

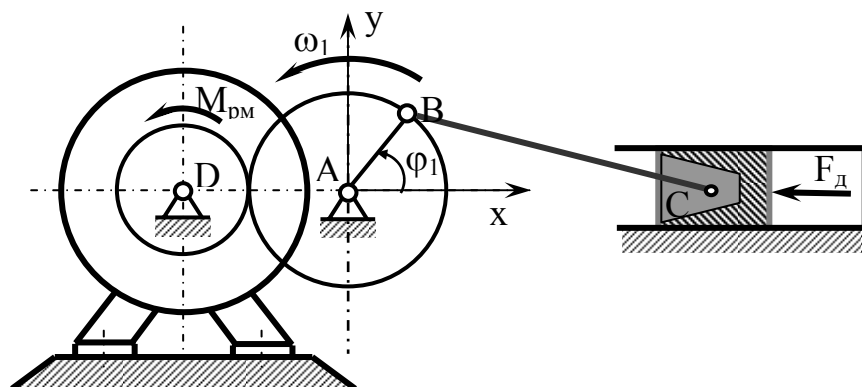


*Томский межвузовский центр
дистанционного образования*

Е.А. Щеголев

МЕХАНИКА

Учебное пособие



ТОМСК – 2004

Корректор: Осипова Е.А.

Щеголев Е.А.

Механика: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2004. – 231 с.

© Щеголев Е.А., 2004

© Томский межвузовский центр
дистанционного образования, 2004

1 ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Как бы не называли наш технический век – веком космоса или автоматике, атомным веком или веком электроники – основой технического прогресса была и остается машина. Машиностроение – ведущая отрасль, производящая машины, механизмы и оборудование для целого ряда других отраслей, это их материально-техническая база. От уровня развития машиностроения, от степени совершенства машин в значительной степени зависит производительность труда. Именно поэтому перед машиностроением всегда стоят такие задачи, как освоение новых конструкций машин и механизмов, средств автоматизации, позволяющих использовать высокопроизводительные энерго- и материалосберегающие технологии, обеспечение необходимой надежности и долговечности машин и механизмов, повышение их экономичности и производительности.

Задачи перед машиностроением стоят весьма сложные. Машина должна быть прочной, надежной в работе, высокопроизводительной, но вместе с тем и легкой, с минимальными материалоемкостью и энергозатратами, не должна загрязнять окружающую среду, должна соответствовать требованиям технической эстетики. Чтобы успешно решать эти задачи, чтобы создавать хорошие машины, отвечающие перечисленным выше требованиям, инженеру нужны знания основ целого ряда наук, в том числе теории механизмов и машин.

Кинематическая схема механизма является «скелетом» реальной конструкции машины. Выбор и проектирование схемы механизма определяет первый и основной этап проектирования машин. Выбор размеров и материала деталей будущей машины определяет следующий этап. Проектирование завершается выбором методов и средств изготовления машин.

Теория машин и механизмов является комплексной наукой, в которой проблемы структуры, кинематики и динамики машин, их анализа и синтеза тесно переплетаются с проблемами оптимального проектирования и управления.

Одним из основных направлений развития современной техники является автоматизация всех видов производства. Большой вклад в решение этой задачи внесут робототехнические системы,

которые способны не только выполнять разнообразные механические операции, но и самостоятельно решать возникающие при этом определенные комплексы логических задач. Если робот оснащен манипуляторами, системой восприятия и обработки информации о состоянии внешней среды и свойствах объектов, с которыми он оперирует, то собранная информация используется затем в процессе реализации заданной программы.

Наличие большого объема информации о технологическом процессе, о состоянии среды, об относительном расположении в пространстве объектов манипулирования открывает широкие возможности автоматизации разнообразных операций. При этом робототехническая система способна выбирать нужные детали из полного комплекса, поступающего на рабочую позицию, регулировать транспортные потоки. Такие робототехнические системы связывают отдельные технологические операции в единую цепь полностью автоматизированного производства.

Нормальное безотказное функционирование такого производства возможно лишь при условии организации многоуровневой системы управления, построенной на базе электронно-вычислительной техники. Изучение совместной работы машин и управляющих ЭВМ, разработка необходимых алгоритмов и программ – другая важная задача в теории механизмов и машин.

С помощью автоматических манипуляторов с программным управлением можно воспроизводить большое число операций по транспортировке обрабатываемых объектов, закреплению и раскреплению их в обрабатываемых машинах, упаковке, распаковке; контрольно-измерительные операции и пр.

Рабочие органы автоматических машин и систем представляют собой по структуре пространственные кинематические цепи со многими степенями свободы. Поэтому перед современной теорией машин и механизмов возникают задачи по структурному, кинематическому и динамическому анализу и синтезу различных схем механизмов роботов, манипуляторов и других подобных систем. В частности, должны быть решены задачи устойчивости движения рабочих органов, изучены колебательные процессы, возникающие в период их движения, рассмотрены задачи, связанные с оптимальными

законами движения рабочих органов, разработаны алгоритмы движения этих органов.

При решении задач механики требуется учитывать основные параметры приводов, их влияние на динамику управляемых ими механизмов. Проблема разработки приводов и систем управления роботами, манипуляторами, шагающими и другими машинами является одной из важнейших в создании машин подобного типа. При решении этих проблем возникают вопросы создания систем с большой надежностью, оптимальными габаритами, малой инерционностью, обладающих широкими диапазонами скоростей.

Промышленные роботы и манипуляторы, управляемые человеком-оператором или программным устройством, могут быть отнесены к роботам первого поколения. В настоящее время получают быстрое развитие работы по созданию роботов, обладающих некоторыми органами чувств человека, например, осязанием, слухом, зрением, обонянием, реагирующих на неощутимую человеком информацию, например, на ультразвук, вибрации, электромагнитные и тепловые поля и т.п. К роботам еще более высокого поколения относятся устройства, обладающие в той или иной степени искусственным интеллектом.

Важную роль в системах управления автоматизацией производства играет ЭВМ. С ее помощью стал возможен анализ многозвенных, с большим числом степеней свободы механизмов, решение задач оптимального синтеза как отдельных механизмов, так и сложных машин автоматического действия, решения задач проектирования многокритериальных и многопараметрических машинных устройств, программное управление большинством современных машин, управление новыми машинами с устройствами биомеханического типа манипуляторов, роботов, шагающих машин и др.

Вновь создаваемые машины-автоматы должны отвечать требованиям высокой эффективности заданного технологического процесса и иметь автоматическое управление, максимально освобождающее человека от контроля за работой машины. В настоящее время создаются не только машины-автоматы, но и системы машин автоматического действия в форме поточных автоматических линий. В этих линиях в одну общую систему увязываются основные технологические процессы с такими процессами, как транспорти-

ровка, контроль продукции, упаковка, счет выпускаемых изделий и др. Это могут быть поточные линии обычного линейного типа, роторные линии, кольцевые линии с использованием промышленных роботов.

Отличительной чертой машин-автоматов и систем автоматического действия ближайшего будущего будет высокий уровень управления ими по самым различным параметрам, критериям и показателям. Системы управления в зависимости от того, какие требования предъявляются к управляемому объекту, и условий, в которых он работает, могут иметь логические элементы электронного, пневматического, гидравлического и механического типов. Системы управления могут содержать блок памяти и блоки, обеспечивающие автоматическую надстройку и адаптацию управляемых объектов, позволяющие качественно выполнять требуемый технологический процесс при изменившихся внешних условиях.

При решении задач синтеза механизмов мы имеем дело чаще всего с многокритериальными системами, поэтому такие задачи связаны с поиском оптимальных вариантов. Нахождение оптимальных вариантов или областей их существования требует развития теории оптимального синтеза механизмов. Решение подобных задач, как правило, возможно только с помощью ЭВМ, а это требует разработки соответствующих алгоритмов и программ.

Большие задачи стоят и в области анализа и синтеза механизмов передач. Здесь в первую очередь надо отметить необходимость дальнейшего развития синтеза зубчатых зацеплений, особенно пространственных. Необходимо также дальнейшее развитие теории и методов проектирования сложных зубчатых редукторов с планетарными и дифференциальными схемами. Почти все отрасли промышленности нуждаются в надежных механизмах с бесступенчатым изменением передаточных функций. Важной задачей остается синтез системы привод – ведомый механизм. Она должна ставиться и решаться по-новому на основе использования современных вычислительных алгоритмов и вычислительной техники.

В настоящее время существенно повысились рабочие скорости машин, что привело не только к увеличению динамических нагрузок на звенья механизмов и рабочие органы машины, но и к существенному увеличению уровня вибраций и порождаемого вибрациями

шума. Вибрации сопутствуют работе любой машины, что порождает проблему виброзащиты машин и снижения уровня шума машин. Вибрации часто оказываются причиной, сдерживающей дальнейший прогресс в той или иной области техники. Так, например, дальнейшее увеличение быстроходности высокоскоростных роторных машин ограничено вибростойкостью ротора и подшипниковых опор; повышение мощности паровых и газовых турбин – вибрациями лопаток; создание мощных вертолетов – колебаниями рабочих лопастей; повышение точности металлорежущих станков – вибрациями режущего инструмента и станины; создание высокоточных и надежных систем автоматического управления – вибрациями ее отдельных элементов.

Вибрации вызывают большие напряжения в конструкциях, что приводит к их поломкам и разрушениям, главным образом усталостного характера.

Вибрации являются источниками и так называемой акустической усталости материала, они искажают основное движение элементов машин, механизмов и систем управления по предписанным кинематическим законам, порождают неустойчивость заданного закона и часто приводят к отказу всей системы.

Вибрации машин оказывают непосредственное физиологическое влияние на человека, снижают его функциональную деятельность и работоспособность, поражают отдельные системы живого организма.

В тоже время вибрации ограниченной интенсивности и нормированного времени действия могут оказывать положительное влияние на живой организм. Известны методы вибростимуляции, вибромассажа.

Новый тип машин, где вибрации играют полезную роль, носит название машин вибрационного принципа действия. Такие машины получили широкое применение благодаря экономичности, обусловленной использованием эффекта резонанса. Машины, приборы, оборудование и стенды вибрационного принципа действия выполняют самые разнообразные технологические процессы.

Наука о вибрациях изучает методы обнаружения, измерения и возможного их уменьшения. Наряду с этим она дает методы определения последствий вибраций, когда их полностью нельзя устранить. Например, расчет амплитуд вибраций для выяснения долго-

вечности машин, способы изоляции шума, а также методы определения допустимых доз воздействия динамических нагрузок. Вибрация является основным средством, которое позволяет сделать предварительную и достоверную оценку ресурса работы машин путем наблюдения за ее изменением во времени, не допуская аварийных ситуаций.

Другой проблемой динамики машин является акустическая динамика машин, т.е. проблема изучения причин и источников шумовых эффектов в машинах и разработка задач динамики машин, связанных с полной или частичной локализацией шумов определенных уровней.

Учет упругости звеньев в машинах позволяет выявить колебательные явления в сложных кинематических цепях и определять реальные нагрузки на звенья и кинематические пары, давать рекомендации по отстройке от резонансов и демпфировать возникающие колебания, решать задачи точности заданного закона движения механизма.

В последнее время возрос интерес к теории пространственных механизмов, и в том числе к их динамике, т.к. эти механизмы находят все большее применение, в частности, в задачах, связанных с внедрением роботов и манипуляторов, в задачах стыковки космических объектов. В этой области разработаны методы описания движения пространственных механизмов с несколькими степенями свободы, их силовой анализ, решены некоторые задачи уравнивания и колебаний этих систем.

Остается важнейшей задачей теории машин и механизмов развитие экспериментальных методов изучения характеристик различных машин и механизмов, в том числе экспериментальные исследования систем машин автоматического действия в условиях их производственной работы с автоматической регистрацией и обработкой полученной экспериментальной информации на ЭВМ. Необходимо дальнейшее развитие использования аппаратуры для динамических исследований, необходимость которой определяется задачами автоматизации и быстро протекающих во времени динамических процессов современных машин.

Развитие экспериментальной динамики открывает хорошие перспективы разработки и совершенствования методов контроля и

диагностики автоматического оборудования. Разработка методов технической диагностики применительно к машинам-автоматам, промышленным роботам и манипуляторам, двигателям, летательным аппаратам основана на выделении объективных критериев качества, определяющих работоспособность и одновременно признаки дефектных состояний механизмов.

2 СТРОЕНИЕ МЕХАНИЗМОВ

Механизм является системой твердых тел. Поэтому механизмы имеют как весьма простое, так и достаточно сложное и разнообразное строение (структуру). Строением механизма определяются такие его важнейшие характеристики, как виды осуществляемых движений, способы их преобразования, число степеней свободы. Формирование механизма, т.е. соединение отдельных его частей в единую систему, сопровождается наложением связей. Правильное их распределение в строении механизма в сильной степени определяет его надежную эксплуатацию. Поэтому при проектировании нужно из множества разнообразных механизмов выбрать самый подходящий и правильно подобрать его основные структурные элементы. Для этого необходимо знать основные виды современных механизмов, их структурные характеристики, закономерности их строения.

2.1 Структура механизмов

Основными структурными элементами механизма являются звенья и кинематические пары. **Звеном** называется одно или несколько жестко соединенных тел, находящихся в определенном движении. Все неподвижные тела образуют одну жесткую неподвижную систему, называемую **неподвижным звеном** или **стойкой**. Тела, составляющие звенья и изготовленные из монолитного материала, называются **деталью**.

Под **кинематической парой** понимают комбинацию двух соприкасающихся звеньев, соединение которых обеспечивает возможность их относительного движения.

Кинематические пары в зависимости от характера контакта звеньев делятся на **низшие** (рис. 2.1): соприкосновение по поверхности, и **высшие** (рис. 2.2): соприкосновение по линии или в точке.

При анализе структуры и кинематики механизмов применяются изображения кинематических пар и звеньев в соответствии с ГОСТ 2.770-68, ГОСТ 2.721-74 и ГОСТ 2.703-68.

Во время движения механизма звенья в кинематических парах не должны разъединяться, т.е. пары должны быть замкнутыми. Су-

существует геометрическое и силовое замыкание пар. В низших кинематических парах обычно имеет место геометрическое замыкание, которое обеспечивается формой или конструкцией соприкасающихся звеньев (рис. 2.1).

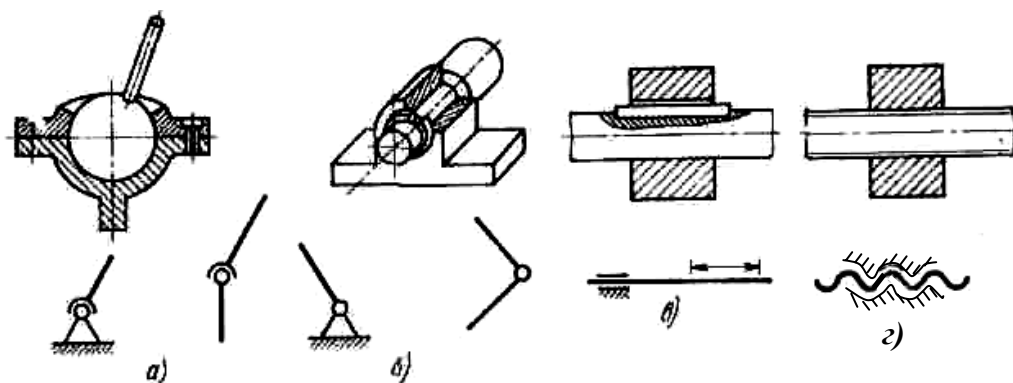


Рисунок 2.1 – Низшие кинематические пары и их условные обозначения:

- а – шаровое шарнирное соединение III класса;
- б – плоское шарнирное соединение V класса;
- в – соединение для возвратно-поступательного движения V класса;
- г – соединение винта и гайки V класса.

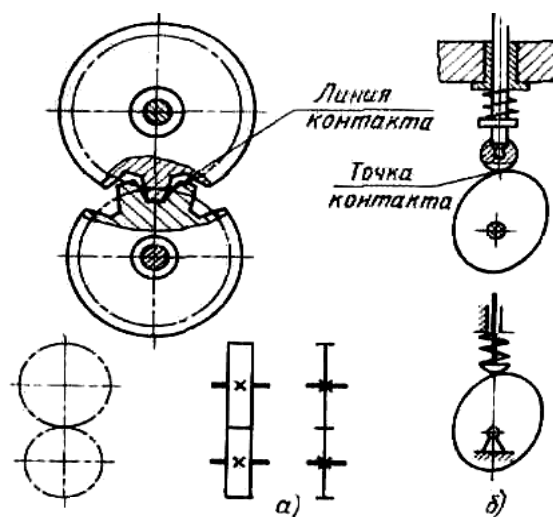


Рисунок 2.2 – Высшие кинематические пары IV класса и их условные обозначения:

- а – зубчатый механизм;
- б – кулачковый механизм.

Для силового замыкания пар необходимо наличие действующей на звенья внешней силы, которая создается силой упругости пружины, силой тяжести и т.п. В кулачковом механизме (рис. 2.2, б) силовое замыкание толкателя с кулачком обеспечивается пружиной сжатия.

Для пояснения приведенных понятий рассмотрим работу механизма перемещения каретки измерительного прибора (рис. 2.3). Ведущим звеном является шестерня 1, которая насажена на вал тихоходного электродвигателя и приводит во вращательное движение ведомое колесо 2. С помощью шатуна 3 вращательное движение преобразуется в поступательное перемещение каретки 5. Измерение перемещения каретки осуществляется с использованием реечной передачи по углу поворота стрелки с шестерней 4. В данном механизме имеется пять подвижных звеньев и одно неподвижное – стойка 6. Звенья механизма (1-6) соединены между собой кинематическими парами, из которых II и VII – высшие, I, III–VI, VIII – низшие.

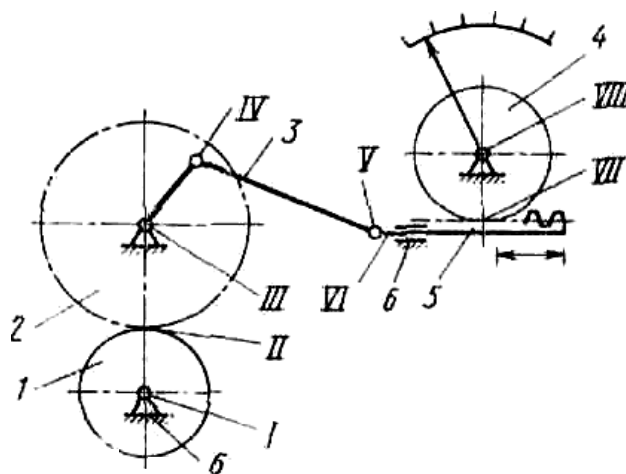


Рисунок 2.3 – Кинематическая схема механизма перемещения каретки с зубчатым индикатором

Все кинематические пары могут быть разделены на классы по числу наложенных связей.

Как известно, свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Звенья, входящие в кинематические пары, не являются свободными телами, поэтому каждое звено не может иметь шесть

независимых движений относительно другого. По характеру соединения звенья могут иметь от одного до пяти движений из шести, соответственно пять, четыре, три, два или одно движение из шести возможных будут исключены. По числу наложенных связей кинематические пары делятся на пять классов. Класс пары, численно равный числу накладываемых связей, определяется по формуле

$$K = 6 - W, \quad (2.1)$$

где W – число степеней свободы.

Шаровой шарнир, показанный на рис. 2.1, а, относится к парам III класса, поскольку имеет три степени свободы (независимые повороты вокруг трех осей). Плоское шарнирное соединение и соединение для возвратно-поступательного движения (рис. 2.1, б и в) относятся к парам V класса, т.к. имеют по одной степени свободы (вращательной и поступательной соответственно). Несмотря на то, что элементы винтовой пары (см. рис. 2.1, г) имеют возможность для относительного вращения и поступательного перемещения, эту пару относят к парам V класса, т.к. поступательное x и вращательное φ движения не являются независимыми: $x = c \varphi$.

Кинематические пары в зубчатом и кулачковом механизмах (рис. 2.2) относятся к парам IV класса, т.к. имеют по две степени свободы и четыре условия связи.

Система звеньев, соединенных кинематическими парами, называется **кинематической цепью**. **Плоскими** называются цепи, все точки которых движутся в параллельных плоскостях. Плоские кинематические цепи могут состоять из пар IV и V классов. В пространственных кинематических цепях траектории движения точек звеньев находятся в непараллельных плоскостях, в этих цепях могут быть использованы пары любого класса.

Механизмом является не всякая кинематическая цепь, а только такая, в которой при заданном движении одного или нескольких ведущих звеньев относительно звена, принятого за неподвижное, все остальные (ведомые) звенья совершают вполне определенные движения.

Ведущим называется звено, к которому приложена движущая сила или момент силы и закон движения которого считается известным.

Ведомое звено, совершающее требуемое движение, для осуществления которого предназначен механизм, называется **рабочим звеном**.

Кинематическая цепь характеризуется числом степеней свободы, т.е. числом независимых движений, которые можно сообщить ее звеньям. Число степеней свободы кинематической цепи определяется числом звеньев, а также числом и классом кинематических пар, составляющих эту цепь. Другими словами, число степеней свободы кинематической цепи определяется ее структурой.

Рассмотрим плоскую кинематическую цепь, состоящую из n звеньев. До соединения в кинематическую цепь все звенья имели $3n$ степеней свободы; после соединения число степеней свободы уменьшается. При этом каждая пара IV класса уменьшает число степеней свободы на единицу, а все вместе на P_{IV} (P_{IV} – число пар IV класса). Аналогично, кинематические пары V класса уменьшают число степеней свободы на $2 P_V$ (P_V – число пар V класса). В результате плоская кинематическая цепь имеет следующее число степеней свободы:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) называется **структурной формулой механизма**. Если одно из звеньев плоской цепи неподвижно, как это имеет место в реальных механизмах, то число степеней свободы уменьшается на три и структурная формула принимает вид

$$W = 3(n - 1) - 2P_5 - P_4. \quad (2.3)$$

Полученная зависимость называется **формулой Чебышева**. Используя ее, определим число свободы механизма, показанного на рис. 2.3. Общее число звеньев механизма $n = 6$, число пар V класса $P_V = 6$, число пар IV класса $P_{IV} = 2$ (пары II и III). Следовательно, $W = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 6 - 2 = 1$, т.е. механизм имеет одну степень свободы.

При проектировании механизмов надо иметь в виду, что всегда $W > 0$ и число степеней свободы должно быть равно числу ведущих звеньев. На практике преимущественное распространение получили плоские механизмы с одной степенью свободы и, следовательно, с одним ведущим звеном.

Для пространственных механизмов в настоящее время наиболее распространена **формула Малышева**, вывод которой проводится следующим образом.

Пусть в механизме, имеющем m звеньев (включая звено – стойку), P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 – число одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижных пар. Число подвижных звеньев обозначим $n = m - 1$. Если бы все подвижные звенья были свободными телами, общее число степеней свободы было бы $6n$. Однако каждая подвижная пара V класса накладывает на относительное движение звеньев, образующих пару, 5 связей, каждая двухподвижная пара IV класса – 4 связи и т.д. Следовательно, общее число степеней свободы, равное шести, будет уменьшено на величину

$$\sum_{i=1}^{i=5} (6 - i) P_i = 5 P_1 + 4 P_2 + 3 P_3 + 2 P_4 + P_5,$$

где i – подвижность кинематической пары,

P_i – число пар с подвижностью i .

В общее число наложенных связей может войти некоторое число q избыточных (повторных) связей, которые дублируют другие связи, не уменьшая подвижности механизма, а только обращая его в статически неопределимую систему. Поэтому число степеней свободы пространственного механизма, равное числу степеней свободы его подвижной кинематической цепи относительно стойки, определяется по следующей **формуле Малышева**:

$$W = 6n - (5 P_1 + 4 P_2 + 3 P_3 + 2 P_4 + P_5 - q); \quad (2.4)$$

при $q = 0$ механизм – статически определимая система,

при $q > 0$ – статически неопределимая система.

Следует отметить, что в структурные формулы не входят размеры звеньев, поэтому при структурном анализе механизмов можно предполагать их любыми (в некоторых пределах). Если избыточных связей нет ($q = 0$), сборка механизма происходит без деформирования звеньев, последние как бы самоустанавливаются; поэтому такие механизмы называются **самоустанавливающимися**. Если избыточные связи есть ($q > 0$), то сборка механизма и движение его звеньев становятся возможными только при деформировании последних.

3 СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

При произвольных (в некоторых пределах) размерах звеньев механизм с избыточными связями ($q > 0$) нельзя собрать без деформирования звеньев. Поэтому такие механизмы требуют повышенной точности изготовления, в противном случае в процессе сборки звенья механизма деформируются, что вызывает нагружение кинематических пар и звеньев значительными дополнительными силами, сверх тех основных сил, для передачи которых механизм предназначен. При недостаточной точности изготовления механизма с избыточными связями трение в кинематических парах может сильно увеличиться и привести к заклиниванию звеньев, поэтому с этой точки зрения избыточные связи в механизмах нежелательны.

Однако в целом ряде случаев приходится сознательно проектировать и изготавливать статически неопределимые механизмы с избыточными связями для обеспечения нужной прочности и жесткости системы, особенно при передаче больших сил. Следует различать избыточные, или добавочные, связи в кинематических парах или в кинематических цепях механизма. Так, например, (рис. 3.1) коленчатый вал четырехцилиндрового двигателя образует с подшипником А одноподвижную вращательную пару, что вполне достаточно с точки зрения кинематики данного механизма с одной степенью свободы ($w = 1$). Однако, учитывая большую длину вала и значительные силы, нагружающие коленчатый вал, приходится добавлять еще два подшипника А' и А'', иначе система будет не работоспособной из-за недостаточной прочности и жесткости. Если эти вращательные пары – двухподвижные цилиндрические, то помимо пяти основных связей будет наложено $4 \cdot 2 = 8$ добавочных (по-

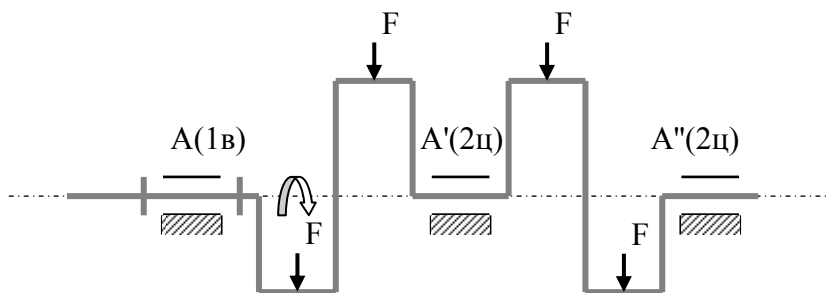


Рисунок 3.1

вторных) связей ($q = 8$); при этом потребуется высокая точность изготовления для обеспечения соосности всех трех опор, иначе вал будет сильно деформироваться, и в материале вала и подшипников появятся недопустимо большие напряжения.

Что касается избыточных связей в кинематических цепях механизма, то при конструировании машин их следует стремиться устранять или же оставлять минимальное количество, если полное их устранение оказывается невыгодным из-за усложнения конструкции или по каким-либо другим соображениям. В общем случае оптимальное решение следует искать, учитывая наличие необходимого технологического оборудования, стоимость изготовления, требуемые ресурс работы и надежность машины. Следовательно, это весьма сложная задача на оптимизацию для каждого конкретного случая.

Методику определения и устранения избыточных связей в кинематических цепях механизмов рассмотрим на примерах.

Пусть плоский четырехзвенный механизм с четырьмя одноподвижными вращательными парами ($w = 1$, $n = 3$, $p = 4$, рис. 3.2, а) за счет неточностей изготовления (например, вследствие непараллельности осей А и D) оказался пространственным. Сборка кинематических цепей 4, 3; 2 и отдельно 4, 1 не вызывает трудностей, и точки В и В' можно расположить на оси Х и Х' соответственно. Однако собрать вращательную пару В, образованную звеньями 1 и 2 можно будет лишь совместив системы координат Вхуz и В' х' у' z', для чего потребуется линейное перемещение (деформация) точек В' звена 2 вдоль оси Х и угловые деформации звена 2 вокруг осей Y и Z (показаны стрелками). Это означает наличие в механизме трех избыточных связей, что подтверждается и по формуле

$$q = W - 6n + \sum_{i=1}^5 (6 - i)P_i, \quad (3.1)$$

следующей из (2.4): $q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 3$ (механизм содержит четыре одноподвижных кинематических пары – P_i , $i = 1$). Чтобы данный пространственный механизм был статически определим, нужна его другая структурная схема, например, изображенная на рис. 3.2, б, где $w = 1$, $P_1 = 2$, $P_2 = 1$, $P_3 = 1$ и

$$q = 1 - 6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 0.$$

Сборка такого механизма произойдет без натягов, поскольку совмещение точек В и В' будет возможно за счет перемещения точки С в цилиндрической паре.

Возможен вариант механизма (рис. 3.2, в) с двумя сферическими парами ($P_1 = 2$, $P_3 = 2$); в этом случае, помимо основной подвижности механизма $w_0 = 1$, появляется местная подвижность $w_m = 1$ – возможность вращения шатуна 2 вокруг своей оси ВС; однако эта подвижность не влияет на основной закон движения механизма и может быть даже полезна с точки зрения выравнивания износа шарниров: при работе механизма шатун 2 может самопроизвольно поворачиваться вокруг своей оси за счет переменных динамических нагрузок и вибраций. Следовательно, $w = w_0 + w_m$ и формула Малышева подтверждает, что такой механизм будет статически определим:

$$q = 2 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 0.$$

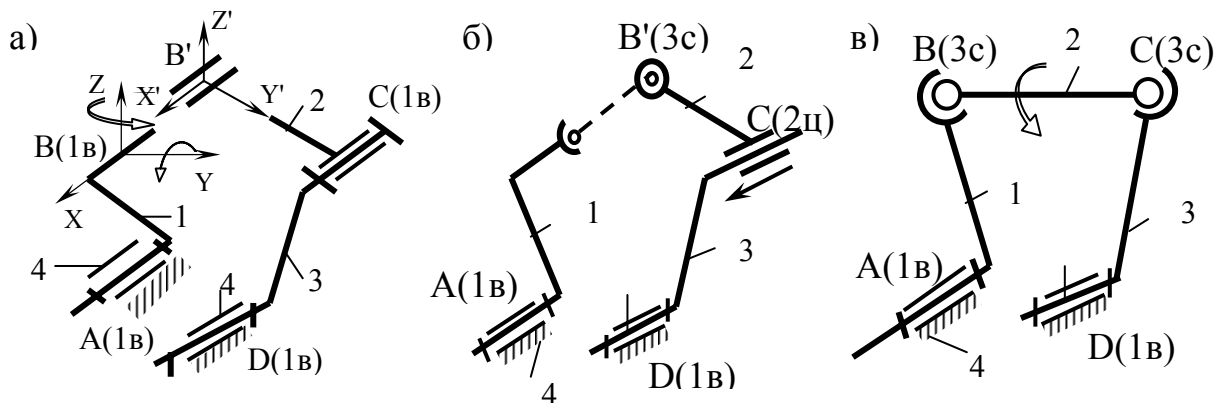


Рисунок 3.2

Механизмы с незамкнутой кинематической цепью собираются без натягов, поэтому они статически определимые системы, без избыточных связей ($q = 0$). Для таких механизмов по формуле (2.4) легко определить число степеней свободы w ; например, для механизма промышленного робота (рис. 3.3) $n=5$, $P_1=5$ и $w = 6 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 5$; эти подвижности (независимые друг от друга движения) показаны на схеме стрелками.

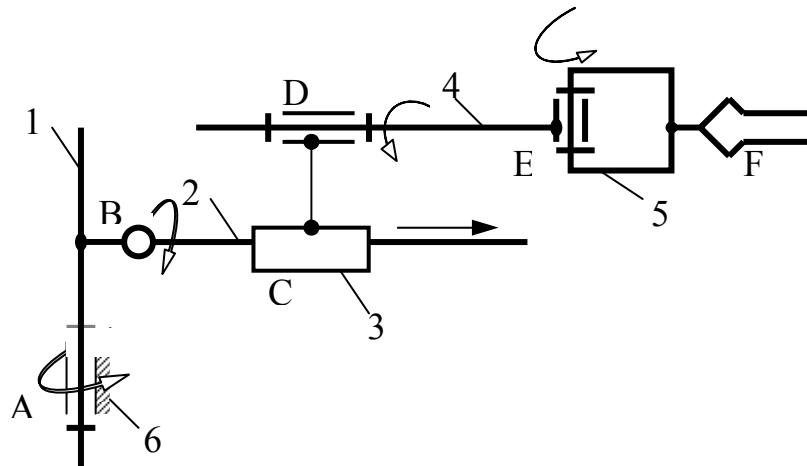


Рисунок 3.3

3.1 Классификация механизмов

Для удобства изучения механизмов и разработки общих методов проектирования и расчета механизмы целесообразно классифицировать. Могут быть использованы разные признаки классификации: характер движения – плоские и пространственные; вид кинематических пар – механизмы с низшими и высшими парами; назначение – механизмы приборов для контроля давлений, температуры, уровня и т.п.; принцип передачи усилий – механизмы трения и зацепления; конструктивные признаки – шарнирно-рычажные, кулачковые, фрикционные, зубчатые, червячные и т.д. В зависимости от задач, поставленных перед исследователем, пользуются той или иной классификацией, лучше всего удовлетворяющей решению этих задач.

Одной из распространенных классификаций плоских шарнирных механизмов с парами пятого класса является структурная классификация, предложенная Артоболевским на основании идей Л.В. Ассура. Согласно этой классификации механизмы объединяются в классы от первого и выше по структурным признакам. Механизм первого класса состоит из ведущего звена и стойки, соединенных кинематической парой пятого класса; механизмы более высоких классов образуются последовательным присоединением к механизму первого класса кинематических цепей, не изменяющих степени подвижности этого исходного механизма, т.е. имеющих степень

подвижности, равную нулю. Число первичных механизмов равно числу степеней свободы механизма.

Кинематическая цепь, которая будучи присоединенной свободными элементами пар (внешние пары) к стойке, обладает нулевой степенью подвижности, называется **группой**. Полагая, что в состав группы входят только пары пятого класса (пары четвертого класса можно условно заменить цепями с парами пятого класса), для группы, как частного случая цепи, получаем условие $w = 3n - 2P_5 = 0$, откуда

$$P_5 = \frac{3}{2} n. \quad (3.2)$$

Таким образом, группа может состоять из двух подвижных звеньев и трех кинематических пар пятого класса (рис. 3.4, а), четырех подвижных звеньев и шести пар пятого класса (рис. 3.4, г, д). В свою очередь группы делятся на классы в зависимости от класса контура. **Контуром** называют замкнутую часть плоскости, занятую звеном или ограниченную со всех сторон звеньями. Класс контура определяется числом кинематических пар, входящих в этот контур. Контур, изображенный на рис. 3.4, б – второго класса (эквивалентное изображение дано на рис. 3.4, в). На рис. 3.4, д изображена группа, в состав которой входят три контура: ABC – контур третьего класса, BDFC – контур четвертого класса, DEF – контур третьего класса. Класс группы определяется наивысшим классом контура, входящего в ее состав. Группа второго класса представлена на рис. 3.4, а, группы третьего и четвертого классов – на рис. 3.4, г и д соответственно.

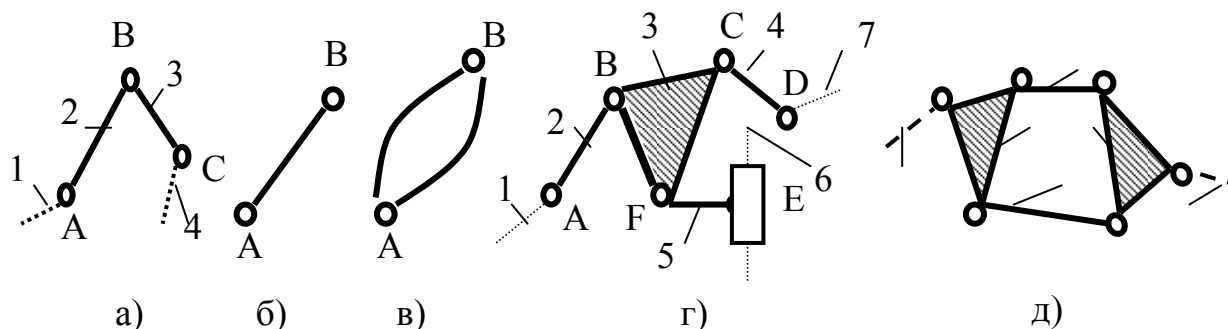


Рисунок 3.4 – Контуры различных классов

Наиболее распространенными являются группы второго класса, которые разделяются на пять видов. Вид группы второго класса определяется в зависимости от числа и относительного расположения поступательных и вращательных кинематических пар в ней (рис. 3.5, а – д).

По наивысшему классу группы, входящего в состав данного механизма, определяется его класс. Для определения класса механизма необходимо выделить в нем группы, начиная с наиболее удаленных от ведущего звена, в результате чего остается механизм первого класса. Выделив группу, одновременно проверяют степень подвижности w оставшейся части механизма.

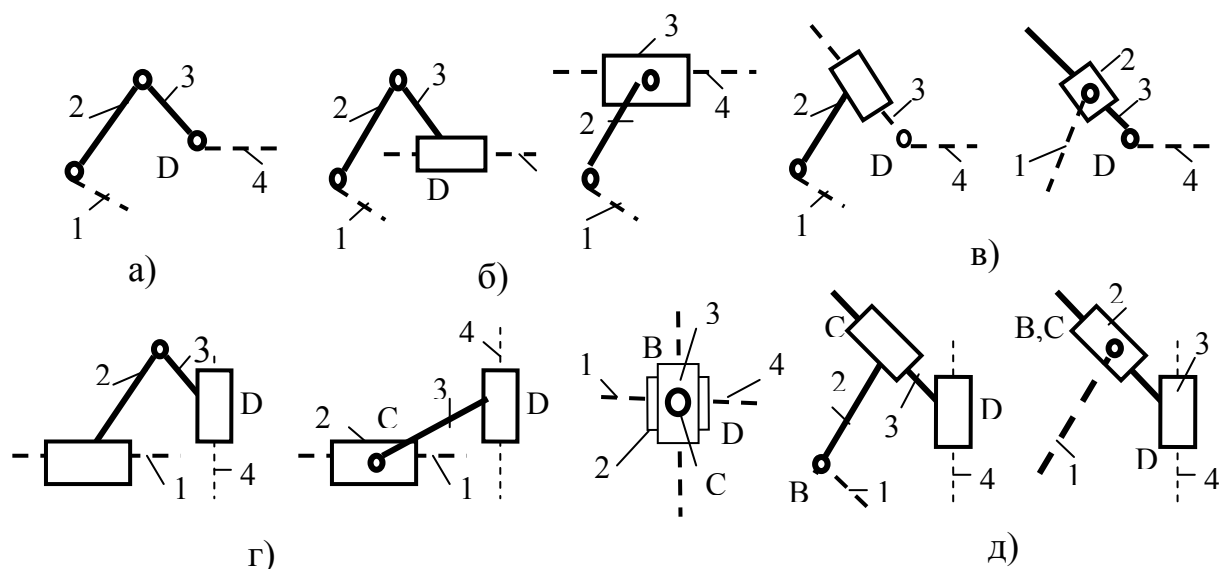


Рисунок 3.5 – Группы второго класса:
а – 1-го вида; б – 2-го вида; в – 3-го вида; г – 4-го
вида; д – 5-го вида

Этот процесс исследования называется **структурным анализом механизма**.

Порядок проведения структурного анализа:

а) определяется количество подвижных звеньев и кинематических пар;

б) устанавливается наличие избыточных связей и лишних степеней свободы (например, движение некруглого ролика в кулачковом механизме); соответствующие звенья, вносящие их, исключаются;

в) производится замена высших кинематических пар цепями с низшими парами;

г) выделяются группы, и устанавливается их класс и вид;

д) определяется класс механизма.

Структурный анализ плоских механизмов следует проводить, применяя метод Ассура (Артоболевского), который обеспечивает статически определимую плоскую схему механизма ($q = 0$) и формулу Малышева, поскольку вследствие неточностей изготовления плоский механизм в какой-то мере получается пространственным.

В качестве примера рассмотрим проектирование кривошипно-ползунного механизма, где была взята структурная схема, состоящая из двухповодковой группы 2, 3 и первичного механизма 1, 4 (рис. 3.6, а).

В этом случае $w = 1$ и $q = 0$. Однако, если учесть неточности изготовления и считать механизм пространственным, по формуле (3.1) при $w = 1$ и $n = 3$ для первого варианта схемы ($P_1 = 4$, рис. 3.6, а) получаем три избыточные связи ($q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 3$). Устранить их можно, повышая подвижность некоторых пар, т.е. снижая их класс. На второй схеме ($P_1 = 2$, $P_2 = 1$, $P_3 = 1$, рис. 3.6, б) избыточных связей уже нет – механизм статически определим ($q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0$). На третьей схеме ($P_1 = 2$, $P_3 = 2$, рис. 3.6, в) степень подвижности $w = w_0 + w_m = 2$, поскольку кроме основной подвижности, определяемой обобщенной координатой φ , имеется местная подвижность – возможность независимого вращения шатуна 2 вокруг оси ВС; избыточных связей здесь тоже нет ($q = 2 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 0$).

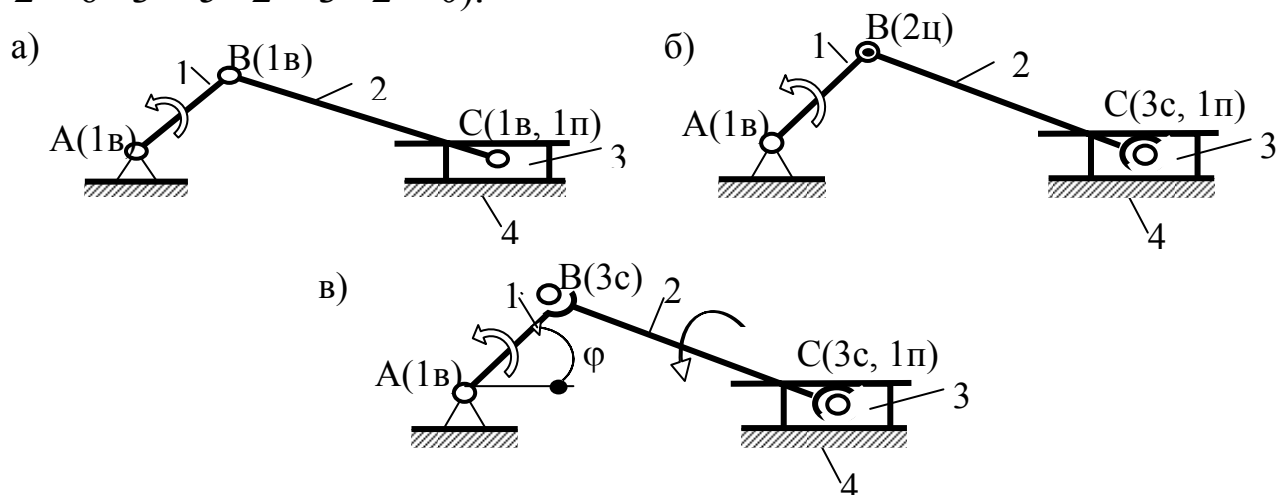


Рисунок 3.6

4 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Основные задачи кинематического анализа механизма состоят в определении параметров (перемещений, скоростей и ускорений) движения его звеньев по заданному закону движения входного (ведущего) звена.

Если движение механизма происходит под действием переменных во времени сил и также является переменным, то на первой стадии анализа эти силы не учитывают (ввиду сложности решения полной задачи). Из анализа положений звеньев и траектории их точек можно определить правильность действия механизма и соответствия траекторий точек рабочего органа технологическому процессу, а также найти пространство, требуемое для размещения механизма.

Скорости (угловые и линейные) звеньев используют для определения кинетической энергии механизма при решении в последующем задач динамики и для оценки условий, при которых происходит рабочий процесс в машине.

По значениям ускорений (угловых и линейных) находят также инерционные нагрузки на звенья, которые используют далее для оценки прочностной надежности звеньев.

Кинематические характеристики необходимы инженеру для оценки работоспособности механизмов не только на стадии проектирования, но и в эксплуатации.

Анализ выполняют по кинематической схеме, которая в отличие от структурной схемы содержит размеры звеньев, необходимые для расчета.

Для определения параметров движения звеньев механизма используют аналитические, графические и экспериментальные методы.

Аналитические методы основываются на различных методах математического анализа и отличаются высокой точностью определения параметров в каждый момент времени работы механизма. При использовании ЭВМ, снабженных графическими дисплеями и графопостроителями, аналитические методы становятся наглядными. Среди аналитических методов наиболее распространены методы аналитической геометрии и тензорно-матричных операций.

Графические методы основаны на непосредственном графическом построении траекторий движения наиболее характерных точек звеньев механизмов.

Экспериментальные методы используют преимущественно для оценки точности расчетных моделей и методов.

4.1 Графический метод кинематического анализа механизма

При графическом методе кинематического анализа механизмов длины звеньев, перемещения точек, скорости и ускорения изображают в масштабах (μ_l , μ_s , μ_v , μ_a).

Для определения траекторий точек механизма используют план положений механизма. **Планом положений механизма** называется графическое изображение взаимного расположения звеньев, соответствующее выбранному моменту времени. С помощью планов механизма можно наглядно проследить за движением его звеньев и точек.

Рассмотрим в качестве примера кривошипно-шатунный механизм (рис. 4.1,) где 1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – ползун. Положение точки С на шатуне определяется длинами отрезков АС и СВ. Для построения траекторий точек А, В и С необходимо построить ряд планов (последовательных положений) механизма. Плавная линия, проведенная через все одноименные точки, будет искомой траекторией звена. Положение звена, из которого начинается отсчет его движения в одном направлении, называют **начальным** или **крайним**. Положение, в котором кривошип 1 и шатун 2 располагаются на одной прямой, называют **мертвым**.

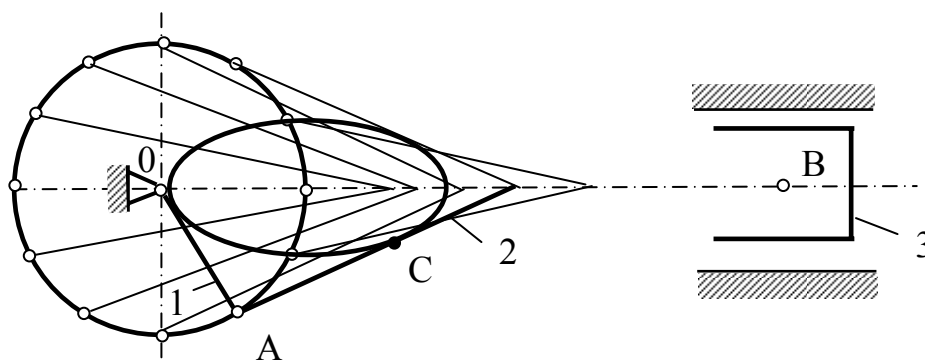


Рис. 4.1 – Планы механизма и траектории его точек

При графическом методе определения скоростей и ускорений точек звеньев используется метод построения планов. Метод основан на графическом решении векторных уравнений движения. Для построения планов скоростей и ускорений механизма должна быть известна его кинематическая схема и задан закон движения ведущего звена.

Звенья плоских механизмов при его работе могут совершать вращательное, поступательное и плоскопараллельное движения. Так, звено OA (рис. 4.1) совершает вращательное движение, звено 3 – ползун – поступательное, а звено 2 – шатун – плоскопараллельное.

4.1.1 При вращательном движении закон звена задается в виде зависимости по времени t угла его поворота φ в виде

$$\varphi = \varphi(t).$$

Модули угловой скорости ω и углового ускорения ε определяются по формулам:

$$|\bar{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}, \quad |\bar{\varepsilon}| = \frac{d|\bar{\omega}|}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

По определению вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ направлен вдоль оси вращения звена, а его положительное направление таково, что с конца вектора вращение видно против хода часовой стрелки.

Направление вектора углового ускорения совпадает с направлением вектора угловой скорости при ускоренном вращении звена и противоположно при замедленном его вращении (рис. 4.2).

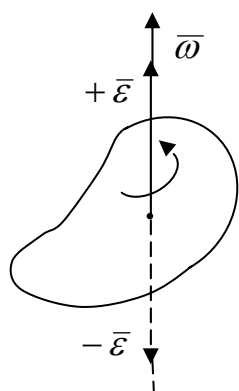


Рис. 4.2

Скорости $\bar{V}$ точек звена при его вращательном движении в общем виде находятся из векторного произведения

$$\bar{V} = [\bar{\omega} \times \bar{r}], \quad (4.1)$$

где $\bar{r}$ – радиус точки звена.

Так, как вектора $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$ взаимно перпендикулярны, то:

$$|\bar{V}| = |\bar{\omega}| |\bar{r}|. \quad (4.2)$$

Формула (4.1) может использоваться для определения направления вектора $\bar{\omega}$, а значит, и направления вращения звена, при известных векторах $\bar{V}$ и $\bar{r}$. Для этого необходимо воспользоваться определением векторного произведе-

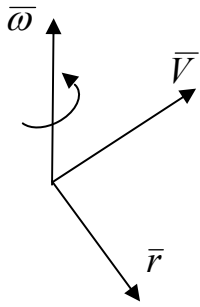


Рис. 4.3 – Определение положительного направления вектора $\bar{\omega}$ по известным векторам $\bar{V}$ и $\bar{r}$

ния двух векторов и физическим определением угловой скорости $\bar{\omega}$ (рис. 4.3)

Вектор ускорения $\bar{a}$ точек звена, совершающего вращательное движение, определяется по известной из теоретической механики формуле:

$$\bar{a} = \bar{a}^{\tau} + \bar{a}^n, \quad (4.3)$$

где $\bar{a}^{\tau}$ – тангенциальная составляющая вектора $\bar{a}$, направленная по касательной к траектории в сторону вращения звена;

$\bar{a}^n$ – нормальная составляющая вектора $\bar{a}$, направленная по радиусу вращения к точке закрепления.

Вектор полного ускорения $\bar{a}$ записывается в виде:

$$\bar{a} = [\bar{\varepsilon}, \bar{r}] + [\bar{\omega}, \bar{V}], \quad (4.4)$$

где

$$\bar{a}^{\tau} = [\bar{\varepsilon}, \bar{r}], \quad (4.5)$$

$$\bar{a}^n = [\bar{\omega}, \bar{V}] \quad (4.6)$$

Из последних соотношений мы имеем:

$$|\bar{a}^{\tau}| = \varepsilon \cdot r, \quad (4.7)$$

$$|\bar{a}^n| = \omega^2 \cdot r, \quad (4.8)$$

$$|\bar{a}| = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}. \quad (4.9)$$

Из выражений (4.7) и (4.8) также следует, что угол μ , который составляет вектор ускорения $\bar{a}$ точки с радиусом вращения r , является величиной постоянной для всех точек звена (рис. 4.4).

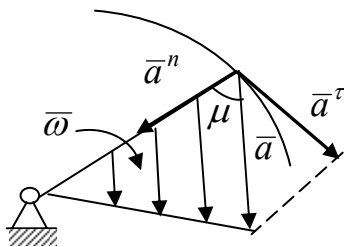


Рис. 4.4 – Направление полного ускорения точек звена при его вращении

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

4.1.2 При плоскопараллельном движении звеньев механизма скорости и ускорения их точек определяются по известным формулам теоретической механики.

$$\bar{V}_i = \bar{V}_j + \bar{V}_{ij}, \quad (4.10)$$

$$\bar{a}_i = \bar{a}_j + \bar{a}_{ij}, \quad (4.11)$$

где $\bar{V}_i, \bar{a}_i$ – скорость и ускорение i -ой

произвольной точки звена механизма при его плоскопараллельном движении;

$\bar{V}_j, \bar{a}_j$ – скорость и ускорение любой другой j -ой точки этого же звена;

$\bar{V}_{ij}, \bar{a}_{ij}$ – скорость и ускорение j -ой точки звена при ее вращения вокруг j -ой точки, как неподвижной.

Вектора $\bar{V}_{ij}, \bar{a}_{ij}$ определяются по выше приведенным формулам для вращательного движения.

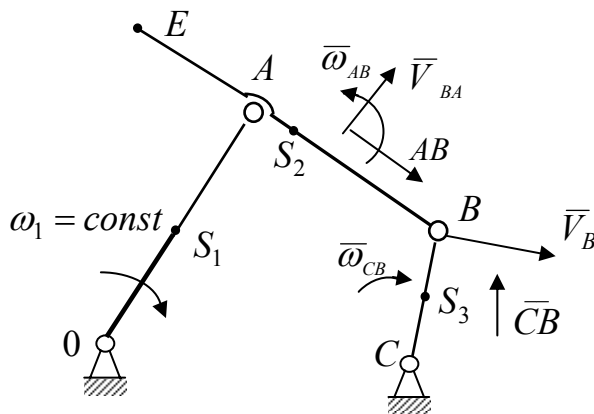


Рис. 4.5 – Кинематическая схема шарнирного четырехзвенника (план механизма)

4.1.3 Рассмотрим применение этих и других формул на примере шарнирного четырехзвенного плоского механизма с одной степенью свободы (рис. 4.5).

Будем считать, что закон ведущего звена OA задан в виде $\bar{\omega} = const$.

В этом случае скорость и ускорение точки A определится по формулам (4.2) и (4.3).

Скорость точки B , принадлежащей одновременно звену BAE и звену BC , можно определить из двух векторных уравнений:

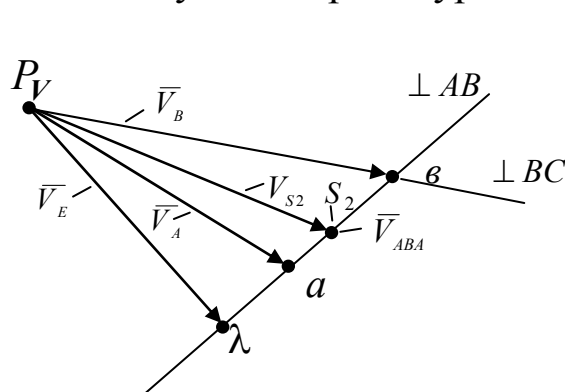


Рис. 4.6 – Графическое решение системы уравнений (план скоростей)

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_B &= \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \\ \bar{V}_B &= \bar{V}_C + \bar{V}_{BC} = \bar{V}_{BC}. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

где $\bar{V}_{BA} \perp AB, \bar{V}_{BC} \perp BC$.

Решим эту систему графически (метод планов).

Для этого из произвольной точки P_V (начало плана скоростей) отложим вектор скорости точки «A» произвольной длины, параллельный вектору $\bar{V}_A$ на плане механизма ($\perp OA$) (рис. 4.6).

Конец вектора $\bar{V}_A$ на плане скоростей обозначен прописной буквой «а».

Значения векторов $\bar{V}_{BA}$ и $\bar{V}_{BC}$ неизвестны, но известно, что эти вектора располагаются на линиях, перпендикулярных звену BAE и BC соответственно. Учитывая это, проводим из конца вектора $\bar{V}_A$ на плане скоростей линию, перпендикулярную BAE плана механизма, а из начала плана скоростей – линию, перпендикулярную звену BC плана механизма. Пересечение этих линий дает точку «в» конца вектора $\bar{V}_B$, а отрезок $\overline{ав}$ определяет вектор скорости $\bar{V}_{BA}$ в выбранном масштабе. Для получения модулей этих скоростей необходимо их длины, снятые с плана скоростей, умножить на масштаб μ_v :

$$|\bar{V}_B| = |P_v \mathfrak{e}| \cdot \mu_v, \quad |\bar{V}_{BA}| = |ав| \cdot \mu_v.$$

Значения угловой скорости звеньев BAE и BC определяются по формулам:

$$|\bar{\omega}_{AB}| = |\bar{V}_{BA}| / |BA| = \frac{|ав| \cdot \mu_v}{|AB|};$$

$$|\bar{\omega}_{BC}| = |\bar{V}_{BC}| / |BC| = \frac{|P_v \mathfrak{e}| \cdot \mu_v}{|BC|}.$$

Направление векторов угловых скоростей $\bar{\omega}_{BA}$ и $\bar{\omega}_{BC}$ определяется для звена BAE по направлению составляющей вектора скорости точки B – $\bar{V}_{BA}$, а для звена BC – по направлению вектора $\bar{V}_B$ ($\bar{V}_{BC}$), а более строго по векторным уравнениям:

$$\bar{V}_{BA} = [\bar{\omega}_{BA}, \overline{AB}],$$

$$\bar{V}_{BC} = [\bar{\omega}_{BC}, \overline{CB}],$$

и физическому определению вектора угловой скорости (рис. 4.3).

Значения скорости других точек звена BAE , например, точек S_2 (центра масс) и E могут быть определены двумя способами.

Первый основан на понятии мгновенного центра скоростей. Если провести два перпендикуляра K векторам скоростей точек A и B звена BAE , то их пересечение определит точку на плоскости расположения звена, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эта точка и будет мгновенным центром скоростей. Соединив этот центр с любой точкой звена, определим длину ее мгновенного радиуса вращения. Скорость при этом будет равна произ-

ведению найденного радиуса на угловую скорость звена. Недостатком такого метода является неопределенность направления вектора скорости и необходимое знание угловой скорости звена.

Другой метод основан на особенности плана скоростей и плана механизма.

Рассмотрим суть этого метода на примере определения скорости произвольной точки S звена BAE . Запишем для точки S_2 звена BAE соотношение:

$$\bar{V}_S = \bar{V}_A + \bar{V}_{AS}, \quad (4.13)$$

где $|\bar{V}_{AS}| = \omega_{AB} \cdot |AS|$.

Найдем отношение $|\bar{V}_{AS}|/|\bar{V}_{AB}|$:

$$\frac{|\bar{V}_{AS}|}{|\bar{V}_{BA}|} = \frac{|AS|\omega_{AB}}{|BA|\omega_{AB}} = \frac{|AS|}{|BA|}. \quad (4.14)$$

Найдем теперь это отношение из плана скоростей. Точка « S » – конец вектора скорости $\bar{V}_{S_2}$ будет располагаться на линии, соединяющей точки « a » и « b », т.к. ее составляющая $\bar{V}_{AS}$ перпендикулярна звену BAE и, следовательно, параллельна вращательной составляющей $\bar{V}_{BA}$.

Расположение точки « S » относительно точки « a » на плане скоростей должно соответствовать расположению одноименной заглавной буквы на плане механизма. Это следует из характера распределения вращательных составляющих вектора скорости точек звена относительно точки A звена, принятой за полюс (рис. 4.7).

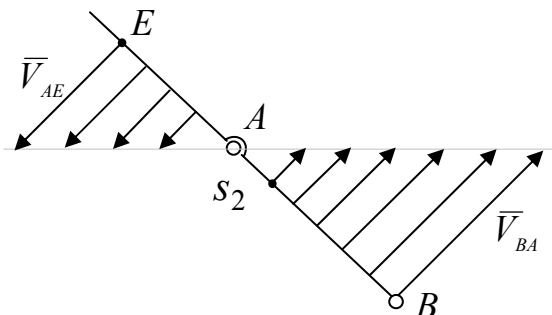


Рис. 4.7 – Мгновенное распределение составляющих вектора скорости точек звена BAE

В соответствии с векторным уравнением (4.13) для $\bar{V}_{S_2}$ отрезок $|as_2|$ на плане скоростей (рис. 4.6) есть модуль вектора $\bar{V}_{AS}$ в заданном масштабе. Отсюда следует:

$$\frac{|\bar{V}_{BA}|}{|\bar{V}_{SA}|} = \frac{|ab|\mu_V}{|as_2|\mu_V} = \frac{|ab|}{|as_2|}. \quad (4.15)$$

Сравнивая это соотношение с полученными выше (4.14), имеем

$$\frac{BA}{AS_2} = \frac{|ea|}{|s_2a|}, \quad (4.16)$$

Откуда

$$|s_2a| = \frac{|AS_2|}{|BA|} \cdot |ea|. \quad (4.17)$$

Аналогичное соотношение можно получить для любой другой точки звена BAE . Например, для точки «e» конца вектора скорости V_E на плане скоростей имеем соотношение:

$$|ea| = \frac{|AE|}{|BA|} \cdot |va|. \quad (4.18)$$

Используем теперь изложенный метод для определения ускорений точек звеньев и их угловых ускорений звеньев рассматриваемого механизма.

Ускорение точки A ведущего звена OA известно и рассчитывается по формуле (4.8) ($\omega_1 = const$).

Для определения ускорения точки B , звеньев BAE и BC запишем два векторных уравнения, справедливых для плоскопараллельного движения:

$$\begin{aligned} \bar{a}_B &= \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}, \end{aligned}$$

или, с учетом формулы (4.3) и закона движения ведущего звена OA , получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_B &= \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Применим графический метод решения этой системы векторных уравнений.

Модули векторов $\bar{a}_A^n$, $\bar{a}_{BA}^n$, $\bar{a}_{BC}^n$ рассчитываются по формуле (4.8) по известным радиусам вращения и угловым скоростям звеньев. Эти вектора наносятся на план ускорений с учетом их направления на плане механизма и масштаба ускорений μ_a (рис. 4.9). Точка «в» на плане ускорений – точка пересечения линий расположения векторов $\bar{a}_{BC}^\tau$ и $\bar{a}_{BA}^\tau$, определяет конец искомого вектора $\bar{a}_B$.

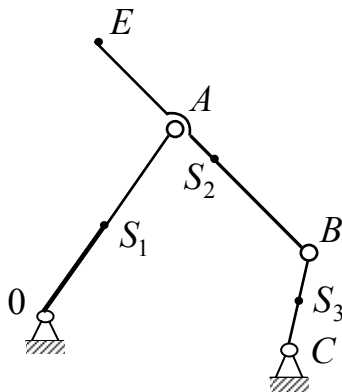


Рис. 4.8 – Кинематическая схема шарнирного четырехзвенника

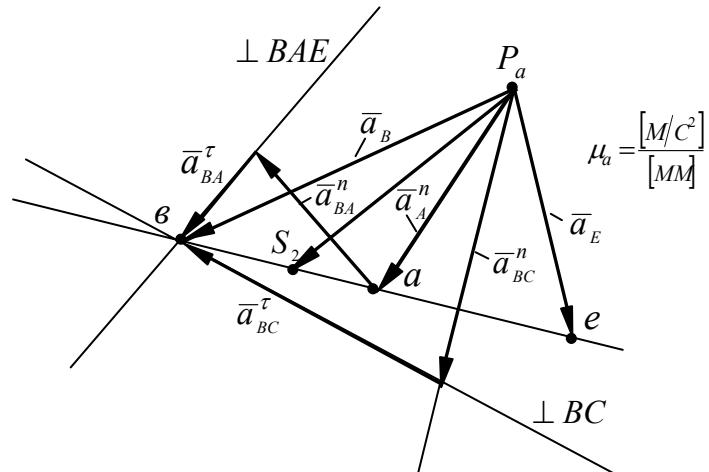


Рис. 4.9 – Графическое решение системы уравнений (4.19) (план ускорений)

Покажем, что для определения полных ускорений других точек звена BAE (например, точек S_2 и E) можно использовать те же соотношения (4.17) и (4.18) между отрезками звена плана механизма и отрезками линии «ав» на плане ускорения.

Согласно первому уравнению системы (4.19) отрезок «ав» на плане ускорений изображает полное ускорение $\bar{a}_{BA}$ – вращательной составляющей ускорения $\bar{a}_B$ точки «B». Все вращательные составляющие других точек звена BAE будут параллельны $\bar{a}_{BA}$ (см. рис. 4.4) и, следовательно, располагаются также на линии, проходящей через точки «a» и «в» плана ускорений. Таким образом, отрезки

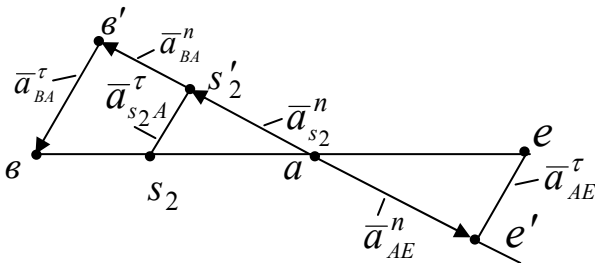


Рис. 4.10 – Расположение нормальных и касательных составляющих вращательных векторов $\bar{a}_{BA}$, $\bar{a}_{S_2A}$, $\bar{a}_{EA}$ относительно линии «ав» плана ускорений

плана ускорений as_2 , ae изображают соответственно вращательные составляющие ускорений точки S_2 и E звена BAE .

Расположение составляющих этих векторов $\bar{a}_{AB}^tau$, $\bar{a}_{AB}^n$, $\bar{a}_{AS_2}^tau$, $\bar{a}_{AS_2}^n$, $\bar{a}_{AE}^tau$, $\bar{a}_{AE}^n$ точек A , S_2 , E относительно линии «ав» показано на рис. 4.10.

Здесь

$$\left| \bar{a}_{BA}^n \right| = av' \mu_a, \quad \left| \bar{a}_{S_2}^n \right| = as'_2 \cdot \mu_a, \quad \left| \bar{a}_{EA}^n \right| = ae' \mu_a.$$

Из подобия прямоугольных треугольников имеем:

$$\frac{av'}{as'_2} = \frac{av}{as_2}; \quad \frac{ae'}{av'} = \frac{ae}{av}.$$

С учетом выше приведенных формул для нормальных составляющих, получим:

$$\frac{av}{as_2} = \frac{\left| \bar{a}_{BA}^n \right|}{\left| \bar{a}_{S_2}^n \right|} = \frac{AB}{AS_2}. \quad (4.20)$$

$$\frac{ae}{av} = \frac{\left| \bar{a}_{EA}^n \right|}{\left| \bar{a}_{S_2}^n \right|} = \frac{EA}{AB}. \quad (4.21)$$

Из этих соотношений имеем:

$$ae = av \frac{AE}{AB}, \quad as = av \frac{AS_2}{AB}.$$

Расположение точек «e» и «s₂» относительно точки «a» на линии «ав» плана ускорений должно соответствовать расположению их одноименных точек на плане механизма. Это следует из относительного к точке «A» расположения их тангенциальных составляющих (рис. 4.11.)

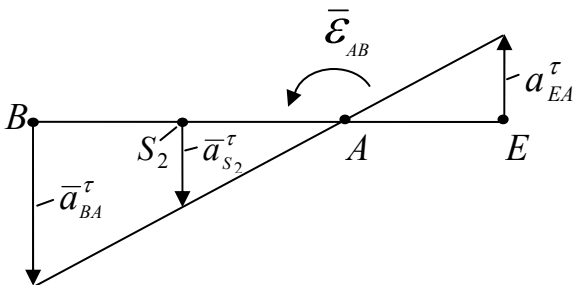


Рис. 4.11 – Расположение тангенциальных составляющих $\bar{a}_{Aj}^\tau$ звена BAE относительно полюса «A»

По направлению тангенциальных составляющих можно определить направление угловых ускорений звеньев механизма, а их модули – по их значению с плана ускорений:

$$\left| \bar{\varepsilon}_{AB} \right| = (vv' \cdot \mu_a) / AB.$$

4.2 Аналитический метод кинематического анализа

Этот метод сводится к совместному решению уравнений проекций на оси координат контура механизма с последующим дифференцированием полученных уравнений для определения скоростей и ускорений.

Рассмотрим в качестве примера кривошипно-ползунный механизм (рис. 4.3, а).

