.1}$$

Пусть x и y — две различные точки в $\mathbb{R}^n$, рассмотрим совокупность точек, определенных формулой

$$(1 - \lambda)x + \lambda y. \tag{10.2}$$

Тогда

- если $\lambda \in [0, 1]$, то полученное множество называется **отрезком**, соединяющим точки x и y;
- если $\lambda \in [0, \infty)$, то — **лучом** с началом в точке x, проходящим через точку y;
- если $\lambda \in \mathbb{R}$, то — **прямой**, проходящей через точки x и y.

Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется **выпуклым**, если для любых двух точек $x, y \in M$ множеству M принадлежит и отрезок, соединяющий эти две точки. Аналогичное определение справедливо и для бесконечномерных пространств. Если же множество M содержит и все прямые, проходящие через любые, но различные точки x и y данного множества, то данное множество называется **аффинным**.

Пустое множество $\varnothing$, точка x и все пространство $\mathbb{R}^n$ являются примерами аффинных множеств.

Для множества $M \subset \mathbb{R}^n$ и вектора $a \in \mathbb{R}^n$ можно определить **сдвиг** множества M на вектор a как

$$M + a \equiv \{x + a : x \in M\}. \tag{10.3}$$

Можно проверить, что сдвиг любого аффинного множества также является аффинным множеством.

Аффинное множество M называется **параллельным** аффинному множеству P, если существует вектор a, такой, что $M = P + a$. Заметим, что для обычного трехмерного пространства введенное понятие параллельности двух множеств отличается от классического представления: так две плоскости могут быть параллельными, а прямая и плоскость — нет. Отметим, что отношение параллельности двух аффинных множеств является **отношением эквивалентности**, т. е. обладает следующими свойствами:

1) **рефлексивность**: $M \| M$,
2) **симметричность**: если $M \| P$, то $P \| M$,
3) **транзитивность**: если $M \| P$ и $P \| S$, то $M \| S$.

Лемма 10.1. *Подпространства в $\mathbb{R}^n$ являются аффинными множествами, проходящими через нуль.*

Теорема 10.1. *Любое непустое аффинное множество M параллельно единственному подпространству L.*

□ Докажем единственность. Пусть множество M параллельно двум подпространствам L_1 и L_2. Тогда в силу отношения эквивалентности, $L_1 \| L_2$, т. е. существует вектор a, такой, что $L_2 = L_1 + a$. В силу линейности подпространства L_2 оно содержит 0, а в силу линейности L_1 существует элемент $-a \in L_1$ и элемент $-(-a) = a \in L_1$. Поэтому $L_1 + a \subset L_1$, т. е. $L_2 \subset L_1$. Аналогично получаем, что $L_1 \subset L_2$. Тогда $L_1 = L_2$.

Докажем существование. Для произвольного элемента $x \in M$ рассмотрим сдвиг множества M на вектор $-x$. В си-

лу леммы 10.1 множество $L = M - x$ — подпространство $\mathbb{R}^n$, которое, как показано выше, единственно. ■

Замечание 10.1. Подпространство $L = M - x$ не зависит от выбора x, поэтому можно записать, что

$$L = M - M = \{x - y : x, y \in M\}. \tag{10.4}$$

Размерность $\dim M$ непустого аффинного множества M определяется как размерность подпространства, параллельного ему. Для пустого множества размерность полагается равной -1. Точка, прямая и плоскость имеют размерность 0, 1 и 2 соответственно. Аффинное множество размерности $n-1$ называется **гиперплоскостью**. Отметим, что любая гиперплоскость H может быть задана по формуле

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, b) = \beta\}, \tag{10.5}$$

где $b \in \mathbb{R}^n$ — ненулевой вектор, а $\beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 10.2. *Каждое аффинное множество в $\mathbb{R}^n$ есть пересечение конечного числа гиперплоскостей.*

Пересечение любого числа аффинных множеств образует аффинное множество. Для всякого аффинного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ существует единственное аффинное минимальное множество, содержащее M и называемое **аффинной оболочкой** $\operatorname{aff} M$. Множество, состоящее из $m+1$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, называется **аффинно независимым**, если $\dim \operatorname{aff}\{x_1, \ldots, x_{m+1}\} = m$.

Перейдем теперь к рассмотрению выпуклых множеств. Как и в случае аффинных множеств, пересечение любого числа выпуклых множеств образует выпуклое множество.

Пример 10.1 (***выпуклые множества***).

1) Любое аффинное множество (пустое множество, точка, прямая, плоскость, гиперплоскость, все пространство).
2) **Замкнутое (открытое) полупространство**, определяемое для любого ненулевого вектора $b \in \mathbb{R}^n$ и числа $\beta \in \mathbb{R}$ как
$$\{x \in \mathbb{R}^n : (x, b) \leqslant \beta\} \qquad (\{x \in \mathbb{R}^n : (x, b) < \beta\}). \tag{10.6}$$
3) Множество решений произвольной системы линейных неравенств и уравнений с n переменными.
4) Замкнутый шар с центром в точке x_0 и радиуса $R > 0$:
$$\bar{S}_R(x_0) = \{x : \|x - x_0\| \leqslant R\}. \tag{10.7}$$

Пересечение конечного числа полупространств в $\mathbb{R}^n$ называется **полиэдральным множеством**, или **выпуклым полиэдром**.

Вектор $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$, называется **выпуклой комбинацией** векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Теорема 10.3. *Множество M выпукло в пространстве $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда оно содержит все выпуклые комбинации своих элементов.*

Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное множество M, называется **выпуклой оболочкой** $\operatorname{conv} M$ множества M.

Множество, являющееся выпуклой оболочкой конечного числа точек, называется **выпуклым многогранником**. Если точки $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ аффинно независимы, то их выпуклая оболочка называется m-мерным **симплексом**.

Размерностью выпуклого множества M называют размерность его аффинной оболочки $\operatorname{aff} M$.

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_m$ — выпуклые множества, тогда множество

$$M = \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_m M_m \tag{10.8}$$

называется **выпуклой комбинацией множеств** $M_1, \ldots, M_m$, если $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$.

Пусть $f(x)$ — функционал, значения которого либо действительные числа, либо символы $\pm\infty$, а область определения есть подмножество S пространства $\mathbb{R}^n$. Заметим, что понятия вещественной функции и вещественного функционала совпадают. Множество

$$\{(x, v) \colon x \in S, v \in \mathbb{R}, v \geqslant f(x)\} \tag{10.9}$$

называется **надграфиком** (или **эпиграфом**) функционала $f(x)$ и обозначается через $\operatorname{epi} f$. Функционал $f(x)$ — **выпуклый**, если надграфик $\operatorname{epi} f$ есть выпуклое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$. Функционал $f(x)$ называется **вогнутым**, если функционал $-f(x)$ выпуклый.

Эффективным множеством $\operatorname{dom} f$ выпуклого функционала $f(x)$ на S называется проекция на $\mathbb{R}^n$ надграфика функционала $f(x)$:

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists v, (x, v) \in \operatorname{epi} f\} \tag{10.10}$$

или, используя эквивалентную запись,

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) < \infty\}. \tag{10.11}$$

Пример 10.2. Рассмотрим функцию $f(x) = -\log x$. Данная функция определена для $x \in (0, +\infty)$ и является выпуклой. Но эту функцию можно «доопределить» как

$$f(x) = \begin{cases} -\log x, & x > 0, \\ +\infty, & x \leqslant 0. \end{cases} \tag{10.12}$$

Таким образом, эта функция является выпуклой на всей прямой $\mathbb{R}$. Поэтому под выпуклым функционалом будем подразумевать выпуклый функционал, принимающий, возможно, бесконечные значения, но определенный на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Выпуклый функционал называется **собственным**, если его надграфик не пуст и не содержит вертикальных прямых. В этом случае хотя бы для одного значения x: $f(x) < +\infty$, а для всех x выполняется $f(x) > -\infty$.

Вопросы и задачи

1) Что представляют собой m-мерные симплексы при $m = 0, 1, 2, 3$?
2) Докажите, что если M — выпуклое множество, то любой его сдвиг $M + a$, $a \in \mathbb{R}^n$, и скалярное кратное $\lambda M = \{\lambda x \colon x \in \mathbb{R}^n\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, также являются выпуклыми множествами.
3) Докажите, что если C — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv} C$ — тоже открытое множество.
4) Приведите пример в $\mathbb{R}^n$ того, что выпуклая оболочка замкнутого множества не обязана быть замкнутой.
5) Что представляет собой выпуклая комбинация
   а) двух кругов, б) круга и треугольника,
   в) треугольника и квадрата?
6) Докажите, что единичный шар $\{x \colon \|x\| \leqslant 1\}$ в произвольном линейном нормированном пространстве является выпуклым множеством.
7) «Доопределите» следующие функции до выпуклых на всей прямой $\mathbb{R}$:
   а) x^p, $p \geqslant 1$, б) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a > 0$.

§ 11. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Определение выпуклого функционала (см. (10.9) и ниже) можно переписать в несколько ином виде. Функционал $f(x)$, определенный на выпуклом множестве X гильбертова пространства, называется **выпуклым**, если $\forall x_1, x_2 \in X$ и $\forall \lambda \in [0, 1]$ имеет место неравенство:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2). \tag{11.1}$$

Приведем некоторые операции, позволяющие построить выпуклые функционалы.

1) Пусть $f(x)$ — выпуклый функционал на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $(-\infty, +\infty]$, а $g(v)$ — неубывающий выпуклый функционал, определенный на $\mathbb{R}$, со значениями в $(-\infty, +\infty]$. Тогда функционал $h(x) = g(f(x))$ является выпуклым на $\mathbb{R}^n$.
2) Поточечная верхняя грань произвольного семейства выпуклых функционалов является выпуклым функционалом, т. е. $f(x) = \sup\{f_i(x)\colon i \in I\}$ выпуклый, если $f_i(x)$ выпуклые.
3) Линейная комбинация $\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x)$ собственных выпуклых функционалов с неотрицательными коэффициентами является выпуклым функционалом.
4) Пусть A — линейное преобразование из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Тогда для любого выпуклого функционала $g(y)$ на $\mathbb{R}^m$ функционал $f(x) = g(Ax)$ тоже выпуклый.

Геометрический смысл неравенства (11.1): отрезок, соединяющий любые две точки на графике выпуклого функционала, лежит не ниже самого графика.

Определение 11.1. Функционал $f(x)$, определенный на выпуклом множестве X, называется **строго выпуклым**, если для $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$: $\forall \lambda \in (0, 1)$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1 + (1-\lambda)x_2). \tag{11.2}$$

Определение 11.2. Функционал $f(x)$, определенный на выпуклом множестве X, называется **сильно выпуклым**, если существует константа $\theta > 0$ (называемая **константой сильной выпуклости**), такая, что для $\forall x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - \theta\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2. \tag{11.3}$$

Очевидно, что из сильной выпуклости следует строгая выпуклость, а из строгой выпуклости следует выпуклость (обратное неверно).

Аналогично определению сильной выпуклости можно ввести определение равномерной выпуклости, если в формуле (11.3) вместо квадратичной функции $\theta\|x_1 - x_2\|^2$ задать некоторую строго монотонно возрастающую функцию $r(\|x_1 - x_2\|)$, такую, что $r(0) = 0$, $r(+\infty) = +\infty$. Это определение, однако, не будет использоваться в дальнейшем.

Пример 11.1. Функция одной переменной $f(x) = x^2$ сильно выпуклая, а функция $f(x) = x^4$ не является сильно выпуклой, но является строго выпуклой.

Пример 11.2. Функционал $f(x) = \|x\|$, определенный на всем гильбертовом пространстве H, является выпуклым, но не является строго выпуклым. Функционал $f(x) = \|x\|^2 = (x,x)$ является простейшим примером сильно выпуклого функционала.

Ниже мы сформулируем легко проверяемые критерии выпуклости и сильной выпуклости дифференцируемых функционалов.

Утверждение 11.1 (***неравенство Йенсена***). *Пусть функционал $f(x)$ выпуклый на выпуклом множестве X. Тогда для $\forall x_1, \ldots, x_n \in X$ и $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n$: $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$ и $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ имеет место неравенство: $f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$.*

Доказательство неравенства Йенсена проводится по индукции, исходя из неравенства (11.1), и предоставляется читателям.

Иоган Людвиг Виллиам Вальдемар Йенсен (Johan Ludvig William Valdemar Jensen), 1859–1925

Дадим некоторую классификацию экстремальных задач.

1) Если X — выпуклое множество, а $f(x)$ — выпуклый функционал, то (8.1) — **задача выпуклого программирования**.
2) Часто X задается системой неравенств и равенств: $X = \{x \in P: g_i(x) \leqslant 0, i = 1, \ldots, k, g_i(x) = 0, i = k+1, \ldots, m)\}$, где P — множество прямых ограничений. Задача отыскания минимума функционала $f(x)$ на таком множестве называется **задачей математического программирования**. Она становится задачей выпуклого программирования, если P — выпуклое множество, функционалы

$g_i(x)$ в ограничениях типа неравенств выпуклы, а в ограничениях типа равенств аффинны. Это следует из того, что 1) если $g(x)$ — выпуклый функционал, то множество $\{x\colon g(x) \leqslant \beta\}$ (β — константа) выпукло (или пусто); 2) пересечение выпуклых множеств выпукло или пусто. Эти утверждения легко следуют из определения выпуклости и предоставляются читателям.

3) **Задача линейного программирования** получится, если $H = \mathbb{R}^n$, $f(x) = a + (b, x)$ — линейный (точнее, аффинный, но мы будем называть его линейным) функционал, а все ограничения дают многогранник (т. е. P — многогранник, и все функционалы $g_i(x)$ линейны). Задача линейного программирования — частный случай задачи выпуклого программирования. Легко показать, используя необходимое условие экстремума, что $f(x)$ достигает минимума (если задача линейного программирования имеет решение) в вершинах многогранника.

4) Если $H = \mathbb{R}^n$, а $f(x)$ имеет вид: $f(x) = a + (b, x) + \frac{1}{2}(Cx, x)$, а ограничения линейны, то это **задача квадратичного программирования**. Здесь C — симметричная матрица. Если C неотрицательно определена, то задача квадратичного программирования будет частным случаем задачи выпуклого программирования.

Определение 11.3. Функционал $f(x)$ называется **вогнутым** (**строго вогнутым, сильно вогнутым**), если $-f(x)$ — выпуклый (строго выпуклый, сильно выпуклый) функционал.

Теорема 11.1. *Если* (8.1) — *задача выпуклого программирования, то любая точка локального минимума является точкой глобального минимума.*

□ Пусть x^* — точка локального минимума $f(x)$ на X, т. е. это минимум $f(x)$ на $X \cap \bar{S}_\varepsilon(x^*)$, $\varepsilon > 0$, то $\forall x \in X \cap \bar{S}_\varepsilon(x^*)$ имеет место неравенство: $f(x) \geqslant f(x^*)$. Фиксируем произвольную точку $x \in X$, $x \notin X \cap \bar{S}_\varepsilon(x^*)$, и покажем, что для нее справедливо неравенство: $f(x) \geqslant f(x^*)$ (будем рассматривать $x \neq x^*$). Рассмотрим $\lambda = \min\left(\frac{\varepsilon}{\|x - x^*\|}, 1\right)$. Очевидно, что $0 < \lambda \leqslant 1$. Рассмотрим выпуклую комбинацию: $\lambda x + (1 - \lambda)x^*$. Легко проверить, что $\lambda x + (1 - \lambda)x^* \in X \cap \bar{S}_\varepsilon(x^*)$. Поскольку в точке x^* локаль-

ный минимум, $f(\lambda x+(1-\lambda)x^*) \geqslant f(x^*)$. Применим неравенство выпуклости: $f(x^*) \leqslant f(\lambda x + (1-\lambda)x^*) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x^*)$. Отсюда (поскольку $\lambda > 0$) $f(x) \geqslant f(x^*)$. Теорема доказана. ■

Эта важная теорема определяет интерес к задачам выпуклого программирования — выпуклые функционалы не имеют локальных минимумов.

Теорема 11.2. *Пусть функционал $f(x)$ выпуклый на всем пространстве H и дифференцируем в точке $x^* \in H$. Если $f'(x^*) = 0$, то x^* — точка минимума $f(x)$ на H.*

□ $\forall x \in H$ и $\forall \lambda \in (0,1]$ запишем неравенство выпуклости: $f(\lambda x + (1-\lambda)x^*) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x^*)$. Поделив на λ и используя дифференцируемость функционала $f(x)$ в точке x^*, получаем

$$f(x)-f(x^*) \geqslant \frac{f(x^*+\lambda(x-x^*))-f(x^*)}{\lambda} = \frac{(f'(x^*), \lambda(x-x^*))+O(\lambda)}{\lambda} = \frac{O(\lambda)}{\lambda}. \tag{11.4}$$

Левая часть не зависит от λ, поэтому, переходя к пределу при $\lambda \to 0+0$, получаем, что x^* — точка минимума. Теорема доказана. ■

Таким образом, для задачи выпуклого программирования без ограничений поиск точки минимума эквивалентен поиску стационарной точки, т. е. обращение градиента в нуль является не только необходимым, но и достаточным условием минимума.

Теорема 11.3. *Пусть (8.1) — задача выпуклого программирования, причем она имеет решение. Тогда множество ее решений: $X^* = \operatorname{Arg}\min\{f(x) : x \in X\}$ — выпукло. Если $f(x)$ — строго выпуклая функция, то X^* состоит из единственной точки x^*.*

□ Пусть $x_1, x_2 \in X^*$, т.е. $f(x_1) = f(x_2) = f^* = \min\{f(x): x \in X\}$. Пусть $\lambda \in [0,1]$. Покажем, что весь отрезок $[x_1, x_2] \in X^*$, т. е. X^* — выпуклое множество. На самом деле: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = f^*$. Отсюда $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f^*$, т. е. X^* выпукло. Если $f(x)$ строго выпуклый функционал, и $x_1 \neq x_2$, то мы приходим к противоречию записанного выше неравенства и неравенства строгой выпуклости. Тем самым, X^* состоит из единственной точки. Теорема доказана. ■

Эта теорема позволяет легко получать доказательство единственности точки минимума в задаче выпуклого программирования. Достаточно доказать, что функционал строго выпуклый. В частности, ниже мы будем не раз использовать этот результат для сильно выпуклых функционалов.

Вопросы и задачи

Докажите, что сумма выпуклого и сильно выпуклого функционалов с непустой областью определения является сильно выпуклым функционалом.

§ 12. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В этом параграфе обсудим вопрос разрешимости задачи выпуклого программирования. Для этих целей введем дополнительные определения сходимости элементов. Сходимость последовательности элементов метрического или нормированного пространства рассматривалась в § 3. Иногда такую сходимость называют **сильной**, для того чтобы отличить от так называемой слабой сходимости.

Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, элементов нормированного пространства N **слабо сходится** к элементу x, если для любого линейного непрерывного функционала $\varphi(x)$ имеет место сходимость $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Обозначается такая сходимость как $x_n \rightharpoonup x$. В случае гильбертова пространства H условие слабой сходимости записывается в виде: $x_n \rightharpoonup x \in H$, если для любого вектора $a \in H$: $(a, x_n) \to (a, x)$.

Множество X называется **слабым компактом**, если из любой слабо сходящейся последовательности его элементов можно выделить слабо сходящуюся к элементу X подпоследовательность.

Для того чтобы лучше понять различие между обычным (сильным) и слабым компактом, рассмотрим замкнутый шар единичного радиуса в гильбертовом пространстве H, где норма соответствующего нормированного пространства равна $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Будем рассматривать только бесконечномерные пространства, так как в случае конечномерных пространств справедлива следующая теорема.

Теорема 12.1. *Пусть X — множество конечномерного нормированного пространства N. Множество X является компактом тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Согласно этой теореме, замкнутый единичный шар в конечномерном пространстве является компактом.

Пример 12.1 (***шар в бесконечномерном гильбертовом пространстве***). Рассмотрим бесконечную ортонормированную систему (сисгему ортов) $e_1, e_2, \ldots$, которая существует в любом бесконечномерном гильбертовом пространстве. Поскольку скалярное произведение ортов

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j, \end{cases} \tag{12.1}$$

то $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$, $i \neq j$. Отсюда следует, что из последовательности ортов нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Поэтому единичный шар не является компактом.

Теорема 12.2. *Любая ограниченная последовательность элементов x_n гильбертова пространства H содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема 12.3. *Замкнутый единичный шар в гильбертовом пространстве слабо компактен.*

Следствие 12.1. *Замкнутое выпуклое ограниченное множество гильбертова пространства H является слабым компактом.*

От условия выпуклости, вообще говоря, отказаться нельзя.

Пример 12.2 (***сфера в гильбертовом пространстве***). Единичная сфера гильбертова пространства $\{x\colon \|x\| = 1\}$ замкнута, но не является слабо замкнутой. Как и выше, рассмотрим счетную систему ортов $e_1, e_2, \ldots$. Любой вектор $a \in H$ можно представить в виде ряда Фурье $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, где $a_k = (a, e_k)$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \|a\|^2 < +\infty$. Согласно неравенству Коши—Буняковского $|(a, e_n)| \leqslant \|a\| \cdot \|e_n\| = \|a\|$, так как $\|e_n\| = 1$ для точек сферы. Согласно теореме 4.4 (Больцано—Вейерштрасса) из (a, e_n) можно выделить сходящуюся подпоследовательность, следовательно, и из e_n можно выделить подпоследовательность e_{n_m}, для которой $(a, e_{n_m}) = a_{n_m} \to c$. Так как $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n_m}^2 \leqslant \|a\|^2$, то $a_{n_m} \to 0$, т. е. $c = 0$. В то же время $c = 0 = (a, 0)$, т. е. $e_{n_m} \rightharpoonup 0$, а нулевой элемент не принадлежит единичной сфере.

Во всех гильбертовых и некоторых банаховых пространствах имеет место так называемое **H-свойство**: из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость.

Теорема 12.4. *Пусть дана последовательность элементов x_n гильбертова пространства H. Если $x_n \rightharpoonup x$ и $\|x_n\| \to \|x\|$, то $x_n \to x$.*

□ Из условий теоремы $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2(x_n, x) \to 0$. ■

Гильбертово пространство обладает также свойством строгой нормированности: неравенство треугольника выполняется как строгое неравенство для любых линейно независимых x и y, т. е. $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$, если $\alpha x + \beta y \neq 0$ для любых α и β, таких, что $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Определение 12.1. Функционал $f(x)$ называется **слабо полунепрерывным снизу** на множестве X, если $\forall x_0 \in X$, $\forall x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$: $x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x_0)$.

Теорема 12.5 (***теорема Вейерштрасса***). *Слабо полунепрерывный снизу функционал на слабом компакте достигает своей точной нижней грани.*

Данный вариант теоремы Вейерштрасса не требует специального доказательства, поскольку доказательство, приведенное для теоремы 9.1, полностью может быть применено и в этом случае путем перехода к слабо сходящимся последовательностям.

Теорема 12.6. *Выпуклый непрерывный (или полунепрерывный снизу) функционал слабо полунепрерывен снизу.*

Перейдем к вопросу разрешимости задачи (8.1) выпуклого программирования.

Теорема 12.7. *Выпуклый непрерывный (полунепрерывный снизу) функционал на замкнутом выпуклом ограниченном множестве гильбертова пространства H достигает своей точной нижней грани.*

□ Полное доказательство данной теоремы требует знания некоторых конструкций из функционального анализа и здесь опущено. ■

К сожалению, перенести результат о разрешимости задачи выпуклого программирования на любое банахово пространство нельзя.

Пример 12.3. Рассмотрим пространство $C[-1, 1]$ и единичный шар в этом пространстве $\bar{S}_1(0) = \{z(t), -1 \leqslant z(t) \leqslant 1, t \in [-1, 1]\}$,

который является ограниченным выпуклым и замкнутым множеством. Рассмотрим линейный функционал: $f(z) = \int_{-1}^{0} z(s)\,\mathrm{d}s - \int_{0}^{1} z(s)\,\mathrm{d}s$. Этот линейный ограниченный функционал является непрерывным, однако он не достигает своей точной нижней грани, равной -2, на единичном шаре пространства $C[-1,1]$. Отсюда сразу следует, что единичный шар в этом пространстве не является слабым компактом.

На самом деле, теорема о разрешимости задачи выпуклого программирования справедлива не только для гильбертовых пространств, но и для банаховых пространств, обладающих определенными свойствами, на которых мы останавливаться не будем.

Попытаемся теперь ослабить условия теоремы о разрешимости задачи выпуклого программирования, отказавшись от условия ограниченности множества X. Тривиальные примеры для функций одной переменной показывают, что теорема в этом случае, вообще говоря, не верна. Если же потребовать, чтобы функционал $f(x)$ обладал свойством сильной выпуклости, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 12.8. *Пусть $f(x)$ — непрерывный сильно выпуклый функционал, определенный на замкнутом выпуклом множестве X гильбертова пространства H. Тогда $f(x)$ достигает своего минимума на X, причем в единственной точке.*

□ Обозначим $x^* = \operatorname{argmin}\{f(x) : x \in X\}$. Единственность x^* следует из того, что сильно выпуклый функционал является строго выпуклым. Если X ограничено, то теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда X не ограничено (в частности, $X = H$). Введем множество $X_\beta = \{x \in X : f(x) \leqslant \beta\}$. Если f — выпуклый функционал, X — выпуклое множество, то X_β также является выпуклым (если только X_β не пусто). Так как $f(x)$ — непрерывный функционал, то X_β замкнуто.

Возьмем $\beta = f(x_0)$, где $x_0 \in X$ — некоторая фиксированная точка. Заметим, что рассматриваемая нами задача и задача нахождения $\min_{x \in X_\beta} f(x)$ эквивалентны. Поэтому если доказать, что X_β ограничено, то теорема будет доказана. Рассмотрим замкнутый шар: $\bar{S} = \bar{S}_1(x_0)$. В силу непрерывности $f(x)$ и замкнутости X существует константа α, такая, что $f(x) \geqslant \alpha$ для всех $x \in X \cap \bar{S}$. Так как $x_0 \in X \cap \bar{S}$, то $f(x_0) \geqslant \alpha$.

Покажем, что

$$\|x - x_0\| \leqslant 1 + \frac{\beta - \alpha}{\theta}, \tag{12.2}$$

где $x \in X_\beta$ — произвольная фиксированная точка, θ — константа сильной выпуклости, $\beta = f(x_0)$. Это неравенство означает, что множество X_β ограничено.

Если $x \in X_\beta \cap \bar{S}$, то (12.2) выполнено, так как $\|x - x_0\| \leqslant 1$, а $\frac{\beta - \alpha}{\theta} \geqslant 0$. Возьмем теперь произвольный фиксированный элемент $x \in X_\beta \backslash \bar{S}$ и положим $\lambda = \frac{1}{\|x - x_0\|}$. Очевидно, что $0 < \lambda < 1$. Рассмотрим выпуклую комбинацию $\bar{x} = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot x_0$. Очевидно, что $\bar{x} \in X \cap \bar{S}$ ($\|\bar{x} - x_0\| = 1$). Тогда

$$\alpha \leqslant f(\bar{x}) \leqslant \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(x_0) - \theta \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot \|x - x_0\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \beta - \theta \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot \|x - x_0\|^2 = \beta - \theta \cdot (\|x - x_0\| - 1). \tag{12.3}$$

Отсюда получаем $\|x - x_0\| \leqslant 1 + \frac{\beta - \alpha}{\theta}$, т. е. множество X_β ограничено. ■

Пусть $f^* = \min\{f(x)\colon x \in X\}$, а $x^* = \operatorname{argmin}\{f(x)\colon x \in X\}$, т. е. $f^* = f(x^*)$. Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, элементов множества X называется **сходящейся по функционалу** к точке минимума, если $f(x_n) \to f(x^*) = f^*$ при $n \to \infty$. Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, элементов множества X называется **сходящейся по аргументу** к точке минимума, если $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$.

Для непрерывного функционала из сходимости по аргументу к точке минимума следует сходимость по функционалу. Обратное, очевидно, не верно.

Теорема 12.9. *Для сильно выпуклых непрерывных функционалов из сходимости по функционалу к точке минимума следует сходимость по аргументу.*

□ Пусть $x^* = \operatorname{argmin}\{f(x)\colon x \in X\}$, $f(x)$ — сильно выпуклый функционал, X — замкнутое выпуклое множество. Рассмотрим произвольный элемент $x \in X$. Тогда $f(x) \geqslant f(x^*)$.

Пусть $\lambda \in (0,1]$, тогда применим неравенство сильной выпуклости и получим

$$0 \leqslant f(\lambda x + (1-\lambda)x^*) - f(x^*) \leqslant \lambda(f(x) - f(x^*)) - \lambda(1-\lambda)\theta\|x - x^*\|^2. \tag{12.4}$$

Откуда $\lambda(1-\lambda)\theta\|x-x^*\|^2 \leqslant \lambda(f(x) - f(x^*))$ или, сокращая на λ,

$$(1-\lambda)\theta\|x - x^*\|^2 \leqslant f(x) - f(x^*). \tag{12.5}$$

Правая часть неравенства не зависит от λ, поэтому можно совершить предельный переход при $\lambda \to 0+0$. Получаем неравенство

$$f(x) - f(x^*) \geqslant \theta\|x - x^*\|^2. \tag{12.6}$$

Из этого неравенства следует результат теоремы: из сходимости по функционалу $f(x_n) \to f(x^*)$ при $n \to \infty$ следует сходимость по аргументу $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$. ■

§ 13. КРИТЕРИИ ВЫПУКЛОСТИ И СИЛЬНОЙ ВЫПУКЛОСТИ

Как отмечалось ранее, из сильной выпуклости следует строгая выпуклость, а из строгой выпуклости следует выпуклость. Таким образом, сильно выпуклый функционал является частным случаем выпуклого функционала. В этом же параграфе и только в этом параграфе для сокращения формулировок мы будем считать выпуклый функционал частным случаем сильно выпуклого функционала с константой выпуклости $\theta = 0$.

Теорема 13.1. *Пусть $f(x)$ — дифференцируемый на выпуклом множестве $X \subset H$ функционал, H — гильбертово пространство. Тогда $f(x)$ — сильно выпуклый с константой $\theta \geqslant 0$ в том и только том случае, если имеют место неравенства:*

$$\forall x, \bar{x} \in X \qquad f(x) \geqslant f(\bar{x}) + (f'(\bar{x}), x - \bar{x}) + \theta\|x - \bar{x}\|^2. \tag{13.1}$$

Перед тем, как перейти к доказательству, заметим, что $f_p(x) = f(\bar{x}) + (f'(\bar{x}), x - \bar{x})$ — уравнение плоскости, касательной к графику функционала $f(x)$ в точке с координатами $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Таким образом, необходимым и достаточным условием выпуклости ($\theta = 0$) является условие того, что график выпуклого функционала лежит не ниже касательной плоскости в каждой точке графика.

□ Докажем сначала необходимость. Пусть $f(x)$ — сильно выпуклый с константой $\theta \geqslant 0$ функционал. Тогда $\forall x, \bar{x} \in X$ и $\forall \lambda \in (0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(\bar{x}) - \theta\lambda(1-\lambda)\|x - \bar{x}\|^2 \tag{13.2}$$

— неравенство сильной выпуклости. Отсюда следует неравенство

$$f(x) - f(\tilde{x}) - \theta(1-\lambda)\|x-\tilde{x}\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{f(\tilde{x}+\lambda(x-\tilde{x})) - f(x)}{\lambda} = \frac{(f'(\tilde{x}), \lambda(x-\tilde{x})) + o(\lambda)}{\lambda}. \quad (13.3)$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0+0$, получаем результат теоремы.

Докажем теперь достаточность сформулированного выше условия. Для любых точек $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in (0,1]$ положим $\tilde{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Тогда по условию теоремы:

$$f(x_1) - f(\tilde{x}) \geqslant (f'(\tilde{x}), x_1 - \tilde{x}) + \theta\|x_1 - \tilde{x}\|^2, \quad (13.4)$$

$$f(x_2) - f(\tilde{x}) \geqslant (f'(\tilde{x}), x_2 - \tilde{x}) + \theta\|x_2 - \tilde{x}\|^2. \quad (13.5)$$

Умножим первое неравенство на λ, а второе — на $(1-\lambda)$ и сложим. Учитывая, что

$$\|x_1 - \tilde{x}\|^2 = (1-\lambda)^2\|x_1 - x_2\|^2, \quad (13.6)$$

$$\|x_2 - \tilde{x}\|^2 = \lambda^2\|x_2 - x_1\|^2, \quad (13.7)$$

$$(f'(\tilde{x}), \lambda x_1 - \lambda\tilde{x} + (1-\lambda)x_2 - (1-\lambda)\tilde{x}) = 0, \quad (13.8)$$

после сложения получаем

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(\tilde{x}) - \theta\lambda(1-\lambda)\|x_2 - x_1\|^2 \geqslant 0. \quad (13.9)$$

Это и есть неравенство сильной выпуклости. ■

Теорема 13.2. *Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемый функционал, определенный на выпуклом множестве $X \subset H$. Тогда $f(x)$ — сильно выпуклый с константой $\theta \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\forall x, \tilde{x} \in X$*

$$(f'(x) - f'(\tilde{x}), x - \tilde{x}) \geqslant 2\theta\|x - \tilde{x}\|^2 \quad (13.10)$$

(при $\theta = 0$ это неравенство означает монотонность градиента как оператора, действующего из H в H).

□ Докажем сначала необходимость. Для любых $x, \tilde{x} \in X$ запишем, а затем сложим два неравенства, которые являются необходимыми условиями сильной выпуклости в соответствии с предыдущей теоремой:

$$+\begin{cases} f(x) - f(\tilde{x}) \geqslant (f'(\tilde{x}), x - \tilde{x}) + \theta \cdot \|x - \tilde{x}\|^2, \\ f(\tilde{x}) - f(x) \geqslant (f'(x), \tilde{x} - x) + \theta \cdot \|x - \tilde{x}\|^2. \end{cases} \quad (13.11)$$

Отсюда $(f'(x) - f'(\tilde{x}), x - \tilde{x}) \geqslant 2\theta\|x - \tilde{x}\|^2$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем достаточность. Фиксируем произвольные $x, \bar{x} \in X$ и рассмотрим $F(\alpha) = f(\bar{x} + \alpha(x - \bar{x}))$, $\alpha \in [0, 1]$. Легко найти производную

$$F'(\alpha) = \lim_{\triangle\alpha \to 0} \frac{F(\alpha + \triangle\alpha) - F(\alpha)}{\triangle\alpha} =$$
$$= \lim_{\triangle\alpha \to 0} \frac{f(\bar{x} + (\alpha + \triangle\alpha)(x - \bar{x})) - f(\bar{x} + \alpha(x - \bar{x}))}{\triangle\alpha} =$$
$$= \lim_{\triangle\alpha \to 0} \frac{f'((\bar{x} + \alpha(x - \bar{x})), \triangle\alpha(x - \bar{x})) + o(\triangle\alpha)}{\triangle\alpha} =$$
$$= (f'(\bar{x} + \alpha(x - \bar{x})), x - \bar{x}).$$

Отсюда

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha = \int_0^1 (f'(\bar{x} + \alpha(x - \bar{x})), x - \bar{x})\, \mathrm{d}\alpha, \quad (13.12)$$

где $F(1) = f(x)$, $F(0) = f(\bar{x})$, и

$$f(x) - f(\bar{x}) - (f'(\bar{x}), x - \bar{x}) =$$
$$= \int_0^1 (f'(\bar{x} + \alpha(x - \bar{x})), x - \bar{x})\, \mathrm{d}\alpha - (f'(\bar{x}), x - \bar{x}) =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{\alpha} (f'(\bar{x} + \alpha(x - \bar{x})) - f'(\bar{x}), \alpha(x - \bar{x}))\, \mathrm{d}\alpha \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^1 \frac{1}{\alpha} 2\theta \|\alpha(x - \bar{x})\|^2\, \mathrm{d}\alpha = \theta \|x - \bar{x}\|^2.$$

Теорема доказана. ■

Сначала докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 13.1. *Если множество X выпукло и $\operatorname{int} X \neq \{\varnothing\}$, то $\bar{X} = \overline{\operatorname{int} X}$.*

□ Пусть $x \in \operatorname{int} X$, $y \in \bar{X}$. Тогда достаточно показать, что $\lambda y + (1 - \lambda)x \in \operatorname{int} X$ для любых $\lambda \in (0, 1]$. Таким образом, нужно доказать, что $\forall \lambda \in (0, 1]\ \exists \varepsilon > 0\ \lambda y + (1 - \lambda)x + \varepsilon \bar{S} \in X$, где $\bar{S} = \{x \colon \|x\| \leqslant 1\}$. Так как $y \in \bar{X}$, то $y \in X + \varepsilon \bar{S}$ для всех $\varepsilon > 0$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0$ имеет место следующее включение:

$$\lambda y + (1 - \lambda)x + \varepsilon \bar{S} \subset (1 - \lambda)x + (x + \varepsilon \bar{S})\lambda + \varepsilon \bar{S} =$$
$$= (1 - \lambda)\left[x + \varepsilon \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \bar{S}\right] + \lambda X. \quad (13.13)$$

Но $x \in \operatorname{int} X$. Поэтому при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\lambda y + (1-\lambda)x + \varepsilon\bar{S} \subset (1-\lambda) + (x + \varepsilon\bar{S})\lambda + \varepsilon\bar{S} =$$
$$= (1-\lambda)\left[x + \varepsilon\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\bar{S}\right] + \lambda X \subset (1-\lambda)X + \lambda X = X. \quad (13.14)$$

Лемма доказана. ■

Заметим, что для невыпуклых множеств лемма 13.1 заведомо не верна.

Теорема 13.3. *Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемый функционал на выпуклом множестве X гильбертова пространства H, причем X имеет внутренние точки: $\operatorname{int} X \neq \{\varnothing\}$. Тогда $f(x)$ — сильно выпуклый с константой $\theta \geqslant 0$ в том и только том случае, если $\forall \tilde{x} \in X$, $\forall h \in H$*

$$(f''(\tilde{x}) \cdot h, h) \geqslant 2\theta\|h\|^2. \quad (13.15)$$

В конечномерном случае ($H = \mathbb{R}^n$) это означает, что минимальное собственное значение матрицы Гесса $\lambda_{\min}(\tilde{x}) \geqslant 2\theta$.

□ Сначала докажем необходимость. Пусть $\tilde{x} \in \operatorname{int} X$. Тогда, так как $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция в $\tilde{x}$, то для $\forall h \in H$ (H — гильбертово пространство) и (достаточно малого) такого, что $\tilde{x} + \alpha h \in X$:

$$f(\tilde{x} + \alpha h) = f(\tilde{x}) + (f'(\tilde{x}), \alpha h) + \frac{1}{2}(f''(\tilde{x})\alpha h, \alpha h) + o(\alpha^2) \quad (13.16)$$

или

$$\frac{\alpha^2}{2}(f''(\tilde{x})h, h) + o(\alpha^2) = f(\tilde{x} + \alpha h) - f(\tilde{x}) - (f'(\tilde{x}), \alpha h) \geqslant \theta\alpha^2\|h\|^2 \quad (13.17)$$

(по теореме 13.1), из чего следует $(f''(\tilde{x})h, h) \geqslant 2\theta\|h\|^2$.

Пусть теперь $\tilde{x} \notin \operatorname{int} X$. Используя лемму 13.1, находим, что существует последовательность $x_k \in \operatorname{int} X$: $x_k \to x \in \bar{X}$. Для каждого x_k утверждение теоремы верно и, учитывая, что $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемый функционал, можно сделать предельный переход и получить требуемое неравенство.

Брук Тейлор (Brook Taylor), 1685–1731

Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange (фр.), Guiseppe Lodovico Lagrangia (итал.)), 1736–1813

Докажем теперь достаточность. Рассмотрим $\forall x, \tilde{x} \in X$ и обозначим $h = x - \tilde{x}$. Раскладывая в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и используя формулировку теоре-

мы, легко получаем:

$$f(\tilde{x}+h)-f(\tilde{x})-(f'(\tilde{x}),h)=\frac{1}{2}(f''(\tilde{x}+\alpha h)h,h)\geqslant\theta\|h\|^2, \quad (13.18)$$

т. е. функционал сильно выпуклый по теореме 13.1, $\alpha\in(0,1)$. ■

Дадим три определения **сходимости последовательности операторов** $A_n\to A$, действующих в гильбертовом пространстве H:

1) $\|A_n-A\|\to 0$ — **сходимость в равномерной операторной топологии**;
2) $\forall x\in H$: $A_nx\to Ax$ — **сильная сходимость**;
3) $\forall x,y\in H$: $(A_nx,y)\to(Ax,y)$ — **слабая сходимость**.

Из сходимости в равномерной операторной топологии следует сильная сходимость, а из сильной сходимости следует слабая сходимость. При доказательстве теоремы 13.3 по сути дела использовалась только слабая сходимость.

Пусть A — симметрическая матрица ($A_{ij}=A_{ji}$ для всех $i,j\in\overline{1,n}$), определяющая оператор A: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Рассмотрим квадратичный функционал:

$$f(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c. \quad (13.19)$$

Легко видеть, что $f'(x)=Ax+b$, $f''(x)=A$.

Если A строго положительно определен, то наименьшее собственное значение $\lambda_{\min}(A)>0$, а квадратичный функционал $f(x)$ является сильно выпуклым. Если же $\lambda_{\min}(A)=0$, то квадратичный функционал является выпуклым, но не сильно выпуклым. Если же $\lambda_{\min}(A)<0$, то $f(x)$ не является выпуклым.

Если A: $H\to H$ — самосопряженный оператор, то такой же квадратичный функционал можно рассматривать в гильбертовом пространстве. Если A положительно определен (строго), то для любого $x\neq 0$: $(Ax,x)>0$, что, однако, не означает $\lambda_{\min}(A)>0$. Квадратичный функционал в этом случае является строго выпуклым, но, вообще говоря, может не быть сильно выпуклым. Например, самосопряженный вполне непрерывный положительно определенный оператор, действующий в бесконечномерном гильбертовом пространстве, может иметь бесконечную последовательность положительных собственных значений $\{\lambda_i\}$, которая сходится к 0. Соответствующий квадратичный функционал не является сильно выпуклым.

§ 14. СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ

В этом параграфе приведем некоторые сведения из теории матриц. Рассмотрим вещественную матрицу A размера $m \times n$, т. е. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. **Область значений** матрицы A определяется как

$$R(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{14.1}$$

Рангом матрицы A называется число

$$\operatorname{rank}(A) = \dim(R(A)). \tag{14.2}$$

Пусть $n = m, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — некоторые числа, тогда **диагональную матрицу**, все элементы которой равны нулю, кроме диагональных, равных $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ соответственно, обозначим как $\operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. **Единичная матрица** $I = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ является примером диагональной матрицы. Если задана некоторая квадратная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и существует матрица $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая, что $BA = I$, то матрица B называется **обратной** к матрице A и обозначается как A^{-1}. Тогда матрица A **невырожденная**, в противном случае A **вырожденная**.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, тогда **определитель** матрицы вводится как $\det A = A_{11}$. Для квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ определитель вводим как

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} \det(A_{i1}^{*}), \tag{14.3}$$

где матрицы $A_{i1}^{*} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ получены путем вычеркивания i-й строки и первого столбца из матрицы A. Заметим, что если $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, то

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B, \quad \det(\alpha A) = \alpha^n \det A, \quad \det(A^T) = \det A, \tag{14.4}$$

где A^T означает **транспонированную** матрицу, когда столбцы и строки меняются местами. Матрица A является невырожденной тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

Норму для матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ можно ввести несколькими способами, мы же будем использовать норму, порожденную нормой в пространстве $\mathbb{R}^m$, т. е.

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}. \tag{14.5}$$

Матрица $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **ортогональна**, если $Q^T Q = E$.

Рассмотрим систему

$$Ax = u \tag{14.6}$$

с квадратной матрицей A. В реальных задачах и сама матрица A, и правая часть u заданы с некоторыми ошибками. Поэтому надо решать систему вида

$$(A + \varepsilon B)x(\varepsilon) = u + \varepsilon w \tag{14.7}$$

с начальным условием $x(0) = x$, где $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — некоторая квадратная матрица, а $u \in \mathbb{R}^n$ — вектор. Если матрица A невырождена, то функция $x(\varepsilon)$ дифференцируема в окрестности нуля и решение можно представить в виде ряда Тейлора

$$x(\varepsilon) = x + \varepsilon\dot{x}(0) + o(\varepsilon). \tag{14.8}$$

Продифференцируем уравнение (14.7) по ε, получаем, что

$$Bx(\varepsilon) + (A + \varepsilon)\dot{x}(\varepsilon) = w, \tag{14.9}$$

или

$$\dot{x}(\varepsilon) = (A + \varepsilon B)^{-1}(w - Bx(\varepsilon)), \tag{14.10}$$

$$\dot{x}(0) = A^{-1}(w - Bx). \tag{14.11}$$

Тогда относительная погрешность решения системы (14.7) может быть записана как

$$\frac{\|x(\varepsilon) - x\|}{\|x\|} = \frac{\varepsilon\dot{x}(0) + o(\varepsilon)}{\|x\|} \leqslant \varepsilon\|A^{-1}\| \left(\frac{\|w\|}{\|x\|} + \|B\|\right) + o(\varepsilon) =$$

$$= \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \left(\varepsilon\,\frac{\|w\|}{\|u\|} + \frac{\|B\|}{\|A\|}\right) + o(\varepsilon), \tag{14.12}$$

где было учтено, что $\|u\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$. Таким образом, если определить число обусловленности $\varkappa(A)$ как

$$\varkappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|, \tag{14.13}$$

а относительные погрешности возмущенной матрицы A и правой части u как

$$\varepsilon_A = \varepsilon\,\frac{\|B\|}{\|A\|}, \qquad \varepsilon_u = \varepsilon\,\frac{\|w\|}{\|u\|}, \tag{14.14}$$

то относительная погрешность решения возмущенной системы равна

$$\frac{\|x(\varepsilon) - x\|}{\|x\|} \leqslant \varkappa(A)(\varepsilon_A + \varepsilon_u) + o(\varepsilon^2). \tag{14.15}$$

Если матрица A вырождена, то $\det A = 0$. Поэтому иногда ошибочно считается, что матрица плохо обусловлена, если ее определитель близок к нулю. На самом деле это не так.

Пример 14.1. Пусть имеется диагональная матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}. \tag{14.16}$$

Тогда ее определитель $\det A = \alpha^n$ и при малых значениях α может быть близок нулю. В то же время $\varkappa(A) = 1$, т. е. система является хорошо обусловленной.

Таким образом, конечное значение определителя матрицы не может гарантировать хорошую обусловленность задачи.

Пример 14.2. Пусть имеется верхняя треугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{14.17}$$

где все элементы выше диагонали равны -1, а все диагональные элементы равны 1. Определитель $\det A = 1$, а обратная матрица A^{-1} также является верхней треугольной матрицей, все диагональные элементы которой равны 1, а элементы k-й наддиагонали равны 2^{k-1}. Если использовать следующую норму:

$$\|A\|_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : i = 1, \dots, n\right\}, \tag{14.18}$$

то $\|A\|_\infty = n$, $\|A^{-1}\|_\infty = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-1} = 2^{n-1}$, $\varkappa(A) = n2^{n-1}$, поэтому система становится плохо обусловленной при больших n.

Теорема 14.1. *Если A — вещественная матрица размера $m \times n$, то существуют ортогональные матрицы $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, такие, что*

$$U^T A V = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad p = \min(m, n), \tag{14.19}$$

где $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_p \geqslant 0$.

Числа $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ называются **сингулярными значениями** матрицы A. Отметим, что $\|A\| = \sigma_1$, т. е. норма матрицы равна

максимальному собственному значению, а саму матрицу можно записать в виде произведения

$$A = U\Sigma V^T, \tag{14.20}$$

которое называется **сингулярным разложением** матрицы A.

Теорема 14.2. *Если матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является симметрической положительно определенной, то существует единственная нижняя треугольная матрица $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с положительными диагональными элементами, такая, что $A = LL^T$.*

Такое представление матрицы A называется **разложением Холецкого**.

§ 15. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. МЕТОД ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ

Пусть A — прямоугольная матрица размера $m \times n$, а векторы $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим **систему линейных алгебраических уравнений** (СЛАУ):

$$Az = u. \tag{15.1}$$

Система (15.1) может и не иметь решений. Гаусс и Лежандр в начале XIX века ввели так называемый **метод наименьших квадратов**, а именно, вместо решения СЛАУ предложили минимизировать квадратичный функционал (невязку):

$$\Phi(z) = \|Az - u\|^2 = (A^*Az, z) - 2(A^*u, z) + (u, u). \tag{15.2}$$

Поскольку матрица A^*A — симметрическая и неотрицательно определена, $\Phi(z)$ — выпуклый функционал. Для выпуклого функционала задача отыскания $\min\{\Phi(z)\colon z \in \mathbb{R}^n\}$ эквивалентна отысканию стационарной точки. Легко видеть, что $\Phi'(z) = 2\cdot(A^*Az - A^*u)$, $\Phi''(z) = 2\cdot A^*A \geqslant 0$. Приравняв градиент нулю ($\Phi'(z) = 0$), получаем систему линейных алгебраических уравнений (система нормальных уравнений):

$$A^*Az = A^*u. \tag{15.3}$$

В конечномерном случае можно доказать, что для любого вектора u система нормальных уравнений всегда имеет решение (для исходного же уравнения это не так), которое называется **псевдорешением** системы (15.1). Псевдорешение может быть неединственным, например, если минимальное собственное значение $\lambda_{\min}(A^*A) = 0$. Если же $\lambda_{\min}(A^*A) > 0$, то псевдорешение единственно. Множество псевдорешений образует

аффинное подпространство и, следовательно, является выпуклым и замкнутым.

Пусть $\min\{\Phi(z)\colon z \in \mathbb{R}^n\} = \mu$, в силу определения функции $\Phi(z)$ число $\mu \geqslant 0$. Если система (15.1) имеет решение, то оно совпадает с решением системы $A^*Az = A^*u$ и в этом случае $\mu = 0$. Если же $\mu > 0$, система (15.1) не имеет решений, но, как уже указывалось выше, имеет псевдорешение (возможно, неединственное). Число μ обычно называется **мерой несовместности** системы (15.1).

Нормальное псевдорешение системы (15.1) — это псевдорешение с минимальной нормой, для его нахождения решаем задачу отыскания минимума $\min\{\|z\|\colon A^*Az = A^*u\}$. Последняя задача эквивалентна $\min\{\|z\|^2\colon A^*Az = A^*u\}$. Функционал $f(z) = \|z\|^2$ является сильно выпуклым ($f'' = 2I$, I — единичный оператор). Отсюда и из выпуклости и замкнутости множества псевдорешений следует, что нормальное псевдорешение существует и единственно. Поэтому можно поставить задачу: дан вектор u и будем сопоставлять вектору u нормальное псевдорешение $z_n = \arg\min\{\|z\|^2\colon A^*Az = A^*u\}$. Оператор, который сопоставляет вектору u нормальное псевдорешение, является линейным и называется **псевдообратным** к оператору A: $z_n = A^+u$ (A^+ — псевдообратный оператор).

Если существует единственное решение исходной системы (15.1) для любого вектора u, то $A^+ = A^{-1}$. Если существует единственное решение задачи $A^*Az = A^*u$ для любого вектора u (т. е. оператор A^*A — обратим), то $A^+ = (A^*A)^{-1} \cdot A^*$. Вообще выражение для A^+ имеет вид: $A^+ = \lim\limits_{\alpha \to 0+0} (A^*A + \alpha I)^{-1} \cdot A^*$. Этот результат мы получим ниже, когда будем заниматься теорией некорректно поставленных задач.

Докажем теперь, что существует решение уравнения $A^*Az = A^*u$. Для этого нужно доказать, что множества значений A^* и A^*A совпадают.