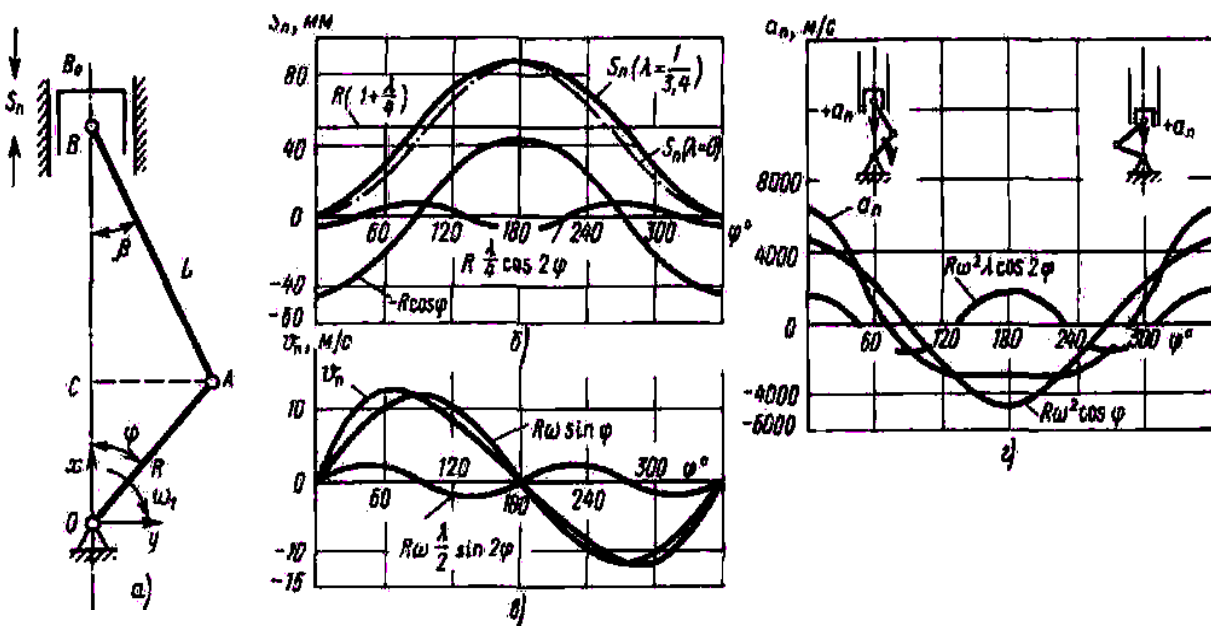


Рисунок 4.3 – Кинематические диаграммы ползуна кривошипно-ползунного механизма: а – перемещений; б – скорости; в – ускорений; г – составляющие ускорения

Определим кинематические параметры каждого из его звеньев.

Угловая скорость кривошипа определяется как первая производная углового перемещения по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi n}{60} \approx 0,105n,$$

где n – частота вращения кривошипа (об/мин).

Угловое перемещение кривошипа при угловой скорости $\omega = \text{const}$ определяется по формуле $\varphi = \omega t$ или $\varphi = (180 / \pi) \omega t = 6 \cdot n \cdot t$. Окружная скорость точки А кривошипа $V_A = \omega R$ и центр-

стремительное ускорение, направленное по радиусу кривошипа к центру, $a_A = \omega^2 R$.

При повороте кривошипа на угол φ ползун переместится от точки B_0 (крайнее положение ползуна) на величину S_n . Запишем векторное уравнение для контура OAB , учитывая, что $OA = R$, $AB = L$, а $OB_0 = R + L$:

$$\overline{R} + \overline{L} = \overline{OB}.$$

Проекция этого уравнения на оси x и y соответственно

$$R \cos \varphi + L \cos \beta = OB = OB_0 - S_n = R + L - S_n;$$

$$R \sin \varphi - L \sin \beta = 0.$$

Обозначая $R / L = \lambda$ и учитывая (из последнего уравнения), что $\sin \beta = \lambda \sin \varphi$; $\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$, найдем следующее соотношение для перемещения ползуна:

$$S_n = R \left[1 + \frac{1}{\lambda} - \left(\cos \varphi + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \right) \right]. \quad (4.1)$$

В ряде случаев расчет кинематических параметров ползуна удобнее вести по приближенным формулам, которые можно получить, используя выражение:

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} = \left| -\frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4 \varphi - \Lambda \right| \quad (4.2)$$

В кривошипно-ползунковых механизмах машин параметр λ изменяется обычно в пределах от $1/3$ до $1/12$. Для менее выгодного случая, когда $\lambda = 1/3$ и $\varphi = 90^\circ$, второй член ряда не превышает 5% от первого члена, а третий член – 0.02%. Поэтому с достаточной точностью можно ограничиться первыми двумя членами ряда. В этом случае уравнение (4.1) принимает вид:

$$S_n = R \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda} - \left[\cos \varphi + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi \right) \right] \right\}. \quad (4.3)$$

Учитывая, что $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$, представим последнее уравнение в форме

$$S_n = R \left(1 + \frac{\lambda}{4} \right) - R \cos \varphi - R \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi. \quad (4.4)$$

На рис. 4.3, б приведены зависимости перемещения ползуна S_n и его составляющих от угла поворота φ .

Скорость ползуна может быть определена по формуле:

$$v_n = R \omega \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos \beta}. \quad (4.5)$$

С достаточной для расчета точностью скорость v_n можно получить из уравнения:

$$v_n = \frac{dS_n}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dS_n}{d\varphi} = R \omega \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right). \quad (4.6)$$

На рис. 4.3, в приведены кривые скорости ползуна и ее составляющие. Скорость ползуна (поршня) считается положительной, когда его вектор направлен от точки B_0 вниз.

Для рассматриваемого механизма средняя скорость ползуна представляет собой классификационный параметр. Она положена, например, в основу теории подобия поршневых двигателей. Ее часто используют для оценки их качества.

В течение 1 мин кривошип двигателя делает n оборотов, а поршень (ползун) проходит путь $4Rn$, поэтому

$$v_{ncp} = \frac{4Rn}{60} = (2/\pi) R \omega.$$

В двигателях гоночных автомобилей средняя скорость поршня достигает 36 м/с.

Ускорение ползуна получим дифференцированием уравнения (4.5) по времени t :

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = R \omega^2 \left[\frac{\cos(\varphi + \beta)}{\cos \beta} + \lambda \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^3 \beta} \right]. \quad (4.7)$$

С достаточной для расчета точностью уравнение ускорения ползуна может быть получено из уравнения (4.6):

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dv_n}{d\varphi} = R \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (4.8)$$

На рис. 4.3, г показаны кривая ускорения ползуна a_n и ее составляющие в зависимости от угла φ .

Ускорение ползуна положительно, если его вектор направлен к оси кривошипа. У верхней «мертвой» точки ускорение всегда положительно, а у нижней отрицательно независимо от направления движения. В тот момент, когда шатун и кривошип образуют прямой угол, ускорение поршня равно 0. В двигателях гоночных автомобилей ускорение поршня достигает $a_n = 93 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2$.

5 СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА

5.1 Силы, действующие в кинематических парах, и способ их определения

Во время работы механизма передача усилий от ведущего звена к выходному (рабочему органу) осуществляется посредством взаимодействия соединенных между собой звеньев. Результатом такого взаимодействия является появление сил в кинематических парах.

Определение этих сил, а также сил или пары сил (моментов), приложенных к ведущим звеньям, составляет основную задачу силового расчета механизма.

Силы, действующие в кинематических парах, являются внутренними по отношению к звеньям этих пар.

Для определения внутренних сил в кинематических парах механизма используют следующий формальный прием. Одно из двух звеньев, составляющих кинематическую пару, освобождают от связи со стороны другого звена, заменяя его действие на оставшееся (рассматриваемое) имевшими место силами взаимодействия. В результате мы имеем дело не с двумя звеньями, входящими в кинематическую пару, а с одним, к которому наряду с внешними силами приложены силы взаимодействия кинематической пары. Эти силы по отношению к рассматриваемому звену (свободному) уже являются внешними. Если теперь рассматривать это звено находящимся в равновесии, то в уравнения равновесия, наряду с другими силами, войдут и силы взаимодействия данной кинематической пары. Из этих уравнений они должны быть определены.

Для составления уравнений равновесия звеньев механизма следует применить к ним принцип Даламбера, т.е. к каждой точке рассматриваемого звена приложить силы инерции. Тогда систему сил – внешние силы и силы инерции можно рассматривать как находящуюся в равновесии.

В уравнениях равновесия силы инерции, распределенные по всему звену, заменяются на основании теоремы теоретической механики их главным вектором $\bar{R}^u$ и главным моментом $\bar{M}_O^u$, где точка «O» в индексе момента указывает на место приложения главного вектора $\bar{R}^u$.

Если звено совершает поступательное движение (ускорения всех точек равны по величине и направлению), то силы инерции, образующие систему параллельных сил, сводятся к одной равнодействующей, равной

$$\bar{R}^u = -m\bar{a}_s, \quad (5.1)$$

где m – масса звена, $\bar{a}_s$ – ускорение центра масс звена.

Сила $\bar{R}^u$ в этом случае приложена в центре масс звена (точка «S»).

При вращательном движении звена вокруг оси oz перпендикулярной плоскости xoy , совпадающей с плоскостью материальной симметрии, силы инерции приводятся к главному вектору $\bar{R}^u$ по (5.1) и главному моменту $\bar{M}_o^u$, равному

$$\bar{M}_o^u = -J_{oz}\bar{\varepsilon}. \quad (5.2)$$

Здесь $\bar{\varepsilon}$ – вектор угловой скорости звена,

J_{oz} – момент инерции звена относительно оси oz .

Точка „O” – точка приложения главного вектора $\bar{R}^u$.

Если звено совершает плоскопараллельное движение, то система сил инерций также сводится к двум векторам – главному вектору сил инерции $\bar{R}^u$ по (5.1), проложенному в центре тяжести звена (точка «S»), и главному моменту сил инерции $\bar{M}^u$:

$$\bar{M}^u = -J_{sz} \cdot \bar{\varepsilon}, \quad (5.3)$$

где J_{sz} – момент инерции звена относительно оси, перпендикулярной плоскости вращения (xy) и проходящей через центр масс.

С учетом сил инерции уравнения равновесия (уравнения кинестатики) каждого звена механизма запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} R_x^u + \sum_i F_{ix} &= 0, \\ R_y^u + \sum_i F_{iy} &= 0, \\ |\bar{M}^u| + M_o(\bar{R}^u) + M^e + \sum_i M_o(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Здесь M^e – внешний момент, приложенный к ведущему звену (для других звеньев $M^e = 0$);

R_x^u, R_y^u – проекция главного вектора сил инерции на оси координат плоскости симметрии звена;

$|\overline{M}^u|$ – модуль главного момента сил инерции, направление которого противоположно вектору углового ускорения $\bar{\varepsilon}$;

F_i – внешние силы, включая силы взаимодействия в кинематических парах, а также внешнюю силу, приложенную к ведущему звену (если $M^e = 0$).

Для решения этой системы уравнений необходимо знание закона движения ведущего звена механизма.

5.2 Силы взаимодействия в кинетических парах. Статическая определимость механизма

Рассмотрим силы взаимодействия для низших и высших кинематических пар.

В низшей поступательной паре силы взаимодействия представляют собой систему параллельных сил, распределенных по поверхности взаимодействия. Если ползун 1 (рис. 5.1, а) имеет плоскость материальной симметрии, то эта система сил сводится к главному вектору и главному моменту сил, расположенных в плоскости симметрии. Эти два вектора, как известно из теоретической механики, можно заменить эквивалентным им с точки зрения равновесия одним вектором – равнодействующей силой $\overline{F}_{12}(\overline{F}_{21})$. Эта сила направлена нормально к плоскости скольжения ползуна, а его точка приложения «в» неопределена.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае вращательной пары (рис. 5.1, б) – система сил распределенных по поверхности взаимодействия заменяется ее главным вектором и главным моментом в плоскости материальной симметрии звена 1, а эти два вектора в свою очередь заменяются равнодействующей силой $\overline{F}_{12}$. Линия действия этой силы проходит через центр А звена 1 с неизвестным углом наклона β нормали n к заданной оси. В высших кинематических парах соприкосновение звеньев осуществляется либо по линии (рис. 5.1, в), либо в точке (рис. 5.1, г).

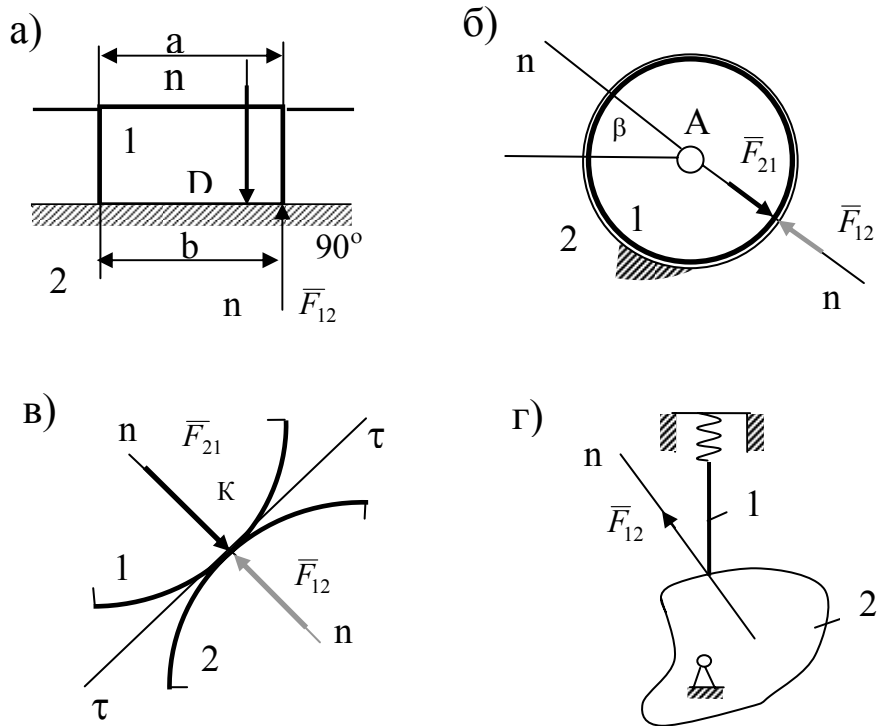


Рис. 5.1 – Приведенные силы взаимодействия в низших (а, б) и высших (в, г) кинематических парах

При взаимодействии двух поверхностей кинематической пары по линии равнодействующая сил взаимодействия $\bar{F}_{12}$ лежит в плоскости материальной симметрии соприкасающихся звеньев и направлена по общей нормали n - n к соприкасающимся поверхностям. В этом случае точка приложения равнодействующей и ее направление известны.

При соприкосновении звеньев в точке (рис. 5.1, г) точка приложения и направление равнодействующей силы $\bar{F}_{12}$ также известны: сила направлена по нормали к поверхности звена 2, а точка приложения есть точка контакта звена 1 с звеном 2.

Из сказанного следует, что низшие пары вносят в уравнения равновесия (уравнения кинетостатики) (5.4) две неизвестные величины – модуль силы и ее координата (расстояние «в» или угол α), а высшие пары одну неизвестную – модуль силы.

Рассмотрим теперь статическую определимость механизма с высшими и низшими кинематическими парами.

Если за P_n обозначить число низших кинематических пар плоского механизма, а за P_v – число его высших кинематических

пар, то общее число неизвестных, которое вносят эти пары в уравнения кинестатики (5.4), будет равно $2P_n + P_e$.

Уравнений равновесия для механизма с n подвижными звеньями можно составить $3n$.

Для плоского механизма имеем:

$$3n = 2P_n + P_e + W. \quad (5.5)$$

Из полученного выражения (5.5) следует, что для плоского механизма без избыточных связей число уравнений равновесия превосходит число неизвестных параметров (внутренние силы и их координаты) на величину W , т.е. на число степеней свободы механизма.

Эти W уравнения необходимо использовать для определения внешнего силового воздействия на ведущие звенья. В частности, для механизма с одной степенью свободы ($W = 1$, одно ведущее звено) имеем одно дополнительное уравнение равновесия.

На рис. 5.2 представлены различные варианты передачи движения ведущему звену от внешнего источника.

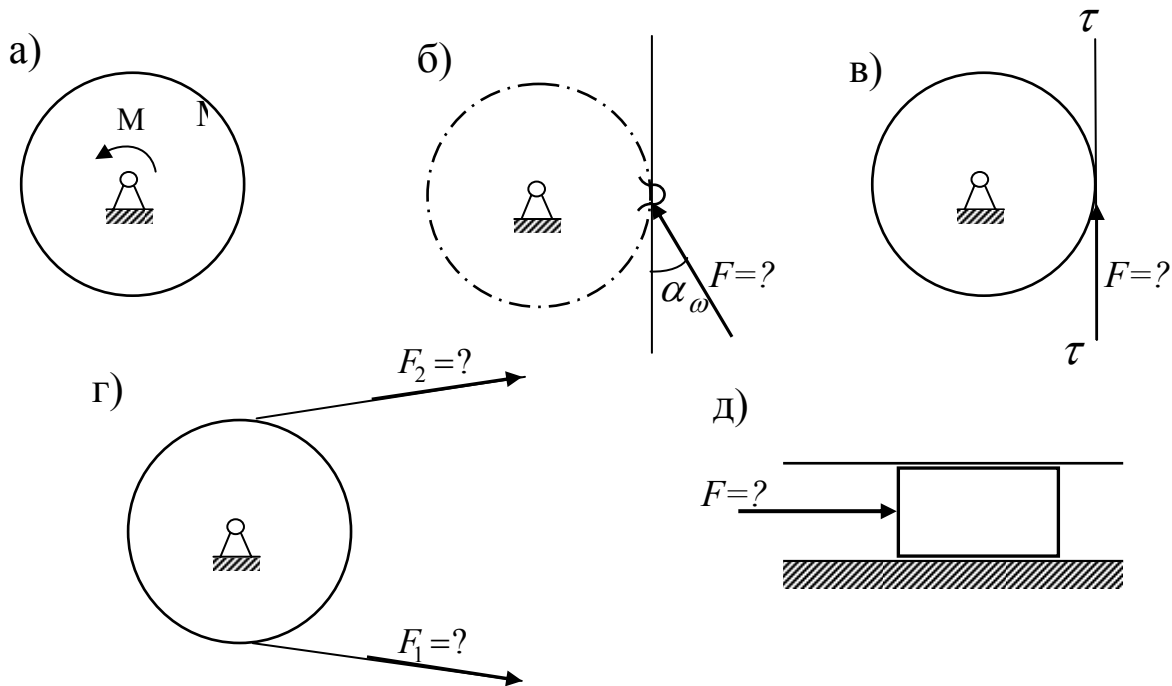


Рис. 5.2 – Различные варианты передачи движения ведущему звену от внешнего источника

При передаче движения с помощью муфты (рис. 5.2, а) неизвестным внешним воздействием является модуль вращательного момента, поскольку направление вращения всегда известно.

При передаче вращательного момента с помощью зубчатого зацепления, неизвестной величиной является модуль силы F (рис. 5.2, б), т.к. угол зацепления α считается известным при заданных параметрах зубчатой передачи.

При передаче движения с помощью фрикционной передачи неизвестной внешней силой является модуль силы трения F , линия действия которой направлена по касательной к окружностям фрикционных катков в сторону вращения ведущего звена.

При ременной передаче (рис. 5.2, г) неизвестными внешними силами являются модули F_1 и F_2 , т.к. их направления известны. Так как модули сил связаны друг с другом формулой Эйлера, то в этом случае неизвестной величиной является только модуль одной силы.

При силовом воздействии на ползун (рис. 5.2, д), который является ведущим звеном, неизвестным внешним воздействием является только модуль силы F .

Таким образом, для механизма с одной степенью свободы без избыточных связей, уравнений равновесия достаточно чтобы определить действующие в кинематических парах внутренние силы и их координаты, а также определить внешний силовой фактор (силу или момент), приложенный к ведущему звену механизма.

В этом смысле механизм является статически определимым.

5.3 Порядок проведения силового анализа

Вопрос о порядке проведения силового анализа не является очевидным. Действительно, рассматривать равновесие одного звена недостаточно, т.к. при освобождении его от связей в каждой кинематической паре низшего класса равнодействующая сила определяется двумя неизвестными величинами, а в двух кинематических парах (кинематическая цепь замкнутая) этих неизвестных четыре.

Чтобы определить эти четыре неизвестные, необходимо рассматривать равновесие группы звеньев. В этой связи возникает вопрос о статической определимости цепи звеньев.

Нетрудно убедиться, что группа Ассура, состоящая из кинематических пар низшего и высшего классов, обладает необходимой статической определимостью.

Действительно, если обозначить число кинематических пар низшего класса за P_H , а высшего класса соответственно за P_B , то общее число неизвестных, определяющих силы в кинематических парах, будет равно $2P_H + P_B$. С другой стороны, т.к. группа Ассура при присоединении ее свободных концов к стойке обладает нулевой подвижностью, то из формулы (2.2) следует:

$$3n = 2P_H + P_B,$$

где n – число подвижных звеньев.

Таким образом, для звеньев группы Ассура можно составить столько уравнений равновесия, сколько неизвестных величин, определяющих силы в кинематических парах, она содержит.

Отсюда следует порядок проведения силового анализа: кинематическая схема механизма разбивается на структурные группы Ассура таким образом, чтобы ведущее звено, к которому приложена внешняя движущая сила, не вошло ни в одну из них; силовой анализ должен осуществляться с наиболее удаленной от ведущего звена группы Ассура.

Такой порядок обеспечивает необходимое знание сил в кинематической паре подвижного звена механизма и его ведущего звена. В таком случае первичный механизм (ведущее звено плюс стойка) оказывается статически определимым – три уравнения равновесия

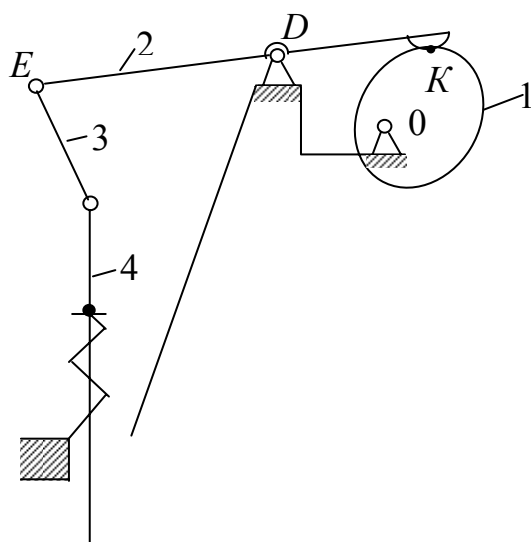


Рис. 5.3 – Структурная схема с высшими и низшими кинематическими парами

позволяют определить три неизвестные величины сил, включая модуль движущей силы или движущего момента.

Пример разбиения механизма (рис. 5.3) на группы Ассура приведен на рис. 5.4, а, б. На рис. 5.4, а за ведущее звено принят кулачок 1, а на рис. 5.4, б за ведущее звено принят толкатель 4. При ведущем звене 1 силовой анализ начинается со структурной группы звеньев 4, 3, а с ведущим звеном 4 – со структурной группы: кулачок 1, неподвижное звено 5.

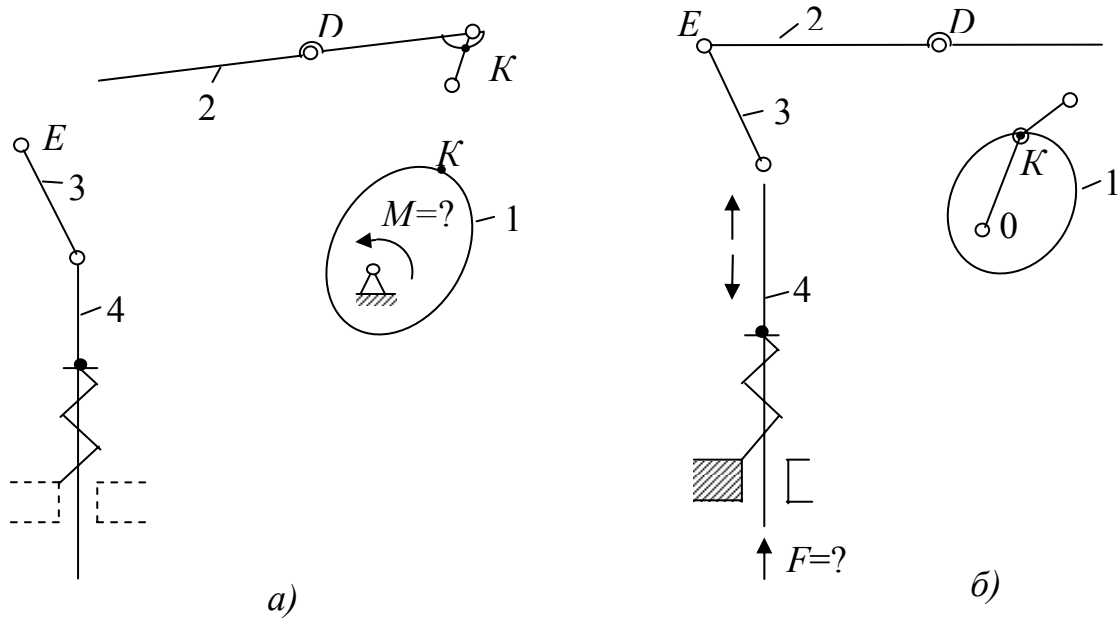


Рис. 5.4 – Структурные группы Ассур механизма (рис 5.3) с ведущим звеном 1 (кулачок) (а); структурные группы Ассур механизма (рис 5.3) с ведущим звеном 4 (б)

Определение сил, действующих в кинематических парах, достаточно просто можно осуществить, используя наряду с уравнениями моментов, графический метод решения векторных уравнений равновесия сил для каждой группы Ассур.

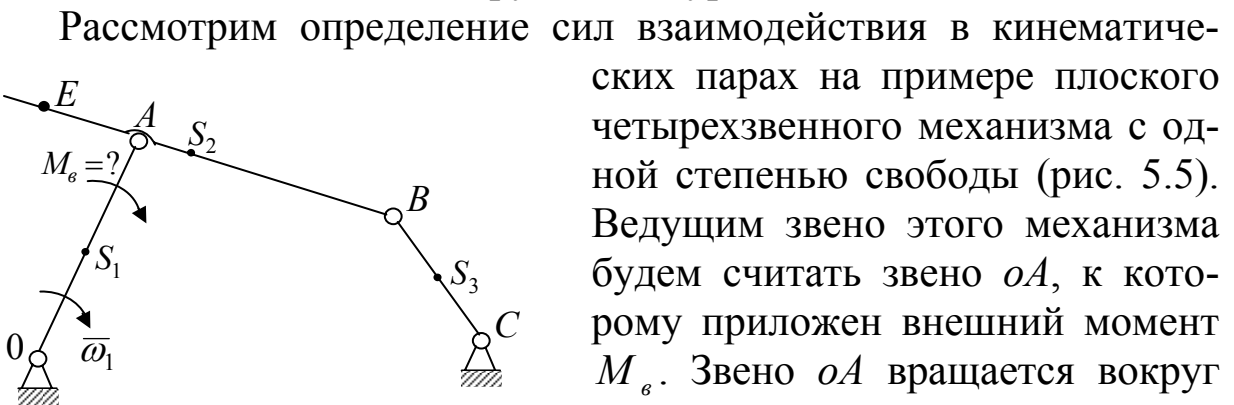


Рис. 5.5 – Плоский шарнирный механизм с одной степенью свободы

Рассмотрим определение сил взаимодействия в кинематических парах на примере плоского четырехзвенного механизма с одной степенью свободы (рис. 5.5). Ведущим звеном этого механизма будем считать звено oA , к которому приложен внешний момент M_e . Звено oA вращается вокруг оси oz перпендикулярной плоскости чертежа.

В рассматриваемом механизме можно выделить только одну группу Ассур – это группа звеньев CB и BAE (рис. 5.6). Проставим действующие на эти звенья группы Ассур силы – веса

звеньев G_1 , G_2 и силы инерции с центром приведения в их центрах масс (точки S_2 , S_3). Неизвестный вектор сил взаимодействия в шарнирах «А» и «С» разложим на две составляющие по двум взаимно перпендикулярным осям, одна из которых направлена вдоль соответствующего звена (рис. 5.7).

Для определения четырех неизвестных сил в шарнирах «А» и «С» запишем уравнения равновесия для группы Ассура:

$$\sum_{BAE} M_B(\bar{F}, M^u) = 0, \quad (5.6)$$

$$\sum_{BC} M_B(\bar{F}, M^u) = 0, \quad (5.7)$$

$$\sum_{BAE, BC} \bar{F}_i = 0. \quad (5.8).$$

Первые два уравнения (5.6), (5.7) служат для определения векторов тангенциальных составляющих $\bar{R}_A^\tau$ и $\bar{R}_C^\tau$. Действительное направление векторов, проставленных на схеме (рис. 5.7), произвольно определяется по знаку их численных значений: знак плюс сохраняет выбранное направление, а при знаке минус направление вектора должно быть заменено на противоположное.

Уравнение (5.8) определяет две другие составляющие сил взаимодействия в шарнирах $\bar{R}_A^n$ и $\bar{R}_C^n$, а также силу взаимодействия в шарнире «В».

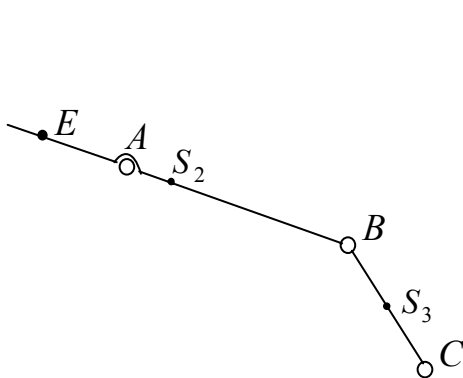


Рис. 5.6 – Группа Ассура плоского механизма (рис. 5.5). Точки S_2 , S_3 – центры масс звеньев

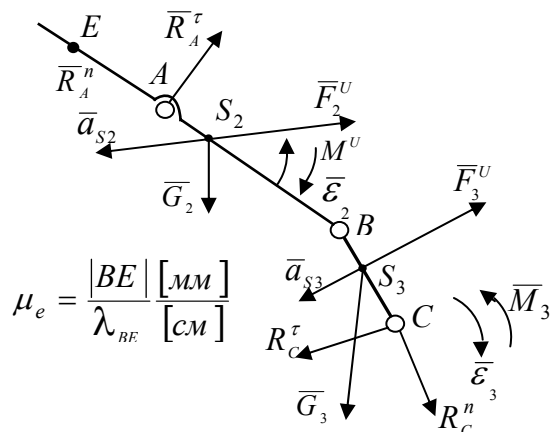


Рис. 5.7 – Силы, приложенные к звеньям группы Ассура

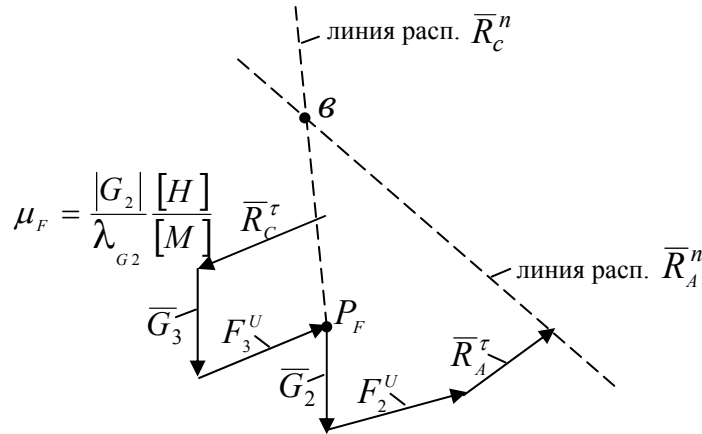


Рис. 5.8 – Графическое решение векторного уравнения сил (5.8):

P_F – точка начала плана сил; $в$ – точка пересечения линий

расположения векторов R_A^n и R_C^n

При графическом методе решения моменты сил, входящие в уравнения (5.6), (5.7) находятся по силам и значениям их плеч, определяемые непосредственно из чертежа группы Ассура (рис. 5.7), построенной в заданном масштабе длин μ_e .

При графическом решении уравнения (5.8) необходимо выбрать масштаб сил μ_F , который можно определить после изображения известного вектора произвольной длины из начала плана P_F , например λ_{G_2} (рис. 5.8). Значение масштаба при этом будет определено как:

$$\mu_F = \frac{|G_2| [H]}{\lambda_{G_2} [M]}. \quad (5.9)$$

С учетом этого масштаба на плане сил (рис. 5.8) последовательно строятся силы одного из звеньев группы Ассура (например звена BAE), а затем из этой же точки P_F силы второго звена. Замыкание векторного многоугольника осуществляется пересечением линий действия неизвестных нормальных составляющих R_A^n и R_C^n (рис. 5.8). При таком построении линия, соединяющая точку пересечения «в» нормальных составляющих и точку P_F начала плана сил, равна по модулю силе взаимодействия звеньев в шарнире «В» (штриховая линия, рис. 5.8).

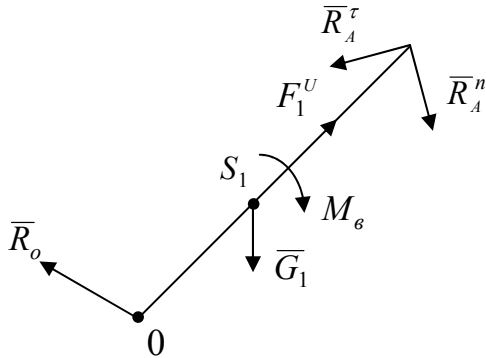


Рис. 5.9 – Силы, приложенные к ведущему звену

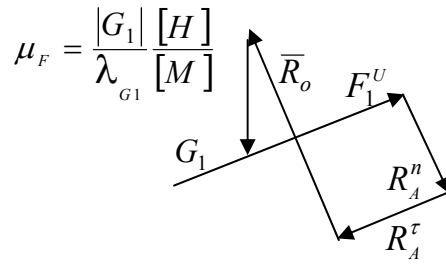


Рис. 5.10 – Графическое решение уравнения сил ведущего звена

После нахождения сил взаимодействия в шарнире «А» ведущее звено становится статически определенным. На рис. 5.9 указаны силы, приложенные к ведущему звену OA с учетом сил инерции ($\omega_1 = const$). Направления реакций в точке A противоположны и равны по модулю реакциям в этой же точке звена BAE .

Неизвестный внешний момент M_ϵ определяется из уравнения моментов сил для звена OA относительно точки «О». Плечи сил находятся непосредственно из чертежа, построенного в заданном масштабе длин μ_e . Сила взаимодействия звеньев в шарнире «О» – $\bar{R}_o$ определяется графическим решением уравнения равновесия сил (рис. 5.10).

6 ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

Механизм машинного агрегата обычно является многозвенной системой, нагруженной силами и моментами, приложенными к различным ее звеньям. Рассмотрим в качестве примера силовую установку, в которой двигатель внутреннего сгорания (ДВС) приводит в движение через зубчатую передачу вал потребителя механической энергии, т.е. рабочей машины (рис. 6.1, а).

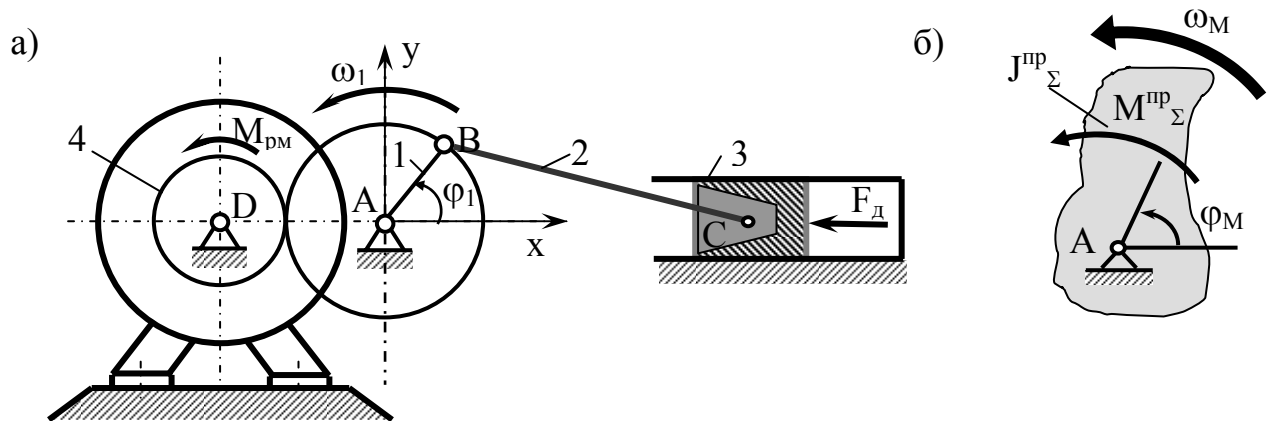


Рисунок 6.1

К поршню 3 приложена движущая сила F_d , к ротору 4 рабочей машины – момент сопротивления M_{pm} , ко всем звеньям – силы тяжести; во всех кинематических парах действуют силы трения. Если ДВС имеет несколько цилиндров, то число подвижных звеньев будет больше четырех. При этом на каждый поршень будет действовать движущая сила, так что картина нагружения механизма станет еще более сложной.

Определение закона движения такой сложной многозвенной системы представляет собой трудную задачу. Однако в рассматриваемом примере механизм имеет одну степень свободы ($W = 1$). Это значит, что прежде всего надо определить закон движения всего лишь одного из звеньев, которое тем самым будет являться начальным. Такая постановка задачи приводит к возможности заменить весь сложный многозвенный механизм одним условным звеном. Это условное звено называется **моделью механизма**. Отсюда следует, что если определить закон движения этой простой модели (рис. 6.1, б), то автоматически станет известным искомый закон движе-

ния начального звена заданного механизма, т.е. будет справедливым для любого момента времени уравнение

$$\omega_1 = \omega_M, \quad (6.1)$$

в котором ω_1 – угловая скорость начального звена, а ω_M – угловая скорость модели.

Из сказанного следует, что при построении модели механизма все силы и моменты, приложенные к нему, оказываются приведенными к одному звену и замененными суммарным приведенным моментом M_{Σ}^{np} , т.е. той расчетной величиной, которая в теоретической механике называется **обобщенной силой**. Следовательно, M_{Σ}^{np} является эквивалентом всей заданной нагрузки, приложенной к механизму. Равным образом, массы всех звеньев оказываются также приведенными к одному звену и замененными суммарным приведенным моментом инерции J_{Σ}^{np} , который является, таким образом, эквивалентом всей инертности механизма. Сам же заданный многозвенный механизм (рис. 6.1, а), нагруженный сложной системой сил и моментов, оказывается замененным простой моделью (рис. 6.1, б).

Итак, построение динамической модели состоит в приведении сил (определении J_{Σ}^{np}). При этом должно быть выполнено условие (6.1), что будет обеспечено в том случае, если при приведении сил будет соблюдено условие равенства элементарных работ, а при приведении масс – условие равенства кинетических энергий.

Рассмотрим приведение сил на примере механизма с одной степенью свободы ($W = 1$) (рис. 6.2, а). Выберем в качестве начального звено 1. Механизм нагружен силами $\bar{F}$ и $\bar{F}_3$ и моментом M_4 . Заменяем механизм его моделью и приведем к ней обе силы и момент. В результате силы $\bar{F}$ и $\bar{F}_3$ и момент M_4 будут представлены соответствующими приведенными моментами (рис. 6.2, б). Их алгебраическая сумма дает величину суммарного приведенного момента

$$M_{\Sigma}^{np} = M_F^{np} + M_{F_3}^{np} + M_{M_4}^{np}, \quad (6.2)$$

приложенного к модели (рис. 6.2, в).

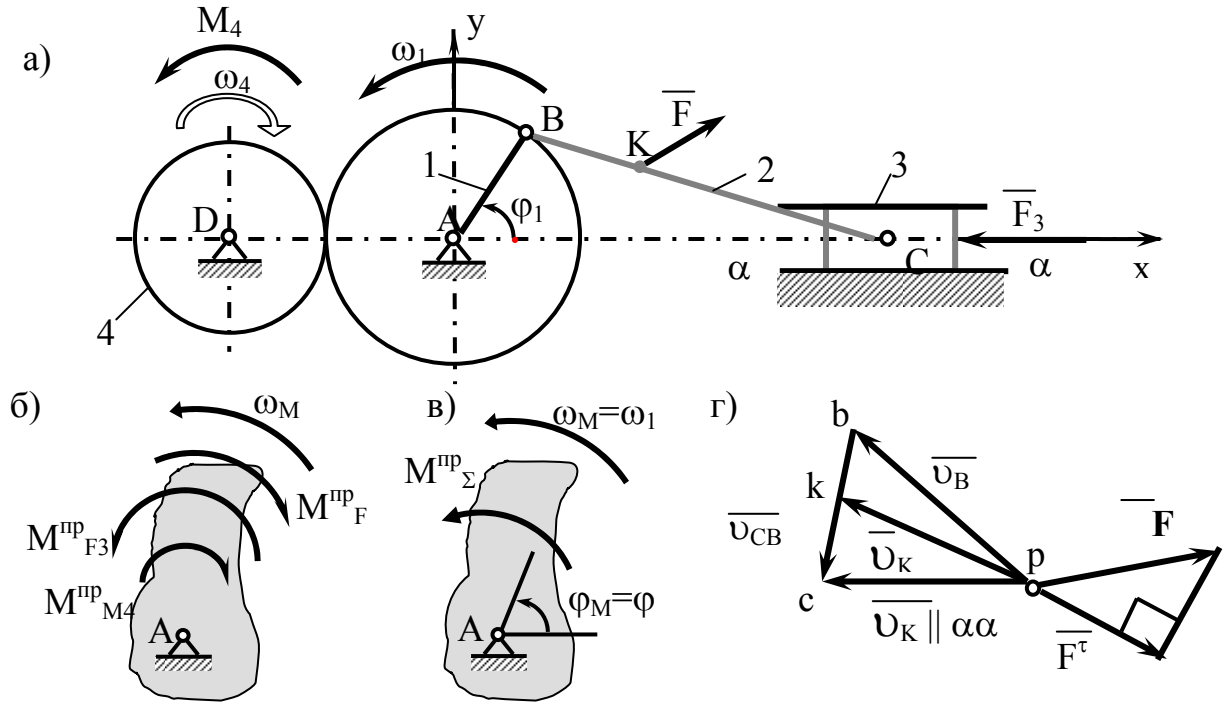


Рисунок 6.2

Приведем силу $\overline{F}$, т.е. найдем M_F^{np} . Для этого запишем исходное условие – равенство элементарных работ фактически приложенной силы F и заменяющего ее приведенного момента M_F^{np}

$$M_F^{np} d\varphi_M = F dS_K \cdot \cos(\overline{F}, d\overline{S}_K), \quad (6.3)$$

где $d\varphi_M$ и dS_K – возможные перемещения модели и точки K приложения силы. Учитывая (6.1), решим уравнение (6.3) относительно искомого приведенного момента:

$$M_F^{np} = F \frac{dS_K}{d\varphi_1} \cos(\overline{F}, d\overline{S}_K) = F \frac{dS_K / dt}{d\varphi_1 / dt} \cos(\overline{F}, d\overline{S}_K) = F \frac{V_K}{\omega_1} \cos(\overline{F}, d\overline{S}_K),$$

откуда, имея в виду, что $\angle(\overline{F}, d\overline{S}_K) = \angle(\overline{F}, \overline{V}_K)$, получим

$$M_F^{np} = F \frac{V_K}{\omega_1} \cos(\overline{F}, \overline{V}_K). \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) имеет обобщающий смысл: под буквой K можно понимать любую точку механизма, к которой приложена сила F , известная по величине и направлению.

Приведем момент M_4 . Запишем исходное условие – равенство элементарных работ

$$M_{M4}^{np} d\varphi_M = M_4 d\varphi_4, \quad (6.5)$$

где $d\varphi_M$ и $d\varphi_4$ – возможные угловые перемещения модели и звена 4. Решим (6.5) относительно M_{M4}^{np} , помня, что $d\varphi_M = d\varphi_4$:

$$M_{M4}^{np} = M_4 \frac{\omega_4}{\omega_1}. \quad (6.6)$$

Уравнению (6.6) можно придать обобщающий вид:

$$M_{Mj}^{np} = M_j \frac{\omega_j}{\omega_1}, \quad (6.7)$$

где M_j – фактически приложенный к звену j момент.

Практическое использование для расчетов уравнений (6.4) и (6.7) можно осуществить либо графически, либо аналитически.

Рассмотрим графический способ. Для этого преобразуем уравнение (6.4), учитывая, что $\omega_1 = \frac{V_B}{l_{AB}}$:

$$M_F^{np} = F l_{AB} \frac{V_K}{V_B} |\cos(\overline{F}, \overline{V_K})|. \quad (6.8)$$

В уравнении (6.8) следует подставлять абсолютную величину $|\cos(\overline{F}, \overline{V_K})|$.

Чтобы найти отношение $\frac{V_K}{V_B}$ возможных скоростей и угол $(\overline{F}, \overline{V_K})$ построим план возможных скоростей, который для механизмов с $W = 1$ выполняется по той же методике, что и план действительных скоростей. При этом следует помнить, что возможные скорости в отличие от действительных не зависят от приложенных сил, т.е. никак не связаны с законом движения механизма, и к тому же конкретного числового значения не имеют. Направление приведенного момента M_F^{np} определяется так: поскольку F^t действует навстречу $\overline{V_K}$ (рис. 6.2, г), то и момент M_F^{np} должен быть направлен навстречу ω_M (рис. 6.2, б).

Используем уравнение (6.8) для приведения силы F_3 , учитывая, что $\cos(\overline{F_3}, \overline{V_C}) = 1$:

$$M_{F3}^{np} = F_3 l_{AB} \frac{V_C}{\omega V_B}. \quad (6.9)$$

Для определения приведенного момента M_{M4}^{np} вернемся к уравнению (6.6), в котором $\frac{\omega_4}{\omega_1} = u_{41}$ (рис. 6.2, а):

$$M_{M4}^{np} = M_4 |u_{41}|. \quad (6.10)$$

Приведенный момент M_{M4}^{np} направлен против ω_M (рис. 6.2, б), т.к. заданный момент M_4 действует навстречу ω_4 .

Рассмотрим задачу приведения масс.

Заменим, как и выше, заданный механизм его динамической моделью (рис. 6.1, б). Это значит, сосредоточим в ней инертность всех звеньев механизма. Обозначим момент инерции модели J_{Σ}^{np} . Следовательно, J_{Σ}^{np} является эквивалентом инертности всего механизма и называется его **приведенным моментом инерции**. Величина J_{Σ}^{np} определяется из условия равновесия кинетических энергий T_M модели и всего механизма T :

$$T_M = T. \quad (6.11)$$

Кинетическая энергия модели (рис. 6.2, б) определяется следующим образом:

$$T_M = \frac{J_{\Sigma}^{np} \omega_M^2}{2}.$$

Кинетическая энергия звена i в общем виде может быть записана в виде:

$$T_i = \frac{m_i V_{Si}^2}{2} + \frac{J_{iS} \omega_i^2}{2}, \quad (6.12)$$

где V_{Si} – скорость центра масс S_i звена i ;

J_{Si} – момент инерции звена i относительно оси, проходящей через центр масс S_i .

Кинетическая энергия T заданного механизма (рис. 6.1, а) складывается из кинетических энергий всех его четырех подвижных звеньев $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$. Звено 1 участвует во вращательном движении, звено 2 – в плоском, звено 3 – в поступательном, звено 4 – во вращательном. Поэтому

$$T = \frac{J_{1A} \omega_1^2}{2} + \left(\frac{m_2 V_{S2}^2}{2} + \frac{J_{S2} \omega_2^2}{2} \right) + \frac{m_B V_C^2}{2} + \frac{J_{AD} \omega_4^2}{2}.$$

Приравняв полученное выражение кинетической энергии модели, после простых преобразований получим

$$J_{\Sigma}^{np} = J_{1A} + \left[m_2 l_{AB}^2 \left(\frac{V_{S2}}{V_B} \right) + J_{2S} \left(\frac{l_{AB}}{l_{CB}} \right)^2 \cdot \left(\frac{V_{CB}}{V_B} \right)^2 \right] + m_3 l_{AB}^2 \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^2 + J_{4D} \cdot u_{41}^2. \quad (6.13)$$

Здесь учтено, что $\omega_1 = V_B / l_{AB}$, $\omega_2 = V_{CB} / l_{CB}$, $\omega_4 / \omega_1 = u_{41}$.

При графическом способе решения этого уравнения, отношения возможных скоростей определяются из плана возможных скоростей.

6.1 Уравнение движения механизма

Выполнив приведение сил и масс любого механизма с одной степенью свободы (рычажный, зубчатый, кулачковый и бр.), столь бы сложным он ни был, можно заменить его динамической моделью (рис. 6.3). Эта модель в общем случае имеет переменный приведенный момент инерции J_{Σ} и к ней приложен суммарный приведенный момент M_{Σ} . Закон движения модели такой же, как и закон движения начального звена механизма.

Основой для составления уравнения движения механизма с одной степенью свободы служит теорема об изменении кинетической энергии:

$$T = T_{нач} + \sum A. \quad (6.14)$$

Работу совершают все активные силы и моменты и силы трения во всех кинематических парах механизма.

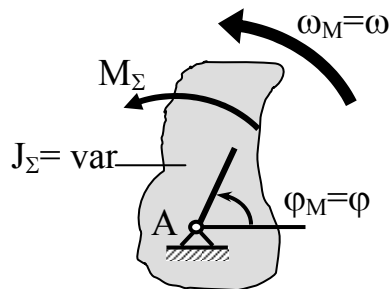


Рисунок 6.3

Запишем формулу для кинетической энергии модели, учитывая равенство угловых скоростей модели и начального звена ω ,

$$T = J_{\Sigma} \omega^2 / 2. \quad (6.15)$$

Поскольку вся нагрузка, приложенная к модели, выражается суммарным приведенным моментом M_{Σ} , то сумма работ равна

$$\sum A = \int_{\varphi_{нач}}^{\varphi} M_{\Sigma} d\varphi. \quad (6.16)$$

Здесь переменная интегрирования φ_M заменена координатой φ начального звена, т.к. $\varphi_M = \varphi$.

С учетом полученных выражений, уравнение движения запишется в энергетической форме:

$$\frac{J_{\Sigma} \omega^2}{2} - \frac{J_{\Sigma_{нач}} \cdot \omega_{нач}^2}{2} = \int_{\varphi_{нач}}^{\varphi} M_{\Sigma} d\varphi. \quad (6.17)$$

В общем случае верхний предел φ интегрирования считается переменным.

Если вся нагрузка, приложенная к механизму, зависит только от его положения, то и суммарный приведенный момент M_{Σ} есть функция только координаты φ .

В этом случае уравнение (6.17) решается непосредственно относительно искомой величины ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_{нач}}^{\varphi} M_{\Sigma}(\varphi) d\varphi}{J_{\Sigma}} + \frac{J_{\Sigma_{нач}}}{J_{\Sigma}} \cdot \omega_{нач}^2}. \quad (6.18)$$

В этом выражении интеграл под корнем имеет знак, который необходимо учитывать.

Получим уравнение движения в дифференциальной форме.

Продифференцируем уравнение (6.17) по координате φ

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{J_{\Sigma} \omega^2}{2} \right) = M_{\Sigma}.$$

Определим производную в этом уравнении, учитывая, что в общем случае переменной величиной является не только угловая скорость ω , но и J_{Σ} . Поэтому

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{J_{\Sigma} \omega^2}{2} \right) = J_{\Sigma} \omega \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\Sigma}}{d\varphi} = J_{\Sigma} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{\Sigma}}{d\varphi} \omega^2,$$

откуда

$$J_{\Sigma} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{\Sigma}}{d\varphi} \omega^2 = M_{\Sigma}. \quad (6.19)$$

Полученное выражение есть уравнение движения в дифференциальной форме, поскольку искомая переменная величина ω стоит под знаком производной. При использовании уравнения (6.19) необходимо помнить, что и момент M_{Σ} , и производная $dJ_{\Sigma}/d\varphi$ величины алгебраические и подставляются со своими знаками.

Уравнение движения в дифференциальной форме (6.19) может быть получено также и из уравнений Лагранжа II рода.

Для определения углового ускорения ε начального звена используем уравнение (6.19) и решим его относительно $\varepsilon = d\omega / dt$:

$$\varepsilon = \frac{M_{\Sigma}}{J_{\Sigma}} - \frac{\omega^2}{2J_{\Sigma}} \frac{dJ_{\Sigma}}{d\varphi}. \quad (6.20)$$

Производная $dJ_{\Sigma}/d\varphi$ подсчитывается или численным дифференцированием на ЭВМ, или графическим дифференцированием.

Процесс движения машинного агрегата в общем случае состоит из трех фаз: разбега, установившегося режима и выбега (рис. 6.4). Разбег и выбег относятся к неуставившемуся режиму, который характеризуется непериодическими изменениями скорости главного вала агрегата (начального звена). При установившемся

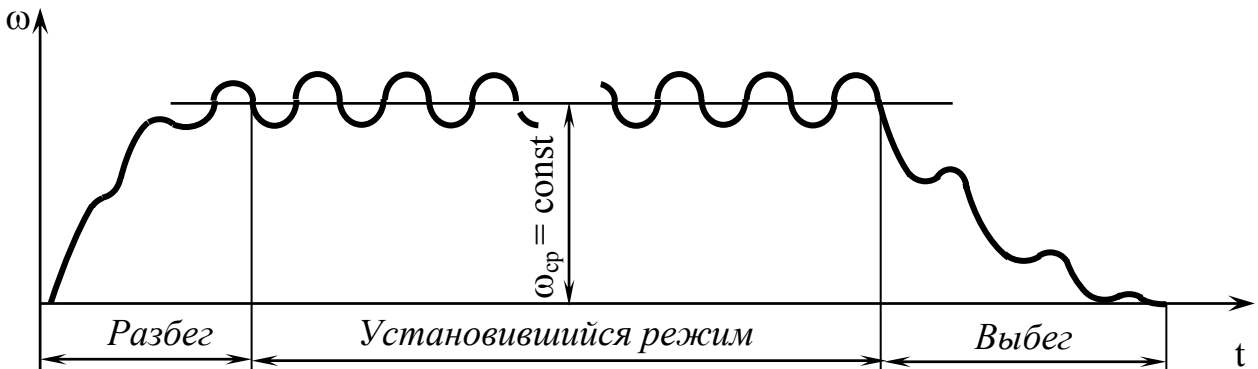


Рисунок 6.4

режиме скорость главного вала изменяется периодически (в частном случае она постоянна). Часто установившееся движение чередуется с разгонами (при повышении скоростного режима) и торможениями. Так работает, например, автомобильный двигатель. Многие механизмы в установившемся режиме вообще не работают. Это особенно характерно для целого ряда приборов (реле, контакторы и т.п.). Их механизм во время срабатывания переходит из одного положения в другое, не совершая замкнутого повторяющегося кинематического цикла.

7 ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ ПРОЧНОСТНОЙ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Как было ранее указано, каждое звено механизма состоит из одной или нескольких деталей. Для обеспечения нормальной работоспособности звено, а значит и детали, его составляющие, должны удовлетворять требованиям прочности, жесткости и устойчивости. Под **прочностью** понимается способность конструкции, ее частей и деталей выдерживать предельную нагрузку, не разрушаясь.

При изучении прочности машин и приборов их детали нельзя рассматривать как абсолютно твердые тела и следует принимать во внимание их способность деформироваться, т.е. изменять форму и размеры под действием нагрузок. Деформации бывают упругие, исчезающие после прекращения действия вызывающих сил, и пластические, или остаточные, не исчезающие.

Под **жесткостью** подразумевается способность конструкции и ее элементов противостоять внешним нагрузкам в отношении деформации: при заданных нагрузках деформация не должна превышать предельной величины.

Устойчивостью называется способность конструкции и ее деталей сохранять начальную форму равновесия.

Оценка прочностной надежности элемента конструкции начинается с выбора расчетной модели (схемы). **Моделью** называют совокупность представлений, условий и зависимостей, описывающих объект, явление.

При построении модели учитывают наиболее значимые и отбрасывают несущественные факторы, которые не оказывают достаточно заметного влияния на условия функционирования детали. Учет же всех факторов принципиально невозможен в силу их неисчерпаемости.

Для одной и той же детали может быть предложено несколько расчетных моделей, которые будут отличаться различной точностью. В тоже время одной расчетной схеме можно поставить в соответствие целый ряд деталей различных конструкций.

Для определения прочностной надежности детали используют другие модели – модели материала, модели формы, модели нагружения и разрушения.

В расчетах на прочность материал детали представляют однородной сплошной средой, что позволяет рассматривать тело как непрерывную среду и применять методы математического анализа. Под однородностью материала понимают независимость его свойств от размеров выделенного объема. Такая схематизация основана на осреднении свойств материала в объемах и обоснована многочисленными экспериментальными исследованиями.

Геометрическая форма элементов конструкций обычно весьма сложна. На рис. 7.1, а – в показаны три распространенные в конструкциях детали: вал редуктора (а), храповое колесо (б) и тройник (в). Точный учет всех геометрических особенностей детали невозможен, т.к. приводит к сложным расчетам. На практике для оценки прочности вводят упрощение в геометрию детали, приводя ее к схеме стержня (бруса), пластинки, оболочки.

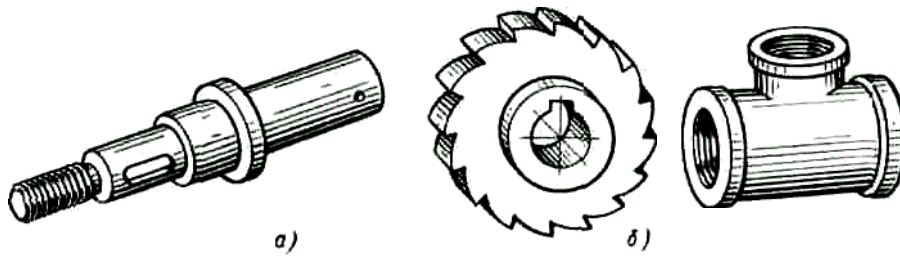


Рисунок 7.1 – Элементы конструкции:
а – вал; б – храповое колесо; в – тройник

Стержнем или **брусом** называют тело, поперечные размеры которого малы в сравнении с его длиной (рис. 7.2, а). Стержень может иметь постоянное или переменное по длине сечение. Кольцо (рис. 7.2, б) рассматривают как стержень с криволинейной осью, а пружину – как пространственно изогнутый стержень.

Пластинкой (рис. 7.2, в) называют тело, ограниченное двумя плоскими или слегка изогнутыми поверхностями и имеющее малую толщину. Модель пластинки можно использовать для схематизации, например, тела колеса.

Оболочка (рис. 7.2, г) – тело, ограниченное двумя поверхностями и имеющее малую толщину по сравнению с радиусом кривизны и длиной. Тройник, показанный на рис. 7.1, в, можно схематизировать в виде двух составных цилиндрических оболочек.

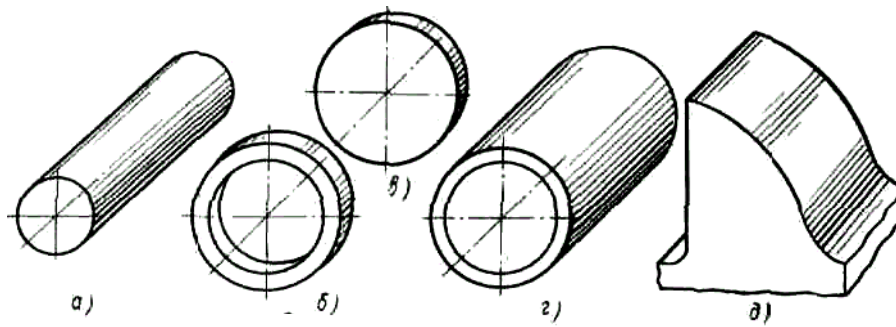


Рисунок 7.2 – Модели элементов конструкции:

а – стержень; б – кольцо; в – круглая пластина; г – оболочка; д – массив

Многие детали могут быть также представлены в виде составных моделей.

Пространственным телом (массивом) называют модель, размеры которой соизмеримы (например, зуб храпового колеса, рис. 7.2, д).

7.1 Модель нагружения

Силы являются мерой механического взаимодействия элементов конструкций. Если элемент конструкции (деталь) рассматривается изолированно от сопряженных деталей, то действие последних заменяется силами, которые называют **внешними**. Силы взаимодействия между частями отдельной детали или между деталями в сопряжении называют **внутренними**.

Такое деление сил часто носит условный характер. Например, при оценке надежности работы корпусных деталей сосуда под давлением (рис. 7.3, а) болты, стягивающие эти детали, исключают из

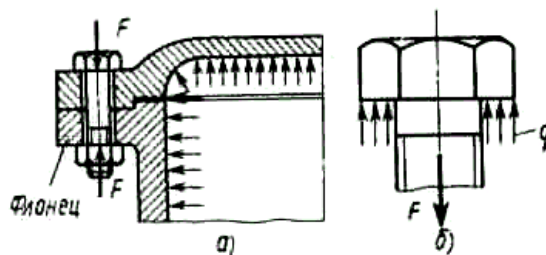


Рисунок 7.3 – Схема нагружения сосуда (а) и болта (б)

рассмотрения, а их действие заменяют внешними силами F . При общей оценке работоспособности системы эти силы будут внутренними.

При схематизации условий работы в расчете вводят и другое упрощение в систему сил, подразделяя их условно на сосредоточенные, распределенные и объемные.

Сосредоточенной силой называют силу, действующую на небольшую часть поверхности детали, например, силу, приложенную к фланцу сосуда со стороны болта (рис. 7.3, б).

Распределенными называют силы, действующие на участках поверхности, соизмеримых с полной поверхностью детали, например, давление жидкости в сосуде (рис. 7.3, а).

Существенно, что в зависимости от цели расчета одна и та же нагрузка может приниматься либо сосредоточенной, либо распределенной. Например, при расчете работоспособности (прочности) болта сила F схематизируется в виде нагрузки q , распределенной по опорной поверхности болта (рис. 7.3, б).

По характеру изменения во времени нагрузки подразделяются на статические и переменные. **Статической** называют нагрузку, которая медленно возрастает от нуля до своего номинального значения и остается постоянной в процессе работы детали. **Переменной** называют нагрузку, периодически изменяющуюся во времени.

Моделям нагружения соответствуют модели разрушения – уравнения (условия), связывающие параметры работоспособности элемента конструкции в момент разрушения с параметрами, обеспечивающими прочность.

В зависимости от условий нагружения рассматривают модели разрушения: статического, малоциклового и многоциклового (усталостного).

Допущения о характере деформации элементов конструкций:

1. Перемещения точек элемента конструкции, обусловленные его упругими деформациями, незначительные по сравнению с размерами самого тела. Согласно этому допущению, деформированный элемент конструкции несущественно отличается от недеформированного. Поэтому при составлении уравнений равновесия сил, действующих на деформированное тело, можно пренебрегать теми изменениями, которые произошли в расположении сил.

2. Перемещения точек упругого тела в известных пределах нагружения прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения.

3. Для линейно деформируемых конструкций справедлив известный из теоретической механики принцип независимости действия сил – результат действия нескольких сил не зависит от последовательности нагружения ими данной конструкции и равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности. Следовательно, если под действием равномерно распределенной силы точка В бруса (рис. 7.4, а) переместится на расстояние δ_1 , а под действием сосредоточенной силы (рис. 7.4, б) – на расстояние δ_2 , то при одновременном действии этих сил перемещение точки В равно сумме перемещений δ_1 и δ_2 (рис. 7.4, в).

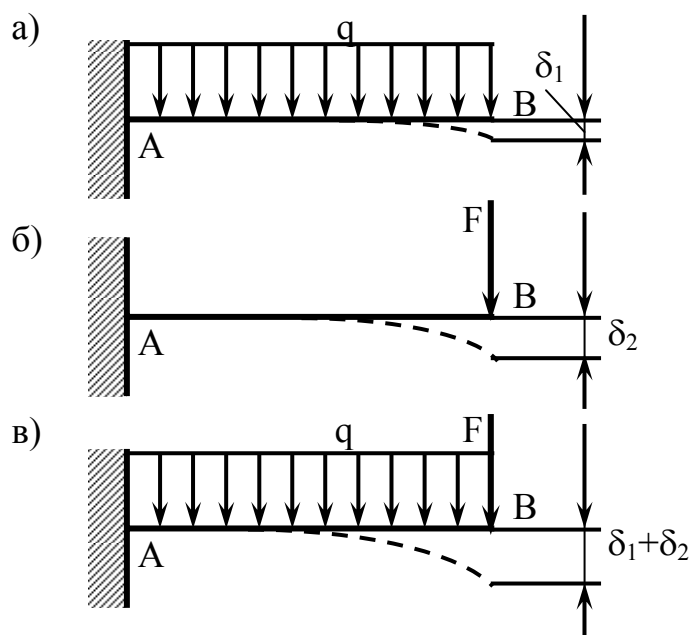


Рисунок 7.4

7.2 Внутренние силы

Способность тела сопротивляться изменению первоначальной формы и размеров определяется силами сцепления между всеми смежными частицами тела, которые в отличие от внешних сил, приложенных к телу, называются **внутренними силами**. Внутренние силы (силы упругости), как показывают опыты, возрастают вместе с

увеличением нагрузок, но до известного предела, после чего сцепление между частицами тела нарушается и тело разрушается. Отсюда следует, что внутренние силы определяют прочность тела и чтобы правильно рассчитывать конструкцию на прочность или жесткость, необходимо уметь определить внутренние силы по внешней нагрузке.

Для нахождения внутренних сил используют **метод сечений**, который состоит в следующем.

Рассечем мысленно брус, нагруженный уравновешенной системой сил $\overline{F_K}$ (рис. 7.5, а) поперечным сечением А (плоскость сечения $\perp$ оси бруса) на части I и II и отбросим одну из них, например, часть II. Чтобы сохранить равновесие оставшейся части бруса (рис. 7.5, б), заменим действие отброшенной части системой сил, которые являются внутренними для целого бруса (внешними теперь по отношению к отсеченной части). В результате приведения этой системы сил к центру тяжести сечения получим главный вектор $\overline{F_{ГЛ}}$ и главный момент $\overline{M_{ГЛ}}$ (рис. 7.5, в). Выберем систему координат осей X, Y, Z таким образом, чтобы ось X была направлена перпендикулярно сечению, т.е. совпадала с осью бруса, а оси Y и Z располагались в плоскости сечения, причем одна из осей (ось Y) совпадала с ее осью симметрии (рис. 7.5, г). Разложим главный вектор и главный момент на составляющие $\overline{N}, \overline{Q_Y}, \overline{Q_Z}$ и три момента $\overline{M_K}, \overline{M_Y}, \overline{M_Z}$, которые в совокупности называются внутренними силовыми факторами.

Шесть внутренних силовых факторов вместе с известными внешними силами на оставшейся части бруса образуют уравновешенную систему сил, для которой можно составить шесть уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum F_{KX}, & M_K &= \sum M_X(\overline{F_K}), \\ Q_Y &= \sum F_{KY}, & M_Y &= \sum M_Y(\overline{F_K}), \\ Q_Z &= \sum F_{KZ}, & M_Z &= \sum M_Z(\overline{F_K}). \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Составляющая $\overline{N}$ главного вектора внутренних сил, направленная перпендикулярно плоскости поперечного сечения бруса, называется **нормальной (продольной) силой**. Составляющие $\overline{Q_Y}, \overline{Q_Z}$,

лежащие в плоскости поперечного сечения, называются **поперечными силами**.

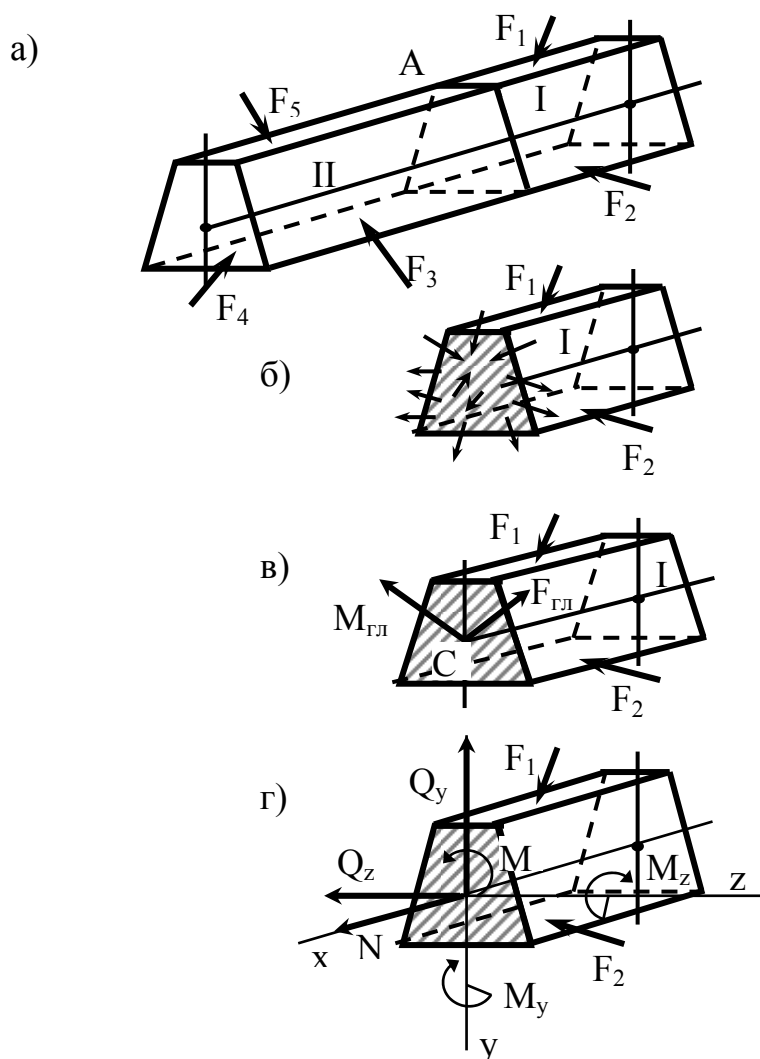


Рисунок 7.5

Составляющий главного момента внутренних сил момент $\overline{M_K}$, возникающий в плоскости поперечного сечения бруса, называется **крутящим моментом**. Составляющие моменты $\overline{M_Y}$ и $\overline{M_Z}$, возникающие в плоскостях, перпендикулярных поперечному сечению бруса, называются **изгибающими моментами**.

Из равенства (7.1) следует, что нормальная сила N равна алгебраической сумме проекций на ось X внешних сил, действующих на оставшуюся часть бруса; каждая из поперечных сил ($\overline{Q_Y}$ и $\overline{Q_Z}$) равна алгебраической сумме проекций на соответствующую ось

внешних сил, действующих на оставшуюся часть бруса; крутящий момент $\overline{M_K}$ равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих на рассматриваемую часть бруса, относительно нормальной к сечению оси X ; каждый из изгибающих моментов $\overline{M_Y}$ и $\overline{M_Z}$ равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих на оставшуюся часть бруса, относительно осей Y или Z соответственно.

По аналогии с приведенными наименованиями внутренних силовых факторов производится классификация видов нагружения бруса: если в поперечных сечениях бруса возникает только нормальная сила $\overline{N}$, то брус испытывает деформацию растяжения ($\overline{N}$ направлена от сечения) или сжатия (направление $\overline{N}$ противоположное); если в поперечном сечении возникает только момент $\overline{M_K}$, то возникает деформация кручения; если в поперечном сечении возникает только изгибающий момент $\overline{M_Y}$ (или $\overline{M_Z}$), то брус испытывает деформацию чистого изгиба; если в поперечном сечении возникает только поперечная сила $\overline{Q_Y}$ (или $\overline{Q_Z}$), то брус испытывает деформацию сдвига.

Таким образом, метод сечений позволяет определить интегральные характеристики внутренних сил – силовые факторы и по ним виды нагружения. Практически метод сечений сводится к выполнению следующих операций:

- 1) разрезаем брус на две части;
- 2) отбрасываем одну из частей;
- 3) заменяем действие отброшенной части на оставшуюся шестью силовыми факторами;
- 4) определяем значения внутренних силовых факторов из условий равновесия для отсеченной части бруса;
- 5) устанавливаем вид нагружения.

Отметим, что как уже говорилось выше, внутренние силы определяют взаимодействие между частями бруса, причем это взаимодействие подчиняется аксиоме статики о равенстве действия и противодействия. Поэтому внутренние силовые факторы, возникающие в сечении справа, равны и противоположны по направлению силовым факторам, возникающим в сечении слева (рис. 7.6).

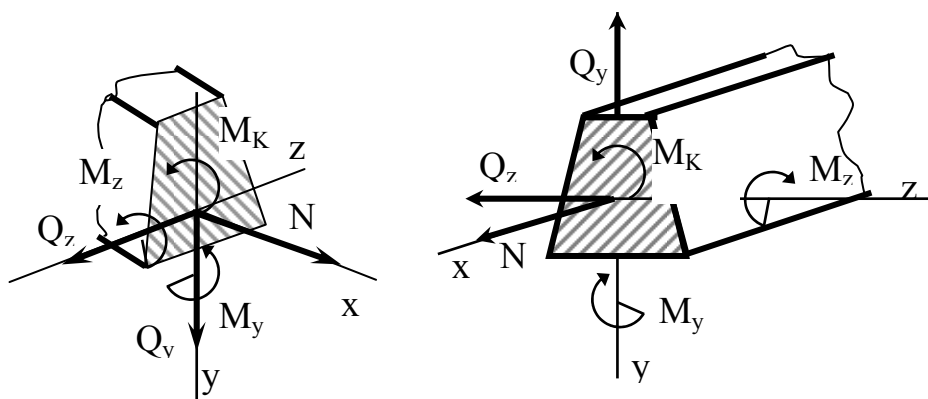


Рисунок 7.6

8 НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ТОЧКЕ

Метод сечений позволяет по нагрузке определить внутренние силовые факторы, т.е. составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил в сечении. Однако, чтобы определить сами внутренние силы и установить закон их распределения, нужно ввести меру интенсивности внутренних сил. За такую меру интенсивности принято **напряжение**.

Рассмотрим сечение Π тела (рис. 8.1, а). На основании допущения о сплошности тела можно считать, что внутренние силы непрерывно распределены по всему сечению. В окрестности произвольной точки K выделим элементарную площадку ΔA и обозначим через $\Delta \bar{R}$ равнодействующую внутренних сил на этой площадке. Отношение $\Delta \bar{R} / \Delta A$ представляет собой среднее напряжение на данной площадке. Если площадку ΔA уменьшать, то в пределе получим напряжение в точке

$$\bar{P} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A}. \quad (8.1)$$

Силу $\Delta \bar{R}$ можно разложить на составляющие: нормальную $\Delta \bar{N}$ и касательную $\Delta \bar{Q}$. По этим составляющим можно определить нормальное $\bar{\sigma}$ и касательное $\bar{\tau}$ напряжения:

$$\bar{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{N}}{\Delta A}; \quad \bar{\tau} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta A}. \quad (8.2)$$

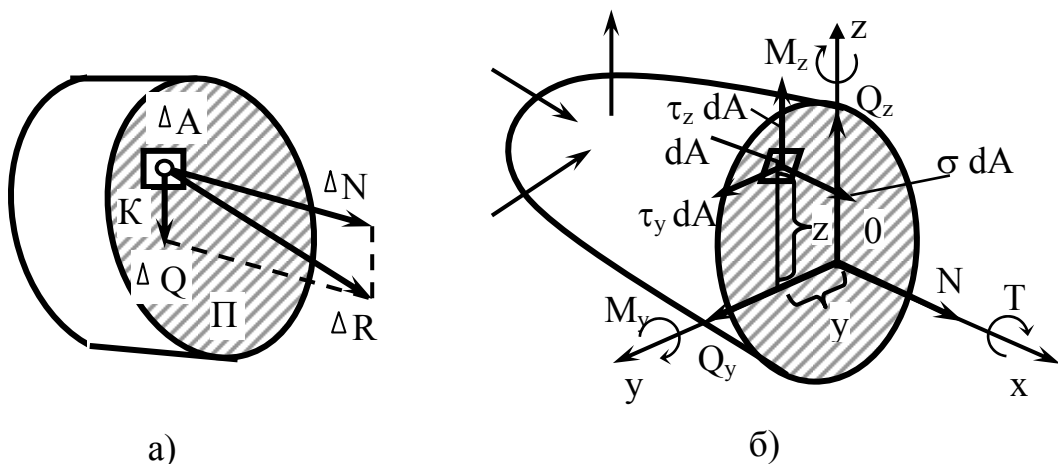


Рисунок 8.1 – Схемы действия внутренних сил и напряжений в сечении тела

Напряжение имеет размерность силы, деленной на площадь.

В системе СИ напряжение выражают в паскалях (Па); $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$. В технической литературе напряжение часто задают в мегапаскалях; $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$.

Нормальные и касательные напряжения являются удобной мерой оценки внутренних сил тела, т.к. материалы различным образом им сопротивляются. Нормальные напряжения стремятся сблизить или удалить отдельные частицы тела по направлению нормали к плоскости, а касательные напряжения стремятся сдвинуть одни частицы тела относительно других по плоскости сечения. Поэтому касательные напряжения называют еще **напряжениями сдвига**.

Через точку К тела можно провести и другие секущие плоскости. Напряжения в каждой из них для точки К будут различными. Поэтому в общем случае вектор напряжения будет функцией как координат точек тела, так и нормали $\bar{n}$ к рассматриваемой площадке

$$\bar{P} = \bar{P}(x, y, z, \bar{n}). \quad (8.3)$$

Совокупность этих напряжений и определяет напряженное состояние в каждой точке тела.

Касательные напряжения имеют различные направления в плоскости сечения, поэтому удобнее определять два касательных напряжения τ_Y и τ_Z , направленных соответственно вдоль осей Y и Z (рис. 8.1, б).

Связь между напряжениями и внутренними силовыми факторами, возникающими в сечении, можно установить, используя уравнения статики.

Выделим в сечении тела бесконечно малую площадку dA и приложим к ней элементарные силы σdA , $\tau_Y dA$ и $\tau_Z dA$ (рис. 8.1, б).

Суммируя по всему сечению тела проекции этих сил, а также их моменты относительно осей X, Y и Z, получим

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA; & Q_Y &= \int_A \tau_Y dA; & Q_Z &= \int_A \tau_Z dA; \\ M_X &= M_K \int_A (\tau_Z \cdot Y - \tau_Y \cdot Z) dA; \\ M_Y &= \int_A \sigma Z dA; & M_Z &= \int_A \sigma Y dA. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Приведенные формулы выражают зависимости внутренних сил в сечении от напряжений. Однако распределение напряжений по сечению тела заранее не известно. Для определения закона распределения напряжений по сечению необходимы дополнительные сведения о характере деформации.

8.1 Перемещения и деформации

Как уже отмечалось выше, под действием нагрузки реальные твердые тела меняют свою форму и размеры. Следовательно, точки тела, а также мысленно проведенные линии и сечения перемещаются в плоскости или пространстве.

Рассмотрим реальное тело (рис. 8.2, а). Отметим в нем до нагружения точку A . После нагружения эта точка переместится в новое положение A' . Вектор δ_A , имеющий начало в точке A недеформированного тела, а конец в той же точке (A') деформированного тела, называют вектором *линейного перемещения*. Его составляющие, параллельные осям координат X , Y и Z , носят название *перемещений по осям* и соответственно обозначаются u , v , w .

Кроме линейного перемещения введем понятие углового перемещения. Если рассмотреть отрезок AB прямой между двумя бесконечно близкими точками до нагружения (рис. 8.2, б), то после нагружения этот отрезок займет новое положение $A'B'$. Конечно, в общем случае при нагружении отрезка AB его точки могут полу-

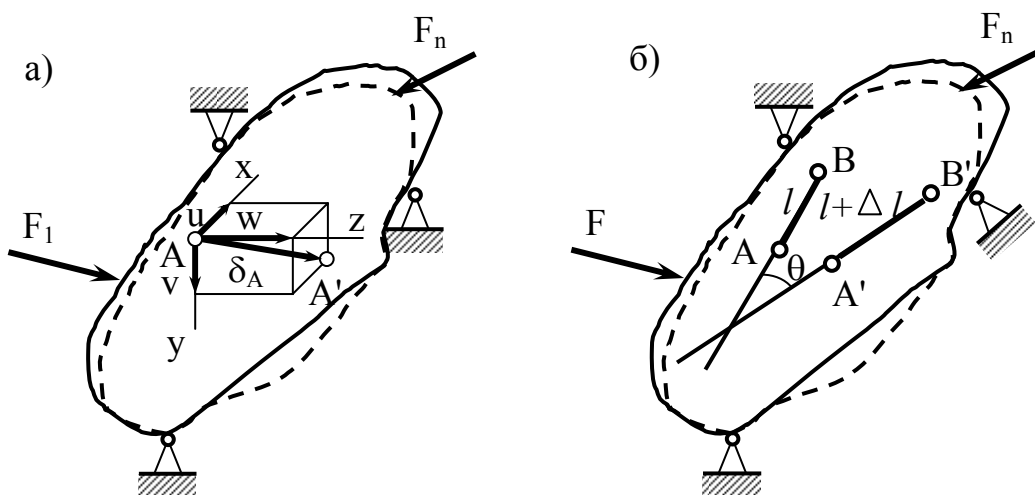


Рисунок 8.2

чить различные перемещения и рассматриваемый отрезок может искривиться. Однако, приняв его бесконечно малым, можно считать, что после нагружения он сохранил свою прямолинейность. Угол θ , на который рассматриваемый отрезок повернулся в пространстве, называется *угловым перемещением*.

8.2 Линейная деформация

Для характеристики интенсивности изменения размеров и формы тела вводится понятие деформации.

Длина отрезка AB (рис. 8.2, б) после нагружения изменится на Δl . Отношение приращения длины отрезка AB к его начальной длине называют *средней линейной деформацией в точке A по направлению $\overline{AB}$* и обозначают греческой буквой ε (эпсилон) с индексом AB

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\Delta l}{l}.$$

В пределе при стремлении l к нулю получим линейную деформацию в точке в рассматриваемом направлении:

$$\overline{\varepsilon}_{AB} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{l}}{\bar{l}}.$$

Если через точку A провести отрезок другого направления, то деформация будет другой. Обычно в качестве основных принимают направления, параллельные осям выбранной прямоугольной системы координат. Тогда в обозначение ε вводят соответствующие индексы $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

8.3 Угловая деформация

Прямой угол, образованный двумя произвольными бесконечно малыми отрезками AB и AC (рис. 8.3), после нагружения тела изменится и примет значение $B'A'C'$. Разность углов ABC и $A'B'C'$ называют *угловой деформацией в точке A в плоскости BAC* и обозначают буквой γ (гамма) с индексом BAC , т.е. $\angle BAC - \angle B'A'C' = \gamma_{BAC}$.

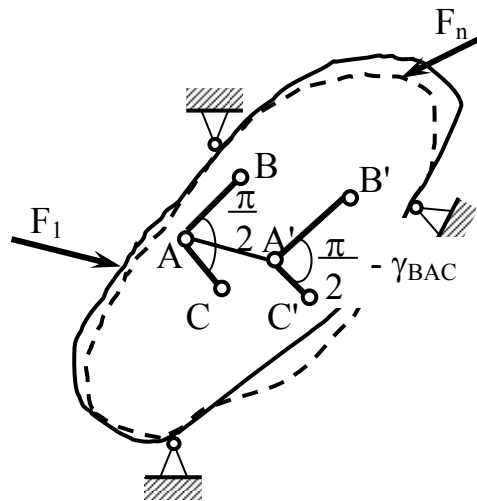


Рисунок 8.3

В той же точке A угловые деформации в различных плоскостях различны. Обычно угловые деформации определяют в трех взаимно перпендикулярных координатах плоскости и обозначают $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$.

Таким образом, в любой точке тела имеют место три линейных и три угловых компонента деформации, которые и определяют деформированное состояние в точке.

8.4 Закон Гука

Для установления зависимости между перемещениями и действующими внешними силами Р. Гук проделал множество опытов с самыми разными предметами из самых разных материалов. Последовательно подвешивая на них грузы и измеряя возникающие перемещения, Гук показал, что в подавляющем большинстве случаев перемещения в определенных пределах пропорциональны действующим силам. При этом принятая линейная зависимость между перемещениями и силами сохраняется как при возрастании, так и при убывании сил, что определяет упругие свойства тел. Конструкции, для которых соблюдается условие пропорциональности между перемещениями и внешними силами и обратимости процессов нагрузки и разгрузки, т.е. линейно деформируемые, подчиняются, как это было уже отмечено выше, принципу суперпозиции или принципу независимости действия сил: перемещения, возникающие в уп-

ругом теле, считаются независимыми от порядка приложения внешних сил, т.е. если к конструкции приложено несколько сил, то можно определить перемещения, а также и напряжения, и деформации от каждой силы в отдельности, а затем результат действия всех сил получить как сумму действий каждой силы. Подчеркнем, что принцип суперпозиции применяется при решении подавляющего большинства задач сопротивления материалов.

В современной трактовке с учетом влияния материала на результат действия внешних сил закон Гука формулируется так: нормальные напряжения прямо пропорциональны линейным деформациям. Математическая запись закона Гука:

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (8.5)$$

Коэффициент пропорциональности E называют **модулем упругости**. Он характеризует жесткость материала, т.е. его способность сопротивляться деформированию, и определяется экспериментально. Каждому материалу присуще свое значение модуля упругости. Ниже приведены значения модуля упругости для некоторых материалов (в гигапаскалях – $1 \text{ ГПа} = 10^9 \text{ Па}$).

Материал	E , ГПа	Материал	E , ГПа
Резина	0.07	Бронза	90
Дерево	14	Чугун	120
Стекло (обычное)	70	Сталь	210
Алюминиевые сплавы	70	Алмаз	1200

8.5 Коэффициент Пуассона

Наблюдения показывают, что удлинение тела в осевом направлении сопровождается уменьшением его поперечных размеров. Пусть при растяжении длина некоторого рассматриваемого элемента увеличилась на Δl , а размеры поперечного сечения уменьшились на Δb и Δh . Тогда отношение приращения длины элемента к его первоначальной длине называют **продольной деформацией**:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Отношение изменения размеров поперечного сечения к его первоначальному размеру называют **поперечной деформацией**:

$$\varepsilon_{\perp} = -\frac{\Delta b}{b} = -\frac{\Delta h}{h}.$$

Экспериментально установлено, что в пределах применимости закона Гука отношение поперечной деформации к продольной постоянно для данного материала. Это отношение называют **коэффициентом Пуассона** и обозначают греческой буквой ν (ню), т.е.

$$\nu = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}. \quad (8.6)$$

Коэффициент Пуассона ν наряду с модулем упругости E характеризует упругие свойства материала. Для всех изотропных материалов значения коэффициентов Пуассона лежат в пределах от 0 до 0.5. В частности для пробки ν близко к нулю, для каучука – к 0.5, для стали – $\nu = 0.3$.

8.6 Закон Гука при сдвиге

Если возникновение нормального напряжения связано с линейной деформацией ε , то возникновение касательного напряжения связано с угловой деформацией γ . Как при растяжении, так и при сдвиге большинство материалов при малых и умеренных напряжениях следует закону Гука

$$\tau = G \gamma, \quad (8.7)$$

где G – модуль сдвига, величина постоянная для данного материала.

Отметим, что между модулем упругости E и модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν существует зависимость

$$G = E / 2(1 + \nu).$$

9 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Растяжением (сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только продольная сила N .

Деформацию растяжения (сжатия) исследуют на брусках или стержнях-телах, отличающихся тем, что у них один размер значительно больше двух других. В зависимости от формы геометрической оси (линии, соединяющей центры масс сечений) различают **прямолинейные и криволинейные брусья**. **Стержнем** обычно называют тонкий и длинный брус с прямолинейной осью, работающий только на растяжение (сжатие). Размеры и форма поперечных сечений стержня могут быть постоянными или переменными.

Растяжение стержня происходит, когда к его концам приложены силы, равнодействующая которых направлена вдоль его оси. Выводы, относящиеся к деформации центрального растяжения, чаще всего применимы и к центральному сжатию. Существенные различия этих деформаций наблюдаются при изучении разрушения материалов, а также при исследовании поведения весьма длинных и тонких стержней, для которых сжатие сопровождается, как правило, выпучиванием (потери устойчивости формы).

Модель растягиваемого стержня широко используется в расчетах болтов, ремней передач, стержней ферм, лопаток турбин и др.

Для определения продольной силы N используется метод сечений. Будем считать эту силу положительной (т.е. со знаком плюс), если она растягивает стержень, и отрицательной – если сжимает.

Для определения силы N в сечении $X=0$ стержня (рис. 9.1, а) рассмотрим равновесие верхней отсеченной части (рис. 9.1, б). Составляя уравнение равновесия $\Sigma F_x = 0$, получим

$$-F + N = 0; \quad N = F.$$

Знак плюс показывает, что стержень растянут.

Рассмотрим другой пример (рис. 9.2, а). Здесь сила F приложена в сечении $X = a$. Очевидно, что в любом сечении при $X_1 > a$ (рис. 9.2, б) $N(X_1)=0$. Это означает, что часть стержня на этом участке под силой F не нагружена. Проведем второе сечение при

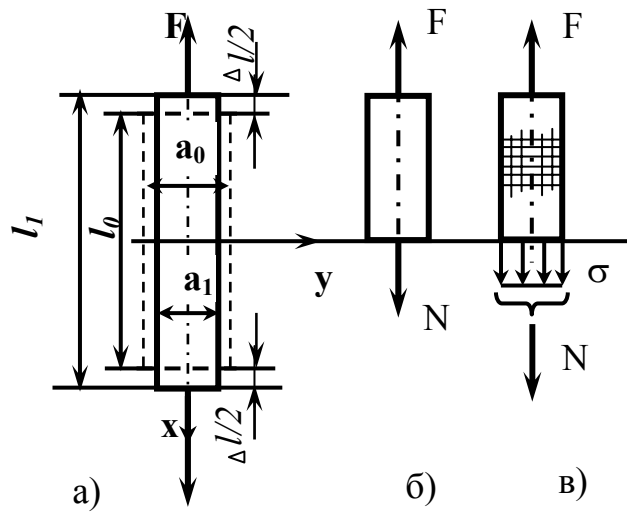


Рисунок 9.1 – Схема деформации (а) внутренних сил (б) и напряжений в сечении (в) стержня при растяжении

$X_2 \leq a$ (рис. 9.2, в) и рассмотрим равновесие нижней части. Записывая уравнение равновесия $\Sigma F_x = 0$, будем иметь

$$F - N(X_2) = 0; \quad N(X_2) = F.$$

График изменения внутренних сил (эпюра) приведен на рис. 9.2, г. Каждая ордината эпюры равна значению N в данном сечении. Эпюру строят на линии, проведенной параллельно оси стержня.

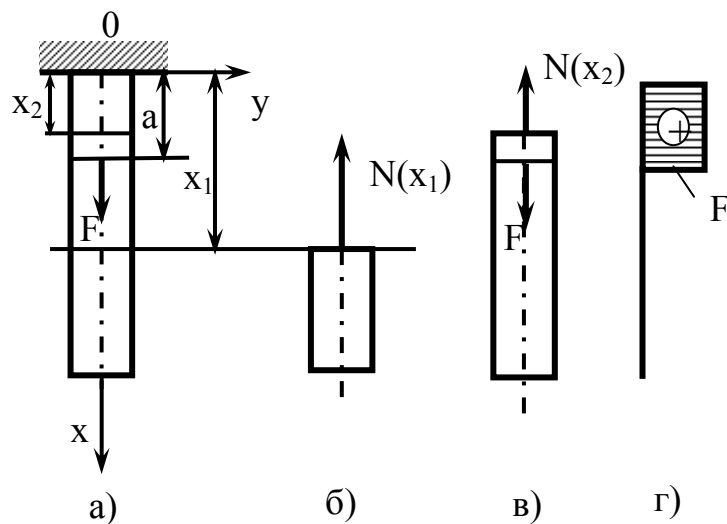


Рисунок 9.2 – Схемы распределения внутренних сил при растяжении стержня

Рассмотрим более сложный пример построения эпюры нормальных сил.

На рисунке 9.3, а изображен защемленный в сечении D брус, который нагружен в сечениях А, В и С осевыми силами. Пренебрегая силами тяжести, определим нормальные силы по всей длине бруса и построим их эпюру.

Сечениями А, В и С, в которых приложены нагрузки, брус разделен на три участка: АВ, ВС и CD. Разрежем брус по некоторому сечению 1-1 на участке АВ. Отбросив верхнюю часть (рис. 9.3, б), определим в сечении 1-1 нормальную силу, обозначив ее N_1 . На оставленную часть бруса действует только одна сила F , направленная от сечения 1-1. Согласно принятому правилу знаков, ее проекцию на ось бруса считаем положительной (сила F – растягивающая сила). Поэтому $N_1 = F$. Нормальная сила $N_1 > F$, значит вектор N_1 нужно направить от сечения 1-1. Сечение 1-1 может быть выбрано в любом месте на участке АВ; следовательно, нормальная сила на этом участке постоянна, а брус на участке АВ растянут.

Разрежем теперь брус по произвольному сечению на участке ВС, отбросив верхнюю часть (рис. 9.3, в), и обозначим N_2 искомую нормальную силу. На оставленную нижнюю часть бруса действуют две силы. Проекция силы F положительна (сила F направлена от се-

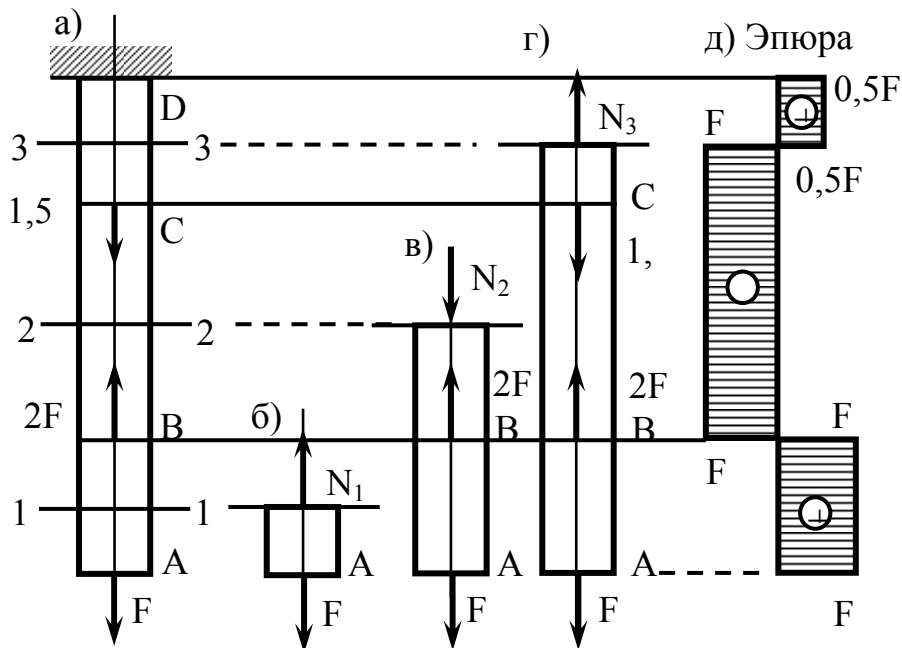


Рисунок 9.3

чения), а проекция силы $2F$ отрицательна ($2F$ направлена к сечению 2-2). Поэтому

$$N_2 = F - 2F = -F.$$

Нормальная сила $N_2 < 0$, значит вектор N_2 направлен к сечению 2-2, и брус на участке ВС сжат.

Выберем, наконец, произвольное сечение 3-3 на участке CD. Отбросив верхнюю часть (отбрасываем каждый раз верхнюю часть, чтобы исключить из рассмотрения неизвестную реакцию заделки в сечении D), находим нормальную силу N_3 в сечении 3-3 (рис. 9.3, г):

$$N_3 = F - 2F + 1,5F = 0,5F;$$

$N_3 > 0$, значит вектор $\overline{N_3}$ направлен от сечения 3-3, а участок CD растянут.

Переходим к построению эпюры N (рис. 9.3, д). Для этого параллельно оси бруса проводим начальную или базовую линию, перпендикулярно которой в определенном масштабе вправо откладываются отрезки, изображающие положительные значения продольной силы; а влево – отрицательные. Получившаяся ступенчатая фигура, ограниченная основной линией и заштрихованная перпендикулярно базовой линии, и есть искомая эпюра нормальных (внутренних) сил по длине бруса.

Сила N , приложенная в центре тяжести произвольного сечения, является равнодействующей внутренних сил σdA , действующих на бесконечно малые площадки поперечного сечения площадью A :

$$N = \int_A \sigma dA. \quad (9.1)$$

Из этого уравнения нельзя найти закон распределения нормальных напряжений по поперечному сечению. Для его нахождения используют следующие предположения:

Первое – принимается, что все сечения бруса будучи плоскими и нормальные к оси до деформации бруса, остаются такими же и после деформации (гипотеза Бернулли).

Второе – если представить брус в виде набора бесконечного множества волокон с бесконечно малыми сечениями, то при деформации бруса будем считать, волокна не надавливают друг на друга.

Из первого предположения следует, что все волокна бруса деформируются одинаково, а по закону Гука им отвечают равные напряжения. Таким образом, в каждом поперечном сечении бруса действует равное для всех напряжение.

Из второго предположения следует вывод о том, что в поперечных сечениях бруса касательные напряжения отсутствуют.

Учитывая сказанное, получим из (9.1) $N = \sigma dA$, откуда

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (9.2)$$

9.1 Пример расчета напряжений в сечениях стержня

Определим напряжения в сечении соединения с натягом цилиндрического стержня и втулки (рис. 9.4, а). Примем, что удельные (отнесенные к единице поверхности) силы трения в сопряжении τ_ϕ постоянные по длине; соединение передает от одной детали к другой осевую силу $F = \tau_\phi \pi d \lambda$, где d – диаметр стержня, λ – длина соединения.

На расстоянии X от начала координат выделим сечение стержня и рассмотрим равновесие его нижней части. Запишем уравнение равновесия $\Sigma F_x = 0$ и получим (рис. 9.4, б)

$$F - \tau_\phi \pi d (\lambda - X) - N(X) = 0,$$

откуда

$$N(X) = F - \tau_\phi \pi d (\lambda - X)$$

и нормальные напряжения в этом же сечении

$$\sigma(X) = \frac{N(X)}{A} = \frac{4[F - \tau_\phi \pi d (\lambda - X)]}{\pi d^2}.$$

Из полученного выражения видно, что в пределах сопряжения напряжения линейно зависят от координаты X . При $X = \lambda$ напряжение $\sigma(\lambda) = 4F/\pi d^2$ и при $X = 0$ $\sigma(0) = 0$, так как внешняя сила уравновешивается силой трения. Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 9.4, в.

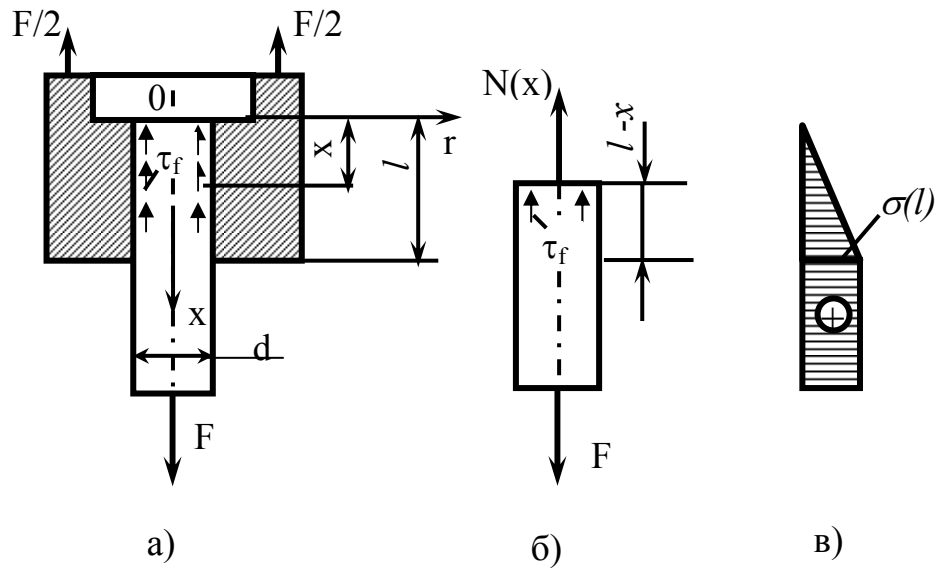


Рисунок 9.4 – Схемы распределения осевых сил и напряжений в соединении с натягом

Запишем выражение для удлинения стержня. Из условия (9.2) и закона Гука, а также определения линейной деформации удлинение стержня можно записать в виде

$$\Delta\lambda = N\lambda_e / EA = \lambda_e N, \quad (9.3)$$

где λ_e – коэффициент продольной податливости стержня; произведение EA называют жесткостью сечения стержня при растяжении (сжатии).

Для стержня переменного сечения удлинения определяют по участкам и результаты суммируют алгебраически:

$$\Delta\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \lambda_i}{EA_i}, \quad (9.4)$$

где i – номер участка.

В качестве примера рассмотрим, каково будет удлинение стержня болта в результате затяжки соединения усилием F (рис. 9.5), необходимое для контроля качества его сборки.

Возникающая в процессе затяжки продольная сила $N = F$ вызывает растяжение болта. Учитывая ступенчатую форму его стержня, можно записать

$$\Delta\lambda = \frac{F}{E} \left(\frac{4\lambda_1}{\pi d_1^2} + \frac{4\lambda_2}{\pi d_2^2} \right),$$

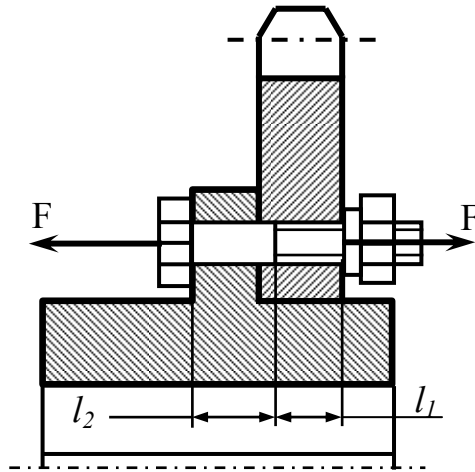


Рисунок 9.5 – Болтовые соединения деталей звездочки цепной передачи

где λ_1 и d_1 – длина и диаметр первого участка стержня болта, а λ_2 и d_2 соответственно второго участка.

При расчете упругих перемещений стержня от нескольких сил часто применяют сформулированный выше принцип независимости действия сил: перемещение стержня от действия группы сил может быть получено как сумма перемещений от действия каждой силы в отдельности.

Например, если стержень нагружен силами F_1, F_2 , а также нагрет от температуры t_0 до t_1 , то суммарное изменение длины стержня запишется в виде

$$\Delta\lambda = \frac{F_1\lambda_1}{EA_1} + \frac{F_2\lambda_2}{EA_2} + \alpha(t - t_0),$$

где α – коэффициент температурного расширения материала.

Экспериментально установлено, что модуль упругости E слабо зависит от температуры, а коэффициент α практически не зависит от напряжения σ .

9.2 Потенциальная энергия деформации

При статическом растяжении или сжатии упругого стержня происходит превращение механической энергии в потенциальную. Рассмотрим, например, стержень, верхний конец которого закреплен, а к нижнему концу последовательно подвешиваются малые грузы весом dF (рис. 9.6). При добавлении каждого последующего

груза они опускаются, и их потенциальная энергия уменьшается, а потенциальная энергия деформации стержня соответственно возрастает.

Обозначим накопленную потенциальную энергию деформации через E_p , а уменьшение потенциальной энергии внешней силы E_F . Если пренебречь малозначительными эффектами, сопровождающими упругие деформации тела, то закон сохранения энергии при упругой деформации выразится равенством $E_p = E_F$.

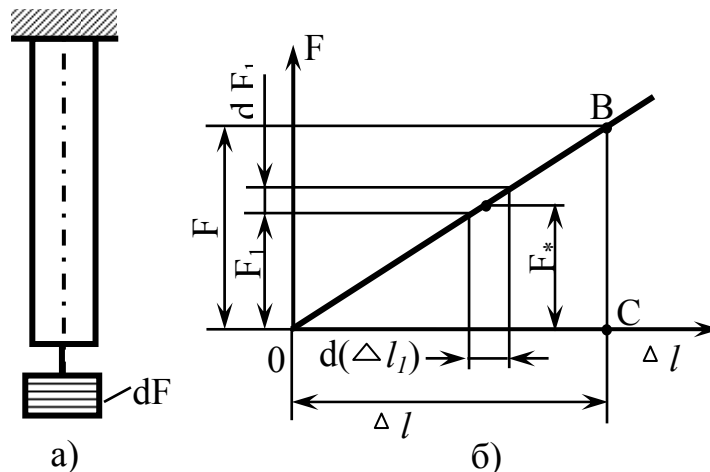


Рисунок 9.6 – Зависимость силы удлинения стержня

Мерой потенциальной энергии внешних сил (грузов), превратившейся в потенциальную энергию деформации стержня, является работа L_F , произведенная этими силами.

Очевидно, что потенциальная энергия деформации E_p численно равна работе L_F внешних сил: $E_p = L_F$.

При разгрузке тела потенциальная энергия переходит в работу. Это свойство упругих тел широко используется в инженерной практике (например, в пружинных двигателях, рессорах и др.).

На рис. 9.6, б дана графическая зависимость $F = \varphi(\Delta l)$ для растянутого стержня. Она показывает, что перемещение незакрепленного конца стержня под действием силы возрастает пропорционально этой силе. Работа, расходуемая на растяжение стержня, может быть определена интегрированием.

Допустим, что текущее значение силы F_1 увеличилось на dF_1 и стержень удлинился на $d(\Delta l_1)$. Тогда растягивающая сила, среднее значение которой равно F , совершает работу (рис. 9.6, б)

$$dL_F = F d(\Delta\lambda_1) \approx F_1 d(\Delta\lambda_1).$$

Суммарная работа внешней силы F на упругом перемещении равна площади треугольника OBC :

$$L_F = \frac{1}{2} F \Delta\lambda.$$

Учитывая, что перемещение $\Delta\lambda$, а также сила F при деформации растяжение (сжатие) выражаются через внутренний силовой фактор N , для потенциальной энергии можно получить следующее выражение

$$L_N = \frac{N^2 \lambda}{2EA}. \quad (9.5)$$

Продифференцируем равенство (9.5) по силе и, учитывая, что $L_N = E_P$, получим

$$\frac{dE_P}{dN} = \frac{N\lambda}{EA} = \Delta\lambda.$$

Это соотношение показывает, что производная от потенциальной энергии по силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы.

В этом случае можно сформулировать следующее утверждение (*теорема Кастилиано*): если на упругое тело, закрепленное на недеформируемом основании, действует несколько сил, то частная производная от потенциальной энергии тела по какой-либо внешней силе равна перемещению точки приложения этой силы в направлении силы, т.е.

$$\Delta\lambda_1 = \frac{dE_P}{dF_1}.$$

9.3 Напряженное состояние при деформации растяжения (сжатия)

Напряженное состояние в точке, как это было отмечено в предыдущих лекциях, характеризуется всем бесчисленным множеством нормальных и касательных напряжений, возникающих на площадках, которые можно провести через данную точку.

Для исследования напряженного состояния бруса при растяжении силами, действующими вдоль его оси (одноосное растяже-

ние), выберем какую-либо точку В (рис. 9.7, а) и изобразим ее в виде бесконечно малого элемента (модель точки тела) в форме прямоугольного параллелепипеда отдельно от бруса (рис. 9.7, б). Если предположить, что брус состоит из бесконечно большого числа продольных волокон с бесконечно малым сечением и считать, что все эти волокна не надавливают друг на друга, а только растягиваются (модель бруса), то можно сделать вывод, что на гранях параллелепипеда, параллельных поперечным сечениям бруса, возникают только нормальные напряжения σ , остальные грани от напряжений свободные.

Разрежем выделенный элемент по сечению (на рис. 9.7, б оно было заштриховано), нормаль O_n к которому образует с осью X угол α , и отбросим часть элемента правее сечения, заменив ее действие на оставленную часть внутренней силой P . Оставленная левая часть (рис. 9.7, в), таким образом сохраняет равновесие, т.к. сила σdA , действующая на перпендикулярную оси X площадку dA , уравнивается силой $P dA_\alpha$, действующей на наклоненную к оси X площадку $dA_\alpha = dA / \cos \alpha$, т.е.

$$\sigma dA = P dA / \cos \alpha.$$

Следовательно, возникшее на наклонной площадке полное напря-

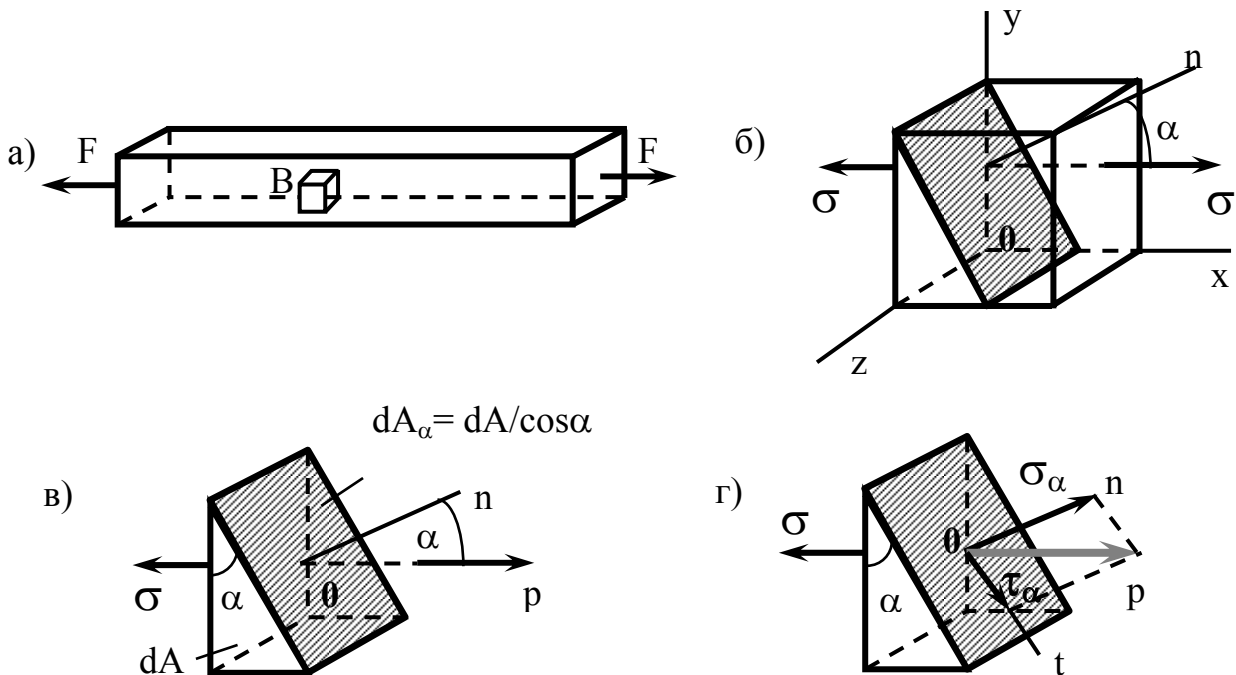


Рисунок 9.7

жение

$$P = \sigma \cos \alpha. \quad (9.6)$$

Разложив напряжение P на две составляющие по нормали O_n и касательной O_t к наклонной площадке (рис. 9.7, г), находим

$$\sigma_\alpha = P \cos \alpha, \quad \tau_\alpha = P \sin \alpha.$$

Подставив сюда вместо P его значение из (9.6), получим

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad (9.7)$$

$$\tau_\alpha = (\sigma/2) \sin 2\alpha. \quad (9.8)$$

Из формул (9.7) и (9.8) следует:

а) при $\alpha = 0^\circ$ (поперечное сечение бруса)

$$\sigma_0 = \sigma, \quad \tau_0 = 0;$$

б) при $\alpha = 90^\circ$ (продольное сечение бруса)

$$\sigma_{90} = 0, \quad \tau_{90} = 0;$$

в) при $\alpha = 45^\circ$

$$\sigma_{45} = \sigma/2, \quad \tau_{45} = \sigma/2.$$

Следовательно, при одноосном растяжении максимальное нормальное напряжение $\sigma_{\max} = \sigma = N / A$ возникает в поперечных сечениях бруса. Нетрудно убедиться, что при $\alpha = 45^\circ$ τ достигает максимального значения ($\tau_\alpha = \sigma \cos 2\alpha$ и $\tau_{\alpha=45} = 0$; кроме того, $\tau''_{\alpha=45} < 0$), равного $\sigma/2$. Из (9.8) также следует, что переход от произвольной площадки с наклоном α к площадке с наклоном $\alpha + 90^\circ$ (рис. 9.8) никак не отражается на абсолютном значении касательных напряжений.

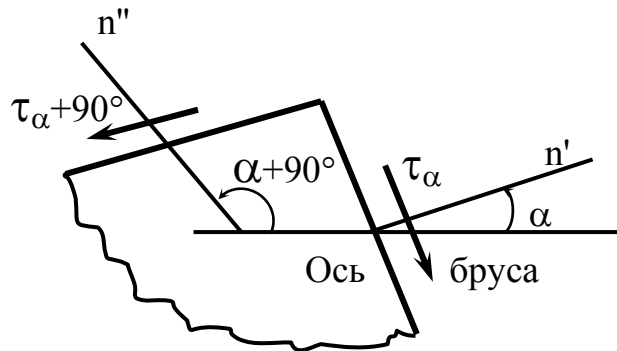


Рисунок 9.8

Действительно, если

$$|\tau_{\alpha}| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right|, \text{ то } |\tau_{\alpha+90}| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin(2\alpha + 90^{\circ}) \right| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right|.$$

Следовательно,

$$|\tau_{\alpha}| = |\tau_{\alpha+90}|.$$

Это равенство выражает **закон парности касательных напряжений**: касательные напряжения, возникающие в двух взаимно перпендикулярных площадках, равны друг другу по модулю и направлены либо от ребра, либо к ребру, образуемому площадками.

10 МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И СПОСОБЫ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

10.1 Испытание материалов при растяжении

В расчетах прочности стержней при растяжении и сжатии необходимо знать механические свойства материалов. Эти свойства выявляются при испытаниях образцов на растяжение под нагрузкой.

Испытания на растяжение во многих случаях позволяют достаточно верно судить о поведении материала и при других видах деформации: сжатии, сдвиге, кручении и сгибе. Для испытания на растяжение изготавливают образцы обычно круглого (рис. 10.1), реже прямоугольного сечений. Концевыми утолщениями образцы

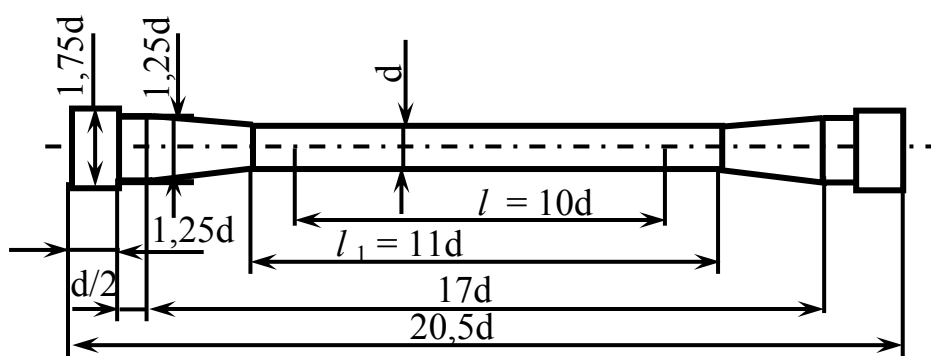


Рисунок 10.1 – Эскиз стандартного образца для испытаний материалов при растяжении

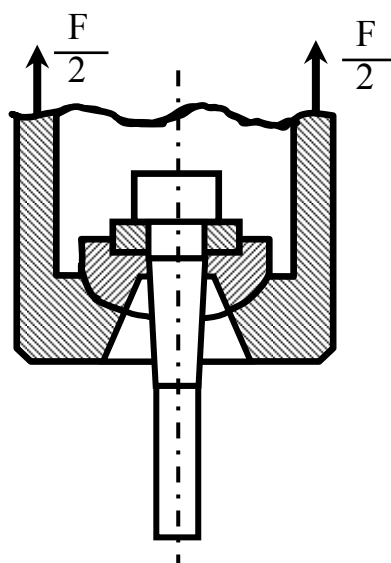


Рисунок 10.2 – Схема закрепления образца в захвате испытательной машины

вставляются в особые центрирующие сферические захваты (рис. 10.2). Длину рабочей части образца (расчетная длина) λ_p выполняют в десять раз большей его диаметра d (иногда $\lambda_p = 5d$). Измерения проводятся на расчетной длине.

Испытания проводят на универсальных испытательных машинах, снабженных силоизмерителем и аппаратом для автоматической записи диаграммы растяжения (сжатия) в координатах «сила – удлинение» (рис. 10.3, а). График зависимости между растягивающей силой F и удлинением образца Δl называют **диаграммой растяжения**. Такая диаграмма зависит от размеров образца и физических свойств материала. Для исключения этой зависимости диаграмму перестраивают в координаты $\sigma - \varepsilon$ (рис. 10.3, б) путем деления ординаты F на A_0 и абсциссы на Δl , где A_0 – площадь поперечного сечения образца, а Δl – его удлинение. В таком виде диаграмма будет характеризовать только свойства материала образца.

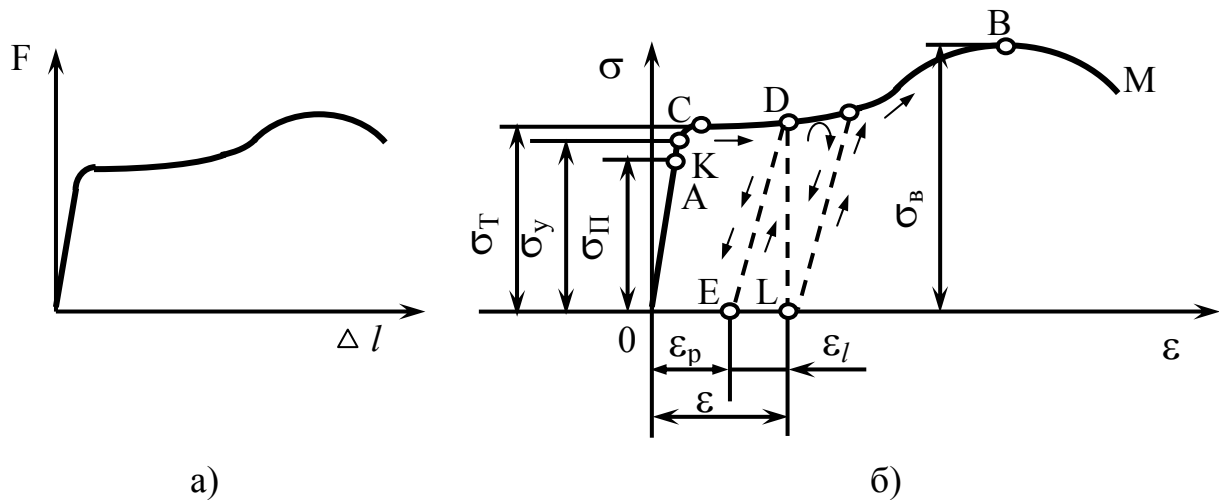


Рисунок 10.3 – Диаграммы растяжения

10.2. Характеристики прочности материала

Отметим на диаграмме (рис. 10.3, б) характерные точки и дадим качественную и количественную оценку механическим свойствам материала.

Диаграмму можно условно разделить на четыре зоны. Первая зона – зона упругости, где свойства материала на участке ОА подчиняются закону Гука и

$$F = \Delta\lambda E A_0/\lambda_0; \quad \sigma = E \varepsilon.$$

Наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука, называют **пределом пропорциональности** σ_n .

Угол наклона прямой ОА

$$\alpha = \arctg \sigma / \varepsilon = \arctg E,$$

где E – модуль упругости материала.

При проектировании элементов конструкций иногда важно знать напряжение, вызывающее в материале первые остаточные деформации. Вблизи точки А можно отметить точку К, в которой после снятия нагрузки в образце возникает остаточная деформация, равная наперед заданной величине (0,002...0,005% первоначальной длины образца). Напряжение σ_y в точке К называют **пределом упругости**. Если из точки К опустить перпендикуляр на ось $O\varepsilon$, то он разделит диаграмму на две области: левую – область упругих деформаций и правую – область упругих и пластических (упругопластических) деформаций.

Вторая зона КD называется **зоной общей пластичности**.

Для нее характерно существенное увеличение деформации образца без заметного увеличения напряжения (нагрузки). В этой зоне для некоторых материалов (например, малоуглеродистой стали) наблюдается почти горизонтальный участок – площадка текучести (отрезок CD диаграммы). Опыты показали, что образование пластических деформаций вызвано сдвигами в кристаллической решетке. Если образец разгрузить в какой-либо точке этой зоны, например, в точке D, то в процессе разгрузки, как показывают опыты, зависимость между σ и ε выразится прямой DE, параллельной прямой ОА. При этом деформация, полученная на этапе нагружения, полностью не исчезает. Она лишь уменьшается на величину упругой деформации $\varepsilon_e = \sigma_y / E$. Отрезок OL на оси абсцисс равен остаточной (пластической) деформации ε_p . Таким образом, полная деформация $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$. Повторное нагружение идет по прямой ED и далее по диаграмме (рис. 10.3, б). Таким образом, предварительное упругопластическое нагружение образца уменьшает пластичность материала.

Для количественной оценки напряженности материала и предотвращения больших остаточных деформаций в нем используют важную характеристику механических свойств материала – предел

текучести σ_T – напряжение, при котором в материале появляется заметное удлинение без увеличения нагрузки (напряжения).

Для тех материалов, у которых на диаграмме отсутствует явно выраженная площадка текучести, за предел текучести принимается условная величина напряжения, при котором остаточная деформация $\varepsilon_p = 0,02 \dots 0,2\%$ (до $0,5\%$). Чтобы отличить пределы текучести при растяжении и сжатии вводят вторую букву в индекс ($\sigma_{ТР}$, $\sigma_{ТС}$). Третья зона DB – зона упрочнения: здесь удлинение образца возрастает более интенсивно с увеличением нагрузки по сравнению с зоной упругости ОК и менее интенсивно по сравнению с зоной CD. В точке В относительное уменьшение площади сечения сравнивается с относительным возрастанием напряжения, и напряжение σ достигает максимума.

Если разгрузить образец в некоторой точке F этой зоны, то при последующем нагружении отсчет деформаций будет начинаться от точки L и материал приобретает способность воспринимать без остаточных деформаций большие нагрузки.

Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования носит название *наклепа* или *нагартовки* и широко используется в технике.

Четвертую зону BM называют *зоной местной текучести*. Здесь удлинение образца сопровождается образованием местного сужения – шейки. При этом среднее напряжение в поперечном сечении шейки возрастает. В точке М наступает разрушение образца.

Максимальное напряжение на диаграмме, которое способен выдержать образец, называют *пределом прочности* (временным сопротивлением) и обозначают σ_B (при сжатии σ_{BC}). Так как величину σ_B определяют по отношению к площади поперечного сечения недеформированного образца, то предел прочности не равен истинному напряжению разрушения и является условным показателем несущей способности материала.

10.3 Испытания на сжатие

Создание однородного одноосного напряженного состояния сжатия более сложная задача, чем создание одноосного растяжения. На результаты испытаний, прежде всего, влияет соотношение раз-

меров высоты и сечения образца. При большой высоте и сравнительно малом сечении может произойти изгиб. Применение же очень коротких образцов также нежелательно из-за концевых эффектов – из-за торцевых сил трения образец принимает бочкообразную форму. Это ведет к неоднородности напряженного состояния. Все же, несмотря на трудности, испытания на сжатие широко проводятся, так как знание механических характеристик материала при сжатии необходимо для решения многих практических задач.

Испытание материалов на одноосное сжатие проводят на специальных прессах или универсальных испытательных машинах. Образцы изготавливают в виде цилиндров небольшой высоты (обычно около трех диаметров).

При сжатии образца из хрупкого материала его разрушение происходит с образованием трещин, направленных под углом 45° к оси образца, т.е. совпадающих с плоскостями возникновения максимальных касательных напряжений (рис. 10.4). Возникшие трещины распространяются практически мгновенно, процесс может носить почти взрывной характер. Когда трещина пройдет по диагонали поперек всего образца, две его части начинают скользить относительно друг друга. Образец уже не может больше сопротивляться сжимающей силе, материал разрушается, выделяя большое количество упругой энергии. Диаграмма сжатия хрупкого материала (рис. 10.5) похожа на диаграмму растяжения, однако временное сопротивление (предел прочности) при сжатии оказывается значительно выше, чем при растяжении, т.е. хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению (σ_{BC} в 2,5...4,5 раза больше $\sigma_{\text{ВР}}$).

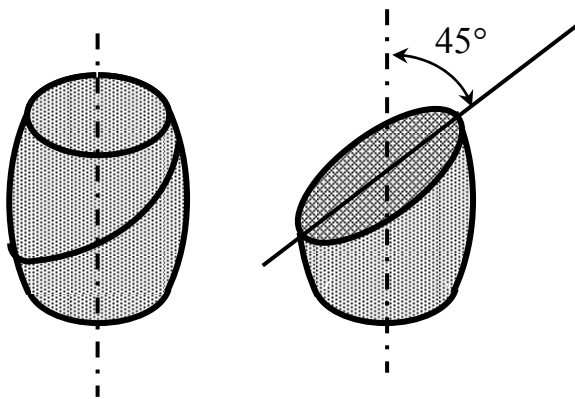


Рисунок 10.4

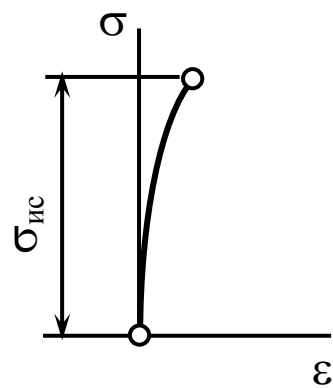


Рисунок 10.5

Пластичный материал ведет себя иначе. Вначале диаграмма сжатия совпадает с его диаграммой растяжения, но после точки В (см. также рис. 10.3) сжимающая сила не уменьшается, как при растяжении, а резко возрастает (рис. 10.6, а). Происходит это оттого, что площадь поперечного сечения сжатого образца принимает бочкообразную форму (рис. 10.6, б). Довести до разрушения сжатием образец из пластичного материала не удастся. Поэтому временное сопротивление (предел прочности) для пластичных материалов при сжатии определить невозможно. Значения же модулей упругости, пределов пропорциональности и текучести для большинства пластичных материалов можно считать совпадающими при растяжении и сжатии.

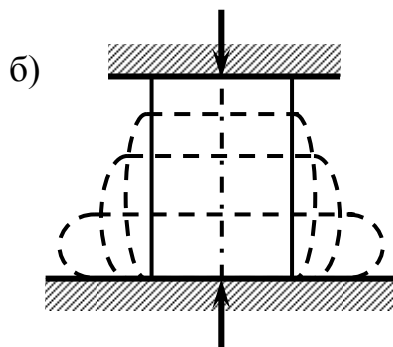
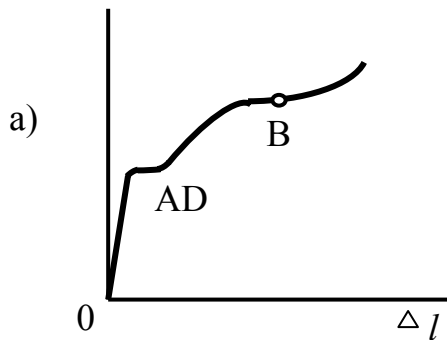


Рисунок 10.6

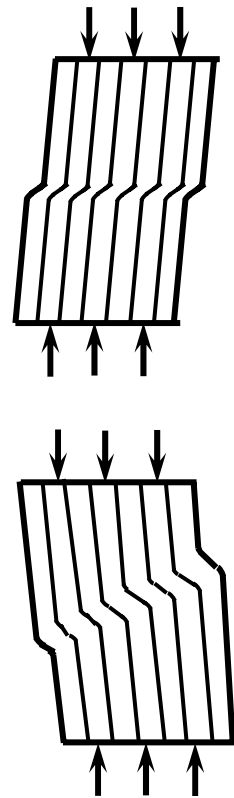


Рисунок 10.7

Примерами материалов, для которых пределы упругости при растяжении и сжатии не равны ($\sigma_{yc} \neq \sigma_{yp}$), служат некоторые легированные стали, подвергнутые закалке. Так, для стали 30ХГС $\sigma_{yp} = 0,88\sigma_{yc}$. Такие материалы иногда называют **хрупкопластичными**.

Материалы типа дерева или искусственных волокнистых материалов, например стеклопластика, при сжатии обычно теряют работоспособность иначе. Под действием сжимающих нагрузок волокна образца изгибаются все вместе, образуя складку, бегущую поперек образца. Эти складки могут проходить под углом 90° к направлению сжимающей силы (дерево) или наклонно под различными углами (рис. 10.7). В этих материалах складки часто образуются уже при сравнительно небольших напряжениях, т.е. на сжатие эти материалы работают плохо, что следует иметь в виду при использовании их в конструкциях.

10.4 Твердость материала

Твердость материала характеризует его способность оказывать сопротивление проникновению в материал другого тела или, другими словами, сопротивляться значительной пластической деформации при контактном напряжении на поверхности тела. Твердость связана определенным образом с прочностью и износостойкостью материалов. Для определения твердости проводятся испытания материалов методом вдавливания. Характеристиками твердости материалов являются: твердость по Бринеллю HB; по Роквеллу HRA, HRB и ряд других.

По методу Бринелля (рис. 10.8, а) в испытываемый материал под определенной нагрузкой F вдавливается стальной шарик (индентор) диаметром $D=2,5 \dots 10$ мм.

По диаметру отпечатка d судят о твердости материала. Число твердости по Бринеллю (HB) определяется как отношение отпечатка:

$$HB = F / A = 2F / [\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})].$$

Практически твердость определяется по заранее составленным таблицам. Измеряя диаметр отпечатка, по таблице для данного прибора определяют HB.

По методу Роквелла (рис. 10.8, б) в испытываемый материал вдавливается алмазный конус с углом вершины $\alpha = 120^\circ$ или стальной шарик диаметром $D = 1,6$ мм под определенной нагрузкой. Твердость в этом случае пропорциональна глубине вдавливания: чем тверже материал, тем на меньшую глубину проникает алмаз и тем больше будет твердость. В приборе Роквелла на индентор дей-

ствуют две последовательно прилагаемые нагрузки – предварительная $F_0 = 100\text{Н}$ и основная $F = 600, 1000$ или 1500Н . Предварительная нагрузка служит для обеспечения плотного соприкосновения между индентором и образцом.

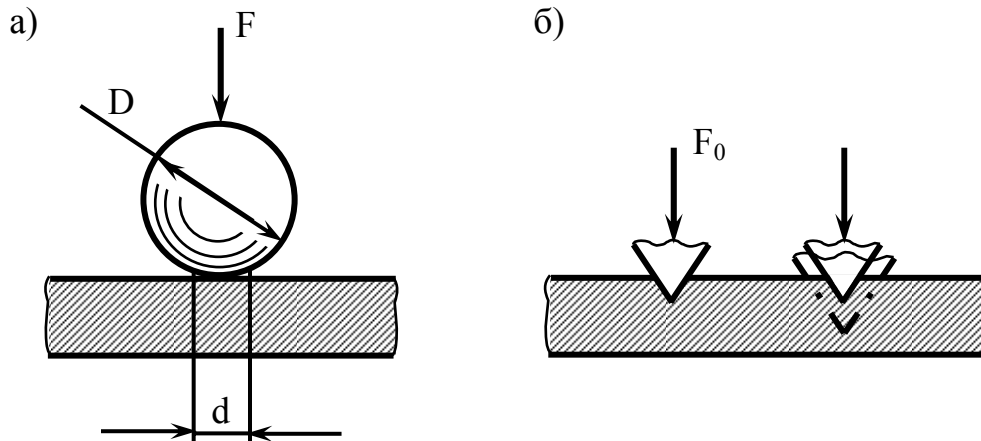


Рисунок 10.8

Алмазный конус применяется для испытания твердых материалов (закаленных сталей), а стальной шарик для более мягких материалов. Кроме рассмотренных методов определения твердости, применяются также и другие: метод Виккерса, метод Шора и т.д.

10.5 Пластичность

Характеристиками пластичности материала являются относительное удлинение и относительное сужение образцов при статических испытаниях на прочность. Относительное удлинение при разрыве δ рассчитывается как отношение приращения длины образца при разрыве к его исходной расчетной длине:

$$\delta = \frac{\lambda_k - \lambda_0}{\lambda_0} 100\%.$$

Относительное сужение определяется как отношение уменьшения площади A_k поперечного сечения образца в области шейки (место разрыва) к его первоначальной площади A_0 :

$$\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} 100\%.$$

Величины δ и ψ характеризуют способность материала пластически деформироваться. Это важное свойство в технологииковки, штамповки, прокатки и т.д.

10.6 Определение динамических характеристик

Свойства материалов противостоять ударным нагрузкам характеризуются их ударной вязкостью, которая определяется с помощью испытания образцов сечением 10x10мм с вырезом в средней части радиусом 1 мм и глубиной 2 мм (рис. 10.9). Ударная вязкость определяется отношением работы, расходуемой на ударный излом образца, к площади поперечного сечения образца (в месте надреза):

$$a_H = W_H / A_0.$$

Испытания по определению ударной вязкости производятся на маятниковом копре. Работа излома W_H определяется по разности высот центра тяжести маятника в его положениях до и после удара.

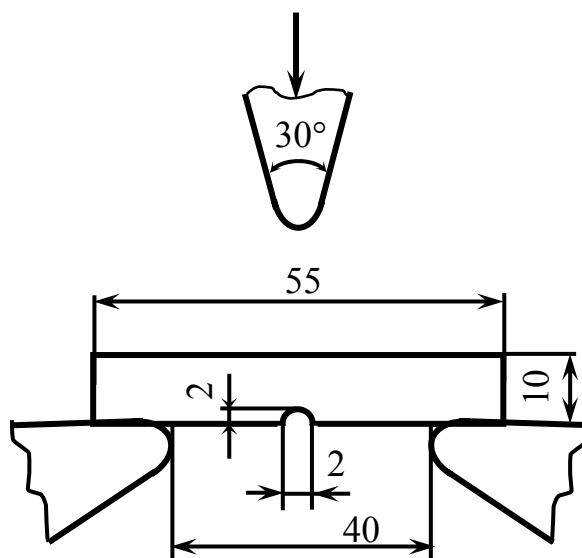


Рисунок 10.9

10.7 Сопротивление усталости

Нагрузки на детали могут быть как постоянными по значению, так и переменными. Такие нагрузки вызывают в материале деталей изменяющиеся напряжения. Среди различных типов переменных нагрузок особое место занимают периодически изменяющиеся, или

циклические, нагрузки. Прочность материалов в условиях таких нагрузок характеризуют пределом выносливости. Это максимальное значение амплитуды циклически изменяющегося напряжения, при котором не происходит усталостного разрушения. Схема испытаний для определения предела выносливости показана на (рис. 10.10, а). Цилиндрический образец 2 закреплен во вращающемся патроне 1. На противоположный конец образца напрессован шарикоподшипник, к наружному кольцу 3 которого подвешен груз весом F . Изменяя вес груза F , в сечении образца вызывают различные по значению напряжения σ . При этом, если верхние волокна образца испытывают растяжение, а нижние – сжатие, то через пол-оборота картина меняется. Следовательно, за каждый оборот образца осуществляется один цикл нагружения. Испытания проводят на нескольких образцах, подсчитывая каждый раз число циклов N нагружения образца до его разрушения.

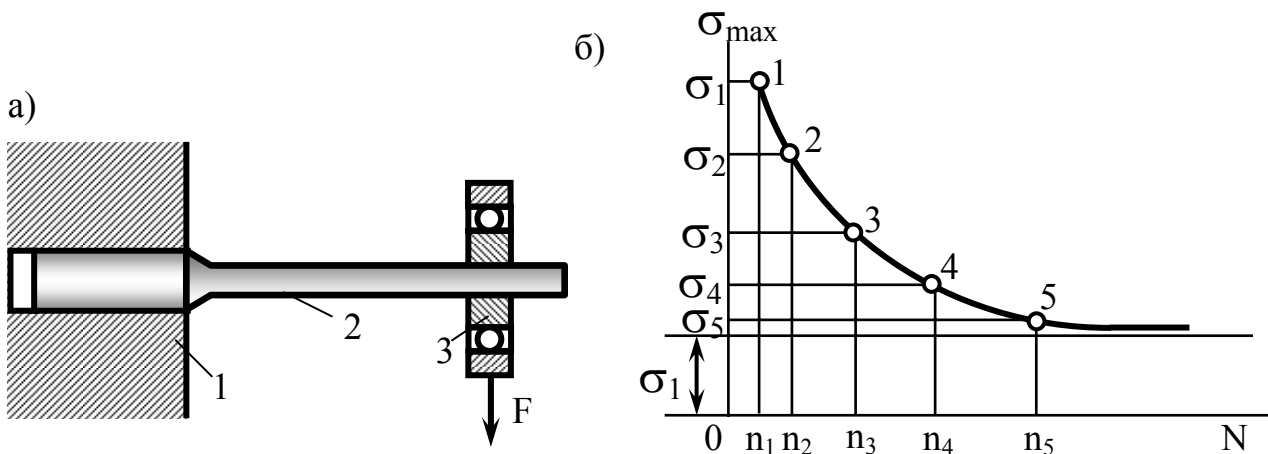


Рисунок 10.10

Результаты опытов представляют в виде кривой, показывающей зависимость разрушающего числа цикла нагружения от максимального напряжения $\sigma_{\max}$ за цикл (рис. 10.10, б).