Рассмотрим оператор, действующий в конечномерном евклидовом пространстве: $Bz = y$, $B\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Имеет место разложение $\mathbb{R}^n = (R(B) \oplus \operatorname{Ker} B^*)$, причем $R(B) = \overline{R(B)}$ — линейное многообразие, всегда замкнутое в конечномерном линейном пространстве. Тогда $\mathbb{R}^n = R(A^*) \oplus \operatorname{Ker} A = R(A^*A) \oplus \operatorname{Ker}(A^*A)^* = R(A^*A) \oplus \operatorname{Ker}(A^*A)$. Но $(Az, Az) = (A^*Az, z)$. Отсюда $Az = 0$ тогда и только тогда,

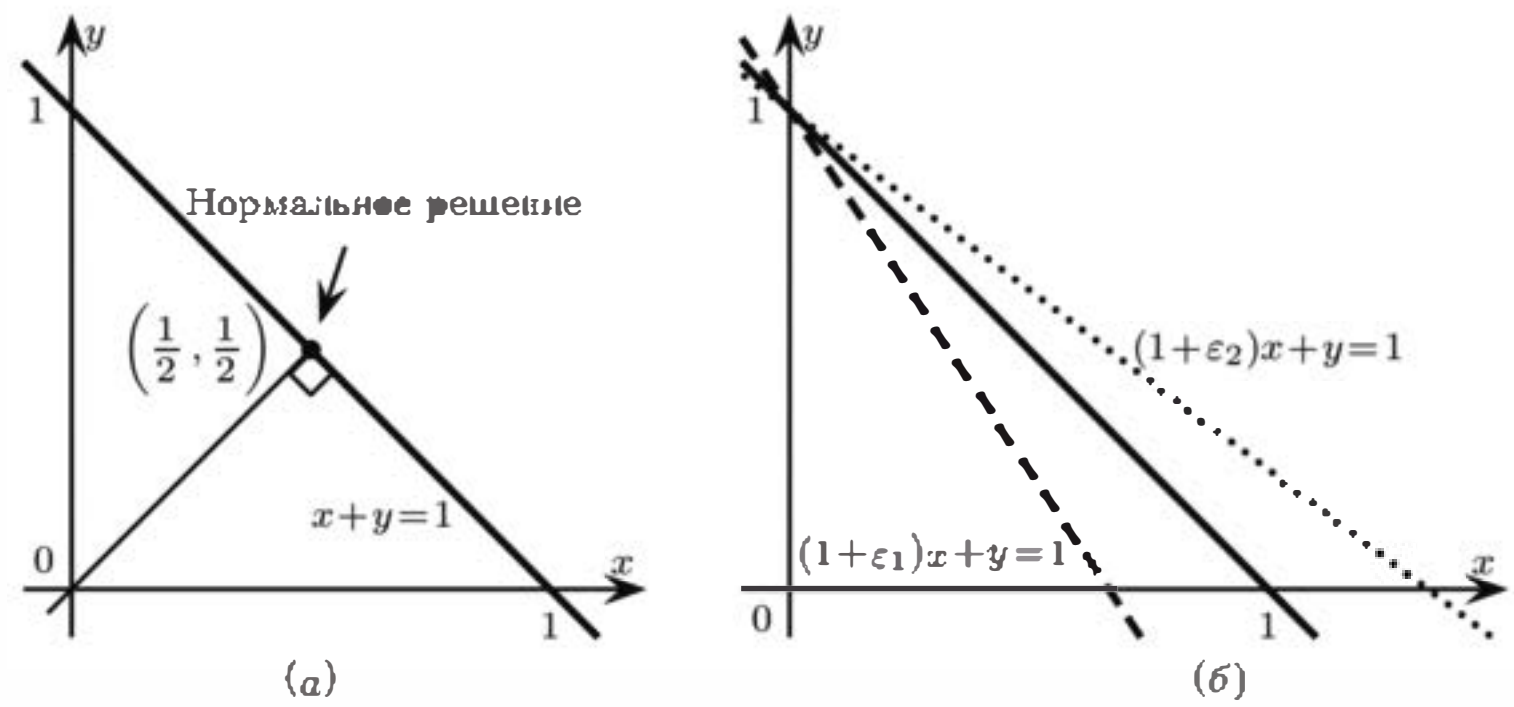


Рис. 2.1. Множества решений (*а*) вырожденной (15.4) и (*б*) невырожденной (15.5) систем

когда $A^*Az = 0$, или $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(A^*A)$. Из разложения выше следует теперь, что $R(A^*) = R(A^*A)$, т. е. псевдорешение z всегда существует. Итак, в конечномерном евклидовом пространстве уравнение $A^*Az = A^*u$ всегда имеет решения.

Отметим некорректность построения псевдообратного оператора A^+. Если вместо вектора u задан вектор $\tilde{u}$: $\|\tilde{u} - u\| \leqslant \delta$, $\delta \geqslant 0$, $z_n = A^+u$, $\tilde{z}_n = A^+\tilde{u}$, то $\|\tilde{z}_n - z_n\| \leqslant \|A^+\|\delta$ (это доказывает устойчивость решения по правой части). Однако задача отыскания $z_n = A^+u$ неустойчива по отношению к ошибкам A^+.

Пример 15.1. Пусть $Az = u$, $z = \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. Покажем, что отыскание нормального псевдорешения — это некорректная задача, где некорректность связана с ошибкой в задании оператора A. Пусть система имеет вид:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1, \end{cases} \qquad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{15.4}$$

Очевидно, что существует бесконечно много решений (см. рис. 2.1), а $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ — нормальное решение, где символ T означает транспонирование.

В данном случае

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15.5}$$

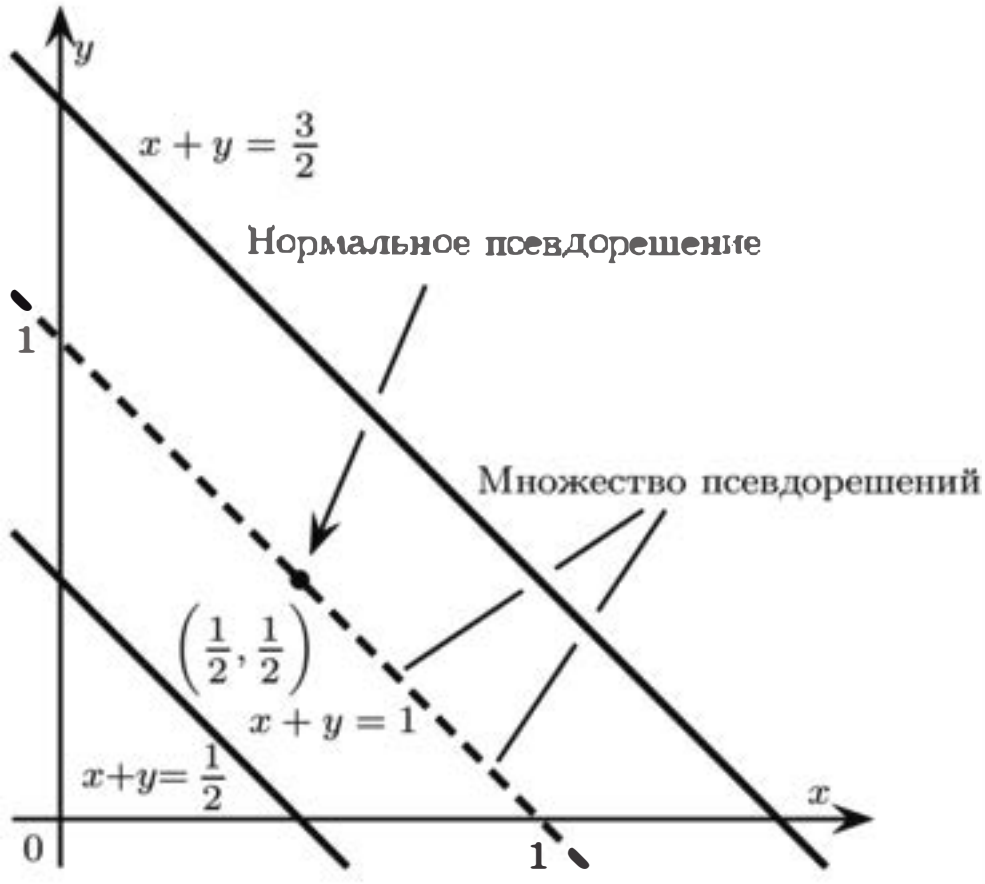


Рис. 2.2. Множество псевдорешений системы (15.7)

Пусть имеется ошибка в матрице

$$\begin{cases} (1+\varepsilon)x + y = 1, \\ x + y = 1, \end{cases} \qquad \varepsilon \neq 0, \tag{15.6}$$

$x_\varepsilon = 0$, $y_\varepsilon = 1$ и не зависят от ε. Более того, пусть при $\varepsilon \to 0$ нет сходимости к нормальному псевдорешению $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$. Таким образом, задача отыскания нормального псевдорешения неустойчива к ошибкам матрицы. Предполагая наличие ошибок во всех четырех элементах матрицы, легко построить примеры сходимости «приближенных» решений к различным векторам при стремлении погрешностей задания элементов к нулю.

Пример 15.2. Рассмотрим вторую систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{2}, \\ x + y = \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{15.7}$$

Здесь решения нет вообще, хотя нормальное псевдорешение получается таким же: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$, см. рис. 2.2. Легко построить примеры неустойчивости его отыскания. Так, например, система

$$\begin{cases} (1+\varepsilon)x + y = \frac{1}{2}, \\ x + y = \frac{3}{2}, \end{cases} \qquad \varepsilon \neq 0, \tag{15.8}$$

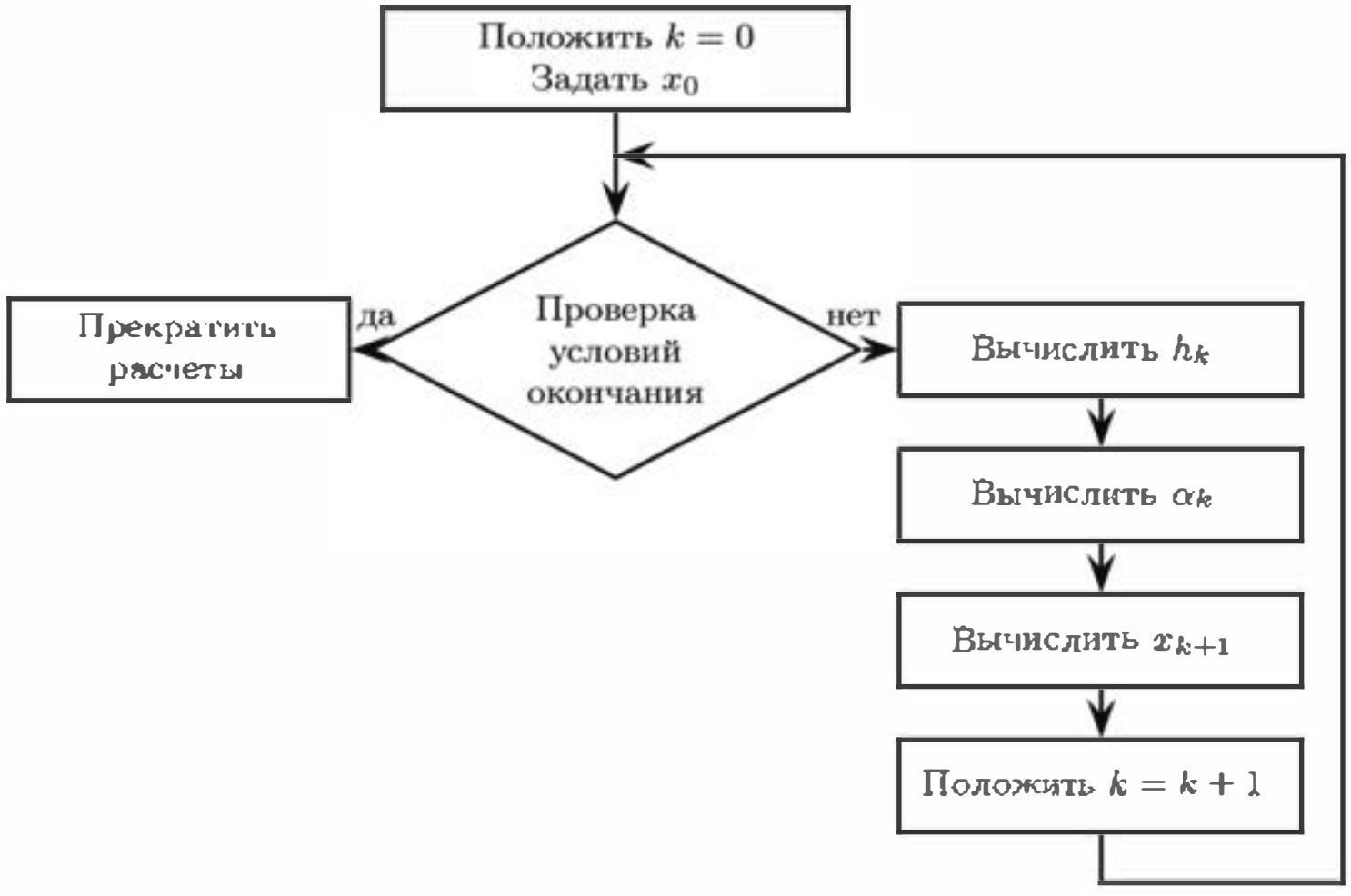


Рис. 2.3. Процедура построения минимизирующих последовательностей

всегда имеет единственное решение $(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{3}{2} + \frac{1}{\varepsilon})^T$, которое не стремится к нормальному псевдорешению системы (15.7) при $\varepsilon \to 0$.

§ 16. МИНИМИЗИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим задачу: найти $x^* = \arg\min\{f(x) \colon x \in X\}$. Мы будем рассматривать методы решения этой задачи, основанные на следующем итерационном процессе: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где x_0 — начальное приближение, h_k — направление минимизации, α_k — шаг вдоль направления минимизации. Процесс построения последовательности x_k производится в соответствии с алгоритмом, изображенным на рис. 2.3.

Если h_k и α_k вычисляются без вычисления градиента функции $f(x)$, то такие методы называются **методами нулевого порядка**. Если же вычисляется первая производная, то метод называется **методом первого порядка**, при вычислении вторых производных — **второго порядка**, и так далее.

Мы будем называть последовательность x_k **минимизирующей**, если

$$f(x_k) \to f^* = \min\{f(x)\colon x \in X\} \quad \text{(сходимость по функционалу)}. \tag{16.1}$$

Желательно, чтобы

$$x_k \to x^* = \operatorname{argmin}\{f(x)\colon x \in X\} \quad \text{(сходимость по аргументу)}. \tag{16.2}$$

В этом случае можно оценивать скорость сходимости. Будем говорить, что последовательность x_k сходится к x^* **линейно**, или **со скоростью геометрической прогрессии**, если

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leqslant q\|x_k - x^*\|, \qquad 0 \leqslant q < 1. \tag{16.3}$$

Если же

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leqslant q_k\|x_k - x^*\|, \qquad q_k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{16.4}$$

то говорят о **сверхлинейной сходимости**. Если же

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leqslant C\|x_k - x^*\|^2, \qquad C = \text{const}, \tag{16.5}$$

то скорость сходимости **квадратичная**.

Обычно применяются следующие критерии остановки процесса построения минимизирующей последовательности:

1) $\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \varepsilon_1$;
2) $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon_2$;
3) $\|f'(x_k)\| \leqslant \varepsilon_3$,

где ε_1, ε_2, ε_3 — заданные малые положительные числа. Применение критерия 1) может привести к остановке там, где функционал меняется очень быстро, применение критерия 2) может привести к остановке на «пологом спуске». Поэтому критерии 1) и 2) обычно используются совместно. Критерий 3) применяется обычно в градиентных методах.

Многие методы минимизации относятся к методам спуска. Будем говорить, что h — **направление убывания** функции $f(x)$, если для достаточно малых положительных $\alpha > 0$: $f(x + \alpha h) < f(x)$. Множество направлений убывания есть $V(x, f)$. Метод минимизации называется **методом спуска**, если $h_k \in V(x_k, f)$.

Лемма 16.1. *Пусть функционал $f(x)$ дифференцируем в точке $x \in H$. Если $(f'(x), h) < 0$, то $h \in V(x, f)$. Если же $h \in V(x, f)$, то $(f'(x), h) \leqslant 0$.*

□ Доказательство и необходимости, и достаточности следует из следующего равенства:

$$(f(x+\alpha h)-f(x))=(f'(x),\alpha h)+o(\alpha)=\alpha\left[(f'(x),h)+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right]. \tag{16.6}$$

В частности, если $h_k=-f'(x_k)$, то это метод спуска, который называется **методом градиентного спуска**. ■

Предположим, что x_k и h_k заданы. Возникает вопрос о том, как выбирать α_k. Чаще всего для этого находится решение одномерной экстремальной задачи

$$f(x_k+\alpha_k h_k)=\min\{f(x_k+\alpha h_k)\colon \alpha\in\mathbb{R}^1\}. \tag{16.7}$$

Если h_k — направление спуска, то

$$f(x_k+\alpha_k h_k)=\min\{f(x_k+\alpha h_k)\colon \alpha\geqslant 0\}. \tag{16.8}$$

Таким образом, $\alpha_k=\operatorname{argmin}\{f(x_k+\alpha h_k)\colon \alpha\geqslant 0\}$. В отдельных случаях решение одномерной экстремальной задачи может быть найдено аналитически. Например, для квадратичного функционала $f(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)$, где $A>0$ — симметричная матрица, это решение легко находится. Минимум

$$f(x_k+\alpha h_k)=\frac{1}{2}(Ah_k,h_k)\alpha^2+(Ax_k+b,h_k)\alpha+\frac{1}{2}(Ax_k+b,x_k) \tag{16.9}$$

достигается в точке

$$\alpha_k=-\frac{(Ax_k+b,h_k)}{(Ah_k,h_k)}=-\frac{(f'(x_k),h_k)}{(Ah_k,h_k)}. \tag{16.10}$$

Если h_k — направление спуска, то $(f'(x_k),h_k)\leqslant 0$ и $\alpha_k\geqslant 0$. В следующем параграфе мы рассмотрим некоторые самые распространенные методы решения одномерных экстремальных задач.

§ 17. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим задачу отыскания минимума функции одной вещественной переменной $f(x)$ на заданном отрезке $[a,b]$ в предположении, что $f(x)$ — **унимодальная** функция (т. е. имеет единственный минимум на $[a,b]$). Рассмотрим два наиболее популярных метода решения одномерной экстремальной задачи. Заметим, что при рассмотрении конкретных одномерных

экстремальных задач могут быть предложены другие, более эффективные методы, учитывающие особенности решаемых задач.

17.1. Метод золотого сечения

Разделим отрезок $[a, b]$ в среднем и крайнем отношениях. Для этого найдем числа F_1 и F_2, такие, что:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F_2}{1}, \quad F_1 + F_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38, \quad F_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62. \tag{17.1}$$

Вводим следующие точки: $a^\star = a + F_1\Delta$, $b^\star = a + F_2\Delta$, где $\Delta = b - a$. Далее сравниваются $f(a^\star)$ и $f(b^\star)$. Если $f(a^\star) < f(b^\star)$, то точку b переносим в $b^\star$, если же $f(a^\star) > f(b^\star)$, то точку a переносим в $a^\star$, см. рис. 2.4. В случае равенства $f(a^\star) = f(b^\star)$ выполняем любой из переносов. При делении нового интервала таким же образом получим, что одна из точек уже найдена на предыдущем шаге. Критерием остановки является $\Delta \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Метод позволяет сэкономить на числе вычислений значений функции. Тем не менее рекомендуется после большого количества уменьшений интервала вычислить обе точки на полученном интервале, поскольку могут накопиться погрешности их вычисления.

17.2. Метод квадратичной аппроксимации

Пусть есть точки: $a < c < b$. Известно, что

$$f(c) \leqslant f(a) \qquad \text{и} \qquad f(c) \leqslant f(b). \tag{17.2}$$

Через эти три точки проводится парабола $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, см. рис. 2.5. Для этих целей надо решить систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f(c) \end{pmatrix}. \tag{17.3}$$

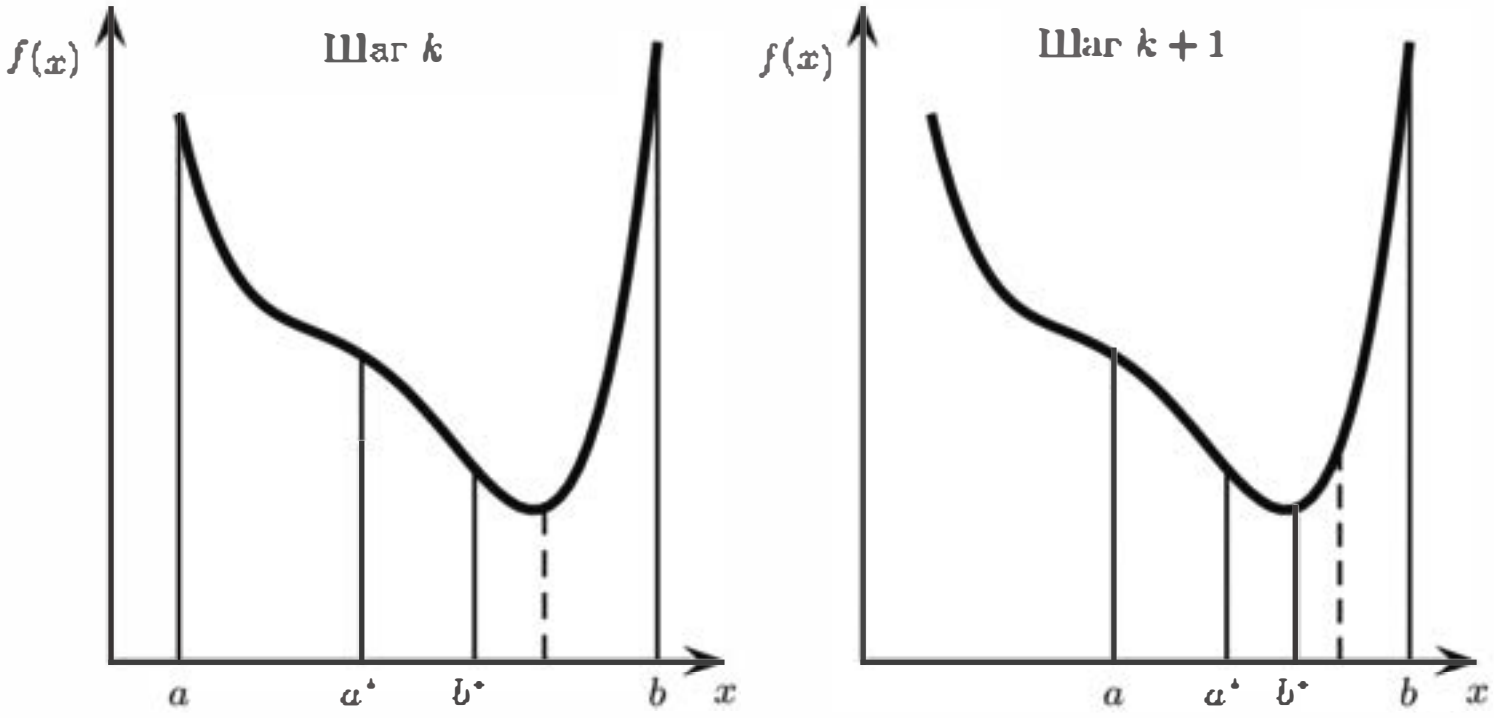


Рис. 2.4. Применение метода золотого сечения для минимизации унимодальной функции. Штриховой линией обозначены точки, которые будут использоваться в качестве a^* или b^* на новом шаге

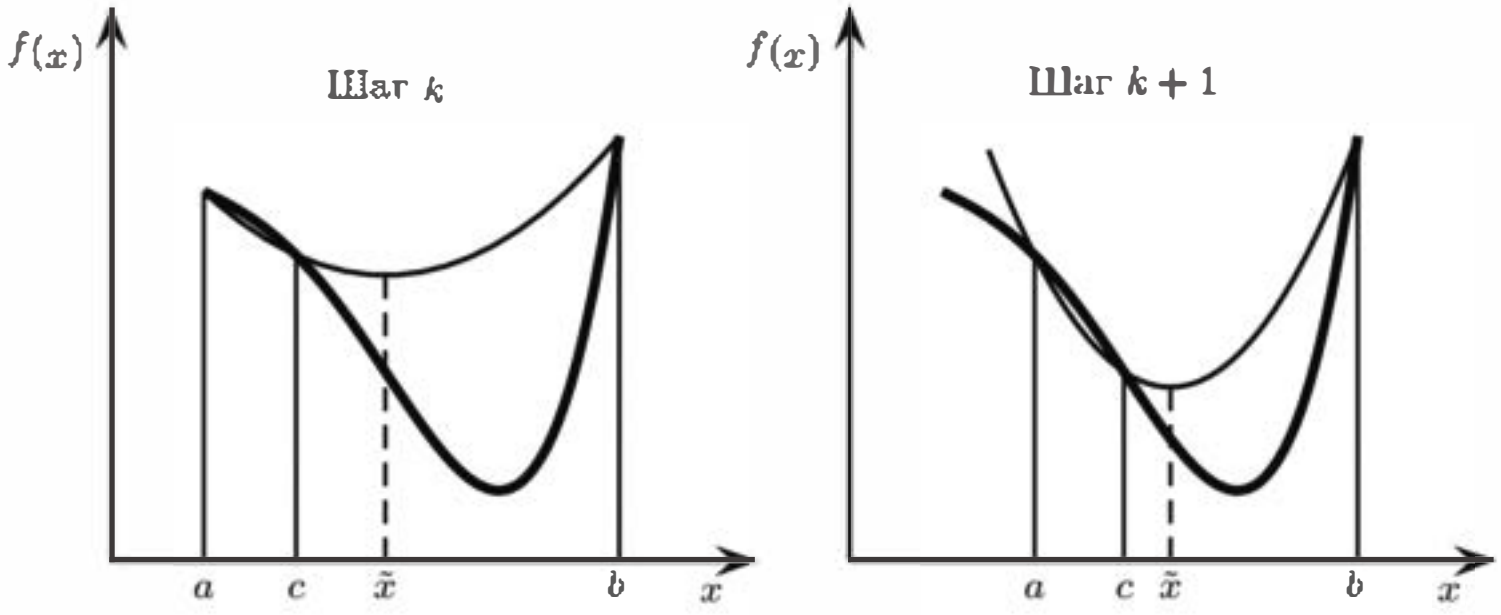


Рис. 2.5. Применение метода квадратичной аппроксимации при минимизации унимодальной функции

Габриэль Крамер
(Gabriel Cramer), 1704–1752

Отметим, что определитель матрицы равен $D = -(a-b)(b-c)(c-a)$, а так как $a < c < b$, определитель не равен нулю (точнее он положителен). Следовательно, всегда существует решение данной системы. Отметим, что, по правилу Крамера,

$$\alpha = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f(c) & c & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\left(f(a)(b-c) + f(b)(c-a) - f(c)(b-a)\right), \tag{17.4}$$

а с учетом (17.2) получаем, что $\alpha > 0$, т. е. параболу всегда можно построить. Аналогичным образом находим, что

$$\beta = \frac{1}{D}\left(f(a)(c^2-b^2) + f(b)(a^2-c^2) - f(c)(a^2-b^2)\right). \tag{17.5}$$

Поэтому точка минимума параболы есть

$$\bar{x} = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{2}\,\frac{f(a)(c^2-b^2)+f(b)(a^2-c^2)-f(c)(a^2-b^2)}{f(a)(b-c)+f(b)(c-a)-f(c)(b-a)}. \tag{17.6}$$

Можно получить, что

$$\bar{x}-a = \frac{1}{2\alpha}\left[(f(a)-f(c))(b-c)(b+c-2a)+(f(b)-f(c))(c-a)^2\right] > 0,$$

$$b-\bar{x} = \frac{1}{2\alpha}\left[(f(a)-f(c))(b-c)^2+(f(b)-f(c))(2b-a-c)(c-a)\right] > 0.$$

Из этого следует, что точка $\bar{x} \in (a,b)$. Если $f(\bar{x}) < f(c)$, то на следующем шаге берем тройку $(c, \bar{x}, b)$ при $\bar{x} > c$ или $(a, \bar{x}, c)$ при $\bar{x} < c$. Если же точка $\bar{x}$ совпадает или очень близка к точке c, то надо уменьшить исходный отрезок и повторить процедуру. Например, рассмотреть точку $a_\alpha = (1-\alpha)a + \alpha c$, $\alpha \in (0,1)$ и сравнить значения $f(a_\alpha)$ и $f(c)$:

1) при $f(a_\alpha) > f(c)$ берем новую тройку (a_α, c, b),
2) при $f(a_\alpha) < f(c)$ — тройку (a, a_α, c),
3) при $f(a_\alpha) = f(c)$ уменьшить α и найти новую точку a_α или рассмотреть точку $b_\beta = (1-\beta)b+\beta c$ и сравнить $f(b_\beta)$ и $f(c)$ аналогичным образом.

Отметим, что такую же процедуру уменьшения исходного отрезка $[a, b]$ нужно проводить, когда $f(\bar{x}) \geqslant f(c)$. После этого вся процедура повторяется.

Если же требуется найти решение одномерной экстремальной задачи для унимодальной функции на луче (полупрямой) $[a, +\infty)$, то сначала отыскивается отрезок, на котором находится локальный минимум. Задается начальный шаг Δx. Если Δx взято в направлении убывания (т. е. $f(a) > f(a + \Delta x)$), то дальше рассматривают точку: $a + \Delta x + 2\Delta x$, далее $a + \Delta x + 2\Delta x + 4\Delta x$, ... И так до тех пор, пока функция не начнет расти, т. е. пока точка минимума не будет пройдена. После чего для отыскания точки минимума на найденном отрезке может быть применен, например, метод квадратичной аппроксимации. Если же шаг Δx слишком велик ($f(a) \leqslant f(a+\Delta x)$), то шаг уменьшается в два раза. Если после уменьшения шаг становится меньше заданного малого числа, то минимум достигается в a. При решении одномерной задачи на всей вещественной прямой, начиная с точки a, сначала определяется направление убывания функции, и задача сводится к отысканию минимума на луче.

Отметим, что сделанные рекомендации являются общими и должны быть конкретизированы при разработке алгоритмов и программ.

Вопросы и задачи

Пусть $g(x)$ — выпуклая функция и $g(a) < g(c)$, $g(b) < g(c)$, $a < c < b$. Докажите, что точка минимума $\tilde{x}$ функции $g(x)$ будет принадлежать интервалу (a,b). Если $g(a) > g(b)$, то можно ли считать, что $\tilde{x} \in [c, b)$?

§ 18. МЕТОД СКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Метод скорейшего спуска является старейшим градиентным методом. Он был предложен Коши в начале XIX века. В этом методе направление минимизации и шаг вдоль направления минимизации выбираются как

$$h_k = -f'(x_k), \quad \alpha_k = \arg\min\{f(x_k + \alpha h_k) \colon \alpha \geqslant 0\}, \qquad (18.1)$$

т. е. α_k — решение одномерной экстремальной задачи на луче. Если линии уровня $f(x)$ вытянуты (так называемая **овражная структура** линий уровня минимизируемого функционала)

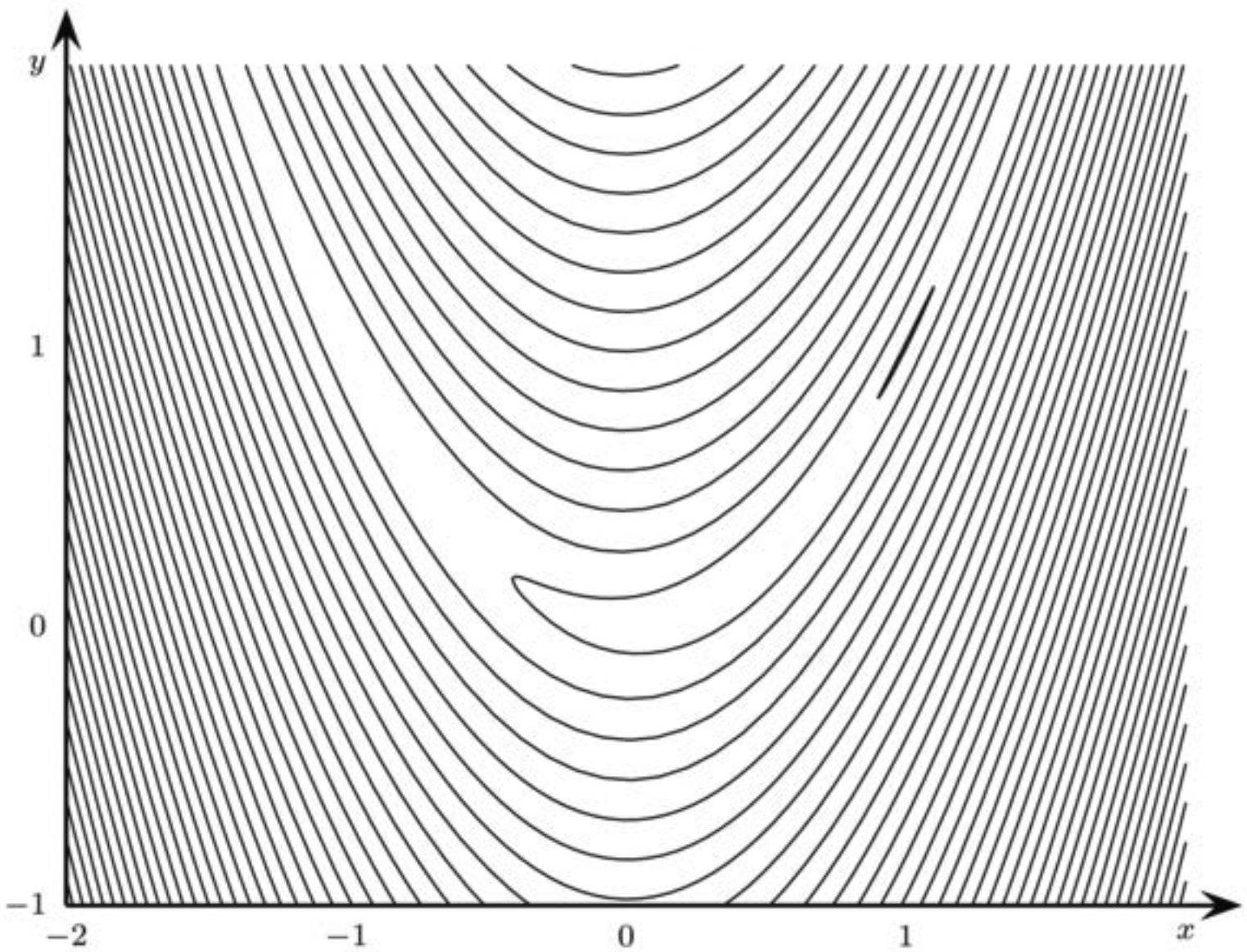


Рис. 2.6. «Овражная» структура функции Розенброка

и начальное приближение угадано плохо, то минимум можно искать очень долго.

Пример 18.1. Рассмотрим $\Phi(x,y) = x^2 + 10y^2$ и $x_0 = -1$, $y_0 = 1$. Потребуется 10 итераций для нахождения минимума $(0{,}215 \cdot 10^{-5}, 0{,}215 \cdot 10^{-5})$.

Пример 18.2. Для оценки скорости сходимости различных алгоритмов часто используют функцию Розенброка (Howard H. Rosenbrock)

$$f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2, \tag{18.2}$$

линии уровня которой имеют сильно выраженную «овражную» структуру, см. рис. 2.6. Глобальный минимум данной функции достигается в точке $(1,1)$.

Это одна из причин, почему метод скорейшего спуска в последнее время применяется достаточно редко. Метод же сопряженных градиентов, например, приводит к минимуму за два шага.

Теорема 18.1. *Пусть функционал $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *он определен, ограничен снизу и дифференцируем на гильбертовом пространстве H;*
2) *его градиент удовлетворяет условию Липшица: $\forall x, \hat{x} \in H$: $\|f'(x) - f'(\hat{x})\| \leqslant M\|x - \hat{x}\|$, где $M > 0$ — константа.*

Тогда для любого начального приближения x_0 последовательность x_k, которая строится по методу скорейшего спуска, обладает следующим свойством: $\lim\limits_{k\to\infty} \|f'(x_k)\| = 0$.

□ По теореме Лагранжа о среднем для любого x из H и любого элемента x_k последовательности, которая строится по методу скорейшего спуска, имеет место равенство

$$f(x)-f(x_k)=(f'(x_k^\lambda), x-x_k)=(f'(x_k), x-x_k)+(f'(x_k^\lambda)-f'(x_k), x-x_k), \tag{18.3}$$

$x_k^\lambda = x_k + \lambda(x - x_k)$, $\lambda \in [0,1]$. Предположим теперь, что x лежит на луче, исходящем из точки x_k с направлением h_k, т. е. $x = x_k - \alpha f'(x_k)$, $\alpha \geqslant 0$. Тогда, подставляя выражение для $x - x_k$ в (18.3) и применяя неравенство Коши—Буняковского и условие Липшица для градиента, получаем:

Рудольф Отто Сигизмунд Липшиц (Rudolf Otto Sigismund Lipschitz), 1832–1903

$$f(x) - f(x_k) \leqslant -\alpha\|f'(x_k)\|^2 + M\|x_k^\lambda - x_k\| \cdot \| - \alpha f'(x_k)\| \leqslant$$
$$[1mm] \leqslant -\alpha\|f'(x_k)\|^2 + \alpha M\|x - x_k\| \cdot \|f'(x_k)\| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\|f'(x_k)\|^2(-1 + \alpha M) \equiv \varphi(\alpha). \tag{18.4}$$

Функция $\varphi(\alpha)$ достигает минимального значения при $\alpha^* = \frac{1}{2M}$,

$$\varphi(\alpha^*) = -\frac{\|f'(x_k)\|^2}{4M}. \tag{18.5}$$

Заметим, что по формулам метода скорейшего спуска: $f(x_{k+1}) = \min\{f(x_k - \alpha f'(x_k)) : \alpha \geqslant 0\} = f(x_k - \alpha_k f'(x_k))$. Отсюда

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leqslant \varphi(\alpha_{\min}) = -\frac{\|f'(x_k)\|^2}{4M}. \tag{18.6}$$

Если при некотором значении k (в точке x_k) градиент обратился в нуль, то теорема доказана. Поэтому будем предпола-

гать, что $f'(x_k) \neq 0$, $\forall k$. Поэтому $f(x_{k+1}) - f(x_k) < 0$, и последовательность $f(x_k)$ монотонно убывает и при этом, по условию теоремы, она ограничена снизу и, следовательно, имеет предел. Отсюда $f(x_{k+1}) - f(x_k) \to 0$ при $k \to \infty$, а поэтому и $\|f'(x_k)\|^2 \to 0$ при $k \to \infty$, что и требовалось доказать. ■

Замечание 18.1. Любая предельная точка последовательности $\{x_k\}$ является стационарной точкой функции $f(x)$. Для сильно выпуклого функционала метод скорейшего спуска приводит к точке минимума.

Последовательность α_k можно находить не только как решение одномерной экспериментальной задачи, но и другими способами, и получить различные варианты градиентного метода. Например, можно просто положить $\alpha_k = \dfrac{1}{2M}$, если известна константа Липшица. В этом случае результат теоремы останется справедливым (см. доказательство теоремы). Или, задав $0 < \varepsilon < 1$, выбирать α_k из условия: $f(x_k - \alpha f'(x_k) - f(x_k)) \leqslant -\varepsilon\alpha_k\|f'(x_k)\|^2$.

Теорема 18.2. *Метод скорейшего спуска для сильно выпуклого функционала $f(x)$ сходится со скоростью геометрической прогрессии.*

□ Заметим, что у выпуклых функционалов не всегда существует точка минимума, а у сильно выпуклых функционалов точка минимума есть всегда.

Пусть $x^* = \arg\min\{f(x)\colon x \in H\}$. Для сильно выпуклого функционала имеют место следующие два доказанных ранее неравенства (см. теоремы 13.2 и 13.1):

$$(f'(x)-f'(x^*),x-x^*) \geqslant 2\theta\|x-x^*\|^2, \quad f(x)-f(x^*) \leqslant (f'(x), x-x^*). \tag{18.7}$$

Здесь x — произвольный элемент H, $\theta > 0$ — константа сильной выпуклости. Из первого неравенства следует, что $M \geqslant 2\theta$, M — константа Липшица для градиента.

Так как рассматривается задача без ограничений, то $f'(x^*) = 0$. Тогда, применив в первом неравенстве неравенство Коши—Буняковского, получим $\|f'(x)\| \cdot \|x - x^*\| \geqslant 2\theta\|x - x^*\|^2$. Отсюда следует, что $\|f'(x)\| \geqslant 2\theta\|x - x^*\|$. Введем обозначение: $f_k = f(x_k) - f^*$. Тогда из второго неравенства можно получить

оценку:

$$f_k \leqslant \|f'(x_k)\| \cdot \|x_k - x^*\| \leqslant \|f'(x_k)\|^2 \cdot \frac{1}{2\theta}. \tag{18.8}$$

При доказательстве теоремы данного параграфа мы получили неравенство

$$f_k - f_{k+1} \geqslant \frac{1}{4M} \|f'(x_k)\|^2. \tag{18.9}$$

Из последних двух неравенств сразу же следует, что

$$f_k - f_{k+1} \geqslant \frac{2\theta}{4M} f_k, \tag{18.10}$$

или $f_{k+1} \leqslant (1 - \frac{2\theta}{4M}) f_k$, т. е. $f_k \leqslant f_0 q^k$, $q = 1 - \frac{2\theta}{4M} \in (0, 1)$, так как $M \geqslant 2\theta$.

Таким образом, имеет место линейная скорость сходимости по функционалу. Нам же нужно получить скорость сходимости по аргументу. Для сильно выпуклых функционалов ранее было доказано неравенство (12.6): $\|x - x^*\|^2 \leqslant \frac{1}{\theta}(f(x) - f(x^*))$. Поэтому

$$\|x_k - x^*\|^2 \leqslant \frac{1}{\theta}(f(x_k) - f(x^*)) = \frac{f_k}{\theta} \leqslant \frac{q^k f_0}{\theta}, \tag{18.11}$$

следовательно,

$$\|x_k - x^*\| \leqslant \sqrt{\frac{f_0}{\theta}} q^{k/2}, \tag{18.12}$$

где $f_0 = f(x_0) - f(x^*)$. Тем самым мы доказали, что метод скорейшего спуска для сильно выпуклого функционала, удовлетворяющего условиям теоремы, характеризуется линейной скоростью сходимости. ■

§ 19. МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Сначала метод разрабатывался для минимизации квадратичных функционалов: $f(x) = \frac{1}{2}(Ax,x) + (b,x)$, где A — положительно определенная симметрическая матрица в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим сперва следующую задачу: требуется найти направления (векторы) в $\mathbb{R}^n$: $h_0, \ldots, h_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, минимизация вдоль которых позволяет найти минимум $f(x)$ за не более чем n шагов. Пусть имеется произвольная начальная точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k$, $\alpha_k = \operatorname{argmin}\{f(x_k + \lambda h_k), \lambda \in \mathbb{R}\}$. В результате мы ожидаем, что $f(x_n) = \min\{f(x): x \in \mathbb{R}^n\}$ для любой начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Простейшие подходы к решению такой задачи хорошо известны. Пусть сначала A — диагональная матрица: $A = \operatorname{diag}\{\alpha_i\}$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i x_i^2 + b_i x_i). \tag{19.1}$$

В качестве направлений минимизации, очевидно, можно взять орты. В данном случае $f(x)$ — сумма n одномерных парабол: $\alpha_i x_i^2 + b_i x_i$, которые можно просто последовательно пронумеровать. Заметим, что если A не является диагональной, то ее можно привести к диагональному виду, решив задачу на собственные значения и собственные векторы. Перейдя к базису, состоящему из собственных векторов положительно определенной симметрической матрицы A, мы получим тривиальную задачу последовательной минимизации n одномерных парабол. Однако при таком подходе требуется предварительно решить полную задачу на собственные значения и собственные векторы, что обычно сопряжено с большими вычислительными затратами. Ниже будет предложен другой подход к построению направлений минимизации.

Определение 19.1. Векторы $h_1, h_2 \neq 0$ называются **сопряженными относительно матрицы** A, если $(Ah_1, h_2) = 0$.

Понятие сопряженности относительно матрицы A является обобщением понятия ортогональности, причем если ввести скалярное произведение $(x, y)_1 = (Ax, y)$ (напомним, что A — положительно определенная симметрическая матрица), то сопряженность относительно матрицы A в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и ортогональность в том же пространстве, но с новым скалярным произведением, — это одно и то же.

Ненулевые векторы $h_0, \ldots, h_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ называются **взаимно сопряженными относительно матрицы** A, если $(Ah_i, h_j) = 0$, $\forall i \neq j$; $i, j = 0, \ldots, k-1$. Если векторы сопряжены относительно матрицы A, то они линейно независимы.

Теорема 19.1. *Если в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется система ненулевых векторов $h_0, \ldots, h_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, взаимно сопряженных относительно A, то эта система — базис в $\mathbb{R}^n$.*

□ Если h_k взаимно сопряжены относительно матрицы A, $k = 0, \ldots, m-1$ $(m \leqslant n)$, и α_k находятся, как указано выше, то $f(x_m) = \min\{f(x)\colon x \in X_m\}$,

$$X_m = \left\{ x\colon x = x_0 + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j h_j \right\} \tag{19.2}$$

— аффинное многообразие. Здесь λ_j — произвольные вещественные числа.

Если $m = n$, то $f(x_n) = \min\{f(x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$. С учетом того, что A — симметрический оператор, а направления h_k взаимно сопряжены относительно матрицы A, получаем

$$f\left(x_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k h_k\right) = \frac{1}{2}\left[A\left(x_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k h_k\right), x_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k h_k\right] +$$
$$+ \left(b, x_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k h_k\right) =$$
$$= f(x_0) + \sum_{k=0}^{m-1} \left[\lambda_k (Ax_0 + b, h_k) + \frac{1}{2}\lambda_k^2 (Ah_k, h_k)\right]. \tag{19.3}$$

Легко видеть, что это сумма одномерных парабол, поэтому

$$\min_{x \in X_m} f(x) = \min_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m} f\left(x_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k h_k\right) =$$
$$= f(x_0) + \sum_{k=0}^{m-1} \min_{\lambda_k} \left[\lambda_k (Ax_0 + b, h_k) + \frac{1}{2}\lambda_k^2 (Ah_k, h_k)\right]. \tag{19.4}$$

Проминимизировав отдельно каждую из одномерных парабол, получим

$$\lambda_{k,\min} = -\frac{(Ax_0 + b, h_k)}{(Ah_k, h_k)} = -\frac{(A(x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j h_j) + b, h_k)}{(Ah_k, h_k)} = \alpha_k, \tag{19.5}$$

λ_j здесь любые числа, так как h_j и h_k взаимно сопряжены, и скалярное произведение не меняется, а α_k — найденное нами ранее решение одномерной задачи минимизации квадратичного функционала вдоль h_k. ■

Этот метод называется **методом сопряженных направлений**. Он обеспечивает сходимость за n шагов процесса минимизации квадратичного функционала с $A > 0$.

Перейдем теперь к описанию **метода сопряженных градиентов**. Направления минимизации строятся следующим образом. Зададим нулевое приближение x_0. Начальное направление задается, как и в методе скорейшего спуска:

$$h_0 = -f'(x_0), \tag{19.6}$$

$$h_k = -f'(x_k) + \beta_{k-1} h_{k-1}, \qquad k \geqslant 1, \tag{19.7}$$

где градиент $f'(x) = Ax + b$, а β_{k-1} выбираются из условия сопряженности векторов h_k и h_{k-1}. Считается, что $f'(x_k) \neq 0$, в противном случае процесс минимизации можно прекратить.

Из условия сопряженности получаем, что

$$0 = (h_k, Ah_{k-1}) = (-f'(x_k), Ah_{k-1}) + \beta_{k-1}(h_{k-1}, Ah_{k-1}). \tag{19.8}$$

Отсюда

$$\beta_{k-1} = \frac{(f'(x_k), Ah_{k-1})}{(h_{k-1}, Ah_{k-1})}. \tag{19.9}$$

Минимизирующая последовательность строится так, как описано в начале параграфа: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k$, $\alpha_k = \arg\min\{f(x_k + \alpha h_k) : , \alpha \in \mathbb{R}\}$. Теперь мы докажем, что метод сопряженных градиентов является частным случаем метода сопряженных направлений.

Лемма 19.1. $(f'(x_k), f'(x_{k+1})) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$, *где последовательность x_k строится методом сопряженных градиентов.*

□ Поскольку $Ax_{k+1} = Ax_k + \alpha_k Ah_k$, $f'(x) = Ax + b$, то $f'(x_{k+1}) = f'(x_k) + \alpha_k Ah_k$, где $\alpha_k = \arg\min\{f(x_k + \alpha h_k) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Как было показано ранее,

$$\alpha_k = -\frac{(Ax_k + b, h_k)}{(Ah_k, h_k)} = -\frac{(f'(x_k), h_k)}{(Ah_k, h_k)}. \tag{19.10}$$

Подставим в $f'(x_{k+1})$ выражение для α_k:

$$f'(x_{k+1}) = f'(x_k) - \frac{(f'(x_k), h_k)}{(Ah_k, h_k)} \cdot Ah_k. \tag{19.11}$$

Умножим обе части этого выражения скалярно на $f'(x_k)$ и получим:

$$(f'(x_{k+1}), f'(x_k)) = (f'(x_k), f'(x_k)) - \frac{(f'(x_k), h_k)}{(Ah_k, h_k)} \cdot (Ah_k, f'(x_k)). \tag{19.12}$$

Преобразуем выражение в правой части равенства и докажем, что оно равно нулю. Прежде всего заметим, что, по определению h_k,

$$(f'(x_{k+1}), h_k) = -(f'(x_k), f'(x_k)) + \beta_{k-1} \cdot (f'(x_k), h_{k-1}), \tag{19.13}$$

и докажем, что $(f'(x_k), h_{k-1}) = 0$. Рассмотрим одномерную функцию $F(\alpha) = f(x_{k-1} + \alpha_{k-1}h_{k-1})$, где α выбирается из условия минимума $F(\alpha)$ на прямой, поэтому $F'(\alpha_{k-1}) = 0$. Заметим, что $F'(\alpha_{k-1}) = (f'(x_{k-1} + \alpha_{k-1}h_{k-1}), h_{k-1})$. Отсюда $(f'(x_k), h_{k-1}) = 0$.

Из равенства $(f'(x_{k+1}), h_k) = -(f'(x_k), f'(x_k))$ очевидно следует, что h_k является направлением спуска, и одномерная экстремальная задача может решаться не вдоль всей прямой, а вдоль луча $\alpha \geqslant 0$. Далее

$$(Ah_k, h_k) = -(Ah_k, f'(x_k)) + \beta_{k-1} \cdot \underbrace{(Ah_k, h_{k-1})}_{=0} = -(Ah_k, f'(x_k)), \tag{19.14}$$

поскольку h_k сопряжено с h_{k-1}. Тогда $(f'(x_{k+1}), f'(x_k)) = 0$. ■

Лемма 19.2. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — любое начальное приближение в методе сопряженных градиентов, а $h_0, \ldots, h_{n-1}$ построены по формулам метода сопряженных градиентов, причем $f'(x_i) \neq 0$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогда векторы $h_0, \ldots, h_{n-1}$ взаимно сопряжены относительно матрицы A, а векторы $f'(x_0), \ldots, f'(x_{n-1})$ взаимно ортогональны (в совокупности).*

□ Ортогональность $f'(x_0), f'(x_1)$ уже доказана. По условию, $h_0 \neq 0$, а $h_1 = -f'(x_1) + \beta_0 f(x_0)$, отсюда $h_1 \neq 0$, так как $(f'(x_1), f'(x_0)) = 0$. Доказательство проведем методом математической индукции. Предположим, что для $k \leqslant n-1$: $h_0, \ldots, h_{k-1}$ взаимно сопряжены, а $f'(x_0), \ldots, f'(x_{k-1})$ взаимно ортогональны. Далее, $(f'(x_k), f'(x_{k-1})) = 0$ по лемме 19.1. При $i \leqslant k-2$, используя предположения индукции и определение направления h_i, получаем:

$$\begin{aligned}(f'(x_k), f'(x_i)) &= (f'(x_{k-1}), f'(x_i)) + \alpha_{k-1}(Ah_{k-1}, f'(x_i)) = \\ &= \alpha_{k-1}(Ah_{k-1}, f'(x_i)) = \alpha_{k-1}(Ah_{k-1}, -h_i + \beta_{i-1}h_{i-1}) = 0.\end{aligned} \tag{19.15}$$

Докажем теперь взаимную сопряженность $h_0, \ldots, h_k$. Заметим, что $h_k \neq 0$, иначе градиенты $f'(x_0), \ldots, f'(x_k)$ были бы линейно зависимы, а они ортогональны (h_k можно выразить через линейную комбинацию $f'(x_i)$). По построению $(h_k, Ah_{k-1}) = 0$, $f'(x) = Ax + b$. Далее, $f'(x_{i+1}) = f'(x_i) + \alpha_i Ah_i$, отсюда

$$Ah_i = \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_i)}{\alpha_i}. \tag{19.16}$$

Заметим, что $\alpha_i \neq 0$, поскольку $f'(x_i)$ и $f'(x_{i+1})$ ортогональны.

Пусть $i \leqslant k-2$. Тогда

$$(h_k, Ah_i) = (-f'(x_k) + \beta_{k-1}h_{k-1}, Ah_i) = -(f'(x_k), Ah_i) =$$
$$= -\left(f'(x_k), \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_i)}{\alpha_i}\right) = 0. \quad (19.17)$$

Здесь использовалось предположение индукции о сопряженности направлений h_i и доказанная ранее ортогональность градиентов. ■

Таким образом, метод сопряженных градиентов является методом сопряженных направлений и имеет место следующая теорема.