Эта кривая для металлов, начиная с некоторого напряжения σ_1 , идет параллельно оси абсцисс. Следовательно, при этом напряжении материал не разрушается при любом числе циклов. Напряжение σ_1 называется *пределом выносливости при симметричном цикле*.

Кроме рассмотренных основных механических характеристик материалов в ряде случаев имеют значение и такие характеристики, как ползучесть и износостойкость.

Ползучесть – медленное непрерывное во времени увеличение пластической деформации объекта нагружения под воздействием постоянной нагрузки или напряжения. Явление ползучести материалов изучают на основе экспериментов. Пределом ползучести принято называть напряжение, при котором пластическая деформация за заданный промежуток времени достигает заданного значения. С увеличением температуры предел ползучести уменьшается.

Износостойкость – способность поверхностных слоев материала при контактировании в местах сопряжений деталей противостоять истиранию или разрушению. Считают, что основным фактором, приводящим к разрушению материала при изнашивании, является поверхностная усталость материала.

Износостойкость трущихся деталей оценивают линейным или массовым износом. Линейный износ выражается формулой

$$I_h = h / L,$$

где h – толщина изношенного слоя; L – путь трения.

Величина I_h называется **интенсивностью изнашивания**. Износ деталей влияет на надежность и долговечность механизмов, так как уменьшает прочность деталей, увеличивает зазоры в кинематических парах, уменьшает точность механизмов и увеличивает вибрации и динамические нагрузки.

11 СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Механическая система, для которой реакции связей и внутренние силовые факторы не могут быть определены с помощью уравнений равновесия и метода сечений, называется статически неопределимой. Статически неопределимые системы отличаются от статически определимых большим числом наложенных связей.

На рис 11.1 показаны статически определимые системы, нормальная сила N в которых определяется с помощью одного уравнения проекций на ось X (рис. 11.1, а), двух уравнений проекций на оси X и Y (рис. 11.1, б), одного уравнения моментов относительно неподвижного шарнира (рис. 11.1, в). На рис. 11.2 показаны статически неопределимые системы. Нормальная сила N в поперечном сечении бруса, жестко заделанного с обоих концов (рис. 11.2, а), не может быть определена из уравнения проекций на ось X , т.к. в него входят две неизвестные величины – нормальная сила N и реакция R . Системы с числом неизвестных сил, на единицу превышающих число уравнений статики, которые можно составить для этой системы, называются один раз статически неопределимыми. Чтобы решить задачу, необходимо составить дополнительное уравнение перемещений из условия, что общая длина бруса остается неизменной.

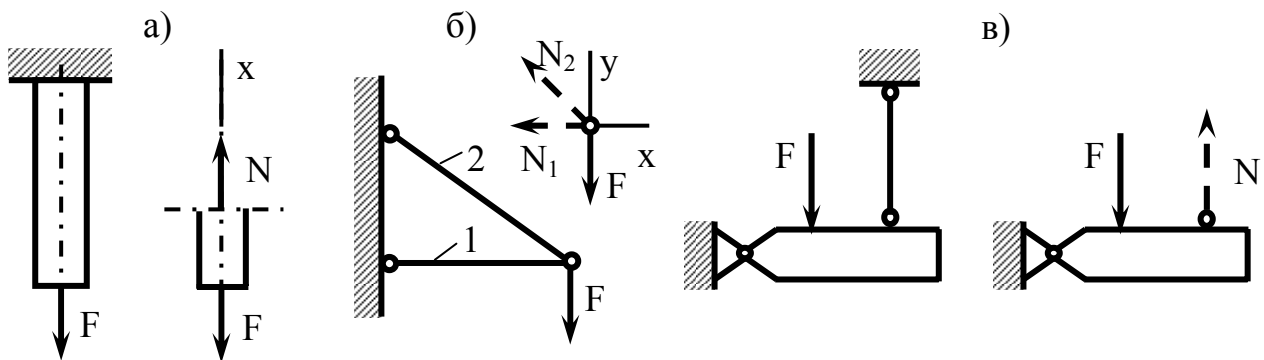


Рисунок 11.1

Система на рис. 11.2, б также один раз статически неопределима, т.к. в два уравнения проекций сил, которые можно составить в данном случае, входят три неизвестные величины N_1 , N_2 и N_3 .

Система на рис. 11.2 в два раза статически неопределима – в те же два уравнения статики входят четыре неизвестные. Для решения

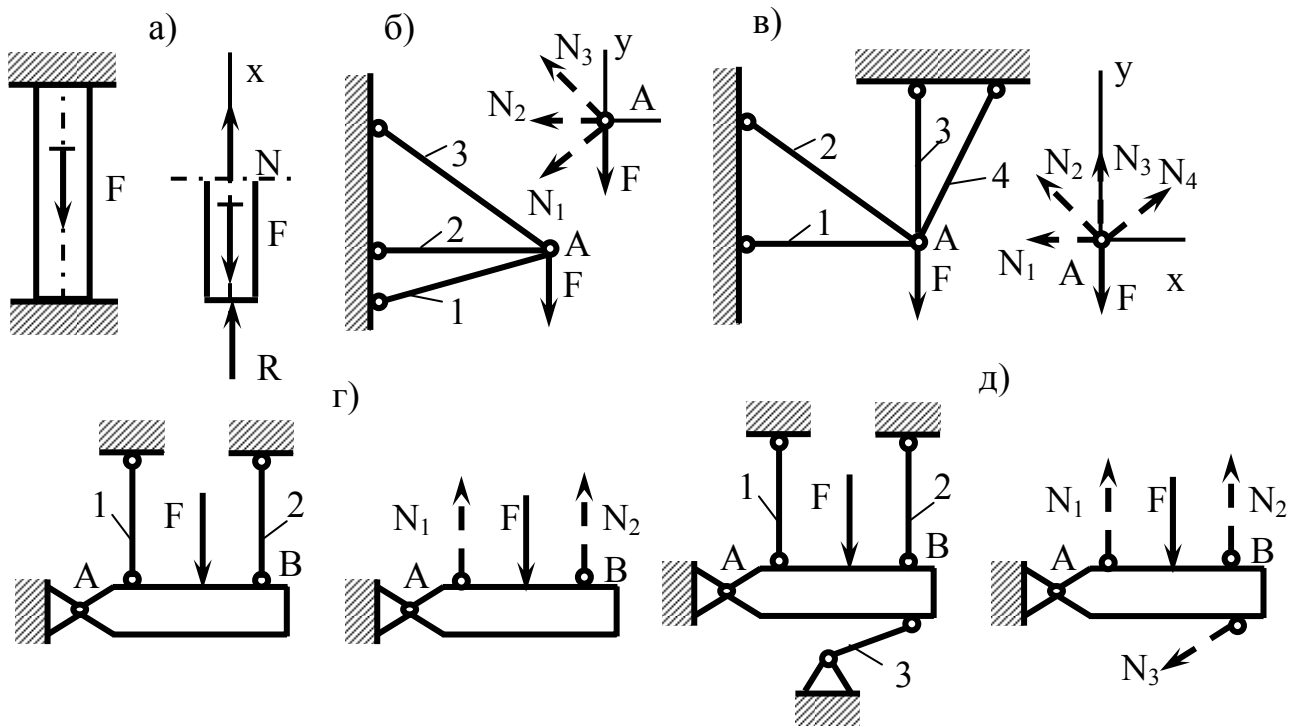


Рисунок 11.2

этих задач в первом случае нужно составить одно дополнительное уравнение перемещений, а во втором – два, исходя из условия, что при изменении длины стержней узел А остается для них общим.

Система на рис. 11.2, г один раз статически неопределима и к уравнению моментов сил относительно точки А, содержащему две неизвестные силы (N_1 и N_2), нужно дополнительно составить одно уравнение перемещений. На рис. 11.2, д изображена два раза статически неопределимая система и дополнительных уравнений перемещений необходимо составить два. В подобных случаях уравнения перемещений составляют из условия, что места закрепления стержней на жесткой балке АВ остаются на одной прямой.

В качестве примера рассмотрим брус постоянного сечения площадью А, жестко закрепленного с обеих концов и нагруженного силой F (рис. 11.3, а). Определим напряжения, возникающие в поперечных сечениях верхней и нижней частей бруса. Для этого отбросим связи и заменим их реакциями R_1 и R_2 (рис. 11.3, б). Для образовавшейся системы сил составим уравнение статики

$$R_1 + R_2 = F, \quad (11.1)$$

в которое входят две неизвестные силы. Система один раз статически неопределима.

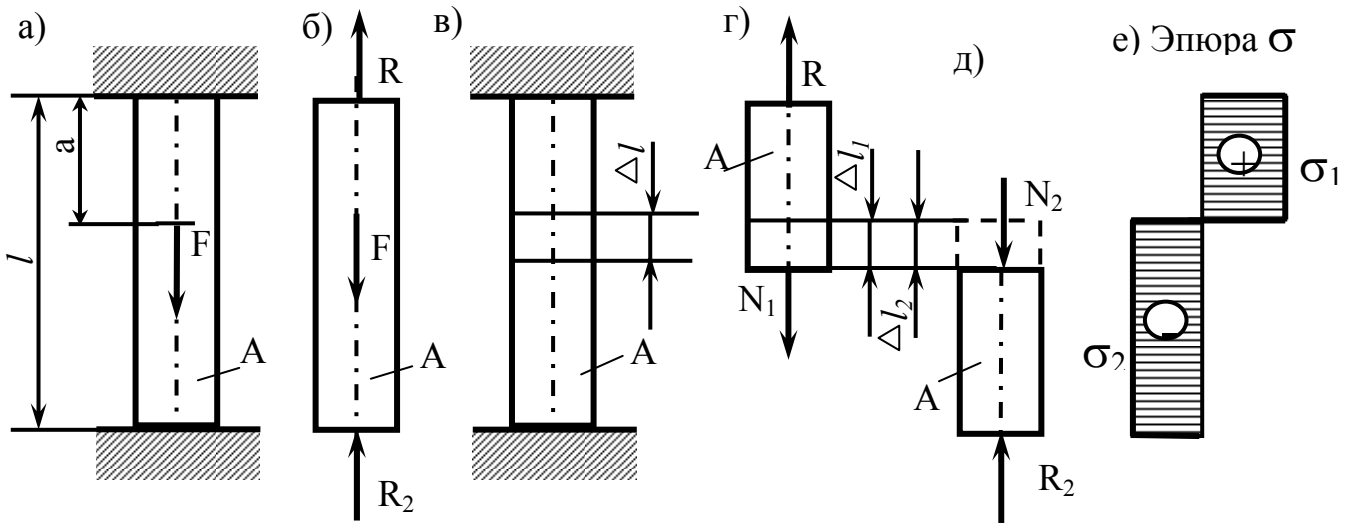


Рисунок 11.3

Для определения неизвестных реакций составим дополнительное уравнение – уравнение перемещений. Учитываем следующее обстоятельство. Под действием силы F верхняя часть бруса растянулась на $\Delta\lambda$, а нижняя часть укоротилась на $\Delta\lambda_2$ (рис. 11.3, в, г, д). Так как общая длина бруса осталась неизменной, то

$$|\Delta\lambda_1| = |\Delta\lambda_2|.$$

Это и есть уравнение перемещений.

Из рис. 11.3, г, д следует, что

$$|\Delta\lambda_1| = \frac{N_1 a}{AE} = \frac{R_1 a}{AE} \quad \text{и} \quad |\Delta\lambda_2| = \left| \frac{N_2 (\lambda - a)}{AE} \right| = \left| \frac{R_2 (\lambda - a)}{AE} \right|.$$

Приравнявая правые части этих уравнений, получим

$$R_1 a = R_2 (\lambda - a).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением статик (11.1), находим

$$R_1 = F(\lambda - a) / \lambda \quad \text{и} \quad R_2 = Fa / \lambda.$$

Напряжения в поперечных сечениях бруса:

в верхней части $\sigma_1 = N_1 / A = F(\lambda - a) / A\lambda$,

в нижней части $\sigma_2 = N_2 / A = -Fa / A\lambda$ (напряжение сжатия).

Эпюра напряжений по длине бруса показана на рис. 11.3, е.

Рассмотрим следующий пример.

Жесткий брус удерживается в равновесии двумя стальными стержнями крупного поперечного сечения одного и того же диаметра (рис. 11.4, а). Найдем усилия N_1 и N_2 в стержнях 1 и 2.

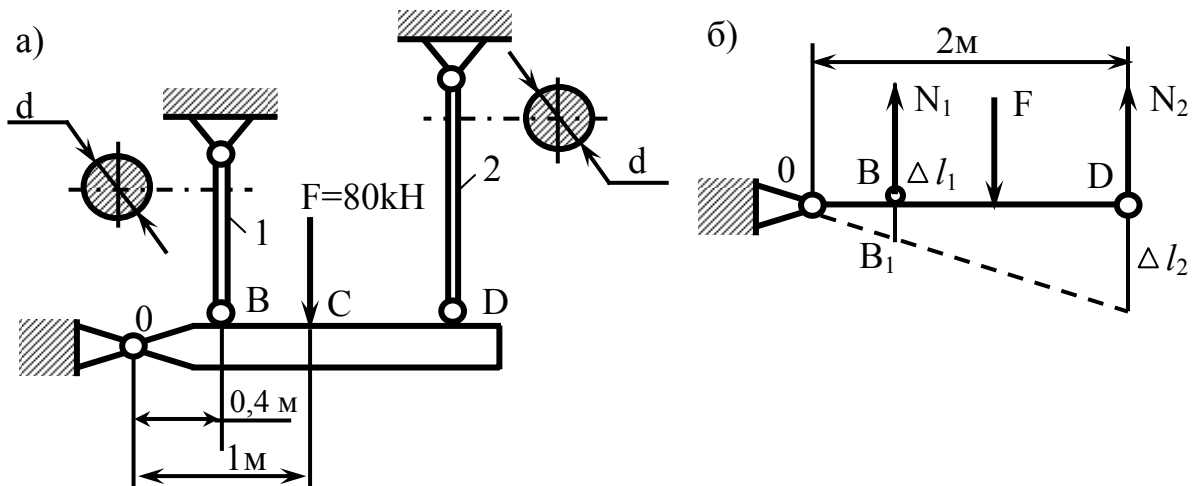


Рисунок 11.4

Рассекая стержни и заменяя действие их отброшенных частей на жесткий брус нормальными силами N_1 и N_2 , получаем расчетную схему (рис. 11.4, б), для которой запишем уравнение статики – уравнение моментов сил относительно точки А:

$$N_1 OB - F OC + N_2 OD = 0.$$

После подстановки числовых значений всех известных величин это уравнение примет вид

$$N_1 + 5N_2 = 200. \quad (11.2)$$

Составим дополнительное уравнение – уравнение перемещений, учитывая, что под действием силы F стержни 1 и 2 удлиняются соответственно на $\Delta\lambda_1 = N_1 \lambda_1 / AE$ и $\Delta\lambda_2 = N_2 \lambda_2 / AE$ (рис. 11.4, б). Из подобия треугольников OBV и ODD получим уравнение перемещений

$$\Delta\lambda_1 / \Delta\lambda_2 = OB / OD.$$

Решив совместно уравнение статики (11.2) и полученное уравнение перемещений, найдем

$$N_1 = 11 \text{ кН}, \quad N_2 = 37,7 \text{ кН}.$$

Рассмотрим еще один пример. Груз силой тяжести F подвешен на трех стержнях, шарнирно соединенных с корпусом в узлах А, D и С, а между собой в узле В (рис. 11.5, а). Каждый шарнир допускает вращательное движение стержня. Требуется определить усилия в

стержнях и смещение узла В под грузом. Жесткости сечений стержней одинаковы и равны EA . Вырежем общий узел В и рассмотрим равновесие отсеченной части, обозначив усилия в стержнях через N_1 , N_2 и N_3 . Записывая уравнения равновесия ($\Sigma Y = 0$ и $\Sigma X = 0$) для схемы на рис. 11.5, б, найдем

$$N_1 = N_3; \quad 2N_1 \cos \alpha + N_2 - F = 0. \quad (11.3)$$

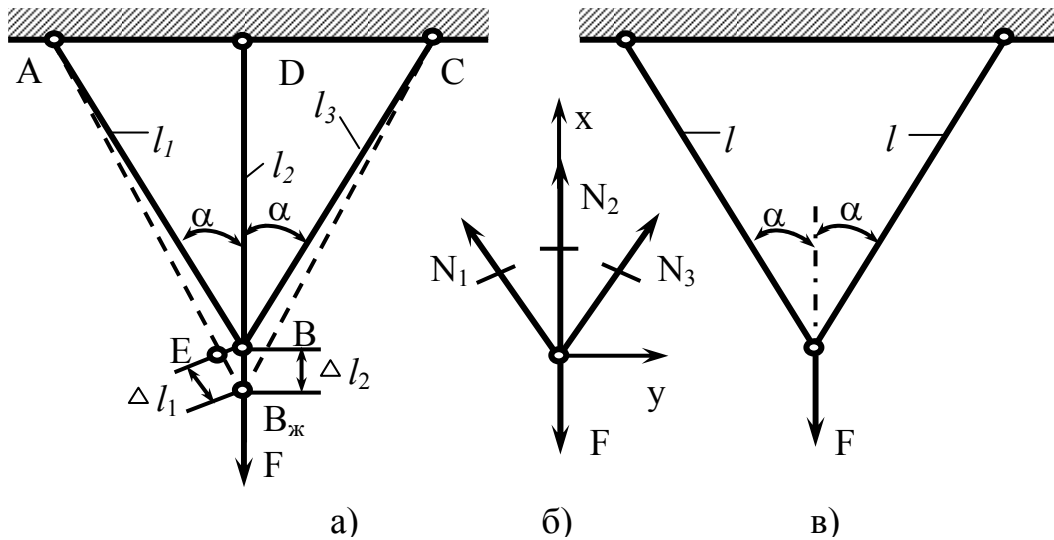


Рисунок 11.5

Из последнего уравнения видно, что задача статически неопределима. Составим дополнительное уравнение – уравнение перемещений. Перемещение узла В определим из рассмотрения схемы деформации стержней. Допустим, что в силу симметрии конструкции точка В после деформации заняла новое место В*. Новое положение стержней в этом случае показано штриховыми линиями.

Удлинение стержня, например первого, можно определить, опустив перпендикуляр из точки В на его новое положение. Так как в действительности деформации малы, то можно принять длину $AE = AB$, а угол $AB * D = \alpha$. Тогда, обозначив удлинение второго стержня через $\Delta \lambda_2$, найдем, что удлинение первого будет равно

$$\Delta \lambda_1 = \Delta \lambda_2 \cos \alpha. \quad (11.4)$$

Уравнение (11.4) выражает условие совместности деформаций стержней (уравнение перемещений). Выражая $\Delta \lambda_1$ и $\Delta \lambda_2$ через значения усилий N_1 и N_2 , а также, что $\lambda_2 = \lambda_1 \cos \alpha$, из уравнения (11.4)

находим

$$N_1 = N_2 \cos \alpha.$$

Подставляя полученную зависимость в уравнения (11.3), получим

$$N_2 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha},$$

откуда

$$N_1 = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

Опускание узла В под грузом

$$\delta_B = \Delta \lambda_2 = \frac{N_2 \lambda_2}{EA} = \frac{F \lambda_2}{EA} \frac{1}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

Можно показать, что для двухстержневой подвески (рис. 11.5, в) вертикальное смещение угла В

$$\delta_B = \frac{F \lambda}{EA} \frac{1}{2 \cos^2 \alpha}.$$

11.1 Начальные (монтажные) напряжения в статически неопределимых системах

Свободная сборка статически неопределимых систем возможна лишь при весьма точном изготовлении этих элементов. В противном случае сборку вынуждены осуществлять с приложением усилий, вызывающих деформацию элементов. В результате после монтажа еще до приложения нагрузок в элементах конструкции возникают напряжения, называемые начальными или монтажными.

Рассмотрим методику определения начальных напряжений на конкретном примере. Пусть в системе (рис. 11.6, а) стержень 1 изготовлен короче номинала на величину Δ . Чтобы собрать шарнир D, надо совместить точки D₁ и D₂. Очевидно, это удастся сделать, если выполнено следующее условие:

$$\Delta \lambda_1 + \frac{|\Delta \lambda_2|}{\cos \alpha} = \Delta, \quad (11.5)$$

т.е. если сумма перемещений по вертикали точек D₁ и D₂ равна погрешности изготовления стержня Δ .

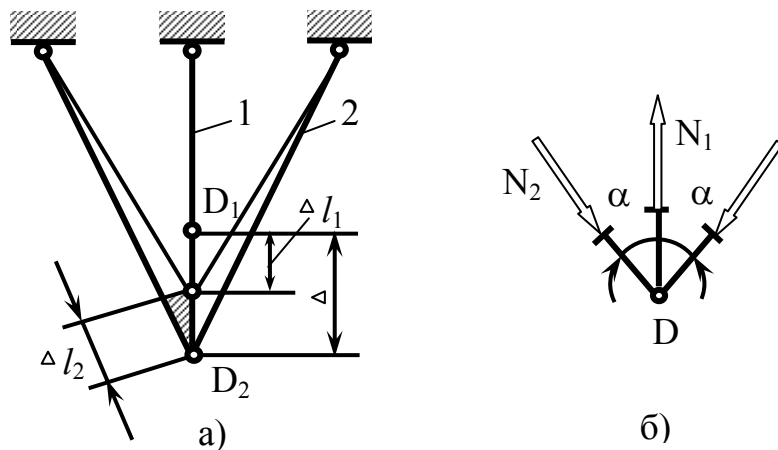


Рисунок 11.6

После сборки в стержнях возникнут нормальные силы (рис. 11.6, б). Применяя метод сечений и рассматривая равновесие шарнира D, найдем, что

$$N_1 - 2N_2 \cos \alpha = 0. \quad (11.6)$$

Подставляя значения удлинений в (11.5), получим

$$\frac{N_1 \lambda_1}{E_1 A_1} + \frac{N_2 \lambda_2}{E_2 A_2 \cos \alpha} = \Delta. \quad (11.7)$$

После совместного решения (11.6) и (11.7) находим

$$N_1 = \frac{2\Delta B_1 B_2 \cos^2 \alpha}{B_1 + 2B_2 \cos^2 \alpha};$$

$$N_2 = \frac{\Delta B_1 B_2 \cos \alpha}{B_1 + 2B_2 \cos^2 \alpha};$$

Здесь
$$B_1 = \frac{E_1 A_1}{\lambda_1} \text{ и } B_2 = \frac{E_2 A_2}{\lambda_2}.$$

Зная размеры поперечных сечений стержней легко определить напряжения, возникающие в рассматриваемых стержнях в результате монтажа.

Пусть в рассмотренном примере стержни изготовлены из стали ($E = 210$ ГПа); площади поперечных сечений $A_1 = 300$ мм², $A_2 = 200$ мм²; проектная длина стержня $\lambda_1 = 2$ м; углы наклона крайних стержней $\alpha = 30^\circ$. При монтаже оказалось, что средний стержень короче, чем это необходимо для свободной сборки, на $\Delta = 1,5$ мм.

После подсчета нормальных сил, возникающих в стержнях, имеем $N_1 = 21,9$ кН, $N_2 = 12,7$ кН и соответственно напряжения

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 73 \text{ МПа}; \sigma_2 = 63,5 \text{ МПа}.$$

Таким образом, сравнительно небольшая погрешность, допущенная в длине стержня при изготовлении, вызывает большие начальные (монтажные) напряжения.

11.2 Метод сил

Наиболее часто применяемым общим методом раскрытия статической неопределимости является метод сил. Сущность этого метода в следующем: заданная статически неопределимая система превращается в определимую путем освобождения ее от «лишних» связей, а их действие заменяется силами или моментами. Значения их в дальнейшем подбираются так, чтобы перемещения соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему отброшенными связями. Таким образом, неизвестными здесь оказываются силы. Отсюда и название – метод сил.

Рассмотрим этот метод в общем виде на примере балки (рис. 11.7, а), защемленной в сечении А и свободно опертой концом В. Как нетрудно видеть, такая балка один раз статически неопределима.

Чтобы превратить ее в статически определимую, нужно устранить одну связь. Статически определимую балку (систему), полученную из заданной статически неопределимой балки (системы) путем отбрасывания лишней связи и снятия всей нагрузки, называют основной системой (рис. 11.7, б).

Для одной и той же статически неопределимой балки основная система может быть выбрана несколькими способами. Например, в рассматриваемом случае можно было сохранить подвижную опору, а удалить связь, препятствующую повороту левого сечения, т.е. заменить заделку на шарнирно-неподвижную опору.

Основная система, нагруженная заданными силами и искомыми реакциями отброшенных связей, должна быть эквивалентна заданной системе. В рассматриваемом случае эквивалентная система изображена на рис. 11.7, в. Лишние неизвестные обозначают x_i , где

индекс – порядковый номер неизвестных реакций. Так, в системах несколько раз статически неопределимых, будет ряд неизвестных X_1, X_2 и т.д.

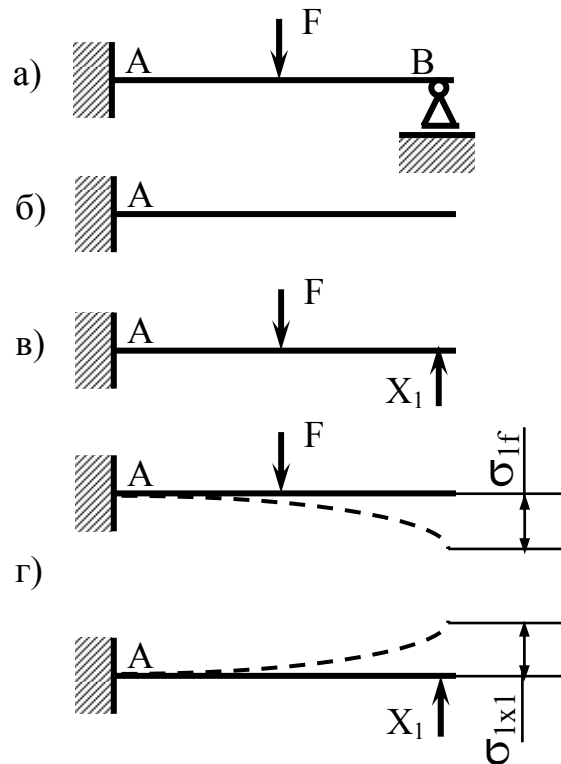


Рисунок 11.7

Эквивалентность, в частности тождественность деформаций заданной системы и основной, нагруженной силами F_i и x_i , позволяет утверждать, что в основной системе перемещение в месте отброшенной связи по ее направлению равно нулю. Обозначим перемещение сечения в месте приложения силы X_1 , вызванное заданной нагрузкой, через δ_{1f} , а перемещение в этом же сечении и в этом же направлении, вызванное неизвестной силой X_1 , через δ_{1X_1} (рис. 11.7, г). При расчете удобно перемещение δ_{1X_1} заменить произведением $\delta_{11}X_1$, где δ_{11} – перемещение сечения, где приложена сила X_1 в ее направлении от единичной силы.

В соответствии с принципом суперпозиции перемещения, обусловленные одновременным (совместным) действием заданной нагрузки и лишней неизвестной, должны быть равны сумме этих пе-

ремещений, вычисленных по отдельности и взятых со своими знаками. В общем виде это уравнение запишется так

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1\varphi} = 0. \quad (11.8)$$

Решая это уравнение относительно X_1 , определяем искомую реакцию. Если при решении уравнения X_1 получается со знаком плюс, то это указывает, что выбранное направление X_1 совпадает с действительным.

Уравнение (11.8), которое выражает условие совместности перемещений, в силу стандартной формы записи принято называть каноническим.

Метод сил можно распространить на случай любого числа лишних неизвестных. Однако число уравнений равно степени статической неопределимости. Так, если система два раза статически неопределима, канонические уравнения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1\varphi} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2\varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

Здесь $\delta_{12} = \delta_{21}$.

Примеры использования этого метода будут приведены ниже при рассмотрении деформаций кручения и изгиба.

12 ДЕФОРМАЦИЯ СДВИГА И КРУЧЕНИЯ

Под **сдвигом** понимают такой вид деформации, когда в поперечных сечениях бруса действует только перерезывающая сила, а остальные силовые факторы отсутствуют.

Такое нагружение соответствует действию на брус двух равных противоположно направленных и бесконечно близко расположенных поперечных сил (рис. 12.1, а, б), вызывающих срез по плос-

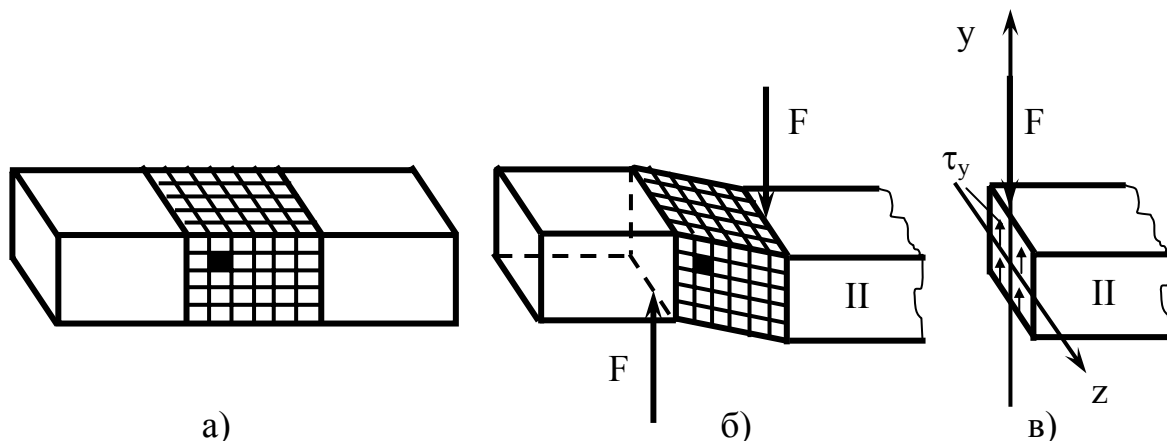


Рисунок 12.1 – Схема деформации и внутренние силы при сдвиге стержня

кости, расположенной между силами. Срезу предшествует деформация – искажение прямого угла между двумя взаимно перпендикулярными линиями (см. сетку линий на поверхности бруса, рис. 12.1, а, б). При этом на гранях выделенного элемента (зачернен на рис. 12.1, а, б) возникают касательные напряжения τ (рис. 12.2). Напряженное состояние, при котором на гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения τ_1 , называется **чистым сдвигом**. Величина a называется **абсолютным сдвигом**, угол γ , на

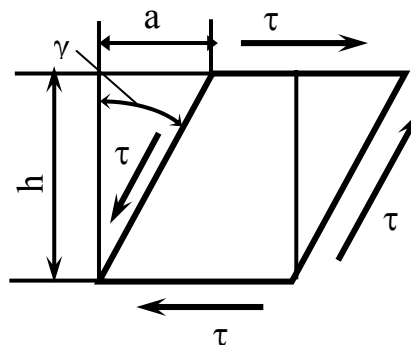


Рисунок 12.2 – Напряжения и деформации элемента при сдвиге

который изменяются прямые углы элемента, называется **относительным сдвигом**,

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = a / h. \quad (12.1)$$

Рассмотрим равновесие мысленно отсеченной правой части бруса (рис. 12.1, в). Действие отброшенной левой части на правую заменим внутренними силами.

Записывая уравнения равновесия, найдем, что в сечении действует лишь поперечная сила $Q_y = F$.

Эта сила является равнодействующей касательных напряжений

$$Q_y = \int \tau_y dA.$$

Принимая, что касательные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению площадью A , будем иметь

$$\tau_y = Q_y / A = F / A. \quad (12.2)$$

Экспериментально установлено, что в пределах упругих деформаций величина сдвига a пропорциональна сдвигающей силе F , расстоянию h , на котором происходит сдвиг, и обратно пропорциональна площади сечения A . Если ввести коэффициент пропорциональности G , зависящий от свойств материала, закон упругости для сдвига выразится формулой

$$a = \frac{Fh}{GA},$$

где GA – жесткость сечения при сдвиге.

Учитывая равенства (12.1) и (12.2) из последней зависимости найдем

$$\tau = G \gamma. \quad (12.3)$$

Величина G называется модулем упругости при сдвиге (модуль сдвига). Значение G и модуль упругости E связаны соотношением

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

где μ – коэффициент Пуассона.

12.1 Деформация кручения

Под **кручением** понимается такой вид деформации, когда в поперечных сечениях бруса действует только крутящий момент, а остальные силовые факторы (нормальная и поперечная силы и изгибающие моменты) отсутствуют.

Для определения напряжений и деформаций вала необходимо знать значения крутящих моментов по длине бруса. Диаграмму, показывающую распределение значений крутящих моментов по длине бруса, называют эпюрой крутящих моментов. Для построения таких эпюр необходимо учитывать знак крутящего момента. Принято, что если наблюдатель смотрит на поперечное сечение со стороны внешней нормали и видит момент, направленный против часовой стрелки, то момент считается положительным. Для определения крутящего момента в сечении используют метод сечений. Рассмотрим пример на рис. 12.3, а. Здесь вращающий момент подводится к валу от шкива 0 ременной передачи и снимается с вала через передающие шкивы 1, 2 и 3 на другие валы механизма. Для определения крутящего момента в сечении $X = X_1$ рассмотрим равновесие, например, левой части вала (рис. 12.3, б). Составляя уравнение равновесия $\sum m_x = 0$, находим

$$-T + M_{кр1} = 0,$$

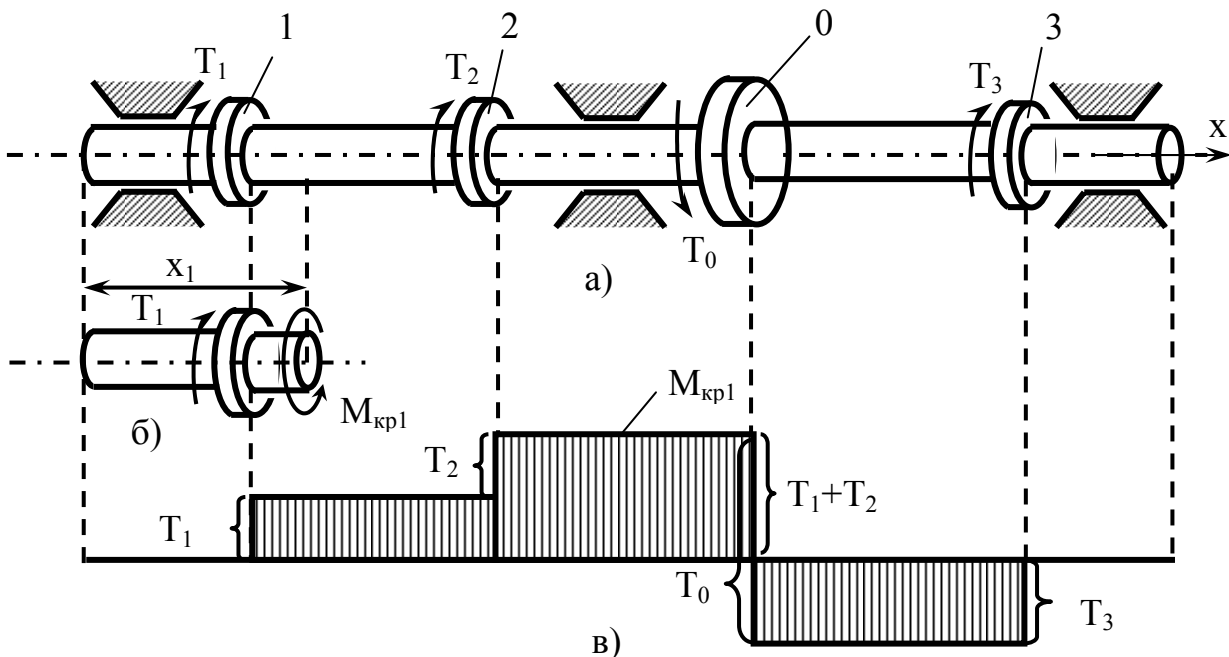


Рисунок 12.3 – Расчетная схема вала (а и б) и эпюра крутящихся моментов (в)

откуда

$$M_{кр1} = T_1.$$

При рассмотрении правой части получим

$$M_{кр1} = T_3 + T_2 - T_0.$$

В любом сечении вала действует крутящий момент, равный сумме вращающих моментов, лежащих по одну сторону от этого сечения.

Эпюра крутящих моментов вала представлена на рис. 12.3, в ступенчатой линией и показывает степень нагруженности участков вала. Значение максимального крутящего момента, определяющего диаметр вала, зависит от положения приемного шкива 0 относительно раздаточных шкивов 1, 2 и 3.

При расчете вала на прочность, часто задается не вращающий момент, а мощность P , передаваемая валом, и частота вращения вала. Тогда вращающий момент определяют по формуле

$$T = 9554 P / n.$$

Определим напряжения, действующие в поперечных сечениях бруса при деформации кручения. Сделаем некоторые предположения о характере деформаций при кручении бруса.

Если на боковую поверхность бруса круглого поперечного сечения нанести сетку (рис. 12.4, а) из окружностей и продольных линий, то после закручивания (рис. 12.4, б) можно обнаружить: образующие цилиндра обращаются в винтовые линии большого шага; сечения, круглые и плоские до деформации, сохраняют свою форму и после деформации; происходит поворот одного сечения относительно другого на некоторый угол, называемый *углом закручивания*.

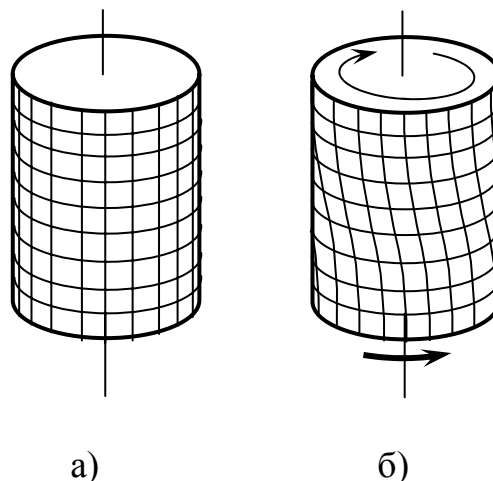


Рисунок 12.4 – Модель (а) и схема деформации (б) стержня при кручении

ния; расстояния между поперечными сечениями практически не изменяются.

На основании этих наблюдений в расчетах предполагают, что сечения, плоские до закручивания, остаются плоскими и после закручивания; радиусы поперечных сечений при деформации остаются прямыми.

В соответствии с этими гипотезами кручение стержня круглого поперечного сечения представляют как результат сдвигов, вызванных поворотом сечений.

Рассмотри брус круглого поперечного сечения радиусом r , заделанный одним концом и нагруженный вращающим моментом T на другом конце (рис. 12.5, а). На боковой поверхности бруса проведем образующую AD , которая под действием момента T займет положение AD_1 . На расстоянии x от заделки сечениями I-I и II-II выделим элемент длиной dx . Левый торец этого элемента в результате кручения повернется на угол φ , а правый торец – на угол $\varphi + d\varphi$. Образующая BC этого элемента перейдет в положение B_1C_1 , отклонившись от исходного положения на малый угол:

$$\gamma = (CC_1 - BB_1) / BC = [r(\varphi + d\varphi) - r\varphi] / dx$$

или

$$\gamma = r d\varphi / dx.$$

Отношение $d\varphi / dx$ представляет угол закручивания на единицу длины бруса, обозначается θ (относительный угол закручивания):

$$\gamma = r \theta. \quad (12.4)$$

На основании закона Гука касательное напряжение

$$\tau_p = G\gamma = G\theta r. \quad (12.5)$$

Используя формулу (12.5), можно определить напряжение по величине относительного сдвига в окрестности любой точки бруса, находящейся на расстоянии ρ от оси (рис. 12.5, б):

$$\tau_p = G\theta \rho. \quad (12.6)$$

Из соотношения (12.6) следует, что значения касательных напряжений в точках сечения пропорциональны расстоянию ее от оси бруса. Максимальные напряжения действуют на наружной поверхности бруса. Распределение касательных напряжений в сечениях круглого бруса показано на рис. 12.5, в.

Суммируя элементарные площадки, получим соотношение для крутящего момента в сечении

$$M_{kp} = \int \tau_{\rho} \rho dA$$

или с учетом равенства (12.5)

$$M_{kp} = G\theta \int \rho^2 dA.$$

Интеграл в последнем выражении представляет собой чисто геометрическую характеристику и носит название **полярного момента инерции сечения**.

Таким образом, получаем:

$$M_{kp} = G J_p \theta, \quad (12.7)$$

где $J_p = \int_A \rho^2 dA$.

Из полученного выражения находим угол закручивания

$$\theta = M_{kp} / (G J_p). \quad (12.8)$$

Произведение $G J_p$ называется **жесткостью сечения бруса при кручении**.

Полный угол закручивания на длине бруса l (в рад) будет равен:

$$\varphi = \int_0^l \theta dx = \int_0^l \frac{M_{kp}}{G J_p} dx.$$

Если крутящий момент и момент инерции сечения постоянны по длине бруса, то полный угол закручивания

$$\varphi = \frac{M_{kp} l}{J_p G}. \quad (12.9)$$

При скачкообразном изменении по длине бруса крутящего момента (см. рис. 12.3) угол закручивания между его начальным и конечным сечениями определяется как сумма углов закручивания по участкам с постоянным M_{kp}

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{kpi} l_i}{G J_p}.$$

Определим зависимость напряжения от крутящего момента. В соотношение (12.6) вместо θ поставим его значение из равенства (12.8)

$$\tau_p = G \theta \rho = G \rho \frac{M_{kp}}{J_p G} = \frac{M_{kp} \rho}{J_p}, \quad (12.10)$$

откуда наибольшее напряжение при кручении (рис. 12.5, в):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp} \cdot r}{J_p} \quad (12.11)$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (12.12)$$

где величина $W_p = J_p / r$ называется **полярным моментом сопротивления**.

Подсчитаем этот момент для бруса круглого сечения, принимая во внимание, что $dA = 2 \pi \rho d\rho$ (рис. 12.5, б), будем иметь:

$$J_p = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0.1 d^4, \quad (12.13)$$

где d – диаметр бруса.

Если в стержне имеется центральное отверстие диаметром d_0 , то

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d_0}{d} \right)^4 \right]. \quad (12.14)$$

Полярные моменты сопротивления будут равны:
для сплошного сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0.2 d^3,$$

для кольцевого сечения

$$W_{p0} \approx 0.2 d^3 \left[1 - \left(\frac{d_0}{d} \right)^4 \right].$$

12.2 Потенциальная энергия при кручении

Потенциальная энергия деформации, накопленная бруском при кручении, определяется аналогично тому, как это делается при деформации растяжения. Согласно закону Гука, в пределах упругих

деформаций угол закручивания растет пропорционально крутящему моменту.

Рассмотрим участок закрученного бруса длиной dx (см. рис. 12.5, а). Энергия, накопленная в этом элементе бруса, равна работе моментов $M_{кр}$, приложенных по торцам и пропорциональных $d\varphi$:

$$dE_p = \frac{1}{2} M_{кр} d\varphi,$$

где $d\varphi$ – угол взаимного поворота сечений

$$d\varphi = \frac{M_{кр}}{G J_p} dx,$$

откуда

$$dE_p = \frac{M_{кр}^2}{2 G J_p} dx.$$

Потенциальная энергия стержня

$$E_p = \int_0^l \frac{M_{кр}^2}{2 G J_p} dx.$$

При $M_{кр}$, J_p , G постоянных по длине бруса потенциальная энергия будет равна:

$$E_p = \frac{M_{кр}^2 l}{2 G J_p}.$$

13 ДЕФОРМАЦИЯ ИЗГИБА

13.1 Опоры и опорные реакции. Внутренние силовые факторы. Эпюры внутренних сил

Изгибом называется такой вид деформации, когда под действием внешних сил в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты.

Если изгибающий момент в сечении является единственным силовым фактором, а поперечные и нормальные силы отсутствуют, изгиб называется **чистым**. Если в поперечных сечениях стержня наряду с изгибающими моментами действуют и поперечные силы, изгиб называется **поперечным**. Возможны случаи, когда в поперечных сечениях бруса одновременно возникают несколько силовых факторов. Такие случаи называют **сложным сопротивлением**. Для передачи нагрузок брус должен быть зафиксирован относительно корпуса (фундамента). Фиксирование осуществляют с помощью так называемых **опор** – устройств (элементов конструкций), воспринимающих внешние силы.

Конструкции опор разнообразны, их схематическое изображение показано на рис. 13.1, а – в.

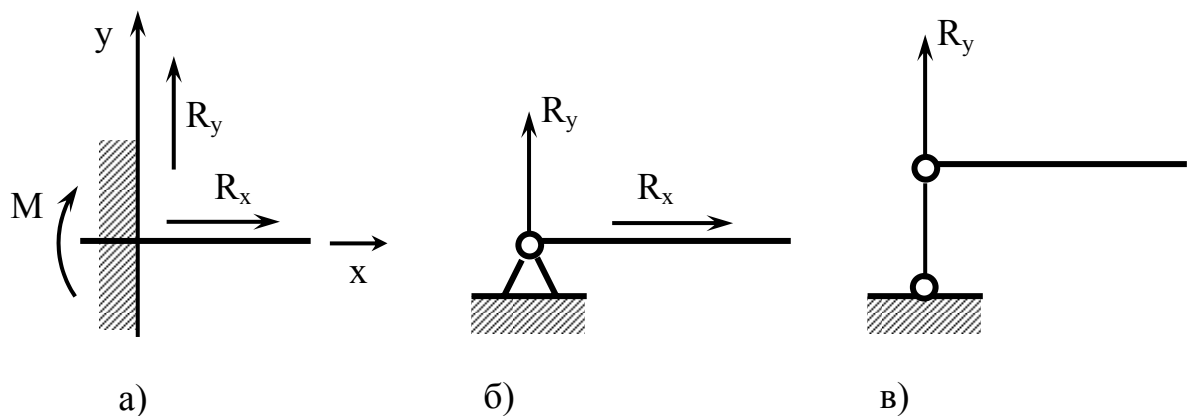


Рисунок 13.1 – Опоры стержней

Различают три основных типа опор: жестко защепленные (рис. 13.1, а), исключающие осевые и угловые смещения одного конца бруса и воспринимающие осевые силы и моментную нагрузку; шарнирно-неподвижная опора (рис. 13.1, б), которая допускает лишь угловое смещение (поворот вокруг собственной оси) и поэто-

му не воспринимает моментной нагрузки; шарнирно-подвижная опора (рис. 13.1, в), которая не допускает смещений бруса только в направлении одной из осей и поэтому передает нагрузки лишь в направлении этой оси.

Под действием внешних нагрузок в местах закрепления балки возникают опорные реакции. Так как деформации, изучаемые в сопротивлении материалов, малы по сравнению с размерами элементов конструкций, то при определении опорных реакций этими деформациями пренебрегают. В статически определенных схемах опорные реакции находятся из уравнений статики:

$$\sum_i F_{ix} = 0; \quad \sum_i F_{iy} = 0; \quad \sum_i m_c(F_i) = 0,$$

где F_i – внешняя сила;

$m_c(F_i)$ – момент внешней силы F_i относительно произвольной выбранной точки С.

Анализ внутренних сил начинается с определения опорных реакций, т.е. освобождения балки от связей с другими элементами конструкций.

Внутренние силовые факторы. Рассмотрим балку на двух опорах (рис. 13.2, а), нагруженную двумя силами F . Эта расчетная схема соответствует, например, подвеске робота, электротельфера на монорельсе и другим конструкциям.

Пренебрегая силами тяжести массы балки, из условия равновесия найдем опорные реакции $F_A = F_B = F$. Под действием внешних сил и опорных реакций балка (рис. 13.2, б) будет находиться в равновесии.

Для определения внутренних силовых факторов в каком-либо сечении $m_1 - m_1$ ($a \leq x_1 < a + b$) участка CD балки мысленно разрежем ее на две части и рассмотрим равновесие одной из них, например, левой (рис. 13.2, в). Для того чтобы эта часть находилась в равновесии, приложим в точке С неизвестные внутренние силовые факторы: нормальную силу $N(x_1)$, поперечную силу $Q_y(x_1)$, изгибающий момент $M_z(x_1)$.

В соответствии с характером деформации балки примем следующие правила знаков. Положительный изгибающий момент изгибает горизонтально расположенную балку выпуклостью вниз

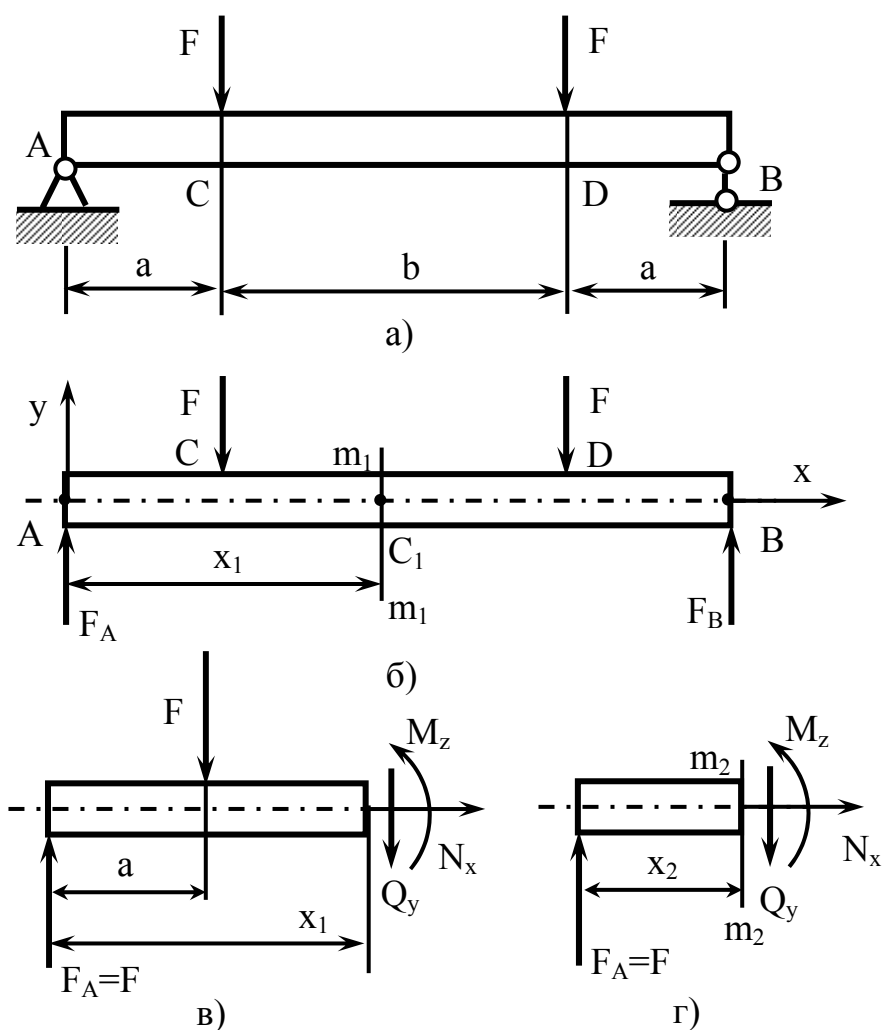


Рисунок 13.2 – Внутренние силовые факторы при изгибе

(рис. 13.3, а), а отрицательный изгибающий момент – выпуклостью вверх (рис. 13.3, б). Положительная поперечная сила стремится сме-

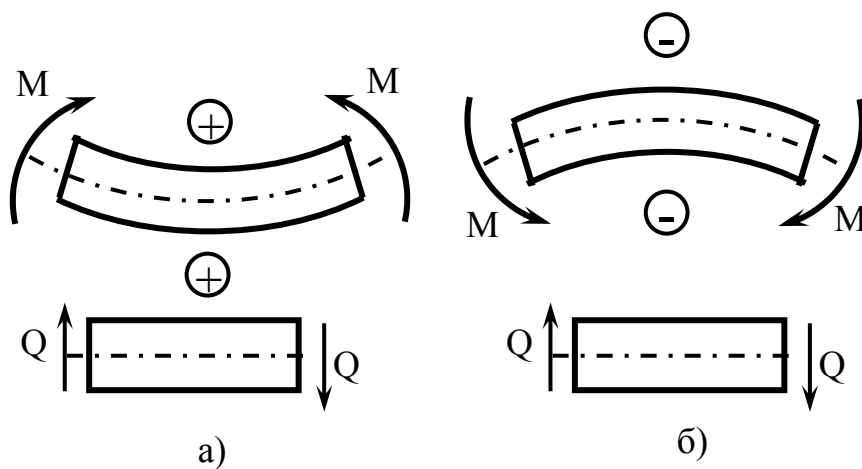


Рисунок 13.3 – Правила знаков при изгибе

стить (сдвинуть) левое сечение балки вверх относительно правого или правое сечение вниз относительно левого (рис. 13.3, а). Отрицательная поперечная сила имеет противоположное направление (рис. 13.3, б). Введенное правило знаков исключает неоднозначность по знаку момента и поперечной силы для левого и правого сечения.

Составим уравнения статики:

$$\begin{aligned}\sum F_{iy} &= 0, & F_A - F - Q_y(x_1) &= 0; \\ \sum m_{ci}(F_i) &= 0, & F_A x_1 - F(x_1 - a) - M_z(x_1) &= 0; \\ \sum F_{ix} &= 0, & N_x &= 0.\end{aligned}$$

Учитывая, что $F_A = F$, из этих уравнений найдем:

$$Q_y(x_1) = 0, \quad N_x = 0, \quad M_z(x_1) = Fa.$$

Обобщая полученные выражения, можно утверждать, что в общем случае:

1) поперечная сила в сечении балки равна сумме проекций на ось y всех внешних сил, действующих на рассматриваемую отсеченную часть, т.е.

$$Q_y = \sum_i F_{iy}; \quad (13.1)$$

2) изгибающий момент в сечении балки равен сумме моментов всех внешних сил, действующих на рассматриваемую отсеченную часть, взятых относительно центра тяжести рассматриваемого сечения, т.е.

$$M_z = \sum m_c(F_{iy}). \quad (13.2)$$

В рассмотренных выше суммах суммирование производится с учетом сформулированных выше правил знаков для Q и M .

В приведенном примере поперечная сила равна нулю, следовательно, балка на участке CD будет находиться в состоянии чистого изгиба.

Если рассмотреть сечение балки $m_2 - m_2$ на участке AC (рис. 13.2, г), то найдем, что при $0 \leq x_2 < a$ силовые факторы $Q_y(x_2) = F_A = F$ и $M(x_2) = F_A x_1 = F x_1$. Следовательно, этот участок стержня будет находиться в условиях поперечного изгиба.

Построение эпюр. Для оценки прочностной надежности бруса следует установить сечения, в которых внутренние силовые факторы имеют максимальное значение. Анализ внутренних силовых факторов будет наглядным при наличии эпюр – графиков изменения поперечных сил и изгибающих моментов вдоль оси бруса. Построение эпюр необходимо начинать с определения опорных реакций. Затем брус разбивают на участки с однородной внешней нагрузкой. Далее рассматривают произвольное сечение в пределах данного участка и составляют общие выражения для поперечной силы и изгибающего момента в этом сечении. Давая аргументу x (направление вдоль оси) произвольные значения в пределах того же участка, находят ординаты эпюр ($Q(x)$, $M(x)$).

В качестве примера рассмотрим двухопорную балку, нагруженную сосредоточенной силой F (рис. 13.4, а). Из уравнения рав-

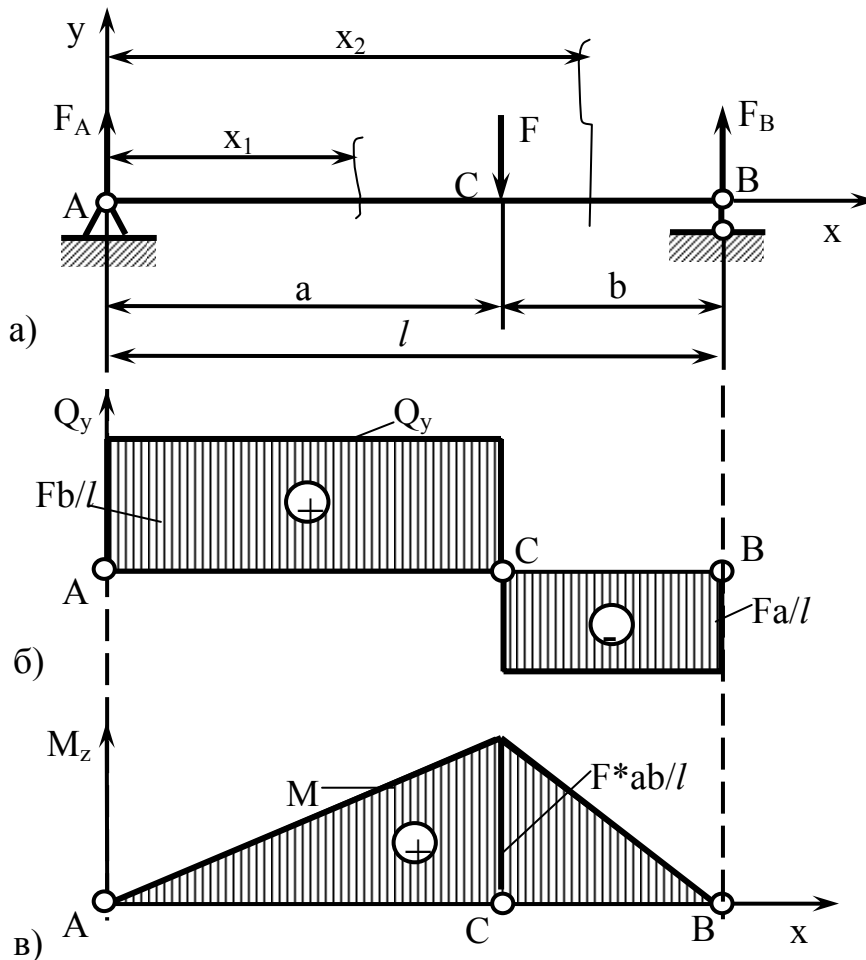


Рисунок 13.4 – Эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов в двухопорной балке

новесия $\sum m_A(F_i) = F_B l - Fa = 0$ находим реакцию в правой опоре $F_B = Fa/l$. Из второго уравнения равновесия $\sum F_{iy} = 0$ находим реакцию в левой опоре $F_A = Fb/l$.

Рассматриваемый брус содержит лишь два участка (АС и СВ) с однородной нагрузкой. Составим (с учетом принятых правил знаков) уравнения (13.1) и (13.2) для первого участка

$$Q_y(x_1) = \sum F_y = F_A = Fb/l;$$

$$M_z(x_1) = \sum m(F_i) = F_A x_1 = Fbx_1/l,$$

где $0 \leq x_1 \leq a$, а момент m берется относительно сечения (которое мысленно закрепляется) с произвольной координатой x_1 .

Из этих уравнений видно, что поперечная сила на участке АС положительна и не зависит от координаты x , т.е. $Q_y(x) = \text{const}$. Изгибающий момент линейно зависит от координаты x_1 сечения; при $x_1 = 0$ момент $M_z(0) = 0$, при $x_1 = a$ момент $M(a) = Fab/l$. На втором участке СВ ($a \leq x_2 \leq l$) соответствующие уравнения примут вид:

$$Q_y(x_2) = F_A - F = -Fa/l, \quad a < x_2 \leq l;$$

$$M_z(x_2) = F_A x_2 - F(x_2 - a) = Fbx_2/l - F(x_2 - a), \quad a \leq x_2 \leq l.$$

Поперечная сила на этом участке отрицательна и не зависит от x . В точке С она изменяется скачком, поэтому пределы изменения переменной для первого и второго участков исключают точку а (предел слева и предел справа функции $Q_y(x_2)$ различны). Изгибающий момент изменяется линейно, при $x_2 = a$ момент $M(a) = Fab/l$ и при $x_2 = l$ момент $M = 0$. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов показаны на рис. 13.4, б, в.

Рассмотрим еще один характерный пример нагружения балки. Определим поперечные силы и изгибающие моменты в сечениях двухопорной балки при действии равномерно распределенной нагрузки (рис. 13.5, а). Благодаря симметрии системы опорные реакции $F_A = F_B = ql/2$ (здесь q – нагрузка на единицу длины балки). Балка содержит лишь один однородный участок. Внутренние силовые факторы в сечении при $x=x_1$ ($0 \leq x_1 \leq l$) определим по уравнениям (13.1) и (13.2). Получим

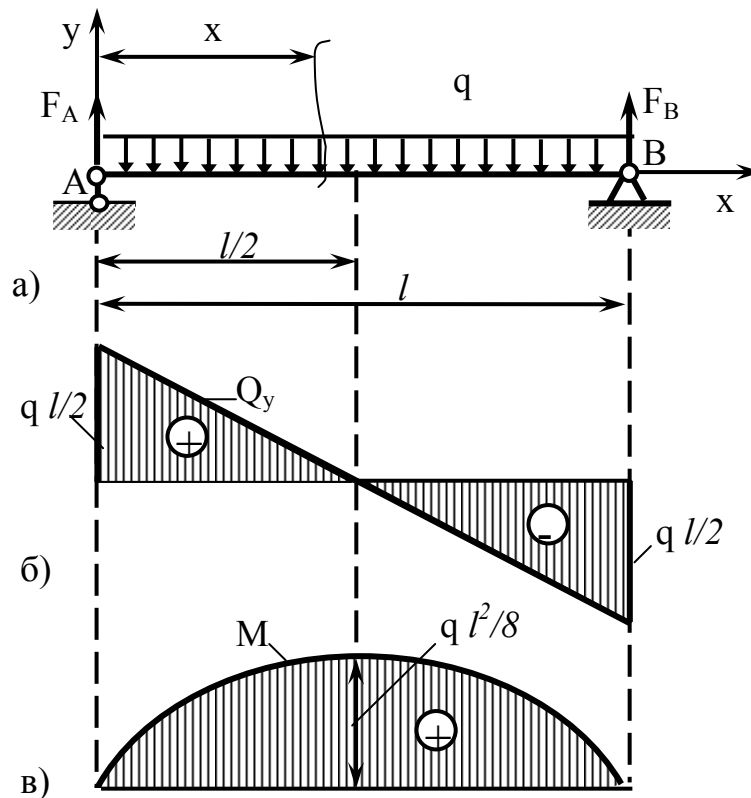


Рисунок 13.5 – Двухопорная балка при действии распределенной нагрузки

$$Q_y(x_1) = F_A - qx_1 = ql/2 - qx_1;$$

$$M_z(x_1) = F_A x_1 - qx_1 * x_1 / 2 = qlx_1 / 2 - qx_1^2 / 2.$$

Первое из этих уравнений является уравнением прямой линии. Ее просто построить по двум точкам:

$$\text{при } x = 0 \quad Q_y(0) = ql/2;$$

$$\text{при } x = l \quad Q_y(l) = -ql/2.$$

Эпюра поперечных сил, построенная таким образом, приведена на рис. 13.5, б.

Второе уравнение параболы. Поскольку максимум этой функции принадлежит рассматриваемому участку балки ($x_{\max} = l/2$), то эту функцию необходимо строить по трем точкам. При $x = 0$ $M_z(0) = 0$; при $x = l$ момент $M_z(l) = 0$; при $x = l/2$ момент $M_z(l/2) = ql^2/8$.

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 13.5, в. Из графиков видно, что в сечении, где изгибающий момент имеет максимальное значение, поперечная сила равна нулю.

14 НАПРЯЖЕНИЯ В БАЛКЕ ПРИ ИЗГИБЕ

Рассмотрим простейший случай изгиба – *чистый изгиб*, при котором в поперечных сечениях стержня действует только изгибающий момент. Например, в условиях чистого изгиба работают участки балок (рис. 14.1, а, б), на которых изгибающий момент постоянен, а поперечная сила равна нулю

$$\left(\frac{dM}{dx} = Q_y = 0 \right).$$

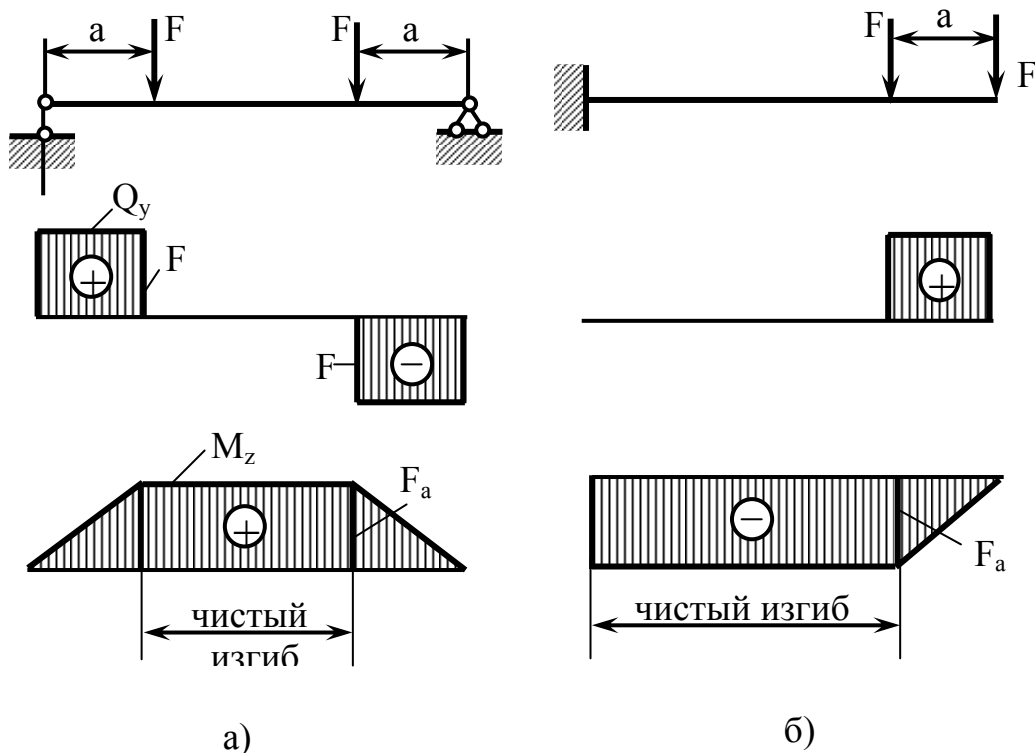


Рисунок 14.1 – Чистый изгиб стержней

Определим закон изменения напряжений в поперечном сечении и найдем значение наибольших напряжений.

Так как в любом сечении балки на этом участке действует одинаковый изгибающий момент, то изменение кривизны однородной балки будет одним и тем же. Это легко обнаруживается, если на боковую поверхность стержня нанести сетку из продольных и поперечных прямых (рис. 14.2). После деформации изгиба продольные линии и ось балки примут форму дуг окружностей, а поперечные линии останутся прямыми. Следовательно, как и при растяжении, плоские поперечные сечения балки до деформации останутся

плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений). Исследования показывают, что гипотеза плоских сечений подтверждается в тех случаях, когда углы сдвига элементов малы по сравнению с углами их поворотов (например, при изгибе длинных изотропных стержней).