Теорема 19.2. *Метод сопряженных градиентов позволяет найти минимум квадратичного функционала* $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)$ *в конечномерном евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$, *где* $A > 0$ — *симметрическая матрица, не более чем за* n *шагов.*

Замечание 19.1. Если $A \geqslant 0$ и $f(x)$ имеет минимум, то метод сопряженных направлений обеспечивает нахождение минимума не более, чем за n шагов. Если же минимум не достигается, то метод позволяет это выяснить не более, чем за n шагов.

Замечание 19.2. Метод не учитывает неустойчивости задачи по отношению к ошибкам задания матрицы (для $A \geqslant 0$).

Замечание 19.3. Можно получить еще выражения для β_{k-1}:

$$\beta_{k-1} = \frac{(f'(x_k), Ah_{k-1})}{(h_{k-1}, Ah_{k-1})} = \frac{(f'(x_k), f'(x_k) - f'(x_{k-1}))}{(h_{k-1}, f'(x_k) - f'(x_{k-1}))} =$$
$$= \frac{(f'(x_k), f'(x_k) - f'(x_{k-1}))}{(-f'(x_{k-1}) - \beta_{k-2}f'(x_{k-2}) \ldots, f'(x_k) - f'(x_{k-1}))} =$$
$$= \frac{(f'(x_k), f'(x_k) - f'(x_{k-1}))}{\|f'(x_{k-1})\|^2} = \frac{\|f'(x_k)\|^2}{\|f'(x_{k-1})\|^2}. \quad (19.18)$$

Два последних выражения для β_{k-1} не будут совпадающими, если минимизируемый функционал не является квадратичным.

Метод сопряженных градиентов может применяться для минимизации неквадратичных дифференцируемых функционалов в конечномерных евклидовых пространствах при условии, что градиент удовлетворяет условию Липшица. Сходимость за n шагов здесь не гарантируется.

Напомним еще раз формулы для построения минимизирующей последовательности:

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{19.19}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k, \tag{19.20}$$

$$\alpha_k = \arg\min\{f(x_k + \alpha h_k) \colon \alpha \geqslant 0\}, \tag{19.21}$$

$$h_0 = -f'(x_0), \tag{19.22}$$

$$h_k = -f'(x_k) + \beta_{k-1} h_{k-1}. \tag{19.23}$$

Если

$$\beta_{k-1} = \begin{cases} \dfrac{\|f'(x_k)\|^2}{\|f'(x_{k-1})\|^2}, & k \neq 1, n+1, 2n+1, \ldots, \\ 0, & k = 1, n+1, 2n+1, \ldots, \end{cases} \tag{19.24}$$

то метод называется методом **Флетчера—Ривза** (Роджер Флетчер (Roger Fletcher), Колин Ривз (Colin M. Reeves)). Если же

$$\beta_{k-1} = \begin{cases} \dfrac{(f'(x_k), f'(x_k) - f'(x_{k-1}))}{\|f'(x_{k-1})\|^2}, & k \neq 1, n+1, 2n+1, \ldots, \\ 0, & k = 1, n+1, 2n+1, \ldots, \end{cases} \tag{19.25}$$

то это метод **Полака—Рибьера** (Элайджа Полак (Elijah Polak), Г. Рибьер (G. Ribière)). Для квадратичных функционалов, как показано выше, оба метода совпадают. Если $f(x)$ — сильно выпуклый функционал и выполнены некоторые дополнительные требования, то метод сопряженных градиентов гарантирует сверхлинейную сходимость.

§ 20. МЕТОД НЬЮТОНА

Вернемся к рассмотрению задачи (8.1) в гильбертовом пространстве H. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемый функционал, такой, что существует $[f''(x)]^{-1}$ для любого $x \in H$. Рассмотрим следующий метод построения минимизирующей последовательности, который называется методом **Ньютона**: пусть

Исаак Ньютон (Isaac Newton), 1643–1727

$x_0 \in H$ — начальное приближение, а последовательность x_n строится по формуле

$$x_{n+1} = x_n - [f''(x_n)]^{-1} \cdot f'(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{20.1}$$

Последовательность $\{x_n\}$ в методе Ньютона может быть построена следующим образом:

1) $x_0 \in H$;
2) $x_{n+1} = \operatorname{argmin}\{f_n(x) : x \in H\}$, где

$$f_n(x) \equiv f(x_n) + (f'(x_n), x - x_n) + \frac{1}{2}(f''(x_n)(x - x_n), x - x_n) \tag{20.2}$$

— квадратичная аппроксимация по формуле Тейлора функционала $f(x)$ в точке x_n. Таким образом, последовательно отыскивается минимум аппроксимирующего квадратичного функционала.

Докажем теорему о сходимости метода Ньютона.

Теорема 20.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $f(x)$ — *дважды дифференцируемый, сильно выпуклый функционал на* H;
2) *вторая производная* $f''(x)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* L, *т. е. для любых* $x_1, x_2 \in H$

$$|f''(x_1) - f''(x_2)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|; \tag{20.3}$$

3) *начальное приближение выбрано так, что выполнено условие* $q \equiv \frac{L}{2\theta}\|x_1 - x_0\| < 1$, *где* $\theta > 0$ — *константа сильной выпуклости.*

Тогда:

1) $x_n \to x^* \in H$ *сильно;*
2) $\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{2\theta}{L} \sum\limits_{k=n}^{\infty} q^{2^k}$, *где* x^* — *решение задачи* (8.1).

□ В соответствии с доказанным ранее решение задачи (8.1) существует и единственно, поскольку $f(x)$ — сильно выпуклый функционал. Также в теореме 13.3 было доказано, что, поскольку $f(x)$ — сильно выпуклый, для любых $x, h \in H$ выполнено неравенство

$$(f''(x)h, h) \geqslant 2\theta\|h\|^2. \tag{20.4}$$

Поскольку в методе Ньютона $f'(x_n) = -f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)$, то

$$(-f'(x_n), x_{n+1} - x_n) = (f''(x_n)(x_{n+1} - x_n), x_{n+1} - x_n). \tag{20.5}$$

Из (20.5) и (20.4), применяя неравенство Коши—Буняковского, получаем:

$$2\theta\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leqslant \|f'(x_n)\| \cdot \|x_{n+1} - x_n\|. \tag{20.6}$$

Отсюда

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{2\theta}\|f'(x_n)\|. \tag{20.7}$$

Далее, найдется такое число $\gamma \in (0, 1]$, что

$$\begin{aligned} f'(x_n) = f'(x_{n-1}) + f''(x_{n-1} + \gamma(x_n - x_{n-1}))(x_n - x_{n-1}) = \\ = f'(x_{n-1}) + f''(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \\ + [f''(x_{n-1} + \gamma(x_n - x_{n-1})) - f''(x_{n-1})](x_n - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{20.8}$$

Из (20.1) следует, что сумма двух первых членов в правой части последнего равенства равна нулю, поэтому $\|f'(x_n)\| \leqslant L\|x_n - x_{n-1}\|^2$. Из данного неравенства и неравенства (20.7) получаем

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{2\theta}\|f'(x_n)\| \leqslant \frac{L}{2\theta}\|x_n - x_{n-1}\|^2, \tag{20.9}$$

а для $n = 1$

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \frac{L}{2\theta}\|x_1 - x_0\|^2 = \frac{2\theta}{L}q^2, \tag{20.10}$$

где $q = \frac{L}{2\theta}\|x_1 - x_0\|$. Докажем, что

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \frac{2\theta}{L}q^{2^k}, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{20.11}$$

Воспользуемся методом математической индукции. При $k = 1$ получаем (20.9), т. е. формула уже доказана. Предположим, что при $k = n - 1$ неравенство (20.11) верно, т. е. $\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \frac{2\theta}{L}q^{2^{n-1}}$. Тогда из (20.9) следует, что

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{L}{2\theta}\|x_n - x_{n-1}\|^2 \leqslant \frac{L}{2\theta}\left(\frac{2\theta}{L}\right)^2(q^{2^{n-1}})^2 = \frac{2\theta}{L}q^{2^n}. \tag{20.12}$$

При $m > n$ имеем:

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1}\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1}\frac{2\theta}{L}q^{2^k} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{2\theta}{L}q^{2^k} \to 0 \tag{20.13}$$

при $n \to \infty$, так как $q < 1$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. В силу полноты гильбертова пространства существует элемент $x^* \in H$, такой, что

$x_n \to x^*$ сильно. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем:

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\theta}{L} q^{2^k}. \qquad (20.14)$$

В силу непрерывности $f'(x)$: $\|f'(x^*)\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f'(x_n)\| \leqslant$ $\leqslant L \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_{n-1}\| = 0$, т. е. $f'(x^*) = 0$, и $x^* =$ $= \arg\min\{f(x) : x \in H\}$. ■

Итак, метод Ньютона характеризуется очень высокой скоростью сходимости. Однако сходимость метода с произвольного начального приближения не гарантируется даже для сильно выпуклых функционалов. Поэтому чаще всего применяется в комбинации с каким-нибудь градиентным методом, например с методом скорейшего спуска или сопряженных градиентов. С помощью градиентного метода отыскивается начальное приближение, начиная с которого будет сходиться метод Ньютона. Следующая модификация метода Ньютона позволяет избавиться от данного недостатка. Предлагается строить минимизирующую последовательность следующим образом: пусть $x_0 \in H$ — начальное приближение,

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n [f''(x_n)]^{-1} \cdot f'(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots, \qquad (20.15)$$

$$\alpha_n = \operatorname{argmin} \left\{ f\left(x_n - \alpha [f''(x_n)]^{-1} \cdot f'(x_n)\right) : \alpha \in [0, 1] \right\}. \qquad (20.16)$$

Метод становится методом Ньютона, когда $\alpha = 1$.

Еще одним недостатком метода Ньютона является необходимость обращать матрицу Гессе на каждом шаге. Известен вариант метода, называемый **методом Ньютона—Канторовича**, в котором матрица обращается, а затем полученная обратная матрица не изменяется для некоторого заданного числа шагов минимизации:

Леонид Витальевич Канторович, 1912–1986

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n [f''(x_k)]^{-1} \cdot f'(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots, \qquad (20.17)$$

$$\alpha_n = \arg\min \left\{ f\left(x_n - \alpha [f''(x_k)]^{-1} \cdot f'(x_n)\right) : \alpha \in [0, +\infty) \right\}. \qquad (20.18)$$

Здесь индекс $k = 0$, когда $n = 0, 1, \ldots, N-1$, $k = N$, когда $n = N, N+1, \ldots, 2N-1$, и т. д. Разумеется, квадратичная сходимость для такого метода не гарантируется.

Интересно отметить, что для минимизации квадратичных функционалов: $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)$, A — положительно определенная симметрическая матрица, в конечномерном евклидовом пространстве: $x \in \mathbb{R}^n$, метод Ньютона позволяет, начиная с любого начального приближения, найти точку минимума не более, чем за один шаг. Это предоставляется проверить читателю.

§ 21. МЕТОДЫ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

В случаях, когда вычисление градиента затруднительно или невозможно, приходится применять методы, не требующие вычисления производных, или **методы нулевого порядка**. Ниже, не занимаясь теоретическими исследованиями данных методов, мы кратко опишем наиболее популярные. Разумеется, речь идет о минимизации в конечномерных евклидовых пространствах. Поэтому в данном случае функционал $f(x)$ — это функция n переменных.

21.1. Метод координатного спуска

Рассмотрим функцию двух переменных. Пусть ее минимум лежит в точке (x_1^*, x_2^*). Из начальной точки A мы проводим поиск минимума вдоль направления оси x_1 и, таким образом, находим точку B, в которой касательная к линии постоянного уровня параллельна оси x_1. Затем, производя поиск из точки B в направлении оси x_2, получаем точку C, производя поиск параллельно оси x_1, получаем точку D и т. д., см. рис. 2.7. Таким образом, мы приходим к оптимальной точке. Для поиска минимума вдоль оси используется любой из методов решения одномерных экстремальных задач. Очевидным образом эту идею можно применить для случая n переменных.

Теоретически этот метод применим в случае единственного минимума функции. Но на практике он оказывается слишком медленным.

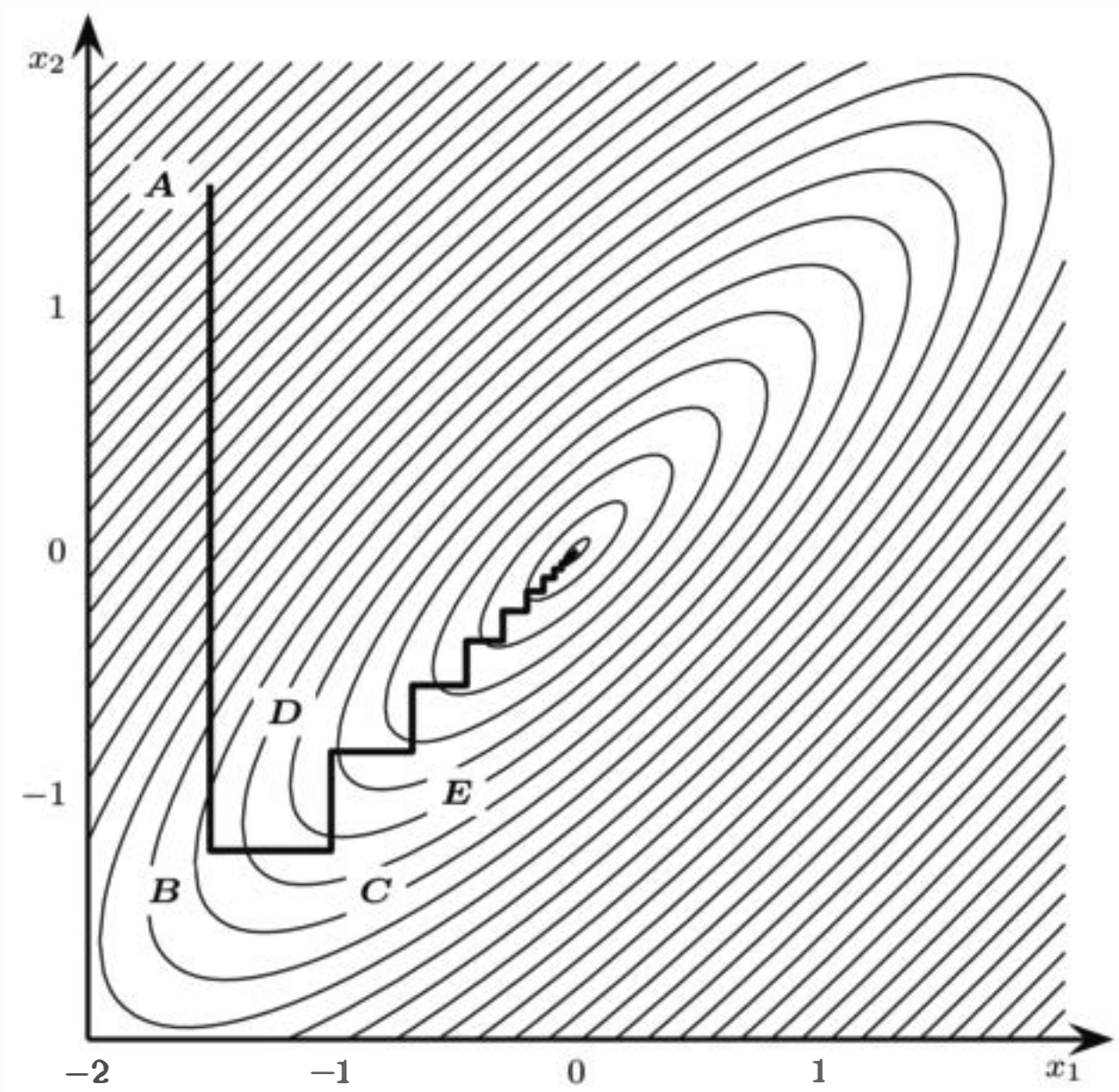


Рис. 2.7. Метод координатного спуска для функции $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 + 10(x_1 - x_2)^2$

21.2. Метод Хука—Дживса

Этот метод был разработан в 1961 г. Р. Хуком и Т. А. Дживсом (Robert Hooke, T. A. Jeeves), но до сих пор применяется достаточно часто. Поиск состоит из последовательности шагов пробного поиска вокруг базисной точки, который ведется последовательно вдоль каждой из координат. При нахождении минимума функции в новой точке, перебор координат продолжается уже с нее. После выполнения поиска по всем координатам и в случае успеха выполняют «поиск по образцу». Поиск по образцу — это поиск минимума функции по направлению вектора последнего успешного перемещения после пробного поиска, ко-

торый может быть представлен в виде следующего алгоритма, см. рис. 2.8:

Шаг 1. Пусть каким-то образом задана начальная точка $\boldsymbol{x}_0$. Полагаем $i = 1$.

Шаг 2. Вычисляем значения функции $f(\boldsymbol{x})$ в точках $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{i-1}$, $\boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{x}_i + h_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{x}_{i-1} - h_i\boldsymbol{e}_i$, где $\boldsymbol{e}_i$ — единичный вектор в направлении оси x_i, а h_i — некоторый шаг. Таким образом находим $f = f(\boldsymbol{x})$, $f^+ = f(\boldsymbol{x}^+)$, $f^- = f(\boldsymbol{x}^-)$.

Шаг 3. Сравниваем значения f, f^+, f^- и в качестве $\boldsymbol{x}_i$ берем одну из трех точек $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{x}^-)$, в которой достигается наименьшее значение. При этом может оказаться, что $\boldsymbol{x}_i$ совпадает с $\boldsymbol{x}_{i-1}$.

Шаг 4. Если $i < n$, то полагаем $i = i + 1$ и переходим на шаг 2, в противном случае получаем базисную точку $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_n$ и прекращаем работу.

Сам метод Хука—Дживса может быть представлен в виде алгоритма, описанного ниже и приведенного также на рис. 2.8:

Шаг 1. Выбираем каким-то образом (например, случайным) начальную базисную точку $\boldsymbol{b}_0$, задаем шаги h_i, $i = 1, \ldots, n$, коэффициент $\sigma > 1$ и параметр $\varepsilon > 0$, полагаем $k = 0$.

Шаг 2. Осуществляем пробный поиск, описанный выше, где в качестве начальной точки используется точка $\boldsymbol{b}_k$. Пусть $\boldsymbol{b}$ — точка, найденная в результате пробного поиска. Если $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_k$, то переходим на шаг 3, в противном случае — на шаг 4.

Шаг 3. Обозначим через Δ величину, характеризующую размер шагов h_i в пробном поиске. Например, можно определить Δ как $\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}$. Проверяем, выполняется ли неравенство $\Delta < \varepsilon$. Если оно выполняется, то алгоритм заканчивает свою работу (результат работы — точка $\boldsymbol{b}_k$), в противном случае масштабируем шаги h_i по формуле $h_i = h_i/\sigma$, $i = 1, \ldots, n$ и переходим на шаг 2. На практике часто используется значение $\sigma = 10$.

Шаг 4. Полагаем $\boldsymbol{b}_{k+1} = \boldsymbol{b}$ и $k = k + 1$.

Шаг 5. Осуществляем поиск по образцу, т. е. двигаемся от точки $\boldsymbol{b}_k$ вдоль последнего удачного направле-

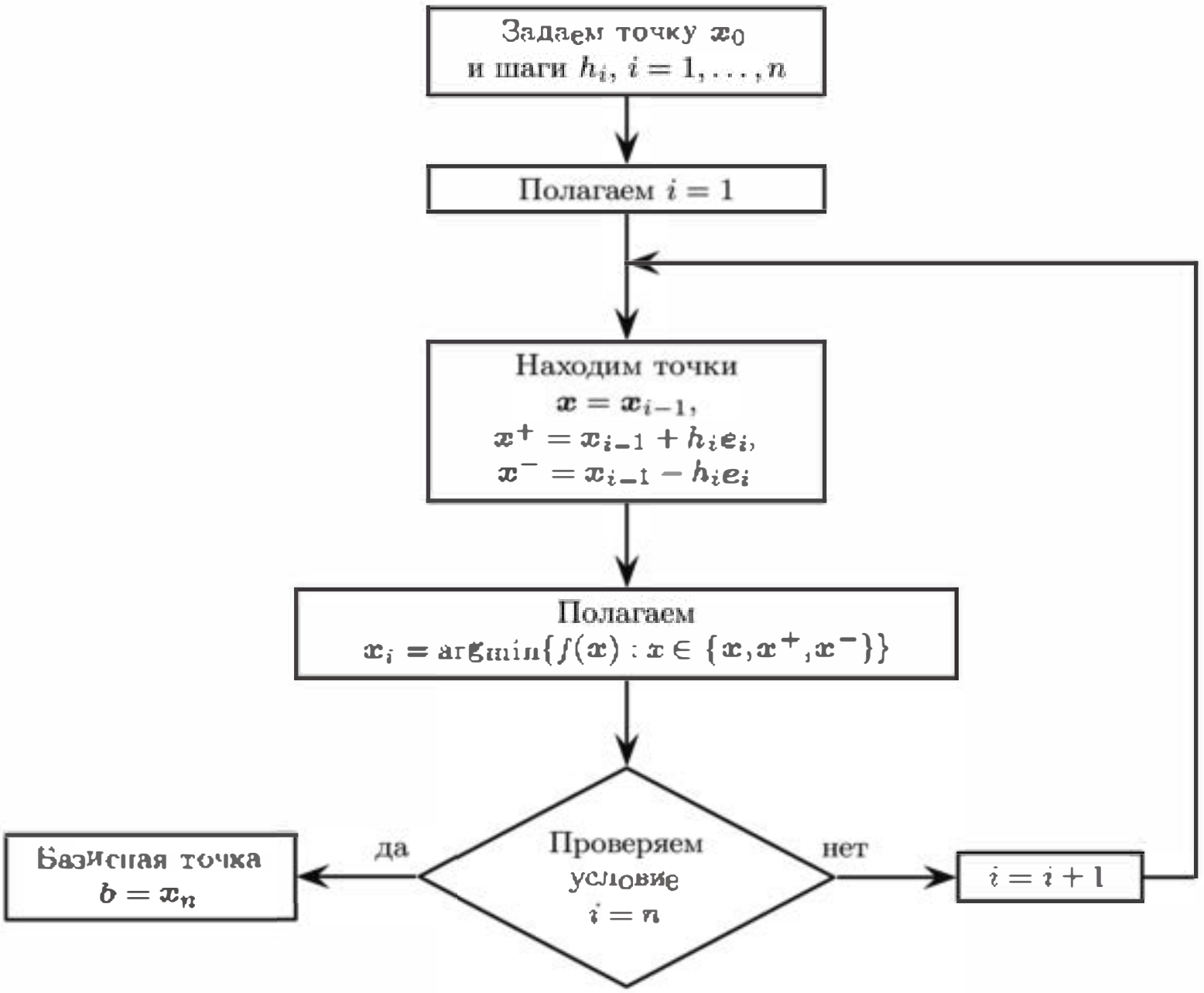


Рис. 2.8. Пробный поиск для нахождения базисной точки

ния $(b_k - b_{k-1})$. Таким образом получаем точку $p_k = b_k + (b_k - b_{k-1})$.

Шаг 6. Осуществляем пробный поиск (начальная точка — точка p_k, результат — точка $p_k^\star$).

Шаг 7. Проверяем, выполняется ли неравенство $f(p_k^\star) < f(x_k)$, т. е. произошло ли уменьшение значения функции после поиска по образцу и последующего пробного поиска. Если да, то $b_{k+1} = p_k^\star$ и $k = k + 1$ и переходим на шаг 5, в противном случае переходим на шаг 3.

Невозможность уменьшить $f(x)$, когда Δ достаточно мало, указывает на то, что достигнут локальный минимум. Описанная последовательность поисков заканчивается, если оказываются удовлетворенными условия трех основных тестов.

Первый тест проводится после каждого пробного поиска после поиска по образцу: изменение целевой функции сравнивается с ранее установленной малой величиной. Если значение функции не отличается на величину, большую чем это число, от предыдущего основного значения функции, пробный поиск или поиск по образцу считается неудачным. В противном случае проводится тест для определения, увеличилась целевая функция (неудача) или уменьшилась (удачный поиск). Этот второй тест нужен для того, чтобы быть уверенным, что значение целевой функции все время улучшается. Третий тест проводится после удачи в пробном поиске на стадии уменьшения изменения h.

Пример 21.1. Для проверки сходимости различных алгоритмов часто используется функция Химмельблау (Давид Химмельблау, David Himmelblau):

$$f(x,y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2. \tag{21.1}$$

Для нахождения точек возможного экстремума необходимо решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2y^2 + 4yx - 42x - 14 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 2x^2 + 4yx - 26y - 22 = 0. \end{cases} \tag{21.2}$$

Решения этой системы имеют вид:

1) $(x, y) = (3, 2)$;
2) три решения вида $(x, y) = (-u^2 + 7, u)$, где u — корни уравнения $z^3 + 2z^2 - 10z - 19 = 0$;
3) пять решений вида $(x, y) = (-v^4/2 + 13v^2 + 21v, v/2)$, где v — корни уравнения $z^5 - 26z^3 - 42z^2 + 1 = 0$.

Для того чтобы функция $f(x, y)$ имела в некоторой точке локальный минимум (максимум), достаточно, чтобы соответствующая матрица Гесса была положительно (отрицательно) определенной. Сама матрица Гесса имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} 12x^2 + 4y - 42 & 4x + 4y \\ 4x + 4y & 12y^2 + 4x - 26 \end{bmatrix}. \tag{21.3}$$

Отметим, что матрица H положительно определена, если $\delta_1 = H_{11} > 0$ и $\delta_2 = \det H > 0$, и отрицательно определена, если $\delta_1 < 0$, $\delta_2 > 0$. Находим, что функция $f(x, y)$ имеет четыре точки минимума (глобального), одну точку максимума и четыре седловые точки, см. табл. 2.1 и рис. 2.9.

Таблица 2.1

Точки возможного экстремума функции Химмельблау

v	u	x	y	f	δ_1	δ_2	Тип точки
		3,0000	2,0000	0,0000	74,0000	2116,0000	минимум
	−3,2832	−3,7793	−3,2832	0,0000	116,2655	9460,5635	минимум
	−1,8481	3,5844	−1,8481	0,0000	3104,7850	3024,5399	минимум
	3,1313	−2,8051	3,1313	0,0000	64,9495	5222,8967	минимум
−3,9074		−0,1280	−1,9537	178,3372	−49,6184	−1026,5806	седловая
−1,8461		−0,2708	−0,9230	181,6165	−44,8119	732,6945	максимум
−0,1627		−3,0730	−0,0814	104,0152	70,9964	−2672,1660	седловая
0,1477		3,3852	0,0739	13,3119	95,8066	−1378,8567	седловая
5,7685		0,0867	2,8843	67,7192	−30,3728	−2394,0913	седловая

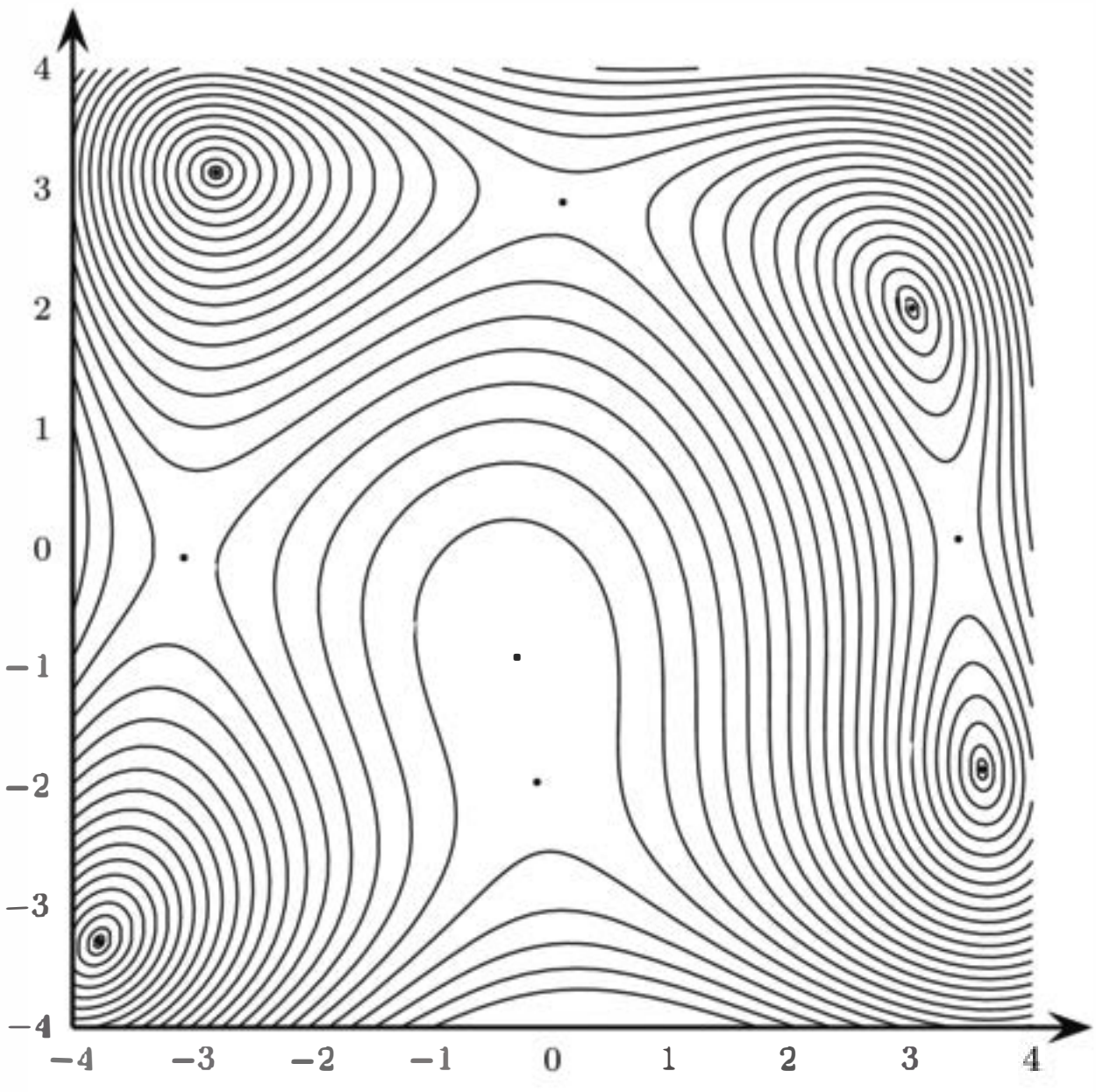


Рис. 2.9. Линии уровня функции Химмельблау (жирные точки обозначают точки максимума, минимума и седловые точки)

21.3. Метод Нелдера—Мида

Нелдер и Мид (Джон Нелдер (John Nelder), Роджер Мид (Roger Mead)) предложили метод поиска, несколько более сложный по сравнению с прямым поиском, но оказавшийся весьма эффективным и легко осуществляемым на ЭВМ. Этот метод Нелдера—Мида является развитием симплексного метода Спендли, Хекста и Химсворта (W. Spendley, G. R. Hext, F. R. Himsworth).

Множество из $(n+1)$-й равноудаленной точки в n-мерном пространстве называется **регулярным симплексом**. Например, как видно из рис. 2.10, в двумерном пространстве симплексом является равносторонний треугольник, а в трехмерном пространстве — правильный тетраэдр.

При поиске минимума целевой функции $f(x)$ пробные векторы x могут быть выбраны в точках $\mathbb{R}^n$, находящихся в вершинах симплекса, как было первоначально предложено Спендли, Хекстом и Химсвортом. Для нахождения всех вершин регулярного симплекса можно использовать следующую формулу:

$$x_j = x_0 + pe_j + \sum_{k=1, k\neq j}^{n} qe_k, \tag{21.4}$$

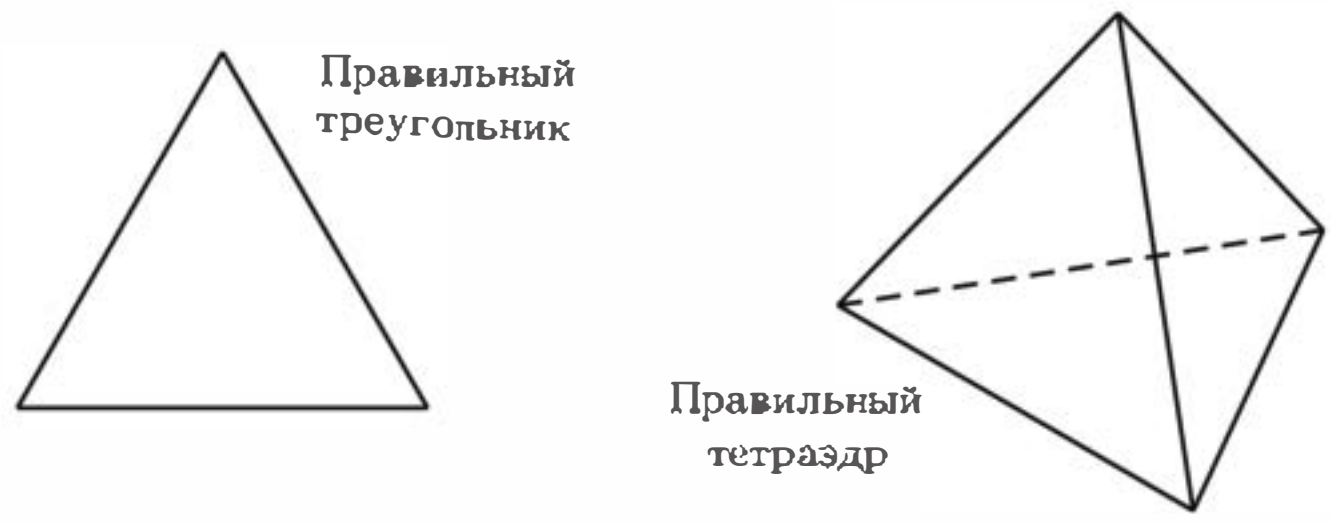


Рис. 2.10. Регулярные симплексы в двумерном и трехмерном пространствах

где e_k — орты, x_0 — произвольная точка, а числа p и q определяются как

$$p = \frac{a}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} + n - 1), \qquad q = \frac{a}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} - 1), \tag{21.5}$$

здесь a — длина ребра симплекса (расстояние между двумя вершинами). Так, в двумерном случае при $a = 1$ вершины симплекса можно определить как

$$x_0 = (0,0), \quad x_1 = (\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}), \quad x_2 = (\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}), \tag{21.6}$$

а в трехмерном — как

$$\begin{gathered} x_0 = (0,0,0), \quad x_1 = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}), \\ x_2 = (\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}), \quad x_3 = (\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}). \end{gathered} \tag{21.7}$$

Конечно, путем вращения симплекса можно получить и другие координаты его вершин.

Метод Спендли, Хекста и Химсворта состоит в так называемой **операции отражения**, где одна вершина симплекса заменяется другой, симметричной относительно центра тяжести оставшихся точек. Так, для точки x_m можно найти центр тяжести оставшихся точек как

$$\bar{x}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=0, i \neq m}^{n} x_i, \tag{21.8}$$

тогда при операции отражения получаем точку

$$\tilde{x}_m = \bar{x}_m + (\bar{x}_m - x_m) = 2\bar{x}_m - x_m. \tag{21.9}$$

Заметим, что при такой операции форма симплекса остается неизменной. Определенные практические трудности, встречающиеся при использовании регулярных симплексов, а именно отсутствие ускорения поиска и трудности при проведении поиска на искривленных «оврагах» и «хребтах», привели к необходимости поиска некоторых улучшенных методов.

В методе Нелдера и Мида к операции отражения еще добавляются **операции растяжения, сжатия и редукции**. В этом случае симплекс может изменять свою форму и, таким образом, уже не будет оставаться регулярным симплексом. Именно поэтому здесь использовано более подходящее название «деформируемый многогранник».

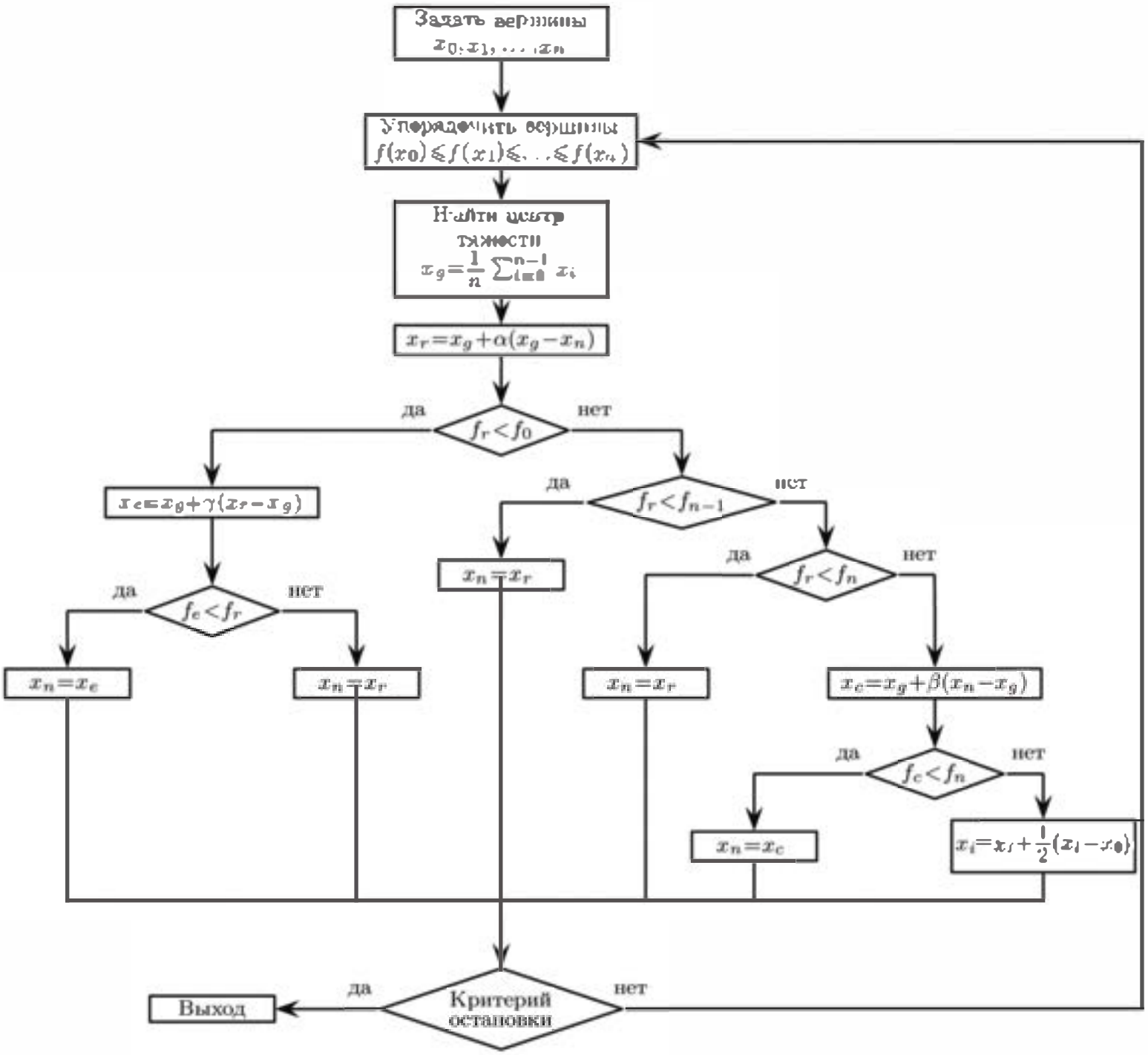


Рис. 2.11. Схема Нелдера—Мида

Рассмотрим операции преобразования симплекса непосредственно на самой процедуре нахождения минимума функции $f(x)$, см. рис. 2.11.

Шаг 1. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ построен симплекс и в каждой из его $n+1$ вершин $x_0, x_1, \ldots, x_n$ найдены значения функции $f(x)$. Перенумеруем вершины симплекса таким образом, что

$$f(x_0) \leqslant f(x_1) \leqslant \ldots \leqslant f(x_n). \qquad (21.10)$$

Обозначим $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Шаг 2. Найдем центр тяжести всех точек, за исключением точки x_n, в которой достигается наибольшее зна-

чение функции $f(x)$. Пусть центром тяжести будет $x_g = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i$. Вычислим $f_g \equiv f(x_g)$.

Шаг 3. Удобнее всего начать перемещение от точки x_n. Отразим точку x_n относительно точки x_g, получим точку

$$x_r = x_g + \alpha(x_g - x_n) = (1+\alpha)x_g - \alpha x_n, \qquad (21.11)$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент отражения. Вычислим $f_r = f(x_r)$.

Шаг 4. Сравним значения функций f_r и f_0. Если $f_r < f_0$, то мы получили наименьшее значение функции. Направление из точки x_c в точку x_r наиболее удобно для перемещения. Таким образом, мы производим растяжение в этом направлении и находим точку $x_e = x_g + \gamma(x_r - x_g) = (1-\gamma)x_g + \gamma x_r$, где $\gamma > 1$ — коэффициент растяжения, $f_e \equiv f(x_e)$.

(a) Если $f_e < f_0$, то заменяем точку x_n на точку x_e и переходим на шаг 9.

(b) Если $f_e \geqslant f_0$, то отбрасываем точку x_e. Очевидно, мы переместились слишком далеко от точки x_g к точке x_r. Поэтому следует заменить точку x_n на точку x_r и перейти на шаг 9.

Шаг 5. Сравниваем f_r и f_{n-1}.

(a) Если $f_r < f_{n-1}$, то $x_n = x_r$ и переходим на шаг 9.

(b) Если $f_r < f_n$, то $x_n = x_r$.

Шаг 6. Сжимаем многоугольник, т. е. находим точку $x_c = x_g + \beta(x_n - x_g) = (1-\beta)x_g + \beta x_n$, где β $(0 < \beta < 1)$ — коэффициент сжатия.

Шаг 7. Сравним значения функций f_n и $f_c \equiv f(x_c)$.

A. Если $f_c < f_n$, то заменяем точку x_n на точку x_c и переходим на шаг 9.

B. Если $f_c \geqslant f_n$, то очевидно, что все наши попытки найти значение, меньшее f_n, закончились неудачей, поэтому мы переходим на шаг 8.

Шаг 8. На этом шаге мы уменьшаем размерность симплекса делением пополам расстояния от каждой точки симплекса до точки, определяющей наименьшее значение функции.

Таким образом, точка x_i заменяется на точку $x_i + \frac{1}{2}(x_i - x_0)$, $i = 0, \ldots, n$.

Шаг 9. Проверка сходимости основана на том, чтобы стандартное отклонение $(n+1)$-го значения функции было меньше некоторого заданного малого значения ε. В этом случае вычисляется

$$\sigma^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(f_i - \bar{f})^2, \quad \text{где} \quad \bar{f} = \sum_{i=0}^{n}\frac{f_i}{n+1}. \qquad (21.12)$$

Критерий окончания поиска состоит в проверке условия $\sigma < \varepsilon$, где ε — произвольное малое число, а $\bar{f}$ — значение функции в центре тяжести. Для продолжения поиска переходим на шаг 1.

Коэффициенты α, β и γ являются соответственно коэффициентами отражения, сжатия и растяжения. После того как деформируемый многогранник подходящим образом промасштабирован, его размеры должны оставаться неизменными, пока изменения топологии задачи не потребуют применения многогранника другой формы. Это возможно реализовать только при $\alpha = 1$. Кроме того, Нелдер и Мид показали, что при решении задачи с $\alpha = 1$ требуется меньшее количество вычислений функции, чем при $\alpha < 1$. В то же время α не должно быть много больше единицы, поскольку: 1) деформируемый многогранник легче адаптируется к топологии задачи при меньших значениях α, особенно когда необходимо изменять направление поиска, столкнувшись с изогнутой впадиной; 2) в области локального минимума размеры многогранника должны уменьшаться, а большое α в этих условиях замедлит сходимость, Таким образом, значение $\alpha = 1$ выбирается как компромисс.

Чтобы выяснить, какое влияние на процедуру поиска имеет выбор β и γ, Нелдер и Мид (а также Павиани, D. Paviani) провели решение нескольких тестовых задач, используя большое число различных комбинаций значений β и γ. В качестве удовлетворительных значений этих параметров при оптимизации без ограничений Нелдер и Мид рекомендовали $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}5$ и $\gamma = 2$. Размеры и ориентация исходного многогранника в некоторой степени влияли на время решения, а значения α, β и γ оказывали значительно большее влияние. Павиани отмечает, что нельзя четко решить вопрос относительно выбора β и γ и что влияние выбора β на эффективность поиска несколько более заметно, чем влияние γ. Павиани рекомендует

следующие диапазоны значений для этих параметров:

$$\begin{aligned} 0{,}4 \leqslant \beta \leqslant 0{,}6, \\ 2{,}8 \leqslant \gamma \leqslant 3{,}0. \end{aligned} \tag{21.13}$$

При $0 < \beta < 0{,}4$ существует вероятность того, что из-за уплощения многогранника будет иметь место преждевременное окончание процесса. При $\beta > 0{,}6$ может потребоваться избыточное число шагов и больше машинного времени для достижения окончательного решения.

21.4. Методы случайного поиска

Методы случайного поиска заключаются в случайном отклонении от начальной точки в заданной окрестности и затем выбора точки, лучше минимизирующей функцию.

Рассмотрим для примера функцию двух переменных. Для нее выбирается некоторая ε-окрестность начальной точки A (в данном случае — окружность радиуса ε с центром в точке A). На этой окружности случайным образом генерируются несколько точек. В них считаются значения функции и выбирается точка B, в которой значение функции минимально. Затем строится луч из точки A через точку B, и на этом луче откладывается точка C (например, чтобы расстояние AC было равно $5 \cdot AB$). В точке C опять строят окружность радиуса ε, и опять на ней случайным образом генерируют точки. После каждого шага значение функции в найденной точке проверяют на сходимость. Если она удовлетворяется, то поиск завершается. Если функция снова начинает увеличиваться, то возвращаются к предыдущей точке и уменьшают ε. Таким образом, находится оптимальная точка.

Как видно из изложенного выше, методы первого порядка являются, в основном эвристическими. Их строгое обоснование и формулирование условий на функцию $f(x)$, при которых методы сходятся, зачастую просто невозможно.

21.5. Генетические алгоритмы

В настоящее время большой популярностью пользуются так называемые генетические алгоритмы. **Генетические алгоритмы** — класс методов поиска решения задачи, которые имитируют эволюционные процессы, важнейшим результатом действия

которых может считаться появление на Земле организмов высокого уровня. Следует сразу же отметить, что подобные методы являются эвристическими, их математическое обоснование отсутствует. Приведем только некоторые определения и примеры.

Определение 21.1. Генетическим алгоритмом поиска называется алгоритм, обладающий следующими свойствами.

1) Выбирается «начальное поколение» — фиксированный набор кандидатов в решение.
2) С помощью процедуры измерения, соответствующей рассматриваемой задаче, определяется соответствие каждого члена поколения данной задаче.
3) Наиболее адекватные члены текущего поколения («родители») выбираются для воспроизведения членов следующей популяции. При этом используются механизмы **скрещивания** (crossing-over), **мутаций** (mutation), **деформаций** (creep), **элитизма** (elitism — власть в руках элиты).
4) Процедура воспроизведения продолжается до тех пор, пока не будет проделано заданное число генераций следующих поколений.

Выбор начального поколения — генерация набора начальных приближений решения задачи случайным образом (при этом подразумевается, что известны какие-либо априорные оценки).

Выбор «родителей» — выбор фиксированного числа наиболее соответствующих решению задачи членов текущего поколения.

Процесс получения следующего поколения основан на понятиях воспроизведения: скрещивание, мутация, деформация, элитизм. Так, **скрещивание** — объединение характеристик родителей. **Мутации** — внесение в члены текущего поколения новой информации, которая не может быть получена при помощи «родителей», например генерация членов нового поколения с помощью внесения в члены поколения «родителей» случайных величин. **Деформация** — с помощью заранее выбранного порога деформации $C \in (0,1)$ величина каждого члена поколения масштабируется с помощью веса $a \in (1-C, 1+C)$, который выбирается случайным образом. **Элитизм** — фиксиро-

ванное число N_{elite} наиболее соответствующих решению задачи членов текущего поколения остаются в следующем поколении наряду с новыми членами.

Понятно, что никаких строгих правил и теоретических обоснований для подобных алгоритмов попросту нет. Столь же неубедительны претензии сторонников «генетических алгоритмов» на то, что эти методы могут, в отличие от градиентных, служить способом отыскания глобального, а не локального минимума. По сути дела, речь идет о новых вариантах метода случайного поиска.

Применение методов нулевого порядка не рекомендуется. Лучше постараться и изучить свойства минимизируемого функционала с тем, чтобы применить методы первого или более высоких порядков. В этом случае, по крайней мере, известны их свойства и границы применимости.

§ 22. МЕТОД УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА

Пусть необходимо минимизировать дифференцируемый функционал $f(x)$ на замкнутом выпуклом ограниченном множестве X гильбертова пространства H. В **методе условного градиента** для этого строятся две последовательности $\{x_n\} \subset X$ и $\{\bar{x}_n\} \subset X$. Начальное приближение $x_0 \in X$ выбирается произвольным образом, после чего строится точка (она находится на границе X) $\bar{x}_0$ по формуле

$$(f'(x_n),\bar{x}_n) = \min\{(f'(x_n),x)\colon x \in X\} \tag{22.1}$$

при $n = 0$, а затем по формуле

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n(\bar{x}_n - x_n) \tag{22.2}$$

находим x_{n+1} при условии, что параметр $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$. Далее процесс повторяется.

Точка $\bar{x}_n \in X$ заведомо существует и лежит на границе X, так как линейный непрерывный функционал $(f'(x_n),x)$ достигает своего минимального значения на границе области X.

Числа α_n — «параметрические шаги» можно выбирать разными способами. Мы рассмотрим только один вариант — **метод Демьянова** (Владимир Федорович Демьянов (род. 1938)).

Теорема 22.1. *Пусть функционал $f(x)$ задан на замкнутом ограниченном выпуклом множестве $X \subset H$ и его градиент*

$f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. существует константа $L > 0$, такая, что для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $\|f'(x) - f'(y)\| \leqslant L\|x - y\|$. Пусть далее параметрические шаги $\alpha \in [0, 1]$ выбираются из условия

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + \alpha_n(\bar{x}_n - x_n)) = \min_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} f(x_n + \alpha(\bar{x}_n - x_n)). \quad (22.3)$$

Тогда для последовательностей $\{x_n\} \subset X$ и $\{\bar{x}_n\} \subset X$, определенных выше, справедливы следующие утверждения:

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} (f'(x_n), \bar{x}_n - x_n) = 0$;
2) *если функционал $f(x)$ выпуклый, то* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f^* = \min\limits_{x \in X} f(x)$;
3) *если функционал $f(x)$ сильно выпуклый, то последовательность $\{x_n\} \subset X$ сильно сходится к точке $x^* \in X$ абсолютного минимума функционала $f(x)$ на X, причем имеет место оценка скорости сходимости:* $\|x_n - x^*\| \leqslant \dfrac{C}{n}$.

Теорема приводится без доказательства.

Очень просто метод условного градиента реализуется в том случае, когда $H = \mathbb{R}^n$, множество X — выпуклый ограниченный многогранник, а функционал $f(x)$ является квадратичным. В этом случае задача отыскания минимума $(f'(x_n), x)$ и получение $\bar{x}_n$ — задача линейного программирования. В случае, если вершины многогранника X известны, эта задача может быть решена с помощью их перебора. В противном случае может быть применен, например, симплекс-метод, эффективно применяемый для решения задач линейного программирования. Отыскание параметрического шага α_n в этом случае тривиально: требуется найти минимум одномерной квадратичной функции одной переменной (параболы), зависящей от $\alpha \in [0, 1]$. Примеры применения этого метода для решения некорректных задач на компактах будут даны ниже.

§ 23. МЕТОД ПРОЕКЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

В данном параграфе мы рассмотрим **метод проекции сопряженных градиентов**, который позволяет за конечное число шагов решать задачу минимизации квадратичного функционала на множестве в $\mathbb{R}^n$, задаваемом линейными ограничениями. Прежде всего, введем понятие оператора проектирования

на линейное подпространство. Пусть J — множество индексов, A_J — $(m \times n)$-матрица, строками которой служат векторы a_j, $j \in J$.

Лемма 23.1. *Если векторы a_j, $j \in J$ линейно независимы, то матрица $A_J A_J^*$ невырожденная.*

□ Пусть $y \in \mathbb{R}^n$ — ненулевой вектор, такой, что $A_J A_J^* y = 0$. Тогда $(A_J A_J^* y, y) = (A_J^* y, A_J^* y) = \|A_J^* y\|^2 = 0$, что противоречит линейной независимости a_j, $j \in J$. ■

Положим $P = A_J^*(A_J A_J^*)^{-1} A_J$. Легко видеть, что $PP = P$, $P^* = P$, $P(I - P) = (I - P)P = 0$.