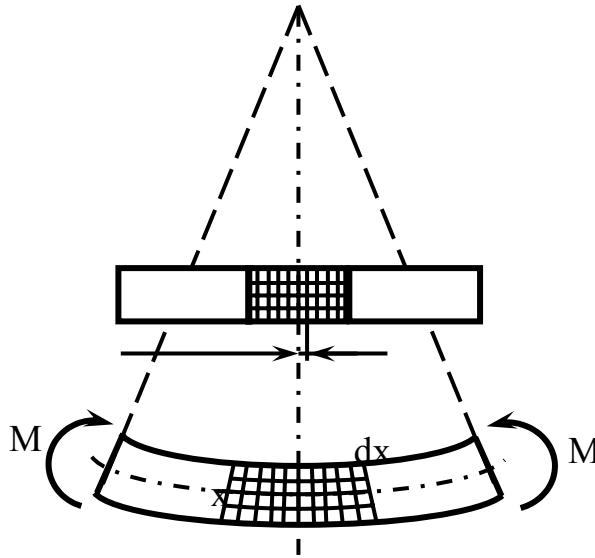


Рисунок 14.2 – Модель и схема деформаций стержня при чистом изгибе

Чистый изгиб стержня характеризуется также и тем, что его волокна (балка представляется в виде бесконечно большого числа волокон с бесконечно малыми сечениями) на выпуклой стороне растягиваются, а на вогнутой стороне сжимаются. Очевидно, что существует слой, в котором удлинения отсутствуют. Этот слой называют **нейтральным слоем**. Линию пересечения этого слоя с плоскостью поперечного сечения называют **нейтральной линией** (н.л.).

Рассмотрим сечение балки (рис. 14.3) в условиях чистого изгиба. Допустим для упрощения, что балка имеет постоянное поперечное сечение и плоскость симметрии, которая совпадает с плоскостью действия внешних сил. В точке O пересечения нейтральной линии с плоскостью симметрии поместим оси координат x, y, z . Положение нейтральной линии и начала координат заранее не известно. В поперечном сечении балки будут действовать только нормальные напряжения σ . Касательные напряжения в этом сечении

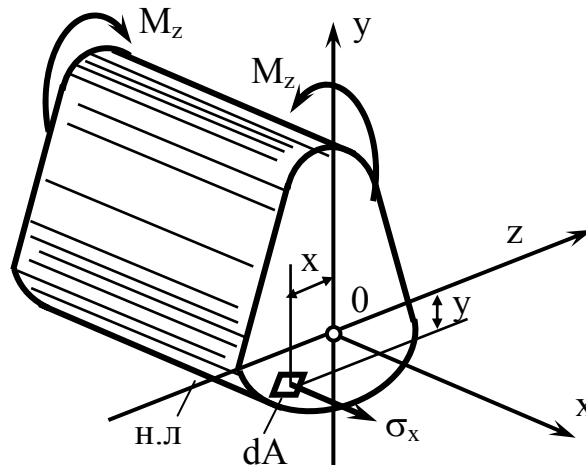


Рисунок 14.3 – Расчетная схема стержня при чистом изгибе

отсутствуют, т.к. поперечная сила – проекция на плоскость сечения главного вектора внутренних сил в сечении равна нулю.

Свяжем напряжение σ с внутренними силовыми факторами в сечении балки при чистом изгибе:

$$\begin{aligned} N_x &= \int \sigma_x dA = 0, \\ M_z &= \int \sigma_x y dA, \end{aligned} \quad (14.1)$$

где A – площадь поперечного сечения бруса.

Для решения задачи необходимо дополнить эти уравнения условиями деформаций, которые устанавливают на основании экспериментальных исследований. Рассмотрим элемент балки (рис. 14.4), образованный двумя смежными сечениями, расстояние между которыми равно dx .

Примем условно, что левое сечение неподвижно. После деформации между плоскостями сечений образуется угол $d\varphi$ (рис. 14.4, б). Нейтральный слой балки обозначим отрезком CD , радиус кривизны этого слоя обозначим ρ . Так как $dx = \rho d\varphi$ ($CD = C_1D_1 = dx$), то кривизна нейтрального слоя

$$1 / \rho = d\varphi / dx.$$

Произвольно взятый отрезок $AB = dx$, удаленный на y от нейтрального слоя, получит удлинение $B^*B_1 = A_1B_1 - AB$. Так как сечения остаются плоскими, то $B^*B_1 = y d\varphi$ и относительное удлинение (деформация) волокна составит

$$\varepsilon_x = B^*B_1 / AB = y d\varphi / (\rho d\varphi) = y / \rho. \quad (14.2)$$

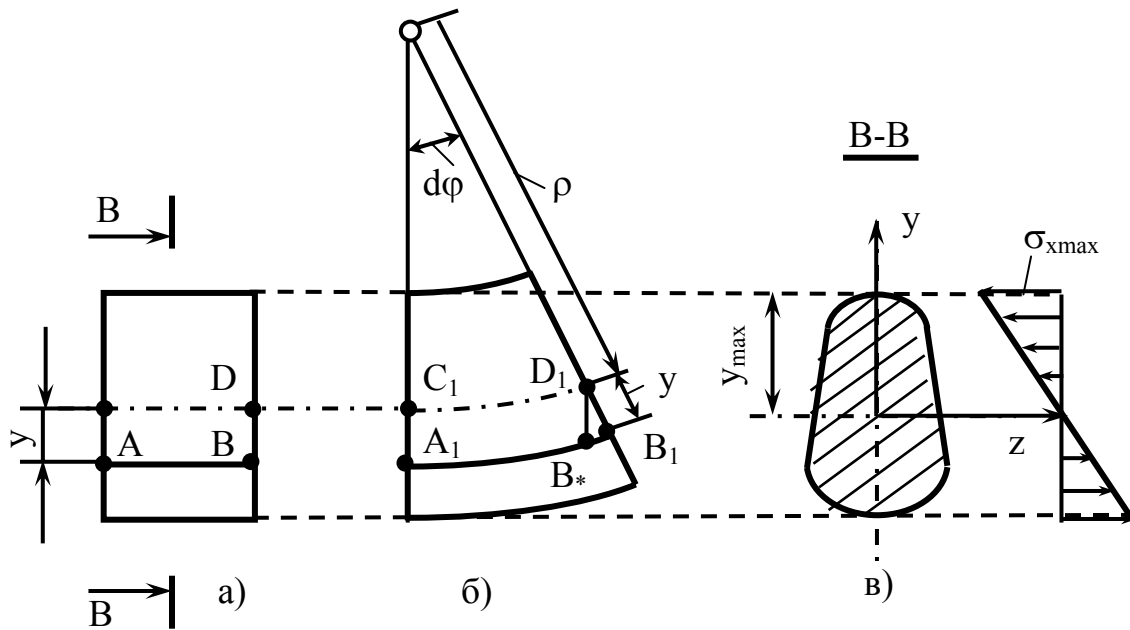


Рисунок 14.4 – Схема деформаций стержня при чистом изгибе

Таким образом, из гипотезы плоских сечений вытекает линейное распределение деформаций по высоте сечения (вдоль оси ординат).

Если предположить, что взаимное надавливание волокон отсутствует (гипотеза о ненадавливании друг на друга волокон, что равносильно отсутствию напряжений τ_y и τ_z), то каждое из них будет находиться в условиях растяжения или сжатия. Для определения напряжений в таком случае необходимо использовать закон Гука

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = \frac{E y}{\rho}. \quad (14.3)$$

Подставив полученное значение σ_x в первое соотношение (14.1), получим

$$\int_A \frac{E}{\rho} y dA = 0.$$

Так как отношение E / ρ не равно нулю и не зависит от переменной интегрирования, то вынося его за знак интеграла, будем иметь

$$\int_A y dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси OX. Так как он

равен нулю, то нейтральная ось при чистом изгибе прямой балки проходит через центр тяжести сечения (см. Теоретическую механику).

Момент внутренних сил относительно нейтральной оси

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA. \quad (14.4)$$

Интеграл $\frac{E}{\rho} \int y^2 dA = J_z$ (14.5)

называют **моментом инерции** поперечного сечения балки относительно центральной оси (проходящей через центр тяжести сечения). С учетом этого обозначения соотношение (14.4) приобретает вид

$$M_z = \frac{E J_z}{\rho},$$

откуда кривизна нейтрального слоя

$$1/\rho = M_z / E J_z. \quad (14.6)$$

Из равенства (14.6) видно, что момент инерции J_z характеризует способность тела сопротивляться искривлению в зависимости от размеров и формы его поперечного сечения. Чем больше будет J_z при заданной величине M_z , тем меньшей окажется кривизна нейтрального слоя, т.е. тем меньше искривится балка.

Модуль упругости E характеризует способность тела сопротивляться искривлению в зависимости от его материала.

Произведение EJ_z называют **жесткостью сечения** балки при изгибе.

С искривлением оси стержня связан взаимный поворот сечений. Угол поворота двух смежных сечений (рис. 14.4, а, б)

$$d\varphi = dx / \rho,$$

или с учетом (14.6)

$$d\varphi = \frac{M_z}{EJ_z} dx.$$

Наконец получим формулу для определения напряжений в поперечном сечении, подставив значение кривизны в формулу (14.3):

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{J_z}. \quad (14.7)$$

Из последнего выражения можно сделать ряд важных выводов:

- 1) центр тяжести сечения балки является началом координат для анализа напряжений и приведения внешних сил;
- 2) напряжения изгиба зависят от значений изгибающего момента, момента инерции сечения и координаты точки, в которой это напряжение определяется;
- 3) напряжения в любой точке, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны между собой;
- 4) нормальные напряжения не зависят, а упругие перемещения зависят от модуля упругости материала балки.

Максимальное напряжение при изгибе возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (рис. 14.4, в):

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_z}{J_z} Y_{\max} = \frac{M_z}{W_z}, \quad (14.8)$$

где $W_z = J_z / Y_{\max}$ – момент сопротивления балки при изгибе.

Внутренние слои материала, особенно вблизи нейтральной линии (рис. 14.4, в), мало напряжены. Поэтому при проектировании балок (стержней, валов), испытывающих деформации изгиба, стремятся к использованию сечений с возможно большими моментами инерции относительно нейтральной линии. Для этого необходимо распределять площадь сечения подальше от нейтральной линии.

На рис. 14.5 в качестве примера показаны экономичные стандартные профили сечений стальных прокатных балок.

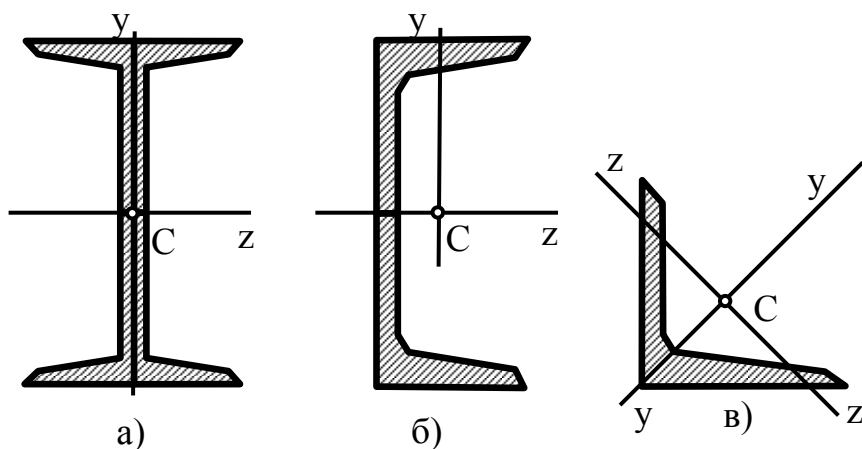


Рисунок 14.5 – Рациональные сечения стержней при изгибе:

а – двутавр; б – швеллер; в – уголок

Рассмотрим важные геометрические характеристики инерции сечений.

Различают осевые, полярные и центробежные моменты инерции сечений.

Осевым моментом инерции площади сечения относительно какой-либо оси (рис. 14.6), лежащей в его плоскости, называется сумма произведений элементарных площадок на квадраты расстояний их до этой оси:

$$J_z = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A z^2 dA. \quad (14.9)$$

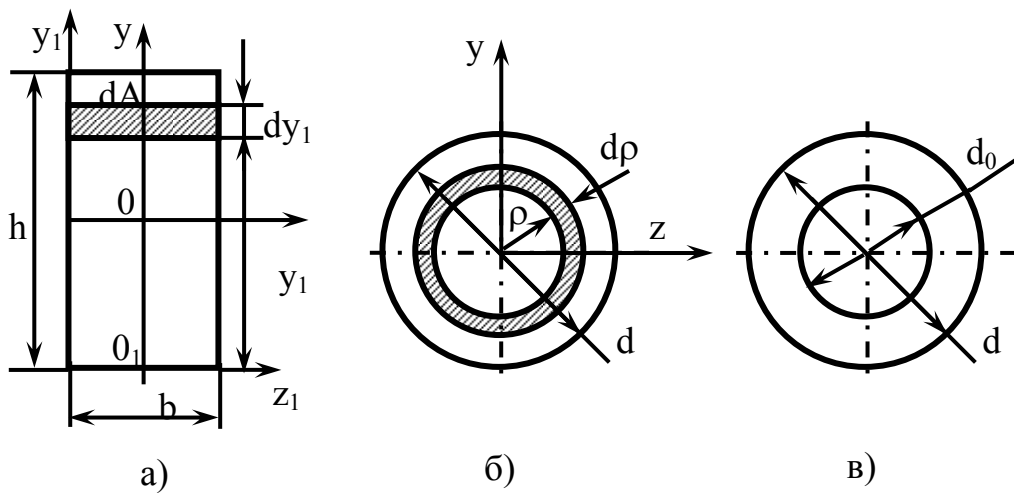


Рисунок 14.6 – Сечения стержней

Полярный момент инерции сечения относительно полюса О (рис. 14.6, а), взятого в начале осей координат

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA,$$

или

$$J_p = J_y + J_z. \quad (14.10)$$

Формула (14.10) справедлива для любых двух взаимно перпендикулярных осей с началом координат в полюсе О.

Центробежным моментом инерции сечения называется сумма произведений элементарных площадок на их координаты, взятая по всей площади сечения:

$$J_{zy} = \int_A zy dA = J_{yz}. \quad (14.11)$$

В отличие от осевого и полярного моментов инерции центробежный момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Определим некоторые моменты инерции простых сечений.

Определим момент инерции прямоугольника (рис. 14.6, а) высотой h и шириной b относительно центральной оси OZ . Разобьем мысленно площадь прямоугольника на элементарные площадки высотой dy и шириной b . Площадь одного такого элемента (заштрихован на рис. 4.6, а): $dA = b dy$.

Тогда

$$J_z = \int_A y^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{b h^3}{12}. \quad (14.12)$$

Аналогично найдем

$$J_y = \frac{h b^3}{12}. \quad (14.13)$$

Момент инерции прямоугольника относительно оси O_1Z_1 , проходящей через основание,

$$J_z = b \int_0^h y_1^2 dy = \frac{b h^3}{3}. \quad (14.14)$$

Определим теперь центробежный момент инерции сечения относительно осей $Y_1O_1Z_1$:

$$J_{y_1z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \int_0^h y_1 \frac{b}{2} b dy = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Центробежный момент инерции прямоугольника относительно осей YO_1Z_1 :

$$J_{yz} = \int_0^h y_1 \left(-\frac{b}{2}\right) \frac{b}{2} dy_1 + \int_0^h y_1 \frac{b}{2} \frac{b}{2} dy_1 = 0.$$

Таким образом, если одна из взаимно перпендикулярных осей является осью симметрии сечения, то относительно такой оси центробежный момент инерции сечения равен нулю.

Рассмотрим сечение в виде круга (рис. 14.6, б). Для круга сначала удобно вычислить полярный момент инерции.

Разбивая мысленно круг на элементарные площадки и учитывая, что площадь одной из них (заштрихована на рис. 14.6, б) $dA = 2\pi\rho d\rho$, будем иметь:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0.1d^4. \quad (14.15)$$

Учитывая, что $J_p = J_y + J_z$ и $J_z = J_y$, получим:

$$J_z = J_y = J_p / 2 = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0.05d^4. \quad (14.16)$$

Подсчитаем момент инерции кольца (рис. 14.6, в). Момент инерции кольца находят как разность моментов инерции наружного (диаметр d) и внутреннего (диаметр d_0) кругов:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4} \right) \approx 0.1d^4 \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4} \right). \quad (14.17)$$

Осевые моменты инерции

$$J_p = J_y \approx 0.05d^4 \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4} \right).$$

15 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ОДНОРОДНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ (РАСТЯЖЕНИЕ, СДВИГ, КРУЧЕНИЕ, ЧИСТЫЙ ИЗГИБ)

В предыдущих главах были рассмотрены простые случаи деформаций бруса, отличающиеся тем, что в каждом из них элементы тела (модели точек) испытывают либо деформацию растяжение (сжатие) (деформация растяжение (сжатие)) бруса, деформацию чистого изгиба бруса (для длинных брусьев деформация поперечного изгиба)), либо деформацию сдвига (деформация чистого сдвига, деформация кручения). Для оценки прочности в большинстве случаев нас интересует тот диапазон возникающих в теле напряжений, при которых материал ведет себя упруго.

Границей перехода тела из упругого состояния в пластическое при деформациях растяжение – сжатие, а также сдвига является напряжение текучести σ_T , которое легко определяется для пластичных материалов из эксперимента. Эта величина σ_T принимается в расчетах на прочность за предельную. Условие прочности для пластичных материалов при этом формулируется так: при деформациях растяжения (сжатия) и изгиба бруса наибольшее расчетное напряжение в его поперечных сечениях при возможно максимальной нагрузке не должно превышать предельного напряжения, при котором появляется опасность появления пластической деформации.

Для хрупких материалов формулировка условия прочности сохраняется, но в качестве предельной характеристики выбирается предел прочности σ_B , т.к. состояние текучести в этом случае экспериментально не обнаруживается. Этот метод расчета на прочность получил название *расчета по допускаемым напряжениям*.

условие прочности по допускаемому напряжению имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (15.1)$$

где $\sigma_{\max}$ – наибольшее напряжение в некоторой точке детали от наибольшей ожидаемой нагрузки;

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение ($[\sigma] = \sigma_T$ для пластичных материалов, σ_{BR} для хрупких при растяжении и σ_{BC} для хрупких при сжатии).

В практике расчетов на прочность широкое распространение получил метод расчета по запасам прочности.

Дело в том, что непосредственное сравнение максимального напряжения в той или иной точке тела опасно с точки зрения возможного превышения по разным причинам (приблизительность расчетов, отклонение заложенных в расчетах свойств материала от действительных и т.д.) расчетных максимальных напряжений допускаемых. Следует учитывать и такой фактор, как надежность детали с учетом ее важности при работе всего механизма.

Для варьирования величины предельной характеристики вводят коэффициент запаса прочности n :

$$n = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{max}}. \quad (15.2)$$

При расчете элемента конструкции коэффициент запаса прочности задается заранее и называется в этом случае **нормативным** или **допускаемым** и обозначается $[n]$.

Прочность элемента конструкции обеспечивается, если действительный коэффициент запаса (15.2) не ниже допускаемого, т.е.

$$n \geq [n]. \quad (15.3)$$

Неравенство (15.3) выражает условие прочности элемента конструкции по запасам прочности.

Последнее условие можно преобразовать для записи (15.3) в терминах напряжения.

Разделив предельное напряжение на нормативный коэффициент, получим допускаемое напряжение $[\sigma]$

$$\sigma_{пред} / [n] = [\sigma]. \quad (15.4)$$

Тогда условие прочности можно выразить неравенством

$$\sigma_{max} \leq [\sigma], \quad (15.5)$$

т.е. прочность элемента конструкции обеспечивается, если наибольшее напряжение, возникающие в нем, не превышает допускаемое, рассчитанное по запасу прочности.

При чистом сдвиге условие прочности по запасам прочности записывается аналогично

$$\tau_{max} \leq [\tau], \quad (15.6)$$

где $[\tau] = 0.5 [\sigma]$, которое записано с учетом, что $\tau_{max} = \sigma/2$.

Для пластичных материалов как при растяжении, так и при сжатии предельным напряжением является предел текучести σ_T .

Поэтому для них допускаемое напряжение получают, исходя из предела текучести:

$$[\sigma] = \sigma_T / [n], \quad (15.7)$$

причем в этом случае $[n] = 1, 4, \dots 2$.

Для хрупких материалов допускаемое напряжение растяжения $[\sigma_p]$ и допускаемое напряжение сжатия $[\sigma_c]$ получают, исходя из пределов прочности σ_{BP} или σ_{BC} :

$$[\sigma_p] = \sigma_{BP} / [n] \quad \text{и} \quad [\sigma_c] = \sigma_{BC} / [n]; \quad (15.8)$$

в этом случае $[n] = 2, 5, \dots 5$, а иногда и выше.

Условие прочности (15.5) применительно к расчетам на прочность при растяжении (сжатии) записывается в таком виде:

$$\sigma = N / A \leq [\sigma]. \quad (15.9)$$

Исходя из этого условия, производят три вида расчетов: проектный расчет, определение допускаемой нагрузки и проверочный расчет.

При **проектном расчете** известны нагрузки, действующие на брус, заданы или выбраны материалы, допускаемое напряжение $[\sigma]$ или нормативный запас прочности $[n]$. Определяются в этом случае размеры поперечного сечения бруса, обеспечивающие требуемую прочность:

$$A \geq N / \sigma. \quad (15.10)$$

По расчетному значению сечения и форме поперечного сечения находим его размеры.

При **определении допускаемой нагрузки** известны размеры бруса и его материал. Требуется определить максимально допустимую нагрузку. Для этого, приняв $\sigma = [\sigma]$, из условия (15.9)

$$[N] \leq A[\sigma]. \quad (15.11)$$

Затем с помощью метода сечения по найденному значению продольной силы $[N]$ определяем допускаемое значение нагрузки.

В некоторых случаях, в частности при деформации изгиба, расчет допускаемой нагрузки проводят за пределами упругости.

Дело в том, что нагрузочная способность бруса из пластичного материала не исчерпывается при появлении пластических деформаций в периферийных слоях наиболее нагруженного сечения (рис. 15.1, а, б), благодаря упругому состоянию центральной части сече-

ния. Изгибающий момент в наиболее нагруженном сечении при $\sigma_{\max} = \sigma_T$ равен

$$M_{\max T} = \sigma_T W_z = \sigma_T b h^2 / 6. \quad (15.12)$$

При увеличении нагрузки максимальное напряжение в крайних слоях не будет увеличиваться из-за текучести материала, хотя деформации этих слоев возрастут. Пластические деформации будут распространяться к нейтральному слою бруса, увеличивая напряжения в упругой зоне (рис. 15.1, в).

При некоторой нагрузке, называемой **предельной**, наиболее нагруженное сечение бруса будет целиком охвачено пластическими деформациями (рис. 15.1, г) и несущая способность балки будет полностью исчерпана.

Определим значение предельного изгибающего момента $M_{\max np}$ в наиболее нагруженном сечении. На элементарную площадку $dA = b dy$ (заштрихованная часть на рис. 15.1, а) будет действовать усилие $\sigma_T dA$. Сумма моментов элементарных сил $\sigma_T dA$ относительно нейтральной оси равна

$$M_{\max np} = \int_A \sigma_T dA = \sigma_T b \int y dA = \sigma_T b h^2 / 4.$$

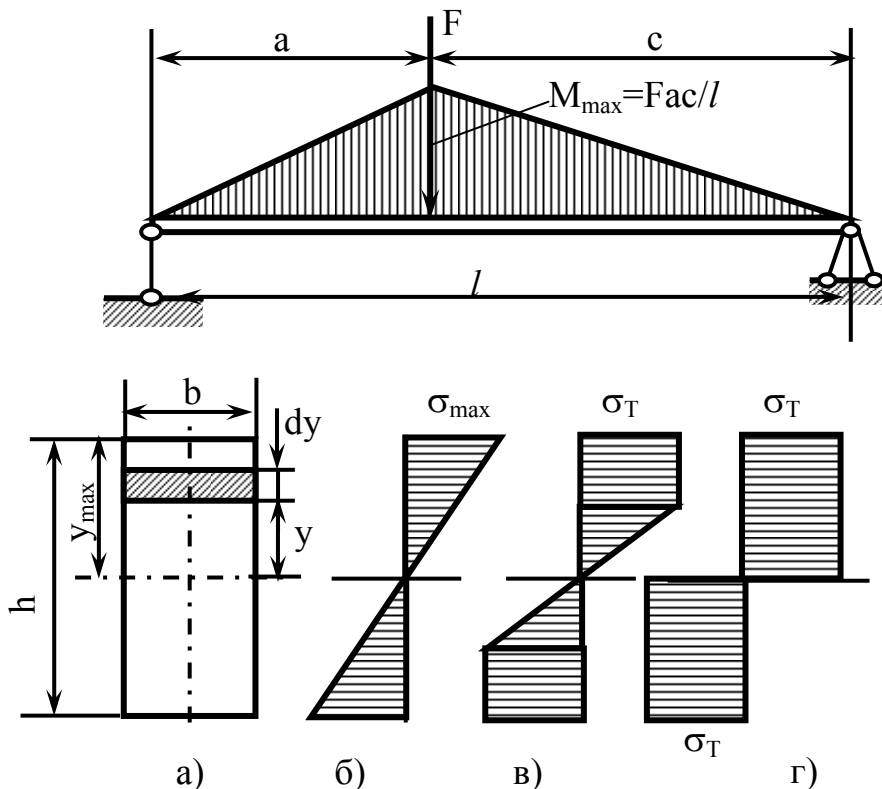


Рисунок 15.1 – Распределение напряжений в сечении стержня при наличии упругопластических деформаций

Отношение $M_{\max\text{пр}} / M_{\max} = 1,5$. Фактически нагрузочная способность балки существенно выше допускаемой, соответствующей допускаемому напряжению $[\sigma] = (0,3 \dots 0,6) \sigma_T$.

Приведенные соображения необходимо учитывать при действии статических нагрузок, где в качестве коэффициента запаса прочности используют соотношение

$$n = F_{\text{раз}} / F,$$

показывающее отношение нагрузок в момент разрушения ($F_{\text{раз}}$) и в рабочих условиях (F).

Значения коэффициентов запаса прочности зависят от многих факторов. К ним можно отнести: метод расчета, материал, конструктивную форму, технологию изготовления, методы термической обработки и ряд других факторов.

Обычно расчет по запасам прочности используют в качестве проверочного. При этом расчете нагрузка бруса, его материал и размеры известны и требуется проверить, выполняется ли условие (15.9). Расчетное напряжение считают не опасным, если оно превышает допускаемое не более чем на 5%.

15.1 Примеры расчета бруса на прочность

1. Деформация растяжение-сжатие

На рис. 15.2, а приведена конструкция, в которой стержень CD удерживает в равновесии жесткую балку АВ (балка перемещается как абсолютно твердое тело). Необходимо подобрать диаметр стального стержня. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа и модуль упругости $E = 200$ ГПа.

Решение

Как известно из статики, шарнирно закрепленный стержень может находиться в равновесии лишь при условии, что нагружающие его по концам силы направлены вдоль оси стержня. Следовательно, в поперечных сечениях стержня возникает лишь один внутренний силовой фактор – нормальная сила N . Для ее определения применяем метод сечений. Проводя сечение, отбрасываем закрепленную часть стержня и к оставленной части прикладываем нормальную силу, предполагая, что стержень растянут (рис. 15.2, б).

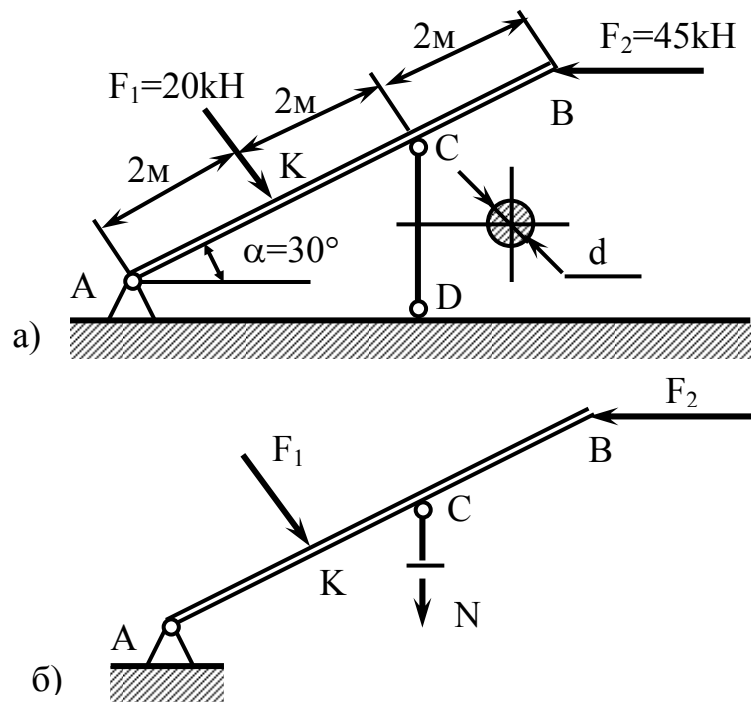


Рисунок 15.2

Значение нормальной силы найдем, рассматривая равновесие балки АВ:

$$\sum M_A = 0 - F_1 AK - N(\cos 30^\circ) AC + F AB \cos 60^\circ = 0;$$

отсюда $N = 27,3 \text{ кН}$.

Знак плюс указывает, что стержень растянут.

Из формулы (15.9), определяющей условие прочности, определяем требуемую площадь сечения стержня:

$$A \geq N[\sigma] = 171 \text{ мм}^2.$$

Тогда $d \geq \sqrt{4A/\pi} = 14,8 \text{ мм}$.

С некоторым округлением принимаем $d = 15 \text{ мм}$.

15.2 Чистый сдвиг

Уравнение прочности при расчетах на срез имеет вид (рис. 15.3):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y\max}}{GA} \leq [\tau_{cp}], \quad (15.13)$$

где $[\tau_{cp}]$ – допускаемое напряжение на срез, выбираемое как часть допускаемого напряжения на растяжение: $[\tau_{cp}] \approx (0.5 \dots 0.6) [\sigma]$ или $[\tau_{cp}] = (0.25 \dots 0.35) \sigma_T$.

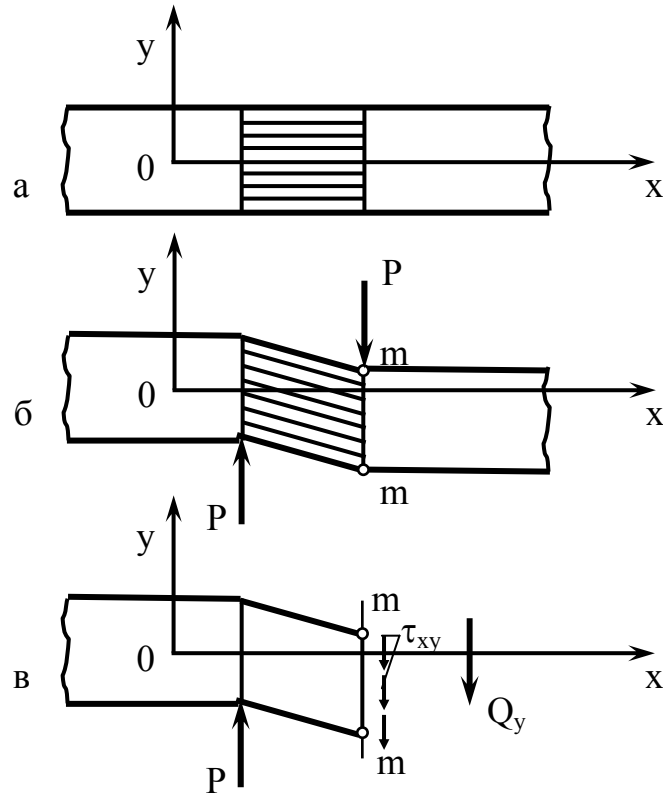


Рисунок 15.3 – Напряжение в брус, испытывающем сдвиг

Чаще всего формула (15.3) используется при практических расчетах соединительных деталей на срез. Эти расчеты основываются на трех допущениях: в поперечном сечении возможного среза детали возникает только один силовой фактор – поперечная сила Q ; касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении, распределены по сечению равномерно; если соединение осуществлено несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и др.), то считается, что все они нагружены одинаково. Исходя из этих допущений, условие прочности при расчете на срез запишется в таком виде:

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{i A_{cp}} \leq [\tau_{cp}], \quad (15.14)$$

где τ_{cp} – расчетное напряжение среза в поперечном сечении детали; Q – поперечная сила, возникающая в этом сечении; A_{cp} – площадь поперечного сечения; i – число соединительных деталей.

Из условия прочности (15.4) можно производить три вида расчетов:

- а) проверочный;
- б) проектный (определение числа соединительных деталей при заданных размерах, либо определение размеров деталей при заданном их числе);
- в) определение допускаемой нагрузки.

При небольшой толщине соединяемых брусьев (листов) и значительной нагрузке между поверхностью соединительной детали и стенками отверстия возникает большое взаимное давление, в результате которого стенка отверстия может обмяться, форма отверстия изменится и соединение разрушится.

Давление, возникшее между поверхностями соединительной детали и отверстия, называется **напряжением смятия** $\sigma_{см}$. Расчеты на смятие, так же как и расчеты на срез, носят условный характер. Считают, что силы давления распределены по поверхности смятия равномерно и перпендикулярны им. Отсюда, условие прочности на смятие имеет такой вид:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{i A_{см}} \leq [\sigma_{см}], \quad (15.15)$$

где $\frac{F}{i A_{см}}$ – нагрузка на один соединительный элемент (i – число элементов); $A_{см}$ – площадь смятия; $[\sigma_{см}]$ – допускаемое напряжение смятия. Для низкоуглеродистой стали $[\sigma_{см}] = 60 \dots 120 \text{ МПа}$.

Если поверхность смятия плоская, как например, при соединении вала 1 и втулки 2 призматической шпонкой 3 (рис. 15.4), то площадь смятия определяется непосредственно как произведение длины на ширину:

$$A_{см1} = t_1 a \quad \text{и} \quad A_{см2} = t_2 a .$$

Если поверхность смятия цилиндрическая, то в расчетную формулу (15.15) подставляется условная площадь смятия, равная площади проекции поверхности на диаметральную плоскость. На рис. 15.5 условная площадь смятия $A_{см} = d h$.

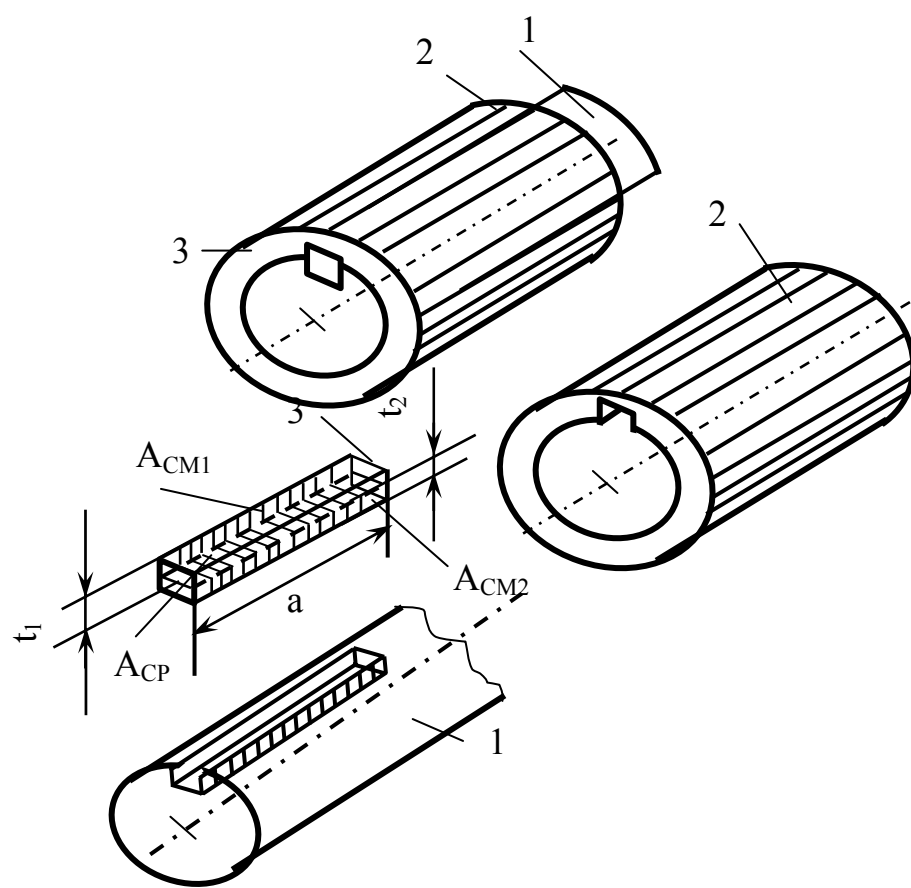


Рисунок 15.4

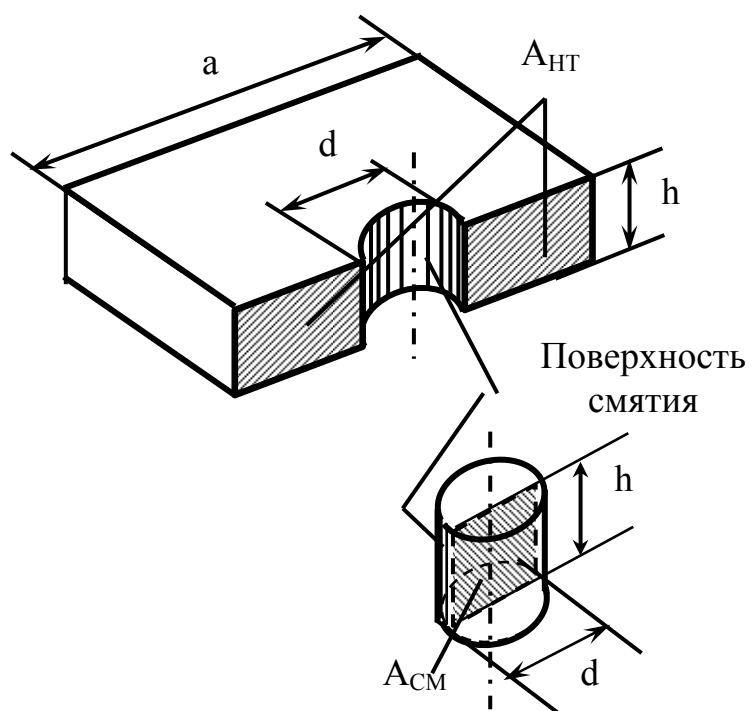


Рисунок 15.5

Кроме проверки детали на смятие при относительно небольшой ширине соединяемых листов или пластин их проверяют на разрыв по поперечному сечению, ослабленному отверстиями. На рис. 15.5 площадь ослабленного сечения (поперечного) $A = (a - d) \cdot h$.

Рассмотрим примеры расчета на срез и смятие.

Пример 1. Проверить прочность стержня на растяжение его головки на срез и опорной поверхности под головкой на смятие (рис. 15.6, а), если $[\sigma_p] = 110$ МПа, $[\tau_{ср}] = 60$ МПа и $[\sigma_{см}] = 120$ МПа.

Решение

1. Диаметр стержня $d = 5$ мм; следовательно, площадь поперечного сечения стержня $A = \frac{\pi d^4}{4} = 19.7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$, а нормальная сила в этом сечении $N = 2$ кН. Рабочее напряжение в поперечном сечении

$$\sigma = \frac{N}{A} = 102 \text{ МПа} < [\sigma_p].$$

Рабочее напряжение удовлетворяет условию прочности.

2. Головка стержня может быть срезана по цилиндрической поверхности диаметром $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м и высотой $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м (рис. 15.6, б), т.е. $A_{ср} = \pi d h = 31,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$. Следовательно, по формуле (15.4) при $Q = F$ и $i = 1$ подсчитываем напряжение среза

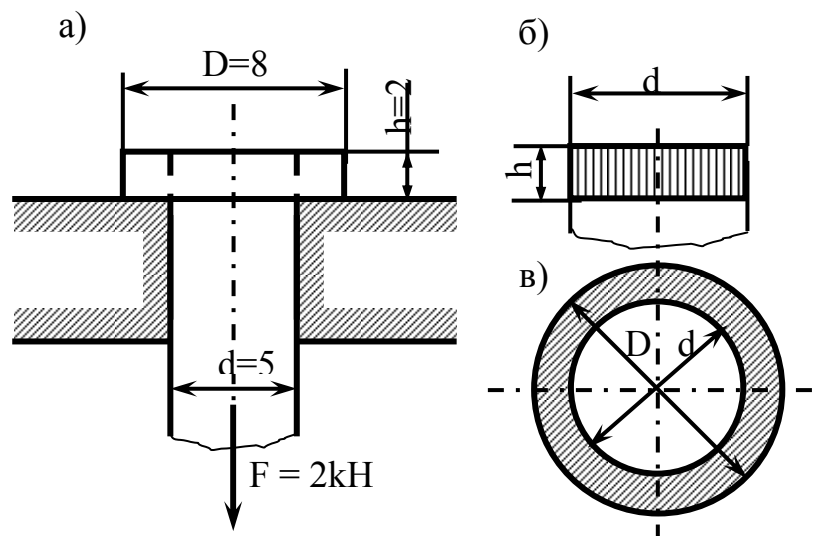


Рисунок 15.6

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A_{cp}} = 63.8 \text{ МПа} > [\tau_{cp}].$$

Перегрузка составляет $(3.8 / 60) 100\% = 6.33\%$, что недопустимо. Необходимо либо снизить нагрузку, либо взять стержень с более высокой головкой.

3. Поверхность контакта между головкой стержня и опорой имеет форму плоского кольца (рис. 15.6, в), т.е. $A_{см} = \pi (D^2 - d^2) / 4$. Рабочее напряжение смятия

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A(D^2 - d^2) / 4} = 65 \text{ МПа} < [\sigma_{см}].$$

Напряжение смятия удовлетворяет условию прочности.

15.3 Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau_k]. \quad (15.16)$$

Предел текучести при кручении связан с пределом текучести при растяжении зависимостью $\tau_T \approx (0.55 - 0.6) \sigma_T$; для пластичных материалов принимают $[\tau_k] \approx (0.55 - 0.6) [\sigma_p]$.

По условию прочности при кручении (15.16) выполняют три вида расчетов.

1. Проектный расчет.

В этом случае, определив крутящий момент в сечении бруса и приняв $\tau_{\max} = [\tau_k]$, находят требуемое значение полярного момента сопротивления:

$$W_p = \frac{M_k}{[\tau_k]}. \quad (15.17)$$

Затем, исходя из формулы поперечного сечения (круг или кольцо), находим диаметр бруса по одной из формул для полярного момента сопротивления.

Полученное значение диаметра в миллиметрах следует округлить до ближайшего четного числа или числа, оканчивающегося на 5.

2. Расчет допускаемой нагрузки.

Сначала определяем полярный момент сопротивления бруса. Приняв $\tau_{\max} = [\tau_k]$, находим допускаемое значение крутящего момента

$$[M_k] = W_p [\tau_k]. \quad (15.18)$$

Затем, исходя из схемы нагружения, находим максимально допустимую нагрузку.

3. Проверочный расчет.

Определив максимальный крутящий момент в поперечном сечении бруса и полярный момент сопротивления сечения, находим

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \text{ и сравниваем его с } [\tau_k].$$

Расчеты на жесткость

Условие жесткости бруса при кручении состоит в том, чтобы относительный угол закручивания φ_0 не превосходил некоторого заданного допускаемого значения $[\varphi_0]$, т.е.

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{G J_p} \leq [\varphi_0]. \quad (15.19)$$

В международной системе СИ допускаемый угол закручивания $[\varphi_0]$ выражается в рад / м, но в практике часто допускаемый угол закручивания задается в град / м. Тогда это значение нужно перевести в единицы СИ, умножив на отношение $\pi / 180^\circ$, т.е.

$$[\varphi_0] = \frac{\pi}{180^\circ} [\varphi_0^\circ].$$

По условию жесткости (15.19) выполняют также три вида расчетов: **проверочный** – непосредственно по расчетной формуле (15.19); **проектный** – по расчетной формуле

$$J_p = \frac{M_k}{G [\varphi_0]}. \quad (15.20)$$

Далее, в зависимости от формы сечения (круг или кольцо), определяют по одной из формул полярного момента сечения диа-

метр d или диаметры d и d_0 . Расчет допускаемой нагрузки выполняют по формуле

$$[M_k] = G J_p [\varphi_0]. \quad (15.21)$$

Объектом расчетов на прочность и жесткость часто становится брус, который называется **валом**. На вал при передаче мощности всегда действуют, по крайней мере, два скручивающих момента. При расчете валов необходимо помнить известную формулу, выражающую зависимость между вращающим (скручивающим) моментом $M_{вр}$, передаваемой мощностью P и угловой скоростью ω :

$$M_{вр} = P / \omega, \quad (15.22)$$

а также формулу $\omega = \pi n / 30$,
где n – частота вращения вала (об/мин).

Пример расчета вала.

Определим диаметр вала для передачи мощности $P = 50$ кВт при частоте вращения $n = 300$ об/мин, если $[\tau_k] = 30$ МПа и $[\varphi_0^\circ] = 3$ град/м, $G = 0.8 \cdot 10^5$ МПа.

Решение

При передаче заданной мощности вал нагружен двумя скручивающими моментами, каждый из которых определяем по формуле (15.22):

$$M_1 = M_2 = \frac{30P}{\pi n} 1590 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В каком угодно сечении вала между приложенными к нему внешними моментами M_1 и M_2 крутящий момент $M_k = M_1 = M_2$.

Определим диаметр вала из условия прочности. Для этого выразим допускаемое касательное напряжение $[\tau_k]$ в паскалях, по расчетной формуле (15.17) находим требуемый полярный момент сопротивления:

$$W_p = M_k / [\tau_k] = 53 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Отсюда определяем диаметр вала, удовлетворяющий условию прочности:

$$d = \sqrt[3]{16W_p / \pi} = 64.6 \text{ мм}.$$

Округляя до целого числа, принимаем $d = 65$ мм.

Определяем теперь диаметр вала из условия жесткости. Переводим значение φ_0° в систему СИ:

$$[\varphi_0] = (\pi / 180^\circ) [\varphi_0^\circ] = 0.0525 \text{ рад / м.}$$

Из формулы (15.20) находим требуемый полярный момент инерции сечения

$$J_p = \frac{M_k}{G[\varphi_0]} = 38 \cdot 10^4 \text{ мм}^4 = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Из последнего соотношения находим диаметр вала, удовлетворяющий условию жесткости

$$d_1 = \sqrt[4]{32 J_p / \pi} = 44.3 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_1 = 45$ мм.

Из двух найденных значений диаметра вала необходимо взять большее, т.к. оно удовлетворяет обоим условиям. Таким образом, конструктивный диаметр вала $d_0 = 65$ мм.

15.4 Расчеты на прочность при изгибе

Балки рассчитывают на прочность по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях. При поперечном изгибе балок наряду с нормальными возникают и касательные напряжения, обусловленные наличием поперечной силы, но они в подавляющем случае невелики и при расчетах на прочность не учитываются.

Считается, что прочность балки обеспечена, если наибольшие по абсолютному значению нормальные напряжения, возникающие в опасном сечении, не превышают допустимых. Для балки, поперечные размеры которой по всей длине постоянны, опасное сечение то, в котором возникает наибольший по модулю изгибающий момент. Наибольшие нормальные напряжения возникают в точках опасного поперечного сечения, максимально удаленных от нейтральной оси. Эти точки принято называть **опасными**. Значения максимальных напряжений в опасных точках рассчитываются по формулам:

$$\sigma_{\max p} = (M_z / J_z) \cdot y_1, \quad \sigma_{\max c} = (M_z / J_z) \cdot y_2,$$

где y_1 и y_2 – расстояния от нейтральной оси до наиболее удаленных точек соответственно в растянутой и сжатой зонах сечения.

Если материал балки хрупкий, например, закаленная сталь, чугун, текстолит и др., то расчет на прочность при изгибе проводят по напряжениям растяжения и сжатия. У хрупких материалов предел прочности при сжатии выше предела прочности при растяжении ($\sigma_{BC} > \sigma_{BP}$). Следовательно, поперечным сечениям балок из хрупких материалов целесообразно придавать ассиметричную форму относительно нейтральной оси (рис. 15.7) и располагать балку так, чтобы большая часть материала находилась в растянутой зоне.

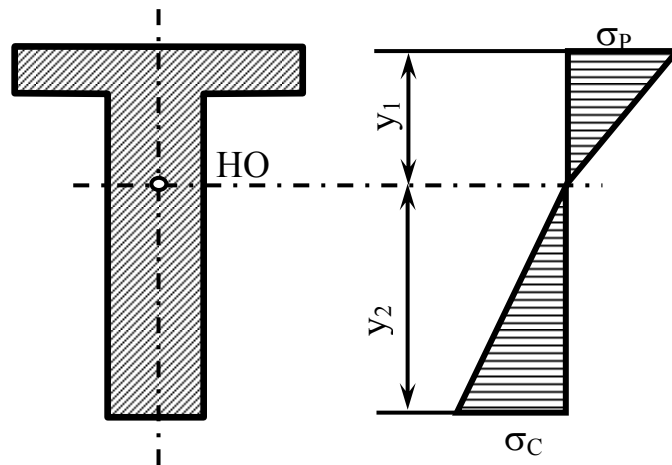


Рисунок 15.7

Таким образом, при расчетах балок из хрупкого материала используют два условия прочности:

для растянутой зоны

$$\sigma_{\max p} = (M_z / J_z) \cdot y_1 \leq [\sigma_p]; \quad (15.23)$$

для сжатой зоны

$$\sigma_{\max c} = (M_z / J_z) \cdot y_2 \leq [\sigma_c]. \quad (15.24)$$

Причем, наилучшее использование материала происходит при форме сечения, удовлетворяющей условию

$$y_1 / y_2 = [\sigma_p] / [\sigma_c].$$

При расчете балок из пластичных материалов, например, из низкоуглеродистой стали и цветных металлов, напротив, целесообразно брать балки с симметричными сечениями относительно нейтральной оси (рис. 15.8). В этом случае

$$\sigma_{\max p} = \sigma_{\max c} = \sigma_{\max} = (M_z / J_z) / (h/2).$$

Разделим числитель и знаменатель этого равенства на $(h/2)$

$$\sigma_{\max} = M_z / J_z / (h/2).$$

Величина $J_z / (h/2) = W_z$ – это момент сопротивления сечения при изгибе.

Для прямоугольного сечения (рис. 15.8), размеры которого $b \times h$, момент сопротивления

$$W_z = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^3}{12}; \quad h/2 = \frac{bh^2}{6}. \quad (15.25)$$

Для круглого сечения

$$W_z = \frac{J_x}{d/2} = \frac{\pi h^4}{64}; \quad d/2 = \frac{\pi h^3}{32}. \quad (15.26)$$

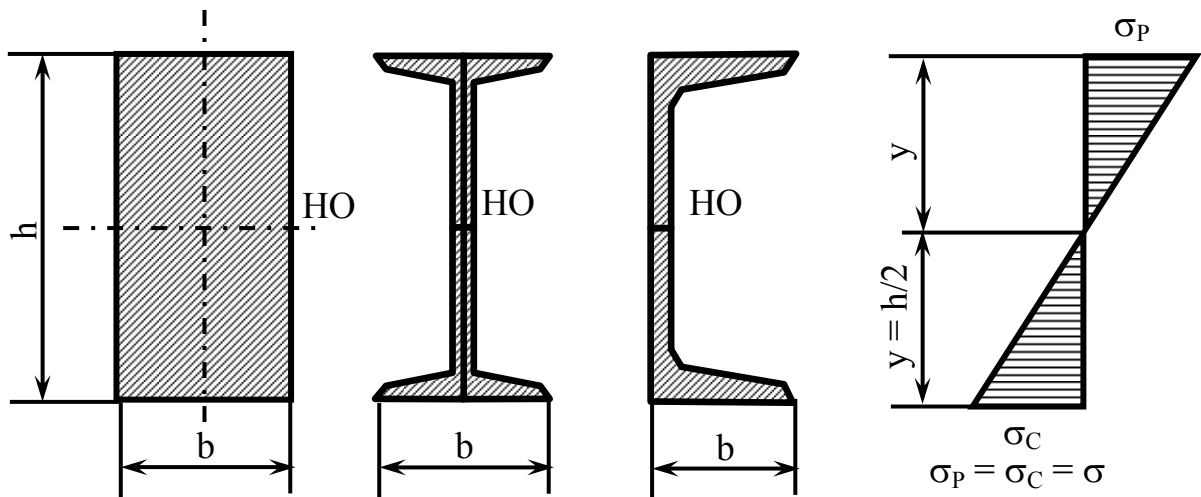


Рисунок 15.8

Наиболее экономичными сечениями при изгибе являются такие формы сечения, при которых материал бруса расположен как можно дальше от нейтральной оси. У таких брусьев при наименьшей затрате материала получается наибольший момент сопротивления W_z . Поэтому и возникли профили стандартного проката (рис. 15.8), все необходимые характеристики которых содержатся в ГОСТах: «Сталь горячекатаная», «Балки двутавровые», «Швелеры».

Условие прочности балки из пластичного материала имеет вид:

$$\sigma_{\max} = M_z / W_z \leq [\sigma], \quad (15.27)$$

исходя из которого, выполняют три вида расчетов.

Проектный расчет.

Приняв $\sigma_{\max} = [\sigma]$, по изгибающему моменту M_z в опасном сечении находят требуемое значение момента сопротивления:

$$W_z \geq M_z / [\sigma]. \quad (15.28)$$

Затем, исходя из принятой для балки формы поперечного сечения, находят его размеры.

Расчет допускаемой нагрузки.

Принимаем $\sigma_{\max} = [\sigma]$ и рассчитываем допускаемый момент $[M_z]$:

$$[M_z] = W_z / [\sigma].$$

Затем, исходя из схемы нагружения балки, находят допускаемое значение нагрузки.

Проверочный расчет.

Определяем максимальный изгибающий момент и момент сопротивления сечения. По формуле (15.27) находим значение σ и сравниваем его с $[\sigma]$.

Рассмотрим несколько примеров.

Для балки (рис. 15.9, а) подобрать из условия прочности необходимые размеры двутавра при двух вариантах его расположения (рис. 15.10, а, б). Принять $[\sigma] = 150$ МПа. Из эпюры M_z , построенной для этой балки (рис. 15.9, б), следует, что в опасном сечении $M_z = 11$ кН·м. По расчетной формуле (15.27) находим значение момента сопротивления сечения:

$$W_z \geq M_z / [\sigma] = 73.3 \text{ см}^3.$$

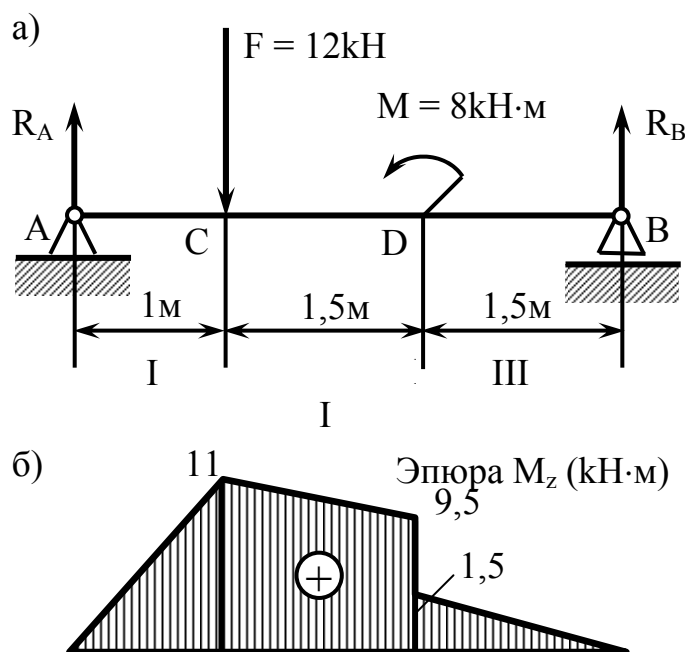


Рисунок 15.9

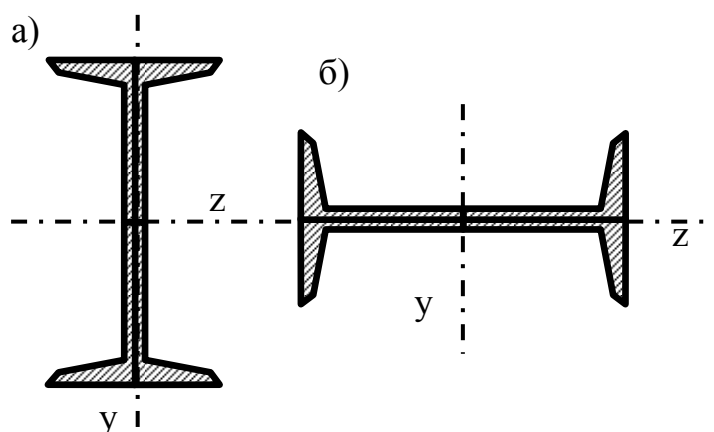


Рисунок 15.10

При расположении двутавра по варианту (а) из таблицы ГОСТ 8239-72 находим, что требуемому значению момента сопротивления соответствует двутавр N14 с $W_z = 81.7 \text{ см}^3$. Площадь поперечного сечения этого двутавра 17.4 см^2 , а масса $1 \text{ м} - 13.7 \text{ кг}$.

При расположении двутавра по варианту (б) номер двутавра N40 со значением $W_z = 86.1 \text{ см}^3$, площадью поперечного сечения 72.6 см^2 и массой $1 \text{ м} - 57 \text{ кг}$. Таким образом, при расположении по варианту (а) на четырехметровую балку расходуется стали на 173,2 кг меньше, чем при расположении по варианту (б).

Рассмотрим другой пример. На рис. 15.11 представлена балка, составленная из двух швеллеров N6,5. Необходимо определить допускаемую нагрузку $[F]$.

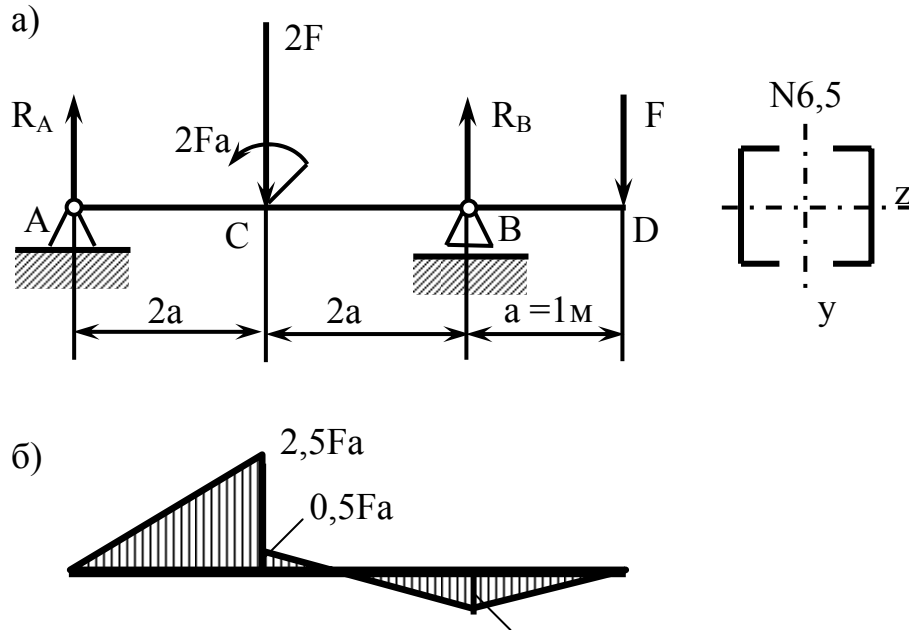


Рисунок 15.11

В первую очередь определяем реакции опор балки. Из уравнений моментов сил, действующих на балку, относительно точек A и B соответственно находим $R_A = 1.25 F$ и $R_B = 1.75 F$. Построив эпюру M_z (рис. 15.11, б), видим, что опасное сечение расположено под силой $2F$, где возникает максимальный по абсолютному значению изгибающий момент. Следовательно, расчетный момент $[M_z] = 2.5 Fa$.

По таблице ГОСТ 8240-72 момент сопротивления сечения одного швеллера N6,5 $W_z = 15 \text{ см}^3$, а так как главная центральная ось z сечения балки совпадает с главными осями каждого из швеллеров, момент сопротивления сечения

$$W_z = 2W_x = 30 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Из расчетной формулы (15.27) получим

$$W_z [\sigma] = 2.5 Fa,$$

откуда

$$[F] = W_z [\sigma] / (2.5 a) = 1.92 \text{ кН}.$$

Разбивая мысленно круг на элементарные площадки и учитывая, что площадь одной из них (заштрихована на рис. 14.6, б) $dA = 2\pi r dr$, будем иметь:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0.1 d^4. \quad (14.15)$$

Учитывая, что $J_p = J_y + J_z$ и $J_z = J_y$, получим:

$$J_z = J_y = J_p / 2 = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0.05 d^4. \quad (14.16)$$

Подсчитаем момент инерции кольца (рис. 14.6, в). Момент инерции кольца находят как разность моментов инерции наружного (диаметр d) и внутреннего (диаметр d_0) кругов:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4} \right) \approx 0.1 d^4 \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4} \right). \quad (14.17)$$

Осевые моменты инерции

$$J_p = J_y \approx 0.05 d^4 \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4} \right).$$

15 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ОДНОРОДНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ (РАСТЯЖЕНИЕ, СДВИГ, КРУЧЕНИЕ, ЧИСТЫЙ ИЗГИБ)

В предыдущих главах были рассмотрены простые случаи деформаций бруса, отличающиеся тем, что в каждом из них элементы тела (модели точек) испытывают либо деформацию растяжение (сжатие) (деформация растяжение (сжатие)) бруса, деформацию чистого изгиба бруса (для длинных брусьев деформация поперечного изгиба)), либо деформацию сдвига (деформация чистого сдвига, деформация кручения). Для оценки прочности в большинстве случаев нас интересует тот диапазон возникающих в теле напряжений, при которых материал ведет себя упруго.

Границей перехода тела из упругого состояния в пластическое при деформациях растяжение – сжатие, а также сдвига является напряжение текучести σ_T , которое легко определяется для пластичных материалов из эксперимента. Эта величина σ_T принимается в расчетах на прочность за предельную. Условие прочности для пластичных материалов при этом формулируется так: при деформациях растяжения (сжатия) и изгиба бруса наибольшее расчетное напряжение в его поперечных сечениях при возможно максимальной нагрузке не должно превышать предельного напряжения, при котором появляется опасность появления пластической деформации.

Для хрупких материалов формулировка условия прочности сохраняется, но в качестве предельной характеристики выбирается предел прочности σ_B , т.к. состояние текучести в этом случае экспериментально не обнаруживается. Этот метод расчета на прочность получил название *расчета по допускаемым напряжениям*.

условие прочности по допускаемому напряжению имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (15.1)$$

где $\sigma_{\max}$ – наибольшее напряжение в некоторой точке детали от наибольшей ожидаемой нагрузки;

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение ($[\sigma] = \sigma_T$ для пластичных материалов, σ_{BR} для хрупких при растяжении и σ_{BC} для хрупких при сжатии).

В практике расчетов на прочность широкое распространение получил метод расчета по запасам прочности.

Дело в том, что непосредственное сравнение максимального напряжения в той или иной точке тела опасно с точки зрения возможного превышения по разным причинам (приблизительность расчетов, отклонение заложенных в расчетах свойств материала от действительных и т.д.) расчетных максимальных напряжений допускаемых. Следует учитывать и такой фактор, как надежность детали с учетом ее важности при работе всего механизма.

Для варьирования величины предельной характеристики вводят коэффициент запаса прочности n :

$$n = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{max}}. \quad (15.2)$$

При расчете элемента конструкции коэффициент запаса прочности задается заранее и называется в этом случае **нормативным** или **допускаемым** и обозначается $[n]$.

Прочность элемента конструкции обеспечивается, если действительный коэффициент запаса (15.2) не ниже допускаемого, т.е.

$$n \geq [n]. \quad (15.3)$$

Неравенство (15.3) выражает условие прочности элемента конструкции по запасам прочности.

Последнее условие можно преобразовать для записи (15.3) в терминах напряжения.

Разделив предельное напряжение на нормативный коэффициент, получим допускаемое напряжение $[\sigma]$

$$\sigma_{пред} / [n] = [\sigma]. \quad (15.4)$$

Тогда условие прочности можно выразить неравенством

$$\sigma_{max} \leq [\sigma], \quad (15.5)$$

т.е. прочность элемента конструкции обеспечивается, если наибольшее напряжение, возникающие в нем, не превышает допускаемое, рассчитанное по запасу прочности.

При чистом сдвиге условие прочности по запасам прочности записывается аналогично

$$\tau_{max} \leq [\tau], \quad (15.6)$$

где $[\tau] = 0.5 [\sigma]$, которое записано с учетом, что $\tau_{max} = \sigma/2$.

Для пластичных материалов как при растяжении, так и при сжатии предельным напряжением является предел текучести σ_T .

Поэтому для них допускаемое напряжение получают, исходя из предела текучести:

$$[\sigma] = \sigma_T / [n], \quad (15.7)$$

причем в этом случае $[n] = 1, 4, \dots 2$.

Для хрупких материалов допускаемое напряжение растяжения $[\sigma_p]$ и допускаемое напряжение сжатия $[\sigma_c]$ получают, исходя из пределов прочности σ_{BP} или σ_{BC} :

$$[\sigma_p] = \sigma_{BP} / [n] \quad \text{и} \quad [\sigma_c] = \sigma_{BC} / [n]; \quad (15.8)$$

в этом случае $[n] = 2, 5, \dots 5$, а иногда и выше.

Условие прочности (15.5) применительно к расчетам на прочность при растяжении (сжатии) записывается в таком виде:

$$\sigma = N / A \leq [\sigma]. \quad (15.9)$$

Исходя из этого условия, производят три вида расчетов: проектный расчет, определение допускаемой нагрузки и проверочный расчет.

При **проектном расчете** известны нагрузки, действующие на брус, заданы или выбраны материалы, допускаемое напряжение $[\sigma]$ или нормативный запас прочности $[n]$. Определяются в этом случае размеры поперечного сечения бруса, обеспечивающие требуемую прочность:

$$A \geq N / \sigma. \quad (15.10)$$

По расчетному значению сечения и форме поперечного сечения находим его размеры.

При **определении допускаемой нагрузки** известны размеры бруса и его материал. Требуется определить максимально допустимую нагрузку. Для этого, приняв $\sigma = [\sigma]$, из условия (15.9)

$$[N] \leq A[\sigma]. \quad (15.11)$$

Затем с помощью метода сечения по найденному значению продольной силы $[N]$ определяем допускаемое значение нагрузки.

В некоторых случаях, в частности при деформации изгиба, расчет допускаемой нагрузки проводят за пределами упругости.

Дело в том, что нагрузочная способность бруса из пластичного материала не исчерпывается при появлении пластических деформаций в периферийных слоях наиболее нагруженного сечения (рис. 15.1, а, б), благодаря упругому состоянию центральной части сече-

ния. Изгибающий момент в наиболее нагруженном сечении при $\sigma_{\max} = \sigma_T$ равен

$$M_{\max T} = \sigma_T W_z = \sigma_T b h^2 / 6. \quad (15.12)$$

При увеличении нагрузки максимальное напряжение в крайних слоях не будет увеличиваться из-за текучести материала, хотя деформации этих слоев возрастут. Пластические деформации будут распространяться к нейтральному слою бруса, увеличивая напряжения в упругой зоне (рис. 15.1, в).

При некоторой нагрузке, называемой **предельной**, наиболее нагруженное сечение бруса будет целиком охвачено пластическими деформациями (рис. 15.1, г) и несущая способность балки будет полностью исчерпана.