Оператор $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такой, что $P^2 \equiv PP = P$, называется **оператором проектирования**, или **проектором**. Очевидно, что оператор $I - P$ тоже проектор. Из записанного выше для случая, когда P — линейный оператор, ясно, что $P\mathbb{R}^n$ и $(I - P)\mathbb{R}^n$ — взаимно ортогональные линейные подпространства. Таким образом, P есть оператор ортогонального проектирования на подпространство, натянутое на векторы a_j, $j \in J$.

Рассмотрим теперь задачу минимизации квадратичного функционала на подпространстве, заданном системой равенств, а именно, задачу минимизации квадратичного функционала

$$f(x) = \frac{1}{2}(x, Cx) + (d, x) \tag{23.1}$$

при ограничениях

$$(a_j, x) - b_j = 0, \qquad j \in J. \tag{23.2}$$

Здесь $x, d, a_j \in \mathbb{R}^n$, b_j — числа, матрица C размерности $n \times n$ — симметрическая положительно определенная, J — конечное множество индексов.

Предполагаем, что векторы a_j, $j \in J$ линейно независимы. Пусть x_0 — какая-либо точка, удовлетворяющая системе равенств (23.2). Введем новую переменную y по формуле $x = x_0 + (I - P)y$. Рассмотрим функцию $\varphi(y) = f(x_0 + (I - P)y)$. Заметим, что $\varphi'(y) = (I - P)f'(x)$.

Лемма 23.2. *Пусть $\bar{y}$ — точка безусловного минимума функции $\varphi(y)$. Тогда соответствующая ей точка $\bar{x} = x_0 + (I - P)\bar{y}$ есть точка минимума функции $f(x)$ при записанных линейных ограничениях.*

Доказательство очевидно. Из леммы 23.2 следует, что задача минимизации квадратичной функции с линейными ограни-

чениями может быть сведена к задаче без ограничений. Для функции $\varphi(y)$ применим метод сопряженных градиентов:

$$y_0 = 0, \quad p_0 = -\varphi'(0), \tag{23.3}$$

$$y_{k+1} = y_k + \alpha_k p_k, \tag{23.4}$$

$$p_k = -\varphi'(y_k) + \frac{\|\varphi'(y_k)\|^2}{\|\varphi'(y_{k-1})\|^2} p_{k-1}, \tag{23.5}$$

$$\alpha_k = -\frac{(\varphi'(y_k), p_k)}{(p_k, (I-P)C(I-P)p_k)}. \tag{23.6}$$

Теперь удобно вернуться к переменным x. Используя свойства оператора P, можно показать, что $(I-P)p_k = p_k$. Таким образом, справедлива

Теорема 23.1. *Задача минимизации квадратичного функционала при наличии линейных ограничений типа равенств, если известно начальное приближение x_0, удовлетворяющее заданным ограничениям, решается за конечное число шагов с помощью итерационного процесса (метода проекции сопряженных градиентов):*

$$p_0 = -(I-P)f'(x_0), \tag{23.7}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \tag{23.8}$$

$$p_k = -(I-P)f'(x_k) + \frac{\|(I-P)f'(x_k)\|^2}{\|(I-P)f'(x_{k-1})\|^2} p_{k-1}, \tag{23.9}$$

$$\alpha_k = -\frac{(f'(x_k), p_k)}{(p_k, Cp_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{23.10}$$

Теперь мы рассмотрим задачу квадратичного программирования с линейными ограничениями типа неравенств. Мы ограничимся только так называемыми простыми ограничениями. Итак, рассмотрим задачу о минимизации квадратичного функционала

$$f(x) = \frac{1}{2}(x, Cx) + (d, x) \tag{23.11}$$

при тех же условиях на функционал, что и в начале параграфа, и при наличии ограничений типа неравенств вида: $x^{(j)} \geqslant 0$, $j \in J$.

Пусть x_0 — произвольная точка, удовлетворяющая ограничениям $x^{(j)} \geqslant 0$, $j \in J$. Определим индексное множество $J(x) = \{j\colon x^{(j)} = 0, j \in J\}$. Возможны два случая.

1) $(f'(x_0))^{(j)} = 0$, $j \notin J(x_0)$. В этом случае точка x_0 является точкой минимума $f(x)$ при ограничениях $x^{(j)} = 0$,

$j \in J(x_0)$. Если при этом $(f'(x_0))^{(j)} \geqslant 0$, $j \in J(x_0)$, то x_0 — решение задачи. Пусть теперь $(f'(x_0))^{(j)} < 0$, $j \in J(x_0)$. Положим

$$J' = \{j \in J(x_0) : (f'(x_0))^{(j)} \geqslant 0\}. \tag{23.12}$$

Применим метод сопряженных градиентов для минимизации $f(x)$ по переменным $x^{(j)}$, $j \notin J'$, оставляя $x^{(j)} = 0$, $j \in J'$. При этом все время вычисляем величину

$$\bar{\alpha}_k = \min\left\{\left(-\frac{x_k^{(j)}}{p_k^{(j)}}\right) : j \notin J', p_k^{(j)} < 0\right\} \tag{23.13}$$

и производим сравнение α_k и $\bar{\alpha}_k$. Если $\alpha_k < \bar{\alpha}_k$, то

$$x_{k+1}^{(j)} = x_k^{(j)} + \alpha_k p_k^{(j)}, \qquad j \notin J', \tag{23.14}$$

$$x_{k+1}^{(j)} = x_k^{(j)} = 0, \qquad j \in J'. \tag{23.15}$$

Если $\alpha_k \geqslant \bar{\alpha}_k$, то

$$x_{k+1}^{(j)} = x_k^{j} + \bar{\alpha}_k p_k^{(j)}, \qquad j \notin J', \tag{23.16}$$

$$x_{k+1}^{(j)} = x_k^{(j)} = 0, \qquad j \in J'. \tag{23.17}$$

Процесс вычислений оборвется после конечного числа шагов. При этом либо будет найдена точка x_{k+1}, такая, что в ней $f(x)$ достигает минимума при условиях $x^{(j)} = 0$, $j \in J'$, либо такая, что $\alpha_k \geqslant \bar{\alpha}_k$. В этом случае $J(x_k) \supset J'$, причем включение таково, что существует $j \in J(x_k)$, но $j \notin J'$. В обоих случаях точка x_{k+1} принимается за начальную, и процесс повторяется.

2) Существуют такие индексы j, что $(f'(x_0))^{(j)} \neq 0$, $j \notin J(x_0)$. В этом случае применяется минимизация по переменным $x^{(j)}$, $j \notin J(x_0)$, методом сопряженных градиентов. При этом компоненты $x^{(j)}$, $j \in J(x_0)$, остаются все время равными нулю. На каждом шаге вычисляется величина

$$\bar{\alpha}_k = \min\left\{\left(-\frac{x_k^{(j)}}{p_k^{(j)}}\right) : j \notin J(x_0), p_{k+1}^{(j)} < 0\right\}. \tag{23.18}$$

Окончание процесса такое же, как и в случае 1). При этом метод сходится за конечное число шагов.

Алгоритм метода проекции сопряженных градиентов в более сложных случаях хорошо описан в учебниках.

Литература

1. **Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.** *Практическая оптимизация.* — М.: Мир, 1985. — 509 с.
2. **Васильев Ф. П.** *Методы решения экстремальных задач.* — М.: Наука, 1981. —400 с.
3. **Васильев Ф. П.** *Численные методы решения экстремальных задач.* — М.: Наука, 1988. — 549 с.
4. **Голуб Дж., Лоун Ч. Ван.** *Матричные вычисления.* — М.: Мир, 1999. — 548 с.
5. **Поляк Б. Т.** *Введение в оптимизацию.* — М.: Наука, 1983. — 384 с.
6. **Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.** *Численные методы в экстремальных задачах.* —М.: Наука, 1975. — 319 с.
7. **Полак Э.** *Численные методы оптимизации. Единый подход.* — М.: Мир, 1974. — 376 с.
8. **Рокафеллар Р.** *Выпуклый анализ.* — М.: Мир, 1973. — 470 с.
9. **Бренстед А.** *Введение в теорию выпуклых многогранников.* — М.: Мир, 1988. —240 с.
10. **Половинкин Е. С., Балашов М. В.** *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа.* — М.: Физматлит, 2004. — 416 с.
11. **Kelley C. T.** *Iterative methods for optimization.* — Philadelphia, PA: SIAM, 1999. — 180 P.
12. **Conn A. R., Scheinberg K., Vicente L. N.** *Introduction to derivative-free optimization.* — Philadelphia, PA: SIAM, 2009. — 295 P.
13. **Химмельблау Д.** *Прикладное нелинейное программирование.* — М.: Мир, 1975. — 536 с.

Глава 3

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

§ 24. КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА ФУНКЦИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Вернемся к рассмотрению операторного уравнения:

$$Az = u, \tag{24.1}$$

где A — линейный ограниченный инъективный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U. Пусть $\bar{z}$ — точное решение операторного уравнения (24.1), $A\bar{z} = \bar{u}$ — точная правая часть, и задана приближенная правая часть u_δ, такая, что $\|\bar{u} - u_\delta\| \leqslant \delta$, $\delta > 0$. Пусть вместо оператора A нам задан линейный ограниченный оператор A_h: $Z \to U$, такой, что $\|A_h - A\| \leqslant h$, $h \geqslant 0$. Обозначим пару погрешностей δ, h, как и ранее, через $\eta = (\delta, h)$.

Пусть далее, как и в разд. 7, $\bar{z} \in D$ — точное решение операторного уравнения, $D \subset Z$ — компакт. Тогда в качестве приближенного решения может быть взят любой элемент $z_\eta \in D$, удовлетворяющий неравенству: $\|A_h z_\eta - u_\delta\| \leqslant \delta + h\|z_\eta\|$ (η-квазирешение), причем $z_\eta \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$. В настоящем разделе мы рассмотрим численные методы решения операторных уравнений на компактных множествах функций, имеющих специальный вид.

Пусть априори известно, что точное решение операторного уравнения (24.1) есть функция, монотонная на отрезке $[a, b]$ (для определенности будем считать ее невозрастающей) и ограниченная сверху и снизу константами C_1 и C_2 соответственно. Не уменьшая общности, будем считать, что $C_1 = C > 0$, $C_2 = 0$. Введем в рассмотрение множество $Z{\downarrow}_C$ невозрастающих функций $z(s)$, ограниченных константами C и 0, т. е.

$$Z{\downarrow}_C = \{z(s)\colon z(s) \geqslant z(s^*), C \geqslant z(s) \geqslant 0, \forall s, s^* \in [a, b], s < s^*\}. \tag{24.2}$$

Можно доказать, что множество $Z{\downarrow}_C$ является компактом в $L_2[a, b]$, а тем самым $z_\delta \to \bar{z}$ при $\delta \to 0$ в среднем. Однако этот результат может быть усилен, если предположить, что точное

решение непрерывно на $[a,b]$, т. е. $\bar{z}(s) \in Z\downarrow_C \cap C[a,b]$. В этом случае приближенные решения сходятся к точному равномерно на любом отрезке $[\gamma, \sigma] \subset (a, b)$. Если же точное решение кусочно-непрерывно, то имеет место равномерная сходимость на любом замкнутом отрезке, не содержащем точек разрыва точного решения и концов отрезка — точек a и b. Очевидна также выпуклость множества $Z\downarrow_C$.

Наряду с множеством $Z\downarrow_C$ будем рассматривать следующие множества: множество $\check{Z}_C$ выпуклых вверх (т. е. вогнутых) на отрезке $[a, b]$ функций, ограниченных сверху и снизу константами C и 0, и множество $\check{Z}\downarrow_C$ выпуклых вверх на отрезке $[a, b]$ монотонных (для определенности невозрастающих) функций, ограниченных сверху и снизу константами C и 0. Оба этих множества являются выпуклыми компактами в $L_2[a, b]$, но результат о сходимости η-квазирешений к точному решению может быть усилен. Для множества $\check{Z}_C$ имеет место равномерная сходимость на любом отрезке $[\gamma,\sigma] \subset (a,b)$. Для множества $\check{Z}\downarrow_C$ равномерная сходимость приближенных решений к точному имеет место на любом отрезке $[\gamma,\sigma] \subset (a,b]$.

Численные методы отыскания η-квазирешений для указанных выше множеств функций могут быть основаны на градиентных методах минимизации с ограничениями, например на методе условного градиента и проекции сопряженных градиентов. Ограничимся описанием применения первого из методов.

Пусть Z и U — гильбертовы пространства. Рассмотрим квадратичный функционал и его производную Фреше:

$$\Phi(z) = \|A_h z - u_\delta\|^2, \qquad \Phi'(z) = 2(A_h^* A_h z - A_h^* u_\delta), \tag{24.3}$$

где $A_h^*\colon U \to Z$ — оператор, сопряженный к оператору A_h. Заметим, что $\Phi'(z)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\|\Phi'(z_1) - \Phi'(z_2)\| = 2\|A_h^* A_h(z_1 - z_2)\| \leqslant 2\|A_h\|^2\|z_1 - z_2\|. \tag{24.4}$$

Для нахождения решения достаточно найти z_η, такое, что $\Phi(z_\eta) \leqslant (\delta + h\|z_\eta\|)^2$. Используем для этого метод условного градиента. Задав начальное приближение $z_0 \in D$, наряду с минимизирующей последовательностью z_k построим вспомогательную последовательность $\bar{z}_k$, элементы которой находятся как решения задачи минимизации линейного функционала:

$$(\Phi'(z_k), \bar{z}_k) = \min\{(\Phi'(z_k), z)\colon z \in D\}. \tag{24.5}$$

Зная $\bar{z}_k$, построим z_{k+1} по схеме:

$$z_{k+1} = z_k + \lambda_k(\bar{z}_k - z_k), \tag{24.6}$$

где $\lambda_k \in [0,1]$ и является решением одномерной задачи минимизации:

$$\Phi(z_{k+1}) = \Phi(z_k + \lambda_k(\bar{z}_k - z_k)) = \min_{\lambda\in[0,1]} \Phi(z_k + \lambda(\bar{z}_k - z_k)). \tag{24.7}$$

Повторим эту операцию необходимое количество раз до тех, пока не будет построено решение с требуемой точностью.

При конечно-разностной аппроксимации множества $Z{\downarrow}_C$, $\check{Z}{\downarrow}_C$, $\check{Z}_C$ переходят во множества $D{\downarrow}_C$, $\check{D}{\downarrow}_C$, $\check{D}_C$ соответственно:

$$D{\downarrow}_C = \left\{ z\colon z\in\mathbb{R}^n, \quad \begin{array}{ll} z^{(i+1)} - z^{(i)} \leqslant 0, & i=1,\ldots,n-1 \\ 0 \leqslant z^{(i)} \leqslant C, & i=1,\ldots,n \end{array} \right\}, \tag{24.8}$$

$$\check{D}_C = \left\{ z\colon z\in\mathbb{R}^n, \quad \begin{array}{ll} z^{(i-1)} - 2z^{(i)} + z^{(i+1)} \leqslant 0, & i=2,\ldots,n-1 \\ 0 \leqslant z_i \leqslant C, & i=1,\ldots,n \end{array} \right\}, \tag{24.9}$$

$$\check{D}{\downarrow}_C = \left\{ z\colon z\in\mathbb{R}^n, \quad \begin{array}{ll} z^{(i-1)} - 2z^{(i)} + z^{(i+1)} \leqslant 0, & i=2,\ldots,n-1 \\ z^{(i+1)} - z^{(i)} \leqslant 0, & i=1,\ldots,n-1 \\ 0 \leqslant z^{(i)} \leqslant C, & i=1,\ldots,n \end{array} \right\}, \tag{24.10}$$

где $z^{(i)} = z(s_i)$, $\{s_j\}_{j=1}^n$ — равномерная сетка на отрезке $[a,b]$ с шагом h_s.

Множества $D{\downarrow}_C$, $\check{D}{\downarrow}_C$, $\check{D}_C$ представляют собой замкнутые, ограниченные и выпуклые многогранники в $\mathbb{R}^n$, вершины которых $T^{(j)}$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$ можно выписать в явном виде.

Вершины $D{\downarrow}_C$:

$$\begin{aligned} &T^{(0)} = 0, \\ &T_i^{(j)} = \begin{cases} C, & i \leqslant j, \\ 0, & i > j, j = 1,\ldots,n. \end{cases} \end{aligned} \tag{24.11}$$

Вершины $\check{D}{\downarrow}_C$:

$$\begin{aligned} &T^{(0)} = 0, \\ &T_i^{(j)} = \begin{cases} C, & i \leqslant j, \\ C\,\dfrac{n-i}{n-j}, & i > j, j = 1,\ldots,n. \end{cases} \end{aligned} \tag{24.12}$$

Вершины $\breve{D}_C$:

$$T^{(0,0)} = 0,$$
$$T_k^{(i,j)} = \begin{cases} 2C\,\dfrac{k-1}{j-1}, & k < j, \\ C, & i \leqslant k \leqslant j, \\ C\,\dfrac{n-k}{n-j}, & k > j, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n. \end{cases} \tag{24.13}$$

Поскольку множество $\breve{D}_C$ содержит слишком много вершин, то удобнее рассматривать множество $\breve{D}'_{2C}$, которое содержит в себе $\breve{D}_C$. Это множество имеет следующие вершины:

$$T^{(0)} = 0,$$
$$T_i^{(j)} = \begin{cases} 2C\,\dfrac{i-1}{j-1}, & i < j, \\ 2C, & i = j, \\ 2C\,\dfrac{n-i}{n-j}, & i > j, j = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{24.14}$$

Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию операторного уравнения и функционала невязки на примере уравнения Фредгольма I рода:

$$Az = \int_a^b K(x,s)z(s)\,\mathrm{d}s = u(x), \tag{24.15}$$

где ядро интегрального оператора $K(x,s)$ не вырождено и является действительной, непрерывной функцией в области $\Pi = \{(x,s) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant s \leqslant d\}$. Пусть вместо точной правой части $A\bar{z} = \bar{u}$ известно u_δ:

$$\|\bar{u} - u_\delta\|_{L_2[c,d]} \leqslant \delta \tag{24.16}$$

и вместо $K(x,s)$ известно $K_h(x,s)$:

$$\|K(x,s) - K_h(x,s)\|_{L_2(\Pi)} \leqslant h \tag{24.17}$$

соответственно. Теперь выберем для простоты равномерные сетки с шагами h_x и h_s соответственно — на отрезке $[a,b]$ сетку $\{s_j\}_{j=1}^n$; на отрезке $[c,d]$ сетку $\{x_i\}_{i=1}^m$.

Тогда функционал невязки

$$\Phi(z) = \|A_h z - u_\delta\|^2_{L_2[a,b]} = \int_c^d \left[\int_a^b K_h(x,s)z(s)\,\mathrm{d}s - u_\delta(x)\right]^2 \mathrm{d}x \tag{24.18}$$

аппроксимируется квадратичным функционалом

$$\hat{\Phi}(\hat{z}) = \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z^{(i)} h_s - u_i \right]^2 h_x, \tag{24.19}$$

где $a_{ij} = K_h(x_i, s_j)$, $\hat{z} = \{z^{(j)}\}_{j=1}^{n}$.

Таким образом, мы осуществляем конечно-разностную аппроксимацию интегрального оператора Фредгольма. Затем используем выписанные ранее выражения для вершин многогранников и строим минимизирующую последовательность для функционала невязки на соответствующем множестве.

§ 25. ИСТОКОПРЕДСТАВИМОСТЬ РЕШЕНИЯ

Обратимся снова к рассмотрению операторного уравнения:

$$Az = u, \tag{25.1}$$

где A — линейный ограниченный инъективный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U. Пусть $\bar{z}$ — точное решение операторного уравнения (25.1), $A\bar{z} = \bar{u}$ — точная правая часть, и задана приближенная правая часть u_δ, такая, что $\|\bar{u} - u_\delta\| \leqslant \delta$, $\delta > 0$. Пусть имеется следующая априорная информация: известно, что точное решение $\bar{z}$ представимо в виде $B\bar{v} = \bar{z}$, $\bar{v} \in V$; $B\colon V \to Z$; B — инъективный, вполне непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства V в пространство Z. Такое представление решения называется **истокопредставимостью** с помощью вполне непрерывного оператора.

Рассмотрим теперь **метод расширяющихся компактов**, идея и обоснование которого принадлежат В. К. Иванову и И. Н. Домбровской. Сначала номер итерации положим $n = 1$ и определим замкнутый шар в пространстве V:

$$\bar{S}_n(0) = \{v\colon \|v\| \leqslant n\}. \tag{25.2}$$

Его образ при действии оператора $BZ_n = B\bar{S}_n(0)$ является компактом, поскольку B — вполне непрерывный оператор, а V — гильбертово пространство. Далее найдем

$$\min\left\{\|Az - u_\delta\|\colon z \in B(\bar{S}_n(0))\right\}. \tag{25.3}$$

Существование минимума гарантируется постановкой задачи — компактностью Z_n и непрерывностью A. Если

$$\min\left\{\|Az - u_\delta\|\colon z \in B(\bar{S}_n(0))\right\} \leqslant \delta, \tag{25.4}$$

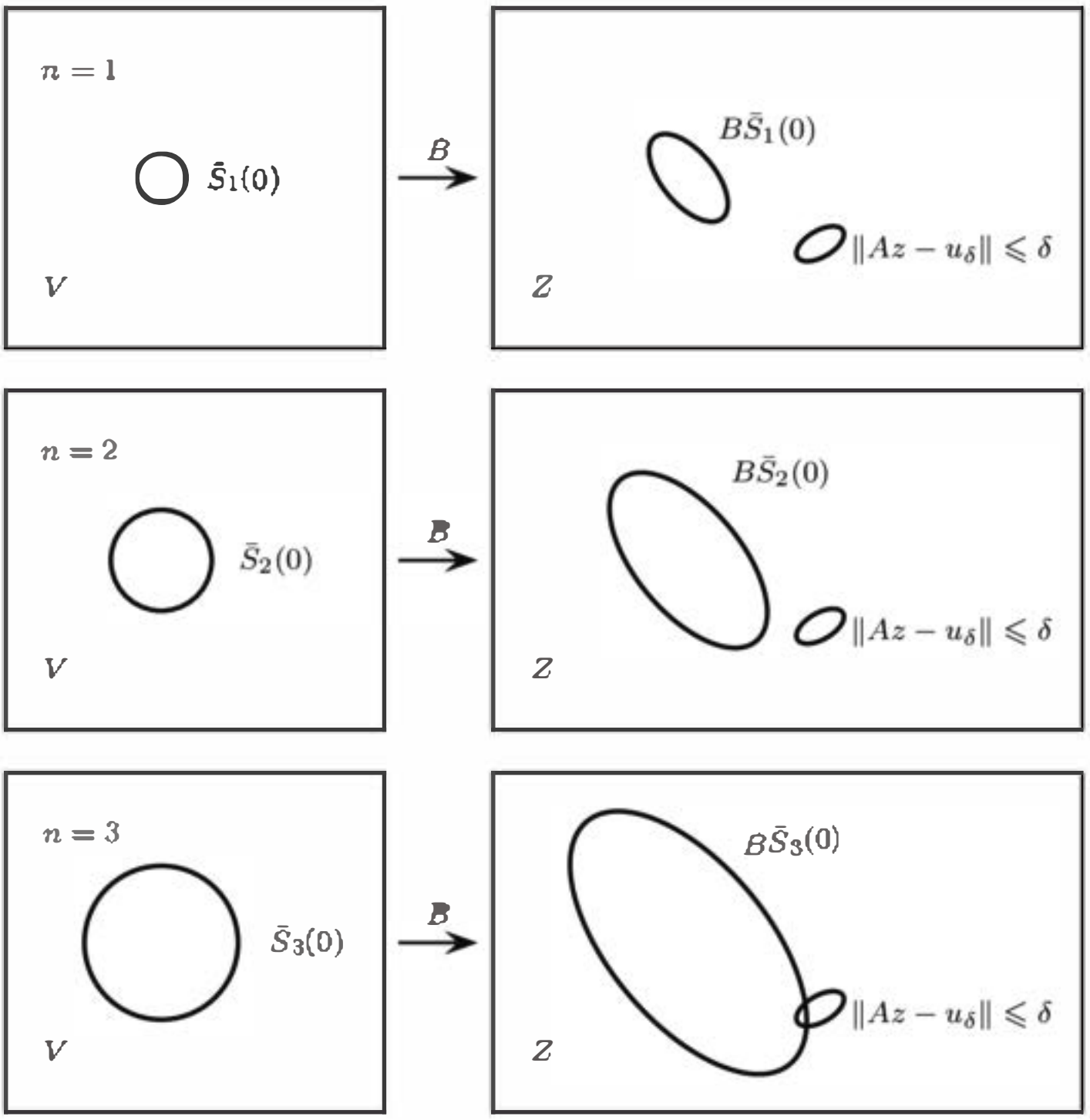


Рис. 3.1. Пример работы метода расширяющихся компактов

то процесс прекращается, полагаем $n(\delta) = n$, а в качестве приближенного решения выбираем любой элемент $z \in Z_{n(\delta)}$, где

$$Z_{n(\delta)} \equiv \left\{ z \in B(\bar{S}_{n(\delta)}(0)) \colon \|Az - u_\delta\| \leqslant \delta \right\}. \tag{25.5}$$

Если же

$$\min \left\{ \|Az - u_\delta\| \colon z \in B(\bar{S}_n(0)) \right\} > \delta, \tag{25.6}$$

то нужно расширять компакт, для чего n увеличим на единицу и повторим процесс, см. рис. 3.1.

Теорема 25.1. *Описанный выше процесс сходится: $n(\delta) < +\infty$. Существует $\delta_0 > 0$ (которое, вообще говоря, зависит от $\bar{z}$), такое, что $n(\delta) = n(\delta_0)$ $\forall \delta \in (0, \delta_0]$. Приближенное решение $z \in Z_{n(\delta)}$ сходится к точному решению $\bar{z}$ при $\delta \to 0$.*

Из сказанного выше понятно название метода. Оказывается, что этот метод допускает возможность построения так называемой **апостериорной оценки погрешности**, т. е. существует функция $\chi(u_\delta, \delta)$, такая, что $\chi(u_\delta, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, и $\chi(u_\delta, \delta) \geqslant \|z_{n(\delta)} - \bar{z}\|$ по крайней мере при достаточно малых $\delta > 0$. В качестве апостериорной оценки погрешности можно взять

$$\chi(u_\delta, \delta) = \max\{\|z_{n(\delta)} - z\| \colon z \in Z_{n(\delta)}, \|Az - u_\delta\| \leqslant \delta\}. \qquad (25.7)$$

Апостериорная оценка погрешности не является оценкой погрешности в полном смысле слова: как было сказано на с. 37, построение оценки погрешности решений некорректно поставленных задач невозможно. Однако при достаточно малых $\delta > 0$ (а именно $\forall \delta \in (0, \delta_0]$) апостериорная оценка погрешности является оценкой погрешности решения некорректной задачи при наличии априорной информации об истокопредставимости.

Данный подход легко обобщается на случаи, когда операторы A и B заданы с погрешностями, а также на нелинейные некорректные задачи с условием истокопредставимости.

Разработаны численные методы решения линейных некорректных задач при условии истокопредставимости, в том числе и построения апостериорной оценки погрешности. Использование последовательности натуральных числе в качестве радиусов шаров в пространстве V не обязательно. Может быть взята любая монотонно возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел.

§ 26. РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ АЛГОРИТМ А. Н. ТИХОНОВА

А. Н. Тихонов впервые предложил вариационный подход к построению регуляризирующих алгоритмов. Ниже мы опишем регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова, основанный на минимизации сглаживающего функционала (или функционала А. Н. Тихонова).

Пусть дано операторное уравнение

$$Az = u, \qquad (26.1)$$

где A — линейный ограниченный инъективный оператор, действующий из гильбертова пространства Z в гильбертово пространство U. Предполагается, что точное решение $\bar{z} \in D \subset Z$,

где D — замкнутое выпуклое множество, такое, что $0 \in D$. Множество D определяется известными априорными ограничениями; если ограничений нет, то $D = Z$. В этом параграфе ограничения могут быть не столь сильными, как в предыдущих параграфах, и применение метода квазирешений или метода расширяющихся компактов, вообще говоря, невозможно. Тем не менее рекомендуется при решении практических задач включать все известные ограничения в постановку обратной задачи. К таким ограничениям относятся типичное для очень многих физических задач условие неотрицательности, ограниченности сверху и снизу заданными константами и многие другие.

Пусть точное значение правой части уравнения (26.1) $\bar{u} = A\bar{z}$ неизвестно, а заданы погрешность $\delta > 0$ и приближение u_δ, такие, что

$$\|\bar{u} - u_\delta\| \leqslant \delta. \tag{26.2}$$

Пусть оператор A также известен с ошибкой, т. е. заданы погрешность $h \geqslant 0$ и линейный ограниченный оператор $A_h\colon Z \to U$,

$$\|A_h - A\| \leqslant h. \tag{26.3}$$

Для краткости пара погрешностей обозначается $\eta = (\delta, h)$. Задача построения регуляризирующего алгоритма состоит в следующем: требуется по набору данных $\{u_\delta, A_h, \eta\}$ построить приближенное решение $z_\eta \in D$, такое, что $z_\eta \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$, или $z_\eta = R_\eta(u_\delta, A_h) \in D$, $z_\eta \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$, где $R_\eta(u_\delta, A_h)$ — регуляризирующий алгоритм.

А. Н. Тихонов предложил следующий подход к построению регуляризирующих алгоритмов. Он ввел **сглаживающий функционал** (который в настоящее время также называют **функционалом А. Н. Тихонова**):

$$M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|^2 + \alpha\|z\|^2, \tag{26.4}$$

$\alpha > 0$ — **параметр регуляризации**, и поставил экстремальную задачу:

$$\text{найти} \quad \min\{M^\alpha[z]\colon z \in D\}.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 26.1. *При условиях, сформулированных в начале параграфа, существует и притом единственный элемент* $z_\eta^\alpha \in D$: $z_\eta^\alpha = \operatorname{argmin}\{M^\alpha[z]\colon z \in D\}$.

□ Невязка $\|A_h z - u_\delta\|^2$ — выпуклый функционал; $\alpha\|z\|^2$ — сильно выпуклый функционал, а сумма выпуклого и сильно вы-

пуклого функционалов является сильно выпуклым функционалом. Таким образом, функционал $M^\alpha[z]$ является сильно выпуклым непрерывным функционалом, а следовательно, достигает минимума на выпуклом замкнутом множестве D в единственной точке. ■

Численные методы отыскания элемента, на котором функционал А. Н. Тихонова достигает минимального значения при фиксированном значении параметра регуляризации, базируются в основном на двух следующих подходах:

- Если ограничений нет ($D = Z$), то необходимым и достаточным условием минимума является обращение в нуль градиента. Таким образом, получается уравнение Эйлера для функционала А. Н. Тихонова: $(M^\alpha[z])' = 0$. После перехода к конечно-разностной аппроксимации полученная СЛАУ решается на компьютере. Для ряда задач специального вида возможно применение различных преобразований, упрощающих решение получившейся СЛАУ. Так, для уравнений типа свертки (задача, часто встречающаяся при обработке изображений), в том числе и многомерных, успешно применяется быстрое дискретное преобразование Фурье.
- При наличии ограничений и при их отсутствии могут применяться прямые методы минимизации функционала А. Н. Тихонова (метод сопряженных градиентов с ограничениями или без, Ньютона и др.).

Если ограничения отсутствуют, то задача отыскания экстремали функционала А. Н. Тихонова сводится к решению уравнения

$$A_h^* A_h z + \alpha z = A_h^* u_\delta. \tag{26.5}$$

В случае, когда самосопряженный оператор A положительно определен, а пространства Z и U совпадают, регуляризированное приближение может находиться из уравнения

$$Az + \alpha z = u_\delta \tag{26.6}$$

(**метод М. М. Лаврентьева**).

А. Н. Тихонов предложил искать приближенное решение операторного уравнения как экстремаль сглаживающего функционала, выбирая параметр регуляризации так, чтобы приближенное решение сходилось к точному при стремлении погрешностей к нулю. Параметр регуляризации при решении

некорректно поставленных задач должен явно зависеть от погрешностей. В противном случае в соответствии с теоремами А. Б. Бакушинского и А. Н. Тихонова могут решаться только корректные задачи. Как показывают простые примеры, известные методы выбора параметра регуляризации **L-кривой и обобщенной перекрестной проверки** (GCV, generalized cross-validation), в которых параметр регуляризации не зависит явно от погрешностей задания правой части и оператора, не только не могут быть применены для решения некорректно поставленных задач, но и дают неверные результаты при решении простейших корректных задач.

Методы выбора параметра регуляризации условно подразделяются на **априорные и апостериорные**. Первый априорный способ выбора был предложен А. Н. Тихоновым. Некоторое обобщение приведено ниже. Пусть задана скорость убывания параметра регуляризации:

1) $\alpha(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$;

2) $\dfrac{(\delta+h)^2}{\alpha(\eta)} \to 0$ при $\eta \to 0$,

т. е. $\alpha(\eta) \to 0$ медленнее, чем $(\delta+h)^2$. В этом случае можно доказать, что $z_\eta^{\alpha(\eta)} \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$. Если оператор A не является инъективным, то имеет место сходимость к решению с минимальной нормой (нормальному решению).

Практическое применение априорных способов выбора параметра регуляризации вызывает большие затруднения, поскольку при решении прикладных задач необходимо найти приближенное решение при фиксированном уровне погрешностей. В качестве примера апостериорного способа ниже мы опишем **обобщенный принцип невязки** (ОПН), предложенный и обоснованный А. В. Гончарским, А. С. Леоновым, А. Г. Яголой. ОПН является обобщением **принципа невязки** В. А. Морозова, разработанным для случая точного заданного оператора ($h = 0$).

§ 27. ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП НЕВЯЗКИ

В этом параграфе мы рассмотрим апостериорный способ выбора параметра регуляризации, который называется **обобщенным принципом невязки** (ОПН). Дадим сначала следующее определение.

Мера несовместности операторного уравнения с приближенными данными на множестве $D \subset Z$ определяется как

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf\{\|A_h z - u_\delta\| : z \in D\}. \tag{27.1}$$

Лемма 27.1. *Если* $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$, $\bar{u} = A\bar{z}$, $\bar{z} \in D$, $\|A - A_h\| \leqslant h$, *то* $\mu_\eta(u_\delta, A_h) \to 0$ *при* $\eta \to 0$.

□ $\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf\{\|A_h z - u_\delta\| : z \in D\} \leqslant \|A_h \bar{z} - u_\delta\| \leqslant \delta + h\|\bar{z}\| \to 0$ при $\eta \to 0$, что и требовалось доказать. ■

В дальнейшем будем полагать, что мера несовместности вычисляется с погрешностью $\kappa \geqslant 0$, т. е. вместо $\mu_\eta(u_\delta, A_h)$ известна ее оценка $\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)$, такая, что

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) \leqslant \mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) \leqslant \mu_\eta(u_\delta, A_h) + \kappa. \tag{27.2}$$

Погрешность определения меры несовместности будем считать согласованной с погрешностью входных данных η таким образом, что $\kappa = \kappa(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$.

Обобщенной невязкой называется функция параметра регуляризации $\alpha > 0$:

$$\rho_\eta^\kappa(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h\|z_\eta^\alpha\|)^2 - (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2. \tag{27.3}$$

Свойства этой функции мы изучим ниже. Сформулируем так называемый **обобщенный принцип невязки** (ОПН) для выбора параметра регуляризации.

- Пусть условие

$$\|u_\delta\|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2 \tag{27.4}$$

  не выполнено: тогда в качестве приближенного решения операторного уравнения выберем $z_\eta = 0$.
- Если же неравенство (27.4) выполнено, то можно доказать, что обобщенная невязка имеет положительный корень $\alpha^* > 0$, т. е.

$$\|A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta\|^2 = (\delta + h\|z_\eta^{\alpha^*}\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A))^2. \tag{27.5}$$

  В этом случае приближенное решение операторного уравнения выбирается как $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$, причем оно определяется единственным образом.

Имеет место сходимость $z_\eta \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$. Если оператор не является инъективным, то имеет место сходимость к нор-

мальному решению. Можно доказать, что обобщенная невязка $\rho_\eta^\kappa(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

1) $\rho_\eta^\kappa(\alpha)$ непрерывна и монотонно не убывает при $\alpha > 0$;
2) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \rho_\eta^\kappa(\alpha) = \|u_\delta\|^2 - \delta^2 - \left(\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)\right)^2$;
3) $\overline{\lim\limits_{\alpha\to 0+0}} \rho_\eta^\kappa(\alpha) \leqslant -\delta^2$.

Из этих свойств следует существование положительного корня обобщенной невязки в случае, если $\|u_\delta\|^2 > \delta^2 + \left(\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)\right)^2$.

Численные методы решения некорректных задач с помощью ОПН основаны:

- на методах отыскания экстремали функционала А. Н. Тихонова z_η^α при фиксированных значениях параметра регуляризации — решении уравнения Эйлера (26.5) или методах минимизации функционала А. Н. Тихонова;
- на отыскании корня обобщенной невязки — непрерывной монотонно неубывающей функции одной переменной, например, с помощью метода хорд.

Разумеется, эти методы имеют много различных модификаций.

Ранее уже говорилось, что существует много различных методов регуляризации. Существует также очень много способов выбора параметра регуляризации. Чем характеризуется ОПН и почему этот метод можно рекомендовать для решения практических задач?

Рассмотрим следующую экстремальную задачу с ограничениями: **обобщенный метод невязки** (ОМН):

$$\text{найти} \quad \inf\left\{\|z\| : z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leqslant (\delta + h\|z\|)^2 + \left(\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)\right)^2\right\}. \tag{27.6}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 27.1. *Пусть A, A_h — линейные ограниченные операторы из Z в U; D — замкнутое выпуклое множество, содержащее точку 0, $D \subset Z$, $\|A - A_h\| \leqslant h$, $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$, $\bar{u} = A\bar{z}$, $\bar{z} \in D$. Тогда обобщенный принцип невязки и обобщенный метод невязки эквивалентны, т. е. решение операторного уравнения, выбранное в соответствии с ОПН, и решение экстремальной задачи ОМН совпадают.*

Итак, решение экстремальной задачи ОМН с невыпуклыми ограничениями можно свести к задаче выпуклого программи-

рования — минимизации функционала $M^\alpha[z]$ с выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки.

Если рассматривать множество

$$\{z\colon z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leqslant (\delta + h\|z\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2\} \qquad (27.7)$$

как множество приближенных решений операторного уравнения с приближенными данными (точное решение $\bar{z}$ является элементом этого множества в силу условий теоремы), то в соответствии с ОПН выбирается приближенное решение с минимальной нормой. В частности, если в качестве пространства Z рассматривается пространство $W_2^1[a,b]$ (норма в этом пространстве определяется

$$\|z\| = \sqrt{\int_a^b [z^2(s) + (z'(s))^2]\, \mathrm{d}s}, \qquad (27.8)$$

в определение нормы входит производная), то говорят, что выбирается наиболее гладкое решение.

В случая наличия априорной информации о решении в виде заданного элемента z_0 ОПН легко адаптировать на случай отыскания приближенного решения, ближайшего (по норме) к заданному элементу z_0. Для этого достаточно заменить искомое решение на $z - z_0$, преобразовав соответствующим образом правую часть уравнения.

Существуют многочисленные модификации ОПН. Так, можно отказаться от вычисления меры несовместности и рассматривать обобщенную невязку в виде:

$$\rho_\eta^\kappa(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h\|z_\eta^\alpha\|)^2. \qquad (27.9)$$

В этом случае, однако, не гарантируется существование положительного корня обобщенной невязки. В случае его отсутствия приближенное решение находится как $z_\eta = \lim\limits_{\alpha\to 0+0} z_\eta^\alpha$. При этом ОПН и соответствующий ОМН не эквивалентны.

ОПН не может быть применен непосредственно к решению несовместных задач (отыскания их псевдорешений или нормальных псевдорешений). Тем не менее его можно модифицировать и для этого случая. Этот вопрос мы рассмотрим ниже.

§ 28. НЕСОВМЕСТНЫЕ НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть дано операторное уравнение:

$$Az = u, \tag{28.1}$$

где $z \in D \subset Z$ — выпуклое замкнутое множество, $u \in U$, Z и U — гильбертовы пространства, A — линейный ограниченный оператор. Решение операторного уравнения при $u = \bar{u}$ может не существовать, однако существует $\bar{z} \in D$, на котором достигается минимум невязки:

$$\bar{\mu} = \inf\{\|Az - \bar{u}\|: z \in D\} \geqslant 0. \tag{28.2}$$

Число $\bar{\mu}$ называется мерой несовместности операторного уравнения с точными данными $\bar{u}$ и A. Если $\bar{\mu} > 0$, то

$$\bar{z} = \arg\min\{\|Az - \bar{u}\|: z \in D\} \tag{28.3}$$

(или $\|A\bar{z} - \bar{u}\| = \bar{\mu}$, $\bar{z} \in D$) называют **псевдорешением**. Если

$$\bar{Z} = \{z: z \in D, \|Az - \bar{u}\| = \bar{\mu}\} \tag{28.4}$$

состоит не из одного элемента, то $\bar{Z}$ выпукло и замкнуто, а следовательно, существует элемент $\bar{z} \in \bar{Z}$:

$$\bar{z} = \arg\min\{\|z\|: z \in \bar{Z}\}, \tag{28.5}$$

называемый **нормальным псевдорешением**. Если $\bar{\mu} = 0$, то псевдорешение будет решением операторного уравнения, а нормальное псевдорешение будет нормальным решением.

Будем рассматривать задачу построения приближений к нормальному псевдорешению, вообще говоря, несовместного операторного уравнения по приближенным данным: $\{A_h, u_\delta, \eta\}$, где $\eta = (\delta, h)$, $\delta > 0$, $h \geqslant 0$, $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$, $\|A_h - A\| \leqslant h$ ($\bar{\mu} = 0$ будем рассматривать как частный случай).

Рассмотрим следующую оценку сверху для меры несовместности приближенного уравнения:

$$\tilde{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) = \inf\{\delta + h\|z\| + \|A_h z - u_\delta\|: z \in D\}. \tag{28.6}$$

Лемма 28.1. *При сформулированных выше условиях* $\tilde{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) \geqslant \bar{\mu}$, *причем*

$$\lim_{\eta \to 0} \tilde{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) = \bar{\mu}. \tag{28.7}$$

□ $\bar{\mu} = \inf\{\|Az - \bar{u}\|: z \in D\} \leqslant \|(A - A_h)z\| + \|\bar{u} - u_\delta\| + \|A_h z - u_\delta\| \leqslant$ $\leqslant h\|z\| + \delta + \|A_h z - u_\delta\|$. Следовательно, $\bar{\mu} \leqslant$ $\leqslant \inf\{\delta + h\|z\| + \|A_h z - u_\delta\|: z \in D\} = \tilde{\mu}_\eta(u_\delta, A_h)$. Поскольку

$\bar{z} \in D$: $\bar{\mu} = \|A\bar{z} - \bar{u}\|$, то $\bar{\mu} \leqslant \tilde{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) \leqslant \delta + h\|\bar{z}\| + \|A_h\bar{z} - u_\delta\| \leqslant$ $\leqslant h\|\bar{z}\| + \delta + \|(A - A_h)\bar{z}\| + \|u_\delta - \bar{u}\| + \|A\bar{z} - \bar{u}\| \leqslant 2(\delta + h\|\bar{z}\|) + \bar{\mu} \to \bar{\mu}$ при $\eta \to 0$.

Обозначим экстремаль функционала А. Н. Тихонова $M^\alpha[z]$ через z_η^α и введем обобщенную невязку:

$$\tilde{\rho}_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h\|z_\eta^\alpha\| + \tilde{\mu}_\eta(u_\delta, A_h))^2. \qquad (28.8)$$

Если $\tilde{\mu}_\eta(u_\delta, A_h)$ вычисляется с погрешностью $\kappa \geqslant 0$, то $\tilde{\rho}_\eta^\kappa(\alpha) =$ $= \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h\|z_\eta^\alpha\| + \tilde{\mu}_\eta^k(u_\delta, A_h))^2$, где $\tilde{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) \leqslant$ $\leqslant \tilde{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) \leqslant \tilde{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) + \kappa$. ■

В соответствии с доказанной выше леммой $\tilde{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) \geqslant \bar{\mu}$, так как $\kappa \geqslant 0$, и $\tilde{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) \to \bar{\mu}$ при $\eta \to 0$, если κ согласовано с η так, что $\kappa = \kappa(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$.

Обобщенная невязка обладает следующими свойствами:

1) $\tilde{\rho}_\eta^\kappa(\alpha)$ непрерывна и монотонно не убывает при $\alpha > 0$;
2) $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \tilde{\rho}_\eta^\kappa(\alpha) = \|u_\delta\|^2 - (\delta + \tilde{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$;
3) $\overline{\lim\limits_{\alpha \to 0+0}} \tilde{\rho}_\eta^\kappa(\alpha) \leqslant (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2 - (\delta + \tilde{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2 < 0$;
4) пусть выполнено условие: $\|u_\delta\| > (\delta + \tilde{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))$, тогда $\exists \alpha^* > 0$: $\tilde{\rho}_\eta^\kappa(\alpha^*) = 0$, что эквивалентно уравнению

$$\|A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta\| = (\delta + h\|z_\eta^{\alpha^*}\| + \tilde{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)), \qquad (28.9)$$

причем элемент $z_\eta^{\alpha^*}$ не равен 0 и определяется единственным образом.

Модификация обобщенного принципа невязки выглядит следующим образом: по заданным $\{A_h, u_\delta, \eta\}$ находим

$$\tilde{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) = \inf\{\delta + h\|z\| + \|A_h z - u_\delta\|: z \in D\} + \kappa = \tilde{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) + \kappa, \qquad (28.10)$$

$\kappa \geqslant 0$, $\kappa = \kappa(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$. Если условие $\|u_\delta\| > (\delta + \tilde{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))$ не выполняется, то полагаем $z_\eta = 0$, в противном случае находим α^* и полагаем $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$.

Теорема 28.1. $\lim\limits_{\eta \to 0} z_\eta = \bar{z}$, *где* $\bar{z}$ — *нормальное псевдорешение уравнения* (28.1), *т. е. построенный алгоритм является регуляризирующим алгоритмом отыскания нормального псевдорешения* (28.1).

Доказательство мы опустим.

Замечание 28.1. Модификация обобщенного принципа невязки является регуляризирующим алгоритмом независимо от совместности исходного уравнения.

Замечание 28.2. Можно показать, что модификация обобщенного принципа невязки эквивалентна обобщенному методу невязки, который в данном случае состоит в решении экстремальной задачи с ограничениями:

$$\text{найти} \quad \inf\left\{\|z\| : z \in D, \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \delta + h\|z\| + \tilde{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)\right\}. \tag{28.11}$$

§ 29. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА I РОДА

При решении некорректных задач обычно необходимо аппроксимировать исходную, чаще всего бесконечномерную задачу некоторой конечномерной задачей, для которой и будут разрабатываться вычислительные алгоритмы и компьютерные программы.

Мы рассмотрим вопрос о переходе к конечно-разностной аппроксимации на примере одномерного интегрального уравнения Фредгольма I рода на отрезке. Мы не будем останавливаться на том, какие условия должны быть наложены, чтобы гарантировать сходимость конечномерных аппроксимаций регуляризированных решений к самому регуляризированному решению. В принципе, переход к конечно-разностной аппроксимации может быть рассмотрен как внесение дополнительной погрешности в оператор. В дальнейшем будем считать, что размерность конечномерной задачи выбрана настолько большой, что погрешность аппроксимации оператора A значительно меньше погрешностей δ и h.

Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию интегрального уравнения Фредгольма I рода, функционала невязки и функционала А. Н. Тихонова. Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма I рода:

$$Az = \int_a^b K(x,s)z(s)\,\mathrm{d}s = u(x), \tag{29.1}$$

где ядро интегрального оператора $K(x,s)$ не вырождено и является действительной, непрерывной функцией в области $\Pi = \{(x,s)\colon a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant s \leqslant d\}$. Будем предполагать, что

$U = L_2[c,d]$ и $Z = W_2^1[a,b]$. В этом случае при правильном выборе параметра регуляризации гарантируется сходимость регуляризированных приближений к точному решению по норме $W_2^1[a,b]$, а из сходимости по норме $W_2^1[a,b]$ следует равномерная сходимость, т. е. сходимость по норме $C[a,b]$. Пусть вместо точной правой части $A\bar{z} = \bar{u}$ известно u_δ: $\|\bar{u} - u_\delta\|_{L_2[c,d]} \leqslant \delta$, и вместо $K(x,s)$ известно $K_h(x,s)$: $\|K(x,s) - K_h(x,s)\|_{L_2(\Pi)} \leqslant h$ соответственно. Теперь выберем для простоты равномерные сетки с шагами h_x и h_s соответственно — на отрезке $[a,b]$ сетку $\{s_j\}_{j=1}^n$, на отрезке $[c,d]$ сетку $\{x_i\}_{i=1}^m$.

Тогда функционал невязки

$$\Phi(z) = \|A_h z - u_\delta\|^2_{L_2[a,b]} = \int_c^d \left[\int_a^b K_h(x,s)z(s)\,\mathrm{d}s - u_\delta(x)\right]^2 \mathrm{d}x \tag{29.2}$$

аппроксимируется квадратичным функционалом

$$\hat{\Phi}(\hat{z}) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j h_s - u_i\right]^2 h_x, \tag{29.3}$$

где $a_{ij} = K_h(x_i, s_j)$, $z_j = z(s_j)$, $u_i = u(x_i)$. Некоторые методы минимизации функционала невязки при наличии априорной информации о принадлежности точного решения компактному множеству были рассмотрены в предыдущих параграфах.

Конечно-разностная аппроксимация функционала А. Н. Тихонова

$$M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|^2_{L_2[a,b]} + \alpha\|z\|^2_{W_2^1[a,b]} =$$
$$= \int_c^d \left[\int_a^b K_h(x,s)z(s)\,\mathrm{d}s - u_\delta(x)\right]^2 \mathrm{d}x + \alpha\int_a^b \left[z^2(s) + (z'(s))^2\right]\mathrm{d}s \tag{29.4}$$

может быть записана в виде:

$$\hat{M}^\alpha[\hat{z}] = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} z_i h_s - u_i\right]^2 h_x + \alpha\sum_{j=1}^n z_j^2 h_s + \alpha\sum_{j=2}^n (z_j - z_{j-1})^2/h_s. \tag{29.5}$$

Легко видеть, что этот функционал является квадратичным в пространстве $\mathbb{R}^n$. В случае, если имеются априорные огра-

ничения (задано множество $D \subset Z$), задача минимизации конечно-разностной аппроксимации функционала А. Н. Тихонова может быть обеспечена методами минимизации квадратичных функционалов с ограничениями. Например, если известно, что решение интегрального уравнения — неотрицательная функция, может быть применен метод проекции сопряженных градиентов для минимизации квадратичного функционала с простыми ограничениями.

Если ограничений нет, то легко посчитать градиент функционала $\hat{M}^{\alpha}[\hat{z}]$ и приравнять его нулю. Получится система линейных алгебраических уравнений $(\hat{M}^{\alpha}[\hat{z}])' = 0$. Для ее решения применяются известные методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений. Для повышения скорости счета может быть использован тот факт, что матрица полученной системы симметрическая и положительно определенная. В этом случае может быть применен метод решения СЛАУ, который называется **методом квадратного корня** (или **методом Холесского**), основанным на разложении симметрической положительно определенной матрицы в произведение трех матриц: нижней треугольной, диагональной и верхней треугольной.

§ 30. РЯД, ИНТЕГРАЛ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Пусть имеется некоторое евклидово пространство E. Напомним, что два элемента f и g евклидова пространства E называются **ортогональными**, если их скалярное произведение $(f, g) = 0$. Пусть в конечно- или бесконечномерном евклидовом пространстве E имеется некоторая последовательность элементов $\psi_1, \psi_2, \ldots$. Последовательность $\{\psi_n\}$ называется **ортонормированной системой**, если входящие в эту систему элементы попарно ортогональны и имеют норму, равную единице, т. е. $(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{30.1}$$

Пример 30.1 (***Ортонормированная система***).

1) Тригонометрическая система

$$\frac{1}{2\pi}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{30.2}$$

в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

2) Функции Хаара на отрезке $[0, 1]$

$$\chi_n^{(k)} = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & x \in \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n}, & x \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right], \\ 0, & \text{в остальных точках}, \end{cases} \tag{30.3}$$

где $n = 0, 1, \ldots$, $k = 1, 2, 4, \ldots, 2^n$.