Определим значение предельного изгибающего момента $M_{\max np}$ в наиболее нагруженном сечении. На элементарную площадку $dA = b dy$ (заштрихованная часть на рис. 15.1, а) будет действовать усилие $\sigma_T dA$. Сумма моментов элементарных сил $\sigma_T dA$ относительно нейтральной оси равна

$$M_{\max np} = \int_A \sigma_T dA = \sigma_T b \int y dA = \sigma_T b h^2 / 4.$$

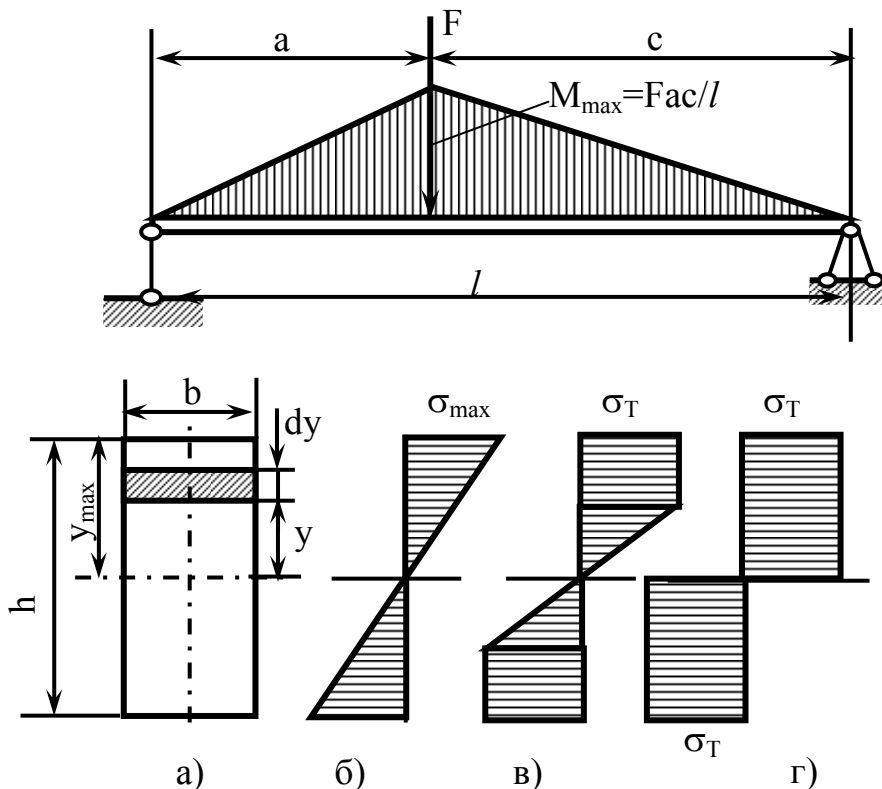


Рисунок 15.1 – Распределение напряжений в сечении стержня при наличии упругопластических деформаций

Отношение $M_{\max\text{пр}} / M_{\max} = 1,5$. Фактически нагрузочная способность балки существенно выше допускаемой, соответствующей допускаемому напряжению $[\sigma] = (0,3 \dots 0,6) \sigma_T$.

Приведенные соображения необходимо учитывать при действии статических нагрузок, где в качестве коэффициента запаса прочности используют соотношение

$$n = F_{\text{раз}} / F,$$

показывающее отношение нагрузок в момент разрушения ($F_{\text{раз}}$) и в рабочих условиях (F).

Значения коэффициентов запаса прочности зависят от многих факторов. К ним можно отнести: метод расчета, материал, конструктивную форму, технологию изготовления, методы термической обработки и ряд других факторов.

Обычно расчет по запасам прочности используют в качестве проверочного. При этом расчете нагрузка бруса, его материал и размеры известны и требуется проверить, выполняется ли условие (15.9). Расчетное напряжение считают не опасным, если оно превышает допускаемое не более чем на 5%.

15.1 Примеры расчета бруса на прочность

1. Деформация растяжение-сжатие

На рис. 15.2, а приведена конструкция, в которой стержень CD удерживает в равновесии жесткую балку АВ (балка перемещается как абсолютно твердое тело). Необходимо подобрать диаметр стального стержня. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа и модуль упругости $E = 200$ ГПа.

Решение

Как известно из статики, шарнирно закрепленный стержень может находиться в равновесии лишь при условии, что нагружающие его по концам силы направлены вдоль оси стержня. Следовательно, в поперечных сечениях стержня возникает лишь один внутренний силовой фактор – нормальная сила N . Для ее определения применяем метод сечений. Проводя сечение, отбрасываем закрепленную часть стержня и к оставленной части прикладываем нормальную силу, предполагая, что стержень растянут (рис. 15.2, б).

где $[\tau_{cp}]$ – допускаемое напряжение на срез, выбираемое как часть допускаемого напряжения на растяжение: $[\tau_{cp}] \approx (0.5 \dots 0.6) [\sigma]$ или $[\tau_{cp}] = (0.25 \dots 0.35) \sigma_T$.

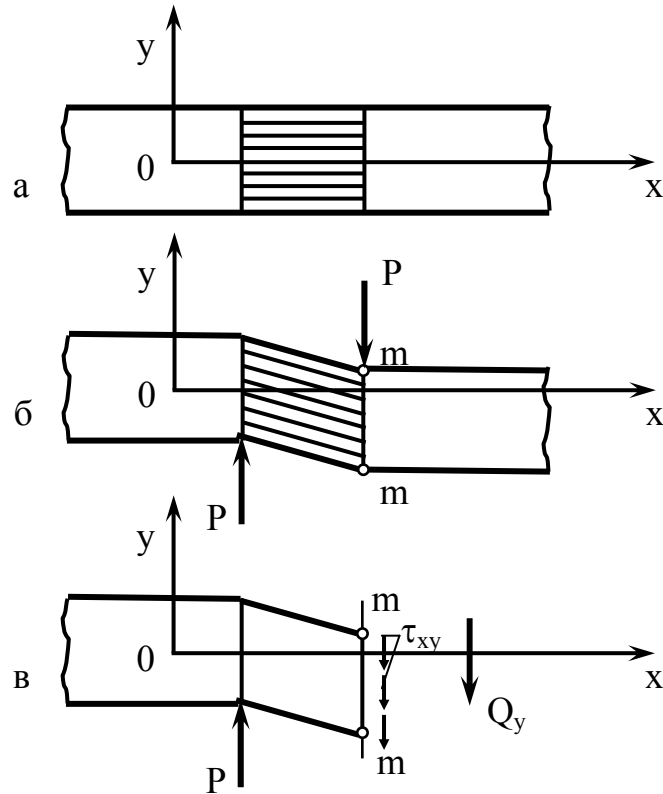


Рисунок 15.3 – Напряжение в брус, испытывающем сдвиг

Чаще всего формула (15.3) используется при практических расчетах соединительных деталей на срез. Эти расчеты основываются на трех допущениях: в поперечном сечении возможного среза детали возникает только один силовой фактор – поперечная сила Q ; касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении, распределены по сечению равномерно; если соединение осуществлено несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и др.), то считается, что все они нагружены одинаково. Исходя из этих допущений, условие прочности при расчете на срез запишется в таком виде:

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{i A_{cp}} \leq [\tau_{cp}], \quad (15.14)$$

где τ_{cp} – расчетное напряжение среза в поперечном сечении детали; Q – поперечная сила, возникающая в этом сечении; A_{cp} – площадь поперечного сечения; i – число соединительных деталей.

Из условия прочности (15.4) можно производить три вида расчетов:

- а) проверочный;
- б) проектный (определение числа соединительных деталей при заданных размерах, либо определение размеров деталей при заданном их числе);
- в) определение допускаемой нагрузки.

При небольшой толщине соединяемых брусьев (листов) и значительной нагрузке между поверхностью соединительной детали и стенками отверстия возникает большое взаимное давление, в результате которого стенка отверстия может обмяться, форма отверстия изменится и соединение разрушится.

Давление, возникшее между поверхностями соединительной детали и отверстия, называется **напряжением смятия** $\sigma_{см}$. Расчеты на смятие, так же как и расчеты на срез, носят условный характер. Считают, что силы давления распределены по поверхности смятия равномерно и перпендикулярны им. Отсюда, условие прочности на смятие имеет такой вид:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{i A_{см}} \leq [\sigma_{см}], \quad (15.15)$$

где $\frac{F}{i A_{см}}$ – нагрузка на один соединительный элемент (i – число элементов); $A_{см}$ – площадь смятия; $[\sigma_{см}]$ – допускаемое напряжение смятия. Для низкоуглеродистой стали $[\sigma_{см}] = 60 \dots 120 \text{ МПа}$.

Если поверхность смятия плоская, как например, при соединении вала 1 и втулки 2 призматической шпонкой 3 (рис. 15.4), то площадь смятия определяется непосредственно как произведение длины на ширину:

$$A_{см1} = t_1 a \quad \text{и} \quad A_{см2} = t_2 a .$$

Если поверхность смятия цилиндрическая, то в расчетную формулу (15.15) подставляется условная площадь смятия, равная площади проекции поверхности на диаметральную плоскость. На рис. 15.5 условная площадь смятия $A_{см} = d h$.

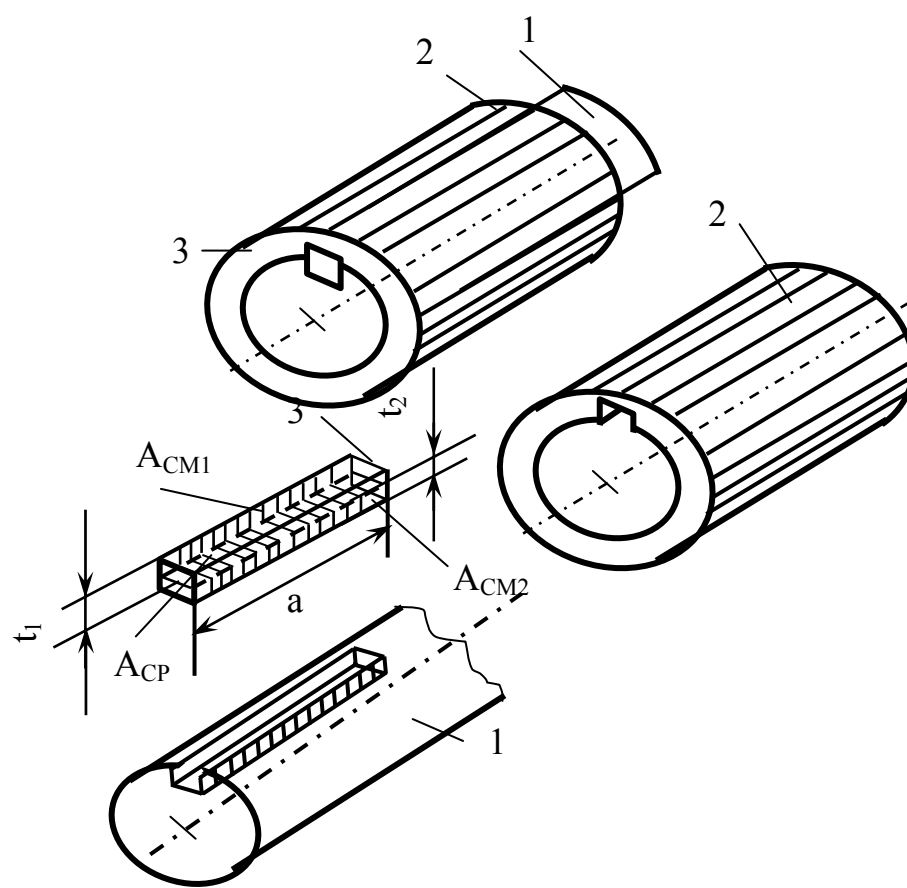


Рисунок 15.4

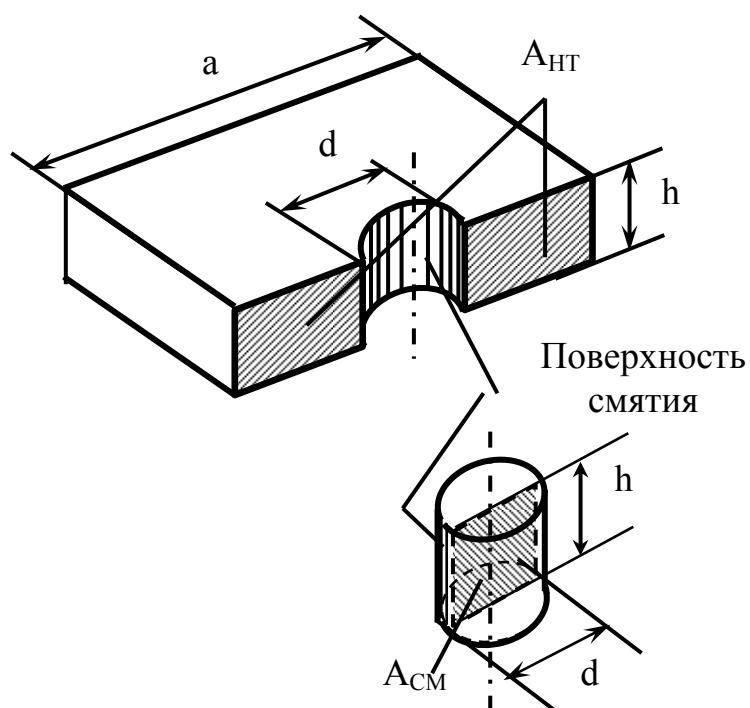


Рисунок 15.5

Кроме проверки детали на смятие при относительно небольшой ширине соединяемых листов или пластин их проверяют на разрыв по поперечному сечению, ослабленному отверстиями. На рис. 15.5 площадь ослабленного сечения (поперечного) $A = (a - d) \cdot h$.

Рассмотрим примеры расчета на срез и смятие.

Пример 1. Проверить прочность стержня на растяжение его головки на срез и опорной поверхности под головкой на смятие (рис. 15.6, а), если $[\sigma_p] = 110$ МПа, $[\tau_{ср}] = 60$ МПа и $[\sigma_{см}] = 120$ МПа.

Решение

1. Диаметр стержня $d = 5$ мм; следовательно, площадь поперечного сечения стержня $A = \frac{\pi d^4}{4} = 19.7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$, а нормальная сила в этом сечении $N = 2 \text{ кН}$. Рабочее напряжение в поперечном сечении

$$\sigma = \frac{N}{A} = 102 \text{ МПа} < [\sigma_p].$$

Рабочее напряжение удовлетворяет условию прочности.

2. Головка стержня может быть срезана по цилиндрической поверхности диаметром $d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ и высотой $h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (рис. 15.6, б), т.е. $A_{ср} = \pi d h = 31,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$. Следовательно, по формуле (15.4) при $Q = F$ и $i = 1$ подсчитываем напряжение среза

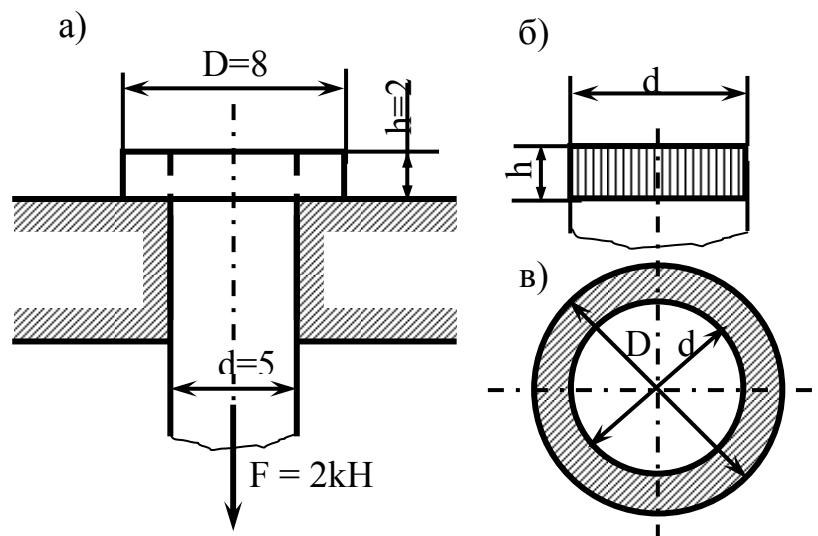


Рисунок 15.6

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A_{cp}} = 63.8 \text{ МПа} > [\tau_{cp}].$$

Перегрузка составляет $(3.8 / 60) 100\% = 6.33\%$, что недопустимо. Необходимо либо снизить нагрузку, либо взять стержень с более высокой головкой.

3. Поверхность контакта между головкой стержня и опорой имеет форму плоского кольца (рис. 15.6, в), т.е. $A_{cm} = \pi (D^2 - d^2) / 4$. Рабочее напряжение смятия

$$\sigma_{cm} = \frac{F}{A(D^2 - d^2) / 4} = 65 \text{ МПа} < [\sigma_{cm}].$$

Напряжение смятия удовлетворяет условию прочности.

15.3 Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau_k]. \quad (15.16)$$

Предел текучести при кручении связан с пределом текучести при растяжении зависимостью $\tau_T \approx (0.55 - 0.6) \sigma_T$; для пластичных материалов принимают $[\tau_k] \approx (0.55 - 0.6) [\sigma_p]$.

По условию прочности при кручении (15.16) выполняют три вида расчетов.

1. Проектный расчет.

В этом случае, определив крутящий момент в сечении бруса и приняв $\tau_{\max} = [\tau_k]$, находят требуемое значение полярного момента сопротивления:

$$W_p = \frac{M_k}{[\tau_k]}. \quad (15.17)$$

Затем, исходя из формулы поперечного сечения (круг или кольцо), находим диаметр бруса по одной из формул для полярного момента сопротивления.

Полученное значение диаметра в миллиметрах следует округлить до ближайшего четного числа или числа, оканчивающегося на 5.

2. Расчет допускаемой нагрузки.

Сначала определяем полярный момент сопротивления бруса. Приняв $\tau_{\max} = [\tau_k]$, находим допускаемое значение крутящего момента

$$[M_k] = W_p [\tau_k]. \quad (15.18)$$

Затем, исходя из схемы нагружения, находим максимально допустимую нагрузку.

3. Проверочный расчет.

Определив максимальный крутящий момент в поперечном сечении бруса и полярный момент сопротивления сечения, находим

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \text{ и сравниваем его с } [\tau_k].$$

Расчеты на жесткость

Условие жесткости бруса при кручении состоит в том, чтобы относительный угол закручивания φ_0 не превосходил некоторого заданного допускаемого значения $[\varphi_0]$, т.е.

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{G J_p} \leq [\varphi_0]. \quad (15.19)$$

В международной системе СИ допускаемый угол закручивания $[\varphi_0]$ выражается в рад / м, но в практике часто допускаемый угол закручивания задается в град / м. Тогда это значение нужно перевести в единицы СИ, умножив на отношение $\pi / 180^\circ$, т.е.

$$[\varphi_0] = \frac{\pi}{180^\circ} [\varphi_0^\circ].$$

По условию жесткости (15.19) выполняют также три вида расчетов: **проверочный** – непосредственно по расчетной формуле (15.19); **проектный** – по расчетной формуле

$$J_p = \frac{M_k}{G [\varphi_0]}. \quad (15.20)$$

Далее, в зависимости от формы сечения (круг или кольцо), определяют по одной из формул полярного момента сечения диа-

метр d или диаметры d и d_0 . Расчет допускаемой нагрузки выполняют по формуле

$$[M_k] = G J_p [\varphi_0]. \quad (15.21)$$

Объектом расчетов на прочность и жесткость часто становится брус, который называется **валом**. На вал при передаче мощности всегда действуют, по крайней мере, два скручивающих момента. При расчете валов необходимо помнить известную формулу, выражающую зависимость между вращающим (скручивающим) моментом $M_{вр}$, передаваемой мощностью P и угловой скоростью ω :

$$M_{вр} = P / \omega, \quad (15.22)$$

а также формулу $\omega = \pi n / 30$,
где n – частота вращения вала (об/мин).

Пример расчета вала.

Определим диаметр вала для передачи мощности $P = 50$ кВт при частоте вращения $n = 300$ об/мин, если $[\tau_k] = 30$ МПа и $[\varphi_0^\circ] = 3$ град/м, $G = 0.8 \cdot 10^5$ МПа.

Решение

При передаче заданной мощности вал нагружен двумя скручивающими моментами, каждый из которых определяем по формуле (15.22):

$$M_1 = M_2 = \frac{30P}{\pi n} 1590 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В каком угодно сечении вала между приложенными к нему внешними моментами M_1 и M_2 крутящий момент $M_k = M_1 = M_2$.

Определим диаметр вала из условия прочности. Для этого выразим допускаемое касательное напряжение $[\tau_k]$ в паскалях, по расчетной формуле (15.17) находим требуемый полярный момент сопротивления:

$$W_p = M_k / [\tau_k] = 53 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Отсюда определяем диаметр вала, удовлетворяющий условию прочности:

$$d = \sqrt[3]{16W_p / \pi} = 64.6 \text{ мм}.$$

Округляя до целого числа, принимаем $d = 65$ мм.

Определяем теперь диаметр вала из условия жесткости. Переводим значение φ_0° в систему СИ:

$$[\varphi_0] = (\pi / 180^\circ) [\varphi_0^\circ] = 0.0525 \text{ рад / м.}$$

Из формулы (15.20) находим требуемый полярный момент инерции сечения

$$J_p = \frac{M_k}{G[\varphi_0]} = 38 \cdot 10^4 \text{ мм}^4 = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Из последнего соотношения находим диаметр вала, удовлетворяющий условию жесткости

$$d_1 = \sqrt[4]{32 J_p / \pi} = 44.3 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_1 = 45$ мм.

Из двух найденных значений диаметра вала необходимо взять большее, т.к. оно удовлетворяет обоим условиям. Таким образом, конструктивный диаметр вала $d_0 = 65$ мм.

15.4 Расчеты на прочность при изгибе

Балки рассчитывают на прочность по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях. При поперечном изгибе балок наряду с нормальными возникают и касательные напряжения, обусловленные наличием поперечной силы, но они в подавляющем случае невелики и при расчетах на прочность не учитываются.

Считается, что прочность балки обеспечена, если наибольшие по абсолютному значению нормальные напряжения, возникающие в опасном сечении, не превышают допустимых. Для балки, поперечные размеры которой по всей длине постоянны, опасное сечение то, в котором возникает наибольший по модулю изгибающий момент. Наибольшие нормальные напряжения возникают в точках опасного поперечного сечения, максимально удаленных от нейтральной оси. Эти точки принято называть **опасными**. Значения максимальных напряжений в опасных точках рассчитываются по формулам:

$$\sigma_{\max p} = (M_z / J_z) \cdot y_1, \quad \sigma_{\max c} = (M_z / J_z) \cdot y_2,$$

где y_1 и y_2 – расстояния от нейтральной оси до наиболее удаленных точек соответственно в растянутой и сжатой зонах сечения.

Если материал балки хрупкий, например, закаленная сталь, чугун, текстолит и др., то расчет на прочность при изгибе проводят по напряжениям растяжения и сжатия. У хрупких материалов предел прочности при сжатии выше предела прочности при растяжении ($\sigma_{BC} > \sigma_{BP}$). Следовательно, поперечным сечениям балок из хрупких материалов целесообразно придавать ассиметричную форму относительно нейтральной оси (рис. 15.7) и располагать балку так, чтобы большая часть материала находилась в растянутой зоне.

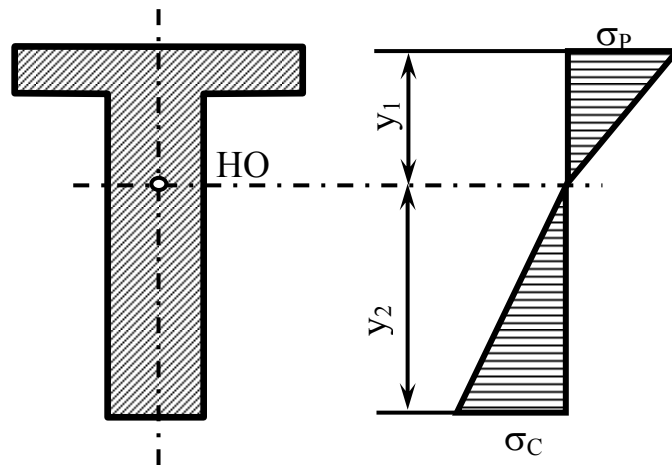


Рисунок 15.7

Таким образом, при расчетах балок из хрупкого материала используют два условия прочности:

для растянутой зоны

$$\sigma_{\max p} = (M_z / J_z) \cdot y_1 \leq [\sigma_p]; \quad (15.23)$$

для сжатой зоны

$$\sigma_{\max c} = (M_z / J_z) \cdot y_2 \leq [\sigma_c]. \quad (15.24)$$

Причем, наилучшее использование материала происходит при форме сечения, удовлетворяющей условию

$$y_1 / y_2 = [\sigma_p] / [\sigma_c].$$

При расчете балок из пластичных материалов, например, из низкоуглеродистой стали и цветных металлов, напротив, целесообразно брать балки с симметричными сечениями относительно нейтральной оси (рис. 15.8). В этом случае

$$\sigma_{\max p} = \sigma_{\max c} = \sigma_{\max} = (M_z / J_z) / (h/2).$$

Разделим числитель и знаменатель этого равенства на $(h/2)$

$$\sigma_{\max} = M_z / J_z / (h/2).$$

Величина $J_z / (h/2) = W_z$ – это момент сопротивления сечения при изгибе.

Для прямоугольного сечения (рис. 15.8), размеры которого $b \times h$, момент сопротивления

$$W_z = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^3}{12}; \quad h/2 = \frac{bh^2}{6}. \quad (15.25)$$

Для круглого сечения

$$W_z = \frac{J_x}{d/2} = \frac{\pi h^4}{64}; \quad d/2 = \frac{\pi h^3}{32}. \quad (15.26)$$

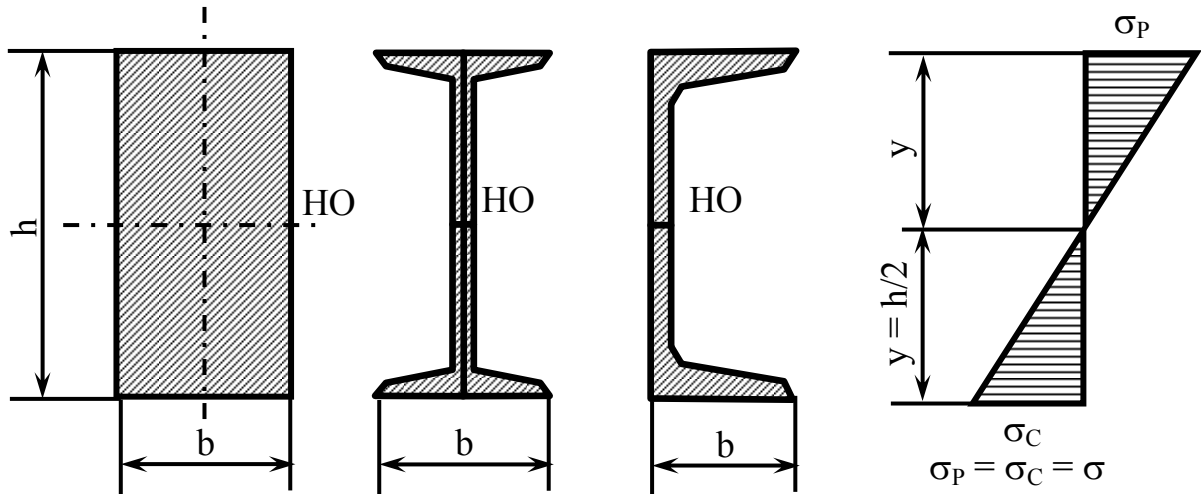


Рисунок 15.8

Наиболее экономичными сечениями при изгибе являются такие формы сечения, при которых материал бруса расположен как можно дальше от нейтральной оси. У таких брусьев при наименьшей затрате материала получается наибольший момент сопротивления W_z . Поэтому и возникли профили стандартного проката (рис. 15.8), все необходимые характеристики которых содержатся в ГОСТах: «Сталь горячекатаная», «Балки двутавровые», «Швелеры».

Условие прочности балки из пластичного материала имеет вид:

$$\sigma_{\max} = M_z / W_z \leq [\sigma], \quad (15.27)$$

исходя из которого, выполняют три вида расчетов.

Проектный расчет.

Приняв $\sigma_{\max} = [\sigma]$, по изгибающему моменту M_z в опасном сечении находят требуемое значение момента сопротивления:

$$W_z \geq M_z / [\sigma]. \quad (15.28)$$

Затем, исходя из принятой для балки формы поперечного сечения, находят его размеры.

Расчет допускаемой нагрузки.

Принимаем $\sigma_{\max} = [\sigma]$ и рассчитываем допускаемый момент $[M_z]$:

$$[M_z] = W_z / [\sigma].$$

Затем, исходя из схемы нагружения балки, находят допускаемое значение нагрузки.

Проверочный расчет.

Определяем максимальный изгибающий момент и момент сопротивления сечения. По формуле (15.27) находим значение σ и сравниваем его с $[\sigma]$.

Рассмотрим несколько примеров.

Для балки (рис. 15.9, а) подобрать из условия прочности необходимые размеры двутавра при двух вариантах его расположения (рис. 15.10, а, б). Принять $[\sigma] = 150$ МПа. Из эпюры M_z , построенной для этой балки (рис. 15.9, б), следует, что в опасном сечении $M_z = 11$ кН·м. По расчетной формуле (15.27) находим значение момента сопротивления сечения:

$$W_z \geq M_z / [\sigma] = 73.3 \text{ см}^3.$$

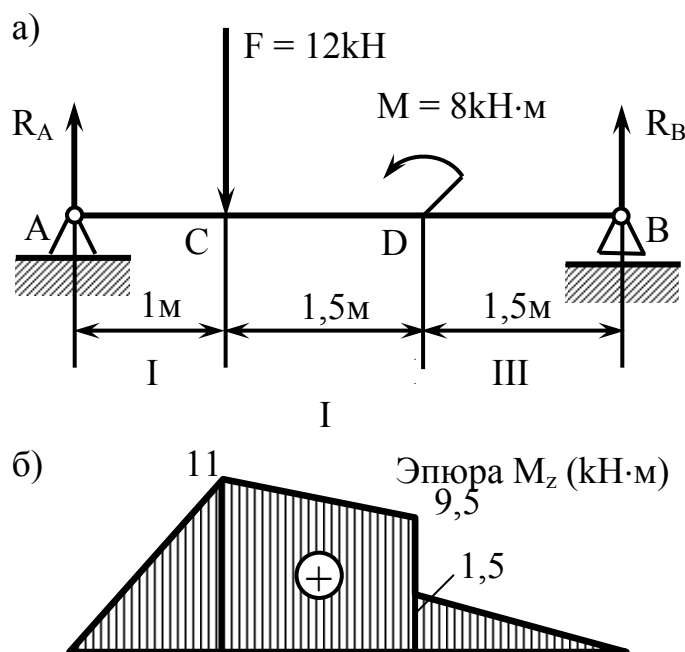


Рисунок 15.9

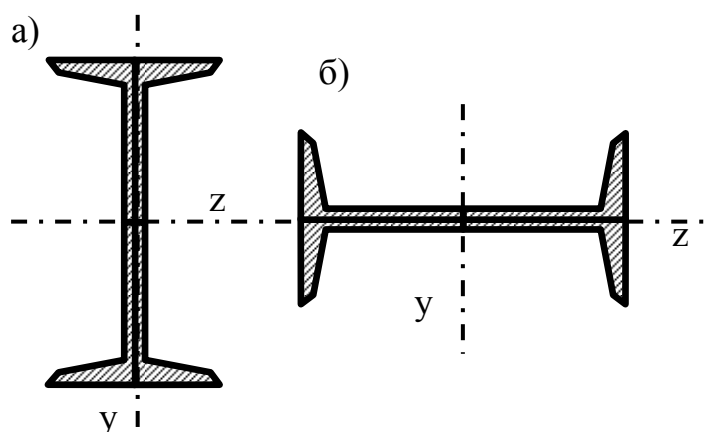


Рисунок 15.10

При расположении двутавра по варианту (а) из таблицы ГОСТ 8239-72 находим, что требуемому значению момента сопротивления соответствует двутавр N14 с $W_z = 81.7 \text{ см}^3$. Площадь поперечного сечения этого двутавра 17.4 см^2 , а масса $1 \text{ м} - 13.7 \text{ кг}$.

При расположении двутавра по варианту (б) номер двутавра N40 со значением $W_z = 86.1 \text{ см}^3$, площадью поперечного сечения 72.6 см^2 и массой $1 \text{ м} - 57 \text{ кг}$. Таким образом, при расположении по варианту (а) на четырехметровую балку расходуется стали на 173,2 кг меньше, чем при расположении по варианту (б).

Рассмотрим другой пример. На рис. 15.11 представлена балка, составленная из двух швеллеров N6,5. Необходимо определить допускаемую нагрузку $[F]$.

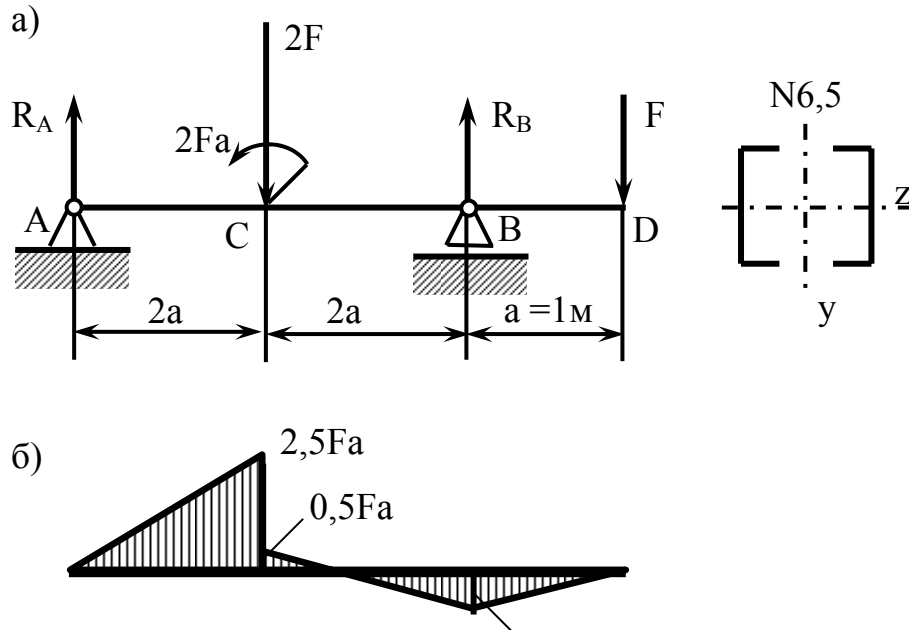


Рисунок 15.11

В первую очередь определяем реакции опор балки. Из уравнений моментов сил, действующих на балку, относительно точек A и B соответственно находим $R_A = 1.25 F$ и $R_B = 1.75 F$. Построив эпюру M_z (рис. 15.11, б), видим, что опасное сечение расположено под силой $2F$, где возникает максимальный по абсолютному значению изгибающий момент. Следовательно, расчетный момент $[M_z] = 2.5 Fa$.

По таблице ГОСТ 8240-72 момент сопротивления сечения одного швеллера N6,5 $W_z = 15 \text{ см}^3$, а так как главная центральная ось z сечения балки совпадает с главными осями каждого из швеллеров, момент сопротивления сечения

$$W_z = 2W_x = 30 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Из расчетной формулы (15.27) получим

$$W_z [\sigma] = 2.5 Fa,$$

откуда

$$[F] = W_z [\sigma] / (2.5 a) = 1.92 \text{ кН}.$$

16 ОСНОВНЫЕ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

Через любую точку тела можно провести бесконечное множество плоскостей, и всякий раз нормальное и касательное напряжения будут различными как по модулю, так и по направлению. Совокупность нормальных и касательных напряжений для множества площадок, проходящих через рассматриваемую точку, образует напряженное состояние в точке.

Предположим, что в окрестности исследуемой точки выделен бесконечно малый элемент, имеющий форму куба (модель точки), и напряжения, возникающие на его гранях, известны (рис. 16.1). Каждое из этих напряжений может быть разложено на три составляющих, параллельных соответствующим координатным осям. Таким образом, в общем случае на трех исходных площадках возникают девять составляющих напряжений (рис. 16.1): σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} , τ_{zy} .

Индекс у σ указывает ось, параллельно которой напряжение направлено; составляющая τ имеет два индекса: первый указывает, какой оси параллельна нормаль площадки рассматриваемого напряжения, второй – какой оси это напряжение параллельно. Нормальные растягивающие напряжения σ считают положительными, сжимающие – отрицательными. Что касается знака напряжений τ , то обуславливать его не будем, поскольку в пределах рассматриваемых ниже задач знак τ роли не играет.

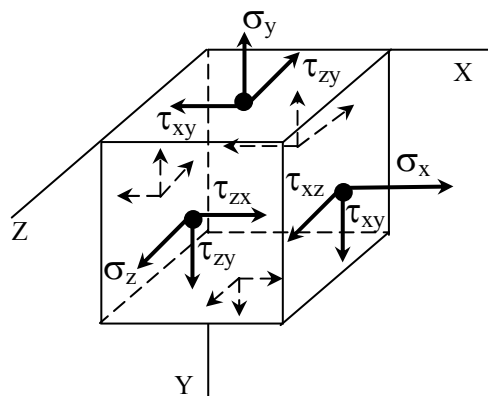


Рисунок 16.1

При исследовании напряженного состояния считают, что в пределах элементарного объема при переходе от грани куба к ее параллельной напряжения остаются постоянными и по граням распределяются равномерно.

Система сил, приложенных к выделенному элементу, должна удовлетворять условиям равновесия.

Для получения сил необходимо каждое из напряжений умножить на площадь грани, на которой оно возникает. Например, нормальная сила, возникающая на площадке, перпендикулярной оси X , равна $\sigma_x dA$. Поскольку на противоположных гранях возникают равные и противоположно направленные силы, то сумма проекций всех сил на оси X , Y и Z равна нулю независимо от значений возникающих напряжений. Составим уравнение моментов сил относительно оси X . При составлении этого уравнения легко обнаружить, что момент каждой силы уравнивается моментом противоположной силы, расположенной на невидимой грани (рис. 16.1).

Исключение составляют касательные силы $\tau_{yz} dA$ и $\tau_{zy} dA$. Тогда $\tau_{yz} dA - \tau_{zy} dA = 0$. Подобным образом запишутся уравнения моментов сил и относительно осей Y и Z . Из этих уравнений следует

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

т.е. на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярных общему ребру, равны и направлены либо к ребру, либо от ребра. Это положение известно под названием **закона парности касательных напряжений**.

Таким образом, напряженное состояние в точке определяется шестью независимыми составляющими напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$, возникающими на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку. С помощью этих шести составляющих можно определить напряжения на любой другой площадке и исследовать вопрос об экстремальности напряжений.

Среди бесчисленного множества площадок, которые можно провести через исследуемую точку, имеются три взаимно перпендикулярные площадки, нормальные напряжения на которых принимают экстремальные значения, а касательные напряжения отсутствуют. Эти площадки принято называть **главными площадками**, а нормальные напряжения на них – **главными напряжениями**. В по-

рядке возрастания эти напряжения обозначают через $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$. Например, если одно из главных напряжений равно нулю, другое растягивающее – 20 МПа, а третье сжимающее – 80 МПа, то их следует обозначать: $\sigma_1 = 20$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -80$ МПа.

В зависимости от наличия главных напряжений, отличных от нуля, различают:

- объемное напряженное состояние, если все три главные напряжения отличны от нуля;
- плоское напряженное состояние, если два главных напряжения отличны от нуля;
- линейное (одноосное) напряженное состояние, если отлочно от нуля одно главное напряжение.

Ниже мы ограничимся рассмотрением плоского напряженного состояния, которое реализуется сравнительно часто в элементах конструкции, например, в точках поверхностей деталей машин.

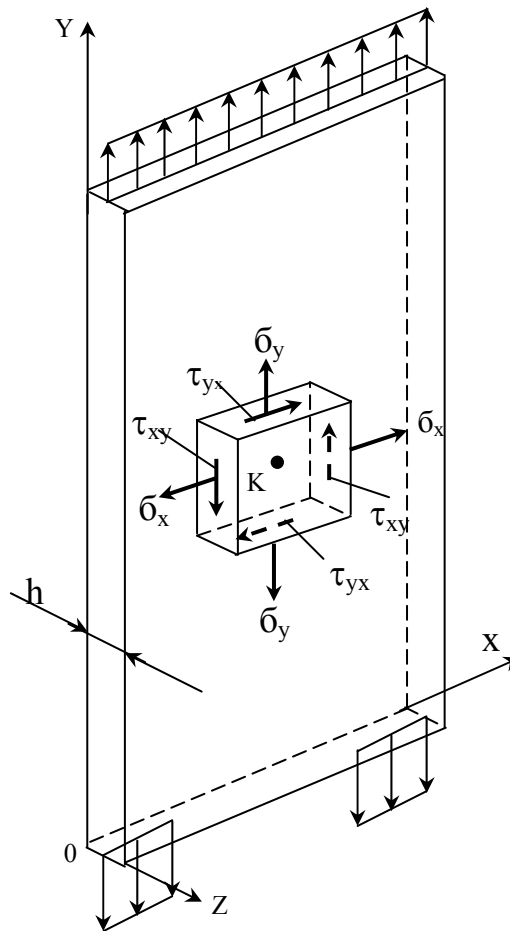


Рисунок 16.2 – Плоское напряженное состояние

Рассмотрим тонкую пластину (рис. 16.2) под действием внешних сил в системе координат $OXYZ$. Ее поверхности, перпендикулярные оси Z , свободны от внешних сил. В окрестности произвольной точки K сечениями, перпендикулярными плоскостям этой пластинки, мысленно выражен элементарный параллелепипед. Со стороны пластинки на этот параллелепипед будут действовать в общем случае нормальные и касательные усилия. Векторы нормальных и касательных напряжений, соответствующие этим условиям, будут также лежать в одной плоскости, образуя в окрестности точки K плоское напряженное состояние.

Исследуем напряженное состояние в наклонной площадке. Для этого, разрезав элементарный параллелепипед наклонным сечением, перпендикулярным плоскости пластинки, выделим из него треугольную призму (рис. 16.3). Рассмотрим равновесие этой призмы под действием известных напряжений σ_x , σ_y , и τ_{xy} и неизвестных напряжений σ_α и τ_α на наклонной площадке. Положение наклонной площадки будем задавать углом α между внешней нормалью n к этой площадке и осью X . Угол считаем положительным ($\alpha > 0$), если в принятой системе координат поворот нормали от оси X к оси Y совершается против часовой стрелки.

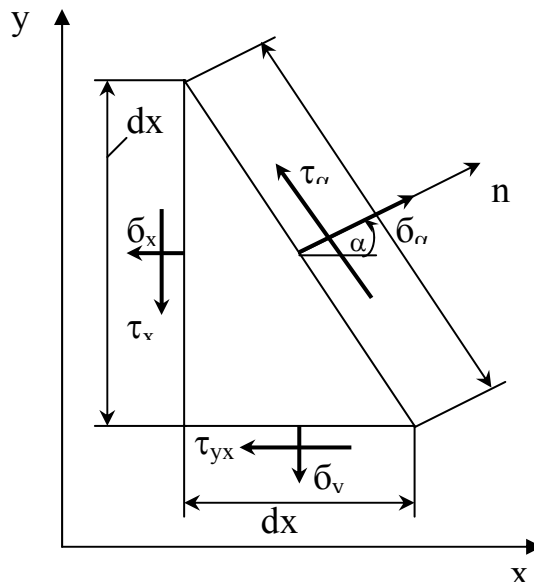


Рисунок 16.3 – Напряжения на наклонной площадке

Проецируя силы, действующие на призму, последовательно на направление нормали и касательной к наклонной площадке, получим

$$\sigma_{\alpha} h dS = \sigma_x h dy \cos \alpha + \sigma_y h dx \sin \alpha + \tau_{xy} h (dy \sin \alpha + dx \cos \alpha);$$

$$\tau_{\alpha} h dS = -\sigma_x h dy \sin \alpha + \sigma_y h dx \cos \alpha + \tau_{xy} h (dy \cos \alpha - dx \sin \alpha).$$

Учитывая, что $dx = dS \sin \alpha$ и $dy = dS \cos \alpha$, из полученных уравнений найдем

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad (16.1)$$

$$\tau_{\alpha} = 0.5(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (16.2)$$

Формулы (16.1) и (16.2) позволяют вычислить нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке при любом значении угла α .

Для определения главных площадок, т.е. площадок на которых касательные напряжения равны нулю, можно приравнять к нулю соотношение (16.2). Тогда получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y). \quad (16.3)$$

Так как тангенс угла периодическая функция с периодом π , то уравнению (16.3) будут удовлетворять углы

$$2\alpha_{0n} = 2\alpha_0 + \pi n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что существует всего два взаимно перпендикулярных главных направления, образующих с осью X углы α_0 и $\alpha_0 + \pi/2$. Нормальные напряжения на этих площадках, как это было уже указано, называются главными. Исследуя на экстремум выражение (16.1), можно убедиться, что условие экстремума для σ_{α} совпадает с условием равенства нулю касательных напряжений на главных площадках.

Главные напряжения можно найти из уравнения (16.1) при $\alpha = \alpha_0$:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha_0 + \sigma_y \sin^2 \alpha_0 + \tau_{xy} \sin 2\alpha_0$$

или

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\alpha_0. \quad (16.4)$$

Принимая во внимание, что

$$\cos 2\alpha_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}; \quad \sin 2\alpha_0 = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}},$$

после некоторых преобразований найдем

$$\sigma_{\alpha} = 0.5(\sigma_x + \sigma_y) \pm 0.5\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Откуда

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 0.5(\sigma_x + \sigma_y) + 0.5\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \quad (16.5)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = 0.5(\sigma_x + \sigma_y) - 0.5\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (16.6)$$

Таким образом, плоское напряженное состояние в каждой точке тела путем поворота осей может быть представлено как растяжение-сжатие в двух взаимно перпендикулярных направлениях напряжениями σ_1 и σ_2 (рис. 16.4, а).

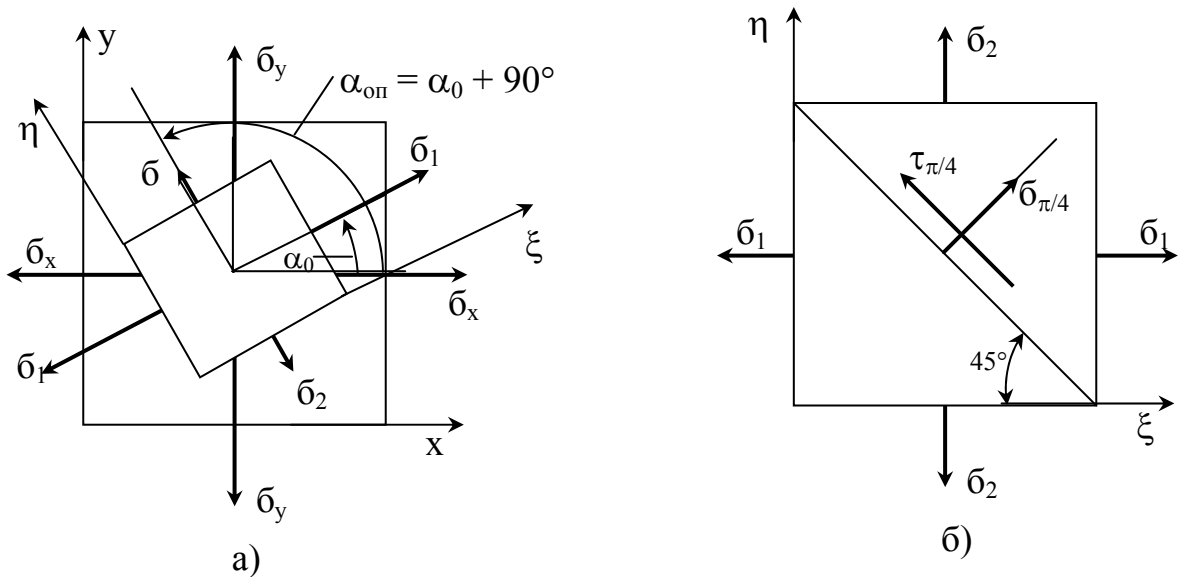


Рисунок 17.4 – Главные напряжения и главные площадки

Отметим, что при плоском напряженном состоянии третье главное напряжение $\sigma_3 = 0$.

Складывая почленно соотношения (16.5) и (16.6), получим

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y,$$

т.е. сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках не зависит от угла α .

Элементы конструкций из ряда материалов разрушаются под действием максимальных касательных напряжений. Для их определения продифференцируем по α соотношение (16.2) и приравняем производную к нулю. В результате получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\tau} = (\sigma_y - \sigma_x) / \tau_{xy}. \quad (16.7)$$

Подставляя это равенство в формулу (16.2), после преобразования получим

$$\tau_{\alpha 0} = \tau_{\max, \min} = \pm 0.5 \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (16.8)$$

Следовательно, максимальное и минимальное касательные напряжения равны по величине и отличаются лишь знаком.

С учетом формулы (16.5), (16.6) устанавливаем

$$\tau_{\max} = 0.5 |\sigma_1 - \sigma_2|. \quad (16.9)$$

Взаимное положение главных площадок и площадок, на которых действуют экстремальные касательные напряжения, найдем, сопоставляя равенство (16.3) и (16.7)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 \cdot \operatorname{tg} 2\alpha_\tau = -1.$$

Из этого условия следует, что $\alpha_\tau = \alpha_0 + \pi/4$. Напряжения на площадке, составляющие угол 45° с главными осями (главными площадками, рис. 17.4, б) будут равны

$$\sigma_{\pi/4} = 0.5(\sigma_1 + \sigma_2); \quad \tau_{\pi/4} = -0.5(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (16.10)$$

Следовательно, в площадках, где действуют максимальные касательные напряжения, имеются и нормальные напряжения.

Отметим важный частный случай плоского напряженного состояния. Это напряженное состояние чистого сдвига, для которого отличные от нуля главные напряжения равны по модулю и противоположны по знаку (рис. 16.5, а).

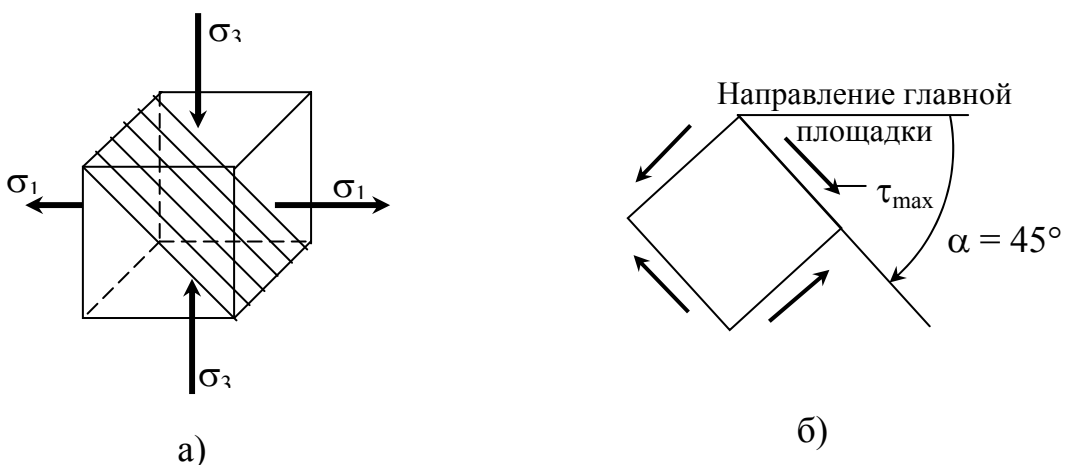


Рисунок 16.5

Полагая в формулах (16.10) значения главных напряжений, одно из которых имеет отрицательный знак и, следовательно, имеет

индекс 3 вместо индекса 2, равных по величине и противоположных по знаку ($\sigma_1 = -\sigma_3$), будем иметь

$$\sigma_{\pi/4} = 0 \quad \text{и} \quad \tau_{\pi/4} = \tau_{\max} = \sigma_1 = -\sigma_3.$$

Таким образом, при чистом сдвиге на площадках действия максимальных касательных напряжений нормальные напряжения отсутствуют. Отсюда возможно другое определение: **чистым сдвигом** называется такое напряженное состояние, при котором в окрестности данной точки можно выделить элемент таким образом, чтобы на его четырех гранях были только касательные напряжения, а остальные две грани были от напряжения свободны (рис. 16.5, б). Это определение можно рассматривать как объяснение названия, принятого для данного напряженного состояния.

16.1 Обобщенный закон Гука

Определим деформации ε_1 и ε_2 в направлении главных напряжений при плоском напряженном состоянии. Для этого используем закон Гука для линейного напряженного состояния.

Напряжение σ_1 вызывает продольную деформацию $\varepsilon_{11} = \sigma_1 / E$ и поперечную деформацию в направлении напряжения σ_2 $\varepsilon_{21} = -\mu \sigma_1 / E$.

Напряжение σ_2 вызывает деформации

$$\varepsilon_{22} = \sigma_2 / E; \quad \varepsilon_{12} = -\mu \sigma_2 / E.$$

Суммируя деформации одного направления, получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu \sigma_2); \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21} = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu \sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

Аналогично получаем для объемного напряженного состояния (рис. 16.6):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]; \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

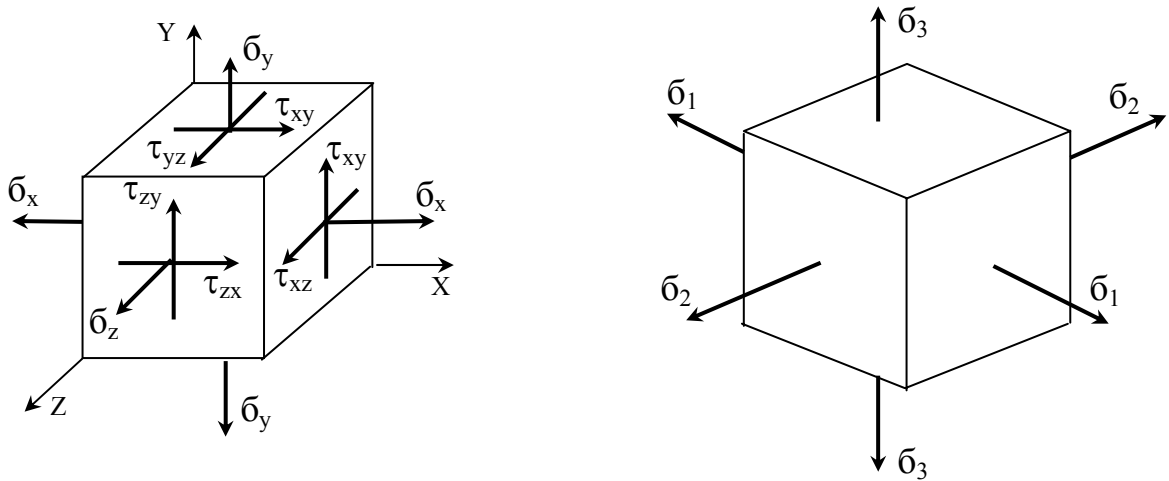


Рисунок 16.6 – Объемное напряженное состояние

Уравнения (16.11) и (16.12) представляют собой закон Гука соответственно для плоского и объемного напряженных состояний.

Если известны значения главных деформаций, то несложно вычислить изменение объема элемента при деформации. Например, для кубика (см. рис. 16.6) с длиной ребра 1 мм объем до деформации $V_0 = 1 \text{ мм}^3$, а после деформации его объем

$$V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \approx 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

т.к. произведения деформаций малы по сравнению со значениями самих деформаций.

Относительное изменение объема

$$\varepsilon_v = (V - V_0) / V_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

С учетом равенств (16.12) найдем

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \varepsilon_v. \quad (16.13)$$

Из последнего выражения следует, что коэффициент Пуассона не может быть больше 0.5.

В частном случае при равномерном всестороннем растяжении $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$

$$\varepsilon_v = \frac{3\sigma}{E} (1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{K}, \quad (16.14)$$

где $K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$ – модуль объемной деформации.

17 ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Оценка прочной надежности является главной инженерной задачей, в которой напряженное состояние в «опасной» точке элемента конструкции сопоставляется с предельным состоянием, определяемым пределом текучести, пределом прочности и т.п. для материала этого элемента. Такая оценка оказывается достаточно точной, когда материал элемента конструкции находится в одноосном напряженном состоянии (растяжение, сжатие) или в простейшем двухосном, когда главные напряжения в каждой точке равны между собой по величине, но противоположны по знаку (сдвигу, кручению).

Однако многие элементы конструкций при нагружении работают в условиях сложного (плоского, объемного) напряженного состояния. При этом возникает вопрос о том, каким образом совокупность напряжений в точке элемента сопоставить с механическими характеристиками его материала, т.е. необходимо установить некоторое эквивалентное напряжение (рис. 17.1), которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние было равноопасно с заданным.

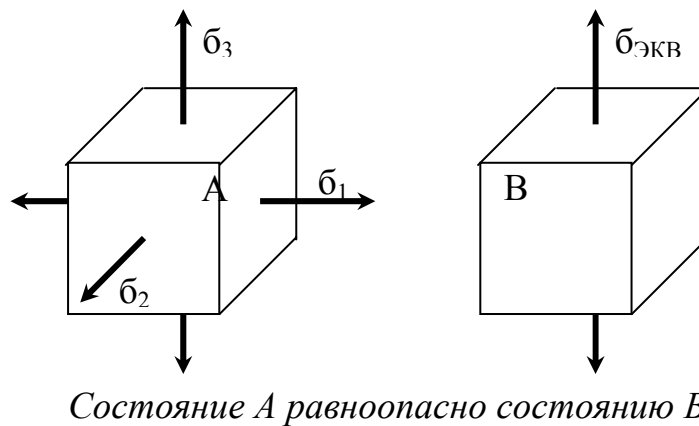


Рисунок 17.1 – Объемное и эквивалентное напряженные состояния

Поставленная задача является весьма сложной. Наиболее точный ответ можно было бы получить, испытав до разрушения образец из материала детали при заданном соотношении главных напряжений. Но такие испытания требуют очень сложных машин и приборов.

В связи с этим учеными предложен ряд гипотез (теорий) прочности, которые позволяют без трудоемких экспериментов оценить опасность перехода в предельное состояние материала элементов конструкции, находящихся в сложном напряженном состоянии.

Ниже рассмотрены лишь теории прочности, которые наиболее широко применяются в инженерной практике.

1. Теория наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности).

Согласно этой теории, сложное напряженное состояние равноопасно с простым растяжением, если максимальное нормальное напряжение ($\sigma_{\max} = \sigma_1$) равно нормальному напряжению при растяжении, т.е.

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1. \quad (17.1)$$

Напряжения σ_2 и σ_3 по этой теории не влияют на прочностную надежность элемента конструкции, которая определяется условием

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_0, \quad (17.2)$$

где σ_0 – предельное напряжение, полученное при растяжении стандартного образца.

Теория наибольших нормальных напряжений дает достаточно удовлетворительные результаты при расчете деталей из хрупких материалов.

2. Теория наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности).

Эта теория основывается на предположении, что материал разрушается тогда, когда наибольшее относительное удлинение или укорочение в каком-либо направлении достигает величины, при которой происходит разрушение при простом растяжении или сжатии.

Условие прочности по этой теории

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0,$$

где ε_0 – предельное значение относительного удлинения при растяжении стандартного образца. Наиболее применима эта теория также только для хрупких материалов.

3. Теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности).

Эта теория основывается на предположении, что основной причиной появления опасного состояния (текучести) материала являются наибольшие касательные напряжения.

По этой теории текучесть материала независимо от напряженного состояния наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает значения, при котором происходит появление опасного состояния (текучести) в случае простого растяжения.

Для плоского напряженного состояния максимальное касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau_{\max} = 0.5 |\sigma_1 - \sigma_2|.$$

Если деформация бруса происходит по трем взаимно перпендикулярным направлениям с напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то касательные напряжения определяются по формулам

$$\tau_1 = 1/2 (\sigma_2 - \sigma_3); \quad \tau_2 = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3); \quad \tau_3 = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_2).$$

Каждое напряжение подставляется в эти формулы со своим знаком. Если $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то наибольшее касательное напряжение будет

$$\tau_{\text{экв}} = \tau_{\max} = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3). \quad (17.3)$$

При $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ и $\sigma_3 = 0$ максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = \sigma_1 / 2$.

Условие прочности по этой теории

$$\tau_{\max} \leq \tau_0, \quad (17.4)$$

где τ_0 – предельное значение касательного напряжения при кручении.

Применяя условие (17.4) для растяжения стержня и учитывая, что при растяжении стержня $\tau_{\max} = \sigma / 2$ и в предельном случае $\tau_{\max} = \sigma_0 / 2$, получим

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_0. \quad (17.5)$$

Для плоского напряженного состояния условие (17.5) с учетом состояний (17.8) примет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (17.6)$$

На практике встречаются случаи, когда $\sigma_y = 0$, тогда

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (17.7)$$

Рассмотренная теория, предложенная Кулоном, хорошо согласуется с экспериментами для пластичных материалов.

4. Энергетическая теория прочности.

Эта теория основывается на предположении, что сложное напряженное состояние равноопасно с простым растяжением, если они имеют одинаковые удельные энергии формоизменения.

В общем случае полная удельная потенциальная энергия деформации (u) складывается из удельной потенциальной энергии изменения объема (u_v) и удельной потенциальной энергии, связанной с изменением формулы (u_ϕ).

Подсчитаем полную удельную потенциальную энергию деформации выделенного из тела элемента в виде единичного куба, грани которого являются главными площадками, на которых действуют напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Потенциальная энергия, накапливаемая элементом при деформации, в каждом из этих направлений равна работе силы $P_i = \sigma_i \cdot F_0$ (F_0 – площадь грани) при его деформации ε_i и равна

$$u_i = \frac{\sigma_i^2}{2E}, \quad (17.8)$$

где E – модуль упругости.

На основании принципа суперпозиции, с учетом полученного выражения (17.8), удельная потенциальная энергия деформации при объемном напряженном состоянии

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{3}. \quad (17.9)$$

Воспользовавшись обобщенным законом Гука (17.12), исключим деформации и в результате получим

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (17.10)$$

Для определения энергии формоизменения, определим удельную потенциальную энергию изменения объема. Это состояние соответствует гидростатическому растяжению (сжатию), при котором на всех гранях кубика действуют одинаковые средние напряжения

$$\sigma_{жс} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3. \quad (17.11)$$

Под действием этих напряжений форма кубика не меняется, а изменяется его лишь объем.

Подставив соотношение (17.11) в (17.10) вместо σ_1 , σ_2 , σ_3 , получим значение u_v

$$u_v = \frac{1-2\mu}{2E} 3 \sigma_m^2 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (17.12)$$

Наконец, вычитая из (17.10) значение u_v , получим потенциальную энергию формоизменения

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1), \quad (17.13)$$

или

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (17.14)$$

Для простого растяжения ($\sigma_{экр} = \sigma_1$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) из последнего выражения будем иметь

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_{экр}^2. \quad (17.15)$$

Сравнивая равенства (17.15) и (17.14), устанавливаем

$$\sigma_{экр} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (17.16)$$

Для плоского напряженного состояния последнее соотношение принимает вид

$$\sigma_{экр} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (17.17)$$

В частном случае, когда $\sigma_y = 0$, то, приняв $\sigma_x = \sigma$ и $\tau_{xy} = \tau$, найдем

$$\sigma_{экр} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (17.18)$$

Рассмотренная теория хорошо согласуется с экспериментами для пластичных материалов и широко применяется на практике.

Следует упомянуть гипотезу, предложенную О. Мором, которую можно считать усовершенствованной теорией касательных напряжений. Согласно этой гипотезе эквивалентное напряжение рас-

считывается по формуле, аналогичной (17.5), но с коэффициентом ν при σ_3 :

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sigma_1 - \nu \sigma_3. \quad (17.19)$$

Здесь ν имеет различные значения для хрупких и пластичных материалов:

$\nu = \sigma_{BP} / \sigma_{BC}$ – для хрупких материалов;

$\nu = \sigma_{TP} / \sigma_{TC}$ – для пластичных материалов.

В частном случае, когда пределы текучести материала при растяжении и сжатии одинаковы ($\sigma_{TP} = \sigma_{TC}$), $\nu = 1$ и формула (17.19) приводится к (17.5).

Рассмотрим простой пример применения полученных соотношений.

Определим запас прочности по пластическим деформациям болта соединения (рис. 17.2) с резьбой M24 x 1.5, если в результате затяжки в нем создано усилие $F_0 = 45 \text{ kN}$, а момент сопротивления резьбе (крутящий момент) составлял $T = 200 \text{ Н м}$. Материал болта – углеродистая сталь ($\sigma_T = 650 \text{ МПа}$).

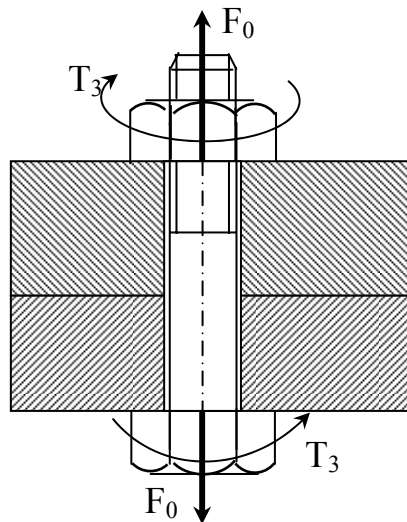


Рисунок 17.2 – Болтовое соединение

Оценим сначала прочность болта в сечении минимального диаметра по впадинам резьбы. По стандарту находим, что внутренний диаметр резьбы $d_1 = 22,38 \text{ мм}$.

Определим напряжение растяжения в болте от усилия затяжки:

$$\sigma_1 = \frac{4F_0}{\pi d_1} = 114,65 \text{ МПа}.$$

Вычисляем теперь касательные напряжения от момента в резьбе (обусловлен трением витков и подъемом витков).

$$\tau_1 = \frac{M_{kp}}{W_p} = \frac{T}{0.2 d_1^3} = 178,4 \text{ МПа}.$$

Теперь находим эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_1^2} = 325 \text{ МПа}.$$

Определяем запас прочности

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{экв}}} = \frac{650}{325} = 2.$$

18 РАСЧЕТЫ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ

Рассмотрим брус круглого поперечного сечения, нагруженного двумя парами сил таким образом (рис. 18.1), что плоскость действия первой перпендикулярна оси бруса, а плоскость действия второй проходит через ось бруса. Тогда момент M_1 первой пары скручивает брус, а момент M_2 второй пары его изгибает. При таком нагружении бруса в его поперечных сечениях возникают два внутренних силовых фактора – крутящий момент M_k и изгибающий момент $M_{из}$, причем по всей длине бруса $M_k = M_1$, а $M_{из} = M_2$ (рис. 18.1, б, в).

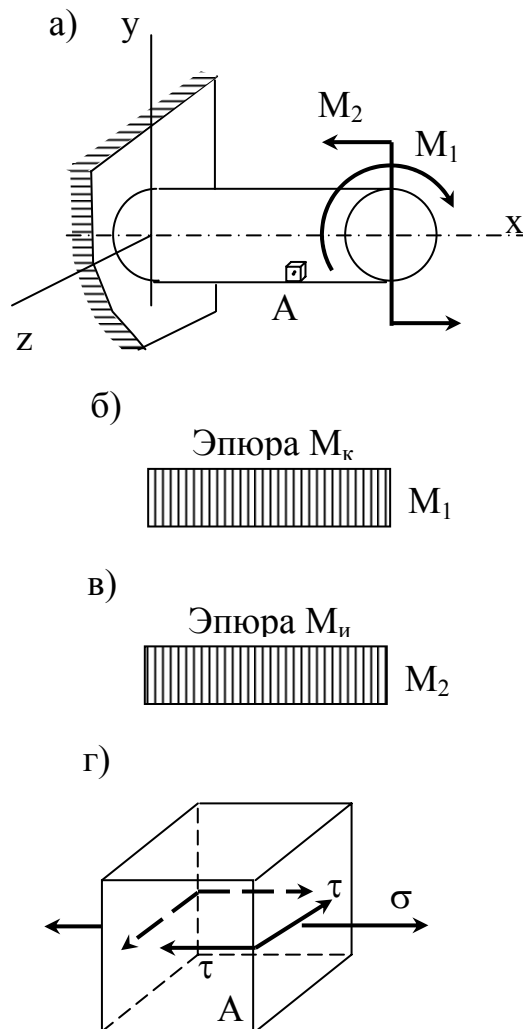


Рисунок 18.1

Как известно, при кручении наибольшие касательные напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удален-

ных от оси бруса, а при изгибе наибольшие нормальные напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси. Следовательно, у рассматриваемого бруса наиболее опасное напряженное состояние возникает в точках, наиболее удаленных от оси X . Выделим одну из таких точек (точку A) и изобразим ее в виде элемента, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 18.1, г). Видно, что напряженное состояние в точке A характеризуется нормальными напряжениями σ , действующими по площадкам элемента, совпадающими с поперечными сечениями бруса, и касательными напряжениями τ , действующими по этим же и перпендикулярным им площадкам (по закону парности касательных напряжений).