Рядом Фурье элемента $f \in E$ по ортонормированной системе $\{\psi_n\}$ называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n, \tag{30.4}$$

Жан Батист Жозеф Фурье
(Jean Baptiste Joseph Fourier),
1768–1830

где **коэффициенты Фурье** f_n определяется по формуле

$$f_n = (f, \psi_n). \tag{30.5}$$

Теорема 30.1. *Для любого элемента f евклидова пространства E и любой ортонормированной системы $\{\psi_n\}$ справедливо* **неравенство Бесселя**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{30.6}$$

Фридрих Вильгельм Бессель
(Friedrich Wilhelm Bessel),
1784–1846

□ Рассмотрим конечную сумму вида $\sum_{n=1}^{N} c_n \psi_n$. Учитывая ортонормированность функций $\{\psi_n\}$, получаем, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} c_n \psi_n - f \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} c_n^2 (\psi_n, \psi_n) - 2 \sum_{n=1}^{N} c_n (f, \psi_n) + (f, f) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} c_n^2 - 2 \sum_{n=1}^{N} c_n f_n + \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - f_n)^2 - \sum_{n=1}^{N} f_n^2 + \|f\|^2. \tag{30.7}$$

Поэтому наименьшее отклонение от элемента f имеет сумма с $c_n = f_n$. Подставляя данные коэффициенты в последнее неравенство и учитывая, что норма — неотрицательное число, получаем

$$-\sum_{n=1}^{N} f_n^2 + \|f\|^2 \geqslant 0, \tag{30.8}$$

а переходя к пределу $N \to \infty$, находим искомое неравенство. ■

Ортонормированная система $\{\psi_n\}$ называется **полной**, если для любого элемента $f \in E$ и любого положительного числа ε существует конечный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n = f. \tag{30.9}$$

Для того чтобы ортонормированная система $\{\psi_n\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось **равенство Парсеваля**

$$\sum_{n=1}^{N} f_n^2 = \|f\|^2. \tag{30.10}$$

Марк-Антуан Парсеваль
(Marc-Antoine Parseval),
1755–1836

Пусть $f(x)$ — функция, заданная на $\mathbb{R}$ и кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке $[-T, T]$. Тогда на каждом таком отрезке она может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{\pi n x}{T} \right) \tag{30.11}$$

(в точках разрыва вместо $f(x)$ подставляется $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$), где

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \frac{\pi n \xi}{T} \, d\xi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{30.12}$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-l}^{l} f(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{T} \, d\xi, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{30.13}$$

При предельном переходе $T \to \infty$ получаем **интеграл Фурье**

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) \, d\xi. \tag{30.14}$$

Полученное интегральное представление функции $f(x)$ приводит к понятию преобразования Фурье.

Пусть задана функция $f(x)$, тогда функцию

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, dx \tag{30.15}$$

называют **преобразованием Фурье** функции $f(x)$. Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega. \tag{30.16}$$

Очень часто преобразование Фурье функции f обозначают так же, как $\tilde{f}$ или $\mathcal{F}(f)$.

Отметим некоторые свойства преобразования Фурье:

1) Линейность, т. е. для любых чисел α, β и функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g). \tag{30.17}$$

2) Если $f(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, то выполняется **равенство Парсеваля**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{30.18}$$

3) Дифференцирование. Если $f(x), f'(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$\mathcal{F}(f') = i\omega \mathcal{F}(f). \tag{30.19}$$

4) Сдвиг

$$\mathcal{F}(f(x - x_0)) = e^{-i\omega x_0} \mathcal{F}(f(x)) = e^{-i\omega x_0} \mathcal{F}(f)(\omega). \tag{30.20}$$

5) Растяжение

$$\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(f)(\omega/a). \tag{30.21}$$

6) **Свертка** двух функций $f(x)$, $g(x) \in L_1(\mathbb{R})$ определяется по формуле

$$(f * g)(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi - x) g(x) \, dx. \tag{30.22}$$

Справедлива формула

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g). \tag{30.23}$$

Вопросы и задачи

1) Разложите в тригонометрический ряд Фурье функции:
а) $f(x) = |x|$, б) $f(x) = |\sin x|$, в) $f(x) = \operatorname{sh} ax$,
г) $f(x) = \operatorname{ch} ax$, д) $f(x) = \sin(ax)$, a — не целое число,

е) $f(x) = ax^2 + bx + c$, ж) $f(x) = \begin{cases} U_1, x \in [-\pi, 0], \\ U_2, x \in (0, \pi), \end{cases}$

з) $f(x) = \begin{cases} x, x \in [-\pi, 0], \\ 0, x \in (0, \pi) \end{cases}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, имеющие период 2π.

2) Найдите преобразования Фурье следующих функций:

а) $f(x) = \frac{\sin ax}{x}$ $(a > 0)$, б) $f(x) = \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x}$ $(|a| < \pi)$,

в) $f(x) = e^{-at^2}$.

§ 31. ВЕЙВЛЕТЫ

Термин **вейвлет** возник от английского слова «wavelet» («маленькая волна»). Таким образом, под вейвлетами надо подразумевать функции, локальные по времени и частоте. Для лучшего понимания будем сравнивать вейвлеты и ряды Фурье.

Рассмотрим пространство $L_2[0, 2\pi]$ квадратично интегрируемых комплекснозначных функций с нормой $\|\cdot\|$, такой, что

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(t)\|^2 \, dt. \tag{31.1}$$

Функция $f(t)$ рассматривается на конечном отрезке $[0, 2\pi]$, но может быть доопределена на всей вещественной оси $\mathbb{R}$: $f(t + 2\pi n) = f(t)$, n — произвольное целое число, $t \in [0, 2\pi]$. Функцию $f(t)$ можно разложить в ряд Фурье, который мы запишем в следующем виде:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \tag{31.2}$$

где коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt. \tag{31.3}$$

При этом полученный ряд Фурье (31.2) сходится равномерно к функции $f(t)$ на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$\lim_{N_1, N_2 \to \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{n=-N_1}^{N_2} c_n e^{int} \right|^2 dt = 0. \tag{31.4}$$

Видно, что базисом являются функции $\varphi_n(t) = e^{int}$, которые являются линейным преобразованием (масштабированием) всего одной функции $\varphi(t) = e^{it}$, т. е. $\varphi_n(t) = \varphi(nt)$.

Перейдем теперь к пространству $L_2(\mathbb{R})$. Ясно, что функции $\varphi_n(t)$ не могут образовывать базис данного пространства. Постараемся построить некоторые базисные функции (вейвлеты), локализованные на некоторых конечных отрезках. Таким образом, эти функции должны быстро стремиться к нулю вне рассматриваемых отрезков. При этом все функции предлагаемого базиса надо построить с помощью одной функции $\psi(t)$.

Для этих целей используем преобразования вида $\psi(2^j t - k)$, где j, k — целые числа. Добавляя требование единичности нормы всех вейвлетов, определим семейство вейвлетов $\{\psi_{jk}\}$ вида

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \qquad \|\psi_{jk}\| = \|\psi\| = 1. \tag{31.5}$$

Назовем вейвлет $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ **ортогональным**, если скалярное произведение

$$(\psi_{jk}, \psi_{lm}) = \delta_{jl}\delta_{km}, \tag{31.6}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а любая функция $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} c_{jk}\psi_{jk}(t). \tag{31.7}$$

Пример 31.1 (*вейвлет Хаара*). Простейшим примером является вейвлет, предложенный Хааром (Альфред Хаар (Alfred Haar), 1885–1933 — венгерский математик):

$$\psi^H(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & t \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0, & t \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty). \end{cases} \tag{31.8}$$

Функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ называется **R-функцией**, если базис $\{\psi_{jk}\}$, определенный по формуле (31.5), является **базисом Рисса**, т. е. существуют два числа A и B $(0 < A \leqslant B < +\infty)$, такие, что соотношение

$$A\|\{c_{jk}\}\|^2 \leqslant \left\| \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} c_{jk}\psi_{jk} \right\|^2 \leqslant B\|\{c_{jk}\}\|^2 \tag{31.9}$$

выполняется для любой последовательности $\{c_{jk}\} \in l_2$, где норма определена так, что

$$\|\{c_{jk}\}\|^2 = \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} |c_{jk}|^2. \tag{31.10}$$

Для любой R-функции существует базис $\{\psi^{jk}\}$ — «двойник» базиса $\{\psi_{jk}\}$,

$$(\psi_{jk}, \psi^{lm}) = \delta_{jl}\delta_{km}, \tag{31.11}$$

с помощью которого можно записать

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} (f, \psi_{jk})\psi^{jk}(t). \tag{31.12}$$

Если ψ — ортогональный вейвлет и $\{\psi_{jk}\}$ — ортонормированный базис, то $\{\psi^{jk}\}$ совпадает с $\{\psi_{jk}\}$.

Приведем некоторые признаки, которыми должна обладать функция $\psi(t)$, чтобы быть вейвлетом:

1) локализация по времени и частоте;

2) нулевое среднее значение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt = 0; \tag{31.13}$$

3) ограниченность

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2\, dt < \infty. \tag{31.14}$$

Пример 31.2 (***вейвлет «французская шляпа»***). Визуально вейвлет похож на цилиндр:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant \frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases} \tag{31.15}$$

Образ Фурье имеет вид

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^3\left(\frac{k}{3}\right)}{k}. \tag{31.16}$$

Пример 31.3. Часто вейвлеты строятся на основе производных от функции Гаусса:

$$\psi_m(t) = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}\left[e^{-t^2/2}\right], \tag{31.17}$$

$$\tilde{\psi}_m(t) = (-ik)^m e^{-k^2/2}. \tag{31.18}$$

При $m = 1$ вейвлет называется **wave-вейвлет**, а при $m = 2$ — **«мексиканская шляпа»** (сомбреро).

Пример 31.4 (*комплексный вейвлет*). Вейвлет Морле (Жан Морле (Jean Morlet), 1931–2007 — французский геофизик):

$$\psi(t) = e^{ik_0 t} e^{-t^2/2}, \tag{31.19}$$

$$\tilde{\psi}(t) = e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2}}. \tag{31.20}$$

Перейдем теперь к описанию вейвлет-преобразования. Для чисел $a, b \in \mathbb{R}$ и функции $\psi(t)$ определим функцию

$$\psi_{ab} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \tag{31.21}$$

Тогда интегральное **вейвлет-преобразование** вводится как

$$W[f] = F_\psi(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*_{ab}(t)\, \mathrm{d}t, \tag{31.22}$$

где символ «*» означает комплексное сопряженное. Обратное же преобразование имеет вид

$$f(t) = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} F_\psi(a,b)\tilde{\psi}(a,b)\, \frac{\mathrm{d}b\, \mathrm{d}a}{a^2}, \tag{31.23}$$

где коэффициент C_ψ определяется как

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\, \mathrm{d}\omega. \tag{31.24}$$

Некоторые свойства вейвлет-преобразования:

1) линейность

$$W[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha W[f] + \beta W[g]; \tag{31.25}$$

2) инвариантность относительно сдвига, т. е. если $W(a, b) = W[f]$, то

$$W[f(t - b_0)] = W(a, b - b_0); \tag{31.26}$$

3) инвариантность относительно растяжения (сжатия)

$$W\left[f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right] = \frac{1}{a_0} W\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right); \tag{31.27}$$

4) дифференцирование

$$W\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} f\right] = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\, \psi^*_{ab}(t)\, \mathrm{d}t; \tag{31.28}$$

5) аналог теоремы Парсеваля

$$\int f_1(t) f_2^*(t)\,\mathrm{d}t = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(a,b) W_2^*(a,b)\,\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}. \tag{31.29}$$

§ 32. УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ

Рассмотрим теперь регуляризирующий алгоритм для решения **уравнений типа свертки**. Одномерное уравнение имеет вид:

$$Az = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s) z(s)\,\mathrm{d}s = u(x), \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{32.1}$$

Уравнение типа свертки является общепринятой математической моделью для очень многих физических задач, в частности при обработке изображений, повышении разрешающей способности измерительных приборов и многих других. Ядро интегрального оператора — функция $K(x,y)$ — называется **аппаратной функцией** измерительного прибора, функцией размазывания точки и т. д.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) $K(y) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $u(x) \in L_2(\mathbb{R}), z(s) \in W_2^1(\mathbb{R})$;
2) A — взаимно однозначный (инъективный) оператор, т. е. ядро интегрального оператора K замкнуто;
3) задача без ограничений ($D = Z$);
4) некоторому $\bar{u}$ из рассматриваемого класса функций соответствует единственное решение $A\bar{z} = \bar{u}$ из $W_2^1(\mathbb{R})$.

Пусть известны функция u_δ, и интегральный оператор типа свертки A_h (с ядром K_h), $\delta > 0$, $h \geqslant 0$, такие, что:

$$\|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2} \leqslant \delta, \qquad \|A - A_h\|_{W_2^1 \to L_2} \leqslant \|A - A_h\|_{L_2 \to L_2} \leqslant h. \tag{32.2}$$

Рассмотрим функционал А. Н. Тихонова:

$$M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2. \tag{32.3}$$

Если для выбора параметра регуляризации α воспользоваться способами, описанными выше (например, обобщенным принципом невязки), то можно доказать сходимость приближенных регуляризированных решений к точному по норме пространства $W_2^1(\mathbb{R})$, из чего следует равномерная сходимость на каждом замкнутом отрезке $[a,b]$ вещественной оси к решению $\bar{z}$ уравнения типа свертки:

$$\|z_\eta^\alpha(S)\|_{C[a,b]} \to \|\bar{z}(s)\|_{C[a,b]} \quad \text{при } \eta \to 0. \tag{32.4}$$

Найдем решение $z_\eta^\alpha(s)$. Введем прямое и обратное преобразования Фурье, например, для функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x}\,dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega. \tag{32.5}$$

Воспользовавшись **теоремой Планшереля**, теоремой о преобразовании Фурье свертки и проварьировав функционал M^α на $W_2^1(\mathbb{R})$, получим:

Мишель Планшерель (Michel Plancherel), 1885–1967

$$z_\eta^\alpha(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}_h^*(\omega)\tilde{u}_\delta(\omega)e^{-i\omega s}}{\tilde{K}_h^*(\omega)\tilde{K}_h(\omega) + \alpha(\omega^2+1)}\,d\omega, \tag{32.6}$$

где $\tilde{K}_h(\omega)$, $\tilde{u}_\delta$ — преобразования Фурье функций $K_h(s)$, u_δ, а $\tilde{K}_h^*(\omega) = \tilde{K}_h(-\omega)$.

Подставляя преобразование Фурье для $\tilde{u}_\delta(x)$ в выражение для $z_\eta^\alpha(s)$, получаем:

$$z_\eta^\alpha(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K^\alpha(x-s)\tilde{u}_\delta(x)\,dx, \tag{32.7}$$

где

$$K^\alpha(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}_h^*(\omega)e^{i\omega t}}{\tilde{K}_h^*(\omega)\tilde{K}_h(\omega) + \alpha(\omega^2+1)}\,d\omega. \tag{32.8}$$

Таким образом, решение уравнения типа свертки сводится к нахождению $z_\eta^\alpha(s)$ после построения ядра $K^\alpha(t)$ для каждого фиксированного значения параметра регуляризации и последующего выбора значения параметра регуляризации, например, в соответствии с обобщенным принципом невязки.

Решение двумерных уравнений типа свертки требует применения двумерного преобразования Фурье.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения типа свертки на конечном интервале. К такому виду может быть преобразовано записанное выше уравнение типа свертки при условии, что его решение и ядро имеют локальные носители. Напомним, что **носителем функции** $f(x)$ называется множество точек

$$\operatorname{supp} f = \{x \in \mathbb{R} \colon f(x) \neq 0\}. \tag{32.9}$$

Носитель называется **локальным** (или **ограниченным**), если существует интервал, его содержащий.

В этом случае уравнение типа свертки имеет вид

$$Az \equiv \int_0^{2a} K(x-s)z(s)\,\mathrm{d}s = u(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2a. \tag{32.10}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

$$A\colon W_2^1[0,2a] \to L_2[0,2a], \ \operatorname{supp} K(y) \subset [-\tfrac{l}{2}, \tfrac{l}{2}], z(x) \subset [a-\tfrac{l_z}{2}, a+\tfrac{l_z}{2}], \tag{32.11}$$

где l_z — длина носителя $z(s)$: $a, l > 0$, $l_z \geqslant 0$, $2l + l_z \leqslant 2a$. В силу условий на носители доопределенные нулями функции $K(y)$ на $[-a, a]$ и $z(s)$ на $[0, 2a]$ периодически продолжаются с периодом $T = 2a$ на $\mathbb{R}$. В этом случае и правая часть $u(x)$ имеет носитель, принадлежащий $[0, 2a]$, а также периодически продолжается с периодом $T = 2a$ на $\mathbb{R}$.

Введем сетку: $x_k = s_k = k\triangle x$, $\triangle x = \frac{2a}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$, где n — четное. Аппроксимируя интеграл по формуле прямоугольников, получим конечно-разностную аппроксимацию уравнения типа свертки:

$$\sum_{j=0}^{n-1} K(x_k - s_j)z(s_j)\triangle x = u(x_k). \tag{32.12}$$

Обозначим $K(x_k - s_j) = K_{k-j}$, $z(s_j) = z_j$, $u(x_k) = u_k$. Определим дискретное преобразование Фурье для функций (векторов) дискретной переменной k, периодических с периодом n ($f_{k+n} = f_k$):

$$\tilde{f}_m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \mathrm{e}^{-i\omega_m x_k}, \qquad f_k = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \tilde{f}_m \mathrm{e}^{i\omega_m x_k}, \tag{32.13}$$

где $\omega_m = m\frac{2\pi}{T}$, $k, m = \overline{0, n-1}$.

Легко проверить теоремы Планшереля и теоремы о свертке для дискретного преобразования Фурье:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\tilde{f}_m|^2; \qquad \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} K_{k-j} z_j \triangle x \mathrm{e}^{\omega_m x_k} = \tilde{K}_m \tilde{z}_m \triangle x. \tag{32.14}$$

Аппроксимируем функционал А. Н. Тихонова:

$$M^{\alpha}[z]=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(K_{k-j}z_j\Delta x-u_k)^2\Delta x+\alpha\sum_{k=0}^{n-1}z_k^2\Delta x+\alpha\sum_{k=0}^{n-1}z'(x_k)^2\Delta x. \tag{32.15}$$

Используя равенство Планшереля, теорему о свертке и легко проверяемое равенство $\tilde{z'}(x_k)=i\omega_k\tilde{z}(x_k)$ (слева дискретное преобразование Фурье производной функции $z(x)$), аппроксимацию функционала А. Н. Тихонова можем записать в виде:

$$M^{\alpha}[z]=$$

$$=\frac{\Delta x}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\left(|\tilde{K}_m|^2\tilde{z}_m^*z_m\Delta x^2-2\Delta x\tilde{K}_m^*\tilde{z}_m^*\tilde{u}_m+|\tilde{u}_m|^2+\alpha(1+\omega^2)\tilde{z}_m^*z_m\right). \tag{32.16}$$

Минимум этого функционала достигается на элементе: pt

$$\tilde{z}_m=\frac{\tilde{K}_m^*\tilde{u}_m\Delta x}{|\tilde{K}_m^*|\Delta x^2+\alpha\left(\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2+1\right)},\qquad m=\overline{0,n-1}. \tag{32.17}$$

Отсюда, применяя обратное преобразование Фурье, находим решение исходной задачи. Быстрее всего дискретное преобразование Фурье вычисляется, если $n=2^k$.

В двумерном случае уравнение типа свертки решается аналогично с применением двумерного дискретного преобразования Фурье.

Литература

1. **Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.** *Численные методы решения некорректных задач.* — М.: Наука, 1990. — 230 с.
2. **Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.** *Нелинейные некорректные задачи.* — М.: Наука, 1995. — 311 с.
3. **Леонов А. С.** *Решение некорректно поставленных обратных задач: очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ.* — М.: Либроком, 2009. — 326 с.
4. **Бакушинский А. В., Гончарский А. В.** *Некорректные задачи. Численные методы и приложения.* — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 197 с.
5. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* — М.: Наука, 1978. — 206 с.

6. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.** *Некорректные задачи математической физики и анализа.* — М.: Наука, 1980. — 286 с.
7. **Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г.** *Некорректные задачи астрофизики.* — М.: Наука, 1985. — 350 с.
8. **Кочиков И. В., Курамшина Г. М., Пентин Ю. А., Ягола А. Г.** *Обратные задачи колебательной спектроскопии.* — М.: Изд-во МГУ, 1993. —240 с.
9. **Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.** *Итеративные методы решения некорректных задач.* — М.: Наука, 1989. — 126 с.
10. **Кабанихин С. И.** *Обратные и некорректные задачи.* — Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. —458 с.
11. **Астафьева Н. М.** Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физических наук.* — 1996. —Т. 166, № 11. — С. 1145-1170.
12. **Addison P. S.** *The illustrated wavelet transform handbook: introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance.* — Bristol: Institute of Physics Publishing, 2002. — 353 P.
13. **Чуи Ч. К.** *Введение в вэйвлеты.* — М.: Мир, 2001. —412 с.
14. **Добеши И.** *Десять лекций по вейвлетам.* — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 464 с.
15. **Толстов Г. П.** *Ряды Фурье.* — М.: Физматгиз, 1960. — 393 с.

Глава 4

ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

§ 33. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе мы рассмотрим прямые и обратные задачи гравиметрии и способы их решения с точки зрения теории обратных и некорректных задач, основные положения которых были изложены в первой главе настоящего пособия. При изучении строения недр, физических полей Земли, сейсмических сигналов неизбежно приходится интерпретировать различные экспериментальные данные.

Интерпретация, как специфическая область человеческой деятельности, обладает рядом особенностей. Они сводятся к следующему:

1) интерпретация — это процесс познания;
2) интерпретация невозможна без модельных представлений; количественные оценки могут быть сделаны при накоплении определенного опыта и развитой системе модельных представлений;
3) при интерпретации используются достижения теории и современные технические средства;
4) с одной стороны, существуют алгоритмы интерпретации, критерии оценки точности и надежности ее некоторых процедур, с другой — при интерпретации производится принятие решений по неформализованным критериям;
5) при интерпретации происходит переход от более низкого уровня модельных представлений к более высокому.

Этап обработки и интерпретации данных полевых наблюдений всегда был и остается важнейшим этапом любого геофизического исследования. За последние 20–30 лет его содержание и существо используемых приемов и методов заметно изменились. Связано это со следующими обстоятельствами:

1) резко увеличился объем подлежащих обработке и интерпретации данных наблюдений, повысилось их качество;
2) резко возрос объем априорной информации о строении среды, находящийся в распоряжении интерпретатора;

3) существенно повысились требования со стороны геологов к точности и разрешающей способности геофизической интерпретации, к тем итоговым материалам геофизических работ, на основании которых создаются проекты геологической разведки;
4) значительно возросли возможности вычислительной техники, все чаще стали использоваться многопроцессорные компьютеры и кластеры, составленные из подобных компьютеров, что позволило применить методы параллельных вычислений;
5) были разработаны новые, высокоэффективные методы интерпретации геофизических данных и на их основе созданы компьютерные технологии.

В связи с вышеизложенным к этапу интерпретации данных гравимагниторазведки предъявляются теперь повышенные требования. Этот этап должен осуществляться только на ЭВМ и только с помощью оптимальных строго формализованных процедур. Поэтому необходимо на более высоком уровне прорабатывать вопросы методологии, теории и создания численных методов извлечения информации из данных наблюдений.

Гравиразведка, магниторазведка, электроразведка, сейсморазведка входят в комплекс геофизических методов решения различных геологических задач — от изучения глубинного строения земной коры на континентах и в океанах до поисков и разведки полезных ископаемых как рудного типа, так и структурного (к последним относится поиск нефти и газа).

Повышение точности измерений приводит к увеличению множества объектов и ситуаций, изучаемых с помощью геофизических методов исследования.

Как известно, между уровнем развития теории и практическим внедрением ее результатов — совокупностей методов (технологий) интерпретации — существует разрыв во времени (запаздывание внедрений), по территории (постепенное расширение территорий, где используются достижения теории) и по полноте использования. Основная проблема в настоящее время заключается в наиболее полном применении в реальной геологической практике результатов, полученных специалистами в теории интерпретации.

Использование существующих разработанных методов интерпретации без учета конкретных условий получения экспериментального материала и особенностей изучаемых объектов может привести к грубым погрешностям, Например, применение аналитического продолжения поля в нижнее полупространство в открытых районах сопряжено с определенными трудностями, так как могут быть нарушены исходные модельные положения этого продолжения (часть источников аномального магнитного поля выходит на дневную поверхность). В то же время пересеченный рельеф существенно изменяет подход к концепции преобразования полей: не все трансформации оказываются возможными, а пересчет, т. е. редуцирование, поля на один уровень (обычно уровень наивысшей точки на участке работ) существенно уменьшает амплитуду полезных аномалий и, в конечном счете, значительно понижает отношение сигнал/помеха вплоть до того, что от редуцирования в ряде случаев приходится отказываться. Новые методы теории интерпретации геофизических полей, разработанные с учетом достижений в теории некорректных задач, позволяют существенно повысить точность и надежность получаемых результатов.

§ 34. ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

Напомним сначала основные принципы теории потенциала. Поскольку мы рассматриваем задачи гравиметрии, речь пойдет о силе тяжести. В общем случае, как известно, силовое поле называется **консервативным**, или **потенциальным**, если

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \operatorname{grad}\varphi(x,y,z), \tag{34.1}$$

где градиент скалярного поля $\varphi(x, y, z)$ в декартовой системе координат определяется как

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \tag{34.2}$$

Определение 34.1. Гравитационным потенциалом в некоторой точке $P(x, y, z)$ называется функция, частные производные которой по осям координат равны проекциям силы притяжения, действующей на точечное тело единичной массы в точке P, на соответствующие оси.

Если F_x, F_y, F_z — проекции силы тяготения $\boldsymbol{F}$ на оси координат, то потенциал (потенциальная функция) V этой силы,

согласно определению, будет удовлетворять следующим условиям:

$$M\,\frac{\partial V}{\partial x} = F_x, \quad M\,\frac{\partial V}{\partial y} = F_y, \quad M\,\frac{\partial V}{\partial z} = F_z, \tag{34.3}$$

где M — масса точечного тела, помещенного в точку $P(x, y, z)$, на которое действует сила $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Учитывая такую связь между потенциалом V и составляющими силы тяготения $\boldsymbol{F}$, можно сказать, что потенциал V полностью характеризует силовое поле $\boldsymbol{F}$.

Определим потенциал $V(x, y, z)$ силы тяготения для различных силовых полей. Для точечной массы m, находящейся в точке $N(\xi, \eta, \zeta)$, создаваемый ею потенциал определяется формулой

$$V(x, y, z) = \gamma\,\frac{m}{r}, \tag{34.4}$$

где $\boldsymbol{r} = (x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, а число $\gamma = (6{,}67 \pm 0{,}003) \cdot 10^{-11}$ $н \cdot м^2 \cdot кг^{-2}$ — гравитационная постоянная. Для доказательства необходимо проверить, что функция (34.4) будет удовлетворять уравнению (34.3). Частная производная функции $V(x,y,z)$ по переменной x равна

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\gamma\,\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}. \tag{34.5}$$

Аналогично получаем частные производные V по переменным y, z. Но

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-\xi}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-\eta}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-\zeta}{r}. \tag{34.6}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\gamma m\,\frac{x-\xi}{r^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\gamma m\,\frac{y-\eta}{r^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\gamma m\,\frac{z-\zeta}{r^3}. \tag{34.7}$$

Но по закону всемирного тяготения точечное тело массой m, находящееся в точке $N(\xi, \eta, \zeta)$, действует на точечное тело массой M, находящееся в точке $P(x,y,z)$, с силой

$$\boldsymbol{F} = -\gamma\,\frac{mM\boldsymbol{r}}{r^3}, \qquad F = |\boldsymbol{F}| = \gamma\,\frac{mM}{r^2}. \tag{34.8}$$

Проекции силы F на оси x, y, z равны соответственно

$$F_x = F\cos(\boldsymbol{F},Ox) = -F\cos(\boldsymbol{r},Ox) = -F\,\frac{x-\xi}{r} = -\gamma mM\,\frac{x-\xi}{r^3}, \tag{34.9}$$

$$F_y = F\cos(\boldsymbol{F},Oy) = -F\cos(\boldsymbol{r},Oy) = -F\,\frac{y-\eta}{r} = -\gamma mM\,\frac{y-\eta}{r^3}, \tag{34.10}$$

$$F_z = F\cos(\boldsymbol{F},Oz) = -F\cos(\boldsymbol{r},Oz) = -F\,\frac{z-\zeta}{r} = -\gamma mM\,\frac{z-\zeta}{r^3}, \tag{34.11}$$

где Ox, Oy, Oz — направляющие векторы осей координат. Поэтому мы убеждаемся, что действительно функция $V(x,y,z) = \gamma\,\dfrac{m}{r}$ является потенциалом точечной массы m.

В том случае, когда силовое поле создается несколькими точечными массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, потенциал будет иметь вид

$$V(x,y,z) = \gamma\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{r_k}. \tag{34.12}$$

Если разбить притягивающую массу на бесконечно большое число элементарных масс $\mathrm{d}m$, которые будем рассматривать как точечные масс, то получим

$$\mathrm{d}V(x,y,z) = \gamma\,\frac{\rho\,\mathrm{d}\tau}{r}, \tag{34.13}$$

здесь $\rho(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}m$, $\mathrm{d}\tau$ — элементарный объем, занимаемый массой $\mathrm{d}m$.

Проинтегрировав по объему, занимаемому притягивающей массой, получим значение потенциала тела в точке P

$$V(x,y,z) = \gamma\iiint\limits_{\tau}\frac{\rho\,\mathrm{d}\tau}{r}. \tag{34.14}$$

Землю можно рассматривать как эллипсоид вращения со **сжатием** (разность между экваториальным и полярным радиусами, деленная на экваториальный радиус) $\approx \dfrac{1}{297}$. Поверхность эллипсоида вращения является **эквипотенциальной поверхностью**, т. е. поверхностью, на которой скалярный потенциал V гравитационного поля Земли принимает постоянное значение. Как следствие градиент g (**ускорение свободного**

падения) гравитационного потенциала V и сила тяжести Mg перпендикулярны этой поверхности. Изменение ускорения свободного падения с земной широтой φ на уровне моря может быть очень близко аппроксимировано формулой

$$g = |g| = 9{,}78049(1 + 0{,}0052884\sin^2\varphi - 0{,}000005\sin^2 2\varphi)\ м/с^2. \tag{34.15}$$

Отметим, что знание абсолютной величины силы тяжести для прикладной геофизики не представляет интереса. Вместо этого, как и в магнитных методах, о которых речь будет идти ниже, мы имеем дело с относительными измерениями. Они дают разницу в силе тяжести Δg между точкой наблюдения и базовой точкой. А в величины Δg, полученные в пределах какого-либо района, вводятся соответствующие поправки для приведения их к некоторым стандартным условиям. Исправленные величины Δg, называемые **аномалиями**, содержат информацию об изменениях плотности в Земле, а также о поверхностях, ограничивающих области с измененной плотностью. Однако этой информации присуща некоторая неопределенность, свойственная теории ньютоновского потенциала. Поэтому возникают обратные задачи гравиметрии, которые являются некорректно поставленными. Измеряется аномальное гравитационное поле в *мГал* (миллигалах):

Галилео Галилей
(Galileo Galilei), 1564–1642

$$1\ мГал = 10^{-5}\ м/с^2. \tag{34.16}$$

Данная единица (1 Г) была названа в честь итальянского ученого Г. Галилея.

Распределение тяготеющих масс в пространстве $\mathbb{R}^n$ (в геофизике $n = 2$ или 3) описывается плотностью $\rho(\xi)$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. **Носитель масс** (замкнутое множество) обозначается через $\operatorname{supp}\rho$. Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \notin \operatorname{supp}\rho$, то потенциал поля $V(x) = V_{внеш}(x)$ удовлетворяет в точке x **уравнению Лапласа**:

Пьер–Симон Лаплас
(Pierre–Simon Laplace), 1749–1827

$$\Delta V(x) = 0, \quad \Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}. \tag{34.17}$$

Если же точка $x \in \operatorname{int}\operatorname{supp}\rho$, то потенциал гравитационного поля $V(x) = V_{\text{внут}}(x)$ удовлетворяет в точке x **уравнению Пуассона**:

Симеон Дени Пуассон (Simeon Denis Poisson), 1781–1840

$$\Delta V(x) = -C_n \gamma \rho(x), \qquad (34.18)$$

где C_n — абсолютная константа. В случае $n = 2$ константа $C_2 = 2\pi$, а при $n = 3$ имеем $C_3 = 4\pi$. Очевидно, что уравнения (34.17) и (34.18) — это по-разному записанное одно и то же определяющее уравнение поля, так как при $x \notin \operatorname{supp}\rho$ $\rho(x) = 0$ и (34.18) переходит в (34.17). Что же касается выражения констант C_n, то при $n \geqslant 3$ они представляют собой площади поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Следует подчеркнуть, что в точках границы носителя уравнение для потенциала поля не определено. Функции, удовлетворяющие уравнению (34.17) в некоторой области D, носят название **гармонических**. Гармонические функции играют важную роль при изучении различных физических полей Земли.

В точках x, в которых потенциал гравитационного поля удовлетворяет определяющему уравнению, имеет место интегральное представление

$$V(x) = \gamma \int_{\operatorname{supp}\rho} \rho(\xi)\Omega_n(\xi - x)\, \mathrm{d}\xi, \qquad (34.19)$$

где $\Omega_n(x)$ — так называемое **фундаментальное решение** уравнения Лапласа (или Пуассона) в безграничном пространстве, которое удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Omega_n(x) = -C_n \delta(x), \qquad (34.20)$$

где $\delta(x)$ — так называемая **дельта-функция Дирака** (обобщенная функция), а при $n \geqslant 2$ — условию:

Поль Адриен Морис Дирак (Paul Adrien Maurice Dirac), 1902–1984

$$\lim_{|x| \to \infty} |\Omega_n(x)| = 0. \qquad (34.21)$$

При $n \geqslant 3$ фундаментальное решение принимает вид

$$\Omega_n(x) = \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}, \qquad (34.22)$$

а при $n = 2$ имеем

$$\Omega_2(x) = 2 \ln \frac{1}{|x - \xi|}. \qquad (34.23)$$

Таким образом, фундаментальное решение уравнения Лапласа представляет собой поле точечного источника, расположенного в точке с координатами ξ.

34.1. Постановка прямой задачи гравиразведки

Под прямыми задачами гравиразведки понимают задачи нахождения пространственного распределения элементов гравитационного поля, если задан носитель масс, т. е. область пространства, по которой производится интегрирование, и распределение тяготеющих масс $\rho(\xi)$ в этой области, в соответствии с (34.19). При этом левая часть уравнения (34.19) может быть как потенциалом гравитационного поля, так и производной потенциала (Δg или высшими производными потенциала). Тогда и в правой части вместо фундаментального решения уравнения Лапласа будут стоять соответствующие производные.

34.2. Примеры прямых задач геофизики

Как известно, нахождение путем вычислений значений аномалий силы тяжести или значений вторых производных возмущающего потенциала от находящегося в недрах Земли тела любой формы и с любым распределением плотности в нем для точек, расположенных на земной поверхности, носит название прямой задачи гравиметрической разведки.

При этом поверхность Земли принимается либо за плоскость (когда вычисляются локальные аномалии), либо за сферу (когда необходимо рассчитать региональные или глобальные аномалии). В случае плоской Земли оси координат принято располагать следующим образом: оси Ox и Oy помещаются в плоскости горизонта, а ось Oz направляется вертикально вниз.

Прямая задача, в противоположность обратной, всегда имеет однозначное решение. Однако вычисления, которые необходимо произвести при этом, отличаются большой сложностью. Сложность эта связана с тем, что всякое аномальное тело является трехмерным и потому при определении параметров гравитационного поля приходится выполнять трехкратное интегрирование. Раньше популярны были двумерные модели гравитирующих тел, поскольку компьютеры были маломощными,

и геофизики испытывали большие трудности с применением вычислительной техники для решения прямых и обратных задач. В настоящее время нет необходимости вводить принятые ранее упрощения. Однако целесообразно рассмотреть на примере двумерных тел некоторые прямые задачи гравиразведки, поскольку многие вытянутые по простиранию геологические объекты можно аппроксимировать двумерными телами.

Погрешности, вызванные заменой трехмерных тел двумерными, обычно невелики, и для вытянутых тел, длина которых в пять и более раз превосходит их поперечник, можно считать, что гравитационное поле над серединой их такое же, как если бы эти тела простирались в бесконечность.

Только для очень ограниченного числа тел, имеющих простейшую форму, удается получить удобные для практического использования формулы. Обычно формулами для тел простой геометрической формы пользуются лишь для первоначальной приблизительной оценки основных параметров тела, после чего переходят к постепенному подбору таких параметров, которые наилучшим образом соответствовали бы данным, полученным из наблюдений. Этот подбор осуществляется с помощью кубатурных формул.

Кривые $g_z \equiv V_z$, V_{xz}, V_{zz} и $V_\Delta \equiv V_{yy} - V_{xx}$ часто обладают некоторыми особенностями, позволяющими определить форму создающих их тел. В декартовой системе координат производные гравитационного потенциала в точке $P(x, y, z)$ можно записать в виде:

$$g_z = \gamma\rho \iiint \frac{(\zeta - z)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{3/2}}, \tag{34.24}$$

$$V_{xz} = 3\gamma\rho \iiint \frac{(\xi - x)(\zeta - z)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{5/2}}, \tag{34.25}$$

$$V_\Delta = 3\gamma\rho \iiint \frac{\left[(\eta - y)^2 - (\xi - x)^2\right]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{5/2}}, \tag{34.26}$$

$$V_{zz} = \gamma\rho \iiint \frac{\left[2(\zeta - z)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2\right]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{5/2}}. \tag{34.27}$$

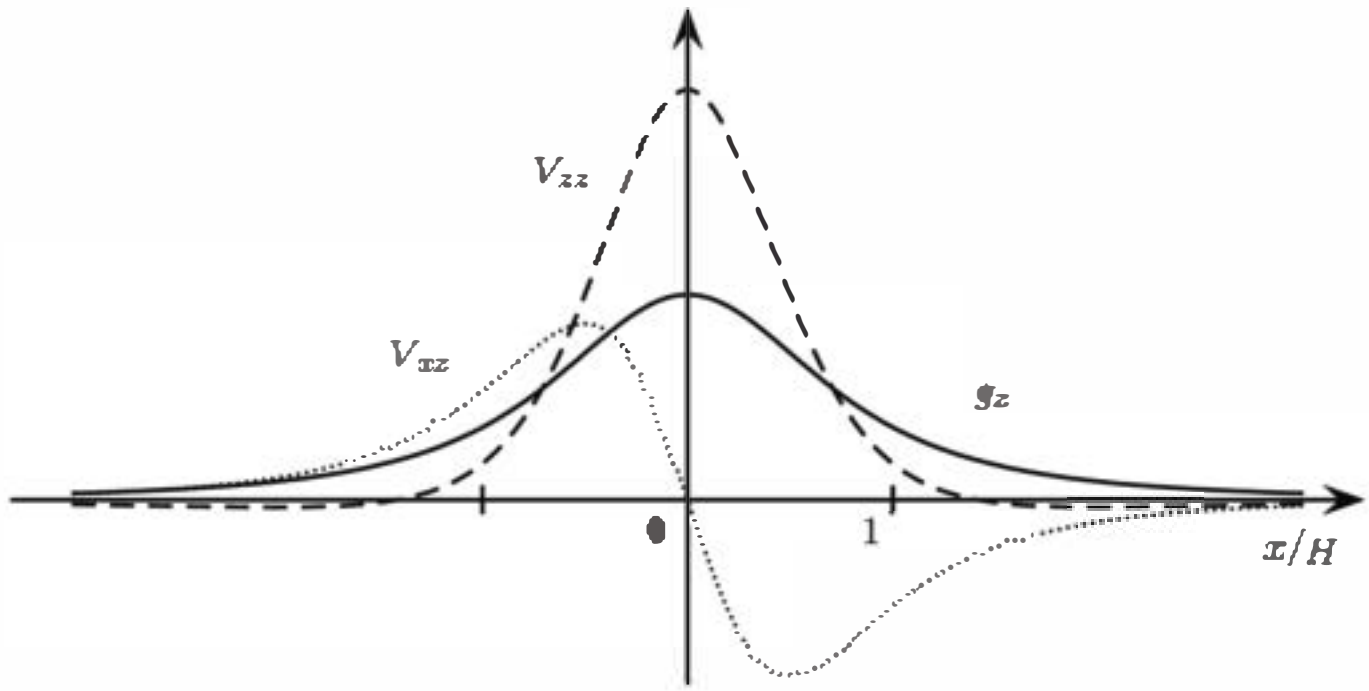


Рис. 4.1. Производные гравитационного потенциала шара

1) **Шар.** Центр шара находится на глубине H, радиус шара равен R. Тогда расстояние от точки $P(x, 0, 0)$ до центра шара равно $L = \sqrt{x^2 + H^2}$ и величина ускорения равна

$$|g| = \gamma \frac{M}{L^2}, \tag{34.28}$$

где $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ — масса шара. Поэтому вертикальная составляющая ускорения равна

$$g_z = |g| \frac{H}{L} = \gamma M \frac{H}{(x^2 + H^2)^{3/2}}. \tag{34.29}$$

Также можно получить, что

$$V_{xz} = \frac{\partial g_z}{\partial x} = -3\gamma M \frac{Hx}{(x^2 + H^2)^{5/2}}, \tag{34.30}$$

$$V_{\triangle} = -3\gamma M \frac{x^2}{(x^2 + H^2)^{5/2}}, \tag{34.31}$$

$$V_{zz} = -\frac{\partial g_z}{\partial H} = \gamma M \frac{2H^2 - x^2}{(x^2 + H^2)^{5/2}}, \tag{34.32}$$

см. рис. 4.1. Заметим, что полуширина профиля g_z равна $\Delta x = \sqrt{\sqrt[3]{4} - 1}\,H \approx 0{,}7664H$, т. е. в этом случае $g_z|_{x=\Delta x} = \frac{1}{2} g_{z\ \max} = \frac{1}{2} g_z|_{x=0}$.

2) **Тонкий горизонтальный стержень.** Считаем, что стержень параллелен оси y, находится на глубине H, имеет радиус R и длину L. Для определенности поместим

центр стержня в точку $(0,0,H)$. Расстояние от элементарного объема $\mathrm{d}\tau = \pi R^2\,\mathrm{d}L$ до точки $P(x,y,0)$ равно

$$r = \sqrt{x^2 + (y-L)^2 + H^2}. \tag{34.33}$$

Вертикальная компонента ускорения равна

$$g_z = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\gamma\rho\pi R^2}{r^2}\,\frac{H}{r}\,\mathrm{d}L =$$

$$= \frac{\gamma\rho\pi R^2 H}{x^2+H^2}\left(\frac{y+\frac{L}{2}}{\sqrt{x^2+\left(y+\frac{L}{2}\right)^2+H^2}} - \frac{y-\frac{L}{2}}{\sqrt{x^2+\left(y-\frac{L}{2}\right)^2+H^2}}\right). \tag{34.34}$$

Для производных гравитационного потенциала можно получить формулы

$$V_{xz} = \frac{\gamma\rho\pi R^2 xH}{(x^2+H^2)^2}\,\frac{\eta(3(x^2+H^2)+2\eta^2)}{(x^2+\eta^2+H^2)^{3/2}}\Bigg|_{y-L/2}^{y+L/2}, \tag{34.35}$$

$$V_\triangle = \frac{\gamma\rho\pi R^2}{x^2+H^2}\left[\frac{\eta^3}{(x^2+\eta^2+H^2)^{3/2}} - \frac{x^2\eta(3(x^2+H^2)+2\eta^2)}{(x^2+H^2)(x^2+\eta^2+H^2)^{3/2}}\right]_{y-L/2}^{y+L/2}, \tag{34.36}$$

$$V_{zz} = \frac{\gamma\rho\pi R^2}{(x^2+H^2)^2}\left[\frac{\eta(2H^2-x^2)}{\sqrt{x^2+\eta^2+H^2}} - \frac{H^2\eta^3}{(x^2+\eta^2+H^2)^{3/2}}\right]_{y-L/2}^{y+L/2}. \tag{34.37}$$

В случае бесконечного стержня (рис. 4.2)

$$g_z = \frac{2\gamma\rho\pi R^2 H}{x^2+H^2}, \tag{34.38}$$

$$V_{xz} = -\frac{4\gamma\rho\pi R^2 xH}{(x^2+H^2)^2}, \tag{34.39}$$

$$V_\triangle = V_{zz} = \frac{2\gamma\rho\pi R^2(H^2-x^2)}{(x^2+H^2)^2}, \tag{34.40}$$

полуширина профиля g_z равна $\triangle x = H$.

3) **Полубесконечный вертикальный цилиндр.** Пусть цилиндр имеет плотность ρ, радиус R, находится на глубине H от поверхности, ось цилиндра совпадает с осью Oz.

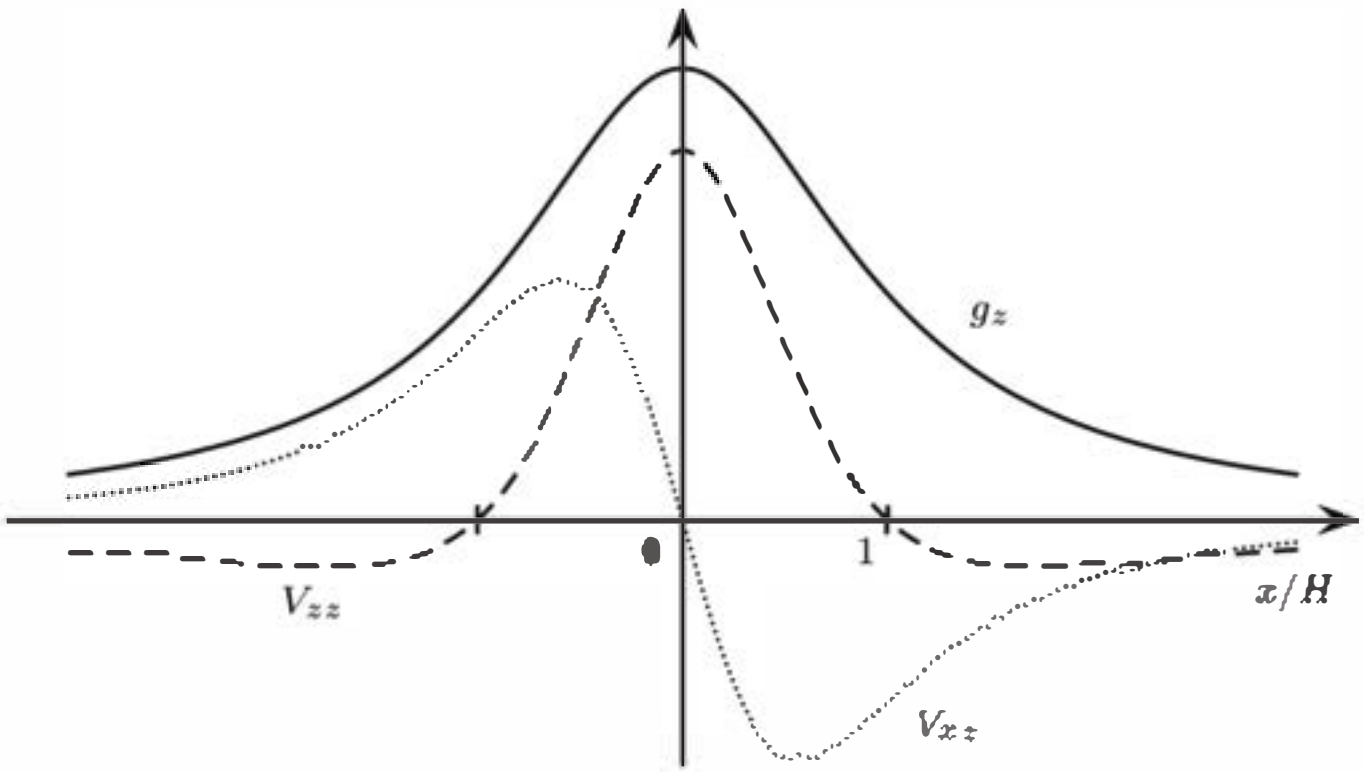


Рис. 4.2. Производные гравитационного потенциала бесконечного горизонтального стержня

Перейдем в цилиндрическую систему координат (r, φ, z). Расстояние от точки начала координат до произвольной точки внутри цилиндра равно

$$L = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}. \qquad (34.41)$$

Элементарный объем можно записать как $\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$. Поэтому ускорение, создаваемое цилиндром в начале координат, имеет только вертикальную компоненту, равную

$$g_z = \int_H^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\gamma\rho}{L^2}\,\frac{z}{L}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = 2\pi\gamma\rho \int_H^\infty \int_0^R \frac{z\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}} =$$
$$= 2\pi\gamma\rho(\sqrt{H^2+R^2} - H). \qquad (34.42)$$

В случае вертикального цилиндра конечной высоты h получаем

$$g_z = 2\pi\gamma\rho(h + \sqrt{H^2+R^2} - \sqrt{(H+h)^2+R^2}). \qquad (34.43)$$

4) **Тонкий вертикальный стержень.** Пусть мы хотим найти ускорение в точке $P(x, 0, 0)$. Принимая, что радиус стержня $R \ll |x|$, получаем, что расстояние от точки P

до точки внутри стержня равно

$$L = \sqrt{x^2 + z^2}. \tag{34.44}$$

Вертикальная компонента ускорения равна

$$g_z = \int_H^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\gamma\rho}{L^2}\,\frac{z}{L}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = 2\pi\gamma\rho \int_H^{H+h} \int_0^R \frac{z\,\mathrm{d}z r\,\mathrm{d}r}{(x^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \pi R^2 \gamma\rho \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+H^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(H+h)^2}} \right). \tag{34.45}$$

5) **Тонкая горизонтальная полоса.** Считаем, что полоса бесконечна вдоль оси y (ось симметрии параллельна оси y), L_1 и L_2 — координаты правой и левой границ, μ — плотность на единицу длины (рис. 4.3). В силу симметрии можно записать, что

$$g_z = \int_{L_1}^{L_2} \frac{2\gamma\mu}{r} \cdot \frac{H}{r}\,\mathrm{d}\xi, \tag{34.46}$$

где $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + H^2}$. Если обозначить через $\theta_1 = \dfrac{L_1 - x}{H}$, $\theta_2 = \dfrac{L_2 - x}{H}$ углы, под которыми видны границы полосы из точки $(x, 0)$, то можно записать, что

$$g_z = \int_{L_1}^{L_2} \frac{2\gamma\mu H}{(\xi - x)^2 + H^2}\,\mathrm{d}\xi = 2\gamma\mu\left(\operatorname{arctg}\theta_2 - \operatorname{arctg}\theta_1\right). \tag{34.47}$$

Если ось симметрии полосы лежит в плоскости yOz, то $L_1 = -L_2 = L$, где $2L$ — ширина полосы, и

$$g_z = 2\gamma\mu\left[\operatorname{arctg}\frac{L-x}{H} + \operatorname{arctg}\frac{L+x}{H}\right], \tag{34.48}$$

$$V_{xz} = -2\gamma\mu H\left[\frac{1}{(L-x)^2 + H^2} - \frac{1}{(L+x)^2 + H^2}\right], \tag{34.49}$$

$$V_{zz} = 2\gamma\mu\left[\frac{x+L}{(x+L)^2 + H^2} - \frac{x-L}{(x-L)^2 + H^2}\right]. \tag{34.50}$$

Полуширина профиля g_z равна $\triangle x = \sqrt{L^2 + H^2}$.

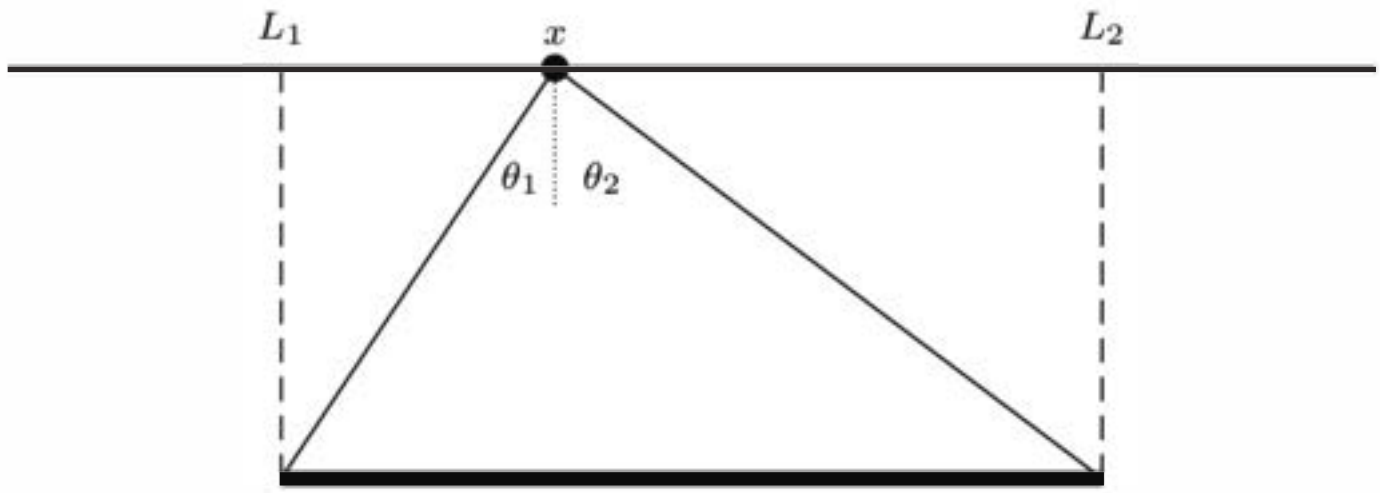


Рис. 4.3. Горизонтальная тонкая полоса

В случае полуплоскости ($L_1 = 0$, $L_2 \to \infty$), можно записать, что

$$g_z = 2\gamma\mu \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{H}\right], \tag{34.51}$$

$$V_{xz} = 2\gamma\mu \frac{H}{x^2 + H^2}, \tag{34.52}$$

$$V_{zz} = 2\gamma\mu \frac{x}{x^2 + H^2}, \tag{34.53}$$

$\Delta x = H$, см. рис. 4.4.

6) **Прямоугольный параллелепипед.** Пусть грани параллелепипеда параллельны координатным плоскостям, а сам параллелепипед определяется неравенствами

$$L_1 \leqslant x \leqslant L_2, \quad D_1 \leqslant y \leqslant D_2, \quad H_1 \leqslant z \leqslant H_2. \tag{34.54}$$

Тогда ускорение, создаваемое параллелепипедом в точках оси x, имеет вид

$$g_z = -\gamma\rho\Big[(\xi - x)\ln(\eta + r) + \eta\ln[(\xi - x) + r] + \\ + \zeta\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\zeta} - \zeta\operatorname{arctg}\frac{(\xi - x)\eta}{\zeta r}\Big]_{\xi=L_1}^{L_2}\Big|_{\eta=D_1}^{D_2}\Big|_{\zeta=H_1}^{H_2}, \tag{34.55}$$

где $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

Вопросы и задачи

1) Дайте определение функции, гармонической в некоторой области. Приведите примеры таких функций в случае $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

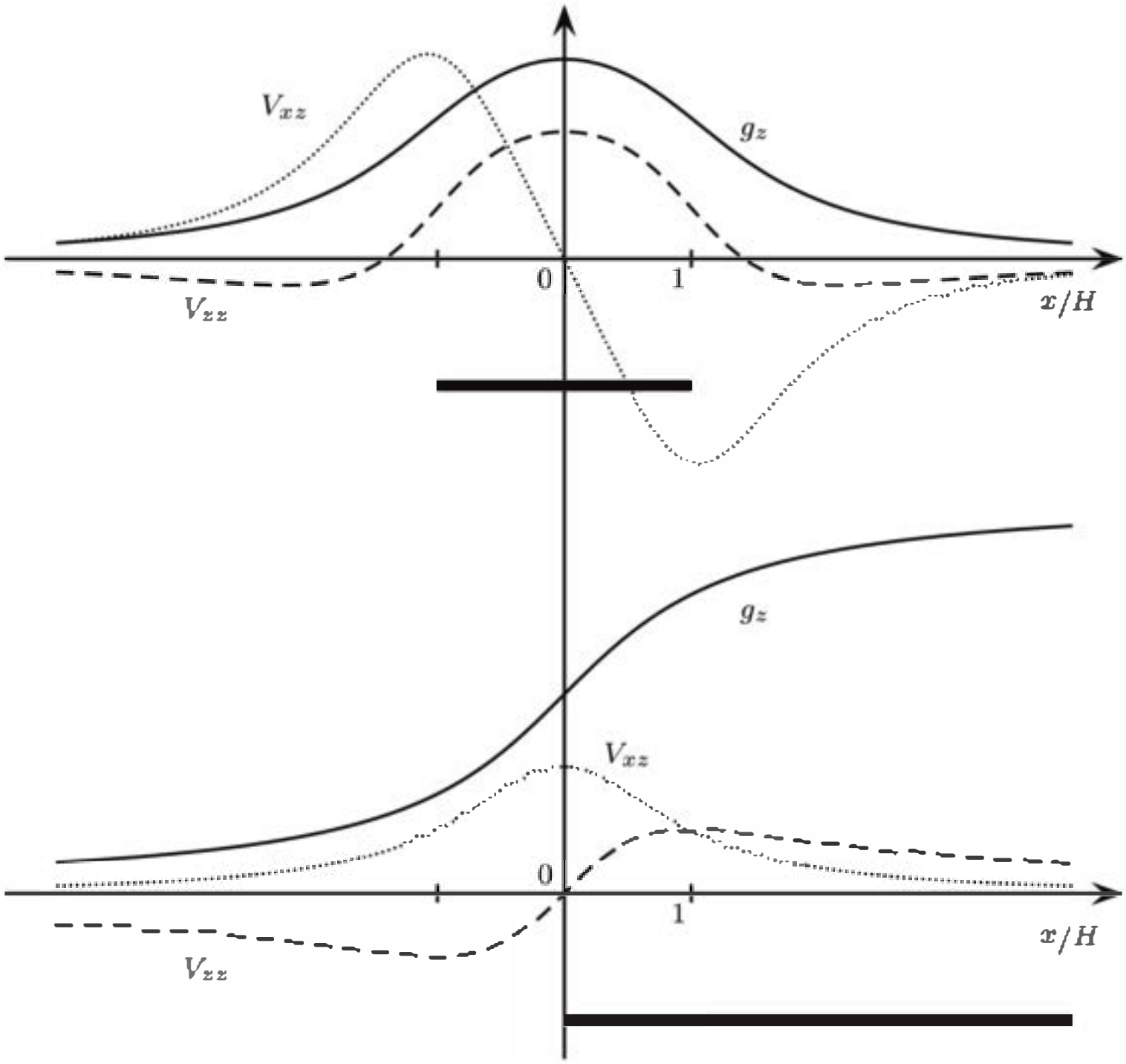


Рис. 4.4. Производные потенциала, создаваемого горизонтальной конечной и полубесконечной тонкими полосами

2) Что такое аномалия силы тяжести?
3) Сформулируйте прямую задачу гравиметрии.
4) Рассчитайте гравитационный эффект, создаваемый однородной прямой призмой высотой h, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной a.
5) Получите формулу для производной g_z гравитационного потенциала, создаваемого бесконечной полосой, наклоненной под углом α к поверхности Земли.
6) Получите выражения для производных V_{xz} и V_{zz} гравитационного потенциала, создаваемого прямоугольным параллелепипедом.

7) Вычислите гравитационную аномалию для бесконечного цилиндрического кольца.
8) Найдите гравитационное поле, создаваемое наклонным цилиндром радиуса R, угол между вертикалью и осью цилиндра равен α.

§ 35. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

Обратные задачи гравиметрии бывают как линейными, так и нелинейными. К **линейным обратным задачам гравиметрии** относится проблема нахождения плотности $\rho(\xi)$ в уравнении (34.19) по известному гравитационному полю $V(x)$ и (или) его производным. Обычно считают, что плотность гравитирующих масс $\rho(\xi) \in L_2(D)$, где D — носитель масс. Если же нам необходимо определить носитель масс, то мы получаем **нелинейную обратную задачу**.

Обратная задача гравиметрии традиционно решается по данным наблюдений силы тяжести. Существует достаточно много способов ее решения. Одной из практических реализаций решения обратной задачи является подбор в нижнем полупространстве эквивалентных распределений избыточных плотностей. Затем с помощью метода регуляризации, изложенного в гл. 3, ищется наиболее оптимальное решение. При определенных сочетаниях распределения избыточных плотностей решение получается устойчивым и близким к истинному распределению плотностей исходных моделей. Как правило, наиболее устойчивое решение получается для аномальных тел с однородной плотностью или для геологических разрезов с субвертикальной слоистостью и переменной плотностью. Результаты решения начинают резко ухудшаться, как только в моделях появляются избыточные плотности разного знака. В этих случаях локальные поля компенсируют друг друга, и суммарное поле по амплитуде может быть меньше среднеквадратической ошибки наблюдений. Следовательно, результаты решения обратной задачи в этих условиях не имеют физического смысла. Также необходимо отметить, что теоретически распределение избыточных плотностей разных знаков может создавать нулевое распределение поля, и тогда решение вообще не существует.

Из основной формулы Грина для гармонических функций в некоторой области D пространства $\mathbb{R}^3$ следует, что

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) \right] \mathrm{d}\sigma_P, \qquad (35.1)$$

где Σ — граница области D, n — внешняя нормаль, M — точка наблюдения, P — точка на поверхности Σ, по которой производится интегрирование. Таким образом, любая гармоническая функция может быть представлена с помощью интегралов, являющихся поверхностными потенциалами.

Если известны компоненты магнитного или гравитационного поля (например, первая производная потенциала по z на некотором рельефе над физической поверхностью Земли), то мы можем представить потенциал поля в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, создаваемых горизонтальной плоскостью, расположенной ниже заданного рельефа:

$$\begin{aligned} V(M) = &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(\xi_1,\xi_2)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}} + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2(\xi_1,\xi_2) x_3\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2}{[\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}]^3}, \end{aligned} \qquad (35.2)$$

$M = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$.

Мы выбрали систему координат так, чтобы плоскость простого и двойного слоев задавалась уравнением $x_3 = 0$. Тогда производная по x_3 потенциала V, взятая с обратным знаком, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x_3}(M) = &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(\hat{\xi}) x_3\, \mathrm{d}\hat{\xi}}{[\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}]^3} + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2(\hat{\xi})(2x_3^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2)^2\, \mathrm{d}\hat{\xi}}{[\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}]^5}. \end{aligned} \qquad (35.3)$$

Функции ρ_1, ρ_2 неизвестны. Пусть компоненты поля заданы в конечном множестве точек M_i, $i = 1, 2, \ldots, N$; $M_i = (x_i, y_i, z_i)$. Обозначим подынтегральную функцию в первом слагаемом

в точке M_i через $Q_1^{(i)}$, а во втором слагаемом — через $Q_2^{(i)}$. Тогда получим:

$$-\frac{\partial V(M_i)}{\partial x_3} \equiv f_i = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\rho_1(\hat{\xi})Q_1^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_2(\hat{\xi})Q_2^{(i)}(\hat{\xi})\right] \mathrm{d}\hat{\xi}, \quad (35.4)$$

$i = 1, 2, \ldots, N$.

На практике компоненты поля бывают заданы с некоторой погрешностью, поэтому входной информацией являются значения $f_{i,\delta}$. С помощью решения вариационной задачи:

$$\Omega(\rho) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\rho_1^2(\hat{\xi}) + \rho_2^2(\hat{\xi}))\, \mathrm{d}\hat{\xi} \to \min \quad (35.5)$$

при условии

$$f_{i,\delta} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\rho_1(\hat{\xi})Q_1^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_2(\hat{\xi})Q_2^{(i)}(\hat{\xi})\right] \mathrm{d}\hat{\xi} = 0, \quad (35.6)$$

$i = 1, 2, \ldots, N$, получим, что искомые функции должны иметь вид

$$\rho_1^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_1(\hat{\xi}, \lambda), \quad \rho_2^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_2(\hat{\xi}, \lambda),$$

$$\tilde{\rho}_1(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Q_1^{(i)}(\hat{\xi}), \quad \tilde{\rho}_2(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Q_2^{(i)}(\hat{\xi}).$$

Для получения функций такого вида нам необходимо продифференцировать функционал $\Omega(\rho)$ по ρ_1, ρ_2. Отметим, что данный функционал является сильно выпуклым.

Приходим к следующей системе линейных уравнений:

$$A\lambda = f_\delta, \quad (35.7)$$

элементы матрицы которой в нашем случае имеют вид:

$$a_{ij} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[Q_1^{(i)}(\hat{\xi})Q_1^{(j)}(\hat{\xi}) + Q_2^{(i)}(\hat{\xi})Q_2^{(j)}(\hat{\xi})\right] \mathrm{d}\hat{\xi}, \quad (35.8)$$

$$1 \leqslant i \leqslant N, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

В нашем случае коэффициенты a_{ij} могут быть вычислены явно с помощью интеграла Пуассона в виде:

$$a_{ij} = 2\pi \left\{ \frac{x_{3,i} + x_{3,j}}{(\sqrt{(x_{3,i}+x_{3,j})^2 + (x_{1,i}-x_{1,j})^2 + (x_{2,i}-x_{2,j})^2})^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(x_{3,i}+x_{3,j})(9[(x_{1,i}-x_{1,j})^2 + (x_{2,i}-x_{2,j})^2] - 6(x_{3,i}+x_{3,j})^2)}{(\sqrt{(x_{3,i}+x_{3,j})^2 + (x_{1,i}-x_{1,j})^2 + (x_{2,i}-x_{2,j})^2})^7} \right\}, \tag{35.9}$$

$1 \leqslant i \leqslant N$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Как известно, интеграл Пуассона дает решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа и области в форме верхнего полупространства $x_3 > x_{30}$:

$$u(x_1, x_2, x_3 - x_{30}) =$$
$$= \frac{x_3 - x_{30}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u(\xi_1, \xi_2, x_{30})\, d\xi_1\, d\xi_2}{\left((x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-x_{30})^2\right)^{3/2}}. \tag{35.10}$$

По найденным из решения системы множителям λ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, можно далее определить величины вторых производных потенциала гравитационного поля.

Вопросы и задачи

Приведите пример обратной задачи гравиметрии.

§ 36. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Как было показано выше, в рамках вариационного метода задача построения аппроксимации источников поля сводится к решению системы линейных уравнений. Для решения таких систем необходимо применять различные методы регуляризации. Приведем описание двух таких методов нахождения устойчивых приближенных решений СЛАУ.

Особенностью предлагаемых методов является применение принципа усреднения пробных решений, который заключается в следующем. Основная стратегия нахождения устойчивых приближенных решений состоит в генерации последовательности приближенных решений $\tilde{x}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ и далее $\hat{x}^{(k)}$, где

$$\tau_k = \frac{(f_\delta, A\tilde{x}^{(k)})}{\|A\tilde{x}_k\|_E^2} = 1 + \frac{(A\tilde{x}^{(k)}, f_\delta - A\tilde{x}^{(k)})}{\left\|A\tilde{x}^{(k)}\right\|_E^2}, \tag{36.1}$$

и в нахождении набора значений k, таких, что

$$1 \leqslant k_{\min} \leqslant k \leqslant k_{\max} < +\infty, \tag{36.2}$$

для которых

$$\delta^2_{\min} \leqslant \left\| \hat{r}^{(k)} \right\|^2_E = \left\| f_\delta - A\hat{x}^{(k)} \right\|^2_E \leqslant \delta^2_{\max}, \tag{36.3}$$

причем

$$\left\| \hat{r}^{(k_{\min}-1)} \right\|^2_E > \delta^2_{\max}, \qquad \left\| \hat{r}^{(k_{\max}+1)} \right\|^2_E < \delta^2_{\max}. \tag{36.4}$$

Приближенные решения $\hat{x}^{(k)}$, для которых номер k удовлетворяет приведенным выше неравенствам, именуются **пробными решениями**. Если множество пробных решений достаточно велико, а также имеется дополнительная информация об искомом решении, то множество пробных решений $\hat{x}^{(k)}$, $k = k_{\min}, k_{\min}+1, \ldots, k_{\max}$, может быть сокращено до множества допустимых решений $\hat{\tilde{x}}^{(r)}$, $r = 1, 2, \ldots, R_{\text{макс}}$. Окончательное (искомое, оптимальное) приближенное решение системы уравнений находится по принципу усреднения допустимых решений:

$$\hat{x} = \tau\tilde{x}, \qquad \tau = \frac{(f_\delta, A\tilde{x})}{\|A\tilde{x}\|^2_E} = 1 + \frac{(A\tilde{x}, f_\delta - A\tilde{x})}{\|A\tilde{x}\|^2_E}, \tag{36.5}$$

где

$$\tilde{x} = \sum_{r=1}^{R_{\text{макс}}} p_r \hat{\tilde{x}}^{(r)}, \qquad p_r > 0, \qquad \sum_{r=1}^{R_{\text{макс}}} p_r = 1. \tag{36.6}$$

36.1. Метод Лаврентьева

Классический метод регуляризации для систем с симметрическими положительно полуопределенными матрицами — метод М. М. Лаврентьева. Пусть матрица $A = A^T \geqslant 0$. В этом случае происходит переход от системы

$$Ax = f_\delta = f + \delta f \tag{36.7}$$

к системе

$$(\alpha R + A)x_\alpha = f_\delta, \tag{36.8}$$

где $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ — параметр регуляризации, а R есть $(M \times M)$-матрица со свойством $R = R^T > 0$, достаточно хорошо обусловленная.

36.2. Метод Холесского

Пусть матрица A — симметрическая и положительно определенная ($A = A^T > 0$), тогда алгоритм Холесского обеспечивает представление A в форме $A = LL^T$, где L — нижняя треугольная матрица с элементами l_{ij}, $i \leqslant j$. Процедура построения матрицы L описывается соотношениями:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \qquad l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}, \quad j > 1,$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}^2}, \qquad l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} l_{jp}}{l_{ii}}, \quad j > i.$$

Регуляризованный же алгоритм Холесского состоит в использовании соотношений

$$l_{11}(\beta) = \sqrt{a_{11} + \beta}, \qquad l_{j1}(\beta) = \frac{(1-\beta)a_{j1}}{l_{11}(\beta)}, \quad j > 1,$$

$$l_{ii}(\beta) = \sqrt{a_{ii} + \beta - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}^2}, \quad l_{ji}(\beta) = \frac{(1-\beta)a_{ji} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}(\beta) l_{jp}(\beta)}{l_{ii}(\beta)},$$

где β — параметр регуляризации, $0 < \beta < 1$.

Таким образом находятся элементы $l_{ij}(\beta)$ нижней треугольной матрицы $L(\beta)$ и составляется регуляризованная система

$$L(\beta)L^T(\beta)x_\delta = f_\delta, \tag{36.9}$$

которая и решается. Необходимо отметить простоту и экономичность алгоритма.

Заметим, что регуляризованный алгоритм Холесского есть одновременно обычный алгоритм Холесского, примененный к матрице системы

$$[(D_A + \beta I) + (1-\beta)(A - D_A)]\, x_\beta = f_\delta, \qquad 0 < \beta < 1, \tag{36.10}$$

где I — единичная матрица, D_A — диагональная матрица, главная диагональ которой совпадает с главной диагональю матрицы A.

Вопросы и задачи

1) Какие численные методы можно применять при решении систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданной правой частью?
2) Что такое «пробное решение»?

§ 37. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим два модельных примера, когда гравитационное поле создается группой тел простой геометрической формы. При решении этих задач элемент гравитационного поля представляется в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев. Такое представление мы назовем **S-аппроксимацией** поля.

Модельный участок № 1. Общее количество расчетных гравиметрических пунктов составляет 6000, сеть нерегулярная (рис. 4.5). Рельеф земной поверхности относительно спокойный, перепад высот составляет около 3 *км*. Для данного модельного участка было рассчитано аномальное гравитационное поле без выхода на нормальное поле (рис. 4.6). Для данной сети было также рассчитано модельное гравитационное поле, обусловленное 14 прямоугольными призмами, расположенными двумя группами по семь призм в каждой.

Модельный участок № 2. Данный модельный участок аналогичен предыдущему. Расчетное аномальное гравитационное поле отличается от поля на модельном участке № 1 выходом на нормальное поле (рис. 4.7).

Для модельного участка № 1 применялся регуляризованный метод Холесского. Были получены следующие данные:

1) $N = 6000$ — число исходных точек, $N_1 = 4352$ — число точек без контрольных точек I типа, $N_2 = 4689$ — число точек без контрольных точек II типа; контрольные точки I типа строятся следующим образом: из всей выборки исключаются 20% точек с наименьшими значениями поля, по остальным точкам строится аппроксимация; контрольные точки II типа — это приблизительно 10% от числа контрольных точек I типа, в которых наблюдается наибольшее отклонение от исходного поля;
2) $H_1 = 2$ *км* и $H_2 = 7$ *км* — координаты z-плоскостей, на которых распределены простой и двойной слои соответственно;
3) $\sigma = \dfrac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\sqrt{N}}$ — среднеквадратическое отклонение,

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{\delta^2_{\min}}{N}} = 0{,}036 \text{ мГал}, \quad \sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\delta^2_{\max}}{N}} = 0{,}041 \text{ мГал};$$

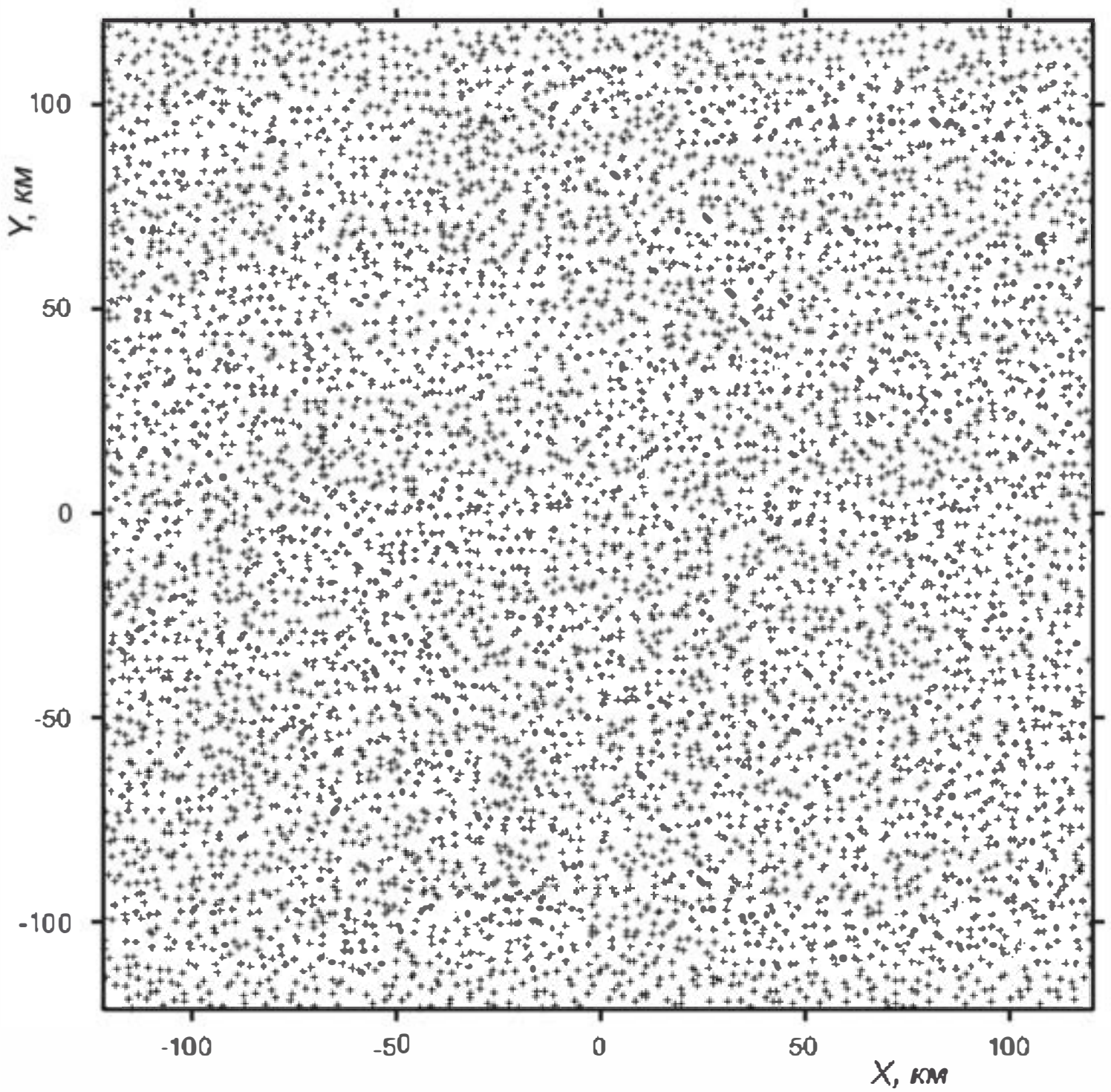


Рис. 4.5. Модельный участок № 1.
Схема размещения гравиметрических пунктов

4) $\sigma_0 = 0{,}041$ *мГал* — среднеквадратическое отклонение, полученное с помощью аппроксимации по исходным точкам;
5) $\sigma_1 = 0{,}043$ *мГал* — среднеквадратическое отклонение, полученное с помощью аппроксимации по точкам рельефа без контрольных точек I типа;
6) $\sigma_{\text{контр 1}} = 0{,}052$ *мГал* — среднеквадратическое отклонение, полученное в контрольных точках I типа;

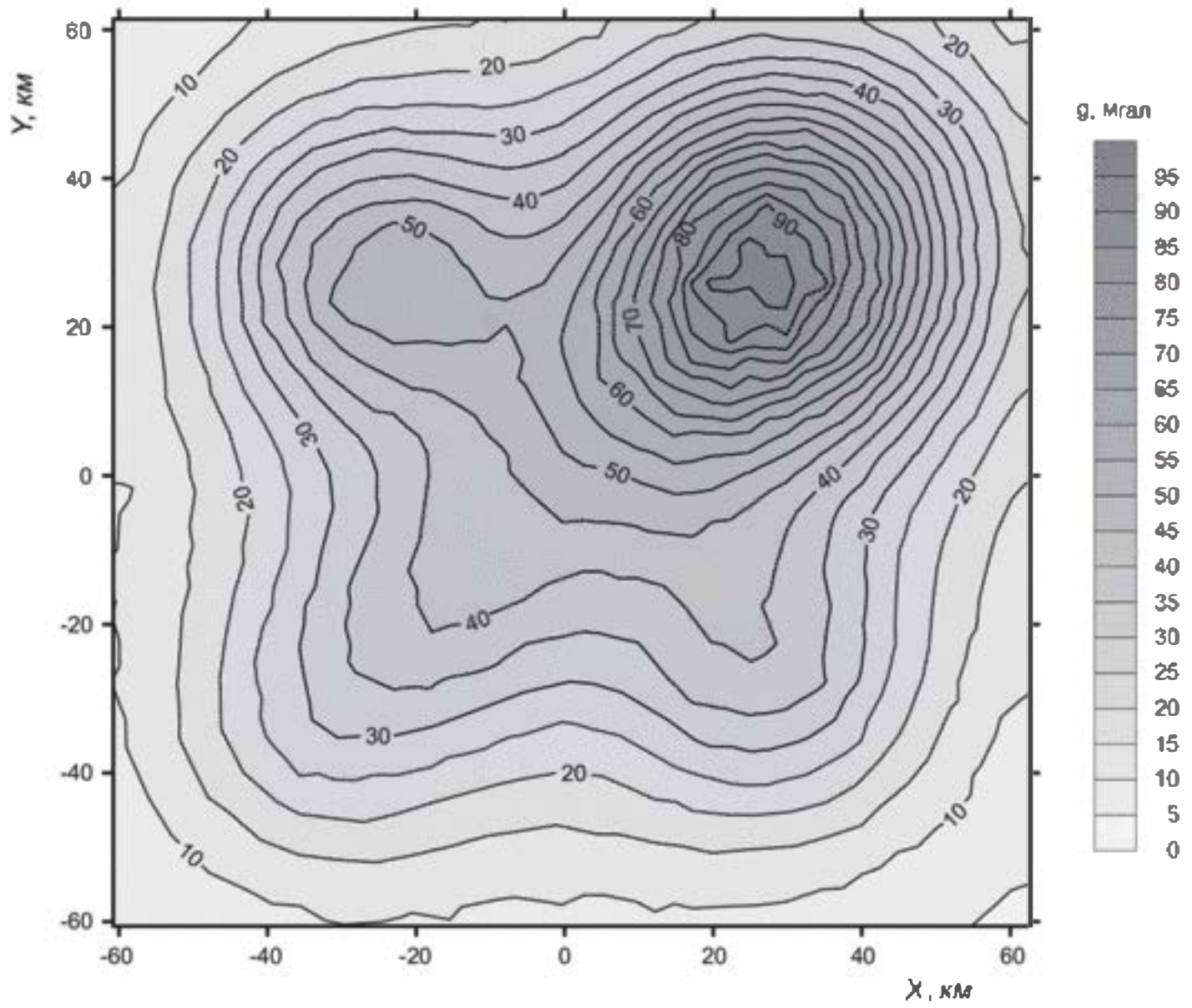


Рис. 4.6. Модельный участок № 1.
Карта аномального гравитационного поля

7) $\sigma_2 = 0{,}041$ *мГал* — среднеквадратическое отклонение, полученное с помощью аппроксимации по точкам рельефа без контрольных точек II типа;
8) $\sigma_{\text{контр } 2} = 0{,}048$ *мГал* — среднеквадратическое отклонение, полученное в контрольных точках II типа;
9) диапазон значений параметра регуляризации — $1{,}62$–$5{,}5 \cdot 10^{-3}$;
10) коэффициент корреляции

$$\nu = \frac{\|\delta f_{\text{точн}} - (Ax - f_\delta)\|_E}{\|\delta f_{\text{точн}}\|} = 0{,}31; \qquad (37.1)$$

11) $n = 17$ — количество пробных решений;

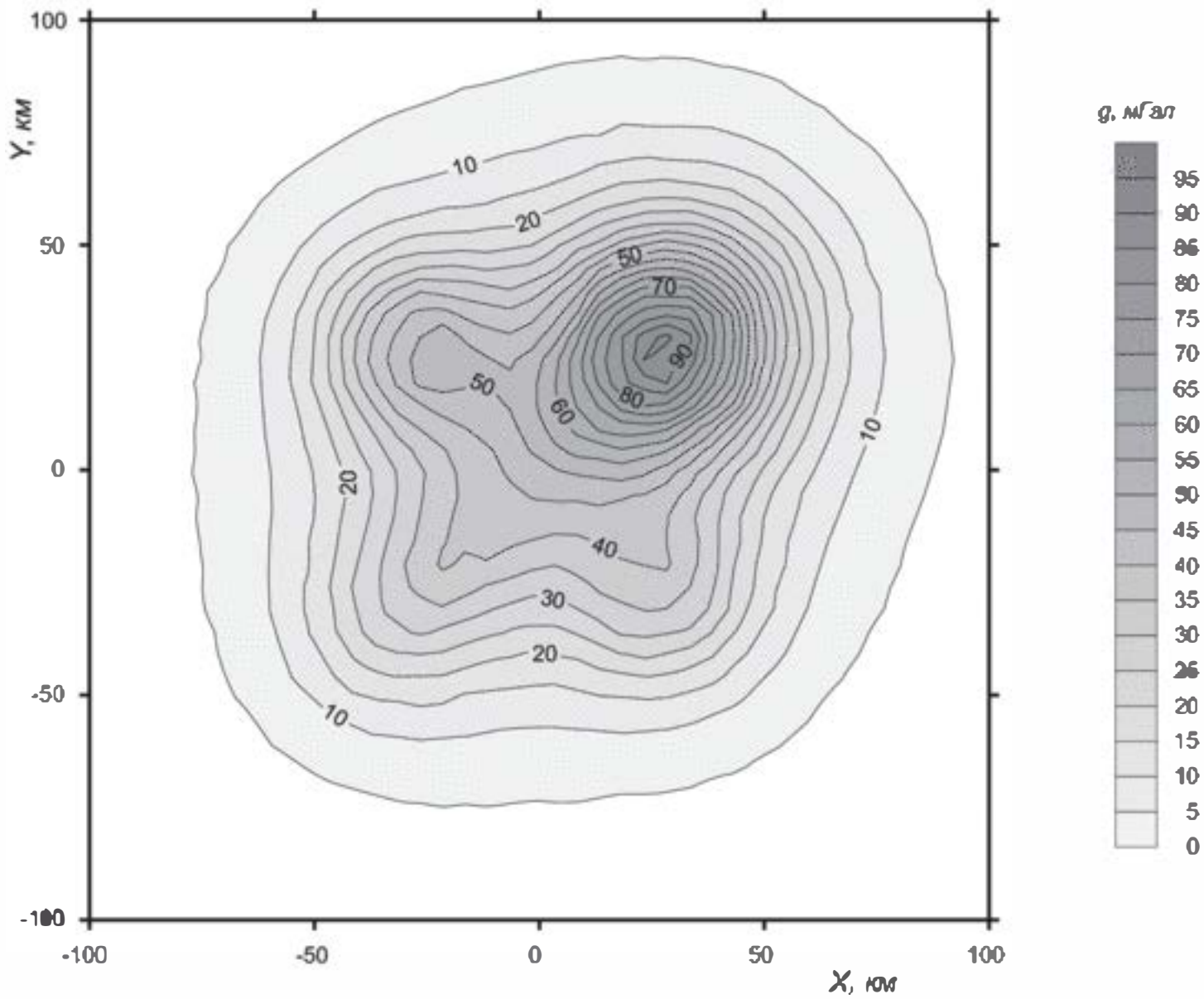


Рис. 4.7. Модельный участок № 2.
Карта аномального гравитационного поля

12) $\Delta = \dfrac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\|f_\delta\|_E} = 0{,}01$ — показатель качества решения;

13) время решения СЛАУ — 12 часов 3 минуты.

Для модельного участка № 2 использовался метод Лаврентьева и были полученные следующие данные:

1) $N = 6000$, $N_1 = 4551$, $N_2 = 5009$;
2) $H_1 = 19$ *км* и $H_2 = 22$ *км*;
3) $\sigma_{\min} = 0{,}018$ *мГал*, $\sigma_{\max} = 0{,}019$ *мГал*;
4) $\sigma_0 = 0{,}019$ *мГал*, $\sigma_1 = 0{,}020$ *мГал*, $\sigma_{\text{контр } 1} = 0{,}024$ *мГал*, $\sigma_2 = 0{,}019$ *мГал*, $\sigma_{\text{контр } 2} = 0{,}021$ *мГал*;
5) диапазон значений параметра регуляризации — $0{,}925$–$5{,}500 \cdot 10^{-5}$;
6) $\nu = 0{,}213$;

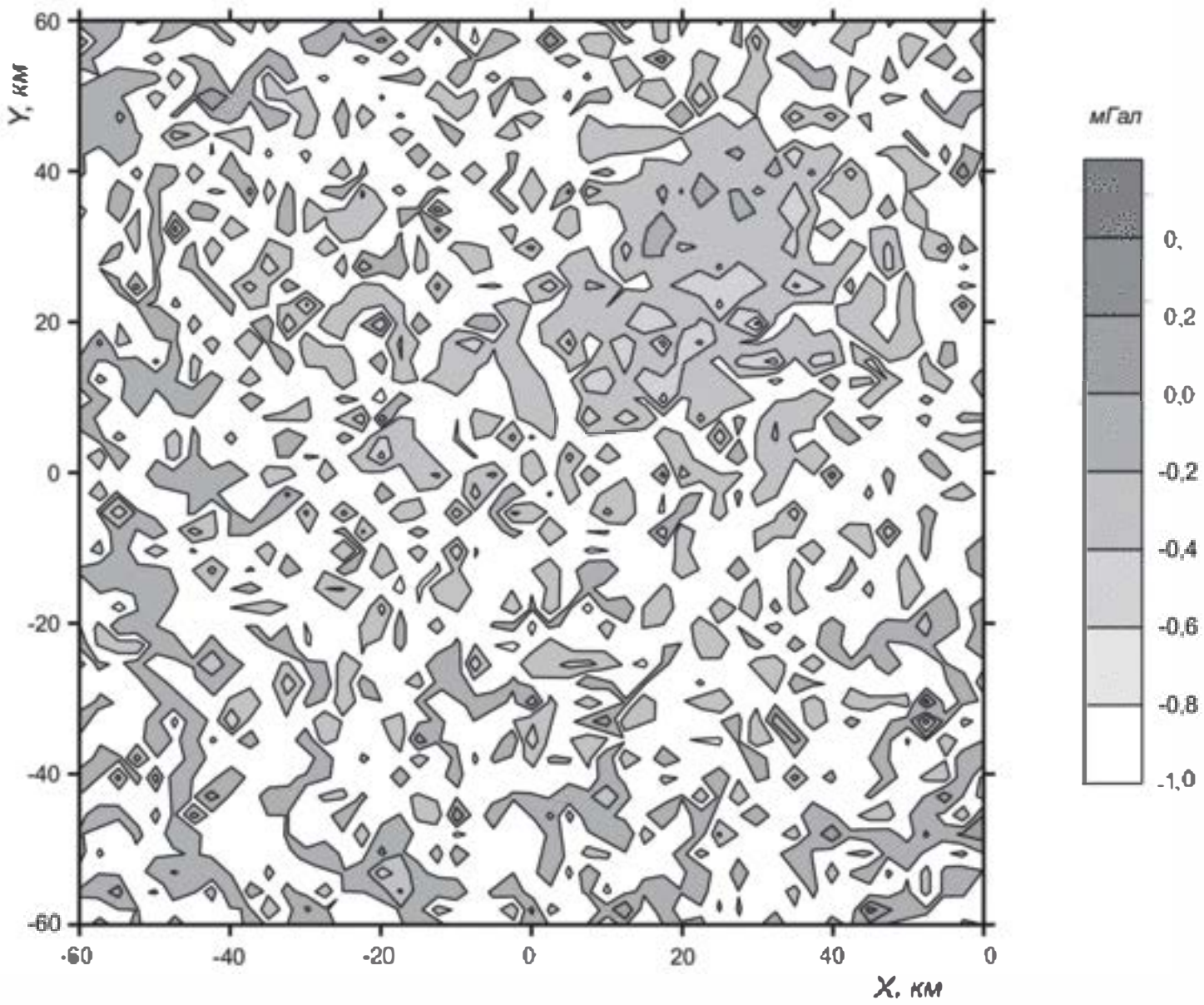


Рис. 4.8. Модельный участок № 1.
Карта разностного гравитационного поля

7) $n = 16$ — количество пробных решений, $\Delta = 0{,}01$;

8) время решения СЛАУ — 14 часов 17 минут.

Из полученных данных и рис. 4.8, 4.9 следует, что с помощью S-аппроксимации можно достаточно хорошо аппроксимировать гравитационные поля. Среднеквадратическое отклонение σ_0 полученного решения СЛАУ лежит в заданном диапазоне $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$. Среднеквадратическое отклонение $\sigma_{\text{контр } 1}$ больше σ_0, поскольку контрольные точки первого типа выбираются так, чтобы заданное поле в них имело минимальные по модулю значения. Если рельеф задан с выходом на нормальное поле, то различие между $\sigma_{\text{контр } 1}$ и σ_0 будет не слишком большим (это видно на втором примере). Если же выхода на нормальное поле нет, то среднеквадратическое отклонение

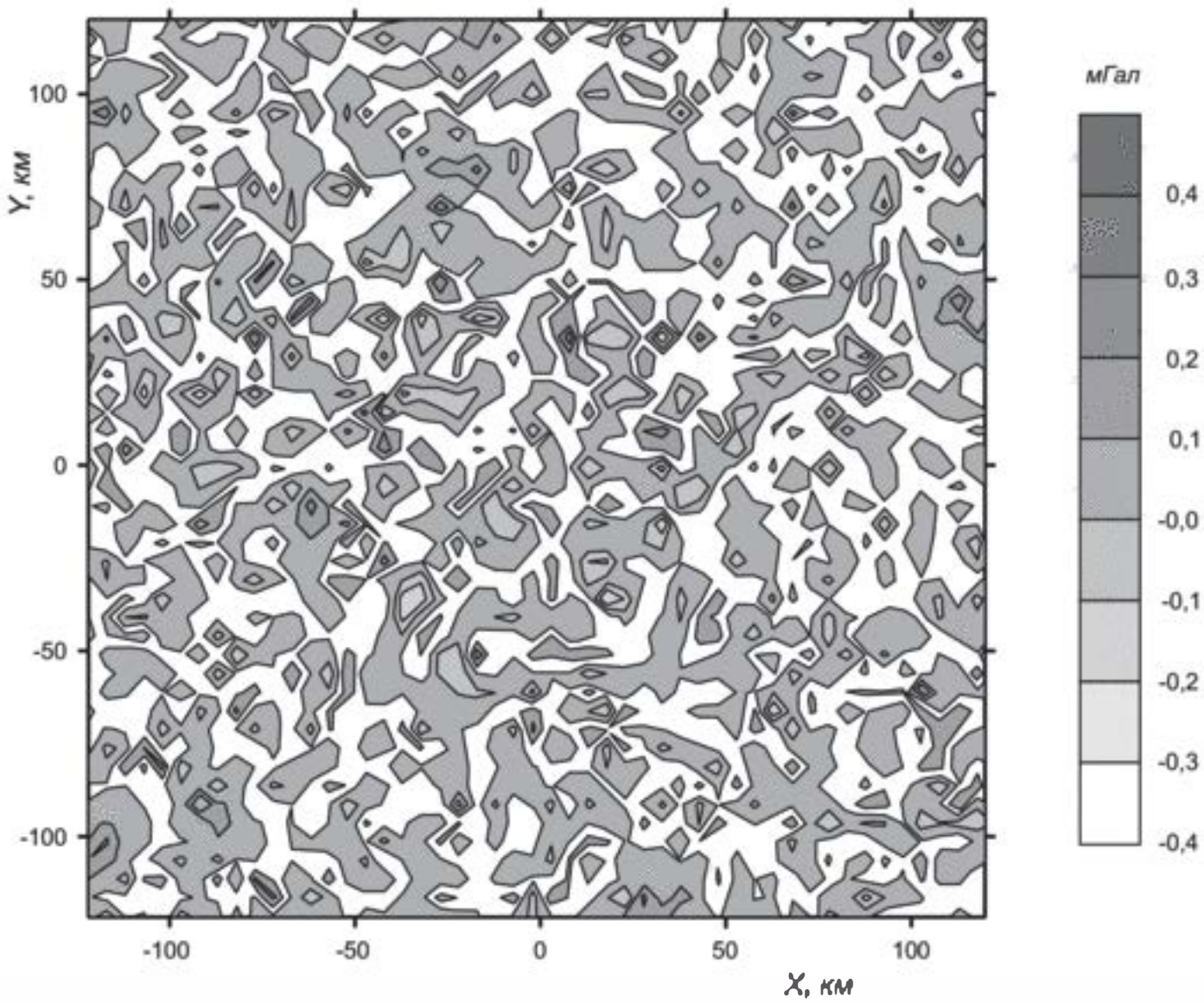


Рис. 4.9. Модельный участок № 2.
Карта разностного гравитационного поля

в контрольных точках I типа может на порядок отличаться от σ_0 (первый пример).

Литература

1. **Голуб Дж., Лоун Ч. Ван.** *Матричные вычисления.* — М.: Мир, 1999. — 548 с.
2. **Мудрецова Е. А., Веселов К. Е.** *Гравиразведка. Справочник геофизика.* — М.: Недра, 1990. — 607 с.
3. **Клаербоут Дж. Ф.** *Теоретические основы обработки геофизической информации с приложением к разведке нефти.* — М.: Недра, 1981. — 304 с.
4. **Lowrie W.** *Fundamentals of geophysics.* — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — 392 P.
5. **Milsom J.** *Field geophysics.* — Chichester: Wiley, 2002. — 244 P.

6. **Telford W. M., Geldart L. P., Sheriff R. E.** *Applied geophysics.* — Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — 790 P.
7. **Иванов В. К.** Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала // *Доклады АН СССР.* — 1955. — Т. 105, № 3. — С. 409–411.
8. **Иванов В. К.** Интегральные уравнения первого рода и приближенное решение обратной задачи потенциала // *Доклады АН СССР.* — 1962. — Т. 142, № 5. — С. 998–1000.
9. **Степанова И. Э.** Об интегральном уравнении обратной трехмерной задачи потенциала // *Математическое моделирование.* — 1997. — Т. 9, № 4. — С. 77–84.
10. **Степанова И. Э.** О восстановлении источника гравитационных масс в задачах типа рудных // *Физика Земли.* — 1998. — Т. 34, № 11. — С. 86–89.
11. **Страхов В. Н.** Геофизика и математика // *Физика Земли.* — 1995. — № 12. — С. 4–23.
12. **Страхов В. Н., Степанова И. Э.** Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // *Физика Земли.* — 2002. — Т. 38, № 2. — С. 3–19.
13. **Страхов В. Н., Степанова И. Э.** Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // *Физика Земли.* — 2002. — Т. 38, № 7. — С. 3–12.

Глава 5

ЗАДАЧИ МАГНИТОРАЗВЕДКИ

§ 38. ВВЕДЕНИЕ

Магниторазведка является одним из наиболее эффективных методов интерпретации геофизических данных. Высокочувствительные приборы позволяют выявлять очень слабые магнитные аномалии районов развития осадочных пород, что дает возможность применять этот метод для решения задач поиска нефти и газа. Однако с увеличением точности измерений возрастает влияние помех и осложнений, затрудняющих геологическое истолкование результатов магнитной съемки.

Напомним некоторые понятия, известные из курса общей физики. Магнитное поле обнаруживается по действию на электрические токи и постоянные магниты. В свою очередь, проводники с током создают в окружающем пространстве магнитное поле. Магнитное поле можно характеризовать вектором магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ или вектором напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$. В системе СИ магнитная индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношением

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu \boldsymbol{H}, \tag{38.1}$$

где μ_0 — магнитная постоянная, μ — магнитная проницаемость среды.

Но, как известно, всякое вещество является магнетиком, т. е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Намагниченное вещество создает магнитное поле $\boldsymbol{B}'$, которое налагается на обусловленное токами поле $\boldsymbol{B}_0$. Оба поля дают в сумме результирующее поле

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}_0. \tag{38.2}$$

Намагничение магнетика естественно характеризовать магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют **намагниченностью**. Мы будем обозначать ее через I. Магнитный момент контура с током выражается по формуле

$$\boldsymbol{j} = S \cdot i\boldsymbol{n}, \tag{38.3}$$

где S — площадь фигуры, ограниченной контуром с током, i — сила тока в контуре, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к плоскости контура. Понятно, что для одной и той же плоскости можно выбрать два противоположных вектора, нормальных к этой плоскости. Для контура с током направление нормали находится по **правилу буравчика** (винта): при вращении буравчика в направлении тока вектор $\boldsymbol{n}$ совпадает с направлением поступательного движения буравчика.

В прикладной геофизике обычно имеют дело с относительными магнитными измерениями. При этом значения одного или более элементов магнитного поля в любой точке выражаются в виде их разностей со значениями в опорных точках, выбранных подходящим образом.

Для определения аномалии земного магнитного поля необходимо знать его характер в невозмущенном состоянии. С весьма хорошим приближением регулярное геомагнитное поле можно представить как поле диполя, расположенного в центре Земли и имеющего магнитный момент, направленный в сторону Южного географического полюса. В настоящее время считается, что магнитное поле Земли вызывается токами в жидком ядре Земли. Значения магнитного поля измеряются в $A/м$ ($2000 \cdot 10^{-6}$ ед. СГС). На поверхности Земли напряженность магнитного поля составляет 40 $A/м$, но сильно зависит от географического положения и наличия различных магнитных аномалий, которые могут в разы изменять силу поля. Проекции силовых линий геомагнитного поля на поверхность Земли образуют **магнитные меридианы**. В любой точке на земной поверхности вектор магнитного поля, как любой трехмерный вектор, полностью определяется своей длиной и двумя углами. Конечно, эти два угла можно ввести различными способами. Обычно используются **склонение** D (угол между магнитным и географическим меридианами) и **наклонение** I (угол между вектором и его горизонтальной проекцией). Таким образом, если вектор $\boldsymbol{F}$ в декартовой системе координат может быть записан как (X, Y, Z), то горизонтальная компонента H, склонение D и наклонение I таковы:

$$H = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad D = \operatorname{arctg}\left(\frac{Z}{H}\right), \quad I = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right). \qquad (38.4)$$

Вертикальная компонента Z считается положительной, если направлена вниз, как в Северном полушарии, и отрицатель-

ной, если направлена вверх, как в Южном полушарии. Точки на земной поверхности, в которых $I = \pm 90°$, называются **Северным** и **Южным магнитными полюсами**.

§ 39. ТЕОРИЯ МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Приведем основные положения классической теории магнитного потенциала. Все рассмотрения проводятся в евклидовом пространстве n измерений.

Распределение намагниченных масс в пространстве $\mathbb{R}^n$ описывается вектором намагниченности $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\boldsymbol{I}(\xi) = (I_1(\xi), I_2(\xi), \ldots, I_n(\xi))^T$. Носитель намагниченности обозначается через $\operatorname{supp} \boldsymbol{I}$ и представляет собой объединение конечного числа замкнутых областей.

По аналогии с гравиметрией можно ввести магнитный потенциал. Если $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{x} \notin \operatorname{supp} \boldsymbol{I}$, то потенциал магнитного поля $U(\boldsymbol{x}) = U_e(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет в точке $\boldsymbol{x}$ уравнению Лапласа:

$$\Delta U(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \tag{39.1}$$

если же $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} \operatorname{supp} \boldsymbol{I}$, то потенциал магнитного поля $U(\boldsymbol{x}) = U_i(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет в точке $\boldsymbol{x}$ уравнению Пуассона:

$$\Delta U(\boldsymbol{x}) = -C_n \operatorname{div} \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}), \tag{39.2}$$

где C_n — абсолютная константа; в случае $n = 3$ имеем $C_3 = 4\pi$. Обратим внимание на тот факт, что в точке $\boldsymbol{x}$ вектор-функция $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})$ должна иметь соответствующие частные производные компонент по координатам. Из (39.2) следует, что можно ввести объемную плотность $\mu(x) = \operatorname{div} \boldsymbol{I}(x)$.

В точках x, в которых потенциал магнитного поля $U(x)$ удовлетворяет определяющему уравнению (39.1) или (39.2), справедливо интегральное представление:

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{x}) &= \int_{\operatorname{supp} \boldsymbol{I}} \sum_{k=1}^{n} \left(I_k(\xi) \frac{\partial \Omega_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x})}{\partial x_k} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \\ &= -\int_{\operatorname{supp} \boldsymbol{I}} \left(\sum_{k=1}^{n} I_k(\xi) \frac{\partial \Omega_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x})}{\partial \xi_k} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \tag{39.3}$$

В последнем уравнении $\Omega_n(\boldsymbol{x})$ есть, как обычно, фундаментальное решение уравнения Лапласа, т. е. решение уравнения

$$\Delta \Omega_n(x) = -C_n \delta(\boldsymbol{x}), \tag{39.4}$$

при $n \geqslant 3$ удовлетворяющее условию:

$$\lim_{|x|\to\infty} [\Omega_n(x)] = 0. \tag{39.5}$$

В уравнении (39.4) $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Из (39.3) следует, что

$$U(x) = \int_{\operatorname{supp} I} \operatorname{div} I(\xi)\Omega_n(\xi - x)\, \mathrm{d}\xi + \int_{\partial \operatorname{supp} I} \partial I_\nu(\xi)\Omega_n(\xi - x)\, \mathrm{d}\xi, \tag{39.6}$$

где $\partial \operatorname{supp} I$ — граница носителя намагниченных масс, а $\partial I_\nu(\xi)$ — компонента вектора намагниченности по внутренней нормали к границе носителя. Из уравнения (39.6) следует, что магнитный потенциал намагниченных масс при определенных условиях представим в виде суммы потенциалов объемных (с плотностью $\frac{\operatorname{div} I(\xi)}{\gamma}$) и поверхностных (с плотностью $\frac{\partial I_\nu(\xi)}{\gamma}$) масс ($\gamma$ — универсальная гравитационная постоянная).

Вопросы и задачи

1) Дайте определение магнитного потенциала.
2) Вычислите вторую производную магнитного потенциала. В каком случае это возможно?

§ 40. ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТОРАЗВЕДКИ

Под прямой задачей магниторазведки понимается задача вычисления магнитного потенциала $U(x)$ и его производных в интегральном уравнении (39.6), если известен носитель намагниченных масс $\operatorname{supp} I$ и намагниченность I. В большинстве случаев намагниченность $I(\xi) \in L_2(T)$, где T — носитель магнитных масс.

Решение основного уравнения прямой задачи магниторазведки в трехмерном пространстве имеет вид

$$U = -\int_T \left(I \operatorname{grad} \frac{1}{R} \right) \mathrm{d}\tau, \tag{40.1}$$

где U — магнитный потенциал тела объемом T; $\overline{I}$ — магнитный момент единицы объема, намагниченность (имеется в виду избыточная намагниченность); $R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ — расстояние от точки $M(x, y, z)$ расчета магнитного эффекта до элементарного объема $\mathrm{d}\tau$ с центром $P(\xi, \eta, \zeta)$.