Эквивалентное напряжение выразится для рассматриваемого случая по третьей гипотезе

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (\text{формула 17.7})$$

по пятой гипотезе (энергетический)

$$\sigma_{\text{экв V}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (\text{формула 17.18})$$

В обе эти формулы входят напряжение изгиба $\sigma = M_{\text{и}} / W_{\text{и}}$ и напряжение кручения $\tau = M_{\text{к}} / W_{\text{р}}$, причем $W_{\text{р}} = 2 W_{\text{и}}$. Поэтому последние две формулы можно привести к виду

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{(M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2)} / W_{\text{и}}, \quad (18.1)$$

$$\sigma_{\text{экв V}} = \sqrt{(M_{\text{и}}^2 + 0.75M_{\text{к}}^2)} / W_{\text{и}}, \quad (18.2)$$

Таким образом, рассчитывая брус при изгибе с кручением, эквивалентные напряжения можно определить сразу через значения изгибающего и крутящего моментов, возникающих в опасном сечении бруса.

Арифметическое значение корней в числителях формул (18.1), (18.2) обозначают как эквивалентные моменты $M_{\text{э}}$:

$$M_{\text{э III}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2} \quad \text{и} \quad M_{\text{э V}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0.75M_{\text{к}}^2}.$$

Используя это обозначение, условие прочности для бруса при изгибе с кручением запишем в таком виде:

$$\sigma_{\text{э}} = M_{\text{э}} / W_{\text{и}} \leq [\sigma]. \quad (18.3)$$

В случае пространственного нагружения вала, например, в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 18.2, а), в его сечениях, кроме крутящего момента M_k , под воздействием вертикальных сил возникает изгибающий момент M_z , а под воздействием горизонтальных сил – изгибающий момент M_y (рис. 18.2, б). Если изобразить эти моменты векторами $\overline{M_k}$, $\overline{M_z}$, $\overline{M_y}$, то увидим, что изгибающий $\overline{M_u}$ есть геометрическая сумма моментов $\overline{M_z}$ и $\overline{M_y}$ и его модуль равен

$$M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Поэтому при пространственном нагружении вала в случае применения третьей гипотезы прочности

$$M_{\sigma III} = \sqrt{M_u^2 + M_k^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2}, \quad (18.4)$$

а в случае применения пятой гипотезы

$$M_{\sigma V} = \sqrt{M_u^2 + 0.75M_k^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0.75M_k^2}. \quad (18.5)$$

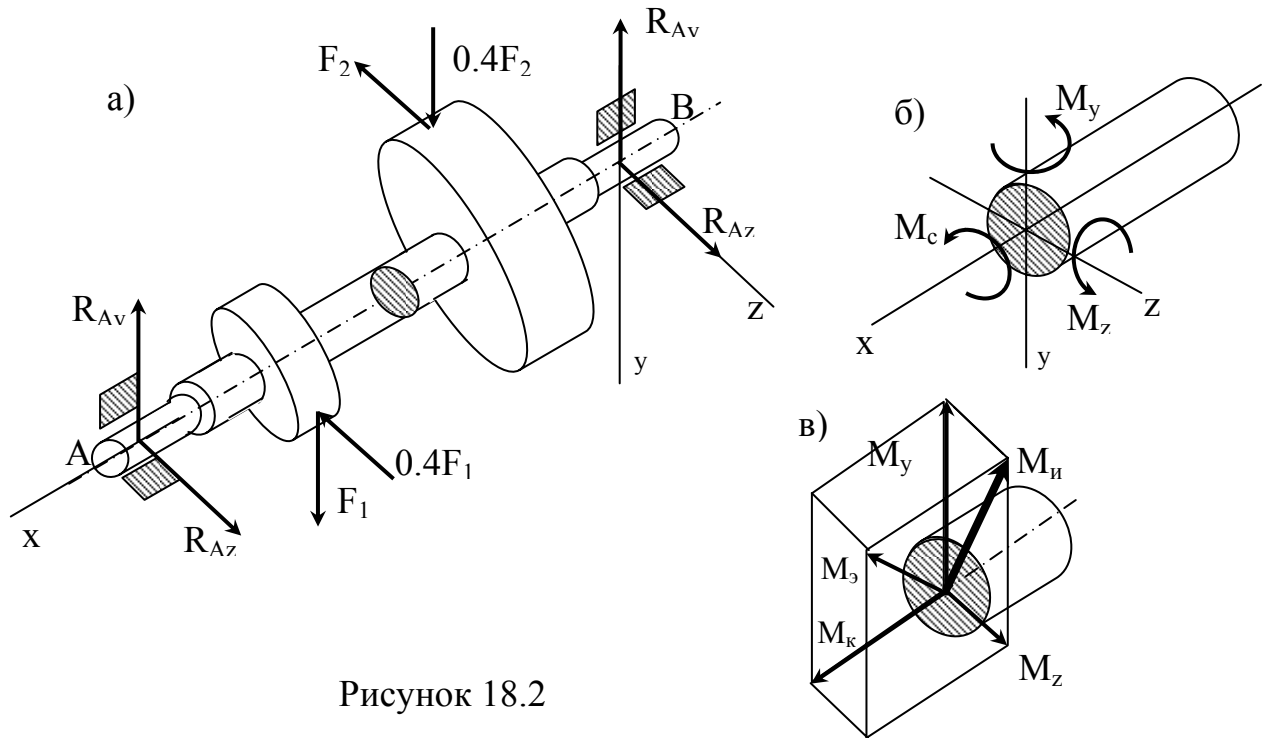


Рисунок 18.2

Рассмотрим пример расчета вала, нагруженного так, как это показано на рис. 18.3, а. Вал передает от левого конца к зубчатому

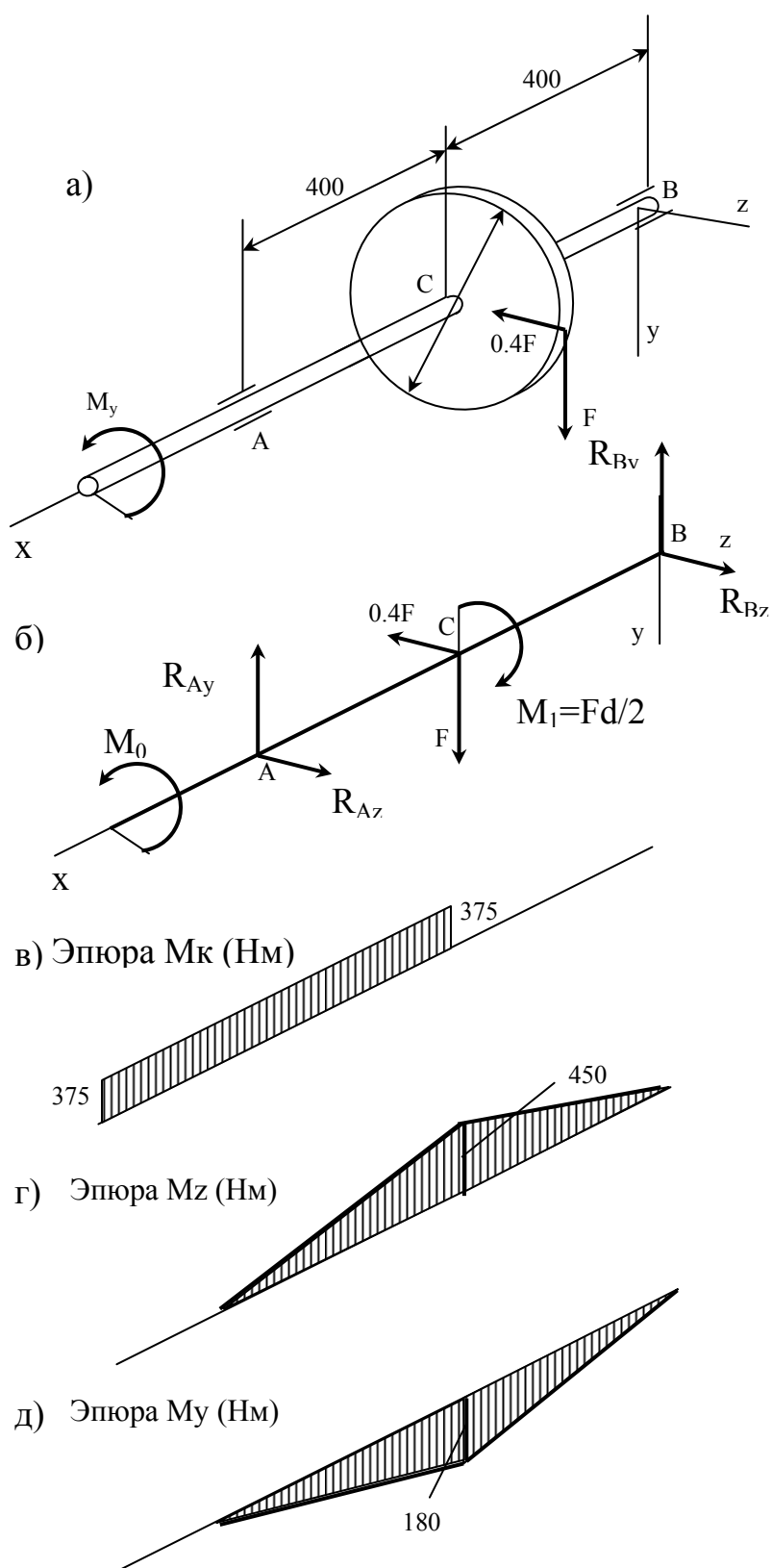


Рисунок 18.3

колесу, диаметром $d = 1/3$ м, мощность $P = 15$ кВт при частоте вращения $n = 382$ об/мин. Следует из условия прочности рассчитать необходимый диаметр вала. Принять $[\sigma] = 80$ МПа.

1. Для решения этой задачи необходимо в первую очередь составить расчетную схему вала. Приведем силу F к точке C на оси вала. Для этого заменим силу F системой сил ей эквивалентной: силой F , приложенной к оси вала, и парой сил с моментом $M_1 = F(d/2)$, действующим в плоскости зубчатого колеса. Далее освободим вал в точках A и B от опор (подшипников), заменив их реакциями в горизонтальной ($\overline{R_{AZ}}, \overline{R_{BZ}}$) и вертикальной ($\overline{R_{AY}}, \overline{R_{BY}}$) плоскостях. В результате получаем расчетную схему вала (рис. 18.3, б).

2. Исходя из того, что вал передает мощность $P = 15$ кВт при частоте вращения n соответствующей угловой скорости $\omega = \pi n/30$, находим вращательный момент M_0 , приложенный к левому концу вала:

$$M_0 = P / \omega = P \cdot 30 / (\pi n) = 375 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Из равенства $M_0 = M_1 = Fd/2$ находим касательную силу F :

$$F = 2 M_0 / d = 2250 \text{ Н}.$$

Следовательно, радиальная сила

$$0.4 F = 900 \text{ Н}.$$

3. Находим реакции опор, воспользовавшись симметричным их расположением относительно зубчатого колеса

$$\begin{aligned} \overline{R_{AZ}} &= \overline{R_{BZ}} = 0.4 F / 2 = 450 \text{ Н}; \\ \overline{R_{AY}} &= \overline{R_{BY}} = F / 2 = 1125 \text{ Н}. \end{aligned}$$

4. Осуществляем построение эпюр моментов в трех взаимно перпендикулярных плоскостях: YOZ , XOY , XOZ . На участке от левого конца до зубчатого колеса вал скручивается моментами M_0 и M_1 . Следовательно, в любом сечении на этом участке крутящий момент $M_k = |M_0| = |M_1| = 375 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Следовательно, эпюра M_k имеет вид прямой (const), показанной на рис. 18.3, в.

В плоскости XOY под действием сил $\overline{F}$, $\overline{R_{AY}}$, $\overline{R_{BY}}$ вал изгибается на участке между опорами A и B . В сечениях, проходящих через эти точки, изгибающие моменты равны нулю, а наибольшего значения изгибающий момент M_z (вращение момент осуществляет

относительно оси OZ) достигает в сечении, совпадающим со средней плоскостью зубчатого колеса

$$M_{zc} = \overline{R_{AY}} \cdot AC = \overline{R_{BY}} \cdot BC = 450 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Эпюра M_z изображена на рис. 18.3, г.

В плоскости XOZ вал изгибается на том же участке под действием сил $0.4\overline{F}$, $\overline{R_{AY}}$, $\overline{R_{BY}}$.

Наибольший изгибающий момент (рис. 18.3, д) имеет место в том же сечении, что и M_z :

$$M_{zc} = \overline{R_{AZ}} \cdot AC = \overline{R_{BZ}} \cdot BC = 180 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

5. Рассчитываем эквивалентный момент, используя третью гипотезу прочности, в опасном сечении вала, проходящего через точку С:

$$M_{\text{э III}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_x^2} = \sqrt{450^2 + 180^2 + 375^2} = 613 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

6. Из условия прочности 18.3, полагая $\sigma_{\text{э}} = [\sigma]$, находим требуемый момент сопротивления сечения вала:

$$W_{\text{и}} = M_{\text{э}} / [\sigma] = 613 / (80 \cdot 10^6) = 7660 \text{ мм}^3.$$

По значению $W_{\text{и}}$ определяем диаметр вала по формуле:

$$d = \sqrt[3]{32W_{\text{и}} / \pi} = 43 \text{ мм}.$$

18.1 Сложное сопротивление

1. Косой изгиб бруса

Если в поперечном сечении бруса возникают два внутренних силовых фактора – изгибающие моменты M_z и M_y , то происходит косой чистый изгиб. При поперечном косом изгибе в поперечных сечениях бруса одновременно с изгибающими моментами возникают поперечные силы Q_z и Q_y . В том и другом случае нормальное напряжение σ в любой точке К поперечного сечения (рис. 18.4, а) согласно принципу независимости действия сил определяется как алгебраическая сумма напряжений, обусловленных изгибающими моментами M_z и M_y , т.е.

$$\sigma = \sigma_{MY} + \sigma_{MZ} = (M_y / J_y) \cdot z + (M_z / J_z) \cdot y. \quad (18.6)$$

В зависимости от нагружения бруса слагаемые напряжения направлены в разных четвертях поперечного сечения либо в одну и ту же, либо в противоположные стороны (рис. 18.4, б). Чтобы определить точки сечения, в которых напряжения достигают наибольших значений, необходимо найти положение нулевой линии. Для этого приравняем уравнение (18.6) нулю, заменив y и z координатами y_0 и z_0 , принадлежащими нулевой линии

$$(M_y / J_y) \cdot z_0 + (M_z / J_z) \cdot y_0 = 0.$$

Отсюда

$$y_0 = -(M_y / M_z)(J_z / J_y) \cdot z_0.$$

Это уравнение показывает, что нулевая линия – прямая, проходящая через начало координат под углом β к оси Z , тангенс которого

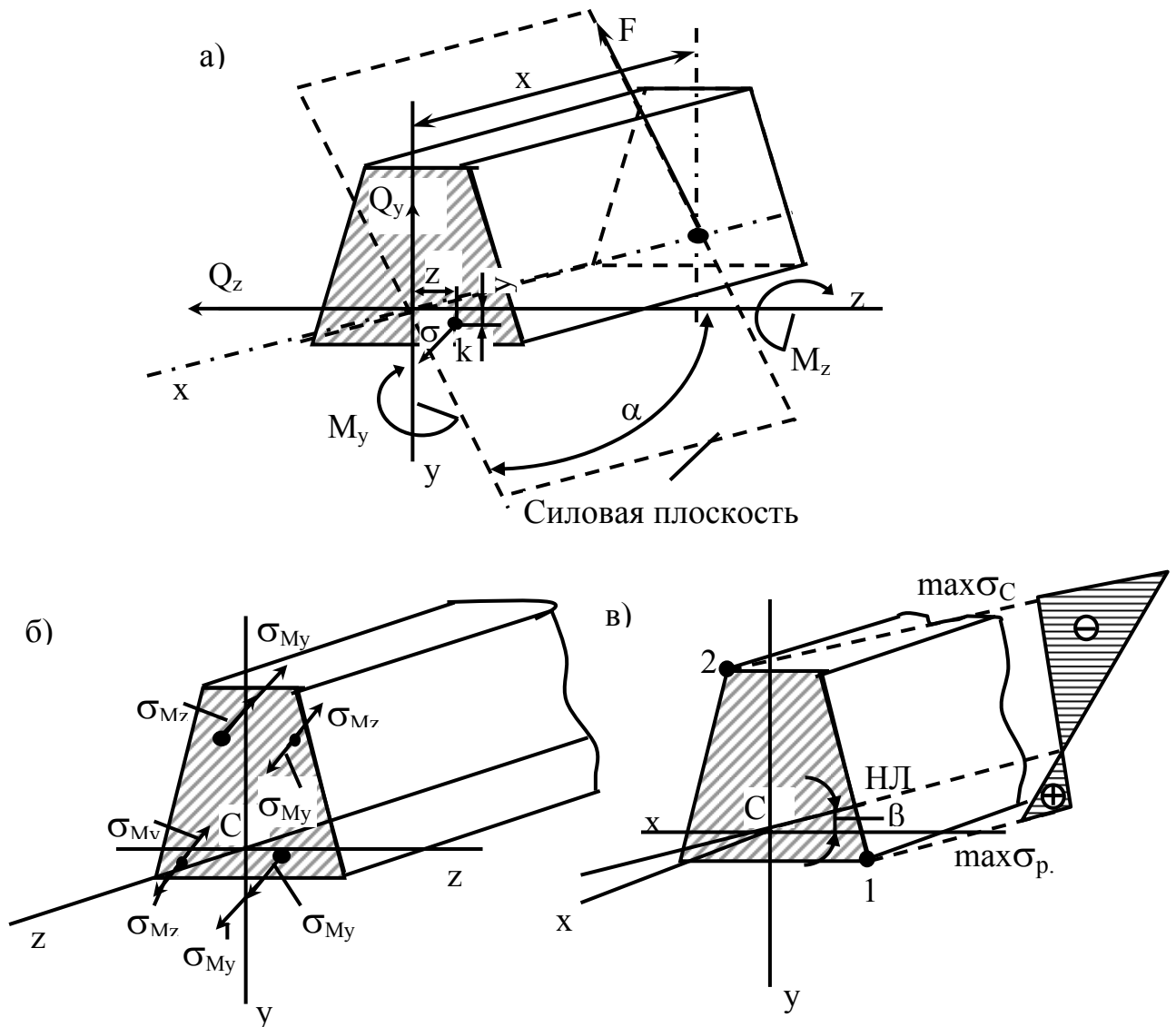


Рисунок 18.4

$$\operatorname{tg} \beta = -(M_Y / M_Z)(J_z / J_Y).$$

Определив угол β и прочертив нулевую линию в поперечном сечении (рис. 18.4, в), можно определить координаты наиболее удаленных точек 1 и 2 и затем по формуле (18.6) вычислить значения напряжений в этих точках.

Для бруса из материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, должны быть составлены два условия прочности:

$$\begin{aligned} \max \sigma_p &= (M_Y / J_Y) \cdot z_1 + (M_Z / J_Z) \cdot y_1 \leq [\sigma_p]; \\ \max |\sigma_c| &= |(M_Y / J_Y) \cdot z_2 + (M_Z / J_Z) \cdot y_2| \leq [\sigma_c]. \end{aligned}$$

2. Расчеты бруса большой жесткости при изгибе с растяжением (сжатием).

Если нагрузить брус в главной плоскости силой $\bar{F}$ (рис. 18.5, а) под углом α к оси, то в поперечном сечении 1-1 (рис. 18.5, б) возникнут два внутренних силовых фактора: нормальная сила $N = F \cdot \cos \alpha$ и изгибающий момент $M_z = F \cdot x \sin \alpha$. Следовательно, такое нагружение бруса вызывает сочетание изгиба с растяжением (сжатием).

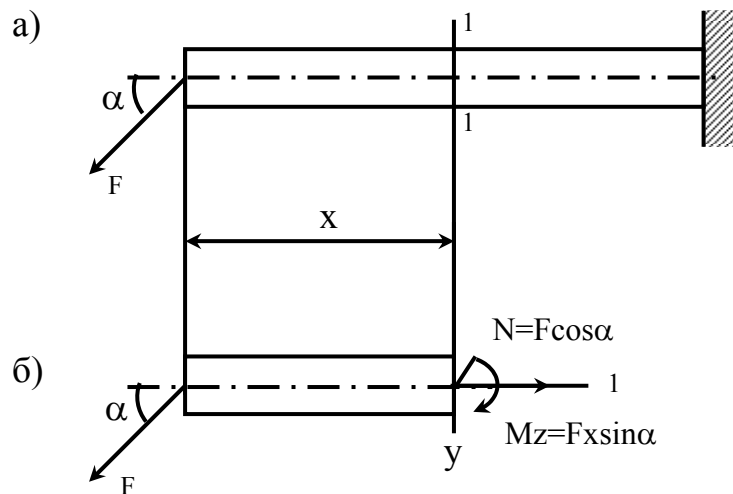


Рисунок 18.5

Считая, что брус обладает большой жесткостью при изгибе (малые величины прогиба бруса), согласно принципу независимости действия сил, можно утверждать, что в любом сечении возникают напряжения растяжения (сжатия):

$$\sigma_N = N / A,$$

и напряжения изгиба

$$\sigma_{MZ} = (M_z / J_z) \cdot y .$$

Таким образом, суммарные напряжения в любом сечении бруса находят алгебраическим сложением напряжений σ_N и σ_{MZ} :

$$\sigma = N / A + (M_z / J_z) \cdot y .$$

При расчетах на прочность исходят из наибольших напряжений, возникающих в любом сечении. В частности, если сечение бруса симметрично относительно нейтральной оси, то

$$\sigma = N / A + M_z / W_u .$$

Необходимо учитывать, что в последних двух формулах значения напряжений берутся со своими знаками плюс или минус.

19 РАСЧЕТЫ НА УСТАЛОСТЬ

19.1 Основные понятия об усталости

В предыдущих лекциях были рассмотрены вопросы, связанные с расчетами на прочность элементов конструкций, испытывающих действие статических нагрузок, т.е. таких, которые медленно возрастают от нуля до своего конечного значения и в дальнейшем остаются постоянными. При этом всегда считалось, что прочность обеспечена, если максимальные напряжения в опасных сечениях не превышают предельных значений, соответствующих началу разрушения или появления остаточных деформаций. Однако многие детали машин, в частности валы, вращающиеся оси, зубчатые колеса, дорожки тел вращения подшипников, пружины и т.п., испытывают напряжения, циклически изменяющиеся во времени. В этих случаях разрушение детали наступает при напряжениях, значительно меньших предельных. После разрушения на поверхности излома детали обнаруживаются две ярко выраженные зоны (рис. 19.1).

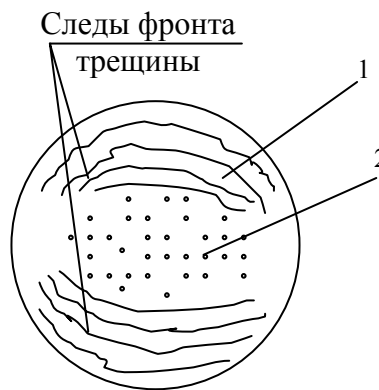


Рисунок 19.1

В зоне 1 кристаллы не различаются невооруженным глазом, поверхность сглажена. В зоне 2 явно выступают признаки хрупкого разрушения. Кристаллы имеют острую огранку и блестящую поверхность. Причину такого разрушения, которое принято называть **усталостным**, объясняют следующим. При работе детали в условиях переменных напряжений в материале возникают микротрещины, которые постепенно и проникают внутрь. По мере развития

трещины поперечное сечение ослабляется и в некоторый момент происходит мгновенное разрушение детали.

Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений от заданной нагрузки без разрушения называют *сопротивлением усталости*.

19.2 Основные характеристики цикла

Рассмотрим простейший случай. Круглый брус (ось) АВ (рис. 19.2, а), нагруженный постоянной силой F , изгибается, и в нижней точке поперечного сечения 1-1 возникают наибольшие напряжения растяжения, а в верхней точке – наибольшие напряжения сжатия; в точках, расположенных на нейтральной оси, напряжений нет. Представим, что изогнутой силой вал АВ приведен во вращение с постоянной угловой скоростью ω . Тогда каждая точка поперечного сечения 1-1 (рис. 19.2, б) будет попеременно находиться то в зоне растяжения, то в зоне сжатия. В частности, напряжение в точке А

$$\sigma_A = (M_u / J_z) \cdot y.$$

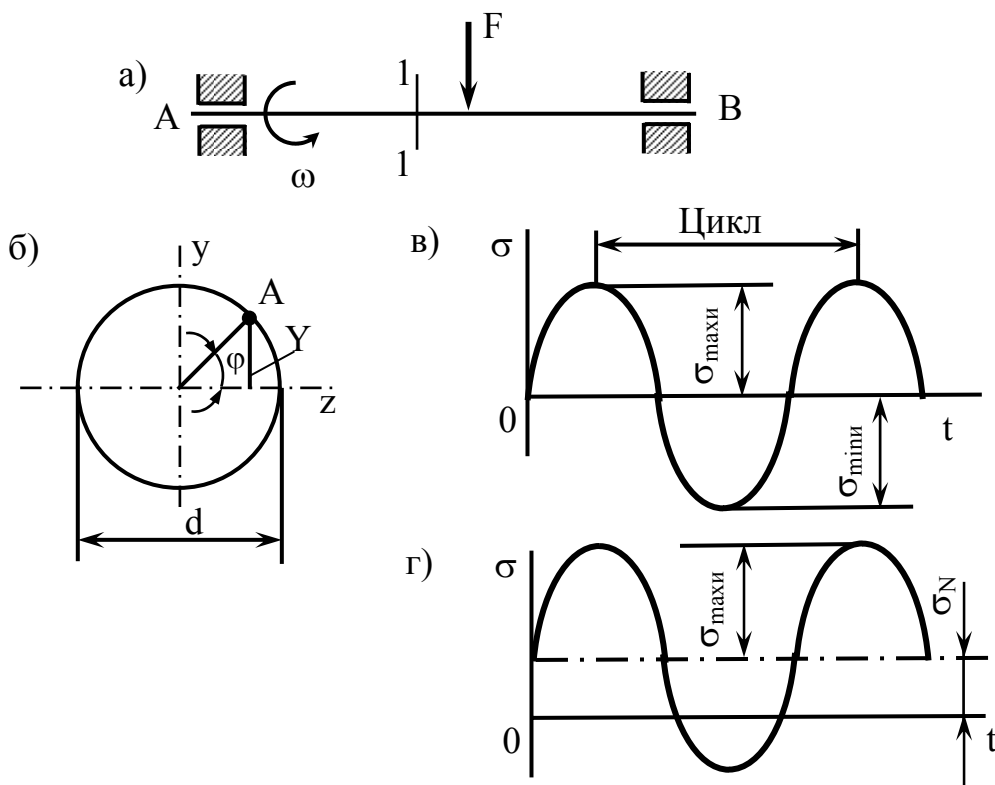


Рисунок 19.2

Но при вращении бруса расстояние y от точки А до нейтральной оси меняется с течением времени по закону

$$y = (d/2) \sin \omega t, \quad \text{где } \omega t = \varphi.$$

Следовательно,

$$\sigma_A = (M_u / J_z) \cdot (d/2) \sin \omega t = \sigma_{\max} \sin \omega t,$$

т.е. нормальное напряжение в точке А поперечного сечения изменяется по синусоидальному закону (рис. 19.2, в). Если же помимо силы F нагрузить брус центральной, растягивающей силой, то напряжение

$$\sigma_A = N / A + (M_u / J_z) \cdot (d/2) \sin \omega t = \sigma_N + \sigma_{\max} \sin \omega t,$$

В этом случае график изменения этих напряжений во времени остается синусоидальным, но сместится вверх (рис. 19.2, г). Как видим, в обоих случаях напряжения изменяются периодически с периодом T .

Совокупность последовательных напряжений за один период их изменения называется **циклом напряжений** (рис. 19.3, а). Цикл напряжений характеризуется максимальным $\sigma_{\max}$ и минимальным $\sigma_{\min}$ напряжениями. Их отношение называется коэффициентом **асимметрии цикла**

$$R = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}.$$

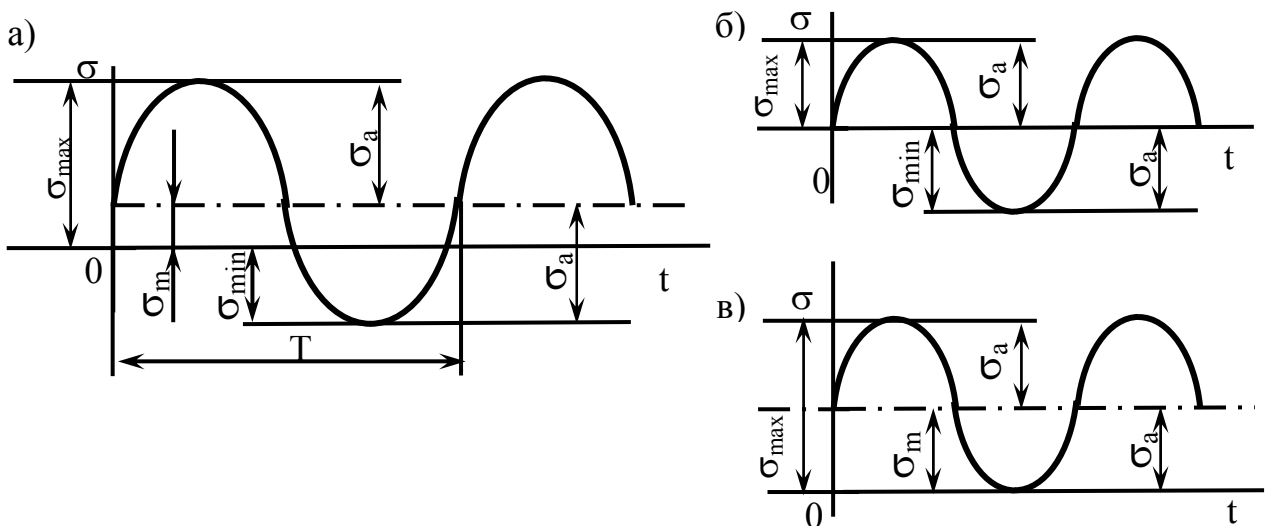


Рисунок 19.3

В случае, когда $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, $R = -1$, цикл называется **симметричным** (рис. 19.3, б).

Если $\sigma_{\min} = 0$, $R = 0$ – цикл **называется отнулевым** (рис. 19.3, в). Любой цикл (рис. 19.3, а) можно также характеризовать его средним напряжением и амплитудой цикла σ_α :

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2,$$

$$\sigma_\alpha = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2.$$

В случае переменных касательных напряжений остаются в силе все приведенные выше термины и соотношения с заменой σ на τ .

19.3 Предел выносливости

Способность материала или детали противостоять действию переменных нагрузок называют **сопротивлением усталости**. Его оценивают с помощью предела выносливости, определяемого экспериментально на специальных машинах или стендах.

На рис. 19.4 показана схема одной из испытательных машин, в которой вращающийся образец 1 находится в условиях чистого изгиба. Образец зажимается во вращающихся цангах 2 и 3. Усилие передается от груза, подвешенного на серьгах 4 и 5. Счетчик 6 фиксирует число оборотов образца. При поломке образца происходит автоматическое отключение двигателя 7 от контакта 8.

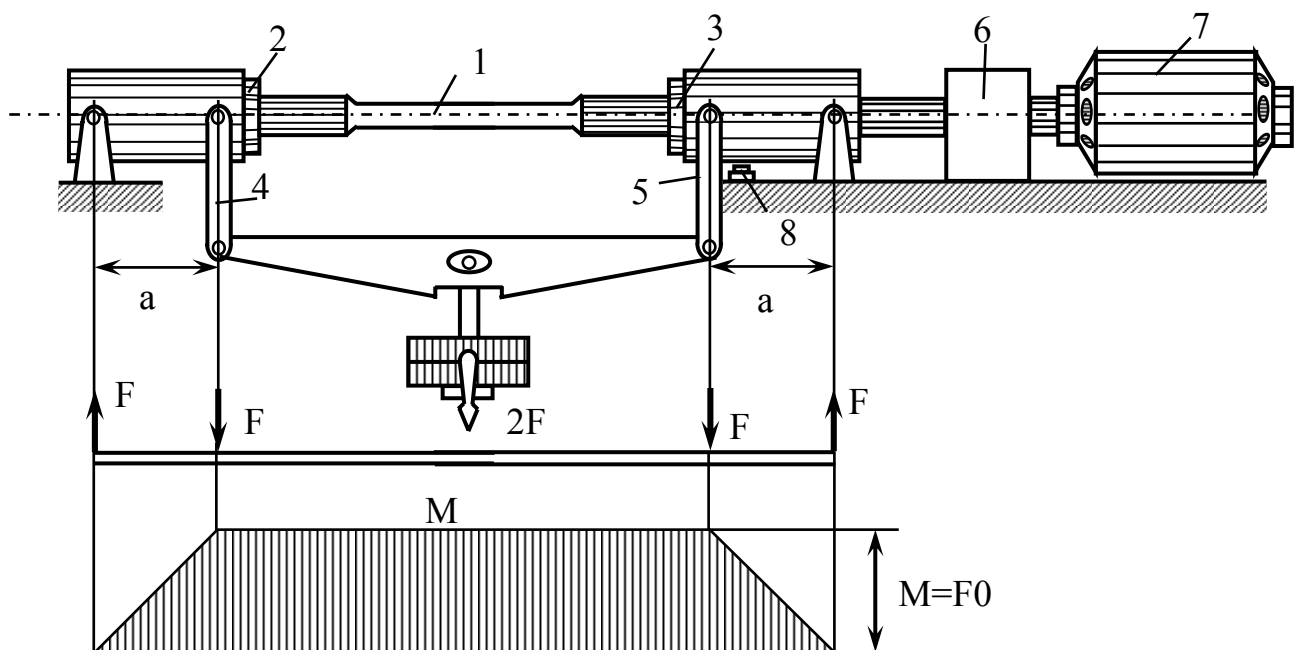


Рисунок 19.4 – Схемы машины для усталостных испытаний при изгибе

Для проведения стандартных испытаний на усталость необходимо иметь не менее десяти одинаковых образцов. Первый образец устанавливается на машину и нагружается симметричным циклом с амплитудой напряжения, равной $(0.5 \dots 0.6) \sigma_B$ (где σ_B – предел прочности исследуемого образца). В момент поломки образца фиксируют число циклов по счетчику машины. Вторым образцом нагружается амплитудой напряжения меньшей, чем был нагружен первый образец, и он разрушается, отработав большее число циклов. Снижая нагрузку, испытывают следующие образцы. Испытания заканчивают, когда в результате постепенного снижения амплитуды напряжений и увеличения числа циклов нагружения находят такую амплитуду, при которой очередной образец не разрушился после 10^7 циклов напряжений. Такое число циклов для стальных образцов считается базовым. Если стальной образец выдержал десять миллионов циклов, то полагают, что он может выдержать без нагружения и большее число циклов.

По результатам испытаний строят кривую усталости (рис. 19.5). Наибольшее значение максимального напряжения цикла, которое образец выдерживает до базы испытаний, называют **пределом выносливости**. При симметричном цикле предел выносливости обозначается через σ_{-1} , при пульсирующем – σ_0 , а при асимметричном – σ_2 .

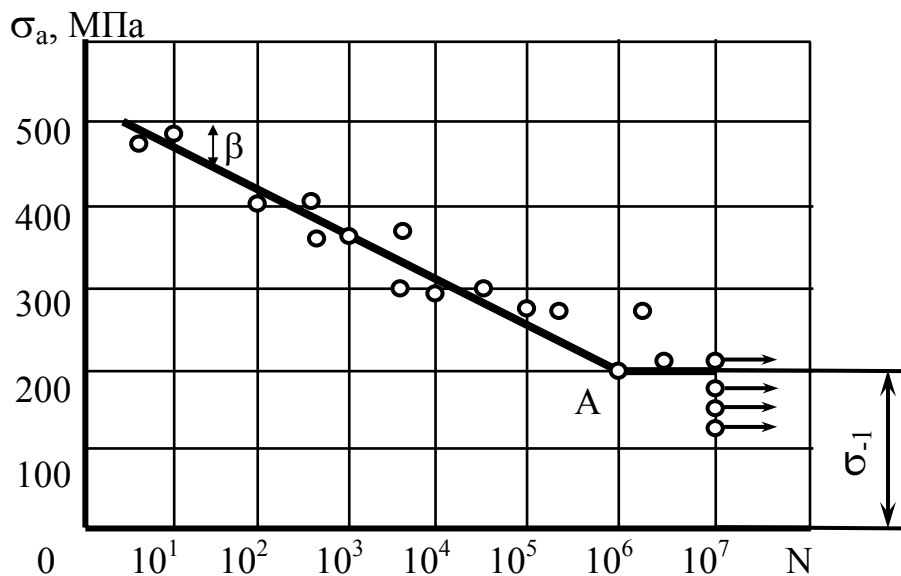


Рисунок 19.5 – Кривая усталости

Для расчета деталей, не предназначенных на длительный срок службы, вводят понятие отграниченного предела выносливости σ_{rN} , где N – заданное число циклов (меньше базового).

Пределы выносливости определяются для различных видов деформации: растяжение (сжатие), изгиб и кручение. На основании большого числа испытаний установлены приближенные зависимости между пределом выносливости при изгибе и пределом выносливости для других видов деформации:

$$\sigma_{-1P} = 0.7 \sigma_{-1};$$

$$\tau_{-1} = 0.58 \sigma_{-1},$$

где σ_{-1P} – предел выносливости при симметричном цикле растяжения – сжатия;

τ_{-1} – предел выносливости при кручении в условиях симметричного цикла.

Зависимость между переменным напряжением $\sigma_{\max}$ и числом циклов до разрушения достаточно точно описывается уравнением

$$\sigma_{\max}^m N = C \quad (N \leq N_{\sigma}), \quad (19.1)$$

где m и C – постоянные для данного материала, температуры и окружающей среды;

N_{σ} – базовое число циклов.

Учитывая, что уравнение (19.1) справедливо и для точки А перегиба кривой усталости, т.е. $C = \sigma_r^m N_{\sigma}$, получим

$$(\sigma_{\max} / \sigma_r)^m = N_{\sigma} / N, \quad (19.2)$$

откуда

$$N = N_{\sigma} (\sigma_r / \sigma_{\max})^m. \quad (19.3)$$

Зависимость (19.3) используется для определения ресурса работы элементов конструкций при известном уровне рабочих переменных напряжений $\sigma_{\max}$ и значений N_{σ} и σ_r .

Пределы выносливости, как показывает практика, зависят от коэффициента асимметрии цикла. В связи с этим на нескольких партиях образцов проводят также испытания при асимметричных циклах нагружений и строят кривую предельных напряжений,

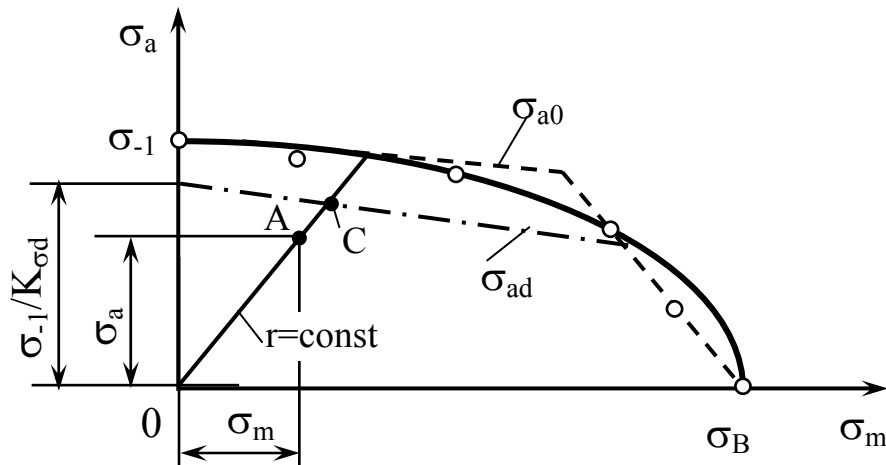


Рисунок 19.6 – Диаграмма предельных напряжений

называемую **диаграммой предельных амплитуд** (рис. 19.6). Если параметры σ_a и σ_m рабочего цикла нагружения образца соответствуют некоторой точке A, расположенной под предельной кривой, то образец способен выдерживать неограниченное число циклов или сохранить прочность до базового числа. Если постоянное (среднее) напряжение $\sigma_m = 0$, то предел выносливости будет равен σ_{-1} , т.к. цикл нагружения будет симметричным.

При $\sigma_a = 0$ разрушение образца или детали наступит при среднем напряжении $\sigma_m = \sigma_B$. Экспериментально установлено, что постоянные растягивающие напряжения уменьшают сопротивление усталости, а сжимающие постоянные напряжения затрудняют зарождение и развитие усталостной трещины и повышают предел выносливости. В этом состоит одна из главных причин благоприятного влияния упрочняющей поверхностной обработки детали.

В расчетах на прочность используют зависимости $\sigma_a = f(\sigma_m)$, аппроксимирующие с различной точностью экспериментальную кривую предельных напряжений.

В приближенных расчетах широко используют линейную зависимость

$$\sigma_{a0} = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \cdot \sigma_m, \quad (19.4)$$

показанную на диаграмме штриховой линией (рис. 19.6). Аналогично записывается зависимость $\tau_{a0} = f(\tau_m)$ с коэффициентом ψ_τ для касательных напряжений. Коэффициенты ψ_σ и ψ_τ характеризуют чувствительность материала образца или детали к асимметрии цик-

ла соответственно переменных нормальных и касательных напряжений. Их значения принимают в зависимости от предела прочности материала следующим образом:

σ_B , МПа	350 ... 520	520 ... 720	720 ... 1000	1000 .. 1200
ψ_σ	0	0.05	0.1	0.2
ψ_τ	0	0	0.05	0.1

19.4 Факторы, влияющие на предел выносливости

19.4.1 Концентрация напряжений в элементах конструкций

Приведенные в предыдущих лекциях формулы для определения напряжений и деформаций в моделях элементов конструкций при растяжении, кручении и сложном сопротивлении справедливы лишь для сечений, удаленных на достаточное расстояние от зон резкого изменения формы и сопряжения (соединения) элементов конструкций. Однако, как установлено экспериментально и теоретически, в зонах резких изменений формы элементов (около отверстий, галтелей), а также в зонах контакта возникают повышенные напряжения, т.е. имеет место концентрация напряжений.

Например, при растяжении пластинки с двусторонним надрезом (рис. 19.7, а) напряжения по сечению А-А распределяются неравномерно, а напряженное состояние становится плоским. Напряжения в этом же сечении, вычисленные по формулам сопротивления материалов – номинальные напряжения σ_H (показаны штриховой линией), оказываются существенно ниже фактических максимальных напряжений σ_{max} . И хотя глубина распространения возмущения напряжения от поверхности надреза в тело невелика, концентрация напряжений оказывает существенное влияние на прочность элементов конструкций, особенно при действии циклических нагрузок, т.к. повреждения элементов зарождаются в точках действия максимальных напряжений. Описанные эффекты типичны для элементов конструкций с «концентраторами напряжений различной формы» (отверстием (рис. 19.7, б) резьбой, зубьями и т.п.).

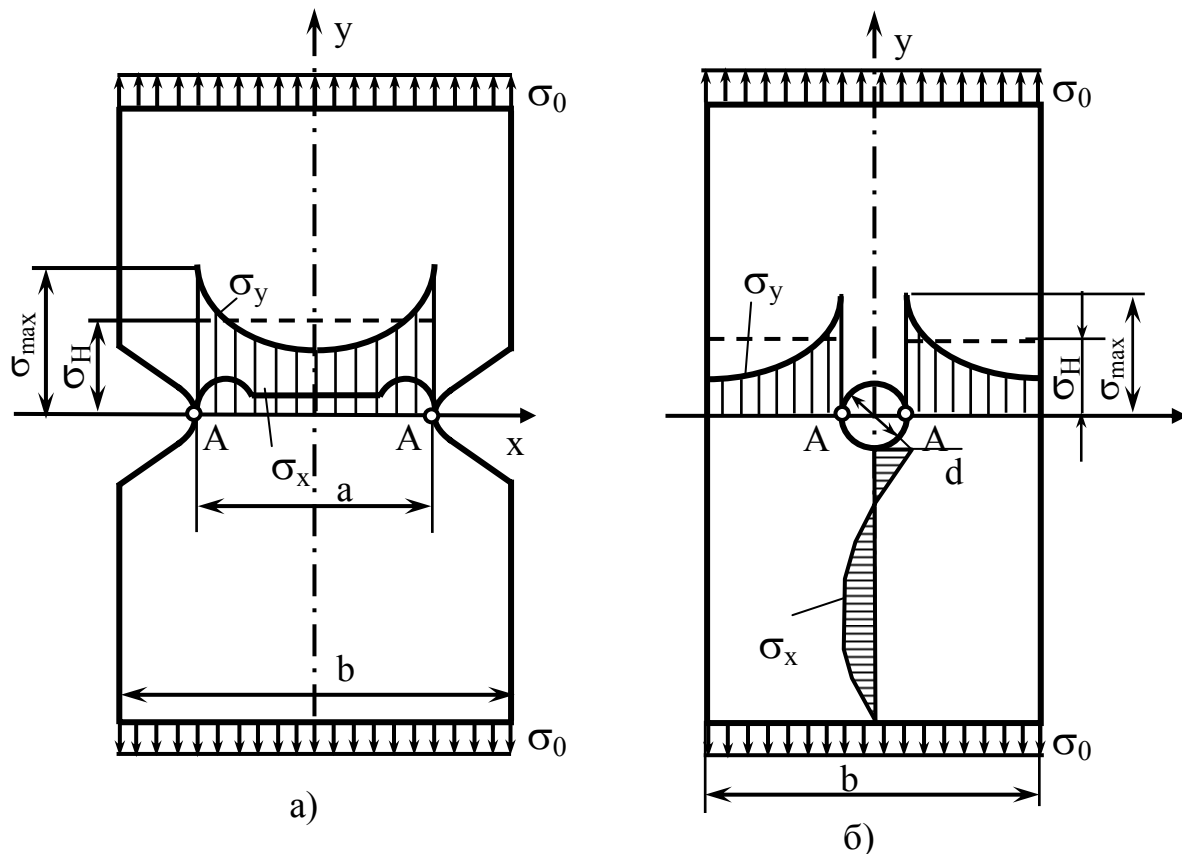


Рисунок 19.7 – Распределение напряжений в пластинах с надрезами (а) и отверстием (б)

В расчетной практике концентрацию напряжений учитывают с помощью теоретического коэффициента концентрации напряжений α_σ и α_τ (в зависимости от вида напряженного состояния). Максимальное напряжение в точке элемента конструкции находят из соотношения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \alpha_\sigma \cdot \sigma_H; \\ \tau_{\max} &= \alpha_\tau \cdot \tau_H, \end{aligned} \right\} \quad (19.5)$$

где σ_H и τ_H – соответственно номинальные нормальные и касательные напряжения в расчетном сечении.

Значения коэффициентов α_σ и α_τ определяют методами теории упругости или экспериментально.

Экспериментальные исследования показали, что разрушение элементов конструкций начинается в местах концентрации напряжений при эффективных максимальных напряжениях $\sigma_{\max \text{ эф}}$, которые, как правило, несколько ниже расчетных максимальных напряжений $\sigma_{\max}$ для идеально упругого материала, т.е.

$$\sigma_{\max \text{эф}} < \sigma_{\max};$$

$$\tau_{\max \text{эф}} < \tau_{\max}.$$

Для учета этого обстоятельства вводят т.н. эффективный коэффициент концентрации напряжений

$$K_{\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1K};$$

$$K_{\tau} = \tau_{-1} / \tau_{-1K},$$

где σ_{-1K} и τ_{-1K} – пределы выносливости, определенные по номинальным напряжениям для образцов, имеющих концентрацию напряжений и такие же размеры поперечного сечения, как и у гладкого образца.

Числовые значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений получают на основе усталостных испытаний образцов. Для типовых и наиболее часто встречающихся форм концентраторов напряжений и основных конструкционных материалов созданы графики и таблицы, которые приводятся в справочной литературе. В некоторых случаях удобно пользоваться приближенными формулами:

$$K_{\sigma} = 1 + q(\alpha_0 - 1);$$

$$K_{\tau} = 1 + q(\alpha_{\tau} - 1),$$

где q – коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений. Его величина зависит от свойств материала. Так, для высокопрочных легированных сталей значение q близко к единице. Для других марок стали $q = 0.6 \dots 0.8$, причем более прочным сталям соответствуют большие значения q . Для серого чугуна q близко к нулю.

Экспериментально установлено, что с увеличением абсолютных размеров поперечных сечений деталей происходит снижение их прочностных характеристик, получаемых при статических и усталостных испытаниях. Это снижение учитывается коэффициентом масштабного эффекта, который выражается так:

$$\left. \begin{aligned} K_{\sigma d} &= \sigma_{-1d} / \sigma_{-1}; \\ K_{\tau d} &= \tau_{-1d} / \tau_{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (19.6)$$

где σ_{-1d} и τ_{-1d} – пределы выносливости образца диаметром d , а σ_{-1} и τ_{-1} – пределы выносливости стандартного образца диаметром 7,5 и 10 мм.

Если при статических нагрузках состояние рабочих поверхностей незначительно влияет на их прочность, то при циклических нагрузках разрушение деталей связано с развитием усталостных трещин, возникающих в поверхностном слое. Развитию этих трещин способствует шероховатость поверхности в результате механической обработки. При расчетах это явление учитывается коэффициентом качества поверхности

$$\left. \begin{aligned} K_{\sigma F} &= \sigma_{-1}' / \sigma_{-1}; \\ K_{\tau F} &= \tau_{-1}' / \tau_{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

где σ_{-1} – предел выносливости полированного образца; σ_{-1}' – предел выносливости для серии образцов, имеющих данную обработку поверхности.

Повышение прочности поверхностного слоя достигается поверхностной закалкой, химико-термической обработкой, наклепом и учитывается коэффициентом влияния поверхностного упрочнения

$$\left. \begin{aligned} K_{\sigma v} &= \sigma_{-1y} / \sigma_{-1}; \\ K_{\tau v} &= \tau_{-1y} / \tau_{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (19.8)$$

где σ_{-1y} – предел выносливости образца, подвергнутого упрочнению.

Учитывая изложенное, можно определить общий коэффициент снижения выносливости:

$$\begin{aligned} K_{\sigma D} &= (K_{\sigma} / K_d + K_{\sigma F} - 1) / K_{\sigma v}; \\ K_{\tau D} &= (K_{\tau} / K_d + K_{\tau F} - 1) / K_{\tau v}. \end{aligned}$$

При расчетах на усталость коэффициенты безопасности определяют по следующим формулам, полученным в предположении подобия рабочих и предельных циклов напряжений:

в случае нормальных напряжений

$$S_{\sigma} = \sigma_{-1} / (K_{\sigma D} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m) \geq [S]; \quad (19.9)$$

в случае касательных напряжений

$$S_{\tau} = \tau_{-1} / (K_{\tau D} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m) \geq [S].$$

Коэффициенты чувствительности к асимметрии цикла напряжений определяют по формулам

$$\psi_{\sigma} = (2\sigma_{-1} - \sigma_0) / \sigma_0;$$

$$\psi_{\tau} = (2\tau_{-1} - \tau_0) / \tau_0.$$

Если в опасной точке детали возникают и нормальные, и касательные напряжения, то

$$S = S_{\sigma} \cdot S_{\tau} / \sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2} \geq [S], \quad (19.10)$$

где S_{σ} и S_{τ} определены выше.

Вопрос, связанный с выбором $[S]$, является очень ответственным. Значение $[S]$ оказывает большое влияние на габариты и массу проектируемых изделий и, следовательно, на их стоимость и эксплуатационные расходы. С уменьшением $[S]$ снижается масса изделий, но увеличивается возможность отказов – снижается надежность. В качестве ориентировочных можно рекомендовать для стальных деталей $[S] \approx 1,5 \dots 2,1$ и для чугуна $[S] \approx 2,0 \dots 2,4$.

20 ОСНОВЫ ТРИБОТЕХНИКИ СОПРЯЖЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Триботехника – наука о контактном взаимодействии твердых тел при относительном перемещении, охватывающая вопросы трения, изнашивания и смазывания элементов механизмов машин и приборов.

Износ деталей происходит в паре (сопряжении, узле) трения в результате разрушения и отделения материала с поверхности твердого тела или накопления его остаточной деформации при трении. При этом под **парой трения** понимают совокупность двух деталей (образцов), сопряженные поверхности которых перемещаются относительно друг друга.

Износые отказы связаны с изменением размеров и формы деталей и, как следствие, с потерей точности и снижением коэффициента полезного действия механизмов, увеличением шума, преждевременными поломками.

Отметим, что ежегодные расходы на ремонт и техническое обслуживание действующего парка механизмов часто в несколько раз превышает стоимость годового выпуска новых машин.

По физическим особенностям различают трение внутреннее и внешнее.

Внешнее трение – свойство прижатых друг к другу твердых тел сопротивляться относительному перемещению в зонах соприкосновения их поверхностей по касательной к ним.

Внутреннее трение – свойство твердых тел необратимо поглощать механическую энергию при деформации. Оно проявляется в затухании свободных колебаний и в других эффектах.

По кинематическим признакам внешнее трение подразделяют на трение скольжения и трение качения.

Трение скольжения – сопротивление перемещению двух твердых тел, при котором скорости тел в точках контакта (касания) различны по величине или по направлению.

Силу сопротивления при относительном перемещении одного тела по поверхности другого под действием внешней силы, направленной тангенциально к общей границе между этими телами, называют **силой трения**.

В соответствии с законом Кулона-Амонтона сила трения

$$F_f = F_n \cdot f,$$

где F_n – сила, сжимающая контактирующие тела (нормальная сила);
 f – коэффициент трения скольжения, определяемый как отношение тангенциальной силы, необходимой для преодоления сопротивления относительному скольжению двух тел в плоскости их касания, к силе F_n .

Если значение относительного перемещения контактирующих тел настолько мало, что определяется лишь их деформациями вблизи поверхностей контакта, то такое состояние называют **трением покоя**. Взаимное перемещение деталей также называют **кинематическим (часто предварительным) смещением**, а соответствующую силу – **неполной силой трения**. Неполная сила трения реализуется в зоне контакта в тех случаях, когда трение используется для предотвращения относительного скольжения контактирующих тел, а также в начале движения в условиях трения скольжения. В зависимости от величины внешней сдвигающей силы неполная сила трения может изменяться от нуля до силы трения покоя – максимального значения неполной силы трения, когда предварительное смещение переходит в скольжение. Отметим, что деформации тел в условиях трения покоя частично обратимы, т.е. после снятия сдвигающей силы происходит их частичное обратное перемещение.

Трение качения – трение движения двух твердых тел, при котором их скорости в точках касания одинаковы по величине и направлению. Вследствие контактных деформаций трение качения сопровождается неизбежным скольжением и рассеянием энергии в результате внутреннего трения. Для расчета силы трения используют формулу Кулона. При качении цилиндра, сферы по плоскости (рис. 20.1)

$$F_f = \frac{K}{R} F_n,$$

где K – коэффициент трения качения;

R – радиус;

F_n – сила, с которой цилиндр прижат к плоскости.

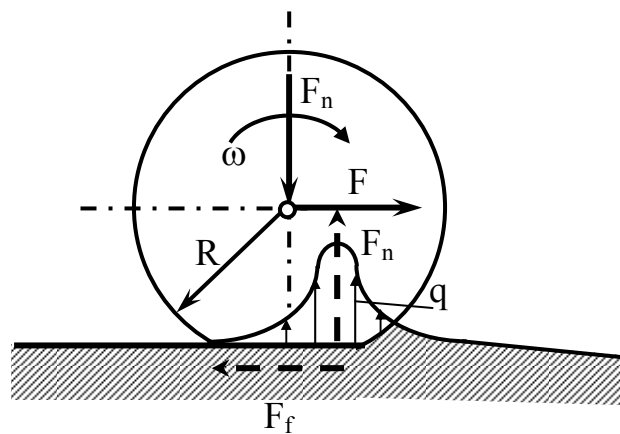


Рисунок 20.1 – Силы, действующие на цилиндр при качении

Для уменьшения сил трения в зону контакта вводят смазочный материал. Действие смазочного материала, в результате которого уменьшается сила трения, называют **смазкой**.

В зависимости от наличия или отсутствия смазочного материала различают **трение без смазочного материала (сухое трение)** и **трение со смазочным материалом**.

Действие смазочного материала в значительной мере зависит от характера смазывания гидравлических параметров смазочного материала в контакте, который определяет вид трения в узлах машины (граничное, полужидкостное, жидкостное и т.д.).

Трение имеет молекулярно-механическую природу, оно сопровождается скачкообразным скольжением поверхностей, вибрацией деталей, адгезией на отдельных участках контакта и характеризуется высокими коэффициентами трения (обычно $= 0.3 \dots 0.8$).

Трение при граничной смазке встречается в парах трения с одноразовым и периодическим смазыванием консистентными смазками, жидкими маслами и др. В таком случае поверхности сопряженных тел будут разделены слоем смазочного материала малой толщины до 0.1 мкм. Наличие граничной пленки снижает силы трения в 2...10 раз.

Трение при жидкостной смазке характеризуется тем, что поверхности контакта разделены слоем жидкого смазочного материала (масла, воды и др.), находящегося под давлением, несущим сло-

ем. Силы трения в этом случае определяются вязкостью (внутренним сопротивлением) жидкости.

20.1 Элементы механики пар трения (сопряжения)

Процессы трения и изнашивания связаны с молекулярно-механическим взаимодействием деталей, поэтому для оценки их работоспособности важно знать механические параметры процессов: скорость движения, коэффициент трения, площадь контакта, распределение напряжений в контакте и другие.

Расчеты нормальных и касательных напряжений в контакте обычно связаны со значительными трудностями, обусловленными сложной формой деталей, наличием нескольких зон контакта, необходимостью определения размеров площадок контакта и т.д. Поэтому для оценки триботехнической надежности часто используют упрощенные модели формы деталей и основанные на этих модулях методы расчета.

Сопряжение деталей с плоскими поверхностями контакта

В этом случае обычно известна заранее площадь контакта. Рассмотрим в качестве примера задачу о контакте двух цилиндров по торцам (рис. 20.2, а). Под действием внешней сжимающей силы $\overline{F}_n$ на торце цилиндра будут действовать нормальные напряжения сжатия q , называемые **контактными**. Из условия равновесия цилиндра найдем

$$F_A = \int_{A_K} q dA_K,$$

где A_K – площадь контакта.

Этому уравнению удовлетворяют различные распределения напряжений по торцу цилиндра, и для определения действительного распределения напряжений требуется решить сравнительно сложную контактную задачу.

В упрощенном расчете полагают, что контактные напряжения равномерно распределены по площади стыка A_K . Тогда их значение при внешней сжимающей силе $\overline{F}_n$

$$q = F_n / A_K.$$

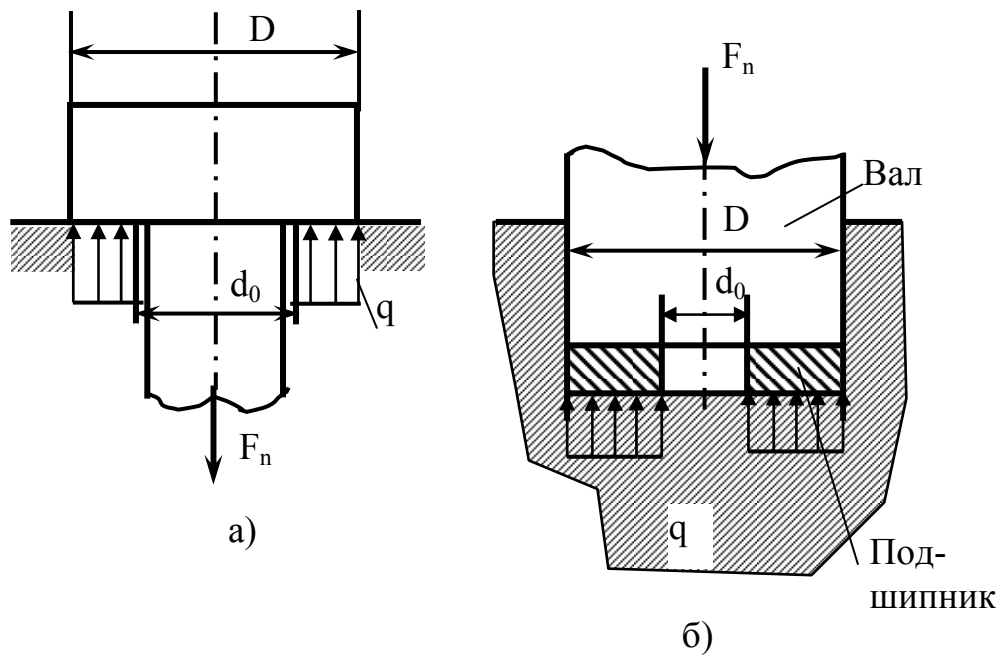


Рисунок 20.2 – Распределение контактных напряжений на стыках деталей

Например, контактные напряжения под головкой болта (рис. 20.2, а) и на торце подшипника скольжения (рис. 20.2, б) будут равны

$$q = \frac{4F_n}{\pi(D^2 - d^2)},$$

где D – наружный диаметр контакта;
 d – внутренний диаметр контакта.

Напряжения, вычисленные таким образом, называют **номинальными**. Касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau = f \cdot q.$$

Сопряжение деталей с неплоскими поверхностями контакта.

В этом случае размеры площадки контакта заранее не известны, а известен лишь вид начального контакта, т.е. контакта в ненагруженном состоянии (при $\overline{F_n} = 0$). Например, начальный контакт двух цилиндров происходит по линии, совпадающей с их образующими, а начальный контакт шаров – в точке. Поэтому определение номинальных контактных напряжений затруднено и расчеты вы-

полняют методами теории упругости. В связи с этим приведем без доказательства расчетные формулы для нескольких случаев контакта элементов конструкций.

1. Контакт цилиндров

При центральном сжатии двух упругих цилиндров радиусами R_1 и R_2 (рис. 20.3) силой $\overline{F}_n = \overline{F}_r$ в месте их касания образуется прямоугольная площадка шириной $2a$ и длиной b (b – длина цилиндров). Полуширина площадки контакта

$$a = \sqrt{2 \frac{F_r}{b} R (\theta_1 + \theta_2)},$$

где R – приведенный радиус кривизны, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$; θ_1 и θ_2 – коэффициенты, зависящие от модулей упругости E_1 и E_2 , а также коэффициентов Пуассона μ_1 и μ_2 материалов цилиндра

$$\theta_1 = \frac{2(1 - \mu_1^2)}{\pi E_1}; \quad \theta_2 = \frac{2(1 - \mu_2^2)}{\pi E_2}.$$

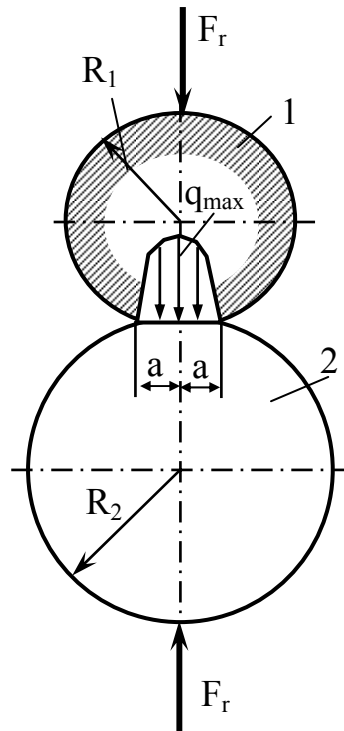


Рисунок 20.3 – Распределение контактных напряжений между сжатыми цилиндрами

Номинальные напряжения по площадке контакта распределены неравномерно. Наибольшее напряжение действует в точках линии начального касания

$$q_{\max} = \sigma_H = \frac{2 F_r}{\pi a b}.$$

Если цилиндры изготовлены из материалов, у которых $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = 0.3$, то

$$\sigma_H = 0.418 \sqrt{\frac{F_r E}{b R}}.$$

2. Контакт шаров

Площадь контакта двух шаров радиусами R_1 и R_2 имеет форму круга, радиус которого ($\mu_1 = \mu_2 = 0.3$)

$$a = 0.72 \sqrt[3]{F_r R (\theta_1 + \theta_2)}.$$

Максимальное контактное напряжение будет действовать в точках начального контакта шаров

$$\sigma_H = 0.918 \sqrt[3]{\frac{F_r}{R^2 (\theta_1 + \theta_2)}}.$$

Отметим, что в точке контакта происходит концентрация напряжений и появляются значительные напряжения в некоторых точках.

Однако для зон контакта характерно возникновение всесторонних сжимающих напряжений, что позволяет материалу выдерживать без разрушения высокие поверхностные напряжения.

Для обеспечения надежной работы контактирующие поверхности должны иметь высокую поверхностную прочность.

20.2 Виды изнашивания

Виды повреждений поверхностей деталей при трении разнообразны и зависят преимущественно от окружающей среды (температуры, влажности, запыленности и т.п.), а также определяются совокупным влиянием механических, физико-химических, электрохимических и других процессов в контакте, присущих определенным видам трения.

Экспериментальные исследования и опыт эксплуатации различных пар трения показали, что основными причинами изнашивания являются:

пластические деформации, разрушение шероховатостей и окисных пленок;

адгезионное схватывание и перенос металла с одной детали на другую;

разрушение «мостиков» схватывания;

окислительные процессы и др.

Установлено также, что механизмы и характер разрушения рабочих поверхностей пар трения качения отличны от повреждений пар трения скольжения. В связи с этим рассмотрим основные виды изнашивания, присущие указанным видам движения. Название вида изнашивания часто определяется доминирующей причиной, вызывающей разрушение поверхностей деталей.

В условиях трения качения наиболее распространенным видом повреждения является **контактная усталость**. Она проявляется в образовании трещин на рабочих поверхностях деталей от циклических контактных напряжений, вызванных перемещением зон контакта при качении. Их развитие приводит к отделению от поверхности детали частиц металла и появлению небольших ямок, раковин. **Усталостное выкрашивание – питтинг** является распространенным видом повреждения рабочих поверхностей зубьев колес, подшипников и др.

Длительность работы детали до появления выкрашивания зависит от максимальных контактных напряжений σ_H .

Ограниченное выкрашивание появляется на деталях в тех случаях, когда вследствие погрешностей изготовления или монтажа нагрузка первоначально концентрируется только на отдельных участках теоретически возможной площади контакта. В результате начальных повреждений общая поверхность контакта возрастает, концентрация нагрузки уменьшается и усталостное выкрашивание прекращается.

Если выкрашивание начинается при нормальном прилегании контактирующих поверхностей, то оно обычно оказывается **прогрессирующим**.

Наиболее существенное влияние на контактную прочность деталей оказывает твердость поверхностей контакта. Установлено, что пределы выносливости деталей из различных материалов прямо пропорциональны твердости рабочих поверхностей, т.е.

$$\sigma_{H \text{ lim}} = C_B \cdot HB;$$

$$\sigma_H = C_R \cdot HRC,$$

где C_B и C_R – коэффициенты, зависящие от материала и термообработки; HB и HRC – числа твердости соответственно по Бринелю и Роквеллу.

Отсюда следует, что для повышения контактной выносливости необходимо в первую очередь увеличивать твердость поверхностей контакта.

В условиях трения скольжения наиболее часто встречаются абразивное, водородное, молекулярно-механическое изнашивание, а также фреттинг-коррозия.

Абразивным изнашиванием называют разрушение поверхности детали в результате ее взаимодействия с твердыми частицами при взаимном перемещении с некоторой относительной скоростью. Такой вид повреждения поверхности типичен для деталей транспортных, дорожных, сельскохозяйственных, горных и других машин, работающих в технологических средах, содержащих абразивные частицы.

Абразивное изнашивание является результатом срезания и пластического деформирования шероховатостей твердыми посторонними частицами при относительном перемещении сопряженных поверхностей. Частицы (разрушающие) являются обычно минеральными и имеют неметаллические атомные связи, что и обуславливает сравнительную простоту физических процессов этого вида износа. Отделение частиц износа происходит при однократном или многократном воздействии абразивного тела. В результате износ идет в форме процесса микрорезания либо в виде усталостного повреждения. Для уменьшения абразивного изнашивания снижают уровень абразивного воздействия, повышают поверхностную твердость материалов деталей (заколкой, поверхностным пластическим деформированием и т.п.).

Водородное изнашивание. Такое изнашивание типично для тормозных колодок и барабанов, дисков фрикционных муфт и других деталей. Его основная особенность состоит в том, что выделяемый при трении водород адсорбируется на поверхности трения и при высокой температуре диффундирует в деформируемый слой стальных деталей, вызывая (по мере его накопления) охрупчивание, появление большого числа трещин по всей зоне деформирования и мгновенное образование мелкодисперсного порошка материала.