Обычно решение выполняется в предположении $\overline{I} = \text{const}$ и имеет вид

$$U = -\left(\overline{I}\,\text{grad}\int_T \frac{1}{R}\,\mathrm{d}\tau\right). \tag{40.2}$$

Умножая и деля правую часть соотношения (40.2) на $\gamma\rho$, где γ — гравитационная постоянная, ρ — плотность тела, принимаемого однородным, получаем известную формулу Пуассона

$$U = -\left(\frac{\overline{I}}{\gamma\rho}\,\text{grad}\,V\right), \tag{40.3}$$

связывающую магнитный U и гравитационный V потенциалы, так как последний выражается формулой

$$V = \gamma\rho\int_T \frac{1}{R}\,\mathrm{d}\tau. \tag{40.4}$$

Разлагая скалярное произведение в последней формуле по проекциям намагниченности и градиента на оси координат, получаем

$$U = -\frac{1}{\gamma\sigma}\left(I_xV_x + I_yV_y + I_zV_z\right). \tag{40.5}$$

Если положить $\gamma\rho = 1$, то составляющие напряженности магнитного поля по осям координат примут вид

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial z} = (I_xV_{xz} + I_yV_{yz} + I_zV_{zz}), \tag{40.6}$$

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x} = (I_xV_{xx} + I_yV_{xy} + I_zV_{xz}), \tag{40.7}$$

$$Y = -\frac{\partial U}{\partial y} = (I_xV_{xy} + I_yV_{yy} + I_zV_{yz}). \tag{40.8}$$

Здесь система координат произвольна. Для вычисления компонентов напряженности магнитного поля необходимо знать величину и направление вектора намагниченности в выбранной системе координат и пять вторых производных гравитационного потенциала в этой системе. Шестая производная является зависимой согласно уравнению Лапласа

$$V_{xx} = -(V_{yy} + V_{zz}). \tag{40.9}$$

Если тело двумерное и рассматривается в нормальной системе координат (ось Oy направлена по простиранию тела), то $V_y = V_{xy} = V_{yy} = V_{yz} = 0$. При этом формулы (40.5)–(40.8) упрощаются и принимают вид

$$U = -(I_xV_x + I_zV_z), \qquad V_{xx} = -V_{zz}. \tag{40.10}$$

$$Z = I_xV_{xz} + I_zV_zz, \qquad X = I_xV_{xx} + I_zV_{xz}, \quad Y = 0. \tag{40.11}$$

Таким образом, для двумерных тел с горизонтальной длинной осью необходимо знать всего две производные гравитационного потенциала V_{xz} и V_{zz} и два компонента вектора намагниченности I_x и I_y. Магнитное поле создается величиной I_{xz} (лежащей в плоскости xOz), называемой **эффективной намагниченностью**.

Для простейших тел, ограниченных по размерам, можно получить следующие аналитические выражения:

1) Мощный пласт:

$$Z = 2I\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x+b}{h}\cdot\frac{l}{R_1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x-b}{h}\cdot\frac{l}{R_2}\right)\right], \qquad (40.12)$$

$$X = -2I\left[\ln\frac{\sqrt{(x+b)^2+h^2}}{\sqrt{(x-b)^2+h^2}} - \ln\frac{R_1+l}{R_2+l}\right], \qquad (40.13)$$

$$Y = -2I\left[\operatorname{arctg}\frac{x+b}{l} - \operatorname{arctg}\frac{x-b}{l} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x+b}{l}\cdot\frac{h}{R_1}\right) - \right.$$
$$\left. - \operatorname{arctg}\left(\frac{x-b}{l}\cdot\frac{h}{R_2}\right)\right]. \qquad (40.14)$$

Здесь x — абсцисса расчетной точки (начало координат расположено в эпицентре пласта), h — глубина верхней кромки пласта, b и l — полуширина и полудлина пласта, $R_1 = \sqrt{(x+b)^2+h^2+l^2}$, $R_2 = \sqrt{(x-b)^2+h^2+l^2}$.

2) Маломощный пласт:

$$Z = 2I\cdot 2b\,\frac{h}{x^2+h^2}\cdot\frac{l}{R}, \qquad (40.15)$$

$$X = -2I\cdot 2b\,\frac{x}{x^2+h^2}\cdot\frac{l}{R}, \qquad (40.16)$$

$$Y = -2I\cdot 2b\,\frac{l}{x^2+l^2}\cdot\left(1-\frac{h}{R}\right), \qquad (40.17)$$

где $R = \sqrt{x^2+h^2+l^2}$.

3) Круговой цилиндр:

$$Z = 2IS\left[\frac{h^2-x^2}{(x^2+h^2)^2} + \frac{h}{x^2+h^2}\cdot\frac{h}{R^2}\right]\cdot\frac{l}{R}, \qquad (40.18)$$

$$X = -2IS\left[\frac{2xh}{(x^2+h^2)^2} + \frac{x}{x^2+h^2}\cdot\frac{h}{R^2}\right]\cdot\frac{l}{R}, \qquad (40.19)$$

$$Y = -2IS\,\frac{1}{R^2}\cdot\frac{l}{R}, \qquad (40.20)$$

где h — глубина центра цилиндра, S — площадь его сечения.

Приведенные выше аналитические выражения записаны для профиля, одинаково удаленного от торцов.

Если $l \to \infty$, то $R_1 \to \infty$, $R_2 \to \infty$, $(l/R_1) \to (l/R_2) \to 1$ и в этом случае $Y \to 0$ для каждой модели. Мы получаем аналитические выражения полей для неограниченных по размерам тел.

Вопросы и задачи

1) Докажите, что решение основного уравнения магниторазведки имеет вид (40.1).
2) Вычислите компоненты магнитного поля, создаваемого трехмерным однородно намагниченным телом, имеющим форму кругового цилиндра радиуса R и высоты h.
3) Найти значения X, Y, Z для бесконечного кругового цилиндра ($l \to \infty$).

§ 41. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТОРАЗВЕДКИ

Под **обратными задачами магниторазведки** понимаются задачи нахождения объемных $\dfrac{\operatorname{div} I(\xi)}{\gamma}$ и поверхностных $\dfrac{\partial I_\nu(\xi)}{\gamma}$ магнитных потенциалов в уравнении (39.6) по известному магнитному полю и (или) его производным (**линейные обратные задачи**), а также задачи локализации источников магнитного поля (**нелинейные обратные задачи**).

Как и в случае обратных задач гравиразведки, представим компоненты аномального магнитного поля в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев. Введем аномальный магнитный потенциал:

$$\triangle\Phi_a(M) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}} + \\ + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2(\xi_1,\xi_2)x_3\,d\xi_1\,d\xi_2}{[\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}]^3}, \quad (41.1)$$

где $M = (x_1, x_2, x_3)$, $\hat{x} = (x_1, x_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$.

Мы выбрали систему координат так, чтобы плоскость простого и двойного слоев задавалась уравнением $x_3 = 0$. Тогда

производная по x_3 потенциала $\Delta\Phi_a$, взятая с обратным знаком, будет иметь вид:

$$-\frac{\partial\Delta\Phi_a}{\partial x_3}(M)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_1(\hat{\xi})x_3\,\mathrm{d}\hat{\xi}}{[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}]^3}+$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_2(\hat{\xi})(2x_3^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2)^2\,\mathrm{d}\hat{\xi}}{[\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}]^5}. \quad (41.2)$$

Искомыми являются функции $\rho_1(\xi_1,\xi_2)$, $\rho_2(\xi_1,\xi_2)$, называемые соответственно плотностью простого и двойного слоев. Затем по найденным из решения вариационной задачи плотностям простого и двойного слоев вычисляются значения аномального магнитного поля (строятся аналитические аппроксимации поля) и сравниваются с данными наблюдений.

Вопросы и задачи

1) Приведите пример обратной задачи магниторазведки.
2) Как связаны магнитный и гравитационный потенциалы?

§ 42. ПРИМЕРЫ

Была проведена обработка материалов детальной магнитной съемки, выполненной на титан-магнетитовом месторождении на одном из участков БАМа. Съемка выполнена на небольшом участке с высокой густотой сети (расстояние между профилями 20 *м*, расстояние между точками по профилю 5 *м*). Схема расположения пунктов (всего 3588) магнитных измерений приведена на рис. 5.1.

Участок магнитной съемки имеет достаточно сложный рельеф, высотные отметки изменяются от 650 *м* на севере участка до 770 *м* на южном окончании участка (рис. 5.2).

По результатам магнитной съемки на участке закартирована интенсивная магнитная аномалия меридиональной ориентировки, осложненная серией локальных максимумов с максимальным значением более 70000 *нТл* (рис. 5.3).

По результатам S-аппроксимации была получена карта магнитного поля, близкая к измеренному полю. Разность магнитных полей, измеренного и восстановленного по результатам S-аппроксимации, показана на рис. 5.4. В то же время в северо-западном углу отмечается значительное отклонение (до

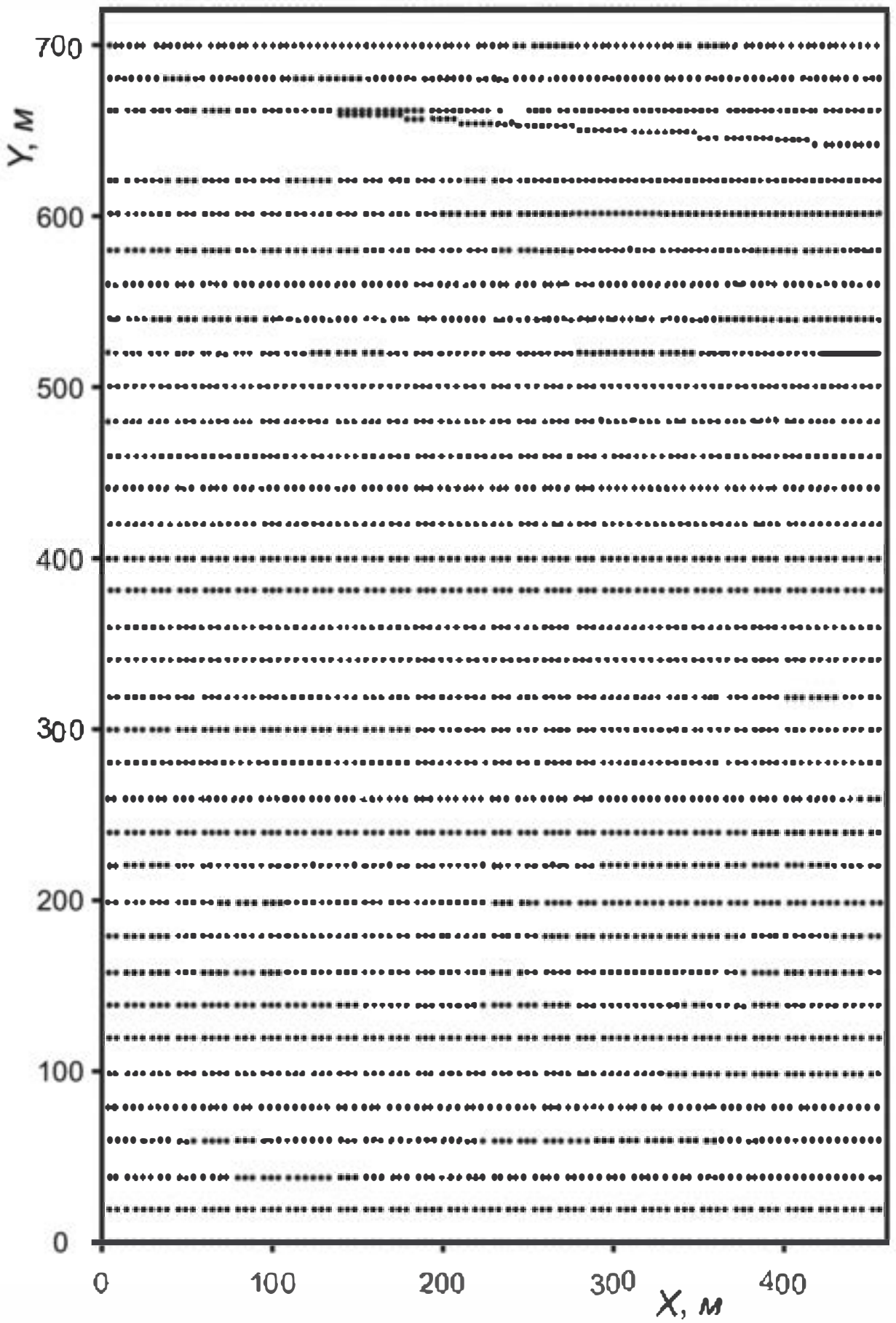


Рис. 5.1. Схема расположения пунктов магнитных измерений

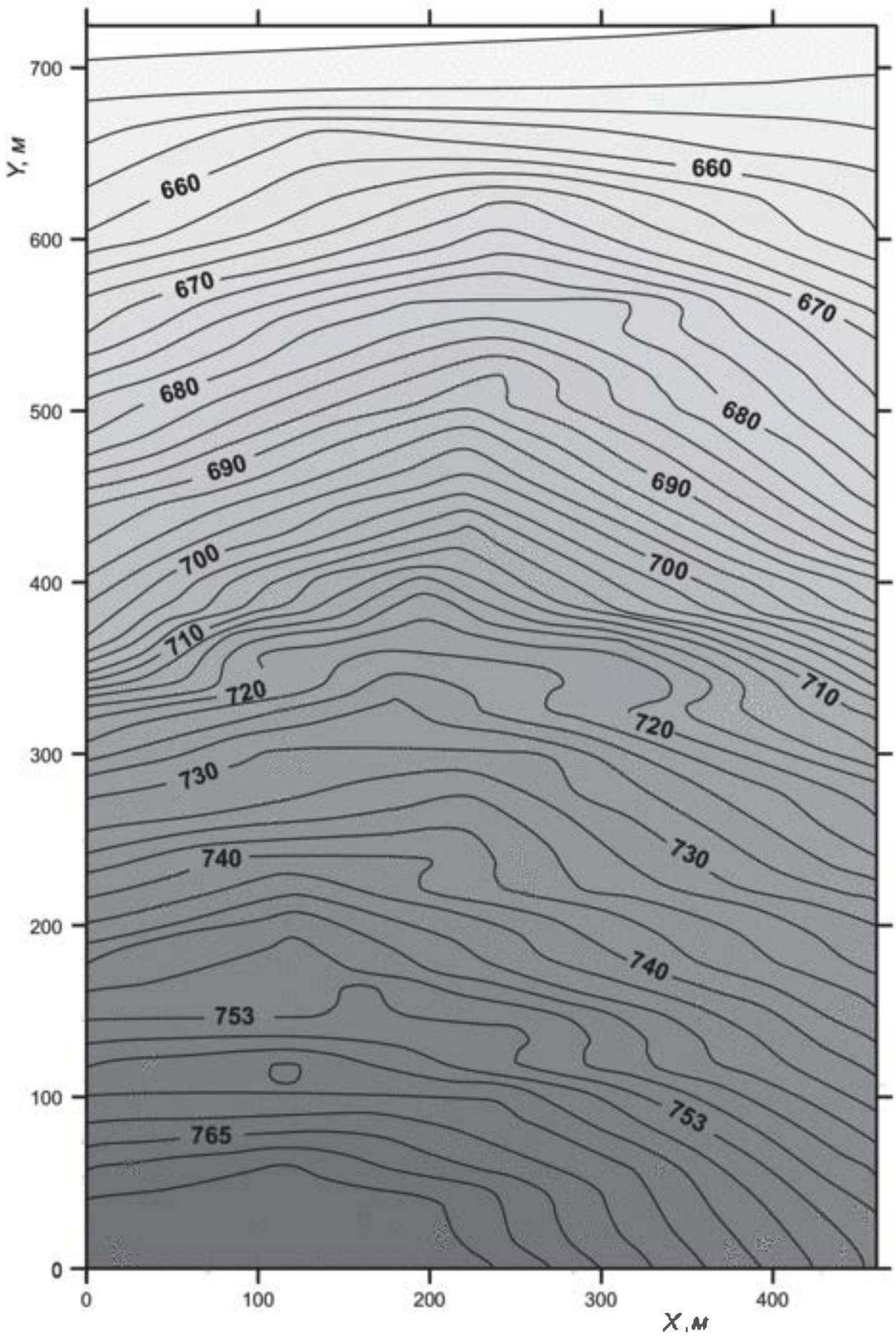


Рис. 5.2. Карта рельефа земной поверхности участка магнитной сьемки

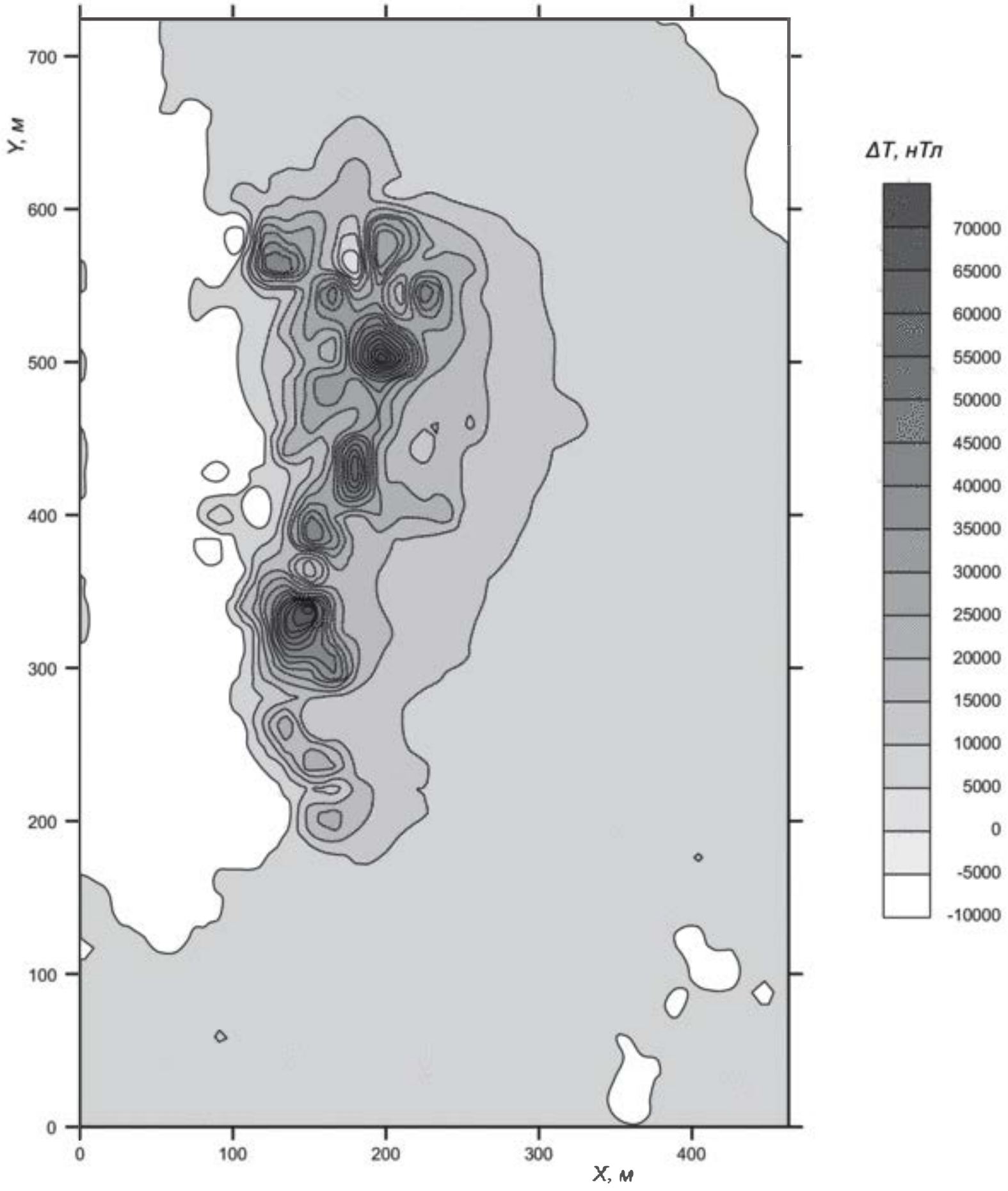


Рис. 5.3. Карта измеренного магнитного поля

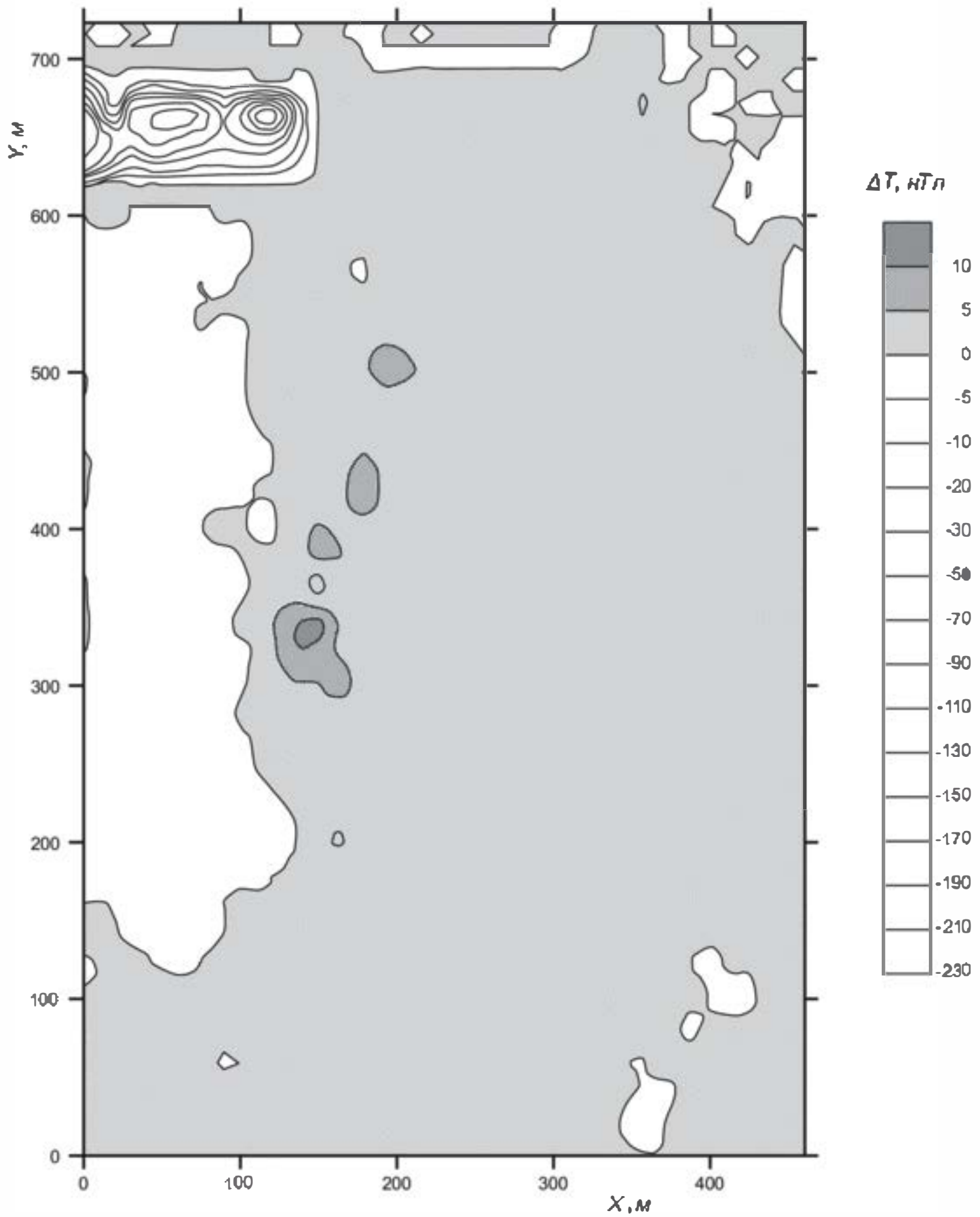


Рис. 5.4. Карта разностного магнитного поля

250 *нТл*) восстановленного магнитного поля от исходного. Анализ исходного магнитного материала позволил установить причину столь значительного расхождения: несколько десятков точек магнитных измерений имели ошибочные горизонтальные координаты, совпадающие с координатами соседнего профиля. Эти точки были исключены из расчетов, и был выполнен расчет для 3550 точек. Это позволило существенно уменьшить значение среднеквадратической погрешности — до 4–10 *нТл*.

Литература

1. **Lowrie W.** *Fundamentals of geophysics.* — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. —392 P.
2. **Milsom J.** *Field geophysics.* — Chichester: Wiley, 2002. — 244 P.
3. **Telford W. M., Geldart L. P., Sheriff R. E.** *Applied geophysics.* — Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — 790 P.
4. **Степанова И. Э.** Об интегральном уравнении обратной трехмерной задачи потенциала // *Математическое моделирование.* —1997. —Т. 9, № 4. — С. 77–84.
5. **Степанова И. Э.** О восстановлении источника гравитационных масс в задачах типа рудных // *Физика Земли.* — 1998. — Т. 34, № 11. — С. 86–89.
6. **Страхов В. Н.** Геофизика и математика // *Физика Земли.* — 1995. — № 12. — С. 4–23.
7. **Страхов В. Н., Степанова И. Э.** Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // *Физика Земли.* — 2002. — Т. 38, № 2. — С. 3–19.
8. **Страхов В. Н., Степанова И. Э.** Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // *Физика Земли.* —2002. —Т. 38, № 7. — С. 3–12.

Глава 6

ЗАДАЧИ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ

§ 43. ВВЕДЕНИЕ

Сейсмология изучает строение Земли с помощью упругих колебаний (**сейсмических волн**), вызываемых как естественными (землетрясения, вулканическая деятельность), так и искусственными (взрывы) источниками. В основе сейсмических методов лежит теория упругости. Если к некоторому объему вещества приложить силу, то он будет изменять свои объем и форму. При этом вещество стремится восстановить свой объем и/или форму после прекращения действия внешних сил, такая способность называется упругостью. Простейшими элементарными деформациями элемента среды являются растяжение/сжатие и сдвиг. В первом случае деформация продольна по отношению к приложенной силе, во втором — поперечна.

В сейсмологии используются несколько коэффициентов, характеризующих упругие свойства среды.

- **Модуль Юнга** E. Пусть имеется вертикальный цилиндр с площадью поперечного сечения S и длиной l, к которому приложена вертикальная сила F. В результате приложения силы длина цилиндра стала $l + \Delta l$. Тогда модуль Юнга определяется по формуле
$$E = \frac{F/S}{\Delta l/l}. \tag{43.1}$$
- **Модуль всестороннего (объемного) сжатия** K равен
$$K = \frac{p}{\Delta V/V}, \tag{43.2}$$
где V — исходный объем тела, ΔV — изменение объема в результате приложения всестороннего давления p.
- **Коэффициент Пуассона** σ,
$$\sigma = \frac{\Delta w/w}{\Delta l/l}, \tag{43.3}$$
где l и w — исходные длина и ширина стержня, а Δl и Δw — их абсолютные изменения. В основном попереч-

ное сечение материалов уменьшается при их растяжении, т. е. $\sigma > 0$, но существуют также материалы, у которых сечение увеличивается и $\sigma < 0$.

- Для изотропного тела связь между компонентами тензора напряжений p_{ij} (первый индекс обозначает направление силы, а второй — плоскость, к которой она приложена) и тензора деформаций $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ ($\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ — отношение смещения тела вдоль оси x_i к длине тела вдоль оси x_j) может быть представлена в виде

$$p_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^{3} e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \tag{43.4}$$

где δ_{ij} — **символ Кронекера**, а λ и μ — **коэффициенты Ламэ**.

$$\mu = \frac{F/S}{\triangle x/L}, \tag{43.5}$$

где F — действующая сила (перпендикулярна длине L), S — сечение тела, $\triangle x$ — сдвиг тела (параллельно приложенной силе).

Для изотропной среды имеются следующие зависимости между приведенными коэффициентами:

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} = \frac{2\mu(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu,$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} = \frac{3K(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)} = \frac{3}{2}(K-\lambda) = \frac{\lambda(1-2\sigma)}{2\sigma},$$

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = \frac{3K\sigma}{1+\sigma} = K - \frac{2}{3}\mu = \frac{2\sigma\mu}{1-2\sigma}.$$

Пусть имеется однородная идеально упругая среда. Тогда уравнение движения можно записать в виде

$$(\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \rho\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}, \tag{43.6}$$

где $\boldsymbol{u}$ — вектор смещения частиц среды, а ρ — ее плотность. Данное уравнение описывает распространение двух типов волн — продольной и поперечной.

1) **Продольная волна** (**P-волна, волна сжатия,** см. рис. 6.1). Отсутствует вихревое смещение частиц, поэтому можно записать, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_P = 0. \tag{43.7}$$

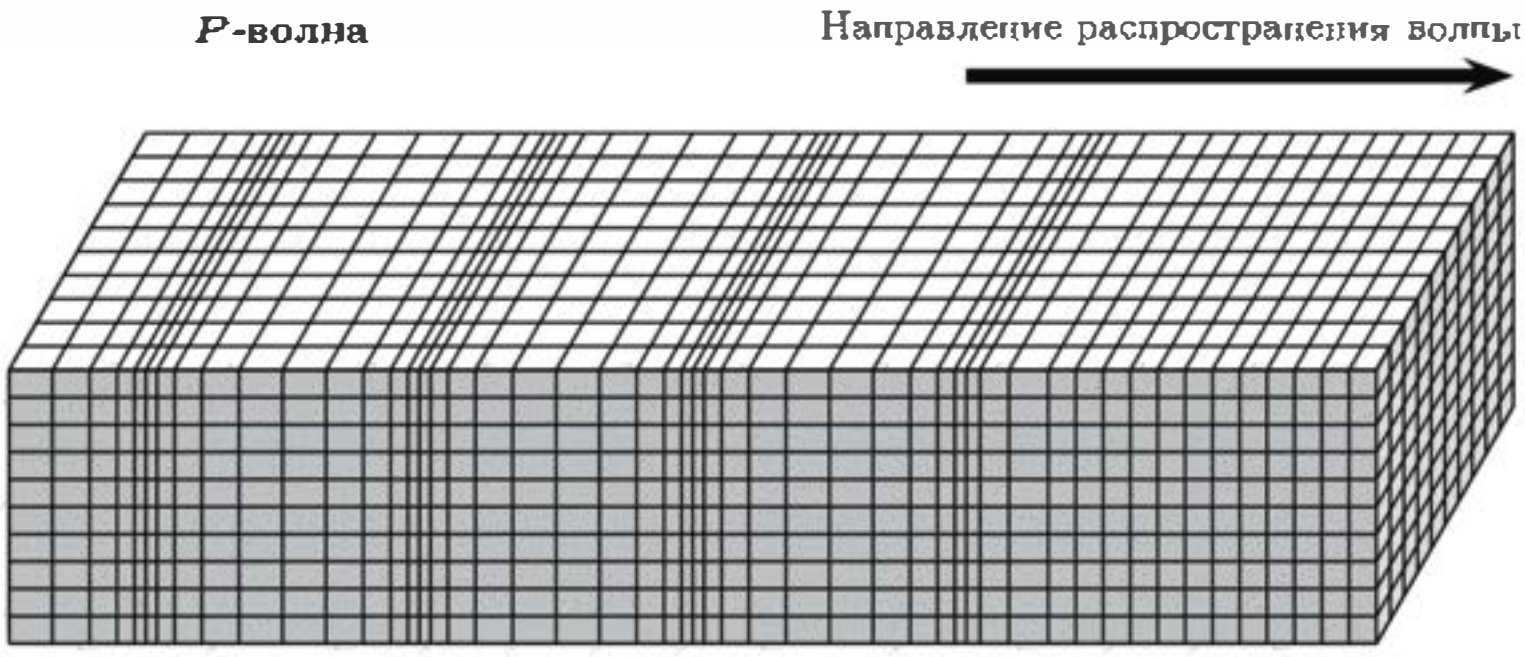


Рис. 6.1. Распространение P-волны

Учитывая это условие, уравнение (43.6) переписываем в виде

$$\Delta u_P = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 u_P}{\partial t^2}, \tag{43.8}$$

из которого получаем скорость продольных волн

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{43.9}$$

2) **Поперечная волна** (S-**волна**, **волна сдвига**, см. рис. 6.2). Объем элемента не меняется, поэтому

$$\operatorname{div} u_S = 0. \tag{43.10}$$

Тогда уравнение (43.6) переписывается в виде

$$\Delta u_S = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{43.11}$$

а скорость поперечных волн равна

$$v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{43.12}$$

Поперечные волны могут быть поляризованными, и тогда частицы колеблются вдоль определенных линий, перпендикулярных направлению распространения волны.

Заметим, что справедливо отношение скоростей поперечной и продольной волн

$$\frac{v_S}{v_P} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} = \sqrt{\frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}}. \tag{43.13}$$

Учитывая, что коэффициент Пуассона $\sigma \geqslant 0$, получаем, что $v_S \leqslant \frac{v_P}{\sqrt{2}}$, т. е. скорость поперечных волн меньше скорости

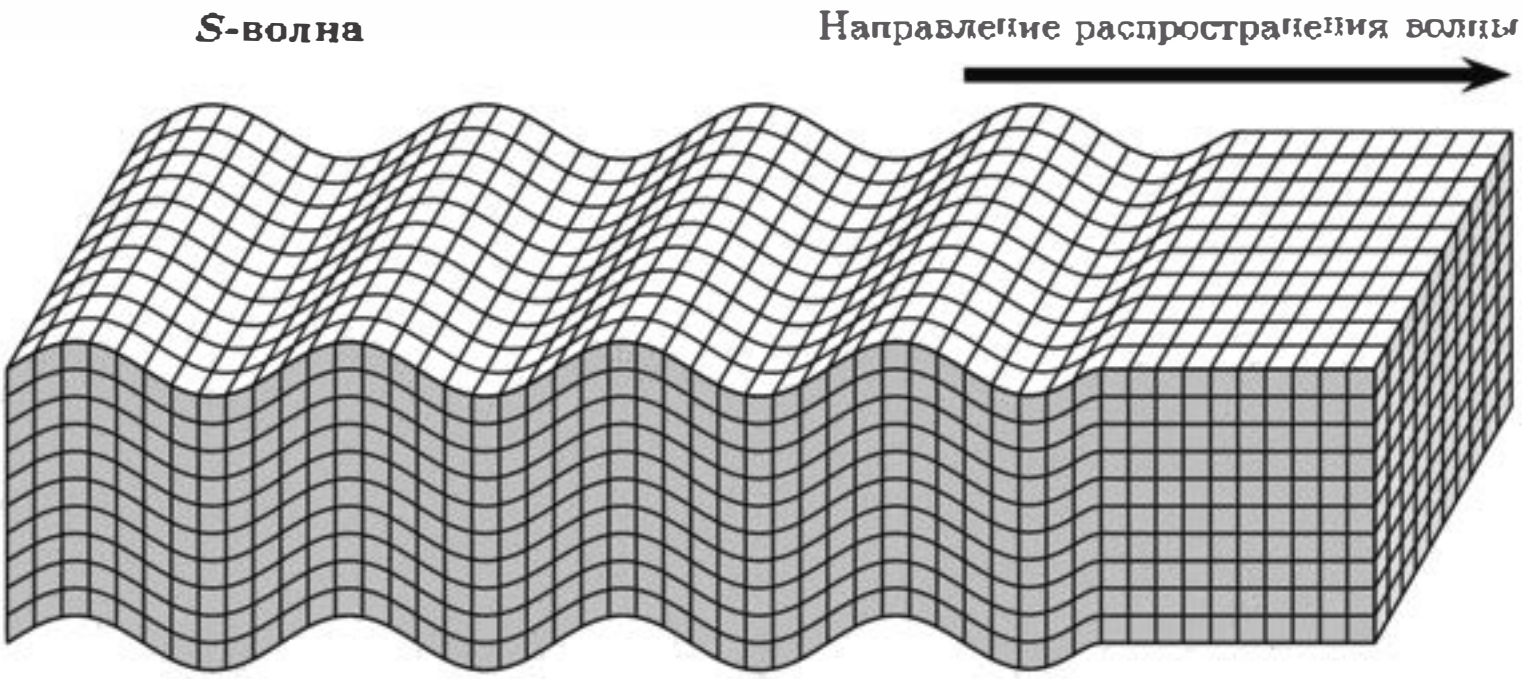


Рис. 6.2. Распространение S-волны

продольных. Поэтому продольные волны от землетрясений регистрируются раньше поперечных, из-за чего волны получили свои альтернативные названия P- и S-волн (от англ. «primary» [первичный] и «secondary» [вторичный]).

Если среда, в которой распространяются волны, неоднородна, например, в случае свободной поверхности Земли, то образуются плоские волны. Так, вдоль плоской свободной поверхности распространяется волна **Рэлея**, см. рис. 6.3, представляющая суперпозицию плоских неоднородных волн, скорость v_R которых можно найти как корень уравнения

$$\left(2+\frac{v_R^2}{v_S^2}\right)^2-4\sqrt{1-\frac{v_R^2}{v_P^2}}\sqrt{1-\frac{v_R^2}{v_S^2}}=0. \qquad (43.14)$$

Отметим, что данное уравнение имеет несколько различных корней. В качестве решения выбираем наибольший вещественный корень:

$$v_R=v_S\sqrt{\frac{4(1-\gamma)}{2-\frac{4}{3}\gamma+\sqrt[3]{R+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{R-\sqrt{D}}}}, \qquad (43.15)$$

где $\gamma=\dfrac{v_S^2}{v_P^2}=\dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}=\dfrac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}$,

$$R=\frac{2}{27}\left(27-90\gamma+99\gamma^2-32\gamma^3\right),$$

$$D=\frac{4}{27}(1-\gamma)^2(11-62\gamma+107\gamma^2-64\gamma^3).$$

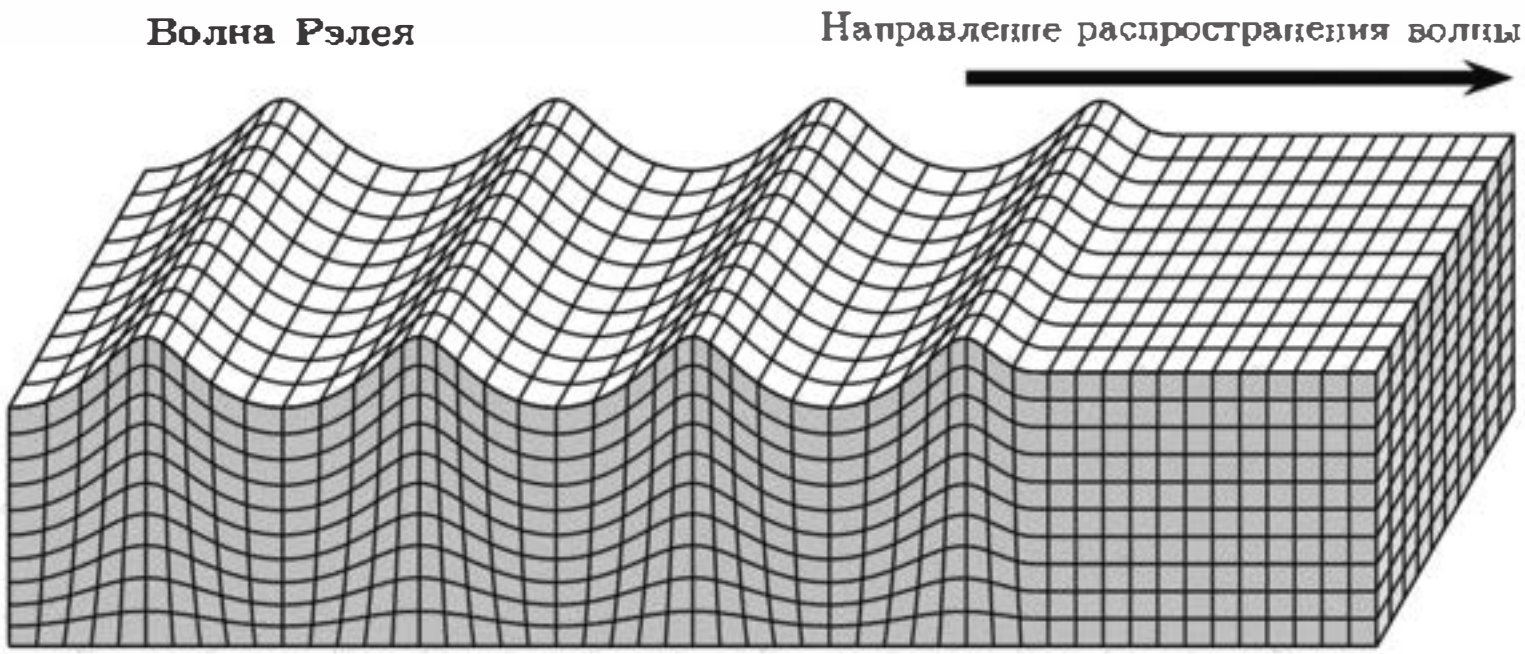


Рис. 6.3. Распространение волны Рэлея

Отметим, что $\sigma \geqslant 0$, а так как $\gamma \geqslant 0$, рассматриваем отрезок $[0, \frac{1}{2}]$, на котором $\frac{v_R}{v_S}$ является возрастающей функцией аргумента σ (при $\sigma = 0$ $\frac{v_R}{v_S} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}8740$, а при $\sigma = \frac{1}{2}$ отношение равно $\approx 0{,}9553$). Амплитуда волн Рэлея уменьшается с глубиной по экспоненциальному закону. Во время прохождения волн Рэлея частицы среды движутся по эллиптическим траекториям, причем а) в верхней части траектории движение происходит в направлении, противоположном направлению распространения волны, б) большая ось эллипса перпендикулярна поверхности.

Август Эдвард Хаф Ляв (Augustus Edward Hough Love), 1863–1940

Другим типом поверхностных волн являются **волны Лява**, см. рис. 6.4, образующиеся на границе двух сред в случае, когда скорость S-волн для верхней среды меньше скорости S-волн для нижней среды. Движение частиц происходит перпендикулярно направлению движения волны, но параллельно поверхности раздела сред. Таким образом, волны Лява по своему существу поперечные. Скорость их при малых длинах волн равна скорости поперечных волн в верхнем слое, а в случае больших длин волн — скорости поперечных волн в нижней среде.

Скорости распространения волн Рэлея и Лява зависят от частоты волн, поэтому профиль волны меняет свою форму при движении. Отметим также, что поверхностные волны распро-

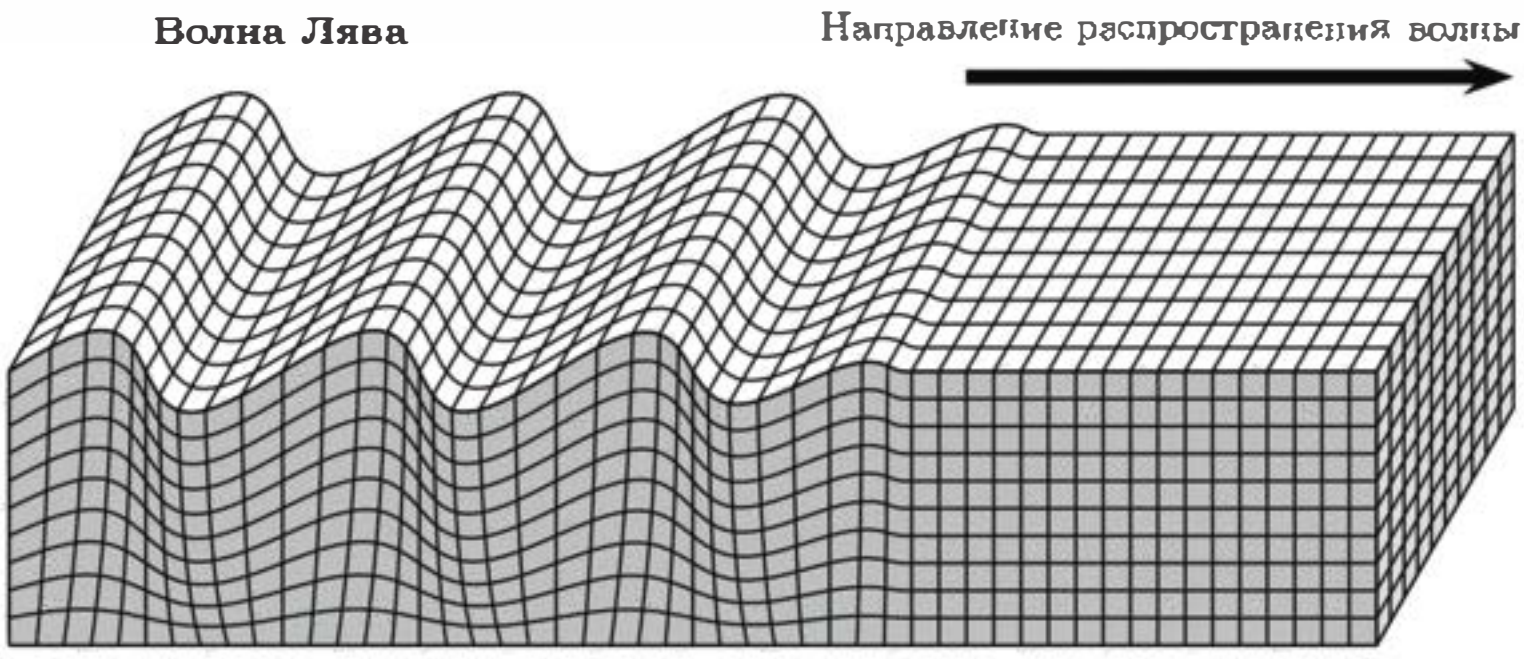


Рис. 6.4. Распространение волны Лява

страняются только около границы раздела двух сред, поэтому их можно считать двумерными волнами в отличие от объемных P- и S-волн, распространяющихся в трехмерной среде. Так как энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды колебания, то, учитывая закон сохранения энергии, получаем, что амплитуда объемных волн убывает как $\frac{1}{r}$, а поверхностных — как $\frac{1}{\sqrt{r}}$, где r — расстояние до источника волн. Поэтому поверхностные волны являются более разрушительными при землетрясениях. Спектр частот объемных волн в Земле охватывает диапазон от 15 до 100 *Гц*. Поверхностные волны имеют частоты ниже 15 *Гц*. В прикладной сейсмологии основное значение имеют только P-волны.

Для обнаружения и регистрации сейсмических волн используются специальные приборы — **сейсмографы**. Принцип работы сейсмографа основан на относительном движении частей прибора. Например, может использоваться тяжелый груз, подвешенный на системе пружин, который остается неподвижным, в то время как остальные части прибора движутся под действием сейсмических волн. Обычно используются сейсмографы разных конструкций для регистрации вертикальных и горизонтальных колебаний. В основном сейсмографы используют инерцию тела, но бывают инструменты, измеряющие изменение расстояния между двумя точками пространства с помощью лазеров. В сейсморазведке используются компактные

переносные приборы, которые получили название **геофонов**. Для регистрации волн используются сразу несколько геофонов, которые в зависимости от задач могут представлять одно-, дву- или трехмерную структуру. Трехмерные структуры часто используются в морской сейсмологии.

§ 44. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН

Пусть имеется плоская P-волна, падающая под углом θ на границу раздела двух сред (рис. 6.5). Эта волна создает отраженные и преломленные P- и SV-волны. Под SV-волной подразумевается поперечная S-волна, поляризованная в плоскости падения, т. е. смещения частиц среды происходят в плоскости падения, в отличие от SH-волны, у которой смещения перпендикулярны плоскости падения. Для углов преломления α_P, α_S и углов отражения β_P, β_S справедлив закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin\theta}{v_{1P}} = \frac{\sin\alpha_P}{v_{2P}} = \frac{\sin\alpha_S}{v_{2S}} = \frac{\sin\beta_P}{v_{1P}} = \frac{\sin\beta_S}{v_{1S}}, \tag{44.1}$$

где v_{1P}, v_{1S}, v_{2P}, v_{2S} — скорости распространения P- и S-волн в первой и второй средах. Ясно, что углы падения и отражения P-волны совпадают, т. е. $\theta = \beta_{1P}$. Видно, что при распространении колебания в различных средах сохраняется так называемый **лучевой параметр**, равный

$$p = \frac{\sin\theta}{v}, \tag{44.2}$$

где v — скорость распространения P-волны в среде, при этом волна остается в одной и той же плоскости.

При падении SV-волны на границу раздела двух сред образуются отраженные и преломленные SV- и P-волны. Если же на границу падает SH-волна, то формируются только SH-волны (отраженная и преломленная). В обоих случаях для волн справедлив закон Снеллиуса.

Вернемся к рассмотрению падающей P-волны. Из формулы (44.1) следует, что угол преломления равен

$$\alpha_P = \arcsin\left(\sin\theta\,\frac{v_{2P}}{v_{1P}}\right). \tag{44.3}$$

При $v_{2P} > v_{1P}$ существует так называемый **критический угол** $\theta_{\text{крит}} = \arcsin\dfrac{v_{1P}}{v_{2P}}$, при котором угол преломления $\alpha_P = 90°$.

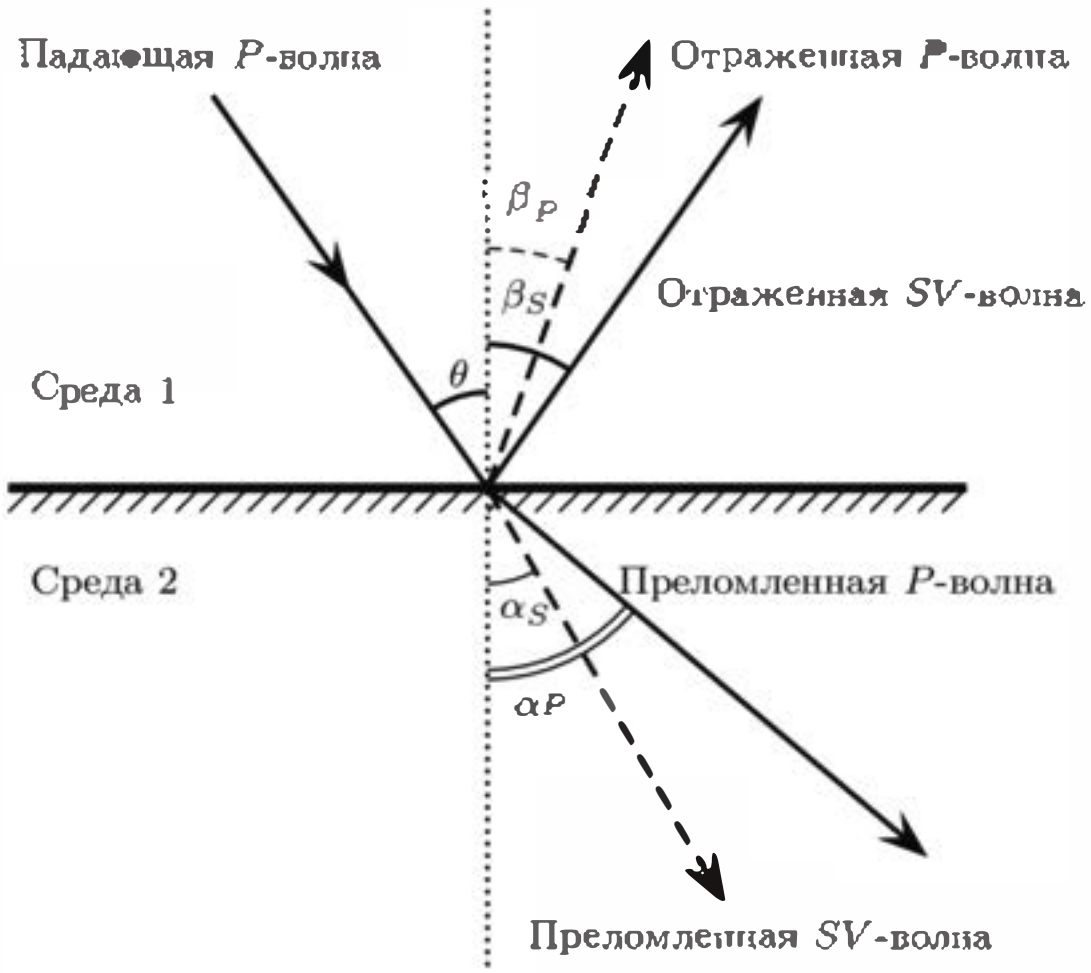


Рис. 6.5. Отражение и преломление P-волны на границе раздела двух сред

Поэтому при $\theta \geqslant \theta_{\text{крит}}$ преломленная волна не может войти во вторую среду и начинает двигаться вдоль границы раздела двух сред. При этом сама граница становится источником вторичных волн, в результате которых формируется волна, движущаяся в первую среду, причем эта волна ориентирована под критическим углом (см. рис. 6.6). Отметим также, что при полном внутреннем отражении P-волны SV-волна может проникать во вторую среду, так как скорость $v_{2S} < v_{1P}$. Конечно, в случае $v_{2S} > v_{1P}$ и $\theta > \arcsin \dfrac{v_{1P}}{v_{2S}}$ будет отсутствовать и преломленная SV-волна во второй среде.