Для уменьшения и предупреждения водородного изнашивания в узлах трения применяют стали, легированные хромом, титаном, ванадием, менее склонные к новодороживанию; используют смазочные материалы, мало подверженные гидрогенизации; снижают температуру в зоне контакта.

Молекулярно-механическое изнашивание. Такое изнашивание происходит при высоких контактных напряжениях в зоне соприкосновения деталей из однородных материалов и начинается с локального пластического деформирования и разрушения окисных пленок на отдельных участках поверхности контакта, а заканчивается молекулярным сцеплением – контактной сваркой (схватыванием) материала этих участков деталей и последующим разрушением зон сварки при относительном движении.

Процесс развития повреждений трущихся поверхностей деталей вследствие схватывания называют **заеданием**.

Подбором материалов деталей пар трения можно повысить предельное контактное напряжение и стойкость к схватыванию.

Наиболее эффективными средствами предотвращения заедания являются смазочные материалы, а также покрытия, окисные пленки.

Коррозионно-механическое изнашивание. Этот вид изнашивания распространен в машинах и аппаратах, в которых трущиеся детали вступают в химическое взаимодействие со средой, например, воздухом. Разрушение поверхности трения деталей происходит под действием двух одновременно протекающих процессов: коррозии и механического изнашивания.

При вибрациях деталей, контактирующих без смазочного материала, в результате которых происходят небольшие циклические взаимные смещения (от 0.025 до 2.5 мм), хотя бы части поверхности контакта, коррозионно-механическое изнашивание протекает в форме фреттинг-коррозии (от англ. fret – подтачивать). При этом на небольших участках образуются мелкие ямки и продукты коррозии в виде налета, пятен и порошка от светло- до темно-коричневого цвета. Продукты коррозии не удаляются из зоны контакта и превращаются в абразивные частицы.

Для защиты от фреттинг-коррозии используют различные методы поверхностного упрочнения зон контакта; наносят мягкие гальванические покрытия, напыляют тефлоновые и резиновые пленки и т.п.

20.3 Методы оценки износа и триботехнической надежности сопряжения

Износостойкостью называют способность материала детали оказывать сопротивление изнашиванию в определенных условиях трения.

Изменение размеров и формы деталей в результате изнашивания называют **износом**. Его измеряют в единицах длины, объема или массы – оценка износа. Для количественного описания процесса изнашивания и его результата – износа в триботехнике используют ряд параметров:

1. **Интенсивность изнашивания** – отношение оценки износа детали (образца) к пути трения, затраченной работе или технической наработке (в километрах пробега автомобиля, гектарах обработанной земли и т.п.); если в результате изнашивания при суммарном взаимном смещении деталей (пути трения) на величину L с ее поверхности удален слой толщиной h , то интенсивность изнашивания

$$J_h = h / L.$$

2. **Скорость изнашивания (средняя)** – отношение оценки изнашивания ко времени, в течение которого происходит изнашивание.

3. *Предельный износ детали* – оценка износа, после достижения которой дальнейшая эксплуатация невозможна, неэкономична или недопустима по соображениям надежности.

Износостойкость деталей оценивают величиной, обратной интенсивности или скорости изнашивания.

Показателем триботехнической надежности сопряжения принято считать вероятность отказа или достижения показателя износа его предельного значения.

Практически триботехническую надежность пар трения качения (подшипников, передач) производят по допускаемым контактным напряжениям.

Условие контактной прочности имеет вид

$$\sigma_H \leq [\sigma_H].$$

Здесь σ_H – наибольшее действующее контактное напряжение; $[\sigma_H]$ – допускаемое (на основе опыта) контактное напряжение для детали данного типа, изготовленной в определенных условиях.

И хотя это неравенство не дает в явном виде представления о степени надежности детали, оно выражает собой условие предотвращения износных и усталостных отказов в эксплуатации.

При определении величины $[\sigma_H]$ учитывают действительный характер нагрузок, степень ответственности деталей и другие практически важные факторы.

Оценку надежности узлов трения, работающих с малыми скоростями скольжения, выполняют по среднему контактному напряжению при наибольшей ожидаемой нагрузке.

При использовании допускаемых контактных напряжений $[q]$ условие предотвращения износных отказов (заедания, преждевременного износа) – условие триботехнической надежности имеет вид

$$q_{\max} \leq [q].$$

Такая оценка удобна для однотипных конструктивных элементов, и допускаемое контактное напряжение здесь является по существу критерием подобия, отражающим предшествующий опыт проектирования подобных пар трения.

Значение $[q]$ зависит от типа сопряжения, материала контактирующих деталей, условий смазывания, степени ответственности пары и других факторов.

Для предотвращения молекулярно-механического изнашивания условие $q_{\max} \leq [q]$ дополняют ограничением температуры в контакте

$$\theta_K \leq [\theta_K],$$

где $[\theta_K]$ – допускаемая температура в контакте.

Если режим трения пары определяется еще и скоростью скольжения v_c , то в качестве критерия надежности используют удельную мощность трения, расходуемую на преодоление сопротивления в контакте:

$$q f v_c \leq [\omega],$$

где f – коэффициент трения между контактирующими деталями;

v_c – скорость относительного скольжения; $[\omega]$ – допускаемая мощность трения.

В ряде случаев, например, в расчетах подшипников скольжения, принимают $f = \text{const}$ для заданной пары трения и условие надежности задают в форме

$$q v_c \leq [q v_c],$$

где $[q v_c]$ – допускаемое значение произведения $q v_c$.

Этот параметр, как и удельную мощность трения, можно использовать для косвенной оценки теплонапряженности пары трения.

Для повышения триботехнической надежности деталей широко используют конструктивные и технологические методы.

Конструктивные методы предусматривают: замену трения скольжения в узлах трением качения; замену высшего трения внутренним трением упругого элемента, т.е. использование при возможности вместо узла трения скольжения узла, обеспечивающего эквивалентные перемещения за счет упругой деформации одного из элементов (резинометаллические шарниры, например); конструирование сопряжений с минимальной концентрацией нагрузки; защиту пар трения от загрязнений и др.

Технологические методы – обеспечение заданной формы, точности, размеров и качества обработанных поверхностей деталей; повышение твердости поверхностей деталей пар трения.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Кинематический анализ механизмов (методические указания)

При выполнении контрольной работы № 1 необходимо для заданного (в соответствии с вариантом) положения механизма определить расчетно-графическим методом скорости и ускорения точек звеньев, указанных буквами A , B , E , S_1 , S_2 , S_3 (буквами S_i обозначены середины звеньев – центры масс звеньев), а также векторы (модуль и направление) угловых скоростей ускорений звеньев механизма (Угловая скорость ведущего звена 1 задана).

Порядок выполнения работы:

1. На отдельном листе в заданном масштабе длин изображается механизм согласно заданию с указанием на нем всех точек, скорости и ускорения которых подлежат определению. Масштаб длин μ_e выбирается таким, чтобы изображение механизма не было мелким.

2. Рядом с механизмом осуществляется выполнение плана скоростей и ускорений по соответствующим векторным уравнениям с указанием масштабов скоростей μ_v и ускорений μ_a .

Масштабы проще выбрать после изображения на планах произвольной длины λ_A , например, в мм известных значений скорости V_A или ускорения $\bar{a}_A^n$. Точки A ведущего звена механизма.

В этом случае масштабы скорости и ускорения определяются в виде:

$$\mu_v = \frac{|\bar{V}_A| \left[\frac{м}{с} \right]}{\lambda_A \left[мм \right]}, \quad \mu_a = \frac{|\bar{a}_A^n| \left[\frac{м}{с^2} \right]}{\lambda_A \left[мм \right]}.$$

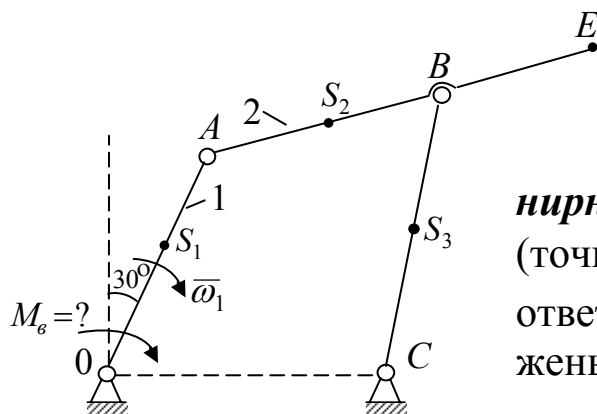
Длины других известных скоростей или ускорений точек звеньев в выбранном масштабе, изображаемых на планах, определяются как частное от деления значения их модулей на соответствующий масштаб (μ_v или μ_a).

3. По построенным планам определяются направления и модули скоростей и ускорений всех точек (B , E , S_1 , S_2 , S_3) звеньев

механизма. Для нахождения модулей векторов скоростей и ускорений длины отрезков в единицах длины масштаба, изображающие скорости и ускорения на планах, умножаются на соответствующий масштаб μ_v или μ_a . Результаты расчета сводятся в таблицы, которые можно разместить рядом с планами скоростей и ускорений.

4. Пример выполнения графической части кинематического анализа двух схем механизма приведен на рис. 1. На всех рисунках буквой «Р» обозначена точка начала плана. Индексы «V» и «a» обозначают начало плана скоростей (P_v) или плана ускорений (P_a). Модули $|P_v a|$ и $|P_a a|$ обозначают длины векторов в единицах длины, соответственно скорость и ускорения точки «A» ведущего звена механизма.

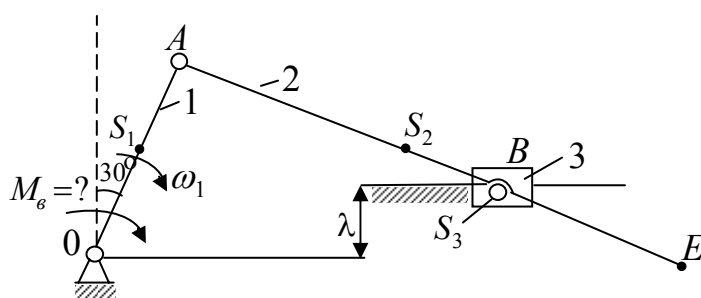
ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ №1, №2



Кинематическая схема шарнирного четырехзвенника

(точки S_1 , S_2 , S_3 — центры масс соответствующих звеньев; расположены в середине каждого звена).

Величина	Варианты (шарнирный четырехзвенник)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
OA , мм	60	58	80	75	100	105	120	125	14	140
OC , мм	120	140	160	200	200	240	245	250	30	300
BC , мм	150	160	200	200	250	230	300	320	34	320
AB , мм	150	180	200	200	250	300	300	360	34	400
BE , мм	150	100	180	150	200	140	180	200	25	200
ω_1 , рад/с	40	30	16	30	28	25	22	20	60	21



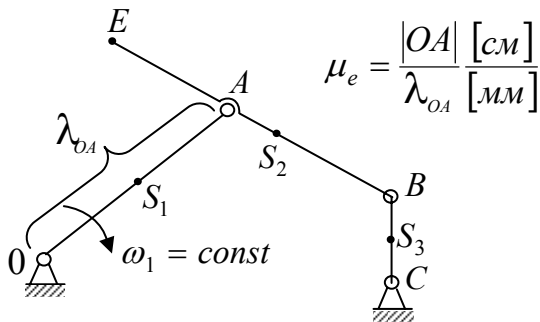
Кинематическая схема кривошипно-ползунного механизма

(точки S_1 , S_2 , S_3 — центры масс соответствующих звеньев; расположены в середине каждого звена)

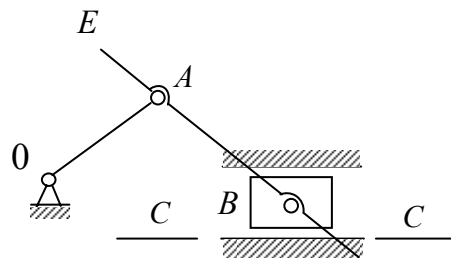
Величина	Варианты (кривошипно-ползунный механизм)									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
OA , мм	65	75	100	120	130	150	170	230	22	24
e , мм	20	35	60	20	30	0	100	80	12	15
AB , мм	200	250	320	300	330	360	500	650	75	86
BE , мм	60	100	150	125	150	140	250	200	20	28
ω_1 , рад/с	28	34	14	25	20	18	12	15	100	30

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

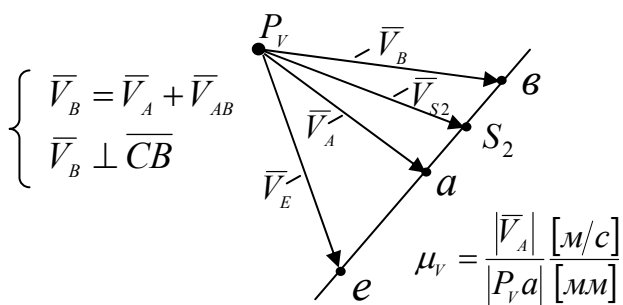
Кинематический анализ (пример выполнения работы)



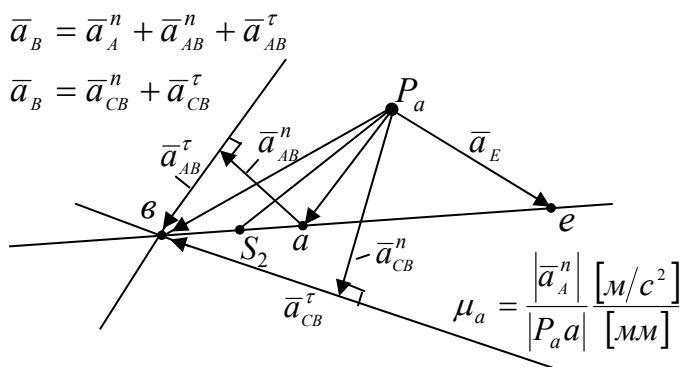
Кинематическая схема
четырёхзвенного механизма
 S_1, S_2, S_3 – центры масс звеньев



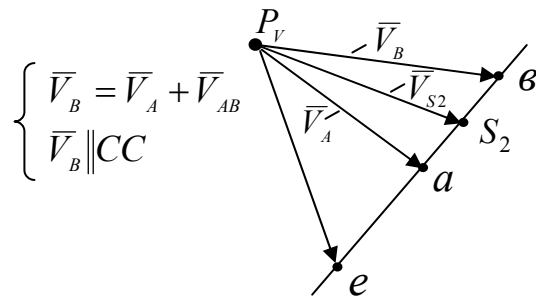
Кинематическая схема
кривошипно-ползунного
механизма



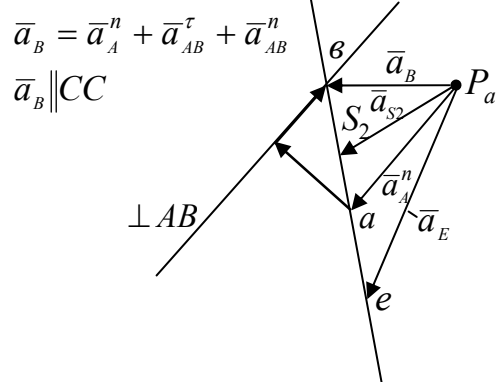
План скоростей



План ускорений



План скоростей



План ускорений

Рисунок 1

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Силовой анализ механизмов (методические указания)

При выполнении контрольной работы №2 необходимо использовать вариант контрольного задания №1 и полученные в ней результаты расчетов ускорений точек звеньев и их угловых скоростей и ускорений.

Задачей силового расчета механизма является определение сил взаимодействия в кинематических парах (точки O , A , B и C (для вариантов 1 – 10)), возникающие вследствие весовых и инерционных нагрузок.

При вычислении инерционных нагрузок (главный вектор сил инерции, главный момент сил инерции) принять массу i -го звена в виде стержня длиной λ , m , равную:

$$m_i = 10 \frac{\text{кг}}{\text{м}} \lambda_i,$$

а массу ползуна (варианты с 11 по 20), равную:

$$m_{\Pi} = 3m_1,$$

где m_1 – масса первого звена (ведущего).

Момент инерции звеньев с длиной λ_i относительно центра масс (точка S_i звена) i -го звена определить по формуле:

$$J_i = \frac{1}{12} m_i \lambda_i^2.$$

Порядок выполнения контрольной работы №2

При определении сил в кинематических парах необходимо изобразить в масштабе длин группу Ассур и первичный механизм в их заданном положении и указать направление всех сил, действующих в каждой точке звеньев, включая силы инерции.

Рядом со схемой группы Ассур и первичного механизма записываются уравнения моментов для определения составляющих реакций в точках «А» и «С» (R_A^r и R_C^r) и внешнего момента ведущего звена M_e . Плечи сил, фигурирующие в уравнениях моментов,

определяются с учетом масштаба непосредственно из чертежа группы Ассура и ведущего звена. Их значения равны длинам перпендикуляров, опущенных из точки «В» (точки «О» для ведущего звена) на линии соответствующих сил, умноженным на масштаб длин μ_e .

Ниже записывается уравнение сил для звеньев группы Ассура и ведущего звена, а также приводится их графическое решение с указанием масштаба сил μ_F .

На плане направления сил должны соответствовать их направлениям на плане группы Ассура или ведущего звена.

После определения масштаба сил (находится аналогично масштабу скоростей и ускорений работы № 1) длины остальных известных по модулю сил определяются как частное от деления их численных значений на масштаб сил μ_F . При определении модулей неизвестных сил с плана сил снимается их длина в соответствующих масштабу μ_F единицах длины и умножается на этот масштаб.

Найденные значения искомых сил, действующих в шарнирах механизма, сводятся в таблицу, которая размещается в «подвале» листа.

Пример выполнения силового анализа приведен на рисунках 2 и 3 для двух схем механизма.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Силовой анализ (пример выполнения работы)

Группа Ассура четырехзвенного механизма

$$\mu_e = \frac{|AB| [см]}{\lambda_{AB} [мм]}.$$

Уравнение моментов для определения вектора $\bar{R}_A^\tau$

$$\sum_{BAE} M_B(\bar{F}, M^U) = 0,$$

$$\sum_{BAE} M_B(\bar{F}, M^U) = R_A^\tau \cdot h_\tau + F_2^U \cdot h_F - G_2 h_\tau + M^U = 0.$$

Уравнения моментов для нахождения $\bar{R}_C^\tau$.

$$\sum_{CB} M_B(\bar{F}, M^U) = 0, \quad \sum_{CB} M_B(\bar{F}, M^U) = R_C^\tau \cdot h_\tau - G_3 h_{G3} + F_3^U \cdot h_F - M_3^U = 0.$$

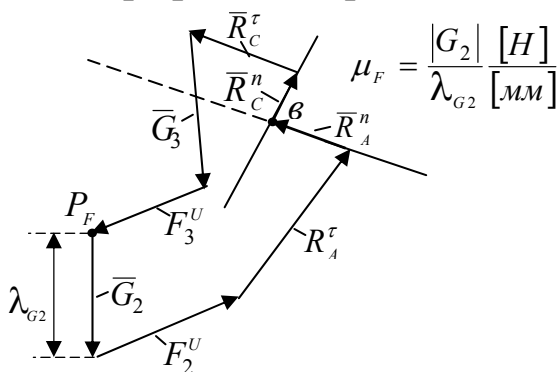
Уравнения сил для определения $\bar{R}_A^n$ и $\bar{R}_C^n$

$$\sum_{CB AE} \bar{F} = 0;$$

$$\sum \bar{F} = \bar{R}_A^n + \bar{R}_A^\tau + F_2^U +$$

$$\bar{G}_2 + \bar{G}_3 + \bar{F}_3^U + \bar{R}_C^n + \bar{R}_C^\tau = 0.$$

Графическое решение

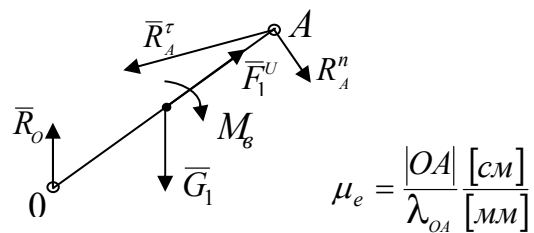


Линия соединяющая точки b и P_F – модуль вектора силы взаимодействия звеньев в шарнире «B»

Уравнение моментов для определения внешней силы, приложенной к ведущему звену «OA».

$$\sum_{OA} M_o(\bar{F}) = 0.$$

$$\sum M_o(\bar{F}) = G_1 \cdot h_G + M_6 + R_A^n \cdot h_{Rn} - \bar{R}_A^\tau \cdot h_{R\tau} = 0.$$



Уравнение сил

$$\sum \bar{F} = 0,$$

$$\sum \bar{F} = \bar{G}_1 + \bar{R}_A^\tau + \bar{R}_A^n + \bar{F}_1^U + \bar{R}_O = 0.$$

Графическое решение

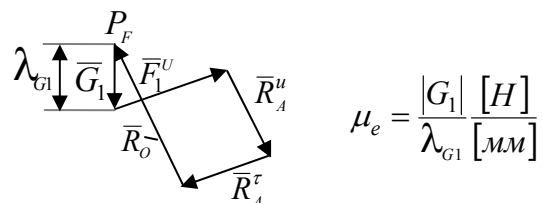
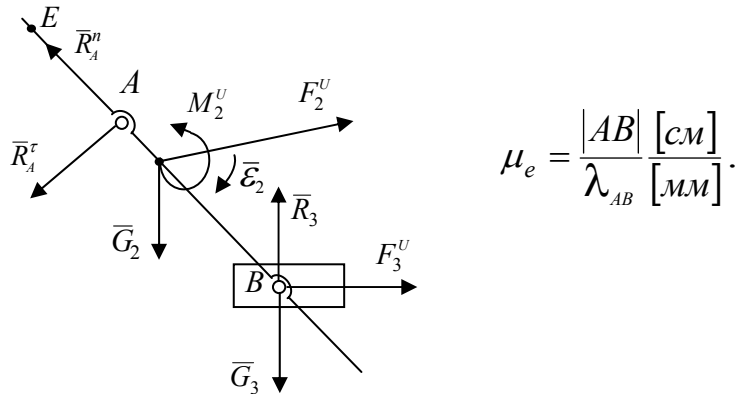


Рисунок 2

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Силовой анализ (пример выполнения работы)

Группа Ассура кривошипно-ползунного механизма



Уравнение моментов для нахождения $\bar{R}_A^\tau$:

$$\sum_{BAE} M_B(\bar{F}, M^U) = 0,$$

$$\sum_{BAE} M_B(\bar{F}, M^U) = R_A^\tau \cdot h_\tau + G_2 \cdot h_G + M_2^U - F_2^U \cdot h_F = 0.$$

Уравнение сил для нахождения $\bar{R}_A^n$ и $\bar{R}_3$:

$$\sum_{BAE} \bar{F} = 0,$$

$$\sum_{BAE} \bar{F} = \bar{R}_A^n + \bar{R}_A^\tau + \bar{G}_2 + \bar{F}_2^U + \bar{G}_3 + \bar{F}_3^U + \bar{R}_3 = 0.$$

Графическое решение уравнения сил:

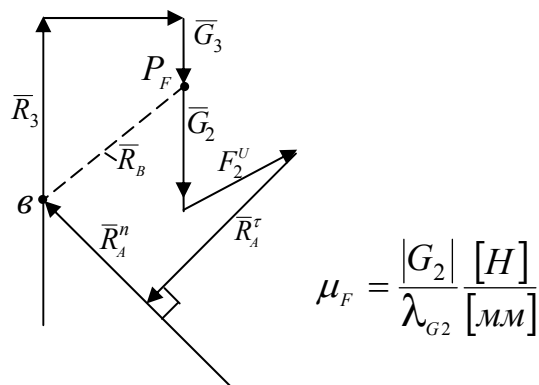


Рисунок 3

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

1 Деформация растяжение (сжатие) прямого бруса (стержня)

1.1 Основные формулы

При растяжении (сжатии) прямого стержня в его поперечных сечениях (сечения перпендикулярные его оси) возникают только нормальные напряжения, определяемые по формуле

$$\sigma = N/A,$$

где σ – нормальное напряжение;

A – площадь поперечного сечения.

Нормальная сила N (внутренняя сила) определяется из условия равновесия рассматриваемой части бруса, на которую действуют внешние силы F_i (i – число сил)

$$N + \sum F_i = 0.$$

Условие прочности бруса запишется в этом случае в виде

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение при растяжении (сжатии).

Последнее условие служит для определения требуемого сечения A :

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]},$$

либо требуемой допустимой силы

$$N \leq A[\sigma].$$

В последнем случае сечение A стержня известно.

2 Практические расчеты на срез и смятие

2.1 Расчеты на срез

Практические расчеты деталей на срез основываются на следующих основных допущениях:

1. В поперечном сечении возникает только один внутренний силовой фактор – поперечная сила Q .

2. Касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении, распределены по его площади равномерно.

В случае если соединение осуществлено несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и т.п.) принимается, что все они нагружены одинаково.

На основе сформулированных допущений получаем следующее условие прочности:

$$\tau_{cp} = Q / A_{cp} \leq [\tau_{cp}],$$

где τ_{cp} – расчетное напряжение среза, возникающее в поперечном сечении рассматриваемой детали;

A_{cp} – площадь среза одного болта, заклепки и т.п.

$[\tau_{cp}]$ – допускаемое напряжение на срез.

При нескольких одинаковых соединительных деталях $Q = F/i$ (F – общая нагрузка соединения, i – число болтов, заклепок и т.п.).

2.2 Расчеты на смятие

При расчетах на смятие предполагается, что силы взаимодействия между деталями равномерно распределены по поверхности контакта и во всех точках нормальны к этой поверхности.

Условие прочности при этом имеет вид:

$$\sigma_{cm} = F / (iA_{cm}) \leq [\sigma_{cm}].$$

Здесь F/i – нагрузка на одну соединительную деталь;

A_{cm} – расчетная площадь смятия;

$[\sigma_{см}]$ – допустимое напряжение смятия.

За расчетную площадь смятия при контакте по цилиндрической поверхности принимают площадь проекции поверхности контакта на диаметральную плоскость $A_{см} = d\delta$ (δ – длина контакта).

2.3 Пример решения задачи на срез и смятие

Зубчатое колесо 1 соединено с валом 2 штифтом диаметром d .

Определить наибольший вращающий момент T , который может передать колесо валу 2 без среза штифта. Из условия равнопрочности на срез и смятие определить высоту δ соединительной части зубчатого колеса (рис. 1).

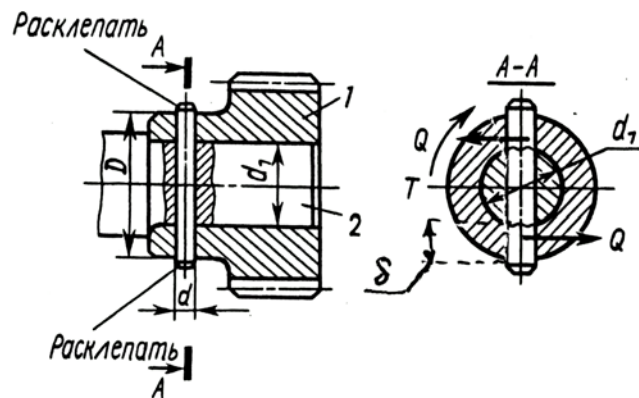


Рис. 1

Решение.

Вращающий момент от колеса к валу передается парой сил Q , действующих в сечениях штифта

$$Q = T/d_1.$$

Эта сила представляет собой результирующую касательных напряжений в сечении

$$Q = \tau A,$$

где A – площадь поперечного сечения штифта.

Условие прочности штифта запишется в виде

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{4T}{d_1 \pi d^2} \leq [\tau_{cp}],$$

откуда

$$T = 0.25 \pi d^2 d_1 [\tau_{cp}].$$

Условие прочности на смятие

$$\sigma_{см} = \frac{Q}{A_{см}} = \frac{Q}{d \cdot \delta} = \frac{T}{d_1 d \cdot \delta} \leq [\sigma_{см}],$$

откуда

$$T = d_1 d \delta [\sigma_{см}].$$

Приравнивая значения момента T , полученных из условия прочности на срез и смятие получим:

$$\delta = 0.25 \pi d \frac{[\tau_{cp}]}{[\sigma_{см}]}.$$

Принимая $[\tau_{cp}] = 80$ Мпа, а $[\sigma_{см}] = 200$ Мпа, получим

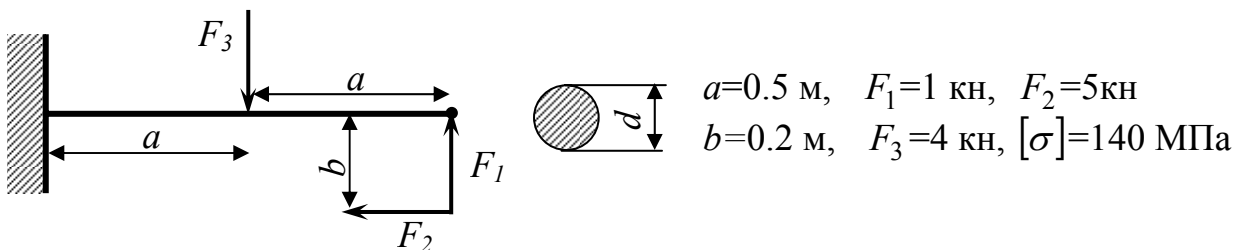
$$\delta = \pi d ,$$

т.е. высота соединительной части зубчатого колеса должна быть примерно втрое больше диаметра штифта.

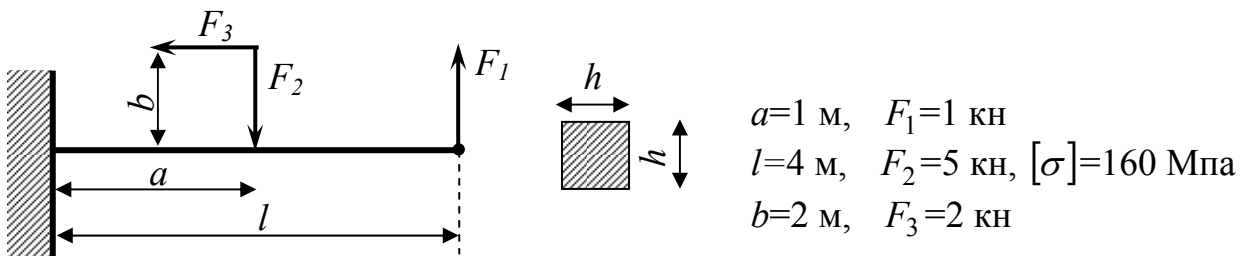
ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3

Балка из пластичного материала, указанного поперечного сечения, нагружена силами так, как это показано на рисунке. По заданным параметрам сил и расстояний, а также допустимого напряжения $[\sigma]$ определить, исходя из условия прочности, требуемый размер поперечного сечения.

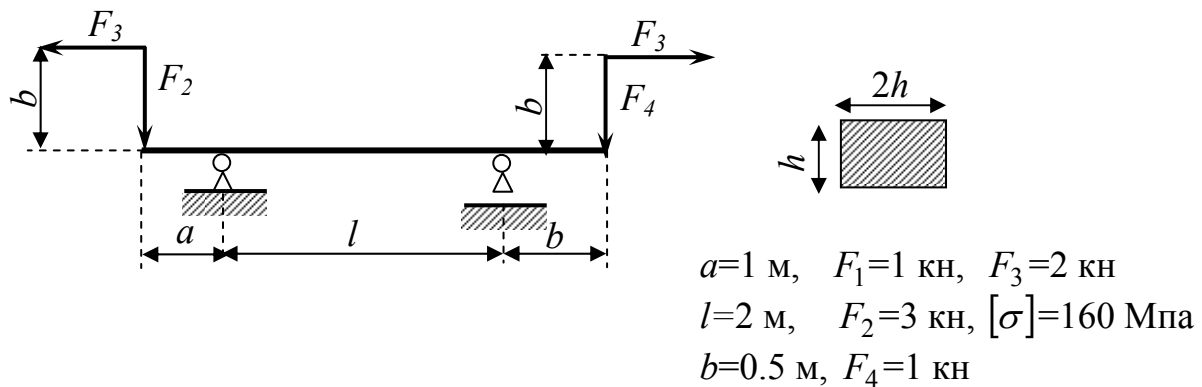
Вариант 1

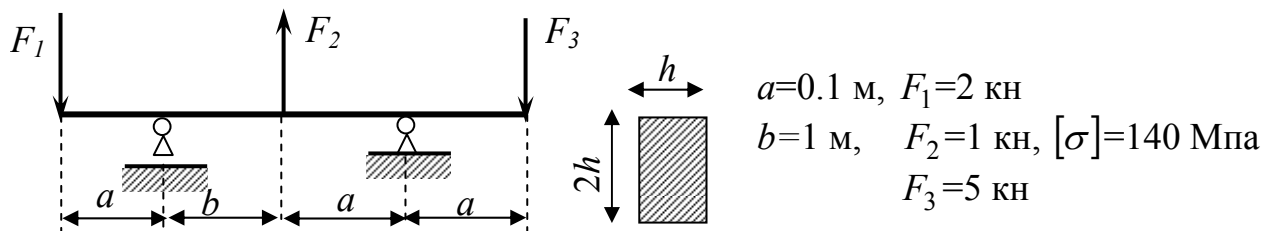
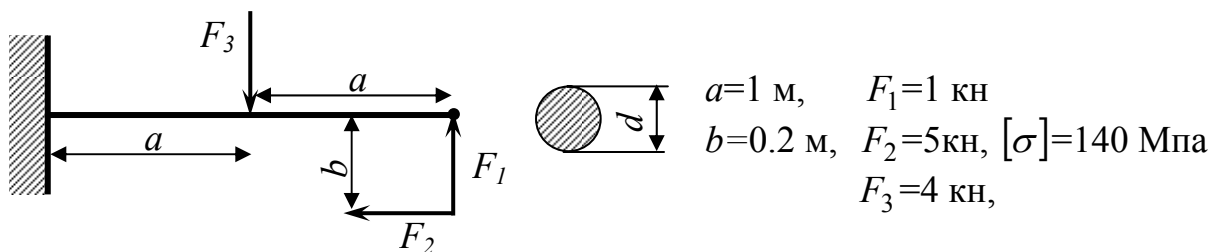
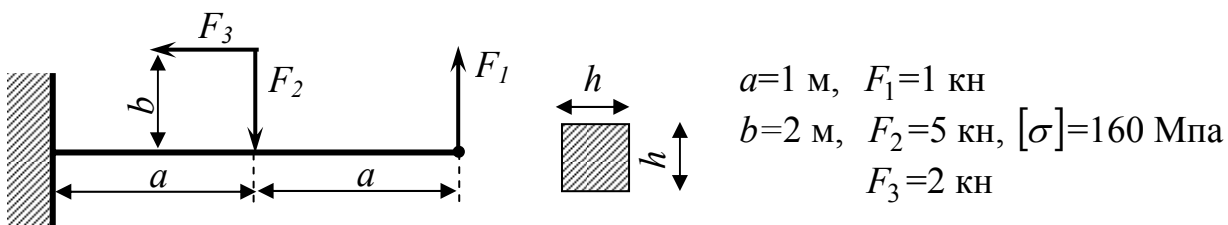
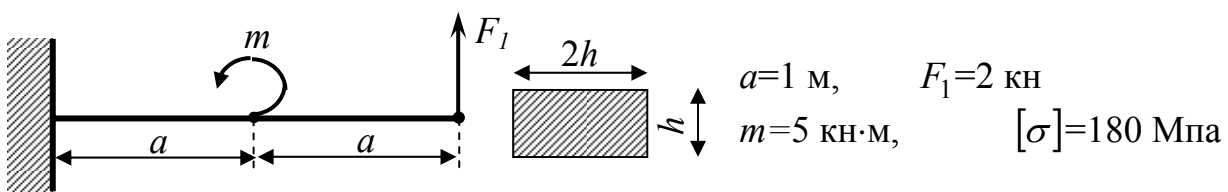


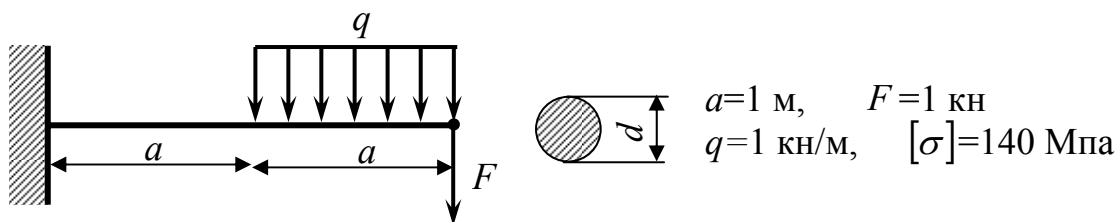
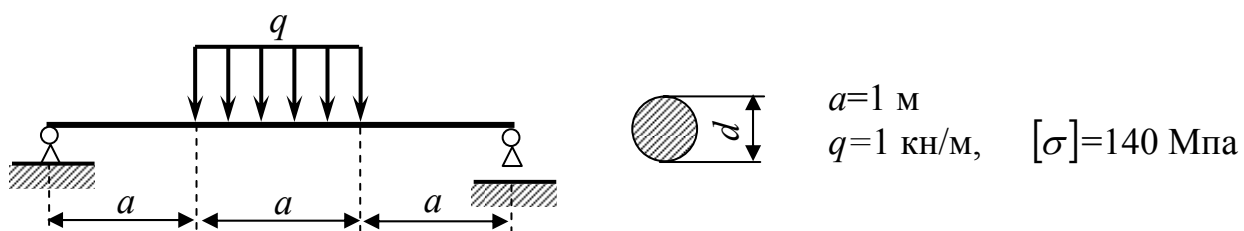
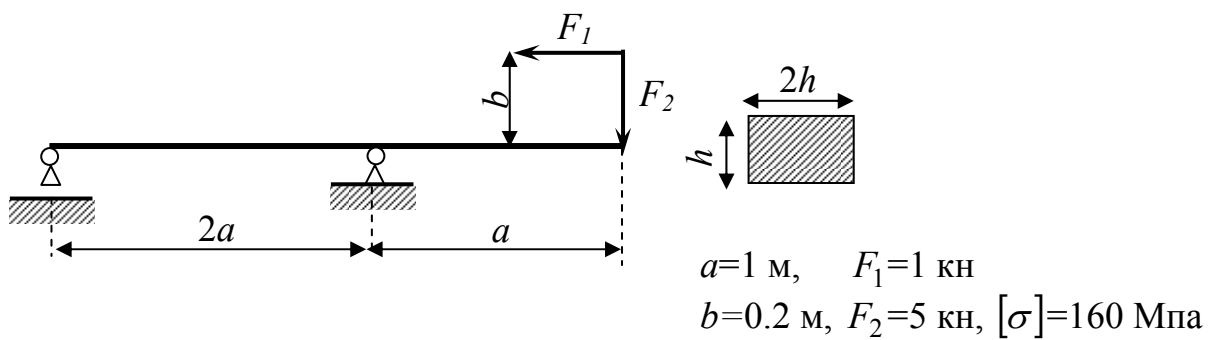
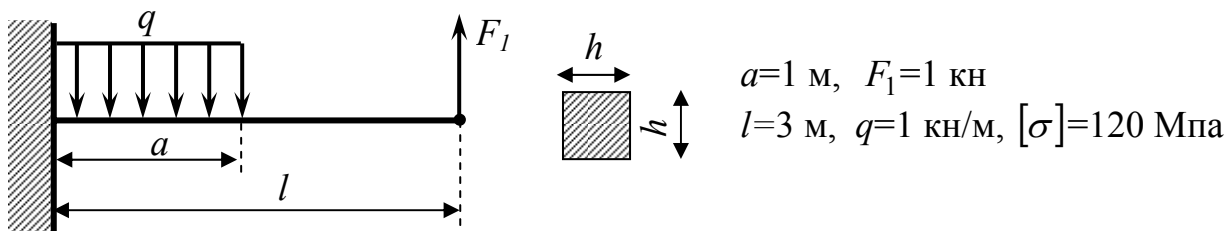
Вариант 2



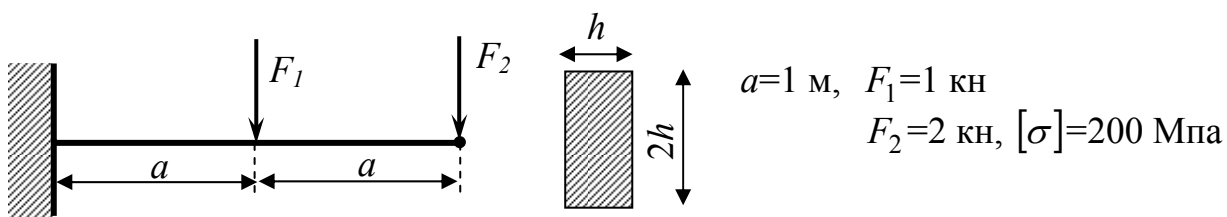
Вариант 3



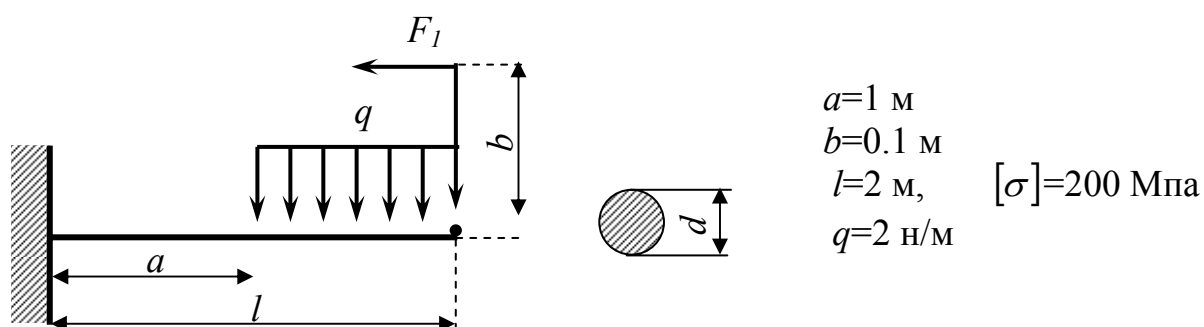
Вариант 4**Вариант 5****Вариант 6****Вариант 7**

Вариант 8**Вариант 9****Вариант 10****Вариант 11**

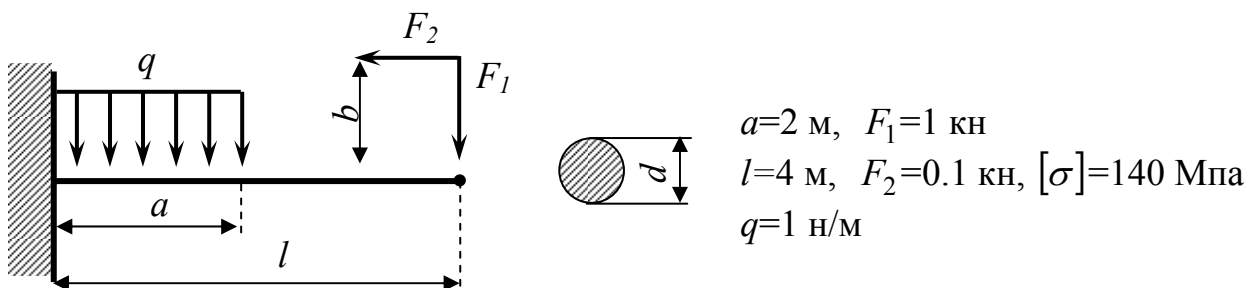
Вариант 12



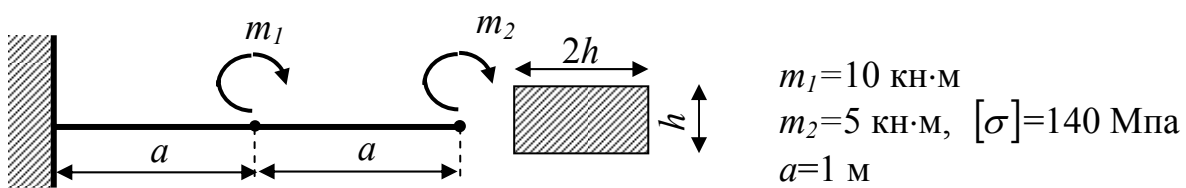
Вариант 13

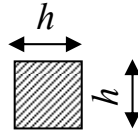
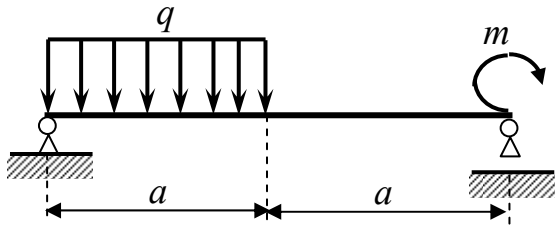


Вариант 14



Вариант 15

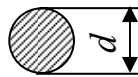
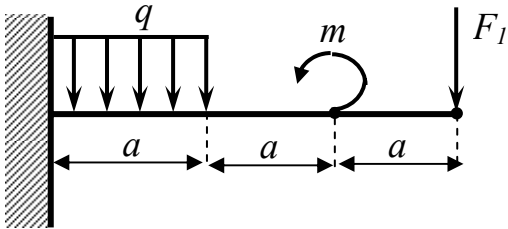


Вариант 16

$$a=1 \text{ м}$$

$$q=1 \text{ кН/м}, \quad [\sigma]=240 \text{ МПа}$$

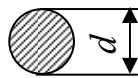
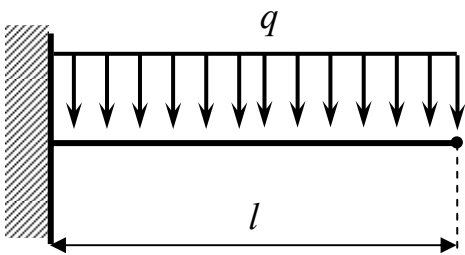
$$m=5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Вариант 17

$$a=1 \text{ м}, \quad m=2 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

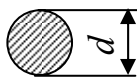
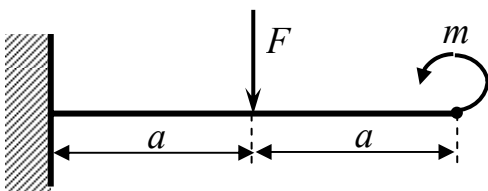
$$F_1=1 \text{ кН}$$

$$q=1 \text{ кН/м}, \quad [\sigma]=160 \text{ МПа}$$

Вариант 18

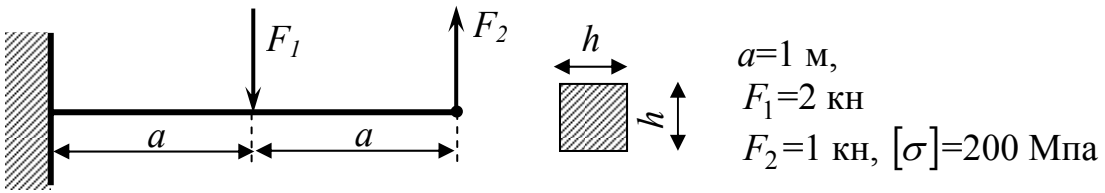
$$l=2 \text{ м}, \quad [\sigma]=160 \text{ МПа}$$

$$q=1 \text{ н/м}$$

Вариант 19

$$a=1 \text{ м}, \quad F=1 \text{ кН}$$

$$m=2 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad [\sigma]=200 \text{ МПа}$$

Вариант 20

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

1 Деформация прямого изгиба

При деформации прямого изгиба условие прочности записывается в виде

$$\sigma_m = \left(\frac{M_x}{J_x} \right) Y_m \leq [\sigma],$$

где σ_m – наибольшее расчетное напряжение в сечении бруса;

J_x – момент инерции сечения бруса относительно оси X (следа нейтрального слоя – нулевая линия);

M_x – изгибающий момент в сечении относительно оси X ;

Y_m – координата точек, где достигается наибольшее напряжение в сечении (отсчитывается от оси X);

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение при растяжении ($[\sigma_p]$), или сжатии ($[\sigma_c]$).

Для симметричных относительно оси X сечений

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_x}{W_x},$$

где $W_x = \left(\frac{J_x}{h/2} \right)$ – момент сопротивления при изгибе.

Для сложных симметричных сечений (например, круг в квадрате – ■)

$$W_x = \frac{J_{x1} - J_{x2}}{h/2},$$

где J_{x1} – момент инерции большего сечения;

J_{x2} – момент инерции меньшего сечения;

h – высота большего сечения.

Моменты инерции некоторых сечений:

а) круг – $J_x = \frac{\pi d^4}{64}$;

б) кольцо – $J_x = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4)$, где $c = \frac{d_0}{d}$; $d > d_0$;

в) прямоугольник с высотой h – $J_x = \frac{bh^3}{12}$.

Для определения опасного сечения, где достигается наибольшее значение $\sigma_{\max}$, строятся эпюра изгибающего момента – зависимость изгибающего момента от длины балки. По этой эпюре находят сечение, где достигается наибольший изгибающий момент. Найденный таким образом изгибающий момент подставляется в формулу для максимального расчетного напряжения.

Для пластичных материалов составляется одно уравнение прочности, а для хрупких два (условие прочности на растяжение и условие прочности на сжатие).

2 Пример решения задачи на изгиб

Балка из пластичного материала, указанного поперечного сечения, нагружена силами так, как это показано на рис. 1.

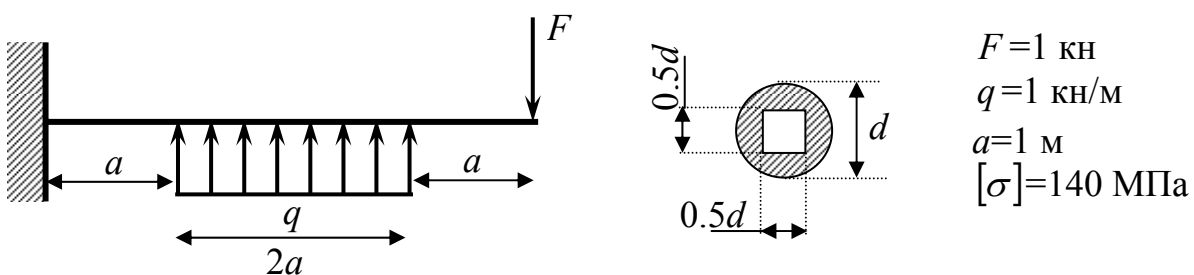


Рис. 1

Определить, исходя из условия прочностной надежности, требуемые размеры поперечного сечения.

Решение.

Решение задачи разбивается на три этапа:

1. Определение реакций опор.

2. Построение эпюры изгибающих моментов.
3. Определение размера поперечного сечения из условия прочности.

2.1 Определение реакций опор

Схема нагружения балки заменяется ее моделью, в которой действующие на балку связи заменяются силами (рис. 2).

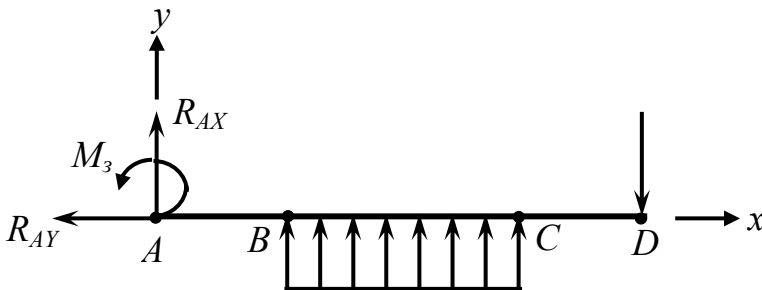


Рис. 2

Здесь жесткая заделка заменена тремя реакциями – реакцией связи, разложенной на две составляющие вдоль оси балки и ей перпендикулярной и

момента заделки.

Для их определения составляется три уравнения:

$$\sum Y = 0, \quad X = 0, \quad \sum M_A = 0,$$

где Y , X – силы, действующие вдоль соответствующих осей;

M_A – моменты сил и пар сил относительно произвольно выбранной точки (в данном случае точки A).

Конкретные значения этих сумм равны:

$$\sum Y = R_{AY} + 2aq - F_1 = 0;$$

$$\sum X = 0; \quad \sum M_A = M_3 + (q \cdot 2a)(a + a) - F_1 \cdot 4a = 0.$$

Здесь $(q \cdot 2a)$ – равнодействующая распределенной нагрузки, приложенная в центре действующей нагрузки.

Решая эти уравнения относительно неизвестных, получим

$$R_{AY} = -1, \quad R_{AX} = 0, \quad M_3 = 0.$$

Во избежания ошибок желательно направление действия реакции R_{AY} поменять на противоположное, а само значение R_{AY} считать положительным.

2.2 Построение эпюры изгибающих моментов

Для определения зависимости изгибающего момента от расстояния x вдоль оси балки, разобьем балку на три участка – AB , BC и CD .

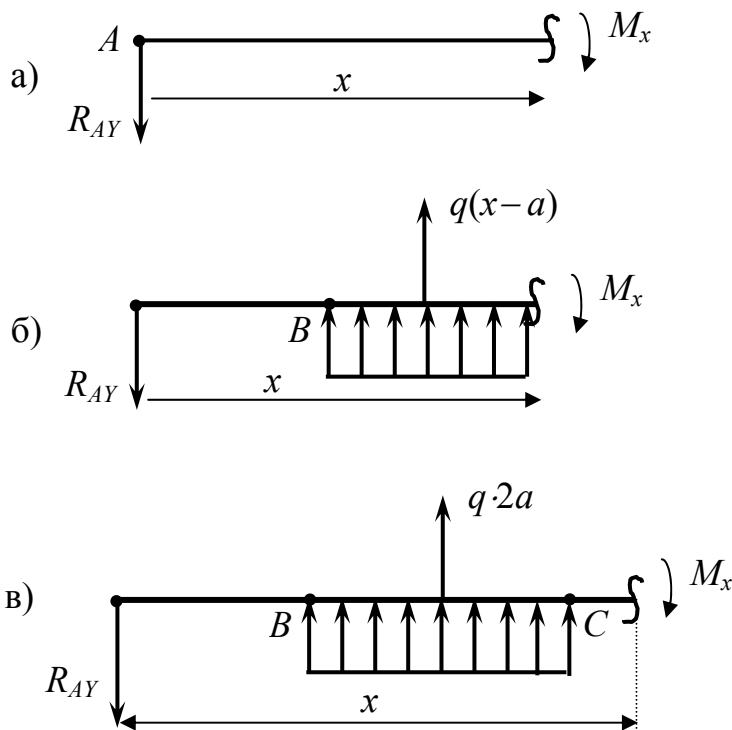


Рис. 3

Для каждого участка определим зависимость изгибающего момента от переменной величины x . Определим эту зависимость на участке AB . Для этого возьмем произвольное сечение на этом участке. Расстояние от точки A до этого сечения обозначим через x . Изгибающий момент в этом сечении равен сумме моментов всех сил и пар сил, действующих на рассматриваемую часть балки

$$M_{xAB} = -R_{AY} \cdot x, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Знак минус взят в соответствии с правилом знака для момента (сила изгибает балку относительно мысленно закрепленного сечения выпуклостью вверх) (рис. 3,а).

Для сечения на участке BC для M_x получим (заменяя распределенную нагрузку силой $q(x-a)$ (рис. 3,б)

$$M_{xBC} = -R_{AY} \cdot x + q(x-a) \cdot \frac{(x-a)}{2}, \quad a \leq x \leq 3a.$$

Для сечения на участке CD имеем (рис. 3,в)

$$M_{XBD} = -R_{AY} \cdot x + q \cdot 2a(x - 2a), \quad 2a \leq x \leq 4a.$$

Для построения эпюры проводим ось бруса с обозначенными на ней точек A , B , C и D .

Для каждого участка строим свою кривую зависимости $M_x(x)$. При этом вверх от оси откладываем положительные значения момента, вниз – отрицательные. Вся зависимость $M(x)$, построенная таким образом, показана на рис. 4.

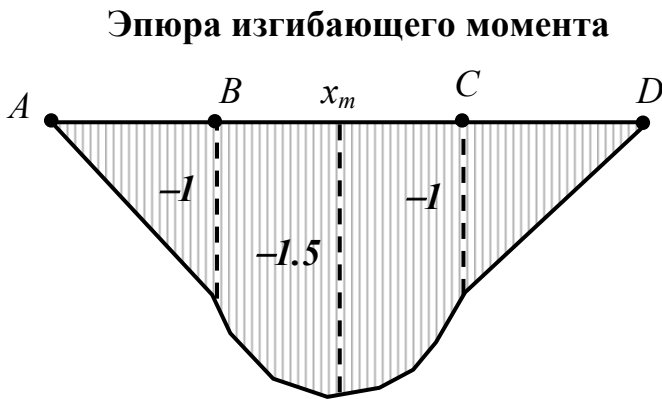


Рис. 4

На участке A имеем линейную зависимость с отрицательным углом наклона. Строим прямую по двум точкам: $x = 0$; $x = a$.

Такая же зависимость имеет место на участке CD , где прямая имеет положительный наклон.

На участке BC зависимость $M(x)$ имеет вид квадратичной параболы. Вторая производная $M''(x) > 0$, следовательно, кривая выпукла вниз. Для определения минимума определяем x_{m1} приравняв $M'(x) = 0$:

$$M'_{XBC} = -R_{AY} + q(x - a) = 0 \rightarrow x_m = 2.$$

Подсчитываем значение $M_{XBC}(2)$. В результате получаем $M_{XBC}(2) = -1.5$.

Строим параболу по трем точкам $x = a$, $x = 3a$ и $x = 2a$. Наибольшее значение изгибающего момента имеет место в сечении $x = 2a$ и равно -1.5 кН·м.

2.3 Определение размера поперечного сечения

1. Подсчитываем значение момента сопротивления сложного сечения

$$W_x = \frac{J_{\bigcirc} - J_{\square}}{d/2}.$$

Здесь $J_{\bigcirc} = \frac{\pi d^4}{64}$ – момент инерции сечения круга;

$$J_{\square} = \frac{bh^3}{6} = \frac{h^4}{6} = \frac{(a5d)^4}{6} \text{ – момент инерции квадрата.}$$

Подставляя эти значения в формулу W_{x1} , получим $W_x = 0.077d^3$.

2. Записываем условие прочности

$$\frac{M_x}{W_x} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{0,077d^3 \text{ м}^3} \leq [\sigma],$$

откуда при $[\sigma] = 140 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$, получим

$$d = 0,052 \text{ м.}$$

2.4 Примечание 1

В некоторых задачах приводятся нагружающие силы, отстоящие на некотором расстоянии « b » от балки (рис. 5,а). В этом случае при переходе от реальной конструкции нагружения к расчетной модели необходимо привести эти силы к оси балки. Способ приведения силы F_3 к оси балки приведен на рис. 5,б и 5,в. Сначала в точке C на оси балки добавляем систему двух сил (уравновешенная система), равных по величине силе F_2 и противоположных по направлению (рис. 5,б). Полученную систему трех сил заменяем одной силой, направленной вдоль оси бруса и парой сил с моментом $M_c = F_2 \cdot b$, направленной в сторону действия силы приводимой силы F_2 . Полученная таким образом расчетная схема приведена на рис. 5,в.

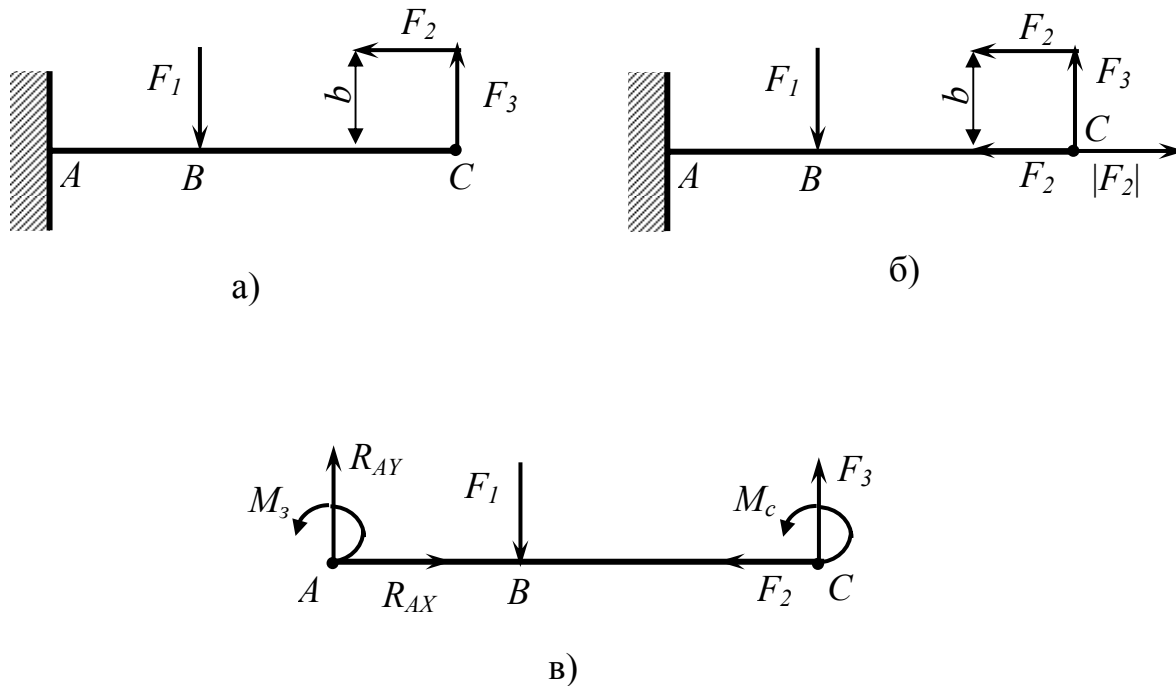


Рис. 5

2.5 Примечание 2

При решении задачи, как правило, студенты допускают ошибки при нахождении реакций опор, что приводит к неправильным результатам при построении эпюр. Чтобы избежать этого, после нахождения реакций заделок (опор) необходимо составить второе уравнение моментов относительно другой любой точки балки. Если сумма моментов с учетом найденных величин также как и в первом случае оказывается равным нулю, то найденные реакции определены верно. В противном случае необходимо искать ошибку в составленных уравнениях, включая проверочное уравнение моментов.

В процессе составления уравнений $M(x)$ необходимо также контролировать получаемый результат. Если на конце балки момент отсутствует, то уравнение моментов, составленное для последнего участка должно определить момент на конце балки равным нулю или равным моменту на конце балки, если такой имеет место.

Только после такого контроля необходимо приступить к определению требуемого размера сечения балки.

2.6 Примечание 3

При вычислениях в лабораторной работе №1 необходимо сохранять в каждом числе не меньше четырех значащих цифр после запятой, а окончательное значение округлять до трех значащих цифр после запятой.

В лабораторной работе №2 после запятой в каждом числе необходимо сохранять не меньше двух значащих цифр, а окончательный результат округлять до одной значащей цифры после запятой.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №4

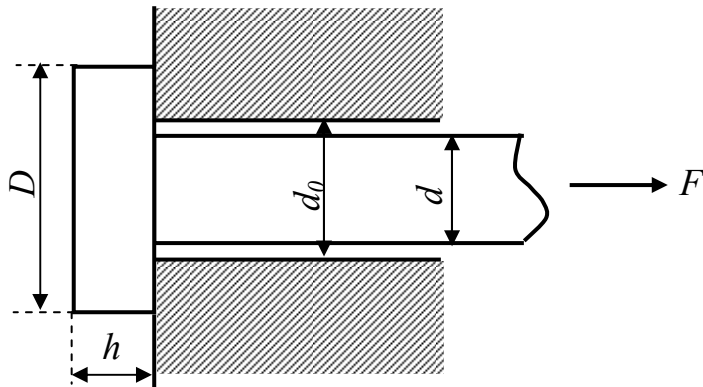


Рис. 1

Определить диаметр головки D и высоту h головки стрежня, нагруженного силой F (рис.1).

Расчет выполнить из условия прочности стрежня на растяжение, головки на срез и ее опорной поверхности на смятие.

Допустимые напряжения:

на растяжение – $[\sigma_p] = 140$ МПа;

на срез – $[\tau_{cp}] = 100$ МПа;

на смятие – $[\sigma_{cm}] = 250$ МПа.

Ответ по D округлить до целого числа.

Размер, мм	Вариант																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d	15	17	19	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52
d_0	13	15	17	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория механизмов и машин: Учебник для втузов / К.В. Фролов, С.А. Попов и др. – М.: Высш. шк., 1987.
2. Прикладная механика: Учебник для втузов / Г.Б. Иосилевич и др. – М.: Высш. шк., 1989.
3. Техническая механика: Учебник для машиностроит. спец. техникумов / А.И. Аркуша и др. – М.: Высш. шк., 1983.
4. Прикладная механика: Учебник для втузов / К.И. Заблонский и др. – К.: Вища шк., 1984.
5. Механизмы приборных и вычислительных систем: Учеб. пособие для приборостроит. спец. вузов / В.Д. Ванторин – М.: Высш. шк., 1985.
6. Расчет и конструирование механизмов приборов и установок: Учеб. пособие для инженерно-физических и приборостроительных специальностей вузов / Ю.В. Милосердин и др. – М.: Машиностроение, 1985.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Проблемы теории механизмов и машин	3
2 Строение механизмов	10
2.1 Структура механизмов	10
3 Структурный анализ и синтез плоских механизмов	16
3.1 Классификация механизмов	19
4 Кинематический анализ механизмов	23
4.1 Графический метод кинематического анализа механизма..	24
4.2 Аналитический метод кинематического анализа	33
5 Силовой анализ механизма	37
5.1 Силы, действующие в кинетических парах, и способ их определения	37
5.2 Силы взаимодействия в кинетических парах. Статическая определимость механизма	39
5.3 Порядок проведения силового анализа	42
6 Динамическая модель плоского механизма	48
6.1 Уравнение движения механизма	53
7 Основные модели прочностной надежности элементов конструкций	57
7.1 Модель нагружения	59
7.2 Внутренние силы	61
8 Напряжения и деформации в точке	66
8.1 Перемещения и деформации	68
8.2 Линейная деформация	69
8.3 Угловая деформация	69
8.4 Закон Гука	70
8.5 Коэффициент Пуассона	71
8.6 Закон Гука при сдвиге	72
9 Растяжение и сжатие	73
9.1 Пример расчета напряжений в сечениях стержня	77
9.2 Потенциальная энергия деформации	79
9.3 Напряженное состояние при деформации растяжения (сжатия)	81
10 Механические свойства конструкционных материалов и способы их определения	85
10.1 Испытание материалов при растяжении	85

10.2	Характеристики прочности материала	86
10.3	Испытания на сжатие	88
10.4	Твердость материала	91
10.5	Пластичность	92
10.6	Определение динамических характеристик	93
10.7	Сопротивление усталости	93
11	Статически неопределимые системы	96
11.1	Начальные (монтажные) напряжения в статически неопределимых системах	101
11.2	Метод сил	103
12	Деформация сдвига и кручения	106
12.1	Деформация кручения	108
12.2	Потенциальная энергия при кручении	113
13	Деформация изгиба	115
13.1	Опоры и опорные реакции. Внутренние силовые факторы. Эпюры внутренних сил	115
14	Напряжения в балке при изгибе	123
15	Расчеты на прочность при однородных деформациях (растяжение, сдвиг, кручение, чистый изгиб)	132
15.1	Примеры расчета бруса на прочность	136
15.2	Чистый сдвиг	137
15.3	Расчеты на прочность и жесткость при кручении	142
15.4	Расчеты на прочность при изгибе	145
16	Основные теории напряжений. Напряженное состояние в точке	151
16.1	Обобщенный закон Гука	158
17	Теории прочности	160
18	Расчеты бруса круглого поперечного сечения при изгибе с кручением	167
18.1	Сложное сопротивление	172
19	Расчеты на усталость	176
19.1	Основные понятия об усталости	176
19.2	Основные характеристики цикла	177
19.3	Предел выносливости	179
19.4	Факторы, влияющие на предел выносливости	183
19.4.1	Концентрация напряжений в элементах конструкций	183

20 Основы триботехники сопряжений элементов конструкций...	188
20.1 Элементы механики пар трения (сопряжения).....	191
20.2 Виды изнашивания	194
20.3 Методы оценки износа и триботехнической надежности сопряжения	198
Контрольная работа №1	201
Варианты контрольной работы №1, №2.....	203
Контрольная работа №2.....	205
Контрольная работа №3.....	209
Варианты контрольной работы №3.....	213
Контрольная работа №4.....	219
Варианты контрольной работы №4.....	227
Литература	228