Выше было показано, что при распространении P-волны в среде сохраняется лучевой параметр

$$p = \frac{\sin\theta}{v}. \tag{44.4}$$

Заметим, что эта формула справедлива только в так называемой **модели плоской Земли**, когда среда представляет собой множество плоских горизонтальных слоев. Рассмотрим теперь **модель сферической Земли**, которая используется при

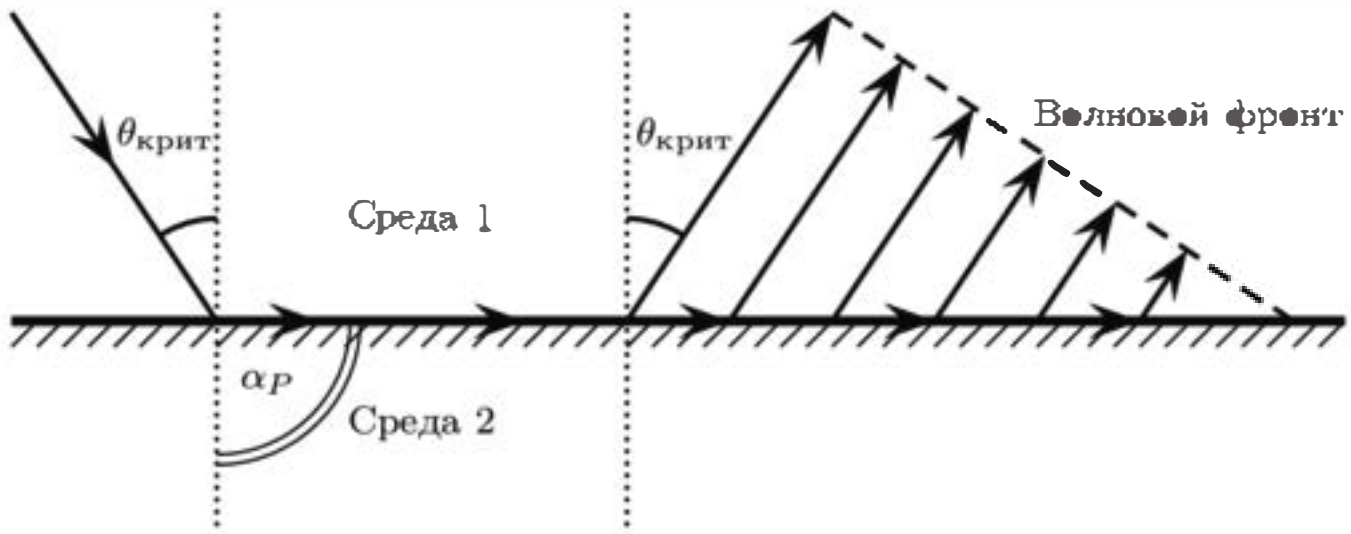


Рис. 6.6. Распространение P-волны при критическом угле падения

изучении структуры Земли на большой глубине. В точке B (см. рис. 6.7) справедлив закон Снеллиуса

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_1}{v_2}. \tag{44.5}$$

Пусть в точке C скорость P-волн меняется с v_2 на v_3. Через точки B и C проведем прямую и найдем точку A, такую, что вектор OA ортогонален прямой BC. Так как $\angle BAO = \angle CAO = 90°$, $|OA| = |OB|\sin\alpha_1 = |OC|\sin\theta_2$. Таким образом, уравнение (44.5) может быть переписано в виде

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\dfrac{|OC|\sin\theta_2}{|OB|}}{v_2} \tag{44.6}$$

или

$$\frac{|OB|\sin\theta_1}{v_1} = \frac{|OC|\sin\theta_2}{v_2}. \tag{44.7}$$

Из данного соотношения видно, что в качестве лучевого параметра можно ввести функцию

$$p = \frac{r\sin\theta}{v}, \tag{44.8}$$

где r — расстояние до центра Земли.

В сейсмологии используют различные физические явления, возникающие при распространении упругих волн: **метод отраженных волн** (отражение волн), **метод преломленных волн** (волны, образующиеся при полном внутреннем отражении), методы **сейсмической томографии** (преломленные проходящие волны), методы, основанные на использовании поверхностных волн.

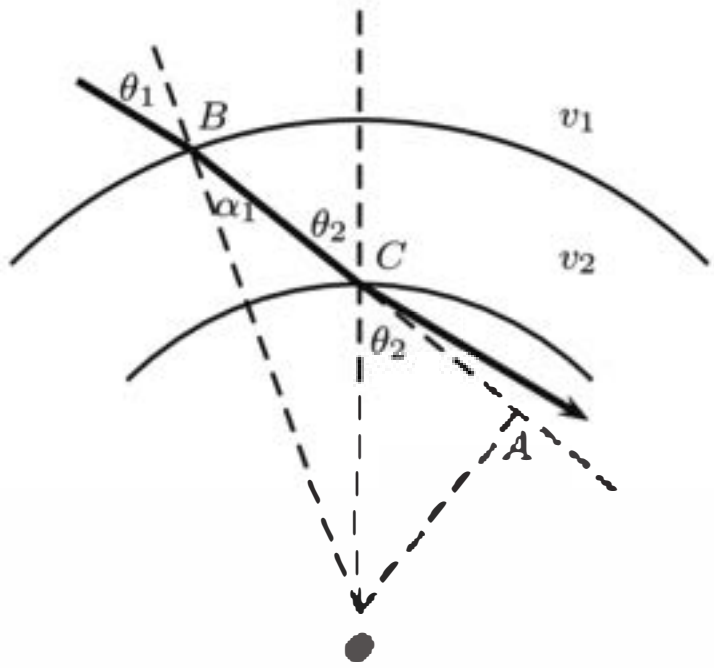


Рис. 6.7. Распространение P-волны в модели сферической Земли

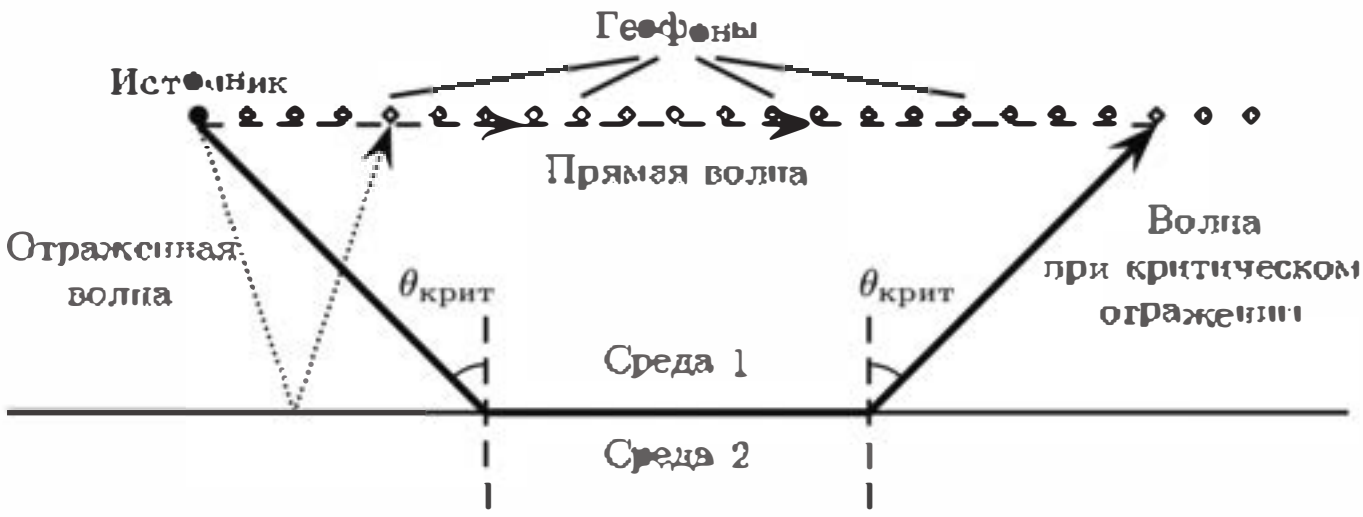


Рис. 6.8. Распространение P-волны в двуслойной среде

Для применения метода отраженных волн требуется, чтобы границы раздела сред были достаточно протяженными (размер не меньше первой зоны Френеля для заданной длины волны). Если это условие нарушено, то геометрическое приближение нельзя применять, так как происходит сильное рассеяние волн. Заметим также, что при больших углах наклона границ раздела сред возникают дополнительные трудности. Отметим также, что при наличии нескольких сред могут возникать многократно отраженные или дифрагированные волны, которые зачастую рассматриваются как помехи.

Для метода преломленных волн требования к модели среды более жесткие, так как существуют явление проницания волны во вторую среду и рефракция преломленных волн. При этом

возможно появления «мертвых зон», недоступных для изучения.

Пример 44.1. Рассмотрим распространение волны в двуслойной среде (см. рис. 6.8). Пусть источник и приемник (геофон) находятся на высоте H от горизонтальной границы раздела двух сред, а расстояние между источником и приемником — L. Волна до приемника может дойти тремя способами.

1) Прямая волна. Время распространения равно $T_1 = L/v_1$, где v_1 — скорость волны в верхней среде.
2) Отраженная волна. Путь, проходимый волной, равен $S_2 = 2\sqrt{H^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{4H^2 + L^2}$. Поэтому время распространения волны равно
$$T_2 = \frac{\sqrt{4H^2 + L^2}}{v_1}. \tag{44.9}$$
3) Волна, образующаяся при полном внутреннем отражении. Это возможно только в случае, когда $v_2 > v_1$ и угол падения $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{2H}\right) = \arcsin\left(\frac{L/2}{\sqrt{H^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}\right)$ на границу раздела больше критического угла $\theta_{\text{крит}} = \arcsin(\frac{v_1}{v_2})$. Длина пути, проходимого волной в верхней среде, равна
$$S_{31} = 2\,\frac{H}{\cos\theta_{\text{крит}}}, \tag{44.10}$$
а в нижней
$$S_{32} = L - 2H\operatorname{tg}\theta_{\text{крит}}. \tag{44.11}$$
Учитывая, что $\sin\theta_{\text{крит}} = \frac{v_1}{v_2}$, получаем, что
$$\cos\theta_{\text{крит}} = \frac{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_2}, \qquad \operatorname{tg}\theta_{\text{крит}} = \frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}. \tag{44.12}$$
Тогда время распространения волны до приемника равно
$$T_3 = \frac{S_{31}}{v_1} + \frac{S_{32}}{v_2} = \frac{2Hv_2}{v_1\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} + \frac{L}{v_2} - \frac{2Hv_1}{v_2\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} = \frac{L}{v_2} + \frac{2H\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2}. \tag{44.13}$$

Ясно, что прямая волна всегда доходит быстрее до приемника, чем отраженная. Но волна, образующаяся при полном отражении, может быть зарегистрирована геофоном раньше за счет то-

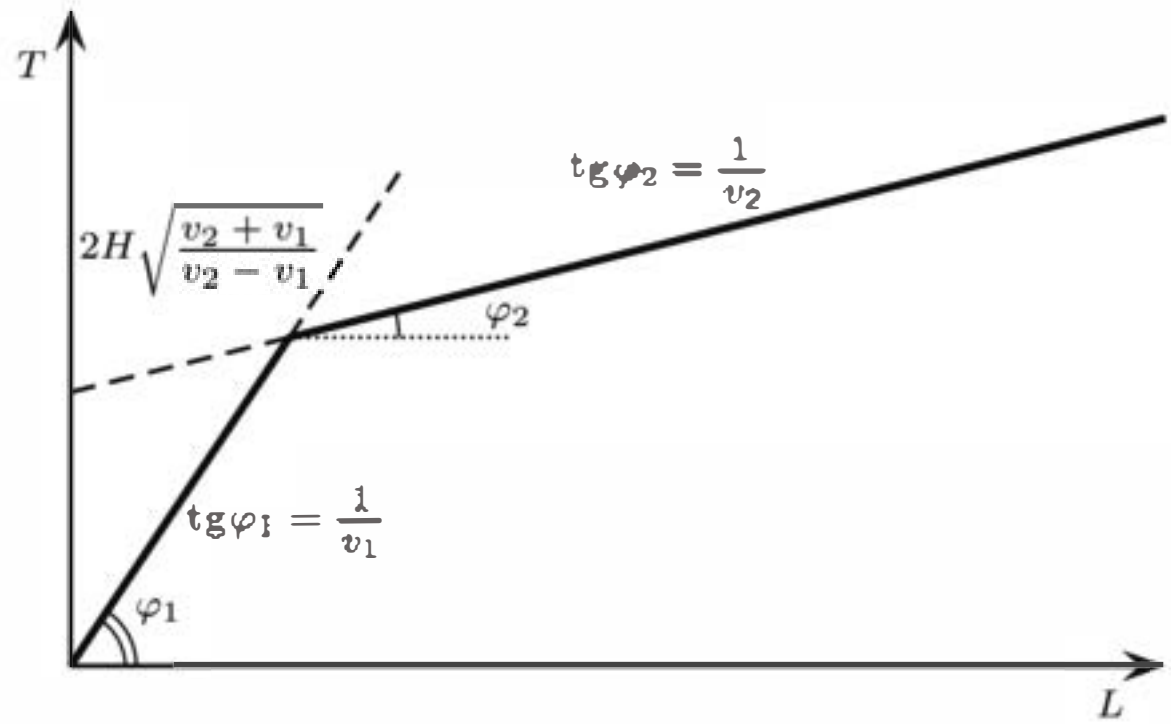


Рис. 6.9. Годограф волны в двуслойной среде

го, что скорость распространения во второй среде выше. Это происходит в случае, когда

$$L \geqslant 2H\sqrt{\frac{v_2+v_1}{v_2-v_1}}. \tag{44.14}$$

На рис. 6.9 показан **годограф** — график зависимости времени прихода волны от расстояния до приемника. Годограф представляет собой кусочно-линейную функцию, чьи тангенсы углов наклона равны $\frac{1}{v_1}$ и $\frac{1}{v_2}$. Таким образом, из годографа можно сразу найти скорость волны в первой и второй средах, а из координаты точки пересечения — глубину залегания границы раздела.

Пусть скорость распространения волн является функцией глубины z, т. е. $v = v(z)$. В модели плоской Земли рассмотрим волну, определяемую лучевым параметром p. Ясно, что за счет преломления в среде волна опускается вниз до тех пор, пока угол преломления не станет критическим. В последнем случае волна отражается вверх и движется по траектории, симметричной относительно вертикальной прямой, проходящей через «точку поворота». Обозначим глубину, на которой достигается полное внутреннее отражение, через z_p, $v(z_p) = \frac{1}{p}$. Можно записать, что в любой точке траектории

$$\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\theta\,\mathrm{d}z, \tag{44.15}$$

а следовательно, источник и приемник волны находятся на расстоянии

$$X(p) = 2\int_0^{z_p} \operatorname{tg}\theta \, \mathrm{d}z. \tag{44.16}$$

Элемент пути, проходимый волной, равен

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}z}{\cos\theta}, \tag{44.17}$$

а время, затрачиваемое на этот путь, равно

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{v\cos\theta}, \tag{44.18}$$

поэтому время распространения сигнала равно

$$T(p) = 2\int_0^{z_p} \frac{\mathrm{d}z}{v\cos\theta}. \tag{44.19}$$

Принимая во внимание, что $\sin\theta = pv$, $\cos\theta = \sqrt{1-p^2v^2}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{pv}{\sqrt{1-p^2v^2}}$, формулы (44.16) и (44.19) можно записать как

$$X(p) = 2\int_0^{z_p} \frac{pv\,\mathrm{d}z}{\sqrt{1-p^2v^2}}, \qquad T(p) = 2\int_0^{z_p} \frac{\mathrm{d}z}{v\sqrt{1-p^2v^2}}. \tag{44.20}$$

Так как $\sin\theta = pv$, то $\mathrm{d}(\sin\theta) = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = pv'\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z = \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{pv'}$ и последние выражения можно переписать в виде

$$X(p) = \frac{2}{p}\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{v'(z)}, \qquad T(p) = 2\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{v'(z)\sin\theta}. \tag{44.21}$$

Пример 44.2. Пусть скорость в среде изменяется линейно с глубиной, т. е. $v(z) = v_0(1+\gamma z)$, $\gamma > 0$. Тогда $v'(z) = v_0\gamma$ и

$$X(p) = \frac{2}{pv_0\gamma}\int_{\theta_0}^{\pi/2} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{pv_0\gamma}\cos\theta_0 = \frac{2\cos\theta_0}{\gamma\sin\theta_0} = \frac{2\operatorname{ctg}\theta_0}{\gamma}. \tag{44.22}$$

Введем обозначение $q = \operatorname{ctg}\theta_0$, тогда

$$q = \frac{\gamma X}{2}. \tag{44.23}$$

Отметим, что

$$\sin\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\theta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}},$$

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta_0}} = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Время распространения сигнала равно

$$T(p) = \frac{2}{v_0\gamma}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{v_0\gamma}\ln\left(\frac{\cos\theta_0+1}{\sin\theta_0}\right) =$$

$$= \frac{2}{v_0\gamma}\ln\left(\frac{\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}+1}{\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}}\right) = \frac{2}{v_0\gamma}\ln\left(q+\sqrt{1+q^2}\right) = \frac{2}{v_0\gamma}\,\mathrm{arsh}q, \tag{44.24}$$

где $\mathrm{arsh}q$ — гиперболический арксинус. Следовательно, годограф волны имеет вид

$$T(X) = \frac{2}{\gamma v_0}\,\mathrm{arsh}\,\frac{\gamma X}{2}. \tag{44.25}$$

Вопросы и задачи

1) Постройте годограф волны в случае наклонного раздела двух сред (ψ — угол наклона, H — расстояние от источника до его вертикальной проекции на плоскость раздела).
2) Постройте годограф волны для трехслойной среды (каждый слой параллелен поверхности Земли). В каких случаях годограф не будет содержать в себе информацию о скоростях волн или глубине залегания слоев?
3) Найдите аналитическую формулу для годографа преломленной волны, если скорость волны зависит от глубины как $v(z) = v_0e^{\gamma z}$, $\gamma > 0$.

§ 45. СЕЙСМОКАРОТАЖ

Сведения о скоростях распространения волн в среде можно получать разными путями. Например, можно измерять годографы волн на поверхности Земли (косвенный подход) или регистрировать волны во внутренних точках среды (прямой подход). Понятно, что прямой подход, с одной стороны, дает наиболее точные данные, но с другой — требует бо́льших затрат. При сейсмическом **каротаже** измеряются времена пробега прямых волн от источника, часто находящегося на поверхности, до приемников (геофонов), опущенных в скважину на разную глубину.

В случае нормального падения плоской P-волны на границу раздела двух сред **коэффициенты отражения** R и **преломления** T волны записываются в виде

$$R = \frac{v_2\rho_2 - v_1\rho_1}{v_2\rho_2 + v_1\rho_1}, \qquad T = \frac{2v_1\rho_1}{v_2\rho_2 + v_1\rho_1}. \tag{45.1}$$

Для удобства часто используется понятие **акустической жесткости** среды

$$Z = v\rho. \tag{45.2}$$

Тогда коэффициенты отражения и преломления могут быть переписаны в виде

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \qquad T = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1}. \tag{45.3}$$

При этом доли энергий отраженной и преломленной волн таковы:

$$E_R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2 = R^2, \qquad E_T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2} = \frac{Z_2}{Z_1}T^2. \tag{45.4}$$

Ясно, что $E_R + E_T = 1$. Заметим, что коэффициенты отражения и преломления не меняются от того, в какой среде находится падающая волна.

В задачах сейсмического (акустического) каротажа в среду подается некоторый сигнал $g(t)$, излучаемый источником сейсмических волн, при этом регистрируется некоторый сигнал $S(t)$. Этот сигнал представляет собой суперпозицию всех сейсмических сигналов, отраженных от всех границ слоистой среды. Тогда связь между сигналами $g(t)$ и $S(t)$ можно записать в виде уравнения типа свертки

$$S(t) = k(t) * g(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau)\cdot g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{45.5}$$

где $k(t)$ — некоторая импульсная функция, определяемая свойствами среды и не зависящая от зондирующего сигнала. Считаем, что слоистая среда является кусочно-постоянной с конечным числом слоев, т. е. акустическая жесткость среды может быть записана в виде

$$Z(z) = \begin{cases} Z_1, & z \in (z_1, z_2], \\ Z_2, & z \in (z_2, z_3], \\ Z_3, & z \in (z_3, z_4], \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ Z_{N-1}, & z \in (z_{N-1}, z_N]. \end{cases} \tag{45.6}$$

Для решения уравнения (45.5) необходимо понять, какой вид имеет импульсная функция $K(t)$. В первом приближении считают, что импульсная функция определяется только коэффициентами отражения среды, а вторичные отражения от границ раздела однородных слоев игнорируются.

Зная скорость распространения сейсмической волны в каждом слое, акустическую жесткость среды Z, определенную в уравнении (45.6) как функцию вертикальной координаты, можно записать как функцию времени t, т. е. $Z(t)$. Тогда коэффициент отражения R из (45.3) можно тоже записать как функцию времени

$$R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Z}{Z(t+\Delta t) + Z(t)} = \frac{Z'(t)}{2Z(t)} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\ln Z(t)\right). \qquad (45.7)$$

В рамках принятой модели считают, что импульсная функция равна коэффициенту отражения, т. е.

$$k(t) = R = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln Z(t)\right). \qquad (45.8)$$

Определенную таким образом функцию $k(t)$ также называют **плотностью акустической жесткости**. Следует отметить следующее обстоятельство: если функция $Z(t)$ имеет конечный скачок ΔZ в точке t_0, то соответствующее значение $k(t_0)$ плотности акустической жесткости $k(t)$ в точке t_0 будет иметь вид

$$k(t_0) = -\frac{\Delta Z \cdot \delta(t - t_0)}{Z(t_0 - 0) + Z(t_0 + 0)}, \qquad (45.9)$$

где $\delta(t - t_0)$ — дельта-функция Дирака. Введем обобщенную интегральную характеристику $K(t)$ акустической жесткости среды:

$$K(t) \equiv -\int_{-T}^{t} k(\tau)\,\mathrm{d}\tau \equiv \int_{-T}^{t} \frac{Z'(\tau)}{2Z(\tau)}\,\mathrm{d}\tau. \qquad (45.10)$$

Перейдем в уравнении (45.5) к интегральной жесткости. Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$AK \equiv \int_{-T}^{T} f'(t-\tau)K(\tau)\,\mathrm{d}\tau = S(t), \qquad |t| \leqslant T. \qquad (45.11)$$

Таким образом, мы получаем интегральное уравнение Фредгольма I рода относительно неизвестной функции $g'(t)$ при известном ядре $K(\tau)$ и правой части $S(t)$.

Вопросы и задачи

1) Что такое акустическая жесткость?
2) Сформулируйте обратную задачу по определению акустической жесткости.

Литература

1. **Аки К., Ричардс П.** *Количественная сейсмология: Теория и методы. Т. 1.* — М.: Мир, 1983. —520 с.
2. **Горбачев Ю. И.** *Геофизические исследования скважин.* — М.: Недра, 1990. — 398 с.
3. **Гурвич И. И., Номоконов В. П.** *Сейсморазведка. Справочник геофизика.* — М.: Недра, 1981. — 464 с.
4. **Пузырев Н. Н.** *Методы и объекты сейсмических исследований. Введение в общую сейсмологию.* — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1997. —301 с.
5. **Дмитриев В. И.** Обратные задачи геофизики: монография. — М.: МАКС ПРЕСС, 2012. — 340 с.
6. **Степанова И. Э., Страхов В. Н.** О построении регуляризованного решения интегрального уравнения Фредгольма 1 рода // *ЖВМ и МФ.* — 1993. —Т. 33, № 11. —С. 1738–1745.
7. **Телегин А. Н.** *Морская сейсморазведка.* — М.: ООО «Геоинформмарк», 2004. — 237 с.
8. **Шерифф Р., Гелдарт Л.** *Сейсморазведка. Т. 1.* — М.: Мир, 1987. — 448 с.
9. **Chapman C.** *Fundamental of seismic wave propagation.* —Cambridge: Cambridge University Press, 2004. — 632 P.
10. **Lowrie W.** *Fundamentals of geophysics.* — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — 392 P.
11. **Milsom J.** *Field geophysics.* — Chichester: Wiley, 2002. — 244 P.
12. **Stein S., Wysession M.** *An introduction to seismology, earthquakes, and Earth structure.* — Oxford: Blackwell Publishing, 2003. — 510 P.
13. **Telford W. M., Geldart L. P., Sheriff R. E.** *Applied geophysics.* — Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — 790 P.

Глава 7

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОЗОЛЯ

§ 46. ВВЕДЕНИЕ

Аэрозоль — это взвесь мелких твердых или жидких частиц в газовой среде (обычно в воздухе). **Пыли** состоят из твердых частиц, полученных путем механического измельчения твердых тел, например при взрывах или горных работах. В большинстве случаев пыли содержат больше крупных частиц, чем туманы или дымы, хотя размеры частиц пыли могут меняться в широких пределах — от субмикронных (0,01 *мкм*) до микроскопических (100 *мкм*). **Дымы** образуются при горении или возгонке летучих веществ, а также в результате химических реакций. Размеры частиц меняются от субмикронных до 10 *мкм*. **Туманы** состоят из капелек жидкости, образующихся при конденсации пара или распылении жидкости. Туманы также могут содержать мелкие частицы или растворенные вещества. В природе туманы состоят из капелек больше 10 *мкм*.

В зависимости от природы аэрозоли подразделяют на естественные и искусственные.

1) **Естественные аэрозоли** образуются вследствие природных сил: деятельность вулканов; формирование облаков; распространение спор, пыльцы, бактерий, вирусов; космическая пыль; разбрызгивание капелек воды над водными поверхностями; пылевые бури.
2) **Искусственные аэрозоли** образуются в результате хозяйственной деятельности человека. К их источникам относятся промышленное производство (выбросы из домовых труб, использование фреонов в холодильных установках), пожары, земледелие (выветривание почвы, борьба с вредителями, засев облаков ядрами конденсации для вызова дождей), добыча полезных ископаемых, автомобили, аварии на атомных объектах.

Мощные или регулярные воздействия аэрозолей часто имеют и глобальные последствия: разрушение озонового слоя, активное формирование осадков вокруг некоторых территорий,

кислотные осадки, повышение или понижение (в результате извержений вулканов) температуры окружающей среды.

Отдельные частицы аэрозолей характеризуются следующими параметрами: форма, размер, структура, плотность, химический состав.

По форме частицы аэрозолей можно условно разделить на три типа: **изометрические** (размеры вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений почти одинаковы), **пластинки** (один из размеров существенно меньше, чем два других) и **волокна** (один из размеров существенно больше, чем два других).

Для практических целей могут применяться различные размеры частиц: **ситовый диаметр** (максимальный размер квадратного отверстия, через который проходит частица), **диаметр площади проекции** (диаметр сферы, имеющей ту же площадь проекции, что и частица), **диаметр свободного падения** (диаметр сферы, имеющей ту же плотность и скорость свободного падения в жидкости/газе, что и частица), **диаметр удельной поверхности** (диаметр сферы, имеющей то же отношение площади поверхности к объему, что и частица), **диаметр Ферета** (максимальное расстояние между краями проекции частицы), **диаметр Мартина** (длина линии, которая делит проекцию частицы на две равные по площади части). Отметим, что для измерения диаметров Ферета и Мартина выбирается какое-то направление, вдоль которого и производят измерения, поэтому результаты зависят от ориентации частиц.

Химический состав частиц определяется не только исходными материалами, но и способами создания. Часто частицы состоят из нескольких химических веществ, например облака состоят не только из воды, но и из различных растворов кислот.

§ 47. ФУНКЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Как было сказано выше, частицы аэрозоля имеют различные параметры. Поэтому для более полной характеристики дисперсности аэрозоля вводится функция распределения частиц по каком-нибудь параметру. В качестве примера рассмотрим распределение частиц по размеру (радиусу). Введем функцию распределения $f(r)$ по радиусу r частиц. Тогда плотность вероятности $f(r)$ имеет следующий смысл: доля частиц, радиус

которых лежит в интервале $[r, r + \Delta r]$, равна

$$f(r)\Delta r. \tag{47.1}$$

Имеется естественное условие нормировки

$$\int_0^\infty f(r)\,\mathrm{d}r = 1, \tag{47.2}$$

т. е. доля частиц, имеющих всевозможные радиусы, равна единице.

Понятно, что пользоваться кривыми распределения частиц для характеристики аэрозолей при решении различных теоретических или прикладных задач не очень удобно. Поэтому желательно аппроксимировать реальные кривые некоторыми функциями с минимальным числом коэффициентов. Конечно, увеличение числа параметров, характеризующих такие функции, приводит, с одной стороны, к повышению точности расчетов реальных задач, но, с другой стороны, сужает область применимости данной функции. Поэтому зачастую применяются распределения, имеющие пару параметров. Приведем некоторые из известных формул.

1) **Нормальное (гауссово) распределение**

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{47.3}$$

среднее значение равно $\bar{r} = \int_0^\infty r f(r)\,\mathrm{d}r = r_0$, а среднеквадратическое отклонение $D = \overline{(r-\bar{r})^2} = \int_0^\infty (r-r_0)^2 f(r)\,\mathrm{d}r = \sigma^2$.

2) К сожалению, для многих аэрозолей кривые распределения имеют несимметричную форму с более крутым наклоном в сторону малых радиусов. Если же взять за абсциссу логарифм радиуса, то кривые распределения больше соответствуют реальным. В этом случае получаем **логарифмически-нормальное распределение**

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ln\sigma}\exp\left[-\frac{(\ln r - \ln r_0)^2}{2\ln^2\sigma}\right]. \tag{47.4}$$

3) Для частиц аэрозоля, радиусы которых меняются от 0,1 до 1,0 *мкм*, справедливо **распределение Юнге** (Junge):

$$f(r) = ar^{-\alpha}, \tag{47.5}$$

где a — нормировочная константа, а параметр α меняется от трех до шести для различных условий измерения.

4) При моделировании грубодисперсных пылей и туманов, полученных механическим распылением, применяется **распределение Розена—Раммлера** (Rosin–Rammler)

$$f(r) = ae^{-br^{\alpha}}. \tag{47.6}$$

5) Нукияма (Nukiyama) и Танасава (Tanasawa) вывели распределение для капелек, образовавшихся при распылении жидкости (**распределение Нукиямы—Танасавы**),

$$f(r) = ar^{p}e^{-bx^{q}}, \tag{47.7}$$

где константы a, b, p и q определяются для каждого распылителя экспериментально. Частными случаями данного распределения являются **распределение Хргиана—Мазина**

$$f(r) = ar^2e^{-br}, \tag{47.8}$$

которое хорошо описывает аэрозоли конденсационного происхождения, и **распределение Дейрменджиана** (Deirmendjian)

$$f(r) = ar^{\alpha}e^{-br^{\alpha}}. \tag{47.9}$$

6) **Г-распределение** применялось для капелек облаков и тумана

$$f(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}r^{\alpha}e^{-r/\beta}. \tag{47.10}$$

Можно получить моменты и дисперсию для данного распределения:

$$\overline{r^n} = \beta^n(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot(\alpha+n), \tag{47.11}$$

$$D = \beta^2(\alpha+1). \tag{47.12}$$

7) Была также предложена двухчленная формула

$$f(r) = \alpha Qe^{-\alpha r} + \beta(1-Q)e^{-\beta r}, \tag{47.13}$$

где коэффициенты α, β, Q зависят от рода пыли.

Распределения Юнге, Розена—Раммлера, Нукиямы—Танасавы, Хргиана—Мазина, Дейрменджиана построены на основе анализа наблюдаемых данных об аэрозолях, поэтому математические методы, в которых применяются названные распределения, обычно являются приближенными — численными. В случае Г-распределения, нормального и логарифмически-нормального распределения, наоборот, математическая модель строится с помощью точных методов, но согласование с реальными данными происходит хуже.

Вопросы и задачи

Для логарифмически-нормального распределения (47.4) получите центральные моменты $\overline{r^n}$, т. е. для $r_0 = 0$.

§ 48. РЭЛЕЕВСКОЕ РАССЕЯНИЕ

Рассеяние, отражение и поглощение света, проходящего через аэрозоль, зависят от размера, формы, химического состава частиц этого аэрозоля, а также от длины волны света. Именно рассеянием света объясняется голубой цвет неба и красный цвет солнца на закате.

Рассеяние света происходит из-за взаимодействия электромагнитного излучения с электронами рассеивающего аэрозоля, при котором электроны испускают вторичные волны, формирующие рассеянное излучение. Для описания рассеяния были использованы два подхода: электроны вещества заменяются линейным диполем (подход Рэлея, Джон Уильям Стратт, лорд Рэлей, John William Strutt, Lord Rayleigh, 1842–1919) или сразу используется электромагнитная теория поля (подход Ми, Густав Ми, Gustav Mie, 1869—1957).

Рэлеевское рассеяние (упругое рассеяние) — рассеяние света без изменения длины волны на частицах в случае, когда частота рассеиваемого света существенно меньше собственной частоты рассеивающего объекта. Таким образом, рэлеевское рассеяние происходит на объектах, чьи размеры меньше длины волны падающего света.

Пусть на частицу радиуса r падает неполяризованный свет с длиной волны λ и интенсивностью I_0, а показатель преломления для частицы равен n. Тогда интенсивность света, рассеянного частицей, на расстоянии R от частицы и под углом θ к падающему излучению равна:

$$I = I_0 \frac{1 + \cos^2\theta}{2R^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 r^6 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right)^2. \qquad (48.1)$$

Из теории Рэлея следует, что свет, рассеянный частицей, состоит из двух некогерентных взаимно перпендикулярных плоско поляризованных компонент. При рассеянии на сферических частицах (неоднородностях) степень поляризации p для неполя-

ризованного падающего света равна:

$$p = \frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}. \qquad (48.2)$$

Для рассеяния на удлиненных частицах на степень поляризации влияет и их ориентация. Угловое распределение интенсивности рассеянного света симметрично относительно плоскости, перпендикулярной к падающему свету. Таким образом, одинаковое количество света рассеивается как вперед, так и назад.

§ 49. РАССЕЯНИЕ МИ

Рассеяние Ми — это классическое упругое рассеяние, происходящее на длине волны падающего излучения, когда размеры рассеивающих частиц сравнимы с длиной волны оптического излучения или больше ее. При этом рассеиваемый свет сконцентрирован в основном в направлении «вперед» и имеет значительно меньшую интенсивность в направлении «назад».

При прохождении света через вещество происходит его ослабление. Считаем, что ослабление связано только с рассеянием и поглощением света веществом. Для энергии ослабления, рассеяния и поглощения введем обозначения $W_{осл}$, $W_{рас}$ и $W_{погл}$ соответственно. Закон сохранения энергии требует выполнения равенства

$$W_{осл} = W_{рас} + W_{погл}. \qquad (49.1)$$

Если I_0 — сила падающего света, то сечения ослабления, рассеяния и поглощения таковы:

$$\sigma_{осл} = W_{осл}/I_0, \qquad \sigma_{рас} = W_{рас}/I_0, \qquad \sigma_{погл} = W_{погл}/I_0. \qquad (49.2)$$

Часто в качестве рассеивающих частиц рассматриваются шарообразные частицы, для которых поперечное сечение равно $S = \pi r^2$, где r — радиус частицы. Тогда для характеристики эффективности того или иного физического процесса вводим переменные

$$Q_{осл} = \frac{\sigma_{осл}}{\pi r^2}, \qquad Q_{рас} = \frac{\sigma_{рас}}{\pi r^2}, \qquad Q_{погл} = \frac{\sigma_{погл}}{\pi r^2}, \qquad (49.3)$$

называемые **факторами эффективности** ослабления, рассеяния и поглощения света.

В задаче Ми (рассеяние плоской волны однородным шаром) необходимо решать скалярное волновое уравнение. Из найденного решения можно получить следующие формулы для факторов эффективности ослабления и рассеяния:

$$Q_{\text{осл}} = \frac{2}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\mathrm{Re}\,(a_n + b_n), \tag{49.4}$$

$$Q_{\text{рас}} = \frac{2}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2), \tag{49.5}$$

где $x = \dfrac{2\pi r}{\lambda}$, а a_n и b_n — коэффициенты рассеяния Ми, можно записать в виде

$$a_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi'_n(x) - \psi_n(x)\psi'_n(mx)}{m\psi_n(mx)\xi'_n(x) - \xi_n(x)\psi'_n(mx)}, \tag{49.6}$$

$$b_n = \frac{\psi_n(mx)\psi'_n(x) - m\psi_n(x)\psi'_n(mx)}{\psi_n(mx)\xi'_n(x) - m\xi_n(x)\psi'_n(mx)}, \tag{49.7}$$

где $m = \dfrac{P_1}{P}$ — относительный показатель преломления, P_1 и P — показатели преломления частицы и среды соответственно. Функции $\psi_n(x)$ и $\xi_n(x)$ — так называемые **функции Риккати—Бесселя**:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x), \tag{49.8}$$

$$\xi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left(J_{n+\frac{1}{2}}(x) - iN_{n+\frac{1}{2}}(x)\right), \tag{49.9}$$

а $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ и $N_{n+\frac{1}{2}}(x)$ — функции Бесселя и Неймана.

§ 50. ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА

Оптическая толщина — безразмерная величина, характеризующая степень непрозрачности среды для проходящего сквозь нее излучения. Обычно оптическая толщина определяется по отношению к конкретному процессу взаимодействия излучения с веществом (например: оптическая толщина по томсоновскому рассеянию или оптическая толщина по тормозному поглощению). Оптическая толщина среды между точками z_1 и z_2 равна

$$\tau(\lambda, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} k(\lambda, z)\,\mathrm{d}z, \tag{50.1}$$

где k — коэффициент ослабления/поглощения/рассеяния (размерность k — $м^{-1}$).

Оптическая толщина атмосферы состоит из оптической толщины $\tau_{мол}$ молекулярного рассеяния (рэлеевского рассеяния), оптической толщины $\tau_{газ}$ ослабления в газах (например, в озоне, водяном паре и т. д.) и оптической толщины $\tau_{аэро}$ рассеяния аэрозоля. Таким образом,

$$\tau = \tau_{мол} + \tau_{газ} + \tau_{аэро}. \tag{50.2}$$

Предполагаем, что частицы в атмосфере представляют собой шары различных радиусов, а показатели преломления таких шаров известны. Тогда соотношение между оптической толщиной атмосферы τ и функцией $n(r, z)$ распределения частиц по размерам можно описать в интегральном виде

$$\tau(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty \pi r^2 Q_{осл}(r, \lambda, m) n(r, z)\, dz\, dr, \tag{50.3}$$

где r — радиус частицы аэрозоля, λ — длина волны, m — комплексный показатель преломления, $n(r, z)$ — плотность частиц аэрозоля на высоте, имеющих радиусы в интервале между r и $r + dr$. Если обозначить $n(r) = \int_0^\infty n(r, z)\, dz$, то последнее уравнение можно переписать как

$$\tau(\lambda) = \int_0^\infty \pi r^2 Q_{осл}(r, \lambda, m) n(r)\, dr, \tag{50.4}$$

таким образом мы получили интегральное уравнение Фредгольма I рода, решение которого описывалось в гл. 3.

Литература

1. **ван де Хюлст Г.** *Рассеяние света малыми частицами.* — М.: ИЛ, 1961. — 538 с.
2. **Борен К., Хафмен Д.** *Поглощение и рассеяние света малыми частицами.* — М.: Мир, 1986. — 664 с.
3. **Кондратьев К. Я., Москаленко Н. И., Поздняков Д. В.** *Атмосферный аэрозоль.* — Ленинград: Гидрометеоиздат, 1983. — 224 с.
4. **Фукс Н. А.** *Механика аэрозолей.* — М.: Изд-во АН СССР, 1955. — 354 с.
5. **Грин Х., Лейн В.** *Аэрозоли — пыли, дымы и туманы.* — Ленинград: Химия, 1972. — 428 с.
6. **Райст П.** *Аэрозоли. Введение в теорию.* — М.: Мир, 1987. — 280 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

a posteriori 37
a priori 37

Аддитивность 14
акустическая жесткость 198
алгоритм
  генетический 105
  регуляризирующий 33, 35, 38
аномалия 148
ассоциативность
  сложения 9
  умножения 10
аэрозоль 201
  естественная 201
  искусственная 201

Базис 10
  Рисса 135

Вейвлет 134
  wave 137
  «мексиканская шляпа» 137
  «французская шляпа» 136
  Морле 134
  Хаара 135
  ортогональный 135
вейвлет-преобразование 137
вектор 10
  ортогональный 15
векторы
  взаимно сопряженные
    относительно матрицы 85
  сопряженные относительно
    матрицы 85
волна
  Лява 188
  Рэлея 187
  поперечная 186
  продольная 185
  сдвига 186
  сейсмическая 184
  сжатия 185
волокно 203
выбор
  «родителей» 106
  начального поколения 106
выпуклая
  комбинация 51
    множеств 51
  оболочка 51
выпуклый
  многогранник 51
выпуклый полиэдр 51

Геофон 190
гиперплоскость 51
годограф 195
градиент
  функционала 47

Дельта-функция Дирака 149
деформация 106
диаметр
  Мартина 202
  Ферета 202
  площади проекции 202
  свободного падения 202
  ситовый 202
  удельной поверхности 202
дистрибутивность
  умножения 10
дым 201

Единица 10

Жесткость
  акустическая 199

Зависимость
  линейная 10
задача
  без ограничений 45

выпуклого программирования 54
квадратичного программирования 55
корректная 8, 33
корректная по Тихонову 40
линейного программирования 50
математического программирования 54
нерегуляризируемая 33
обратная 31, 158, 177
оптимизации 45
регуляризируемая 33, 35
сейсморазведки 184
с ограничениями 45
экстремальная 45
значения
сингулярные 69

Интеграл
Фурье 132
интерпретация 143
истокопредставимость 117

Каротаж 197
квазирешение 41
операторного уравнения 42
комбинация
выпуклая 51
линейная 10
коммутативность сложения 9
компакт
слабый 57
константа
сильной выпуклости 53
коэффициент
Ламэ 185
Пуассона 184
Фурье 131
отражения 198
преломления 198

Луч 48

Магниторазведка 171
матрица
Гесса 47
вырожденная 67
диагональная 67
единичная 67
невырожденная 67
обратная 67
определитель 67
ортогональная 67
ранг 67
транспонированная 67
мера
несовместности 71, 123
меридиан
магнитный 172
метод
Демьянова 107
Лаврентьева 121, 162
Нелдера—Мида 100
Ньютона 90
Ньютона—Канторовича 93
Полака—Рибьера 90
Спендли, Хекста и Химсворта 101
Флетчера—Ривза 90
Холесского 130, 163
Хука—Дживса 95
апостериорный 122
априорный 122
второго порядка 74
градиентного спуска 76
золотого сечения 77
квадратичной аппроксимации 77
квадратного корня 130
координатного спуска 94
наименьших квадратов 70
невязки
обобщенный 124
нулевого порядка 74, 94
обобщенной перекрестной проверки 122
отраженных волн 192
первого порядка 74

преломленных волн 192
проекции сопряженных
градиентов 108
расширяющихся компактов 117
скорейшего спуска 80
случайного поиска 105
сопряженных градиентов 84, 87
сопряженных направлений 86
спуска 75
градиентного 76
условного градиента 107
метрика 11
неотрицательность 11
симметричность 11
многогранник
выпуклый 51
множество
аффинно независимое 50
аффинное 49
второй категории 38
выпуклое 49
допустимое 45
замкнутое 11
замыкание 11
компактное 22
нигде не плотное 37
ограничений 45
ограниченное 11
открытое 11
параллельное 49
первой категории 37
полиэдральное 50
размерность 50
сдвиг 49
счетное 37
эффективное 51
модель
плоской Земли 192
сферической Земли 192
модуль
Юнга 184
всестороннего сжатия 184
мутация 106

Надграфик 51
наклонение 172
намагниченность 171
эффективная 176
направление
убывания 75
невязка
обобщенная 123
неотрицательность метрики 11
неравенство
Бесселя 131
Коши—Буняковского 14
Птолемея 19
треугольника 11, 12
норма 11
оператора 21
подчиненность 12
эквивалентность 12
носитель
масс 148
носитель функции 149
локальный 149
ограниченный 149
нулевой элемент 10
нуль линейного пространства 10
нуль-пространство 20

Область
значений 9, 67
определения 9
обобщенная перекрестная
проверка 122
обобщенный принцип невязки 122
оболочка
аффинная 50
выпуклая 51
образ 19
обратный элемент 10
ограничение
априорное 32
однородность 14
оператор 19
Фредгольма 20
биективный 20
вполне непрерывный 24, 25

вырожденный 20
инъективный 19
компактный 24, 25
линейный 20
неотрицательно определенный 48
непрерывный
в точке 21
обратный 20
ограниченный 21
положительно определенный 48
проектирования 109
псевдообратный 71
регуляризирующий 34, 39
самосопряженный 25
сопряженный 25
сходимость 66
в операторной топологии 66
сильная 66
слабая 66
сюръективный 19
операция
отражения 101
растяжения 101
редукции 101
сжатия 101
определитель 67
отношение
рефлексивности 12, 49
симметричности 12, 49
транзитивности 12, 49
эквивалентности 12, 49
отрезок 48
оценка погрешности
апостериорная 119

Параметр
лучевой 190
регуляризации 120
пластинка 202
плотность
акустической жесткости 199
поверхность
эквипотенциальная 147
поле
консервативное 145
потенциальное 145
полиэдр 50
полупространство
замкнутое 50
открытое 50
полюс
магнитный
северный 173
южный 173
последовательность
компактная 22
минимизирующая 75
ограниченная 22
сходящаяся по аргументу 61
сходящаяся по функционалу 61
фундаментальная 13
потенциал
гравитационный 145
правило
буравчика 172
предел последовательности 12
преобразование
Фурье 133
вейвлет 137
принцип
невязки 122
обобщенный 122
проектор 109
произведение 9
скалярное 14
производная
Фреше 47
вторая 47
сильная 47
прообраз 19
пространство
банахово 13
векторное 10
гильбертово 16
евклидово 14
линейное 9
линейных ограниченных операторов 39

метрическое 11
нормированное 13
полное 13
прямая 48
псевдорешение 70, 126
нормальное 71, 126
пыль 201

Равенство
Парсеваля 132, 133
радиус
шара 11
разложение
сингулярное 70
размерность
аффинного множества 50
выпуклого множества 51
распределение
Г-распределение 204
Гаусса 203
Дейрменджиана 204
логарифмически-нормальное 203
нормальное 203
Нукиямы—Танасавы 204
Розена—Раммлера 204
Хргиана—Мазина 204
Юнге 203
рассеяние
Ми 206
рэлеевское 205
упругое 205
расстояние 11
рефлексивность 12, 49
решение
пробное 162
фундаментальное 149
ряд
Фурье 131

Свертка 133
свойство
скалярного квадрата 14
сдвиг множества 49
сейсмограф 189
сейсмология 184
сжатие 147
символ
Кронекера 185
симметричность 12, 14, 49
метрики 11
симплекс 51
регулярный 100
система
ортонормированная 130
полная 132
склонение 172
скрещивание 106
слабый компакт 57
СЛАУ 70
сложение
ассоциативность 9
коммутативность 9
структура
овражная 80
сумма 9
сходимость
в среднем 15
квадратичная 75
линейная 75
по норме 12
равномерная 13
сверхлинейная 75
сильная 57
слабая 57
со скоростью геометрической прогрессии 75

Теорема
Больцано—Вейерштрасса 23
теорема Планшереля 140
тождество Аполлония 19
толщина
оптическая 207
томография
сейсмическая 193
точка
глобального минимума 46
допустимая 45
локального минимума 46
прикосновения 11

строгого глобального минимума 46
локального минимума 46
транзитивность 12, 49
туман 201

Угол
критический 191
умножение
ассоциативность 10
дистрибутивность 10
уравнение
Вольтерра
I рода 27
II рода 27
Лапласа 148
Пуассона 149
Фредгольма
I рода 27, 128
II рода 27
типа свертки 138
ускорение
свободного падения 148

Фактор
эффективности 206
форма частиц
волокно 202
изометрическая 202
пластинка 202
функционал 45
Тихонова 121
вогнутый 51, 55
выпуклый 51, 52
дважды дифференцируемый 47
дифференцируемый в точке 47
полунепрерывный снизу 47
сглаживающий 120
сильно вогнутый 55
сильно выпуклый 53
слабо полунепрерывный снизу 59
собственный 52
строго вогнутый 55
строго выпуклый 53
целевой 45
функция
Риккати—Бесселя 207
аппаратная 138
гармоническая 149
унимодальная 76

Центр
шара 11

Число
простое 39

Шар
замкнутый 11
открытый 11
радиус 11
центр 11

Элемент
нулевой 10
обратный 10
элементы
линейно зависимые 10
линейно независимые 10
ортогональные 130
элитизм 106
эпиграф 51

Ядро
замкнутое 28

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адамар Жак (Jacques Hadamard), 1865–1963 — французский математик, работавший в области функционального анализа, топологии, теории вероятностей, физике.

Банах Стефан (Stefan Banach), 1892–1945 — польский математик, один из создателей современного функционального анализа.

Бессель Фридрих Вильгельм (Friedrich Wilhelm Bessel), 1784–1846 — немецкий математик и астроном.

Больцано Бернард (Bernard Bolzano), 1781–1848 — чешский математик и философ.

Буняковский Виктор Яковлевич, 1804–1889 — российский математик, педагог, работавший в основном в области теории чисел и практических приложений теории вероятностей.

Вейерштрасс Карл (Karl Weierstraß), 1815–1897 — немецкий математик, создатель основ математического анализа.

Вольтерра Вито (Vito Volterra), 1860–1940 — итальянский физик и математик, основные работы в области интегральных и дифференциальных уравнений.

Галилей Галилео (Galileo Galilei), 1564–1642 — итальянский физик, астроном, математик и философ, оказавший значительное влияние на науку своего времени.

Гессе Людвиг Отто (Ludwig Otto Hesse), 1811–1874 — немецкий математик, работавший в геометрии, линейной алгебре и в области вариационного исчисления.

Гильберт Давид (David Hilbert), 1862–1943 — немецкий математик, работавший в области теории чисел, математической физики, интегральных и дифференциальных уравнений.

Дирак Поль Адриен Морис (Paul Adrien Maurice Dirac), 1902–1984 — английский физик теоретик.

Евклид (Ευκλείδης), около 300 г. до н. э. — древнегреческий математик, автор «Начал» — первого из дошедших до нас математических трактатов.

Йенсен Иоган Людвиг Виллиам Вальдемар (Johan Ludvig William Valdemar Jensen), 1859–1925 — датский математик и инженер.

Канторович Леонид Витальевич, 1912–1986 — советский математик и экономист, один из создателей линейного программирования.

Коши Огюстен Луи (Augustin Louis Cauchy), 1789–1857 — французский математик, разработавший основы математического анализа и внесший большой вклад в развитие алгебры и математической физики.

Крамер Габриэль (Gabriel Cramer), 1704–1752 — швейцарский математик, один из создателей линейной алгебры.

Лагранж Жозеф Луи (Joseph Louis Lagrange (*фр.*), Guiseppe Lodovico Lagrangia (*итал.*)), 1736–1813 — французский математик, механик и астроном итальянского происхождения.

Лаплас Пьер—Симон (Pierre–Simon Laplace), 1749–1827 — французский математик, физик и астроном.

Лебег Анри Леон (Henri Leon Lebesgue), 1875–1941 — французский математик, обобщивший понятие интеграла

Липшиц Рудольф Отто Сигизмунд (Rudolf Otto Sigismund Lipschitz), 1832–1903 — немецкий математик, работавший в области математического анализа, дифференциальных уравнений, механики.

Ляв Август Эдвард Хаф (Augustus Edward Hough Love), 1863–1940 — английский математик, разработавший теорию поверхностных волн.

Ньютон Исаак (Isaac Newton), 1643–1727 — английский физик, астроном и математик, один из создателей классической физики.

Парсеваль Марк-Антуан (Marc-Antoine Parseval), 1755–1836 — французский математик.

Планшерель Мишель (Michel Plancherel), 1885–1967 — швейцарский математик.

Пуассон Симеон Дени (Simeon Denis Poisson), 1781–1840 — французский физик и математик.

Риман Георг Фридрих Бернхард (Georg Friedrich Bernhard Riemann), 1826–1866 — немецкий математик, обобщивший евклидову геометрию, разработавший теорию многозначных комплексных функций

Тейлор Брук (Brook Taylor), 1685–1731 — английский математик.

Фреше Морис Рене (Maurice Rene Frechet), 1878–1973 — французский математик, работавший в области теории вероятностей, функционального анализа и топологии.

Фурье Жан Батист Жозеф (Jean Baptiste Joseph Fourier), 1768–1830 — французский математик и физик.

Научное электронное издание

Серия: «Математическое моделирование»

Ягола Анатолий Григорьевич
Ван Янфей
Степанова Инна Эдуардовна
Титаренко Валерий Николаевич

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ. ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЕОФИЗИКЕ

Ведущий редактор *Н. А. Шихова*. Художник *Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*. Корректор *Е. Н. Клитина*
Оригинал-макет подготовлен *Е. Г. Ивлевой* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано 27.11.13. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 13,5.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 10-й для операционных систем Windows, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry